DANIEL MARIANI GUIRARDI

**O MÉTODO DA RELAXAÇÃO DINÂMICA APLICADO À ANÁLISE
DE ESTRUTURAS DE CABOS E MEMBRANAS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia

São Paulo
2011

DANIEL MARIANI GUIRARDI

**O MÉTODO DA RELAXAÇÃO DINÂMICA APLICADO À ANÁLISE
DE ESTRUTURAS DE CABOS E MEMBRANAS**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti

São Paulo
2011

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 19 de dezembro de 2011

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

FICHA CATALOGRÁFICA

Guirardi, Daniel Mariani

O método da relaxação dinâmica aplicado à análise de estruturas de cabos e membranas / D.M. Guirardi. -- São Paulo, 2011. 132 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Método da relaxação dinâmica 2.Estruturas de cabos e membranas 3.Análise não linear de estruturas 4.Método dos elementos finitos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Aos meus pais

Agradecimentos

Ao amigo Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti, pela confiança, incentivo e orientação desta tese.

Ao Prof. Dr. Reyolando M. L. R. F. Brasil e ao Prof. Dr. Edgard Sant'Anna de Almeida Neto, pelas valiosas contribuições na qualificação e na defesa desta tese.

Ao Dr. João Batista Marques de Sousa Jr. e ao Prof. Dr. William Taylor Matias Silva pelas importantes contribuições na defesa desta tese.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de estudo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - CAPES, pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

Aos colegas e funcionários do Laboratório de Mecânica Computacional - LMC e do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações - PEF.

Ao Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo - IPT, pelo incentivo.

Ao Eng. Nelson Fiedler e demais colegas da Fiedler Engenharia pelas experiências compartilhadas em projetos e execuções de estruturas de cabos e membranas.

Ao amigo Laércio Assumpção, pela companhia e oportunidade de moradia próxima à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

Aos meus irmãos Monica e Danilo, sobrinho Gabriel e meus familiares, pelo apoio.

À Ana Carolina pelo amor e compreensão.

Aos meus pais Artur e Marcia Guirardi, pelo incentivo e apoio constante durante toda a minha vida.

A Deus por tudo.

Resumo

Nesta tese discute-se a necessidade de se desenvolver novas ferramentas para auxiliar o projeto e análise de estruturas de cabos e membranas. Esse tipo de estrutura, essencialmente não linear, é geralmente analisada por meio do Método dos Elementos Finitos, combinado com o Método de Newton-Raphson, para a resolução do sistema de equações não lineares resultante. Porém, a ausência de um campo de tensão de tração sobre toda estrutura composta por elementos finitos de cabos e membranas pode gerar uma matriz de rigidez tangente indeterminada, levando à divergência da solução pelo Método de Newton-Raphson. O Método da Relaxação Dinâmica é uma alternativa interessante para resolver problemas não lineares complicados de equilíbrio estático, na qual o problema do equilíbrio estático é resolvido por uma análise dinâmica, com integração no tempo. A resposta transiente é fictícia e não tem significado físico, entretanto a parte estacionária é a solução do problema de equilíbrio estático. Nesta tese, apresenta-se uma contextualização histórica sobre o Método da Relaxação Dinâmica, apontando as contribuições mais relevantes já desenvolvidas por outros autores. Propõe-se um procedimento de sintonia da massa dos elementos, capaz de uniformizar as condições impostas ao incremento de tempo, para se obter estabilidade do processo de integração numérica. Implementam-se as formulações dos elementos finitos adotados, bem como um algoritmo de enrugamento para os elementos de membrana e diversas rotinas de pós-processamento, no programa de elementos finitos SATS (A System for the Analysis of Taut Structures), desenvolvido pelo autor desta tese, em colaboração com seu orientador. A implementação desenvolvida é aplicada a uma série de exemplos relativos ao projeto e análise de estruturas de cabos e membranas, permitindo verificar a eficiência dos procedimentos de amortecimento e cinético e de sintonia de massa propostos.

Palavras-chave: Método da Relaxação Dinâmica. Estruturas de cabos e membranas. Análise não linear de estruturas. Método dos Elementos Finitos.

Abstract

This thesis discusses the need to develop new tools to assist the design and analysis of cables and membrane structures. This type of structures, essentially non-linear is generally analyzed using the Finite Element Method, where in most cases the solution is obtained by the Newton-Raphson Method. However, the absence of a tension stress field over the entire structure composed only with cable and membrane finite element can generate a non-positive definite tangent stiffness matrix, leading to the divergence of Newton-Raphson iterations. The Method of Dynamic Relaxation is an interesting alternative to solve complicated nonlinear problems of static equilibrium, replaced by an equivalent dynamic analysis. The transient solution is fictitious and without physical meaning, and the stationary phase provides the static equilibrium solution. This thesis presents a historical contextualization of the Dynamic Relaxation Method, highlighting the most relevant contributions already developed by other authors. A procedure for the tuning of the element masses is proposed, which is capable of making uniform the restrictions imposed to the time steps in order to preserve the stability of the numerical integration. Some adopted finite element formulations are implemented, as well as an algorithm for representing the wrinkling of membrane elements and several post-processing routines, in the SATS (A System for the Analysis of Taut Structures) finite element program, developed by the author of this thesis, in collaboration with his advisor. The developed implementation is applied to a series of examples on the design and analysis of cables and membrane structures, allowing verification of the efficiency of the procedures proposed for kinetic damping and mass tuning.

Keywords: *Dynamic Relaxation Method. Cable and membrane structures. Nonlinear analysis of structures. Finite Element Method.*

Sumário

Agradecimentos	i
Resumo	ii
Abstract.....	iii
Lista de Figuras.....	vi
Lista de tabelas	x
Capítulo 1.....	1
Introdução	1
Contextualização Histórica do Método da Relaxação Dinâmica	6
Capítulo 2.....	13
Análise estrutural não linear	13
2.1 Caracterização do problema	13
2.2 Relação entre vetores globais e os vetores dos elementos.....	15
2.3 Método de Newton-Raphson	17
2.4 Introdução ao Método da Relaxação Dinâmica.....	19
2.4.1 Caracterização do problema dinâmico	20
2.4.2 Método das diferenças Centrais.....	22
2.4.3 Estabilidade do Método das Diferenças Centrais	24
Capítulo 3.....	28
Método da Relaxação Dinâmica	28
3.1 Conceitos gerais.....	28
3.2 Conceituação do Método da Relaxação Dinâmica	30
3.3 Determinação do incremento de tempo crítico do sistema.....	31
3.4 Sintonia da massa fictícia pela rigidez nodal.....	33
3.5 Sintonia da massa pela rigidez dos elementos.....	34
3.6 Amortecimento viscoso	37
3.7 Amortecimento cinético	39
3.8 Critério de ajuste do fator de não linearidade.....	41
Capítulo 4.....	43
Formulações dos elementos finitos implementados	43
4.1 Elemento finito de treliça geometricamente exato	43
4.2 Super-elemento de cabo escorregando sem atrito	46
4.3 Elemento de linha geodésica	50
4.4 Elemento finito de membrana.....	52
4.4.1 Um modelo simplificado de enrugamento para o elemento de membrana	61
Capítulo 5.....	65
Sistema SATS e as implementações desenvolvidas	65
5.1 Detalhamento do SATS	66

	v
5.1.1 – Entrada de dados.....	67
5.1.2 – Visualização da malha	68
5.1.3 Solução	69
5.1.4 Pós-Processador.....	71
5.1.5 Nova solução	72
5.1.6 Saída de resultados	73
Capítulo 6.....	74
Exemplos de aplicação.....	74
6.1 Cabo catenário	75
6.2 Membrana circular inflada.....	78
6.3 <i>Airbag</i> quadrado	83
6.4 Toalha de mesa	89
6.5 Paraquedas	93
6.6 Memorial dos Povos	99
6.7 Anfiteatro.....	106
Capítulo 7.....	118
Conclusões	118
Referências Bibliográficas	122

Lista de Figuras

Figura 1.1: Cubo d'água	2
Figura 1.2: Nelson Mandela Bay Stadium	3
Figura 1.3: Estádio Ciudad de La Plata	3
Figura 1.4: Cobertura no morro da Urca	3
Figura 1.5: Cobertura do Paddock no Autódromo de Interlagos	4
Figura 1.6: Resposta no tempo	5
Figura 1.7: Principais contribuições para o Método da Relaxação Dinâmica aplicadas nesta tese	11
Figura 1.8: Fluxograma conceitual da tese	11
Figura 2.1: Intenção Arquitetônica	14
Figura 2.2: Discretização da arquitetura em elementos	14
Figura 2.3: Carregamento no tempo	19
Figura 2.4: Resposta no tempo	20
Figura 2.5: Sistema com um grau de liberdade	20
Figura 2.6: Variação dos deslocamentos no tempo para diferentes taxas de amortecimento ..	22
Figura 2.7: Notação do Método das Diferenças Centrais	23
Figura 2.8: Gráfico da variação de $ \lambda_1 $ e $ \lambda_2 $ em função de ψ	27
Figura 3.1: Diferentes respostas no tempo, modificando M e C.	31
Figura 3.2: Variação da energia cinética do sistema com amortecimento cinético	40
Figura 3.3: Variação da energia cinética do sistema com amortecimento viscoso.	40
Figura 3.4: Variação na energia cinética para três valores de f_{NL}	42
Figura 3.5: Variação na energia cinética para três valores de f_{NL}	42
Figura 4.1: Elemento finito de treliça indicando a correspondência entre a numeração local e a global do sistema (Pauletti, 2009a).	44
Figura 4.2: Elemento de cabo escorregando por uma polia (Pauletti, 2009b)	46
Figura 4.3: Super-elemento de cabo - Numeração dos nós (Pauletti, 2009b)	47
Figura 4.4: Super-elemento de cabo - Numeração dos elementos (Pauletti, 2009b)	47
Figura 4.5: Vetores normais médios no vértice de uma mesma pirâmide para diferentes critérios (Pauletti 2009a)	51
Figura 4.6: Elemento CST de membrana, nas configurações indeformada (Ω^r), inicial (Ω^0) e corrente (Ω^c) (Pauletti, 2003)	53
Figura 4.7: Vetor posição $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^0 + \mathbf{u}_p$ de um ponto $P \in \Omega^c$, em termos de suas coordenadas iniciais ($\mathbf{x}_p^0$) e de seu deslocamento ($\mathbf{u}_p$), desde a configuração inicial até a configuração corrente (Pauletti, 2003)	54
Figura 4.8: Versores ($\mathbf{v}_1; \mathbf{v}_2; \mathbf{v}_3$) das direções dos lados do elemento CST (Pauletti, 2003) ..	55
Figura 4.9: Esforços internos nodais e sua decomposição em forças de interação nodal (Pauletti, 2009a)	57
Figura 4.10: Determinação da força natural N_3 a partir da tensão natural σ_3	58
Figura 5.1: Mapa conceitual do SATS	66

Figura 5.2: Tela principal do SATS	67
Figura 5.3: Exemplo com a convenção de condição de contorno e carregamento adotado.	68
Figura 5.4 Pressões nos elementos	69
Figura 5.5: Malha com numeração dos nós e elementos	69
Figura 5.6: Gráficos de convergência do erro e do logaritmo natural do erro para o Método de Newton-Raphson	70
Figura 5.7: Painel de convergência pelo Método da Relaxação Dinâmica	70
Figura 5.8: Representação dos resultados da norma dos deslocamentos em escala de cores... 71	
Figura 5.9: Representação dos resultados das segundas tensões principais em escala de cores por nós e por elementos	72
Figura 5.10: Representação dos resultados das primeiras deformações principais em escala de cores por nós e por elementos.....	72
Figura 5.11: Planificação de uma faixa da membrana.....	73
Figura 5.12: Figuras do Autocad e Ansys, geradas com arquivo <i>script</i>	73
Figura 6.1: Cabo sujeito ao carregamento de peso próprio	75
Figura 6.2: Malha inicial do modelo do cabo discretizada com 6 elementos de treliça	75
Figura 6.3: Configuração de equilíbrio do cabo catenário com a norma dos deslocamentos .. 76	
Figura 6.4: Variação da energia cinética do cabo catenário, para os amortecimentos viscoso e cinético	77
Figura 6.5: Variação da força nodal desbalanceada do cabo catenário, para os amortecimentos viscoso e cinético.....	77
Figura 6.6: Malha inicial da membrana circular no plano XY	78
Figura 6.7: Deslocamentos da membrana circular na direção do eixo Z para pressão de 0,04 Pa	79
Figura 6.8: Deslocamentos da membrana circular na direção do eixo Z adaptados de Wu e Ting (2008).....	80
Figura 6.9: Deslocamentos da membrana circular na direção do eixo Z para pressão de 8,0 Pa	80
Figura 6.10: Primeiras tensões principais da membrana circular para pressão de 8,0 Pa	81
Figura 6.11: Segundas tensões principais da membrana circular para pressão de 8,0 Pa	81
Figura 6.12: Primeiras deformações principais da membrana circular para pressão de 8,0 Pa 81	
Figura 6.13: Variação da energia cinética da membrana circular sob pressão de 8,0 Pa, para os amortecimentos viscoso e cinético	82
Figura 6.14: Variação da força nodal desbalanceada da membrana circular sob pressão de 8,0 Pa, para os amortecimentos viscoso e cinético.....	82
Figura 6.15: Figura representativa do <i>airbag</i> criada a partir da configuração final do modelo	84
Figura 6.16: Configuração da malha final do <i>airbag</i> com os deslocamentos de referência.....	84
Figura 6.17: Malha inicial do modelo do <i>airbag</i>	85
Figura 6.18: Variação da energia cinética do <i>airbag</i> para o amortecimento cinético	85
Figura 6.19: Variação da força nodal desbalanceada do <i>airbag</i> para o amortecimento cinético	86
Figura 6.20: Deslocamentos do <i>airbag</i> na direção do eixo Z.....	87
Figura 6.21: Deslocamentos do <i>airbag</i> na direção do eixo Y	87
Figura 6.22: Primeiras tensões principais nodais do <i>airbag</i>	87

Figura 6.23: Segundas tensões principais nodais do <i>airbag</i>	88
Figura 6.24: Primeiras tensões principais dos elementos do <i>airbag</i>	88
Figura 6.25: Segundas tensões principais dos elementos do <i>airbag</i>	88
Figura 6.26: Configuração da malha final do <i>airbag</i> sem a consideração do enrugamento	89
Figura 6.27: Figura representativa da toalha sobre a mesa criada a partir da configuração final do modelo	90
Figura 6.28: Configuração final e inicial da malha de modelo da toalha.....	90
Figura 6.29: Variação da energia cinética da toalha para amortecimento cinético	91
Figura 6.30: Variação da força nodal desbalanceada da toalha para o amortecimento cinético	91
Figura 6.31: Norma dos deslocamentos da toalha.....	92
Figura 6.32: Primeiras tensões principais da toalha	92
Figura 6.33: Segundas tensões principais da toalha	93
Figura 6.34: Figura representativa do paraquedas gerado a partir da configuração final do modelo	95
Figura 6.35: Malha inicial do paraquedas	95
Figura 6.36: Variação da energia cinética do paraquedas para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e com Δt crítico global.....	96
Figura 6.37: Variação da força nodal desbalanceada do paraquedas para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e com Δt crítico global	96
Figura 6.38: Malha final do paraquedas	97
Figura 6.39: Norma dos deslocamentos com a configuração inicial para o paraquedas	97
Figura 6.40: Primeiras tensões principais para o paraquedas.....	98
Figura 6.41: Primeiras tensões principais ao longo eixo no meio dos gomos do paraquedas..	98
Figura 6.42: Memorial dos Povos de Belém do Pará (Pauletti et al., 2007)	99
Figura 6.43: Malha inicial do modelo do Memorial dos Povos para os casos 1 e 3.	101
Figura 6.44: Malha inicial do modelo do Memorial dos Povos para os casos 2 e 3.	101
Figura 6.45: Norma dos deslocamentos do Memorial.....	102
Figura 6.46: Primeiras tensões principais para o Memorial.....	102
Figura 6.47: Segundas tensões principais nodais para o Memorial.....	102
Figura 6.48: Variação da energia cinética do memorial, para os amortecimentos viscoso e cinético para o caso 1a.....	103
Figura 6.49: Variação da força nodal desbalanceada do memorial, para os amortecimentos viscoso e cinético para o caso 1a	103
Figura 6.50: Variação da energia cinética do memorial, para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e nodal e com Δt crítico global, para o caso 2	104
Figura 6.51: Variação da força nodal desbalanceada do memorial, para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e nodal e com Δt crítico global, para o caso 2	104
Figura 6.52: Padronagem de corte obtida por método geométrico (a) e por elementos geodésicos (b) (Pauletti, Guirardi e Gouveia, 2009).	105
Figura 6.53: Planificação de uma faixa do Memorial	105
Figura 6.54: Anfiteatro do Parque Temático	106
Figura 6.55: Vistas superior e frontal da malha inicial do Anfiteatro	107
Figura 6.56: Vista lateral da malha inicial do Anfiteatro	108

Figura 6.57: Pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento frontal	108
Figura 6.58: Norma dos deslocamentos do Anfiteatro (vento frontal).....	109
Figura 6.59: Primeiras tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento frontal)	109
Figura 6.60: Segundas tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento frontal)	109
Figura 6.61: Variação da energia cinética do Anfiteatro sujeito ao vento frontal para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos	110
Figura 6.62: Variação da força nodal desbalanceada do Anfiteatro sujeito ao vento frontal para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos	110
Figura 6.63: Pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento posterior	111
Figura 6.64: Norma dos deslocamentos do Anfiteatro (vento posterior)	111
Figura 6.65: Primeiras tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento posterior).....	112
Figura 6.66: Segundas tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento posterior).....	112
Figura 6.67: Variação da energia cinética do Anfiteatro sujeito ao vento posterior para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos	113
Figura 6.68: Variação da força nodal desbalanceada do Anfiteatro sujeito ao vento posterior para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos	113
Figura 6.69: Pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento lateral	114
Figura 6.70: Norma dos deslocamentos do Anfiteatro (vento lateral)	114
Figura 6.71: Primeiras tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento lateral)	115
Figura 6.72: Segundas tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento lateral)	115
Figura 6.73: Variação da energia cinética do Anfiteatro sujeito ao vento lateral para o amortecimento cinético com os critérios de Δt crítico global, sintonia da massa crítica nodal e por elementos.....	116
Figura 6.74: Variação da força nodal desbalanceada do Anfiteatro sujeito ao vento lateral para o amortecimento cinético com os critérios de Δt crítico global, sintonia da massa crítica nodal e por elementos	116

Lista de tabelas

Tabela 6.1 : Resultados do modelo do cabo catenário	76
Tabela 6.2: Deslocamentos máximos da membrana circular para pequenas deformações	79
Tabela 6.3: Deslocamentos máximos da membrana circular na direção do eixo Z	80
Tabela 6.4: Deslocamentos e tensões do <i>airbag</i> em pontos de referência	86
Tabela 6.5: Deslocamentos e tensões do memorial para o caso 1	103

Capítulo 1

Introdução

As Estruturas de Cabos e Membranas, também conhecidas como Estruturas Retesadas ou Tensoestruturas, além de possuírem beleza arquitetônica e diversidade de formas, são excelentes soluções para cobrir grandes vãos. São ainda, estruturas que causam menos impacto ambiental por serem feitas com materiais recicláveis. Esse tipo de estrutura, usada como moradia nos primórdios da civilização, hoje é utilizada em coberturas de estádios, igrejas, aeroportos, entre outras aplicações, sendo seu desenvolvimento objeto de intenso estudo em todo o mundo.

As estruturas de cabos e membranas apresentam grandes vantagens, em comparação com outros sistemas mais convencionais, como por exemplo: diferencial arquitetônico, translucidez, possibilidade de cobrir grandes áreas sem apoios intermediários, baixa razão entre o peso próprio e a área coberta, facilidade no transporte, maior rapidez de execução e uso de materiais recicláveis.

Quanto ao material da membrana, os mais utilizados atualmente são basicamente três: o tecido de poliéster revestido com cloreto polivinílico (PVC), o tecido de fibra de vidro revestido com politetrafluoretileno (PTFE) e o filme de etileno fluoretileno (ETFE). Os tecidos com PVC são mais baratos, de durabilidade de 10 a 15 anos e média resistência à

tração. Os tecidos com PTFE são de grande durabilidade (mais de 25 anos) e grande resistência à tração, porém são os mais caros. O filme de ETFE tem durabilidade de 20 anos e é muito utilizado em obras que requerem grande transparência por ter 90% de translucidez.

As instalações de grandes eventos mundiais, como os jogos Olímpicos e a Copa do Mundo da FIFA (Fédération Internationale de Football Association), apresentam diversas soluções em estruturas de cabos e membranas. Nas Copas do Mundo da FIFA, realizadas nos anos de 2002 na Coreia e Japão e 2006 na Alemanha, dos 22 estádios usados para esses eventos, 18 tiveram suas coberturas constituídas por estruturas de membranas e cabos. Na edição de 2010, na África do Sul, alguns estádios apresentavam coberturas em membrana e no Brasil existem alguns projetos em andamento com esse tipo de estrutura para os jogos de 2014, mostrando a relevância das aplicações, a tendência e o aumento do uso desse tipo de solução para coberturas.

Para os jogos Olímpicos de Pequim, em 2008, foi construído o Centro Aquático Nacional, conhecido como “Cubo d’ água” (Figura 1.1). A estrutura em membrana construída para receber as competições de natação é composta por mais de 3.000 bolsas pneumáticas de filme de ETFE (etileno-tetrafluoroetileno), totalizando uma área coberta de mais de 110.000 m². É uma estrutura de 177 m de vão e 31 m de altura.

Figura 1.1: Cubo d’água

A cobertura do Nelson Mandela Bay Stadium (Figura 1.2), construído para a Copa do Mundo da FIFA em 2010 na África do Sul, tem aproximadamente 21.000 m² de tecido de fibra de vidro revestido com PTFE.

Figura 1.2: Nelson Mandela Bay Stadium

O Estádio Ciudad de La Plata (Figura 1.3), construído para a Copa América de Futebol, em 2011, na Argentina, tem 29.000 m² de tecido de fibra de vidro revestido com PTFE, 536 unidades de cabos de aço e cerca de 1.300 toneladas de estrutura metálica.

Figura 1.3: Estádio Ciudad de La Plata

No Brasil há uma variedade de estruturas de cabos e membranas já construídas. A estrutura de membrana com tecido de poliéster revestido com PVC, conforme a Figura 1.4, está localizada no Morro da Urca no Rio de Janeiro e teve sua construção concluída em 2007.

Figura 1.4: Cobertura no morro da Urca

No Autódromo de Interlagos, em São Paulo, há uma cobertura sobre o paddock de 5.800 m² em tecido de poliéster revestido com PVC, construída em 2008 (Figura 1.5), cujo projeto teve participação do autor desta tese.

Figura 1.5: Cobertura do Paddock no Autódromo de Interlagos.

Os procedimentos para projeto e análise das estruturas de cabos e membranas têm três fases características. São elas: a *busca da forma*, a *determinação dos padrões de corte* e a *análise da resposta aos carregamentos*. Na *busca da forma*, entre as muitas configurações de equilíbrio possíveis, o projetista procura selecionar a configuração que melhor atenda aos requisitos do projeto. Na *determinação dos padrões de corte*, uma vez definida a configuração inicial da estrutura, a superfície encontrada deve ser convertida em um conjunto de peças planas, para sua fabricação. Como as superfícies de dupla curvatura, típicas das estruturas retesadas, não podem ser planificadas de forma exata, o processo de determinação dos padrões de corte é inevitavelmente aproximado. Na *análise da resposta aos carregamentos* faz-se o estudo do comportamento da estrutura sujeita a uma variedade de carregamentos e para garantir que a estrutura possa suportar todas as solicitações que encontrará em serviço. A falta de rigidez à flexão torna as estruturas retesadas suscetíveis a grandes variações geométricas, mesmo sob carregamentos moderados (Pauletti, 2003).

O projeto e a análise de estruturas de cabos e membranas são tecnologias em desenvolvimento e necessitam de avanços nas pesquisas e a criação de novas ferramentas. As geometrias complexas e o comportamento não linear das estruturas retesadas geralmente inviabilizam o uso de soluções analíticas, levam necessariamente ao emprego de soluções por métodos numéricos. Entre os métodos numéricos empregados para a análise das estruturas retesadas o mais utilizado é o método dos elementos finitos. As estruturas retesadas são na maioria das vezes discretizadas com elementos finitos de membrana para a representação do

tecido estrutural e com elementos de treliça para a representação dos cabos. Os programas comerciais desenvolvidos em elementos finitos possuem elementos de membrana e treliça, porém muitas vezes não possuem algumas características importantes para se fazer uma análise mais detalhada dessas estruturas, como por exemplo elementos que reproduzam de forma mais real o afrouxamento dos cabos e o enrugamento das membranas.

O SATS (A System for the Analysis of Taut Structures) é um sistema para o projeto e análise de estruturas retesadas, discretizadas em elementos finitos, previamente desenvolvido pelo autor desta tese e seu orientador e apresentado originalmente em Guirardi (2006). Implementando-se novas teorias e aplicando-as no sistema SATS, pode-se dispor de uma ferramenta que possibilita maior praticidade e rapidez no desenvolvimento do projeto de estruturas de cabos e membranas.

O Método de Newton-Raphson normalmente é o mais eficiente para a solução do problema de equilíbrio estático de estruturas de cabo e membrana, desde que se conheça a matriz de rigidez tangente dos elementos usados na análise. Porém, a ausência de um campo de tensões de tração sobre toda estrutura composta por elementos finitos de cabos e membranas pode gerar uma matriz de rigidez tangente indeterminada, levando à divergência do Método de Newton-Raphson durante o processo iterativo.

O Método da Relaxação Dinâmica é uma alternativa interessante para resolver problemas não lineares complexos de equilíbrio estático, na qual o problema do equilíbrio estático é resolvido por uma análise dinâmica, com integração no tempo. A solução transiente é fictícia e sem significado físico; a solução de interesse é correspondente à fase estacionária, que é a solução de equilíbrio estático, como pode ser observado na Figura 1.6.

Figura 1.6: Resposta no tempo

O Método da Relaxação Dinâmica é tradicionalmente aplicado em combinação com o Método explícito de integração no tempo das Diferenças Centrais, sendo este um método condicionalmente estável, dependendo das frequências naturais do sistema. Sendo fictícia a fase transiente da resposta do sistema, podem-se manipular as matrizes de massa e de amortecimento, no intuito de acelerar a convergência, porém obedecendo a condição de estabilidade. Pode-se ainda utilizar uma matriz de amortecimento viscoso ou um procedimento de amortecimento por meio da energia cinética do sistema. O Método das Diferenças Centrais não necessita da matriz de rigidez tangente do sistema e não requer resolução de sistemas lineares em cada incremento de tempo. A ausência da matriz de rigidez aumenta a robustez na convergência da solução de muitos problemas de estruturas de cabos e membranas, uma vez que quando submetidas a fortes carregamentos de vento as mesmas tendem a enrugar a se comportar como mecanismos, o que impede a solução direta do problema estático pelo Método de Newton-Raphson.

Contextualização Histórica do Método da Relaxação Dinâmica

O Método da Relaxação Dinâmica (MRD) foi originariamente proposto por Day (1965), que fez aplicações na resolução de modelos de vaso de pressão de concreto para um reator nuclear. Na maioria das referências encontra-se o MRD aplicado como método iterativo de resolução das equações de equilíbrio, discretizadas pelo Método das Diferenças Finitas (MDF) ou pelo Método dos Elementos Finitos (MEF).

Otter (1965a) também é um dos primeiros autores a aplicar o MRD em problemas estruturais, publicando no mesmo ano que Day e sobre contextos semelhantes. O autor desenvolve um trabalho no qual descreve um método computacional para se obter tensões e deslocamentos, em um modelo de vaso de pressão de concreto para reator nuclear, aplicando o MRD em modelos discretizados pelo MDF. Segundo Otter (1965b) “A escolha parece depender principalmente da experiência prévia do analista estrutural com os vários sistemas de análise numérica, mas é sugerido que o MRD seja uma boa tentativa quando um problema novo e complicado é enfrentado”.

Tarandi (1966) e Cederberg (1969) também fizeram aplicações do MRD em vasos de pressão de concreto discretizados pelo MDF e obtiveram resultados satisfatórios, ao passo que as aplicações do MRD de Rushton (1968) se dirigiam à solução de problemas elásticos de placas.

Uma análise não linear com material isotrópico, com grandes deformações de uma placa com espessura constante, sujeita a uma carga transversal uniformemente distribuída é desenvolvida por Alwar e Rao (1974), sendo a análise feita com o MRD. Os autores destacam a maior facilidade de programação em comparação com outros métodos e a uma boa precisão na solução.

Alwar et al. (1975) propõem alternativas para obtenção do amortecimento crítico no intuito de diminuir o número de iterações para a obtenção da solução. Os autores fazem exemplos de aplicações do MRD em uma viga bi-engastada e placa com material ortotrópico.

Um dos primeiros trabalhos do MRD aplicados em tensoestruturas é apresentado por Barnes (1975), que apresenta exemplos de análises de cabos, membranas e pneumáticos. O mesmo autor (1977) aplica o MRD em processos de busca de forma de tensoestruturas.

Frieze et al. (1978) e Frieze e Dowling (1978) apresentam uma aplicação do MRD em um estudo de uma placa retangular com diferentes condições de contorno, considerando grandes deslocamentos e material elasto-plástico.

Papadrakakis (1981) utiliza exemplos de estruturas simples de cabos com um tipo de amortecimento baseado na energia cinética do sistema denominado amortecimento cinético, primeiramente proposto por Cundall (1976) em um contexto da geomecânica. Papadrakakis desenvolve também parâmetros para regular a coeficiente de amortecimento pelas frequências naturais do sistema, usa o Teorema de Gershgorin para aproximar as frequências do sistema e faz aplicações do MRD em problemas com não linearidade geométrica e do material.

Na década de 1980, surgiram muitos outros trabalhos sobre o MRD. Lewis et al. (1984a e 1984b) mostram análises de coberturas de cabos com aplicações do MRD discretizadas com o MDF. Nesses trabalhos os elementos de cabos são segmentos de retas, as forças externas são aplicadas apenas nos nós e os cabos possuem apenas rigidez axial. Parâmetros do MRD são apresentados como o incremento de tempo crítico com base na rigidez inicial dos cabos. Comparações foram desenvolvidas entre os resultados numéricos e os experimentais, apresentando bons resultados. Juntamente com os trabalhos de Barnes e Papadrakakis são as primeiras referências com aplicação do MRD em estruturas de cabos e membranas.

Underwood (1983) propõe um critério de sintonia da massa fictícia, onde se arbitra um incremento de tempo e garante-se a estabilidade do sistema fazendo um procedimento de sintonia da massa crítica a partir da rigidez tangente do sistema obtida pelo Teorema de Gershgorin.

Chou e Wu (1986) apresentam um programa em elementos finitos que envolve uma modificação artificial no termo do amortecimento e aplicam o MRD em exemplos relacionados aos processos de conformação do metal. Um dos exemplos contempla grandes deformações devido à carga de impacto de grande velocidade.

O MRD também é utilizado por Al-Shawi e Mardirosian (1987) para a solução de problemas de flexão de placa. Os autores propõem taxas de amortecimento de acordo com a rigidez à flexão.

Shugar (1987) percebe que o MRD é mais robusto que o Método de Newton-Raphson, pois, em algumas experiências resolvidas pelo Método de Newton-Raphson, nas quais se encontrou convergência para soluções sem nenhum significado físico, ainda assim o MRD convergiu à solução correta. Na maioria dos casos, porém, ambos os métodos mostraram convergência. Entretanto, o Método de Newton-Raphson sempre é consideravelmente mais rápido. Os casos estudados por Shugar (1987) tiveram poucos graus de liberdade e, de acordo com Zienkiewicz (1989), o MRD não mostra grande vantagem para problemas de tamanhos pequenos a médios, mas a economia pode ser dramática para problemas muito grandes.

Exemplos de análises de flambagem considerando plastificação de seções de treliças, com apoios elásticos em grandes deslocamentos, usando o MRD, são demonstrados por Shizhong Qiang (1988).

Ainda em 1988, aplicações importantes para a análise de estruturas de cabos e membranas com o MRD são encontradas em Barnes (1988), que desenvolve procedimentos de busca de forma, análises de carregamentos e procedimentos de padrões de corte, com amortecimento cinético. O procedimento de amortecimento cinético mostrou-se estável e um bom acelerador do processo de dissipação da energia para obtenção da solução estática. O autor aconselha, para acelerar o processo de convergência, a realização de uma sintonia da massa nodal de acordo com a sua rigidez nodal correspondente.

Já Chen, et al. (1989), ao realizarem análises com o MRD de casos considerando contato com atrito no estado plano de deformação, encontraram resultados satisfatórios. Os autores recomendam o uso do MRD para os casos de grande complexidade.

Bardet e Proubet (1991) propõem uma adaptação do MRD para o estudo da estática de materiais granulares. Sugerem também a aplicação de parâmetros propostos originalmente em Papadrakakis (1981), como um coeficiente de amortecimento ajustado a partir do período do sistema. Essa modificação fez os autores utilizarem a nomenclatura ARD (Adaptive Relaxation Method).

Uma modificação do MRD em problemas elasto-plásticos de flexão de placas circulares com grandes deformações é proposta por Zhang e Yu (1989). Os autores realizam comparações com resultados experimentais obtendo bons resultados. A modificação baseia-se em um coeficiente viscoso proposto pelos autores originando o denominado método maDR (modified adaptive Dynamic Relaxation).

Lewis e Shan (1990) fazem aplicações do MRD com amortecimento cinético em exemplos de rede de cabos.

Aplicações do MRD em estruturas de membrana com procedimentos de planificação e padronagem de cortes são abordadas em Moncrieff e Topping (1990).

Kobayashi e Turvey (1993) mostram técnicas do MRD com aplicações em membranas e placas circulares e cascas esféricas.

Um exemplo de uma modelagem da catenária de um sistema de atracação discretizado por elementos finitos de treliça é apresentado por Wu (1995) e a solução é obtida por meio da ARD.

Oakley e Knight (1995a, 1995b e 1995c) apresentam uma formulação da ADR com aplicações em estruturas com materiais hiperelásticos. Os autores usam recursos computacionais avançados para época como processamento paralelo e vetorização em seus exemplos.

Já Ramesh e Krishnamoorthy (1995) investigam aplicações do MRD em análises com não-linearidade geométrica de placas e cascas, com grandes deslocamentos e pequenas rotações e deformações. Estabelecem comparações entre o MRD e o Método de Newton-Raphson, avaliando e comparando parâmetros de modificação do MRD, propostos por outros autores.

Oakley e Knight (1996) fazem aplicações da ARD em estruturas com comportamento não-linear e propõem um algoritmo que utiliza menos memória e facilidades para o uso de processamento paralelo.

Diversos exemplos de aplicações práticas do MRD em análises de estruturas de cabos e membranas são apresentados por Wakefield (1999). Leite (1999) faz exemplos de aplicação do MRD em estruturas de rede de cabos.

Wood (2002) discute uma técnica de controle da distorção da malha de elementos finitos durante a busca da forma de membranas, usando o MRD.

Enquanto Han e Lee (2003) descrevem processos de estabilização de estruturas com cabos, domos e pneumáticos, usando o MRD, Metzger (2003) apresenta outro método de amortecimento aplicado no MRD em problemas de resposta espectral não-monotônicas. Neste

mesmo ano, o MRD é combinado com redes neurais e aplicado em estruturas tipo tensegrity por Domer et al. (2003). Ainda em 2003, um capítulo sobre o MRD aplicado a estruturas de cabos e membranas é apresentado no livro de Lewis (2003).

Salehi e Aghaei (2005) aplicam o MRD em análises de placas circulares com material viscoelástico e grandes deformações. Já Hegyi et al. (2006) aplicam o MRD para a análise de membranas usando um elemento finito quadrilátero de oito nós, com dupla curvatura.

Topping e Ivanyi (2007) apresentam um capítulo sobre o MRD aplicado a estruturas de cabos e membranas.

Em 2008, o MRD é aplicado por Tu e Andrade (2008) na mecânica de partículas, ao passo que, Kadkhodayan et al. (2008) descrevem uma outra variação do MRD a qual considera a minimização da força residual obtida após cada iteração e aplicações em modelos com elementos finitos de placa e treliça.

Pauletti et al. (2007, 2008a, 2008b, 2009a e 2009b) aplicam o MRD na resolução de problemas práticos de busca da forma, planificação dos padrões de corte e carregamentos de vento em estruturas de cabos e membranas. Pauletti e Guirardi (2010) aplicam o MRD em problemas de minimização de áreas.

Douthe e Baverel (2009) usam o MRD em exemplos de estruturas do tipo *nexoredes*. Enquanto que Dang e Meguid (2010) aplicam o MRD em problemas de geotecnia.

Exemplos de estruturas tensegrity com aplicações do MRD são apresentadas em Ali et al. (2011). Lee et al. (2011) propõem a aplicação do MRD com o método da corda explícito com amortecimento cinético.

Rezaiee-pajand et al. (2011) propõem um novo parâmetro para se obter um coeficiente de amortecimento viscoso e comparam a eficiência desse parâmetro obtendo uma variação para cada exemplo da vantagem de se usar o amortecimento viscoso ou o cinético. Na maioria dos exemplos estudados, porém, a adoção do amortecimento cinético propiciou uma convergência mais rápida que os coeficientes de amortecimento viscoso propostos no trabalho.

A Figura 1.7 mostra as principais contribuições para o Método da Relaxação Dinâmica aplicadas nesta tese, sendo Courant et al (1928), Irons e Treharne (1972) e Cundall (1976) contribuições indiretas, mas fundamentais.

Figura 1.7: Principais contribuições para o Método da Relaxação Dinâmica aplicadas nesta tese

A Figura 1.8 mostra um fluxograma com os conceitos necessários para a análise de estruturas de cabos e membranas aplicados nesta tese.

Figura 1.8: Fluxograma conceitual da tese

A partir da problemática e do contexto apresentados anteriormente, esta tese tem os seguintes objetivos:

- propor um procedimento de sintonia da massa crítica baseado na rigidez dos elementos, combinado com um procedimento de amortecimento cinético, tratando-se de uma importante contribuição original;
- implementar no sistema SATS as formulações dos elementos finitos de referência, combinando-as com um algoritmo de representação do enrugamento de membranas e com rotinas de pós-processamento de resultados adequadas às estruturas de cabos e membranas, resolvidas pelo Método da Relaxação Dinâmica;
- aplicar a implementação desenvolvida em exemplos de projeto e análise de estruturas de cabos e membranas e verificar a eficiência dos procedimentos de amortecimento e sintonia da massa crítica propostos no âmbito desta tese.

Esta tese está organizada em sete Capítulos.

No Capítulo 2 são apresentados os conceitos da análise estrutural não linear. No Capítulo 3 são apresentadas as teorias que envolvem o Método da Relaxação Dinâmica. No Capítulo 4 são mostradas as formulações dos elementos finitos implementados no sistema SATS, para realização das análises desenvolvidas no âmbito desta tese. No Capítulo 5 são descritos o sistema SATS e as implementações desenvolvidas. O Capítulo 6 descreve os exemplos de aplicação do Método da Relaxação Dinâmica estudados.

Finalmente, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões desta tese.

Capítulo 2

Análise estrutural não linear

Neste Capítulo são apresentados os conceitos de análise estrutural não linear pelo Método dos Elementos Finitos. Para resolução das equações não lineares são adotados o método de Newton-Raphson e o Método da Relaxação Dinâmica. São apresentados os conceitos da análise não linear estática com enfoque para o Método da Relaxação Dinâmica.

2.1 Caracterização do problema

Embora os elementos estruturais básicos das estruturas de cabos e membranas sejam aqueles de mais simples formulação, o comportamento estrutural do conjunto é essencialmente não-linear, dificultando a obtenção de soluções analíticas e deixando os métodos numéricos como única abordagem de validade geral para a análise deste tipo de sistema (Tabarrok, 1997; Pauletti, 2003).

O problema do equilíbrio dos sistemas estruturais de comportamento não linear pode ser descrito por equações diferenciais cuja resolução requer, em boa parte dos casos, algum

processo de discretização. O problema reduz-se, então, a um sistema de equações algébricas não lineares.

Considerando a intenção arquitetônica, a seguir, constituída por tecido estrutural e cabos de borda, assim como a Figura 2.1,

Figura 2.1: Intenção Arquitetônica

verifica-se que tal configuração de equilíbrio não possui uma solução analítica. Sendo assim, uma alternativa seria determinar uma configuração aproximada por um método numérico. Entre os métodos numéricos, o mais utilizado é o Método dos Elementos Finitos, adotado também neste trabalho. Portanto, discretiza-se a estrutura em elementos finitos, sendo o tecido estrutural discretizado com elementos finitos de membrana; os cabos de borda também podem ser discretizados com elementos finitos de treliça, Figura 2.2.

Figura 2.2: Discretização da arquitetura em elementos

O comportamento desse tipo de estrutura é essencialmente não linear. O problema de equilíbrio dessa estrutura é determinado por:

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}) - \mathbf{F} = 0 \quad (2.1)$$

onde definem-se os vetores globais do sistema como $\mathbf{P}$ sendo o vetor de forças internas, $\mathbf{F}$ o vetor de forças externas, $\mathbf{G}$ o vetor de forças desbalanceadas e $\mathbf{U}$ vetor de deslocamentos.

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ \vdots \\ F_{3n} \end{bmatrix}, \mathbf{P} = \begin{bmatrix} P_1 \\ P_2 \\ \vdots \\ P_{3n} \end{bmatrix}, \mathbf{G} = \begin{bmatrix} P_1 - F_1 \\ P_2 - F_2 \\ \vdots \\ P_{3n} - F_{3n} \end{bmatrix}, \mathbf{U} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ \vdots \\ U_{3n} \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

sendo n o número de nós e $3n$ o número de graus de liberdade do sistema. No caso de elementos de treliça e membrana são 3 graus de liberdade por nó.

2.2 Relação entre vetores globais e os vetores dos elementos

Uma vez discretizada em elementos finitos a relação entre os vetores globais do sistema e os vetores dos elementos pode ser expressa por,

$$\mathbf{u}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)} \mathbf{U} \quad (2.3)$$

sendo $\mathbf{u}^{(e)}$ o vetor de deslocamentos nodais do elemento (e) e $\mathbf{A}^{(e)}$ é a matriz de conectividade ou de incidência do elemento (e) .

A mesma matriz de conectividade também é usada na relação entre os vetores de forças internas dos elementos $\mathbf{p}^{(e)}$ e os vetores de força interna globais $\mathbf{P}$ só que na forma transposta,

$$\mathbf{P} = \sum_{(e)=1}^{nel} \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} \quad (2.4)$$

No caso de um elemento de treliça com 2 nós (i e j) e 3 graus de liberdade por nó $\mathbf{A}^{(e)}$ é expressa por

$$\mathbf{A}^{(e)} = \begin{matrix} & 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 3n} \end{matrix} \quad (2.5)$$

onde $\mathbf{0}$ é uma matriz nula de ordem 3 e $\mathbf{I}_3$ é a matriz identidade de ordem 3. Aplicando a equação (2.3) em (2.5) tem-se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(e)} \\ \mathbf{u}_2^{(e)} \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 3n} \end{matrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} \quad (2.6)$$

e ainda aplicando (2.4) em (2.5) tem-se

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ n \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{3n \times 6} \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{(e)} \\ \mathbf{p}_2^{(e)} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (2.7)$$

Para um elemento de membrana com 3 nós (i, j, k) e 3 graus de liberdade por nó $\mathbf{A}^{(e)}$ é expressa por

$$\mathbf{A}^{(e)} = \begin{matrix} & \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & k & \dots & n \end{matrix} \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} & \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{9 \times 3n} \end{matrix} \quad (2.8)$$

Aplicando a (2.3) em (2.8) tem-se,

$$\begin{bmatrix} \mathbf{u}_1^{(e)} \\ \mathbf{u}_2^{(e)} \\ \mathbf{u}_3^{(e)} \end{bmatrix}_{9 \times 1} = \begin{matrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & k & \dots & n \\ \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{9 \times 3n} \end{matrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_i \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_k \\ \vdots \\ U_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} \quad (2.9)$$

e ainda aplicando (2.4) em (2.8) tem-se

$$\begin{bmatrix} P_1 \\ \vdots \\ P_i \\ \vdots \\ P_j \\ \vdots \\ P_k \\ \vdots \\ P_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} = \begin{matrix} 1 & 2 & 3 \\ \begin{matrix} 1 \\ \vdots \\ i \\ \vdots \\ j \\ \vdots \\ k \\ \vdots \\ n \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 & \mathbf{0} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I}_3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{3n \times 9} \end{matrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{(e)} \\ \mathbf{p}_2^{(e)} \\ \mathbf{p}_3^{(e)} \end{bmatrix}_{9 \times 1} \quad (2.10)$$

Embora a matriz de conectividade expresse bem a relação entre os vetores globais e os vetores dos elementos, não é conveniente a sua construção para a resolução de um sistema por ser uma matriz com muitos zeros. A melhor alternativa é adicionar diretamente a contribuição de cada elemento em sua correspondente posição global. Tal procedimento é encontrado em Kwon e Bang (2000).

2.3 Método de Newton-Raphson

A maneira mais utilizada para resolver a equação de equilíbrio (2.1) é o Método de Newton-Raphson, no qual o sistema pode ser resolvido com as iterações de Newton-Raphson por meio da seguinte expressão:

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i - \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}_i} \right)^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{U}_i) \quad (2.11)$$

onde define-se como matriz de rigidez tangente,

$$\mathbf{K}_i = \left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \Big|_{\mathbf{U}_i} \right) = \begin{bmatrix} K_{1,1} & \cdots & K_{1,n_{gl}} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ K_{n_{gl},1} & \cdots & K_{n_{gl},n_{gl}} \end{bmatrix} \quad (2.12)$$

A equação (2.11) pode ser expressa por

$$\mathbf{U}_{i+1} = \mathbf{U}_i - \mathbf{K}_i^{-1} \mathbf{G}(\mathbf{U}_i) \quad (2.13)$$

Portanto, busca-se a derivada do vetor de forças desbalanceadas em relação aos deslocamentos $\left(\frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} \right)$.

No entanto, admitindo, $\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}} = \mathbf{0}$, escreve-se para a rigidez tangente,

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{G}}{\partial \mathbf{U}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{U}} - \cancel{\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{U}}} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{U}} \quad (2.14)$$

sendo que o vetor de forças internas globais $\mathbf{P}$ pode ser expresso pelos vetores de força interno dos elementos $\mathbf{p}^{(e)}$ por meio da matriz $\mathbf{A}^{(e)}$

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{U}} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} \left(\sum_{(e)=1}^{n_{el}} \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{p}^{(e)} \right) \\ &= \sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \frac{\partial \mathbf{p}^{(e)}}{\partial \mathbf{U}} = \sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \frac{\partial \mathbf{p}^{(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} \frac{\partial \mathbf{u}^{(e)}}{\partial \mathbf{U}} \\ &= \sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \frac{\partial \mathbf{p}^{(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{U}} (\mathbf{A}^{(e)} \mathbf{U}) = \sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \frac{\partial \mathbf{p}^{(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} \mathbf{A}^{(e)} \end{aligned} \quad (2.15)$$

definindo a matriz de rigidez tangente do elementos como

$$\mathbf{k}^{(e)} = \frac{\partial \mathbf{p}^{(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} \quad (2.16)$$

a equação (2.15) pode ser expressa por

$$\sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \frac{\partial \mathbf{p}^{(e)}}{\partial \mathbf{u}^{(e)}} \mathbf{A}^{(e)} = \sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \quad (2.17)$$

ou seja, é possível obter a matriz $\mathbf{K}$ por meio das matrizes $\mathbf{k}^{(e)}$,

$$\mathbf{K} = \sum_{(e)} \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \quad (2.18)$$

Sendo assim, é possível montar obter $\mathbf{P}$ e $\mathbf{K}$, necessários para a solução do sistema pelo Método de Newton-Raphson, uma vez que forem determinados $\mathbf{p}^{(e)}$ e $\mathbf{k}^{(e)}$ para os elementos do sistema.

2.4 Introdução ao Método da Relaxação Dinâmica

O Método da Relaxação Dinâmica pode ser uma alternativa interessante para resolver problemas não-lineares complicados de equilíbrio estático, onde possa haver uma divergência pelo Método de Newton. No Método da Relaxação Dinâmica o problema do equilíbrio estático é resolvido por uma análise dinâmica, com integração no tempo. A solução transiente é fictícia e sem significado físico; a solução que interessa é da fase estacionária que é a solução de equilíbrio estático, como pode ser observado na Figura 2.4, que representa a solução para um carregamento como o da Figura 2.3.

Figura 2.3: Carregamento no tempo

Figura 2.4: Resposta no tempo

2.4.1 Caracterização do problema dinâmico

Para o entendimento do Método da Relaxação Dinâmica é necessária a introdução de alguns conceitos fundamentais do problema dinâmico. Tais conceitos são definidos para um sistema elástico linear com um grau de liberdade, a seguir apresentado de forma sintética, tendo como referências Clough e Penzien (1995) e Hughes (1987).

Considerando um sistema massa – mola – amortecido como o da Figura 2.5.

Figura 2.5: Sistema com um grau de liberdade

A equação de movimento de um sistema estrutural pode ser obtida mediante o princípio de d' Alembert.

A equação de movimento é expressa da seguinte maneira:

$$P_I + P_D + P_S = F(t) \quad (2.19)$$

onde $F(t)$ são as forças aplicadas, P_I são as forças de inércia, P_D são as forças de amortecimento e P_S são as forças elásticas.

Cada força é função do deslocamento $u(t)$ ou das derivadas no tempo. As forças de inércia são expressas em função da aceleração,

$$P_I(t) = m \ddot{u}(t) \quad (2.20)$$

onde m é a massa do sistema.

Assumindo um amortecimento linear viscoso, a força de amortecimento é o produto de uma constante de amortecimento c pela velocidade $v(t) = \dot{u}(t)$,

$$P_D(t) = c \dot{u}(t) \quad (2.21)$$

Dessa forma, a força elástica é o produto da rigidez elástica pelo deslocamento,

$$P_S(t) = k u(t) \quad (2.22)$$

Finalmente, a equação de movimento pode ser expressa como

$$m \ddot{u}(t) + c \dot{u}(t) + k u(t) = F(t) \quad (2.23)$$

A frequência natural (ω) do sistema medida em rad/s é definida por,

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.24)$$

O menor valor onde se deixa de haver oscilações livres é denominado coeficiente de amortecimento (c_c) e é definido como

$$c_c = 2 m \omega \quad (2.25)$$

A taxa de amortecimento é definida por

$$\xi = \frac{c}{c_c} = \frac{c}{2m\omega} \Rightarrow \begin{cases} \xi = 1 & \text{amortecimento crítico} \\ \xi < 1 & \text{amortecimento subcrítico} \\ \xi > 1 & \text{amortecimento sobre crítico} \end{cases} \quad (2.26)$$

A Figura 2.6 mostra um exemplo com a variação dos deslocamentos no tempo para diferentes taxas de amortecimento.

Figura 2.6: Variação dos deslocamentos no tempo para diferentes taxas de amortecimento

A equação de movimento (2.23) pode ser reescrita em função de ξ e ω

$$\ddot{u}(t) + 2\xi\omega\dot{u}(t) + \omega^2 u(t) = \frac{F(t)}{m} \quad (2.27)$$

2.4.2 Método das diferenças Centrais

Pretende-se resolver a equação de movimento (2.23) por integração no tempo. Existem métodos implícitos ou explícitos de integração no tempo e condicionalmente ou incondicionalmente estáveis. Nesta tese adota-se o Método das Diferenças Centrais que é um método explícito (quando se utiliza de matrizes de massa e de amortecimento diagonais) e condicionalmente estável. A seguir, são apresentados os conceitos do Método das Diferenças Centrais tendo como referências Clough e Penzien (1995) e Hughes (1987).

Considerando o carregamento para $t \geq 0$,

$$F(t) = F_0 \quad (2.28)$$

A força desbalanceada do sistema é

$$G(t) = k u(t) - F_0 \quad (2.29)$$

A solução de (2.29) é obtida quando $G(t) = 0$, sendo que para sistemas lineares o deslocamento na fase estacionária é obtido por

$$u = \frac{F_0}{k} \quad (2.30)$$

Enquanto $G(t) \neq 0$ ocorre a aceleração do sistema,

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) = -G(t) \quad (2.31)$$

Adota-se para as definições a seguir $u(t) = u'$ e $G(t) = G'$. Portanto, pretende-se por meio de (2.31), supondo conhecido o deslocamento u' (u no instante t), determinar o deslocamento $u'^{t+\Delta t}$ (u no instante $t + \Delta t$), sendo Δt o passo de tempo para integração.

O método das diferenças centrais determina a velocidade no instante t a partir de velocidades intermediárias como representado na Figura 2.7.

Figura 2.7: Notação do Método das Diferenças Centrais

As velocidades nos instantes intermediários são então definidas a partir dos deslocamentos e do Δt como,

$$\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^t}{\Delta t} \quad (2.32)$$

$$\dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \frac{u^t - u^{t-\Delta t}}{\Delta t} \quad (2.33)$$

A velocidade e a aceleração no instante t são então definidas a partir das velocidades intermediárias como,

$$\dot{u}^t = \frac{\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} = \frac{u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}}{2\Delta t} \quad (2.34)$$

e

$$\ddot{u}^t = \frac{\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} = \frac{u^{t+\Delta t} - 2u^t + u^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} \quad (2.35)$$

Substituindo as equações (2.34) e (2.35) em (2.31) tem-se

$$m \frac{\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} + c \frac{\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} = -G^t \quad (2.36)$$

A partir de (2.36) pode-se determinar a velocidade $\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$ como

$$\dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \left(\frac{m}{\Delta t} + \frac{c}{2} \right)^{-1} \left[\dot{u}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \left(\frac{m}{\Delta t} - \frac{c}{2} \right) - G^t \right] \quad (2.37)$$

Determina-se, assim, o deslocamento $u^{t+\Delta t}$ por meio de

$$u^{t+\Delta t} = u^t + \dot{u}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \Delta t \quad (2.38)$$

2.4.3 Estabilidade do Método das Diferenças Centrais

A demonstração da estabilidade do Método das Diferenças Centrais para sistemas lineares, a seguir, apresentada de forma resumida é baseada em Hughes (1987), Rodriguez (1996) e Hallquist (2006).

A estabilidade do Método das Diferenças Centrais é determinada observando a estabilidade de um sistema linear.

Substituindo (2.34) e (2.35) em (2.27) leva a,

$$\frac{u^{t+\Delta t} - 2u^t + u^{t-\Delta t}}{\Delta t^2} + 2\xi\omega \frac{u^{t+\Delta t} - u^{t-\Delta t}}{2\Delta t} + \omega^2 u^t = F^t \quad (2.39)$$

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2} + \frac{2\xi\omega}{2\Delta t}\right)u^{t+\Delta t} + \left(\frac{-2}{\Delta t^2} + \omega^2\right)u^t + \left(\frac{1}{\Delta t^2} - \frac{2\xi\omega}{2\Delta t}\right)u^{t-\Delta t} = F^t \quad (2.40)$$

Isolando $u^{t+\Delta t}$ de (2.40) tem-se,

$$u^{t+\Delta t} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} u^t - \frac{1 - \xi\omega\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} u^{t-\Delta t} + \frac{\Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} F^t \quad (2.41)$$

Como u^t é conhecido, reescreve-se a equação (2.41) na forma matricial como

$$\begin{bmatrix} u^{t+\Delta t} \\ u^t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} & -\frac{1 - \xi\omega\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u^t \\ u^{t-\Delta t} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} \\ 0 \end{bmatrix} F^t \quad (2.42)$$

ou

$$\hat{u}^{t+\Delta t} = A \hat{u}^t + L F^t \quad (2.43)$$

onde,

$$\hat{u}^{t+\Delta t} = \begin{bmatrix} u^{t+\Delta t} \\ u^t \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

$$\hat{u}^t = \begin{bmatrix} u^t \\ u^{t-\Delta t} \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

$$L = \begin{bmatrix} \frac{\Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

e a A é o operador de tempo de integração para a equação de movimento

$$A = \begin{bmatrix} \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{1 + \xi\omega\Delta t} & -\frac{1 - \xi\omega\Delta t}{1 + \xi\omega\Delta t} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

Depois k passos de tempo, com $L = 0$ se obtém,

$$\hat{u}^{t+\Delta t} = A^k \hat{u}^t \quad (2.48)$$

E como k tende ao infinito, A precisa manter-se limitado.

A forma de decomposição espectral de A é dada por,

$$A^k = (R^T J R)^k = R^T J^k R \quad (2.49)$$

onde R é a matriz ortogonal dos autovetores de A e J é matriz canônica de Jordan dos autovalores de A . O raio espectral $\rho(A)$ é o maior autovalor de $A = \max[\text{diag.}(J)]$. Sendo que J^k é limitado se e somente se

$$|\rho(A)| \leq 1 \quad (2.50)$$

Determinam-se os autovalores de A para a equação de movimento sem amortecimento ($\xi = 0$) por

$$\text{Det} \left(\begin{bmatrix} 2 - \omega^2 \Delta t^2 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = 0 \quad (2.51)$$

$$\lambda^2 + (\omega^2 \Delta t^2 - 2)\lambda + 1 = 0 \quad (2.52)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \omega^2 \Delta t^2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\omega^2 \Delta t^2 - 2)^2}{4} - 1} \quad (2.53)$$

Fazendo $\omega^2 \Delta t^2 = \psi$ reescreve-se a equação (2.53)

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \psi}{2} \pm \sqrt{\frac{(\psi - 2)^2}{4} - 1} \quad (2.54)$$

Pretende-se achar a solução em que $|\lambda| \leq 1$, sendo que necessariamente $\psi > 0$. Quando $\psi = 0$ obtém-se $\lambda_{1,2} = 1$, quando $\psi = 4$ obtém-se $\lambda_{1,2} = -1$ e quando $\psi > 4$ obtém-se sempre $|\lambda_{1,2}| > 1$. No intervalo $0 < \psi < 4$ resulta em uma solução em números complexos

$$\lambda_{1,2} = \frac{2 - \psi}{2} \pm \left(\sqrt{\frac{(\psi - 2)^2}{4} - 1} \right) i \quad (2.55)$$

No entanto, a norma de (2.55) no intervalo $0 < \psi < 4$ é

$$|\lambda_{1,2}| = \sqrt{\left(\frac{2-\psi}{2}\right)^2 + \left(\left(\sqrt{\frac{(\psi-2)^2}{4}} - 1\right)i\right)^2} = 1 \quad (2.56)$$

O gráfico da variação de $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$ em função de ψ é mostrado na Figura 2.8.

Figura 2.8: Gráfico da variação de $|\lambda_1|$ e $|\lambda_2|$ em função de ψ

Portanto, sendo que necessariamente $\omega^2 \Delta t^2 > 0$, a exigência de que $|\lambda| \leq 1$ leva para a condição

$$\omega^2 \Delta t^2 \leq 4 \quad (2.57)$$

e finalmente

$$\Delta t \leq \frac{2}{\omega} \quad (2.58)$$

Comprovando, então, que o Método das Diferenças Centrais é condicionamento estável e sua estabilidade depende da frequência do sistema. A condição (2.58) é também denominada por vários autores como Chen et al. (1989), Oakley e Knight (1995), Bathe (1996) e Dang e Meguid (2010), como condição de Courant–Friedrichs–Lewy (1928), embora nessa referência não aparecer de forma explícita a expressão (2.58).

No Capítulo 3 são aprofundados os conceitos do Método da Relaxação Dinâmica e aplicados às formulações para um sistema com vários graus de liberdade.

Capítulo 3

Método da Relaxação Dinâmica

Neste Capítulo são apresentadas as teorias que envolvem a Relaxação Dinâmica aplicada à Análise de Estruturas de Cabos e Membranas. Primeiramente são apresentadas as formulações para análise dinâmica com integração no tempo pelo Método das Diferenças Centrais para sistemas com vários graus de liberdade, seguido da conceituação de Relaxação Dinâmica. São também apresentados critérios de sintonia da massa e de amortecimento do sistema.

3.1 Conceitos gerais

Conforme visto no Capítulo 2 o problema de equilíbrio que se busca a solução é

$$\mathbf{G}(\mathbf{U}) = \mathbf{P}(\mathbf{U}) - \mathbf{F} = 0 \quad (3.1)$$

onde os vetores globais do sistema, como $\mathbf{P}$ sendo o vetor de forças internas, $\mathbf{F}$ o vetor de forças externas, $\mathbf{G}$ o vetor de forças desbalanceadas e $\mathbf{U}$ vetor de deslocamentos, definidos anteriormente na expressão (2.2).

Aplicando a expressão (2.31) em um sistema dinâmico com $3n$ graus de liberdade, tem-se

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}}(t) = -\mathbf{G}(t) \quad (3.2)$$

sendo $\dot{\mathbf{U}}(t)$ o vetor de velocidades nodais, $\ddot{\mathbf{U}}(t)$ o vetor de acelerações nodais, $\mathbf{M}$ a matriz de massa e $\mathbf{C}$ a matriz de amortecimento.

Embora seja uma aproximação, é comum usar as matrizes de massa $\mathbf{M}$ e de amortecimento $\mathbf{C}$ diagonalizadas, assumindo que as massas sejam concentradas nos nós.

Definindo os vetores,

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{m}}_1 \\ \tilde{\mathbf{m}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{m}}_n \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{C}} = \begin{bmatrix} \tilde{\mathbf{c}}_1 \\ \tilde{\mathbf{c}}_2 \\ \vdots \\ \tilde{\mathbf{c}}_n \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{m}}_i = m_i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \tilde{\mathbf{c}}_i = c_i \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad i = 1 \dots n \quad (3.4)$$

tem-se

$$\mathbf{M} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{M}}) \quad \text{e} \quad \mathbf{C} = \text{diag}(\tilde{\mathbf{C}}) \quad (3.5)$$

Deixando implícita a variável tempo nos vetores $\mathbf{G}$, $\mathbf{U}$, $\dot{\mathbf{U}}$, $\ddot{\mathbf{U}}$, são aplicadas as expressões (2.32) a (2.38) para vários graus de liberdade. A velocidade e a aceleração no instante t são definidas como

$$\dot{\mathbf{U}}^t = \frac{\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} \quad (3.6)$$

e

$$\ddot{\mathbf{U}}^t = \frac{\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} \quad (3.7)$$

Substituindo as equações (3.6) e (3.7) em (3.2) tem-se

$$\mathbf{M} \frac{\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} - \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\Delta t} + \mathbf{C} \frac{\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} + \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{2} = -\mathbf{G}^t \quad (3.8)$$

A partir de (3.8) pode-se isolar a velocidade $\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}}$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} + \frac{\mathbf{C}}{2} \right)^{-1} \left[\dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} - \frac{\mathbf{C}}{2} \right) - \mathbf{G}^t \right] \quad (3.9)$$

Determina-se assim, o deslocamento $\mathbf{U}^{t+\Delta t}$ por meio de

$$\mathbf{U}^{t+\Delta t} = \mathbf{U}^t + \dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} \Delta t \quad (3.10)$$

3.2 Conceituação do Método da Relaxação Dinâmica

Até este ponto, foram apresentados os fundamentos de análise dinâmica com integração no tempo pelo Método das Diferenças Centrais para sistemas com vários graus de liberdade. O conceito de Relaxação Dinâmica é empregado a partir do momento em que se busca uma solução estática para um sistema não linear, a partir de uma análise dinâmica. Com este intuito, é possível manipular a solução transiente de forma que essa fase seja a mais rápida possível, porém respeitando a condição de estabilidade necessária no método das diferenças centrais.

Buscando diminuir a fase transiente e convergir de forma mais rápida para a solução estática manipula-se os vetores de massa e de amortecimento implicando em uma solução transiente fictícia e sem significado físico. A Figura 3.1 mostra um exemplo dessa manipulação que resulta em uma solução com transientes diferentes, porém convergindo para a mesma solução estacionária, sendo que a solução com menos oscilações (u3) converge de forma mais rápida.

Figura 3.1: Diferentes respostas no tempo, modificando M e C .

Pode-se observar nas equações (3.9) e (3.10) que o Método das Diferenças Centrais não necessita da matriz de rigidez do sistema e não requer resolução de sistemas lineares em cada incremento de tempo. Além disso, se as matrizes $\mathbf{M}$ e $\mathbf{C}$ forem definidas como matrizes diagonalizadas, podem ser expressas também como vetores fazendo com que o método trabalhe apenas na forma vetorial aumentando a eficiência no tempo de processamento. A ausência da matriz de rigidez facilita a formulação para análises não-lineares geométricas e do material, que podem ser de grande complexidade. Outro fator relevante ligado à ausência da matriz de rigidez tangente é o aumento da robustez na convergência, uma vez que alguns modelos podem se comportar como mecanismos resultando em uma matriz de rigidez tangente singular, o que impede a aplicação da expressão (2.13) e a solução direta pelo Método de Newton-Raphson.

A seguir são apresentados alguns artifícios para aceleração da resolução pelo Método da Relaxação Dinâmica como a determinação do incremento de tempo crítico, a sintonia da massa fictícia e tipos de amortecimento.

3.3 Determinação do incremento de tempo crítico do sistema

Como demonstrado no Capítulo 2, para um grau de liberdade o Método das Diferenças Centrais é condicionalmente estável. A estabilidade para sistemas lineares também é garantida quando, respeitada a condição (2.58) onde é necessário conhecer a máxima frequência do sistema.

Busca-se, a seguir, a determinação das frequências de um sistema linear com $3n$ graus de liberdade, onde a equação de movimento para vibrações livres sem amortecimento é definida como

$$\mathbf{M} \ddot{\mathbf{U}}(t) + \mathbf{K} \mathbf{U}(t) = \mathbf{0} \quad (3.11)$$

Onde a solução de (3.11) é dada por,

$$\mathbf{U}(t) = \sum \Phi_i \sin(\omega_i t + \theta_i) \quad (3.12)$$

sendo, $i = 1 \dots 3n$, Φ_i um vetor de forma modal do sistema, independente do tempo associado à frequência, ω_i e θ_i um ângulo de fase.

Substituindo (3.12) em (3.11) tem-se

$$-\omega_i^2 \mathbf{M} \Phi_i \sin(\omega_i t + \theta) + \mathbf{K} \Phi_i \sin(\omega_i t + \theta) = \mathbf{0} \quad (3.13)$$

reescreve-se (3.13) como

$$(\mathbf{K} - \omega_i^2 \mathbf{M}) \Phi_i = \mathbf{0} \quad (3.14)$$

Tem-se, assim, um problema de autovalores e autovetores onde ω_i^2 são os autovalores e Φ_i os autovetores.

Soluções não triviais de (3.14) exigem que

$$\det(\mathbf{K} - \omega^2 \mathbf{M}) = 0 \quad (3.15)$$

resultam $3n$ autovalores ω_i^2 e correspondentes frequências angulares ω_i , que podem ser agrupados num vetor

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \vdots \\ \omega_i \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Define-se $\omega_{\max}$ como a componente de maior valor de $\boldsymbol{\omega}$.

No entanto, para sistemas não lineares, a matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ varia a cada incremento de tempo alterando, portanto, os valores das frequências do sistema $\boldsymbol{\omega}$. Sendo assim, não se pode garantir a estabilidade apenas por (2.58). No intuito de contornar esse problema, Barnes (1988) sugere adotar um fator de correção da não-linearidade $f_{NL} > 1$. Portanto, reescreve-se a expressão (2.58) como

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{2}{f_{NL} \omega_{max}} \quad (3.17)$$

Há nesse procedimento o inconveniente de se determinar os autovalores com as matrizes globais de rigidez tangente e de massa do sistema, o que contraria um dos atrativos do Método da Relaxação Dinâmica de não necessitar da matriz de rigidez tangente para integração das equações de movimento no tempo. No entanto, algumas aproximações são sugeridas por diferentes autores, que aproximam a rigidez tangente de alguns elementos finitos específicos, ou obtêm-se uma aproximação das frequências por meio dos vetores de força, massa e deslocamento, como será mostrado no item 3.6.

3.4 Sintonia da massa fictícia pela rigidez nodal

Um artifício usado originalmente por Underwood (1983) é a sintonia da massa fictícia, onde se pode arbitrar um Δt e garantir a estabilidade do sistema determinando uma massa a partir da rigidez tangente, como é mostrado a seguir para um grau de liberdade.

Usando a expressão (2.24) em (2.58) tem-se,

$$\Delta t_{crit} \leq \frac{2}{\sqrt{\frac{k}{m}}} \quad (3.18)$$

Por meio de (3.18) isola-se a massa e obtêm uma massa crítica,

$$m_{crit} \geq \frac{(\Delta t)^2}{4} k \quad (3.19)$$

Adaptando a expressão (3.19) para vários graus de liberdade e usando (3.17), determina-se uma massa nodal artificial tal que,

$$\mathbf{M}^{crit} \geq \frac{(f_{NL})^2 (\Delta t)^2}{4} \mathbf{S}^{max} \quad (3.20)$$

onde $\mathbf{S}^{max}$ é uma matriz diagonal com os máximos componentes de rigidez nas direções principais, sendo esses obtidos pelos autovalores da matriz $\mathbf{K}$.

Sendo assim, a massa nodal crítica associada ao nó i é definida como,

$$m_i^{crit} \geq \frac{(f_{NL})^2 (\Delta t)^2}{4} \lambda_i^{\max} \quad (3.21)$$

onde $\lambda_i^{\max}$ é o maior autovalor de $\mathbf{K}$ associado ao nó i .

No entanto, os autovalores do sistema não são univocamente associados a um nó ou a um grau de liberdade específico. A alternativa proposta por Underwood (1983) é a aplicação do Teorema de Gerschgorin que comprova que a soma dos valores absolutos das colunas de uma matriz é superior ao valor do autovalor correspondente,

$$|\lambda_i^{\max}| < \max_i \sum_{j=1}^n |K_{ij}| \quad (3.22)$$

possibilitando obter um valor próximo e necessariamente superior ao máximo autovalor de um sistema, sem a necessidade de se resolver um problema de autovalores propriamente dito. Mesmo assim ainda é necessário obter a matriz de rigidez tangente global do sistema.

3.5 Sintonia da massa pela rigidez dos elementos

Um outro critério é proposto nesta tese, para fazer a sintonia da massa para cada grau de liberdade, de modo a estabilizar o sistema e acelerar a resolução. Nesse critério a sintonia das massas é determinada pela matriz de rigidez tangente dos elementos, não sendo necessária a determinação da matriz de rigidez tangente global do sistema. O critério é baseado no Teorema de Irons e Treharne (1972) que demonstra que a máxima frequência dos elementos é igual ou superior a máxima frequência do sistema

$$\max(\omega_{sistema}) \leq \max(\omega_{elementos}) \quad (3.23)$$

Tal teorema implica que se for usada a maior frequência dos elementos para a obtenção de um Δt_{crit} , este será sempre a favor da condição de estabilidade.

A demonstração desse teorema é apresentada, a seguir, com base em Bathe (1996) e em Hughes (1987).

As frequências naturais do sistema podem ser determinadas por meio do quociente de Rayleigh que tem a seguinte propriedade,

$$\omega_i^2 = \frac{\Phi_i^T \mathbf{K} \Phi_i}{\Phi_i^T \mathbf{M} \Phi_i} \quad (3.24)$$

sendo, $i = 1 \dots 3n$ e Φ_i já apresentado em (3.14).

Sabe-se que

$$\mathbf{K} = \sum_e \mathbf{K}^{(e)} \quad (3.25)$$

e

$$\mathbf{M} = \sum_e \mathbf{M}^{(e)} \quad (3.26)$$

onde definem-se as matrizes de rigidez tangente a de massa espalhadas dos elementos como,

$$\mathbf{K}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{k}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \quad (3.27)$$

$$\mathbf{M}^{(e)} = \mathbf{A}^{(e)T} \mathbf{m}^{(e)} \mathbf{A}^{(e)} \quad (3.28)$$

onde $\mathbf{A}^{(e)}$ é apresentado em (2.5) e (2.8).

Usando (3.25) e (3.26) em (3.24) tem-se,

$$\omega_i^2 = \frac{\Phi_i^T \left(\sum_e \mathbf{K}^{(e)} \right) \Phi_i}{\Phi_i^T \left(\sum_e \mathbf{M}^{(e)} \right) \Phi_i} \quad (3.29)$$

sendo

$$\mu_i^{(e)} = \Phi_i^T \mathbf{K}^{(e)} \Phi_i \quad (3.30)$$

e

$$f_i^{(e)} = \Phi_i^T \mathbf{M}^{(e)} \Phi_i \quad (3.31)$$

tem-se

$$\omega_i^2 = \frac{\sum_e \mu_i^{(e)}}{\sum_e f_i^{(e)}} \quad (3.32)$$

Considerando o quociente de Rayleigh para um elemento,

$$\rho_i^{(e)} = \frac{\Phi_i^T \mathbf{K}^{(e)} \Phi_i}{\Phi_i^T \mathbf{M}^{(e)} \Phi_i} = \frac{\mu_i^{(e)}}{f_i^{(e)}} \quad (3.33)$$

desde que $\mathbf{K}^{(e)}$ e $\mathbf{M}^{(e)}$ sejam do mesmo tamanho de $\mathbf{K}$, pode-se supor $\mu_i^{(e)}$ e $f_i^{(e)}$ sendo zero, mas não para todos os elementos (e). No entanto, para todos os casos tem-se para cada elemento

$$\mu_i^{(e)} \leq \left(\omega_i^{(e)}\right)^2 f_i^{(e)} \quad (3.34)$$

sendo a condição (3.34) demonstrada em Bathe (1996)¹ e de acordo com (3.32),

$$\left(\omega_i\right)^2 \leq \frac{\sum_e \left(\omega_i^{(e)}\right)^2 f_i^{(e)}}{\sum_e f_i^{(e)}} \leq \left[\max \left(\omega_i^{(e)}\right)^2 \right] \frac{\sum_e f_i^{(e)}}{\sum_e f_i^{(e)}} \quad (3.35)$$

Por (3.35) conclui-se que

$$\left(\omega_i\right)^2 \leq \left[\max \left(\omega_i^{(e)}\right)^2 \right] \quad (3.36)$$

O que demonstra o Teorema de Irons e Treharne (1972).

O Teorema de Irons e Treharne anteriormente demonstrado permite a determinação do critério de sintonia da massa crítica nodal de cada elemento, supondo os elementos com distribuição de massa homogênea. Adapta-se a expressão (3.21) para determinação da massa crítica por elemento

$$m_e^{crit} \geq \frac{\left(f_{NL}\right)^2 \left(\Delta t\right)^2}{4} \lambda_e^{\max} \quad (3.37)$$

Nesse caso $\lambda_e^{\max}$ é o máximo autovalor da matriz de rigidez do elemento.

A condição (3.23) pode diminuir o fator f_{NL} da expressão (3.37), já que $\lambda_e^{\max} \geq \lambda_i^{\max}$.

Após obtido m_e^{crit} , a matriz $\mathbf{M}$ é obtida pela somatória da contribuição de cada elemento no seu respectivo nó, por meio das expressões (3.26) e (3.28).

¹ Demonstrado em Bathe (1996), Capítulo 2, seção 2.6.

3.6 Amortecimento viscoso

Em análises dinâmicas usa-se, de forma geral, o Amortecimento de Rayleigh, que consiste em usar fatores da matriz de massa e da matriz de rigidez tangente do sistema para compor o amortecimento, como na equação a seguir,

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} + \beta \mathbf{K} \quad (3.38)$$

sendo α e β valores escalares.

Com o MRD também é possível utilizar um amortecimento viscoso, normalmente utilizado em análises dinâmicas. O coeficiente de amortecimento, no entanto, pode ser artificial e próximo ao amortecimento crítico do sistema para acelerar a convergência para solução estacionária.

Papadrakakis (1981) propõe um parâmetro otimizado de amortecimento α como um fator que multiplica a matriz de massa do sistema,

$$\mathbf{C} = \alpha \mathbf{M} \quad (3.39)$$

onde,

$$\alpha = \frac{4}{\Delta t_{opt}} \frac{\sqrt{\omega_{min}^2 \omega_{max}^2}}{(\omega_{min}^2 + \omega_{max}^2)} \quad (3.40)$$

sendo,

$$\Delta t_{opt} = \sqrt{\frac{4}{(\omega_{min}^2 + \omega_{max}^2)}} \quad (3.41)$$

onde ω_{min} e ω_{max} são respectivamente a menor e a maior frequência natural do sistema.

As expressões (3.40) e (3.41) quando $\omega_{min} \ll \omega_{max}$ (a menor frequência natural for muito inferior à máxima frequência natural do sistema) tendem a

$$\Delta t_{opt} \approx \frac{2}{\omega_{max}} \quad (3.42)$$

e

$$\alpha \approx 2 \omega_{min} \quad (3.43)$$

De forma geral, nos modelos com estruturas de cabos e membranas, as máximas frequências da estrutura são de fato muito maiores que as primeiras frequências, de sorte que as expressões (3.42) e (3.43) podem ser aplicadas na maioria dos casos.

Zhang e Yu (1989) propõem ainda outra forma para determinar α variando a cada passo de integração,

$$\alpha^t = 2 \left(\frac{(\mathbf{U}^t)^T \mathbf{P}^t \mathbf{U}^t}{(\mathbf{U}^t)^T \mathbf{M} \mathbf{U}^t} \right)^{\frac{1}{2}} \quad (3.44)$$

onde α^t é determinado no tempo t para se buscar a solução no tempo $t + \Delta t$.

De forma semelhante Oakley e Knight (1995a) propõem uma aproximação para se obter o $\omega_{\min}$ e determinar α

Sendo

$$\omega_{\min}^2 \simeq \frac{\left(\dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \right)^T \mathbf{S}^t \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}}{\left(\dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}} \right)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}}} \quad (3.45)$$

onde $\mathbf{S}^t$ é uma matriz diagonalizada cujos componentes são obtidos por

$$\mathbf{S}_{ii}^t \simeq \frac{\mathbf{P}_i^t - \mathbf{P}_i^{t-\Delta t}}{\Delta t \dot{\mathbf{U}}_i^{t-\Delta t}} \quad (3.46)$$

onde $i = 1 \dots 3n$, obtêm-se portanto α aplicando (3.46) e (3.45) em (3.43).

Diversos autores propõem parâmetros semelhantes aos de Oakley e Knight (1995a), como Zhang e Yu (1989), Wu (1995) e Kadkhodayan et al. (2008) e sugerem a atualização do coeficiente de amortecimento em cada iteração. No entanto, para análises em estruturas de cabos e membranas, onde há grandes perturbações durante o processo de solução, pode não ser o procedimento mais eficiente. A comprovação da eficiência varia bastante de acordo com o exemplo estudado, como mostra Rezaiee et al. (2011).

3.7 Amortecimento cinético

A determinação de um coeficiente de amortecimento que acelere a convergência e garanta a estabilidade da solução implica na maioria dos critérios na obtenção das frequências máximas e mínimas de um sistema. Para sistemas não lineares tais frequências podem ser obtidas de forma aproximada pela configuração inicial do sistema, porém essa pode não ser uma boa aproximação para estruturas de cabos e membranas, onde a configuração final pode ser muito distinta da configuração inicial, variando consideravelmente a sua rigidez tangente e por consequência as suas frequências e o coeficiente de amortecimento.

Para evitar a determinação de um coeficiente de amortecimento aproximado, Papadrakakis (1981), Barnes (1988), Meek (1991) e Lee et al. (2011) entre outros adotam um procedimento alternativo, denominado Amortecimento Cinético, originalmente sugerido por Cundall (1976) no contexto da mecânica das rochas. Nesse procedimento, o movimento de amortecimento da estrutura é seguido até a energia cinética do sistema passar por um máximo. Então, todos os componentes de velocidade da estrutura são cancelados, mantendo a geometria corrente. A análise dinâmica é então reiniciada, até que são encontrados os novos máximos de energia cinética, quando todas as velocidades são zeradas novamente. O processo é repetido até que toda a energia cinética seja dissipada, encontrando assim, a configuração estática de equilíbrio.

O amortecimento cinético é baseado na energia cinética do sistema; quando essa energia encontra um máximo, retira-se toda a energia do sistema. Assim, em cada iteração calcula-se a energia cinética do sistema por

$$E_c^t = \frac{1}{2} (\dot{\mathbf{U}}^t)^T \mathbf{M} \dot{\mathbf{U}}^t \quad (3.47)$$

Caso $E_c^t < E_c^{t-\Delta t}$ faz-se

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}} = \mathbf{0} \quad (3.48)$$

$$E_c^t = 0 \quad (3.49)$$

Sendo o amortecimento feito pelo critério da energia cinética, a utilização de um coeficiente de amortecimento viscoso perde o seu sentido. Portanto reescreve-se a expressão (3.9) considerando $\mathbf{C} = \mathbf{0}$

$$\dot{\mathbf{U}}^{t+\frac{\Delta t}{2}} = \dot{\mathbf{U}}^{t-\frac{\Delta t}{2}} - \left(\frac{\mathbf{M}}{\Delta t} \right)^{-1} \mathbf{G}^t \quad (3.50)$$

Observa-se por (3.50) que a adoção do amortecimento cinético simplifica a obtenção da solução, diminuindo a quantidade de operações por passo de integração. De acordo com Barnes (1988), o uso de amortecimento cinético leva a estabilizar a análise e obter a convergência pra a solução estacionária mesmo na presença de grandes perturbações muito comuns no processo de solução de estruturas de cabos e membranas.

A Figura 3.2 mostra um exemplo para ilustrar a variação da energia cinética do sistema ao longo tempo com amortecimento cinético.

Figura 3.2: Variação da energia cinética do sistema com amortecimento cinético

A variação da energia cinética do sistema ao longo tempo também pode ser expressa para um sistema com amortecimento viscoso, como mostra a Figura 3.3.

Figura 3.3: Variação da energia cinética do sistema com amortecimento viscoso.

3.8 Critério de ajuste do fator de não linearidade

Como observado no item 3.3, a garantia da estabilidade do método das Diferenças Centrais aplicado a problemas não lineares requer a diminuição do incremento de tempo crítico dado por (3.17) conforme certo fator de não linearidade $f_{NL} > 1$. Contudo, o valor f_{NL} de é fortemente dependente das especificidades de cada problema, não havendo até o momento método eficiente para automatizar a sua estimativa.

Em princípio, a atualização do incremento de tempo crítico poderia ser feita a cada incremento de tempo, ou em tempos notáveis, sendo a escolha mais natural os instantes em que o sistema passa por um máximo de energia cinética. Contudo, as experiências numéricas mostram que este procedimento em muitos casos requer mais incrementos de tempo para convergência (se comparado com o uso de um f_{NL} , suficientemente grande estimado, no início das análises), podendo mesmo levar à divergência da solução.

A título de exemplificação, a Figura 3.4 e a Figura 3.5 representam a variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada, para um mesmo exemplo, para três valores diferentes de f_{NL} , sendo que os fatores obedecem a condição $f_{NL}^{caso1} < f_{NL}^{caso2} < f_{NL}^{caso3}$. No caso 1 (variações na cor rosa) percebe-se que a solução diverge, com a energia cinética atingindo muitos picos em poucos incrementos de tempo. Para o caso 2 (variações na cor azul), os picos de energia cinética diminuem de intensidade e frequência nos primeiros incrementos de tempo, mas ainda assim a análise diverge, após aproximar-se da solução. Aumentando ulteriormente o valor de f_{NL} , chega-se ao caso 3 (variações na cor vermelha), o qual propicia a convergência desejada. Enquanto Barnes (1988) sugere um fator $f_{NL} \approx 2$, nos exemplos de aplicação discutidos no Capítulo 6, os fatores de não linearidade necessários para convergência variaram entre $\sqrt{2} \leq f_{NL} \leq 4$. Uma razão para isto pode ser o fato de que nesta tese buscou-se deliberadamente situações de grande não-linearidade e critérios de convergência mais rigorosos.

Figura 3.4: Variação na energia cinética para três valores de f_{NL}

Figura 3.5: Variação na energia cinética para três valores de f_{NL}

Capítulo 4

Formulações dos elementos finitos implementados

Na análise das estruturas de cabos e membranas, os tecidos estruturais são usualmente discretizados com elementos finitos de membrana e os cabos com elementos finitos de treliça. Neste Capítulo são apresentadas as formulações dos elementos finitos implementados no sistema SATS, para realização das análises de relaxação dinâmica desenvolvidas no âmbito desta tese. Busca-se uma abordagem sucinta para apresentar os vetores de força e a matriz de rigidez destes elementos, uma vez que deduções mais detalhadas podem ser encontradas em outras referências, como Pauletti (2003), Pauletti, Guirardi e Deifeld (2005), Pauletti, Guirardi e Gouveia (2009) e Pauletti e Martins (2009).

4.1 Elemento finito de treliça geometricamente exato

Um cabo pode ser representado por uma sucessão encadeada de barras articuladas, carregadas exclusivamente nas articulações. Assim procedendo, pode-se empregar o mais simples de todos os elementos estruturais – a barra de treliça – para representar uma ampla

gama de estruturas, compreendendo os cabos suspensos, as treliças de cabos, as redes de cabos, as cordas, e qualquer combinação de cabos e barras (Pauletti, 2003).

De acordo com Pauletti (2003) a formulação direta da teoria não-linear geometricamente exata das treliças para o caso tridimensional pode ser encontrada em várias referências, como por exemplo em: Livesley (1964), Ozdemir (1978), Pimenta (1986), Crisfield (1991), Meek (1991), Levy (1995), Bathe (1996), Souza-Lima e Brasil (1997).

Nesta tese adota-se uma formulação direta da teoria não-linear geometricamente exata das treliças para o caso tridimensional, extraída de Pauletti (2003), que admite relações constitutivas elástico-lineares e medidas lineares de deformação.

A seguir, apresentam-se, de forma sintética, as etapas para a obtenção do vetor de forças $\mathbf{p}$ e da matriz de rigidez tangente $\mathbf{k}_t$ de um elemento de treliça definido por nós i e j na numeração global, correspondendo aos nós 1 e 2, respectivamente, na numeração do elemento (Figura 4.1).

Figura 4.1: Elemento finito de treliça indicando a correspondência entre a numeração local e a global do sistema (Pauletti, 2009a).

O vetor posição do i -ésimo nó do elemento é dado por:

$$\vec{x}_i = \vec{x}_i^r + \vec{u}_i \quad (4.1)$$

e suas componentes cartesianas podem ser armazenadas em

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^r + \mathbf{u}_i = \begin{bmatrix} (\vec{x}_i)_x \\ (\vec{x}_i)_y \\ (\vec{x}_i)_z \end{bmatrix}_{3 \times 1} = \begin{bmatrix} (\vec{x}_i^r)_x + (\vec{u}_i)_x \\ (\vec{x}_i^r)_y + (\vec{u}_i)_y \\ (\vec{x}_i^r)_z + (\vec{u}_i)_z \end{bmatrix} \quad (4.2)$$

onde $\mathbf{x}_i^r$ é o vetor posição numa configuração de referência e $\mathbf{u}_i$ o vetor de deslocamentos do i -ésimo nó.

Definindo-se um vetor $\mathbf{l} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$, o comprimento do elemento é $\ell = \|\mathbf{l}\|$ e o versor do elemento, $\mathbf{v} = \mathbf{l} / \ell$ é um vetor unitário dirigido do nó 1 para o nó 2.

Admitindo linearidade física, a força interna do elemento N é dada por:

$$N = \frac{EA}{\ell^r} (\ell - \ell^r) \quad (4.3)$$

onde ℓ^r é o comprimento indeformado ou de referência, E o módulo de elasticidade, A a área da seção transversal do elemento.

Sendo o elemento definido em uma configuração inicial com comprimento ℓ^0 , onde já se encontra sujeito a uma tração N^0 , ℓ^r é dado por

$$\ell^r = \frac{EA}{EA + N^0} \ell^0 \quad (4.4)$$

O **vetor das forças internas** é definido pela matriz coluna:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v}N \\ \mathbf{v}N \end{bmatrix} = \mathbf{C}N \quad (4.5)$$

onde, o esforço interno resume-se a força normal N , convenientemente convertida em forças nodais por meio de um operador geométrico, dado pelo vetor

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} -\mathbf{v} \\ \mathbf{v} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

A **matriz de rigidez tangente** é composta pelas parcelas elástica e geométrica, como se mostra, a seguir

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{C} \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g \quad (4.7)$$

Após algumas derivações, obtém-se, a **parcela elástica da rigidez tangente**, dada por

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{\ell^r} \mathbf{C} \mathbf{C}^T = \frac{EA}{\ell^r} \begin{bmatrix} \mathbf{v} \mathbf{v}^T & -\mathbf{v} \mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v} \mathbf{v}^T & \mathbf{v} \mathbf{v}^T \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

Da mesma forma, resulta a **parcela geométrica da rigidez tangente**

$$\mathbf{k}_g = N \begin{bmatrix} -\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}} \\ \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix} = \frac{N}{\ell} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) & -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \\ -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) & (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v} \mathbf{v}^T) \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Finalmente, obtém-se a **matriz de rigidez tangente do elemento de treliça geometricamente exato**

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g = \frac{EA}{\ell^r} \begin{bmatrix} \mathbf{v}\mathbf{v}^T & -\mathbf{v}\mathbf{v}^T \\ -\mathbf{v}\mathbf{v}^T & \mathbf{v}\mathbf{v}^T \end{bmatrix} + \frac{N}{\ell} \begin{bmatrix} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) & -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \\ -(\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) & (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}\mathbf{v}^T) \end{bmatrix} \quad (4.10)$$

4.2 Super-elemento de cabo escorregando sem atrito

Um elemento de cabo ideal (cabo extensível, infinitamente flexível, escorregando sem atrito), foi inicialmente desenvolvido por Aufaure (1993). Pauletti e Pimenta (1995) generalizaram o elemento para incluir o efeito do atrito, apresentando o escorregamento não-ideal (Figura 4.2). No contexto das estruturas retesadas, esse elemento é muito útil, por exemplo, para representar os cabos de borda de membranas, os quais, usualmente, têm liberdade para escorregar dentro de bainhas. O novo elemento encontra aplicações também em outros contextos além das estruturas retesadas, como, por exemplo, na representação dos cabos de protensão sem aderência, de uso corrente nas estruturas de concreto protendido (Pauletti e Pimenta, 1995; Deifeld, 2001; Martins, 2008).

Figura 4.2: Elemento de cabo escorregando por uma polia (Pauletti, 2009b).

O elemento de cabo ideal resulta em uma divisão por zero quando o nó intermediário coincide com uma das extremidades. Essa singularidade na modelagem do elemento de cabo escorregando traz alguns problemas à sua aplicação em estruturas correntes. Quando se busca uma melhor discretização dos elementos, as ações das forças atuantes no cabo podem causar o colapso do elemento, o que limita bastante o desenvolvimento dos modelos. Procurando contornar esse problema, e buscando uma abordagem mais geral do elemento em questão, Pauletti et al. (2009b) propõem um ‘super-elemento’ de cabo escorregando sem atrito. Esse super-elemento tem a formulação generalizada do elemento de três nós para “n” nós. A Figura

4.3 e a Figura 4.4 mostram a numeração dos nós e dos elementos para o super-elemento de cabo.

Figura 4.3: Super-elemento de cabo - Numeração dos nós (Pauletti, 2009b)

Figura 4.4: Super-elemento de cabo - Numeração dos elementos (Pauletti, 2009b)

Associados a cada segmento $i_k, k = 1, \dots, n_{seg}$ têm-se os vetores dados por

$$\mathbf{l}_k = \mathbf{x}_{k+1}^0 + \mathbf{u}_{k+1} - \mathbf{x}_k^0 - \mathbf{u}_k \quad (4.11)$$

sendo $\mathbf{x}^0$ o vetor posição na configuração inicial e $\mathbf{u}$ o vetor de deslocamentos.

O comprimento total do cabo, na configuração corrente, é dado pela soma dos comprimentos de cada segmento, e pode ser calculado por meio de

$$\ell = \sum_{k=1}^{nseg} \ell_k = \sum_{k=1}^{nseg} \left(\mathbf{l}_k^T \mathbf{l}_k \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.12)$$

O elemento é definido em uma configuração inicial, já sujeito a uma força normal N^0 constante ao longo de todo o elemento. O comprimento do cabo, na configuração inicial, é dado por

$$\ell^0 = \sum_{k=1}^{nseg} \left(\left(\mathbf{l}_k^0 \right)^T \mathbf{l}_k^0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (4.13)$$

onde

$$\mathbf{l}_k^0 = \mathbf{x}_{k+1}^0 - \mathbf{x}_k^0 \quad (4.14)$$

O comprimento total indeformado $\ell^r = \sum_{k=1}^{nseg} \ell_k^r$ pode ser calculado considerando que, para um material elástico-linear vale a relação

$$N^0 = EA\varepsilon^0 = \frac{EA}{\ell^r}(\ell^0 - \ell^r) \quad (4.15)$$

e, portanto,

$$\ell^r = \frac{EA}{EA + N^0} \ell^0 \quad (4.16)$$

Da mesma forma, a força normal na configuração corrente é

$$N = \frac{EA}{\ell^r}(\ell - \ell^r) \quad (4.17)$$

As forças internas agindo sobre os nós do elemento, i , $i = 1, \dots, nn$ na configuração corrente, em equilíbrio, são

$$\mathbf{p}_i = N(\mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i) \quad (4.18)$$

onde os versores direcionais de cada segmento são dados por

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{l}_i}{\ell_i} \quad ; i = 1, \dots, (nn-1) \quad (4.19)$$

sendo definidos ainda

$$\mathbf{v}_0 = \mathbf{v}_{nn} = \mathbf{0} \quad (4.20)$$

de sorte que

$$\mathbf{p}_1 = N(\mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1) = -N\mathbf{v}_1 \quad (4.21)$$

e

$$\mathbf{p}_{nn} = N(\mathbf{v}_{nn-1} - \mathbf{v}_{nn}) = N\mathbf{v}_{nn-1} \quad (4.22)$$

O vetor das forças internas nodais do super-elemento de cabo é definido como

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{p}_i \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{nn-1} - \mathbf{v}_{nn} \end{bmatrix} N = \mathbf{C}N \quad (4.23)$$

onde a força normal N corresponde a um esforço interno escalar e

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{nn-1} - \mathbf{v}_{nn} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

é um operador geométrico de ordem $(3nn \times 1)$.

A **matriz de rigidez tangente do super-elemento de cabo** é

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{C} \left(\frac{\partial N}{\partial \mathbf{u}} \right)^T + N \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_g \quad (4.25)$$

Após algumas derivações, obtém-se **parcela elástica da matriz de rigidez do super-elemento de cabo**, dada por

$$\mathbf{k}_e = \frac{EA}{\ell^r} \mathbf{C} \mathbf{C}^T \quad (4.26)$$

Por sua vez, a **parcela geométrica da matriz de rigidez do super-elemento de cabo** é dada por

$$\mathbf{k}_g = N \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_0 - \mathbf{v}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{i-1} - \mathbf{v}_i \\ \vdots \\ \mathbf{v}_{nn-1} - \mathbf{v}_{nn} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{v}_0}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{i-1}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial \mathbf{u}} \\ \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{v}_{nn-1}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{v}_{nn}}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

Procedendo-se com as derivações constantes de (4.27), e definindo as matrizes

$$\mathbf{M}_i = \mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \quad (4.28)$$

e

$$\mathbf{M}_0 = \mathbf{M}_{nn} = \mathbf{0} \quad (4.29)$$

Chega-se finalmente à

$$\mathbf{k}_g = N \begin{bmatrix} \left(\frac{\mathbf{M}_0}{\ell_0} + \frac{\mathbf{M}_1}{\ell_1} \right) & -\frac{\mathbf{M}_1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{\mathbf{M}_1}{\ell_1} & \left(\frac{\mathbf{M}_1}{\ell_1} + \frac{\mathbf{M}_2}{\ell_2} \right) & -\frac{\mathbf{M}_2}{\ell_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{\mathbf{M}_2}{\ell_2} & \left(\frac{\mathbf{M}_2}{\ell_2} + \frac{\mathbf{M}_3}{\ell_3} \right) & -\frac{\mathbf{M}_3}{\ell_3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{M}_{i-1}}{\ell_{i-1}} & \left(\frac{\mathbf{M}_{i-1}}{\ell_{i-1}} + \frac{\mathbf{M}_i}{\ell_i} \right) & -\frac{\mathbf{M}_i}{\ell_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{\mathbf{M}_i}{\ell_i} & \left(\frac{\mathbf{M}_i}{\ell_i} + \frac{\mathbf{M}_{i+1}}{\ell_{i+1}} \right) & -\frac{\mathbf{M}_{i+1}}{\ell_{i+1}} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & 0 & -\frac{\mathbf{M}_{i+1}}{\ell_{i+1}} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & -\frac{\mathbf{M}_{nn-2}}{\ell_{nn-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\frac{\mathbf{M}_{nn-2}}{\ell_{nn-2}} & \left(\frac{\mathbf{M}_{nn-2}}{\ell_{nn-2}} + \frac{\mathbf{M}_{nn-1}}{\ell_{nn-1}} \right) & -\frac{\mathbf{M}_{nn-1}}{\ell_{nn-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\frac{\mathbf{M}_{nn-1}}{\ell_{nn-1}} & \left(\frac{\mathbf{M}_{nn-1}}{\ell_{nn-1}} + \frac{\mathbf{M}_{nn}}{\ell_{nn}} \right) \end{bmatrix}$$

(4.30)

4.3 Elemento de linha geodésica

O super-elemento de cabo escorregando sem atrito pode ser empregado para a busca de configurações geodésicas sobre uma superfície, desde que as componentes do vetor de força normais à superfície sejam eliminadas. Pauletti, Guirardi e Gouveia (2009a) denominam o elemento decorrente deste procedimento de ‘*elemento de linha geodésica*’.

O **vetor de forças internas do elemento de linha geodésica** ($\mathbf{p}^{gs}$) é determinado a partir do vetor de forças do super-elemento de cabo ($\mathbf{p}^{se}$), definido em (4.23), removendo-se as componentes normais à superfície. Para os dois nós de extremidade a força interna é nula, $\mathbf{p}_1^{gs} = \mathbf{p}_n^{gs} = \mathbf{0}$ e para os nós intermediários o vetor $\mathbf{p}^{se}$ é modificado de acordo com

$$\mathbf{p}_i^{gs} = \mathbf{p}_i^{se} - (\mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) \mathbf{p}_i^{se} = (\mathbf{I} - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T) \mathbf{p}_i^{se} = \mathbf{M}_i^{gs} \mathbf{p}_i^{se} \quad (4.31)$$

onde

$$\mathbf{M}_i^{gs} = \mathbf{I} - \mathbf{v}_i \mathbf{v}_i^T \quad (4.32)$$

sendo $\mathbf{v}_i$ um vetor unitário normal à superfície, em correspondência ao i -ésimo nó.

Definindo $\mathbf{M}_1^{gs} = \mathbf{M}_{n_{gs}}^{gs} = \mathbf{0}$ tem-se, para o elemento geodésico com n nós,

$$\mathbf{p}^{gs} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_1^{gs} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_2^{gs} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \ddots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{M}_{n_{gs}}^{gs} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^{se} \\ \mathbf{p}_2^{se} \\ \vdots \\ \mathbf{p}_{n_{gs}}^{se} \end{bmatrix} = \mathbf{M}^{gs} \mathbf{p}^{se} \quad (4.33)$$

onde $\mathbf{M}^{gs}$ é uma ‘matriz de projeção’ para o elemento geodésico.

O vetor normal $\mathbf{v}_i$ do i -ésimo nó depende da disposição de todas as facetas que convergem para esse nó e, portanto, o vetor de forças internas de uma linha geodésica não pode ser determinado sem uma rotina de busca sobre os elementos de membrana adjacentes a cada nó. Além disso, superfícies facetadas não são diferenciáveis em correspondência às arestas e vértices, e o cálculo de um vetor normal médio depende de algumas definições arbitrárias.

Uma vez que superfícies facetadas não são diferenciáveis, Pauletti, Guirardi e Gouveia (2009a) sugerem para determinação do vetor normal, em correspondência a cada nó, uma ponderação dos ângulos dos elementos que convergem ao nó, tornando a normal independente das alterações da configuração da malha ao redor do mesmo.

A Figura 4.5(a), mostra que devido à simetria, $\mathbf{v}_i$ no topo da pirâmide é um vetor paralelo ao eixo vertical. Se cada faceta lateral da pirâmide é representada por um triângulo, uma média simples dos vetores normais pertencentes às quatro facetas retorna a normal correta no nó de topo. No entanto, se uma faceta é dividida em duas, a média simples distorce a normal do nó de topo, como mostra a Figura 4.5(b). Uma média ponderada pelas áreas dos elementos novamente retorna a normal correta, como mostrado na Figura 4.5(c), mas se a faceta é novamente dividida, como mostrado na Figura 4.5(d), até mesmo esse critério falha. Finalmente, adotando-se uma ponderação pelos ângulos adjacentes, obtém-se um vetor normal médio que é invariante com a discretização, retornando um vetor normal simétrico, conforme mostrado na Figura 4.5(e).

Figura 4.5: Vetores normais médios no vértice de uma mesma pirâmide para diferentes critérios (Pauletti 2009a)

O cálculo do vetor normal por meio da ponderação por ângulos é definido por

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|} \quad (4.34)$$

onde

$$\mathbf{w}_i = \sum_{k=1}^{n_{ei}(i)} \mathbf{n}_k \theta_k \quad (4.35)$$

sendo ainda $\mathbf{n}_k$, $k=1, \dots, n_{ei}(i)$ os vetores normais à superfície de cada um dos $n_{ei}(i)$ elementos incidentes no nó i , enquanto que θ_k é o ângulo interno adjacente de cada um desses elementos.

4.4 Elemento finito de membrana

A formulação do elemento finito de membrana adotada neste estudo é proveniente de Pauletti (2003), que por sua vez baseou-se nos trabalhos de Argyris (1974, 1981, 1982) e Meek (1991). O interesse do elemento proposto por Pauletti (2003) reside em se obter uma abordagem simplificada para a modelagem das membranas retendo, porém as características essenciais dos sistemas retesados.

Guirardi (2006) implementou em ambiente Matlab[®] a formulação proposta por Pauletti (2003) e constatou sua eficiência em *patch tests* e em diversas aplicações à estruturas de cabos e membranas, mesmo quando o elemento é submetido a deformações de ordem moderada.

Trata-se de um elemento triangular, de interpolação linear para o campo dos deslocamentos e, conseqüentemente, campos de tensão e deformação constantes no elemento (CST, “*constant strain triangle*”). O elemento de membrana *CST* deve em geral ser indicado, em análises não lineares, em três diferentes configurações (Figura 4.6). A configuração de referência Ω' corresponde ao elemento no seu estado indeformado. É usual, porém, que o elemento seja definido em uma configuração inicial Ω^0 , em que já se encontra sujeito a um campo de tensões (e correspondentes deformações). Deseja-se estudar o movimento do elemento desde a configuração inicial até uma configuração arbitrária Ω^c , também chamada de configuração corrente. Contudo, nos desenvolvimentos que se seguem, por conta das simplificações adiante adotadas, confundem-se as configurações de referência e inicial,

desprezando-se as deformações já apresentadas pelo elemento na sua configuração inicial, e simplesmente adicionando-se as tensões iniciais àquelas provenientes da deformação entre a configuração inicial e a configuração corrente.

Figura 4.6: Elemento CST de membrana, nas configurações indeformada (Ω^r), inicial (Ω^0) e corrente (Ω^c) (Pauletti, 2003)

Numeram-se, no sentido anti-horário, tanto os nós do elemento como seus lados, sendo os lados numerados conforme o nó que lhe é oposto. Toma-se um sistema local de coordenadas, indicado por um chapéu superior, adaptado ao elemento em cada configuração, de modo o eixo $\hat{x}$ fique alinhado com o lado 3, orientado do nó 1 para o nó 2, sendo o eixo $\hat{z}$ ortogonal ao plano do elemento. O sistema de coordenadas globais (x, y, z) pode ser adaptado ao elemento em sua configuração de referência Ω^r , com o mesmo critério.

As coordenadas globais dos pontos $P \in \Omega^c$ são dadas por

$$\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P^0 + \mathbf{u}_P \quad (4.36)$$

onde $\mathbf{x}_P^0$ é um vetor que define a posição do ponto material P , na configuração inicial do elemento, e $\mathbf{u}_P$ é um vetor de deslocamentos nodais, que define posição corrente deste ponto, a partir da configuração inicial (Figura 4.7).

Figura 4.7: Vetor posição $\mathbf{x}_P = \mathbf{x}_P^0 + \mathbf{u}_P$ de um ponto $P \in \Omega^c$, em termos de suas coordenadas iniciais ($\mathbf{x}_P^0$) e de seu deslocamento ($\mathbf{u}_P$), desde a configuração inicial até a configuração corrente (Pauletti, 2003)

As coordenadas dos pontos nodais do elemento, na configuração corrente, no sistema global de coordenadas, são dadas por

$$\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{u}_i \quad ; \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.37)$$

onde $\mathbf{u}_i$ ($i = 1, 2, 3$) são os deslocamentos nodais do elemento, que podem ser coletados em um vetor de deslocamentos nodais

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix} \quad (4.38)$$

Os comprimentos dos lados do elemento são definidos por meio de

$$\ell_i = \|\mathbf{l}_i\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\| \quad (4.39)$$

com os índices $i, j, k = 1, 2, 3$ permutando ciclicamente.

Os versores das direções dos lados do elemento, indicados na Figura 4.8, são dados por

$$\mathbf{v}_i = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_k\|} \quad (4.40)$$

onde, mais uma vez, os índices $i, j, k = 1, 2, 3$ permutam ciclicamente.

 Figura 4.8: Versores ($\mathbf{v}_1$; $\mathbf{v}_2$; $\mathbf{v}_3$) das direções dos lados do elemento CST (Pauletti, 2003)

A seguir, apresentam-se os passos para a determinação do vetor de forças internas e da matriz de rigidez tangente do elemento de membrana proposto por Pauletti (2003).

A área (A_r) e o volume (V_r) do elemento na configuração de referência podem ser expressos por

$$A_r = \frac{1}{2} |\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2| \quad (4.41)$$

$$V_r = A_r t \quad (4.42)$$

sendo t a espessura do elemento, que se supõe constante.

Define-se a matriz dos lados $\mathcal{L}_r$ como

$$\mathcal{L}_r = \begin{bmatrix} \ell_1^r & 0 & 0 \\ 0 & \ell_2^r & 0 \\ 0 & 0 & \ell_3^r \end{bmatrix} \quad (4.43)$$

Admite-se que as tensões no interior do elemento, expressas no sistema de coordenadas local definido na figura Figura 4.6, relacionem-se com as deformações, também expressas neste sistema, por meio da Lei de Hooke Generalizada, em estado plano de tensões, ou seja

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\epsilon}} \quad (4.44)$$

onde

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\tau}_{xy} \end{bmatrix}; \quad \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \hat{\varepsilon}_x \\ \hat{\varepsilon}_y \\ \hat{\gamma}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{x}} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{y}} \\ \frac{\partial \hat{v}}{\partial \hat{x}} + \frac{\partial \hat{u}}{\partial \hat{y}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\hat{u}_2}{x_2^r} \\ \frac{\hat{v}_3}{y_3^r} \\ \frac{x_2^r \hat{u}_3 - x_3^r \hat{u}_2}{x_2^r y_3^r} \end{bmatrix}; \quad \hat{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (4.45)$$

e onde os deslocamentos $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u} \quad \hat{v} \quad 0]$ também são expressos em relação ao sistema local de coordenadas do elemento, admitindo-se uma variação linear para o campo de deslocamentos no interior do elemento.

Pode-se também definir um vetor de deformações naturais $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, conforme

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta \ell_1 / \ell_1^r \\ \Delta \ell_2 / \ell_2^r \\ \Delta \ell_3 / \ell_3^r \end{bmatrix} = \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{a} \quad (4.46)$$

onde as variações de comprimento dos lados do elemento são agrupadas em um vetor de deslocamentos naturais $\mathbf{a}$, dado por

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \Delta \ell_1 \\ \Delta \ell_2 \\ \Delta \ell_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ell_1 \\ \ell_2 \\ \ell_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \ell_1^r \\ \ell_2^r \\ \ell_3^r \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Pauletti (2003) demonstra que vale a relação

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{T}_r \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (4.48)$$

onde a matriz de transformação $\mathbf{T}_r$ é dada por

$$\mathbf{T}_r = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma_r & \sin^2 \gamma_r & -\sin \gamma_r \cos \gamma_r \\ \cos^2 \beta_r & \sin^2 \beta_r & \sin \beta_r \cos \beta_r \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.49)$$

e onde $\cos \beta_r = -(\mathbf{v}_2^r)^T \mathbf{v}_3^r$, $\cos \gamma_r = -(\mathbf{v}_3^r)^T \mathbf{v}_1^r$, $\sin \beta_r = \sqrt{1 - \cos^2 \beta_r}$ e $\sin \gamma_r = \sqrt{1 - \cos^2 \gamma_r}$.

Sendo $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ o vetor de tensões do elemento expresso no sistema de coordenadas local, pode-se calcular um vetor de tensões naturais $\boldsymbol{\sigma}_n$ por meio de

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{T}_r^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{D}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (4.50)$$

onde se reconhece matriz constitutiva na forma natural, dada por

$$\mathbf{D}_n = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{T}_r^{-1} \quad (4.51)$$

Pauletti (2003) ressalta que $\boldsymbol{\sigma}_n$ e $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ são energeticamente conjugados, de modo que vale $\boldsymbol{\sigma}_n^T \boldsymbol{\varepsilon}_n = \hat{\boldsymbol{\sigma}}^T \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$.

Com referência à Figura 4.9, o vetor das forças internas nodais $\mathbf{p}$ é expresso como

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} \vec{P}_1 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{P}_2 \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} \vec{P}_3 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (4.52)$$

Pode-se ainda decompor $\mathbf{p}$ em componentes de “forças naturais” $N_i \vec{v}_i$, agindo paralelamente aos lados do elemento, conforme se esquematiza na Figura 4.9.

Figura 4.9: Esforços internos nodais e sua decomposição em forças de interação nodal (Pauletti, 2009a)

Resulta, para **vetor dos esforços internos**

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \mathbf{P}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 \\ -\mathbf{v}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = \mathbf{C} \mathbf{N} \quad (4.53)$$

onde o operador geométrico $\mathbf{C}$ é definido conforme

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 \\ -\mathbf{v}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

e onde as intensidades das forças de interação nodal são agrupadas em um **vetor de forças naturais**

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

A Figura 4.10 mostra graficamente a obtenção da força natural N_3 , a partir da tensão natural σ_3 , conforme definida na equação (4.50)

$$N_3 = \frac{1}{2} \sigma_3 t h_3^r = \frac{1}{2} \sigma_3 t \frac{2A^r}{\ell_3^r} = \sigma_3 \frac{V^r}{\ell_3^r} \quad (4.56)$$

Generalizando para os demais lados, o vetor de forças naturais $\mathbf{N}$ é dado por

$$\mathbf{N} = V_r \mathcal{L}_r^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n. \quad (4.57)$$

Figura 4.10: Determinação da força natural N_3 a partir da tensão natural σ_3

Tendo o elemento um comportamento elástico-linear, deve existir uma relação linear entre os esforços naturais $\mathbf{N}$ e os deslocamentos naturais $\mathbf{a}$, na forma

$$\mathbf{N} = \mathbf{k}_n \mathbf{a} + \mathbf{N}_0 \quad (4.58)$$

onde $\mathbf{k}_n$ é a **matriz de rigidez natural** do elemento e onde as forças naturais iniciais são dadas por

$$\mathbf{N}_0 = V_r \mathcal{L}_r^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n^0 = V_r \mathcal{L}_r^{-1} \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\boldsymbol{\sigma}}^0 \quad (4.59)$$

Levando em conta (4.46), (4.50), (4.57) e (4.59), obtém-se

$$\mathbf{N} = V_r \mathcal{L}_r^{-1} \mathbf{D}_n \mathcal{L}_r^{-1} \mathbf{a} + \mathbf{N}_0 \quad (4.60)$$

onde se explicita a matriz de rigidez natural do elemento, dada por

$$\mathbf{k}_n = V^r \mathcal{L}_r^{-1} \mathbf{D}_n \mathcal{L}_r^{-1} \quad (4.61)$$

A **matriz de rigidez tangente interna** do elemento de membrana é mais uma vez dada por

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_e \quad (4.62)$$

Tendo em vista a equação (4.58), a **matriz de rigidez elástica** ($\mathbf{k}_e$) é dada por

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.63)$$

Procedendo-se com as derivações obtém-se

$$\mathbf{k}_e = \mathbf{C} \mathbf{k}_n \mathbf{C}^T \quad (4.64)$$

Por sua vez, a **matriz de rigidez geométrica** ($\mathbf{k}_g$) é obtida por meio de

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} N_2 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}} - N_3 \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial \mathbf{u}} \\ -N_1 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}} + N_3 \frac{\partial \mathbf{v}_3}{\partial \mathbf{u}} \\ N_1 \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}} - N_2 \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}} \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Procedendo com as derivações obtém-se

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} \frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) + \frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) & -\frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) & -\frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \\ -\frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) & \frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) + \frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) & -\frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \\ -\frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) & -\frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) & \frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) + \frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \end{bmatrix} \quad (4.66)$$

Finalmente, uma possível parcela de **rigidez tangente externa** pode ser determinada por

$$\mathbf{k}_{ext} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} \quad (4.67)$$

O vetor $\mathbf{f}$ é denominado vetor das forças externas, usualmente dado, no caso das estruturas de membrana, por

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_{pp} + \mathbf{f}_v \quad (4.68)$$

onde $\mathbf{f}_{pp}$ são as **forças devidas ao peso próprio** do elemento, dadas por

$$\mathbf{f}_{pp} = \frac{V_r \rho_r}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{g} \quad (4.69)$$

sendo V_r e ρ_r , respectivamente, o volume e a densidade do material do elemento, medidos na configuração de referência, $\mathbf{g}$ o vetor da aceleração da gravidade, e $\mathbf{I}_3$ a matriz de identidade de ordem 3.

Por sua vez, $\mathbf{f}_v$ são as **forças devidas ao vento** agindo no elemento, dadas por

$$\mathbf{f}_v = -\frac{pA}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{n} \quad (4.70)$$

sendo p , A e $\mathbf{n}$, respectivamente, a pressão normal agindo sobre o elemento, a sua área e o versor normal ao plano do elemento, medidos na configuração corrente.

Sendo o carregamento de peso próprio constante, resulta

$$\frac{\partial \mathbf{f}_{pp}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

Por outro lado, tem-se que

$$A\mathbf{n} = \frac{1}{2} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \quad (4.72)$$

logo,

$$\mathbf{k}_{ext} = -\frac{\partial \mathbf{f}_v}{\partial \mathbf{u}} = \frac{p}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \quad (4.73)$$

Procedendo-se com as derivações, chega-se a

$$\mathbf{k}_{ext} = \frac{p}{6} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.74)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}_i = \ell_i \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{v}_i)_z & (\mathbf{v}_i)_y \\ (\mathbf{v}_i)_z & 0 & -(\mathbf{v}_i)_x \\ -(\mathbf{v}_i)_y & (\mathbf{v}_i)_x & 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (4.75)$$

Percebe-se que a **matriz de rigidez tangente externa** $\mathbf{k}_{ext}$ é assimétrica, como é de se esperar de carregamentos não conservativos.

Finalmente, a expressão da **matriz rigidez tangente total do elemento de membrana** é obtida pela soma das parcelas (4.63), (4.66) e (4.74), ou seja,

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_e + \mathbf{k}_{ext} \quad (4.76)$$

4.4.1 Um modelo simplificado de enrugamento para o elemento de membrana

A modelagem detalhada do enrugamento de estruturas de membrana só é possível quando se consideram graus de liberdade de rotação, com a adoção elementos finitos de casca. Porém, no contexto da modelagem de estruturas de cabos e membranas de uso civil, não há necessidade de ser representar em detalhe o fenômeno, uma vez que em geral procura-se para a membrana uma configuração final totalmente tracionada e por consequência sem rugas. Não obstante, não se pode excluir a possibilidade de que estruturas de membrana venham a enrugar quando sob a ação de carregamentos de alta intensidade. Nestes casos é importante conseguir representar adequadamente a redistribuição de esforços internos decorrentes do enrugamento de partes da estrutura, mesmo que as rugas não sejam efetivamente modeladas.

O elemento de membrana descrito no item anterior resiste tanto a esforços de tração como de compressão. Tal comportamento não representa a realidade quando se quer modelar tecidos, já que estes só resistem a esforços de tração. Esse fato pode ser corrigido com o procedimento adotado em Pauletti (2009a), que por sua vez baseou-se em Akita et al. (2007). Outras referências adotam procedimentos de enrugamento semelhantes, como por exemplo, Lu et al. (2001), Stanuszek (2003), Miyazaki (2005) e Jarasjarungkiat (2008).

O vetor de forças internas do elemento de membrana, como já visto em (4.53), é dado por

$$\mathbf{p} = \mathbf{C}\mathbf{N} = \mathbf{C}(\mathbf{k}_n \mathbf{a} + \mathbf{N}_0) \quad (4.77)$$

A equação (4.77) dada para um material isotrópico elástico linear, trabalhando tanto em tração quanto em compressão. Uma das vantagens de se trabalhar com esta expressão decorre do fato de que $\mathbf{k}_n$ é uma matriz simétrica constante de ordem 3, podendo ser calculada para cada elemento, no início das análises, e armazenada para ser empregada nos cálculos subsequentes. No entanto, quando a membrana enruga, a equação (4.77) deve ser ajustada para se evitar o surgimento de esforços espúrios de compressão.

Para materiais isotrópicos elástico-lineares, as tensões e deformações principais são paralelas e os critérios de enrugamento podem ser expressos tanto em termos de tensão como em termos de deformação. Nesta tese, escolhe-se trabalhar com um critério baseado em tensões.

Ainda objetivando a economia computacional, a rigidez natural $\mathbf{k}_n$, dada pela equação (4.61) é reescrita conforme a expressão

$$\mathbf{k}_n = \mathbf{k}_\sigma \mathbf{k}_a = (\mathbf{V}_r \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{T}_r^{-T}) (\hat{\mathbf{D}} \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{L}_r^{-1}) \quad (4.78)$$

Esta decomposição permite que se armazenem as matrizes constantes $\mathbf{k}_\sigma = \mathbf{V}_r \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{T}_r^{-T}$ e $\mathbf{k}_a = \hat{\mathbf{D}} \mathbf{T}_r^{-1} \mathbf{L}_r^{-1} = \mathbf{V}_r^{-1} \hat{\mathbf{D}} (\mathbf{k}_\sigma)^T$ no início das análises, para todos os elementos, sendo que $\mathbf{k}_a$ pode ser rapidamente calculada a partir de $\mathbf{k}_\sigma$. Desta maneira, o custo de montagem de $\mathbf{k}_n$, no caso em que não ocorra enrugamento, não sofre acréscimo apreciável em relação ao elemento descrito no item anterior. Além disso, a decomposição (4.78) permite que as tensões nos elementos sejam calculadas, de forma muito conveniente, conforme

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x \\ \hat{\sigma}_y \\ \hat{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \mathbf{k}_a \mathbf{a} + \hat{\boldsymbol{\sigma}}_0 \quad (4.79)$$

De posse das tensões $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$, as tensões principais σ_1 e σ_2 e o ângulo da rotação θ_1 entre o eixo $\hat{x}$ e o eixo da primeira tensão principal são dados por

$$\begin{cases} \sigma_1 = \sigma_m + R \\ \sigma_2 = \sigma_m - R \\ \theta_1 = \arctan((\sigma_1 - \hat{\sigma}_x) / \hat{\tau}_{xy}) \end{cases} \quad (4.80)$$

sendo

$$\sigma_m = \frac{\hat{\sigma}_x + \hat{\sigma}_y}{2} \quad (4.81)$$

$$R = \sqrt{\left(\frac{\hat{\sigma}_x - \hat{\sigma}_y}{2}\right)^2 + (\hat{\tau}_{xy})^2} \quad (4.82)$$

Uma vez conhecido o ângulo θ_1 podem-se relacionar as tensões principais e as tensões $\hat{\sigma}$ por meio de

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x & \hat{\tau}_{xy} \\ \hat{\tau}_{xy} & \hat{\sigma}_y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.83)$$

ou, inversamente,

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x & \hat{\tau}_{xy} \\ \hat{\tau}_{xy} & \hat{\sigma}_y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & -\sin \theta_1 \\ \sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 \\ 0 & \sigma_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \theta_1 & \sin \theta_1 \\ -\sin \theta_1 & \cos \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.84)$$

Caso $\sigma_2 = 0$, a expressão (4.84) pode ser reescrita como

$$\begin{bmatrix} \hat{\sigma}'_x & \hat{\tau}'_{xy} \\ \hat{\tau}'_{xy} & \hat{\sigma}'_y \end{bmatrix} = \sigma_1 \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 & \frac{\sin 2\theta_1}{2} \\ \frac{\sin 2\theta_1}{2} & \sin^2 \theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.85)$$

ou equivalentemente, em forma vetorial,

$$\hat{\sigma}' = \sigma_1 \begin{bmatrix} \cos^2 \theta_1 \\ \sin^2 \theta_1 \\ \frac{\sin 2\theta_1}{2} \end{bmatrix} = \frac{\sigma_1}{2} \begin{bmatrix} 1 + \cos 2\theta \\ 1 - \cos 2\theta \\ \sin 2\theta_1 \end{bmatrix} \quad (4.86)$$

Assim, uma vez de posse de $\hat{\sigma}$, e determinadas as tensões principais σ_1 e σ_2 e o ângulo da rotação θ_1 , conforme (4.80), calcula-se o vetor de tensões modificadas $\hat{\sigma}'$ de acordo com o seguinte critério

$$\begin{cases} \text{se } \sigma_1 \leq 0 \Rightarrow \hat{\sigma}' = [0 \ 0 \ 0]^T \\ \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 \leq 0 \Rightarrow \sigma_2 = 0 \Rightarrow \hat{\sigma}' = \frac{\sigma_1}{2} [(1 + \cos 2\theta_1) \ (1 - \cos 2\theta_1) \ \sin 2\theta_1]^T \\ \text{se } \sigma_1 > 0 \text{ e } \sigma_2 > 0 \Rightarrow \hat{\sigma}' = \hat{\sigma} \end{cases} \quad (4.87)$$

Finalmente, recalcula-se (4.77) por

$$\mathbf{p} = \mathbf{C} \mathbf{k}_\sigma \hat{\sigma}' \quad (4.88)$$

Esse critério de enrugamento altera as tensões do elemento finito de membrana para resistir apenas a esforços de tração.

A matriz de rigidez tangente para o elemento finito de membrana com o modelo de enrugamento não é necessária no contexto da estabilidade do Método da Relaxação Dinâmica, já que a frequência natural de um elemento sem enrugamento é sempre maior do que um elemento que se considere o enrugamento. No entanto, Akita et al. (2007) deduzem a matriz de rigidez tangente associada ao modelo de enrugamento dado pela expressão (4.87), para aplicações envolvendo o Método de Newton-Raphson.

Capítulo 5

Sistema SATS e as implementações desenvolvidas

Este Capítulo explicita as etapas desenvolvidas para a implementação dos elementos descritos no Capítulo 4, em um sistema para o projeto e a análise de estruturas de cabos e membranas denominado *SATS – A System for the Analysis of Taut Structures*.

O sistema SATS foi integralmente desenvolvido por Daniel Mariani Guirardi e Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti no software Matlab[®], ambiente de programação que dispõe de recursos importantes para resolução de equações não-lineares, tais como matrizes esparsas e facilidades para a resolução de sistemas lineares, além de uma vasta biblioteca de funções matemáticas e recursos para geração de gráficos e figuras. Trabalhos realizados por Kwon e Bang (2000), Nakamura (2002) e Matsumoto (2004) são boas referências sobre o ambiente Matlab.

O sistema SATS foi apresentado pela primeira vez em Guirardi (2006), que implementou as formulações dos elementos finitos de treliça e membrana descritos no Capítulo 4, para a resolução pelo Método de Newton-Raphson, além de rotinas de planificação e reversão da planificação de membranas.

Na presente tese, adaptam-se e ampliam-se estas implementações, estendidas para o super-elemento de cabo, o elemento de linha geodésica, a rotina de enrugamento do elemento de membrana e as rotinas de sintonia de massa, no contexto da resolução de problemas de cabos e membranas pelo Método da Relaxação Dinâmica, descrito no Capítulo 3, além de outras melhorias de visualização da malha e da convergência.

5.1 Detalhamento do SATS

Figura 5.1: Mapa conceitual do SATS

Figura 5.2: Tela principal do SATS

O mapa conceitual da Figura 5.1 mostra o encaminhamento lógico do SATS, necessário para se obter os resultados das análises, desde a entrada de dados até o pós-processamento e exportação de resultados. A Figura 5.2 apresenta a interface gráfica básica do SATS, onde se observam os campos de entrada de dados, visualização da malha, parâmetros de solução e de pós-processamento, nova solução e exportação dos resultados, procedimentos que são brevemente descritos a seguir.

5.1.1 – Entrada de dados

O SATS possui dois tipos de entrada de dados, um em arquivo Matlab (.m) e outro em MS-Excel (.xls). Nesses arquivos encontram-se as coordenadas dos nós, a conectividade e tipo dos elementos, as condições de contorno, deslocamentos iniciais, carregamentos e propriedades constitutivas dos materiais.

5.1.2 – Visualização da malha

A visualização da malha permite a representação do modelo antes da solução. Adota-se uma convenção para representar as condições de contorno e dos carregamentos:

- No caso de restrições ou carregamentos no sentido do eixo X, os nós são marcados com o símbolo (*), sendo que para os carregamentos o símbolo é mostrado na cor vermelha (*).
- No caso de restrições ou carregamentos no sentido do eixo Y, os nós são marcados com o símbolo (□), sendo que para os carregamentos o símbolo é mostrado na cor vermelha (□).
- No caso de restrições ou carregamentos no sentido do eixo Z, os nós são marcados com o símbolo (○), sendo para os carregamentos o símbolo é mostrado na cor vermelha (○).

Figura 5.3: Exemplo com a convenção de condição de contorno e carregamento adotado.

A Figura 5.3 mostra a convenção de condições de contorno e carregamentos, aplicada a um exemplo de uma treliça plana, onde no nó de coordenadas (0,0,0) há restrições nos 3 graus de liberdade, no nó de coordenadas (10,0,0) há restrição em Z, no nó de coordenadas (20,0,0) há restrição em Y e Z e no nó de coordenadas (10,3,0) há restrição em Z e um carregamento em Y. O sentido do carregamento deve ser verificado na entrada numérica de dados, sendo que um valor negativo indica uma força no sentido contrário ao eixo.

Para os carregamentos de pressão nos elementos de membrana a visualização se dá conforme mostrado na Figura 5.4.

Figura 5.4 Pressões nos elementos

A Figura 5.5 mostra um exemplo de visualização de uma malha, com numeração dos nós e elementos.

Figura 5.5: Malha com numeração dos nós e elementos

5.1.3 Solução

Na versão do SATS desenvolvida em Guirardi (2006) há apenas a opção de resolução pelo Método de Newton-Raphson, podendo-se limitar o número de iterações e a tolerância de erro para a convergência, considerando critérios de deslocamentos ou forças desbalanceadas. Obtém-se nesta fase, a solução do problema, os resultados do número de iterações e o tempo

gasto no processamento. A Figura 5.6 mostra os gráficos de convergência do erro e do logaritmo natural do erro conforme as iterações do Método de Newton-Raphson.

Figura 5.6: Gráficos de convergência do erro e do logaritmo natural do erro para o Método de Newton-Raphson

Na presente tese, implementa-se a opção de resolução pelo Método da Relaxação Dinâmica, onde há a opção de se limitar o número de incrementos de tempo e a tolerância para a convergência, por deslocamentos e/ou forças desbalanceadas, assim como a possibilidade de se adotar um fator para o passo de incremento de tempo (discutido no item 3.4). A Figura 5.7 mostra o painel de convergência com a configuração atual, a variação da energia cinética e da força desbalanceada, sendo esse painel visualizado periodicamente, conforme um número de passos definido inicialmente.

Figura 5.7: Painel de convergência pelo Método da Relaxação Dinâmica

5.1.4 Pós-Processador

O SATS possui rotinas que permitem traçar, sobre a geometria do exemplo, os deslocamentos encontrados nas direções dos eixos X, Y, Z, representados com uma escala de cores, bem como fornecer a norma dos deslocamentos e as curvas de nível resultantes. Pode-se, ainda, traçar a configuração inicial junto à representação dos deslocamentos e optar por um fator de amplificação dos deslocamentos (Figura 5.8). Permite-se ainda visualizar as tensões e deformações do elemento de membrana nas direções dos eixos locais dos elementos, a primeira e a segunda tensão principal por elementos, ou por médias nodais. No caso de deslocamentos, os resultados já são nodais, mas quanto às tensões e deformações (Figura 5.9 e Figura 5.10), é necessário um procedimento que faz a média dos valores das tensões ou deformações dos elementos incidentes em cada nó, uma vez que o elemento de membrana implementado é formulado com tensões constantes. Ainda para as tensões por elementos, implementa-se uma rotina para visualizar as direções das tensões principais no centro de cada elemento como mostra a Figura 5.9, sendo que se convencionou apresentar os elementos enrugados ou frouxos na cor cinza.

Figura 5.8: Representação dos resultados da norma dos deslocamentos em escala de cores

second principal stress : min 0 max 6582465.1517 second principal stress : min 0 max 6714194.7283

Figura 5.9: Representação dos resultados das segundas tensões principais em escala de cores por nós e por elementos

first principal strain : min 0 max 0.22466

first principal strain : min 0.0018531 max 0.2397

Figura 5.10: Representação dos resultados das primeiras deformações principais em escala de cores por nós e por elementos

5.1.5 Nova solução

Nesta opção são apresentados os recursos direcionados para a solução de problemas de estruturas de membrana. São efetivadas rotinas que atualizam a geometria, as tensões, o módulo de elasticidade e as pressões aplicadas, recalculando o exemplo com as novas configurações. Dispõe-se também de rotinas de planificação e reversão da planificação de faixas, usadas para definição dos padrões de corte nas estruturas de membrana.

O procedimento de planificação de uma faixa da membrana é obtido impondo a essa faixa um deslocamento em todos os nós para o plano XY (Figura 5.11), ou seja, impondo um deslocamento contrário a sua coordenada em Z. A reversão da planificação da faixa é obtida impondo de volta todos os deslocamentos encontrados com a planificação, zerando-se as tensões iniciais.

Figura 5.11: Planificação de uma faixa da membrana

5.1.6 Saída de resultados

Os resultados do SATS podem ser exportados para um arquivo do MS-Excel (.xls), contendo as coordenadas dos nós, deslocamentos, tensões e deformações. Também podem ser exportadas as coordenadas dos nós e conectividade dos elementos em um arquivo *script* para gerar malhas no Ansys ou no Autocad. A Figura 5.12 mostra exemplos de malhas geradas a partir dos arquivos de exportação.

Figura 5.12: Figuras do Autocad e Ansys, geradas com arquivo *script*

Capítulo 6

Exemplos de aplicação

Neste Capítulo busca-se comprovar a eficiência do Método da Relaxação Dinâmica em exemplos de aplicações conceitualmente simples, mas de grande dificuldade de convergência. Os exemplos de aplicação são desenvolvidos no programa SATS, já descrito no Capítulo 5. Conforme se mencionou este programa, originalmente descrito em Guirardi (2006), foi modificado no contexto desta tese para a análise de estruturas com o Método da Relaxação Dinâmica. As figuras geradas em todos os exemplos estudados contêm unidades no Sistema Internacional (N, m, Pa, s e J). É adotado o critério de convergência pelas forças nodais desbalanceadas, onde a condição deve ser respeitada para todos os nós do sistema. Todos os exemplos discutidos, a seguir, foram processados em um computador pessoal com processador Intel Core 2 Duo 1,60GHz, 2GB de memória RAM e com o software Matlab[®] versão R2009b.

6.1 Cabo catenário

Este exemplo representa um cabo sujeito a um carregamento de peso próprio (Figura 6.1) discretizado com 6 elementos de treliça. Busca-se uma configuração de equilíbrio para um carregamento $w=1\text{ kN/m}$ partindo de uma configuração inicial reta, com os nós de extremidade fixos (Figura 6.2). O cabo tem comprimento $L=60\text{ m}$, módulo de elasticidade $E=120\text{ GPa}$, área da seção transversal de $3,17\times 10^{-5}\text{ m}^2$ e força normal inicial de 10 kN .

Figura 6.1: Cabo sujeito ao carregamento de peso próprio

Figura 6.2: Malha inicial do modelo do cabo discretizada com 6 elementos de treliça

Estudam-se as soluções por meio do MRD com amortecimento cinético e com amortecimento viscoso, com o coeficiente de amortecimento (α) proposto por Papadrakakis (1981), descrito na expressão 3.40, que resulta, para esse exemplo, em $\alpha \approx 2\omega_{\min}$. O fator de não linearidade (expressão 3.16) adotado é $f_{NL} = \sqrt{2}$, o critério de convergência adotado é $g_n^{\max} \leq 1\text{ N}$. O Δt é determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4. Os resultados do MRD são comparados com a solução analítica dada em Pauletti (2003) e com resultados do Método de Newton-Raphson.

A Figura 6.3 mostra a geometria de equilíbrio, com as cores representando a norma dos deslocamentos.

Figura 6.3: Configuração de equilíbrio do cabo catenário com a norma dos deslocamentos

O deslocamento no meio do vão f e o comprimento final do cabo L_w são obtidos pela solução analítica do cabo catenário, dada pelas expressões (6.1) e (6.2),

$$f = \frac{H}{w} \left(\cosh \left(\frac{wL}{2H} \right) - 1 \right) \quad (6.1)$$

$$L_w = \frac{2H}{w} \sinh \left(\frac{wL}{2H} \right) \quad (6.2)$$

onde H é a força de reação horizontal dos apoios.

A Tabela 6.1 mostra os resultados do MRD comparados com a solução analítica e com a solução pelo Método de Newton-Raphson.

	RD	Newton-Raphson	Analítico	discrepância RD / Newton	discrepância RD / Analítico
f (m)	5,296	5,296	5,371	0,00%	1,40%
L_w (m)	61,196	61,196	61,110	0,00%	0,14%

Tabela 6.1 : Resultados do modelo do cabo catenário

A Figura 6.4 e a Figura 6.5 mostram a variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada do sistema para os amortecimentos viscoso e cinético, durante os passos de integração no tempo.

Figura 6.4: Variação da energia cinética do cabo catenário, para os amortecimentos viscoso e cinético

Figura 6.5: Variação da força nodal desbalanceada do cabo catenário, para os amortecimentos viscoso e cinético

Os resultados obtidos por meio do MRD convergem para a mesma solução fornecida pelo Método de Newton-Raphson. Comparados com a solução analítica os resultados apresentam pouca discrepância, apesar da discretização pouco refinada empregada para a resolução numérica.

Observando-se os resultados da Figura 6.4 e Figura 6.5, constata-se que, usando o amortecimento cinético, obtêm-se a convergência da solução com 52% menos passos de integração no tempo do que com o amortecimento viscoso (171 contra 361 passos).

6.2 Membrana circular inflada

Este exemplo é baseado em Wu e Ting (2008), Bouzidi et al. (2003) e Bulson (1973), onde se busca uma configuração de equilíbrio para uma membrana circular sob um carregamento de pressão uniforme, partindo de uma malha de elementos finitos de membrana no plano XY. Devido à simetria é possível modelar apenas um quarto da membrana circular (Figura 6.6). São dados: o raio da membrana $r = 1\text{ m}$, módulo de elasticidade $E = 10\text{ kPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,2$, espessura $t = 1\text{ mm}$ e não há tensão inicial. O fator de não linearidade adotado é $f_{NL} = \sqrt{2}$ e o critério de convergência é pela máxima força nodal desbalanceada do sistema quando se atinge a condição $g_n^{\max} \leq 5 \times 10^{-4}\text{ N}$.

Obtém-se a solução por meio do MRD, tanto com amortecimento cinético como com amortecimento viscoso, com $\alpha \approx 2\omega_{\min}$, conforme a equação (3.40). O Δt é determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4. Não se adotou nenhum procedimento de sintonia de massas, uma vez que o modelo é composto por um só tipo de elemento, todos eles de tamanhos similares, levando a estimativas similares também para a massa crítica de cada elemento.

Figura 6.6: Malha inicial da membrana circular no plano XY

A membrana circular pressurizada também é abordada por Bulson (1973), onde se define, em função da pressão (p), raio (r), espessura (t), módulo de Elasticidade (E) e coeficiente de Poisson (ν), uma expressão para obter-se o máximo deslocamento vertical ($\delta_{\max}$) para pequenas deformações,

$$\delta_{\max} = \sqrt[3]{\frac{3 p (1-\nu) r^4}{8 E t}} \quad (6.3)$$

A Tabela 6.2 mostra os resultados da expressão (6.3) para diferentes pressões, comparados com os resultados obtidos nesta tese.

Deslocamento máximo em Z (m)			
pressão	Guirardi	solução analítica	discrepância
0,03 Pa	0,0969	0,0965	0,32%
0,04 Pa	0,1068	0,1063	0,50%
0,05 Pa	0,1155	0,1145	0,86%

Tabela 6.2: Deslocamentos máximos da membrana circular para pequenas deformações

A Figura 6.7 mostra os resultados dos deslocamentos em Z para a pressão de 0,04 Pa.

Figura 6.7: Deslocamentos da membrana circular na direção do eixo Z para pressão de 0,04 Pa

Como a expressão (6.3) é definida para pequenas deformações, busca-se comparar os resultados obtidos nesta tese para grandes deformações com os resultados de Wu e Ting (2008) mostrados na Figura 6.8 e comparados na Tabela 6.3.

Figura 6.8: Deslocamentos da membrana circular na direção do eixo Z adaptados de Wu e Ting (2008)

Deslocamento máximo em Z (m)			
pressão	Guirardi	Wu e Ting (2008)	discrepância
1 Pa	0,32	0,33	3,94%
5 Pa	0,66	0,69	4,35%
7 Pa	0,82	0,85	3,30%
8 Pa	0,90	0,95	4,85%

Tabela 6.3: Deslocamentos máximos da membrana circular na direção do eixo Z

Os resultados dos deslocamentos na direção do eixo Z, primeiras e segundas tensões principais e primeiras deformações principais para a pressão de 8 Pa são mostrados da Figura 6.9 até a Figura 6.12.

Figura 6.9: Deslocamentos da membrana circular na direção do eixo Z para pressão de 8,0 Pa

Figura 6.10: Primeiras tensões principais da membrana circular para pressão de 8,0 Pa

Figura 6.11: Segundas tensões principais da membrana circular para pressão de 8,0 Pa

Figura 6.12: Primeiras deformações principais da membrana circular para pressão de 8,0 Pa

A variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada da membrana circular sob pressão de 8,0 Pa, para os amortecimentos viscoso e cinético são mostrados na Figura 6.13 e na Figura 6.14.

Figura 6.13: Variação da energia cinética da membrana circular sob pressão de 8,0 Pa, para os amortecimentos viscoso e cinético

Figura 6.14: Variação da força nodal desbalanceada da membrana circular sob pressão de 8,0 Pa, para os amortecimentos viscoso e cinético

Os resultados em deslocamentos da presente tese comparados com os resultados da solução analítica para pequenas pressões convergem para a mesma solução com discrepâncias máximas de 0,86%, como mostra a Tabela 6.2. Já para grandes pressões, são comparados os resultados de Wu e Ting (2008), mostrados na Tabela 6.3, que apresentam discrepâncias máximas de 4,85% para as pressões até 8Pa, resultando em uma configuração com deformações da ordem de 60% (Figura 6.12). O desempenho pode ser dado como satisfatório, uma vez que as configurações finais apresentam grandes deformações, enquanto que o elemento finito de membrana adotado nesta tese de fato considera pequenas deformações.

A convergência da solução é obtida usando amortecimento viscoso com 762 iterações e com amortecimento cinético com 281 iterações, constatando que com o amortecimento cinético a solução é obtida com 63% menos passos de integração no tempo.

6.3 *Airbag* quadrado

Este modelo tem como referência principal Jarasjarungkiat et al. (2008), mas outros autores como Contri e Schrefler (1988), Ziegler et al. (2003), Accorsi e Leonard (2001), Diaby et al. (2006) e Lee e Youn (2006) exploram exemplos similares. No presente exemplo busca-se uma configuração de equilíbrio para uma membrana quadrada com as extremidades livres para se deslocar no plano XY sob um carregamento de pressão transversal uniforme, obtendo assim a forma de um *airbag* (Figura 6.15). Discretiza-se o modelo com uma malha de elementos finitos de membrana, originalmente no plano XY. Devido à simetria modela-se apenas um quarto da membrana (Figura 6.16 e Figura 6.17). O quarto da membrana quadrada tem lado 42,42 cm, módulo de elasticidade $E = 0,58 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,4$, espessura 0,6 mm e não há tensão inicial. Adota-se o algoritmo de enrugamento descrito no item 4.4.1. Adota-se ainda um fator de não linearidade $f_{NL} = 4$ e um critério de convergência pela máxima força nodal desbalanceada do sistema, $g_n^{\max} \leq 1,5 \text{ N}$.

Obtêm-se a solução por meio do MRD com amortecimento cinético, sendo o Δt determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4. Comparam-se os resultados obtidos com aqueles fornecidos por outros autores.

Figura 6.15: Figura representativa do *airbag* criada a partir da configuração final do modelo

A Figura 6.16 mostra a configuração final do modelo com deslocamentos de referência.

Figura 6.16: Configuração da malha final do *airbag* com os deslocamentos de referência

Figura 6.17: Malha inicial do modelo do *airbag*

A variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada do *airbag* para o amortecimento cinético é mostrada na Figura 6.18 e Figura 6.19.

Figura 6.18: Variação da energia cinética do *airbag* para o amortecimento cinético

Figura 6.19: Variação da força nodal desbalanceada do *airbag* para o amortecimento cinético

A Tabela 6.4 mostra os deslocamentos e tensões do *airbag* obtidos nesta tese e por outros autores nos pontos de referência mostrados na Figura 6.16.

	Guirardi	Jarasjarungkiat et al. (2007)	Ziegler et al. (2003)	Contri e Schrefler (1988)
deslocamento C (cm)	21,54	21,75	21,60	20,50
deslocamento A (cm)	5,01	4,94	6,90	4,70
deslocamento B (cm)	11,27	12,03	12,30	13,01
tensão C (kN/cm ²)	0,39	0,39	0,37	0,35

Tabela 6.4: Deslocamentos e tensões do *airbag* em pontos de referência

Os deslocamentos na direção do eixo Z e na direção do eixo Y e as primeiras e segundas tensões principais nodais e dos elementos para o *airbag* são mostrados da Figura 6.20 até a Figura 6.25.

Figura 6.20: Deslocamentos do *airbag* na direção do eixo Z Figura 6.21: Deslocamentos do *airbag* na direção do eixo Y Figura 6.22: Primeiras tensões principais nodais do *airbag*

Figura 6.23: Segundas tensões principais nodais do *airbag*

Figura 6.24: Primeiras tensões principais dos elementos do *airbag*

Figura 6.25: Segundas tensões principais dos elementos do *airbag*

Os resultados em deslocamentos e tensões da presente tese, comparados com os resultados de outros autores, convergem para a mesma solução, com poucas discrepâncias, como mostra a Tabela 6.4, comprovando o bom desempenho da solução pelo MRD. A solução pelo método de Newton-Raphson não é possível em virtude da ausência de tensão em alguns elementos, o que acarreta uma matriz de rigidez tangente singular e uma interrupção das iterações. Observa-se na Figura 6.24 e na Figura 6.25 que o algoritmo de enrugamento descrito no item 4.4.1 tem grande atuação modificando as tensões em vários elementos mostrados na cor cinza. A Figura 6.26 mostra a malha final do *airbag*, obtida pelo SATS, sem a consideração do enrugamento. Comprova-se que sem o algoritmo de enrugamento a configuração final é distinta da obtida anteriormente, assim como já concluíam Accorsi e Leonard (2001).

Figura 6.26: Configuração da malha final do *airbag* sem a consideração do enrugamento

6.4 Toalha de mesa

Neste exemplo, busca-se a configuração de equilíbrio de uma toalha sobre uma mesa quadrada (Figura 6.27), sujeita ao carregamento de peso próprio e partindo de uma malha de elementos finitos de membrana originalmente no plano XY. Devido à simetria modela-se um quarto do modelo. A malha é quadrada com lado de 1 m e recorta-se um quadrado de 40 cm na parte superior direita, representando a borda da mesa. Nesse recorte os deslocamentos são restringidos, como mostra a Figura 6.28. A membrana tem módulo de elasticidade $E = 0,2 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, espessura 0,1 mm, densidade 15 kN/m^3 e não há tensão inicial. Adota-se o algoritmo de enrugamento descrito no item 4.4.1. Adota-se ainda

um fator de não linearidade $f_{NL} = 4$ e um critério de convergência pela máxima força nodal desbalanceada do sistema, $g_n^{\max} \leq 0,02 \text{ N}$.

A solução é obtida por meio do MRD com amortecimento cinético, sendo o Δt determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4.

Figura 6.27: Figura representativa da toalha sobre a mesa criada a partir da configuração final do modelo

Figura 6.28: Configuração final e inicial da malha de modelo da toalha

A variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada para a toalha, considerando amortecimento cinético, é mostrada na Figura 6.29 e na Figura 6.30.

Figura 6.29: Variação da energia cinética da toalha para amortecimento cinético

Figura 6.30: Variação da força nodal desbalanceada da toalha para o amortecimento cinético

A norma dos deslocamentos, as primeiras e segundas tensões principais dos elementos da toalha são mostradas da Figura 6.31 à Figura 6.33.

displacements USUM : min 0 max 0.90751

SATS

Figura 6.31: Norma dos deslocamentos da toalha

first principal stress : min 0 max 39754.2848

SATS

Figura 6.32: Primeiras tensões principais da toalha

second principal stress : min 0 max 0 **SATS**

Figura 6.33: Segundas tensões principais da toalha

A solução do modelo da toalha foi obtida sem dificuldades de convergência, apesar da grande não linearidade intrínseca do modelo. A comparação quantitativa dos resultados com outros modelos abordados em Fontana et al. (2005), Liu et al. (2007) e Kerdid et al. (2008) não é possível, devido à insuficiência de dados iniciais ou resultados dos problemas tratados por essas referências. Assim como no modelo do *airbag*, a solução pelo método de Newton-Raphson fica impossibilitada devido à falta de rigidez de alguns elementos, provocada pela falta de tensão inicial e pela rotina de enrugamento, gerando matrizes de rigidez tangente singulares. O refinamento da malha pode gerar uma configuração final mais próxima da realidade, porém neste caso a solução apresenta interpenetração de alguns elementos, que pode ser evitada com a adequada representação do contato entre os mesmos. Tal aperfeiçoamento não está no escopo desta tese, mas pode ser objeto de trabalhos futuros.

6.5 Paraquedas

Neste exemplo inspira-se em um modelo de um paraquedas (Figura 6.34) proposto por Zhang et al. (2005). Outros autores como Accorsi e Leonard (2001), Stein et al. (2000) e Valdés et al. (2009) também desenvolvem modelos envolvendo paraquedas.

No exemplo desenvolvido por Zhang et al. (2005) busca-se uma configuração de equilíbrio de um paraquedas sujeito a uma pressão uniforme, partindo da configuração mostrada na Figura 6.35, por meio de uma análise dinâmica com integração implícita no tempo, empregando-se o Método de Newton-Raphson para garantir o equilíbrio dinâmico em

cada incremento de tempo. Trata-se portanto de método de solução diverso do MRD empregado na presente tese.

O modelo de Zhang et al. (2005) também considerava elementos quadrangulares de 9 nós, com funções de interpolação mais ricas que aquelas do elemento adotado na presente tese. Por esta razão, a malha adotada no presente estudo considerou um arranjo de quatro elementos triangulares de tensão constante, para cada elemento da malha do problema de referência. Também para manter a coerência com o modelo proposto por Zhang et al. (2005), não se considerou a rotina de enrugamento.

Devido à simetria, a malha inicial considera apenas um quarto de uma circunferência de 4,26 m de raio, com um furo circular no centro com raio de 0,426 m e 5,49 m de altura. Foram adotados os mesmos dados do modelo de referência, quais sejam, para a membrana: módulo de elasticidade de $E = 20,68 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$, espessura $3,048 \times 10^{-5} \text{ m}$, sem tensão inicial e pressão de 23,94 Pa. As propriedades para os elementos de cabos são: módulo de elasticidade $E = 0,2068 \text{ GPa}$, área da seção transversal $9,29 \times 10^{-6} \text{ m}^2$, sem força normal inicial.

Obtêm-se a solução por meio do MRD com amortecimento cinético por dois critérios, sendo um com o Δt determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4 e o outro com $\Delta t = 1$ e a estabilidade garantida pela sintonia da massa crítica pelo critério dos elementos como descrito no item 3.6. O fator de não linearidade adotado é $f_{NL} = \sqrt{12}$. O critério de convergência adotado é pela máxima força nodal desbalanceada $g_n^{\max} \leq 0,5 \text{ N}$.

Figura 6.34: Figura representativa do paraquedas gerado a partir da configuração final do modelo

Figura 6.35: Malha inicial do paraquedas

A variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada do paraquedas para amortecimento cinético, para os dois critérios de estabilidade adotados é mostrada na Figura 6.36 e na Figura 6.37.

Figura 6.36: Variação da energia cinética do paraquedas para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e com Δt crítico global

Figura 6.37: Variação da força nodal desbalanceada do paraquedas para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e com Δt crítico global

A configuração final da malha, norma dos deslocamentos e as primeiras tensões principais do paraquedas são mostradas da Figura 6.38 à Figura 6.40.

Figura 6.38: Malha final do paraquedas

displacements USUM : min 0 max 3.4135

SATS

Figura 6.39: Norma dos deslocamentos com a configuração inicial para o paraquedas

Figura 6.40: Primeiras tensões principais para o paraquedas

A Figura 6.41 mostra as primeiras tensões principais ao longo do eixo no meio dos gomos do modelo do paraquedas obtidas na presente tese e em Zhang et al. (2005).

Figura 6.41: Primeiras tensões principais ao longo eixo no meio dos gomos do paraquedas.

Comparando os resultados obtidos na presente tese com Zhang et al. (2005) constata-se a convergência nos resultados em deslocamentos. Zhang et al. (2005) obtém as primeiras tensões principais ligeiramente superiores, mas com a mesma tendência.

Nas Figura 6.36 e Figura 6.37 observa-se que o critério de sintonia da massa crítica por elementos acelera a obtenção da solução em 47% (4134 contra 7915 iterações).

6.6 Memorial dos Povos

Este exemplo é de uma análise da cobertura de membrana com cabos de borda do Memorial dos Povos de Belém do Pará, no Brasil (Figura 6.42). A estrutura cobre uma área de aproximadamente 400 m^2 , ocupando 23 m de largura por 29 m de comprimento. O modelo de referência tem como base o artigo de Pauletti e Brasil (2005a) e também é usado para estudos e diversos outros trabalhos como: Pauletti et al. (2005b, 2007, 2008a, 2008b, 2009a e 2009b), Guirardi (2006), Dias (2006) e Martins (2009). Em conjunto, estes estudos, realizados por diferentes programas e métodos de análises, permitiram um entendimento bastante aprofundado do comportamento desta estrutura, e oferecem um interessante *benchmark* para novos métodos de análise.

Figura 6.42: Memorial dos Povos de Belém do Pará (Pauletti et al., 2007)

As propriedades adotadas para a membrana são: módulo de elasticidade $E = 1\text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, espessura 1 mm e tensão inicial de 5 MPa. As propriedades para os cabos são: módulo de elasticidade $E = 120\text{ GPa}$, área da seção transversal $8,33 \times 10^{-4}\text{ m}^2$ e força inicial 100 kN.

A solução é obtida por meio do MRD para um carregamento de vento agindo na direção paralela à cumeeira da membrana, o qual origina cargas de pressão uniformes de 286 Pa, para cima, combinadas com as cargas de retesamento.

São feitos 3 casos de estudo para o Memorial dos Povos:

1. Carregamento de vento com cabos de borda discretizados com o super-elemento de cabo (descrito em 4.2) (caso 1a) e com elementos de treliça (caso 1b). Malha inicial conforme a Figura 6.43. Fator de não linearidade adotado $f_{NL} = \sqrt{2}$ e critério de convergência pelas forças nodais desbalanceadas $g_n^{\max} \leq 10 \text{ N}$. Obtêm-se a solução por meio do Método de Newton-Raphson e pelo Método da Relaxação Dinâmica com amortecimento cinético e por amortecimento viscoso com coeficiente de amortecimento com $\alpha \approx 2 \omega_{\min}$. O Δt é determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4.
2. Carregamento de vento com cabos de borda discretizados com elementos de treliça. Fator de não linearidade adotado $f_{NL} = 4$ e critério de convergência pelas forças nodais desbalanceadas $g_n^{\max} \leq 50 \text{ N}$. Obtêm-se a solução por meio do MRD com amortecimento cinético por 3 critérios, sendo um com o Δt determinado pela máxima frequência do sistema, como descrito no item 3.4, o segundo com $\Delta t = 1$ e a estabilidade garantida pela sintonia da massa crítica pelo critério dos elementos como descrito no item 3.6 e o terceiro pela sintonia da massa crítica pelo critério nodal como descrito no item 3.5.
3. Padronagem de cortes da membrana por elementos geodésicos (descritos em 4.3) e planificação de faixa pelo MRD. Exemplo previamente abordado em Pauletti, Pappallardo e Guirardi (2008) e Pauletti, Guirardi e Gouveia (2009).

A Figura 6.43 mostra a malha de elementos finitos inicial, para o caso 1 e para a padronagem de cortes do caso 3, composta por elementos de membrana e super-elementos de cabo ou elementos de treliça. Os elementos de membrana consideram o algoritmo de enrugamento descrito em 4.4.1.

A Figura 6.44 mostra a malha de elementos finitos inicial, para o caso 2 e para a planificação de uma faixa no caso 3, composta por elementos de membrana e treliça.

Figura 6.43: Malha inicial do modelo do Memorial dos Povos para os casos 1 e 3.

Figura 6.44: Malha inicial do modelo do Memorial dos Povos para os casos 2 e 3.

Da Figura 6.45 a Figura 6.47 são mostradas a norma dos deslocamentos e as primeiras e segundas tensões principais por elementos para o memorial para o caso 1. As figuras (a) representam o modelo com os cabos discretizados com super-elementos e as figuras (b) com os cabos discretizados com elementos de treliça. A Tabela 6.5 mostra um resumo dos resultados obtidos, inclusive com o software Ansys.

Figura 6.45: Norma dos deslocamentos do Memorial.

Figura 6.46: Primeiras tensões principais para o Memorial.

Figura 6.47: Segundas tensões principais nodais para o Memorial

	super elemento de cabo		elemento de treliça		Ansys
	SATS (Newton)	SATS (RD)	SATS (Newton)	SATS (RD)	
Máximo deslocamento (m)	0,4646	0,4639	0,4040	0,4039	0,4028
Máxima primeira tensão principal (MPa)	26,496	26,457	13,609	13,608	13,60
Máxima segunda tensão principal (MPa)	6,719	6,714	5,375	5,375	5,37
Mínima segunda tensão principal (MPa)	0	0	0	0	0,000142

Tabela 6.5: Deslocamentos e tensões do memorial para o caso 1

Da Figura 6.48 à Figura 6.51 mostram-se a variação da energia cinética e da força nodal desbalanceada do memorial para os casos 1a e 2 respectivamente.

Figura 6.48: Variação da energia cinética do memorial, para os amortecimentos viscoso e cinético para o caso 1a

Figura 6.49: Variação da força nodal desbalanceada do memorial, para os amortecimentos viscoso e cinético para o caso 1a

Figura 6.50: Variação da energia cinética do memorial, para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e nodal e com Δt crítico global, para o caso 2

Figura 6.51: Variação da força nodal desbalanceada do memorial, para amortecimento cinético com a sintonia da massa crítica por elementos e nodal e com Δt crítico global, para o caso 2

A Figura 6.52 mostra a padronagem de corte, obtida por elementos geodésicos, em linhas em vermelho, descrito no item 4.3 e por um método geométrico, em linhas em azul, descrito em Dias (2006); tais padronagens são discutidas em Pauletti, Guirardi e Gouveia (2009). A Figura 6.53 mostra a planificação de uma faixa obtida pelo MRD para a malha mais discretizada.

Figura 6.52: Padronagem de corte obtida por método geométrico (a) e por elementos geodésicos (b) (Pauletti, Guirardi e Gouveia, 2009).

Figura 6.53: Planificação de uma faixa do Memorial

O estudo do caso 1 é apresentado em Pauletti, Guirardi e Gouveia (2009). Nesta tese atualizam-se os resultados com o critério de convergência pela máxima força nodal desbalanceada. Percebe-se pouca ou em alguns casos nenhuma discrepância de resultados obtidos pelo MRD e Método de Newton-Raphson.

A Tabela 6.5 mostra os resultados do modelo do memorial discretizado com o elemento de treliça e o super-elemento de cabo, onde se percebe que o valor da primeira tensão principal é quase o dobro do valor quando se discretiza com o super-elemento de cabo, podendo interferir, portanto, no dimensionamento da membrana.

Assim como nos outros exemplos estudados, o critério de amortecimento cinético converge com menos passos do que com critério de amortecimento viscoso como mostram a Figura 6.48 e a Figura 6.49 (906 contra 1231 iterações).

Entre os três critérios estudados, o que converge com menos passos de integração é o critério de sintonia da massa crítica por elementos com 1773 iterações, contra 1844 iterações do critério da sintonia da massa crítica nodal e 3107 iterações do critério pelo incremento de tempo crítico global, como mostram a Figura 6.50 e a Figura 6.51.

6.7 Anfiteatro

Este exemplo baseia-se na estrutura do Anfiteatro do Parque Temático dos Direitos da Criança e Adolescentes (Figura 6.54), localizada na cidade de São Bernardo do Campo – SP, cujo projeto tem participação e responsabilidade técnica do autor desta tese.

A estrutura está inserida em um retângulo de 33m x 44 m, possui dois mastros centrais tubulares treliçados de 15,50 m de altura e sete vértices, sendo três deles sobre a laje de uma edificação, dois deles em cavaletes de 3,48 m e dois em masteletes de 4,69 m.

Figura 6.54: Anfiteatro do Parque Temático²

As propriedades adotadas para a membrana são: módulo de elasticidade $E = 0,5 \text{ GPa}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0$, espessura 1 mm e tensão inicial de 2 MPa. As propriedades dos cabos e anéis treliçados do topo dos mastros são: produto de rigidez axial $EA = 1,8 \times 10^8 \text{ N}$ e força inicial 1 kN. Os masteletes têm produto de rigidez $EA = 8,21 \times 10^8 \text{ N}$,

² Metálica. Disponível em: <<http://www.metalica.com.br/Anfiteatro-do-parque-dos-diretos-da-crianca-e-adolescentes-sbc>>. Acesso em: junho de 2011

os cavaletes têm produto de rigidez $EA = 5,58 \times 10^8 \text{ N}$ e os mastros principais têm produto de rigidez $EA = 2,1 \times 10^9 \text{ N}$. São adotados um fator de não linearidade $f_{NL} = 4$ e um critério de convergência pela média das forças nodais desbalanceadas $g_n^{med} \leq 150 \text{ N}$.

A membrana é discretizada com elementos considerando o algoritmo de enrugamento descrito no item 4.4.1. Os cabos de borda, mastros, masteletes e cavaletes são discretizados com elementos de treliça. A Figura 6.55 e a Figura 6.56 mostram a malha inicial do modelo do Anfiteatro. A solução é obtida pelo MRD para 3 tipos de carregamentos de vento: frontal, posterior e lateral, combinados com as cargas de retesamento. Compara-se a convergência com amortecimento cinético por 3 critérios, sendo o primeiro com o Δt determinado pela máxima frequência do sistema (como descrito no item 3.4), o segundo com $\Delta t = 1$ e a estabilidade garantida pela sintonia da massa crítica, pelo critério dos elementos (como descrito no item 3.6) e o terceiro pela sintonia da massa crítica pelo critério nodal (como descrito no item 3.5). Para os ventos posterior e frontal a solução é obtida apenas com os dois critérios de sintonia da massa crítica. Para o vento lateral a solução é obtida para os três critérios.

Figura 6.55: Vistas superior e frontal da malha inicial do Anfiteatro

Figura 6.56: Vista lateral da malha inicial do Anfiteatro

A Figura 6.57 mostra o carregamento de pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento frontal no Anfiteatro. Os valores negativos representam cargas de sucção (na direção positiva do eixo Z, no caso de um elemento no plano horizontal XY).

Figura 6.57: Pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento frontal

A norma dos deslocamentos, as primeiras e segundas tensões principais nodais e dos elementos, no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento frontal são mostrados da Figura 6.58 à Figura 6.60, sendo o máximo deslocamento 1,64 m e a máxima tensão principal 48,68 MPa.

Figura 6.58: Norma dos deslocamentos do Anfiteatro (vento frontal)

Figura 6.59: Primeiras tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento frontal)

Figura 6.60: Segundas tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento frontal)

A variação da energia cinética e das forças nodais desbalanceadas no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento frontal, para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal (convergência após 2567 iterações) e por elementos (convergência após 2313 iterações), são mostradas na Figura 6.61 e na Figura 6.62.

Figura 6.61: Variação da energia cinética do Anfiteatro sujeito ao vento frontal para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos

Figura 6.62: Variação da força nodal desbalanceada do Anfiteatro sujeito ao vento frontal para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos

A Figura 6.63 mostra o carregamento de pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento posterior aplicado ao modelo do Anfiteatro. Os valores negativos representam cargas de sucção (na direção positiva do eixo Z, no caso de um elemento no plano horizontal XY).

Figura 6.63: Pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento posterior

A norma dos deslocamentos, as primeiras e segundas tensões principais nodais e dos elementos, para o modelo do Anfiteatro sujeito ao vento posterior, são mostrados da Figura 6.64 à Figura 6.66. Sendo o máximo deslocamento 1,96 m e a máxima tensão principal 30,52 MPa.

Figura 6.64: Norma dos deslocamentos do Anfiteatro (vento posterior)

first principal stress : min 0 max 30430553.1546

SATS first principal stress : min 0 max 30521933.1838**SATS**

Figura 6.65: Primeiras tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento posterior)

second principal stress : min 0 max 12097423.5109

SATS second principal stress : min 0 max 13693110.8892**SATS**

Figura 6.66: Segundas tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento posterior)

A variação da energia cinética e das forças nodais desbalanceadas do modelo do Anfiteatro sujeito ao vento posterior, para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal (convergência após 2365 iterações) e por elementos (convergência após 2324 iterações), é apresentada na Figura 6.67 e na Figura 6.68.

Figura 6.67: Variação da energia cinética do Anfiteatro sujeito ao vento posterior para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos

Figura 6.68: Variação da força nodal desbalanceada do Anfiteatro sujeito ao vento posterior para o amortecimento cinético com os critérios de sintonia da massa crítica nodal e por elementos

A Figura 6.69 mostra o carregamento de pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento lateral. Os valores negativos representam cargas de sucção (na direção positiva do eixo Z, no caso de um elemento no plano horizontal XY).

Figura 6.69: Pressões no modelo do Anfiteatro sujeito ao vento lateral

A norma dos deslocamentos, as primeiras e segundas tensões principais nodais e dos elementos, para o modelo do Anfiteatro sujeito ao vento lateral são mostradas da Figura 6.70 à Figura 6.72. Sendo o máximo deslocamento 1,34 m e a máxima tensão principal 23,94 MPa.

Figura 6.70: Norma dos deslocamentos do Anfiteatro (vento lateral)

first principal stress : min 0 max 22259074.6804

SATS first principal stress : min 0 max 23941116.8866**SATS**

Figura 6.71: Primeiras tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento lateral)

second principal stress : min 0 max 12173124.3216

SATS second principal stress : min 0 max 13717398.5792**SATS**

Figura 6.72: Segundas tensões principais nodais e dos elementos do Anfiteatro (vento lateral)

A variação da energia cinética e das forças nodais desbalanceadas do modelo do Anfiteatro sujeito ao vento lateral, para o amortecimento cinético com os critérios de Δt crítico global (convergência após 25390 iterações), sintonia da massa crítica nodal (convergência após 2108 iterações) e por elementos (convergência após 2024 iterações), são mostradas na Figura 6.73 e na Figura 6.74.

Figura 6.73: Variação da energia cinética do Anfiteatro sujeito ao vento lateral para o amortecimento cinético com os critérios de Δt crítico global, sintonia da massa crítica nodal e por elementos

Figura 6.74: Variação da força nodal desbalanceada do Anfiteatro sujeito ao vento lateral para o amortecimento cinético com os critérios de Δt crítico global, sintonia da massa crítica nodal e por elementos

O critério onde a convergência é atingida com menos passos de integração, para os 3 casos de carregamento de vento, é o critério de sintonia da massa crítica por elementos. O amortecimento viscoso não foi adotado nesse exemplo por não ter tido bom desempenho em nenhum dos exemplos anteriores. O amortecimento cinético com o critério de Δt crítico global é extremamente desvantajoso em malhas onde há elementos com rigidez muito superior a

outros. Isso porque o elemento mais rígido é o que determinará o Δt crítico, sendo que quanto maior a rigidez do elemento mandatário menor será o Δt crítico. Este fato deixa esse critério com desempenho muito inferior aos critérios de sintonia da massa crítica, onde a discrepância entre a rigidez de alguns elementos não influencia tanto a convergência, como mostram a Figura 6.73 e a Figura 6.74.

Capítulo 7

Conclusões

Estruturas de cabos e membranas são sistemas que tendem a aumentar o número de aplicações nos próximos anos, como se constata pela sua utilização recente em instalações de grandes eventos esportivos como Copas do mundo da FIFA e Jogos Olímpicos.

As geometrias complexas e o comportamento não linear das estruturas retesadas geralmente inviabilizam o uso de soluções analíticas, levando necessariamente à utilização de aproximações por métodos numéricos, sendo o Método dos Elementos Finitos o mais utilizado.

O Método de Newton-Raphson normalmente é o mais eficiente método para a solução do problema de equilíbrio estático de estruturas de cabos e membranas, discretizadas pelo Método dos Elementos Finitos. Porém, em muitos casos, a solução pelo Método de Newton-Raphson leva a divergência, sendo o Método da Relaxação Dinâmica uma boa alternativa nesses casos, como se pode verificar nos exemplos estudados no Capítulo 6 desta tese.

A contextualização histórica do Método da Relaxação Dinâmica apontou as contribuições de outros autores e a necessidade de novos desenvolvimentos. Não há muitas referências nos principais artigos em revistas internacionais, que fazem exemplos de aplicação

em estruturas de cabos e membranas, em geral apresentando malhas com poucos elementos. Por esta razão, nesta tese procurou-se aplicar o Método da Relaxação Dinâmica tanto em exemplos básicos com em exemplos de relevância prática.

Assim como já havia concluído Guirardi (2006), as facilidades computacionais e gráficas do ambiente Matlab[®] são convenientes para a implementação de novos elementos e algoritmos. O sistema SATS, inteiramente desenvolvido em Matlab[®] pelo autor desta tese e seu orientador, se mostrou uma ferramenta eficiente para o projeto e a análise de estruturas de cabos e membranas, por meio do Método da Relaxação Dinâmica, implementado neste sistema no âmbito desta tese.

Os exemplos para os quais se dispunha de solução analítica (cabo catenário e membrana circular inflada) mostraram pouca discrepância com os resultados obtidos pelo MRD. Também houve pouca discrepância entre o MRD e o Método de Newton-Raphson, nos casos em que foi possível a solução por este último método (cabo catenário e do Memorial dos Povos). Finalmente, em alguns casos, a solução pelo Método de Newton-Raphson puro (sem nenhum aperfeiçoamento do tipo busca unidirecional, carregamento adaptativo, algoritmos preditor-corretor ou coeficientes de rigidez fictícios) não foi possível, e mesmo assim obteve-se solução pelo MRD (airbag, toalha de mesa, paraquedas, anfiteatro).

As implementações do super-elemento de cabo, elemento de linha geodésica e algoritmo de enrugamento de membranas preenchem uma lacuna deixada pelos programas de elementos finitos comerciais em aplicações para o projeto e análise de estruturas de cabos e membranas.

Assim, como mostra o exemplo do Memorial dos Povos, a discretização com o super-elemento de cabo (que é um elemento que representa melhor a realidade da estrutura do que o elemento de treliça) interfere no valor das máximas tensões principais e por consequência podem interferir no dimensionamento da membrana.

Tanto a padronagem de corte por linhas geodésicas como a planificação de faixas assim definidas podem ser obtidas de forma eficiente por meio do MRD, como mostrado no exemplo do Memorial dos Povos.

O algoritmo de representação do enrugamento, implementado no elemento de membrana, obtém o comportamento esperado, como observado nos exemplos do *airbag*, toalha de mesa, Memorial dos Povos e anfiteatro. No exemplo do Memorial dos Povos foi possível verificar como o algoritmo proposto, combinado com o MRD, fornece resultados

coerentes com aqueles obtidos por outros métodos e programas de elementos finitos. Além disso, no exemplo do *airbag* foi mostrada uma configuração final bem distinta da configuração desejada, quando não se utiliza o algoritmo de enrugamento.

O critério de amortecimento viscoso adotado nos exemplos do cabo catenário, membrana circular inflada e Memorial dos Povos obteve a convergência em todos os casos, porém com mais incrementos de tempo, se comparado com o critério de amortecimento cinético. Apesar de alguns autores afirmarem que o procedimento de amortecimento viscoso é mais eficiente, esse fato não foi constatado nos exemplos desta tese, nem em nenhum trabalho pesquisado relativo a estruturas combinando cabos e membranas. Rezaiee-pajand et al. (2011) propõem um novo parâmetro para se obter um coeficiente de amortecimento viscoso e comparam a vantagem de se usar este parâmetro ao invés do amortecimento cinético. Na maioria dos exemplos estudados, porém, a adoção do amortecimento cinético propiciou uma convergência mais rápida que os coeficientes de amortecimento viscoso propostos naquele trabalho.

Para garantir a estabilidade do método de integração explícito das Diferenças Centrais é necessária a adoção um fator de não linearidade $f_{NL} > 1$ uma vez que a frequência natural dos elementos varia a cada incremento de tempo. Buscou-se implementar procedimentos que automatizassem esse fator como, por exemplo, atualizar o incremento de tempo crítico a partir de um certo número de passos, ou em correspondência aos picos de energia cinética. No entanto, nos exemplos estudados, não houve uma diminuição na quantidade de incrementos de tempo para atingir a convergência, e em muitos casos a execução desse procedimento levou mesmo à divergência da solução. Adotou-se nesta tese um valor de f_{NL} determinado na configuração inicial, sendo o ajuste desse valor obtido pela inspeção da variação da energia cinética e das forças desbalanceadas nos primeiros passos da análise.

Entre os procedimentos adotados para acelerar a convergência do Método da Relaxação Dinâmica, o que teve melhor desempenho foi o procedimento de sintonia das massas pelas máximas frequências dos elementos, combinado com o amortecimento cinético. Trata-se de um importante aspecto de originalidade deste trabalho, pois o amortecimento cinético com o critério de incremento de tempo crítico global é extremamente desvantajoso em malhas onde há elementos com rigidez muito superior a outros, casos em que o elemento mais rígido determinará o valor crítico do incremento de tempo. Esse comportamento foi claramente observado nos exemplos do paraquedas, Memorial dos Povos e anfiteatro.

Em continuidade a esta pesquisa, propõem-se alguns temas para trabalhos futuros:

- combinar o Método de Newton-Raphson com o Método da Relaxação Dinâmica, sendo este último usado para definir uma configuração inicial mais favorável ao primeiro;
- formular um super-elemento de cabo deslizando com a consideração do efeito do atrito, existente entre o cabo e sua estrutura de suporte;
- desenvolver um algoritmo para representação do contato entre os elementos;
- formular um algoritmo para representação de elementos finitos de membrana com materiais ortótropos e anisótropos;
- implementar essas formulações e algoritmos sugeridos no sistema SATS, para resolução pelo MRD.

Referências Bibliográficas

Akita, T.; Nakashino, K.; Natori, M. C.; Park, K. C. A simple computer implementation of membrane wrinkle behaviour via a projection technique. *International journal for numerical methods in engineering* **71** 1231–1259, 2007.

Ali, N.B.H.; Barbarigos, L.R.; Smith, I.F.C. Analysis of clustered tensegrity structures using a modified dynamic relaxation algorithm *International Journal of Solids and Structures* **48** 637–647, 2011.

Al-Shawi, F. A. N.; Mardirosian, A. H. An improved dynamic relaxation method for the analysis of plate bending problems. *Computers and Structures* **27** 237–240, 1987.

Alwar, R. S.; Rao, N. R. Large elastic deformations of clamped skewed plates by dynamic relaxation. *Computers and Structures* **4** 381–398, 1974.

Alwar, R. S.; Rao, N. R.; Rao M. S. An alternative procedure in dynamic relaxation. *Computers and Structures* **5** 271–274, 1975.

Argyris, J. H. et. al. Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and*

Engineering **4** 219–278, 1974.

Argyris, J. H.; Doltsinis, J. St. On the natural formulation and analysis of large deformation coupled thermomechanical problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. **25** 195–253, 1981.

Argyris, J. H.; Doltsinis, J. St.; Pimenta, P.M. Wustenberg, H. Thermomechanical response of solids at high strains – natural approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* **32** 3–57, 1982.

Aufaure, M. A finite element of cable passing through a pulley, *Computers and Structures* **46** 807–912, 1993.

Bardet, J. P.; Proubet, J. Adaptive dynamic relaxation for statics of granular materials. *Computers and Structures* **39** 221–229, 1991.

Barnes, M. R. Applications of dynamic relaxation to the design and analysis of cable, membrane and pneumatic structures. *2nd Int. Conf. on Space Structures*, Guildford, 1975.

Barnes, M. R. Form-finding and analysis of tension structures by dynamic relaxation. *PhD thesis*, University of London, 1977.

Barnes, M. R. Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes. *Computers and Structures* **30** 685–695, 1988.

Bathe, K. J. Finite Element Procedures. New Jersey: *Prentice Hall*, 1996.

Bouzidi, R.; Ravaut, Y.; Wielgosz, C. Finite elements for 2D problems of pressurized membranes. *Computers & Structures* **81** 2479–2490, 2003.

Bulson, P.S. Design Principles of pneumatic structures. *The Structural Engineer* **51**, **6** 209–215, 1973.

- Cederberg, H.; David, M. Computation of creep effects in prestressed concrete pressure vessels using dynamic relaxation. *Nuclear Engineering And Design* **9**, 439–448, Amsterdam, 1969.
- Chen, B. K.; Choi, S. K.; Thomson, P. F. Analysis of plane strain rolling by the dynamic relaxation method *Int. J. Mech. Sci.* **31** 839–851, 1989.
- Chou, P. C.; Wu, L. A dynamic relaxation finite–element method for metal forming processes. *Int. J. Mech. Sci.* **28** 231–250, 1986.
- Clough, R.; Penzien, J. Dynamics of structures. Third edition, *Computers and Structures, Inc.* Berkeley, 1995.
- Contri, P.; Schrefler, B.A. A geometrically nonlinear finite element analysis of wrinkled membrane surfaces by a nocompression material model, *Commun. Appl. Numer. Methods* **4**, 5–15, 1988.
- Courant, R.; Friedrichs K.; Lewy, H. On the partial difference equations of mathematical physics, *Mathematische Annalen* 100, 1928 32-74; 'English translation in IBM J., 215-234, 1967.
- Crisfield, M. A. Non–linear Finite Element Analysis of Solids and Structures. *John Wiley and Sons* **1**, 1991.
- Cundall, P.A. Explicit finite difference methods in geomechanics *Proceedings of E.F. Conference on Numerical Methods in Geomechanics*, 1976.
- Dang, H.K. e Meguid, M.A. Evaluating the performance of an explicit dynamic relaxation technique in analyzing non-linear geotechnical engineering problems. *Computers and Geotechnics* **37** 125–131 2010.
- Day, A. S. An introduction to dynamic relaxation. *The Engineer* **219** 218–221, Londres, 1965.

Deifeld, T.E.C. Aplicação de um Elemento Finito de Cabo à Modelagem Numérica da Protensão sem Aderência. *Dissertação de Mestrado*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2001.

Diaby, Adama; Le van, Anh; Wielgosz, Christian. Buckling and wrinkling of prestressed membranes. *Finite Elements in Analysis and Design* **42**, 992 – 1001, 2006.

Dias, U. S. Jr. Determinação dos padrões de corte em estruturas de membrana por linhas geodésicas. *Dissertação de Mestrado*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

Domer B.; Fest, E.; Lalit, V.; Smith, I. F. C. Combining Dynamic Relaxation Method with Artificial Neural Networks to Enhance Simulation of Tensegrity Structures, *Journal of structural engineering* **681** 672–681, 2003.

Douthe, C. e Baverel, O. Design of nexorades or reciprocal frame systems with the dynamic relaxation method, *Computers and Structures* **87** 1296–1307, 2009.

Fontana, M.; Rizzi, C.; Cugini, U. 3D virtual apparel design for industrial applications. *Computer–Aided Design* **37** 609–622, 2005.

Frieze, P. A.; Hobbs, R. E.; Dowling, P. J. Application of dynamic relaxation to the large deflection elasto–plastic analysis of plates. *Computers and Structures* **8** 301–310, 1978.

Frieze, P. A.; Dowling, P. J. Interactive buckling analysis of box sections using dynamic relaxation. *Computers and Structures* **9** 431–439, 1978.

Guirardi, D. M. Implementação de um elemento finito de membrana baseado na formulação natural de Argyris, *Dissertação de Mestrado*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

Hallquist, John O. LS-Dyna Theory Manual. *Livermore Software Technology Corporation*. Livermore, California, 2006.

- Han, S.; Lee, K. A study of the stabilizing process of unstable structures by dynamic relaxation method *Computers and Structures* **81** 1677–1688, 2003.
- Hegyi, D.; Sajtos, I.; Geiszter, G.; Hincz, K. Eight-node quadrilateral double-curved surface element for membrane analysis. *Computers and Structures* **84** 2151–2158, 2006.
- Hughes, T. J. R. Finite element method. *Prentice-Hall*, New Jersey, 1987.
- Irons, B. M.; Treharne, G. A bound theorem in eigenvalues and its practical applications. In: *Proc. Third Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics*, Ohio, 1972.
- Jarasjarungkiat, A.; Wuchner, R.; Bletzinger, K.-U. A wrinkling model based on material modification for isotropic and orthotropic membranes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **197**, 773–788, 2008.
- Kadkhodayan, M.; Alamatian, J.; Turvey, G. J. A new fictitious time for the dynamic relaxation, DXDR method. *International journal for numerical methods in engineering* **74** 996–1018, 2008.
- Kerdid, N.; Dret, H. L.; Saïdi, A. Numerical approximation for a non-linear membrane problem. *International Journal of Non-Linear Mechanics* **43** 908–914, 2008.
- Kobayashi, H.; Turvey, G. J. On the application of a limiting process to the dynamic relaxation analysis of circular membranes, circular plates and spherical shells *Computers and Structures* **48** 1107–1116, 1993.
- Kwon, Young W. e Bang, Kyochoong. The Finite Element Method Using MATLAB. *CRC Press*, 2th edition, New York, 2000.
- Lee, Eung-Shik e Youn, Sung-Kie. Finite element analysis of wrinkling membrane structures with large deformations. *Finite Elements in Analysis and Design* **42**, 780 – 791, 2006.
- Lee, K.S.; Han, S.E.; Park, T. A simple explicit arc-length method using the dynamic relaxation method with kinetic damping. *Computers and Structures* **89** 216–233, 2011.

Leite, W. C. Análise dinâmica estocástica de estruturas de cabos de comportamento não linear sob vibrações aleatórias devidas ao vento. *Tese de Doutorado*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1999.

Levy, R. e Spillers, W. R. Analysis of geometrically nonlinear structures. *Chapman and Hall*, New York, 1995.

Lewis, W. J.; Jones, M. S.; Rushton, K. R. Dynamic relaxation analysis of the non-linear static response of pretensioned cable roofs. *Computers and Structures* **18** 989–997, 1984a.

Lewis, W. J.; Jones, M. S.; Lewis, G; Rushton, K. R. Cladding-network interaction in pretensioned cable roofs, studied by dynamic relaxation. *Computers and Structures* **19** 885–897, 1984b.

Lewis, W. J. e Sham, J. Numerical modelling of the non-linear static response of clad cable net structures. *Computers and Structures* **35** 15–22, 1990.

Lewis, Wanda J. Tension Structures: Form and Behaviour. *Thomas Telford Ltd*, 2003.

Livesley, R. K. Matrix Analysis of structures. *Pergamon Press*, Oxford, 1964.

Liu, Y.; Tang, K.; Joneja, A. Modeling dynamic developable meshes by the hamilton principle. *Computer-Aided Design* **39** 719–731, 2007.

Lu, K.; Accorsi, M.; Leonard, J. Finite element analysis of membrane wrinkling. *International journal for numerical methods in engineering* **50** 1017–1038, 2001.

Martins, C. B. Estudo do efeito do escorregamento dos cabos de borda em estruturas de membranas. *Dissertação de Mestrado*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

Matsumoto, E.Y. Matlab 7 Fundamentos. *Ética*, 1ª. Edição, São Paulo, 2004.

Meek, J. L. Computer Methods in Structural Analysis. *London: E&FN Spon*, 1991.

Metzger, D. R. Adaptive damping for dynamic relaxation problems with non-monotonic spectral response. *International journal for numerical methods in engineering* **56** 57–80, 2003.

Miyazaki Y.; Wrinkle/slack model and finite element dynamics of membrane, *Int. J. Numer. Meth. Engng* **66** 1179–1209, 2005.

Moncrieff, E. e Topping, B. H. V. Computer methods for the generation of membrane cutting patterns. *Computers & Structures* **37** 441-450, 1990.

Nakamura, S. Numerical Analysis and Graphic Visualization with MATLAB. *Prentice Hall PTR*, 2002.

Oakley, D. R.; Knight, N. F. Jr. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures *Part I: Formulation*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **126** 67–89, 1995a.

Oakley, D. R.; Knight, N. F. Jr. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures *Part II. Single-processor implementation*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **126** 91–109, 1995b.

Oakley, D. R.; Knight, N. F. Jr.; Warner, D. D. Adaptive dynamic relaxation algorithm for non-linear hyperelastic structures *Part III. Parallel implementation*. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **126** 111–129, 1995c.

Oakley, D. R.; Knight, N. F. Jr. Non-Linear Structural Response Using Adaptive Dynamic Relaxation On A Massively Parallel-Processing System . *International journal for numerical methods in engineering* **39** 235–259, 1996.

Otter, J. R. H. Computations for prestressed concrete reactor pressure vessels using dynamic relaxation. *Nuclear Structural Engineering* **1** 61–75, Amsterdam, 1965a.

- Otter, J. R. H. Dynamic relaxation compared with other iterative finite difference methods. *Nuclear Engineering And Design* **3** 183–185, Amsterdam, 1965b.
- Ozdemir, H. A finite element approach for cable problems. *International Journal of Solids and Structures* **15** 427–4437, 1978.
- Papadrakakis, M. A method for the automatic evaluation of the dynamic relaxation parameters. *Computer methods in applied mechanics and engineering* **25** 35–48, 1981.
- Pauletti, R.M.O. e Pimenta, P.M. Formulação de um Elemento Finito de Cabo Incorporando o Efeito do Atrito (‘Elemento de cabos escorregando’). *Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería*. Vol 11, **4** 565-576, 1995.
- Pauletti, R. M. O. História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas. *Tese de Livre Docência*, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- Pauletti, R. M. O.; Brasil, R. M. L. R. F. Structural Analysis and Construction of the Membrane Roof of the Memorial dos Povos de Belém do Pará. *II SLATE – II Simposio Latinoamericano de Tensoestructuras*, Caracas, 2005a.
- Pauletti, R. M. O.; Guirardi, D. M.; Deifeld, T. E. C. Argyris’ Natural Membrane Finite Element Revisited. *Structural Membranes 2005*, Stuttgart, 2005b.
- Pauletti, R. M. O.; Guirardi, D. M.; Chivante, M. R. P. O método da relaxação dinâmica para a análise estática não-linear de estruturas de cabos e membranas. *CMNE/CILAMCE*, Porto, 2007.
- Pauletti, R. M. O.; Pappalardo, A. Jr.; Guirardi, D. M. The method of dynamic relaxation for the static nonlinear analysis of cable and membrane structures. *IASS-SLTE 2008 – 3rd Latin American Symposium on Tensile-Structures*, Acapulco, 2008a.
- Pauletti, R. M. O. Static Analysis of Taut Structures. In *Oñate E, Kröpling B, Orgs. Textile Composites and Inflatable Structures II*, Springer-Verlag 117–139, 2008b.

- Pauletti, R. M. O.; Guirardi, D. M.; Gouveia, S. Modeling sliding cables and geodesic lines through dynamic relaxation. *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, IASS Symposium*, Valencia, 2009a.
- Pauletti, R. M. O. e Martins, C. B. Modelling the slippage between membrane and border cables. *Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures, IASS Symposium*, Valencia, 2009b.
- Pauletti, R. M. O. e Guirardi, D. M. . Direct area minimization through dynamic relaxation. In: *International Association for Shell and Spatial Structures (IASS) Symposium 2010 Spatial Structures Permanent and Temporary*, Xangai, 2010.
- Pimenta, P. M. Análise não-linear de treliças espaciais. *Boletim Técnico da EPUSP – BT/PEF-8604*, 1986.
- Qiang, S. An adaptive dynamic relaxation method for nonlinear problems. *Computers and Structures* **30** 855–859, 1988.
- Ramesh, G.; Krishnamoorthy, C. S. Geometrically non-linear analysis of plates and shallow shells by dynamic relaxation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **123** 15–32, 1995.
- Rezaiee-pajand, M.; Kadhodayan, M.; Alamatian, J. e Zhang, L.C. A new method of fictitious viscous damping determination for the dynamic relaxation method. *Computers and Structures* **89** 783–794, 2011.
- Rodriguez, G. P. V. S. Sobre a integração direta de sistemas de equações diferenciais ordinárias lineares de 1ª e 2ª ordem. *Dissertação de Mestrado*. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1996.
- Rushton, K. R. Dynamic relaxation solutions of elastic plate problems. *The Journal of Strain Analysis for Engineering Design* **3** 23–32, 1969.
- Salehi, M.; Aghaei, H. Dynamic relaxation large deflection analysis of non-axisymmetric circular viscoelastic plates. *Computers and Structures* **83** 1878–1890, 2005.

Shugar, T. A. A Numerical Study of Automated Dynamic Relaxation for Nonlinear Static Tensioned Structures. *Naval Civil Engineering Lab., Port Hueneme, Ca. Technical Note 1778*, 1987.

Stanuszek M. FE analysis of large deformations of membranes with wrinkling. *Finite Elements in Analysis and Design* **39**, 599–618, 2003.

Souza Lima, V. M.; Brasil, R. M. L. R. F. On the tangent stiffness matrix of plane and space trusses. *XXVIII Jornadas Sul-Americanas de Engenharia Estrutural*, EESC-USP **4** 1417–1426, São Carlos, 1997.

Stein, Keith; Benney, Richard; Kalro, Vinay; Tezduyar, Tayfun E.; Leonard, John; Accorsi, Michael. Parachute fluid-structure interactions: 3-D computation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* **190** 373-386, 2000.

Tabarrok B.; Qin, Z. Dynamic analysis of tension structures. *Computers and Structures* **62** 467–474, 1997.

Tarandi, T. A program for computation of thick pressure vessels based on dynamic relaxation. *Nuclear Engineering And Design* **4** 329–330, Amsterdam, 1966.

Topping, B.H.V. e Ivanyi, P. Computer Aided Design of Cable-membrane Structures. *Saxe-Coburg Publications*, 2007.

Tu, X.; Andrade, J. E. Criteria for static equilibrium in particulate mechanics computations. *International journal for numerical methods in engineering* **75** 1581–1606, 2008.

Underwood, P. Dynamic relaxation. In: Belytschko, T., Hughes, T.J.R., Eds., *Computational Methods for Transient Analysis*. Elsevier, Amsterdam, 245-256, 1983.

Valdés, J.G.; Miquel J.; Oñate, E. Nonlinear finite element analysis of orthotropic and prestressed membrane structures. *Finite Elements in Analysis and Design* **45** 395-405, 2009.

Wakefield, D. S. Engineering analysis of tension structures– theory and practice. *Engineering Structures* **21** 680–690, 1999.

Wood, R. D. A simple technique for controlling element distortion in dynamic relaxation form-finding of tension membranes. *Computers and Structures* **80** 2115–2120, 2002.

Wu, S. Adaptive dynamic relaxation technique for static analysis of catenary mooring. *Marine Structures* **8** 585–599, 1995.

Wu, T.Y. e Ting, C.E. Large deflection analysis of 3D membrane structures by a 4-node quadrilateral intrinsic element. *Thin-Walled Structures* **46** 261–275, 2008.

Zhang, L. G.; Yu, T. X. Modified adaptive Dynamic Relaxation method and its application to elastic-plastic bending and wrinkling of circular plates *Computers and Structures* **33** 609–614, 1989.

Zhang, W.; Leonard, J. L.; Accorsi, M. L. Analysis of geometrically nonlinear anisotropic membranes: theory and verification *Finite Elements in Analysis and Design* **41** 963–988, 2005.

Ziegler, R.; Wagner, W.; Bletzinger, K.U. A finite element model for the analysis of wrinkled membrane structures, *Int. J. Space Struct.* 18, **1**, 1–14, 2003.

Zienkiewicz, O. C.; Taylor, R. L. The Finite Element Method. *Mac-Graw-Hill*, 4th Ed, London, 1989.