

José Jorge Nader

BC

FD-1490

**MODELOS
ELASTO-PLÁSTICOS
PARA SOLOS**

**O CAM-CLAY
E SUA APLICAÇÃO A DIFERENTES
TRAJETÓRIAS DE TENSÃO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título de Mestre em Engenharia
São Paulo, 1993

José Jorge Nader

Engenheiro Civil, Escola Politécnica da USP, 1987

**MODELOS
ELASTO-PLÁSTICOS
PARA SOLOS**

**O CAM-CLAY
E SUA APLICAÇÃO A DIFERENTES
TRAJETÓRIAS DE TENSÃO**

Orientador:

Prof. Dr. Carlos de Sousa Pinto

Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da USP
para a obtenção do título de Mestre em Engenharia
São Paulo, 1993

Dedicado a meus pais.

Diversas pessoas contribuíram para a execução deste trabalho. Àquelas que participaram mais intensamente gostaria de agradecer de forma especial.

Tive a oportunidade de trabalhar sob a orientação do prof. Carlos de Sousa Pinto, com quem pude aprender diariamente não apenas Mecânica dos Solos. Sua atenção ininterrupta e seu auxílio em todos os aspectos do trabalho foram fundamentais.

Acompanhando o Joaquim Costa Júnior no comando dos ensaios de laboratório, pude aprender algo das técnicas de ensaio. A ele e ao Antônio Carlos Heitzmann sou muito agradecido pela dedicação, disposição (quantos ensaios foram repetidos) e pelo esmero.

Na utilização de programas de computador, tanto de cálculo como, e principalmente, de edição do texto e impressão, contei com apoio e socorro incansáveis do colega Mário Eduardo Senatore Soares.

Da Márcia, que acompanhou o trabalho bem de perto, recebi a ajuda carinhosa. Dividi com ela os trabalhos de datilografia, revisão do texto e impressão. São seus os desenhos e a finalização da montagem do texto. Seu auxílio permitiu que eu me dedicasse a aprimorar vários pontos da dissertação.

Também foram fundamentais as sugestões e os ensinamentos de outros professores do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, que consultei principalmente fora das salas de aula.

Resta mencionar o convívio alegre com meu irmão e meus pais e seu apoio constante.

RESUMO

RESUMO

ABSTRACT

Soil deformation is today a subject of intense research all over the world, motivated by the necessities of the geotechnical engineering. This work, which approaches the theme in both theoretical and experimental aspects, reviews the elastoplastic constitutive relations and the Cam-Clay model, and examines the behaviour of a remoulded silty soil when subjected to different stress paths.

Following a brief exposition of some basic Continuum Mechanics concepts, the elastic and elastoplastic constitutive equations are presented in a general form, which serve as a basis for several soil models.

After a discussion about soil behaviour and its representation by models, the Cam-Clay mathematical formulation is presented in an unusual form: it begins with the general elastoplastic constitutive equations, the elastic stress-strain relation, the yield function and the hardening law being given. The plastic stress-strain relation is deduced.

In the experimental part the behaviour of a remoulded silty soil from the Escola Politécnica Foundations Experimental Field is investigated. Oedometric, isotropic and triaxial compression tests (that were performed as part of the research) are described and analysed. Among them the triaxial tests with different stress paths after isotropic consolidation constitute the principal subject of analysis.

Finally the Cam-Clay equations are integrated along the tests stress paths and the experimental and theoretical results are confronted. The conclusion is that the model behaves better in stress paths where there is no octahedral stress reduction, although even then it predicts exaggerated volumetric strains. In its turn, in stress paths where there is an octahedral stress reduction the difference between predicted and observed behaviour is large, revealing that the model should not be applied in such cases.

LISTA DOS SÍMBOLOS MAIS FREQUENTES

- \mathbf{A}_0 : parte anti-esférica de um tensor \mathbf{A} ($\mathbf{A}_0 = \mathbf{A} - (\text{tr}\mathbf{A}/3)\mathbf{1}$).
- \mathbf{A}^T : tensor \mathbf{A} transposto.
- $\text{tr}\mathbf{A}$: traço do tensor \mathbf{A} .
- $\mathbf{A} : \mathbf{B}$: produto interno dos tensores \mathbf{A} e \mathbf{B} ($\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T\mathbf{B})$).
- \mathbf{B} : tensor de deformação de Cauchy-Green esquerdo.
- \mathbf{C} : tensor de deformação de Cauchy-Green direito.
- \mathbf{D} : taxa de deformação.
- \mathbf{D}^e : taxa de deformação elástica.
- \mathbf{D}^p : taxa de deformação plástica.
- D_a : taxa de deformação axial.
- D_r : taxa de deformação radial.
- e : índice de vazios.
- \mathbf{E} : tensor de deformação infinitesimal.
- $f(\mathbf{T}), f(\mathbf{T}, k)$: função de plastificação.
- \mathbf{F} : gradiente da deformação.
- $g(\mathbf{T})$: potencial plástico.
- $I = I_T$.
- $J = II_{T_0}$.
- k : parâmetro de endurecimento isotrópico.
- \mathbf{L} : gradiente espacial da velocidade.
- $p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3$.

- p_a : pressão de adensamento isotrópico.
- p_0 : pressão equivalente (parâmetro de endurecimento isotrópico do Cam-Clay).
- $q = \sigma_a - \sigma_r$.
- t : tempo.
- \mathbf{T} : tensão de Cauchy.
- $\dot{\mathbf{T}}$: taxa de tensão.
- $\check{\mathbf{T}}$: taxa corrotacional da tensão.
- \mathbf{T}_0 : tensão desviadora ($\mathbf{T}_0 = \mathbf{T} - (tr\mathbf{T}/3)\mathbf{1}$).
- \mathbf{u} : deslocamento.
- \mathbf{v} : velocidade (descrição espacial).
- \mathbf{W} : taxa de rotação.
- \mathbf{x}, \mathbf{X} : posições.
- γ : taxa de distorção.
- $\eta = q/p$.
- ϵ_a : deformação axial.
- ϵ_r : deformação radial.
- ϵ_v : deformação volumétrica.
- $\bar{\epsilon}_a$: deformação natural (logarítmica) axial.
- $\bar{\epsilon}_r$: deformação natural (logarítmica) radial.
- $\bar{\epsilon}_v$: deformação natural (logarítmica) volumétrica.
- σ_a : tensão axial.
- σ_r : tensão radial.

- σ_v : tensão vertical.
- $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$: tensões principais.
- $\sigma_I, \sigma_{II}, \sigma_{III}$: tensões principais maior, intermediária e menor, respectivamente.
- ϕ : ângulo de atrito.
- ω : taxa de deformação volumétrica.
- $\mathbf{1}$: tensor identidade.
- I_A, II_A, III_A : primeiro, segundo e terceiro invariantes principais de um tensor \mathbf{A} .

Sumário

1	INTRODUÇÃO	4
1.1	Objetivos do Trabalho	4
1.2	Sobre o Estudo da Deformação dos Solos	5
1.3	Importância do Tema para a Engenharia Geotécnica	7
2	ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO	8
2.1	Introdução	8
2.2	Cinemática do Contínuo	8
2.3	Sobre as Tensões	12
2.4	Sobre os Solos e a Tensão Efetiva	12
3	RELAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTO- PLÁSTICAS	13
3.1	Introdução	13
3.2	Elasticidade	17
3.2.1	Material Elástico	17
3.2.2	Material Hiperelástico	18
3.2.3	Material Hipoelástico	18
3.2.4	Material Elástico Linear	18
3.2.5	Relação entre as Classes de Materiais da Elasticidade .	19
3.3	Plasticidade	20
3.3.1	Função de Plastificação	20
3.3.2	Relação Tensão-Deformação	26
3.3.3	A Condição de Normalidade e a Convexidade da Superfície de Plastificação	30

4	CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS ELASTO-PLÁSTICOS PARA SOLOS	32
4.1	Introdução	32
4.2	Breve Histórico	32
4.3	Aspectos Fundamentais do Comportamento dos Solos e os Modelos Elasto- Plásticos	35
5	O MODELO CAM-CLAY	39
5.1	Introdução	39
5.2	Relações Constitutivas	41
5.2.1	Parâmetros do Modelo	41
5.2.2	Função de Plastificação	43
5.2.3	Relação Tensão-Deformação	45
5.2.4	Estado Crítico	47
5.3	Particularização das Relações Constitutivas para os Estados de Tensão e Deformação dos Ensaios Triaxiais	49
5.3.1	Parâmetros de Tensão e Deformação	49
5.3.2	Função de Plastificação	50
5.3.3	Relação Tensão-Deformação	50
5.3.4	Estado Crítico	52
5.3.5	Superfície Limite de Estado	52
6	ENSAIOS REALIZADOS	54
6.1	Origem do Solo Estudado	54
6.2	Caracterização do Solo e Preparação dos Corpos-de-Prova	54
6.3	Técnicas de Ensaio	56
6.3.1	Ensaio de Compressão Edométrica	56
6.3.2	Ensaio de Compressão Isotrópica	56
6.3.3	Ensaio Triaxiais	57
6.3.4	Apreciação sobre a Qualidade dos Ensaios	58
6.4	Resultados	59
6.4.1	Ensaio de Compressão Edométrica	59
6.4.2	Ensaio de Compressão Isotrópica	61
6.4.3	Ensaio Triaxiais	62

7	CONFRONTO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E AS PREVISÕES DO CAM-CLAY	73
7.1	Introdução	73
7.2	Determinação dos Parâmetros do Cam- Clay	74
7.2.1	λ e κ	74
7.2.2	G e M	75
7.3	Estudo da Deformação nos Ensaio Triaxiais	77
7.4	Integração das Equações Constitutivas do Cam-Clay nas Trajetórias de Tensão dos Ensaio	80
7.5	Comparação entre os Resultados dos Ensaio e as Previsões Teóricas	84
7.5.1	Análise das Curvas $q \times \epsilon_a$	91
7.5.2	Análise das Curvas $\epsilon_v \times \epsilon_a$	91
7.5.3	Comentários sobre a Capacidade de Representação do Cam-Clay	92
8	COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES	93
9	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	95

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Objetivos do Trabalho

Como início de um estudo mais amplo sobre modelos constitutivos para solos, a parte teórica desta dissertação procura cumprir as seguintes tarefas:

- apresentar as equações constitutivas elasto-plásticas que servem de base a diversos modelos;
- rever o Cam-Clay, apresentando-o por caminhos diferentes dos usuais, em estreita relação com a formulação geral das equações constitutivas elasto-plásticas, o que facilitará a comparação futura com outros modelos.

Por sua vez, a pesquisa experimental guiou-se com o fim de investigar o comportamento dos solos quando submetidos a ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão. Escolheu-se para análise o solo residual de migmatito proveniente do campo experimental de fundações da Escola Politécnica da USP. Trata-se de um solo siltoso que foi desestruturado e remoldado a partir de umidade elevada para constituir os corpos-de-prova.

Um dos objetivos deste trabalho é avaliar a capacidade de representação, por parte do modelo Cam-Clay, do comportamento observado nos ensaios triaxiais com diferentes trajetórias de tensão.

Diversos membros do grupo de Engenharia de Solos da Escola Politécnica da USP estão atualmente envolvidos numa pesquisa cujo tema é "Escavações

em São Paulo". Pretende-se estudar o comportamento mecânico dos solos da cidade de São Paulo por meio de ensaios de laboratório e de campo realizados com modernos equipamentos e técnicas, visando a elaboração de modelos para aplicação em análises numéricas de túneis e escavações a céu aberto. O presente trabalho se insere nesse contexto.

1.2 Sobre o Estudo da Deformação dos Solos

Um dos objetos principais e mais complexos da Mecânica dos Solos, sendo o próprio significado do termo em seu sentido restrito, é o estudo do fenômeno da deformação dos solos.

Em princípio duas abordagens distintas poderiam ser adotadas: a estrutural e a do meio contínuo¹. Esta, diferentemente da primeira, não faz nenhuma consideração acerca da estrutura interna dos materiais, importando-se exclusivamente com aspectos exteriores dos corpos constituídos por eles.

No caso dos solos, que se constituem de partículas de diferentes tamanhos, formatos e resistências, dispostas nos mais variados arranjos e onde os poros são preenchidos por ar e água em diferentes estados de viscosidade, uma teoria estrutural seria muito complexa e de sucesso duvidoso². Como ocorre em diversas áreas da Física, em Mecânica dos Solos as teorias do contínuo têm tido preferência pela sua simplicidade e capacidade de representação. Por exemplo, o comportamento de solos argilosos e arenosos, materiais compostos de partículas tão diferentes, tem sido representado por modelos semelhantes.

As teorias do contínuo são também conhecidas como fenomenológicas por procurarem representar diretamente os fenômenos observados na experiência, sem tentar descrevê-los a partir do comportamento dos microcomponentes dos materiais.

Além de princípios e conceitos gerais, a Mecânica do Contínuo define materiais ideais caracterizados por suas equações (ou relações) constitutivas, cuja finalidade é representar matematicamente, do modo mais fiel possível, o comportamento de materiais reais. É importante salientar que não é necessário buscar semelhança física alguma entre os corpos constituídos de

¹Uma valiosa discussão sobre o assunto no âmbito geral da Física encontra-se em "The Classical Field Theories" de Truesdell e Toupin (1960).

²O livro de Fedá (1982) aborda teorias estruturais para solos.

materiais reais e os corpos contínuos que são entes matemáticos. Semelhança deve haver entre as respostas de ambos.

Embora desde seu início a Mecânica dos Solos empregue as teorias da elasticidade e da plasticidade, o primeiro material idealizado elaborado para representar aspectos importantes da deformação dos solos foi o Cam-Clay, criado na década de 1960 (um breve histórico encontra-se no cap.4) . Este modelo, que merecerá atenção especial no cap.5, marcou o começo de uma nova fase da Mecânica dos Solos em que as pesquisas no campo das relações constitutivas se intensificaram enormemente.

Uma análise preliminar de diversos modelos hoje existentes permite fazer alguns comentários:

- algumas características fundamentais são encontradas em vários modelos;
- a qualidade e a abrangência da verificação experimental dos modelos é muito variável de um para outro;
- o grau de rigor matemático com que são escritas as equações constitutivas também é muito variável.

Seria de grande valor um trabalho de síntese em que fossem cumpridas as seguintes tarefas:

- agrupar modelos com mesmas características fundamentais e apresentar as diferenças entre eles como particularizações do modelo básico;
- elaborar uma hierarquia de capacidade de representação, na qual seriam levadas em conta a qualidade e abrangência da verificação experimental: entre modelos com capacidade de representação semelhante, seriam privilegiados os mais simples;
- reescrever as equações constitutivas de modelos matematicamente pobres com o rigor devido, aproveitando suas qualidades de representação do fenômeno físico.

A parte teórica deste trabalho, mencionada na seção anterior foi guiada pelas idéias acima. Contudo, por ora, apenas o modelo Cam-Clay foi revisto na sua formulação.

Na verificação experimental de modelos alternada com seu aprimoramento os laboratórios têm papel fundamental, pois, somente neles, pode-se conhecer com precisão tensões, deformações, condições de contorno, condições ambientais etc.

1.3 Importância do Tema para a Engenharia Geotécnica

Os engenheiros geotécnicos deparam-se freqüentemente com problemas que requerem análise da deformação de maciços de solo, como por exemplo na estimativa do recalque de uma fundação, no cálculo dos deslocamentos induzidos na superfície do terreno pela construção de um túnel ou dos deslocamentos das paredes de contenção de uma vala, bem como dos esforços sobre essas estruturas enterradas. A solução desses problemas se faz em etapas, cada uma das quais envolvendo idealizações que simplificam a realidade. A qualidade das previsões realizadas pelo engenheiro em problemas desse tipo está condicionada à proximidade entre a realidade e tais idealizações. Se, ainda nos dias de hoje, uma das mais drásticas simplificações se dá na escolha do modelo constitutivo para representar o comportamento mecânico dos solos envolvidos, então seu refinamento pode acarretar sensível ganho de qualidade nas previsões.

É verdade, entretanto, que modelos mais potentes, excetuando-se casos revolucionários, exigem um maior número de ensaios, às vezes não-convencionais, para determinação dos dados de entrada. A viabilidade de sua aplicação prática deve ser examinada em cada caso.

Para a interpretação adequada de ensaios *in situ*, a utilização de modelos representativos é imperiosa. Um sofisticado ensaio *in situ* não fornecerá informações relevantes se não for interpretado por um bom modelo.

Capítulo 2

ALGUNS CONCEITOS BÁSICOS DA MECÂNICA DO CONTÍNUO

2.1 Introdução

Este capítulo fornece, de modo resumido, alguns conceitos da Mecânica do Contínuo que serão necessários no estudo das relações constitutivas elásticas e elasto-plásticas, bem como na interpretação dos ensaios. A maior parte (segunda seção) é destinada à Cinemática, onde são definidos os tensores relacionados à deformação e à velocidade de deformação. Nas duas últimas seções traçam-se breves comentários a cerca do estado de tensão, das taxas de tensão em relação ao tempo, da deformação dos solos e da tensão efetiva de Terzaghi.

Tratamentos aprofundados sobre esse tema encontram-se, por exemplo, no livro "Introduction to Continuum Mechanics" de Gurtin (onde se acham as demonstrações mencionadas na seção 2.2) e no tratado "The Non-Linear Field Theories of Mechanics" de Truesdell e Noll.

2.2 Cinemática do Contínuo

Estando a atenção neste trabalho voltada para as equações constitutivas, o mais interessante da Cinemática do Contínuo são os tensores que medem

a deformação e a velocidade com que ela se processa. Para que se possa defini-los mais adiante, inicia-se pelo estudo do movimento.

Considere-se um corpo que no instante t_0 encontra-se na configuração C_0 , tomada como configuração de referência, onde seus pontos materiais ocupam as posições designadas por \mathbf{X} .

O movimento do corpo a partir da configuração de referência é descrito por:

$$\mathbf{x} = \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.1)$$

em que \mathbf{x} é a posição ocupada, no instante t (quando o corpo se encontra na configuração C_t), pelo ponto material que em t_0 se encontrava na posição \mathbf{X} ($\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$). Em cada instante a correspondência entre \mathbf{X} e \mathbf{x} é biunívoca.

Definem-se os campos de deslocamento e velocidade pelas expressões:

$$\mathbf{u}(\mathbf{X}, t) = \chi(\mathbf{X}, t) - \mathbf{X} \quad (2.2)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{X}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\mathbf{X}, t) \quad (2.3)$$

Na equação acima a velocidade é função da posição na configuração de referência (descrição material). Por meio da função inversa do movimento $\mathbf{X} = \chi^{-1}(\mathbf{x}, t)$ é possível expressar a velocidade como função da posição \mathbf{x} no instante t (descrição espacial):

$$\mathbf{v}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial \chi}{\partial t}(\chi^{-1}(\mathbf{x}, t), t) \quad (2.4)$$

Uma medida da velocidade com que se está processando a deformação na vizinhança de um ponto é fornecida pelo gradiente espacial da velocidade (gradiente com relação a posição \mathbf{x}), representado por:

$$\mathbf{L}(\mathbf{x}, t) = \text{grad } \mathbf{v}(\mathbf{x}, t) \quad (2.5)$$

A parte simétrica de \mathbf{L} denomina-se taxa de deformação ("stretching"):

$$\mathbf{D} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} + \mathbf{L}^T) \quad (2.6)$$

enquanto a parte anti-simétrica é chamada taxa de rotação ("spin"):

$$\mathbf{W} = \frac{1}{2}(\mathbf{L} - \mathbf{L}^T) \quad (2.7)$$

\mathbf{D} e \mathbf{W} medem, nas vizinhanças de um ponto, a taxa instantânea de alteração de distâncias e ângulos e a velocidade de rotação rígida, respectivamente.

Note-se que $\mathbf{L}(\mathbf{x}, t)$ e, por conseqüência, $\mathbf{D}(\mathbf{x}, t)$ e $\mathbf{W}(\mathbf{x}, t)$ são definidos na configuração ocupada pelo corpo no instante t (configuração atual), não sendo necessário o conhecimento de uma configuração de referência.

É importante realçar a interpretação física de \mathbf{D} .

Sejam \mathbf{e} um vetor unitário e $\delta(\tau)$ a distância ao longo do tempo entre os pontos materiais que ocupam as posições \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}$ no instante t ($\delta(t) = \alpha$). Pode-se demonstrar que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\dot{\delta}(t)}{\delta(t)} = \mathbf{e} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e} \quad (2.8)$$

Considera-se agora um terceiro ponto material que no instante t localiza-se em $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}$, sendo \mathbf{d} um vetor unitário normal a \mathbf{e} . Seja $\theta(\tau)$ o ângulo num instante τ qualquer compreendido pelos pontos materiais que, no instante t , ocupam as posições $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{e}$, \mathbf{x} e $\mathbf{x} + \alpha\mathbf{d}$ ($\theta(t) = \pi/2$). Demonstra-se que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \dot{\theta}(t) = -2\mathbf{d} \cdot \mathbf{D}(\mathbf{x}, t) \mathbf{e} \quad (2.9)$$

Se \mathbf{a}_i e \mathbf{a}_j são versores de uma base ortonormal. os resultados acima fornecem uma interpretação física para a componente $D_{ij} = \mathbf{a}_i \cdot \mathbf{D} \mathbf{a}_j$ de \mathbf{D} nessa base.

A taxa de deformação \mathbf{D} é utilizada em equações constitutivas elasto-plásticas e visco-elásticas, por exemplo.

Para estudar a variação da posição relativa entre os pontos de um corpo a partir da configuração de referência é fundamental definir o gradiente da deformação (gradiente com relação à posição \mathbf{X}):

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}, t) = \nabla_{\mathbf{X}} \chi(\mathbf{X}, t) \quad (2.10)$$

com $\det \mathbf{F} > 0$ ¹.

¹Pois $\det \mathbf{F}$ representa, localmente, o volume após a deformação por unidade de volume na configuração de referência.

Pelo teorema da decomposição polar \mathbf{F} pode ser expresso pelos produtos:

$$\mathbf{F} = \mathbf{R}\mathbf{U} = \mathbf{V}\mathbf{R} \quad (2.11)$$

em que \mathbf{R} é chamado tensor rotação, \mathbf{U} , tensor estiramento direito e \mathbf{V} , tensor estiramento esquerdo (\mathbf{U} e \mathbf{V} são simétricos positivos definidos e \mathbf{R} é uma rotação).

Muito empregados em equações constitutivas, por exemplo, nas da elasticidade finita, são os tensores de deformação direito e esquerdo de Cauchy-Green definidos, respectivamente, por:

$$\mathbf{C} = \mathbf{U}^2 = \mathbf{F}^T \mathbf{F} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{V}^2 = \mathbf{F}\mathbf{F}^T \quad (2.13)$$

Com a finalidade de destacar o significado físico do tensor \mathbf{U} sejam considerados dois pontos materiais que na configuração de referência (em $t = t_0$) localizam-se em \mathbf{X} e $\mathbf{X} + \alpha\mathbf{e}$, sendo \mathbf{e} um vetor unitário. Se $\Delta(t) = |\chi(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{e}, t) - \chi(\mathbf{X}, t)|$ é a distância entre eles num instante t qualquer ($\Delta(t_0) = \alpha$), demonstra-se que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta(t)}{\Delta(t_0)} = |\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)\mathbf{e}| \quad (2.14)$$

Seja \mathbf{b} outro vetor unitário e considere-se um terceiro ponto material que na configuração de referência encontra-se em $\mathbf{X} + \alpha\mathbf{b}$. Sendo $\Theta(t)$ o ângulo entre os vetores $\chi(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{e}, t) - \chi(\mathbf{X}, t)$ e $\chi(\mathbf{X} + \alpha\mathbf{b}, t) - \chi(\mathbf{X}, t)$ e, $\Upsilon(t)$ o ângulo entre os vetores $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)\mathbf{e}$ e $\mathbf{U}(\mathbf{X}, t)\mathbf{b}$, pode-se demonstrar que:

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \Theta(t) = \Upsilon(t) \quad (2.15)$$

Do gradiente da deformação pode-se obter o gradiente espacial da velocidade, na sua descrição material, por meio de:

$$\mathbf{L} = \dot{\mathbf{F}}\mathbf{F}^{-1} \quad (2.16)$$

Resta definir o tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} , empregado na elasticidade linear e cuja derivada em relação ao tempo é utilizada por algumas teorias da plasticidade, por exemplo. Ele é definido como sendo a parte simétrica do gradiente do deslocamento:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla\mathbf{u} + \nabla\mathbf{u}^T) \quad (2.17)$$

2.3 Sobre as Tensões

Nas equações constitutivas, objeto de estudo em capítulos posteriores, serão empregadas a tensão de Cauchy \mathbf{T} que mede força por unidade de área na configuração atual, sua derivada com relação ao tempo $\dot{\mathbf{T}}$, chamada taxa de tensão e a taxa corrotacional da tensão definida por:

$$\check{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}} - \mathbf{W}\mathbf{T} + \mathbf{T}\mathbf{W} \quad (2.18)$$

em que \mathbf{W} é a taxa de rotação.

A taxa de tensão, presente nas equações constitutivas elasto-plásticas, não obedece o chamado princípio da objetividade material (ou da independência do observador)(Truesdell e Noll,1965), ao passo que a taxa corrotacional da tensão, utilizada na hipoelasticidade, sim.

2.4 Sobre os Solos e a Tensão Efetiva

Os solos são meios multifásicos, pois se constituem, simplificadaamente, de partículas sólidas, água e ar. Ao tentar representar seu comportamento pela Mecânica do Contínuo, supõe-se que uma posição seja ocupada simultaneamente por um ponto material de cada uma das fases, cujos movimentos são distintos, mas não independentes. Às várias fases estão associadas respectivas tensões.

Em 1936 Terzaghi enunciou na Primeira Conferência Internacional de Mecânica dos Solos e Engenharia de Fundações, com forte base experimental, o princípio das tensões efetivas, pelo qual, nos solos saturados, a tensão total \mathbf{T}_T é o resultado da soma da tensão efetiva \mathbf{T} , que governa o comportamento do arcabouço sólido, com a pressão neutra u_1 (relativa à água):

$$\mathbf{T}_T = \mathbf{T} + u_1 \quad (2.19)$$

A equações constitutivas para solos abordadas neste trabalho pretendem representar o comportamento do arcabouço sólido e, por isso, são escritas todas elas em termos de tensão efetiva.

Capítulo 3

RELAÇÕES CONSTITUTIVAS ELASTO- PLÁSTICAS

3.1 Introdução

Este capítulo tem como principal objetivo a apresentação da formulação matemática das relações constitutivas dos materiais elasto-plásticos.

Designam-se materiais elasto-plásticos os sólidos não-viscosos, que, de um modo geral, sofrem deformações em parte irreversíveis, observadas quando se os submetem a um ciclo de carga e descarga. As parcelas reversível (ou elástica) e irreversível (ou plástica) das deformações são determinadas pelas equações constitutivas elasto-plásticas.

Nesta introdução discutem-se alguns aspectos do comportamento desses materiais, a fim de fornecer as informações básicas necessárias para a melhor compreensão da formulação matemática que virá em seguida.

Os termos regime elástico e regime elasto-plástico serão largamente empregados no texto. Diz-se que o material se encontra em regime elástico, quando apenas deformações elásticas estiverem ocorrendo e, que se encontra em regime elasto-plásticos, quando as deformações forem em parte elásticas, em parte plásticas.

A fig.3.1 traz curvas tensão-deformação obtidas de ensaios de compressão axial em corpos-de-prova de três diferentes materiais elasto-plásticos.

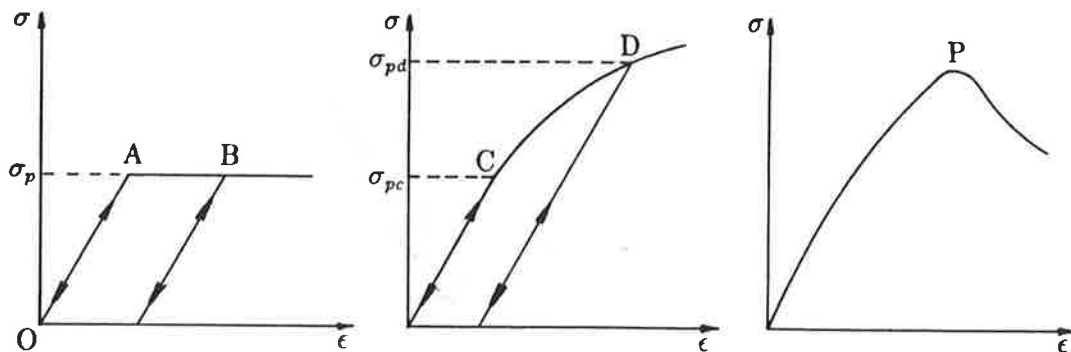


Figura 3.1: Materiais elasto-plásticos a)perfeito; b)com endurecimento; c)com amolecimento.

A tensão de plastificação dos materiais elasto- plásticos perfeitos é constante, independente da deformação plástica ocorrida (fig.3.1a). Para o corpo-de-prova cujo estado se encontra representado por um ponto no trecho elástico OA a tensão de plastificação é σ_p . Impondo a continuação da deformação a partir de A, o que se faz sem aumento de tensão, deformações plásticas exclusivamente se darão. Um descarregamento em B leva de volta ao regime elástico , ao qual está associada a mesma tensão de plastificação σ_p . Novas deformações plásticas acontecerão se σ_p for atingida.

Os materiais elasto-plásticos com endurecimento ("strain-hardening" ou "work-hardening") apresentam tensão de plastificação crescente com a deformação plástica ¹. Como resultado de um ensaio de compressão axial tem-se uma curva tensão-deformação monotonicamente crescente. Na fig.3.1b o resultado de um ensaio com ciclo de descarga- recarga é representado. Até o ponto C, associado à tensão de plastificação inicial σ_{pc} o comportamento

¹Os termos ingleses "strain-hardening" e "work-hardening" são equivalentes e indicam que o endurecimento (ou encruamento), entendido como aumento da tensão de plastificação, se dá à medida que cresce a deformação plástica ou o trabalho necessário para produzi-la.

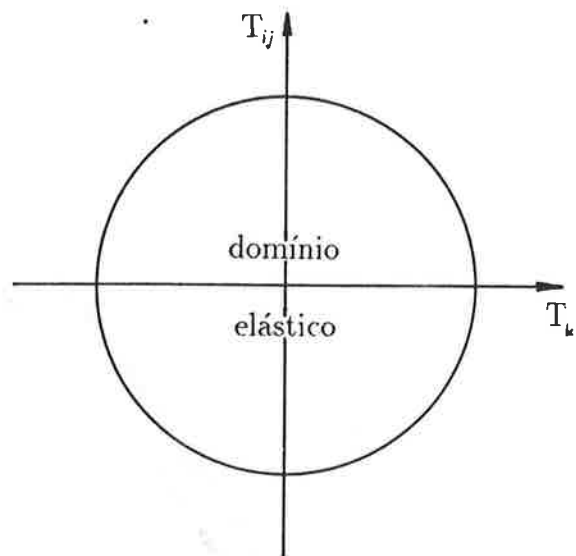


Figura 3.2: Superfície de plastificação.

é elástico. A partir daí, com o aumento da tensão, deformações elásticas e plásticas ocorrerão. Um descarregamento em algum ponto, como por exemplo D, devolve o material ao regime elástico. Somente se a tensão superar o valor σ_{pd} (a nova tensão de plastificação) ocorrerão deformações plásticas adicionais.

A curva exibida na fig.3.1c corresponde a um material elasto-plástico que apresenta amolecimento ("strain-softening"). A partir do ponto P nota-se uma queda na curva tensão-deformação indicando que a imposição de deformação adicional leva à diminuição da tensão.

Os critérios de plastificação, um tanto simples nas sollicitações uniaxiais vistas acima, tornam-se complexos quando se trata de sollicitações triaxiais. A fronteira do regime elástico passa a ser estabelecida por uma função do tensor das tensões: a função de plastificação. No espaço das tensões, em que as nove componentes da tensão são as coordenadas de um ponto, a superfície de plastificação (onde a função de plastificação se anula) delimita o domínio elástico (fig.3.2)².

²Na fig.3.2, assim como será feito outras vezes, representou-se um caso bidimensional com o fim de facilitar o desenho.

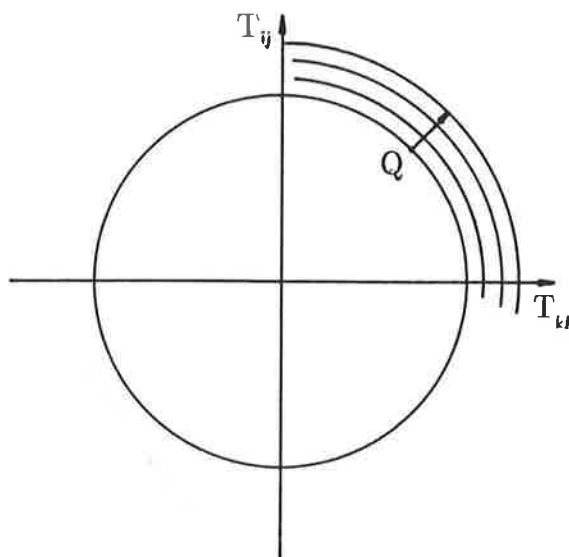


Figura 3.3: Superfícies de plastificação dos materiais elasto-plásticos com endurecimento.

Para os materiais elasto-plásticos perfeitos a superfície de plastificação é única. Se o ponto representativo do estado de tensão se localizar no seu interior o regime é elástico. Deformações plásticas ocorrem enquanto o ponto, que nunca pode estar na região exterior, permanecer sobre a superfície.

Por sua vez, a superfície de plastificação dos materiais elasto-plásticos com endurecimento altera-se à medida que se dá a deformação plástica segundo a lei de endurecimento. Num ponto de um material desse tipo, com tensão representada pelo ponto Q sobre uma superfície de plastificação (fig.3.3), um incremento de tensão dirigido para fora do domínio elástico provoca deformações elásticas e plásticas alterando seu estado. Após o incremento o ponto representativo da nova tensão se encontrará sobre uma nova superfície de plastificação, associada ao novo estado plástico do material. Há dois tipos básicos de endurecimento: o isotrópico e o cinemático. No primeiro, a superfície de plastificação expande-se homoteticamente com relação à origem do espaço das tensões, mantendo sua forma e sua orientação. No segundo, preservam-se o tamanho, a forma e a orientação enquanto a superfície se desloca.

Um material elasto-plástico com amolecimento possui uma de suas su-

perfícies de plastificação análoga ao pico da curva da fig.3.1c.

Os materiais idealizados descritos acima procuram representar os aspectos principais do comportamento de alguns materiais reais encontrados na natureza ou construídos pelo homem. O material elasto-plástico perfeito foi elaborado para representar o comportamento dos metais. O material elasto-plástico com endurecimento, também criado inicialmente à semelhança de alguns metais, mostrou-se muito promissor na modelagem do comportamento de solos que se contraem no cisalhamento como as areias fofas e as argilas normalmente adensadas ou levemente sobre-adensadas.

Por outro lado, nos ensaios triaxiais sobre corpos-de-prova de areias densas e de argilas altamente sobre-adensadas, solos dilatantes, um pico na curva tensão-deformação é observado semelhante ao da fig.3.1c. Esse fenômeno pode estar relacionado à formação de uma estreita zona de cisalhamento, onde se concentram as deformações, deixando assim o corpo-de-prova de ser homogêneo, tornando difícil a interpretação das medidas realizadas nas suas fronteiras. A formação da zona de cisalhamento tem sido tratada com mais frequência como um fenômeno de bifurcação do equilíbrio.

Na seção seguinte serão abordadas as equações constitutivas da Elasticidade de uma forma sucinta para que mais tarde a elas se possa fazer referência. As equações constitutivas da Plasticidade serão estudadas na seção 3.3 mais pormenorizadamente, onde toda a atenção estará voltada para os materiais elasto-plásticos com endurecimento.

3.2 Elasticidade

Serão apresentadas brevemente as definições de material elástico, hiperelástico, hipoeelástico e de material elástico linear. O tratado "The Non-Linear Field Theories of Mechanics" de Truesdell e Noll (1965) é a fonte dos conceitos e das considerações aqui fornecidos de forma resumida.

3.2.1 Material Elástico

Os materiais elásticos possuem equação constitutiva do tipo:

$$\mathbf{T} = \mathbf{g}(\mathbf{F}) \quad (3.1)$$

onde \mathbf{T} é a tensão de Cauchy, \mathbf{g} é a função resposta do material e \mathbf{F} é o gradiente da deformação relativo a uma configuração de referência arbitrária.

Demonstra-se que, sendo isotrópico o material elástico, a tensão torna-se função do tensor esquerdo de Cauchy-Green (\mathbf{B}).

3.2.2 Material Hiperelástico

Os materiais hiperelásticos são materiais elásticos cuja função resposta tem uma forma especial. De um modo geral sua equação constitutiva é:

$$\mathbf{T} = \rho \nabla \Sigma(\mathbf{F}) \mathbf{F}^T \quad (3.2)$$

onde ρ é a densidade do material. $\Sigma(\mathbf{F})$ é denominada energia de deformação (função com valores escalares). $\nabla \Sigma(\mathbf{F})$ denota o gradiente de Σ em \mathbf{F} .

A energia de deformação dos materiais hiperelásticos isotrópicos pode ser expressa como uma função isotrópica de um dos tensores de Cauchy- Green; o direito (\mathbf{C}), ou o esquerdo (\mathbf{B}).

As considerações termodinâmicas a respeito da energia de deformação não serão comentadas por fugirem ao escopo deste trabalho.

3.2.3 Material Hipoelástico

A equação constitutiva dos materiais hipoelásticos relaciona linearmente a taxa de deformação \mathbf{D} e a taxa corrotacional de tensão $\check{\mathbf{T}}$:

$$\check{\mathbf{T}} = \mathbf{H}(\mathbf{T})[\mathbf{D}] \quad (3.3)$$

A função $\mathbf{H}(\mathbf{T})[\mathbf{D}]$ é linear em \mathbf{D} e isotrópica em \mathbf{T} e \mathbf{D} .

Deve-se ressaltar que as grandezas que tomam parte na equação constitutiva dos materiais hipoelásticos são todas definidas na configuração atual. Um material hipoelástico não possui, de modo geral, nenhuma configuração de referência ou estado de tensão privilegiado.

3.2.4 Material Elástico Linear

A equação constitutiva dos materiais elásticos lineares emprega como medida de deformação o tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} :

$$\mathbf{T} = \mathbf{L}[\mathbf{E}] \quad (3.4)$$

em que $\mathbf{L}[\mathbf{E}]$ é uma função linear de \mathbf{E} .

Em se tratando de material isotrópico a eq.3.4 assume a forma particular:

$$\mathbf{T} = \lambda \text{tr}(\mathbf{E})\mathbf{1} + 2\mu\mathbf{E} \quad (3.5)$$

em que λ e μ podem variar de ponto a ponto de um corpo desse material. Se o corpo é homogêneo, entretanto, λ e μ são as constantes de Lamé. O módulo de Young (módulo de elasticidade) E , o coeficiente de Poisson ν , o módulo de cisalhamento G e o módulo volumétrico K relacionam-se com as constantes de Lamé através das expressões:

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (3.6)$$

$$\mu = G = \frac{E}{1 + 2\nu} \quad (3.7)$$

$$K = \frac{1}{3}(3\lambda + 2\mu) = \frac{E}{3(1 - 2\nu)} \quad (3.8)$$

Às vezes é conveniente trabalhar com as partes esférica e anti-esférica dos tensores \mathbf{T} e \mathbf{E} :

$$\mathbf{T}_{\text{esf}} = 3K\mathbf{E}_{\text{esf}} \quad (3.9)$$

$$\mathbf{T}_0 = 2G\mathbf{E}_0 \quad (3.10)$$

3.2.5 Relação entre as Classes de Materiais da Elasticidade

Conforme revela sua própria definição os materiais hiperelásticos pertencem à classe dos materiais elásticos.

Por sua vez, uma relação entre os conceitos de material elástico e hipoe-lástico não pode ser estabelecida de forma geral. Ao se derivar em relação ao tempo a equação constitutiva dos materiais elásticos obtém-se uma equação mais geral que a dos materiais hipoe-lásticos (ver pág.408. Truesdell e Noll, op.cit.). Contudo uma correspondência existe em alguns casos, por exemplo:

- um material elástico isotrópico cuja relação tensão-deformação seja inversível é hipoeástico. Mas a elasticidade anisotrópica não é um caso especial da hipoeelasticidade;
- a hipoeelasticidade se reduz a um caso especial de elasticidade para deformações infinitesimais a partir de uma configuração arbitrária.

3.3 Plasticidade

Esta seção, a principal do capítulo, ocupa-se da apresentação das relações constitutivas dos materiais elasto-plásticos com endurecimento. Serão abordados na seqüência a função de plastificação e as relações tensão-deformação.

3.3.1 Função de Plastificação

Conforme foi comentado na introdução a este capítulo, a função de plastificação dos materiais elasto-plásticos com endurecimento depende do estado de tensão e do seu estado plástico (este relacionado à história da deformação). A função de plastificação será designada por $f(\mathbf{T})$, não deixando explícita por ora a dependência com relação ao estado plástico, que será abordada na seção 3.3.2.

Ao se processar uma alteração na tensão segundo uma trajetória de tensão $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ (o parâmetro t é o tempo), a função de plastificação (com valores escalares) determina a ocorrência de regime elástico ou elasto-plástico, segundo o seguinte critério:

- Se $f(\mathbf{T}) < 0$, o regime é elástico.
- Se $f(\mathbf{T}) = 0$, duas situações se distinguem:
 - com $\nabla f : \dot{\mathbf{T}} \leq 0$, tem-se regime elástico.
 - com $\nabla f : \dot{\mathbf{T}} > 0$, tem-se regime elasto-plástico ³.

³O produto interno de dois tensores \mathbf{A} e \mathbf{B} representado por $(:)$ é definido por $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{B})$. Em componentes $(\nabla f : \dot{\mathbf{T}})_{ij} = \sum \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \dot{T}_{ij}$.

O tensor ∇f é o gradiente de f em $\mathbf{T}(t)$ (uma trajetória de tensão) e $\dot{\mathbf{T}}(t)$, a derivada (material) da tensão com relação ao tempo, denominada taxa de tensão ⁴.

A função de plastificação não assume valores positivos, permanecendo nula durante o regime elasto-plástico (ver a equação de consistência 3.25).

Pode-se interpretar as componentes da tensão (T_{ij}) como as coordenadas de um ponto do espaço R^9 . A equação $f(T_{ij}) = 0$ define uma hipersuperfície nesse espaço chamada superfície de plastificação (fig.3.4), dividindo-o nas regiões interior e exterior a ela. Se o estado de tensões é representado por um ponto localizado no interior da região limitada pela superfície, como o ponto A, o regime é elástico ($f(T_{ij}) < 0$). Em se encontrando o ponto sobre a superfície ($f(T_{ij}) = 0$), como o ponto B, duas situações podem acontecer:

- regime elástico ocorrerá, caso o incremento de tensão seja dirigido para dentro da superfície de plastificação ou seja tangente a ela ($\sum \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \dot{T}_{ij} \leq 0$);
- regime elastoplástico se dará, caso o incremento de tensão se dirija para fora da superfície de plastificação ($\sum \frac{\partial f}{\partial T_{ij}} \dot{T}_{ij} > 0$).

Pontos exteriores à superfície de plastificação não são acessíveis para o material no estado em que se encontra. Um incremento de tensão dirigido para fora da superfície de plastificação alterará o estado plástico do material, que definirá uma nova superfície de plastificação sobre a qual se localizará o ponto representativo do novo estado de tensão.

As leis de endurecimento, que regem a variação do estado plástico e, em consequência, as alterações na função e na superfície de plastificação foram comentadas na introdução a este capítulo. O endurecimento isotrópico será abordado na seção 3.3.2.

Portanto a função de plastificação define o critério de carregamento e descarregamento do material na iminência da plastificação ($f(\mathbf{T}) = 0$) e, por isso, é também denominada função de carregamento. Têm-se descarregamento, carregamento neutro ou carregamento conforme seja:

$$\nabla f : \dot{\mathbf{T}} < 0 \quad (3.11)$$

⁴Deve-se salientar que $\dot{\mathbf{T}}$ não obedece o princípio da objetividade material.

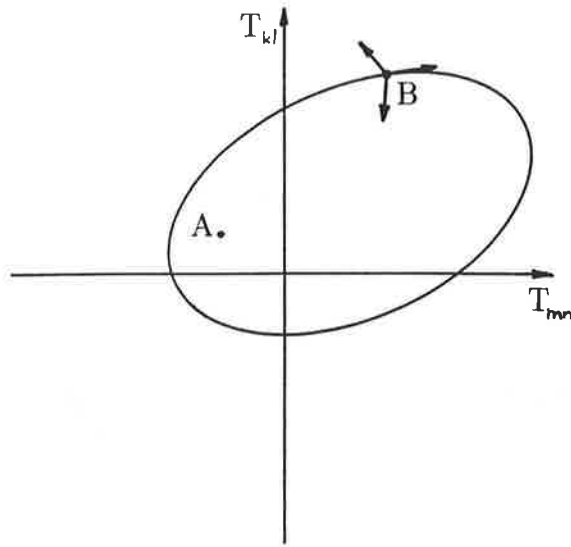


Figura 3.4: Superfície de plastificação.

$$\nabla f : \dot{\mathbf{T}} = 0 \quad (3.12)$$

$$\nabla f : \dot{\mathbf{T}} > 0 \quad (3.13)$$

respectivamente, quando $f(\mathbf{T}) = 0$. Isto é, no descarregamento e no carregamento neutro o regime é elástico, ao passo que, no carregamento, é elasto-plástico.

No caso de isotropia quanto ao critério de plastificação⁵ a função de plastificação é simétrica com relação às tensões principais $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$. Alternativamente pode-se expressá-la em termos dos invariantes principais do tensor das tensões (I_T, II_T, III_T) . A equação $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ define a superfície de plastificação no espaço das tensões principais, que tem por eixo de simetria a diagonal do espaço. A intersecção da superfície de plastificação com um plano π (correspondente a um certo valor da tensão octaédrica) normal à diagonal do espaço é uma curva Γ constituída de seis segmentos congruentes (fig.3.5). A sua determinação experimental necessita, portanto, apenas de ensaios, nos quais os estados de tensão se encontrem em algum dos seis setores.

⁵Para que a função de plastificação obedeça o princípio da objetividade material, ela deve ser isotrópica.

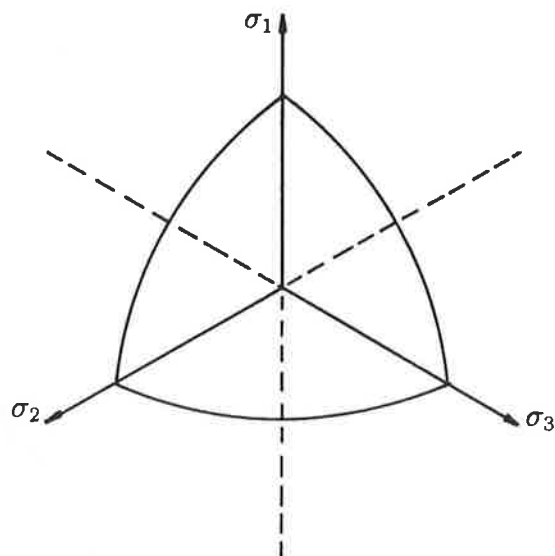


Figura 3.5: Curva Γ . Função de plastificação isotrópica.

Como ilustração serão citados em seguida exemplos de funções de plastificação para metais e solos.

Funções de Plastificação para Metais

Ensaio em metais revelam ser desprezível a influência da tensão octaédrica nas condições de plastificação até que altos valores, fora da faixa de interesse nos problemas usuais, sejam atingidos (Drucker, 1966). Sendo assim, as curvas correspondentes a cada plano π são congruentes. Além disso a maioria das teorias não leva em conta o efeito Bauschinger (e.g. Hill, 1950) e considera $f(\mathbf{T}) = f(-\mathbf{T})$, impondo mais uma restrição à curva Γ : deve haver simetria em cada eixo $O\sigma_1$, $O\sigma_2$ e $O\sigma_3$ com relação à origem. Ficam definidos doze segmentos congruentes como se verá nos exemplos a seguir.

Os critérios de plastificação mais empregados para representar o comportamento de metais são os de Tresca e von Mises.

- Critério de Tresca:

A função de plastificação de Tresca não leva em conta a tensão principal intermediária σ_{II} . Sua expressão é :

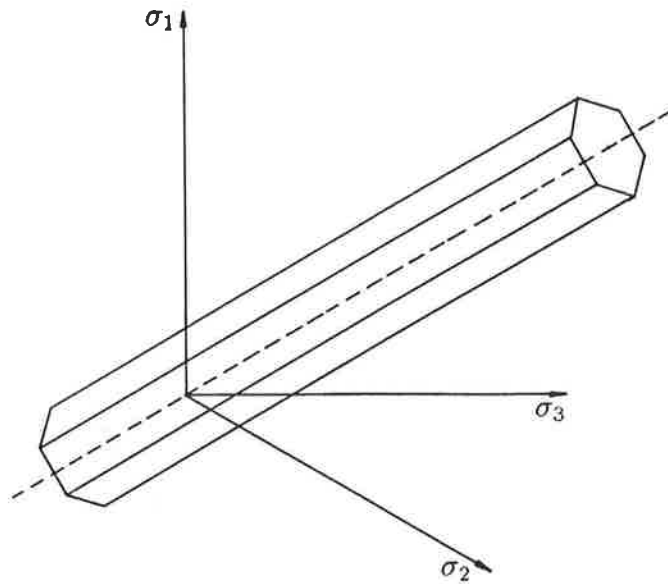


Figura 3.6: Superfície de plastificação de Tresca.

$$f(\sigma_I, \sigma_{III}) = \sigma_I - \sigma_{III} - c \quad (3.14)$$

em que σ_I e σ_{III} são as tensões principais maior e menor respectivamente. Note-se que na tração simples ($\sigma_I > 0, \sigma_{II} = \sigma_{III} = 0$) a tensão de plastificação é c .

No espaço das tensões principais a superfície de plastificação dada por $\sigma_I - \sigma_{III} = c$ se faz representar pela de um prisma de seção hexagonal (fig.3.6).

- Critério de von Mises:

A função de plastificação de von Mises envolve o segundo invariante da tensão desviadora II_{T_0} :

$$f(II_{T_0}) = II_{T_0} - \frac{1}{3}c^2 \quad (3.15)$$

onde c é a tensão de plastificação na tração simples.

No espaço das tensões principais a equação:

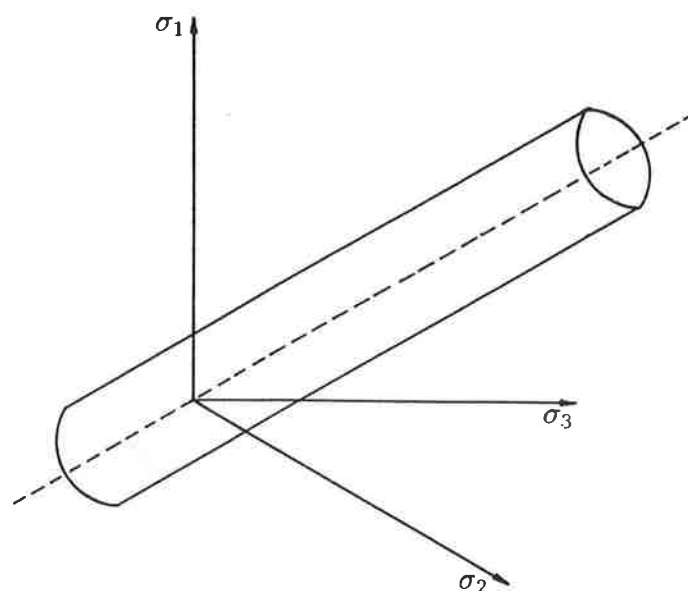


Figura 3.7: Superfície de plastificação de von Mises.

$$II_{T_0} = \frac{1}{6}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \frac{1}{3}c^2 \quad (3.16)$$

fornece a superfície de plastificação: a de um cilindro que tem por eixo a diagonal do espaço (fig.3.7).

A fig.3.8 compara as curvas Γ obtidas pela intersecção de um plano ortogonal à diagonal do espaço com as superfícies de Tresca e von Mises.

Funções de Plastificação para Solos

As condições de plastificação dos solos são altamente influenciadas pelo valor da tensão octaédrica, conforme mostram os resultado de ensaios triaxiais. Portanto, a cada plano π corresponde uma curva Γ diferente.

Cita-se aqui, como exemplo, a função de plastificação do Cam-Clay Modificado (Roscoe e Burland, 1968), que será tratado com maiores detalhes no cap.5:

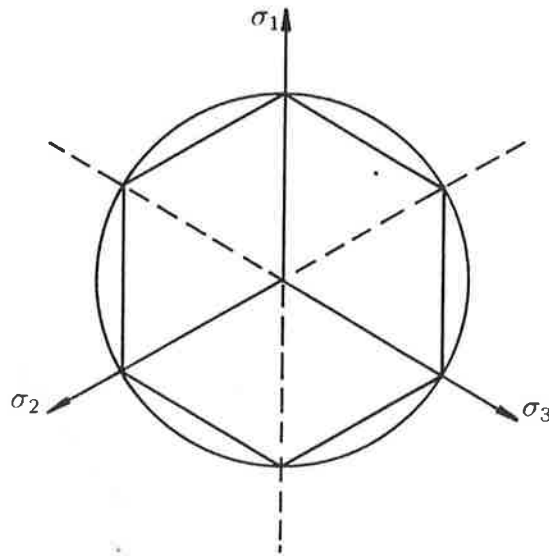


Figura 3.8: Comparação entre os critérios de Tresca e von Mises.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{(9 + M^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + (2M^2 - 9)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{3M^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} - p_0 \quad (3.17)$$

em que p_0 é a tensão de plastificação na compressão isotrópica, e M é um parâmetro característico do solo. A superfície de plastificação correspondente é a de um elipsóide de eixo contido na diagonal do espaço (fig.3.9). Portanto as curvas Γ são circunferências cujo diâmetro varia com a tensão octaédrica.

Deve-se chamar a atenção para o fato de a plastificação dos solos, que ocorre desde baixos níveis de tensão, ser inteiramente distinta de sua ruptura (ver cap.4). O critério de Mohr-Coulomb, que representa com sucesso os estados de tensão de ruptura dos solos, não é um critério de plastificação.

3.3.2 Relação Tensão-Deformação

Busca-se nesta seção determinar de que forma se relacionam a taxa de deformação, a tensão, a taxa de tensão, a função de plastificação e o estado plástico do material. Inicialmente a exposição se desenvolve sem que seja estabelecida qualquer hipótese acerca da evolução do estado do material.

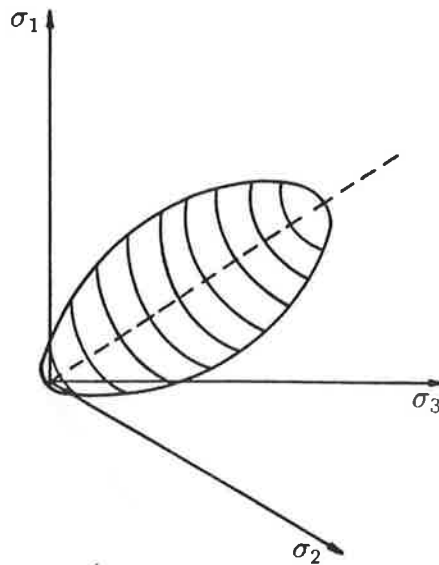


Figura 3.9: Superfície de plastificação do Cam- Clay

Depois, numa segunda etapa, restringe-se a análise ao caso em que há endurecimento isotrópico. Finaliza a seção uma discussão sobre a condição de normalidade e a convexidade da superfície de plastificação.

A taxa de deformação (a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade) é tratada como sendo a soma de duas parcelas; a elástica e a plástica⁶:

$$\mathbf{D} = \mathbf{D}^e + \mathbf{D}^p \quad (3.18)$$

A taxa de deformação elástica é do tipo hipoelástica:

$$\mathbf{D}^e = \mathbf{M}^e(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{T}}] \quad (3.19)$$

em que $\mathbf{M}^e(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{T}}]$ é linear em $\dot{\mathbf{T}}$ assegurando comportamento não-viscoso ⁷.

⁶Diferentes autores adotam diferentes maneiras de se decompor a deformação em partes elástica e plástica como se nota nas teorias de Hill (1958), Green e Naghdi (1965), Owen (1970), Lucchesi e Podio-Guidugli (1988, 1990), Lucchesi, Owen e Podio-Guidugli (1992). Discussões a esse respeito podem ser encontradas nos trabalhos de Nemat-Nasser (1979, 1982), Lee (1981), Mandel (1983), Hayoun e Lehmann (1988). Parece mais apropriado para os solos trabalhar com a taxa de deformação, que não requer referência alguma a configurações passadas ou futuras, mas apenas à atual, como ocorre na hipoelasticidade.

⁷Não se empregou a taxa cor rotacional por coerência com a parcela plástica que será

A taxa de deformação plástica depende do estado atual de tensão, da taxa de tensão e dos parâmetros que definem o estado plástico do material (relacionados à história da deformação). Matematicamente (não sendo necessário por ora deixar explícita a dependência com relação ao estado do material):

$$\mathbf{D}^P = \mathbf{G}(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{T}}) \quad (3.20)$$

Impondo que \mathbf{G} seja homogênea de grau um com relação a taxa de tensão, ou seja:

$$\mathbf{G}(\mathbf{T}, n\dot{\mathbf{T}}) = n\mathbf{G}(\mathbf{T}, \dot{\mathbf{T}}) \quad (3.21)$$

com n real positivo, os efeitos viscosos estarão ausentes ⁸.

De acordo com o critério de carregamento dos materiais elasto-plásticos com endurecimento estabelecido na seção anterior, a função \mathbf{G} deve ser tal que se tenha $\mathbf{D}^P = \mathbf{0}$ no carregamento neutro ($f(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$ e $\nabla f : \dot{\mathbf{T}} = 0$). É a chamada condição de continuidade (Prager, 1949).

Como hipótese adicional admite-se que a relação entre a taxa de deformação plástica e a taxa de tensão seja linear (indicada por colchetes):

$$\mathbf{D}^P = \mathbf{M}^P(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{T}}] \quad (3.22)$$

que respeita a condição de homogeneidade expressa na eq.3.21.

O respeito à condição de continuidade impõe uma restrição à relação linear 3.22. Deve-se ter $\mathbf{D}^P = \mathbf{M}^P(\mathbf{T})[\dot{\mathbf{T}}] = \mathbf{0}$ sempre que $f(\mathbf{T}) = \mathbf{0}$ e $\nabla f : \dot{\mathbf{T}} = 0$.

Decorre que a eq.3.22 deve ter a seguinte forma:

$$\mathbf{D}^P = \mathbf{N}(\mathbf{T})(\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (3.23)$$

Por motivos que aparecerão mais adiante é conveniente escrever $\mathbf{N}(\mathbf{T}) = m(\mathbf{T})\nabla g(\mathbf{T})$, onde m e g são funções com valores escalares. A função g é denominada potencial plástico e ∇g é o seu gradiente.

A equação 3.23 torna-se:

$$\mathbf{D}^P = m\nabla g(\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (3.24)$$

definida em seguida.

⁸O trabalho de Owen e Williams (1968) trata com rigor do conceito de "rate-independence".

Interpretando geometricamente, o vetor taxa de deformação plástica, de componentes D_{ij}^p , é paralelo ao vetor gradiente do potencial, de componentes $\frac{\partial g}{\partial T_{ij}}$, sendo, portanto, normal à superfície de nível do potencial plástico no ponto de coordenadas T_{ij} .

Uma restrição adicional à equação constitutiva está ligada à evolução do estado plástico do material.

Passa-se agora a particularizar a equação 3.24 para o endurecimento isotrópico ⁹.

O estado plástico do material é, nesse caso, representado por um único parâmetro escalar (k) monotonicamente crescente com a deformação plástica e dependente da história da deformação, que aparece como argumento da função de plastificação $f(\mathbf{T}, k)$.

Durante a deformação plástica

$$f(\mathbf{T}, k) = 0 \quad (3.25)$$

está sempre satisfeita (a tensão permanece sobre a superfície de plastificação que evolui). Isto é, ao longo do tempo, imposta uma trajetória de tensão $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$, $k = k(t)$ altera-se de modo que continue valendo a equação 3.25. Portanto,

$$\frac{df}{dt}(\mathbf{T}(t), k(t)) = 0 \quad (3.26)$$

que é denominada condição de consistência (Prager, 1949).

Aplicando a regra da cadeia na equação 3.26:

$$\nabla f : \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial k} \dot{k} = 0 \quad (3.27)$$

Supõe-se que \dot{k} (sempre não-negativo, anulando-se apenas quando $\nabla f : \dot{\mathbf{T}} = 0$) seja função da tensão atual e da taxa de deformação plástica, com a qual tem uma relação homogênea de grau um permitindo que se escreva (tendo em vista a equação 3.24):

$$\dot{k} = \xi(\mathbf{T}, \mathbf{D}^p) = m(\nabla f : \dot{\mathbf{T}})\xi(\mathbf{T}, \nabla g) \quad (3.28)$$

⁹Na análise da parte experimental será empregado um modelo com endurecimento isotrópico, o Cam-Clay.

impondo-se $m > 0$

Denotando $\xi(\mathbf{T}, \nabla g) = \psi$ e voltando à equação 3.27, obtêm-se:

$$\nabla f : \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial k} m (\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \psi = 0 \quad (3.29)$$

$$\left[1 + \frac{\partial f}{\partial k} m \psi\right] (\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) = 0 \quad (3.30)$$

Para que a equação acima esteja satisfeita, o fator da esquerda deve ser nulo, já que $\nabla f : \dot{\mathbf{T}} > 0$ (carregamento):

$$1 + \frac{\partial f}{\partial k} m \psi = 0 \quad (3.31)$$

De onde se obtém:

$$m = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial k} \psi} \quad (3.32)$$

Substituindo m na relação 3.24 , chega-se à expressão:

$$\mathbf{D}^P = -\frac{1}{\frac{\partial f}{\partial k} \psi} \nabla g (\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (3.33)$$

para a taxa de deformação plástica dos materiais com endurecimento isotrópico.

3.3.3 A Condição de Normalidade e a Convexidade da Superfície de Plastificação

Hill, no clássico "The Mathematical Theory of Plasticity" (1950), mostra que vários teoremas de existência e unicidade da Teoria Matemática da Plasticidade podem ser demonstrados, quando se adota a própria função de plastificação como potencial plástico ($g \equiv f$) e se supõe que a superfície de plastificação seja convexa.

Nesse caso a equação 3.24 toma a seguinte forma:

$$\mathbf{D}^P = m \nabla f (\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (3.34)$$

Note-se que, interpretando geometricamente, o vetor taxa de deformação plástica é normal à superfície de plastificação, o que é conhecido com o nome

de condição de normalidade, ou, alternativamente, diz-se que a "lei de fluxo" (a equação 3.34) é associada à função de plastificação.

Hill mostrou que a condição de normalidade e a convexidade da superfície de plastificação, considerando deformações infinitesimais, derivam do seu princípio do máximo trabalho plástico.

Drucker (1950) procurando estabelecer hipóteses mais gerais que levassem à condição de normalidade e à convexidade da superfície de plastificação, chegou a sua definição de material elasto-plástico estável.

Considere-se um corpo constituído de material elasto-plástico em estado de equilíbrio sob a ação de forças de volume e superfície. Seja também um agente externo que, num processo quase-estático (energia cinética do sistema desprezível), lhe aplica esforços externos. O material é denominado estável se o trabalho realizado pelo agente externo num ciclo de carga e descarga por ele promovido for positivo ou nulo (para deformações infinitesimais).

Decorre ¹⁰ que para cada ponto do corpo deve valer:

$$(\mathbf{T}(t) - \mathbf{T}(0)) : \mathbf{D}^P(t) \geq 0 \quad (3.35)$$

Pertencendo $\mathbf{T}(t)$ à superfície de plastificação e $\mathbf{T}(0)$, ao domínio elástico, a expressão 3.35 é verdadeira se a superfície de plastificação for convexa e se \mathbf{D}^P for normal a ela no ponto $\mathbf{T}(t)$, pois deve-se verificar para qualquer $\mathbf{T}(0)$.

Para exemplificar, um corpo-de-prova de um material estável submetido à compressão axial fornece uma curva tensão-deformação monotonicamente crescente.

Posteriormente, em 1959, Drucker redefiniu material estável de maneira a abranger também os materiais viscosos, cujo estudo não faz parte dos objetivos deste trabalho.

Deve-se ressaltar que os teoremas dos limites inferior e superior da Análise Limite de grande utilidade prática na engenharia geotécnica são baseados na hipótese de valerem a condição de normalidade e a convexidade da superfície de plastificação.

¹⁰Ver, por exemplo, o trabalho de Naghdi (1960).

Capítulo 4

CONSIDERAÇÕES GERAIS SOBRE MODELOS ELASTO- PLÁSTICOS PARA SOLOS

4.1 Introdução

Neste capítulo a capacidade de representação do comportamento dos solos pelos modelos que empregam as equações constitutivas elasto-plásticas será discutida de um modo genérico, concentrando-se nos aspectos básicos do problema.

Cabe lembrar, de início, uma das deficiências dos modelos elasto-plásticos. O comportamento viscoso exibido em grau variado por diferentes solos não é por eles contemplado. A representação desse tipo de fenômeno fica a cargo dos modelos visco-elasto-plásticos que, entretanto, não tomam parte neste trabalho.

4.2 Breve Histórico

Desde seu princípio a Mecânica dos Solos tem empregado as Teorias da Elasticidade e da Plasticidade. No primeiro capítulo do livro clássico "Theoretical Soil Mechanics", de 1943, Terzaghi deixa clara a abordagem da época. Os problemas de Mecânica dos Solos eram classificados em dois grupos: os problemas de estabilidade e os problemas de elasticidade. Na solução dos

problemas de estabilidade, como o cálculo de empuxos de terra extremos, da capacidade de carga de fundações ou do equilíbrio de taludes, onde não interessam as deformações que se deram até a iminência da ruptura, seria utilizada a Teoria da Plasticidade, desenvolvida na época para os metais, pela qual os solos seriam tratados como materiais plásticos perfeitos. Os problemas de elasticidade, que mais propriamente deveriam denominar-se problemas de deformação, como, por exemplo, o cálculo de recalques, seriam resolvidos pela Teoria da Elasticidade (Linear) já bem conhecida, munida de diversas soluções analíticas de interesse prático para a engenharia geotécnica.

O emprego da Teoria da Plasticidade para o cálculo de deformações nos solos, que, como se sabe, são em parte irreversíveis e dependem das tensões de uma forma não-linear, tal qual se faz nos dias de hoje, constituiu uma grande evolução em relação àquela época. A primeira tentativa nesse sentido se deu em 1952, quando Drucker e Prager propuseram uma função de plastificação para os solos (ainda idealizados como materiais elasto-plásticos perfeitos) obtida de modificações no critério de resistência de Mohr-Coulomb, cuja expressão matemática é:

$$\tilde{f}(I, J) = \sqrt{J} - \alpha I - k \quad (4.1)$$

em que α e k são constantes positivas características do solo e análogas à tangente do ângulo de atrito e à coesão. A fig.4.1 mostra a superfície de plastificação correspondente: a de um cone que tem a diagonal do espaço por eixo. Nesse trabalho, seus autores chegaram à conclusão de que a adoção do novo critério de Drucker-Prager ou do próprio critério de Mohr-Coulomb como potencial plástico leva à previsão de expansão exagerada (vetor taxa de deformação plástica com componente volumétrica negativa) em desacordo com a realidade física observada. Isto vinha como consequência de se ter confundido, até aquela época, plastificação com ruptura, que, se para os metais é uma boa aproximação, para os solos é inadmissível.

Mas a evolução mais significativa para a Teoria da Plasticidade aplicada à Mecânica dos Solos se deu com o trabalho "Soil Mechanics and Work-Hardening Theories of Plasticity" de Drucker, Gibson e Henkel, publicado em 1955. Esse artigo contém algumas conclusões fundamentais:

- os solos não podem ser tratados como materiais plásticos perfeitos (plastificação e ruptura são inteiramente distintas); seu comportamento

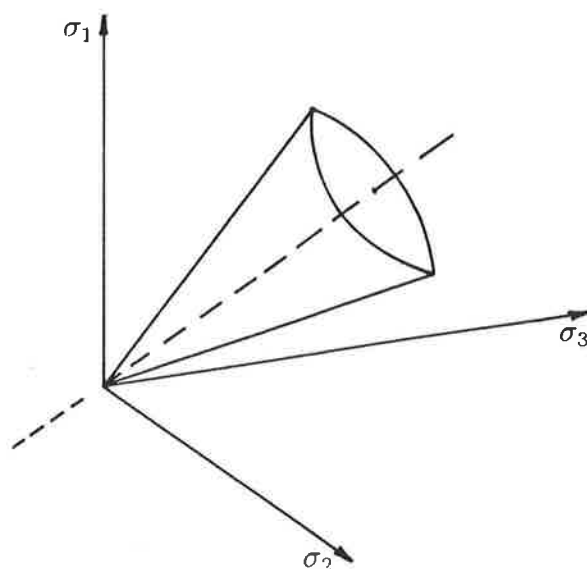


Figura 4.1: Superfície de plastificação de Drucker- Prager.

se assemelha ao dos materiais elasto-plásticos com endurecimento ou amolecimento;

- a superfície de plastificação dos solos deve obrigatoriamente interceptar a diagonal do espaço das tensões. Sugeriram a superfície de plastificação mostrada na fig.4.2: uma capa esférica acoplada ao cone de Drucker-Prager).

As novas idéias foram aproveitadas pelo grupo de Mecânica dos Solos da Universidade de Cambridge, Inglaterra, que criou, na década de 1960, o primeiro modelo elasto-plástico para solos. Liderados por Roscoe, aliando as sugestões de Drucker, Gibson e Henkel a uma forte base experimental e ao conceito de estado crítico, elaboraram o modelo "Cam-Clay" , que merecerá tratamento especial no capítulo seguinte.

Desde então até os dias de hoje a pesquisa na área dos modelos reológicos para solos tem-se intensificado, revelando progressos nos campos experimental e teórico. Os desenvolvimentos nessa área vem sendo publicados tanto nas revistas que tratam da Engenharia Geotécnica de uma forma geral como em periódicos e simpósios dedicados ao tema.

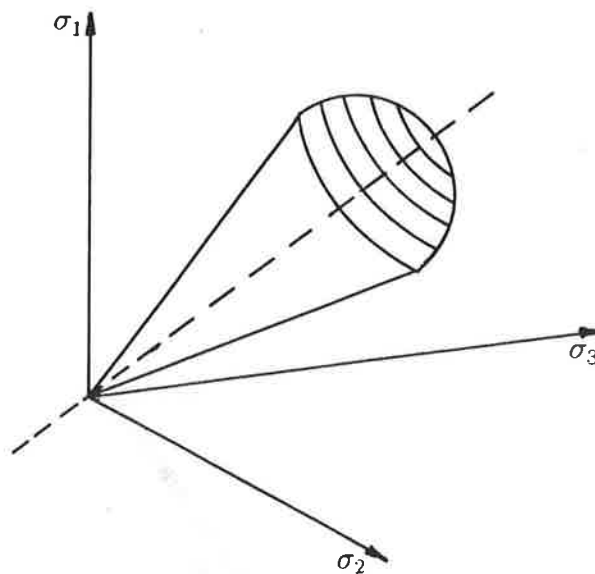


Figura 4.2: Superfície de plastificação sugerida por Drucker, Gibson e Henkel.

4.3 Aspectos Fundamentais do Comportamento dos Solos e os Modelos Elasto-Plásticos

As deformações em parte irreversíveis observadas nos ensaios de laboratório em corpos-de-prova de solo sugerem a utilização de modelos elasto-plásticos para sua representação matemática.

A fig.4.3 mostra curvas típicas obtidas de ensaios de compressão triaxial ($q \times \epsilon_a$) e isotrópica ($e \times \log p$). Embora se note nos laços de descarregamento-recarregamento a ocorrência de deformações irreversíveis, é, em muitos casos, aceitável idealizá-los como pertencentes ao domínio elástico. Essa hipótese está presente na maioria dos modelos elaborados para solos, excetuando-se, evidentemente, aqueles que procuram representar especificamente o comportamento nos carregamentos cíclicos. A aproximação se justifica quando se comparam as pequenas deformações irreversíveis que se dão nos ciclos de descarregamento-recarregamento com aquelas que ocorrem nos trechos de carregamento virgem das curvas. Usando a terminologia tradicional da Mecânica dos Solos, na compressão isotrópica ou edométrica as deformações

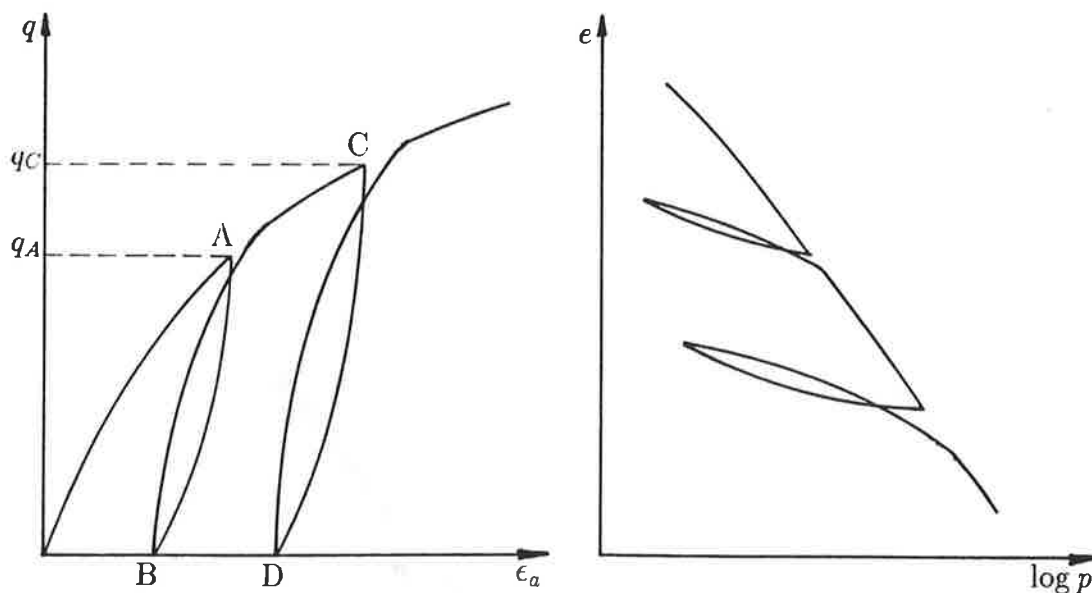


Figura 4.3: Curvas típicas. a) Ensaio de compressão triaxial. b) Ensaio de compressão isotrópica.

irreversíveis de um solo normalmente adensado são nitidamente maiores que as de um solo sobre-adensado.

Para reger a parte elástica dos modelos elasto-plásticos para solos, a equação constitutiva da hipoelasticidade (eq.3.3) é mais adequada, pois não exige, ao contrário da elasticidade e da hiperelasticidade, o conhecimento ou a existência de uma configuração de referência. Na eq.3.3 estão presentes a tensão de Cauchy, que mede força por unidade de área na configuração atual e a parte simétrica do gradiente espacial da velocidade.

Se os laços de descarregamento-recarregamento AB e CD da fig.4.3a. forem idealizados como trechos elásticos, as tensões desviadoras q_A e q_C serão as tensões de plastificação associadas, as quais aumentam com a deformação plástica. Ou seja, o comportamento é de material elasto-plástico com endurecimento. Esta foi uma das conclusões fundamentais a que chegaram Drucker, Gibson e Henkel (1955), conforme foi citado no item anterior.

A fig.4.3b (compressão isotrópica) mostra também comportamento de material elasto-plástico com endurecimento. Além disso, revela a ocorrência de deformações irreversíveis na ausência de tensões de cisalhamento. Este fato, muito conhecido desde os primórdios da Mecânica dos Solos, quando

interpretado à luz da Teoria da Plasticidade, o que se deu pela primeira vez no trabalho citado de Drucker, Gibson e Henkel, veio a exigir uma superfície de plastificação diferente das tradicionais destinadas aos metais (Tresca, von Mises) e estendidas de forma errônea aos solos. Se ocorrem deformações plásticas na compressão isotrópica, então é obrigatório que a superfície de plastificação dos solos interceptem a diagonal do espaço das tensões (fig.4.2).

A capacidade de representação de um modelo com essas características, em termos qualitativos, foi ressaltada na ocasião. Acompanhando a fig.4.4, três corpos-de-prova normalmente adensados comprimidos isotropicamente até A têm como curva de plastificação a indicada no desenho (obtida pela intersecção da superfície de plastificação com o plano $\sigma_2 = \sigma_3$). Se forem descarregados também isotropicamente, cada um deles a uma tensão diferente (pontos B, C e D) e, em seguida, carregados axialmente com drenagem, atingirão a superfície de plastificação em B', C' e D', respectivamente, a partir de onde passarão a sofrer deformações plásticas. A condição de normalidade da Teoria da Plasticidade determina que as taxas de deformação plástica, interpretadas agora como vetores, sejam normais à superfície de plastificação. A taxa de deformação plástica no ponto B' possui componente volumétrica (paralela à diagonal do espaço) positiva, ou seja, de compressão, enquanto que em C' é nula e, em D', negativa, isto é de expansão. Supondo que a taxa de deformação volumétrica elástica seja pequena, de sorte que o sinal da taxa de deformação volumétrica total seja determinado por sua parcela plástica, pode-se dizer que a previsão está em acordo com o comportamento observado, pelo menos qualitativamente, pois indica que um solo levemente sobreadensado se contrai e um solo altamente sobreadensado se expande na compressão axial. A uma certa razão de sobreadensamento intermediária a deformação plástica volumétrica é nula.

A forma como evolui a superfície de plastificação à medida que se dá a deformação plástica (ver cap.3) é uma outra característica importante dos modelos. O tipo mais simples de endurecimento e mais comumente adotado nos modelos para solos é o isotrópico, no qual a superfície de plastificação se expande homoteticamente mantendo sua forma e orientação no espaço das tensões. Combinações de endurecimento isotrópico e cinemático permitem levar em conta de modo mais completo a história da deformação, melhorando a capacidade de previsão em trajetórias de tensão complexas.

O livro "Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics" de autoria de Wood, publicado em 1990, traz no seu último capítulo um panorama atu-

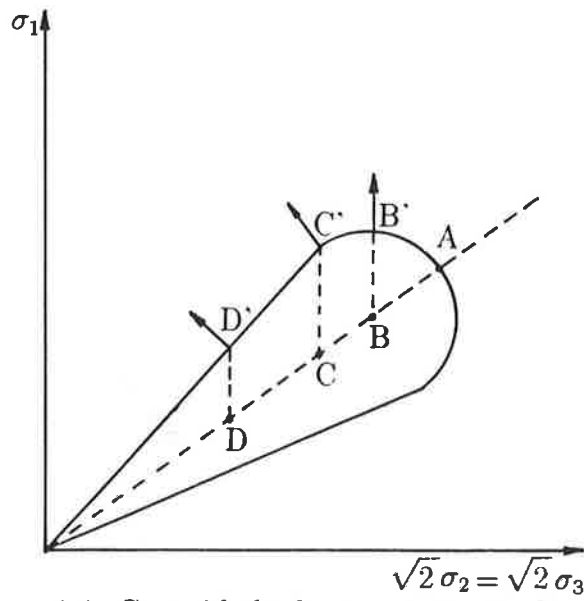


Figura 4.4: Capacidade de representação do modelo.

alizado de diversos modelos mais complexos, mostrando de forma descritiva como se especializam para melhor retratar uma ou outra característica do comportamento dos solos.

Capítulo 5

O MODELO CAM-CLAY

5.1 Introdução

No final da década de 1950 o grupo de Mecânica dos Solos da Universidade de Cambridge, Inglaterra, liderado por K.H. Roscoe deu início a uma série de pesquisas sobre o comportamento reológico dos solos que marcaram o começo de uma nova fase do desenvolvimento daquela ciência.

Apoiando-se em sólida base experimental, oriunda de investigações laboratoriais cuidadosas feitas tanto pelos membros do grupo como também por pesquisadores de fora dele (Hvorslev, 1937; Rendulic, 1937 e Parry, 1956 *apud* Roscoe e Burland, 1968; Henkel, 1956 e outros), e empregando conceitos da Teoria da Plasticidade que, havia pouco, recebera modificações importantes para se adequar a algumas peculiaridades do comportamento dos solos (Drucker, Gibson e Henkel, 1955, ver cap. 4), a equipe de Cambridge elaborou o primeiro modelo reológico representativo para solos: o Cam-Clay.

Pode-se acompanhar a evolução dos estudos pela leitura dos trabalhos publicados por Roscoe e colaboradores (Roscoe, Schofield e Wroth, 1958; Roscoe e Poorooshasb, 1963, Roscoe, Schofield e Thurairajah, 1963, Calladine, 1963, Burland, 1965; Roscoe, Schofield e Thurairajah, 1965), onde se percebe, partindo do conceito de estado crítico fundamentado por evidências experimentais, a crescente incorporação da teoria até culminar no modelo elasto-plástico final.

Em 1968, Schofield e Wroth publicaram seu livro "Critical State Soil Mechanics". Nesse mesmo ano, o Cam-Clay recebeu modificações e a ge-

neralização para estados triaxiais de tensão e deformação (Roscoe e Burland, 1968).

Desde então observa-se a proliferação de modelos cada vez mais complexos. O próprio Cam-Clay sofreu modificações mais recentes (Atkinson e Bransby, 1978, Mróz, Norris e Zienkiewicz, 1979; Houlsby, Wroth e Wood, 1984 entre outros). O mais novo livro sobre a Mecânica dos Solos do Estado Crítico, modelos matemáticos e aplicações, publicado em 1990, é de autoria de Wood.

Neste capítulo procura-se apresentar o Cam-Clay de um modo diferente daquele pelo qual seus autores o fizeram e outros o fazem; não é seguida sua evolução histórica tampouco é mostrada sua construção a partir das observações experimentais, o que seria mais interessante do ponto de vista didático e mais fiel ao curso natural das pesquisas. Descreve-se-o em estreita conexão com a formulação das relações constitutivas elasto-plásticas tratadas no cap.3, em linguagem matemática mais moderna e mais rigorosa que a comumente empregada. São especificadas a função de plastificação (coincidente com o potencial plástico), a lei de endurecimento isotrópico e a relação tensão-deformação elástica. A relação tensão-deformação plástica será deduzida.

A função de plastificação adotada neste trabalho gera a superfície de plastificação do Cam-Clay modificado em estados genéricos de tensão. A lei de endurecimento introduzida substitui a expressão da potência plástica do Cam-Clay Modificado tornando a dedução da relação tensão- deformação plástica mais clara no presente contexto. A relação tensão-deformação elástica é uma generalização da usada, por exemplo, por Atkinson e Bransby e Houslby, Wroth e Wood. Na compressão isotrópica a lei de variação do índice de vazios é a proposta por Butterfield (1979) e incorporada ao Cam-Clay por Houlsby, Wroth e Wood.

Após a apresentação da formulação geral, simplifica-se o modelo para estados de tensão e deformação ocorrentes nos ensaios triaxiais (adquirindo forma semelhante à trazida pelos livros e trabalhos sobre a Mecânica dos Solos do Estado Crítico).

É importante lembrar que a convenção da Mecânica dos Solos considera tensões e deformações de compressão como sendo positivas.

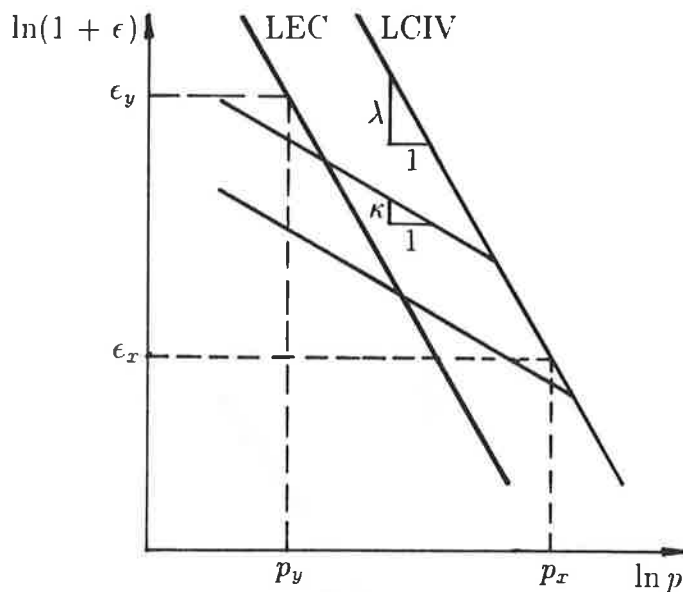


Figura 5.1: Relação entre p e ϵ na compressão isotrópica e no estado crítico.

5.2 Relações Constitutivas

5.2.1 Parâmetros do Modelo

O Cam-Clay é um modelo elasto-plástico com endurecimento isotrópico e potencial plástico coincidente com a função de plastificação, cujas relações tensão-deformação envolvem quatro parâmetros característicos do material.

Antes de partir para a formulação matemática é necessário definir os parâmetros λ , κ , M e G , aproveitando para antecipar alguns aspectos do comportamento do modelo ¹.

A compressão isotrópica do Cam-Clay com ciclo de descarga-recarga tem como resposta a indicada no gráfico $\ln p \times \ln(1 + e)$ da fig.5.1 (sendo p a pressão e e o índice de vazios).

Neste gráfico a Linha de Compressão Isotrópica Virgem (LCIV) e as linhas de descarga e recarga são retas com coeficientes angulares $-\lambda$ e $-\kappa$ respectivamente. Sendo (p_x, e_x) um ponto qualquer pertencente a LCIV, sua

¹Deve-se chamar a atenção para o fato de os parâmetros λ e κ aqui definidos não serem os mesmos do Cam-Clay Modificado, mas sim λ^* e κ^* da versão de Houlsby, Wroth e Wood.

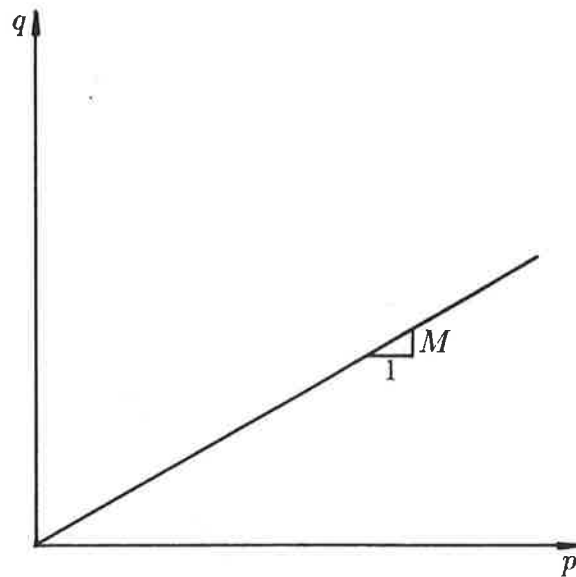


Figura 5.2: Relação entre p e q no estado crítico.

equação é:

$$\ln \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon_x} = -\lambda \ln \frac{p}{p_x} \quad (5.1)$$

O modelo supõe a existência do estado crítico, para o qual tende o solo se submetido à distorção crescente. No estado crítico o material continua a se distorcer sem variação de índice de vazios, mesmo que as tensões permaneçam inalteradas (conceito introduzido por Roscoe, Schofield e Wroth, 1958). Sendo σ_a a tensão axial e σ_r a tensão radial num ensaio triaxial de compressão ($\sigma_a > \sigma_r$), a relação entre $q = \sigma_a - \sigma_r$ e $p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3$ no estado crítico define o parâmetro M :

$$q = Mp \quad (5.2)$$

A fig.5.2 mostra graficamente essa relação entre p e q .

Uma única relação existe entre ϵ e p no estado crítico e é representada por uma reta paralela à LCIV e deslocada para a esquerda no plano $(\ln p, \ln(1+\epsilon))$ (fig.5.1), cuja equação é:

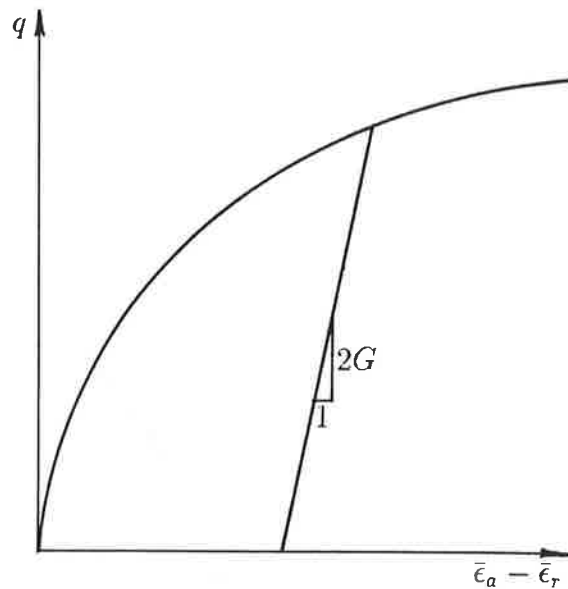


Figura 5.3: Curva $q \times \bar{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_r$.

$$\ln \frac{1 + e}{1 + e_y} = -\lambda \ln \frac{p}{p_y} \quad (5.3)$$

em que (p_y, e_y) é um ponto qualquer conhecido dessa curva. As equações 5.2 e 5.3 definem a Linha do Estado Crítico (LEC) no espaço (p, q, e) .

Um ensaio triaxial de compressão com ciclo de descarga-recarga com o Cam-Clay forneceria a curva $q \times (\bar{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_r)$ da fig.5.3, em que $\bar{\epsilon}_a$ e $\bar{\epsilon}_r$ são as deformações naturais axial e radial. O coeficiente angular da reta de descarga-recarga é $2G$.

Definidos os parâmetros λ, κ, M (adimensionais) e G (dimensão de tensão) passa-se à formulação geral do modelo, para depois, particularizar suas equações para estados de tensão e deformação encontrados em ensaios triaxiais.

5.2.2 Função de Plastificação

A função de plastificação do Cam-Clay, expressa em termos das tensões principais é:

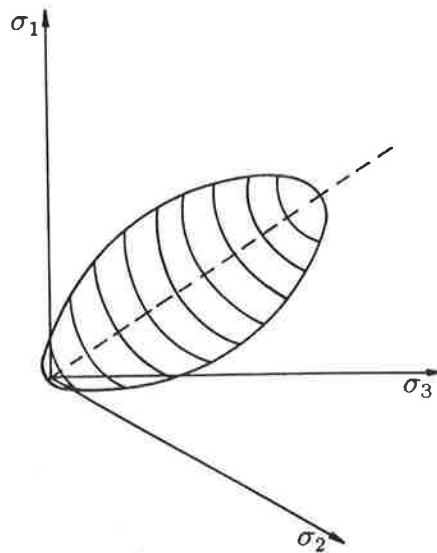


Figura 5.4: Superfície de plastificação.

$$f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = \frac{(9 + M^2)(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + (2M^2 - 9)(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_2\sigma_3 + \sigma_3\sigma_1)}{3M^2(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)} - p_0 \quad (5.4)$$

Em que p_0 é um parâmetro de endurecimento isotrópico, aqui chamado pressão equivalente (componente da tensão esférica que leva à plastificação).

A superfície de plastificação, dada pela equação $f(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3) = 0$ é a superfície externa do elipsóide de eixo contido na diagonal do espaço das tensões (fig.5.4). O ponto de intersecção do elipsóide com a diagonal do espaço, além da origem $(0, 0, 0)$, tem coordenadas (p_0, p_0, p_0) .

Pode-se escrever a função de plastificação do Cam-Clay em termos dos invariantes I_T e II_{T_0} , que, para aliviar a notação, serão designados a partir de agora por I e J , respectivamente, quando assume a seguinte forma:

$$f(\mathbf{T}) = \tilde{f}(I, J) = \frac{I}{3} + \frac{9J}{M^2 I} - p_0 \quad (5.5)$$

A equação $\tilde{f}(I, J) = 0$, corresponde a uma curva de plastificação em forma de semi-elipse com coordenadas (I, \sqrt{J}) .

5.2.3 Relação Tensão-Deformação

Conforme foi visto no cap.3, a taxa de deformação se divide nas parcelas elástica e plástica que serão objeto da discussão seguinte.

Taxa de Deformação Elástica

A taxa de deformação elástica do Cam-Clay é dada por:

$$\mathbf{D}^e = \frac{\kappa \dot{I}}{3I} \mathbf{1} + \frac{1}{2G} \mathbf{T}_0 \quad (5.6)$$

Para uso futuro calculam-se o primeiro invariante de \mathbf{D}^e e o segundo invariante de \mathbf{D}_0^e :

$$I_{D^e} = \kappa \frac{\dot{I}}{I} \quad (5.7)$$

$$II_{D_0^e} = \left(\frac{1}{2G}\right)^2 II_{\dot{\tau}_0} \quad (5.8)$$

Taxa de Deformação Plástica

No Cam-Clay o potencial plástico coincide com a função de plastificação e a taxa de deformação plástica tem a forma dada pela equação:

$$\mathbf{D}^p = m \nabla f(\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (5.9)$$

Em termos dos invariantes I e J e da função $\hat{f}(I, J)$ (eq. 5.5) a expressão de \mathbf{D}^p passa a ser:

$$\mathbf{D}^p = m \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial I} \mathbf{1} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial J} \mathbf{T}_0 \right) \left(\frac{\partial \hat{f}}{\partial I} \dot{I} + \frac{\partial \hat{f}}{\partial J} \dot{J} \right) \quad (5.10)$$

ou:

$$\mathbf{D}^p = m [(\zeta_1^2 \dot{I} + \zeta_1 \zeta_2 \dot{J}) \mathbf{1} + (\zeta_1 \zeta_2 \dot{I} + \zeta_2^2 \dot{J}) \mathbf{T}_0] \quad (5.11)$$

em que, para tornar mais compactas as fórmulas, introduziram-se ζ_1 e ζ_2 , dados por:

$$\zeta_1 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial I} = \frac{1}{3} - \frac{9J}{M^2 I^2} \quad (5.12)$$

$$\zeta_2 = \frac{\partial \tilde{f}}{\partial J} = \frac{9}{IM^2} \quad (5.13)$$

A determinação de m pela condição de consistência, requer o conhecimento da lei de endurecimento. O Cam-Clay apresenta endurecimento isotrópico governado pela pressão equivalente p_0 , que comanda o tamanho da superfície de plastificação. Neste modelo a derivada de p_0 com relação ao tempo relaciona-se com a tensão e com a taxa de deformação plástica de acordo com a seguinte equação: ².

$$\dot{p}_0 = \zeta_1 \frac{I}{\lambda - \kappa} \sqrt{I_{D^p}^2 + \frac{4}{3} M^2 II_{D_0^p}} \quad (5.14)$$

Calculando os invariantes I_{D^p} e $II_{D_0^p}$ a partir da eq.5.9, utilizando $\nabla f = (\partial \tilde{f}/\partial I)\mathbf{1} + (\partial \tilde{f}/\partial J)\mathbf{T}_0$, têm-se:

$$I_{D^p} = 3\zeta_1 m (\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (5.15)$$

$$II_{D_0^p} = \zeta_2^2 m^2 (\nabla f : \dot{\mathbf{T}})^2 J \quad (5.16)$$

e substituindo na expressão 5.14, chega-se a:

$$\dot{p}_0 = \frac{mI}{3} (\lambda - \kappa) \left[1 - \left(\frac{27J}{M^2 I^2} \right)^2 \right] (\nabla f : \dot{\mathbf{T}}) \quad (5.17)$$

Evoca-se, agora, a equação de consistência (ver cap.3):

$$\nabla f : \dot{\mathbf{T}} + \frac{\partial f}{\partial p_0} \dot{p}_0 = 0 \quad (5.18)$$

Substituindo-se nesta $\partial f/\partial p_0 = -1$ (ver eq.5.4) e \dot{p}_0 calculado acima obtém-se:

²Em vez de especificar uma lei para p_0 como foi feito aqui, os autores do Cam-Clay adotam uma expressão para a potência plástica (diferente no Cam-Clay Básico (Schofield e Wroth, 1968) e no Cam-Clay modificado (Roscoe e Burland, 1968) cujo significado físico é obscuro. Optou-se por seguir um caminho de dedução mais direto no qual se admitiu a validade da relação 5.14 sem qualquer apelo físico.

$$m = \frac{3(\lambda - \kappa)}{I} \frac{1}{1 - \left(\frac{27J}{M^2 I^2}\right)^2} \quad (5.19)$$

Voltando à equação 5.11 chega-se finalmente à relação procurada:

$$\mathbf{D}^P = \frac{3(\lambda - \kappa)}{I} \frac{1}{1 - \left(\frac{27J}{M^2 I^2}\right)^2} [(\zeta_1^2 \dot{I} + \zeta_1 \zeta_2 \dot{J})\mathbf{1} + (\zeta_1 \zeta_2 \dot{I} + \zeta_2^2 \dot{J})\mathbf{T}_0] \quad (5.20)$$

5.2.4 Estado Crítico

Submetendo o Cam-Clay à distorção crescente, seu estado tende ao chamado estado crítico (já abordado no início da seção), no qual o estado de tensões é tal que satisfaz um critério tipo Drucker-Prager (Drucker e Prager, 1952):

$$\frac{J}{I^2} = \frac{M^2}{27} \quad (5.21)$$

A fig.5.5 mostra, no espaço das tensões principais, uma superfície de plastificação e a superfície do estado crítico (a de um cone com vértice na origem e eixo contido na diagonal do espaço).

No estado crítico o índice de vazios e o primeiro invariante da tensão estão ligados pela equação:

$$\ln \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon_y} = -\lambda \ln \frac{I}{I_y} \quad (5.22)$$

em que (ϵ_y, I_y) é um par qualquer conhecido de um estado crítico.

A intersecção de um plano onde duas tensões principais são iguais, como acontece nos ensaios triaxiais, com as superfícies da fig.5.5 está representada na fig.5.6. É importante destacar a diferença de comportamento do Cam-Clay a partir de estados de tensão representados por pontos abaixo (X) e acima (Y) da superfície do estado crítico. Continuando o carregamento pela trajetória XX', o comportamento será de material plástico com endurecimento (a superfície de plastificação se ampliará) até que seja atingido o estado crítico em X'. Por outro lado, caso se imponha a continuação da deformação a partir de Y, o comportamento será de material plástico com amolecimento (a superfície de plastificação se contrairá) até que o estado crítico em Y' seja alcançado. O ponto Y está associado a um pico na curva tensão-deformação.

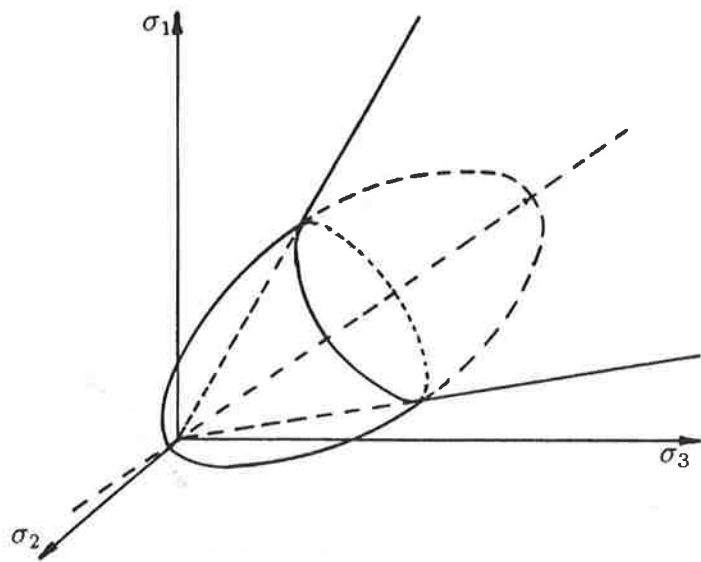


Figura 5.5: Superfície do estado crítico e superfície de plastificação

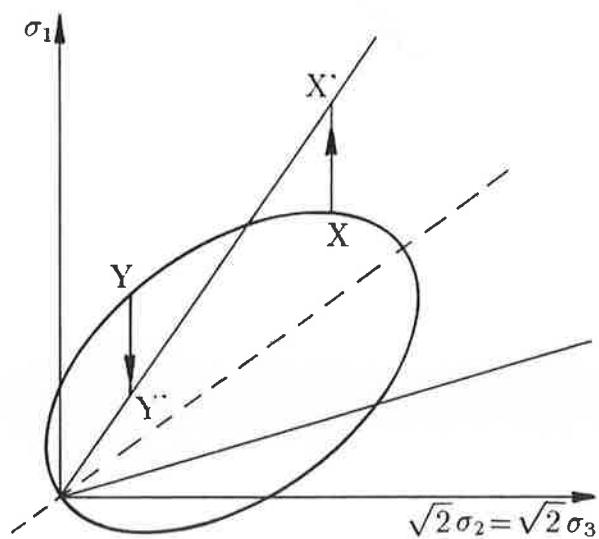


Figura 5.6: Endurecimento e amolecimento no Cam-Clay

Evidências experimentais indicam que o critério de Mohr-Coulomb:

$$\frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{\sigma_I + \sigma_{III}} = \text{sen } \phi \quad (5.23)$$

onde σ_I e σ_{III} são as tensões principais maior e menor, respectivamente e ϕ , o ângulo de atrito, representa mais fielmente o estado crítico no que se refere a tensões. Este assunto será retomado na próxima seção.

5.3 Particularização das Relações Constitutivas para os Estados de Tensão e Deformação dos Ensaios Triaxiais

5.3.1 Parâmetros de Tensão e Deformação

Na interpretação dos ensaios triaxiais convencionais, em que um corpo-de-prova cilíndrico é submetido a pressão confinante e a carga axial, admite-se que o estado de tensão seja o mesmo em todos os pontos, sendo duas tensões principais iguais à tensão radial (σ_r) e a terceira tensão principal igual à tensão axial (σ_a). Os invariantes expressos em função de σ_a e σ_r , valem $I = \sigma_a + 2\sigma_r$ e $J = (\sigma_a - \sigma_r)^2/3$.

São mais comuns na análise de ensaios triaxiais os parâmetros:

$$p = \frac{\sigma_a + 2\sigma_r}{3} \quad (5.24)$$

$$q = |\sigma_a - \sigma_r| \quad (5.25)$$

guardando, portanto, com os invariantes I e J , as relações:

$$I = 3p \quad (5.26)$$

$$J = \frac{q^2}{3} \quad (5.27)$$

Será também empregado o parâmetro η definido por:

$$\eta = \frac{q}{p} \quad (5.28)$$

Analogamente, admite-se que a taxa de deformação seja a mesma em todo o corpo-de-prova, distinguindo-se as componentes axial (D_a) e radial (D_r). Os invariantes I_D e II_{D_0} tornam-se $I_D = D_a + 2D_r$ e $II_{D_0} = (D_a - D_r)^2/3$.

Como parâmetros da taxa de deformação serão empregados os escalares taxa de deformação volumétrica (ω) e taxa de distorção (γ) definidos por:

$$\omega = D_a + 2D_r \quad (5.29)$$

$$\gamma = |D_a - D_r| \quad (5.30)$$

que se relacionam com os invariantes através das expressões:

$$I_D = \omega \quad (5.31)$$

$$II_{D_0} = \frac{\gamma^2}{3} \quad (5.32)$$

Da mesma forma definem-se $\omega^e, \gamma^e, \omega^p$ e γ^p , associadas às parcelas D^e e D^p .

5.3.2 Função de Plastificação

Partindo da equação geral 5.5 chega-se à função de plastificação para o caso em discussão, em termos de p e q :

$$\hat{f}(p, q) = p + \frac{q^2}{M^2 p} - p_0 \quad (5.33)$$

A curva de plastificação

$$p + \frac{q^2}{M^2 p} - p_0 = 0 \quad (5.34)$$

é uma semi-elipse (recordando que q nunca é negativo) como mostra a fig.5.7, onde se vê também a reta do estado crítico ($q = Mp$).

5.3.3 Relação Tensão-Deformação

Introduzindo $p, q, \eta, \omega^e, \gamma^e, \omega^p$ e γ^p nas equações constitutivas da subseção 5.2.3 por intermédio dos invariantes, obtêm-se as relações entre esses parâmetros apropriadas para a análise de ensaios triaxiais:

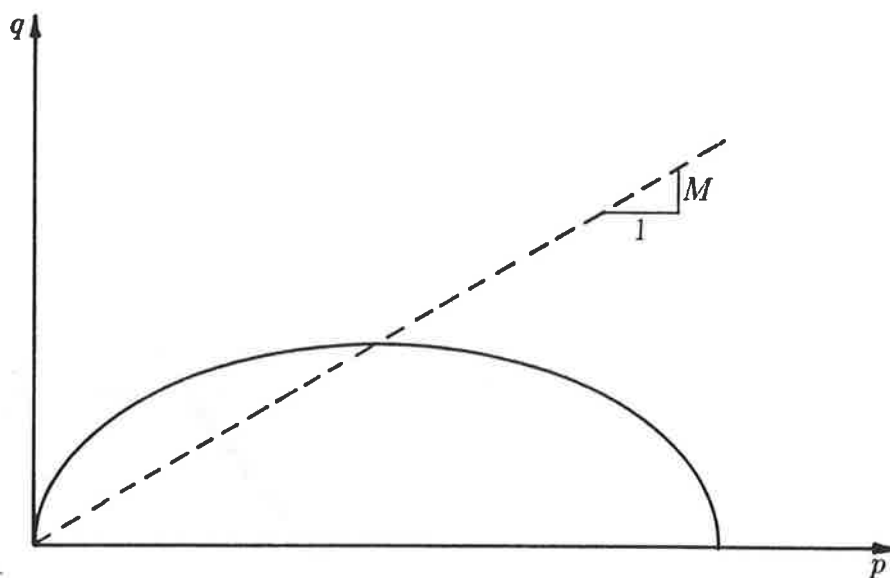


Figura 5.7: Curva de plastificação

$$\omega^e = \kappa \frac{\dot{p}}{p} \quad (5.35)$$

$$\gamma^e = \frac{1}{2G} \dot{q} \quad (5.36)$$

$$\omega^p = (\lambda - \kappa) \left(\frac{\dot{p}}{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right) \quad (5.37)$$

$$\gamma^p = (\lambda - \kappa) \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \left(\frac{\dot{p}}{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right) \quad (5.38)$$

Note-se que γ^p e ω^p estão ligados (por meio do potencial plástico) pela relação:

$$\frac{\gamma^p}{\omega^p} = \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \quad (5.39)$$

A taxa de deformação volumétrica (total) é dada por:

$$\omega = \omega^e + \omega^p = \lambda \frac{\dot{p}}{p} + (\lambda - \kappa) \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \quad (5.40)$$

5.3.4 Estado Crítico

No início do capítulo foi visto que o estado crítico é caracterizado pelas equações $q = Mp$ e $\ln[(1 + e)/(1 + e_y)] = -\lambda \ln(p/p_y)$. Observa-se, entretanto, em ensaios triaxiais de compressão e extensão, que o critério de Mohr-Coulomb (eq.5.23) representa com mais fidelidade os estados críticos no que se refere a tensões conforme ressaltam Roscoe e Burland (1968).

Para expressá-lo em termos dos parâmetros p e q é necessário fazer a separação entre as situações de compressão ($\sigma_a > \sigma_r$) e extensão ($\sigma_a < \sigma_r$). Na compressão $\sigma_I = \sigma_a$, sendo

$$p = \frac{\sigma_I + 2\sigma_{III}}{3} \quad (5.41)$$

$$\eta = \frac{q}{p} = 3 \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{\sigma_I + 2\sigma_{III}} \quad (5.42)$$

Na extensão $\sigma_I = \sigma_r$, resultando

$$p = \frac{2\sigma_I + \sigma_{III}}{3} \quad (5.43)$$

$$\eta = \frac{q}{p} = 3 \frac{\sigma_I - \sigma_{III}}{2\sigma_I + \sigma_{III}} \quad (5.44)$$

Roscoe e Burland (op.cit.) propõe como hipótese *ad hoc* a adoção do critério de Mohr-Coulomb para o estado crítico. Deduz-se das equações acima que, se se adotar M como sendo o valor de η no estado crítico dos ensaios de compressão, então, para satisfazer o critério de Mohr-Coulomb, η nos ensaios de extensão deve ser limitado ao valor $\frac{3M}{3+M}$. Nesse caso vale a relação:

$$\text{sen } \phi = \frac{3M}{6 + M} \quad (5.45)$$

5.3.5 Superfície Limite de Estado

A taxa de variação do índice de vazios pode ser obtida a partir da taxa de deformação volumétrica ω , pois :

$$\omega = \frac{\dot{e}}{1 + e} \quad (5.46)$$

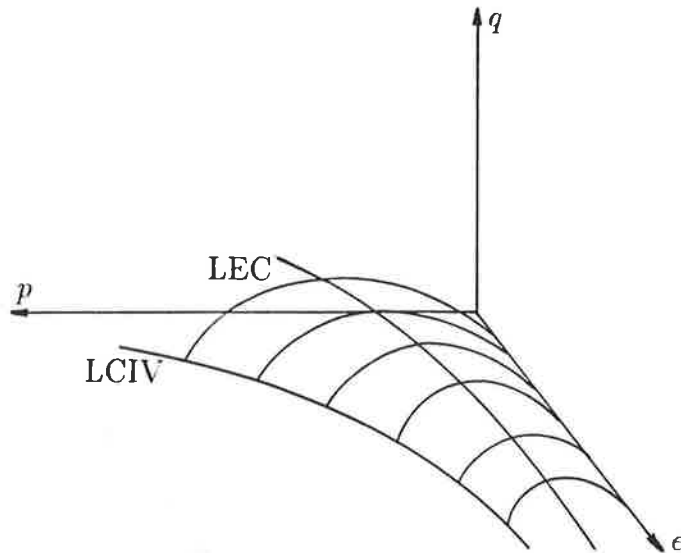


Figura 5.8: Superfície Limite de Estado

No regime elasto-plástico, usando a eq.5.40, chega-se a :

$$\frac{\dot{\epsilon}}{1 + \epsilon} = \lambda \frac{\dot{p}}{p} + (\lambda + \kappa) \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \quad (5.47)$$

que integrada, com a condição de que, para $\eta = 0$, torne-se a equação (5.1) da linha de compressão isotrópica virgem (LCIV), fornece:

$$\ln \frac{1 + \epsilon}{1 + \epsilon_x} = -\lambda \ln \frac{p}{p_x} - (\lambda - \kappa) \ln \frac{M^2 + \eta^2}{M^2} \quad (5.48)$$

Esta é a equação da chamada Superfície Limite de Estado (SLE) no espaço (p, q, ϵ) (fig.5.8).

Durante o regime elasto-plástico a trajetória de estado (conjunto dos pontos (p, q, ϵ)) permanece sobre a SLE, ao passo que, no regime elástico, a trajetória de estado desenvolve-se no interior da região por ela limitada. Estados representados por pontos na região exterior não podem existir.

A intersecção do plano $q = Mp$ com a superfície limite de estado resulta na linha do estado crítico (LEC), cuja projeção no plano (p, ϵ) é dada pela eq.5.3.

Capítulo 6

ENSAIOS REALIZADOS

6.1 Origem do Solo Estudado

No campo experimental de fundações da Escola Politécnica, localizado na Cidade Universitária, encontra-se um solo residual de migmatito, predominantemente siltoso, que forneceu o material para essa pesquisa. Algumas de suas características de resistência e deformabilidade no estado natural, bem como suas propriedades físicas foram abordadas na publicação EPUSP/ABEF (1990) e, posteriormente, com mais pormenores, num trabalho de Pinto e Nader (1991). Segundo a análise mineralógica realizada pelo IPT encontram-se nesse solo caulinitas, ilitas, goethita e quartzo.

6.2 Caracterização do Solo e Preparação dos Corpos-de-Prova

Uma grande quantidade desse material foi retirada de um talude do campo experimental e, depois de transportada ao laboratório, teve sua desestruturação completada. Por peneiramento eliminaram-se as partículas maiores que a abertura da peneira 10 (2mm). A curva granulométrica desse solo está na fig.6.1. Apresenta limite de liquidez igual a 47%, índice de plasticidade 18% e peso específico dos grãos $26,5 \text{ kN/m}^3$, que se situam na média dos valores do campo experimental.

Tendo em vista a confecção dos corpos-de-prova, a cerca de 3 kg do solo,

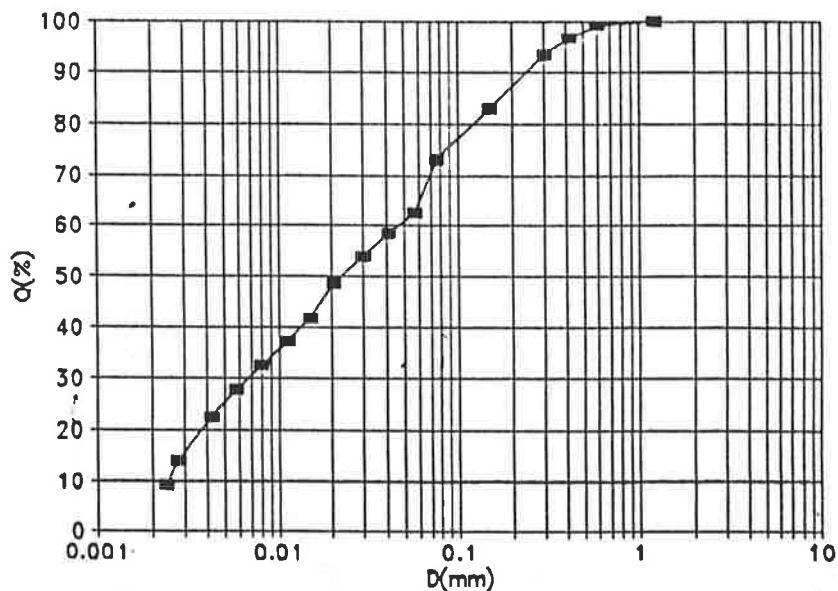


Figura 6.1: Curva granulométrica

seco ao ar, juntava-se água, deixando a mistura com consistência fluida em umidade da ordem de 60%. A lama era colocada no interior de uma grande membrana de borracha com abertura apenas na parte superior, que por sua vez, encontrava-se esticada dentro de um tubo de PVC perfurado (11,8 cm de diâmetro e 24,2 cm de altura) postado sobre a base de uma câmara de ensaios triaxiais (procedimento semelhante ao descrito por Costa Filho, 1980). A membrana era fechada com um conjunto de pedra porosa e cabeçote. Em seguida o material era submetido a adensamento isotrópico sob pressão confinante de 20 kPa. Terminado o adensamento obtinha-se um cilindro de solo com dimensões próximas das do tubo de PVC, com consistência suficiente (umidade de 41% e índice de consistência 0,33) para que dele se pudesse moldar corpos-de-prova para ensaios triaxiais e edométricos.

6.3 Técnicas de Ensaio

6.3.1 Ensaios de Compressão Edométrica

Os corpos-de-prova para os ensaios edométricos tinham altura de 3,0 cm e diâmetro de 10,1 cm. Foram realizados três ensaios com carga controlada, que serão identificados pelas siglas CE46, CE47 e CE48. Nos três experimentos a seqüência de carregamento foi a mesma. Iniciando com uma tensão vertical de 10 kPa no primeiro estágio, a compressão continuava dobrando-se o valor da carga até que atingisse 1280 kPa no oitavo estágio, a partir de quando passava-se à descompressão reduzindo-se a carga à metade do valor anterior até 10 kPa no último estágio. Nos ensaios CE46 e CE48 cada estágio durava 60 min, ao passo que, no ensaio CE47, levava 24 h. A variação da altura do corpo-de-prova era medida com um deflectômetro.

6.3.2 Ensaios de Compressão Isotrópica

Foram realizados dois ensaios, designados abreviadamente por CI7 e CI26, em que os corpos-de-prova tinham altura e diâmetro iniciais em torno de 3,57 e 9,0 cm respectivamente. No primeiro deles dobrou-se o valor da pressão confinante a partir de 75 kPa até 1200 kPa no quinto estágio, a partir de quando efetuou-se um ciclo de descarga-recarga com a seguinte seqüência de pressões confinantes: 600, 300, 150, 300, 600 e 1200 kPa. O segundo ensaio deu-se com carregamento monotônico entre 75 e 1200 kPa como na etapa inicial do ensaio anterior.

Um equipamento fabricado pela Wykeham Farrance capaz de aplicar e manter pressões durante longos períodos foi empregado. Nesse equipamento óleo pressurizado por uma bomba comprime uma mola que permite a medida da pressão. A interface entre o óleo e a mola é feita por um pistão rotativo. O atrito se reduz consideravelmente por efeito da rotação.

Com a finalidade de determinar a variação de volume dos corpos-de-prova, empregavam-se buretas graduadas. Concomitantemente media-se a variação de altura do corpo-de-prova com um deflectômetro preso ao pistão. Para que o pistão acompanhasse o topo do corpo-de-prova no seu movimento, ele era enroscado ao cabeçote. Com essa medida era possível calcular indiretamente a variação de volume a fim de que se a confrontasse com a medida direta obtida através das buretas.

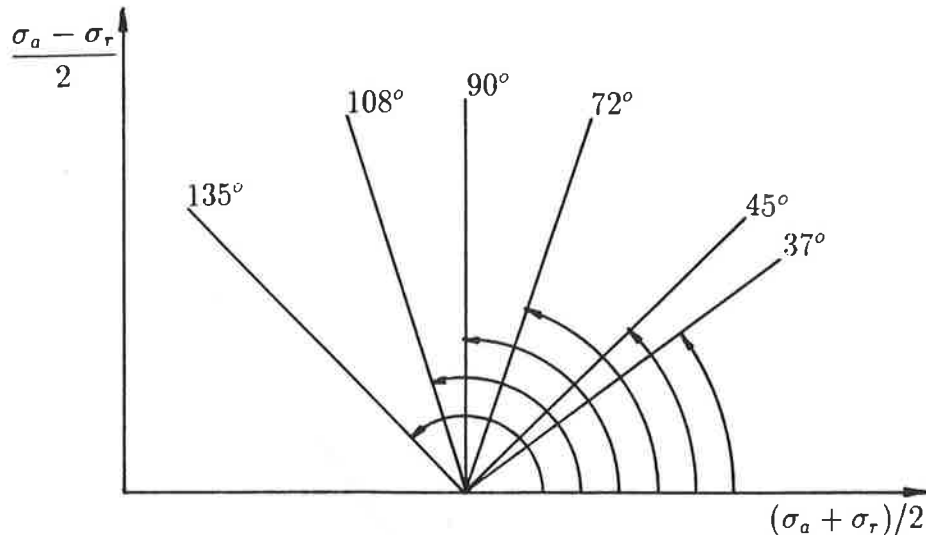


Figura 6.2: Trajetórias de tensão dos ensaios realizados

6.3.3 Ensaios Triaxiais

Nessa série de experimentos cada corpo-de-prova, de 3,57 cm de diâmetro e 9,0 cm de altura aproximadamente, era inicialmente adensado isotropicamente. Em seguida alteravam-se as tensões axial σ_a e radial σ_r de modo a lhe impor uma das seguintes trajetórias de tensão (fig.6.2), que serão identificadas pelo ângulo que formam com o eixo das abscissas no diagrama $(\sigma_a - \sigma_r)/2 \times (\sigma_a + \sigma_r)/2$.

Dois ensaios de cada uma das trajetórias 37°, 72°, 90°, 108° e 135° foram realizados, todos com pressão confinante de adensamento de 200 kPa. Com a trajetória 45° três ensaios foram feitos, dos quais dois com pressão de adensamento 200 kPa e ciclo de descarga-recarga e um com 400 kPa e carregamento monotonicamente crescente. Os símbolos CT37, CT45, CT72, CT90, CT108 e CT135, designarão os grupos de ensaios efetuados com as trajetórias correspondentes.

Os ensaios, realizados com carga controlada, eram divididos, na maioria dos casos, em treze etapas de alteração das tensões axial e radial, a partir do estado isotrópico de tensão, segundo a trajetória pretendida. Nas sete primeiras impunham-se variações da tensão axial e da tensão radial de valor

igual a um décimo das variações que levariam à ruptura, conforme previsão baseada nos ângulos de atrito encontrados em ensaios anteriores. Nas demais etapas as variações eram reduzidas à metade até a ruptura do corpo-de-prova. A variação de volume era indicada por buretas graduadas.

A pressão confinante era aplicada e mantida pelo equipamento da Wykeham Farrance mencionado na seção anterior. Transdutores mediam a pressão neutra e a pressão confinante aplicada permitindo que se processassem com precisão as pequenas alterações no valor desta última requeridas por algumas trajetórias. Deflectômetros localizados fora da câmara triaxial determinavam a variação da altura dos corpos-de-prova.

Em alguns dos ensaios permitia-se a drenagem por apenas uma das faces do corpo-de-prova, enquanto se media a pressão neutra na face oposta.

6.3.4 Apreciação sobre a Qualidade dos Ensaios

São conhecidos internacionalmente novos instrumentos e técnicas que possibilitam elevar a precisão das medidas e a qualidade dos ensaios de um modo geral ¹. Contudo, nos ensaios realizados, utilizou-se de algumas técnicas tradicionais que, sabidamente, são deficientes:

- não foram empregadas células de carga para medida de força axial; o atrito entre o pistão e a câmara faz com que a carga aplicada externamente não seja integralmente recebida pelo corpo-de-prova;
- as medidas de deslocamento axial foram feitas externamente à câmara e incluem, portanto, efeitos de acomodação e compressibilidade do sistema;
- as medidas de variação volumétrica por intermédio de buretas graduadas é influenciada pela presença de bolhas de ar e pela passagem de água pela membrana.

Para o prosseguimento da pesquisa o Laboratório de Solos da Escola Politécnica já conta com câmaras do tipo Bishop-Wesley com célula de carga e transdutores submersíveis que possibilitarão medir deslocamentos axiais e radiais no interior da câmara triaxial.

¹Ver, por exemplo, o trabalho de Campos (1988).

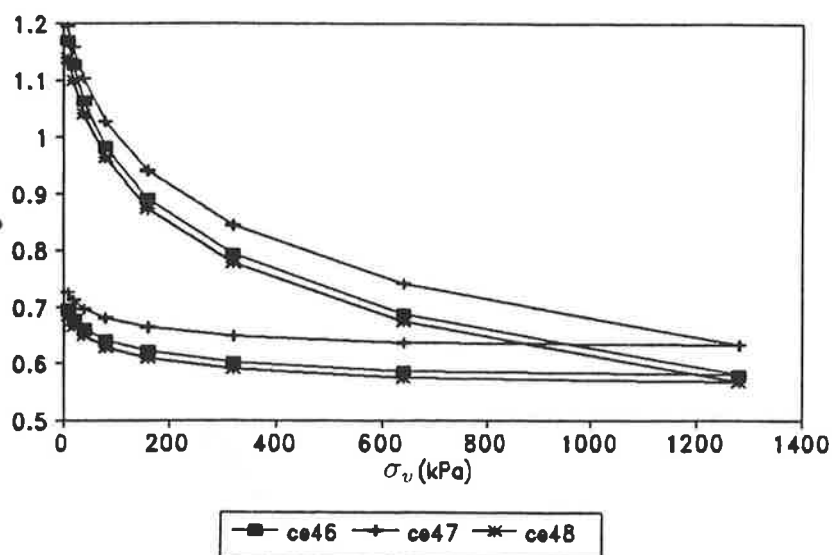


Figura 6.3: Curvas $e \times \sigma_v$. Compressão Edométrica.

6.4 Resultados

6.4.1 Ensaios de Compressão Edométrica

Os resultados dos ensaios de compressão edométrica CE46, CE47, CE48 estão apresentados nas figuras seguintes. Na fig.6.3 estão pares tensão vertical-índice de vazios (σ_v, e) obtidos dos três experimentos.

Nos ensaios CE46 e CE48 cada estágio durava 60 min e os índices de vazios tomados para a análise correspondem a esses instantes. Os índices de vazios da curva do ensaio CE47 também correspondem a 60 min após a aplicação da carga em cada estágio que, entretanto, durava 24 h.

A fig.6.4 traz as curvas $e \times \sigma_v$ com escala logarítmica nas abscissas. Os trechos finais das curvas, correspondentes a σ_v entre 160 e 1280 kPa, aproximam-se de retas fornecendo índice de compressão de 0,36 nos três ensaios.

No ensaio CE47, em que os estágios de carregamento duravam 24 h, pôde-se acompanhar a ocorrência de deformação lenta no solo em estudo. A fig.6.5 traz os pares tempo-deformação volumétrica (t, ϵ_v), com escala logarítmica nas abscissas, para o estágio correspondente a $\sigma_v = 1280$ kPa. Pode-se estimar um coeficiente de adensamento secundário de 0,002.

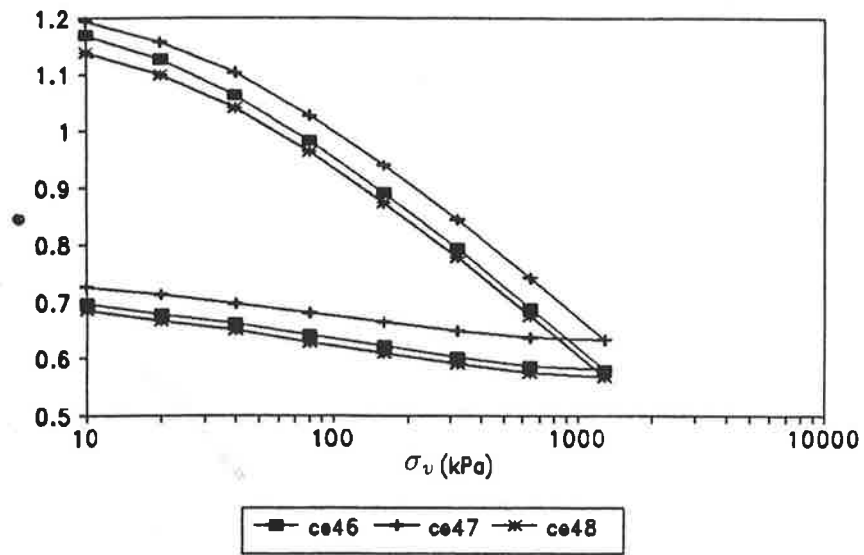


Figura 6.4: Curvas $e \times \sigma_v$. Compressão Edométrica.

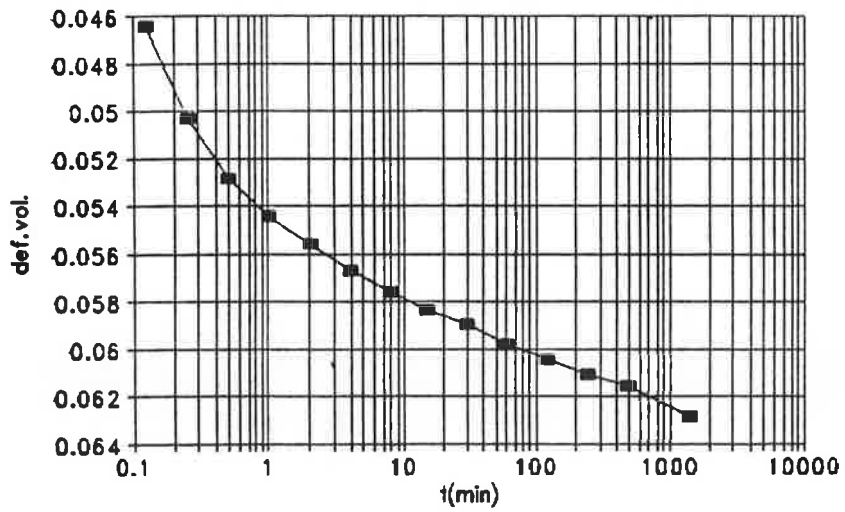


Figura 6.5: Curva $\epsilon_v \times t$. Ensaio CE47.

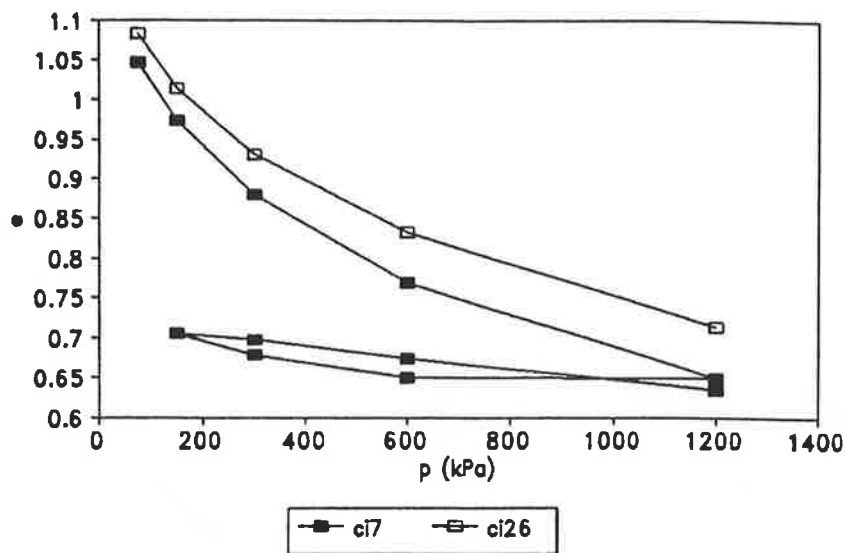


Figura 6.6: Curvas $e \times p$. Compressão Isotrópica.

6.4.2 Ensaios de Compressão Isotrópica

A fig.6.6 traz as curvas índice de vazios- pressão confinante ($e \times p$) que unem pontos obtidos nos dois ensaios de compressão isotrópica CI7 e CI26 (correspondentes a 60 min após a aplicação do carregamento em cada estágio).

Na fig.6.7, com escala logarítmica nas abscissas, encontram-se os mesmos pontos da fig.6.6 em conjunto com os provenientes dos ensaios de compressão edométrica. Para os primeiros, as abscissas são as pressões confinantes; para os segundos, são as tensões verticais. Nota-se que os trechos finais são aproximadamente retos e paralelos entre si.

Nos diversos ensaios triaxiais realizados, cujos resultados serão apresentados na seção seguinte, os corpos-de-prova foram adensados isotropicamente a 200 kPa. com exceção de um em que a pressão confinante de adensamento foi de 400 kPa. Já que eram conhecidos os índices de vazios iniciais de cada corpo-de-prova e porque eram medidas suas variações de volume durante a compressão isotrópica, foi possível determinar os índices de vazios atingidos sob a pressão de 200 kPa. O valor médio encontrado para tal índice de vazios, usado nos cálculos de volume, foi de 0,85.

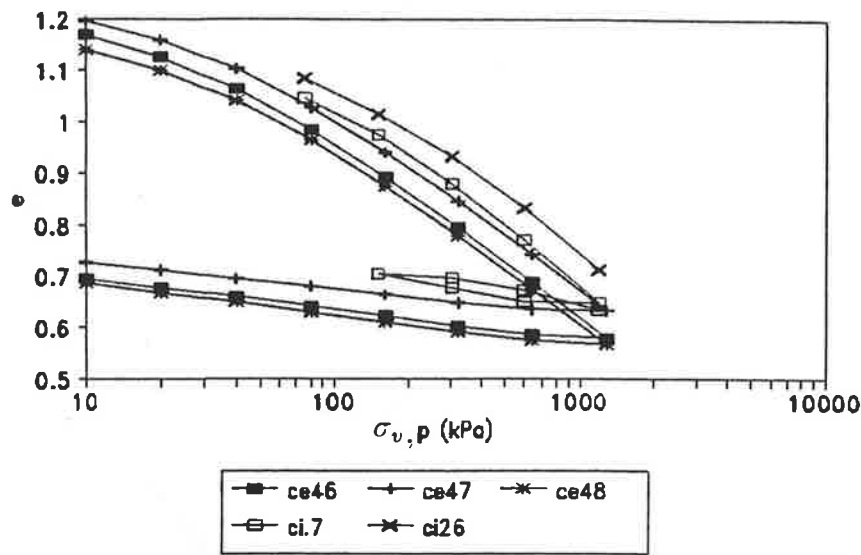


Figura 6.7: Curvas $\epsilon \times \sigma_v$ e $\epsilon \times p$.

6.4.3 Ensaios Triaxiais

Os resultados dos ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão são exibidos na forma de gráficos $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$ (fig.6.8 a 6.13). Em cada gráfico figuram as curvas dos ensaios efetuados com uma das trajetória de tensão. Os símbolos ϵ_a e ϵ_v denotam as deformações axial e volumétrica durante a aplicação da tensão desviadora ($q = \sigma_a - \sigma_r$) calculadas por:

$$\epsilon_a = \frac{H_0 - H}{H_0} \quad (6.1)$$

e

$$\epsilon_v = \frac{V_0 - V}{V_0} \quad (6.2)$$

com referência à altura (H_0) e ao volume (V_0) do corpo-de-prova após o adensamento isotrópico sob pressão confinante p_a . H e V são a altura e o volume ao longo do ensaio.

Os pontos presentes nos gráficos correspondem a 30 minutos após a aplicação do respectivo estágio de carregamento. É importante realçar que os medidores de pressão neutra indicaram valores nulos poucos minutos após

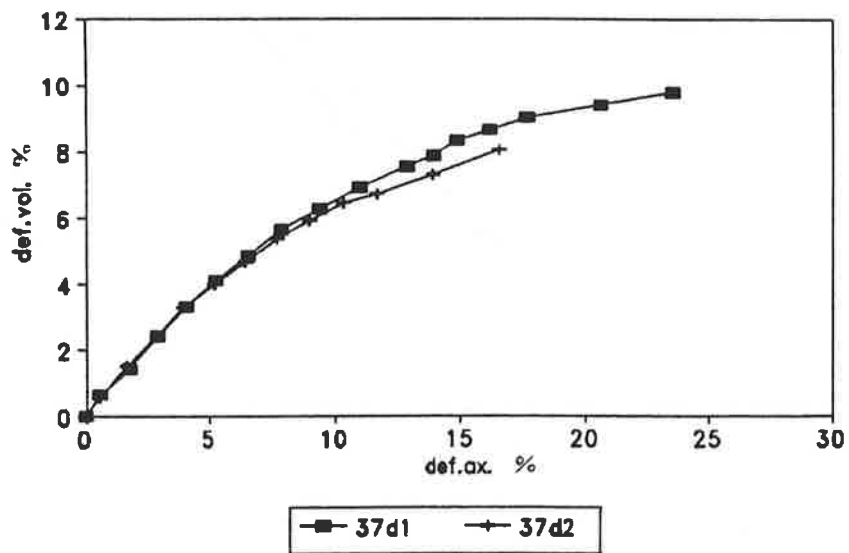
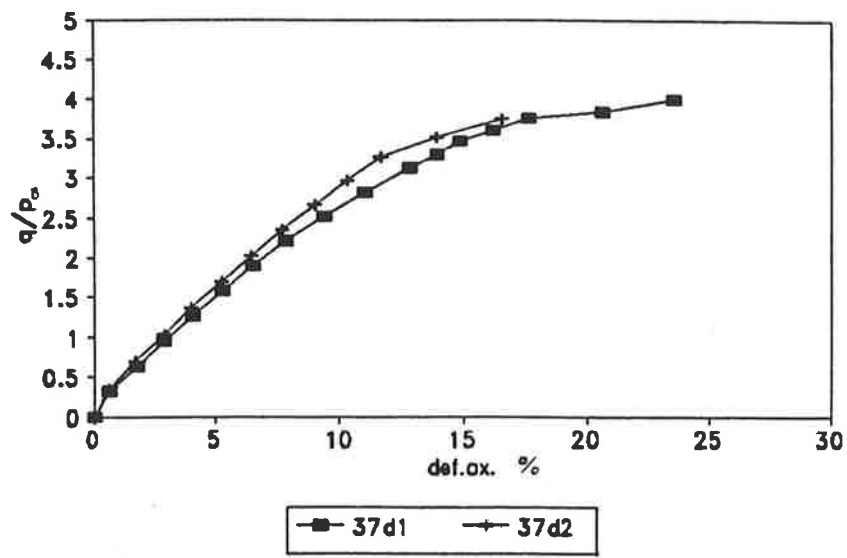


Figura 6.8: Curvas $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT37

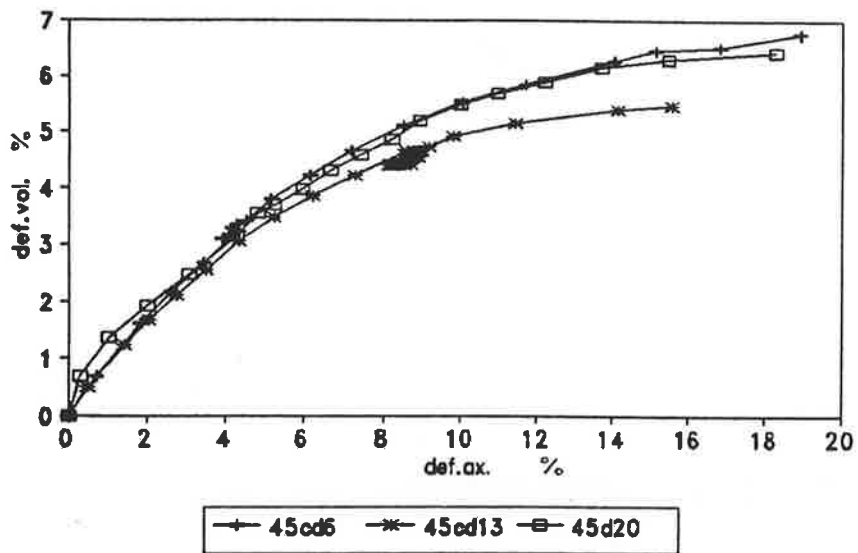
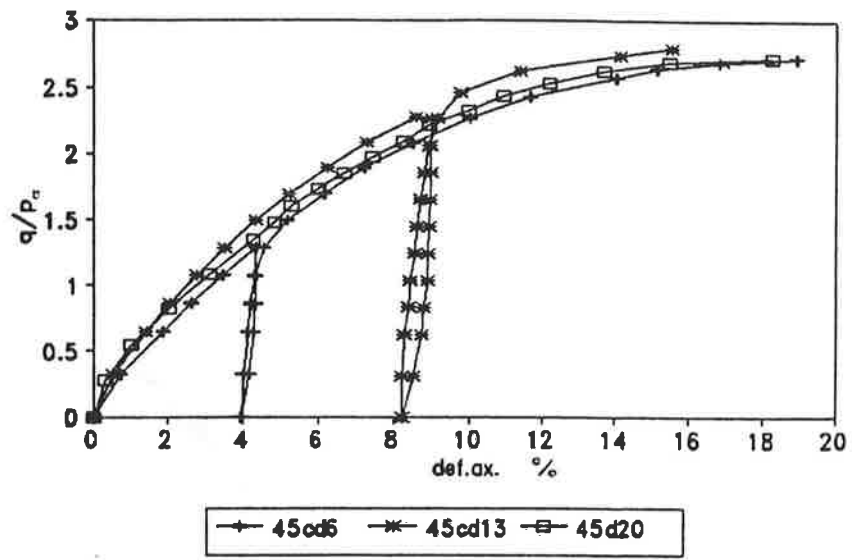


Figura 6.9: Curvas $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT45

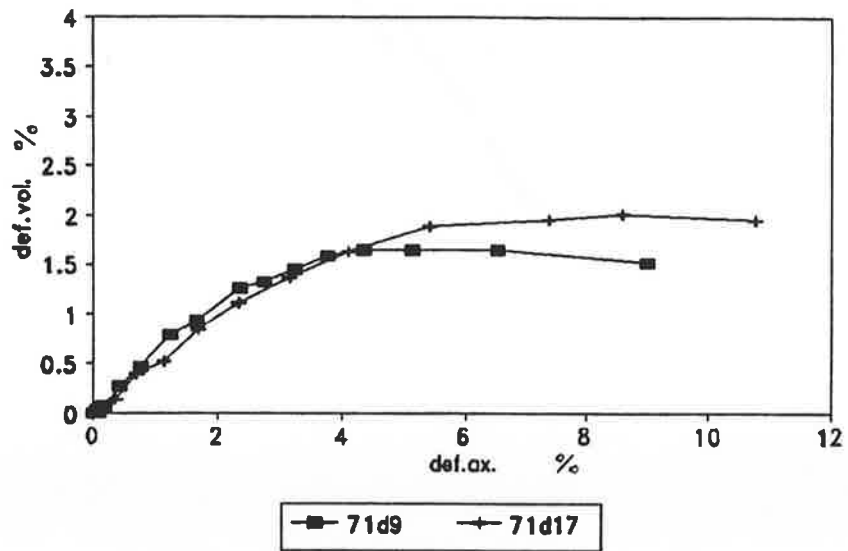
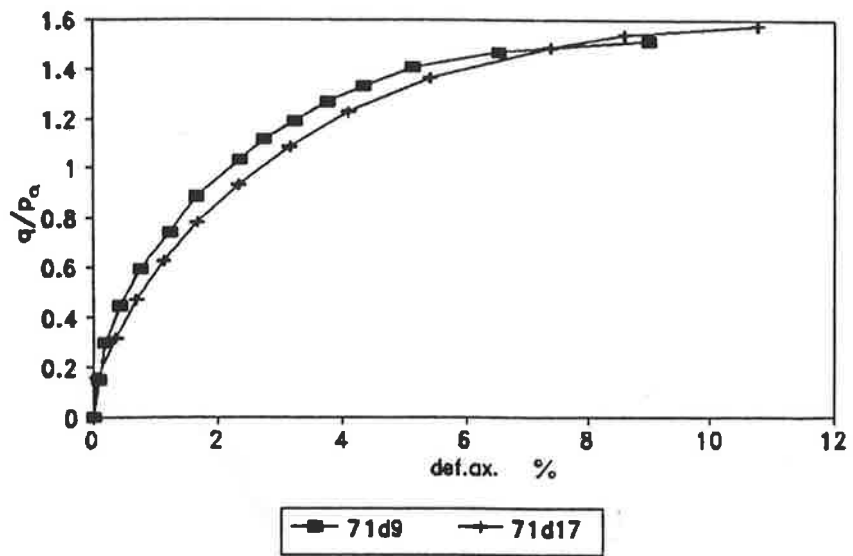


Figura 6.10: Curvas $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT72

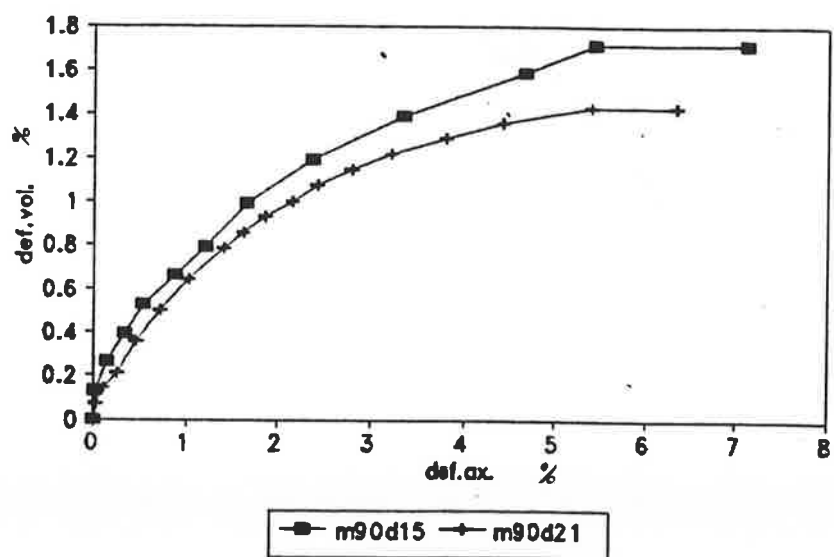
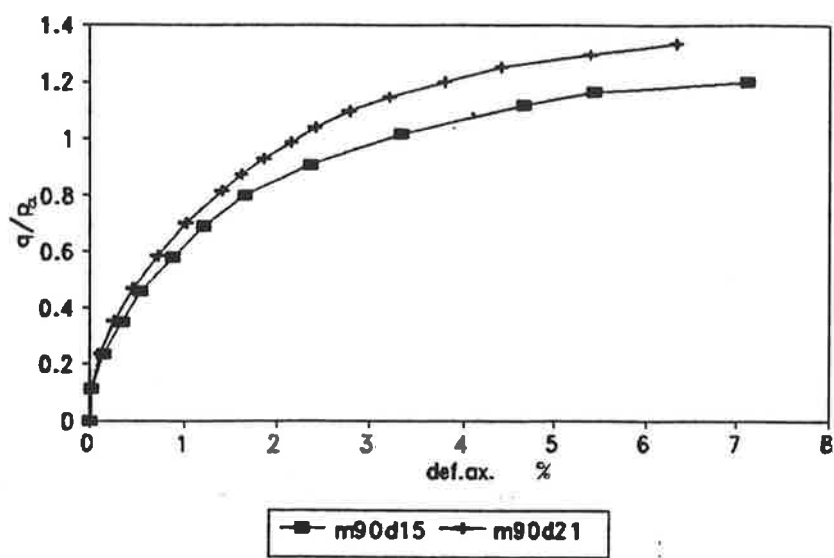


Figura 6.11: Curvas $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT90

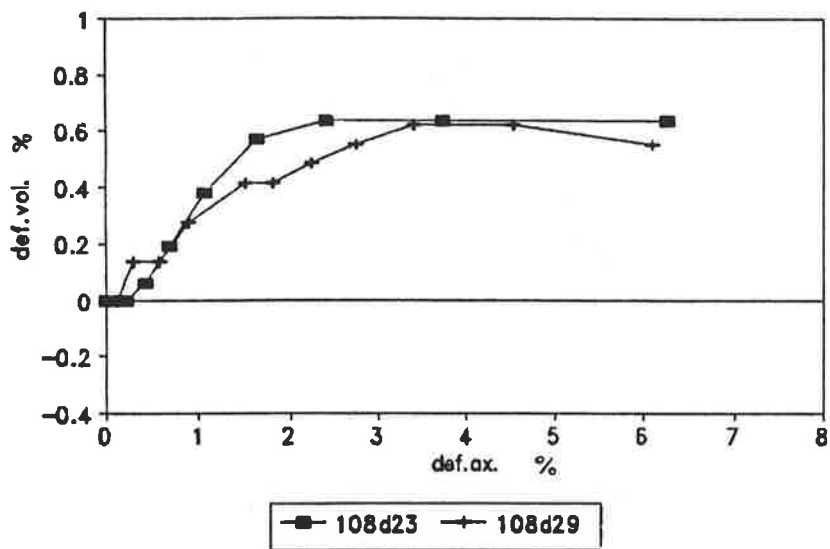
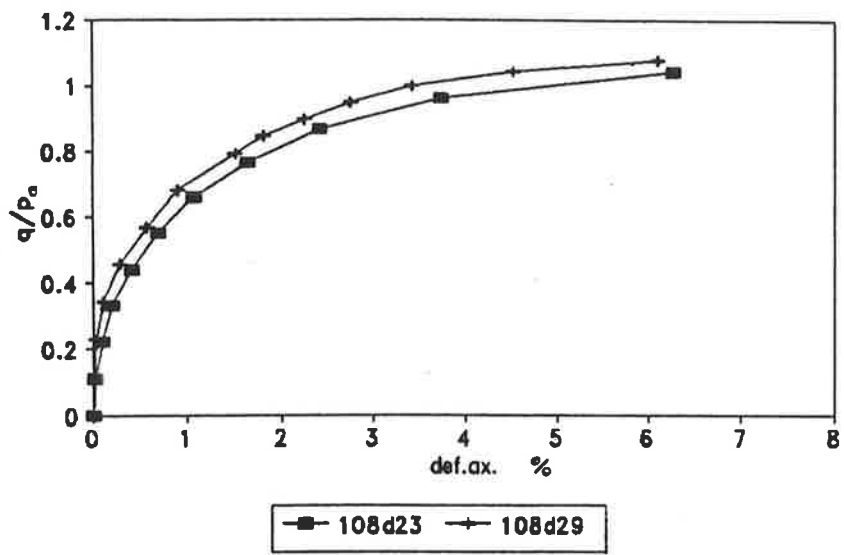


Figura 6.12: Curvas $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT108

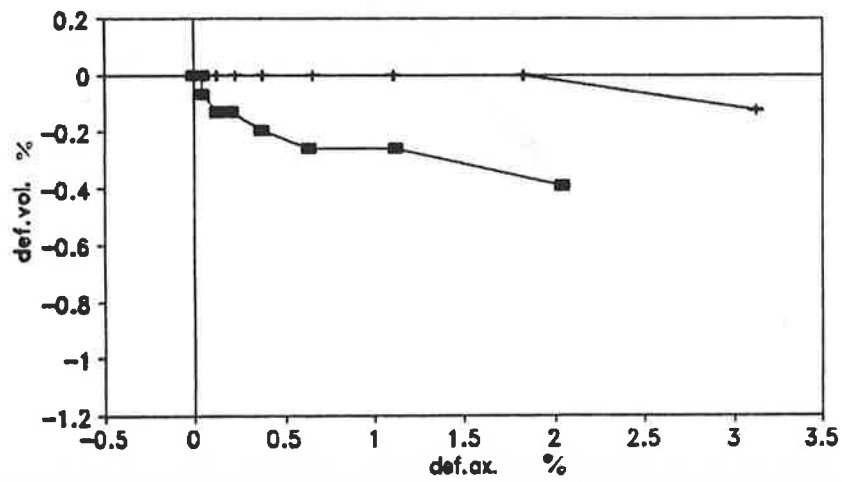
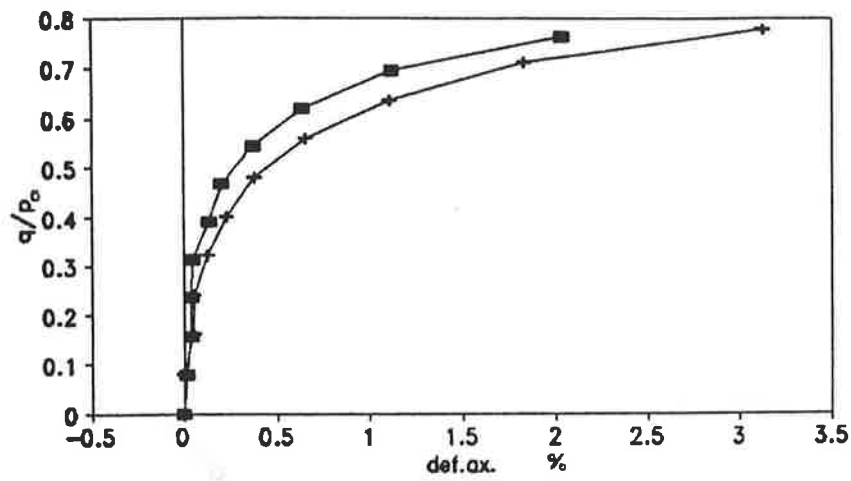


Figura 6.13: Curvas $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT135

cada alteração no estado de tensão, legitimando considerar como efetivas as tensões impostas.

Visando à interpretação dos ensaios e à comparação com previsões teóricas, decidiu-se construir, a partir dos gráficos anteriores, curvas "médias" representativas dos resultados em cada trajetória de tensão. Tais curvas, que se encontram nas fig.6.14 e 6.15 reunidas em dois grupos (CT37, CT45, CT72 e CT90. CT108, CT135) foram traçadas à mão procurando suavizar irregularidades das originais, muitas vezes devidas a imprecisões das medidas ou à baixa sensibilidade de alguns sistemas de medida (principalmente das buretas).

Um panorama interessante é conseguido dividindo-se q ao longo do carregamento por q de ruptura (q_{rupt}) para cada trajetória e desenhando-se o conjunto de curvas $q/q_{rupt} \times \epsilon_a$ (fig.6.16).

Cabe, enfim, analisar as condições de ruptura desse solo. Os pontos $((\sigma_a + \sigma_r)/2, (\sigma_a - \sigma_r)/2)$ correspondentes à ruptura nos diversos ensaios constam da fig.6.17. A curva média associada tem equação (a unidade de tensão é kPa):

$$\frac{\sigma_a - \sigma_r}{2} = 0,77 \left(\frac{\sigma_a + \sigma_r}{2} \right)^{0,95} \quad (6.3)$$

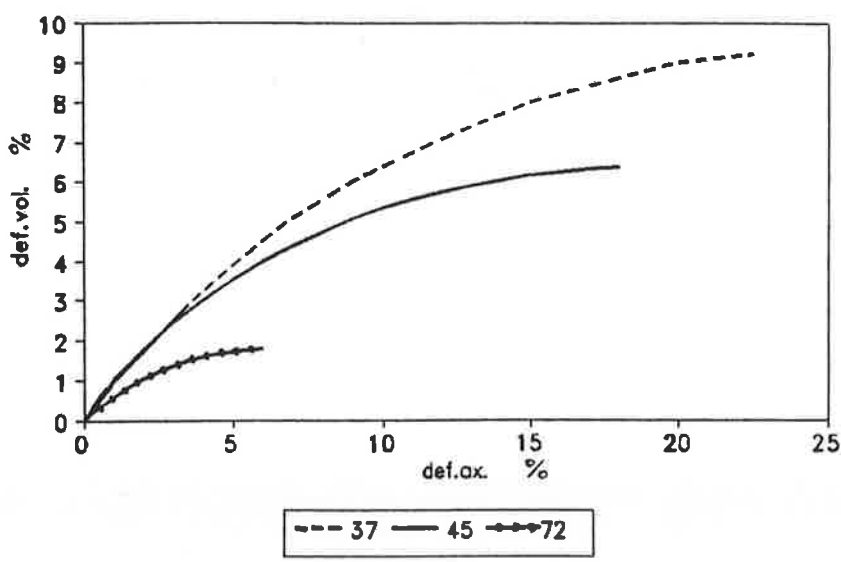
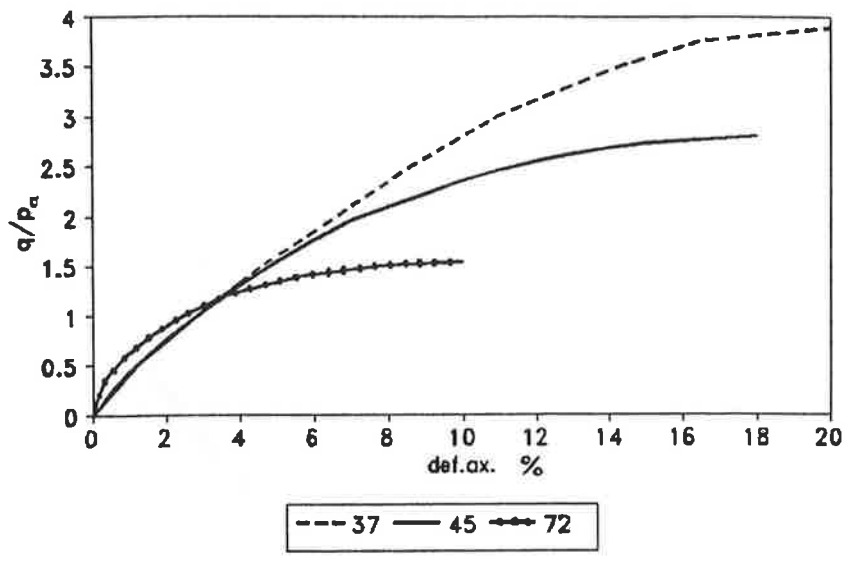


Figura 6.14: Curvas "médias" $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT37, CT45 e CT72.

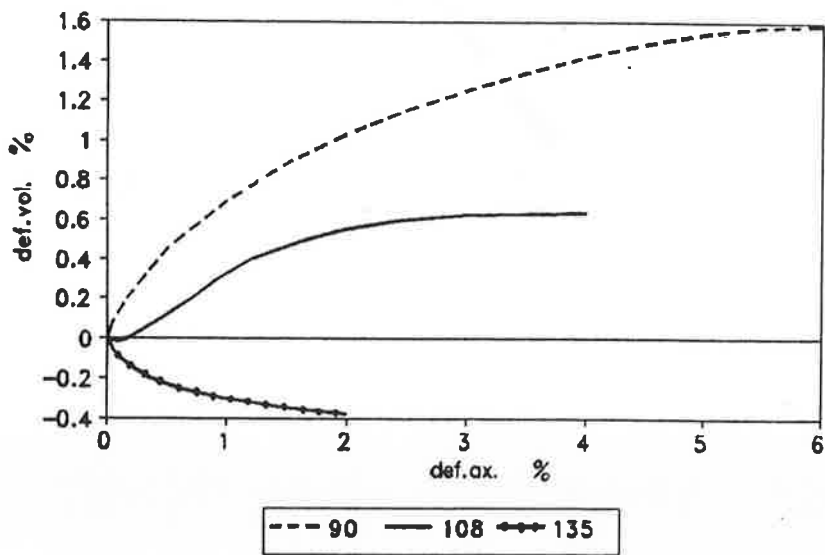
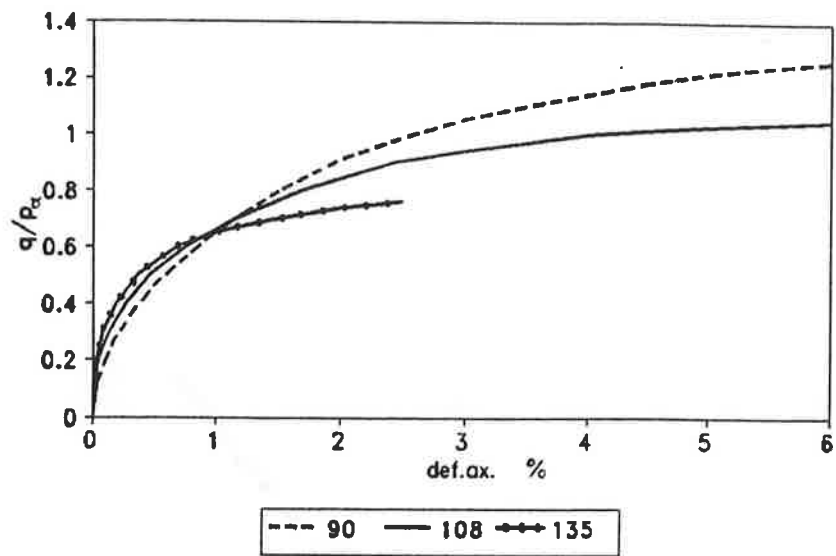


Figura 6.15: Curvas "médias" $q/p_a \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. CT90, CT108 e CT135.

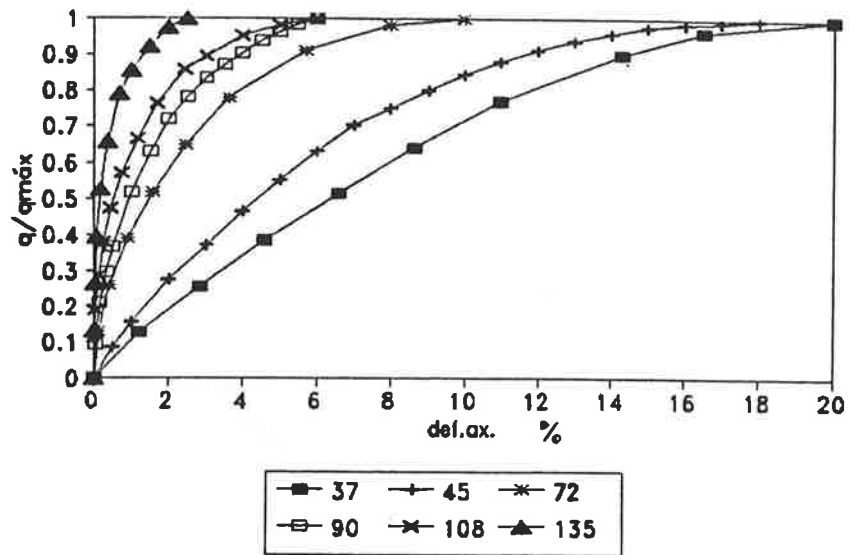


Figura 6.16: Curvas $q/q_{rupt} \times \epsilon_a$

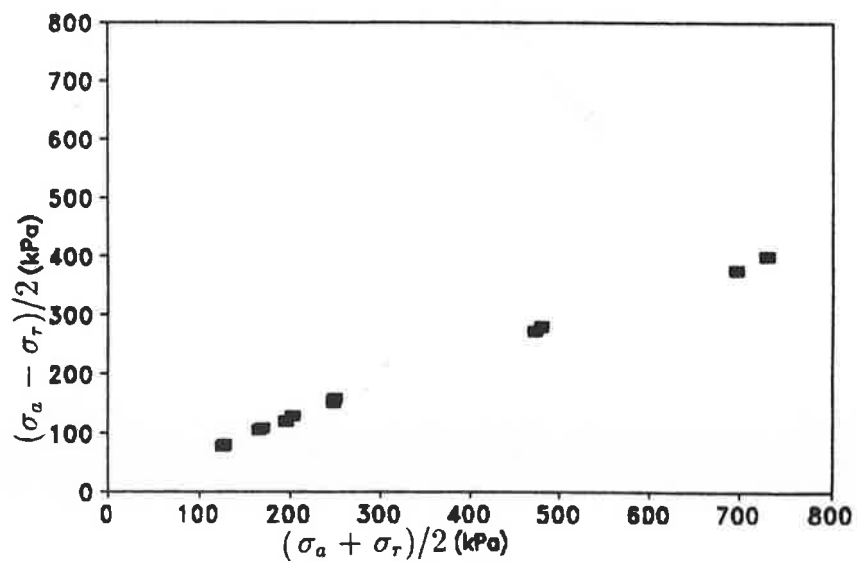


Figura 6.17: Pontos correspondentes à ruptura nos ensaios com diferentes trajetórias.

Capítulo 7

CONFRONTO ENTRE OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS E AS PREVISÕES DO CAM-CLAY

7.1 Introdução

Neste capítulo trata-se inicialmente da determinação dos parâmetros λ , κ , M e G , que caracterizam o solo perante o modelo. Eles foram obtidos de dois tipos de ensaios básicos; a compressão isotrópica e a compressão axial após adensamento isotrópico ambos com ciclo de descarga-recarga. A compressão edométrica, podendo fornecer também o parâmetro λ , completou o conjunto de dados de entrada.

Em seguida estudam-se aspectos cinemáticos da deformação nos ensaios triaxiais e são integradas as equações constitutivas do Cam-Clay para as trajetórias de tensão dos ensaios.

Com os resultados obtidos nessas análises torna-se possível estabelecer uma comparação entre resultados experimentais e teóricos, o que é feito na última seção do capítulo.

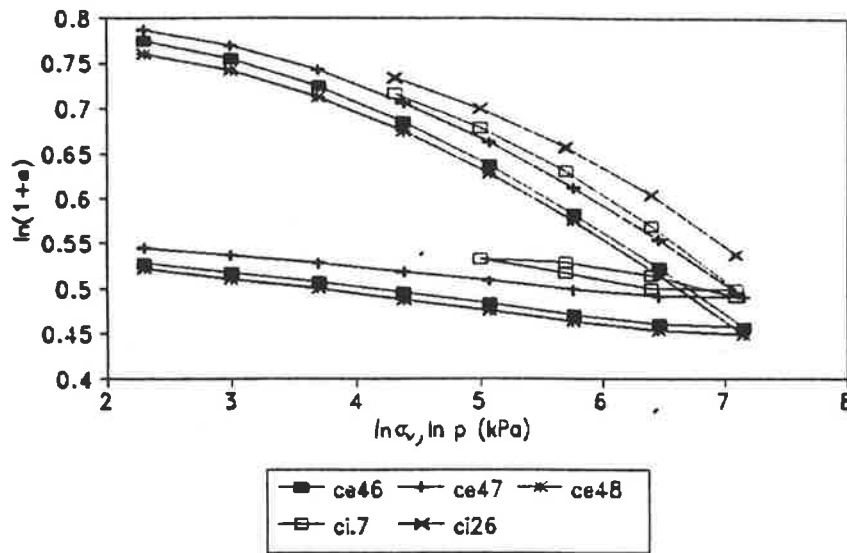


Figura 7.1: Curvas de compressão isotrópica e edométrica.

7.2 Determinação dos Parâmetros do Cam-Clay

7.2.1 λ e κ

Os coeficientes angulares das retas de compressão virgem e descompressão-recompressão isotrópicas do Cam-Clay no diagrama $\ln p \times \ln(1 + \epsilon)$ são $-\lambda$ e $-\kappa$ respectivamente (cap.5). Segundo a teoria, na compressão virgem edométrica a resposta também é uma reta no gráfico $\ln \sigma_v \times \ln(1 + \epsilon)$ com coeficiente angular $-\lambda$. O descarregamento edométrico, entretanto, se dá por uma curva. Deste modo, o parâmetro λ pode ser determinado com os resultados de ambos os ensaios, ao passo que κ deve ser obtido da curva de descarregamento isotrópico exclusivamente.

A fig.7.1 traz as curvas de compressão isotrópica e edométrica do solo em estudo, revelando uma primeira divergência entre o comportamento observado e o indicado pela teoria. Não sendo retos os trechos de compressão nem os de descompressão surge a dificuldade em se determinar λ e κ .

Retas tangentes à curva de compressão em pontos associados a tensões

variando entre 50 e 1200 kPa fornecem λ variando na faixa de 0,057 a 0,097. Adotou-se para o estudo $\lambda = 0,070$ correspondente à região em torno de $p = 200$ kPa, que é a pressão de adensamento isotrópico dos ensaios triaxiais realizados (com exceção de um em que o corpo-de-prova foi adensado a 400 kPa). Este valor está na faixa (citada por Houlsby, Wroth e Wood, 1984) comumente encontrada para materiais finos menos compressíveis como os siltes.

O problema é ainda maior na obtenção de κ , já que na descompressão a curvatura é mais acentuada. Um valor de 0,016 foi adotado para a análise. A relação $\kappa/\lambda = 0,22$, encontrada para esse solo, também se situa na faixa usual de valores fornecida por aqueles mesmos autores.

7.2.2 G e M

Conforme se viu no cap.5, um ensaio triaxial de compressão por carregamento com ciclo de descarga-recarga realizado sobre um corpo-de-prova do Cam-Clay forneceria uma curva $q \times (\bar{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_r)$ como indicada na fig.5.3. O coeficiente angular da reta de descarregamento-recarregamento é $2G$ e o coeficiente angular da reta do estado crítico (determinada no ensaio pela razão q/p no estado crítico) é M .

A fig.7.2 traz o resultado de dois ensaios de compressão por carregamento (trajetória 45°) com ciclo de descarga-recarga. No primeiro deles o descarregamento se deu quando a tensão desviadora atingira aproximadamente 47% da de ruptura. No segundo descarregou-se com tensão desviadora da ordem de 81% da de ruptura. Retas ajustadas às curvas de descarga-recarga fornecem o módulo G de valor médio 16700 kPa.

Um outro ensaio de compressão por carregamento sem ciclo de descarga-recarga foi realizado com pressão confinante de 400 kPa.

Os três ensaios CT45 forneceram valores próximos de M , cuja média, 1,46, correspondente a um ângulo de atrito de 36° , foi escolhida para a análise.

Na fig.6.18, que traz os pontos de ruptura dos vários ensaios, nota-se que a envoltória de resistência é levemente curva. Adotar o ângulo de atrito médio obtido nos ensaios CT45, equivale a substituir a envoltória real por uma reta passando pela origem inclinada deste ângulo.

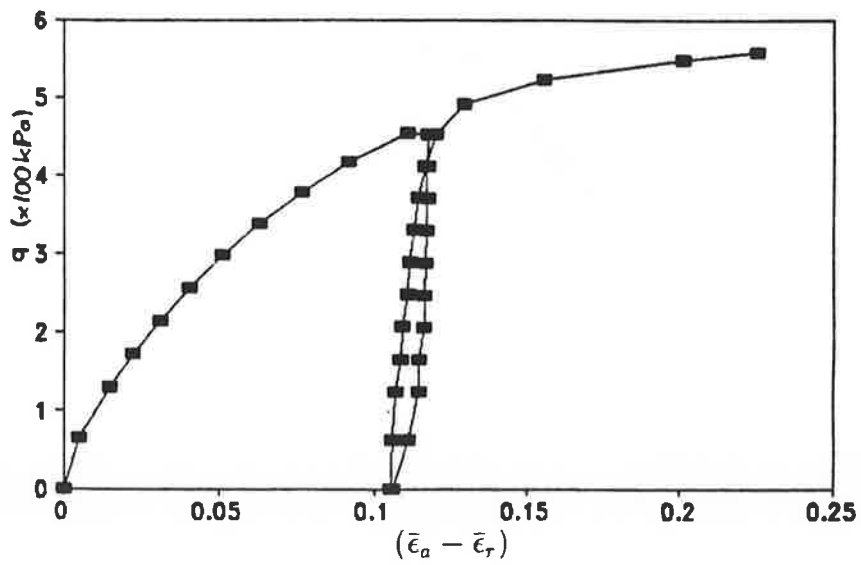
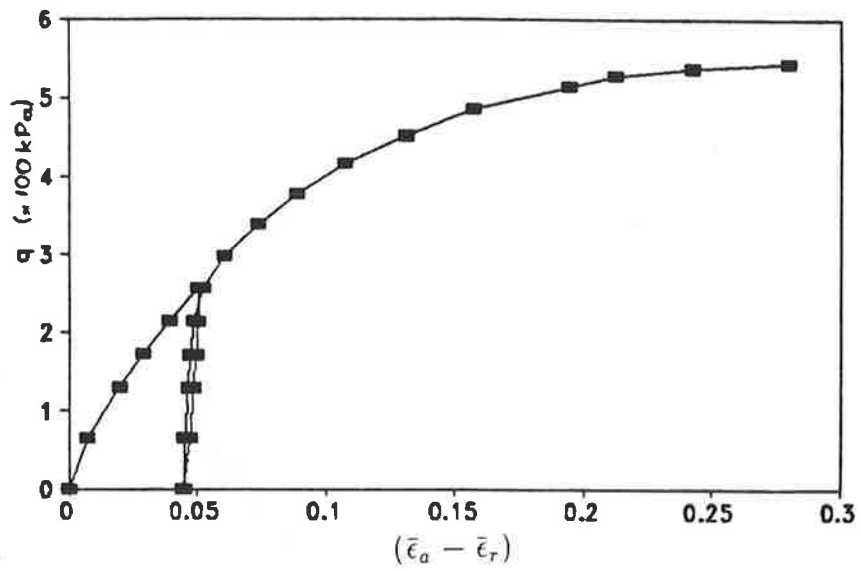


Figura 7.2: Curvas $q \times (\bar{\epsilon}_a - \bar{\epsilon}_r)$. CT45.

7.3 Estudo da Deformação nos Ensaios Triaxiais

Na interpretação dos ensaios triaxiais será admitido, conforme o usual, que o corpo-de-prova inicialmente homogêneo e cilíndrico assim permaneça ao longo do experimento e que o gradiente da deformação seja o mesmo em todos os pontos. Passa-se agora a estudar esse movimento.

Na configuração inicial (em $t = 0$) os pontos do cilindro ocupam posições designadas por $\mathbf{X} = (X_1, X_2, X_3)$ (note-se o sistema de coordenadas escolhido na fig.7.3). Ao longo do movimento os pontos que se encontravam inicialmente em \mathbf{X} , ocuparão as posições $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ dadas pelas seguintes equações:

$$x_1 = \frac{R(t)}{R_0} X_1 \quad (7.1)$$

$$x_2 = \frac{R(t)}{R_0} X_2 \quad (7.2)$$

$$x_3 = \frac{H(t)}{H_0} X_3 \quad (7.3)$$

Em que R_0 e H_0 , são raio e altura iniciais do cilindro e $R(t)$ e $H(t)$, seus valores ao longo do tempo.

Observe-se que, sendo (P, Θ, Z) e (ρ, θ, z) as coordenadas cilíndricas iniciais e ao longo do movimento dos pontos do cilindro, elas se relacionam com as coordenadas retangulares através de:

$$\rho = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} = \frac{R(t)}{R_0} \sqrt{X_1^2 + X_2^2} = \frac{R(t)}{R_0} P \quad (7.4)$$

$$\theta = \arctg \frac{x_2}{x_1} = \arctg \frac{X_2}{X_1} = \Theta \quad (7.5)$$

$$z = x_3 = \frac{H(t)}{H_0} X_3 = \frac{H(t)}{H_0} Z \quad (7.6)$$

mostrando que o corpo permanece cilíndrico, tendo raio e altura alterados, sem girar em torno do eixo vertical e o gradiente da deformação é constante.

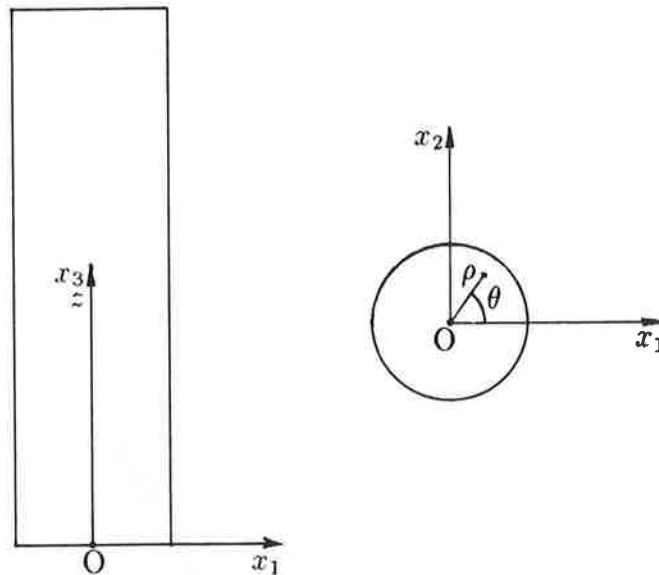


Figura 7.3: Sistema de coordenadas.

Os campos de deslocamento e velocidade (descrição material) na base adotada (fig.7.3) são:

$$\mathbf{u} = \left[\left(\frac{R(t)}{R_0} - 1 \right) X_1, \left(\frac{R(t)}{R_0} - 1 \right) X_2, \left(\frac{H(t)}{H_0} - 1 \right) X_3 \right] \quad (7.7)$$

e

$$\mathbf{v}_m = \left[\frac{\dot{R}(t)}{R_0} X_1, \frac{\dot{R}(t)}{R_0} X_2, \frac{\dot{H}(t)}{H_0} X_3 \right] \quad (7.8)$$

A descrição espacial da velocidade pode ser obtida a partir da descrição material, com o auxílio das equações do movimento:

$$\mathbf{v} = \left[\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} x_1, \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} x_2, \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} x_3 \right] \quad (7.9)$$

As equações constitutivas elasto-plásticas estudadas no cap.3 e, em particular, as do modelo Cam-Clay vistas no cap.5, fazem uso da taxa de deformação \mathbf{D} , para a qual se volta a atenção agora. Sua matriz (na base escolhida) escreve-se:

$$[\mathbf{D}] = \begin{pmatrix} \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \end{pmatrix}$$

As componentes radial e axial de \mathbf{D}

$$D_r = \frac{\dot{R}(t)}{R(t)} \quad (7.10)$$

$$D_a = \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \quad (7.11)$$

forneem uma medida das velocidades de deformação radial e axial relativa à configuração atual. Integrando-as no tempo resultam as deformações naturais (logarítmicas) radial ($\bar{\epsilon}_r$) e axial ($\bar{\epsilon}_a$) referidas à configuração inicial:

$$\bar{\epsilon}_r(t) = \int_0^t D_r d\tau = \ln \frac{R(t)}{R_0} \quad (7.12)$$

$$\bar{\epsilon}_a(t) = \int_0^t D_a d\tau = \ln \frac{H(t)}{H_0} \quad (7.13)$$

A taxa de deformação volumétrica $tr\mathbf{D}$ é dada por:

$$tr\mathbf{D} = 2D_r + D_a = 2\frac{\dot{R}(t)}{R(t)} + \frac{\dot{H}(t)}{H(t)} \quad (7.14)$$

e a deformação natural volumétrica:

$$\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t tr\mathbf{D} d\tau = 2 \ln \frac{R(t)}{R_0} + \ln \frac{H(t)}{H_0} = \ln \frac{R^2(t)H(t)}{R_0^2 H_0} = \ln \frac{V(t)}{V_0} \quad (7.15)$$

em que $V(t)$ e V_0 são o volume do cilindro nos instantes t e $t = 0$.

As equações constitutivas elasto-plásticas fornecem a taxa de deformação \mathbf{D} , que através das integrações no tempo e das relações vistas acima, produzem $\bar{\epsilon}_a$, $\bar{\epsilon}_r$ e $\bar{\epsilon}_v$. Por seu lado, as medidas de altura e volume efetuadas durante os ensaios permitem obter $\bar{\epsilon}_a$, $\bar{\epsilon}_r$ e $\bar{\epsilon}_v$ experimentais, que podem ser confrontadas com as teóricas.

São mais comuns as seguintes medidas de deformação:

$$\epsilon_a = (H - H_0)/H_0 \quad (7.16)$$

$$\epsilon_r = (R - R_0)/R_0 \quad (7.17)$$

$$\epsilon_v = (V - V_0)/V_0 \quad (7.18)$$

que se relacionam com as deformações naturais por meio de:

$$\bar{\epsilon} = \ln(1 + \epsilon) \quad (7.19)$$

Note-se que ϵ_a e ϵ_r são componentes do tensor de deformação infinitesimal \mathbf{E} , cuja matriz é, no caso:

$$[\mathbf{E}] = \begin{pmatrix} \frac{R(t)}{R_0} - 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{R(t)}{R_0} - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{H(t)}{H_0} - 1 \end{pmatrix}$$

É importante salientar que:

$$\epsilon_v \neq 2\epsilon_r + \epsilon_a \quad (7.20)$$

ao passo que:

$$\bar{\epsilon}_v = 2\bar{\epsilon}_r + \bar{\epsilon}_a \quad (7.21)$$

7.4 Integração das Equações Constitutivas do Cam-Clay nas Trajetórias de Tensão dos Ensaio

No capítulo anterior foi visto que se realizaram ensaios triaxiais drenados após adensamento isotrópico com trajetórias retilíneas no plano $((\sigma_a + \sigma_r)/2; (\sigma_a - \sigma_r)/2)$ que formam com o eixo das abscissas ângulos α de 37, 45, 72, 90, 108 e 135°.

Como no modelo Cam-Clay empregam-se os parâmetros de tensão $p = (\sigma_a + 2\sigma_r)/3$ e $q = |\sigma_a - \sigma_r|$, é conveniente expressar as trajetórias de tensão nesses termos. As trajetórias mencionadas acima também são retilíneas no plano (p, q) tendo equação do tipo:

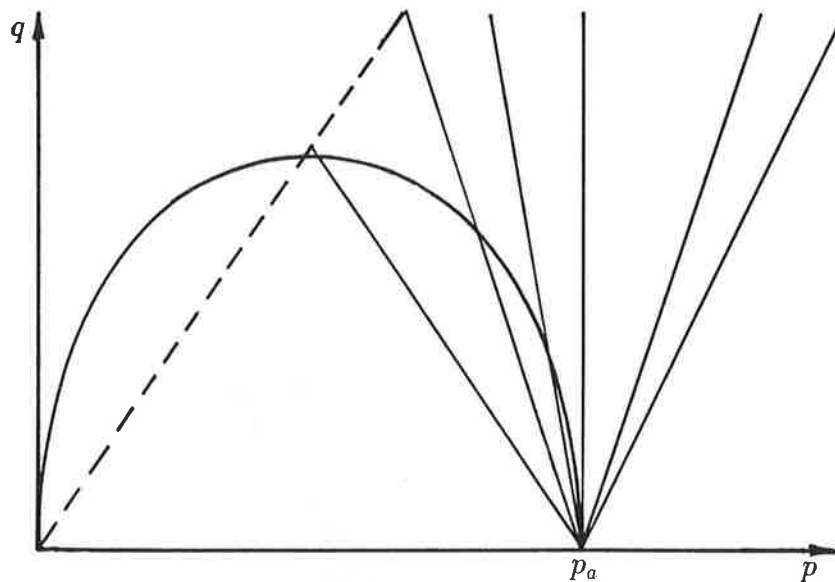


Figura 7.4: Trajetórias de tensão e curva de plastificação.

$$q = |\operatorname{tg} \beta(p - p_a)| \quad (7.22)$$

ou, o que é equivalente:

$$\eta = \left| \operatorname{tg} \beta \left(1 - \frac{p_a}{p} \right) \right| \quad (7.23)$$

em que β é o ângulo que formam com o eixo das abscissas e p_a é a pressão de adensamento isotrópico a que foi submetido o material antes da aplicação de tensão desviadora.

A relação entre os ângulos β e α é dada pela expressão:

$$\operatorname{tg} \beta = \frac{2}{\frac{1}{\operatorname{tg} \alpha} - \frac{1}{3}} \quad (7.24)$$

Aos ângulos α de 37, 45, 72, 90, 108 e 135° correspondem respectivamente ângulos β de 63,6; 71,6; 89,7; 99,5; 108,2 e 123,7°.

A fig.7.4 mostra no plano (p, q) a curva de plastificação do Cam-Clay vigente quando da aplicação da pressão p_a de adensamento isotrópico e as várias trajetórias de tensão ensaiadas, levando à identificação de dois grupos.

Para $\beta \geq \pi/2$ as trajetórias cruzam sucessivas curvas de plastificação mantendo o material em regime elasto-plástico até atingir o estado crítico ($\eta = M$).

Para $\beta < \pi/2$ as trajetórias provocam descarregamento levando o material ao domínio elástico até que encontrem novamente a curva de plastificação ($\eta = -M^2/tg\beta$), quando se inicia o regime elasto-plástico.

No cap.5 foi visto que as taxas de deformação volumétrica e de distorção do Cam-Clay, na forma direta para a análise de ensaios triaxiais, são dadas por:

$$\omega^e = \frac{\kappa}{p} \dot{p} \quad (7.25)$$

$$\gamma^e = \frac{1}{2G} \dot{q} \quad (7.26)$$

$$\omega^p = (\lambda - \kappa) \left[\frac{1}{p} \dot{p} + \frac{2\eta}{M^2 + \eta^2} \dot{\eta} \right] \quad (7.27)$$

$$\gamma^p = \frac{3\eta}{M^2 - \eta^2} \omega^p = (\lambda - \kappa) \left[\frac{3\eta}{(M^2 - \eta^2)p} \dot{p} + \frac{6\eta^2}{M^4 - \eta^4} \dot{\eta} \right] \quad (7.28)$$

Passa-se agora à integração destas equações entre dois estados de tensão para, em seguida, aplicá-las aos dois grupos. O tempo é utilizado como parâmetro para as trajetórias ($p(t), q(t)$).

A integração das três primeiras equações acima entre dois instantes t_1 e t_2 quaisquer resulta (lembrando que $p > 0$):

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^e dt = \kappa \ln \frac{p_2}{p_1} \quad (7.29)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma^e dt = \frac{1}{2G} (q_2 - q_1) \quad (7.30)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \omega^p dt = (\lambda - \kappa) \left(\ln \frac{p_2}{p_1} + \ln \frac{M^2 + \eta_2^2}{M^2 + \eta_1^2} \right) \quad (7.31)$$

A integral de γ^p é dependente da trajetória de tensão na sua primeira parcela. Por conveniência escreve-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \gamma^p dt = (\lambda - \kappa)(R + S) \quad (7.32)$$

Calculando as parcelas R e S (sendo $\eta < M$), obtêm-se:

$$R = \int_{t_1}^{t_2} \frac{3\eta}{(M^2 - \eta^2)p} \dot{p} dt \quad (7.33)$$

$$S = \int_{t_1}^{t_2} \frac{6\eta^2}{M^4 - \eta^4} \dot{\eta} dt$$

$$= -\frac{3}{M} \left[\text{arctg} \frac{\eta_2}{M} - \text{arctg} \frac{\eta_1}{M} \right] \quad (7.34)$$

$$+ \frac{3}{2M} \left[\ln \frac{(M + \eta_2)}{(M - \eta_2)} - \ln \frac{(M + \eta_1)}{(M - \eta_1)} \right] \quad (7.35)$$

$$(7.36)$$

A integral R em trajetórias retilíneas expressas por $\eta = |N(1 - p/p_a)|$, com $N = \text{tg} \beta$ e $\beta \neq \pi/2$, como as aplicadas nos ensaios (mudando para p a variável de integração) resulta:

$$R = \int_{p_1}^{p_2} \frac{3N(p - p_a)}{(M^2 - N^2)p^2 - 2N^2p_a p - N^2p_a^2} dp = \frac{3}{2(N^2 - M^2)} (T + U) \quad (7.37)$$

com

$$T = M \left[\ln \frac{(M + \eta_2)}{(M - \eta_2)} - \ln \frac{(M + \eta_1)}{(M - \eta_1)} \right] \quad (7.38)$$

$$U = -N \left[\ln \frac{(M^2 - \eta_2^2)}{(N - \eta_2)^2} - \ln \frac{(M^2 - \eta_1^2)}{(N - \eta_1)^2} \right] \quad (7.39)$$

Quando $\beta = \pi/2$, $R = 0$ e $\int_{t_1}^{t_2} \gamma^p dt = (\lambda - \kappa)S$.

A seguir mostra-se como estes resultados são aplicados aos dois grupos de trajetórias mencionados no início, permitindo que se calculem as deformações naturais (logarítmicas) axial, radial e volumétrica (ver seção anterior).

- 1º grupo: $\beta \leq \frac{\pi}{2}$

Nesse caso o regime é sempre elasto-plástico. Em qualquer instante $t \geq 0$, com $p(0) = p_a$ e $\eta(0) = 0$, têm-se:

$$\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t (\omega^e + \omega^p) d\tau \quad (7.40)$$

$$\bar{\epsilon}_a(t) - \bar{\epsilon}_r(t) = \int_0^t (\gamma^e + \gamma^p) d\tau \quad (7.41)$$

- 2º grupo: $\beta > \frac{\pi}{2}$

A trajetória de tensão parte do estado inicial em $t = 0$ (com $p(0) = p_a$ e $\eta(0) = 0$) iniciando o regime elástico que dura até que encontre a curva de plastificação no instante $t = t_*$ com $p(t_*) = p_a N^2 / (N^2 + M^2)$ e $\eta(t_*) = -M^2 / N$, a partir de quando ocorre o regime elasto-plástico. Portanto, para $0 \leq t < t_*$ têm-se:

$$\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t \omega^e d\tau \quad (7.42)$$

$$\bar{\epsilon}_a(t) - \bar{\epsilon}_r(t) = \int_0^t \gamma^e d\tau \quad (7.43)$$

e, para $t \geq t_*$,

$$\bar{\epsilon}_v(t) = \int_0^t \omega^e d\tau + \int_{t_*}^t \omega^p d\tau \quad (7.44)$$

$$\bar{\epsilon}_a(t) - \bar{\epsilon}_r(t) = \int_0^t \gamma^e d\tau + \int_{t_*}^t \gamma^p d\tau \quad (7.45)$$

7.5 Comparação entre os Resultados dos Ensaio e as Previsões Teóricas

A comparação dos resultados experimentais com as previsões teóricas pode ser feita de diversas formas fazendo uso de diferentes parâmetros de tensão e deformação. Optou-se por realizar o confronto através de curvas $q \times \epsilon_a$ e $\epsilon_v \times \epsilon_a$. As figuras de 7.5 a 7.10 exibem essas curvas (as curvas "médias" experimentais e as previsões do Cam-Clay) para cada trajetória de tensão.

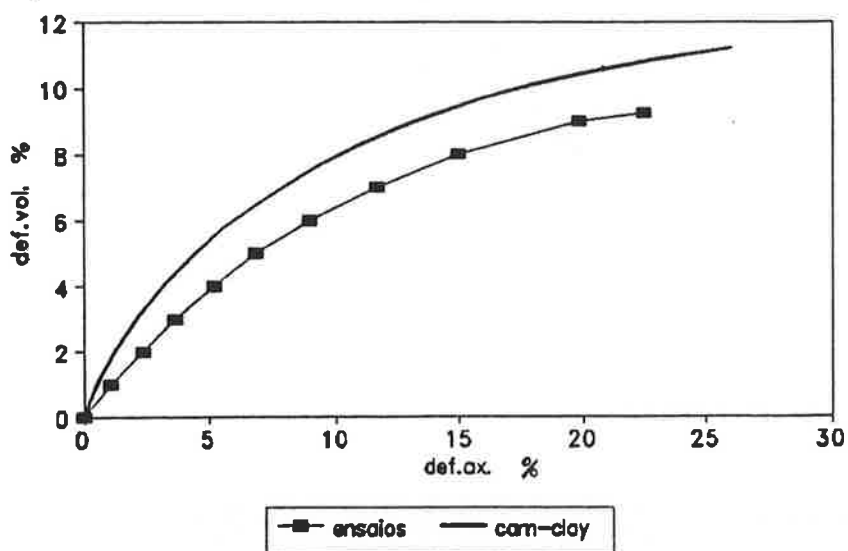
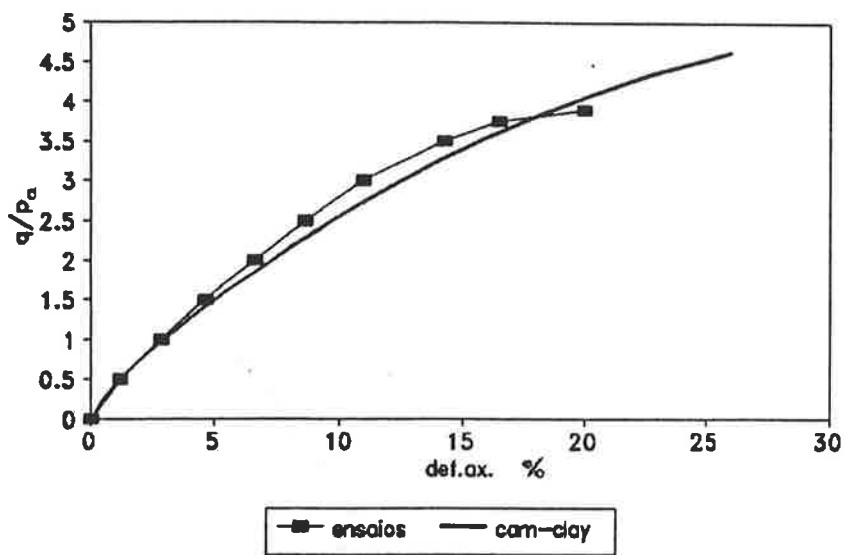


Figura 7.5: Comparação entre resultados experimentais e teóricos. Trajetória 37°.

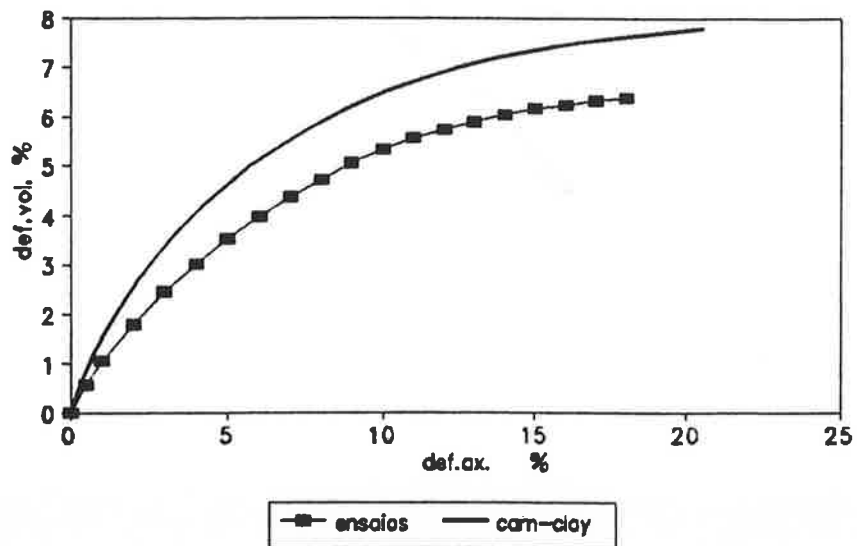
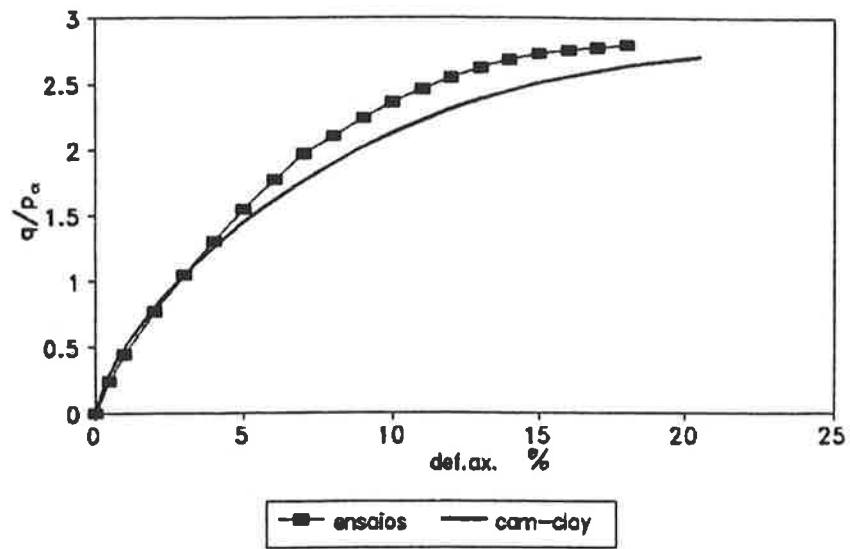


Figura 7.6: Comparação entre resultados experimentais e teóricos. Trajetória 45°.

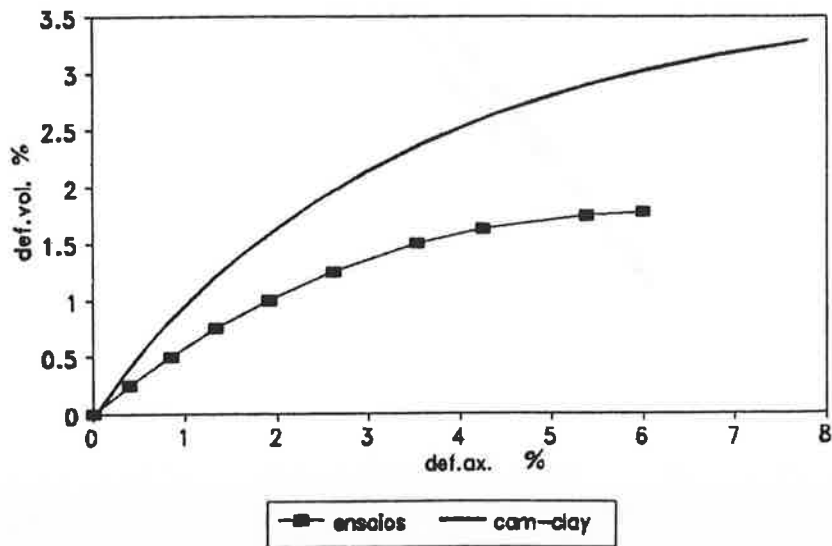
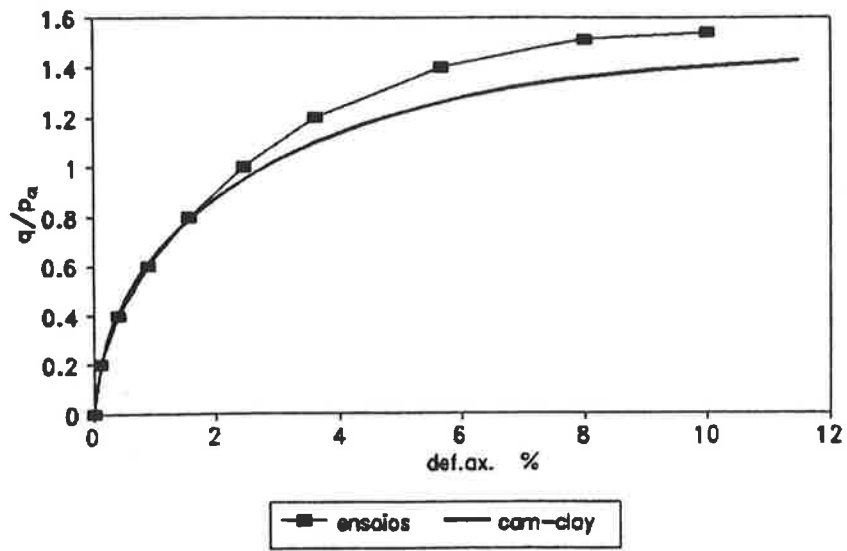


Figura 7.7: Comparação entre resultados experimentais e teóricos. Trajetória 72° .

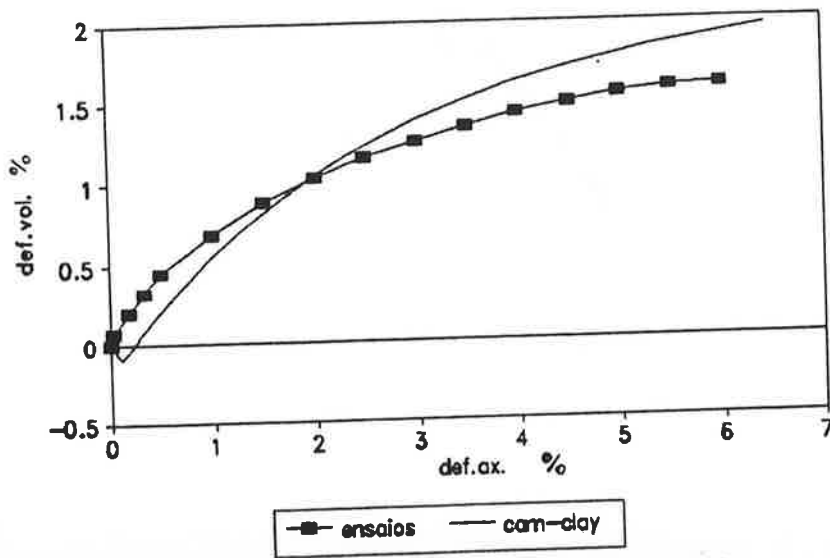
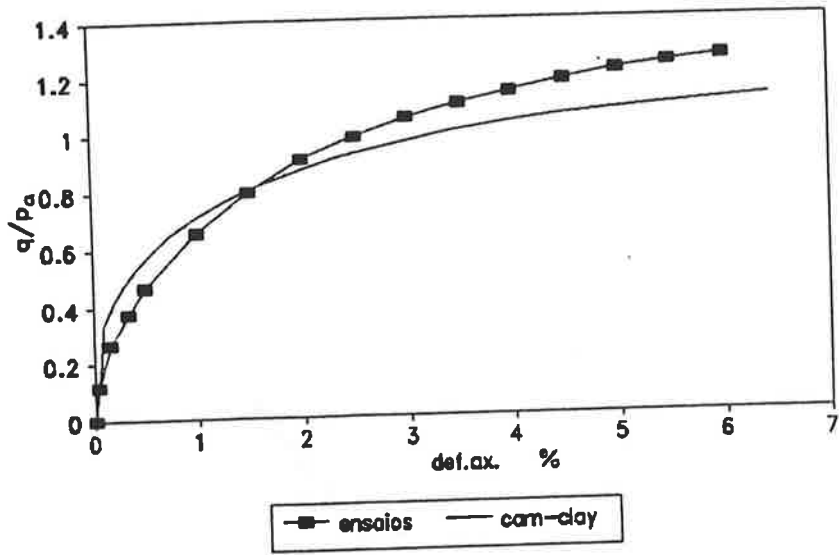


Figura 7.8: Comparação entre resultados experimentais e teóricos. Trajetória 90°.

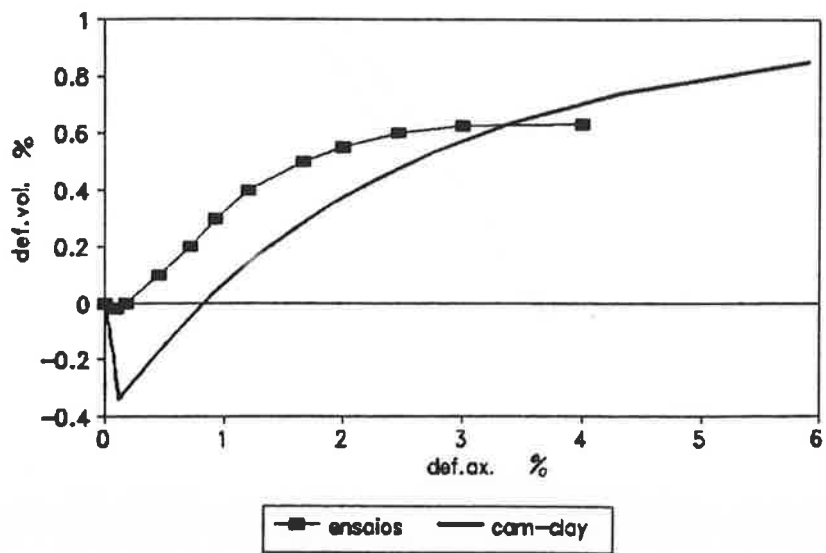
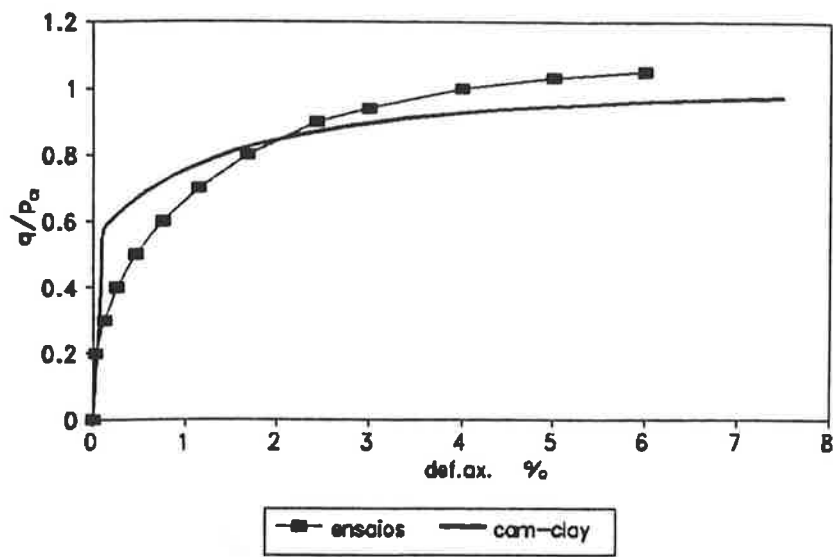


Figura 7.9: Comparação entre resultados experimentais e teóricos. Trajetória 108°.

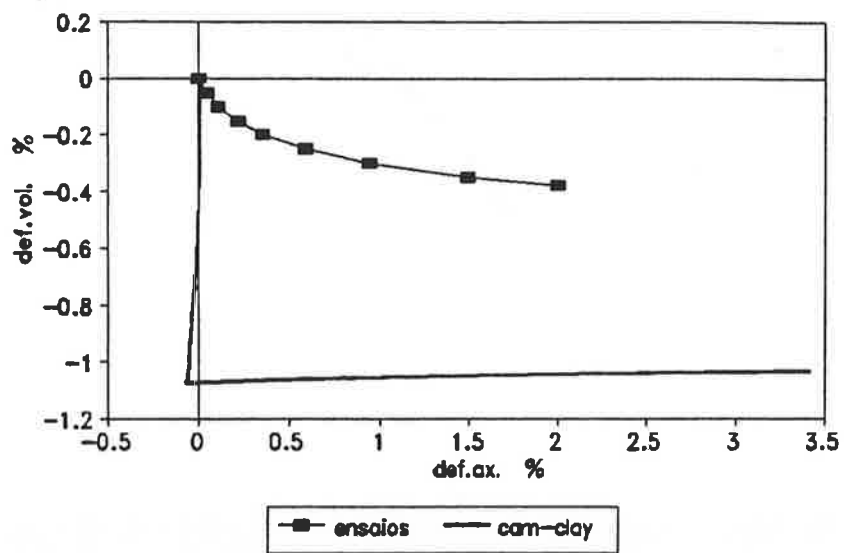
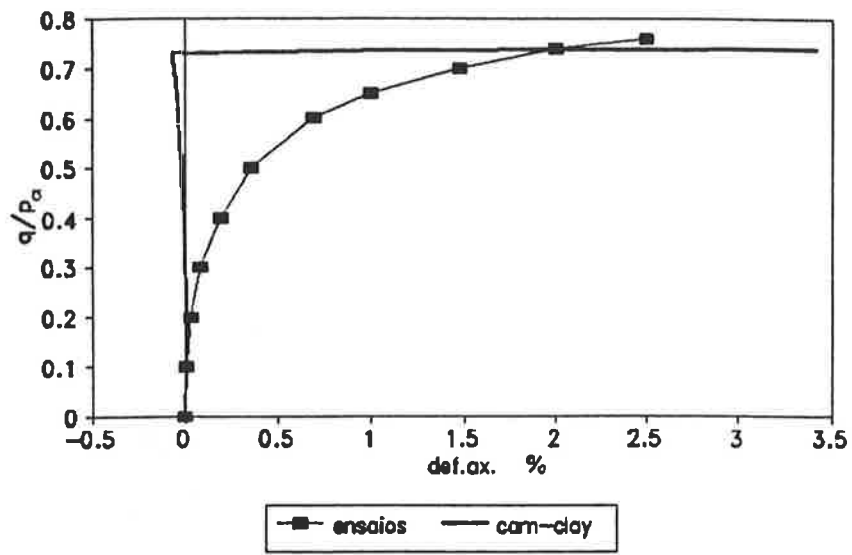


Figura 7.10: Comparação entre resultados experimentais e teóricos. Trajetória 135°.

7.5.1 Análise das Curvas $q \times \epsilon_a$

Observa-se que a tensão desviadora que leva ao estado crítico é maior que a indicada pelo modelo Cam-Clay nos ensaios CT72, CT90, CT108 e CT135 e menor no ensaio CT37. Isto se justifica por ter sido o parâmetro M obtido dos ensaios CT45 e a envoltória de resistência ser curva, como visto no capítulo anterior, ou seja, adotou-se como Linha do Estado Crítico a reta que passa pela origem e pelo ponto (p, q) de ruptura dos ensaios CT45.

A respeito da deformabilidade, nas trajetórias 37, 45 e 72° nota-se boa concordância entre teoria e experimento no trecho inicial das curvas onde $q/p_a \leq 1$. A partir daí, com relação à previsão teórica, o solo mostrou-se mais deformável nas trajetórias 37 e 45° e mais rígido na trajetória 72°.

Nas trajetórias 90, 108 e 135° as discrepâncias são maiores. Segundo a teoria essas trajetórias primeiramente levariam o solo de volta ao regime elástico com rigidez elevada, até que cruzassem a curva de plastificação inicial, a partir de quando, após uma cedência brusca a deformabilidade iria aumentando em direção ao estado crítico. Os resultados experimentais mostram, entretanto, que o solo torna-se, desde o início da aplicação da tensão desviadora, continuamente mais deformável. Para a trajetória 135° a falha do modelo é ainda maior. A teoria prevê que o corpo-de-prova teria sua altura aumentada, em virtude da expansão causada pela redução da tensão octaédrica, até que a trajetória atingisse a curva de plastificação muito próximo do estado crítico.

7.5.2 Análise das Curvas $\epsilon_v \times \epsilon_a$

O modelo Cam-Clay prevê deformações volumétricas exageradas nas trajetórias 37, 45 e 72° ao longo de toda a curva. A diferença é tanto maior quanto mais inclinada é a trajetória.

Nos ensaios CT90 e CT108, mesmo com a diminuição da tensão octaédrica p , o solo apresentou diminuição de volume. Segundo a teoria, enquanto a trajetória se encontrasse no domínio elástico haveria aumento de volume e, após ter cruzado a curva de plastificação, o solo passaria a se comprimir. A diferença entre comportamento observado e previsto é considerável, sendo maior na trajetória 108°.

Mas o desencontro mais grave se deu para a trajetória 135°. Embora tanto o experimento quanto o modelo Cam-Clay tenham dado como resultado

global a ocorrência de aumento de volume, este foi bem maior na previsão teórica (da ordem de duas vezes e meia o do ensaio no final da curva). Além disso a forma das curvas é bem diferente. A curva dos ensaios CT135 revelou que a deformação volumétrica diminui (aumento de volume) continuamente com o aumento da deformação axial tendendo a um certo valor no estado crítico. Por sua vez a teoria prevê um trecho inicial, quando o estado de tensão se encontra no regime elástico, com deformação volumétrica e axial negativas, seguido de regime elasto-plástico com diminuição de volume e aumento da deformação axial.

7.5.3 Comentários sobre a Capacidade de Representação do Cam-Clay

Encontram-se na literatura geotécnica (e.g. Roscoe e Burland, 1968; Wood, 1990) exemplos de aplicações bem sucedidas do modelo Cam-Clay a situações de laboratório ou de obra em que há aumento da tensão octaédrica (carregamento), o que está de acordo com o observado nesta pesquisa.

Por outro lado, o confronto entre os resultados dos ensaios CT90, CT108 e CT135 com as previsões teóricas, revela que o Cam-Clay não é capaz de representar o comportamento dos solos em situações de diminuição da tensão octaédrica (descarregamento), como ocorre em escavações. Nesses casos modelos mais complexos devem ser usados (ver por exemplo o trabalho de Simpson, O'Riordan e Croft (1979)).

Capítulo 8

COMENTÁRIOS FINAIS E CONCLUSÕES

O modelo Cam-Clay foi revisto, tendo sido apresentado de uma forma diferente da usual com auxílio das equações constitutivas elasto-plásticas gerais, como um primeiro passo em direção ao estudo de diversos modelos para solos e sua comparação. Na versão apresentada adotou-se uma função de plastificação correspondente às superfícies de plastificação do Cam-Clay Modificado de Roscoe e Burland (1968); propôs-se uma lei de endurecimento isotrópico que substitui as expressões da potência plástica e leva às mesmas equações do Cam-Clay Modificado; adotou-se a relação entre índice de vazios e pressão na compressão isotrópica proposta por Butterfield (1979) e presente no trabalho de Houlsby, Wroth e Wood (1984). Desse e do livro de Atkinson e Bransby (1978) aproveitou-se a expressão para distorções elásticas e generalizou-se-a para estados gerais de tensão e deformação.

No campo teórico, a pesquisa deve prosseguir, abordando outros modelos mais complexos e reescrevendo-os de forma rigorosa e geral como foi feito com o Cam-Clay. Paralelamente, as equações constitutivas elasto-plásticas para deformações finitas serão estudadas e procurar-se-á adaptá-las para incluir alguns aspectos importantes do comportamento dos solos.

A parte experimental do trabalho concentrou-se na realização e análise de resultados de ensaios triaxiais com corpos-de-prova de um solo siltoso remoldado (solo residual de migmatito) adensados isotropicamente e carregados segundo trajetórias de tensão retas no diagrama $(\sigma_a - \sigma_r)/2 \times (\sigma_a + \sigma_r)/2$ inclinadas de 37, 45, 72, 90, 108 e 135° com o eixo das abscissas.

Ficou clara a necessidade de se elevar a qualidade dos experimentos. Para isso o Laboratório de Solos da Escola Politécnica já dispõe de novos equipamentos, com os quais a pesquisa está prosseguindo. As principais melhorias estão no uso da câmara para trajetórias de tensão de Bishop-Wesley com célula de carga interna e que permite variação mais suave da tensão axial (aplicada por sistema hidráulico) e do emprego de transdutores submersíveis que medirão diretamente no corpo-de-prova deslocamentos axiais e radiais.

Resta comentar o confronto entre resultados experimentais e teóricos.

Foi verificada a capacidade do modelo Cam-Clay em representar o comportamento do solo quando submetido às trajetórias de tensão mencionadas.

Forneceram os parâmetros básicos do modelo os ensaios de compressão isotrópica, edométrica e triaxial de compressão por carregamento (trajetória 45°), nos quais já se notaram divergências entre resultados experimentais e teoria.

O Cam-Clay foi melhor sucedido em prever o comportamento observado nas trajetórias que, no modelo, não retornam ao regime elástico (trajetórias 37° , 45° e 72°). A principal falha nestas trajetórias foi a previsão de deformações volumétricas excessivas. Esta deficiência pode ser diminuída através de uma mudança na forma do potencial plástico, de modo a reduzir a componente de seu gradiente responsável pelas deformações volumétricas.

Nas trajetórias 90° , 108° e 135° , que levam de início o material ao regime elástico, as diferenças foram muito grandes. Nas duas primeiras o Cam-Clay exibiu um comportamento excessivamente rígido, em contraste com os resultados experimentais que revelam deformabilidade maior suavemente crescente à medida que aumenta a tensão desviadora. A maior divergência ocorre na trajetória 135° , na qual a teoria previu deformação axial negativa (por efeito da exagerada expansão volumétrica), o que está em desacordo com o conhecido comportamento dos solos de um modo geral. Um modelo com superfície de pastificação de forma tal que seja cruzada por essas três trajetórias teria mais sucesso.

Os resultados mostraram que o Cam-Clay não consegue representar o comportamento dos solos em situações de descarregamento (diminuição da tensão octaédrica). Modelos mais complexos devem ser empregados nesses casos. Por exemplo, o trabalho de Simpson, O'Riordan e Croft (1979) mostra uma aplicação bem sucedida de um desses modelos à análise de uma escavação.

Capítulo 9

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ATKINSON, J.H.; BRANSBY, P.L.(1978). The Mechanics of Soils. An introduction to critical state soil mechanics. McGraw- Hill. London.
- BURLAND, J.B.(1965). The yielding and dilation of clay. Correspondence, Géotechnique, 15: 211-214.
- BUTTERFIELD, R.(1979). A natural compression law for soils (an advance on e -log p'). Géotechnique, 29: 469-480.
- CALLADINE, C.R.(1963). The yielding of clay. Correspondence, Géotechnique, 13: 250-255.
- CAMPOS, T.M.P.(1988). Instrumentação Especial em Ensaios Triaxiais. SIMPÓSIO SOBRE NOVOS CONCEITOS EM ENSAIOS DE CAMPO E DE LABORATÓRIO EM GEOTECNIA, Rio de Janeiro, vol.1: 29-51.
- COSTA FILHO, L.M.(1980). A laboratory investigation of the small strain behaviour of London clay. Ph.D. Thesis, University of London.
- DRUCKER, D.C.(1950). Some implications of work hardening and ideal plasticity. Quart. Appl. Math., vol.7, n.4: 411-418.
- DRUCKER, D.C.(1959). A definition of stable inelastic material. J. Appl. Mech., Trans. ASME: 101-106.

- DRUCKER,D.C.(1966). Concept of path independence and material stability for soils. IUTAM SYMP. ON RHEOLOGY AND SOIL MECHANICS. Proc., Grenoble: 23-46.
- DRUCKER,D.C.;GIBSON,R.E.;HENKEL,D.J.(1955). Soil mechanics and work-hardening theories of plasticity. Trans. ASCE: 238- 346.
- DRUCKER,D.C.;PRAGER,W.(1952). Soil mechanics and plastic analysis or limit design. Quart. Appl. Math., vol.10, n.2: 157-165.
- EPUSP/ABEF (1989). ABEF Research on Foundation Engineering.
- FEDA,J.(1982). Mechanics of Particulate Materials. The Principles. DEVELOPMENTS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, vol.30. Elsevier, Amsterdam.
- GREEN,A.E.;NAGHDI,P.M.(1965). A general theory of an elastic-plastic continuum. Arch. Rational Mech. Anal., vol.18, n.4: 19-81.
- GURTIN,M.E.(1981). An Introduction to Continuum Mechanics. Academic Press, San Diego, California.
- HAOYUN,L.;LEHMANN,T.(1988). Decompositions of elastic- plastic deformations. Solid Mech. Arch., vol.13, n.4: 239- 248.
- HENKEL,D.J.(1956). The effects of overconsolidation on the behaviour of clays during shear. Géotechnique, 6: 139- 150.
- HILL,R.(1950). The Mathematical Theory of Plasticity. Clarendon Press, Oxford.
- HILL,R.(1958). A general theory of uniqueness and stability in elastic-plastic solids. J. Mech. Phys. Solids 6: 236-249.
- HOULSBY,G.T.;WROTH,C.P.;WOOD,D.M.(1984). Predictions of the result of laboratory tests on a clay using a critical state model. CONSTITUTIVE RELATIONS FOR SOILS. I INTERNATIONAL WORKSHOP ON CONSTITUTIVE RELATIONS FOR SOILS. Grenoble. 1982. eds.: G.Gudehus, F.Darve, I.Vardoulakis: 99-121.

- HVORSLEV, M.J.(1937). Über die Festigkeitseigenschaften gestörter bindiger Böden. Ingeniorsvidenskabelige Skrifter, A.n45, Kobenhavn. *Apud Roscoe e Burland* (1968).
- LEE, E.H.(1981). Some comments on elastic-plastic analysis. *Int. J. Solids and Struct.*, vol.17, n.9: 859-872.
- LUCCHESI, M.; PODIO-GUIDUGLI, P.(1988). Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part I. *Arch. Rational Mech. Anal.* 102: 23-43.
- LUCCHESI, M.; PODIO-GUIDUGLI, P.(1990). Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part II. *Arch. Rational Mech. Anal.* 110: 9-42.
- LUCCHESI, M.; OWEN, D.R.; PODIO-GUIDUGLI, P.(1992). Materials with elastic range: A theory with a view toward applications. Part III: Aproximate constitutive relations, *Arch. Rational Mech. Anal.* 117: 53-96.
- MANDEL, J.(1983). Sur la définition de la vitesse de déformation élastique en grande transformation élastoplastique. *Int. J. Solids and Struct.*, vol.19, n.7: 573-578.
- MRÓZ, Z.; NORRIS, V.A.; ZIENKIEWICZ, O.C.(1979). Application of an anisotropic hardening model in the analysis of elasto-plastic deformation of soils. *Géotechnique*, 29, n.1: 1-34.
- NAGHDI, P.M.(1960). Stress-stain relations in plasticity and thermo-plasticity. *PLASTICITY, PROC. 2nd. SYMP. NAVAL STRUCTURAL MECHANICS*, Pergamon Press.
- NEMAT-NASSER, S.(1979). Decomposition of strain measures and their rates in finite deformation elastoplasticity. *Int. J. Solids and Struct.*, vol.15, n.2: 155-166.
- NEMAT-NASSER, S.(1982). On finite deformation elasto- plasticity. *Int. J. Solids and Struct.*, vol.18, n.10: 857- 872.

- OWEN,D.R.(1970). A mechanical theory of materials with elastic range. Arch. Rational Mech. Anal., 31: 85-110.
- OWEN,D.R.; WILLIAMS,W.O.(1968). On the concept of rate- independence. Quart. Appl. Math., 26: 321-329.
- PARRY,R.H.G.(1956). Strength and deformation of clay. Ph.D. Thesis, London University. *Apud* Roscoe e Burland(1968).
- PINTO,C.S.; NADER,J.J.(1991). Ensaio de Laboratório em Solos Residuais. Relato, II SEMINÁRIO DE ENGENHARIA DE FUNDAÇÕES ESPECIAIS, São Paulo, vol.2: 166- 202.
- PRAGER,W.(1949). Recent developments in the mathematical theory of plasticity. J. Appl. Physics, vol.20, n.3: 235- 241.
- RENDULIC,L.(1937). Ein Grundgesetz der Tonmechanik und sein experimenteller Beweis, 18: 459-467. *Apud* Roscoe e Burland (1968).
- ROSCOE,K.H.; BURLAND,J.B.(1968). On the generalized stress-strain behaviour of wet clay. ENGINEERING PLASTICITY: 535- 609. ed. J.Heyman e F.A.Leckie, Cambridge.
- ROSCOE,K.H.; POOROOSHASB,H.B.(1963). A theoretical and experimental study of strains in triaxial compression tests on normally consolidated clays. Géotechnique, 13: 12-38.
- ROSCOE,K.H.; SCHOFIELD,A.N.; THURAIRAJAH,A.(1963). Yielding of clays in states wetter than critical. Géotechnique, 13: 211-240.
- ROSCOE,K.H.; SCHOFIELD,A.N.; THURAIRAJAH,A.(1965). Energy components during the triaxial cell and direct shear tests . Correspondence. Géotechnique, 15: 127-130.
- ROSCOE,K.H.; SCHOFIELD,A.N.; WROTH,C.P.(1958). On the yielding of soils. Géotechnique, 9, n.1: 22-53.
- SCHOFIELD,A.N.;WROTH,C.P.(1968). Critical State Soil Mechanics. McGraw-Hill, Londres.

- SIMPSON,B.; O'RIORDAN,N.J.; CROFT,D.D.(1979). A computer model for the analysis of ground movements in London clay. *Géotechnique*, 29: 149-175.
- TERZAGHI,K.(1936). The shearing resistance of saturated soils and the angle between the planes of shear. *ICSMFE, Proc.*, vol.1, Cambridge, Massachussets.
- TERZAGHI,K.(1943). *Theoretical Soil Mechanics*. John Wiley, Nova York.
- TRUESDELL,C.; NOLL,W.(1965). *The Non-Linear Field Theories of Mechanics*. *Handbuch der Physic*, vol.III/3.Ed. S.Függe. Springer-Verlag, Berlim.
- TRUESDELL,C.; TOUPIN,R.A.(1960). *The Classical Field Theories*. *Handbuch der Physic*, vol.III/1. Ed. S.Flügge. Springer-Verlag, Berlim.
- WOOD,D.M.(1990). *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge Univ. Press, Cambridge.