FABIO CONDADO BARBOSA

ANÁLISE DINÂMICA NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS ABATIDAS

São Paulo

2017

FABIO CONDADO BARBOSA

Análise dinâmica não linear de estruturas abatidas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil

São Paulo

2017

FABIO CONDADO BARBOSA

Análise dinâmica não linear de estruturas abatidas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Orientador: Prof. Dr. Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil

São Paulo

2017

Catálogo-na-publicação

Barbosa, Fabio Condado

Análise dinâmica não linear de estruturas abatidas / F. C. Barbosa -- São Paulo, 2017.
80 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. ESTABILIDADE ESTRUTURAL 2. DINÂMICA DAS
ESTRUTURAS I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t.

Nome: BARBOSA, Fabio Condado

Título: Análise dinâmica não linear de estruturas abatidas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Aprovado em:

Banca Examinadora

Prof. Dr.

Instituição:

Julgamento:

Prof. Dr.

Instituição:

Julgamento:

Prof. Dr.

Instituição:

Julgamento:

RESUMO

As estruturas, particularmente na engenharia civil, podem apresentar ruína quando atingem sua capacidade resistente ou quando perdem sua estabilidade, sendo, portanto atribuição básica do engenheiro de estruturas o estudo de ambas as situações. A instabilidade de uma estrutura pode surgir de dois modos, a saber: por ocorrência de uma bifurcação de equilíbrio ou por ocorrência de um ponto limite, também conhecido por snap-through, onde o aumento do carregamento provoca uma diminuição da rigidez da estrutura, até que esta se anula no ponto limite (REIS; CAMOTIM, 2012).

Estruturas como arcos, treliças e calotas esféricas abatidas, presentes em grandes coberturas, são tipos de estruturas que podem apresentar esta instabilidade, em que há a passagem dinâmica da estrutura para uma configuração de equilíbrio afastada e estável, saltando para essa configuração pós-crítica envolvendo grandes deslocamentos e inversão da curvatura. Se, no entanto, o carregamento é dinâmico, como, por exemplo, harmônico, a resposta do sistema adquire uma grande riqueza de possíveis comportamentos, em função da amplitude e frequência desse carregamento. As respostas podem resultar vibrações periódicas de vários períodos diferentes, quase periódicas, caóticas etc.

Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo da estabilidade estática e dinâmica do problema da treliça simples de duas barras (treliça de Von Mises) e do arco abatido senoidal, de comportamento elástico linear, com o estabelecimento das equações de equilíbrio na configuração deformada, i.e., levando em conta a não linearidade geométrica. A avaliação da resposta, bem como a caracterização de sua estabilidade, se dará pela apresentação das cargas críticas de instabilidade do sistema perfeito, exibição do comportamento de pós-instabilidade e, com a integração numérica do modelo matemático, o estudo geométrico dado pelos planos de fase, mapas de Poincaré, diagramas de bifurcação e fronteira de estabilidade.

Palavras-chave: estabilidade estrutural, dinâmica das estruturas.

ABSTRACT

Structures, particularly in civil engineering, can ruin when they reach their strength capacity or when they lose their stability. So, it is the basic assignment of the structural engineer to study both situations. The instability of a structure can arise in two ways, namely: by the occurrence of bifurcation of equilibrium or by the occurrence of a snap-through, where an increase of the loading causes a decrease in structure stiffness, until the stiffness is annulled in the limit point (REIS, CAMOTIM, 2012).

Structures such as arches, trusses and domes, present in large roofs, are types of structures that may present this kind of instability, in which there is the dynamic passage of the structure to a far away stable equilibrium configuration, jumping to this post-critical configuration involving large displacements and reversal of the curvature. If, however, the load is dynamic, such as harmonic, the response of the system acquires a great wealth of possible behaviors, depending on the amplitude and frequency of this loading. The responses may result in periodic vibrations of several different periods, almost periodic, chaotic, etc.

This work intends to study the static and the dynamic stability of the Von Mises truss and the shallow arc of linear elastic behavior, with the establishment of the equilibrium equations in the deformed configuration, i.e., taking into account the geometric non-linearity. The evaluation of the response, as well as the characterization of its stability, will be done by numerical integration of the mathematical model and geometric study of the phase planes, Poincaré maps, bifurcation diagrams and stability border.

Key words: structural stability, structural dynamics.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1: Equilíbrio estável, indiferente e instável.....	11
Figura 2: Colapso do domo abatido do auditório do C.W. Post College.	12
Figura 3: Treliça de Von Mises com dois graus de liberdade.	17
Figura 4: Gráfico para localização dos modos de instabilidades da treliça de Von Mises para deformações quadráticas.....	22
Figura 5: Trajetórias de equilíbrio para $\alpha=56,3$ $\alpha=61,6$ $\alpha=75,1$	23
Figura 6: Arco abatido senoidal biarticulado com carregamento senoidal.	25
Figura 7: Configuração deformada para a primeira coordenada generalizada.	25
Figura 8: Configuração deformada para a segunda coordenada generalizada.	25
Figura 9: Segmentos infinitesimais.....	26
Figura 10: Variação da energia potencial para p_0 igual 0 e $p_0, cr2$, respectivamente.	30
Figura 11: Gráfico parcial para localização dos modos de instabilidades do arco abatido.	32
Figura 12: Gráfico para localização total dos modos de instabilidades do arco abatido.....	33
Figura 13: Trajetória de equilíbrio para arco abatido com $il = 0,091$ e $r = 0,22$	33
Figura 14: Trajetória de equilíbrio para arco abatido com $il = 0,091$ e $r = 0,16$	34
Figura 15: Trajetória de equilíbrio da bifurcação para arco abatido com $il = 0,091$ e $r = 0,16$	34
Figura 16: Arco abatido com carregamento senoidal imperfeito.	35
Figura 17: Gráfico parcial para localização dos modos de instabilidades do arco abatido com carregamento constante.....	39
Figura 18: Alteração da frequência natural conforme aumento do carregamento.	44
Figura 19: Variação da energia potencial.	44
Figura 20: Plano de fase para $\Psi = 0$	45
Figura 21: Plano de fase para $\Psi = 0,1$	45
Figura 22: Plano de fase para $\Psi = 0,2$	46
Figura 23: Plano de fase para $\Psi = 0,3$	46
Figura 24: Plano de fase para $\Psi = 0,38$	46
Figura 25: Plano de fase com amortecimento para $\Psi = 0$	47
Figura 26: Plano de fase com amortecimento para $\Psi = 0,1$	47
Figura 27: Plano de fase com amortecimento para $\Psi = 0,3$	48
Figura 28: Alteração da frequência natural conforme aumento do carregamento.	51

Figura 29: Plano de fase para $\psi = 0$.	51
Figura 30: Plano de fase para $\psi = 0,1$.	52
Figura 31: Plano de fase para $\psi = 0,2$.	52
Figura 32: Plano de fase para $\psi = 0,3$.	52
Figura 33: Plano de fase para $\psi = 0,39$.	53
Figura 34: Plano de fase com amortecimento para $\psi = 0$.	53
Figura 35: Plano de fase com amortecimento para $\psi = 0,1$.	54
Figura 36: Plano de fase com amortecimento para $\psi = 0,3$.	54
Figura 37: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,4$.	56
Figura 38: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,5$.	56
Figura 39: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,6$.	57
Figura 40: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,7$.	57
Figura 41: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,8$.	57
Figura 42: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,9$.	58
Figura 43: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1$.	58
Figura 44: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,1$.	58
Figura 45: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,2$.	59
Figura 46: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,3$.	59
Figura 47: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,4$.	59
Figura 48: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,2$ e $\Omega = 1,4$.	60
Figura 49: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,314$ e $\Omega = 1,4$.	60
Figura 50: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,329$ e $\Omega = 1,4$.	61
Figura 51: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,335$ e $\Omega = 1,4$.	61
Figura 52: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,36$ e $\Omega = 1,4$.	62
Figura 53: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,4$ e $\Omega = 1,4$.	62
Figura 54: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,4$.	63
Figura 55: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,5$.	63
Figura 56: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,6$.	63
Figura 57: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,7$.	64
Figura 58: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,8$.	64
Figura 59: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,9$.	64
Figura 60: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1$.	65
Figura 61: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,1$.	65

Figura 62: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,2$	65
Figura 63: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,3$	66
Figura 64: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,4$	66
Figura 65: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,2$ e $\Omega = 1,4$	67
Figura 66: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,308$ e $\Omega = 1,4$	67
Figura 67: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,34$ e $\Omega = 1,4$	68
Figura 68: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,36$ e $\Omega = 1,4$	68
Figura 69: Fronteira de estabilidade para $\Psi = 0$	69
Figura 70: Fronteira de estabilidade para $\Psi = 0,2$	69
Figura 71: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,4$	70
Figura 72: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,5$	71
Figura 73: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,6$	71
Figura 74: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,7$	71
Figura 75: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,8$	72
Figura 76: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,9$	72
Figura 77: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1$	72
Figura 78: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,1$	73
Figura 79: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,2$	73
Figura 80: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,3$	73
Figura 81: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,4$	74
Figura 82: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,2$ e $\Omega = 1,4$	74
Figura 83: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,27$ e $\Omega = 1,4$	75
Figura 84: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,333$ e $\Omega = 1,4$	75
Figura 85: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,35$ e $\Omega = 1,4$	76
Figura 86: Fronteira de estabilidade para $\psi = 0,2$ e $r = 0,126$	76

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal de barra;
B	Distancia de apoio ao centro da treliça;
c	Amortecimento viscoso;
E	Módulo de elasticidade longitudinal;
f	Magnitude da força vertical de excitação para arco;
F	Magnitude da força vertical de excitação para treliça;
ε	Tensor de deformação;
g	Aceleração da gravidade;
h	Altura inicial arco;
H	Altura inicial treliça;
i	Raio de giração da seção transversal de barra;
I	Inercia da seção transversal de barra;
κ	Parâmetro de assimetria de carregamento estático;
l	Distancia entre apoios do arco;
L	Comprimento de barra;
m	Massa distribuída da barra do arco;
M	Massa concentrada para treliça;
N	Força não conservativa;
ω_w	Frequência natural;
Ω	Frequência da força vertical de excitação;
p	Carga estática vertical para arco;
P	Carga estática vertical para treliça;
ξ	Taxa de amortecimento;
q	Coordenada generalizada adotada para arco;
Q	Coordenada generalizada adotada para treliça;
$\psi \lambda$	Parâmetro de carregamento estático para arco;
Ψ	Parâmetro de carregamento estático para treliça;
r	Parâmetro r que corresponde a uma relação entre rigidez axial, rigidez a flexão e abatimento do arco;
$t \tau$	Tempo;
T	Energia cinética;

U	Energia de deformação elástica de barra;
v, w	Coordenada generalizada adimensionalizada;
V	Energia potencial;
W	Energia potencial das forças externas.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	11
1.1	Revisão bibliográfica.....	13
1.2	Objetivos	16
2	ESTABILIDADE ESTÁTICA DE TRELIÇAS E ARCOS ABATIDOS	17
2.1	Treliça de Von Mises	17
2.2	Arco senoidal abatido	24
2.3	Arco abatido senoidal imperfeito	35
2.4	Arco abatido senoidal com carregamento constante	37
3	VIBRAÇÃO LIVRE DE TRELIÇAS E ARCOS ABATIDOS	41
3.1	Treliça de Von Mises	41
3.2	Arco senoidal abatido	48
4	VIBRAÇÃO FORÇADA DE TRELIÇAS E ARCOS ABATIDOS	55
4.1	Treliça de Von Mises	55
4.2	Arco senoidal abatido	69
5	CONCLUSÕES.....	77
	REFERÊNCIAS	78

1 INTRODUÇÃO

A engenharia de estruturas tem como ocupação fundamental duas questões: qual é a resposta de uma estrutura quando submetida a solicitações externas, e qual é a característica desta resposta. Para responder a segunda questão deve-se estudar o movimento desta estrutura ou, caso a estrutura tenha efeitos dinâmicos negligenciáveis, a estabilidade do equilíbrio (SIMITSES, 1986).

A noção de estabilidade parece sempre estar associada ao conceito de equilíbrio, na medida em que é utilizada para classificar configurações de equilíbrio. Assim, uma estrutura submetida a um sistema de forças exteriores, exibe uma configuração de equilíbrio caracterizada pelos valores dos deslocamentos. A estabilidade desta configuração pode ser avaliada através do comportamento da estrutura após sofrer uma perturbação, sendo estável se retornar a configuração não perturbada ou instável caso contrário.

A estabilidade do equilíbrio pode ser entendida intuitivamente através de um problema clássico da mecânica dos corpos rígidos submetido à ação da gravidade (g), ilustrado na Fig.1 (REIS E CAMOTIM, 2012). No primeiro caso a bola ali representada após sofrer uma perturbação volta à posição de equilíbrio inicial, então se diz que o equilíbrio é estável. No último caso a bola após ser perturbada se distancia da posição inicial, então se diz que o equilíbrio é instável. No caso intermediário, onde apenas não há possibilidade de retorno à condição inicial, se diz que o equilíbrio é indiferente.

Figura 1: Equilíbrio estável, indiferente e instável.

A transição entre configurações de equilíbrio estáveis e instáveis corresponde à instabilidade estrutural, podendo surgir de dois modos nas estruturas: por bifurcação do equilíbrio perto da configuração não perturbada ou por ocorrência de um ponto limite sem qualquer bifurcação anterior, não existindo um estado alternativo de equilíbrio nas proximidades da configuração não perturbada. No primeiro caso, a estrutura desloca-se de um modo quando solicitada a

carregamento crescente e então, numa carga dita crítica abandona repentinamente esse modo, que se torna instável, indo buscar outro. No segundo caso o deslocamento se dá de um mesmo modo desde o início do carregamento até que a carga limite é atingida.

Estruturas como treliças, arcos e calotas esféricas abatidas, largamente utilizadas na indústria da construção civil, petrolífera e aeroespacial, podem apresentar os dois tipos de instabilidade, sendo, ainda, de maior interesse devido ao comportamento altamente não linear e a perda de rigidez devido a elevadas tensões de compressão. Na construção civil estas estruturas estão presentes em grandes vãos livres, como em coberturas e em pontes, sendo um sistema estrutural que possui vantagens econômicas e estéticas. No entanto, a avaliação errônea destas instabilidades pode levar a acidentes de grandes proporções, e.g., domo abatido do auditório do C.W. Post College em Nova Iorque, que ocorreu em 1978, ver Fig. 2 (CASTRO, 2014), com aproximadamente 52 m de distância entre apoios e 7 m de altura na seção central.

Figura 2: Colapso do domo abatido do auditório do C.W. Post College.

Adicionalmente, quando submetido a um carregamento dinâmico, a resposta do sistema adquire uma grande riqueza de possíveis comportamentos, em função da amplitude e frequência desse carregamento. Resultados analíticos e experimentais indicam, por exemplo, oscilações sub-harmônicas e superharmônicas, bifurcações de múltiplos períodos, oscilações coexistentes de pequena e grande amplitude em regiões ressonantes, vibrações caóticas, saltos dinâmicos e escape do vale potencial que causam perda de estabilidade e resultam em falta de segurança estrutural (PINTO; GONÇALVES, 2002).

Os problemas de treliças e arcos abatidos são ramificações importantes da análise dinâmica não linear de estruturas abatidas uma vez que é possível obter melhor compreensão do comportamento de estruturas mais complexas, como cascas, sendo os produtos obtidos neste estudo mais importantes que os resultados imediatos poderiam sugerir. A qualidade altamente genérica e interdisciplinar dos desenvolvimentos em dinâmica não linear ganhos nas últimas

poucas décadas tem permitido miríades de aplicações em quase todas as áreas da ciência e da tecnologia, e mesmo além. Onde a modelagem e análise de complexos fenômenos não lineares, possivelmente caóticos, se fazem necessárias, seus métodos podem ter um papel chave.

Caos e dinâmica não-linear se desenvolveram como um campo emergente com fundamentos na engenharia e ciências aplicadas. Aplicações modeladas analiticamente, simuladas numericamente e realizadas experimentalmente levam a novas capacitações e desafios. Deve-se ter em mente que vibrações de sistemas reais são mais bem descritas como multifrequência, variáveis no tempo, estocásticas etc. Modelos lineares de banda estreita estão fadados a serem altamente ineficientes sob essas circunstâncias. Modelos não lineares são capazes de responder sobre uma larga faixa de frequências e amplitudes, sugerindo uma intrínseca capacidade de desempenho eficiente em casos reais.

1.1 Revisão bibliográfica

A análise dinâmica não linear de estruturas abatidas tem sido objeto de estudo de vários pesquisadores ao longo dos anos, sendo apresentados alguns estudos realizados.

Hsu (1967) apresentou uma análise que permite determinar as possíveis configurações de equilíbrio e caracterizar a dinâmica estrutural, descobrindo que em arcos parabólicos e senoidais engastados não há possibilidade de ocorrência de instabilidade elástica tipo ponto limite.

Sankar e Ariaratnam (1971) estudaram a estabilidade estocástica de arcos senoidais abatidos submetidos a carregamentos de variação randômica, indicando a sensibilidade que este tipo de estrutura apresenta, de modo que as discrepâncias entre os valores de cargas limites obtidos em teoria dos obtidos em ensaios podem ser explicados, em parte, por distúrbios causados pela própria máquina de teste.

Cassidy e Plaut (1981) estudaram os efeitos da interação de cargas concentradas e distribuídas na carga de flambagem de arcos abatidos.

Plaut e Hsieh (1985) apresentaram um estudo sobre oscilações e instabilidade de arcos abatidos sob excitação de duas frequências, analisando os efeitos da altura inicial e da

excitação na carga crítica, indicando que podem ocorrer vários ciclos limites e em alguns casos caos.

Scholz (1990) apresentou sua contribuição à estabilidade no plano de arcos abatidos, fornecendo regras práticas de projeto pela limitação do índice de esbeltez, permitindo que o dimensionamento fique dado por regras simples da teoria rígido-plástica.

Sabir (1993) apresentou um estudo sobre vibrações livres de grande amplitude de arcos abatidos utilizando uma combinação dos métodos das diferenças finitas com o método dos elementos finitos. Obtém como resultado que, para uma dada frequência, a amplitude de vibração é menor quando o arco está se movendo para longe do centro de curvatura do que quando o arco se move para o centro de curvatura.

Tien et al. (1994) examinaram as bifurcações locais, globais e o comportamento caótico que aparecem em arcos abatidos submetidos a excitação com ressonância interna 1:1 e 1:2. Foi empregado o método de perturbação de Melnikov, sem amortecimento, levando à dinâmica caótica no sentido da ferradura de Smale. O comportamento caótico é resultado da existência de orbitas heteroclínicas a um toro invariante normalmente hiperbólico, que corresponde a órbita periódica hiperbólica do sistema médio.

Levitas et al. (1997) analisaram a estabilidade dinâmica global de arcos abatidos empregando mapeamento de seções de Poincaré.

Bi e Dai (2000) revelaram o comportamento dinâmico de arcos abatidos sujeitos a excitação periódica com ressonância interna utilizando integração numérica para obter bifurcações que levam ao caos. Concluíram que quando o movimento do modo desacoplado perde a estabilidade passasse a ter movimento do modo acoplado por simples bifurcação, que se torna modular sofrendo uma bifurcação de Hopf. O sistema atinge caos por uma sequência de bifurcações com duplicação de períodos.

Pinto e Gonçalves (2002) estudaram o comportamento dinâmico não linear de um arco abatido sob o efeito de momentos fletores aplicados ao longo do arco como um controle ativo. Como resultado verificaram que a metodologia de controle não apenas conseguiu mitigar os

efeitos do carregamento dinâmico na amplitude de vibração como aumentou a capacidade de suporte do arco.

Mallon et al. (2006) analisaram a flambagem dinâmica de arcos abatidos com carregamentos de impacto considerando os efeitos da forma do arco. Concluíram que os efeitos das imperfeições têm influencia significativa na carga de impacto dinâmica de flambagem. Adicionalmente traçaram uma correspondência entre o carregamento estático e o dinâmico, podendo-se reduzir o tempo de análise.

Breslavsky et al. (2008) apresentaram uma análise da instabilidade tipo ponto limite de um arco abatido usando modos não lineares. São utilizados para discretização dois graus de liberdade e dois modos não lineares, que tem sua estabilidade determinada com métodos específicos. No fim, fazendo a integração da equação diferencial com o método das diferenças finitas, se confirma a existência de modos não lineares na vibração de arcos.

Chandra (2013) realizaram uma investigação numérica da instabilidade tipo ponto limite de arcos abatidos submetidos a excitações periódicas, apresentando como resultado as fronteiras que separam a ocorrência de ponto limite no espaço dos parâmetros da excitação.

Castro (2014) apresentou uma formulação não linear exata para um grupo de treliças piramidais abatidas, de modo a investigar a perda de estabilidade e o comportamento das vibrações não lineares destas estruturas quando submetidas a cargas estáticas e dinâmicas. Concluiu que o aumento do carregamento estático provoca diminuição do vale de energia potencial da condição pré-crítica e da capacidade de resistir a perturbações iniciais sem que haja perda de estabilidade, devendo este tipo de estrutura receber atenção especial por parte do projetista.

Yu e Chen (2014) apresentaram um estudo sobre as orbitas homoclínicas em arcos abatidos submetidos à excitação periódica com ressonância interna 1:1 e externa, utilizando o método das múltiplas escalas de tempo. Foram utilizados os métodos da perturbação geométrica singular e o método de Melnikov para mostrar a existência de one-bump e de multi-bump nas orbitas homoclínicas, conectando variedades lentas e rápidas, implicando a existência de caos com amplitude modulada no sentido da ferradura de Smale.

1.2 Objetivos

Este trabalho tem como objetivo fazer um estudo da estabilidade estática e dinâmica do problema da treliça simples de duas barras (treliça de Von Mises) e do arco abatido senoidal, de comportamento elástico linear, com o estabelecimento das equações de equilíbrio na configuração deformada, i.e., levando em conta a não linearidade geométrica. A avaliação da resposta, bem como a caracterização de sua estabilidade, se dará pela apresentação das cargas críticas de instabilidade do sistema perfeito, exibição do comportamento de pós-instabilidade e, com a integração numérica do modelo matemático, o estudo geométrico dado pelos planos de fase, mapas de Poincaré, diagramas de bifurcação e fronteira de estabilidade.

2 ESTABILIDADE ESTATICA DE TRELIÇAS E ARCOS ABATIDOS

Neste capítulo são apresentados os estudos de estabilidade para treliças de duas barras, também chamada de treliça de Von Mises, e para arcos abatidos de forma senoidal. Para todos os casos o problema será tratado como conservativo, sendo o material considerado elástico linear, obedecendo à lei de Hooke, de modo que seja possível utilizar o princípio de estacionaridade da energia potencial. A estabilidade da configuração de equilíbrio é obtida aplicando o princípio da mínima energia potencial, o qual estipula que uma configuração de equilíbrio é estável sempre que a energia potencial do sistema aí apresente um mínimo relativo. Adicionalmente sempre se consideram módulo de elasticidade e seções transversais constantes.

2.1 Treliça de Von Mises

A treliça de Von Mises pode ser representada como na Fig. 3.

Figura 3: Treliça de Von Mises com dois graus de liberdade.

O comprimento inicial L_0 das barras pode ser dado por:

$$L_0 = \sqrt{H^2 + B^2}. \quad (2.1)$$

Os comprimentos finais das barras L_1 e L_2 , i.e., após os deslocamentos das coordenadas generalizadas Q_1 e Q_2 são dados por:

$$L_1 = \sqrt{(H - Q_1)^2 + (B + Q_2)^2}, \quad L_2 = \sqrt{(H - Q_1)^2 + (B - Q_2)^2}. \quad (2.2)$$

A energia de deformação elástica das barras é dada por:

$$U = \frac{1}{2} \frac{EA}{L_0} \delta^2 = \frac{1}{2} EA L_0 \varepsilon^2. \quad (2.3)$$

Para facilitar os cálculos será utilizada como medida de deformações o tensor quadrático de Green-Lagrange, que no caso unidimensional fica:

$$\varepsilon = \frac{1}{2} \left(\frac{L_n^2 - L_0^2}{L_0^2} \right), \quad n = 1, 2. \quad (2.4)$$

É importante ressaltar que as medidas de deformação são determinantes no estudo de estabilidade. Lima e Brasil (1999) realizam uma análise de estabilidade com as medidas de deformação de engenharia, de Green-Lagrange e logarítmicas, chegando a valores bastante distintos de cargas críticas para o mesmo modelo estrutural. A energia potencial total vale:

$$V = \frac{1}{2} EA L_0 \left\{ \left[\frac{(H-Q_1)^2 + (B+Q_2)^2 - L_0^2}{L_0^2} \right]^2 + \left[\frac{(H-Q_1)^2 + (B-Q_2)^2 - L_0^2}{L_0^2} \right]^2 \right\} - PQ_1. \quad (2.5)$$

Ou fatorando:

$$V = \frac{1}{8} \frac{EA}{L_0^3} \{ [Q_1(Q_1 - 2H) + Q_2(Q_2 + 2B)]^2 + [Q_1(Q_1 - 2H) + Q_2(Q_2 - 2B)]^2 \} - PQ_1. \quad (2.6)$$

Fazendo as expansões a energia potencial total torna-se:

$$V = \frac{1}{8} \frac{EA}{L_0^3} \{ Q_1^4 - 4HQ_1^3 + 2Q_1^2Q_2^2 + 4BQ_1^2Q_2 + 4H^2Q_1^2 - 4HQ_1Q_2^2 - 8HBQ_1Q_2 + Q_2^4 + 4BQ_2^3 + 4B^2Q_2^2 + Q_1^4 - 4HQ_1^3 + 2Q_1^2Q_2^2 - 4BQ_1^2Q_2 + 4H^2Q_1^2 - 4HQ_1Q_2^2 + 8HBQ_1Q_2 + Q_2^4 - 4BQ_2^3 + 4B^2Q_2^2 \} - PQ_1. \quad (2.7)$$

Simplificando:

$$V = \frac{1}{4} \frac{EA}{L_0^3} \{ Q_1^4 - 4HQ_1^3 + 2Q_1^2Q_2^2 + 4H^2Q_1^2 - 4HQ_1Q_2^2 + Q_2^4 + 4B^2Q_2^2 \} - PQ_1 \quad (2.8)$$

Aplicando a condição de equilíbrio, i.e., derivada parcial da energia potencial total em relação à coordenada generalizada igual a zero, têm-se:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_1} = \frac{EA}{L_0^3} (Q_1^3 - 3HQ_1^2 + Q_1Q_2^2 + 2H^2Q_1 - HQ_2^2) - P = 0. \quad (2.9)$$

$$\frac{\partial V}{\partial Q_2} = \frac{EA}{L_0^3} (Q_1^2Q_2 - 2HQ_1Q_2 + Q_2^3 + 2B^2Q_2) = 0. \quad (2.10)$$

A derivada parcial da energia potencial total em relação à segunda coordenada generalizada só pode ser zero caso:

$$\frac{\partial V}{\partial Q_2} = 0 \text{ se } \begin{cases} Q_2 = 0 \\ Q_1^2 - 2HQ_1 + Q_2^2 + 2B^2 = 0 \end{cases} \quad (2.11)$$

A primeira condição, i.e., $Q_2 = 0$, implica na derivada parcial da energia potencial total em relação à primeira coordenada generalizada:

$$P = \frac{EA}{L_0^3} (Q_1^3 - 3HQ_1^2 + 2H^2Q_1). \quad (2.12)$$

Que representa a trajetória de equilíbrio do ponto limite. As três raízes da equação 2.12 são zero, H e $2H$, representando as três posições de equilíbrio com P nulo. Para estudar a estabilidade da trajetória de equilíbrio é realizada a segunda derivada da energia potencial em relação à coordenada generalizada:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial Q_1^2} = \frac{EA}{L_0^3} (3Q_1^2 - 6HQ_1 + 2H^2). \quad (2.13)$$

A estabilidade da trajetória fica classificada por trecho, assim para:

- $H \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) > Q_1 > H \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1^2} > 0$
- $H \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) > Q_1 < H \left(1 + \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1^2} < 0$
- $Q_1 = H \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \rightarrow \frac{\partial^2 V}{\partial Q_1^2} = 0$

No primeiro caso, a segunda derivada é maior que zero, portanto tem-se um mínimo da energia potencial (concavidade para cima) e o equilíbrio é estável. Para o segundo caso a derivada é menor que zero, apresentando um máximo da energia potencial (concavidade para baixo), portanto o equilíbrio é instável. Nos pontos onde a segunda derivada é nula nada se pode dizer a respeito, devendo-se proceder com a terceira derivada:

$$\frac{\partial^3 V}{\partial Q_1^3} = \frac{EA}{L_0^3} (6Q_1 - 6H). \quad (2.14)$$

Que não há um mínimo da energia potencial e o equilíbrio é instável. Fazendo a derivada parcial de P em relação à coordenada generalizada Q_1 e igualando a zero, obtêm-se as duas coordenadas dos pontos limites.

$$\frac{\partial P}{\partial Q_1} = 0 \rightarrow 3Q_1^2 - 6HQ_1 + 2H^2 = 0. \quad (2.15)$$

$$Q_1 = \frac{6H \pm \sqrt{36H^2 - 24H^2}}{6} = H \left(1 \pm \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \cong \begin{cases} 0,42265H \\ 1,57735H \end{cases} \quad (2.16)$$

A carga crítica é encontrada substituindo as coordenadas na função P .

$$P_{cr} = EA \frac{H^3}{L_0^3} \left[\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 - 3 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 2 \left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) \right] = EA \frac{H^3}{L_0^3} \frac{2\sqrt{3}}{9}. \quad (2.17)$$

A segunda condição, i.e., $Q_2 = \sqrt{-Q_1^2 + 2HQ_1 - 2B^2}$, implica na derivada parcial da energia potencial total em relação à primeira coordenada generalizada:

$$P = \frac{EA}{L_0^3} [Q_1^3 - 3HQ_1^2 + Q_1(-Q_1^2 + 2HQ_1 - 2B^2) + 2H^2Q_1 - H(-Q_1^2 + 2HQ_1 - 2B^2)]. \quad (2.18)$$

Compactamente:

$$P = \frac{EA}{L_0^3} (-2B^2Q_1 + 2HB^2). \quad (2.19)$$

Que representa a trajetória de equilíbrio da bifurcação simétrica instável. A carga crítica da bifurcação simétrica instável é encontrada na intersecção das funções P para $Q_2 = 0$. Assim tem-se:

$$\frac{EA}{L_0^3}(Q_1^3 - 3HQ_1^2 + 2H^2Q_1) = \frac{EA}{L_0^3}(-2B^2Q_1 + 2HB^2) \quad (2.20)$$

ou:

$$Q_1^3 - 3HQ_1^2 + 2H^2Q_1 + 2B^2Q_1 - 2HB^2 = 0. \quad (2.21)$$

Resolvendo em Q_1 , temos:

$$Q_1 = \frac{o}{3j} - j + H, \text{ onde } j = \sqrt[3]{\frac{d}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2}{4} + \frac{o^3}{27}}} \quad (2.22)$$

e

$$o = 2(H^2 + A^2) - 3H^2, \quad d = 0. \quad (2.23)$$

Substituindo Q_1 na equação de P encontraremos a carga crítica da bifurcação simétrica instável:

$$P_{cr} = \frac{EA}{L_0^3} 2B^2(H - Q_1). \quad (2.24)$$

Dos valores obtidos pode-se plotar as curvas de P em função do ângulo inicial, que corresponde ao abatimento da estrutura, como na Fig.4. A curva vermelha corresponde à instabilidade tipo ponto limite e a curva preta corresponde à bifurcação. É possível identificar que para valores de ângulo iniciais menores que aproximadamente 60 graus ($H/B < 1,70$) têm-se a instabilidade tipo ponto limite como fronteira de estabilidade, e caso o ângulo inicial tenha valores maiores que este, tem-se a bifurcação.

Figura 4: Gráfico para localização dos modos de instabilidades da treliça de Von Mises para deformações quadráticas.

Também é possível exibir as trajetórias de equilíbrio e de pós-instabilidade. A Fig.5 mostra três trajetórias de equilíbrio, em função do ângulo inicial, sendo de aproximadamente 56,3 ($H/B < 1,5$), 61,6 ($H/B < 1,85$) e 75,1 ($H/B < 3,75$) graus, respectivamente.

Figura 5: Trajetórias de equilíbrio para $\alpha=56,3$ $\alpha=61,6$ $\alpha=75,1$.

Novamente as trajetórias de equilíbrio em vermelho correspondem à instabilidade tipo ponto limite e a preta à bifurcação. A trajetória de equilíbrio da bifurcação representa a projeção no plano $P/EA - Q_1/H$, uma vez que $Q_2 \neq 0$ em todos os pontos, com exceção da intersecção.

No primeiro caso a instabilidade irá ocorrer por ponto limite a um nível de carregamento de aproximadamente $0,22EA$, já nos segundo e terceiros casos a instabilidade irá ocorrer por bifurcação, num nível de carregamento de aproximadamente $0,25EA$ e $0,12EA$. Em todos os casos é possível observar os três pontos de equilíbrio para $P=0$, i.e., $Q_1=0$, $Q_1=1$, $Q_1=2$, sendo que as soluções se encontram em $Q_1/H=1$ onde Q_2 toma o seu maior valor e o equilíbrio é instável.

2.2 Arco senoidal abatido

Neste segundo estudo de caso analisaremos o comportamento do arco abatido senoidal biarticulado elástico-linear com seção prismática. Este tipo de estrutura é notoriamente suscetível ao fenômeno de instabilidade por ponto limite com reversão dinâmica da configuração de equilíbrio. A função que caracteriza a configuração indeformada é dada por:

$$y_0(x) = h \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.25)$$

O carregamento também é dado por uma função com variação senoidal da forma:

$$p(x) = p_0 \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.26)$$

A Fig.6 ilustra o problema.

Figura 6: Arco abatido senoidal biarticulado com carregamento senoidal.

A configuração deformada pode ser discretizada por duas coordenadas generalizadas, dadas por funções harmônicas, com a primeira sendo a configuração simétrica e a segunda a assimétrica. A escolha das coordenadas generalizadas é válida teórica e experimentalmente, conforme relatado em Thompson e Hunt (1973).

$$\bar{y}(x) = (h - q_1) \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (2.27)$$

As Fig.7 e 8 representam as configurações deformadas no contínuo a partir as coordenadas generalizadas adotadas.

Figura 7: Configuração deformada para a primeira coordenada generalizada.

Figura 8: Configuração deformada para a segunda coordenada generalizada.

A energia de deformação, diferentemente do caso da treliça, possui contribuição axial e de flexão, dadas por:

$$U_{axial} = \frac{EA}{2} \int_0^l \varepsilon(x)^2 dx \quad , \quad U_{flexão} = \frac{EI}{2} \int_0^l k_x(x)^2 dx. \quad (2.28)$$

onde EA caracteriza a rigidez axial e EI a rigidez de flexão, constantes para o caso em estudo. A energia potencial das forças distribuídas é:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y) dx. \quad (2.29)$$

A deformação axial ε , para este caso de engenharia, é dada por:

$$\varepsilon(x) = \frac{ds - ds_0}{ds_0}. \quad (2.30)$$

Os segmentos infinitesimais ds_0 e $ds(t)$, indicados na Fig.9, são dados por:

$$ds_0 = \sqrt{1 + \frac{dy_0^2}{dx^2}} dx, \quad ds = \sqrt{1 + \frac{dy^2}{dx^2}} dx. \quad (2.31)$$

Figura 9: Segmentos infinitesimais.

Simplificadamente, os segmentos infinitesimais podem ser expandidos em série de Taylor, considerando os três primeiros termos:

$$ds_0 \cong \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}\right) dx, \quad ds \cong \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx. \quad (2.32)$$

Substituindo, a deformação axial ε torna-se:

$$\varepsilon(x) = \frac{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy^2}{dx^2}\right) dx - \left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}\right) dx}{\left(1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}\right) dx} = \frac{1}{2} \frac{\frac{dy^2}{dx^2} - \frac{dy_0^2}{dx^2}}{1 + \frac{1}{2} \frac{dy_0^2}{dx^2}}. \quad (2.33)$$

Aproximando, tem-se:

$$\varepsilon(x) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{dy^2}{dx} - \frac{dy_0^2}{dx} \right). \quad (2.34)$$

Como dito anteriormente, considera-se adequado à adoção de duas coordenadas generalizadas, de modo que é necessário reescrever a equação anterior. Assim a deformação axial fica:

$$\varepsilon(x) \cong \frac{1}{2} \left(\frac{d\bar{y}^2}{dx} - \frac{d\bar{y}_0^2}{dx} \right) \quad (2.35)$$

onde as derivadas são:

$$\frac{d\bar{y}}{dx} = \frac{\pi}{l} (h - q_1) \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi}{l} q_2 \cos \frac{2\pi x}{l} \quad , \quad \frac{d\bar{y}_0}{dx} = \frac{\pi}{l} h \cos \frac{\pi x}{l}. \quad (2.36)$$

Substituindo fica:

$$\varepsilon(x) = \frac{1}{2} \left\{ \left[\frac{\pi}{l} (h - q_1) \cos \frac{\pi x}{l} + \frac{2\pi}{l} q_2 \cos \frac{2\pi x}{l} \right]^2 - \frac{\pi^2}{l^2} h^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} \right\}. \quad (2.37)$$

Fazendo as expansões, têm-se:

$$\begin{aligned} \varepsilon(x, t) = \\ \frac{1}{2} \left\{ -2 \frac{\pi^2}{l^2} h q_1 \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{\pi^2}{l^2} q_1^2 \cos^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{4\pi^2}{l^2} q_2^2 \cos^2 \frac{2\pi x}{l} + \frac{2\pi^2}{l^2} (h - q_1) q_2 \cos \frac{\pi x}{l} \cos \frac{2\pi x}{l} \right\}. \end{aligned} \quad (2.38)$$

Para facilitar os cálculos será admitida a hipótese de que as deformações podem ser tomadas pelo seu valor médio ($\bar{\varepsilon}$). Assim têm-se a aproximação:

$$\int_0^l \varepsilon(x)^2 dx \cong \left[\frac{1}{l} \int_0^l \varepsilon(x) dx \right]^2 l \equiv \bar{\varepsilon} l. \quad (2.39)$$

Realizando a integral de $\varepsilon(x)$ chega-se:

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\pi^4}{16 l^4} \left[-2 h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2 \right]^2. \quad (2.40)$$

A energia de deformação axial fica:

$$U_{axial} \approx \frac{EA}{2} \bar{\varepsilon} l = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} \left[-2hq_1 + q_1^2 + 4q_2^2 \right]^2. \quad (2.41)$$

A curvatura k_x possa ser dada aproximadamente como a diferença entre a curvatura inicial e final, de modo que:

$$k_x(x) = -\frac{d^2(y_0 - y)}{dx^2} = \frac{d^2 y}{dx^2} - \frac{d^2 y_0}{dx^2}. \quad (2.42)$$

Considerando à adoção de duas coordenadas generalizadas a curvatura aproximada $\bar{k}_x$ passa a ser dada por:

$$\bar{k}_x(x) = \frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} - \frac{d^2 \bar{y}_0}{dx^2}, \quad (2.43)$$

onde as derivadas são:

$$\frac{d^2 \bar{y}}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} (h - q_1) \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4\pi^2}{l^2} q_2 \sin \frac{2\pi x}{l}, \quad \frac{d^2 \bar{y}_0}{dx^2} = -\frac{\pi^2}{l^2} h \sin \frac{\pi x}{l}. \quad (2.44)$$

Substituindo fica:

$$\bar{k}_x(x) = \frac{\pi^2}{l^2} q_1 \sin \frac{\pi x}{l} - \frac{4\pi^2}{l^2} q_2 \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (2.45)$$

A curvatura elevada ao quadrado é dada por:

$$\bar{k}_x^2(x) = \frac{\pi^4}{l^4} q_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{16\pi^4}{l^4} q_2^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{l} - \frac{8\pi^4}{l^4} q_1 q_2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (2.46)$$

A energia de deformação a flexão fica:

$$U_{flexão} = \frac{EI}{2} \int_0^l k_x(x)^2 dx. \quad (2.47)$$

$$U_{flexão} = \frac{\pi^4}{l^4} q_1^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} + \frac{16 \pi^4}{l^4} q_2^2 \sin^2 \frac{2\pi x}{l} - \frac{8 \pi^4}{l^4} q_1 q_2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l}. \quad (2.48)$$

Realizando a integral têm-se:

$$U_{flexão} = \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1^2 + 16 q_2^2). \quad (2.49)$$

A função de forma aplicada na caracterização das forças externas pode ser dada por:

$$p(\bar{y}_0 - \bar{y}) = p_0 \sin \frac{\pi x}{l} \left[h \sin \frac{\pi x}{l} - (h - q_1) \sin \frac{\pi x}{l} - q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \right]. \quad (2.50)$$

Expandindo, fica:

$$p(\bar{y}_0 - \bar{y}) = p_0 \left[q_1 \sin^2 \frac{\pi x}{l} - q_2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} \right]. \quad (2.51)$$

O trabalho das forças externas torna-se:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y) dx = p_0 \frac{l}{2} q_1. \quad (2.52)$$

Pode-se observar que não se realiza trabalho na segunda coordenada generalizada. A energia potencial total fica dada por:

$$V[q_1, q_2, p_0] = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} [-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2]^2 + \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1^2 + 16 q_2^2) - p_0 \frac{l}{2} q_1. \quad (2.53)$$

Figura 10: Variação da energia potencial para p_0 igual 0 e $p_{0,cr}/2$, respectivamente.

Observando a variação da energia potencial total na Fig.10, podem-se identificar dois vales, um a esquerda, chamado vale pré-crítico e o a direita, chamado vale pós-crítico. Nota-se que à medida que o carregamento externo cresce o vale pré-crítico diminui e o vale pós-crítico aumenta, até que o vale pré-crítico desaparece quando a carga for igual à de instabilidade.

Aplicando a condição de equilíbrio, i.e., derivada parcial da energia potencial total em relação à coordenada generalizada igual a zero, têm-se:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) (-h + q_1) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1 = p_0 \frac{l}{2}. \quad (2.54)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{2 l^3} q_2 (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) + 8 \frac{EI \pi^4}{l^3} q_2 = 0. \quad (2.55)$$

Neste caso é interessante tornar o problema adimensional, podendo fazer:

$$w = \frac{q_1}{h}, \quad v = \frac{q_2}{h}, \quad \lambda = \frac{4 l^4}{\pi^4 EA h^3} p_0, \quad i = \sqrt{\frac{l}{A}}, \quad r = \frac{i}{h}. \quad (2.56)$$

Assim as equações passam a:

$$4r^2 w + (w^2 - 2w + 4v^2) (w - 1) = \lambda, \quad (2.57)$$

$$16r^2v + (w^2 - 2w + 4v^2)v = 0. \quad (2.58)$$

A derivada parcial da energia potencial total em relação à segunda coordenada generalizada só pode ser zero caso:

$$\frac{\partial V}{\partial v} = 0 \text{ se } \begin{cases} v = 0 \\ w^2 - 2w + 4v^2 = -16r^2 \end{cases} \quad (2.59)$$

A primeira condição, i.e., $a_2 = 0$, implica na derivada parcial da energia potencial total em relação à primeira coordenada generalizada:

$$\lambda = 4r^2w + (w^2 - 2w)(w - 1). \quad (2.60)$$

Que representa a trajetória de equilíbrio do ponto limite. Fazendo a derivada parcial de λ em relação à coordenada generalizada w e igualando a zero, obtêm-se as duas coordenadas dos pontos limites.

$$\frac{\partial \lambda}{\partial w} = 0 \rightarrow w^2 - 2w + \frac{2}{3}[1 + 2r^2] = 0, \quad (2.61)$$

$$w = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}[1 + 2r^2]}.$$

A carga crítica é encontrada substituindo as coordenadas na função λ .

$$\lambda = 4r^2w + (w^2 - 2w)(w - 1). \quad (2.62)$$

A segunda condição implica na derivada parcial da energia potencial total em relação à primeira coordenada generalizada:

$$\lambda = 12r^2\left(\frac{4}{3} - w\right). \quad (2.63)$$

Que representa a trajetória de equilíbrio da bifurcação simétrica instável. A carga crítica da bifurcação simétrica instável é encontrada na intersecção das funções λ para $v = 0$. Assim tem-se:

$$4r^2w + (w^2 - 2w)(w - 1) = 12r^2 \left(\frac{4}{3} - w \right). \quad (2.64)$$

Resolvendo esta equação encontra-se o valor da coordenada a_1 :

$$w = 1 - \sqrt{1 - 16r^2}. \quad (2.65)$$

A carga crítica, obtida substituindo a coordenada w na função de λ , fica:

$$\lambda = 12r^2 \left(\frac{4}{3} - w \right) = r^2 (4 + 12\sqrt{1 - 16r^2}). \quad (2.66)$$

Também pode ser expressa sem a adimensionalização:

$$p_{0,cr} = \frac{\pi^4 EI h}{l^4} \left(1 + 3\sqrt{1 - 16 \left(\frac{i}{h} \right)^2} \right). \quad (2.67)$$

Dos valores obtidos pode-se plotar as curvas de p_0 em função do parâmetro r , que corresponde a uma relação entre rigidez axial, rigidez a flexão e abatimento da estrutura, como se pode observar na Fig.11. A curva vermelha corresponde à instabilidade tipo ponto limite e a curva preta corresponde à bifurcação. Quando a curva preta intercepta a vermelha, i.e., quando a bifurcação passa a ser limitante, a configuração do ponto limite passa a ter a linha tracejada. Este gráfico foi estabelecido para uma relação i/l igual a 0,091, mas estas curvas variam conforme este parâmetro.

Figura 11: Gráfico parcial para localização dos modos de instabilidades do arco abatido.

Assim a Fig.11 não revela a dependência do vão do arco, devendo para tanto observar na Fig.12. Neste gráfico restringimo-nos a mostrar apenas os valores limites, de modo que se pode observar a importância da relação i/l com os demais parâmetros.

Figura 12: Gráfico para localização total dos modos de instabilidades do arco abatido.

Tomando como exemplo a relação i/l igual a 0,091 e para r igual a aproximadamente 0,22 pode-se determinar a trajetória de equilíbrio dada na Fig.13. Novamente as trajetórias de equilíbrio em vermelho correspondem à instabilidade tipo ponto limite e a preta à bifurcação. Como era de se esperar pela análise da Fig. 11, o limitante é o ponto limite.

Figura 13: Trajetória de equilíbrio para arco abatido com $i/l = 0,091$ e $r = 0,22$.

Já para r igual a aproximadamente 0,16 com o mesmo valor de i/l o limitante passa a ser a bifurcação, como mostra a trajetória em preto da figura 14.

Figura 14: Trajetória de equilíbrio para arco abatido com $i/l = 0,091$ e $r = 0,16$.

A trajetória de equilíbrio da bifurcação, projetada no plano λ/w , pode ser visualizada na Fig.15, fazendo a projeção no plano $w-v$.

Figura 15: Trajetória de equilíbrio da bifurcação para arco abatido com $i/l = 0,091$ e $r = 0,16$.

Com o exposto pode-se caracterizar totalmente o comportamento de arcos abatidos. Evidentemente ele estará relacionado à sua esbeltez, caracterizada pelos valores de rigidez

axial, rigidez a flexão, vão e altura inicial, no entanto considerando que se trata de arcos abatidos, imagina-se que o arco deva perder a estabilidade por bifurcação simétrica instável. Como se apresentará em seguida, no caso com imperfeição, a perda de estabilidade por bifurcação do equilíbrio passará a ser também por ponto limite. Assim à medida que o carregamento atua o arco deforma de maneira simétrica até que, na carga de bifurcação, o arco passa para configuração oposta, i.e., muda sua curvatura.

Um alerta deve ser feito pelo fato da instabilidade sempre envolver mudança de curvatura poder-se-ia intuir que a adoção de apenas uma coordenada generalizada seria suficiente para determinar seu comportamento, o que nos levaria a resultados equivocados.

2.3 Arco abatido senoidal imperfeito

De modo geral, a carga de instabilidade é intensamente afetada pela presença de imperfeições geométricas, materiais e de condições de contorno de caráter aleatório (não determinístico). Um arco que possua imperfeições, por exemplo, na seção transversal em um único trecho, deve apresentar uma carga de instabilidade menor que a do arco perfeito, ainda que a imperfeição seja um aumento de seção transversal (THOMPSON; HUNT, 1973). Assim estudar o sistema imperfeito é fundamental para caracterizar a sensibilidade da estrutura.

A imperfeição adotada consiste em tornar o carregamento assimétrico através da adição do segundo harmônico multiplicado pelo parâmetro κ , conforme figura 16, com equação dada por:

$$p(x) = p_0 \left(\sin \frac{\pi x}{l} + \kappa \sin \frac{2\pi x}{l} \right). \quad (2.68)$$

Figura 16: Arco abatido com carregamento senoidal imperfeito.

A energia potencial das forças distribuídas permanece igual ao estabelecido:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y(t)) dx. \quad (2.69)$$

Utilizando as funções de forma têm-se:

$$p(\bar{y}_0 - \bar{y}) = p_0 q_1 \sin^2 \frac{\pi x}{l} - p_0 q_2 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} + p_0 \kappa q_1 \sin \frac{\pi x}{l} \sin \frac{2\pi x}{l} - p_0 \kappa q_2 \sin^2 \frac{2\pi x}{l}. \quad (2.70)$$

Realizando a integração a energia potencial das forças fica:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y) dx = p_0 \frac{l}{2} q_1 - p_0 \kappa \frac{l}{2} q_2. \quad (2.71)$$

A energia potencial total pode ser computada apenas substituindo a energia potencial das forças externas, uma vez que a energia de deformação elástica permanece inalterada:

$$V[q_1, q_2, p_0, t] = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} [-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2]^2 + \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1^2 + 16 q_2^2) - p_0 \frac{l}{2} q_1 + p_0 \kappa \frac{l}{2} q_2. \quad (2.72)$$

Aplicando a condição de equilíbrio, têm-se:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) (-h + q_1) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1 = p_0 \frac{l}{2}. \quad (2.73)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{2 l^3} q_2 (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) + 8 \frac{EI \pi^4}{l^3} q_2 = -p_0 \kappa \frac{l}{2}. \quad (2.74)$$

Tornando o sistema adimensional, com as mesmas substituições anteriores:

$$4r^2 w + (w^2 - 2w + 4v^2)(w - 1) = \lambda. \quad (2.75)$$

$$16r^2 v + (w^2 - 2w + 4v^2)v = -\frac{\kappa}{4} \lambda. \quad (2.76)$$

Diferentemente do que ocorrera com o sistema perfeito, o sistema de equações possui solução única, de modo que o valor de a_2 em função de a_1 é obtido resolvendo a equação:

$$16r^2v + (w^2 - 2w + 4v^2)v = -\frac{\kappa}{4}[4r^2w + (w^2 - 2w + 4v^2)(w - 1)]$$

$$\rightarrow v \quad (2.77)$$

Esta equação é cúbica em a_2 , assim pode-se rearranjar para a forma clássica de modo que:

$$v^3 + v^2 \left[\frac{\kappa}{4}(w - 1) \right] + v \left[4r^2 + \frac{w^2}{4} - \frac{w}{2} \right] + \frac{\kappa}{16}[4r^2w + w^3 - 3w^2 + 2w] = 0.$$

$$(2.78)$$

Tomando o mesmo exemplo do caso sem imperfeição, i.e., o arco com parâmetros de $i/l = 0,091$ e $r = 0,16$, pode-se obter numericamente o novo valor da carga crítica (λ). Fazendo o parâmetro de imperfeição (κ) igual a 5% obtemos o valor de ponto limite de 0,310, enquanto que o arco perfeito nos conduzia a um valor de carga crítica de 0,354. Assim a consideração de uma pequena imperfeição no carregamento gerou um abatimento de 12,5% da carga de instabilidade, revelando sua importância na análise de estabilidade.

2.4 Arco abatido senoidal com carregamento constante

A metodologia apresentada neste trabalho pode contemplar a variedade de carregamentos a qual uma estrutura esta submetida. Para o carregamento constante, por exemplo, pode-se escrever:

$$p(x) = p_0. \quad (2.79)$$

A energia potencial das forças distribuídas permanece igual ao estabelecido:

$$W = \int_0^l p(y_0 - y) dx. \quad (2.80)$$

Utilizando as funções de forma têm-se:

$$p(\bar{y}_0 - \bar{y}) = p_0 \left[q_1 \sin \frac{\pi x}{l} + q_2 \sin \frac{2\pi x}{l} \right]. \quad (2.81)$$

Realizando a integração a energia potencial das forças externas fica:

$$W = p_0 q_1 \left(-\cos \pi \frac{l}{\pi} + \cos 0 \frac{l}{\pi} \right) - p_0 q_2 \left(-\cos 2\pi \frac{l}{\pi} + \cos 0 \frac{l}{\pi} \right) = \frac{2l}{\pi} p_0 q_1. \quad (2.82)$$

A energia de deformação elástica permanece inalterada, assim energia potencial total fica:

$$V[q_1, q_2, p_0] = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} \left[-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2 \right]^2 + \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1^2 + 16 q_2^2) - \frac{2l}{\pi} p_0 q_1. \quad (2.83)$$

Aplicando a condição de equilíbrio, i.e., derivada parcial da energia potencial total em relação à coordenada generalizada igual a zero, têm-se:

$$\frac{\partial V}{\partial q_1} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) (-h + q_1) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1 = \frac{2l}{\pi} p_0. \quad (2.84)$$

$$\frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{2 l^3} q_2 (-2h q_1 + q_1^2 + 4 q_2^2) + 8 \frac{EI \pi^4}{l^3} q_2 = 0. \quad (2.85)$$

A fim de tornar o problema semelhante ao que já foi estudado, faz-se a adimensionalização com um novo parâmetro de carregamento λ_1 .

$$\lambda_1 = \frac{16 l^4}{\pi^5 EA h^3} p_0. \quad (2.86)$$

A relação entre o parâmetro de carregamento λ_1 do arco com carregamento senoidal e o novo carregamento λ é dado por:

$$\frac{\lambda_1}{\lambda} = \frac{1/2}{2/\pi} = \frac{\pi}{4} \cong 0,785 \quad (2.87)$$

Portanto a nova carga crítica será cerca de 22% menor que aquela dada para o arco com carregamento senoidal. As equações adimensionalizadas podem ser escritas de maneira idêntica às estudadas, podendo tomar as mesmas conclusões:

$$4r^2w + (w^2 - 2w + 4v^2)(w - 1) = \lambda_1. \quad (2.88)$$

$$16r^2v + (w^2 - 2w + 4v^2)v = 0. \quad (2.89)$$

A nova curva de p_0 em função do parâmetro r , com relação i/l igual a 0,091, pode ser visualizada na Fig. 17. As curvas em traço ponto correspondem à solução do arco com carregamento senoidal, deste modo pode-se observar a implicação da alteração para carregamento constante.

Figura 17: Gráfico parcial para localização dos modos de instabilidades do arco abatido com carregamento constante.

A carga crítica da instabilidade tipo ponto limite é obtida resolvendo:

$$\lambda_1 = 4r^2w + (w^2 - 2w)(w - 1), \quad (2.90)$$

Onde:

$$w = 1 \pm \sqrt{1 - \frac{2}{3}[1 + 2r^2]}. \quad (2.91)$$

A carga crítica da bifurcação simétrica instável é obtida resolvendo:

$$\lambda_1 = 12r^2 \left(\frac{4}{3} - a_1 \right) = r^2 (4 + 12\sqrt{1 - 16r^2}). \quad (2.92)$$

Também pode ser expressa sem a adimensionalização:

$$p_{0,cr} = \frac{\pi^5 EI h}{4l^4} \left(1 + 3\sqrt{1 - 16 \left(\frac{i}{h} \right)^2} \right). \quad (2.93)$$

Este resultado também foi obtido por Scholz (1990), sendo comprovado experimentalmente.

3 VIBRAÇÃO LIVRE DE TRELIÇAS E ARCOS ABATIDOS

Neste capítulo são apresentadas as equações de movimento e as análises da vibração livre no caso simétrico para a treliça de Von Mises e para arco abatido de forma senoidal com carregamento também senoidal. As equações de movimento são obtidas utilizando a equação de Euler-Lagrange, dada por:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) + \frac{\partial T}{\partial q_i} = N_i - \frac{\partial V}{\partial q_i}. \quad (3.1)$$

3.1 Treliça de Von Mises

Considerando a massa das barras, a energia cinética fica dada por:

$$T(t) = \frac{1}{2} M [\dot{Q}_1(t)^2 + \dot{Q}_2(t)^2]. \quad (3.2)$$

As derivadas da energia cinética com relação às coordenadas generalizadas e ao tempo são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_1} \right) = M \ddot{Q}_1(t). \quad (3.3)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{Q}_2} \right) = M \ddot{Q}_2(t). \quad (3.4)$$

A energia potencial, próxima a anteriormente, a menos da notação das coordenadas generalizadas que devem indicar dependência do tempo, fica:

$$V(t) = \frac{1}{2} EA L_0 \left\{ \left[\frac{(H-Q_1(t))^2 + (B+Q_2(t))^2 - L_0^2}{L_0^2} \right]^2 + \left[\frac{(H-Q_1(t))^2 + (B-Q_2(t))^2 - L_0^2}{L_0^2} \right]^2 \right\} - P Q_1(t). \quad (3.5)$$

As derivadas parciais da energia potencial ficam:

$$\frac{\partial V(t)}{\partial Q_1(t)} = \frac{EA}{L_0^3} (Q_1(t)^3 - 3H Q_1(t)^2 + Q_1(t) Q_2(t)^2 + 2H^2 Q_1(t) - H Q_2(t)^2) - P. \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial V(t)}{\partial Q_2(t)} = \frac{EA}{L_0^3} (Q_1(t)^2 Q_2(t) - 2H Q_1(t) Q_2(t) + Q_2(t)^3 + 2B^2 Q_2(t)). \quad (3.7)$$

A força generalizada não conservativa é adotada igual a um amortecimento viscoso linearmente proporcional a velocidade:

$$N(t) = -c[\dot{Q}_1(t)^2 + \dot{Q}_2(t)^2]. \quad (3.8)$$

Fazendo a substituição na equação de Euler-Lagrange, obtêm-se as equações de movimento:

$$M\ddot{Q}_1(t) + c\dot{Q}_1(t) + \frac{EA}{L_0^3}(Q_1(t)^3 - 3HQ_1(t)^2 + Q_1(t)Q_2(t)^2 + 2H^2Q_1(t) - HQ_2(t)^2) - P = 0. \quad (3.9)$$

$$M\ddot{Q}_2(t) + c\dot{Q}_2(t) + \frac{EA}{L_0^3}(Q_1(t)^2Q_2(t) - 2HQ_1(t)Q_2(t) + Q_2(t)^3 + 2B^2Q_2(t)) = 0. \quad (3.10)$$

Admitindo apenas o modo simétrico, que, como visto, é válido somente para valores de ângulo iniciais menores que aproximadamente 60 graus, o sistema fica:

$$M\ddot{Q}_1(t) + c\dot{Q}_1(t) + \frac{EA}{L_0^3}(Q_1(t)^3 - 3HQ_1(t)^2 + 2H^2Q_1(t)) - P = 0. \quad (3.11)$$

Adotando-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$w = \frac{Q_1(t)}{H}, \omega_0^2 = \frac{EAH^2}{ML_0^3}, \tau = t\omega_0, \xi = \frac{c}{2M\omega_0}, \Psi = \frac{P}{MH\omega_0^2}.$$

A equação passa a ser:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + w(w^2 - 3w + 2) - \Psi = 0. \quad (3.12)$$

Procedesse com a mudança da coordenada generalizada do estado indeformado para a coordenada que leva em consideração a configuração de equilíbrio, fazendo:

$$w_T = w(t) + w_e, \quad (3.13)$$

e, retomando da seção anterior, que a trajetória que representa o equilíbrio do ponto limite é:

$$\Psi = w^3 - 3w^2 + 2w$$

a equação do movimento passa:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + w(3w_e^2 - 6w_e + 2) + w^2(3w_e - 3) + w^3 = 0. \quad (3.14)$$

A fim de se obter a frequência natural da estrutura, despreza-se os termos não lineares e o amortecimento, tornando:

$$w_{,\tau\tau} + w(3w_e^2 - 6w_e + 2) = 0. \quad (3.15)$$

Donde se obtêm a frequência natural em torno do equilíbrio com carregamento:

$$\omega_w = \sqrt{3w_e^2 - 6w_e + 2}. \quad (3.16)$$

Para o caso sem carregamento:

$$\omega_w = \sqrt{2} = \sqrt{\frac{2EAH^2}{ML_0^3}}. \quad (3.17)$$

A equação de movimento pode ser escrita genericamente:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + \omega_w^2 w + \alpha w^2 + w^3 = 0, \quad (3.18)$$

onde $\omega_w^2 = 3w_e^2 - 6w_e + 2$, $\alpha = 3w_e - 3$

Pode-se visualizar a redução da frequência natural conforme aumento do carregamento na Fig. 18, onde a carga limite é de $\Psi_{cr} = 0,385$.

Figura 18: Alteração da frequência natural conforme aumento do carregamento.

Pelo princípio da conservação da energia e desprezando o amortecimento, sabe-se que a energia total é constante. O gráfico da energia total fica dado pela Fig. 19.

$$T + V = C \rightarrow \frac{1}{2} w_{,\tau}^2 + \omega_w^2 \frac{w^2}{2} + \alpha \frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4} = C. \quad (3.19)$$

Figura 19: Variação da energia potencial.

Assim pode-se escrever a equação permite analisar o plano de fase:

$$w_{,\tau} = \sqrt{2 \left[C - \omega_w^2 \frac{w^2}{2} - \alpha \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} \right]}. \quad (3.20)$$

Os planos de fase variáveis conforme o carregamento são visualizados nos gráficos seguintes. São exibidos cinco gráficos, com carregamento Ψ de 0, 0,1, 0,2, 0,3 e 0,38. Para cada gráfico há alteração nos valores de ω_w e α , pois são dependentes do carregamento externo. De maneira geral se observar um ponto de sela e dois centros, correspondentes a uma posição de equilíbrio instável e duas estáveis, respectivamente. O valor de energia que permite observar a órbita homoclínica que passa pelo ponto de sela separa os dois vales potenciais, para valores menores que o nível de energia, e as soluções de grande amplitude, para valores maiores de amplitude.

Figura 20: Plano de fase para $\Psi = 0$.

Figura 21: Plano de fase para $\Psi = 0,1$.

Figura 22: Plano de fase para $\Psi = 0,2$.

Figura 23: Plano de fase para $\Psi = 0,3$.

Figura 24: Plano de fase para $\Psi = 0,38$.

Como se pode observar há erosão da bacia de atração relativo ao vale potencial pré-crítico à medida que o carregamento aumenta. Adicionando taxa de amortecimento de 1% ($\xi = 0,01$), têm-se os planos de fase indicados nas figuras seguintes.

Figura 25: Plano de fase com amortecimento para $\Psi = 0$.

Figura 26: Plano de fase com amortecimento para $\Psi = 0,1$.

Figura 27: Plano de fase com amortecimento para $\Psi = 0,3$.

3.2 Arco senoidal abatido

Considerando a massa das barras, a energia cinética fica dada por:

$$T = \frac{1}{4} ml (\dot{q}_1(t)^2 + \dot{q}_2(t)^2). \quad (3.21)$$

As derivadas da energia cinética com relação às coordenadas generalizadas e ao tempo são:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{m}{2} \ddot{q}_1(t). \quad (3.22)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{m}{2} \ddot{q}_2(t). \quad (3.23)$$

A energia potencial, para o caso de carregamento senoidal, próxima a anteriormente, a menos da notação das coordenadas generalizadas que devem indicar dependência do tempo, fica:

$$V[q_1, q_2, p_0, t] = \frac{EA \pi^4}{32 l^3} [-2h q_1(t) + q_1(t)^2 + 4 q_2(t)^2]^2 + \frac{EI \pi^4}{4 l^3} (q_1(t)^2 + 16 q_2(t)^2) - p_0 \frac{l}{2} q_1(t). \quad (3.24)$$

As derivadas parciais da energia potencial ficam:

$$\frac{\partial V(t)}{\partial q_1(t)} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1(t) + q_1(t)^2 + 4 q_2(t)^2) (-h + q_1(t)) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1(t) = p_0 \frac{l}{2}. \quad (3.25)$$

$$\frac{\partial V(t)}{\partial q_2(t)} = 0 \rightarrow \frac{EA \pi^4}{2 l^3} q_2(t) (-2h q_1(t) + q_1(t)^2 + 4 q_2(t)^2) + 8 \frac{EI \pi^4}{l^3} q_2(t) = 0. \quad (3.26)$$

A força generalizada não conservativa é adotada igual a um amortecimento viscoso linearmente proporcional a velocidade:

$$N(t) = -\frac{c}{2} [\dot{q}_1(t)^2 + \dot{q}_2(t)^2]. \quad (3.27)$$

Fazendo a substituição na equação de Euler-Lagrange, obtêm-se as equações de movimento:

$$\frac{ml}{2} \ddot{q}_1(t) + c \dot{q}_1(t) + \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1(t) + q_1(t)^2 + 4 q_2(t)^2) (-h + q_1(t)) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1(t) - p_0 \frac{l}{2} = 0. \quad (3.28)$$

$$\frac{ml}{2} \ddot{q}_2(t) + \frac{c}{2} \dot{q}_2(t) + \frac{EA \pi^4}{2 l^3} q_2(t) (-2h q_1(t) + q_1(t)^2 + 4 q_2(t)^2) + 8 \frac{EI \pi^4}{l^3} q_2(t) = 0. \quad (3.29)$$

Admitindo apenas o modo simétrico o sistema fica:

$$\frac{ml}{2} \ddot{q}_1(t) + \frac{c}{2} \dot{q}_1(t) + \frac{EA \pi^4}{8 l^3} (-2h q_1(t) + q_1(t)^2) (-h + q_1(t)) + \frac{EI \pi^4}{2 l^3} q_1(t) - p_0 \frac{l}{2} = 0. \quad (3.30)$$

Adotando-se os seguintes parâmetros adimensionais:

$$w = \frac{q_1(t)}{h}, \omega_0^2 = \frac{\pi^4 EA h^2}{ml^4}, \tau = t \omega_0, r = \frac{l}{h}, \xi = \frac{c}{2m\omega_0}, \psi = \frac{p_0}{mh\omega_0^2}.$$

A equação passa a ser:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + w(w^2 - 3w + 2 + 4r^2) - \psi = 0. \quad (3.31)$$

Procedesse com a mudança da coordenada generalizada do estado indeformado para a coordenada que leva em consideração a configuração de equilíbrio, fazendo:

$$w_T = w(t) + w_e, \quad (3.32)$$

e, retomando da seção anterior, que a trajetória que representa o equilíbrio do ponto limite é:

$$\psi = w(w^2 - 3w + 2 + 4r^2)$$

a equação do movimento passa:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + w(3w_e^2 - 6w_e + 2 + 4r^2) + w^2(3w_e - 3) + w^3 = 0. \quad (3.33)$$

A fim de se obter a frequência natural da estrutura, desprezam-se os termos não lineares e o amortecimento, tornando:

$$w_{,\tau\tau} + w(3w_e^2 - 6w_e + 2 + 4r^2) = 0. \quad (3.34)$$

Donde se obtêm a frequência natural em torno do equilíbrio com carregamento:

$$\omega_w = \sqrt{3w_e^2 - 6w_e + 2 + 4r^2}. \quad (3.35)$$

Para o caso sem carregamento:

$$\omega_w = \sqrt{2 + 4r^2} = \sqrt{\frac{(2+4r^2)\pi^4 EAh^2}{ml^4}}. \quad (3.36)$$

A equação de movimento pode ser escrita genericamente:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + \omega_w^2 w + \alpha w^2 + w^3 = 0, \quad (3.37)$$

onde $\omega_w^2 = 3w_e^2 - 6w_e + 2 + 4r^2$, $\alpha = 3w_e - 3$

Pode-se visualizar a alteração da frequência natural conforme aumento do carregamento e do parâmetro r na Fig.27, onde r assumem os valores: 0,016, 0,032, 0,063 e 0,126 e ψ_{cr} assumem valores de 0,386, 0,387, 0,392 e 0,413, respectivamente. O gráfico é muito próximo ao obtido no caso da treliça.

Figura 28: Alteração da frequência natural conforme aumento do carregamento.

Pelo princípio da conservação da energia e desprezando o amortecimento, sabe-se que a energia total é constante. Assim pode-se escrever a equação permite analisar o plano de fase:

$$T + V = C \rightarrow \frac{1}{2} w_{,\tau}^2 + \omega_w^2 \frac{w^2}{2} + \alpha \frac{w^3}{3} + \frac{w^4}{4} = C.$$

$$w_{,\tau} = \sqrt{2 \left[C - \omega_w^2 \frac{w^2}{2} - \alpha \frac{w^3}{3} - \frac{w^4}{4} \right]}. \quad (3.38)$$

Os planos de fase variáveis conforme o carregamento são visualizados nos gráficos seguintes. São exibidos cinco gráficos, com carregamento ψ de 0, 0,1, 0,2, 0,3 e 0,39, com r de 0,063. Para cada gráfico há alteração nos valores de ω_w e α , pois são dependentes do carregamento externo.

Figura 29: Plano de fase para $\psi = 0$.

Figura 30: Plano de fase para $\psi = 0,1$.

Figura 31: Plano de fase para $\psi = 0,2$.

Figura 32: Plano de fase para $\psi = 0,3$.

Figura 33: Plano de fase para $\psi = 0,39$.

Como se pode observar também há erosão da bacia de atração à medida que o carregamento aumenta. Adicionando amortecimento de 1% ($\xi = 0,01$), têm-se os planos de fase indicados nos gráficos seguintes. Claramente à medida que o carregamento aumenta há diminuição do vale pré-crítico, podendo-se ainda verificar que o amortecimento reduz a amplitude de vibração conduzindo à uma das duas bacias de atração do sistema não conservativo, a depender das condições iniciais.

Figura 34: Plano de fase com amortecimento para $\psi = 0$.

Figura 35: Plano de fase com amortecimento para $\psi = 0,1$.

Figura 36: Plano de fase com amortecimento para $\psi = 0,3$.

4 VIBRAÇÃO FORÇADA DE TRELIÇAS E ARCOS ABATIDOS

Neste capítulo são apresentadas as análises da vibração forçada no caso simétrico para a treliça de Von Mises e para arco abatido de forma senoidal com carregamento estático também senoidal. São obtidas as respostas ao longo do tempo, o plano de fase, as seções de Poincaré, os diagramas de bifurcação e a fronteira de estabilidade.

As respostas ao longo do tempo são obtidas através de integração numérica da equação de movimento. As seções de Poincaré auxiliam na classificação das orbitas, sendo que quando se encontra apenas um ponto no mapa a solução é dita periódica com igual período da força excitadora. A presença de mais pontos indicam a existência de oscilações sub-harmônicas ou de soluções co-existent. O movimento não periódico, representado por muitos pontos, indica que há um atrator estranho ou caótico. Os diagramas de bifurcação permitem identificar as órbitas que são periódicas, quase periódicas, e caóticas em função dos parâmetros de controle. Por fim, utilizando o conjunto dos diagramas de bifurcação, constrói-se o gráfico de fronteira de estabilidade das soluções do vale potencial pré-crítico no espaço dos parâmetros de controle, a saber, frequência de excitação vs. magnitude da força (CASTRO, 2014).

4.1 Treliça de Von Mises

Do capítulo anterior, sabe-se que:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + \omega_w^2 w + \alpha w^2 + w^3 = 0, \quad (4.1)$$

$$\text{onde } \omega_w^2 = 3w_e^2 - 6w_e + 2, \alpha = 3w_e - 3, \Psi = w^3 - 3w^2 + 2w.$$

Adicionando um carregamento harmônico a equação do movimento passa a ser:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + \omega_w^2 w + \alpha w^2 + w^3 = F \sin(\Omega\tau), \quad (4.2)$$

onde F é a magnitude da força e Ω a frequência de excitação.

Fazendo o carregamento estático Ψ igual a zero tem-se a seguinte equação:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + 2w - 3w^2 + w^3 = F \sin(\Omega\tau). \quad (4.3)$$

Os diagramas de bifurcação ficam variando-se a frequência de excitação ficam dados pelas próximas figuras.

Figura 37: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,4$.

Figura 38: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,5$.

Figura 39: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,6$.

Figura 40: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,7$.

Figura 41: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,8$.

Figura 42: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 0,9$.

Figura 43: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1$.

Figura 44: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,1$.

Figura 45: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,2$.

Figura 46: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,3$.

Figura 47: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,2$ e $\Omega = 1,4$, tem-se o plano de fase e as seções de Poincaré dadas no gráfico, onde se pode observar que existe, em regime permanente, uma resposta com um único período. Por facilidade, não é exibida o plano de fase em torno da configuração pré-crítica.

Figura 48: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,2$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,314$ e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta com duplicação de períodos.

Figura 49: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,314$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,329$ e $\Omega = 1,4$, tem-se uma resposta com quatro períodos.

Figura 50: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,329$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,335$ e $\Omega = 1,4$, tem-se uma resposta caótica.

Figura 51: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,335$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,35$ e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta com cinco períodos, evidenciada pelos pontos no mapa.

Figura 52: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,36$ e $\Omega = 1,4$.

Para valores maiores de F , como $F = 0,4$, e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta de apenas um período novamente, mas de grande amplitude.

Figura 53: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0$, $F = 0,4$ e $\Omega = 1,4$.

Fazendo o carregamento externo Ψ igual a 0,2 tem-se a seguinte equação:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + 1,3173w - 2,6367w^2 + w^3 = F \sin(\Omega\tau), \quad (4.4)$$

Figura 54: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,4$.

Figura 55: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,5$.

Figura 56: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,6$.

Figura 57: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,7$.

Figura 58: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,8$.

Figura 59: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 0,9$.

Figura 60: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1$.

Figura 61: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,1$.

Figura 62: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,2$.

Figura 63: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,3$.

Figura 64: Diagrama de bifurcação para $\Psi = 0,2$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,2$ e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta com um único período.

Figura 65: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,2$ e $\Omega = 1,4$.

Nota-se, de imediato, uma diminuição da amplitude de vibração da solução pré-critica. Para $F = 0,308$ e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta com duplicação de períodos.

Figura 66: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,308$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,34$ e $\Omega = 1,4$, se pode observar uma resposta caótica.

Figura 67: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,34$ e $\Omega = 1,4$.

Para $F = 0,36$ e $\Omega = 1,4$, volta a se observar uma resposta com um único período de grande amplitude.

Figura 68: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\Psi = 0,2$, $F = 0,36$ e $\Omega = 1,4$.

Os gráficos de fronteira de estabilidade são mostrados nas próximas figuras para dois níveis de carregamento estático. Notadamente o aumento do carregamento estático provoca um decréscimo acentuado na capacidade de carga dinâmica.

Figura 69: Fronteira de estabilidade para $\Psi = 0$.

Figura 70: Fronteira de estabilidade para $\Psi = 0,2$.

4.2 Arco senoidal abatido

Do capítulo anterior, sabe-se que:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + \omega_w^2 w + \alpha w^2 + w^3 = 0, \quad (4.5)$$

onde $\omega_w^2 = 3w_e^2 - 6w_e + 2 + 4r^2$, $\alpha = 3w_e - 3$ e $\psi = w(w^2 - 3w + 2 + 4r^2)$.

Adicionando um carregamento harmônico a equação do movimento passa a ser:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + \omega_w^2 w + \alpha w^2 + w^3 = f \sin(\Omega\tau), \quad (4.6)$$

onde f é a magnitude da força e Ω a frequência de excitação.

Fazendo o carregamento estático ψ igual a 0 tem-se a seguinte equação:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + 2w - 3w^2 + w^3 = f \sin(\Omega\tau), \quad (4.7)$$

Que é exatamente a mesma, a menos dos parâmetros utilizados, do caso da treliça, de modo que as conclusões obtidas anteriormente são idênticas. Portanto analisa-se somente o caso de $\psi = 0,2$, e $r = 0,126$, passando a equação do movimento a ser:

$$w_{,\tau\tau} + 2\xi w_{,\tau} + 1,4106w - 2,6533w^2 + w^3 = f \sin(\Omega\tau), \quad (4.8)$$

Os diagramas de bifurcação para diferentes frequências excitadoras ficam dados nas próximas figuras.

Figura 71: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,4$.

Figura 72: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,5$.

Figura 73: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,6$.

Figura 74: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,7$.

Figura 75: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,8$.

Figura 76: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 0,9$.

Figura 77: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1$.

Figura 78: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,1$.

Figura 79: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,2$.

Figura 80: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,3$.

Figura 81: Diagrama de bifurcação para $\psi = 0,2$ e $\Omega = 1,4$.

Para $f = 0,2$ e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta com um único período.

Figura 82: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,2$ e $\Omega = 1,4$.

Nota-se, de imediato, uma diminuição da amplitude de vibração da solução pré-critica. Para $f = 0,27$ e $\Omega = 1,4$, pode-se observar que existe, em regime permanente, uma resposta com duplicação de períodos.

Figura 83: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,27$ e $\Omega = 1,4$.

Para $f = 0,333$ e $\Omega = 1,4$, se pode observar uma resposta caótica.

Figura 84: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,333$ e $\Omega = 1,4$.

Para $f = 0,35$ e $\Omega = 1,4$, volta a se observar uma resposta com um único período de grande amplitude.

Figura 85: Plano de fase e mapa de Poincaré para $\psi = 0,2$, $f = 0,35$ e $\Omega = 1,4$.

O gráfico de fronteira de estabilidade é mostrado na figura abaixo. A curva em cinza representa a fronteira para $r = 0,016$ e a curva em preto representa a fronteira para $r = 0,126$. Além de notadamente o aumento de o carregamento estático provocar um decréscimo acentuado na capacidade de carga dinâmica, verifica-se que a variação da esbeltez do arco não provoca alterações significativas na capacidade de carga dinâmica.

Figura 86: Fronteira de estabilidade para $\psi = 0,2$ e $r = 0,126$.

5 CONCLUSÕES

Assim como indicado na literatura, e demonstrado neste trabalho, deve-se ter especial atenção às estruturas abatidas, pois podem ter mais de um modo de instabilidade. Para treliças e arcos é razoável admitir dois graus de liberdade, um para a instabilidade tipo ponto limite e outra para bifurcação do equilíbrio, desde que se mantenham geometrias abatidas nos arcos. Acredita-se que o tratamento adotado para o estabelecimento das cargas críticas, trajetórias de equilíbrio e verificação da sua estabilidade é simples e intuitivo, permitindo estudar problemas mais complexos. Mostrou-se que para projetar estruturas correntes deve-se sempre levar em consideração imperfeições, quer nas condições de contorno, geometria ou carregamento, uma vez que são normais na realidade e diminuem as cargas críticas de modo significativo. A análise dinâmica revelou que o nível de carregamento estático e a frequência de excitação altera significativamente a capacidade de carga dinâmica, devendo ser objeto de estudo aprofundado por parte do projetista.

Sugere-se para trabalhos futuros o estudo adicionando a não linearidade física, de modo que seja possível adotar os resultados para projetos correntes. Adicionalmente indica-se o estudo do efeito da consideração de rigidez rotacional nos apoios.

REFERÊNCIAS¹

- BI, Q. DAI, H.H. **Analysis of non-linear dynamics and bifurcations of a shallow arch subjected to periodic excitation with internal resonance.** Journal of Sound and Vibration, 233. 2000. 557-571.
- BRESLAVSKY, I. AVRAMOV, K.V. YU, M. KOCHUROV, R. **Nonlinear modes of snap-through motions of shallow arch.** Journal of Sound and Vibration, 311. 2008. 297-313.
- CASTRO, C. H. L. **Vibrações Não Lineares E Estabilidade De Treliças Piramidais Abatidas.** Rio De Janeiro, 2014. 92p. Dissertação De Mestrado – Departamento De Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica Do Rio De Janeiro.
- CASSIDY, J.R. PLAUT, R.H. **Buckling Of Shallow Arches under Combined Distributed and Concentrated Loads.** Mechanics Research Communications. 1981. 41-45.
- CHANDRA, Y. STANCIULESCU, I. VIRGIN, L. N. EASON, T. G., SPOTTSWOOD, S. M. **A numerical investigation of snap-through in a shallow arch-link model.** Journal of Sound and Vibration, 332. 2013. 2532-2548.
- HSU, C.S. **Equilibrium Configurations of a Shallow Arch of Arbitrary Shape and Their Dynamic Stability Character.** International Journal Non-Linear Mechanics. 1968. 113-136.
- LEVITAS, J. SINGER, J. WELLER, T. **Global Dynamic Stability of a Shallow Arch By Poincaré-Like Simple Cell Mapping.** International Journal Non-Linear Mechanics. 1997. 411-424.
- LIMA, V. S.; BRASIL, M. L. R. F. **Elastic Constitutive Laws and Stability Analyses.** São Paulo, 1999. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

¹ De acordo com ABNT NBR 6023:2002.

MALLON, N.J. FEY, R.H.B. NIJMEIJER, H. ZHANG, G.Q. **Dynamic buckling of a shallow arch under shock loading considering the effects of the arch shape.** International Journal Non-Linear Mechanics. 2006. 1057-1067.

PINTO, O.C.; GONÇALVES, P.B. **Active Non-Linear Control Of Buckling And Vibrations Of A Flexible Buckled Beam.** Chaos, Solitons & Fractals, 14(2), 2002. 227-239.

PLAUT, R.H. HSIEH, J.C. **Oscillations and Instability of Shallow-Arch under Two-Frequency Excitation.** Journal of Sound and Vibration, 102. 1985. 189-201.

REIS, A; CAMOTIM, D. **Estabilidade e Dimensionamento de Estruturas.** Lisboa: Ed Orion, 2012.

SABIR, A.B. **Free Vibration Steady State Response of Geometrically Nonlinear Shallow Arches.** Thin-Walled Structures. 1994. 145-159.

SANKAR, T.S. ARIARATNAM ,S.T. **Instability of Stochastically Loaded Shallow Arches In Nonsymmetric Modes.** International Journal Solids Structures. 1971. 1305-1316.

SCHOLZ, H. **A Contribution to The In-Plane Stability Of Shallow Arches.** Journal Construction Steel Research 15. 1990. 287-302.

SIMITSES, G. J. **An Introduction to The Elastic Stability Of Structures.** Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1986.

THOMPSON, J. M. T.; HUNT, G. W. **A General Theory of Elastic Stability.** New York: Wiley, 1973.

TIEN, W.-M.; NAMACHCHIVAYA, N.S.; BAJAJ, A. K. **Non-Linear Dynamics of Shallow Arch Under Periodic Excitation – I. 1:2 Internal Resonance.** Int. J. Non-Linear Mechanics. 1994. 349-366.

TIEN, W.-M.; NAMACHCHIVAYA, N.S.; BAJAJ, A. K. **Non-Linear Dynamics of Shallow Arch Under Periodic Excitation – I. 1:1 Internal Resonance.** Int. J. Non-Linear Mechanics. 1994. 367-386.

YU, W.; CHEN, F. **Homoclinic Orbits In A Shallow Arch Subjected To Periodic Excitation.** Nonlinear Dyn. 2014. 713–727.