GUILHERME BASÍLIO VICK

Método dos elementos de contorno aplicado na análise do escorregamento de estacas

São Paulo
2014

GUILHERME BASÍLIO VICK

Método dos elementos de contorno aplicado na análise do escorregamento de estacas

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Ciências

São Paulo
2014

GUILHERME BASÍLIO VICK

Método dos elementos de contorno aplicado na análise do escorregamento de estacas

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do título de Mestre em
Ciências

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Dimas Betioli Ribeiro

São Paulo
2014

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de junho de 2014.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Vick, Guilherme Basílio

Método dos elementos de contorno aplicado na análise do escorregamento de estacas / G.B. Vick. -- versão corr. -- São Paulo, 2014.

p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Método dos elementos de contorno 2.Estacas I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

A meus avós e padrinhos

Cidinha e Basílio (*in memoriam*)

AGRADECIMENTOS

Agradeço, sinceramente, ao Prof. Dr. Dimas Betioli Ribeiro pela orientação, pelos incentivos e por todas as vezes que me ajudou, quer seja com questões burocráticas, quer seja com revisões de textos e também pela paciência e prontidão em tirar dúvidas.

Agradeço ao Prof. Dr. Faiçal Massad pelo conhecimento transmitido e pela paciência com minhas dúvidas sobre estacas.

Agradeço também à Beta 2 Engenharia por todo o incentivo dado durante a elaboração deste trabalho.

Expresso meus agradecimentos à minha família pelo sempre presente incentivo aos estudos, sem o qual um trabalho desta natureza seria inimaginável e à minha companheira Cristiane, por todo o incentivo e paciência.

RESUMO

Neste trabalho apresenta-se um modelo numérico para a análise de problemas tridimensionais envolvendo a interação mecânica estaca-solo, acoplando-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC) ao Método dos Elementos Finitos (MEF). O solo é modelado com o MEC utilizando-se as soluções fundamentais de Mindlin, assumindo um meio semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico-linear. As estacas, modeladas com o MEF, consistem em um elemento único, com quatro nós e 14 parâmetros nodais (três deslocamentos em cada nó e mais duas rotações no topo da estaca). Cada uma das estacas é levada em consideração no MEC como uma linha de carga. Considera-se o escorregamento das estacas em relação ao maciço, empregando modelos de aderência para a definição da evolução das tensões tangenciais ao longo do comprimento das estacas. São empregados, como funções de forma, polinômios do quarto grau para os deslocamentos horizontais, cúbicos para os deslocamentos verticais e tensões horizontais ao longo do fuste e quadráticos para as tensões verticais do fuste e escorregamento. A reação da ponta da estaca é calculada assumindo tensão constante na base.

PALAVRAS-CHAVE: Interação solo-estrutura. Estacas. Elementos de contorno. Acoplamento MEC/MEF. Escorregamento.

ABSTRACT

This work presents a method for tri-dimensional pile-soil interaction problems, by coupling the Boundary Element Method (BEM) to the Finite Element Method (FEM). The soil is modeled with BEM, using the Mindlin's fundamental solutions, supposing a semi-infinite, homogeneous, isotropic, elastic and linear space. Piles are modeled with FEM and are represented by one element with four nodes and 14 nodal parameters (three displacements in each node and two rotations at the top node). Each pile is represented in BEM as a line load. The pile slip is considered using adherence models to evaluate the evolution of shaft tractions. There are employed fourth grade polynomial shape functions for horizontal displacements, cubic polynomial functions for vertical displacements and horizontal tractions along shaft and quadratic polynomial functions for vertical tractions and slip. Tip reaction is calculated supposing constant traction at the base.

Keywords: Soil-structure interaction. Piles. Boundary elements. BEM/FEM coupling. Slip.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1 – Comportamento mecânico de uma estaca submetida à compressão	23
Figura 1.2 – Tipos de ruptura de uma estaca com topo livre submetida a carregamento transversal.	25
Figura 1.3 – Tipos de ruptura de uma estaca com topo restringido submetida a carregamento transversal.	25
Figura 2.1 – Definição de tensor das tensões.....	27
Figura 2.2 – Tetraedro de tensões em torno do ponto P.....	28
Figura 2.3 – Tensões nas faces anteriores do paralelepípedo	30
Figura 2.4 – Tensões nas faces posteriores do paralelepípedo	31
Figura 2.5 – Forças de volume atuantes no paralelepípedo	31
Figura 2.6 – Centros das faces do tetraedro de tensões.....	32
Figura 3.1 – Coeficientes da solução de Mindlin.....	36
Figura 3.2 – Estaca representada por linha de carga com quatro nós imersa no solo	39
Figura 3.3 – Seção transversal da estaca, mostrando os pontos fonte perimetrais e o ponto campo, localizado no centro da estaca.	41
Figura 4.1 – Parâmetros do modelo em elementos finitos da estaca.....	49
Figura 5.1 – Exemplos de modelos com a) endurecimento e b) amolecimento.....	58
Figura 5.2 – Lei de Atrito de Coulomb.....	59
Figura 5.3 – Modelo hiperbólico com endurecimento.....	62
Figura 5.4 – Representação gráfica do modelo híbrido para endurecimento e amolecimento	63
Figura 7.1 – Parâmetros do exemplo 1	71
Figura 7.2 – Curva carga no topo x recalque do topo	73
Figura 7.3 – Parâmetros do exemplo 2	73
Figura 7.4 – Vista em corte do modelo em elementos finitos	74
Figura 7.5 – Deslocamento horizontal devido à força horizontal	75
Figura 7.6 – Deslocamento horizontal devido ao momento.....	76
Figura 7.7 – Modelos de aderência utilizados na análise do carregamento vertical.....	77
Figura 7.8 – Deslocamento vertical dos pontos da estaca para a carga vertical	78

Figura 7.9 – Curvas carga – recalque para os diversos modelos de aderência	79
Figura 7.10 – Carga resistida pela ponta em função da carga aplicada	79
Figura 7.11 – Carga resistida por atrito lateral em função da carga aplicada	80
Figura 7.12 – Parâmetros do exemplo 3	81
Figura 7.13 – Modelo em elemento finitos – vista em corte.....	82
Figura 7.14 – Deslocamentos horizontais dos pontos da estaca em função da profundidade	83
Figura 7.15 – Deslocamentos verticais dos pontos da estaca em função da profundidade ...	84

SUMÁRIO

1. Introdução	17
1.1 Revisão da literatura	17
1.2 Aspectos mecânicos das estacas verticais	22
1.2.1 Estacas submetidas a cargas axiais	22
1.2.2 Estacas submetidas a cargas transversais	24
2. Teoria da elasticidade linear	27
2.1 O Estado de tensão	27
2.2 O estado de deformação	32
2.3 Equações constitutivas	33
3. O método dos elementos de contorno	35
3.1 Soluções fundamentais de Mindlin	35
3.1.1 Carga normal ao plano	35
3.1.2 Carga paralela à direção horizontal x	36
3.2 Equação integral do contorno	37
3.3 Linha de carga aplicada no solo	39
4. O método dos elementos finitos	45
4.1 O Princípio dos trabalhos virtuais	45
4.2 Elemento finito de quatro nós	49
5. Modelos de aderência	57
5.1 Introdução	57
5.2 Modelo baseado na lei de Coulomb	59
5.3 Modelo hiperbólico com endurecimento	61
5.4 Modelo híbrido para endurecimento e amolecimento	62
6. Acoplamento MEC/MEF	65

6.1	Aderência perfeita.....	65
6.2	Consideração de escorregamento	66
6.3	Implementação computacional	68
6.4	Resumo do algoritmo	70
7.	Resultados.....	71
7.1	Exemplo 1: simulação do ensaio de uma estaca.....	71
7.2	Exemplo 2: estaca isolada imersa em solo.....	73
7.3	Exemplo 3: grupo de estacas com topo livre	80
8.	Conclusões	85
8.1	Considerações gerais.....	85
8.2	Propostas para trabalhos futuros.....	86
9.	Referências bibliográficas	87

1. Introdução

Este trabalho apresenta a formulação numérica de uma ferramenta computacional para a análise mecânica de estacas considerando a perda de aderência entre estaca e solo. Todos os materiais envolvidos na análise são considerados homogêneos, isotrópicos, elásticos e lineares. O solo é modelado por meio do método dos elementos de contorno (MEC), utilizando a solução fundamental de Mindlin. As estacas são modeladas pelo método dos elementos finitos (MEF) e consistem em um único elemento, com quatro nós e 14 parâmetros nodais, sendo três deslocamentos em cada um dos nós e duas rotações no topo.

O acoplamento entre o MEC e o MEF é feito utilizando uma estratégia semelhante à apresentada em Matos Filho et al. (2005), a qual é válida para aderência perfeita. No presente trabalho, no entanto, o escorregamento é considerado através da introdução da variável de deslocamento relativo na formulação do MEF, tal como realizado em Botta (2003), Leonel (2009) e Rocha (2009). A evolução das tensões de cisalhamento na interface em relação ao deslocamento relativo é função do modelo de aderência escolhido. São apresentados exemplos comparando os resultados desta formulação com outros autores e com um programa comercial de elementos finitos.

1.1 Revisão da literatura

Fundações por estacas vêm sendo utilizadas pela humanidade desde a antiguidade para contornar o desafio de construir em regiões nas quais a utilização de fundação direta resultaria recalques inaceitáveis ou até mesmo colapso. Segundo Nápoles Neto (1998), os gregos na Idade Clássica já utilizavam estacas de madeira, escavando o solo com máquinas provavelmente de origem bélicas, utilizadas para perfurar muralhas e portões. Na Roma antiga, o arquiteto Vitrúvio estabeleceu diversas recomendações sobre fundações de pontes, que foram compiladas por César, como, por exemplo, a descrição das máquinas utilizadas, tipo de madeira utilizada, dentre outras. A tecnologia desenvolvida em Roma perdurou até o final do século XVIII (Ulitskii, 1995).

Apesar deste tipo de fundação ser utilizado há milênios, seu estudo somente teve um início formal a partir de 1848, quando Sir William Thomson, ou Lord Kelvin, publicou a primeira solução fundamental, que fornecia expressões para os deslocamentos no interior

de um sólido infinito, devido à aplicação de uma força concentrada em um ponto arbitrário do mesmo (Kausel, 2010).

Baseado na solução fundamental de Kelvin, Mindlin (1936) desenvolveu sua própria solução fundamental, que fornece um conjunto de equações analíticas para deslocamentos e tensões de um ponto arbitrário no interior de um sólido semi-infinito, homogêneo e isotrópico devido à aplicação de uma carga concentrada próxima ao contorno.

Ao longo do século XX diversos métodos foram desenvolvidos para a análise mecânica de problemas envolvendo a interação entre solo e estaca. No trabalho de Coyle e Reese (1966), por exemplo, é apresentado um método para análise de estacas, obtendo-se uma curva na qual a carga no topo é confrontada ao recalque no topo de forma iterativa. Inicialmente a estaca é dividida em segmentos desde a ponta até o topo. Posteriormente, aplica-se um pequeno deslocamento na ponta e calcula-se o encurtamento deste segmento e a carga na interface com o próximo segmento. Recalcula-se então o encurtamento para este novo equilíbrio e esse processo é repetido até que o encurtamento não sofra mais alterações significativas, para então partir para o próximo segmento e assim, sucessivamente, até o topo. Ao se efetuar o processo para diversos valores de deslocamentos prescritos na ponta, chega-se à curva carga – recalque no topo.

Em Poulos e Davis (1968) o solo é analisado pela solução de Mindlin e a estaca, considerada incompressível, é dividida em diversos trechos cilíndricos concêntricos com tensões de cisalhamento constante.

No trabalho de Randolph e Wroth (1978) é apresentada uma solução analítica para estimativas do recalque de estacas imersas no solo. A deformação do solo ao redor do fuste é representada utilizando cilindros concêntricos, enquanto o comportamento da base é considerado como uma punção no solo. O método possibilita a consideração de heterogeneidades radiais e verticais, bem como a inclusão da compressibilidade das estacas.

O método analítico proposto por Fleming (1992) adota duas curvas hiperbólicas para descrever o recalque do solo em função da carga aplicada, uma correspondente ao fuste e a outra correspondente à ponta. O encurtamento elástico é determinado de maneira aproximada: considera-se que em uma faixa do solo próxima ao topo da estaca não há atrito

algum e o encurtamento é dado pela aplicação direta da lei de Hooke. Na faixa inferior, na qual o atrito é considerado, o encurtamento é dado também pela lei de Hooke, porém multiplicada por um coeficiente redutor.

O método mais utilizado na prática da engenharia para a análise dos deslocamentos horizontais de estacas é através do modelo de Winkler. Este método assume a estaca imersa no solo por meio da teoria de viga sobre apoios elásticos, em que o solo é modelado através de um sistema de molas discretas. Este modelo é aplicado em Gerolymos e Gazetas (2006) na análise de ensecadeiras, considerando de um sistema de molas não lineares. A principal desvantagem do modelo de Winkler refere-se à consideração do solo como meio não contínuo, desprezando as influências de cada região do solo sobre as demais. Visando contornar este problema, Guo (2006) apresenta uma solução analítica para o caso de estacas submetidas a solicitações laterais, proveniente de um modelo que considera molas independentes nas regiões em que o solo sofre plastificação e molas conectadas por uma membrana nas regiões em que o solo possui comportamento elástico.

Uma abordagem muito utilizada para a solução de problemas de interação estaca-solo é por meio do método dos elementos finitos (MEF). O MEF tem como vantagens a generalidade e a praticidade, inclusive por meio de softwares comerciais. No entanto para problemas de domínio finito ou semi-infinito perde um pouco sua praticidade devido ao grande número de elementos necessários para modelagem e, conseqüentemente, elevado custo computacional.

Uma forma de reduzir o custo computacional da modelagem do solo com o MEF é tirar proveito da simetria do problema sempre que possível. No trabalho de Jeong et al. (2004), por exemplo, apenas um quarto do domínio é modelado através do programa comercial ABAQUS para efetuar a análise de grupos de estacas submetidas a atrito negativo. Já no trabalho de Sheng et al. (2006) a análise de penetração de uma estaca no solo é feita com a consideração da simetria radial do problema, modelando-se somente metade de um plano do domínio tridimensional. A mesma estratégia é utilizada em Said et al. (2009). Nesse trabalho é feita uma modelagem de estacas submetidas a cargas axiais utilizando elementos finitos axissimétricos. O escorregamento no fuste é simulado

através de um elemento de ligação e são considerados efeitos de dilatação e tensões residuais, provenientes da cravação da estaca.

Nem sempre o problema apresenta simetria que possa ser aproveitada na modelagem. Em Khodair e Hassiotis (2005) é feita uma análise de pontes com ligações monolíticas rígidas submetidas à variação de temperatura através de um modelo de elementos finitos sem qualquer tipo de simetria, no qual o solo é considerado um meio contínuo. Como há transferência total de momentos neste tipo de estrutura, os esforços horizontais nas fundações têm grande magnitude. Neste trabalho é feito também um estudo experimental, instrumentando uma ponte por meio de *strain gages*, cujos resultados são utilizados para calibrar o modelo teórico.

Em Lee (2012) são construídos modelos não simétricos em elementos finitos tridimensionais para a análise do comportamento de estacas existentes durante a escavação de túneis próximos a elas. O escorregamento do fuste das estacas é considerado baseado no critério de ruptura de Mohr-Coulomb.

No trabalho de Zhang et al. (2013) o problema de escavação de túnel próximo a estacas é estudado através de um modelo baseado em funções de transferência de carga que consideram escorregamento. Neste modelo, a interface entre solo e estaca é representada por meio de pares de molas não lineares acopladas em série ao longo do fuste, que representam o estágio ativo das estacas, anterior à escavação e o estágio passivo, posterior à escavação.

No trabalho de Su e Li (2013) é realizado um estudo de estacas submetidas a carregamentos laterais multidirecionais através do MEF. A estaca e o solo são modelados como elementos sólidos tridimensionais, com elementos de interface considerando dilatação. O estudo mostra que a aplicação de cargas com trajetória não retilínea apresenta resistência reduzida, pois surge uma separação entre solo e estaca nas regiões de tração.

Outra alternativa para reduzir o tempo de processamento computacional através do MEF é a utilização de elementos infinitos. Em Chen e Poulos (1993), por exemplo, as estacas e o solo em suas proximidades são modelados com elementos finitos, a partir de determinada distância o solo é representado com elementos infinitos.

Uma técnica muito utilizada na análise de problemas de interação solo-estrutura é o método dos elementos de contorno (MEC), na qual se as grandezas de domínio puderem ser desprezadas, apenas o contorno do domínio precisa ser discretizado, reduzindo muito o custo computacional da modelagem de sólidos finitos ou semi-infinitos. Chin et al. (1990) utiliza o MEC na análise de estacas isoladas e grupos de estacas imersas em solos compostos por duas camadas. Como neste caso o solo não pode ser considerado homogêneo, é utilizada a solução analítica de Chan et al. (1974), para cargas no interior de solos com duas camadas, ao invés da solução de Mindlin.

Em Almeida e Paiva (2007) o MEC é utilizado para a análise de estacas imersas em solos com várias camadas. Tanto o solo quanto as estacas são modeladas como sólidos tridimensionais pelo MEC utilizando a solução fundamental de Kelvin. Para a modelagem do solo são utilizadas malhas que representam a superfície livre e a interface entre camadas que se estendem até grandes distâncias.

No trabalho de Ai e Cheng (2013) a análise de estacas submetidas a esforços axiais imersas em solos com várias camadas ortotrópicas é realizada pelo MEC através de uma solução analítica apresentada pelos próprios autores.

Em vista das vantagens da utilização do MEF para modelagem de sólidos de domínio finito e do MEC para sólidos de domínio infinito ou semi-infinito, uma alternativa utilizada por diversos autores consiste na utilização do MEF para representar a representação das estacas e do MEC para o solo, efetuando um acoplamento entre os métodos.

Em Küçükarslan et al. (2003) são utilizados elementos finitos lineares para representar as estacas e elementos de contorno para representar o solo. Para reduzir o custo computacional do modelo são utilizadas molas não lineares ao longo da estaca para simular a não linearidade física do solo.

Em Matos Filho (1999) e em Matos Filho et al. (2005) o solo é modelado pelo MEC utilizando a solução fundamental de Mindlin e as estacas são modeladas como um elemento finito único de quatro nós e 14 parâmetros nodais. O acoplamento entre os métodos é realizado considerando equilíbrio de forças e compatibilidade de deslocamentos.

Botta (2003) apresenta uma formulação para a análise de sólidos danificados enrijecidos por barras. É realizado acoplamento entre o MEC, que representa o sólido e o MEF, que representa as barras. O escorregamento entre os meios é representado através de um modelo não linear.

No trabalho de Ribeiro (2009) é utilizado o mesmo elemento finito de Matos Filho et al. (2005) para a representação das estacas. No entanto, a representação do solo pelo MEC é feita utilizando a solução fundamental de Kelvin. Como esta solução requer o uso de uma malha a grandes distâncias utilizam-se elementos de contorno infinitos nas bordas das malhas. O MEF é utilizado também na representação de um edifício apoiado sobre esta fundação. Essa formulação é utilizada em Ribeiro e Paiva (2014) para a análise de grupos de estacas.

Em Leonel (2009) a propagação de fissuras é estudada através um modelo que considera o domínio representado através do MEC e as fibras, ou enrijecedores, são modeladas através do MEF. A perda de aderência entre os meios é considerada através da introdução de uma variável de deslocamentos relativos utilizando um modelo não linear. Esta estratégia é utilizada também em Rocha (2009) na análise de domínio reforçados considerando, porém, modelos multilineares de aderência.

1.2 Aspectos mecânicos das estacas verticais

1.2.1 Estacas submetidas a cargas axiais

Estacas submetidas a cargas axiais de compressão resistem parte da carga por atrito lateral no fuste e parte por compressão da ponta, conforme ilustrado na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Comportamento mecânico de uma estaca submetida à compressão

Fonte: Vargas (1977)

O processo de cravação de estacas pode resultar importantes cargas residuais. Estas cargas resultam da deformação imposta no processo construtivo: a estaca, comprimida, tende a retornar à configuração indeformada, mas é restringida pelo solo. Com isso, surgem tensões de cisalhamento, constituídas de atrito positivo (i.e., para cima) na parte inferior da estaca e atrito negativo (para baixo) na parte superior da estaca, além de mobilização da ponta - diz-se que esta carga está “presa” na ponta. Segundo Fellenius (2009), a não consideração deste fenômeno nas análises pode levar a interpretações errôneas de provas de carga estáticas, em que o atrito lateral parece maior que o real, enquanto que a carga na ponta parece menor.

Uma maneira de determinar a carga de ruptura de uma estaca é através da análise de um gráfico de carga – recalque, obtido a partir de uma prova de carga estática. No entanto, a ruptura pode não se apresentar bem definida. Alguns autores estabelecem que a capacidade de carga de uma estaca corresponde à carga que provoca um valor de recalque limite. Para Vesic (1977), por exemplo, este recalque seria de 10% e 25 % do diâmetro da ponta para estacas cravadas e escavadas, respectivamente. Uma regra atribuída a Terzaghi, apresentada em Fellenius (2009), estabelece o valor limite de 10% do diâmetro da estaca ou 1,5 polegadas (aproximadamente 38 mm). Caso a prova de carga seja interrompida muito

prematuramente à ruptura, existem técnicas para se extrapolar a curva carga – recalque até a ruptura, como as apresentadas em Fellenius (2009).

A carga de ruptura da estaca pode também ser estimada através de métodos estáticos teóricos ou semi-empíricos, como os populares métodos Aoki e Velloso e Décourt e Quaresma. No método Aoki e Velloso as tensões de ruptura da ponta e do atrito lateral são estimadas a partir da tensão de ponta do ensaio CPT, podendo-se também utilizar uma correlação para o ensaio SPT. O tipo de solo e de estaca também influencia os resultados. No método Décourt e Quaresma as cargas de ruptura são estimadas através do SPT e do tipo de solo, sendo que a ruptura é considerada atingida para deslocamentos do topo de 10% o diâmetro (Décourt et al., 1998).

1.2.2 Estacas submetidas a cargas transversais

Estacas com esforços laterais podem ser classificadas como ativas quando o esforço, proveniente da estrutura, atua principalmente no topo da estaca, como no caso de pontes, ou passivas quando o esforço, proveniente de empuxo de solo, atua principalmente ao longo do fuste, como no caso da ruptura de um talude adjacente à estaca (Reese e Van Impe, 2001).

Segundo apresentado em Décourt et al. (1998), as estacas curtas carregadas transversalmente com topo livre rompem quando houver rotação de corpo rígido (Figura 1.2a). Já nas estacas longas o rompimento ocorre quando há formação de uma rótula plástica em uma seção a determinada profundidade. Neste caso apenas a parte acima da rótula sofre deslocamentos significativos (Figura 1.2b).

Figura 1.2 – Tipos de ruptura de uma estaca com topo livre submetida a carregamento transversal.

Fonte: Décourt (1998)

As estacas com topo restringido podem apresentar três tipos de ruptura: as estacas curtas sofrem translação de corpo rígido (Figura 1.3a), enquanto nas estacas de comprimento intermediário ocorre formação de rótula na ligação com o bloco (Figura 1.3b) e as estacas longas apresentam formação de uma rótula em profundidade e outra ao nível do bloco (Figura 1.3c).

Figura 1.3 – Tipos de ruptura de uma estaca com topo restringido submetida a carregamento transversal.

Fonte: Décourt (1998)

Os dois métodos mais comuns para o cálculo dos deslocamentos, segundo Décourt et al. (1998) são a utilização da teoria da elasticidade e o método de Winkler, que consiste em representar o solo através de um sistema de molas discretas. O comportamento dessas molas pode ser representado de maneira não linear utilizando-se as chamadas curvas $p-y$, que apresentam o deslocamento sofrido em função da carga atuante.

2. Teoria da elasticidade linear

Nas deduções do equacionamento das estacas e do solo utiliza-se a teoria da elasticidade linear, cujos fundamentos são apresentados resumidamente neste capítulo.

2.1 O Estado de tensão

Considere um sólido submetido a um carregamento composto por forças de superfície **f** e forças de volume **b**. Tomando um ponto P pertencente a este sólido pode-se extrair um paralelepípedo de dimensões infinitesimais em volta deste ponto e decompor as tensões atuantes nas suas faces em componentes paralelas aos eixos coordenados (x_1 , x_2 e x_3) (Figura 2.1).

Figura 2.1 – Definição de tensor das tensões

Fonte: Brebbia e Dominguez (1992)

Dá-se o nome de tensor das tensões de Cauchy à seguinte representação:

$$\underline{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} \quad (2.1)$$

O tensor das tensões define o estado de tensão de um ponto, pois a partir dele é possível determinar a tensão atuante no ponto P em qualquer plano. Para isso, considere um tetraedro de dimensões infinitesimais extraído do sólido. Este tetraedro (Figura 2.2) possui três faces paralelas aos eixos coordenados, vértice em P e uma face com inclinação qualquer, cujo versor normal é:

$$\mathbf{n} = n_1 \mathbf{x}_1 + n_2 \mathbf{x}_2 + n_3 \mathbf{x}_3 \quad (2.2)$$

Figura 2.2 – Tetraedro de tensões em torno do ponto P

Fonte: Fung (1965)

Sejam A a área da face inclinada, ou seja, do triângulo SRQ, A_1 a área do triângulo PSR, A_2 a área do triângulo PRQ e A_3 a área do triângulo PQS. Observa-se que as áreas A_1 , A_2 e A_3 são as projeções da área A nos planos perpendiculares aos eixos $\mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$, respectivamente, ou seja:

$$A_i = \cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i) A \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.3)$$

Onde $\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i)$ são os cossenos dos ângulos formados entre $\mathbf{n}$ e $\mathbf{x}_i$ que recebem o nome de cossenos diretores dos planos. Esses valores podem ainda ser expressos da seguinte maneira:

$$\cos(\mathbf{n}, \mathbf{x}_i) = \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}_i = n_i \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.4)$$

Desta maneira, a equação (2.3) torna-se:

$$A_i = n_i A \quad i = 1, 2, 3 \quad (2.5)$$

A força de volume pode ser desprezada, pois é da ordem de dh^3 enquanto as forças de superfície são da ordem de dh^2 . Seja $\mathbf{t}$ a tensão no plano inclinado e σ_{ij} as tensões no planos perpendiculares aos eixos, conforme a Figura 2.1. Desta forma, o equilíbrio de forças na direção de $\mathbf{x}_1$ pode ser escrito como:

$$\sigma_{11}An_1 + \sigma_{12}An_2 + \sigma_{13}An_3 - t_1A = 0 \quad (2.6)$$

Ou, equivalentemente:

$$t_1 = \sigma_{11}n_1 + \sigma_{12}n_2 + \sigma_{13}n_3 \quad (2.7)$$

Tomando o equilíbrio de forças nas direções de $\mathbf{x}_2$ e $\mathbf{x}_3$, têm-se:

$$t_2 = \sigma_{21}n_1 + \sigma_{22}n_2 + \sigma_{23}n_3 \quad (2.8)$$

$$t_3 = \sigma_{31}n_1 + \sigma_{32}n_2 + \sigma_{33}n_3 \quad (2.9)$$

As equações (2.7), (2.8) e (2.9) podem ser escritas em notação vetorial como:

$$\mathbf{t} = \underline{\boldsymbol{\sigma}} \mathbf{n} \quad (2.10)$$

Ou ainda em notação indicial como:

$$t_i = \sigma_{ij}n_j \quad (2.11)$$

Para se obter a relação entre as componentes do tensor das tensões de Cauchy e a força de volume, considere agora um paralelepípedo de dimensões infinitesimais dx_1 , dx_2 e dx_3 extraído do interior do sólido e com vértice no ponto P. A Figura 2.3 e a Figura 2.4 mostram as tensões nas faces deste paralelepípedo e a Figura 2.5 mostra as forças de volume em seu interior. O equilíbrio de forças na direção x_1 pode ser escrito como:

$$\left[\sigma_{11} - \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) \right] dx_2 dx_3 + \left[\sigma_{12} - \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} dx_2 \right) \right] dx_1 dx_3 + \left[\sigma_{13} - \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} dx_3 \right) \right] dx_1 dx_2 - b_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0 \quad (2.12)$$

Ou simplesmente:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + b_1 = 0 \quad (2.13)$$

Analogamente, para as outras direções, têm-se:

$$\frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_3} + b_2 = 0 \quad (2.14)$$

$$\frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + b_3 = 0 \quad (2.15)$$

As equações (2.13), (2.14) e (2.15) podem ainda ser escritas com notação indicial, ou seja:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.16)$$

Figura 2.3 – Tensões nas faces anteriores do paralelepípedo

Fonte: Fung (1965)

Figura 2.4 – Tensões nas faces posteriores do paralelepípedo

Fonte: Fung (1965)

Figura 2.5 – Forças de volume atuantes no paralelepípedo

Fonte: Fung (1965)

O tensor das tensões de Cauchy é simétrico. Para demonstrar este fato, considera-se novamente o tetraedro de tensões, indicado na Figura 2.6. Sendo G, G1, G2 e G3 os centros das faces SRQ, PRQ, PSR e PQS, respectivamente e sendo 3a, 3b e 3c o comprimento das arestas SP, PQ e PR, o equilíbrio de momentos em relação ao eixo GG1 é dado por:

$$\sigma_{32} \frac{3a}{2} \frac{3c}{2} b - \sigma_{23} \frac{3b}{2} \frac{3c}{2} a = 0 \quad (2.17)$$

Ou ainda:

$$\sigma_{32} = \sigma_{23} \quad (2.18)$$

Realizando-se o mesmo procedimento, calculando-se o momento em relação aos eixos GG2 e GG3, obtêm-se:

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} \quad (2.19)$$

$$\sigma_{13} = \sigma_{31} \quad (2.20)$$

Figura 2.6 – Centros das faces do tetraedro de tensões

Fonte: Fung (1965)

2.2 O estado de deformação

O campo de deformações se relaciona com o campo de deslocamentos, a partir das seguintes equações:

$$\epsilon_{11} = \frac{\partial u_1}{\partial x_1} \quad (2.21)$$

$$\epsilon_{22} = \frac{\partial u_2}{\partial x_2} \quad (2.22)$$

$$\epsilon_{33} = \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_3} \quad (2.23)$$

$$\epsilon_{12} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_2} + \frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{x}_1} \right) \quad (2.24)$$

$$\epsilon_{13} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_1}{\partial \mathbf{x}_3} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_1} \right) \quad (2.25)$$

$$\epsilon_{23} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \mathbf{u}_2}{\partial \mathbf{x}_3} + \frac{\partial \mathbf{u}_3}{\partial \mathbf{x}_2} \right) \quad (2.26)$$

Estas seis expressões podem ser reunidas em apenas uma, utilizando notação indicial:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.27)$$

Estas deformações ϵ_{ij} , paralelas aos eixos coordenados, podem ser agrupadas em um tensor $\underline{\epsilon}$, o qual recebe o nome de tensor das deformações:

$$\underline{\epsilon} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} \\ \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} & \epsilon_{32} & \epsilon_{33} \end{bmatrix} \quad (2.28)$$

2.3 Equações constitutivas

O estado de tensão de um sólido se relaciona com seu estado de deformação a partir das equações constitutivas. No caso de sólidos isotrópicos e elástico-lineares, as tensões se relacionam com as deformações de acordo com a expressão na forma tensorial:

$$\underline{\sigma} = \lambda (\text{tr } \underline{\epsilon}) \underline{\mathbf{I}} + 2\mu \underline{\epsilon} \quad (2.29)$$

Onde $\underline{\mathbf{I}}$ é a matriz identidade, $\text{tr } \underline{\epsilon}$ é o traço do tensor das deformações, ou seja, $\text{tr } \underline{\epsilon} = \epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}$ e μ e λ são constantes do material, que recebem o nome de coeficientes de Lamé.

A expressão (2.29) pode ser escrita na forma indicial, tornando-se:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \epsilon_{kk} + 2\mu \epsilon_{ij} \quad (2.30)$$

Onde δ_{ij} é o Delta de Kronecker, que é igual à unidade quando $i = j$ e nulo quando $i \neq j$.

As deformações se relacionam com as tensões de acordo com a seguinte expressão:

$$\underline{\epsilon} = -\frac{\lambda}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} (\text{tr } \underline{\sigma}) \underline{I} + \frac{1}{2\mu} \underline{\sigma} \quad (2.31)$$

Ou ainda,

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\lambda \delta_{ij}}{2\mu(2\mu + 3\lambda)} \sigma_{kk} + \frac{1}{2\mu} \sigma_{ij} \quad (2.32)$$

Os coeficientes de Lamé podem ser escritos em função do coeficiente de Poisson e do módulo de elasticidade longitudinal através das relações:

$$\mu = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (2.33)$$

$$\lambda = \frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)} \quad (2.34)$$

Desta forma, as expressões (2.30) e (2.32) tornam-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1 + \nu} \left[\frac{\nu}{1 - 2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} + \epsilon_{ij} \right] \quad (2.35)$$

$$\epsilon_{ij} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} + \frac{1 + \nu}{E} \sigma_{ij} \quad (2.36)$$

As expressões (2.35) e (2.36) permitem obter as tensões em um ponto, conhecida sua deformação ou vice-versa.

3. O método dos elementos de contorno

O método dos elementos de contorno (MEC) é um método numérico para a solução de equações diferenciais na forma integral. Este método mostra-se muito eficaz na solução de problemas de domínio infinito ou semi-infinito, devido à economia computacional que ele traz, uma vez que apenas o contorno é discretizado. Além disso, este método é eficiente na modelagem de problemas de concentração de tensão. Neste capítulo é apresentada a formulação do MEC visando o equacionamento do solo, considerado homogêneo, semi-infinito, elástico-linear e isotrópico.

3.1 Soluções fundamentais de Mindlin

As soluções fundamentais representam a resposta mecânica em um ponto P (ponto campo) de uma carga unitária aplicada em um ponto S (ponto fonte). Diversas soluções fundamentais podem ser encontradas na literatura, tais como as soluções de Kelvin, Boussinesq-Cerruti e Mindlin. Optou-se por utilizar neste trabalho as soluções de Mindlin, pois estas dispensam a discretização do solo.

Mindlin (1936) utilizou as soluções de Kelvin para resolver o problema de uma carga aplicada a uma distância c do contorno de um sólido semi-infinito, homogêneo, isotrópico e elástico. Com as devidas condições de contorno (tensões nulas no contorno), obteve um conjunto de equações analíticas para o deslocamento e tensão em um ponto no interior do sólido.

As expressões para o deslocamento são apresentadas a seguir, onde u e v são os deslocamentos horizontais na direção x e y , respectivamente, w é o deslocamento na direção vertical, ν é o coeficiente de Poisson e G é o módulo de elasticidade transversal. Os parâmetros das equações são ilustrados na Figura 3.1.

3.1.1 Carga normal ao plano

Os deslocamentos produzidos por uma carga unitária normal ao plano são dados por:

$$u = \frac{r}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} + \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} \right] \quad (3.1)$$

$$w = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right] \quad (3.2)$$

3.1.2 Carga paralela à direção horizontal x

Os deslocamentos produzidos por uma carga unitária paralela ao plano são dados por:

$$u = \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{x^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)x^2}{R_2^3} + \frac{2cz}{R_2^3} \left(1 - \frac{3x^2}{R_2^2} \right) + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2+z+c} \left(1 - \frac{x^2}{R_2(R_2+z+c)} \right) \right] \quad (3.3)$$

$$v = \frac{xy}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{1}{R_1^3} + \frac{3-4\nu}{R_2^3} - \frac{6cz}{R_2^5} - \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)^2} \right] \quad (3.4)$$

$$w = \frac{x}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{z-c}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z-c)}{R_2^3} - \frac{6cz(z+c)}{R_2^5} + \frac{4(1-\nu)(1-2\nu)}{R_2(R_2+z+c)} \right] \quad (3.5)$$

Figura 3.1 – Coeficientes da solução de Mindlin

Fonte: Mindlin (1936)

3.2 Equação integral do contorno

Considere um sólido em duas configurações distintas:

- (a), na qual o sólido apresenta tensões $\sigma_{ij}^{(a)}$ e deformações $\epsilon_{ij}^{(a)}$
- (b), na qual o sólido apresenta tensões $\sigma_{ij}^{(b)}$ e deformações $\epsilon_{ij}^{(b)}$

O Teorema de Betti garante que o trabalho realizado pelas tensões de (a) ao longo dos deslocamentos de (b) é igual ao trabalho realizado pelas tensões de (b) ao longo dos deslocamentos de (a) (Becker, 1992). Desta forma, é válida a seguinte expressão:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} \epsilon_{ij}^{(b)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} \epsilon_{ij}^{(a)} d\Omega \quad (3.6)$$

Substituindo (2.27) em (3.6), tem-se:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} (u_{i,j} + u_{j,i})^{(b)} d\Omega = \frac{1}{2} \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} (u_{i,j} + u_{j,i})^{(a)} d\Omega \quad (3.7)$$

Eliminando-se o coeficiente $\frac{1}{2}$ e lançando mão da convenção indicial de somatória, obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} u_{i,j}^{(b)} d\Omega = \int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} u_{i,j}^{(a)} d\Omega \quad (3.8)$$

Utilizando-se integração por partes, o primeiro membro pode ser escrito da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} u_{i,j}^{(b)} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^{(a)} u_i^{(b)}) n_j d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{ij,j}^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega \quad (3.9)$$

Usando a relação (2.16) no último termo (3.9), tem-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} u_{i,j}^{(b)} d\Omega = \int_{\Gamma} (\sigma_{ij}^{(a)} u_i^{(b)}) n_j d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega \quad (3.10)$$

Como agora o primeiro termo do segundo membro diz respeito ao contorno, pode-se substituir a tensão neste termo pela força de superfície f da seguinte maneira:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(a)} u_{i,j}^{(b)} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega \quad (3.11)$$

Realizando-se este mesmo procedimento para o segundo membro de (3.8), obtém-se:

$$\int_{\Omega} \sigma_{ij}^{(b)} u_{i,j}^{(a)} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Omega \quad (3.12)$$

Finalmente, substituindo-se (3.11) e (3.12) em (3.8), chega-se em:

$$\int_{\Gamma} f_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(a)} u_i^{(b)} d\Omega = \int_{\Gamma} f_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Gamma + \int_{\Omega} b_i^{(b)} u_i^{(a)} d\Omega \quad (3.13)$$

Considere-se agora que a situação (a) seja a configuração de um problema real e a (b) seja a configuração do sólido submetido ao carregamento da solução fundamental, ou seja:

$f_i^{(b)} = f_{ij}^*(p, Q)$ representa a força no ponto Q , na direção j provocada por uma carga localizada no ponto p , aplicada na direção i

$u_i^{(b)} = u_{ij}^*(p, Q)$ representa o deslocamento do ponto Q , na direção j provocada por uma carga localizada no ponto p , aplicada na direção i

A carga unitária concentrada da solução fundamental pode ser representada pela função delta de Dirac, Δ^i , cujo valor tende ao infinito no ponto de aplicação, é nulo nos demais pontos e cuja integral é igual à unidade. Desta forma, tem-se:

$$b_i^{(b)} = \Delta^i \quad (3.14)$$

Desta maneira, a equação (3.13) pode ser reescrita como:

$$\int_{\Gamma} f_i(Q) u_{ij}^*(p, Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_i(Q) u_{ij}^*(p, Q) d\Omega = \int_{\Gamma} f_{ij}^*(p, Q) u_i(Q) d\Gamma + u_i(Q) \quad (3.15)$$

Reordenando-se (3.15), obtém-se:

$$u_i(Q) = - \int_{\Gamma} \tilde{f}_{ij}^*(p, Q) u_j(Q) d\Gamma + \int_{\Gamma} f_i(Q) u_{ij}^*(p, Q) d\Gamma + \int_{\Omega} b_i(q) u_{ij}^*(p, q) d\Omega \quad (3.16)$$

A expressão (3.16) recebe o nome de Identidade de Somigliana. A partir dela, pode-se obter o deslocamento de qualquer ponto interno ao domínio Ω em função dos valores de contorno $f_i(Q)$ e $u_i(Q)$ e da força de volume b_i .

3.3 Linha de carga aplicada no solo

A identidade de Somigliana fornece uma expressão para o cálculo de deslocamentos a partir das tensões. Para utilizá-la na análise de estacas, considera-se a linha de carga apresentada na Figura 3.2.

Figura 3.2 – Estaca representada por linha de carga com quatro nós imersa no solo

Fonte: Matos Filho et al. (2005)

Nesta abordagem serão desprezadas as forças de volume, ou seja, tem-se $b_{i(Q)} = 0$. Como não serão necessárias aproximações para os deslocamentos na formulação do MEC, tem-se também $\int_{\Gamma} \tilde{f}_{ij}^*(p, Q) u_j(Q) d\Gamma = 0$. Com isto, a identidade de Somigliana resume-se a:

$$u_i(Q) = \int_{\Gamma} f_i(Q) u_{ij}^*(p, Q) d\Gamma \quad (3.17)$$

As tensões ao longo do fuste da estaca são aproximadas por meio de funções de forma polinomiais, desta maneira, as tensões podem ser expressas como a seguir:

$$f(\xi) = \{\Phi\}^T \{f\} \quad (3.18)$$

Onde ξ é a variável adimensional $\xi = x_3/L$.

As funções de forma para as tensões horizontais são do terceiro grau, utilizando-se os valores dos nós k, l, m e n na interpolação. Desta forma, tem-se:

$$\{\Phi_i\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{ik} \\ \Phi_{il} \\ \Phi_{im} \\ \Phi_{in} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -4,5\xi^3 + 9\xi^2 - 5,5\xi + 1 \\ 13,5\xi^3 - 22,5\xi^2 + 9\xi \\ -13,5\xi^3 + 18\xi^2 - 4,5\xi \\ 4,5\xi^3 - 4,5\xi^2 + \xi \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (3.19)$$

No caso das tensões de cisalhamento verticais, utilizam-se funções de forma quadráticas, interpolando-se os valores dos nós k, l e m. Ou seja,

$$\{\Phi_3\} = \begin{Bmatrix} \Phi_{3k} \\ \Phi_{3l} \\ \Phi_{3m} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2}(9\xi^2 - 9\xi + 2) \\ -9\xi^2 + 6\xi \\ \frac{1}{2}(9\xi^2 - 3\xi) \end{Bmatrix} \quad (3.20)$$

Com estas funções de forma, pode-se reescrever a equação (3.17) da seguinte maneira:

$$\{u\} = \left[\int_{\Gamma} [U^*] \{\Phi\}^T d\Gamma \right] \{f\} \quad (3.21)$$

Se considerarmos que o solo pode possuir um número de estacas igual a N_{est} , obtém-se a equação mais geral:

$$\{u\} = \sum_{e=1}^{N_{est}} \left[\int_{\Gamma} [U^*] \{\Phi\}^T d\Gamma \right] \{f\} \quad (3.22)$$

Estas integrais são resolvidas numericamente, utilizando-se a Regra da Quadratura de Gauss. Para se evitar a singularidade, consideram-se como pontos fonte dois pontos do fuste da estaca diametralmente opostos e o ponto campo em seu eixo (Figura 3.3). O valor de cálculo é a média entre os dois valores calculados. Isto elimina a singularidade ao longo do fuste, mas não contorna o problema da singularidade na ponta da estaca.

Figura 3.3 – Seção transversal da estaca, mostrando os pontos fonte perimetrais e o ponto campo, localizado no centro da estaca.

Fonte: Ribeiro (2009)

Para tanto, a ponta da estaca é tratada de forma separada, considerando-se a tensão na base representada por uma força concentrada, dividida pela área da seção. Caso o ponto fonte e ponto campo estejam localizados em estacas diferentes, não há singularidade e a função de forma é unitária. Desta maneira, sendo Γ_b o contorno da ponta da estaca, a integral torna-se:

$$I_{ns} = \int_{\Gamma_b} [U^*] d\Gamma \quad (3.23)$$

A solução fundamental, neste caso, é considerada uma força concentrada aplicada na área da ponta da estaca. Assim, pode-se retirá-la da integral:

$$I_{ns} = [U^*] \int_{\Gamma_b} d\Gamma \quad (3.24)$$

Finalmente, chamando-se de A_b a área da ponta da estaca, tem-se:

$$I_{ns} = [U^*] A_b \quad (3.25)$$

No caso singular, ou seja, quando pontos fonte e campo estão localizados na mesma estaca e a solução fundamental é escrita na direção x_3 , o cálculo é resolvido analiticamente. A integral é dada por:

$$I_s = \int_{\Gamma_b} u^*_{33} \sigma_b dA \quad (3.26)$$

Onde σ_b é a tensão na ponta da estaca, como ela é considerada constante, pode ser retirada da integral, obtendo-se:

$$I_s = \sigma_b \int_{\Gamma_b} u^*_{33} dA \quad (3.27)$$

Assim, a expressão resume-se à integração da solução fundamental u^*_{33} na área da ponta, ou seja:

$$I_s = \sigma_b \int_{\Gamma_b} \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{R_1} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{R_2} + \frac{(z-c)^2}{R_1^3} + \frac{(3-4\nu)(z+c)^2 - 2cz}{R_2^3} + \frac{6cz(z+c)^2}{R_2^5} \right] dA \quad (3.28)$$

Como se trata da ponta da estaca, pode-se dizer que $R_1 \equiv r$, $c = z = L$ e $R_2 = \sqrt{4L^2 + r^2}$. Desta forma, a integral torna-se:

$$I_s = \sigma_b \int_{\Gamma_b} \frac{1}{16\pi G(1-\nu)} \left[\frac{3-4\nu}{r} + \frac{8(1-\nu)^2 - (3-4\nu)}{\sqrt{4L^2 + r^2}} + \frac{(3-4\nu)(2L)^2 - 2L^2}{(\sqrt{4L^2 + r^2})^3} + \frac{24L^4}{(\sqrt{4L^2 + r^2})^5} \right] dA \quad (3.29)$$

A integração fica facilitada ao utilizar coordenadas polares, ou seja:

$$dA = r dr d\theta \quad (3.30)$$

$$u_3 = \sigma_b \int_0^{2\pi} \int_0^R u_{33}^* r dr d\theta \quad (3.31)$$

Como u_{33}^* é constante em relação à θ , pode-se escrever:

$$u_3 = 2\pi\sigma_b \int_0^R u_{33}^* r dr \quad (3.32)$$

Nas expressões acima R é o raio da estaca. Ao efetuar a integração de (3.32), tem-se o seguinte resultado:

$$I_s = \frac{\sigma_b}{8G(1-\nu)} \left[R(3-4\nu) + (8(1-\nu)^2 - (3-4\nu))(\sqrt{4L^2 + r^2} - 2L) + L^2(10-16\nu) \left(-\frac{1}{\sqrt{4L^2 + r^2}} + \frac{1}{2L} \right) + 24L^4 \left(-\frac{1}{3(4L^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{1}{24L^3} \right) \right] \quad (3.33)$$

Finalmente, pode-se avaliar todas as integrais que compõem equação (3.22). Fazendo-se:

$$[G] = \sum_{e=1}^{N_{est}} \left[\int_{\Gamma} [U^*] \{\Phi\}^T d\Gamma \right] \quad (3.34)$$

Sendo $\{u_s\}$ o vetor de deslocamentos nodais na interface estaca-solo e $\{P_s\}$ o vetor das forças nodais na interface estaca-solo, obtém-se a equação dos deslocamentos dos pontos do solo:

$$\{u_s\} = [G]\{P_s\} \quad (3.35)$$

Pode-se ainda escrever as forças nodais em função dos deslocamentos dos pontos do solo, ou seja:

$$\{P_s\} = [G]^{-1}\{u_s\} \quad (3.36)$$

4. O método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos (MEF) é uma ferramenta numérica muito utilizada na resolução de problemas envolvendo o comportamento mecânico de corpos deformáveis. Trata-se de um método numérico muito versátil e difundido no meio profissional e acadêmico, pois se mostra muito eficiente e prático para a resolução de diversos tipos de problemas envolvendo domínio finito. Neste capítulo apresenta-se a formulação do MEF utilizada para simular a estaca, considerada um elemento finito linear de quatro nós.

4.1 O Princípio dos trabalhos virtuais

Para o equacionamento do MEC será utilizado o princípio dos trabalhos virtuais (PTV). O PTV é apresentado a partir de manipulações da equação de equilíbrio de um sólido submetido a forças de volume apresentada no Capítulo 3, em que $\sigma_{ij,j}$ é o divergente do tensor das tensões de Cauchy e b_i representa as forças de volume:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (4.1)$$

Aplica-se em seguida a técnica de resíduos ponderados, que parte da anulação da integral da função resíduo ao longo do domínio. Escolhendo-se como função ponderadora o campo de deslocamentos virtual $\tilde{u}_i$, tem-se:

$$\int_{\Omega} (\sigma_{ij,j} + b_i) \tilde{u}_i d\Omega = 0 \quad (4.2)$$

Fazendo-se integração por partes em (4.2), obtém-se:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i \tilde{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} \sigma_{ij} n_j \tilde{u}_i d\Gamma = 0 \quad (4.3)$$

O produto $\sigma_{ij} n_j$ no contorno Γ corresponde à força de superfície f_i . Desta maneira, pode-se escrever:

$$-\int_{\Omega} \sigma_{ij} \tilde{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} b_i \tilde{u}_i d\Omega + \int_{\Gamma} f_i \tilde{u}_i d\Gamma = 0 \quad (4.4)$$

A expressão (4.3) pode ser expressa de forma matricial como:

$$\int_{\Omega} \{\tilde{\epsilon}\}^T \{\sigma\} d\Omega = \int_{\Omega} \{\tilde{u}\}^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma} \{\tilde{u}\}^T \{f\} d\Gamma \quad (4.5)$$

Onde $\tilde{\epsilon}$ é o campo de deformações virtuais associado ao campo de deslocamentos virtuais $\tilde{u}$. Conforme apresentado no Capítulo 2, as tensões em um sólido podem ser obtidas a partir de suas deformações, através da relação constitutiva:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left[\frac{\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} \epsilon_{kk} + \epsilon_{ij} \right] \quad (4.6)$$

Sendo $[D]$ a matriz que relaciona tensões com deformações, a expressão (4.6) pode ser escrita matricialmente:

$$\{\sigma\} = [D]\{\epsilon\} \quad (4.7)$$

Desta maneira, a expressão (4.5) assume a seguinte forma:

$$\int_{\Omega} \{\tilde{\epsilon}\}^T [D] \{\epsilon\} d\Omega = \int_{\Omega} \{\tilde{u}\}^T \{b\} d\Omega + \int_{\Gamma} \{\tilde{u}\}^T \{f\} d\Gamma \quad (4.8)$$

A equação (4.8) é a representação matemática do princípio dos trabalhos virtuais do caso plano. O primeiro membro da equação corresponde ao trabalho interno realizado pelas tensões reais sobre o campo de deformações virtuais e os termos do segundo membro correspondem aos trabalhos externos realizados pelas cargas de volume e de superfície reais sobre o campo de deslocamentos virtuais.

O campo de deslocamentos é aproximado por uma função interpoladora. Sejam $\{u_p\}$ o vetor dos deslocamentos nos nós do elemento finito e $[H]$ a matriz que contém as funções de aproximação, tem-se:

$$\{u\} = [H]\{u_p\} \quad (4.9)$$

Conforme apresentado no Capítulo 2, as deformações podem ser escritas em função dos deslocamentos, conforme:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (4.10)$$

Ao se agrupar as derivadas de (4.10) em um operador diferencial L, tem-se:

$$\{\epsilon\} = [L]\{u\} \quad (4.11)$$

De posse de (4.9) e (4.11) o campo de deformações também pode ser expresso como função dos deslocamentos nos nós do elemento, ou seja:

$$\{\epsilon\} = [L][H]\{u_p\} = [B]\{u_p\} \quad (4.12)$$

Onde $[B] = [L][H]$. Com as equações (4.9) e (4.12), a expressão (4.8) pode ser escrita como:

$$\{\tilde{u}_p\}^T \left(\int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \right) \{u_p\} = \{\tilde{u}_p\}^T \int_{\Omega} [H]^T \{b\} d\Omega + \{\tilde{u}_p\}^T \int_{\Gamma} [H]^T \{f\} d\Gamma \quad (4.13)$$

O termo entre parênteses na equação (4.13) relaciona um vetor de deslocamentos com um vetor de cargas nodais e é chamado matriz de rigidez do elemento finito:

$$[K_c] = \int_{\Omega} [B]^T [D] [B] d\Omega \quad (4.14)$$

Visando a formulação do método para o caso da estaca imersa no solo, é conveniente separar as forças de superfície em duas partes: um vetor $\{F_1\}$ que contém cargas concentradas aplicadas na estaca e um vetor $-\{P_p\}$ que contém cargas de interação estaca/solo. Desta maneira, a última integral de (4.13) pode ser expressa como:

$$\int_{\Gamma} [H]^T \{f\} d\Gamma = \{F_1\} - \int_{\Gamma} [H]^T \{P_p\} d\Gamma \quad (4.15)$$

Para simplificar a equação (4.13), consideram-se o vetor $\{F\}$ e a matriz $[Q]$, definidos como:

$$\{F\} = \int_{\Omega} [H]^T \{b\} d\Omega + \{F_1\} \quad (4.16)$$

$$[Q] = \int_{\Gamma} [H]^T d\Gamma \quad (4.17)$$

Após ser feita a minimização da energia potencial, de posse de (4.14), (4.16) e (4.17) a expressão (4.13) se torna:

$$\{\tilde{u}_p\}^T [K_c] \{u_p\} = \{\tilde{u}_p\}^T \{F\} - \{\tilde{u}_p\}^T [Q] \{P_p\} \quad (4.18)$$

O campo de deslocamentos virtuais pode ser colocado em evidência, conforme a seguir:

$$\{\tilde{u}_p\}^T ([K_c] \{u_p\} - \{F\} + [Q] \{P_p\}) = 0 \quad (4.19)$$

Para que a expressão (4.19) seja verdadeira o campo de deslocamentos virtuais ou o conteúdo dos parênteses tem que ser nulo. Como um campo de deslocamentos virtuais pode assumir diferentes valores, a única forma de garantir a igualdade é impondo que o termo entre parênteses seja nulo. Assim:

$$[K_c] \{u_p\} - \{F\} + [Q] \{P_p\} = 0 \quad (4.20)$$

A expressão (4.20) pode ser rearranjada de uma maneira mais conveniente para sua resolução, qual seja:

$$[K_c] \{u_p\} = \{F\} - [Q] \{P_p\} \quad (4.21)$$

A equação (4.21) pode ser resolvida após a aplicação das condições de contorno e relaciona as cargas aplicadas com os deslocamentos nos nós do elemento.

4.2 Elemento finito de quatro nós

O elemento finito utilizado na representação das estacas é apresentado na Figura 4.1. A Figura 4.1a) apresenta as cinco ações que podem ser aplicadas no topo da estaca, sendo uma força em cada uma das três direções e dois momentos em torno de x_1 ou x_2 . A Figura 4.1 b) mostra cada um dos 14 parâmetros nodais, sendo três deslocamentos em cada um dos nós e duas rotações no topo. A Figura 4.1c) mostra as forças de interação horizontais, representadas por cargas distribuídas ao longo do fuste da estaca, aproximadas por polinômios do terceiro grau. Finalmente, a Figura 4.1d) apresenta a força de interação vertical, representada por carga distribuídas, aproximada por um polinômio do segundo grau e a tensão na base, considerada uma força uniformemente distribuída.

Figura 4.1 – Parâmetros do modelo em elementos finitos da estaca

Fonte: Ribeiro (2009)

Os deslocamentos horizontais são aproximados por funções polinomiais de quarto grau, portanto podem ser escritos como:

$$u_i(\xi) = \{\varphi\}^T \{u_i\} = \{\varphi_{k1} \varphi_{k2} \varphi_l \varphi_m \varphi_n\} \begin{Bmatrix} u_{ik} \\ u'_{ik} \\ u_{il} \\ u_{im} \\ u_{in} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (4.22)$$

Onde:

$$\{\varphi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{99}{4}\xi^4 + 45\xi^3 - \frac{85}{4}\xi^2 + 1 \\ -\frac{9}{2}\xi^4 L + 9\xi^3 L - \frac{11}{2}\xi^2 L + \xi L \\ \frac{81}{2}\xi^4 - \frac{135}{2}\xi^3 + 27\xi^2 \\ -\frac{81}{4}\xi^4 + 27\xi^3 - \frac{27}{4}\xi^2 \\ \frac{9}{2}\xi^4 - \frac{9}{2}\xi^3 + \xi^2 \end{Bmatrix} \quad (4.23)$$

Já os deslocamentos verticais e as forças horizontais de interação do fuste são aproximados por polinômios de terceiro grau, logo podem ser escritos como:

$$u_3(\xi) = \{\phi\}^T \{u_3\} = \{\phi_k \phi_l \phi_m \phi_n\} \begin{Bmatrix} u_{3k} \\ u_{3l} \\ u_{3m} \\ u_{3n} \end{Bmatrix} \quad (4.24)$$

$$q_i(\xi) = \{\phi\}^T \{q_i\} = \{\phi_k \phi_l \phi_m \phi_n\} \begin{Bmatrix} q_{ik} \\ q_{il} \\ q_{im} \\ q_{in} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (4.25)$$

Em que:

$$\{\phi\} = \begin{Bmatrix} -\frac{9}{2}\xi^3 + 9\xi^2 - \frac{11}{2}\xi + 1 \\ \frac{27}{2}\xi^3 - \frac{45}{2}\xi^2 + 9\xi \\ -\frac{27}{2}\xi^3 + 18\xi^2 - \frac{9}{2}\xi \\ \frac{9}{2}\xi^3 - \frac{9}{2}\xi^2 + \xi \end{Bmatrix} \quad (4.26)$$

As forças verticais de interação no fuste são aproximadas por polinômios de segundo grau, ou seja:

$$q_3(\xi) = \{\omega\}^T \{q_3\} = \{\omega_k \omega_l \omega_m\} \begin{Bmatrix} q_{3k} \\ q_{3l} \\ q_{3m} \end{Bmatrix} \quad i = 1, 2 \quad (4.27)$$

Onde:

$$\{\omega\} = \begin{Bmatrix} \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{9}{2}\xi + 1 \\ -9\xi^2 + 6\xi + 1 \\ \frac{9}{2}\xi^2 - \frac{3}{2}\xi \end{Bmatrix} \quad (4.28)$$

Finalmente, a tensão na ponta da estaca é representada por uma força uniformemente distribuída σ_b aplicada na área da ponta da estaca A_p , logo tem-se:

$$\sigma = \{1\}\{\sigma_b\} \quad (4.29)$$

$$\sigma = \sigma_b \quad (4.30)$$

Sua resultante é, portanto:

$$R = \sigma A_p \quad (4.31)$$

De posse de todas as aproximações necessárias para os carregamentos e os deslocamentos, o próximo passo consiste no cálculo da energia potencial do elemento. Considera-se o carregamento da estaca como um processo quase-estático, ou seja, despreza-se a energia cinética. Desta forma, tem-se:

$$\Pi = \gamma + \Omega' \quad (4.32)$$

Onde Π é a energia potencial total, γ é a energia de deformação e Ω' é a energia potencial das cargas externas. As parcelas γ e Ω' são dadas por:

$$\gamma = \frac{E_p I_p}{2} L \int_0^1 u_1''^2(\xi) d\xi + \frac{E_p I_p}{2} L \int_0^1 u_2''^2(\xi) d\xi + \frac{E_p A_p}{2} L \int_0^1 u_3'^2(\xi) d\xi \quad (4.33)$$

$$\begin{aligned} \Omega' = & L \int_0^1 q_1(\xi) u_1(\xi) d\xi + L \int_0^1 q_2(\xi) u_2(\xi) d\xi + L \int_0^1 q_3(\xi) u_3(\xi) d\xi + \\ & \int_{A_p} \sigma_b u_3 dA_p - F_1 u_{1k} - M_1 u'_{1k} - F_2 u_{2k} - M_2 u'_{2k} - V u_{3k} \end{aligned} \quad (4.34)$$

Nas equações anteriores os parâmetros E_p , I_p , A_p , L e ξ representam, respectivamente, o módulo de elasticidade, o momento de inércia, a área da seção transversal, o comprimento do elemento e a variável adimensional $\xi = x_3/L$. No segundo membro da expressão (4.33) os dois primeiros termos dizem respeito à deformação transversal da estaca, e o último termo diz respeito à deformação longitudinal da estaca. Já na equação (4.34) as duas primeiras integrais representam a energia potencial das cargas distribuídas transversais, a terceira integral representa a energia potencial da carga distribuída vertical e a última representa a energia potencial da carga da ponta da estaca. Os demais termos da equação dizem respeito à energia potencial das cargas aplicadas no topo da estaca.

As expressões (4.33) e (4.34) podem ainda ser escritas de forma matricial e em função das funções de forma, a partir das equações (4.22), (4.24), (4.25) e (4.27):

$$\gamma = \frac{E_p I_p}{2} L \int_0^1 \{u_1\}^T \{\varphi''\}^T \{\varphi''\} [u_1] d\xi + \frac{E_p I_p}{2} L \int_0^1 \{u_2\}^T \{\varphi''\}^T \{\varphi''\} [u_2] d\xi + \frac{E_p A_p}{2} L \int_0^1 \{u_3\}^T \{\phi'\}^T \{\phi'\} [u_3] d\xi \quad (4.35)$$

$$\Omega' = L \int_0^1 \{u_1\}^T \{\varphi\}^T \{\phi\} \{q_1\} d\xi + L \int_0^1 \{u_2\}^T \{\varphi\}^T \{\phi\} \{q_2\} d\xi + L \int_0^1 \{\omega_i\}^T \{\phi\} \{\omega\} \{q_3\} d\xi + R u_{3n} - F_1 u_{1k} - M_1 u'_{1k} - F_2 u_{2k} - M_2 u'_{2k} - V u_{3k} \quad (4.36)$$

Como pode-se observar nas expressões (4.35) e (4.36), é necessário utilizar a primeira derivada da função ϕ e a segunda derivada da função φ . O resultado destes cálculos é dado por:

$$\{\phi'\} = \begin{Bmatrix} -\frac{27}{2}\xi^2 + 18\xi - \frac{11}{2} \\ \frac{81}{2}\xi^2 - 45\xi + 9 \\ -\frac{81}{2}\xi^2 + 36\xi - \frac{9}{2} \\ \frac{27}{2}\xi^2 - 9\xi + 1 \end{Bmatrix} \quad (4.37)$$

$$\{\varphi''\} = \begin{Bmatrix} -297\xi^2 + 270\xi - 85 \\ -54\xi^2L + 54\xi L - 11L \\ 486\xi^2 - 405\xi + 54 \\ -243\xi^2 + 162\xi - \frac{27}{2} \\ 54\xi^2 - 27\xi + 2 \end{Bmatrix} \quad (4.38)$$

O funcional da energia potencial Π torna-se, desta maneira, totalmente definido. Parte-se então para sua minimização. Isto é feito derivando-se o funcional em relação aos parâmetros nodais e igualando-o a zero, isto é:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{1k}} = 0$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{1l}} = 0$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_{3n}} = 0$$

(4.39)

Com isto obtém-se um sistema de 14 equações, cuja solução fornece a matriz de rigidez e o vetor de cargas nodais equivalentes do elemento finito.

A contribuição na matriz de rigidez nas direções x_1 e x_2 é:

$$[K_c^i] = \frac{EI}{40L^3} \begin{bmatrix} 23722 & 4084L & -42876 & 26838 & -7684 \\ 4084L & 808L^2 & -6912L & 3996L & -1168L \\ -42876 & -6912L & 81648 & -55404 & 16632 \\ 26838 & 3996L & -55404 & 42282 & -13716 \\ -7684 & -1168L & 16632 & -13716 & 4768 \end{bmatrix} \quad i = 1,2 \quad (4.40)$$

Já a contribuição na matriz de rigidez na direção vertical é dada por:

$$[K_c^3] = \frac{EA}{40L} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \quad (4.41)$$

As cargas horizontais distribuídas tornam-se cargas nodais equivalentes a partir da relação:

$$[q_i] = [Q^i][P_p^i] = \frac{L}{6720} \begin{bmatrix} 721 & 495 & -45 & 285 \\ 38L & 18L & 18L & 38L \\ 54 & 2430 & -486 & -486 \\ 27 & -243 & 2673 & 567 \\ 38 & -162 & 378 & 474 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{ik} \\ q_{il} \\ q_{im} \\ q_{in} \end{Bmatrix} \quad i = 1,2 \quad (4.42)$$

Finalmente, as cargas verticais distribuídas tornam-se cargas nodais equivalentes de acordo com a expressão:

$$[q_3] = [Q^3]\{P_p^3\} = \frac{L}{80} \begin{bmatrix} 7 & 2 & 1 & 0 \\ 3 & 36 & -9 & 0 \\ 3 & -18 & 45 & 0 \\ 7 & -20 & 23 & \frac{80}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} q_{3k} \\ q_{3l} \\ q_{3m} \\ R \end{Bmatrix} \quad (4.43)$$

Para fins práticos é conveniente separar a parcela da carga que é resistida pela ponta e pelo atrito lateral. Isso é facilmente obtido a partir dos valores das forças de interação nos nós da estaca. A reação na ponta é dada por:

$$F_{\text{ponta}} = q_{3n}A_p = RA_p \quad (4.44)$$

Já a resultante da força de atrito lateral da estaca é obtida a partir da integração da força de interação vertical ao longo de toda a estaca. Esta força é dada por um polinômio de segundo grau e pode ser escrita como:

$$q_3(x_3) = Ax_3^2 + Bx_3 + C \quad (4.45)$$

Supõem-se conhecidos os valores de q_{3k} , q_{3l} e q_{3m} , para valores de x_3 iguais a 0, $L/3$ e $2L/3$, respectivamente. Desta forma, pode-se escrever:

$$\begin{cases} 0 + 0 + C = q_{3k} \\ A\left(\frac{L}{3}\right)^2 + B\frac{L}{3} + C = q_{3l} \\ A\left(\frac{2L}{3}\right)^2 + B\frac{2L}{3} + C = q_{3m} \end{cases} \quad (4.46)$$

A resolução do sistema (4.46) fornece:

$$A = \frac{9}{4L^2} (2q_{3k} + 2q_{3m} - 4q_{3l}) \quad (4.47)$$

$$B = -\frac{3}{2L} (3q_{3k} - 4q_{3l} + q_{3m}) \quad (4.48)$$

$$C = q_{3k} \quad (4.49)$$

Logo, a equação que fornece os valores da força de interação vertical ao longo da estaca é dada por:

$$q_3(x_3) = \frac{9}{4L^2} (2q_{3k} + 2q_{3m} - 4q_{3l})x_3^2 - \frac{3}{2L} (3q_{3k} - 4q_{3l} + q_{3m})x_3 + q_{3k} \quad (4.50)$$

Desta maneira, a resultante do atrito lateral da estaca é dada por:

$$\begin{aligned} F_{\text{atrito}} &= \pi D \int_0^L q_3(x_3) dx_3 = \\ &= \pi D \left[\frac{9}{4L^2} (2q_{3k} + 2q_{3m} - 4q_{3l}) \frac{L^3}{3} - \frac{3}{2L} (3q_{3k} - 4q_{3l} + q_{3m}) \frac{L^2}{2} + q_{3k}L \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

O desenvolvimento da expressão (4.51) fornece:

$$F_{\text{atrito}} = \frac{\pi DL(q_{3k} + 3q_{3m})}{4} \quad (4.52)$$

5. Modelos de aderência

Neste capítulo são apresentados os modelos de aderência adotados neste trabalho. Inicialmente é feita uma breve revisão bibliográfica sobre modelos de aderência considerados na análise de problemas de interação solo-estrutura. Na sequência, são apresentados os três modelos de aderência empregados neste trabalho: o primeiro consiste em uma relação rígido-plástica entre escorregamento e tensão no fuste, baseada na aplicação da lei de atrito de Coulomb, já o segundo consiste em uma função hiperbólica representando o endurecimento do solo, por fim, o terceiro modelo consiste em uma função híbrida que representa endurecimento através de uma hipérbole e posterior amolecimento através de uma secante hiperbólica.

5.1 Introdução

A interação entre materiais em contato pode ser descrita através de diversos modelos. Raous (2011) apresenta modelos que incluem fenômenos complexos, como perda de aderência e aumento do atrito devido ao dano, viscosidade, descarregamento e cargas cíclicas.

O modelo utilizado no trabalho de Sellgren e Olofsson (1999) descreve o atrito entre areia e concreto semelhantemente ao deslizamento entre metais. Neste caso o coeficiente de atrito é considerado função do deslocamento desenvolvido e da pressão de contato, variando, portanto, ao longo do movimento.

Dois conceitos bastante utilizados em modelos de aderência são o endurecimento e o amolecimento. O endurecimento, ou encruamento, corresponde a um comportamento em que há aumento da tensão de escoamento depois de violado o limite elástico. Já no amolecimento ocorre uma redução da tensão de escoamento após o limite elástico ser atingido (Velloso et al., 1998). A Figura 5.1 ilustra exemplos desses conceitos.

Figura 5.1 – Exemplos de modelos com a) endurecimento e b) amolecimento

Fonte: Velloso et al. (1998)

A formulação apresentada em Arslan (1980) apud Wriggers (2002) utiliza uma abordagem elastoplástica para descrever o atrito entre concreto e solo e é introduzida uma função de endurecimento que descreve o comportamento da areia.

No trabalho de Desai et al. (1984) o solo e a estrutura são modelados como elementos sólidos, sendo que a interface é modelada através de um elemento de pequena espessura entre os dois materiais. Este modelo de interface é tratado como outro sólido qualquer, no entanto, sua lei constitutiva é separada em duas partes: uma relacionada aos esforços normais, que é obtida a partir das características da interface e dos elementos em sua volta e outra relacionada aos esforços cisalhantes, que é obtida a partir de ensaios.

No trabalho de Haraldsson e Wriggers (2000) duas leis de atrito são apresentadas, oriundas de simulações micromecânicas que permitem endurecimento da superfície de atrito. Os modelos são desenvolvidos através da consideração de deformações plásticas na microestrutura na região de contato entre duas superfícies rugosas.

Em De Gennaro e Frank (2002) e em Said (2009) são apresentados modelos que consideram endurecimento de interfaces fofas através de funções hiperbólicas e outros que consideram amolecimento de interfaces densas através de secantes hiperbólicas. Ambos os casos têm como assíntota a tensão de ruptura dada pelo critério de Mohr-Coulomb.

Em Küçükarslan et al. (2003) a interface estaca-solo é modelada através de molas discretas, cujo comportamento é baseado no modelo inelástico de Özdemir, que provê uma regra de histerese para ser utilizada na simulação de carregamentos cíclicos.

Liu et al. (2004) aproxima a relação de uma interface com o amolecimento através de um modelo trilinear, no qual a tensão de cisalhamento evolui até um pico e reduz até uma tensão residual, que é uma fração da tensão máxima.

Em Sheng et al. (2006) a penetração de estacas no solo é simulada através de modelos de contato considerando endurecimento e amolecimento. Os grandes deslocamentos e a não linearidade física são os maiores desafios deste tipo de problema e uma maneira de contornar este obstáculo foi através do uso de incrementos de carga automáticos.

O modelo proposto por Zhou e Lu (2009) utiliza uma relação elastoplástica para a interface considerando amolecimento e dilatação normal. A relação utilizada é descrita através de funções híbridas, compostas de subfunções quadráticas e secantes hiperbólicas.

A escolha do modelo de aderência ideal depende do problema a ser analisado e é fundamental para uma representação realista do problema a ser estudado.

5.2 Modelo baseado na lei de Coulomb

Neste modelo, o atrito é considerado através da lei de Coulomb clássica, que pode ser apresentada de forma gráfica, conforme a Figura 5.2:

Figura 5.2 – Lei de Atrito de Coulomb

Fonte: Wriggers (2002)

Para valores de tensão de cisalhamento menores que o limite $\tau_{\text{máx}}$ não há escorregamento entre as superfícies, a partir deste limite o deslocamento relativo aumenta sem alteração na tensão de cisalhamento na interface dos corpos em contato. A lei de Coulomb pode ser expressa através da equação:

$$\tau > \mu p_n \Rightarrow \tau = \tau_{\text{máx}} = \mu p_n \quad (5.1)$$

Na equação (5.1) τ é a tensão de cisalhamento entre os corpos p_n é a pressão normal de contato e μ é o coeficiente de atrito entre os corpos, que possui valor constante na formulação clássica da lei de Coulomb, mas pode depender de diversos parâmetros, como rugosidade das superfícies, velocidade de escorregamento entre os corpos, pressão normal de contato ou temperatura em formulações mais gerais (Wriggers, 2002).

Uma forma de se obter o valor do coeficiente de atrito é através da seguinte relação, em que ϕ' representa o ângulo de atrito interno efetivo do solo (Randolph e Wroth, 1981 apud Jeong et al., 2004, p.118):

$$\mu = \frac{\text{sen } \phi' \cos \phi'}{1 + \text{sen}^2 \phi'} \quad (5.2)$$

A pressão de contato transversal pode ser obtida através da consideração do empuxo em repouso atuando sobre as estacas. Desta maneira, pressão normal de contato é uma fração da tensão vertical σ_v e essa proporção é definida pelo coeficiente de empuxo em repouso K_0 , i.e.:

$$p_n = K_0 \sigma_v \quad (5.3)$$

A tensão de cisalhamento limite fica desta maneira definida por:

$$\tau_{\text{máx}} = \mu K_0 \gamma z \quad (5.4)$$

O coeficiente K_0 pode ser obtido através da fórmula de Jaki (Pinto, 2006):

$$K_0 = 1 - \text{sen } \varphi' \quad (5.5)$$

No caso de argilas sobreadensadas, sendo RSA a razão de sobreadensamento, a fórmula de Jaki é estendida para:

$$K_0 = (1 - \text{sen } \varphi')(RSA)^{\text{sen } \varphi'} \quad (5.6)$$

Caso se considere uma adesão a entre os materiais, a tensão de cisalhamento limite é passa a ser (Vargas, 1977):

$$\tau_{\text{máx}} = a + \mu K_0 \gamma z \quad (5.7)$$

5.3 Modelo hiperbólico com endurecimento

O fenômeno do endurecimento, ou seja, o aumento da tensão de escoamento (ou do coeficiente de atrito) devido ao aumento da força de cisalhamento, é considerado neste trabalho a partir do modelo hiperbólico apresentado em De Gennaro e Frank (2002) e utilizado por Said (2009).

Neste modelo a evolução do coeficiente de atrito é dada pela expressão:

$$\mu(u_t) = \mu_0 + (\mu_f - \mu_0) \frac{u_t}{A \left(\frac{\sigma_{ni}}{p_0} \right) t + u_t} \quad (5.8)$$

Na equação (5.8) $\mu(u_t)$ representa o coeficiente de atrito μ em função do deslocamento tangencial u_t . μ_0 e μ_f são os coeficientes de atrito inicial e final, respectivamente, A é um parâmetro que dita a forma na função de endurecimento, σ_{ni} representa a tensão normal inicial, p_0 é uma tensão de referência e t é a espessura da camada da interface entre solo e estaca, que pode ser estimada como um múltiplo do diâmetro médio dos grãos (D_{50}), em geral de 5 a 10 vezes D_{50} .

A Figura 5.3 ilustra este modelo graficamente. Pode se observar uma assíntota, que corresponde ao coeficiente de atrito dado pela lei de Coulomb.

Figura 5.3 – Modelo hiperbólico com endurecimento

Fonte: De Gennaro e Frank (2002)

5.4 Modelo híbrido para endurecimento e amolecimento

Neste modelo, também apresentado em De Gennaro e Frank (2002), é considerado um endurecimento do solo, através de uma função hiperbólica até que o coeficiente de atrito atinja um valor de pico, μ_p com deslocamento correspondente u_{tf} . Após o pico, é considerado amolecimento, através de uma secante hiperbólica. Este modelo pode ser expresso como:

$$\begin{aligned}
 u_t \leq u_{tf} &\Rightarrow \mu(u_t) = \mu_0 + (\mu_p - \mu_0) \frac{u_t}{A \left(\frac{\sigma_{ni}}{p_o} \right) t + u_t} \\
 u_t > u_{tf} &\Rightarrow \mu(u_t) = \mu_r + (\mu_p - \mu_r) \operatorname{sech} \left[\frac{A_0}{t} (u_t - u_{tf}) \right]
 \end{aligned}
 \tag{5.9}$$

A Figura 5.4 ilustra graficamente este modelo. Novamente, a função tem comportamento assintótico, convergindo para o valor do coeficiente de atrito dado pela lei de Coulomb.

Figura 5.4 – Representação gráfica do modelo híbrido para endurecimento e amolecimento

Fonte: De Gennaro e Frank (2002)

6. Acoplamento MEC/MEF

Neste capítulo apresenta-se a formulação do acoplamento entre o solo, modelado com o MEC e a estaca, modelada com o MEF. Para que o texto se tornar mais claro, separou-se o caso de aderência perfeita do caso geral, que considera escorregamento, apesar do primeiro caso poder ser considerado uma particularização do segundo. Ao final do capítulo, descreve-se como a formulação é implementada computacionalmente.

6.1 Aderência perfeita

Para o caso da estaca com aderência perfeita utiliza-se o procedimento descrito em Matos Filho (1999) e em Matos Filho et al. (2005). Neste caso os deslocamentos do solo e da estaca são idênticos. No entanto, o vetor de deslocamentos do solo é composto por 12 componentes e o vetor de deslocamentos da estaca é composto por 14 componentes. Desta maneira, deve-se expandir o vetor de deslocamento do solo para que ambos sejam compatíveis, i.e.:

$$\{u_p\} = \{\bar{u}_s\} = \{U\} \quad (6.1)$$

Onde o vetor $\{\bar{u}_s\}$ é o vetor $\{u_s\}$ expandido, ou seja, neste vetor são incluídos os valores u'_{1k} e u'_{2k} que são calculados para a estaca, mas não para o solo. O vetor expandido pode ser escrito explicitamente como:

$$\{\bar{u}_s\}^T = \{u_{1k} \ u_{2k} \ u_{3k} \ u'_{1k} \ u'_{2k} \ u_{1l} \ u_{2l} \ u_{3l} \ u_{1m} \ u_{2m} \ u_{3m} \ u_{1n} \ u_{2n} \ u_{3n}\} \quad (6.2)$$

O equilíbrio de forças de interação é escrito como:

$$\{P_s\} + \{P_p\} = 0 \quad (6.3)$$

Conforme descrito no Capítulo 3, as forças de interação do solo podem ser expressas em função dos deslocamentos do solo conforme a seguir:

$$\{P_s\} = [G]^{-1}\{u_s\} \quad (6.4)$$

De posse das equações (6.1), (6.3) e (6.4), pode-se reescrever a equação de equilíbrio da estaca (4.21) da seguinte maneira:

$$[K_c]\{U\} = \{F\} - [Q][\bar{G}]^{-1}\{U\} \quad (6.5)$$

Ou ainda:

$$([K_c] + [Q][\bar{G}]^{-1})\{U\} = \{F\} \quad (6.6)$$

Nas expressões (6.5) e (6.6) a matriz $[\bar{G}]$ representa a matriz $[G]$ expandida, para tornar-se compatível com o vetor $[U]$ e com a matriz $[K_c]$. Introduzindo-se a matriz $[M]$, descrita a seguir:

$$[M] = [Q][\bar{G}]^{-1} \quad (6.7)$$

Obtém-se a equação de interação solo/estaca com aderência perfeita:

$$([K_c] + [M])\{U\} = \{F\} \quad (6.8)$$

6.2 Consideração de escorregamento

O escorregamento das estacas é considerado através de procedimento análogo aos utilizado em Botta (2003) e em Leonel (2009). No entanto, este trabalho diferencia-se pela função escolhida como aproximação do deslocamento relativo.

O escorregamento entre os dois meios é considerado através da variável $[s]$, que representa o deslocamento relativo, ou seja:

$$\{u_p\} = \{\bar{u}_s\} + \{s\} \quad (6.9)$$

A variável $[s]$ é introduzida na formulação de elementos finitos da estaca, assim sua equação de equilíbrio torna-se:

$$[K_c]\{\bar{u}_s\} + [K_{sl}]\{s\} = \{F\} - [Q]\{p_p\} \quad (6.10)$$

A aproximação do deslocamento relativo tem o mesmo grau da aproximação da força de interação vertical, ou seja, trata-se de um polinômio do segundo grau. Portanto, a matriz K_{sl} pode ser obtida a partir da matriz $[K_c^3]$:

$$[K_{sl}]\{s\} = \frac{E_p A_p}{40L} \begin{bmatrix} 148 & -189 & 54 & -13 \\ -189 & 432 & -297 & 54 \\ 54 & -297 & 432 & -189 \\ -13 & 54 & -189 & 148 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_k \\ s_l \\ s_m \\ s_k - 3s_l + 3s_m \end{Bmatrix} \quad (6.11)$$

Onde s_k , s_l , s_m e $s_k - 3s_l + 3s_m$ são os valores do deslocamento relativo nos nós k , l , m e n , respectivamente. Este último valor é obtido extrapolando-se o polinômio de segundo grau para o quarto nó. Para isso, considera-se a função interpoladora:

$$s(x_3) = Ax_3^2 + Bx_3 + C \quad (6.12)$$

Analogamente ao procedimento utilizado no capítulo anterior, podem ser obtidos os coeficientes do polinômio da equação (6.12), resultando:

$$A = \frac{9}{4L^2} (2s_k + 2s_m - 4s_l) \quad (6.13)$$

$$B = -\frac{3}{2L} (3s_k - 4s_l + s_m) \quad (6.14)$$

$$C = s_k \quad (6.15)$$

Utilizando-se a expressão (6.12), o valor do deslocamento relativo no nó n é dado por:

$$s_n = AL^2 + BL + C \quad (6.16)$$

Substituindo-se as expressões (6.13), (6.14) e (6.15) em (6.16), tem-se:

$$s_n = \frac{9}{4} (2s_k + 2s_m - 4s_l) - \frac{3}{2} (3s_k - 4s_l + s_m) + s_k \quad (6.17)$$

Finalmente, desenvolvendo-se a expressão (6.17), resulta:

$$s_n = s_k - 3s_l + 3s_m \quad (6.18)$$

Voltando-se à expressão (6.11), esta pode ser desenvolvida, obtendo-se:

$$[K_{sl}]\{s\} = \frac{E_p A_p}{40L} \begin{bmatrix} 135 & -150 & 15 \\ -135 & 270 & -135 \\ -135 & 270 & -135 \\ 135 & -390 & 255 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} s_k \\ s_l \\ s_m \end{Bmatrix} \quad (6.19)$$

A consideração de escorregamento não altera o equilíbrio de forças de interação, apresentado na equação (6.3). Desta forma, substituindo-se a expressão (6.4) na equação (6.10), esta pode ser expressa como:

$$[K_c]\{\bar{u}_s\} + [K_{sl}]\{s\} = \{F\} - [Q][\bar{G}]^{-1}\{\bar{u}_s\} \quad (6.20)$$

Substituindo-se a expressão (6.7) na equação (6.20), tem-se:

$$[K_c]\{\bar{u}_s\} + [K_{sl}]\{s\} + [M]\{\bar{u}_s\} = \{F\} \quad (6.21)$$

Finalmente, podem-se agrupar os termos que multiplicam $\{\bar{u}_s\}$ na expressão (6.21), obtendo-se a equação de interação solo/estaca com consideração de escorregamento:

$$[K_c + M]\{\bar{u}_s\} + [K_{sl}]\{s\} = \{F\} \quad (6.22)$$

6.3 Implementação computacional

A implementação computacional do problema de interação estaca-solo é feita de forma direta no caso de aderência perfeita, a partir da resolução da equação (6.8). No caso de se considerar escorregamento, a carga vertical é introduzida de forma incremental, utilizando para isso o método de Newton-Raphson. Abordagem semelhante para a resolução deste problema é adotada no trabalho de Rocha (2009). Para cada passo de carga ΔF , tem-se um valor de escorregamento Δs , um valor de força de interação ΔP_s e um valor de deslocamento dos pontos da estaca $\Delta \bar{u}_p$. A resolução deste problema é feita através das

equações (6.22) e (6.4), que podem ser escritas em uma única expressão utilizando-se a matriz identidade I , conforme a seguir:

$$\begin{bmatrix} K_c + M & K_{sl} \\ G^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_s \\ \Delta s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta F \\ \Delta P_s \end{Bmatrix} \quad (6.23)$$

O sistema apresentado na equação (6.23) possui mais incógnitas que equações. Para sua resolução, considera-se, como primeira aproximação, escorregamento nulo. Desta forma, o valor de Δs deixa de ser incógnito, enquanto o valor de ΔP_s permanece desconhecido. Para a resolução por computador, é conveniente inverter a posição destas variáveis. Portanto:

$$\begin{bmatrix} K_c + M & 0 \\ G^{-1} & -I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta \bar{u}_s \\ \Delta P_s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & -K_{sl} \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \Delta F \\ \Delta s \end{Bmatrix} \quad (6.24)$$

Se após a resolução do sistema (6.24) nenhum valor da força de interação P_s , dentro de uma tolerância, superar um limite dado pelo modelo de aderência (P_{lim}), então aplica-se o próximo incremento de carga. Caso contrário, calcula-se o quanto a força excede o valor limite e reaplica-se esta força como uma carga corretiva no nó em que isto ocorreu. Esta carga corretiva é dada por:

$$\delta P_s = -(P_s - P_{lim}) \quad (6.25)$$

Para esta força de interação corretiva os valores do escorregamento e deslocamento são desconhecidos e a força aplicada é nula. Com isto, tem-se a equação:

$$\begin{bmatrix} K_c + M & K_{sl} \\ G^{-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta \bar{u}_s \\ \delta s \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & I \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} 0 \\ \delta P_s \end{Bmatrix} \quad (6.26)$$

Após a resolução da equação (6.26) os valores das variáveis devem ser atualizados, resultando:

$$\begin{aligned}
\Delta \bar{u}_s &\leftarrow \Delta \bar{u}_s + \delta \bar{u}_s \\
\Delta s &\leftarrow \Delta s + \delta s \\
\Delta P_s &\leftarrow \Delta P_s + \delta P_s
\end{aligned} \tag{6.27}$$

Os valores de $\Delta \bar{u}_s$ e δs obtidos na equação (6.26) são utilizados para recalculer os valores das forças de interação, conforme a seguinte expressão:

$$\{\Delta P_s\} = [G^{-1}]\{\Delta \bar{u}_s\} \tag{6.28}$$

O valor de força de interação obtido pela equação (6.28) é comparado com o valor da força dada pelo modelo de aderência para este escorregamento. Caso estes valores sejam diferentes, dentro de uma tolerância, então se volta à equação (6.25) e o processo é repetido até que haja convergência.

6.4 *Resumo do algoritmo*

- 1) Divide-se a carga F em n passos de carga ΔF .
- 2) Aplica-se uma carga ΔF e calculam-se as forças de interação P_s através da equação (6.24), considerando o deslocamento relativo nulo.
- 3a) Se a força de interação no fuste ΔP_s for menor que a força dada pelo modelo de aderência P_{lim} dentro de uma tolerância TOL , ou seja, $\Delta P_s - P_{lim} < TOL$, então parte-se para o próximo incremento de carga e retorna-se ao passo 2.
- 3b) Se a força de interação no fuste ΔP_s for maior que um limite P_{lim} ou seja, $\Delta P_s - P_{lim} > TOL$, então parte-se para o passo 4.
- 4) Calcula-se a diferença entre a força de interação no fuste e a força de interação dada pelo modelo de aderência, ou seja, $\delta P_s = P_{lim} - \Delta P_s$. Estes valores são aplicados na equação (6.26), obtendo-se δu_p , δs .
- 5) Calcula-se $\{\delta P_s\}$, através da equação (6.28) e atualizam-se os valores de Δu_p , Δs e Δp_s .
- 6a) Se $|\Delta P_s - P_{lim}| > TOL$, então retorna-se ao passo 4.
- 6b) Se $|\Delta P_s - P_{lim}| < TOL$, então fixa-se $P_s = P_{lim}$ nos nós que escorregaram e retorna-se ao passo 2.

7. Resultados

Neste capítulo apresentam-se aplicações do método por meio de três exemplos. O primeiro exemplo simula um ensaio de compressão de uma estaca, comparando-se os resultados obtidos neste trabalho com outra formulação e com resultados experimentais. O segundo exemplo simula uma estaca imersa no solo com três carregamentos não concomitantes, cujos resultados são comparados com um modelo em elementos finitos. O terceiro exemplo simula um grupo de quatro estacas com topo livre e comparam-se os resultados com um modelo em elementos finitos.

7.1 Exemplo 1: simulação do ensaio de uma estaca

Neste exemplo é realizada a análise de uma estaca submetida a um ensaio de compressão. Este exemplo foi analisado numericamente por Said (2009) e experimentalmente, através de *strain gages*, por Chow (1997) apud Said (2009).

A estaca metálica, representada na Figura 7.1, possui 7,4 m de comprimento e 0,102 m de diâmetro. Sua ponta tem formato cônico com inclinação de 60° com a horizontal, porém no modelo realizado neste trabalho foi considerada seção constante. Seu módulo de Young, E_p , é igual a 195 GPa. O solo, por sua vez, consiste em uma areia com módulo de Young, E_s , igual a 200 MPa e coeficiente de Poisson, ν , de 0,30.

Figura 7.1 – Parâmetros do exemplo 1

A instalação da estaca resultou uma tensão residual na ponta, medida experimentalmente, de 6300 kPa, equivalente a uma carga de 51,479 kN, que foi introduzida antes do primeiro passo de carga no vetor de parâmetros nodais $\{F\}$ da equação (6.10) no grau de liberdade vertical do nó da ponta.

A simulação da compressão V foi realizada com a aplicação de uma carga de 500 kN aplicada incrementalmente, em passos de 0,5 kN cada.

Foi utilizado o mesmo modelo de aderência utilizado na análise por elementos finitos realizado por Said (2009), ou seja, o modelo hiperbólico com endurecimento, cujos parâmetros encontram-se apresentados na Tabela 7.1. Foi considerada uma tensão normal uniforme de 150 kPa.

Tabela 7.1 – Parâmetros do modelo hiperbólico de endurecimento

μ_0	μ_f	A	t (mm)	σ_{ni}/p_0
0,017	0,51	0,00008	3	1

A Figura 7.2 apresenta as curvas carga – recalque do topo obtidas. Observa-se que nos modelos que consideram aderência perfeita há uma discrepância muito grande entre os resultados calculados e os resultados obtidos experimentalmente, principalmente para cargas elevadas. Os modelos que consideram perda de aderência se mostraram mais próximos do experimental, sendo que, para pequenas cargas, o modelo utilizado neste trabalho resultou valores menores de deslocamentos que o modelo utilizado por Said (2009). No entanto, para valores de carga mais elevados os dois modelos levam a resultados muito semelhantes, com as duas curvas praticamente coincidentes.

Figura 7.2 – Curva carga no topo x recalque do topo

7.2 Exemplo 2: estaca isolada imersa em solo

O exemplo a seguir (Figura 7.3) analisa uma estaca cilíndrica com 0,20 m de diâmetro, 9 m de comprimento e módulo de elasticidade de 28.160.540 kN/m² imersa no solo, considerado como um semi-espaco homogêneo, isotrópico e elástico-linear, com módulo de elasticidade de 75.000 kN/m², coeficiente de Poisson de 0,25, peso específico de 19 kN/m³ e coeficiente de empuxo em repouso de 0,5.

Figura 7.3 – Parâmetros do exemplo 2

São considerados três casos de carregamento não simultâneos: o primeiro considera uma força horizontal, H , de 45 kN; o segundo, uma força vertical, V , igual a 250 kN; e o último, um momento, M , de 50 kNm.

Utilizou-se a formulação de acoplamento MEC/MEF apresentada neste texto, em modelos que consideram aderência perfeita e outros que consideram perda de aderência. O mesmo exemplo foi resolvido através um modelo de elementos finitos, utilizando o software comercial SAP2000, considerando aderência perfeita. Neste modelo são utilizados elementos de sólido paralelepípedicos isotrópicos, homogêneos, elásticos e lineares para o solo, totalizando 27.000 elementos. Já a estaca é modelada através de elementos de barra. O solo é modelado com 30m x 30m no plano horizontal e 30 m na direção vertical (Figura 7.4).

Figura 7.4 – Vista em corte do modelo em elementos finitos

Os resultados para a força horizontal e o momento são apresentados a seguir, comparando-se os valores dos deslocamentos nos quatro nós da estaca, através da

formulação apresentada neste trabalho com os valores obtidos com o SAP2000. A Figura 7.5 apresenta o deslocamento horizontal devido à carga horizontal de 45 kN. Observa-se boa concordância para pequenas profundidades, enquanto que para profundidades maiores, o método apresentado neste trabalho apresenta deslocamentos superiores. A Figura 7.6 apresenta o deslocamento horizontal devido ao momento de 50 kNm. Neste caso, a utilização da formulação de acoplamento MEC/MEF apresentou deslocamentos inferiores ao modelo em elementos finitos para pequenas profundidades e deslocamentos superiores para profundidades maiores. As diferenças entre os resultados obtidos pela análise via acoplamento MEC/MEF e pela análise por elementos finitos devem-se aos polinômios utilizados para aproximar os deslocamentos e podem ser reduzidas dividindo a estaca em diversos elementos finitos na formulação do acoplamento.

Figura 7.5 – Deslocamento horizontal devido à força horizontal

Figura 7.6 – Deslocamento horizontal devido ao momento

Para a utilização do modelo de Coulomb, considerou-se um ângulo de atrito interno de 30°. Com isto, a partir da equação (5.2), o ângulo de atrito entre solo e estaca é dado por:

$$\mu = \frac{\sin 30^\circ \cos 30^\circ}{1 + \sin^2 30^\circ} = 0,346 \quad (7.1)$$

A Figura 7.7 apresenta os modelos de aderência utilizados na análise da força vertical. Os parâmetros adotados para o modelo de endurecimento e para o modelo de endurecimento e amolecimento estão apresentados na Tabela 7.2.

Tabela 7.2 – Parâmetros dos modelos de aderência

μ_0	$\mu_f = \mu_r$	A	t (mm)	$\frac{\sigma_{ni}}{p_0}$	A_0	μ_p	$u_{tf}(\text{mm})$
0	0,346	0,0004	3	1	15	0,6	0,1

Figura 7.7 – Modelos de aderência utilizados na análise do carregamento vertical

Na Figura 7.8 são apresentados os deslocamentos verticais devido à carga vertical. Observa-se que os resultados do modelo em elementos finitos e do acoplamento MEC/MEF para aderência perfeita são muito próximos entre si. A consideração de perda de aderência provoca deslocamentos cerca de cinco vezes maiores sendo que os deslocamentos para o modelo hiperbólico e o modelo de Coulomb são muito próximos, praticamente coincidentes e os resultados para o modelo híbrido são ligeiramente menores.

Figura 7.8 – Deslocamento vertical dos pontos da estaca para a carga vertical

A Figura 7.9 apresenta as curvas carga - recalque para os diversos modelos de aderência. Para carregamentos de pequena intensidade todos os modelos apresentam comportamento mecânico semelhante. Com o aumento da carga, as curvas que consideram perda de aderência tornam-se cada vez mais distantes da curva de aderência perfeita. Observa-se que o modelo hiperbólico e de Coulomb novamente apresentam resultados muito semelhantes, com deslocamentos maiores que o modelo híbrido. Para carregamentos de elevada intensidade, no entanto, a curva do modelo híbrido se aproxima das curvas dos modelos de Coulomb e hiperbólico.

Figura 7.9 – Curvas carga – recalque para os diversos modelos de aderência

A Figura 7.10 e a Figura 7.11 apresentam a evolução das cargas resistidas pela ponta da estaca e por atrito lateral, respectivamente. Pode-se notar que a consideração de aderência perfeita faz com que praticamente toda a carga seja resistida por atrito lateral, enquanto que nos demais modelos a resistência de ponta encontra-se mais pronunciada. Entretanto a atuação da ponta torna-se sensível de fato apenas após o esgotamento total do atrito lateral.

Figura 7.10 – Carga resistida pela ponta em função da carga aplicada

Figura 7.11 – Carga resistida por atrito lateral em função da carga aplicada

7.3 Exemplo 3: grupo de estacas com topo livre

Neste exemplo, ilustrado pela Figura 7.12, é considerado um grupo de quatro estacas com topo livre imersas no solo submetidas a uma força horizontal de 150 kN e a uma força vertical de 800 kN aplicadas no topo de cada uma das estacas não concomitantemente. O solo possui módulo de elasticidade de 100.000 kPa e coeficiente de Poisson de 0,25. As estacas, espaçadas a cada 1 m entre eixos, possuem 0,3 m de diâmetro, 6 m de comprimento e módulo de elasticidade de 28.160.540 kPa. O escorregamento foi introduzido através do modelo de Coulomb, utilizando coeficiente de atrito de 0,6, coeficiente de empuxo em repouso de 0,66 e peso específico de 20 kN/m³. Foi feito também um estudo para apenas uma estaca submetida ao mesmo carregamento, objetivando a análise do efeito de grupo.

Figura 7.12 – Parâmetros do exemplo 3

O mesmo problema foi resolvido utilizando o software de elementos finitos SAP2000, semelhantemente ao apresentado no exemplo anterior. No entanto, neste caso o modelo possui dimensões de 30 m x 30 m em planta e 20 m de profundidade, conforme ilustrado na Figura 7.13.

Figura 7.13 – Modelo em elemento finitos – vista em corte

A Figura 7.14 apresenta uma comparação entre os resultados obtidos pelo modelo de acoplamento MEC/MEF e pelo software comercial SAP2000 para os deslocamentos horizontais provocados pela carga horizontal. Observa-se que, neste caso, houve boa concordância entre os resultados, principalmente para o primeiro terço da estaca. A partir daí ocorre uma inflexão que resulta uma distorção no resultado, provocada pelo polinômio de quarto grau que aproxima os deslocamentos horizontais. Esta distorção seria reduzida com a divisão da estaca em diversos elementos finitos.

Apesar das estacas possuírem um espaçamento consideravelmente grande (maior que três vezes o diâmetro), o efeito de grupo se mostra bastante presente, com deslocamentos no topo da estaca maiores que 1,6 vezes o deslocamento da estaca isolada.

Figura 7.14 – Deslocamentos horizontais dos pontos da estaca em função da profundidade

A Figura 7.15 apresenta os deslocamentos verticais das estacas devido à aplicação da carga vertical. Observa-se concordância praticamente total entre os modelos do SAP2000 e da formulação deste trabalho para o caso da estaca isolada e boa concordância para o caso do grupo de estacas. O efeito de grupo neste caso é muito pronunciado, com deslocamentos aproximadamente iguais ao dobro do caso da estaca isolada. A introdução do escorregamento elevou muito os deslocamentos, para cerca de cinco vezes para a estaca isolada e seis vezes para a estaca no grupo. No entanto, o efeito de grupo não se mostrou tão presente, com deslocamentos de cerca de 1,2 vezes o deslocamento da estaca isolada.

Figura 7.15 – Deslocamentos verticais dos pontos da estaca em função da profundidade

8. Conclusões

8.1 *Considerações gerais*

Este trabalho apresentou uma formulação numérica para a análise de problemas de interação mecânica entre solo e estacas. O solo é simulado como um sólido semi-infinito, homogêneo, isotrópico, elástico e linear através do método dos elementos de contorno (MEC), utilizando as soluções fundamentais de Mindlin. A vantagem da utilização destas soluções é a dispensa da necessidade da discretização do solo, reduzindo, desta forma, tempo de processamento e de modelagem. As estacas são simuladas como o elemento finito único com quatro nós e 14 parâmetros nodais apresentado em Matos Filho et al. (2005).

O escorregamento das estacas é considerado através de três modelos de aderência, sendo um modelo baseado na lei de Coulomb, que considera tensão constante no ponto de plastificação do solo após o início do escorregamento e dois modelos que consideram amolecimento e endurecimento do solo, apresentados em De Gennaro e Frank (2002). Estes modelos consistem de um modelo hiperbólico, que considera um aumento assintótico na tensão após o escorregamento, representando, desta forma, endurecimento do solo e de um modelo híbrido, que considera aumento hiperbólico da tensão até um pico e posterior queda (assintótica) por meio de uma secante hiperbólica, representando, desta forma, endurecimento e amolecimento do solo.

Nos exemplos analisados, constatou-se que o modelo hiperbólico apresentou resultados muito semelhantes ao modelo de Coulomb, enquanto que o modelo híbrido resultou deslocamentos menores das estacas. A consideração de escorregamento das estacas levou a deslocamentos bastante superiores aos obtidos pelo modelo de aderência perfeita, principalmente para cargas elevadas. Além disso, o comportamento mecânico das estacas também se altera significativamente, com a resistência de ponta muito mais presente nos modelos com escorregamento. Em certos casos observou-se certa discrepância entre os deslocamentos obtidos pelos modelos de acoplamento MEC/MEF e os modelos em elementos finitos. Esta diferença deve-se ao polinômio adotado como função de forma e pode ser minimizada dividindo a estaca em diversos elementos finitos na formulação do acoplamento.

8.2 *Propostas para trabalhos futuros*

Os principais tópicos que podem ser explorados como continuidade deste trabalho em atividades futuras são apresentados a seguir:

1. Divisão da estaca em diversos elementos finitos;
2. Inclusão de camadas de solo, através da utilização da solução fundamental de Kelvin;
3. Inclusão de camadas de solo ortotrópico, através da utilização da solução de Ai e Cheng (2013);
4. Consideração de estacas inclinadas no solo;
5. Consideração de não linearidade física do solo;
6. Desenvolvimento de uma formulação que possibilite a análise de estacas com bloco de capeamento rígido;
7. Desenvolvimento de uma formulação para análise de estacas submetidas a arrancamento.

9. Referências bibliográficas

AI, Z. Y.; CHENG, Y. C. Analysis of vertically loaded piles in multilayered transversely isotropic soils by BEM. **Engineering analysis with boundary elements**, n. 37, p. 327-335, 2013.

ALMEIDA, V. S.; PAIVA, J. B. D. Static analysis of soil/pile interaction in layer soil by BEM/BEM coupling. **Advances in engineering software**, n. 38, p. 835-845, 2007.

ARSLAN, U. **Zur Frage des elastoplastischen Verformungsverhaltens von Sand**. Dissertação de mestrado, Versuchsanstalt für Bodenmechanik und Grundbau der Technischen Hochschule, Darmstadt: [s.n.], 1980.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. 1ª. ed. Campinas: Editora da Unicamp, 1999.

BECKER, A. A. **The boundary element method in engineering: a complete course**. Salisbury: McGraw Hill, 1992.

BOTTA, A. S. **Método dos Elementos de Contorno para análise de corpos danificados com ênfase no fenômeno da localização de deformações**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos: [s.n.], 2003.

BREBBIA, C. A.; DOMINGUEZ, J. **Boundary elements: an introductory course**. Southampton: McGraw Hill, 1992.

CHAN, K. S.; KARASUDHI, P.; LEE, S. L. Force at a point in the interior of layered elastic half-space. **International journal of solids structures**, n. 11, p. 1179-1199, 1974.

CHEN, L.; POULOS, H. G. Analysis of pile-soil interaction under lateral loading using infinite and finite elements. **Computers and Geotechnics**, n. 15, p. 189-220, 1993.

CHIN, J. T.; CHOW, Y. K.; POULOS, H. G. Numerical analysis of axially loaded vertical piles and groups. **Computers and Geotechnics**, n. 9, p. 273-290, 1990.

CHOW, F. C. **Investigations in the behaviour of displacement piles for offshore foundations**. Tese de doutorado, Imperial College, Londres: [s.n.], 1997.

COYLE, B. M.; REESE, L. C. Load transfer for axially loaded piles in clay. **Journal of the Soil Mechanics and foundation division proceedings of the American Society of Civil Engineers**, v. 92, p. 1-26, 1966.

DE GENNARO, V.; FRANK, R. Elasto-plastic analysis of the interface behavior between granular media and structure. **Computers and geotechnics**, n. 29, p. 547-572, 2002.

DÉCOURT, L.; ALBIERO, J. H.; CINTRA, J. C. Â. Análise e projeto de fundações profundas. In: HACHICH (ED.), W. **Fundações: teoria e prática**. 2ª. ed. São Paulo: Pini, 1998. Cap. 8.

DESAI, C. S. et al. Thin-layer element for interfaces and joints. **International journal for numerical and analytical methods in geomechanics**, n. 8, p. 19-43, 1984.

FELLENIOUS, B. H. **Basics of foundation design**. Sidney: Electronic Edition, 2009.

FLEMING, W. G. K. A new method for single pile settlement prediction and analysis. **Géotechnique**, n. 42, p. 411-425, 1992.

FUNG, Y. C. **Foundations of solid mechanics**. Englewood Cliffs: Prentice-Hall, 1965.

GEROLYMOS, N.; GAZETAS, G. Development of Winkler model for static and dynamic response of caisson foundations with soil and interface nonlinearities. **Soil dynamics and earthquake engineering**, n. 26, p. 363-376, 2006.

GUO, W. D. On limiting profile, slip depth and response of lateral piles. **Computers and geotechnics**, n. 33, p. 47-67, 2006.

HARALDSSON, A.; WRIGGERS, P. A strategy for numerical testing of frictional laws with application to contact between soil and concrete. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, n. 190, p. 963-977, 2000.

JEONG, S.; LEE, J.; LEE, C. J. Slip effect at the pile-soil interface on dragload. **Computers and Geotechnics**, Seoul, n. 31, p. 115-126, 2004.

KAUSEL, E. Early history of soil-structure interaction. **Soil Dynamics and Earthquake Engineering**, Massachusetts, n. 30, p. 822-832, 2010.

KHODAIR, Y. A.; HASSIOTIS, S. Analysis of soil-pile interaction in integral abutment. **Computers and Geotechnics**, n. 32, p. 201-209, 2005.

KÜÇÜKARSLAN, S.; BANERJEE, P. K.; BILDIK, N. Inelastic analysis of pile soil structure interaction. **Engineering Structures**, 2003. 1231-1239.

LEE, C. J. Numerical analysis of the interface shear transfer mechanism of a single pile to tunnelling in weathered soil. **Computers and geotechnics**, n. 42, p. 193-203, 2012.

LEONEL, E. D. **Modelos não lineares do Método dos Elementos de Contorno para a análise de problemas de fratura e aplicação de modelos de confiabilidade e otimização em estruturas submetidas à fadiga**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos: [s.n.], 2009.

LIU, J. et al. Analysis of load-transfer of single pile in layered soil. **Computers and geotechnics**, n. 31, p. 127-135, 2004.

MATOS FILHO, R. F. **Análise da interação estaca-solo via combinação do Método dos Elementos Finitos com o Método dos Elementos de Contorno**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos: [s.n.], 1999.

MATOS FILHO, R. F.; MENDONÇA, A. V.; PAIVA, J. B. Static boundary element analysis of piles submitted to horizontal and vertical loads. **Engineering Analysis with Boundary Elements**, São Carlos, n. 29, p. 195-203, 2005.

MINDLIN, R. D. Force at a point in the interior of a semi-infinite solid. **Physics**, New York, n. 7, p. 195-202, 1936.

NÁPOLES NETO, A. D. F. Uma breve história das fundações. In: HACHICH (ED.), W. **Fundações: teoria e prática**. 2ª. ed. São Paulo: Pini, 1998. Cap. 1.A.

PINTO, C. D. S. **Curso básico de mecânica dos solos**. 3ª. ed. São Paulo: Oficina de textos, 2006.

POULOS, H. G.; DAVIS, E. H. The settlement behaviour of single axially loaded incompressible piles and piers. **Géotechnique**, n. 18, p. 351-371, 1968.

RANDOLPH, M. F.; WROTH, C. P. Analysis of deformation of vertically loaded piles. **Journal of the geotechnical engineering division**, n. 12, p. 1465-1487, 1978.

RANDOLPH, M. F.; WROTH, C. P. Application of the failure state in undrained simple shear to the shaft capacity of driven piles. **Geotechnique**, n. 31, p. 143-57, 1981.

RAOUS, M. Interface models coupling adhesion and friction. **Compts Rendus Mecanique**, n. 339, p. 491-501, 2011.

REESE, L. C.; VAN IMPE, W. F. **Single piles and pile groups under lateral loading**. Wiltshire: Taylor & Francis / Balkema, 2001.

RIBEIRO, D. B. **Estudo e aplicação de um elemento de contorno infinito na análise da interação solo-estrutura via combinação MEC/MEF**. Tese de Doutorado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos: [s.n.], 2009.

RIBEIRO, D. B.; PAIVA, J. B. D. A new BE formulation coupled to the FEM for simulating vertical pile groups. **Engineering analysis with boundary elements**, n. 41, p. 1-9, 2014.

ROCHA, F. C. **Análise de domínios reforçados através da combinação MEC/MEF considerando modelos de aderência**. Dissertação de Mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, Brasil: [s.n.], 2009.

SAID, I.; DE GENNARO, V.; FRANK, R. Axisymmetric finite element analysis of pile loading tests. **Computers and Geotechnics**, n. 36, p. 6-19, 2009.

SELLGREN, U.; OLOFSSON, U. Application of a constitutive model for micro-slip in finite element analysis. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, n. 170, p. 65-77, 1999.

SHENG, D.; WRIGGERS, P.; SLOAN, S. W. Improved numerical algorithms for frictional contact in pile penetration analysis. **Computers and geotechnics**, n. 33, p. 341-354, 2006.

SU, D.; LI, J. H. Three-dimensional finite element study of a single pile response to multidirectional lateral loadings incorporating the simplified state-dependent dilatancy model. **Computers and Geotechnics**, n. 50, p. 129-142, 2013.

ULITSKII, V. M. History of pile foundation engineering. **Soil Mechanics and Foundation Engineering**, v. 32, n. 3, p. 110-114, 1995.

VARGAS, M. **Uma experiência brasileira em fundações por estacas**. Conferências proferidas no LNEC - Laboratório Nacional de Engenharia Civil. Lisboa: [s.n.]. 1977.

VELLOSO, D. D. A.; MARIA, P. E. L. D. S.; LOPES, F. D. R. Princípios e modelos básicos de análise. In: HACHICH (ED.), W. **Fundações: teoria e prática**. 2ª. ed. São Paulo: Pini, 1998. Cap. 4.

VESIC, A. **Design of pile foundations**. Washington: Transportation Research Board, National Research Council, 1977.

WRIGGERS, P. **Computational contact mechanics**. Chichester: Wiley, 2002.

ZHANG, R.; ZHENG, J.; YU, S. Responses of piles subjected to excavation-induced vertical soil movement considering unloading effect and interfacial slip characteristics. **Tunneling and underground space technology**, n. 36, p. 66-79, 2013.

ZHOU, A.; LU, T. Elasto-plastic constitutive model of soil-structure interface in consideration of strain softening and dilation. **Acta Mechanica Solida Sinica**, n. 2, p. 171-179, 2009.