ANDRÉ DEL NEGRO TAYER

Modelagem numérica de juntas de argamassa em estruturas
de alvenaria utilizando elementos finitos com alta razão de
aspecto

São Paulo
2018

ANDRÉ DEL NEGRO TAYER

Modelagem numérica de juntas de argamassa em estruturas
de alvenaria utilizando elementos finitos com alta razão de
aspecto

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo como parte dos requisitos
para obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Luís Antônio Guimarães
Bitencourt Júnior

São Paulo
2018

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 03 de agosto de 2018

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:

Catálogo-na-publicação

Tayer, André Del Negro

Modelagem numérica de juntas de argamassa em estruturas de alvenaria utilizando elementos finitos com alta razão de aspecto / A. D. N. Tayer -- versão corr. -- São Paulo, 2018.

90 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Estruturas de alvenaria 2.Juntas de argamassa 3.Elemento finito com alta razão de aspecto 4.Mecânica do dano contínuo 5.Técnica de fragmentação de malha I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

*“Aprender é a única coisa de que a
mente nunca se cansa, nunca tem medo
e nunca se arrepende.”*

Leonardo da Vinci

Resumo

Este trabalho apresenta um novo modelo numérico para simulação de juntas de argamassa em estruturas de alvenaria no plano via método dos elementos finitos. Neste modelo, blocos de alvenaria e juntas de argamassa são representados separadamente. Elementos finitos com alta razão de aspecto são utilizados para representar as juntas de argamassa e são inseridos na malha de elementos finitos através de uma técnica de fragmentação de malha. A principal vantagem desta técnica consiste na utilização de modelos constitutivos contínuos para representar regiões descontínuas, uma vez que seu campo de deformações quando a altura do elemento de interface tende a zero é semelhante ao apresentado pela abordagem de aproximação contínua de descontinuidades fortes. Um modelo constitutivo contínuo baseado na mecânica do dano foi desenvolvido para representar o comportamento dos elementos de interface. Este modelo consegue representar a abertura e fechamento de fraturas, bem como o efeito de atrito em função da tensão de confinamento nas interfaces. Como o objetivo deste trabalho consiste na simulação da formação e propagação de fraturas ao longo das juntas de argamassa, comportamento elástico linear foi atribuído aos elementos triangulares de três nós utilizados na discretização dos blocos de alvenaria. Vários exemplos numéricos são apresentados. Inicialmente, testes básicos são realizados para demonstrar as principais características do modelo quando submetido a carregamentos de tração, compressão e cisalhamento. Posteriormente, estruturas de alvenaria submetidas à carregamentos estáticos são analisadas e os resultados comparados com as respostas experimentais a fim de validar o modelo proposto. A técnica proposta se mostrou bastante promissora para simulação da formação e propagação de fratura em juntas de argamassa de estruturas de alvenaria.

Palavras-chave: Estruturas de alvenaria; juntas de argamassa; elemento finito com alta razão de aspecto; mecânica do dano contínuo; técnica de fragmentação de malha.

Abstract

This work presents a novel numerical model to simulate the failure process in masonry structures subjected to static loads via finite element method. Brick and mortar joints are modeled separately with their own constitutive equations. Interface finite element with high aspect ratio are used to simulate the mortar interface and inserted by the mesh fragmentation technique. The main advantage of this strategy is supported by the fact that, as the aspect ratio of a standard low-order solid finite element increases, the element strains also increase, approaching the same kinematics as the Continuum Strong Discontinuity Approach. A constitutive model was developed, based on the continuum damage mechanics, in order to represent the behavior of the interface finite elements. This model is able to simulate the creation and propagation of cracks, as well as, the frictional effects in dependence on stress confinement on the interfaces. Furthermore, as the objective of this work aims to simulate the failure in the mortar joints, the brick elements are assumed as linear elastic material. Three node standard triangular finite element are used to represent the bricks. Several numerical models are carried out. Initially, basics tests are show in order to demonstrate the main characteristics of the proposed model subjected to tensile, compression and shear loads. Subsequently, masonry structures are subjected to static loads are analyzed and the results compared with the experimental responses in order to validate the proposed model. This technique proved to be very promising for the simulation of failure onset and propagation in mortar joints of masonry structures.

Keywords: Masonry structures; mortar joints; finite element with high aspect ratio; continuum damage mechanics; mesh fragmentation technique.

Lista de Figuras

1.1. Etapas da análise numérica na plataforma computacional.	17
2.1. Comportamento mecânico de prismas de alvenaria e seus componentes: curvas tensão <i>vs.</i> deformação obtidas em ensaios uniaxiais de tração e compressão. Adaptado de De Bellis [2010].	20
2.2. Modos de falha para diferentes condições de estado de tensão - uniaxial e biaxial; [Page, 1982].	21
2.3. Modos de falha baseados na Mecânica da Fratura. [Uva and Salerno, 2006].	22
2.4. Curva da tensão <i>vs.</i> deslocamento do modo de fratura I para a argamassa.	23
2.5. Curvas tensão <i>vs.</i> deslocamento do modo de fratura II para a argamassa: (a) curva característica e (b) curvas experimentais para três diferentes tensões de confinamento [van der Pluijm, 1999].	24
2.6. Diferentes escalas de modelagem de paredes de alvenaria de acordo com Lourenço [1996]: (a) macroescala; (b) microescala; (c) microescala simplificada (mesoescala).	25
2.7. Padrão de fissuras utilizando um modelo em macroescala: (a) resultado experimental e (b) resultado numérico [Faconi et al., 2013].	26
2.8. modelo numérico para simulação de estrutura de alvenaria em microescala [Sandoval and Arnau, 2016].	27
2.9. Modelagem numérica de uma parede de alvenaria em microescala simplificada (mesoescala) [Lourenço, 1996].	28
3.1. Construção do modelo numérico proposto baseado na técnica de fragmentação de malha de elementos finitos: (a) parede de alvenaria; (b) discretização dos blocos de alvenaria em elementos finitos e identificação das interfaces; (c) separação dos blocos de alvenaria e (d) inserção dos elementos finitos de interface.	30

3.2. Fluxograma do algoritmo desenvolvido em MATLAB para fragmentação da malha de elementos finitos.	31
3.3. Parede de alvenaria discretizada em elementos finitos utilizando a técnica de fragmentação de malha; (b) detalhe da inserção dos elementos de interface e (d) elemento finito de interface com alta razão de aspecto.	32
3.4. Integração IMPL-EX.	41
4.1. Configuração do ensaio numérico para descrever o comportamento do modelo proposto para interface sob: (a) tração e (b) compressão. . .	44
4.2. Malhas de elementos finitos adotadas para os testes básicos de tração e compressão: (a) malha m1, (b) malha m2, (c) malha m3 e (d) malha m4.	44
4.3. Respostas obtidas nos ensaios de tração para as 4 diferentes discretizações de malha adotadas: tensão x deslocamento imposto.	46
4.4. Resposta do teste básico de compressão para as 4 diferentes discretizações de malha adotadas: tensão x deslocamento imposto.	47
4.5. Configuração do ensaio numérico para descrever o comportamento do modelo proposto sob cisalhamento com diferentes tensões de confinamento: (a) estágio I - pré-compressão e (b) estágio II - cisalhamento.	48
4.6. Discretização em elementos finitos do ensaio numérico para descrever o comportamento do modelo proposto sob cisalhamento.	49
4.7. Curvas tensão de cisalhamento <i>vs.</i> deslocamento vertical imposto: resultados numéricos x experimentais para as diferentes tensões de confinamento.	50
4.8. Geometria, condições de contorno, malha de elementos finitos e carregamento aplicado na parede de alvenaria sob flexão.	51
4.9. Configuração deformada e propagação da fratura (fator de escala igual a 30) para o deslocamento vertical de $\delta = 0,7mm$	51
4.10. Padrão de fissuras experimental x numérico para deslocamento imposto $\delta = 0,7mm$: (a) experimental [Chaimoon and Attard, 2009] e (b) numérico.	52
4.11. Curvas experimental e numérica: força <i>vs.</i> deslocamento imposto. . .	53
4.12. Curvas experimental e numérica: força <i>vs</i> CMOD.	53

4.13. Modelo numérico para a parede de alvenaria sem abertura. (a) estágio I de carregamento: pré-compressão e (b) estágio II de carregamento: cisalhamento.	55
4.14. Padrão de fissura da parede de alvenaria sem abertura (fator de escala igual a 30) para os seguintes deslocamentos horizontais impostos: (a) $\delta = 2 [mm]$ e (b) $\delta = 4 [mm]$	56
4.15. Padrão de fissura da parede de alvenaria sem abertura: (a) resultado experimental (J4D); (b) resultado experimental (J5D) e (c) resultado da simulação numérica.	56
4.16. Curvas força horizontal <i>vs.</i> deslocamento horizontal imposto.	57
4.17. Modelo numérico para a parede de alvenaria com abertura. (a) estágio I de carregamento: pré-compressão e (b) estágio II de carregamento: cisalhamento.	58
4.18. Padrão de fissura da parede de alvenaria com abertura (fator de escala igual a 10) para os seguintes deslocamentos horizontais impostos: (a) $\delta = 2,5 [mm]$ e (b) $\delta = 5 [mm]$	59
4.19. Padrão de fissura da parede de alvenaria sem abertura: (a) resultado experimental (J2G); (b) resultado experimental (J3G); e (c) resultado da simulação numérica.	59
4.20. Curvas força horizontal <i>vs.</i> deslocamento horizontal imposto.	60
4.21. Tensões principais de compressão da parede com abertura para deslocamento horizontal imposto $\delta = 5 [mm]$	61
A.1. Matriz de adjacência: (a) estrutura de dados e (b) matriz de adjacência	73
A.2. Direção dos elementos de barras do problema: (a) direções principais, (b) direções locais e (c) direção genérica	74
A.3. Redução dos elementos finitos dos blocos: (i) malha original e (ii) redução com classificação dos nós de acordo com o número de barras: (a) 1/2 barras, (b) 3 barras e (c) 4 barras	75
A.4. Inserção dos elementos finitos de interface: (i) redução e (ii) inserção com classificação dos nós de acordo com o número de barras: (a) 1/2 barras, (b) 3 barras e (c) 4 barras	76
B.1. Aproximação contínua de descontinuidades : (a) fraca e (b) forte. . .	77
C.1. Comparação entre a área total e a área degradada.	80

C.2. Lei de endurecimento e abrandamento para curvas: (a) lineares e (b) exponenciais. 83

C.3. Condição de carga e descarga. 84

Lista de Tabelas

3.1. Esquema de integração IMPL-EX do modelo constitutivo da argamassa.	42
4.1. Pares de elementos finitos com alta razão de aspecto empregados ao longo da interface entre os blocos de alvenaria.	45
4.2. Propriedades dos materiais empregados nos testes básicos de tração e compressão.	45
4.3. Propriedades dos materiais empregados no teste básico de cisalhamento.	49
4.4. Propriedades dos materiais empregados na parede de alvenaria sob flexão.	51
4.5. Propriedades dos materiais empregados nas paredes de alvenaria. . .	54
C.1. Modelo Constitutivo Contínuo de dano para exemplo 1D.	85

Sumário

1. Introdução	13
1.1. Aspectos gerais e motivação	13
1.2. Objetivos	15
1.3. Escopo e limitações da dissertação	16
1.4. Plataforma computacional	16
1.5. Estrutura da dissertação	18
2. Estruturas de alvenaria	19
2.1. Comportamento mecânico	19
2.1.1. Modos de falha no plano das juntas de argamassa	22
2.1.1.1. Modo I	22
2.1.1.2. Modo II	23
2.2. Modelagem numérica de estruturas de alvenaria	24
2.2.1. Macroescala	25
2.2.2. Microescala	26
2.2.2.1. Microescala simplificada (mesoescala)	27
3. Modelo numérico proposto	29
3.1. Processo de fragmentação de malha de elementos finitos	29
3.2. Elemento finito de interface com alta razão de aspecto	31
3.3. Modelo constitutivo para argamassa	35
3.3.1. Método de integração IMPL-EX	39
4. Aplicações numéricas	43
4.1. Testes básicos	43
4.1.1. Tração e compressão	43
4.1.2. Cisalhamento	47
4.2. Parede de alvenaria sob flexão	50

4.3. Paredes de alvenaria sob cisalhamento	53
4.3.1. Parede de alvenaria sem abertura	54
4.3.2. Parede de alvenaria com abertura	58
5. Conclusões e sugestões para trabalhos futuro	62
5.1. Conclusões	62
5.2. Sugestões para trabalhos futuros	64
Referências Bibliográficas	65
A. APÊNDICE A - Algoritmo para fragmentação de malha	72
B. APÊNDICE B - Aproximação contínua de descontinuidades fortes	77
C. APÊNDICE C - Ingredientes básicos da mecânica do dano contínuo	80
D. APÊNDICE D - Operador da matriz de rigidez tangente	86

1. Introdução

1.1. Aspectos gerais e motivação

Estruturas em alvenaria estão presentes no mundo desde os tempos antigos, de grandes construções históricas até simples casas. Estas construções foram realizadas de modo empírico “*rule of thumb*” ou ainda por passagem de conhecimento entre gerações. Devido ao seu alto valor histórico para a sociedade, as administrações públicas junto a comunidade científica, buscam não só a conservação e preservação dessas estruturas bem como garantir a segurança de seus visitantes.

Pesquisas realizadas na Europa [Bergamo et al., 2016, Costa et al., 2016, Milani et al., 2014, Saloustros et al., 2015b, Conde et al., 2017] mostram a preocupação da comunidade em prever e monitorar o comportamento de importantes estruturas de alvenaria, como igrejas, pontes, viadutos, etc. Além disso, pesquisas realizadas nas últimas duas décadas, mostram diversos tipos de aplicações de estruturas de alvenaria, como por exemplo, em túneis [Thavalingam et al., 2001], fachadas de edifícios [Fathy et al., 2009], barragens [Bretas et al., 2014] e pequenas edificações [Illampas et al., 2014]. Sua importância também pode ser comprovada pelo vasto campo de estudos, através de ensaios de laboratório (Alecci et al. [2013], Pelà et al. [2016], Portioli and Cascini [2017]), técnica de escaneamento 3D [Schueremans and Genechten, 2009] e simulação computacional (Orduña [2017], Koutromanos et al. [2011], Roca et al. [2013]).

Devido ao seu rápido processo construtivo, baixo custo, racionalização de seus materiais, bom conforto acústico e isolamento térmico, diversas estruturas de alvenaria ainda vêm sendo construídas hoje em dia. Por este motivo, a busca por um melhor entendimento de seu comportamento mecânico é uma necessidade, principalmente, por se tratar de uma estrutura complexa, composta por um conjunto de blocos sobrepostos que têm suas interfaces preenchidas por argamassa.

Nos últimos anos, com o crescimento da aplicação de simulação computacional para prever o comportamento de estruturas, diversos modelos numéricos têm sido propostos para representar o comportamento de estruturas de alvenaria submetidas à diversos tipos de carregamentos [Manos et al., 2012, Vandoren et al., 2013, Salát, 2015, Drougkas et al., 2015, Toti et al., 2015, Tesei and Ventura, 2016, Smoljanović et al., 2015, Greco et al., 2016, Milani et al., 2014, Addessi et al., 2014, Macorini and Izzuddin, 2013, Facconi et al., 2013, Addessi and Sacco, 2016, Saloustros et al., 2015a, Bolhassani et al., 2015]. Nestes modelos, a principal dificuldade encontrada, tem sido representar o comportamento não linear das juntas de argamassa.

Os modelos numéricos desenvolvidos geralmente são classificados como contínuos ou descontínuos. Na abordagem contínua, a estrutura é modelada de forma em que não haja distinção dos componentes de alvenaria (blocos e argamassa), transformando-a em um compósito com propriedades homogeneizadas [Pelà, 2009, Petracca, 2016]. Nesse tipo de abordagem, a estrutura é representada em macroescala, e uma de suas principais vantagens consiste na simplicidade de sua formulação matemática, composta por equações constitutivas convencionais, com relações tensão *vs.* deformação definidas para qualquer ponto do domínio do problema. Entretanto, a homogenização das propriedades dificulta a precisão da resposta em locais com alto gradiente de deformação (regiões com descontinuidades), e que também, está diretamente relacionada com a necessidade de refinamento da malha nestas regiões de interface, o que reflete diretamente no esforço computacional que será demandado para resolver o problema.

Por sua vez, numa abordagem descontínua, cada componente da estrutura (blocos e argamassa) é representado individualmente. Como consequência, equações constitutivas distintas são necessárias para conseguir distinguir o comportamento de cada componente do ponto de vista de seus comportamentos mecânicos. Modelos que utilizam essa abordagem realizam análise em microescala, quando blocos, argamassa e interface entre blocos/argamassa são representados individualmente, ou microescala simplificada (ou mesoescala), quando as propriedades da argamassa e interface blocos/argamassa são homogeneizadas. Segundo [Giambanco et al., 2001], comumente esta abordagem utiliza elementos de interface, como elementos de ligação “*link elements*”, elementos esbeltos “*thin elements*” e elementos de espessura nula “*zero thickness interface elements*”. A relação comum entre eles consiste no equacionamento dos modelos constitutivos, denominados discretos, que são do tipo tensão *vs.* deslocamento. Cabe destacar que são comuns problemas de convergências atrelados

a esses modelos discretos.

Dentre os modelos para análise estrutural numérica desenvolvidos hoje em dia, aqueles com uma abordagem descontínua têm se destacado devido sua maior aproximação com a realidade. Neste contexto, essa dissertação baseia-se na proposta de um novo modelo numérico descontínuo em mesoescala (microescala simplificada) com a utilização de elementos finitos de interface com alta razão de aspecto, desenvolvido por [Manzoli et al., 2012]. Estes elementos finitos vêm sendo utilizados com sucesso para simular a criação e propagação de fissuras em materiais quase-frágeis [Manzoli et al., 2016, Rodrigues et al., 2016, Prazeres et al., 2016]. Um algoritmo de fragmentação de malha foi desenvolvido para inserção desses elementos na malha de elementos finitos original do problema. A principal vantagem desta técnica consiste na utilização de modelos constitutivos contínuos para representar regiões descontínuas, uma vez que o campo de deformações dos elementos de interface quando a altura do elemento tende a zero é semelhante ao apresentado pela abordagem de Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) [Oliver et al., 2015, 1999].

1.2. Objetivos

O objetivo geral deste trabalho consiste no desenvolvimento de um modelo numérico baseado no método dos elementos finitos para simulação de falhas (iniciação e propagação de fraturas) ao longo das juntas de argamassa em paredes de alvenaria. Por sua vez, os objetivos específicos são:

- desenvolver um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano para representar o comportamento da argamassa;
- integrar o modelo constitutivo utilizando uma técnica implícita-explícita (IMPL-EX) de integração a fim de evitar problemas de convergência durante a análise não linear;
- desenvolver um algoritmo de fragmentação de malha de elementos finitos para inserir elementos finitos de interface com alta razão de aspecto na malha original, com o objetivo de definir os possíveis caminhos de propagação de fratura ao longo da argamassa;
- simular o comportamento mecânico de paredes de alvenaria no plano submetidas à carregamentos estáticos.

1.3. Escopo e limitações da dissertação

Esta dissertação é totalmente voltada ao desenvolvimento de um modelo numérico via método dos elementos finitos e sua implementação computacional. Portanto, aspectos importantes são avaliados como a dependência de malha e convergência do sistema de equações não lineares.

Foi desenvolvido um modelo para representar a iniciação e propagação de fraturas em argamassas de alvenaria. O modelo desenvolvido é classificado na categoria de modelos em mesoescala (ou microescala simplificada) no qual argamassa e interface blocos/argamassa são homogeneizados. Assim, o comportamento mecânico de estruturas de alvenaria é dado pela combinação da resposta dos blocos de alvenaria e interfaces entre os mesmos.

Toda a não linearidade do problema se concentra na argamassa. Desta forma, os blocos de alvenaria são descritos através de modelo elástico linear.

As análises numéricas desenvolvidas se restringe a problemas bidimensionais e paredes de alvenaria sem reforços. No entanto, cabe destacar que a expansão da metodologia para problemas tridimensionais é direta, sem nenhum importante impacto na formulação, a não ser a natureza tridimensional do problema.

As análises desenvolvidas se restringe a carregamentos quase-estáticos, incluindo casos com diferentes intervalos de carregamentos, importantes na avaliação do efeito de confinamento na resposta ao cisalhamento. Além disso, os exemplos apresentados são de pequena escala quando comparados a estruturas históricas, como por exemplo igrejas e pontes. Assim, a metodologia foi aplicada para avaliar fraturas ao longo da argamassa em regiões locais da estrutura.

1.4. Plataforma computacional

Foi utilizada nesta pesquisa a plataforma computacional composta por um *solver* de elementos finitos em MATLAB ©e o pré e pós-processador GiD ©, desenvolvido pelo CIMNE – “*International Center for Numerical Methods in Engineering*” da “*Universitat Politècnica de Catalunya*” (Barcelona-Espanha). Cabe destacar que o *solver* já possuía toda a formulação básica do método dos elementos finitos implementada, incluindo elementos finitos convencionais e solução de sistemas de equações

não lineares. Este programa vem sendo desenvolvido de forma contínua por diversos pesquisadores.

Neste trabalho foi implementado no *solver* o modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo para representar o comportamento da argamassa. Este modelo foi implementado considerando uma técnica de integração implícita-explicita. A formulação deste modelo é apresentada na Seção 3.3.

Foi também desenvolvido um programa em MATLAB © para fragmentar a malha de elementos finitos, ou seja, inserir os elementos de interface entre os blocos de alvenaria. A fragmentação de malha é descrita na Seção 3.1 e detalhes da implementação computacional são apresentados no Apêndice A.

O fluxograma da Figura 1.1 ilustra as etapas da simulação numérica de uma estrutura de alvenaria utilizando a plataforma computacional. Inicialmente, constrói-se a geometria do modelo físico; aplica-se as condições de contorno e carregamento e discretiza-se a parede de alvenaria utilizando o pré-processador GiD ©. O arquivo de entrada gerado é lido e reescrito pelo programa responsável pela fragmentação da malha, inserindo os elementos de interface e gerando o arquivo de entrada final a ser lido pelo *solver*. Após análise pelo *solver*, um arquivo de saída é então lido pelo pós-processador GiD © para visualização dos resultados.

Figura 1.1.: Etapas da análise numérica na plataforma computacional.

1.5. Estrutura da dissertação

Esta dissertação está organizada em cinco capítulos, lista de referências e apêndices. Este Capítulo 1 contém a introdução do trabalho. O capítulo Capítulo 2 apresenta uma sucinta revisão bibliográfica sobre os principais tópicos de estruturas de alve-naria necessários para o entendimento do modelo numérico desenvolvido. O modelo numérico proposto é descrito no Capítulo 3. Toda a formulação matemática do mo-deló é apresentada neste capítulo e conceitos básicos para o seu entendimento são chamados quando necessários para serem consultados nos apêndices deste trabalho. O Capítulo 4 ilustra os exemplos numéricos realizados. Por fim, as conclusões e sugestões para trabalhos futuros são apresentadas no Capítulo 5.

2. Estruturas de alvenaria

Neste capítulo são apresentados os principais aspectos sobre estruturas de alvenaria que foram considerados no desenvolvimento do modelo numérico. Na seção Seção 2.1 discute-se a influência dos componentes blocos de alvenaria e argamassa no comportamento mecânico das estruturas de alvenaria. Além disso, são apresentados os modos de falha que ocorrem nessas estruturas. Na seção Seção 2.2 são apresentadas as principais características das abordagens numéricas encontradas na literatura para modelagem computacional de estruturas de alvenaria, segundo uma classificação usual disponível na literatura.

2.1. Comportamento mecânico

O complexo comportamento mecânico das estruturas de alvenaria é devido principalmente as distintas propriedades mecânicas apresentadas pelos seus constituintes, blocos e argamassa. A Figura 2.1 ilustra o comportamento mecânico característico de uma estrutura de alvenaria e seus componentes, através de curvas tensão *vs.* deformação, usualmente obtidas em ensaios de prismas uniaxiais de tração e compressão.

Figura 2.1.: Comportamento mecânico de prismas de alvenaria e seus componentes: curvas tensão *vs.* deformação obtidas em ensaios uniaxiais de tração e compressão. Adaptado de De Bellis [2010].

De Bellis [2010] define quatro propriedades com relação a estes ensaios: as resistências à tração da argamassa e do bloco são muito inferiores às suas resistências à compressão; o módulo de elasticidade do bloco é maior do que da argamassa; o bloco apresenta resposta aproximadamente linear seguida de uma ruptura frágil e as juntas de argamassa apresentam um comportamento altamente não linear e dúctil.

Na pesquisa desenvolvida por Page [1982] são apresentados os possíveis modos de falha em paredes de alvenaria submetidas a diferentes condições de carregamento. A Figura 2.2 ilustra os principais modos de falha observados para distintas tensões normais.

Figura 2.2.: Modos de falha para diferentes condições de estado de tensão - uniaxial e biaxial; [Page, 1982].

A presença de argamassa agindo no perímetro dos blocos é considerada, a priori, o ponto fraco de toda a estrutura, além de introduzi-la um comportamento anisotrópico [Lourenço, 1996]. Segundo [Addessi et al., 2014], as falhas nessas estruturas geralmente se localizam entre os vínculos da argamassa e do bloco originando fraturas nessa interface. Diversos estudos foram realizados nos últimos anos visando entender melhor o modelo de falha em estruturas de alvenaria, especialmente ao longo da argamassa [Costigan et al., 2015, Almeida et al., 2016, Mohamad et al., 2017].

2.1.1. Modos de falha no plano das juntas de argamassa

Podemos descrever os modos de falha nas juntas de argamassa através dos três tipos clássicos de modos de fratura baseados na mecânica da fratura [Uva and Salerno, 2006, Bolhassani et al., 2015]: modo de abertura (modo I), modo cisalhante (modo II) e modo de rasgamento (modo III), conforme ilustra a Figura 2.3. Na grande maioria dos casos os modos II e III são sempre acompanhados do modo I, sendo este o principal modo de fratura. Em análises bidimensionais, os modos I e II são os modos de interesse, enquanto o modo III apresenta grande importância em modelos 3D, uma vez que sua falha é caracterizado pelo cisalhamento fora do plano.

Figura 2.3.: Modos de falha baseados na Mecânica da Fratura. [Uva and Salerno, 2006].

2.1.1.1. Modo I

No modo I, a fratura pode ser compreendida pela quantidade de energia de deformação necessária G_f^I para se criar uma fissura unitária entre a interface da argamassa e bloco [Lourenço, 1996]. Esta energia é numericamente calculada como a área sob a curva $\sigma \times u$ (tensão normal *vs.* deslocamento). A Figura 2.4 ilustra a curva característica desse modo de fratura, que pode ser descrita simplificada da seguinte forma: (i) o comportamento do material pode ser considerado elástico linear até a resistência limite de tração f_t e (ii) a curva pós pico é regida por uma lei de amolecimento (diminuição gradual da tensão com o aumento de deformação). Valores típicos encontrados em experimentos revelam uma variação de $0,005 \leq G_f^I \leq 0,02$ [Nmm/mm^2] para argamassas de alvenaria [Lourenço, 1996].

Figura 2.4.: Curva da tensão *vs.* deslocamento do modo de fratura I para a argamassa.

2.1.1.2. Modo II

No modo II, a fratura é originada pelo cisalhamento da interface bloco/argamassa. Para estruturas de alvenaria, este modo de fratura está associado à pré-compressão dos blocos, conforme ilustra a Figura 2.5(a). Esta curva característica de tensão de cisalhamento *vs.* deslocamento é semelhante à curva do modo I, exceto a um patamar que permanece constante, cuja resposta depende da tensão de confinamento exercida sobre os blocos. Devido a este efeito, a Figura 2.5(b) mostra um ensaio característico de alvenaria, produzindo três curvas distintas em função da tensão de confinamento [van der Pluijm, 1999]. Nota-se que a tensão de cisalhamento resistente aumenta segundo o confinamento dos blocos.

Figura 2.5.: Curvas tensão *vs.* deslocamento do modo de fratura II para a argamassa: (a) curva característica e (b) curvas experimentais para três diferentes tensões de confinamento [van der Pluijm, 1999].

A energia de deformação G_f^{II} é considerada a área da curva $\tau \times v$ (tensão de cisalhamento *vs.* deslocamento). Ensaios experimentais vêm sendo desenvolvidos para caracterizar os parâmetros mecânicos desse modo de fratura [Lourenço et al., 2004, Almeida et al., 2016, van der Pluijm, 1999]. Os parâmetros tangente do ângulo de atrito $\mu = \tan \phi$ e coesão c influenciam diretamente a curva característica do modo II de falha [Lourenço, 1996]. Segundo [Almeida et al., 2016], uma vez que a argamassa é considerada um material coesivo, valores típicos desses parâmetros são $0,6 \leq \mu \leq 1,05$ e $0,63 \leq c \leq 1,39 [N/mm^2]$, respectivamente. Por fim, [Lourenço, 1996] considera a energia de deformação do modo II (G_f^{II}) variando entre $0,01$ e $0,25 [Nmm/mm^2]$.

2.2. Modelagem numérica de estruturas de alvenaria

Nos últimos anos diversos modelos numéricos têm sido desenvolvidos para modelagem computacional de estruturas de alvenaria [Manos et al., 2012, Vandoren et al., 2013, Salát, 2015, Drougkas et al., 2015, Toti et al., 2015, Tesei and Ventura, 2016, Smoljanović et al., 2015, Greco et al., 2016, Milani et al., 2014, Addessi et al., 2014, Macorini and Izzuddin, 2013, Facconi et al., 2013]. O desenvolvimento destes modelos tem sido um desafio, principalmente, por se tratar de uma estrutura complexa, composta por um conjunto de blocos sobrepostos que têm suas interfaces preenchidas por argamassa. Desta forma, a resposta da estrutura é função da res-

posta de cada um de seus componentes, blocos de alvenaria, argamassa e interface blocos/argamassa.

Segundo Lourenço [1996], geralmente os modelos numéricos desenvolvidos podem ser classificados de acordo com a escala de representação de seus componentes em três categorias: macroescala, microescala e microescala simplificada (mesoescala) (ver Figura 2.6).

Figura 2.6.: Diferentes escalas de modelagem de paredes de alvenaria de acordo com Lourenço [1996]: (a) macroescala; (b) microescala; (c) microescala simplificada (mesoescala).

2.2.1. Macroescala

Nos modelos macroscópicos, a estrutura de alvenaria é modelada como um único material com propriedades mecânicas homogeneizadas (blocos de alvenaria e argamassa). Modelos desta classe utilizam modelos constitutivos contínuos, com a mesma relação tensão *vs.* deformação definida para qualquer ponto do domínio do problema. Além disso a fissura é representada no elemento finito pela degradação constitutiva de seu modelo constitutivo. Nesta abordagem a fissura é proporcional à área (ou volume) do elemento finito, ou seja, a representação da falha está diretamente relacionado o refinamento da malha. Em geral, estes modelos são equipados com regime de amolecimento “*softening*” para descrever a falha estrutural, que implica em zonas de localização de deformação [Sluys et al., 1995, Wells and Sluys, 2001, De Bellis and Addessi, 2011, Greco et al., 2016], que poderá resultar em um sistema de equações mal condicionado. Além disso, estes modelos apresentam dependência da discretização de malha, que tem sido contornados com métodos de regularização (modelos não locais) [Jirásek, 2007].

A Figura 2.7 ilustra um modelo em macroescala desenvolvido por [Facconi et al., 2013] com modelo de fissuras distribuídas. Por fim, estes modelos são de fácil im-

plementação computacional, podendo ser formulados a partir de qualquer teoria baseada na mecânica do contínuo, como teoria da elastoplasticidade e mecânica do dano (Tesei and Ventura [2016], Pelá et al. [2013]), etc., e seus parâmetros podem ser obtidos à partir de ensaios simples de laboratório.

Figura 2.7.: Padrão de fissuras utilizando um modelo em macroescala: (a) resultado experimental e (b) resultado numérico [Faconi et al., 2013].

2.2.2. Microescala

Em modelos em microescala, blocos, argamassa e interface blocos/argamassa são representados separadamente, conforme ilustra a Figura 2.8. Em geral, blocos e argamassa são representados por elementos convencionais contínuos, enquanto a interface entre eles é modelada por elementos de interface. Segundo [Giambanco et al., 2001], os elementos de interface são classificados em três tipos: elementos de ligação “*link elements*”, elementos esbeltos “*thin elements*” e elementos de espessura nula “*zero thickness interface elements*”. Estes elementos utilizam relações constitutivas do tipo discreta (tensão *vs.* deslocamento). Uma vantagem deste modelo é sua representação mais próxima do modelo físico, ao custo de um maior esforço computacional, devido ao número de graus de liberdade introduzido na discretização em elementos finitos neste nível de visualização, quando comparado ao modelo macroescala. A Figura 2.8 ilustra um exemplo de modelo em microescala desenvolvido por Sandoval and Arnau [2016].

Figura 2.8.: modelo numérico para simulação de estrutura de alvenaria em micro-escala [Sandoval and Arnau, 2016].

2.2.2.1. Microescala simplificada (mesoescala)

Modelos em microescala simplificada, também conhecidos como modelos em mesoescala, podem ser entendidos como um modelo em microescala, homogeneizando a região da argamassa e interface blocos/argamassa. Desta forma, estes modelos são compostos pelos componentes blocos de alvenaria e interface. As interfaces entre os blocos são geralmente representadas pelos mesmos elementos de interface citados na Subseção 2.2.2, descrevendo o comportamento do conjunto homogeneizado argamassa e interface blocos/argamassa. Como a espessura (ou altura) dos elementos finitos de interface é inferior a altura da região de interface entre os blocos, geralmente aumenta-se o tamanho dos blocos para manter a geometria do problema, calculando-se as propriedades efetivas de cada constituinte em função de suas contribuições volumétricas [Lourenço, 1996]. A Figura 2.9 ilustra um exemplo de modelo em microescala simplificada desenvolvido por [Lourenço, 1996].

Nesta abordagem, é comum encontrarmos na literatura modelos que concentram a não linearidade do problema na região de interface (Vandoren et al. [2013], Petraccia et al. [2017], Dolatshahi and Aref [2011]), descrevendo o surgimento e propagação

da fratura ao longo desses elementos. Este modelo de representação apresenta um menor esforço computacional que o modelo em microescala, no entanto, cabe destacar, que seu emprego na modelagem de grandes estruturas continua demandando um grande esforço computacional quando comparado ao modelo em macroescala. Exemplos de modelo em microescala simplificada podem ser encontrados em (Alfano and Sacco [2006], Smoljanović et al. [2015], Shieh-Beygi and Pietruszczak [2008]).

Figura 2.9.: Modelagem numérica de uma parede de alvenaria em microescala simplificada (mesoescala) [Lourenço, 1996].

Por fim, cabe destacar que além dos modelos descontínuos empregados para simular falhas utilizando elementos de interface, modelos descontínuos que permitem a propagação da falha ao longo do domínio do elemento finito também têm sido propostos, a fim de evitar problemas com dependência de malha. No entanto cabe destacar que esses modelos necessitam de algoritmos para definir as direções de propagação das fissuras “crack path”. Estes métodos podem ser classificados como métodos de enriquecimento elementar (CSDA - “*Continuum Strong Discontinuity Approach*”) [Oliver et al., 1999] ou nodal (X-FEM - “*Extended Finite Element Method*”) [Benvenuti et al., 2008].

3. Modelo numérico proposto

Nesta seção é apresentado o modelo numérico proposto para representação em micro-escala simplificada (mesosescala) do comportamento mecânico de paredes de alvenaria. No modelo desenvolvido via método dos elementos finitos, blocos de alvenaria e interface entre eles (argamassa + interface blocos/argamassa) são discretizados separadamente, e consequentemente, modelos constitutivos distintos são adotados para descrever o comportamento dessas regiões.

Neste trabalho o comportamento não linear da estrutura se concentrará na região da argamassa, ou seja, será dado exclusivamente pelas interfaces entre os blocos de alvenaria. Nestas regiões, elementos finitos com alta razão de aspecto proposto por Manzoli et al. [2012] serão utilizados para descrever o surgimento e propagação das fraturas. Uma vez que esses elementos são muito pequenos quando comparados aos demais elementos da malha, sua inserção é realizada por um processo denominado fragmentação de malha de elementos finitos (Manzoli et al. [2016]). Por fim, os blocos de alvenaria terão seu comportamento descrito por uma lei constitutiva elástica linear.

A seguir é detalhado o processo de construção do modelo numérico através do processo de fragmentação de malha de elementos finitos (Seção 3.1), seguido de uma descrição da formulação do elemento finito de interface com alta razão de aspecto (Seção 3.2) e o modelo constitutivo desenvolvido para representar o comportamento das interfaces (Seção 3.3).

3.1. Processo de fragmentação de malha de elementos finitos

O modelo numérico desenvolvido baseia-se na técnica de fragmentação de malha de elementos finitos. Inicialmente, com base na geometria de uma parede de alvena-

ria (Figura 3.1(a)), uma malha padrão é construída composta por elementos finitos triangulares com três nós (Figura 3.1(b)). Em seguida, aplica-se a técnica de fragmentação de malha, que consiste na identificação e separação dos subdomínios de elementos finitos empregados para representar os blocos de alvenaria (Figura 3.1(c)) e inserção de elementos finitos de interface com alta razão de aspecto (Figura 3.1(d)).

Desta forma, o processo de fragmentação de malha consiste na readequação da malha original de elementos finitos, devido à inserção de elementos finitos de interface entre os blocos de alvenaria. Consequentemente, novos nós são adicionados à malha original, exigindo uma renumeração das conectividades dos elementos (Figura 3.1).

Figura 3.1.: Construção do modelo numérico proposto baseado na técnica de fragmentação de malha de elementos finitos: (a) parede de alvenaria; (b) discretização dos blocos de alvenaria em elementos finitos e identificação das interfaces; (c) separação dos blocos de alvenaria e (d) inserção dos elementos finitos de interface.

O algoritmo de fragmentação de malha foi desenvolvido em MATLAB[®] e suas etapas podem ser resumidas de acordo com o fluxograma da Figura 3.2. Inicialmente, o programa em MATLAB[®] faz a leitura de um arquivo com os dados da malha de elementos finitos original (Figura 3.1(a)) construída utilizando o pré-processador GiD. Na primeira etapa de fragmentação da malha, que consiste na separação dos elementos pertencentes aos subdomínios de cada bloco de alvenaria (Figura 3.1(b)); é aplicada uma redução no tamanho dos elementos finitos dos blocos, proporcio-

nal ao espaço introduzido para inserção dos pares de elementos finitos de interface (Figura 3.1(c)) a fim de não alterar a geometria da parede. Neste processo, há uma renumeração dos nós dos elementos finitos, e consequentemente, das conectividades dos elementos (Figura 3.1(d)). Por fim, o arquivo de entrada é reescrito para ser lido pelo solver de elementos finitos.

Figura 3.2.: Fluxograma do algoritmo desenvolvido em MATLAB para fragmentação da malha de elementos finitos.

3.2. Elemento finito de interface com alta razão de aspecto

Nesta pesquisa são utilizados elementos finitos de alta razão de aspecto (Figura 3.3(c)) como proposto por Manzoli et al. [2012] para representar as possíveis trajetórias de propagação de fraturas ao longo das juntas de argamassa de paredes de alvenaria, ou seja, através das interfaces entre os blocos (Figura 3.3(b)). Estes elementos foram recentemente aplicados com sucesso para simular interface concreto/armadura em estruturas de concreto armado [Rodrigues et al., 2015]; fissuras no concreto através de um modelo em mesoescala [Rodrigues et al., 2016] e propagação de fissuras em materiais quase frágeis Manzoli et al. [2016]. Trata-se do elemento finito convencional triangular com três nós (6 graus de liberdade), cujo comprimento de sua base

é muito superior ao tamanho de sua altura. Elementos de interface são inseridos entre os blocos da malha de elementos finitos original pela técnica de fragmentação de malha (Figura 3.3(a)) descrita na Seção 3.1. Este elemento apresenta as mesmas condições cinemáticas da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) Oliver et al. [1999, 2002] quando sua razão de aspecto é aumentada, permitindo a aplicação de modelos constitutivos contínuos convencionais (relação tensão *vs.* deformação) para descrever regiões com descontinuidades.

Figura 3.3.: Parede de alvenaria discretizada em elementos finitos utilizando a técnica de fragmentação de malha; (b) detalhe da inserção dos elementos de interface e (d) elemento finito de interface com alta razão de aspecto.

Como trata-se de um elemento finito triangular convencional de três nós, conforme ilustra a Figura 3.3(c), podemos obter o campo de deformações em relação ao sistema de coordenadas (n, s) , da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = B\mathbf{u} \quad (3.1)$$

onde, B é a matriz que coleciona as derivadas das funções de forma do elemento e $\mathbf{u}$ o vetor de deslocamentos nodais do elemento, dados por:

$$B = \frac{1}{2At} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & 0 & y_3 - y_1 & 0 & y_1 - y_2 & 0 \\ 0 & x_3 - x_2 & 0 & x_1 - x_3 & 0 & x_2 - x_1 \\ x_3 - x_2 & y_2 - y_3 & x_1 - x_3 & y_3 - y_1 & x_2 - x_1 & y_1 - y_2 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

$$\mathbf{u} = \{u_s^1, u_n^1, u_s^2, u_n^2, u_s^3, u_n^3\}^T \quad (3.3)$$

Desta forma, as componentes do tensor de deformações $\boldsymbol{\varepsilon} = \{\varepsilon_{ss}, \varepsilon_{nn}, \gamma_{sn}\}^T$, podem ser escritas como:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{bh} [(y_2 - y_3)u_s^1 + (y_3 - y_1)u_s^2 + (y_1 - y_2)u_s^3] \quad (3.4)$$

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{bh} [(x_3 - x_2)u_n^1 + (x_1 - x_3)u_n^2 + (x_2 - x_1)u_n^3] \quad (3.5)$$

$$\gamma_{sn} = \frac{1}{bh} [(x_3 - x_2)u_s^1 + (y_2 - y_3)u_n^1 + (x_1 - x_3)u_s^2 + (y_3 - y_1)u_n^2 + (y_1 - y_2)u_s^3]. \quad (3.6)$$

Quando a altura do elemento finito tende a zero ($h \rightarrow 0$), podemos definir um vetor $\llbracket u \rrbracket = \{\llbracket u \rrbracket_s, \llbracket u \rrbracket_n\}^T$ que coleciona as componentes do deslocamento relativo entre o ponto (1) e sua projeção (1)'. Logo, suas componentes podem ser escritas como:

$$\llbracket u \rrbracket_s = (u_s^1 - u_s^{1'}) \quad (3.7)$$

$$\llbracket u \rrbracket_n = (u_n^1 - u_n^{1'}), \quad (3.8)$$

onde, $\llbracket u \rrbracket_s$ é a parcela paralela e $\llbracket u \rrbracket_n$ a parcela normal a base do elemento.

Introduzindo as componentes geométricas h (altura) e b (base) do elemento finito de interface (Figura 3.3(c)) e as componentes do vetor $\llbracket u \rrbracket$ no tensor das deformações, podemos reescrever suas componentes da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ss} = \frac{1}{b}(u_s^3 - u_s^2) \quad (3.9)$$

$$\varepsilon_{nn} = \frac{1}{h}(u_n^1 - u_n^{1'}) = \frac{1}{h}[[u]]_n \quad (3.10)$$

$$\gamma_{sn} = \frac{1}{b}(u_n^3 - u_n^2) + \frac{1}{h}(u_s^1 - u_s^{1'}) = \frac{1}{b}(u_n^3 - u_n^2) + \frac{1}{h}[[u]]_s \quad (3.11)$$

Desta forma, o tensor das deformações pode ser decomposto como $\varepsilon = \hat{\varepsilon} + \tilde{\varepsilon}$, onde $\hat{\varepsilon}$ armazena as componentes que são função da altura do elemento h , e $\tilde{\varepsilon}$ que armazena o restante das componentes:

$$\hat{\varepsilon} = \frac{1}{h} \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2}[[u]]_s & 0 \\ \frac{1}{2}[[u]]_s & [[u]]_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{h}(\mathbf{n} \otimes [[\mathbf{u}]])^S \quad (3.12)$$

$$\tilde{\varepsilon} = \frac{1}{b} \begin{bmatrix} (u_s^3 - u_s^2) & \frac{1}{2}(u_n^3 - u_n^2) & 0 \\ \frac{1}{2}(u_n^3 - u_n^2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

onde $(\bullet)^S$ simboliza a parte simétrica de $(\bullet)$, o operador $\otimes$ é o produto diádico e o vetor $\mathbf{n}$ é o versor normal a base do elemento de interface.

Logo, o tensor das deformações fica definido como:

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_{ss} & \varepsilon_{sn} & 0 \\ \varepsilon_{sn} & \varepsilon_{nn} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{b}(u_s^3 - u_s^2) & \frac{1}{b}(u_n^3 - u_n^2) + \frac{1}{h}[[u]]_s & 0 \\ \frac{1}{b}(u_n^3 - u_n^2) + \frac{1}{h}[[u]]_s & \frac{1}{h}[[u]]_n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

no qual, $\varepsilon_{sn} = \gamma_{sn}/2$.

Podemos também escrever o tensor das deformações da seguinte forma:

$$\varepsilon = \underbrace{\frac{1}{h}(\mathbf{n} \otimes \llbracket \mathbf{u} \rrbracket)}_{\hat{\varepsilon}} + \tilde{\varepsilon} \quad (3.15)$$

Quando $h \rightarrow 0$ (Equação 3.14) a componente $\tilde{\varepsilon}$ permanece limitada em comparação à componente $\hat{\varepsilon}$ cujo valor é ilimitado. Nesta situação o campo de deformações do elemento de interface é quase exclusivamente representado em sua totalidade pelo salto do campo de deslocamentos $\llbracket \mathbf{u} \rrbracket$, ou seja, o deslocamento relativo entre o nó (1) e sua projeção (1)' na base do elemento. Além disso, o campo de deformações do elemento de interface, quando sua altura tende a zero ($h \rightarrow 0$), corresponde a cinemática da Aproximação Contínua de Descontinuidades Fortes (ACDF) [Oliver et al., 1999, 2002], aproveitando-se da principal vantagem desta teoria, que é a utilização de modelos constitutivos contínuos para descrever regiões descontínuas. A equivalência do campo de deformações do elemento finito de interface com alta razão de aspecto com o campo de deformações da ACDF pode ser encontrada com mais detalhes em Manzoli et al. [2012] e é apresentada de forma resumida no Apêndice B.

3.3. Modelo constitutivo para argamassa

Foi desenvolvido um modelo constitutivo baseado na mecânica do dano contínuo para representar o comportamento das juntas de argamassa e sua interface com os blocos de alvenaria. Os conceitos básicos da mecânica do dano contínuo estão resumidos no Apêndice C.

Inicialmente, é definido o tensor das tensões efetivas é definido a partir do tensor das tensões elásticas,

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^T = \mathbb{C} : \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.16)$$

onde $\mathbb{C}$ é tensor constitutivo de quarta ordem das constantes elásticas e $\boldsymbol{\varepsilon}$ o campo de deformações.

O tensor das tensões efetivas pode ser decomposto em suas parcelas normal $\bar{\sigma}$ e tangencial $\bar{\tau}$ da seguinte forma:

$$\bar{\sigma}^\tau = \bar{\sigma} + \bar{\tau} \quad (3.17)$$

O critério de falha é então definido por:

$$\Phi^\tau = \|\tau^\tau\| - \langle -\sigma_{nn} \rangle \mu - q^\tau \leq 0 \quad (3.18)$$

onde a norma da tensão efetiva equivalente $\|\tau^\tau\|$ é dada pela componente tangencial no plano considerado, σ_{nn} é a componente normal em relação ao plano, e μ é a tangente do ângulo de atrito da argamassa, $\langle \bullet \rangle$ é o operador de Macaulay, o qual retorna o valor da expressão em caso positivo ou zero caso contrário e q^τ é a variável interna limite.

Dividindo a Equação 3.18 por $(1 - d^\tau)$ de forma a expressar o critério de dano efetivo em relação as tensões efetivas, tem-se:

$$\bar{\Phi}^\tau = \|\bar{\tau}^\tau\| - \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu - r^\tau \leq 0 \quad (3.19)$$

A variável interna de dano r^τ no espaço de tensões efetivas é descrita por:

$$r^\tau = \frac{q^\tau - d^\tau \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu}{(1 - d^\tau)} \quad (3.20)$$

A variável interna r^τ é governada segundo pela equação:

$$r^\tau = \max [\|\bar{\tau}^\tau\| - \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu, r_0^\tau] \quad (3.21)$$

A Equação 3.21 define que a variável r^τ deve atingir o valor máximo, que tem seu valor inicial igual a coesão (c_0), para o dano ser ativado. Essas equações respeitam

as condições de carga e descarga conforme as relações de Kuhn-Tucker:

$$\bar{\Phi}^\tau \leq 0, \quad \dot{r}^\tau \geq 0 \quad e \quad \dot{r}^\tau \bar{\Phi}^\tau = 0 \quad (3.22)$$

A lei de evolução do dano d^τ pode ser expressa em termos de r^τ :

$$d^\tau = \frac{r^\tau - q^\tau}{r^\tau - < -\bar{\sigma}_{nn} > \mu} \quad (3.23)$$

A variável interna limite do cisalhamento q^τ para este modelo é descrita por:

$$q^\tau = r_0^\tau e^{-\frac{r_0^\tau}{G_f^{II}} h(\frac{r^\tau}{G})} \quad (3.24)$$

$$r_0^\tau = c_0 \quad (3.25)$$

onde c_0 é a coesão, G_f^{II} é a energia de deformação do modo II, G é o módulo de elasticidade transversal e h é a altura do elemento finito de interface com alta razão de aspecto. Dessa forma, podemos definir a tensão nominal σ^τ de forma:

$$\sigma^\tau = \bar{\sigma} + (1 - d^\tau) \bar{\tau} = \bar{\sigma}^\tau - d^\tau \bar{\tau} \quad (3.26)$$

Em seguida, aplica-se o modelo de dano à tração, cujo tensor das tensões efetivas $\bar{\sigma}^t$ é definido pelo tensor das tensões degradadas σ^τ pela aplicação do modelo de dano “cisalhante”:

$$\bar{\sigma}^t = \sigma^\tau \quad (3.27)$$

O critério de dano nominal Φ^t é expresso como:

$$\Phi^t = \|\tau^t\| - q^t \leq 0 \quad (3.28)$$

onde a norma da tensão efetiva equivalente $\|\tau^t\|$ é dada pela componente normal em relação ao plano σ_{nn} .

Dividindo a Equação 3.28 por $(1 - d^t)$ de forma a expressar o critério de dano efetivo em relação as tensões efetivas, tem-se:

$$\bar{\Phi}^t = \|\bar{\tau}^t\| - r^t \leq 0 \quad (3.29)$$

A variável interna de dano r^t no espaço de tensões efetivas é descrita por:

$$r^t = \frac{q^t}{(1 - d^t)} \quad (3.30)$$

na qual, a variável interna r^t é governada pela equação:

$$r^t = \max [\|\bar{\tau}^t\|, r_0^t] \quad (3.31)$$

A Equação 3.31 define que a variável r^t deve atingir o valor máximo, que tem seu valor inicial igual a resistência a tração f_t para o dano ser ativado. Essas equações têm suas condições de carga e descarga conforme as relações de Kuhn-Tucker:

$$\bar{\Phi}^t \leq 0, \quad \dot{r}^t \geq 0 \quad e \quad \dot{r}^t \bar{\Phi}^t = 0 \quad (3.32)$$

A lei de evolução do dano d^t pode ser expressa em termos de r^t :

$$d^t = 1 - \frac{q^t}{r^t} \quad (3.33)$$

e a variável interna limite da tração q^t para este modelo é descrita por:

$$q^t = r_0^t e^{Ah(1-\frac{r^t}{r_0^t})} \quad (3.34)$$

onde h é a altura do elemento e A fator de amolecimento definido por:

$$A = \frac{f_t^2}{\sqrt{EG_f^I}} \quad (3.35)$$

Dessa forma, podemos definir o tensor nominal das tensões como:

$$\boldsymbol{\sigma} = (1 - d^t)\bar{\boldsymbol{\sigma}}^t = (1 - d^t)(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\tau - d^\tau\bar{\boldsymbol{\tau}}) \quad (3.36)$$

3.3.1. Método de integração IMPL-EX

Para integrar o modelo constitutivo desenvolvido para representar as juntas de argamassa foi utilizada a técnica de integração implícita-explicita (IMPL-EX) desenvolvido por Oliver et al. [2006, 2008]. Esta técnica de integração foi recentemente aplicada com sucesso para representar materiais quase-frágeis [Manzoli et al., 2016, Rodrigues et al., 2016] e problemas elasto-plásticos [Prazeres et al., 2016]. A principal ideia do método consiste em utilizar a robustez do modelo explícito com a precisão do modelo implícito. Segundo Oliver et al. [2006] as principais características dessa técnica podem ser resumidas como:

- (i) definição de um tensor tangente positivo definido robusto na qual garante a estabilidade e convergência;
- (ii) o problema não linear é resolvido pelo método de Newton-Raphson. O método IMPL-EX é formulado de tal modo que se atinja a convergência do sistema de equações em apenas 2 passos de iteração;
- (iii) boa estabilidade do método proveniente da integração implícita;
- (iv) o erro do método é diretamente proporcional ao valor do passo de carregamento (limitação da integração explícita);

- (v) o método torna mais robusto o sistema de equações. Problemas com descontinuidades fortes (como por exemplo, contato e atrito), onde há possibilidade de penetração dos elementos, são linearizados (se o modelo constitutivo estiver adequado), pelo método IMPL-EX, o que resulta em um sistemas de equações lineares.

A método de integração IMPL-EX consiste em duas integrações em série:

- (a) primeiramente faz-se uma integração implícita utilizando o método retroativo de Euler na qual o tensor das tensões σ_{n+1} é calculado a partir da deformação ε_{n+1} ;
- (b) em um segundo momento, o cálculo do tensor das tensões é realizado por uma extrapolação explícita da variável interna $\tilde{r}_{n+1}$ que pode ser analisada como uma expansão em série de Taylor em torno do termo r_{n+1} até a dependência quadrática (Equação 3.37). Se trunca a extrapolação explícita no termo linear para obter a relação da variável $\tilde{r}_{n+1}$ em relação aos valores implícitos calculados no passo anterior Δr_n conforme Equação 3.38 ;

$$r_{n+1} = r_n + \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta r_n + \mathcal{O}(\Delta t_{n+1}^2) = \tilde{r}_{n+1} + \mathcal{O}(\Delta t_{n+1}^2) \quad (3.37)$$

$$\tilde{r}_{n+1} = r_n + \frac{\Delta t_{n+1}}{\Delta t_n} \Delta r_n \quad \text{com} \quad \Delta r_n = r_n - r_{n-1} \quad (3.38)$$

Esta integração tem suas limitações nas quais o passo de carregamento precisa ser pequeno o suficiente para conseguir reduzir o erro introduzido pelo cálculo de forma explícita ou ainda aumentar o grau da expansão de Taylor [Oliver et al., 2006]. A Figura 3.4(a) mostra um exemplo do método na variável interna r_{n+1} nos quais os valores de entrada do método já são conhecidos. Por sua vez, a Figura 3.4(b) ilustra à matriz tangente.

Figura 3.4.: Integração IMPL-EX.

A Tabela 3.1 mostra o algoritmo da integração utilizando IMPL-EX do modelo constitutivo desenvolvido para as juntas de argamassa. É importante notar que o modelo proposto é dividido em duas etapas aplicadas em série: primeiro aplica-se um modelo que danifica somente a parcela cisalhante do tensor das tensões efetivas (definido como as tensões elásticas), e posteriormente, aplica-se um modelo de dano à tração, no qual, danifica-se toda a parcela do tensor das tensões efetivas, definido como a tensão nominal obtida no modelo anterior. Cabe ressaltar que a compressão na interface é tratada como uma relação constitutiva linear na qual proporciona a não utilização de algoritmos de contato.

As tensões elásticas do passo atual ($n + 1$) de carregamento $\bar{\sigma}_{n+1}^r$ são calculadas a partir das deformações desse passo ϵ_{n+1} , enquanto variáveis internas de extrapolação explícita do passo atual são calculadas a partir do passo anterior (n).

Tabela 3.1.: Esquema de integração IMPL-EX do modelo constitutivo da argamassa.

Dano ao cisalhamento aplicado às tensões elásticas	Dano a tração
<p>Entrada: $\epsilon_{n+1}, r_n^\tau, \Delta r_n^\tau$</p> <p>(i) Calcular o tensor das tensões elásticas:</p> $\bar{\sigma}_{n+1}^\tau = \mathbb{C} : \epsilon_{n+1}$ <p>(ii) Calcular as condições de carga e descarga:</p> $\ \bar{\tau}^\tau\ - \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu \leq r^\tau \rightarrow r_{n+1}^\tau = r_n^\tau$ $\ \bar{\tau}^\tau\ - \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu > r^\tau \rightarrow r_{n+1}^\tau = \ \bar{\tau}^\tau\ - \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu$ <p>(iii) Calcular a variável interna de tensão:</p> $\Delta r_{n+1}^\tau = r_{n+1}^\tau - r_n^\tau$ <p>(iv) Calcular sua extrapolação explícita $\tilde{r}_{n+1}^\tau$</p> $\tilde{r}_{n+1}^\tau = r_n^\tau + \Delta r_n^\tau$ <p>(v) Calcular a variável de dano extrapolada $\tilde{d}_{n+1}^\tau$</p> $\tilde{d}_{n+1}^\tau = \frac{r_{n+1}^\tau - \bar{q}_{n+1}^\tau}{\tilde{r}_{n+1}^\tau - \langle -\bar{\sigma}_{nn} \rangle \mu}$ <p>(vi) Calcular tensão nominal de cisalhamento do passo:</p> $\sigma^\tau = \bar{\sigma}^\tau - d^\tau \bar{\tau}$ <p>Saída: $r_{n+1}^\tau, \Delta r_{n+1}^\tau$</p>	<p>Entrada: $\sigma^\tau, r_n^t, \Delta r_n^t$</p> <p>(vii) Calcular a tensão efetiva de tração $\bar{\sigma}^t$:</p> $\bar{\sigma}_{n+1}^t = \sigma_{n+1}^\tau$ <p>(viii) Calcular as condições de carga e descarga:</p> $\ \bar{\tau}^t\ \leq r^t \rightarrow r_{n+1}^t = r_n^t$ $\ \bar{\tau}^t\ > r^t \rightarrow r_{n+1}^t = \ \bar{\tau}^t\ $ <p>(ix) Calcular a variável interna de tensão:</p> $\Delta r_{n+1}^t = r_{n+1}^t - r_n^t$ <p>(x) Calcular sua extrapolação explícita $\tilde{r}_{n+1}^t$</p> $\tilde{r}_{n+1}^t = r_n^t + \Delta r_n^t$ <p>(xi) Calcular a variável de dano extrapolada $\tilde{d}_{n+1}^t$</p> $\tilde{d}_{n+1}^t = 1 - \frac{\bar{q}_{n+1}^t(r_{n+1}^t)}{\tilde{r}_{n+1}^t}$ <p>(xii) Calcular tensão extrapolada do passo $\tilde{\sigma}_{n+1}$</p> $\tilde{\sigma}_{n+1} = (1 - \tilde{d}_{n+1}^t) \bar{\sigma}_{n+1}^t$ <p>Saída: $r_{n+1}^t, \Delta r_{n+1}^t, \tilde{\sigma}_{n+1}$</p> <p>Atualizar o operador da matriz tangente:</p> $\mathbb{C}_{n+1}^{\text{tan}^t} = \frac{\partial \tilde{\sigma}_{n+1}}{\partial \epsilon_{n+1}} *$

* Ver Apêndice D.

4. Aplicações numéricas

Nesta seção são apresentadas as simulações numéricas realizadas utilizando o modelo em mesoescala proposto. Foram construídos modelos numéricos bidimensionais submetidos a carregamentos estáticos sujeitos a análises sob estado plano de tensão. Inicialmente, ensaios básicos de tração, compressão e cisalhamento são realizados a fim de demonstrar a resposta do modelo para descrever o comportamento das interfaces entre os blocos de alvenaria. A seguir, são simuladas uma viga de alvenaria sob flexão e paredes de alvenaria (com e sem abertura) sob cisalhamento. Para todos os exemplos, as interfaces entre os blocos de alvenaria são representadas com elementos finitos de interface e modelo constitutivo de dano descrito na Seção 3.3, enquanto que os blocos de alvenaria são discretizados com elementos finitos triangulares de três nós e comportamento elástico linear.

4.1. Testes básicos

4.1.1. Tração e compressão

Para descrever o comportamento do modelo proposto para a interface entre os blocos de alvenaria sob tração e compressão, foi construído um modelo numérico de uma estrutura simples, composta por dois blocos de alvenaria, com dimensões de $50 \times 210 \times 100 \text{ [mm}^3\text{]}$, conforme ilustra a Figura 4.1. A Figura 4.2 mostra os quatro tipos de malhas não estruturadas utilizadas nestes testes indicando a região em azul a localização dos elementos finitos de interface com alta razão de aspecto. A simulação à tração avalia a abertura de fissuras na interface pelo modo I. Por sua vez, ensaio de compressão foi realizado para investigar se o modelo proposto é capaz de evitar penetração de malhas (penetração entre os blocos de alvenaria). Para ambas as simulações, foi imposto deslocamento vertical $\delta = 0,1 \text{ [mm]}$ conforme ilustra a Figura 4.1(a). A Tabela 4.1 indica o refinamento da malha adotado na interface

entre os blocos, ou seja, a quantidade de pares de elementos finitos de interface com alta razão de aspecto empregado nos quatro casos considerados. As propriedades adotadas para os materiais estão listadas na Tabela 4.2.

Figura 4.1.: Configuração do ensaio numérico para descrever o comportamento do modelo proposto para interface sob: (a) tração e (b) compressão.

Figura 4.2.: Malhas de elementos finitos adotadas para os testes básicos de tração e compressão: (a) malha m1, (b) malha m2, (c) malha m3 e (d) malha m4.

Tabela 4.1.: Pares de elementos finitos com alta razão de aspecto empregados ao longo da interface entre os blocos de alvenaria.

	malha m1	malha m2	malha m3	malha m4
número de pares	18	28	35	52

Tabela 4.2.: Propriedades dos materiais empregados nos testes básicos de tração e compressão.

	E (N/mm ²)	ν	f_t (MPa)	Gf^I (N/mm)	c_0 (MPa)	Gf^{II} (N/mm)	μ
Bloco	16700	0,15	—	—	—	—	—
Argamassa	2900	0	2	0,05	0,88	0,05 — 0,05 σ	1

Os gráficos subsequentes são representados por tensão *vs.* deslocamento imposto em que mostram as repostas à tração e à compressão nas Figura 4.3 e Figura 4.4, respectivamente.

Figura 4.3.: Respostas obtidas nos ensaios de tração para as 4 diferentes discretizações de malha adotadas: tensão x deslocamento imposto.

No caso do ensaio das curvas à tração, todas seguem um padrão elástico linear até a resistência limite definida na Tabela 4.2. A resposta pós pico do modelo numérico se comporta na forma de uma curva exponencial de amolecimento, o que era previsto em sua formulação.

Figura 4.4.: Resposta do teste básico de compressão para as 4 diferentes discretizações de malha adotadas: tensão x deslocamento imposto.

No caso do ensaio à compressão (Figura 4.4) as quatro curvas seguem um padrão elástico linear até o deslocamento imposto $\delta = 0,1 [mm]$. A importância desse teste básico se justifica para se demonstrar que o modelo constitutivo implementado para o elemento finito de interface, quando submetido a compressão, permanece elástico linear que tem por consequência evitar à penetração de blocos.

Por fim, as quatro malhas apresentam um resposta numericamente satisfatória. Percebe-se que as resposta obtidas foram equivalentes para as discretizações de malha consideradas.

4.1.2. Cisalhamento

Neste exemplo, são simulados numericamente os ensaios experimentais realizados por [van der Pluijm, 1999] a fim de verificar a resposta da interface entre os blocos de alvenaria sob efeito de cisalhamento para diferentes tensões de confinamento. Trata-

se de uma estrutura simples composta por dois blocos de alvenaria, cujo ensaio pode ser descrito em duas etapas: (i) os blocos são comprimidos horizontalmente e (ii) um deslocamento vertical é aplicado. O modelo numérico construído é ilustrado na Figura 4.5. Os elementos finitos de interface com alta razão de aspecto foram inseridos pela técnica de fragmentação de malha e estão destacados em azul (ver Figura 4.6). Os blocos têm as mesmas dimensões dos testes de tração e compressão realizados experimentalmente.

Figura 4.5.: Configuração do ensaio numérico para descrever o comportamento do modelo proposto sob cisalhamento com diferentes tensões de confinamento: (a) estágio I - pré-compressão e (b) estágio II - cisalhamento.

Para demonstrar esta característica do modelo, três ensaios foram realizados com distintas tensões de confinamento. A Tabela 4.3 mostra as propriedades dos materiais utilizados nesta análise. Para estas simulações foram adotados 17 pares de elementos finitos de interface (elementos em azul) e 236 elementos finitos triangulares com três nós para os blocos de alvenaria, conforme ilustra a Figura 4.6.

Figura 4.6.: Discretização em elementos finitos do ensaio numérico para descrever o comportamento do modelo proposto sob cisalhamento.

Tabela 4.3.: Propriedades dos materiais empregados no teste básico de cisalhamento.

	E (N/mm ²)	ν	f_t (MPa)	Gf^I (N/mm)	c_0 (MPa)	Gf^{II} (N/mm)	μ
Bloco	16700	0,15	–	–	–	–	–
Argamassa	2900	0	2	0,05	0,88	0,05 – 0,05 σ	1

Uma equação característica para a energia de fratura em modo II foi aplicada para esse ensaio uma vez que, conforme a Figura 2.5, diferentes tensões de confinamento geram distintas curvas tensão *vs.* deslocamento. Logo o modo II de fratura é modificado automaticamente dependendo da tensão de confinamento para cada simulação. A Figura 4.7 mostra as curvas de tensão *vs.* deformação dos três ensaios. As regiões em cinza estabelecem as variações encontradas nos testes experimentais [van der Pluijm, 1999] e as linhas cheias são os resultados obtidos pelo modelo numérico.

Figura 4.7.: Curvas tensão de cisalhamento *vs.* deslocamento vertical imposto: resultados numéricos x experimentais para as diferentes tensões de confinamento.

As curvas numéricas apresentadas na Figura 4.7 mostram uma boa correlação entre as respostas dos modelos numéricos e experimentais.

4.2. Parede de alvenaria sob flexão

Para avaliar o modelo numérico sujeito à flexão, foi modelada numericamente uma parede ensaiada em laboratório por Chaimoon and Attard [2009]. Trata-se de uma parede com dimensões de $1400 \times 334 \text{ [mm}^2\text{]}$ com blocos de alvenaria de $76 \times 230 \times 110 \text{ [mm}^3\text{]}$ e argamassa com espessura de 10 [mm] . A Figura 4.8 ilustra a configuração de ensaio e malha de elementos finitos adotada. Foram utilizados um total de 5688 elementos finitos triangulares de três nós na discretização dos blocos de alvenaria e 520 pares de elementos finitos com alta razão de aspecto (destacados em azul). Deslocamento vertical de $\delta = 0,7 \text{ [mm]}$ foi aplicado no eixo de simetria da viga para simular o experimento realizado.

Figura 4.8.: Geometria, condições de contorno, malha de elementos finitos e carregamento aplicado na parede de alvenaria sob flexão.

As propriedades adotadas para os materiais estão listadas na Tabela 4.4. Os valores dos módulos de elasticidade do bloco e argamassa foram calibrados para ajustar a curva na sua fase elástica linear. A deformação final do modelo numérico é ilustrado na Figura 4.9. A Figura 4.10 ilustra o padrão de fissuras encontradas experimentalmente em Chaimoon and Attard [2009] e o padrão de fissuras no modelo numérico. Percebe-se que o padrão de fissuras tem uma boa correlação com o resultado experimental.

Tabela 4.4.: Propriedades dos materiais empregados na parede de alvenaria sob flexão.

	E (N/mm ²)	ν	ft (MPa)	Gf^I (N/mm)	c_0 (MPa)	Gf^{II} (N/mm)	μ
Bloco	4500	0,2	–	–	–	–	–
Argamassa	2000	0	0,138	0,003	0,18	0,03	0,89

Figura 4.9.: Configuração deformada e propagação da fratura (fator de escala igual a 30) para o deslocamento vertical de $\delta = 0,7mm$.

Figura 4.10.: Padrão de fissuras experimental x numérico para deslocamento imposto $\delta = 0,7mm$: (a) experimental [Chaimoon and Attard, 2009] e (b) numérico.

A Figura 4.11 mostra as curvas força vertical *vs.* deslocamento vertical e a Figura 4.12 mostra as curvas da força vertical *vs.* CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*). Na simulação numérica, a força vertical é calculada como a soma das reações verticais nos apoios. Em ambos os gráficos foi obtida uma boa correlação entre a resposta numérica e experimental. Inicialmente, a estrutura se comporta de forma elástica linear, ou seja, sem o aparecimento de fissuras, até aproximadamente o carregamento de $3,6kN$. Após este pico de carregamento, a resposta não linear fica evidente. Neste ponto, ocorre a primeira abertura de fissura na argamassa localizada na região inferior do vão central da viga pelo modo de fratura I. Com a abertura vertical da primeira fiada, ocorre um acúmulo de tensão localizado na argamassa horizontal adjacente superior (localizada na base da segunda fiada) que resulta no ativamento do modo cisalhante do modelo. A partir deste momento, os modos de fratura I e II atuam até a terceira fiada onde se propagam as fissuras já abertas, o que gera um maior deslocamento vertical, justificando a queda brusca nos gráficos. Deste modo, a fissura se propaga até a parte superior da viga (onde o deslocamento é aplicado) até o final da análise. Este processo de fissura na estrutura proveniente do modelo numérico é semelhante daquele encontrado no experimental o que pode ser visto nas curvas apresentadas e nos padrões de fissura.

Figura 4.11.: Curvas experimental e numérica: força *vs.* deslocamento imposto.

Figura 4.12.: Curvas experimental e numérica: força *vs.* CMOD.

4.3. Paredes de alvenaria sob cisalhamento

Neste exemplo são modeladas computacionalmente duas paredes de alvenaria (com e sem abertura) sob cisalhamento ensaiadas em laboratório por Raijmakers e Vermelfoort (Raijmakers and Vermelfoort [1992], Vermelfoort and Raijmakers [1993], CUR [1994]). As paredes de alvenaria possuem dimensões de $990 \times 1106 [mm^2]$ e um total de 18 fiadas. Os blocos de alvenaria são sólidos de dimensões de $76 \times 230 \times 110 [mm^3]$,

enquanto a argamassa possui uma espessura de $10 [mm]$. Para facilitar as condições de contorno do ensaio e aplicação do carregamento, foram utilizadas duas vigas de aço, no topo e base de 70 mm de altura. As duas paredes foram submetidas a uma tensão de pré compressão de $\sigma = 0,3 [N/mm^2]$, seguida de carregamento horizontal na viga do topo.

As propriedades dos materiais para ambas as configurações são listadas na Tabela 4.5. Estes valores foram obtidos com base nos valores adotados nas simulações realizadas por Lourenço [1996] utilizando um modelo em mesoescala. Neste exemplo, o módulo de elasticidade da argamassa foi calculado multiplicando-se o parâmetro de rigidez k [força / unidade de volume] fornecido por Lourenço [1996] pela altura do elemento finito de interface (na ordem de $h \sim 0,01 [mm]$).

Tabela 4.5.: Propriedades dos materiais empregados nas paredes de alvenaria.

	E (N/mm ²)	G (N/mm ²)	ν	f_t (MPa)	Gf^I (N/mm)	c_0 (MPa)	Gf^{II} (N/mm)	μ
Bloco	14000	–	0,15	–	–	–	–	–
Argamassa	820	360	0	0,25	0,018	$1,4f_t$	0,125	0,75

4.3.1. Parede de alvenaria sem abertura

A Figura 4.13 ilustra o modelo numérico criado para a parede sem abertura. Foram utilizados 11551 elementos triangulares na discretização dos blocos de alvenaria e 1737 pares de elementos finitos de alta razão de aspecto na discretização das interfaces (destacados em azul). Após aplicação da tensão de confinamento, foi imposto um deslocamento horizontal de $\delta = 4 [mm]$ na viga superior.

Figura 4.13.: Modelo numérico para a parede de alvenaria sem abertura. (a) estágio I de carregamento: pré-compressão e (b) estágio II de carregamento: cisalhamento.

A Figura 4.14 ilustra o padrões de fissura para os deslocamentos de $\delta = 2$ [mm] e $\delta = 4$ [mm], respectivamente. Primeiramente, ocorre a primeira abertura horizontal das fissuras na argamassa localizadas nas regiões inferior direita e superior esquerda da parede. Em seguida, aberturas verticais no meio da parede aparecem (Figura 4.14(a)). Com o incremento do deslocamento horizontal, as tensões de cisalhamento solicitantes nos elementos finitos de interface atingem seu valor limite de resistência e, com isso, o padrão de fissura ocorre de modo diagonal nas fiadas adjacentes, seguindo em direção as partes superior direita e inferior esquerda.

Figura 4.14.: Padrão de fissura da parede de alvenaria sem abertura (fator de escala igual a 30) para os seguintes deslocamentos horizontais impostos: (a) $\delta = 2 [mm]$ e (b) $\delta = 4 [mm]$.

A Figura 4.15 compara os padrões de fissuras obtidos nos ensaios de laboratórios (paredes J4D e J5D) (Figura 4.15(a) e (b)) e pelo modelo numérico proposto (Figura 4.15(c)). Percebe-se uma boa correlação entre os padrões de fissuração experimental e numérico.

Figura 4.15.: Padrão de fissura da parede de alvenaria sem abertura: (a) resultado experimental (J4D); (b) resultado experimental (J5D) e (c) resultado da simulação numérica.

A Figura 4.16 mostra as curvas força horizontal *vs.* deslocamento horizontal imposto na parede. Na simulação numérica foram obtidos os resultados em termos de reação

horizontal *vs.* deslocamento horizontal imposto. As duas curvas experimentais (J4D e J5D) são destacadas pela região em cinza. A curva contínua vermelha refere-se a resposta obtida numericamente por Lourenço and Rots [1994] utilizando um modelo em microescala simplificada, enquanto que a curva contínua em azul ilustra a resposta obtida pelo modelo numérico proposto.

Figura 4.16.: Curvas força horizontal *vs.* deslocamento horizontal imposto.

Como pode-se notar há uma boa correlação entre as respostas obtidas pelas simulações computacionais. No entanto, percebe-se que ambas diferem das respostas experimentais após atingirem um deslocamento de aproximadamente $\delta = 1 [mm]$. Após esse trecho, as curvas experimentais (região em cinza) mostram uma certa tendência a se estabilizar, enquanto que o carregamento nas repostas numéricas tendem a crescer com o aumento do deslocamento. Conforme já mencionado por outros autores Lourenço and Rots [1994] esse comportamento se justifica pela consideração de comportamento elástico linear nos blocos de alvenaria.

4.3.2. Parede de alvenaria com abertura

A Figura 4.17 mostra a geometria do modelo numérico construído para a parede com abertura. Os resultados obtidos foram comparados com as respostas de dois experimentos com as mesmas configurações (paredes J2G e J3G). Foram utilizados 4663 elementos triangulares na discretização dos blocos de alvenaria e 893 pares de elementos finitos de alta razão de aspecto na discretização das interfaces (destacados em azul). Após aplicação da tensão de confinamento, foi imposto um deslocamento horizontal de $\delta = 5 \text{ [mm]}$ na viga superior.

Figura 4.17.: Modelo numérico para a parede de alvenaria com abertura. (a) estágio I de carregamento: pré-compressão e (b) estágio II de carregamento: cisalhamento.

Conforme ilustra a Figura 4.18(a), primeiramente ocorrem as primeiras fissuras nas juntas de argamassa horizontais e verticais, localizadas próximas à região da abertura. Com o aumento do incremento de deslocamentos, essas fissuras se fecham e surgem as primeiras fissuras horizontais laterais, nas regiões inferior direita e superior esquerda. A Figura 4.18(b) mostra o padrão de fissuras para o deslocamento imposto de $\delta = 5 \text{ [mm]}$. Como pode ser visto nesta figura, as fissuras localizadas na região da abertura se propagam de modo diagonal até as vigas de aço; as aberturas horizontais nas regiões inferior direita e superior esquerda aumentam.

Figura 4.18.: Padrão de fissura da parede de alvenaria com abertura (fator de escala igual a 10) para os seguintes deslocamentos horizontais impostos: (a) $\delta = 2,5 \text{ [mm]}$ e (b) $\delta = 5 \text{ [mm]}$.

A Figura 4.15 compara os padrões de fissuras obtidos nos ensaios de laboratórios (paredes J2G e J3G) (Figura 4.19(a) e (b)) e pelo modelo numérico proposto (Figura 4.19(c)). Percebe-se uma boa correlação entre os padrões de fissuração experimental e numérico.

Figura 4.19.: Padrão de fissura da parede de alvenaria sem abertura: (a) resultado experimental (J2G); (b) resultado experimental (J3G); e (c) resultado da simulação numérica.

A Figura 4.20 ilustra as curvas em termos de força horizontal *vs.* deslocamento horizontal imposto na parede. Na simulação numérica foram obtidos os resultados em termos de reação horizontal *vs.* deslocamento horizontal imposto. Da mesma

forma como ocorreu na simulação da parede de alvenaria sem abertura, os resultados experimentais e numérico apresentaram uma boa correlação até um deslocamento imposto de $\delta = 1 [mm]$. Após esse trecho, o resultado numérico apresenta um aumento da carga com o aumento do deslocamento imposto enquanto que as respostas experimentais mantêm-se quase que contantes.

Figura 4.20.: Curvas força horizontal *vs.* deslocamento horizontal imposto.

Conforme relatado nos resultados experimentais, para o caso da parede com abertura, as fraturas surgem ao longo das juntas de argamassa, o que também foi constatado no modelo numérico desenvolvido neste trabalho. No entanto, como também já tinha mencionado Lourenço [1996], nos ensaios de paredes com aberturas, há uma grande concentração de tensões de compressão nos cantos das paredes e cantos das aberturas. Para constatar essa observação, a Figura 4.21 mostra o campo de tensões principais de compressão obtido usando o modelo numérico proposto. Segundo Lourenço [1996], é necessário considerar para a argamassa um modelo não linear à compressão para capturar este efeito.

Figura 4.21.: Tensões principais de compressão da parede com abertura para deslocamento horizontal imposto $\delta = 5 [mm]$.

5. Conclusões e sugestões para trabalhos futuro

5.1. Conclusões

As conclusões desta pesquisa foram divididas em tópicos para uma melhor explicação de cada aspecto abordado conforme listados abaixo.

Contribuições desta pesquisa

A principal contribuição dessa dissertação foi o desenvolvimento de uma nova técnica numérica para simulações bidimensionais de estruturas de alvenaria sujeitas à carregamentos estáticos. Para isso, um novo modelo constitutivo baseado na mecânica do dano foi desenvolvido para representar as juntas de argamassa em estruturas de alvenaria. Este modelo constitutivo foi aplicado em elementos finitos de interface com alta razão de aspecto, inseridos em uma malha “convencional” de elementos finitos através da técnica de fragmentação de malha .

Modelo constitutivo proposto e aspectos numéricos

O modelo constitutivo proposto apresentou bons resultados no que tange a criação e propagação de fissuras em estruturas de alvenaria. As leis de danificação adotadas para tração e cisalhamento apresentaram uma boa correlação com as respostas encontradas na literatura.

A grande vantagem deste modelo numérico consiste na utilização de elementos finitos de interface com alta razão de aspecto, que têm como sua principal característica, descrever regiões descontínuas por modelos constitutivos contínuos (relação tensão *vs.* deformação). Outra grande vantagem do modelo numérico proposto, consiste na

utilização do método de integração IMPL-EX, no qual o operador da matriz de rigidez tangente tem como característica numérica ser sempre de forma positiva definida, evitando assim mal condicionamento numérico. Como uma das consequências desse efeito, a convergência das equações de equilíbrio, via método de Newton-Raphson, é sempre alcançada em no máximo duas iterações, o que torna este modelo atrativo do ponto de vista da resolução do sistema numérico.

Simulações numéricas

Em um primeiro momento, o modelo numérico proposto para a argamassa foi validado através da simulação de três testes básicos: tração, compressão e cisalhamento. Em paralelo, uma avaliação da malha de elementos finitos foi elaborada para avaliar a dependência da inserção de elementos finitos de interface na resposta estrutural. As premissas consideradas previamente no modelo numérico se mostram efetivas para os três tipos de ensaios conforme os gráficos apresentados. Além disso, ficou evidente que para um refinamento de malha adequado, conforme uma maior ou menor inserção de elementos finitos de interface com alta razão de aspecto na malha original a resposta numérica não sofre variações significativas.

Posteriormente, uma viga em alvenaria sobre flexão foi simulada a fim de se avaliar o comportamento de uma estrutura mais complexa. Nesta simulação numérica, nota-se que a propagação da fissura se deu pela argamassa, com uma boa correlação daquela encontrada no modelo físico real. Além disso os gráficos apresentado em termos de força vertical *vs.* deslocamento vertical e força vertical *vs.* CMOD (*Crack Mouth Opening Displacement*) apresentaram um comportamento similar as curvas obtidas experimentalmente.

Por fim, duas paredes de alvenaria foram simuladas para a avaliação do modelo numérico quando submetidas a uma pré-compressão. Embora as deformações das paredes se aproximem daquelas encontradas na literatura, a discrepância dos gráficos é motivo de considerações. Especialmente para as paredes de alvenaria, o tratamento simples adotado com a hipótese de comportamento elástico linear para os blocos de alvenaria e juntas de interface submetidas à compressão, certamente influenciaram a respostas destas simulações. Para o exemplo de parede sem abertura, pode-se perceber que o resultado obtido sem um tratamento adequado que limita-se o estado de tensão à compressão para as juntas de interface (*“cap model”*) foi semelhante ao proposto por outros pesquisadores que consideraram a mesma hipótese. Para

a parede com abertura, é descrito na literatura que além da consideração do “*cap model*” para a juntas de argamassa, para deslocamentos acima de 5 [mm], é também importante considerar a não linearidades nos blocos de alvenaria, devido a alta concentração de tensões em algumas regiões da estrutura.

Por fim, os resultados obtidos nas simulações demonstram a capacidade do modelo em capturar o efeito da criação e propagação de fissuras em estruturas de alvenaria cuja falha se dá predominantemente na presença de solicitações de tração e cisalhamento.

5.2. Sugestões para trabalhos futuros

A abordagem em mesoescala nessa pesquisa se mostrou promissora com o uso de elementos finitos de interface com alta razão de aspecto para simular o comportamento da propagação de falhas ao longo das juntas de argamassa. Como uma sequência dessa linha de pesquisa, uma série de propostas para trabalhos futuros é listada à seguir:

- Considerar modelos não lineares para representar o comportamento do bloco de alvenaria.
- Considerar um “*cap model*” para o trecho comprimido do modelo constitutivo desenvolvido para as juntas de argamassa.
- Estender a formulação para análises de estruturas tridimensionais.
- Inserir no modelo técnicas de representação de reforços para simulação de estrutura de alvenaria armada.
- Introduzir na plataforma formulações para consideração de efeitos cíclicos.
- Aplicar modelos adaptativos para propagação de fissuras, diminuindo o custo computacional necessário para resolver o problema.

Referências Bibliográficas

- Daniela Addessi and Elio Sacco. Nonlinear analysis of masonry panels using a kinematic enriched plane state formulation. *International Journal of Solids and Structures*, 90:194 – 214, 2016. ISSN 0020-7683.
- Daniela Addessi, S Marfia, E Sacco, and J Toti. Modeling approaches for masonry structures. *Open Civil Engineering Journal*, 8(1):288–300, 2014.
- Valerio Alecci, Mario Fagone, Tommaso Rotunno, and Mario De Stefano. Shear strength of brick masonry walls assembled with different types of mortar. *Construction and Building Materials*, 40:1038 – 1045, 2013. ISSN 0950-0618. Special Section on Recycling Wastes for Use as Construction Materials.
- Giulio Alfano and Elio Sacco. Combining interface damage and friction in a cohesive-zone model. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 68(5): 542–582, 2006.
- João A.P.P. Almeida, Davide Bordigoni, Eduardo B. Pereira, Joaquim A.O. Barros, and Alessandra Aprile. Assessment of the properties to characterise the interface between clay brick substrate and strengthening mortar. *Construction and Building Materials*, 103:47 – 66, 2016. ISSN 0950-0618.
- E. Benvenuti, A. Tralli, and G. Ventura. A regularized xfm model for the transition from continuous to discontinuous displacements. *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, 74(6):911–944, 2008. ISSN 1097-0207.
- O. Bergamo, G. Campione, C. Cucchiara, and G. Russo. Structural behavior of the old masonry bridge in the gulf of castellammare. *Engineering Failure Analysis*, 62:188 – 198, 2016. ISSN 1350-6307.
- Mohammad Bolhassani, Ahmad A. Hamid, Alan C.W. Lau, and Franklin Moon. Simplified micro modeling of partially grouted masonry assemblages. *Construction and Building Materials*, 83:159 – 173, 2015. ISSN 0950-0618.

- Eduardo M. Bretas, José V. Lemos, and Paulo B. Lourenço. A dem based tool for the safety analysis of masonry gravity dams. *Engineering Structures*, 59:248 – 260, 2014. ISSN 0141-0296.
- Krit Chaimoon and Mario M. Attard. Experimental and numerical investigation of masonry under three-point bending (in-plane). *Engineering Structures*, 31(1):103 – 112, 2009. ISSN 0141-0296.
- Borja Conde, Luís F. Ramos, Daniel V. Oliveira, Belén Riveiro, and Mercedes Solla. Structural assessment of masonry arch bridges by combination of non-destructive testing techniques and three-dimensional numerical modelling: Application to vilanova bridge. *Engineering Structures*, 148(Supplement C):621 – 638, 2017. ISSN 0141-0296.
- C. Costa, D. Ribeiro, P. Jorge, R. Silva, A. Arêde, and R. Calçada. Calibration of the numerical model of a stone masonry railway bridge based on experimentally identified modal parameters. *Engineering Structures*, 123:354 – 371, 2016. ISSN 0141-0296.
- Adrian Costigan, Sara Pavía, and Oliver Kinnane. An experimental evaluation of prediction models for the mechanical behavior of unreinforced, lime-mortar masonry under compression. *Journal of Building Engineering*, 4:283 – 294, 2015. ISSN 2352-7102.
- CUR. Structural masonry: a experimental/numerical basis for practical design rules (in dutch). Technical report, Report 171, CUR, Gouda, The Netherlands., 1994.
- Maria Laura De Bellis. Multi-scale techniques for masonry structures. Master’s thesis, International Center for Numerical Methods in Engineering, Barcelona, Spain, 2010.
- Maria Laura De Bellis and Daniela Addessi. A cosserat based multi-scale model for masonry structures. *International Journal for Multiscale Computational Engineering*, 9(5):543, 2011.
- Kiarash M Dolatshahi and Amjad J Aref. Two-dimensional computational framework of meso-scale rigid and line interface elements for masonry structures. *Engineering Structures*, 33(12):3657–3667, 2011.
- Anastasios Drougkas, Pere Roca, and Climent Molins. Numerical prediction of the behavior, strength and elasticity of masonry in compression. *Engineering Structures*, 90:15 – 28, 2015. ISSN 0141-0296.

- Luca Facconi, Giovanni Plizzari, and Frank Vecchio. Disturbed stress field model for unreinforced masonry. *Journal of Structural Engineering*, 140(4):04013085, 2013.
- AM Fathy, J Planas, and JM Sancho. A numerical study of masonry cracks. *Engineering Failure Analysis*, 16(2):675–689, 2009.
- Giuseppe Giambanco, Santi Rizzo, and Roberto Spallino. Numerical analysis of masonry structures via interface models. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 190(49):6493–6511, 2001.
- Fabrizio Greco, Lorenzo Leonetti, Raimondo Luciano, and Paolo Nevone Blasi. An adaptive multiscale strategy for the damage analysis of masonry modeled as a composite material. *Composite Structures*, 153:972 – 988, 2016. ISSN 0263-8223.
- Rogiros Illampas, Dimos C. Charmpis, and Ioannis Ioannou. Laboratory testing and finite element simulation of the structural response of an adobe masonry building under horizontal loading. *Engineering Structures*, 80:362 – 376, 2014. ISSN 0141-0296.
- Milan Jirásek. Nonlocal damage mechanics. *Revue européenne de génie civil*, 11(7-8):993–1021, 2007.
- Ioannis Koutromanos, Andreas Stavridis, P Benson Shing, and Kaspar Willam. Numerical modeling of masonry-infilled rc frames subjected to seismic loads. *Computers & Structures*, 89(11):1026–1037, 2011.
- Paulo B Lourenço. *Computational strategies for masonry structures*. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, Delf, The Netherlands, 1996.
- P.B. Lourenço and J.G. Rots. Understanding the behaviour of shear walls: a numerical review. In *10th Int. Brick/Block Masonry Conference*, pages 11–20, 1994.
- P.B. Lourenço, J.O. Barros, and J.T. Oliveira. Shear testing of stack bonded masonry. *Construction and Building Materials*, 18(2):125 – 132, 2004. ISSN 0950-0618.
- L. Macorini and B.A. Izzuddin. Nonlinear analysis of masonry structures using mesoscale partitioned modelling. *Advances in Engineering Software*, 60-61:58 – 69, 2013. ISSN 0965-9978. CIVIL-COMP: Parallel, Distributed, Grid and Cloud Computing.
- G.C. Manos, V.J. Soulis, and J. Thauampth. The behavior of masonry assemblages and masonry-infilled r/c frames subjected to combined vertical and cyclic hori-

- zontal seismic-type loading. *Advances in Engineering Software*, 45(1):213 – 231, 2012. ISSN 0965-9978.
- O.L. Manzoli, A.L. Gamino, E.A. Rodrigues, and G.K.S. Claro. Modeling of interfaces in two-dimensional problems using solid finite elements with high aspect ratio. *Computers & Structures*, 94-95:70 – 82, 2012. ISSN 0045-7949.
- Osvaldo L. Manzoli, Michael A. Maedo, Luís A.G. Bitencourt Jr., and Eduardo A. Rodrigues. On the use of finite elements with a high aspect ratio for modeling cracks in quasi-brittle materials. *Engineering Fracture Mechanics*, 153:151 – 170, 2016. ISSN 0013-7944.
- Gabriele Milani, Michele Simoni, and Antonio Tralli. Advanced numerical models for the analysis of masonry cross vaults: A case-study in italy. *Engineering Structures*, 76:339 – 358, 2014. ISSN 0141-0296.
- Gihad Mohamad, Fernando S. Fonseca, Ad T. Vermeltfoort, Dirk R.W. Martens, and Paulo B. Lourenço. Strength, behavior, and failure mode of hollow concrete masonry constructed with mortars of different strengths. *Construction and Building Materials*, 134:489 – 496, 2017. ISSN 0950-0618.
- J. Oliver, M. Cervera, and O. Manzoli. Strong discontinuities and continuum plasticity models: the strong discontinuity approach. *International Journal of Plasticity*, 15(3):319 – 351, 1999. ISSN 0749-6419.
- J. Oliver, A.E. Huespe, M.D.G. Pulido, and E. Chaves. From continuum mechanics to fracture mechanics: the strong discontinuity approach. *Engineering Fracture Mechanics*, 69(2):113 – 136, 2002. ISSN 0013-7944.
- J. Oliver, A.E. Huespe, S. Blanco, and D.L. Linero. Stability and robustness issues in numerical modeling of material failure with the strong discontinuity approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 195(52):7093 – 7114, 2006. ISSN 0045-7825. Computational Modelling of Concrete.
- J. Oliver, A.E. Huespe, and J.C. Cante. An implicit/explicit integration scheme to increase computability of non-linear material and contact/friction problems. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 197(21):1865–1889, 2008. ISSN 0045-7825.
- J. Oliver, M. Caicedo, E. Roubin, A.E. Huespe, and J.A. Hernández. Continuum approach to computational multiscale modeling of propagating fracture. *Computer*

- Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 294:384 – 427, 2015. ISSN 0045-7825.
- Agustín Orduña. Non-linear static analysis of rigid block models for structural assessment of ancient masonry constructions. *International Journal of Solids and Structures*, 128(Supplement C):23 – 35, 2017. ISSN 0020-7683.
- AW Page. An experimental investigation of the biaxial strength of brick masonry. In *Proc. Sixth Int. Brick Masonry Conf*, pages 3–15, 1982.
- Luca Pelà. *Continuum damage model for nonlinear analysis of masonry structures*. PhD thesis, Università degli studi di Ferrara, Ferrara, Italy, 2009.
- Luca Pelá, Miguel Cervera, and Pere Roca. An orthotropic damage model for the analysis of masonry structures. *Construction and Building Materials*, 41:957 – 967, 2013. ISSN 0950-0618.
- Luca Pelà, Elisa Canella, Alessandra Aprile, and Pere Roca. Compression test of masonry core samples extracted from existing brickwork. *Construction and Building Materials*, 119:230 – 240, 2016. ISSN 0950-0618.
- Massimo Petracca. *Computational multiscale analysis of masonry structures*. PhD thesis, Universitat Politècnica de Catalunya, 2016.
- Massimo Petracca, Luca Pelà , Riccardo Rossi, Stefano Zaghi, Guido Camata, and Enrico Spacone. Micro-scale continuous and discrete numerical models for nonlinear analysis of masonry shear walls. *Construction and Building Materials*, 149 (Supplement C):296 – 314, 2017. ISSN 0950-0618.
- Francesco Portioli and Lucrezia Cascini. Large displacement analysis of dry-jointed masonry structures subjected to settlements using rigid block modelling. *Engineering Structures*, 148(Supplement C):485 – 496, 2017. ISSN 0141-0296.
- Plínio G. C. Prazeres, Luís A. G. Bitencourt, Túlio N. Bittencourt, and Osvaldo L. Manzoli. A modified implicit–explicit integration scheme: an application to elastoplasticity problems. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 38(1):151–161, 2016. ISSN 1806-3691.
- T. M. J. Raijmakers and A. T. H. Vermeltoort. Deformation controlled tests in masonry shear walls [in dutch]. Technical report, Report B-92-1156, TNO-Bouw, Delft., 1992.

- Pere Roca, Miguel Cervera, Luca Pelá, Roberto Clemente, and Michele Chiumenti. Continuum fe models for the analysis of mallorca cathedral. *Engineering Structures*, 46(Supplement C):653 – 670, 2013. ISSN 0141-0296.
- E.A. Rodrigues, O.L. Manzoli, L.A.G. Bitencourt Jr., P.G.C. dos Prazeres, and T.N. Bittencourt. Failure behavior modeling of slender reinforced concrete columns subjected to eccentric load. *Latin American Journal of Solids and Structures*, 12: 520 – 541, 03 2015. ISSN 1679-7825.
- Eduardo A. Rodrigues, Osvaldo L. Manzoli, Luís A.G. Bitencourt Jr., and Túlio N. Bittencourt. 2d mesoscale model for concrete based on the use of interface element with a high aspect ratio. *International Journal of Solids and Structures*, 94:112 – 124, 2016. ISSN 0020-7683.
- Zsófia Salát. Numerical modelling of out-of-plane behavior of masonry structural members. Master’s thesis, Technical University of Catalonia, Catalonia, Spain, 2015.
- Savvas Saloustros, Luca Pelá, and Miguel Cervera. A crack-tracking technique for localized cohesive-frictional damage. *Engineering Fracture Mechanics*, 150 (Supplement C):96 – 114, 2015a. ISSN 0013-7944.
- Savvas Saloustros, Luca Pelà, Pere Roca, and Jorge Portal. Numerical analysis of structural damage in the church of the poblet monastery. *Engineering Failure Analysis*, 48:41 – 61, 2015b. ISSN 1350-6307.
- Cristián Sandoval and Oriol Arnau. Experimental characterization and detailed micro-modeling of multi-perforated clay brick masonry structural response. *Materials and Structures*, 50(1):34, Aug 2016. ISSN 1871-6873.
- Luc Schueremans and Bjorn Van Genechten. The use of 3d-laser scanning in assessing the safety of masonry vault: A case study on the church of saint-jacobs. *Optics and Lasers in Engineering*, 47(3):329 – 335, 2009.
- B Shieh-Beygi and S Pietruszczak. Numerical analysis of structural masonry: mesoscale approach. *Computers & Structures*, 86(21):1958–1973, 2008.
- LJ Sluys, M Cauvern, and R De Borst. Discretization influence in strain-softening problems. *Engineering computations*, 12(3):209–228, 1995.
- Hrvoje Smoljanović, Željana Nikolić, and Nikolina Živaljić. A combined finite discrete numerical model for analysis of masonry structures. *Engineering Fracture Mechanics*, 136:1 – 14, 2015. ISSN 0013-7944.

- Claudia Tesei and Giulio Ventura. A unilateral nonlocal tensile damage model for masonry structures. *Procedia Structural Integrity*, 2:2690 – 2697, 2016. ISSN 2452-3216. 21st European Conference on Fracture, ECF21, 20-24 June 2016, Catania, Italy.
- A Thavalingam, N Bicanic, JI Robinson, and DA Ponniah. Computational framework for discontinuous modelling of masonry arch bridges. *Computers & structures*, 79(19):1821–1830, 2001.
- Jessica Toti, Vincenzo Gattulli, and Elio Sacco. Nonlocal damage propagation in the dynamics of masonry elements. *Computers & Structures*, 152:215 – 227, 2015. ISSN 0045-7949.
- Giuseppina Uva and Ginevra Salerno. Towards a multiscale analysis of periodic masonry brickwork: A fem algorithm with damage and friction. *International journal of solids and structures*, 43(13):3739–3769, 2006.
- R. van der Pluijm. *Out-of-plane bending of masonry : behaviour and strength*. PhD thesis, TU Delft, Delft University of Technology, Delf, The Netherlands, 1999.
- B. Vandoren, K. De Proft, A. Simone, and L.J. Sluys. Mesoscopic modelling of masonry using weak and strong discontinuities. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 255:167 – 182, 2013. ISSN 0045-7825.
- A. T. H. Vermelfoort and T. M. J. Raijmakers. Deformation controlled tests in masonry shear walls, part 2 [in dutch]. Technical report, Report TUE/BKO/93.08, Eindhoven University of Technology, Eindhoven., 1993.
- GN Wells and LJ Sluys. On the conceptual equivalence of embedded strong discontinuity and smeared crack formulations. *HERON*, vol. 46 (3), 2001, 2001.

A. APÊNDICE A - Algoritmo para fragmentação de malha

Neste apêndice será apresentado com mais detalhes os principais algoritmos da técnica de fragmentação de malha utilizada como um método para a inserção dos elementos finitos de interface com alta razão de aspecto na malha original em estruturas bidimensionais. O código desenvolvido foi escrito em linguagem MATLAB[®]. Destaca-se que os elementos finitos de interface representados nas figuras subsequentes não estão em escala para uma melhor visualização gráfica.

Os elementos da malha original consistem em elementos triangulares comuns de 3 nós para os elementos dos blocos enquanto a argamassa é definida por elementos de barra, localizados entre os elementos finitos dos blocos, distinguindo os dois materiais. Para representar a matriz de conectividade dos elementos da malha é considerada uma matriz de adjacência. O conceito de matriz de adjacência é parte integrante da teoria dos grafos e umas das formas básica de representá-los. Define-se grafo como um conjunto genérico de estruturação de dados $G = (V, E)$, onde V e E representam, respectivamente, os vértices e arestas do grafo.

Nesta dissertação, cria-se uma matriz $M(n, m)$ onde n representa o número total de elementos finitos e m representa o número total de nós da estrutura. A Figura A.1 mostra um exemplo simples de como uma matriz de adjacência se comporta.

Figura A.1.: Matriz de adjacência: (a) estrutura de dados e (b) matriz de adjacência

Neste exemplo, considera-se cada linha como um elemento finito e cada coluna como um nó do problema. Tomando de exemplo o elemento 1, a partir do momento que este tem os seus nós 1,2 e 4 como sua conectividade, as colunas 1,2 e 4 da matriz M assumem o valor igual a 1, enquanto o resto da linha permanece zero. A Equação A.1 define a estrutura dessa matriz.

$$M(n, m) = \begin{cases} 1 & \text{se } m \in n \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Algumas de suas vantagens são citadas abaixo:

- uma vez que essa matriz é composta somente por zeros e um, ela se torna lógica, ou seja, sem grande consumo de memória, desejável para problemas com um número alto de graus de liberdade;
- a conectividade de qualquer elemento se dá de forma trivial. A conectividade do elemento n consiste em todos os nós da coluna m que tenha seu valor igual a 1;
- híbrida para qualquer tipo de elemento com quaisquer número de nós;
- matriz esparsa (proporcional ao número de elementos finitos do problema);
- vetorização do código.

Redução do tamanho dos elementos finitos dos blocos

A primeira etapa da fragmentação consiste no cálculo das direções globais, perpendiculares entre si, dos elementos de barra (Figura A.2(a)) como um método para classificá-las (direções locais - Figura A.2(b)). Para qualquer configuração de inclinação da parede, tem-se o cálculo das direções baseada no ângulo Θ (Figura A.2(c)).

Figura A.2.: Direção dos elementos de barras do problema: (a) direções principais, (b) direções locais e (c) direção genérica

Para a redução do elementos finitos do bloco uma classificação de cada extremidade da barra é realizada que tem por objetivo a classificação do nó. A partir desta classificação, cria-se os novos nós da malha e por consequência suas novas coordenadas além da atualização da coordenada do nó existente (Figura A.3(ii)). A criação dos novos nós está diretamente relacionada a altura h do elemento finito de interface que será inserido na malha original. A Figura A.3 mostra as 4 possíveis configurações de classificação dos nós para estruturas em alvenaria (1/2 barras, 3 barras e 4 barras). Conforme a inserção do novos nós na malha original, os elementos finitos dos blocos têm suas conectividades revistas.

Figura A.3.: Redução dos elementos finitos dos blocos: (i) malha original e (ii) redução com classificação dos nós de acordo com o número de barras: (a) 1/2 barras, (b) 3 barras e (c) 4 barras

Inserção dos elementos finitos de interface com alta razão de aspecto

A Figura A.4 mostra a inserção dos elementos finitos de interface conforme de acordo com a seguinte sequência:

1. calcular o baricentro do elemento de barra da malha original (Figura A.3(i));
2. guardar as coordenadas nos novos nós da (Figura A.3(ii));
3. calcular a distancia entre os nós do passo 2 e baricentro calculado em 1;
4. para cada extremidade da barra, encontrar as duas menores distâncias;
5. com os quatro nós encontrando em 4, criar um par de elemento finito de interface (Figura A.4(ii));;

Figura A.4.: Inserção dos elementos finitos de interface: (i) redução e (ii) inserção com classificação dos nós de acordo com o número de barras: (a) 1/2 barras, (b) 3 barras e (c) 4 barras

Ao fim do passo 5, o Teorema de Green é aplicado para verificar o sentido das conectividades da malha fragmentada. O arquivo de saída então é criado que será utilizado como entrada no solver do método dos elementos finitos.

B. APÊNDICE B - Aproximação contínua de descontinuidades fortes

A aproximação contínua de descontinuidades fortes consiste em um modelo matemático para simulação de abertura de fissuras em problemas mecânicos quando há uma singularidade no campo de deslocamento [Oliver et al., 1999]. A grande vantagem desse modelo consiste na capacidade de se relacionar uma descontinuidade matemática do campo de deslocamento com um campo contínuo de deformação que tem como consequência uma relação constitutiva na forma de tensão *vs.* deformação. Para ilustrar essa situação, considere a Figura B.1(a) que ilustra um corpo Ω cortado por uma descontinuidade S suficientemente necessária para separar o corpo em Ω^- e Ω^+ .

Figura B.1.: Aproximação contínua de descontinuidades : (a) fraca e (b) forte.

O campo de deslocamentos para a Figura B.1(a) pode ser escrito de forma que:

$$u(x, t) = \bar{u}(x, t) + H_s \llbracket u \rrbracket (x, t) \quad (\text{B.1})$$

Onde, $\llbracket u \rrbracket$ é o salto no campo de deslocamentos e H_s é a função Heaviside:

$$H_s(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in \Omega^+ \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Logo o campo de deformações pode ser escrito da forma:

$$\varepsilon(x, t) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial u(x)} = \underbrace{\frac{\partial \bar{u}(x, t)}{\partial u(x)} + H_s \frac{\partial \llbracket u \rrbracket (x, t)}{\partial u(x)}}_{\bar{\varepsilon}(x, t)} + \delta s \llbracket u \rrbracket (t) = \underbrace{\bar{\varepsilon}(x, t)}_{\text{limitado}} + \underbrace{\delta s(\llbracket u \rrbracket \otimes n)^S}_{\text{ilimitado}} \quad (\text{B.3})$$

$$\delta s = \lim_{h \rightarrow 0} \delta s^h(x), \quad \text{com} \quad \delta s^h(x) = \frac{1}{h} u_s^h(x) \quad (\text{B.4})$$

$$u_s^h(x) = \begin{cases} 1 & \forall x \in S \\ 0 & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (\text{B.5})$$

Onde h é a largura de banda da fissura, $(\bullet)^S$ simboliza a parte simétrica de $(\bullet)$, o operador $\otimes$ é o produto diádico, n é o versor normal a linha de fissura, δs é uma função de delta de Dirac em torno de S (Equação B.4) e $u_s^h(x)$ é uma função Heaviside (Equação B.5).

Na Equação B.3, o valor do campo de deformação é representado por sua parte ilimitada (delimitado pelo salto no campo de deslocamentos) enquanto a parte limitada permanece sem uma colaboração efetiva na deformação final. Desde modo,

o campo de deformações é influenciado em praticamente sua totalidade pelo salto no campo de deslocamentos. Nesta situação, pode-se regularizar a cinemática da descontinuidade forte conforme a Figura B.1(b).

$$\varepsilon(x, t) = \begin{cases} \underbrace{\bar{\varepsilon}(x, t)}_{\text{limitado}} + \underbrace{\frac{1}{h} u_s(\llbracket \dot{u} \rrbracket \otimes n)^S}_{\text{singular}} & (a) \\ \underbrace{\bar{\varepsilon}(x, t)}_{\text{limitado}} + \underbrace{\delta s(\llbracket \dot{u} \rrbracket \otimes n)^S}_{\text{ilimitada}} & (b) \end{cases} \quad (\text{B.6})$$

A Equação B.6(a) representa o campo de deformações na situação da descontinuidade fraca onde largura de banda da fissura $h \neq 0$ (Figura B.1(a)). A partir do momento em que a largura de banda $h \rightarrow 0$ (Figura B.1(b)), a descontinuidade fraca se torna de forma forte (Equação B.6(b)) caracterizado por uma parte limitada $\bar{\varepsilon}(x, t)$ e outra ilimitada $\delta s(\llbracket \dot{u} \rrbracket \otimes n)^S$. Logo, na aproximação contínua de descontinuidades fortes (ACDF) o salto no campo de deformações é majoritariamente representado pelo salto no campo de deslocamentos, que a partir das formulações acima descritas, torna o campo de deformações contínuo (tensão *vs.* deformação) a partir de uma descontinuidade $\llbracket \dot{u} \rrbracket$.

C. APÊNDICE C - Ingredientes básicos da mecânica do dano contínuo

A mecânica do dano pode ser compreendida como a degradação das propriedades elásticas dos materiais. O modelo matemático da mecânica do dano consiste em diminuir numericamente a área efetiva resistente que tem por consequência o aumento de degradação da rigidez.

Considere um corpo unidimensional sujeito a uma força axial F conforme a Figura C.1.

Figura C.1.: Comparação entre a área total e a área degradada.

Com esta seção transversal pode-se definir a variável interna de dano d na qual consiste na proporção entre a área danificada A_D e área total A (Equação C.1). Por este motivo o dano sempre estará entre $0 \leq d \leq 1$ onde $d = 0$ significa que o material está sem deterioração elástica e $d = 1$ a área está totalmente deteriorada (ruptura).

$$d = \frac{A_D}{A} \quad (C.1)$$

A partir da relação $\bar{A} = A - A_D$, pode-se definir as tensões aparente/nominal

(Equação C.2) e efetiva (Equação C.3), onde:

$$\sigma = \frac{F}{A} \quad (\text{C.2})$$

$$\bar{\sigma} = \frac{F}{\bar{A}} \quad (\text{C.3})$$

Correlacionando as Equação C.2 e Equação C.3, tem-se a Equação C.4 e partir da área efetiva, o dano pode ser reescrito segundo a Equação C.5.

$$\frac{\sigma}{A} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{A}} \quad (\text{C.4})$$

$$\frac{\bar{A}}{A} = 1 - d \quad (\text{C.5})$$

Considerando a equivalência de deformações entre as condições de referência e atual, tem-se a relação:

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E_D} \quad (\text{C.6})$$

$$\bar{\varepsilon} = \frac{\bar{\sigma}}{\bar{E}} \quad (\text{C.7})$$

Com isso, tem-se a relação entre os módulos de elasticidades degradado (E_D) e inicial (E):

$$E_D = (1 - d)E \quad (\text{C.8})$$

A relação constitutiva final pode ser expressa substituindo a Equação C.8 na Equação C.6.

$$\sigma = (1 - d) \underbrace{E\varepsilon}_{\bar{\sigma}} \quad (\text{C.9})$$

A partir das tensões efetiva e aparente, define-se o critério de degradação para o material. O critério de degradação consiste na separação de seu estado elástico e de ruptura que tem seu domínio elástico estabelecido por:

$$\Phi(\sigma) = \tau(\sigma) - q \leq 0 \quad (\text{C.10})$$

Onde $\tau(\sigma)$ é a norma da tensão efetiva equivalente e determina a forma do regime elástico. Por sua vez, q denomina-se variável interna limite e define o tamanho do regime elástico. O critério também podem ser escritas em relação as tensões efetivas:

$$\bar{\Phi}(\bar{\sigma}) = \bar{\tau}(\bar{\sigma}) - r \leq 0 \quad (\text{C.11})$$

Sendo r a variável interna em domínio elástico expressado pela Equação C.12.

$$r = \frac{q}{(1 - d)} \quad (\text{C.12})$$

Com isso o dano pode ser expresso pela relação na Equação C.13.

$$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad (\text{C.13})$$

A evolução do dano descreve como o dano se instala no regime inelástico. Duas leis usuais são utilizadas para caracterizar essa fase: uma lei de endurecimento (aumento da resistência mecânica conforme incremento na deformação) e uma lei amolecimento (diminuição da resistência mecânica conforme incremento na deformação) conforme demonstrado na Figura C.2.

Figura C.2.: Lei de endurecimento e abrandamento para curvas: (a) lineares e (b) exponenciais.

Os gráficos da Figura C.2(a) descrevem leis lineares (Equação C.14) para a evolução do dano enquanto a Figura C.2(b) descrevem leis exponenciais (Equação C.15).

$$q(r) = r_0 \pm H(r - r_0) \quad (\text{C.14})$$

$$q(r) = r_0 e^{\pm A(1 - \frac{r}{r_0})} \quad (\text{C.15})$$

A evolução do dano ilustrado na Figura C.3 é regida pelas condições de Kuhn-Tucker (Equação C.16, Equação C.17, Equação C.18). Enquanto a tensão atuante não atinge o critério de resistência ($d = 0$) o sistema continua elástico linear (Equação C.16). Uma vez que o dano se instala e ultrapassa o limite elástico (Equação C.17) inicia-se o processo de abertura de fissura. Esta degradação é estabelecida pela Equação C.11 e atua sobre a superfície $\Phi = 0$ no qual caracteriza o comportamento não-linear do material (Equação C.18).

$$\bar{\Phi}(\bar{\sigma}) \leq 0 \quad (\text{C.16})$$

$$\dot{r} \geq 0 \quad (\text{C.17})$$

$$\dot{r}\Phi(\bar{\sigma}) = 0 \quad (\text{C.18})$$

Figura C.3.: Condição de carga e descarga.

Uma vez que a variável do dano interno, em domínio elástico, dita a evolução do dano, o objetivo é maximizar o valor de r durante o processo de carga (Equação C.19) para dar início ao dano o que induz implicitamente que este valor sempre será positivo já que $\dot{r} \geq 0$ (Equação C.17).

$$r = \max [q_0(s), f_s] \quad s \in [0, t] \quad r \geq q_0 \quad (\text{C.19})$$

Por fim a Tabela C.1 mostra os princípios básicos da mecânica do dano para um exemplo 1D.

Tabela C.1.: Modelo Constitutivo Contínuo de dano para exemplo 1D.

Relação Constitutiva:	$\sigma = (1 - d) \underbrace{E\varepsilon}_{\bar{\sigma}}$
Tensão Equivalente:	$\bar{\tau}(\bar{\sigma}) = \bar{\sigma}_n $
Critério de dano:	$\bar{\Phi}(\bar{\sigma}) = \bar{\tau}(\bar{\sigma}) - r \leq 0$
Evolução da variável interna r :	$r = \max [q_0, f_s] \quad s \in [0, t]$
Evolução do dano:	$d = 1 - \frac{q(r)}{r} \quad d = [0, 1]$
Lei de abrandamento/endurecimento:	$q(r) = q_0 e^{A(1-\frac{r}{q})} \quad ou \quad q(r) = q_0 + H(r - q_0)$

D. APÊNDICE D - Operador da matriz de rigidez tangente

As tensões elásticas globais são calculadas a partir da equação Equação D.1 que podem ser escritas de forma matricial Equação D.2.

$$\{\bar{\sigma}\} = [C] \{\varepsilon\} \quad (\text{D.1})$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} = [C] \begin{Bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{Bmatrix} \quad (\text{D.2})$$

Onde C é a matriz das constantes elásticas e ε é o vetor de deformações do elemento finito. Para a avaliação do dano em cada elemento finito, as tensões elásticas globais são transformadas para as coordenadas locais $\bar{\sigma}'$ pela operação com a matriz de rotação T (Equação D.3).

$$\{\bar{\sigma}'\} = [T] \{\bar{\sigma}\} \quad (\text{D.3})$$

Com o tensor das tensões calculados localmente, aplica-se o dano conforme a Equação D.4.

$$\{\sigma'\} = (1 - d^t) \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - d^r \end{bmatrix}}_{[B]} \{\bar{\sigma}'\} = (1 - d^t)[B] \{\bar{\sigma}'\} \quad (\text{D.4})$$

Onde d^t e d^r são os danos a tração e cisalhamento respectivamente. Assim as tensões nominais locais de cada elemento finito de interface com alta razão de aspecto são transformadas para as tensões globais pela operação com a matriz de rotação $\tilde{T}$

$$\{\sigma\} = [\tilde{T}] \{\sigma'\} \quad (\text{D.5})$$

Portanto, a tensão nominal final deste modelo constitutivo fica na forma:

$$\{\sigma\} = [\tilde{T}] (1 - d^t)[B] [T] \{\bar{\sigma}\} \quad (\text{D.6})$$

Operador da matriz de rigidez tangente

O operador da matriz de rigidez tangente valor é calculado pela regra da cadeia a partir da Equação D.7.

$$\mathbb{C}^{tan} = \frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\varepsilon\}} = \underbrace{\frac{\partial \{\sigma\}}{\partial \{\sigma'\}}}_{[\tilde{T}]} \underbrace{\frac{\partial \{\sigma'\}}{\partial \{\bar{\sigma}'\}}}_{(1-d^t)[B]} \underbrace{\frac{\partial \{\bar{\sigma}'\}}{\partial \{\bar{\sigma}\}}}_{[T]} \underbrace{\frac{\partial \{\bar{\sigma}\}}{\partial \{\varepsilon\}}}_{[C]} \quad (\text{D.7})$$

Logo a matriz de rigidez do modelo constitutivo é calculado por:

$$\mathbb{C}^{tan} = [\tilde{T}] (1 - d^t)[B] [T] [C] \quad (\text{D.8})$$

Matriz de transformação T e $\tilde{T}$

Para a transformação das tensões em coordenadas globais e locais foram utilizados duas matrizes de transformação explicadas a seguir. As matrizes de transformações são descritas com base em matrizes de rotação que podem ser obtidas a partir da configuração local do elemento finito perante o global. Para as matrizes transformações nesta pesquisa, utilizou o versor normal a base do elemento finito $\mathbf{n}$ para representar a rotação. Para a matriz ortogonal de rotação algumas premissas são assumidas: (i) o problema se encontra no estado plano de tensão, (ii) considera-se um versor fora do plano de forma $\mathbf{e}_z = \begin{Bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix}$ e (iii) a matriz ortogonal de rotação R conforme Equação D.9.

$$R = \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{s} \\ \mathbf{t} \end{bmatrix} \quad (\text{D.9})$$

Onde $\mathbf{n}$, $\mathbf{s}$ e $\mathbf{t}$ são as bases dos versores normais do elemento finito de interface com alta razão de aspecto. Logo as tensões locais efetivas do elemento finito $\bar{\sigma}'$ podem ser expressas como:

$$\{\bar{\sigma}'\} = R \{\bar{\sigma}\} R^T \quad (\text{D.10})$$

Onde $\bar{\sigma}$ é são as tensões globais efetivas do elemento finito. Por sua vez, as tensões nominais do elemento finito pode ser expressa por:

$$\{\sigma\} = R^T \{\sigma'\} R \quad (\text{D.11})$$

Matriz de transformação T

Considerando o versor normal a base do elemento finito $\mathbf{n}$ e o versor $\mathbf{e}_z$, o produto vetorial entre os dois versores gera um versor $\mathbf{s}$ perpendicular a eles.

$$\mathbf{n} = \begin{Bmatrix} n_x & n_y & n_z \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} n_x & n_y & 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.12})$$

$$\{\mathbf{s}\} = \{\mathbf{e}_z\} \times \{\mathbf{n}\} = \det \begin{vmatrix} \mathbf{s}_x & \mathbf{s}_y & \mathbf{s}_z \\ 0 & 0 & 1 \\ n_x & n_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} -n_y \\ n_x \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.13})$$

Para construir as três bases para a rotação, o versor $\mathbf{t}$ é calculado pelo produto vetorial entre os versores $\mathbf{n}$ e $\mathbf{s}$.

$$\{\mathbf{t}\} = \{\mathbf{s}\} \times \{\mathbf{n}\} = \det \begin{vmatrix} t_x & t_y & t_z \\ -n_y & n_x & 0 \\ n_x & n_y & 0 \end{vmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ n_x^2 + n_y^2 \end{Bmatrix} \quad (\text{D.14})$$

Logo a matriz de rotação R (Equação D.9) pode ser reescrita de forma:

$$R = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 \\ -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & n_x^2 + n_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.15})$$

Substituindo a Equação D.15 na Equação D.10, tem-se:

$$\{\bar{\sigma}'\} = \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 \\ -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & n_x^2 + n_y^2 \end{bmatrix} \{\bar{\sigma}\} \begin{bmatrix} n_x & n_y & 0 \\ -n_y & n_x & 0 \\ 0 & 0 & n_x^2 + n_y^2 \end{bmatrix}^T \quad (\text{D.16})$$

Aplicando os cálculos e simplificações algébricas, as tensões locais efetivas do elemento finito $\bar{\sigma}'$ podem ser expressas como função da matriz de transformação T :

$$\{\bar{\sigma}'\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_x^2 & \mathbf{n}_y^2 & 2\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_y^2 & \mathbf{n}_x^2 & -2\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y \\ -\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x\mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x^2 - \mathbf{n}_y^2 \end{bmatrix}}_{[T]} \{\bar{\sigma}\} \quad (\text{D.17})$$

Matriz de transformação $\tilde{T}$

Baseados na seção Seção D e na equação Equação D.11, matriz de transformação $\tilde{T}$ pode ser expressa como:

$$\{\sigma\} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & 0 \\ -\mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_y^2 \end{bmatrix}^T \{\sigma'\} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_x & \mathbf{n}_y & 0 \\ -\mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_x^2 + \mathbf{n}_y^2 \end{bmatrix} \quad (\text{D.18})$$

$$\{\sigma\} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_x^2 & \mathbf{n}_y^2 & -2\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_y^2 & \mathbf{n}_x^2 & 2\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y \\ \mathbf{n}_x\mathbf{n}_y & -\mathbf{n}_x\mathbf{n}_y & \mathbf{n}_x^2 - \mathbf{n}_y^2 \end{bmatrix}}_{[\tilde{T}]} \{\sigma'\} \quad (\text{D.19})$$