HENRIQUE CAMPELO GOMES

Método dos Elementos Finitos com Fronteiras Imersas aplicado a Problemas de Dinâmica dos Fluidos e Interação Fluido-Estrutura

> São Paulo 2013

HENRIQUE CAMPELO GOMES

Método dos Elementos Finitos com Fronteiras Imersas aplicado a Problemas de Dinâmica dos Fluidos e Interação Fluido-Estrutura

> Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia

São Paulo 2013

HENRIQUE CAMPELO GOMES

Método dos Elementos Finitos com Fronteiras Imersas aplicado a Problemas de Dinâmica dos Fluidos e Interação Fluido-Estrutura

> Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia Civil

Orientador: Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo 2013

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.			
São Paulo,	de abril de 2013.		
Assinatura do autor			
Assinatura do	o orientador		

FICHA CATALOGRÁFICA

Gomes, Henrique Campelo

Método dos elementos finitos com fronteiras imersas aplicado a problemas de dinâmica dos fluidos e interação fluido-estrutura / H.C. Gomes. -- versão corr. -- São Paulo, 2013. 98 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Método dos elementos finitos 2. Interação fluido-estrutura 3. Dinâmica dos fluidos 4. Fronteiras imersas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t. DEDICATÓRIA

À minha esposa Mônica

Às minhas filhas Amanda e Helena

Aos meus Pais Jonas e Zeza

AGRADECIMENTOS

Ao professor, "mestre" e amigo Paulo Pimenta pela confiança, orientação e ensinamentos acadêmicos e extra-acadêmicos.

Ao Concelho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico - CNPq, pelo suporte financeiro.

Ao Serviço Alemão de Intercâmbio Acadêmico – DAAD, pelo suporte financeiro durante os seis meses de doutorado sanduíche na Universidade Técnica de Munique (TUM).

À John Argyris Foundation pelo prêmio, em forma de ajuda financeira, que permitiu a realização de cursos, participação em congressos e visitas a grupos de pesquisa no exterior.

Ao professor Wolfgang Wall, pela cooperação e pelas poucas, porém produtivas, conversas durante a estada no Lehrstuhl für Numerische Mechanik (LNM) da TUM.

Aos colegas do LNM, em especial, ao Ismail, Andreas, Key Müller, Peter, Volker e Axel Gerstenberger.

À turma do JAC, pela amizade e ajuda. Agradecimentos especiais ao Jorge, Eduardo, Campello, Marcelo, Evandro, Fernando, Leo, Alexandre e Paulo.

Aos casais Flávio e Cris, Luís e Gleicy e Tarsis e Darlene, por todos os bons momentos vividos durante o período em São Paulo.

Aos meus pais pelo suporte emocional e financeiro, sem os quais o início, meio e fim deste trabalho não seriam possíveis.

À minha esposa Mônica pelo companheirismo durante todas as fases do doutorado e por me dar os dois presentes máximos da minha vida: Amanda e Helena.

Aos meus irmãos Jonas e Felipe pelas conversas e conselhos sempre muito sóbrios e úteis.

SUMÁRIO

Resumo	i
Abstract	ii
Objetivo	iii
1. Introdução	1
2. Revisão Bibliográfica	6
3. O Problema de Fluidos	10
3.1. Equações de Navier-Stokes	
3.2. Forma fraca	
3.3. Tensões e pseudotensões no contorno	14
3.4. Integração no tempo	
Método de Newmark	
3.5. Discretização do espaço por elementos finitos	
3.6. Estabilização da condição LBB	
Problema 3.1: Escoamento de Stokes com solução analítica	
Estabilização da condição LBB usando Galerkin/Least-Sauares	
3.7. Estabilização da convecção	
3.8. O problema tangente	34
3.9. Exemplos Numéricos	37
Problema 3.2: Escoamento numa cavidade	37
Problema 3 3: Escoamento em torno de um cilindro	41
3.10.Conclusão Parcial	
4. O Problema Estrutural	
4.1. Problema estático	
4.2. Modelo constitutivo Neo-Hookiano de Ciarlet-Simo	
4.3. Forma fraca	
4.4. Discretização do espaço por elementos finitos	53
4.5. Equilíbrio	55
4.6. O problema tangente	56
4.7. Problema dinâmico	
4.8. Forma fraca	
4.9. Discretização por elementos finitos	59
4.10.Integração no tempo	60
4.11.O problema tangente	61
4.12.O problema plano	62
5. O Problema de Interação Fluido-Estrutura	64
5.1. Introdução	64
5.2 Imposição das condições na interface	
5.3. Ω problema fluido com interfaces móveis	66 KA
Discretização do espaço por elementos finitos	00 ۶۸
Discretização da interface	00 03
Problema matricial	
1 1001emu muriciui	

	5.4. O problema acoplado	71
	Algoritmo do problema acoplado	71
	5.5. Simulações numéricas	71
	Problema 5.1: escoamento estacionário em torno de um cilindro (Re=20)	72
	Problema 5.2: escoamento em torno de um cilindro em movimento ($Re=100$)	76
	Problema 5.3: escoamento estacionário em um canal com obstáculo elástico	78
	Problema 5.4: escoamento em torno de um cilindro com barra flexível atrás	79
6.	Discussão e Conclusões	84
7.	Propostas de Trabalhos Futuros	86
8.	Referências Bibliográficas	87
9.	Apêndice	97
	9.1. Matriz convectiva:	97
	9.2. Matriz viscosa:	97
	9.3. Operador gradiente:	97
	9.4. Vetor das forças de volume e tensão aplicada:	98

Resumo

Este trabalho pode ser dividido em três etapas principais. Inicialmente é proposta uma formulação estabilizada do método dos elementos finitos (MEF) para solução de problemas de escoamento incompressível governado pela equação de Navier-Stokes. Esta formulação foi implementada em um código computacional e testada através de diversos exemplos numéricos. Alguns elementos finitos com diferentes pares de função de interpolação da velocidade e pressão, consagrados na literatura, e também elementos finitos menos populares, foram investigados e seus resultados e performance comparados. A segunda etapa consiste na formulação do problema estrutural. Buscou-se por uma formulação dinâmica, não linear, capaz de simular movimentos complexos de estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e grandes deformações durante longos intervalos de tempo. A etapa final deste trabalho é a proposição de um método para solução de problemas de Interação Fluido Estrutura (IFE) que utiliza o conceito de fronteiras imersas como alternativa a abordagens ALE (Arbitrary Lagrangian Eulerian) clássicas. Elementos Finitos Generalizados, juntamente com Multiplicadores de Lagrange, são utilizados para prover descontinuidade nos campos de velocidade e pressão do fluido ao longo da interface com a estrutura. O acoplamento dos dois problemas é realizado utilizando um método implícito e alternado (staggered scheme), que possui a vantagem de permitir, facilmente, a implementação de códigos computacionais desenvolvidos para resolver isoladamente o problema fluido e/ou estrutural.

Abstract

This work is divided in three parts. Initially, it is presented a stabilized Finite Element Method formulation to solve fluid flow problems governed by the incompressible Navier-Stokes Equations. This formulation was implemented in a computer code and validated throughout several numeric simulations. Some well-known finite elements with different pairs of velocity/pressure aproximations, as well as some other less popular elements, were investigated and their performance compared. The second part describes the Structural Problem formulation. This formulation is able to simulate nonlinear dynamic problems involving large displacements and finite strains during long period of time. In the final part of this work, it is proposed a Fluid-Structure Interaction method based on an immersed interface approach in opposition to classical ALE (*Arbitrary Lagrangian Eulerian*) approaches. Generalized Finite Elements, together with Lagrange Multipliers, are used to provide velocity and pressure discontinuities on the fluid domain across the immersed interface. To couple both fluid and structural problems, an implicit staggered scheme is adopted, which allows the easy implementation of already developed black box computer codes.

Objetivo

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um código computacional eficiente e robusto de solução de problemas da Mecânica dos Fluidos e Interação Fluido-Estrutura. Optou-se por uma formulação de Fronteiras Imersas para permitir simulações de problemas que envolvem movimentos e transformações complexas da estrutura. Em problemas com essas características, abordagens ALE clássicas costumam perder robustez em razão da necessidade de reconstrução da malha de fluidos para evitar distorção excessiva dos elementos. Num contexto mais geral, este trabalho também objetiva a inclusão do grupo de pesquisa do Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) da Escola Politécnica da USP nas áreas de Mecânica dos Fluidos Computacional e IFE, como uma etapa inicial de uma proposta mais ambiciosa, já em curso, de estender o espectro dos problemas aos quais se aplicam as teorias e formulações desenvolvidas neste laboratório. Citam-se aqui como exemplos de aplicações futuras, problemas de biomecânica, aeroelasticidade de obras civis e estruturas aeroespaciais e multifísica. Para este fim, usufruir-se-á de trabalhos desenvolvidos por este grupo de pesquisa, no campo da mecânica das estruturas computacional, que já se encontram num estágio de maturidade bastante avançado.

1. Introdução

Problemas de Interação Fluido-Estrutura (IFE) são de grande importância para a Engenharia e estão presentes tanto na natureza quanto em obras e máquinas construídas pelo Homem. Trata-se de um problema que envolve a Mecânica dos Fluidos e das Estruturas e no qual a solução de um domínio depende da solução do outro, caracterizando assim um sistema acoplado. Se resolver um problema de mecânica dos fluidos com condições de contorno diversas já é uma tarefa difícil, um problema de IFE acrescenta como desafio a solução simultânea do sistema acoplado no qual as condições de contorno na interface entre o fluido e a estrutura são desconhecidas *a priori*, pois dependem da solução do problema. Além disso, pelo fato de grande parte dos problemas de interesse para a engenharia envolver grandes deslocamentos da estrutura e convecção do fluido, a IFE é por natureza um problema fortemente não linear.

Da descrição acima, o leitor já poderá perceber que o apelo por métodos numéricos para se resolver problemas de IFE é inevitável. O advento de computadores mais velozes a preços cada vez mais acessíveis e o uso de computação paralela são também fortes propulsores para o avanço de simulações computacionais de problemas complexos com fidelidade crescente à realidade.

A natureza dos problemas de IFE pode ser muito variada. A Figura 1, por exemplo, ilustra algumas situações bastante distintas nas quais se observa este tipo de fenômeno acoplado. Estruturas *offshore* como plataformas de exploração de petróleo, de interesse para Engenharia Civil e de Petróleo, são exemplos típicos que envolvem IFE (Figura 1 (a)). Nestes casos, é necessária uma formulação do problema capaz de representar a superfície livre do fluido e, em algumas situações, é interessante também conseguir simular o contato entre as estruturas flutuantes. Essa linha de estudo atrai hoje diversos grupos de pesquisa no mundo [1,2,3,4,5,6,7,8] e em especial no Brasil [9,10,11] em virtude da oportunidade de exploração de petróleo em águas profundas.



(a) Plataformas *offshore* de exploração de petróleo.

(b) Simulação computacional de um (paraquedas [12].

(c) Ponte de Tacoma momentos antes do colapso [13].



(d) Tensões na artéria aorta de um paciente com aneurisma [14].

(e) Resultados da simulação computacional do escoamento através de uma turbina eólica [15].

Figura 1. Exemplos de problemas de Interação Fluido-Estrutura.

No contexto da multidisciplinaridade, a bioengenharia ou, mais especificamente, a biomecânica tem ganhado muito destaque na comunidade científica internacional. A ilustração da Figura 1 (d), por exemplo, mostra o mapa de tensões típico de uma simulação computacional da artéria aorta abdominal de um paciente com aneurisma [14] e cujo carregamento provém do bombeamento de sangue através da mesma. Nesta simulação de IFE, o sangue corresponde ao domínio fluido do problema enquanto que o domínio estrutural é constituído pelo tecido da artéria. O aneurisma é uma patologia cardiovascular causada pela dilatação da artéria e cuja ruptura leva ao óbito do paciente na maioria dos casos. Quantificar o risco de ruptura de um aneurisma, entretanto, é uma tarefa muito difícil e ao mesmo tempo de extrema importância, pois a intervenção cirúrgica em muitos casos também envolve um alto risco. Neste contexto, a geometria do aneurisma, que varia bastante caso a caso, desempenha um papel crucial no tratamento desta enfermidade e a simulação numérica do problema pode revelar informações mais quantitativas e individualizadas e, portanto, substanciar melhor a escolha do tratamento médico mais adequado para cada paciente. Do ponto de vista numérico, quando se tem fluido e estrutura com densidades semelhantes, como

é o caso do sangue e artérias do corpo humano, o problema de IFE requer cuidados especiais para controlar possíveis instabilidades na resolução do sistema acoplado [16,17]. Outras dificuldades inerentes a este tipo de simulação são a aquisição das imagens do paciente para gerar o modelo geométrico, estabelecer a condição inicial do problema de IFE, definir o perfil de velocidades na fronteira de entrada do escoamento, dentre outras. Para mais referências de trabalhos de biomecânica, o leitor irá encontrar em [14,18,19,20,21,22,23,24] trabalhos também sobre aneurisma cerebral, influência da pressão arterial e da geometria do aneurisma no risco de ruptura do mesmo, simulação de válvulas cardíacas e bombeamento artificial de sangue em pacientes com deficiência cardíaca.

Outro fenômeno no qual a IFE está presente é o *flutter* ou drapejamento. Este fenômeno é um problema de instabilidade aeroelástica e de grande interesse da Engenharia Aeronáutica, porém, também é algo que pode causar problemas em obras da Engenharia Civil. Carregamentos não conservativos, como forças devidas ao vento, podem despertar a instabilidade de uma estrutura uma vez que, em geral, realizam trabalho não nulo num ciclo fechado e podem aumentar a energia do sistema sucessivamente. Em [25], Argyris promove uma extensa discussão sobre instabilidade dinâmica e estática de uma estrutura simples submetida a carregamentos não conservativos. O caso mais famoso de instabilidade aeroelástica na Engenharia Civil é provavelmente o da Ponte de Tacoma (Tacoma Narrows Bridge [13]) sobre o Estreito de Tacoma no estado de Washington, Estados Unidos. Esta ponte suspensa colapsou pouco mais de quatro meses após sua inauguração no ano de 1940 e a foto mostrada na Figura 1 (c) ilustra a impressionante magnitude dos deslocamentos com que a ponte oscilava instantes antes do colapso. Fenômenos de instabilidade aeroelástica também podem ocorrer em superfícies aerodinâmicas de aviões, como asas, empenagens, antenas e etc. Uma dificuldade em simular computacionalmente problemas desta natureza está na alta velocidade do escoamento do fluido, que normalmente requer modelos complexos de turbulência [26,27]. Existe também o fato de que o tempo de simulação, em geral, precisa ser grande, para despertar o fenômeno físico, e a incrementos de tempo pequenos, exigência de qualquer simulação numérica de escoamento de fluidos. Esta combinação, naturalmente, demanda computação de alto desempenho que, muitas vezes, favorece a utilização de métodos para redução da ordem do problema [28]. A simulação do escoamento do ar em turbinas eólicas ou através de um para-quedas são também exemplos de problemas de aeroelasticidade. Na Figura 1 (e), são mostrados resultados da simulação computacional de uma turbina eólica com detalhes, à direita, do mapa de tensões aerodinâmicas (acima) e da deformada de uma das pás (abaixo). Na Figura 1 (b), é mostrado o campo de velocidades do escoamento através de um paraquedas. O leitor interessado em problemas de aeroelasticidade e sua solução pelo Método dos Elementos Finitos pode consultar as referências [29,30]. Em [31] e [32] são apresentados problemas interessantes de aeroelasticidade aplicada à otimização de estruturas aeronáuticas e à controlabilidade de aeronaves, respectivamente.

Em razão da natureza variada dos problemas de IFE, é difícil imaginar que uma determinada abordagem ou método seja superior em todas as classes de problemas. Na realidade, muitos programas computacionais, comerciais ou acadêmicos, perdem robustez em certos problemas que envolvem transformações complexas da estrutura, com grandes deslocamentos ou rotações, ou problemas cuja interface entre o fluido e a estrutura seja complicada, só para citar alguns exemplos.

De uma maneira geral, os métodos numéricos existentes hoje para resolução de problemas de IFE podem ser classificados em dois grandes grupos dependendo da forma com que tratam a interface entre o fluido e a estrutura: métodos de fronteira coincidente e métodos de fronteira imersa. A Figura 2 ilustra a diferença entre as duas abordagens mostrando uma disposição típica da malha do fluido e do domínio da estrutura Ω^s em cada caso.



(a) fronteira coincidente.

(b) fronteira imersa

Figura 2. Classificação dos métodos numéricos de solução de problemas de IFE quanto à descrição da interface: (a) fronteira coincidente; (b) fronteira imersa.

Os métodos de fronteira coincidente utilizam em sua formulação a abordagem ALE (sigla em inglês para *Arbitrary Lagrangian Eulerian*), na qual o problema fluido é formulado e resolvido a partir de uma malha que se deforma para acompanhar o movimento da estrutura. Isso se deve ao fato da malha do fluido ser construída limitando-se ao domínio físico do

fluido, conforme ilustra a Figura 2 (a). Dessa forma, a malha do fluido se deforma acompanhando a deformação da estrutura na interface e esta deformação se propaga numa região predefinida do fluido. Como a malha do fluido está conectada à superfície molhada da estrutura, não é possível preservá-la quando a estrutura for submetida a transformações complexas e, portanto, a geração de uma nova malha é inevitável. Alternativamente, métodos que se valem do conceito de fronteiras imersas tratam o fluido e a estrutura a partir de dois domínios superpostos. As malhas são construídas de forma independente e, portanto, o fluido pode convenientemente ser resolvido utilizando uma malha fixa e indeformável numa abordagem Euleriana clássica, como ilustrado na Figura 2 (b). A estrutura, por sua vez, é resolvida de forma independente, torna-se necessária alguma técnica especial para impor o efeito do movimento da superfície molhada da estrutura no fluido, pois o movimento desta interface atua como uma condição de contorno essencial ao fluido. Entretanto, em geral, não existem nós da malha do fluido ao longo da interface para que esta condição de contorno seja imposta diretamente, prática usual do método dos elementos finitos.

É possível também se pensar em um método que trata o fluido e a estrutura a partir de uma abordagem Lagrangiana unificada. Este método, desenvolvido por Oñate e Idelson [33,34,35,36,37] e chamado de *método das partículas*, mostra-se muito interessante em aplicações que envolvem escoamento de fluidos com superfície livre e desprendimento de parte do domínio fluido em subdomínios, fenômeno comum em situações de impacto de ondas em estruturas offshore ou quebra mares. A grande vantagem desta abordagem está na eliminação do termo convectivo da equação que descreve o movimento do fluido, porém se paga o preço de gerar uma nova malha para cada incremento de tempo da simulação.

2. Revisão Bibliográfica

Conforme já mencionado no Resumo deste texto, uma etapa necessária a este trabalho foi o desenvolvimento de um programa computacional para solução de problemas de escoamento incompressível de fluidos utilizando o Método dos Elementos Finitos (MEF). A literatura sobre o assunto é bastante vasta, sendo que os primeiros trabalhos remontam ao final da década de 1960 e início da década de 1970. Oden, Taylor e Cheng são alguns dos expoentes precursores e suas valiosas contribuições podem ser observadas em [38,39,40]. Inicialmente se achou que o mesmo sucesso que o Método dos Elementos Finitos obteve em problemas da mecânica dos sólidos também pudesse se repetir em problemas da mecânica dos fluidos. Entretanto, a existência de um funcional quadrático cuja minimização equivale a satisfazer a equação diferencial que rege o problema, característica intrínseca dos problemas de mecânica das estruturas, que são regidos por equações elípticas auto-adjuntas, não se verifica em problemas de fluidos. A natureza hiperbólica da equação de Navier-Stokes, acentuada em problemas nos quais a convecção é dominante em relação aos efeitos viscosos, faz com que a solução numérica por elementos finitos usando projeções de Galerkin usuais não seja ótima, além de susceptível a problemas de instabilidade numérica. Este fato contribuiu para descentralizar o esforço da comunidade científica na década de 1970 na busca por métodos numéricos alternativos ao MEF para solução de problemas da mecânica dos fluidos. O Método das Diferenças Finitas e, principalmente, o Método dos Volumes Finitos [41,42] atraíram a atenção de muitos pesquisadores e profissionais da área e, como consequência, este último ainda hoje é utilizado de forma predominante por programas comerciais.

Em 1982, Brooks e Hughes [43] deram uma grande contribuição ao desenvolverem uma formulação estabilizada de elementos finitos usando o conceito de SUPG (do inglês, *Streamline Upwind/Petrov-Galerkin*) para solução de problemas de escoamento com convecção dominante. Este artigo foi durante muito tempo uma das referências mais citadas no assunto e parece ter dado novo ânimo aos pesquisadores adeptos do MEF. Diversos trabalhos foram publicados logo em seguida como, por exemplo, Argyris et.al. [44]. A literatura sobre métodos de estabilização da convecção é bastante ampla e o tópico continua sendo objeto de pesquisa até os dias de hoje, como se pode observar em [45] e [46] recentes trabalhos sobre estabilização em malhas distorcidas e com incrementos de tempo muito pequenos, respectivamente. Obviamente não se tem aqui a pretensão de explorar todas as

referências no assunto, inclusive porque este não é o foco principal do trabalho. Entretanto alguns trabalhos não podem deixar de ser citados, pois foram, de uma forma ou de outra, importantes para o desenvolvimento do programa computacional proposto aqui como um dos objetivos. Dentre eles, citam-se [47,48,49] e em especial o trabalho de Tezduyar e Osawa [50] que foi usado como base para formulação estabilizada do problema de Navier-Stokes a ser apresentado no Capítulo 3.

Outra dificuldade numérica inerente à formulação pelo MEF do problema de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis é a satisfação da condição de incompressibilidade. Esta restrição ao campo de velocidades conduz normalmente a uma formulação mista de elementos finitos que exige um cuidado especial na escolha dos subespaços de aproximação da velocidade e da pressão. Pensando localmente nos graus de liberdade do elemento finito, alguns pares de velocidade e pressão podem gerar modos espúrios de pressão caso não satisfaçam a condição de compatibilidade conhecida como inf-sup ou LBB [51], em referência a Ladyzhenskaya, Babuska e Brezzi por sua descoberta. Inicialmente, achou-se que a escolha de pares de velocidade e pressão deveria necessariamente satisfazer a condição LBB, porém sucessivos esforços no sentido de contornar esta restrição levaram a formulações de elementos finitos estáveis para qualquer escolha de subespaços de aproximação. Ver, por exemplo, [52,50,53].

Apesar de ter recebido muita importância nos últimos anos, o assunto Interação Fluido-Estrutura (IFE) já atrai pesquisadores há muito mais tempo. No domínio da mecânica computacional, trabalhos de Peskin [54,55] da década de 70 já mostravam ser possível a simulação de modelos de válvulas cardíacas. Os modelos usados por Peskin nesta época eram bastante simplificados e as referências citadas não utilizavam ainda em sua formulação o Método dos Elementos Finitos. Os primeiros trabalhos a utilizarem o MEF para resolver problemas de IFE o fizeram a partir da abordagem ALE [56,57]. Esta abordagem é utilizada até os dias de hoje [58,59,60,61,62,63] e teve sua origem ainda no Método das Diferenças Finitas [64]. Entretanto, em situações nas quais a estrutura está sujeita a transformações complexas, ou a própria interface entre o fluido e a estrutura seja geometricamente complicada, é desejável se dispor de métodos alternativos que não utilizem a abordagem ALE. Estes métodos são apresentados com diferentes nomes na literatura: fronteira imersa (*immersed boundary*), interface imersa (*immersed interface*), domínio imerso (*embedded domain*) ou domínio fictício (*fictitious domain*). Este último também é chamado de métodos dos volumes fictícios. É interessante notar que as referência [54,55], citadas como pioneiras em IFE, são também os primeiros trabalhos a utilizarem o conceito de volumes fictícios e a empregar a nomenclatura *immersed boundary*. Neste texto, será utilizada a nomenclatura de fronteira imersa para se referir a esses métodos.

Se por um lado a utilização do conceito de fronteira imersa possui como grande vantagem a utilização de malhas simples e regulares para resolver o problema fluido, a imposição da condição de contorno na interface entre fluido e estrutura passa a ser não trivial. No problema fluido essa condição se traduz em velocidades impostas, ou seja, trata-se de uma condição de contorno do tipo Dirichlet e diversas técnicas podem ser utilizadas para impô-la. Nesta tese de doutoramento, propõe-se uma formulação utilizando o Método dos Elementos Finitos Generalizados (GFEM) em conjunto com Multiplicadores de Lagrange para impor a condição de contorno na interface do problema de IFE. Embora o GFEM tenha sido originalmente concebido para aplicação em problemas de mecânica da fratura ([65] e [66]), bons resultados também têm sido obtidos em IFE. Essa formulação foi utilizada também em [67,68] e [69], porém, nestas referências, a interface foi discretizada definindo-se nós nas interseções desta com os lados dos elementos da malha do fluido. O subespaço de aproximação dos Multiplicadores de Lagrange assim gerado desperta problemas de instabilidade numérica por não satisfazer a condição LBB, conforme já havia sido mostrado por Möes et al. [70], que classificam esta técnica de discretização da interface de "desavisada". Möes et al. [70] propõem um algoritmo de discretização da interface que reduz o subespaço de aproximação dos Multiplicadores de Lagrange através de uma seleção dos nós "vencedores" dentre aqueles gerados de forma "desavisada", garantindo assim estabilidade ao método e taxa de convergência ótima, porém pagando-se o preço da perda de simplicidade do método. A formulação proposta no Capítulo 5 deste trabalho difere das referências citadas há pouco por construir a malha dos Multiplicadores de Lagrange na interface do problema de IFE de forma independente da malha do fluido, podendo, na maioria das vezes, ser utilizada a própria malha da estrutura para este fim. Além disso, propõe-se também que as funções de interpolação dos Multiplicadores de Lagrange sejam constantes dentro dos elementos e descontínuas entre estes, de modo a melhorar ainda mais a estabilidade numérica do método e simplificar o cálculo das integrais ao longo da interface. Uma ideia muito semelhante foi apresentada em [71], praticamente simultânea a [72] e [73].

Diversas outras técnicas vêm sendo pesquisadas com o mesmo objetivo de impor condições de contorno do tipo Dirichlet juntamente com métodos de fronteiras imersas. Destacam-se aqui o método dos Multiplicadores de Lagrange Distribuídos [74,75], no qual os Multiplicadores de Lagrange são definidos nos nós dos elementos de fluido cortados pela interface, variações do método de Nitsche [76,77], métodos híbrido mistos nos quais os elementos de fluido intersectados pela interface são enriquecidos com um campo de tensões adicional para garantir a imposição da condição de Dirichlet na interface [78,79,80] e métodos de Galerkin descontínuos [81].

3. O Problema de Fluidos

Neste Capítulo, será apresentado o problema da Mecânica dos Fluidos descrito pelas Equações de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis e sua solução pelo Método dos Elementos Finitos. Apesar dos exemplos numéricos estarem limitados a duas dimensões do espaço, toda a formulação será apresentada para o caso geral em três dimensões.

3.1. Equações de Navier-Stokes

A conservação de momento linear do fluido é dada por

$$\rho \frac{d\boldsymbol{u}}{dt} = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{b} \,, \tag{3.1}$$

onde ρ é a densidade do fluido e *b* o vetor das forças de volume por unidade de massa. O vetor das velocidades é representado por *u* e du / dt é a derivada material da velocidade com relação ao tempo e *T* é o tensor das tensões de Cauchy. A equação de conservação da massa, que no caso de escoamentos incompressíveis se reduz à equação de incompressibilidade, pode ser escrita como

$$\operatorname{div} \boldsymbol{u} = 0. \tag{3.2}$$

Adotando um sistema de referência Euleriano, a derivada material da velocidade na equação de conservação do momento linear resultará em duas parcelas: derivada parcial com relação ao tempo, ou aceleração local, e aceleração convectiva. Portanto, a eq. (3.1) pode ser reescrita como

$$\rho(\dot{\boldsymbol{u}} + (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{u}) = \operatorname{div} \boldsymbol{T} + \rho \boldsymbol{b}, \qquad (3.3)$$

onde \dot{u} representa a derivada parcial da velocidade com relação ao tempo e o gradiente da velocidade é definido por

$$\nabla \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}_{,i} \otimes \boldsymbol{e}_i. \tag{3.4}$$

Ao longo deste texto, utilizar-se-á a convenção $a_{,i}$ para denotar a derivada do vetor a com relação à coordenada i de um sistema cartesiano definido pelas bases e_i . Também será adotada a convenção de somatória de índices repetidos, ou mudos, de modo que o vetor posição seja escrito como $x = x_i e_i$. Para fluidos Newtonianos, o tensor das tensões de Cauchy é dado por

$$T = -\overline{p}I + 2\mu\varepsilon(u), \tag{3.5}$$

onde μ é a viscosidade do fluido, \overline{p} é a pressão e $\varepsilon(u)$ é o tensor taxa de deformação da velocidade dado por

$$\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \frac{1}{2} \Big(\nabla \boldsymbol{u} + (\nabla \boldsymbol{u})^T \Big). \tag{3.6}$$

O divergente do tensor das tensões pode ser calculado a partir de (3.5), resultando em

$$\operatorname{div} \boldsymbol{T} = -\nabla \overline{p} + \mu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \mu \nabla (\operatorname{div} \boldsymbol{u}), \qquad (3.7)$$

onde a última parcela é nula devido à condição de incompressibilidade (3.2). Substituindo então a equação anterior em (3.3), chega-se finalmente a

$$\begin{cases} \dot{\boldsymbol{u}} + (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - \nu\nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla p = \boldsymbol{b} & \text{em } \Omega \\ \text{div}\boldsymbol{u} = 0 & \text{em } \Omega, \end{cases}$$
(3.8)

na qual a condição de incompressibilidade foi repetida aqui apenas por motivo de clareza da exposição e Ω é o domínio do problema. Note que todos os termos da equação do momento foram divididos por ρ , originando a viscosidade e pressão cinemáticas definidas por $\nu = \mu / \rho$ e $p = \overline{p} / \rho$, respectivamente. A fim de que o sistema de equações diferenciais parciais governado por (3.8) seja bem posto, é necessário impor condições de contorno e iniciais ao problema. Dessa forma, definem-se

$$\begin{split} \boldsymbol{u} &= \overline{\boldsymbol{u}} & \text{em } \boldsymbol{\Gamma}_{u} \\ (\nu \nabla \boldsymbol{u} - p \boldsymbol{I}) \boldsymbol{n} &= \overline{\boldsymbol{t}} & \text{em } \boldsymbol{\Gamma}_{t} \\ \boldsymbol{u} &= \boldsymbol{u}_{0} & \text{em } \boldsymbol{\Omega} \quad e \quad t = 0, \end{split} \tag{3.9}$$

onde Γ_u é a parte do contorno na qual são impostas as condições de contorno essenciais ou de Dirichlet e Γ_t as condições de contorno naturais ou de Neumann, tais que $\Gamma = \Gamma_u \cup \Gamma_t$ e $\Gamma_u \cap \Gamma_t = \varnothing$. u_0 é a condição inicial do problema e precisa satisfazer a condição de incompressibilidade, isto é, div $u_0 = 0$. A barra sobre as variáveis indica que seus valores são prescritos.

O sistema de equações (3.8) constitui as Equações de Navier-Stokes para escoamento incompressível e sua dedução remonta ao século XIX. O leitor interessado em conhecer um pouco do histórico da mecânica dos fluidos e seus principais personagens, desde Arquimedes até Stokes, passando por grandiosas contribuições de Bernoulli, Euler e o curioso paradoxo de d'Alambert, é encorajado a ler o capítulo introdutório de [82] e notas históricas de [83].

3.2. Forma fraca

Sejam $\mathcal{S} \in \mathcal{V}$ subespaços de Hilbert das funções de aproximação e peso do campo de velocidades, respectivamente, e cujas condições de contorno de Dirichlet são satisfeitas pelas funções de aproximação¹ enquanto que as funções peso são nulas em Γ_u . Esses subespaços podem ser escritos como

$$\boldsymbol{\mathcal{S}} = \left\{ \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{1}(\Omega) \middle| \boldsymbol{u} = \boldsymbol{\overline{u}} \text{ em } \boldsymbol{\Gamma}_{u} \right\}$$
(3.10)

e

$$\boldsymbol{\mathcal{V}} = \boldsymbol{\mathcal{H}}_{1}^{B=0} = \left\{ \boldsymbol{w} \in \boldsymbol{\mathcal{H}}_{1} (\Omega) \middle| \boldsymbol{w} = \boldsymbol{\theta} \text{ em } \boldsymbol{\Gamma}_{u} \right\}.$$
(3.11)

¹ A rigor, esta definição só seria correta caso as condições de contorno de Dirichlet fossem homogêneas, pois só neste caso a soma de duas funções seria ainda uma função do mesmo subespaço. Poder-se-ia definir a função de aproximação como a soma de duas funções $u = u_D + u_0$, a primeira satisfazendo as condições de contorno reais do problema e a segunda as condições de contorno homogêneas. O

subespaço S seria então formado pelas funções u_0 e o rigor matemático seria atendido, porém pagando-se o preço de uma notação menos concisa. Neste texto, o autor optou por cometer este abuso de linguagem uma vez que a imposição das condições de contorno essenciais em elementos finitos é direta e trivial, tornando esta discussão um assunto de menor importância.

Adicionalmente, seja $\mathcal{Q} = \mathbb{L}_2(\Omega)$ o espaço das funções quadrado integráveis que contém as funções de aproximação e peso da pressão. O sistema de equações (3.8) pode então ser reescrito em sua forma integral valendo-se de funções teste arbitrárias $(w,q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$ da seguinte forma

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} d\Omega + \int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} d\Omega - \int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} \nabla^2 \boldsymbol{u} d\Omega +$$
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \nabla \boldsymbol{p} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{b} d\Omega, \qquad (3.12)$$
$$\int_{\Omega} \boldsymbol{q} \cdot \operatorname{div} \boldsymbol{u} d\Omega = 0.$$

Integrando por partes os termos viscoso e da pressão, obtém-se

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \boldsymbol{\nu} \nabla^2 \boldsymbol{u} d\Omega = -\int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{w} : \boldsymbol{\nu} \nabla \boldsymbol{u} d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{w} \cdot (\boldsymbol{\nu} \nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{n} d\Gamma,$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \nabla p d\Omega = -\int_{\Omega} (\operatorname{div} \boldsymbol{w}) p d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{w} \cdot p \boldsymbol{n} d\Gamma.$$
(3.13)

Substituindo (3.13) em (3.12) e valendo-se da notação compacta definida logo a seguir, podese reescrever o problema definido por (3.8) e (3.9) de forma equivalente conforme se segue. Encontrar $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \in \boldsymbol{S} \times \left[0,T\right]$ e $p(\boldsymbol{x},t) \in \boldsymbol{Q} \times \left[0,T\right]$, tal que, para qualquer par $(\boldsymbol{w},q) \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}$

$$\left(\boldsymbol{w}, \dot{\boldsymbol{u}}\right)_{\Omega} + c\left(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} + a\left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} - \left(\operatorname{div}\boldsymbol{w}, p\right)_{\Omega} + \left(q, \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)_{\Omega} - \left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{t}}\right)_{\Gamma_{t}} = \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\right)_{\Omega}, (3.14)$$

que é a forma fraca da equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis. Note que o termo no contorno Γ_u é nulo, pois w = 0 nesta região. Os termos convectivo e viscoso são definidos através das formas trilinear e bilinear a seguir:

$$c(\boldsymbol{u};\boldsymbol{w},\boldsymbol{u}) = \int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot (\nabla \boldsymbol{u}) \boldsymbol{u} d\Omega \ \mathbf{e} \ a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{w} : \nu \nabla \boldsymbol{u} d\Omega.$$
(3.15)

3.3. Tensões e pseudotensões no contorno

É importante ressaltar que o vetor \overline{t} aplicado no contorno Γ_t e apresentado na forma fraca (3.14) é dado por

$$\overline{\boldsymbol{t}} = (\nu \nabla \boldsymbol{u} - p\boldsymbol{I})\boldsymbol{n}, \tag{3.16}$$

estando em perfeita concordância com (3.13) e (3.9). Ou seja, (3.16) é de fato a condição de contorno natural do sistema (3.8). Entretanto, por definição, o vetor tensão aplicado a uma superfície definida pelo vetor normal unitário n vale

$$\overline{\boldsymbol{t}} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{n} = [2\nu\boldsymbol{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) - p\boldsymbol{I}]\boldsymbol{n} = [\nu(\nabla + \nabla^T)\boldsymbol{u} - p\boldsymbol{I}]\boldsymbol{n}, \quad (3.17)$$

que é diferente de (3.16). Devido a esta inconsistência, a tensão (3.16) é muitas vezes chamada de pseudotensão na literatura internacional [84]. Embora em grande parte dos problemas, nos quais a atenção esteja voltada para os resultados de velocidade e pressão do escoamento, essa distinção entre tensão e pseudotensão não seja relevante, nas aplicações em que as tensões no contorno do fluido são de suma importância, a formulação precisa estar consistente com as tensões verdadeiras dadas por (3.17). Problemas de IFE são um exemplo de quando utilizar (3.17) e não (3.16).

Uma formulação do problema de escoamento incompressível cuja condição de contorno natural é dada por (3.17) pode ser facilmente obtida combinando-se as equações (3.3) e (3.5) para escrever a equação de conservação do momento linear da seguinte forma

$$\dot{\boldsymbol{u}} + (\nabla \boldsymbol{u})\boldsymbol{u} - 2\nu \operatorname{div}(\nabla^s \boldsymbol{u}) + \nabla p = \boldsymbol{b}, \qquad (3.18)$$

onde novamente toda a equação foi dividida por ρ . O termo $\nabla^s u$ é o gradiente simétrico das velocidades que, por definição, é idêntico ao tensor taxa de deformação das velocidades dado por (3.6). Focando agora na integração por partes dos termos viscoso e de pressão, já na forma fraca, de modo semelhante ao que foi feito em (3.13), obtém-se

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot [-2\nu \operatorname{div}(\nabla^{s}\boldsymbol{u})] d\Omega = -\int_{\Omega} 2\nu \nabla^{s}\boldsymbol{w} : \nabla^{s}\boldsymbol{u} d\Omega - \int_{\Gamma} 2\nu \boldsymbol{w} \cdot [\nabla^{s}\boldsymbol{u}(\boldsymbol{n})] d\Gamma,$$

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{w} \cdot \nabla p d\Omega = -\int_{\Omega} (\operatorname{div}\boldsymbol{w}) p d\Omega + \int_{\Gamma} \boldsymbol{w} \cdot p \boldsymbol{n} d\Gamma.$$
(3.19)

A forma fraca do problema será então dada pela mesma expressão de (3.14), ou seja,

$$\left(\boldsymbol{w}, \dot{\boldsymbol{u}}\right)_{\Omega} + c\left(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} + a\left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} - \left(\operatorname{div}\boldsymbol{w}, p\right)_{\Omega} + \left(q, \operatorname{div}\boldsymbol{u}\right)_{\Omega} - \left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{t}}\right)_{\Gamma_{t}} = \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\right)_{\Omega},$$

 $\forall (w,q) \in \mathcal{V} \times \mathcal{Q}$, porém, com a seguinte definição da forma bilinear do termo viscoso

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \int_{\Omega} 2\nu \nabla^{s} \boldsymbol{w} : \nabla^{s} \boldsymbol{u} d\Omega$$
(3.20)

e a condição de contorno natural, ou de Neumann, dada por (3.17) em Γ_t .

3.4. Integração no tempo

Há vários métodos numéricos que podem ser utilizados para discretizar no tempo a equação (3.14). Ver, por exemplo, trabalho de Dettmer e Peric [85] no qual os autores promovem extensa discussão e comparação de diversos algoritmos de integração no tempo. Neste trabalho, o método de Newmark [86] será apresentado e sua performance avaliada em função do parâmetro γ através de vários exemplos numéricos a serem resolvidos mais adiante no texto.

Método de Newmark

Na discretização temporal, o tempo é discretizado em intervalos Δt de modo que

$$t^{n+1} = t^n + \Delta t,$$

onde t^{n+1} é o instante de tempo subsequente a t^n . No Método de Newmark [86], a aceleração do fluido no instante de tempo t^{n+1} pode ser escrita como

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \frac{1}{\gamma} \frac{(\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n)}{\Delta t} - \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \dot{\boldsymbol{u}}^n, \qquad (3.21)$$

onde γ é o parâmetro de integração de Newmark. É interessante notar que, fazendo $\gamma=1$, obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{u}}^{n+1} = \frac{\boldsymbol{u}^{n+1} - \boldsymbol{u}^n}{\Delta t},\tag{3.22}$$

que é o Método de Euler Implícito. Este método, apesar de ser de primeira ordem, tem algumas vantagens como sua simplicidade, facilidade de implementação e conveniência quando utilizado em problemas de IFE com fronteiras imersas. Por outro lado, ao fazer $\gamma = 1/2$, chega-se a

$$\dot{u}^{n+1} = \frac{2(u^{n+1} - u^n)}{\Delta t} - \dot{u}^n,$$
(3.23)

que, apesar de exigir o armazenamento da aceleração no instante anterior, t^n , tem a vantagem de possuir convergência de segunda ordem. Utilizando, portanto, o Método de Newmark de discretização do tempo, podemos reescrever as equações de Navier-Stokes (3.8) e suas condições de contorno e iniciais (3.9) de modo a obter

$$u^{n+1} = \overline{u}$$
 em Γ_u (3.24)

$$(\nu \nabla \boldsymbol{u}^{n+1} - p^{n+1} \boldsymbol{I}) \boldsymbol{n} = \overline{\boldsymbol{t}}^{n+1} \qquad \text{em } \boldsymbol{\Gamma}_t$$

$$\boldsymbol{u}^{n=0} = \boldsymbol{u}_0 \qquad \qquad \text{em } \boldsymbol{\Omega},$$

que é o sistema de equações semidiscreto do problema de escoamento viscoso incompressível. A forma fraca do problema descrito por (3.24) é obtida de forma análoga a (3.14) e será dada por

$$\left\{ \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} + \gamma \Delta t \left[c \left(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} + a \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} - \left(\operatorname{div} \boldsymbol{w}, p\right)_{\Omega} + \left(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right)_{\Omega} \right. \\ \left. - \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\right)_{\Omega} - \left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{t}}\right)_{\Gamma_{t}} \right] \right\}^{n+1} = \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^{n}\right)_{\Omega} + (1 - \gamma) \Delta t \left(\boldsymbol{w}, \dot{\boldsymbol{u}}^{n}\right)_{\Omega},$$
(3.25)

$$\forall (\boldsymbol{w},q) \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}.$$

3.5. Discretização do espaço por elementos finitos

Da forma como as equações de Navier-Stokes foram apresentadas e, posteriormente, a forma fraca foi deduzida, a discretização espacial da eq. (3.25) acarretará numa formulação mista de elementos finitos na qual a velocidade e a pressão são as variáveis primitivas do problema. Adicionalmente, o campo de pressões pode ser interpretado como Multiplicadores de Lagrange da condição de incompressibilidade. Dessa forma, é de se esperar que a escolha do elemento finito misto para formulação do problema discreto não possa ser feita de forma aleatória em relação aos pares de velocidade/pressão. Insistindo na interpretação da pressão como um Multiplicador de Lagrange, a escolha de um elemento finito com muitos graus de liberdade de pressão e poucos de velocidade fatalmente causará travamento ou instabilidade numérica devido ao excesso de restrições ao campo de velocidades. A condição a qual o par de pressão/velocidade deve satisfazer a fim de evitar problemas de instabilidade numérica é conhecida na literatura por LBB ou inf-sup. Elementos finitos 2D com pares de velocidade/pressão populares na literatura são mostrados na Figura 3, onde os círculos menores e cheios representam os nós com graus de liberdade de velocidade, enquanto os círculos maiores e sem enchimento simbolizam nós de pressão. Para outros elementos e discussões mais aprofundadas da condição LBB, o leitor pode consultar [51], [87] e [84].



Figura 3. Exemplos de elementos finitos com diferentes pares de velocidade/pressão.

Neste trabalho, o autor propõe um novo elemento finito triangular que tem mostrado resultados interessantes em diversas simulações numéricas [88,89,90]. Este elemento possui seis nós com graus de liberdade de velocidade enquanto que a pressão é calculada apenas nos nós dos pontos médios dos lados, conforme ilustra a Figura 4. Portanto, as velocidades são

interpoladas por funções de forma quadráticas compatíveis e a pressão por funções lineares e incompatíveis, por isso o nome P2P1i atribuído a este elemento.



Figura 4. Elemento finito triangular P2P1i

A discretização no espaço da eq. (3.25) é feita ao substituir as funções de aproximação e peso definidas na Seção 3.2 por suas respectivas aproximações. Por se tratar de uma aproximação por elementos finitos, as funções escolhidas possuem dimensão finita e suporte compacto. Essas funções podem ser escritas como

$$\boldsymbol{u}^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N}_{u} \mathbf{u}_{e}, \qquad p^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N}_{p} \mathbf{p}_{e},$$

$$\boldsymbol{w}^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N}_{u} \mathbf{w}_{e}, \qquad q^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N}_{p} \mathbf{q}_{e},$$
(3.26)

onde Nel é o número de elementos finitos da discretização. O índice h indica a aproximação da função em questão e \mathbf{N}_u e \mathbf{N}_p são as matrizes que contêm as funções de forma ou de interpolação local do elemento finito e são dadas por

$$\mathbf{N}_u = \begin{bmatrix} N_1^u \boldsymbol{I} & N_2^u \boldsymbol{I} & \cdots & N_{n_u}^u \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \mathbf{e} \ \mathbf{N}_p = \begin{bmatrix} N_1^p & N_2^p & \cdots & N_{n_p}^p \end{bmatrix},$$

onde n_u e n_p são os números de nós de velocidade e de pressão por elemento, respectivamente. Os vetores com índice 'e' referem-se aos valores nodais da variável no domínio local do elemento finito. Os vetores de velocidade e pressão nodais, por exemplo, são dados por

$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & \cdots & u_{n_u} & v_{n_u} & w_{n_u} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}} \mathbf{e} \mathbf{p}_e = \begin{bmatrix} p_1 & p_2 & \dots & p_{n_p} \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

com u_i , v_i e w_i sendo as componentes da velocidade do nó 'i' nas três direções ortonormais do sistema de referência. Os subespaços que contêm as funções de aproximação e peso agora terão dimensão finita e a notação \mathcal{S}^h , \mathcal{V}^h e \mathcal{Q}^h será adotada. O problema (3.25) pode então ser enunciado, agora na sua forma discretizada, como: dados b, \overline{t} , \overline{u} e conhecida a solução do problema no instante de tempo 'n', encontrar $u^h(x) \in \mathcal{S}^h$ e $p^h(x) \in \mathcal{Q}^h$ no instante $t^{n+1} = t^n + \Delta t$ tal que, para qualquer par $(w^h, q^h) \in \mathcal{V}^h \times \mathcal{Q}^h$, tenha-se

$$\begin{cases} \left\{ \left(\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega}+\gamma\Delta t\left[c\left(\boldsymbol{u}^{h};\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega}+a\left(\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega}-\left(\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{h},p^{h}\right)_{\Omega}\right]\right\}^{n+1}=\\ \gamma\Delta t\left\{\left(\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{b}\right)_{\Omega}+\left(\boldsymbol{w}^{h},\overline{\boldsymbol{t}}\right)_{\Gamma_{t}}\right\}^{n+1}+\left(\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{u}^{h,n}\right)_{\Omega}+(1-\gamma)\Delta t\left(\boldsymbol{w}^{h},\dot{\boldsymbol{u}}^{h,n}\right)_{\Omega} (3.27)\\ \left(\left(q^{h},\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega}^{n+1}=0.\end{cases}$$

Substituindo as expressões de (3.26) na equação anterior e após algumas manipulações algébricas, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} \mathbf{u}^{n+1} + \left\{ \mathbf{C}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K} \right\} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{G} \mathbf{p}^{n+1} = \mathbf{f}^{n+1} + \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} \mathbf{u}^{n} + \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^{n} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0}, \end{cases}$$
(3.28)

onde u e p são os vetores de velocidade e pressão nodais globais, que se relacionam com seus respectivos vetores locais por

$$\mathbf{u}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{u} \ \mathbf{e} \ \mathbf{p}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{p}. \tag{3.29}$$

M, C, K, G e G^T correspondem, respectivamente, à matriz de massa, matriz convectiva, matriz viscosa, operador gradiente e operador divergente. O vetor **f** contém as forças de volume e tensões aplicadas. Esses vetores e matrizes globais são dados pelo espalhamento das contribuições locais de cada elemento. Esta operação de espalhamento é dada por

$$\mathbf{M} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_e \mathbf{A}_e \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{f} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathrm{T}} \mathbf{f}_e, \qquad (3.30)$$

no caso da matriz de massa e do vetor de forças aplicadas, respectivamente. As demais matrizes são obtidas de forma análoga. Obviamente, as matrizes de espalhamento \mathbf{A}_{e} não precisam ser definidas no código computacional, sua função aqui é apenas didática na exposição. As matrizes locais são definidas por

$$\begin{split} \mathbf{M}_{e} &= \int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{T} \mathbf{N}_{u} d\Omega_{e}, \ \mathbf{K}_{e} &= \int_{\Omega_{e}} \mathbf{B}_{u}^{T} \nu \mathbf{B}_{u} d\Omega_{e}, \\ \mathbf{C}_{e} &= \int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{T} \left[(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{u}_{e}) \otimes \mathbf{e}_{i} \right] \mathbf{N}_{u} d\Omega_{e}, \\ \mathbf{G}_{e} &= -\int_{\Omega_{e}} \left(\nabla \cdot \mathbf{N}_{u} \right)^{T} \mathbf{N}_{p} d\Omega_{e} \ \mathbf{e} \\ \mathbf{f}_{e} &= \int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{T} \mathbf{b} d\Omega_{e} + \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}_{u}^{T} \overline{\mathbf{t}} d\Gamma_{te}, \end{split}$$
(3.31)

com

$$\begin{split} \mathbf{B}_{u} &= \begin{bmatrix} N_{1,1}^{u} I & N_{2,1}^{u} I & \cdots & N_{n_{u},1}^{u} I \\ N_{1,2}^{u} I & N_{2,2}^{u} I & \cdots & N_{n_{u},2}^{u} I \\ N_{1,3}^{u} I & N_{2,3}^{u} I & \cdots & N_{n_{u},3}^{u} I \end{bmatrix}, \\ \mathbf{N}_{u,i} &= \begin{bmatrix} N_{1,i}^{u} I & N_{2,i}^{u} I & \cdots & N_{n_{u},i}^{u} I \end{bmatrix} \mathbf{e} \\ &\left(\nabla \cdot \mathbf{N}_{u} \right) &= \begin{bmatrix} N_{1,1} & N_{1,2} & N_{1,3} & N_{2,1} & N_{2,2} & N_{2,3} & \cdots & N_{n_{u},1} & N_{n_{u},2} & N_{n_{u},3} \end{bmatrix}. \end{split}$$

Quando se utilizar a equação do momento linear na forma (3.18) e, consequentemente, a forma fraca do termo viscoso for dada por (3.20), pode-se calcular a matriz viscosa \mathbf{K}_e definindo antes o vetor taxa de deformação

$$\dot{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) = \begin{pmatrix} u_{,1} & v_{,2} & w_{,3} & u_{,2} + v_{,1} & v_{,3} + w_{,2} & w_{,1} + u_{,3} \end{pmatrix}^T$$
(3.32)

e a matriz constitutiva dada por

$$\mathbf{C}_{\nu} = \nu \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$
(3.33)

de modo que

$$a(\boldsymbol{u},\boldsymbol{w}) = \int_{\Omega} \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{w})^T \mathbf{C}_{\nu} \dot{\varepsilon}(\boldsymbol{u}) d\Omega.$$
(3.34)

A matriz viscosa local, neste caso, será dada por

$$\mathbf{K}_{e} = \int_{\Omega_{e}} \mathbf{B}_{u}^{T} \mathbf{C}_{\nu} \mathbf{B}_{u} d\Omega_{e}, \qquad (3.35)$$

com

$$\mathbf{B}_{u} = \begin{bmatrix} N_{1,1}^{u} & 0 & 0 & N_{2,1}^{u} & 0 & 0 & \cdots & N_{n_{u},1}^{u} & 0 & 0 \\ 0 & N_{1,2}^{u} & 0 & 0 & N_{2,2}^{u} & 0 & \cdots & 0 & N_{n_{u},2}^{u} & 0 \\ 0 & 0 & N_{1,3}^{u} & 0 & 0 & N_{2,3}^{u} & \cdots & 0 & 0 & N_{n_{u},3}^{u} \\ N_{1,2}^{u} & N_{1,1}^{u} & 0 & N_{2,2}^{u} & N_{2,1}^{u} & 0 & \cdots & N_{n_{u},2}^{u} & N_{n_{u},1}^{u} & 0 \\ 0 & N_{1,3}^{u} & N_{1,2}^{u} & 0 & N_{2,3}^{u} & N_{2,2}^{u} & \cdots & 0 & N_{n_{u},3}^{u} & N_{n_{u},2}^{u} \\ N_{1,3}^{u} & 0 & N_{1,1}^{u} & N_{2,3}^{u} & 0 & N_{2,1}^{u} & \cdots & N_{n_{u},3}^{u} & 0 & N_{n_{u},1}^{u} \end{bmatrix}.$$

A obtenção das matrizes em (3.31) e (3.35) a partir da substituição das funções peso e aproximação na forma fraca (3.27) é detalhada no Apêndice deste texto. Apresentaremos aqui apenas a obtenção da matriz de massa

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{w}^{h}, \boldsymbol{u}^{h} \end{pmatrix}_{\Omega} = \int_{\Omega} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \boldsymbol{u}^{h} d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \boldsymbol{u}^{h} d\Omega_{e}$$

$$= \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \left(\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{w} \right)^{\mathrm{T}} \left(\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{u} \right) d\Omega_{e} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_{u} d\Omega_{e} \mathbf{A}_{e} \right) \mathbf{u}$$

$$= \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{M}_{e} \mathbf{A}_{e} \right) \mathbf{u} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \mathbf{u}.$$

$$(3.36)$$

Note que ao substituir o resultado da expressão anterior em (3.27), o vetor \mathbf{w}^{T} será cancelado uma vez que este aparece em todas as parcelas e por ser arbitrário. O sistema de equações algébricas (3.28) pode ser escrito também como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \gamma \Delta t + (\mathbf{C}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K}) & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{n+1} + \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} \mathbf{u}^{n} + \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^{n} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$
 (3.37)

Note que o sistema de equações algébricas acima é não linear devido à presença da matriz convectiva. Nesta formulação, é utilizado o método de Newton-Raphson para solução de problemas não lineares e a matriz de rigidez tangente do problema será obtida na Seção 3.8.

3.6. Estabilização da condição LBB

Um caso particular de escoamento de fluidos ocorre quando se tem velocidades muito baixas. Nesta situação é possível desprezar a convecção e a aceleração local do fluido, pois os efeitos viscosos são predominantes no escoamento. Escoamentos com essa característica são conhecidos na literatura por *escoamento de Stokes* e podem ser descritos de forma simplificada por

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{G} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{p} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}.$$
 (3.38)

O escoamento de Stokes é portanto um problema estacionário descrito por um sistema linear de equações algébricas. Consequentemente, os possíveis problemas de instabilidade numérica estão restritos à condição LBB. A demonstração matemática de que o elemento P2Pli satisfaz ou não a condição LBB é bastante complexa e foge ao escopo deste trabalho. Optou-se aqui por fazer testes e observar possíveis modos espúrios de pressão.

Problema 3.1: Escoamento de Stokes com solução analítica

Este problema consta na referência [84] e consiste em se determinar o campo de velocidades e pressão num domínio quadrado de lado unitário $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ com condições de contorno do tipo Dirichlet homogêneas em toda a fronteira. As forças de volume são dadas por

$$b_{1} = (12 - 24x_{2})x_{1}^{4} + (-24 + 48x_{2})x_{1}^{3} + (-48x_{2} + 72x_{2}^{2} - 48x_{2}^{3} + 12)x_{1}^{2} + + (-2 + 24x_{2} - 72x_{2}^{2} + 48x_{2}^{3})x_{1} + 1 - 4x_{2} + 12x_{2}^{2} - 8x_{2}^{3}$$

$$b_{2} = (8 - 48x_{2} + 48x_{2}^{2})x_{1}^{3} + (-12 + 72x_{2} - 72x_{2}^{2})x_{1}^{2} + + (4 - 24x_{2} + 48x_{2}^{2} - 48x_{2}^{3} + 24x_{2}^{4})x_{1} - 12x_{2}^{2} + 24x_{2}^{3} - 12x_{2}^{4},$$
(3.39)

onde o vetor posição é dado por $x = x_i e_i$ e a força de volume $b = b_i e_i$ conforme orientação do sistema de coordenadas mostrado na Figura 5.



Figura 5. Escoamento de Stokes com solução analítica. Dados do Problema 3.1.

Este problema possui solução analítica dada por

$$\boldsymbol{u} = \left[x_1^2 \left(1 - x_1 \right)^2 \left(2x_2 - 6x_2^2 + 4x_2^3 \right) - x_2^2 \left(1 - x_2 \right)^2 \left(2x_1 - 6x_1^2 + 4x_1^3 \right) \right]^{\mathrm{T}}$$
(3.40)
$$\boldsymbol{p} = x_1 \left(1 - x_1 \right).$$

Note que neste problema o campo de pressões só pode ser determinado a menos de uma constante, pois a única condição de contorno é do tipo Dirichlet aplicada à velocidade. De modo a evitar que o sistema (3.38) seja singular, a pressão é imposta igual a zero no nó do canto superior esquerdo do domínio. Procedendo desta forma, os resultados obtidos com os elementos Taylor-Hood Q2Q1 e P2P1 são mostrados na Figura 6. Na Figura 7, os resultados de pressão e velocidade vertical ao longo da linha média horizontal (x_2 =0,5) são comparados com a solução analítica, onde pode ser observada excelente concordância dos mesmos. O *software* Gid [91] foi utilizado para pré e pós-processamento dos dados do problema.



Figura 6. Malha, campo de velocidades e pressão do escoamento de Stokes. Resultados obtidos usando os elementos Q2Q1 e P2P1.



Figura 7. Comparação dos resultados obtidos com os elementos Q2Q1 e P2P1 e a solução analítica (exata) do Problema 3.1. Velocidade vertical (esquerda) e pressão (direita) ao longo da linha média horizontal.

A boa concordância dos resultados da Figura 7 já era esperada uma vez que os elementos de Taylor-Hood satisfazem a condição LBB (ver [84] e [51]). Os elementos finitos com funções de interpolação de mesma ordem na Figura 3, Q2Q2 e P2P2, não satisfazem a condição LBB e a distribuição de pressões obtida neste exemplo possui modos espúrios. O elemento P2P1i, por sua vez, apresenta modos espúrios de pressão em alguns tipos de malha. As figuras a seguir mostram alguns resultados deste mesmo exemplo em função da disposição da malha de

elementos finitos. Note que no primeiro caso (Figura 8 e Figura 9), malha estruturada e cruzada, o campo de pressões não possui nenhum sinal de modos espúrios ou instabilidade numérica e pode-se observar excelente concordância com a solução analítica. No segundo caso (Figura 10 e Figura 11), tem-se uma malha não estruturada e uma concordância também muito boa com a solução analítica. Finalmente, no terceiro caso (Figura 12 e Figura 13), a malha é estruturada, porém não cruzada. Nesta disposição de malha, o resultado da distribuição de pressão obtido não possui significado físico e, portanto, não tem qualquer utilidade. Fica evidenciado assim que o elemento P2P1i não satisfaz a condição LBB e alguma técnica de estabilização se faz necessária para que o mesmo possa ser empregado em outras aplicações. Neste trabalho, optou-se por estabilizar os elementos P2P1i, Q2Q2 e P2P2 usando o método Galerkin/Least-squares [52] que será apresentado na próxima Seção.



Figura 8. Malha, campo de velocidades e pressão do Problema 3.1. Resultados obtidos usando o elemento P2P1i com malha estruturada e cruzada.



Figura 9. Comparação dos resultados obtidos com o elemento P2P1i e a solução analítica (exata) do Problema 3.1 para o caso de malha estruturada e cruzada. Velocidade vertical (esquerda) e pressão (direita) ao longo da linha média horizontal.


Figura 10. Malha, campo de velocidades e pressão do Problema 3.1. Resultados obtidos usando o elemento P2P1i com malha não estruturada.



Figura 11. Comparação dos resultados obtidos com o elemento P2P1i e a solução analítica (exata) do Problema 3.1 para o caso de malha não estruturada. Velocidade vertical (esquerda) e pressão (direita) ao longo da linha média horizontal.



Figura 12. Malha, campo de velocidades e pressão do Problema 3.1. Resultados obtidos usando o elemento P2P1i com malha estruturada não cruzada.



Figura 13. Comparação dos resultados obtidos com o elemento P2P1i e a solução analítica (exata) do Problema 3.1 para o caso de malha estruturada não cruzada. Velocidade vertical (esquerda) e pressão (direita) ao longo da linha média horizontal.

Estabilização da condição LBB usando Galerkin/Least-Squares

Esta técnica de estabilização da condição LBB permite a utilização de elementos finitos com qualquer par de velocidade/pressão e foi desenvolvida originalmente por Hughes e Franca [52]. A referência [84] também aborda esta técnica num contexto mais recente. A ideia central está na minimização do resíduo quadrado da equação de conservação do momento em (3.8) dado por

$$R_Q(\boldsymbol{u}, p) = (-\nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla p - \boldsymbol{b}, -\nu \nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla p - \boldsymbol{b}), \qquad (3.41)$$

onde os termos transiente e convectivo foram desprezados. A minimização deste funcional pode ser feita exigindo que a derivada de Gâteaux em u e p, com α real, seja nula:

$$\frac{dR_{Q}(\boldsymbol{u}+\alpha\boldsymbol{w},p+\alpha q)}{d\alpha}\bigg|_{\alpha=0} = 0 \quad \forall \quad (\boldsymbol{w},q) \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}.$$
(3.42)

De (3.42) e (3.41), pode-se definir uma função real $\varphi(\alpha)$ dada por

$$\varphi(\alpha) = R_Q(\boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{w}, p + \alpha q),$$

$$\varphi(\alpha) = (-\nu \nabla^2 \boldsymbol{u} - \alpha \nu \nabla^2 \boldsymbol{w} + \nabla p + \alpha \nabla q - \boldsymbol{b}, -\nu \nabla^2 \boldsymbol{u} - \alpha \nu \nabla^2 \boldsymbol{w} + \nabla p + \alpha \nabla q - \boldsymbol{b}).$$
(3.43)

Como

$$\frac{dR_Q(\boldsymbol{u} + \alpha \boldsymbol{w}, p + \alpha q)}{d\alpha} \bigg|_{\alpha = 0} = \varphi'(\alpha = 0), \qquad (3.44)$$

e

$$\varphi'(\alpha = 0) = 2(-\nu\nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla p - \boldsymbol{b}, -\nu\nabla^2 \boldsymbol{w} + \nabla q), \qquad (3.45)$$

a eq. (3.42) equivale a

$$(-\nu\nabla^2 \boldsymbol{u} + \nabla p - \boldsymbol{b}, -\nu\nabla^2 \boldsymbol{w} + \nabla q) = 0 \quad \forall \quad (\boldsymbol{w}, q) \in \boldsymbol{\mathcal{V}} \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}.$$
(3.46)

Finalmente, a equação anterior deve ser adicionada à forma fraca do problema. Procedendo dessa forma, o problema de Stokes estabilizado e discretizado por elementos finitos pode ser escrito como

$$a(\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{u}^{h})_{\Omega} - (\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{h},p^{h})_{\Omega} + (q^{h},\operatorname{div}\boldsymbol{u}^{h})_{\Omega} = (\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{b})_{\Omega} + (\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{t})_{\Gamma_{t}} + \sum_{e=1}^{Nel} \tau_{e}(-\nu\nabla^{2}\boldsymbol{u}^{h} + \nabla p^{h} - \boldsymbol{b}^{h}, -\nu\nabla^{2}\boldsymbol{w}^{h} + \nabla q^{h})_{\Omega_{e}},$$
(3.47)

 $\forall (\boldsymbol{w}^h, q^h) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}^h$. A fim de evitar maiores exigências de continuidade das funções peso e de aproximação da velocidade, em razão da derivada de segunda ordem, o termo de estabilização é admitido atuar apenas no interior dos elementos [84]. O parâmetro τ_e , chamado de parâmetro de estabilização, é dado por [52]

$$\tau_e = \frac{\alpha h_e^2}{2\nu},\tag{3.48}$$

onde h_e é uma medida local do tamanho do elemento e ν a viscosidade cinemática do fluido, já definida anteriormente. A escolha do coeficiente α depende das funções de forma da velocidade e pressão. $\alpha = 2,5$ e h_e definido como sendo a razão entre a área e o perímetro do elemento têm fornecido bons resultados para o elemento P2P1i, como será mostrado mais adiante.

É importante salientar aqui que, segundo Hughes e Franca [52], a eq. (3.47) é válida apenas para elementos finitos com funções de aproximação da pressão contínuas entre os elementos. A utilização de elementos com pressão descontínua, caso do P2P1i, requereria a inclusão de um termo adicional nesta equação que necessita ser integrado ao longo das interfaces dos elementos. Este termo adicional é dado por

onde $\left[\!\left[p^{h}\right]\!\right]$ e $\left[\!\left[q^{h}\right]\!\right]$ são os saltos da pressão e da função peso nas interfaces entre os elementos adjacentes, respectivamente, e Γ_{e} a interface dos elementos. No caso particular do P2P1i, apesar destes saltos serem não nulos ao longo de Γ_{e} , a contribuição deste termo parece não ser significativa. Todos os resultados que serão apresentados nas próximas Seções foram obtidos sem o termo adicional apresentado acima.

Outro aspecto interessante com relação à estabilização do elemento P2P1i dada pela eq. (3.47) é que, à exceção das forças de volume, que dependem do problema a ser resolvido, os demais termos da estabilização são todos constantes, pois envolvem a segunda derivada da velocidade, que é quadrática, e a primeira derivada da pressão, que é linear. Dessa forma, o custo computacional ao se estabilizar o P2P1i é muito baixo.

Utilizando agora a formulação estabilizada (3.47), o problema de Stokes descrito na Seção anterior pode ser simulado novamente a fim de eliminar os modos espúrios de pressão observados no terceiro caso da Figura 13. Os resultados obtidos são mostrados na Figura 14 e Figura 15.



Figura 14. Malha, campo de velocidades e pressão do escoamento de Stokes. Resultados obtidos utilizando o elemento P2P1i e formulação estabilizada com α=2,5.



Figura 15. Pressão ao longo da linha média horizontal obtida utilizando o elemento P2P1i e formulação estabilizada com α=2,5.

A mesma formulação também foi utilizada para estabilizar os elementos Q2Q2 e P2P2. Os resultados obtidos para esses elementos são mostrados da Figura 16 à Figura 19.



Figura 16. Malha, campo de velocidades e pressão do escoamento de Stokes. Resultados obtidos utilizando o elemento Q2Q2 e formulação estabilizada com α=1.



Figura 17. Pressão ao longo da linha média horizontal obtida utilizando o elemento Q2Q2 e formulação estabilizada com α=1.



Figura 18. Malha, campo de velocidades e pressão do escoamento de Stokes. Resultados obtidos utilizando o elemento P2P2 e formulação estabilizada com α=7.5.



Figura 19. Pressão ao longo da linha média horizontal obtida utilizando o elemento P2P2 e formulação estabilizada com α=7,5.

A Figura 20 mostra a comparação entre as taxas de convergência da pressão entre os elementos finitos do tipo Taylor-Hood (Figura 3) e o elemento P2P1i (Figura 4) em função do número de divisões do domínio do problema. O erro foi calculado através de

$$\text{erro} = \frac{\int_{\Omega} (p_{\text{exato}} - p^h)^2}{\int_{\Omega} p_{\text{exato}}^2}$$



Figura 20. Comparação entre as taxas de convergência da pressão entre os elementos de Taylor-Hood e o P2P1i. Valores calculados para 4, 8, 16 e 32 divisões do domínio.

Os elementos com funções quadráticas de aproximação da pressão possuem taxa de convergência maior que os demais e foi omitido. Note que o elemento P2P1i converge mais rapidamente que os elementos de Taylor-Hood, justificando seu uso apesar da necessidade de estabilização da condição LBB.

3.7. Estabilização da convecção

Conforme mencionado na introdução deste texto, a solução do problema de Navier-Stokes por elementos finitos utilizando projeções usuais de Galerkin, eq. (3.37), é susceptível a instabilidades numéricas em problemas com convecção dominante. Neste trabalho, utiliza-se o conceito de SUPG para estabilização da convecção com base nos trabalhos de Brooks e Hughes [43] e Tezduyar e Osawa [50]. A formulação estabilizada do problema, discretizado apenas no espaço para simplificar a exposição, é dada por

$$\begin{cases} \left(\boldsymbol{w}^{h}, \dot{\boldsymbol{u}}^{h}\right)_{\Omega} + a\left(\boldsymbol{w}^{h}, \boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega} + c\left(\boldsymbol{u}^{h}; \boldsymbol{w}^{h}, \boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega} - \left(\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{h}, p^{h}\right)_{\Omega} - \left(\boldsymbol{w}^{h}, \boldsymbol{b}\right)_{\Omega} - \left(\boldsymbol{w}^{h}, \boldsymbol{\bar{t}}\right)_{\Gamma_{t}} \\ + \sum_{e=1}^{Nel} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left((\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h}, \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \right)_{\Omega_{e}} = 0, \\ \left(q^{h}, \operatorname{div}\boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega} = 0, \end{cases}$$
(3.49)

 $\forall (\boldsymbol{w}^h, q^h) \in \boldsymbol{\mathcal{V}}^h \times \boldsymbol{\mathcal{Q}}^h$. $\mathcal{R}(\boldsymbol{u}^h)$ é o resíduo da equação de conservação do momento linear dado por

$$\mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) = \dot{\boldsymbol{u}}^{h} + (\nabla \boldsymbol{u}^{h})\boldsymbol{u}^{h} - \nu \nabla^{2} \boldsymbol{u}^{h} + \nabla p^{h} - \boldsymbol{b}^{h}.$$
(3.50)

De modo análogo à eq. (3.47), o termo de estabilização da eq. (3.49) é admitido atuar apenas no interior dos elementos. O coeficiente τ_{SUPG} é calculado por (ver [50])

$$\tau_{\rm SUPG} = \left(\frac{1}{\tau_{S1}^r} + \frac{1}{\tau_{S2}^r} + \frac{1}{\tau_{S3}^r}\right)^{-1/r}$$
(3.51)

onde

$$\tau_{S1} = \frac{\left\|\mathbf{C}_{e}\right\|}{\left\|\mathbf{C}\tau_{e}\right\|}, \quad \tau_{S2} = \frac{\Delta t}{2} \frac{\left\|\mathbf{C}_{e}\right\|}{\left\|\mathbf{M}\tau_{e}\right\|}, \quad \tau_{S3} = \tau_{S1}Re$$
(3.52)

e

$$\begin{split} \mathbf{C}\tau_{e} &= \left((\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h}, (\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \right)_{\Omega_{e}}, \ \mathbf{M}\tau_{e} = \left((\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h}, \dot{\boldsymbol{u}}^{h} \right)_{\Omega_{e}} \ \mathbf{e} \\ Re &= \frac{\left\| \boldsymbol{u}^{h} \right\|^{2}}{\nu} \frac{\left\| \mathbf{C}_{e} \right\|}{\left\| \mathbf{C}\tau_{e} \right\|}. \end{split}$$
(3.53)

 $Re \, \acute{e}$ o número de Reynolds definido localmente no elemento. Neste trabalho, foi utilizado $r = 2 \, \mathrm{em} \, (3.51) \, \mathrm{e}$ as normas $\|\cdot\|$ foram calculadas fazendo $\|\cdot\| = \sqrt{\mathrm{tr} \left[(\cdot) (\cdot)^{\mathrm{T}} \right]}.$

Note que a introdução do termo de estabilização na eq. (3.49) acrescentará um novo termo ao sistema de equações algébricas. Este termo é detalhado a seguir

$$\tau_{\text{SUPG}} \left((\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h}, \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \right)_{\Omega_{e}} = \int_{\Omega_{e}} \tau_{\text{SUPG}} \left[(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{w}_{e} \otimes \boldsymbol{e}_{i}) \boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) d\Omega_{e}$$

$$= \int_{\Omega_{e}} \tau_{\text{SUPG}} \left[(\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u,i} \mathbf{w}_{e} \right]^{\text{T}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) d\Omega_{e}$$

$$= \mathbf{w}_{e}^{\text{T}} \int_{\Omega_{e}} \tau_{\text{SUPG}} (\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u,i}^{\text{T}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) d\Omega_{e}.$$
(3.54)

O sistema de equações (3.28) pode ser reescrito de modo a incluir o termo de estabilização anterior como

$$\begin{cases} \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} \mathbf{u}^{n+1} + \left\{ \mathbf{C}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K} \right\} \mathbf{u}^{n+1} + \mathbf{G} \mathbf{p}^{n+1} + \mathbf{r}(\mathbf{u}^{n+1}) = \mathbf{f}^{n+1} + \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} \mathbf{u}^{n} + \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^{n} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} \mathbf{u}^{n+1} = \mathbf{0}, \end{cases}$$
(3.55)

onde

$$\mathbf{r} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{r}_{e} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{r}_{e} = \int_{\Omega_{e}} \tau_{\mathrm{SUPG}}(\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u,i}^{\mathrm{T}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) d\Omega_{e}.$$
(3.56)

3.8. O problema tangente

O sistema de equações (3.55) é não linear devido ao termo convectivo e de estabilização. O método de Newton-Raphson será utilizado para resolvê-lo de forma iterativa e, portanto, se faz necessária a determinação dos operadores tangentes. Reescrevendo o problema (3.55) na forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{d}) = \mathbf{0},\tag{3.57}$$

onde d é o vetor de deslocamentos generalizados dado por

$$\mathbf{d} = \begin{cases} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \end{cases}.$$
 (3.58)

A solução do problema (3.57) pode ser obtida de forma iterativa por

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{d}_k)\mathbf{\delta} = -\mathbf{F}(\mathbf{d}) \\ \mathbf{d}_{k+1} = \mathbf{d}_k + \mathbf{\delta}, \end{cases}$$
(3.59)

onde k é o número da iteração e

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}_{k}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{F}(\mathbf{d}) \bigg|_{k}$$
(3.60)

é a matriz de rigidez tangente do problema. Observe no sistema (3.55) que apenas os termos convectivo e de estabilização são não lineares. Os operadores tangentes desses termos podem ser obtidos derivando-os em relação a $\mathbf{u} \in \mathbf{p}$ e, posteriormente, espalhando-os de modo análogo a (3.30) para obter $\mathbf{A}(\mathbf{d})$. Dessa forma, tem-se para o termo convectivo

$$\begin{split} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \Big(\boldsymbol{w}^{h}, (\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \Big)_{\Omega} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \int_{\Omega} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \Big((\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \Big) d\Omega \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \Big((\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \Big) d\Omega_{e} \\ &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} (\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{w})^{\mathrm{T}} \left\{ \Big[(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{A}_{e} \mathbf{u}) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \Big] \mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{u} \right\} d\Omega_{e} \\ &= \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} (\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{w})^{\mathrm{T}} \left\{ \Big[(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{A}_{e} \mathbf{l}) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \Big] \boldsymbol{u}^{h} + (\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{l} \right\} d\Omega_{e} \\ &= \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \sum_{e} \left\{ \mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \int_{\Omega_{e}} \Big[\mathbf{N}_{u}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u,i} + \mathbf{N}_{u}^{\mathrm{T}} (\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u} \Big] d\Omega_{e} \mathbf{A}_{e} \right\}. \end{split}$$

Observe que o termo de estabilização em (3.49) é definido localmente no domínio do elemento. Portanto, calcularemos suas matrizes tangentes locais

$$\begin{split} &\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} \Big(\tau_{\mathrm{SUPG}}(\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h}, \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \Big)_{\Omega_{e}} = \\ &= \int_{\Omega_{e}} \tau_{\mathrm{SUPG}} \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} (\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) + \left[(\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \right] \right\} d\Omega_{e}, \end{split}$$
(3.62)

e

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{e}} \Big(\tau_{\mathrm{SUPG}}(\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h}, \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \Big)_{\Omega_{e}} = \int_{\Omega_{e}} \tau_{\mathrm{SUPG}} \Big[(\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \Big] \cdot \Big[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{e}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \Big] d\Omega_{e}, \quad (3.63)$$

onde as derivadas presentes no integrando das equações anteriores são calculadas a seguir:

$$\left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} (\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) = \left\{ \left[(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{w}_{e}) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \right] \mathbf{N}_{u} \mathbf{I} \right\} \cdot \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) = \mathbf{w}_{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_{u,i}^{\mathrm{T}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_{u},$$

$$(3.64)$$

$$\left[(\nabla \boldsymbol{w}^{h})\boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \right] = \left[(\nabla \boldsymbol{w}^{h})\boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \left\{ \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} \dot{\boldsymbol{u}}^{h} + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} (\nabla \boldsymbol{u}^{h})\boldsymbol{u}^{h} \right] + \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}_{e}} (-\nu\nabla^{2}\boldsymbol{u}^{h}) \right] \right\}$$

$$= \left\{ \left[(\mathbf{N}_{u,i}\mathbf{w}_{e}) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \right] \boldsymbol{u}^{h} \right\} \cdot \left\{ \frac{\mathbf{N}_{u}}{\gamma\Delta t} + (\boldsymbol{e}_{j}\cdot\boldsymbol{u}^{h})\mathbf{N}_{u,j} + (\nabla\boldsymbol{u}^{h})\mathbf{N}_{u} - \nu\mathbf{N}_{u,jj} \right\}$$

$$= \mathbf{w}_{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{u,i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_{i}\cdot\boldsymbol{u}^{h}) \left[\frac{\mathbf{N}_{u}}{\gamma\Delta t} + (\boldsymbol{e}_{j}\cdot\boldsymbol{u}^{h})\mathbf{N}_{u,j} + (\nabla\boldsymbol{u}^{h})\mathbf{N}_{u} - \nu\mathbf{N}_{u,jj} \right]$$

$$(3.65)$$

e

$$\left[(\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{e}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \right] = \left[(\nabla \boldsymbol{w}^{h}) \boldsymbol{u}^{h} \right] \cdot \left[\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}_{e}} \nabla p^{h} \right]$$
$$= \left\{ \left[(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{w}_{e}) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \right] \boldsymbol{u}^{h} \right\}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{e}_{j} \otimes \mathbf{N}_{p,j})$$
$$= \mathbf{w}_{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_{u,i}^{\mathrm{T}} (\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) (\boldsymbol{e}_{j} \otimes \mathbf{N}_{p,j}).$$
(3.66)

Substituindo as expressões (3.66) em (3.63) e (3.65) e (3.64) em (3.62) e, em seguida, substituindo (3.62) e (3.61), após espalhamento, em (3.60), pode-se escrever a matriz tangente do problema (3.55) da seguinte forma

$$\mathbf{A}(\mathbf{d}) = \begin{bmatrix} \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} + \mathbf{C}_{\mathrm{T}}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K} & \overline{\mathbf{G}} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} \end{bmatrix},$$
(3.67)

onde \mathbf{C}_{T} e $\mathbf{\bar{G}}\,$ são dadas pelo espalhamento de suas respectivas matrizes locais

$$\mathbf{C}_{Te} = \int_{\Omega_{e}} \left\{ \mathbf{N}_{u}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u,i} + \mathbf{N}_{u}^{\mathrm{T}}(\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u} + \tau_{\mathrm{SUPG}} \left\{ \mathbf{N}_{u,i}^{\mathrm{T}} \mathcal{R}(\boldsymbol{u}^{h}) \boldsymbol{e}_{i}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_{u} + \mathbf{N}_{u,i}^{\mathrm{T}}(\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \left[\frac{\mathbf{N}_{u}}{\Delta t} + (\boldsymbol{e}_{j} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u,j} + (\nabla \boldsymbol{u}^{h}) \mathbf{N}_{u} - \nu \mathbf{N}_{u,jj} \right] \right\} d\Omega_{e}$$

$$(3.68)$$

e

$$\bar{\mathbf{G}}_{e} = \mathbf{G}_{e} + \tau_{\text{SUPG}} \int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u,i}^{\text{T}} (\boldsymbol{e}_{i} \cdot \boldsymbol{u}^{h}) (\boldsymbol{e}_{j} \otimes \mathbf{N}_{p,j}) d\Omega_{e}.$$
(3.69)

3.9. Exemplos Numéricos

Nesta seção serão apresentados alguns exemplos numéricos com a finalidade de verificar a formulação apresentada até o momento.

Problema 3.2: Escoamento numa cavidade

Este é um problema clássico da literatura e consiste em se determinar o escoamento em regime estacionário em um domínio quadrado de lado unitário $\Omega = [0,1] \times [0,1]$ e com condições de contorno do tipo Dirichlet na velocidade em todo o contorno do problema, conforme ilustra a Figura 21. O número de Reynolds é dado por

$$\operatorname{Re} = \frac{u_1 l}{\nu},$$

onde l é o lado do quadrado. A velocidade horizontal u_1 imposta no contorno superior do domínio corresponde, portanto, ao próprio número de Reynolds do problema. A viscosidade e densidade do fluido são também mostradas na Figura 21. O domínio do problema foi discretizado com 2339 elementos finitos triangulares P2P1i conforme Figura 22.







Figura 22. Malha de elementos triangulares P2P1i utilizada no problema de escoamento numa cavidade. 1104 elementos e 2339 nós.

As figuras seguintes mostram alguns resultados obtidos com este elemento para número de Reynolds 1, 100, 400 e 1000. O campo de pressões para este problema vale zero em quase todo o domínio, possuindo duas singularidades nos cantos superiores. Por esta razão a malha é bastante refinada nestes cantos.



Figura 23. Vetores de velocidade, linhas de corrente e campo de pressões para Re=1.



Figura 24. Linhas de corrente superpostas ao campo de velocidades. Re=100, 400 e 1000.

Note que, à medida que o número de Reynolds aumenta de 1 até 100, a posição do vórtice principal se desloca para a direita e surge um vórtice secundário no canto inferior direito. Aumentando o Reynolds até 400 e 1000, o vórtice principal tende a retornar a linha média vertical, porém numa posição mais abaixo comparada com Re=1. Há também o aparecimento de um terceiro vórtice no canto inferior esquerdo quando se atinge Re=1000. As posições dos vórtices principais para Re=100, 400 e 1000 são mostradas na Tabela 1 e comparadas com resultados da literatura. Na Figura 25 são mostrados os gráficos da velocidade horizontal (u), normalizada pelo número de Reynolds, ao longo da linha vertical média (x=0,5) para os diferentes regimes de escoamento.

		x_1	x_{2}
Re=100	Presente estudo	0,614	0,736
	Donea e Huerta (2003)	0,620	0,740
	Tuann e Olson (1978)	0,610	0,722
Re=400	Presente estudo	0,558	0,605
	Donea e Huerta (2003)	0,568	0,606
	Tuann e Olson (1978)	0,506	0,583
Re=1000	Presente estudo	0,533	0,565
	Donea e Huerta (2003)	0,540	0,573
	Ozawa (1975)	0,533	0,569

Tabela 1. Posição do vórtice principal para Re=100, 400 e 1000.



Figura 25. Velocidades horizontais ao longo da linha vertical média. À esquerda, resultados obtidos com o elemento P2P1i; à direita, resultados de Donea e Huerta (2003) [84].

A convergência do método de Newton-Raphson também foi investigada com o objetivo de validar a formulação do problema tangente descrito na seção 3.8. Os gráficos do erro da velocidade e da pressão em função da iteração são mostrados na Figura 26 para Re=100. Os dados utilizados nos gráficos da Figura 26 são listados na Tabela 2.



Figura 26. Convergência do método de Newton-Raphson para Re=100.

Iteração	Erro em $oldsymbol{u}$	Erro em p	
1	2.227E-01	4.601E-01	
2	2.420E-02	4.630E-02	
3	2.616E-04	1.200E-03	
4	5.783E-08	1.697E-07	
5	2.751E-15	5.213E-15	

Tabela 2. Convergência do método de Newton-Raphson para Re=100.

Problema 3.3: Escoamento em torno de um cilindro

Este é um exemplo clássico da literatura e pode ser encontrado em diversas referências bibliográficas. Ver [50,43,92,93], por exemplo. Entretanto, para fins de verificação da formulação apresentada até o momento, os parâmetros da referência [93] serão utilizados, uma vez que esta referência reúne vários resultados de simulações do problema realizadas por diversos grupos de pesquisa em atividade. O escoamento se dá através de um canal estreito, ver Figura 27, de comprimento L = 2,2 m e altura H = 0,41 m, com origem do sistema de referência no canto inferior esquerdo. Próximo à entrada do canal, há um obstáculo de seção circular com raio r = 0,05 m e centro posicionado nas coordenadas C = (0,20;0,20).



Figura 27. Escoamento em torno de um cilindro. Desenho esquemático do Problema 3.3.

A velocidade na entrada do canal tem perfil parabólico dado por

$$\boldsymbol{u}(0, x_2) = \begin{bmatrix} 4U_m x_2(H - x_2) / H^2 & 0 \end{bmatrix}^T$$

onde o vetor posição é dado por $x = x_i e_i$ e U_m é a velocidade máxima na entrada do canal. O número de Reynolds e de Strouhal são definidos neste exemplo, respectivamente, como

$$Re = \frac{\overline{U}D}{\nu}$$
 e $St = \frac{fD}{\overline{U}}$,

com a velocidade média \overline{U} na entrada do canal definida por

$$\bar{U} = \frac{2\boldsymbol{u}(0, H/2)}{3},$$

com *D* sendo o diâmetro do cilindro e *f* a frequência de desprendimento dos vórtices em s⁻¹. ν é a viscosidade cinemática do fluido, já definida anteriormente. A velocidade no topo e na base do canal vale zero. A saída do canal é assumida como uma fronteira aberta, ou seja, com tensão nula aplicada. A densidade e a viscosidade cinemática do fluido valem $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$ e $\nu = 10^{-3} \text{ m}^2/\text{s}$, respectivamente. A simulação é feita para duas situações de escoamento: estacionário e transiente. Os parâmetros do problema para essas condições são mostrados na Tabela 3.

	Estacionário	Transiente
$\rho \ [kg/m^3]$	1	1
$\nu [10^{-3} \mathrm{m}^2/\mathrm{s}]$	1	1
$U_m [{ m m/s}]$	0,3	1,5
Re	20	100

Tabela 3. Parâmetros do fluido para escoamento estacionário e transiente do Problema 3.3.

Dois tipos de elementos foram utilizados para obtenção dos resultados que serão mostrados mais adiante: P2P1 e P2P1i. A malha utilizada, ver Figura 28, foi a mesma em todas as simulações.



Figura 28. Malha do fluido utilizada na simulação de escoamento em torno de um cilindro do Problema 3.3. 3848 elementos triangulares e 7952 nós.

O método de Newton-Raphson foi forçado a executar pelo menos duas iterações para solução do sistema. Da Figura 29 à Figura 31, são mostrados alguns resultados do escoamento estacionário (Re=20) para uma avaliação qualitativa dos resultados. Visualmente, não há diferença entre os resultados obtidos com o elemento P2P1 e o P2P1i.



Figura 29. Campo de velocidades para Re=20. Resultados obtidos com o elemento P2P1.



Figura 30. Campo de pressão para Re=20. Resultados obtidos com o elemento P2P1.



Figura 31. Vetores de velocidade próximos ao cilindro (esquerda) e tensões na superfície do cilindro (direita). Re=20. Resultados obtidos com o elemento P2P1.

Para uma avaliação mais quantitativa, foram calculados os coeficientes de sustentação c_L e de arrasto c_D definidos por

$$c_L = \frac{2F_v}{\rho \overline{U} D} \quad \mathbf{e} \quad c_D = \frac{2F_h}{\rho \overline{U} D}, \tag{3.70}$$

onde F_v e F_h são, respectivamente, a resultante vertical e horizontal da força que atua no cilindro. Foram calculados também a diferença de pressão entre o ponto de estagnação à montante do cilindro $\boldsymbol{x} = (0,15 \quad 0,20)^T$ e o bordo de fuga do mesmo em $\boldsymbol{x} = (0,25 \quad 0,20)^T$ e o comprimento da região de recirculação ou de formação dos vórtices L_{α} . Esses resultados estão listados na Tabela 4.

	c_L	c_D	ΔP	L_{lpha}
Presente trabalho (P2P1)	0,0102	5,5921	0,1178	0,0845
Presente trabalho (P2P1i)	0,0110	5,6336	0,1183	0,0851
[R. Rannacher, S. Turek]	0,0106	5,5755	0,1173	0,0780

Tabela 4. Comparação dos resultados obtidos com os elementos P2P1 e P2P1i e resultados de [93] para o caso de escoamento estacionário do Problema 3.3.

Percebe-se, dos resultados apresentados na Tabela 4, muito boa concordância com os resultados da literatura, à exceção dos valores de L_{α} calculados com os elementos P2P1 e P2P1i. O autor desconhece uma definição precisa do comprimento de recirculação, tendo o mesmo sido estimado graficamente e, portanto, não se esperava boa concordância deste resultado com o resultado da literatura. No caso do escoamento transiente, o tempo foi discretizado em diversos intervalos diferentes a fim de se analisar o desempenho do método de integração apresentado em 3.4. O método de Newton-Raphson novamente foi forçado a executar pelo menos duas iterações por incremento de tempo. Da Figura 32 à Figura 34, são mostrados alguns resultados de velocidade, pressão e tensão na superfície do cilindro, novamente para fins de análise qualitativa. Os resultados mostram o escoamento após o desprendimento alternado de vórtices se estabilizar e assumir um comportamento periódico. Mais uma vez, não há distinção visual entre os resultados obtidos com os elementos P2P1 e P2P1i.



Figura 32. Campo de velocidades para Re=100. Resultados obtidos com o elemento P2P1i.



Figura 33. Contornos de pressão para Re=100. Resultados obtidos com o elemento P2P1i.



Figura 34. Vetores de velocidade próximos ao cilindro (esquerda) e tensões na superfície do cilindro (direita) para Re=100. Resultados obtidos com o elemento P2P1i.

Os coeficientes de arrasto e de sustentação também foram computados ao longo do tempo e seus gráficos são mostrados na Figura 35. A Tabela 5, na sequência, compara os coeficientes de arrasto e sustentação máximos e o número de Strouhal após estabilizar o regime periódico de desprendimento de vórtices com resultados da literatura.



Figura 35. Coeficientes de arrasto (C_D) e sustentação (C_L) em função do tempo para o caso de escoamento transiente do Problema 3.3 (Re=100).

	C _{Dmax}	C_{Lmax}	St
Presente estudo (P2P1)	3,2450	1,0369	0,3008
Presente estudo (P2P1i)	3,3038	1,0746	0,3008
[R. Rannacher, S. Turek]	3,2300	1,0000	0,3000

Tabela 5. Comparação dos resultados obtidos com os elementos P2P1 e P2P1i e resultados de [93] para o caso deescoamento transiente do Problema 3.3.

A convergência dos resultados da Tabela 5, à medida que o incremento de tempo decresce, é mostrada nos gráficos das figuras a seguir.



Figura 36. Convergência do coeficiente de arrasto (C_D) em função do incremento de tempo Δt e do parâmetro γ de integração do Método de Newmark para o caso de escoamento transiente do Problema 3.3.



Figura 37. Convergência do coeficiente de sustentação (C_L) em função do incremento de tempo Δt e do parâmetro γ de integração do Método de Newmark para o caso de escoamento transiente do Problema 3.3.



Figura 38. Convergência do número de Strouhal (St) em função do incremento de tempo Δt e do parâmetro γ de integração do Método de Newmark para o caso de escoamento transiente do Problema 3.3.

Neste Capítulo, a formulação do problema de escoamento incompressível de fluidos Newtonianos descrito pelas Equações de Navier-Stokes e sua implementação computacional usando o Método dos Elementos Finitos foram apresentadas. Questões essenciais como a estabilização da condição LBB, estabilização da convecção e integração no tempo foram discutidas e diversos exemplos numéricos foram resolvidos com o objetivo de verificar o conteúdo exposto. Os resultados obtidos nas simulações numéricas mostraram muito boa concordância com resultados da literatura e algumas conclusões podem ser destacadas:

- ✓ A etapa inicial deste trabalho obtenção de um programa para simulação computacional de problemas da Mecânica dos Fluidos foi concluída com sucesso;
- ✓ Em problemas de IFE, deve-se utilizar o termo viscoso definido por (3.20) para garantir consistência no cálculo das tensões provenientes do problema fluido na interface com a estrutura;
- ✓ O elemento triangular P2P1i, proposto neste trabalho, fornece resultados comparáveis aos elementos Taylor-Hood P2P1 e Q2Q1, porém a um custo de se estabilizar a condição LBB. Este custo, entretanto, é muito baixo devido ao grau dos polinômios de interpolação deste elemento;
- ✓ Ao discretizar o tempo, deve-se optar por métodos de segunda ordem. Os resultados de convergência no tempo do Problema 3.3 mostram que a utilização de um método de primeira ordem exige intervalos de tempo muito pequenos para se atingir precisão satisfatória. Note que a convergência dos coeficientes da Figura 36 à Figura 38 está diretamente relacionada com a convergência das tensões e da frequência de oscilação das mesmas, resultados estes de extrema importância em problemas de IFE.

4. O Problema Estrutural

A formulação do problema estrutural descrita aqui utiliza uma abordagem Lagrangiana usual. A cinemática é apresentada de forma exata e, portanto, o modelo é capaz de simular estruturas sujeitas a grandes deslocamentos e deformações. O modelo constitutivo adotado é não linear elástico e utiliza o material Neo-Hookiano de Ciarlet-Simo.

4.1. Problema estático

Considere um sólido deformável que ocupa uma região Ω^r do espaço físico na configuração de referência. Na configuração atual ou deformada, este mesmo sólido ocupa a região Ω do espaço, conforme ilustra a Figura 39.



Figura 39. Transformação de um sólido da configuração de referência \varOmega^r para a configuração deformada \varOmega .

O contorno do sólido, nestas configurações, é definido por Γ^r e Γ , respectivamente. O gradiente da transformação é definido por

$$\boldsymbol{F} = \nabla \boldsymbol{x} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{x}^r},\tag{4.1}$$

onde $x e x^r$ são os vetores posição de um mesmo ponto material nas configurações atual e de referência, respectivamente. O tensor F pode também ser escrito em função dos seus vetorescoluna:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{f}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{f}_3 \end{bmatrix}.$$
(4.2)

Os deslocamentos u são dados por²

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}^r, \tag{4.3}$$

e o gradiente dos deslocamentos por

$$\boldsymbol{L} = \nabla \boldsymbol{u} = \frac{\partial \boldsymbol{u}}{\partial \boldsymbol{x}^r}.$$
(4.4)

Da mesma forma que em (4.2), o gradiente dos deslocamentos pode ser escrito como

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{\gamma}_i \otimes \boldsymbol{e}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\gamma}_3 \end{bmatrix}.$$
(4.5)

O problema estático da teoria não linear da elasticidade pode então ser formulado por

$$div P + b^{r} = 0 \quad em \ \Omega^{r},$$

$$u = \overline{u} \qquad em \ \Gamma_{u}^{r},$$

$$Pn^{r} = \overline{t}^{r} \qquad em \ \Gamma_{t}^{r},$$
(4.6)

onde P é o Primeiro Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff, que associa o vetor tensão relativo à configuração de referência t^r com o vetor unitário normal n^r a uma superfície nesta configuração através de

$$\boldsymbol{t}^{r} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^{r}. \tag{4.7}$$

² Note que u também foi definido como sendo a velocidade do fluido. Quando necessário, serão utilizados índices e u^{f} e u^{s} para identificar grandezas relativas ao fluido e à estrutura, respectivamente.

O vetor b^r representa as forças de volume por unidade de volume da configuração de referência. Analogamente ao problema de fluidos, a barra sobre as variáveis indica que seus valores são prescritos no contorno do problema. O Primeiro Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff é dado por

$$P = FS, (4.8)$$

onde S é o Segundo Tensor das Tensões de Piola-Kirchhoff.

4.2. Modelo constitutivo Neo-Hookiano de Ciarlet-Simo

Este modelo constitutivo possui o Potencial de Energia de Deformação Específica dado por [94,95]

$$\psi(J,I) = \frac{1}{2}\lambda \left[\frac{1}{2}(J^2 - 1) - \ln(J)\right] + \frac{1}{2}\mu(I - 3 - 2\ln(J)),\tag{4.9}$$

onde $J = \det(\mathbf{F})$, $I = \mathbf{f}_i \cdot \mathbf{f}_i$ e λ e μ são os coeficientes generalizados de Lamé dados por

$$\lambda = \frac{E\nu}{\left(1 - 2\nu\right)\left(1 + \nu\right)} \quad e \quad \mu = \frac{E}{2\left(1 + \nu\right)} \tag{4.10}$$

em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν . Escrevendo o Primeiro Tensor de Piola-Kirchhoff como

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\tau}_i \otimes \boldsymbol{e}_i, \tag{4.11}$$

temos que

$$\boldsymbol{\tau}_{i} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{i}} = \frac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{f}_{i}}.$$
(4.12)

Usando a regra da cadeia na expressão anterior, obtém-se

$$\boldsymbol{\tau}_{i} = \frac{\partial \psi}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{f}_{i}} + \frac{\partial \psi}{\partial I} \frac{\partial I}{\partial \boldsymbol{f}_{i}}, \qquad (4.13)$$

onde

$$\frac{\partial \psi}{\partial J} = \left(\frac{1}{2}\lambda(J^2 - 1) - \mu\right)J^{-1}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial I} = \frac{1}{2}\mu, \tag{4.14}$$

$$\frac{\partial J}{\partial f_1} = g_1 = f_2 \times f_3, \qquad \frac{\partial J}{\partial f_2} = g_2 = f_3 \times f_1, \qquad \frac{\partial J}{\partial f_3} = g_3 = f_1 \times f_2 \quad e \quad (4.15)$$

$$\frac{\partial I}{\partial f_i} = 2f_i. \tag{4.16}$$

Substituindo as expressões (4.14) a (4.16) em (4.13), tem-se que

$$\boldsymbol{\tau}_{i} = \left(\frac{1}{2}\lambda(J^{2}-1) - \mu\right)J^{-1}\boldsymbol{g}_{i} + \mu\boldsymbol{f}_{i}.$$
(4.17)

Os vetores g_i podem ser escritos de maneira mais compacta com ajuda do símbolo de permutação cíclica ε_{ijk} da seguinte forma

$$\boldsymbol{g}_{i} = \frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{f}_{j} \times \boldsymbol{f}_{k}, \qquad (4.18)$$

ou

$$\boldsymbol{g}_i = -\frac{1}{2} \varepsilon_{ijk} \boldsymbol{F}_k \boldsymbol{f}_j, \text{ com } \boldsymbol{F}_k = \text{Skew}(\boldsymbol{f}_k).$$
 (4.19)

Para obtenção dos termos da matriz de rigidez tangente do problema não linear, que serão apresentados mais adiante no texto, faz-se necessário calcular

$$C_{ij} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \boldsymbol{\gamma}_j} = \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_i}{\partial \boldsymbol{f}_j} =$$

$$= \left[\frac{1}{2}\lambda(1+J^{-2}) + \mu J^{-2}\right]\boldsymbol{g}_i \otimes \boldsymbol{g}_j + \left[\frac{1}{2}\lambda(J^{-1}-J^1) + \mu J^{-1}\right]\varepsilon_{ijk}\boldsymbol{F}_k + \mu\delta_{ij}\boldsymbol{I},$$
(4.20)

que são os tensores dos módulos elásticos de rigidez tangente para o par [F, P].

4.3. Forma fraca

De forma semelhante à Seção 3.2, a equação de conservação do momento em (4.6) pode ser reescrita em sua forma integral como

$$\int_{\Omega^r} \left(\operatorname{div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r \right) \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r = 0, \quad \delta \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$
(4.21)

 $\mathcal{S} \in \mathcal{V}$ são, novamente, os subespaços das funções de aproximação e das funções peso, respectivamente. Aplicando o teorema do divergente ao termo de tensão na equação anterior, tem-se

$$\int_{\Omega^{r}} (\operatorname{div} \boldsymbol{P}) \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^{r} = \int_{\Gamma^{r}} (\boldsymbol{P} \boldsymbol{n}^{r}) \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Gamma^{r} - \int_{\Omega^{r}} \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{u} d\Omega^{r}.$$
(4.22)

Valendo-se da relação (4.7) e substituindo (4.22) em (4.21), pode-se enunciar o problema descrito por (4.6) de forma equivale como se segue. Encontrar $u(x) \in S$ tal que para todo $\delta u \in \mathcal{V}$ tenha-se

$$\int_{\Omega^r} \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r = \int_{\Gamma^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Gamma^r + \int_{\Omega^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r, \quad \forall \ \delta \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$
(4.23)

A equação (4.23) é a forma fraca do problema estático da teoria da elasticidade não linear. Note que o lado esquerdo da equação (4.23) é comumente identificado, no contexto da Mecânica das Estruturas, como o trabalho virtual dos esforços internos e pode também ser escrito como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega^r} \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r = \int_{\Omega^r} \boldsymbol{P} : \delta \boldsymbol{F} d\Omega^r = \int_{\Omega^r} \boldsymbol{\tau}_i \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}_i d\Omega^r, \qquad (4.24)$$

onde $\delta F = \nabla \delta u$ é o gradiente dos deslocamentos virtuais. O lado direito de (4.23), por sua vez, é o trabalho virtual dos esforços externos:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Gamma^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Gamma^r + \int_{\Omega^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r.$$
(4.25)

Substituindo (4.24) e (4.25) em (4.23), podemos escrever que

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0, \quad \forall \ \delta u \in \mathcal{V}.$$
(4.26)

Ou seja, o trabalho virtual dos esforços internos é igual ao trabalho virtual dos esforços externos para qualquer campo de deslocamento virtual δu de um sólido que satisfaz a equação de equilíbrio

$$\operatorname{div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \boldsymbol{0} \ \operatorname{em} \ \Omega^r$$

e as condições de contorno

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{n}^r = \overline{\boldsymbol{t}}^r \;\; \mathrm{em} \;\; \Gamma_t^r$$

na fronteira natural. Pode-se mostrar facilmente que esta implicação matemática é também uma equivalência e este resultado constitui o Teorema dos Trabalhos Virtuais.

4.4. Discretização do espaço por elementos finitos

As funções de aproximação do deslocamento são dadas por

$$\boldsymbol{u}^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N} \mathbf{u}_{e}, \qquad (4.27)$$

onde N é a matriz das funções de forma ou de interpolação local do elemento finito e \mathbf{u}_e o vetor dos deslocamentos nodais local dados por

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \mathbf{I} & N_2 \mathbf{I} & \cdots & N_n \mathbf{I} \end{bmatrix} \mathbf{e}$$
$$\mathbf{u}_e = \begin{bmatrix} u_1 & v_1 & w_1 & u_2 & v_2 & w_2 & \cdots & u_n & v_n & w_n \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$

onde n é o número de nós do elemento e u, v e w as componentes do deslocamento nas três direções ortonormais do sistema de referência. A função peso, identificada como os deslocamentos virtuais em (4.24), é aproximada usando as mesmas funções de (4.27), ou seja,

$$\delta \boldsymbol{u}^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_{e}, \qquad (4.28)$$

de modo que tenhamos uma formulação de elementos finitos com projeções de Galerkin usuais. O gradiente dos deslocamentos virtuais de um elemento pode então ser escrito como

$$\nabla \delta \boldsymbol{u}_{e} = \mathbf{B} \mathbf{u}_{e},$$

com

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} N_{1,1} \mathbf{I} & N_{2,1} \mathbf{I} & \cdots & N_{n,1} \mathbf{I} \\ N_{1,2} \mathbf{I} & N_{2,2} \mathbf{I} & \cdots & N_{n,2} \mathbf{I} \\ N_{1,3} \mathbf{I} & N_{2,3} \mathbf{I} & \cdots & N_{n,3} \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Note que também podemos escrever as colunas do gradiente dos deslocamentos virtuais como

$$\delta \boldsymbol{\gamma}_i = \mathbf{N}_{,i} \delta \mathbf{u}_e, \tag{4.29}$$

com

$$\mathbf{N}_{,i} = \begin{bmatrix} N_{1,i} \mathbf{I} & N_{2,i} \mathbf{I} & \cdots & N_{n,i} \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

Os vetores-coluna do gradiente da transformação de um elemento também são facilmente escritos como

$$\mathbf{f}_i = \mathbf{N}_{i} \mathbf{x}_e, \tag{4.30}$$

onde \mathbf{x}_{e} é o vetor posição nodal do elemento na configuração deformada.

4.5. Equilíbrio

O trabalho virtual dos esforços internos calculado no domínio de um elemento finito será dado por

$$\delta W_{\text{int}}^{e} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \boldsymbol{\tau}_{i} \cdot \delta \boldsymbol{\gamma}_{i} d\Omega_{e}^{r} = \delta \mathbf{u}_{e}^{\text{T}} \int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}_{,i}^{\text{T}} \boldsymbol{\tau}_{i} d\Omega_{e}^{r}, \qquad (4.31)$$

onde a integral na última expressão pode ser definida como o vetor de esforços nodais local do elemento dado por

$$\mathbf{R}_{\text{int}}^{e} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}_{,i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{\tau}_{i} \, d\Omega_{e}^{r}.$$
(4.32)

`

O trabalho virtual dos esforços externos em um elemento, por sua vez, será dado por

$$\delta W_{\text{ext}}^{e} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \boldsymbol{b} \cdot \delta \boldsymbol{u}^{h} d\Omega_{e}^{r} + \int_{\Gamma_{e}^{r}} \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \delta \boldsymbol{u}^{h} d\Gamma_{e}^{r} = \delta \mathbf{u}_{e}^{\mathsf{T}} \Biggl(\int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{b} d\Omega_{e}^{r} + \int_{\Gamma_{e}^{r}} \mathbf{N}^{\mathsf{T}} \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{e}^{r} \Biggr), \quad (4.33)$$

onde

$$\mathbf{R}_{\text{ext}}^{e} = \left(\int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{b} d\Omega_{e}^{r} + \int_{\Gamma_{e}^{r}} \mathbf{N}^{\mathrm{T}} \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{e}^{r} \right)$$
(4.34)

é o vetor dos esforços nodais externos do elemento. Os vetores globais dos esforços nodais internos e externos podem ser obtidos a partir do espalhamento de seus respectivos vetores locais, ou seja,

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \mathbf{R}_{\text{int}}^{e} \quad \mathbf{e} \quad \mathbf{R}_{\text{ext}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \mathbf{R}_{\text{ext}}^{e}.$$
(4.35)

Os trabalhos virtuais interno e externo da estrutura podem ser escritos agora como

$$\delta W_{\rm int} = \delta \mathbf{r}^{\rm T} \mathbf{R}_{\rm int} \ \mathbf{e} \ \delta W_{\rm ext} = \delta \mathbf{r}^{\rm T} \mathbf{R}_{\rm ext}, \qquad (4.36)$$

onde $\delta \mathbf{r}$ é o vetor dos deslocamentos virtuais nodais global da estrutura dado por

$$\delta \mathbf{r} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathsf{T}} \delta \mathbf{u}_e.$$

Aplicando agora o Teorema dos Trabalhos Virtuais, tem-se que

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \delta \mathbf{r}^T (\mathbf{R}_{\text{int}} - \mathbf{R}_{\text{ext}}) = 0, \quad \forall \ \delta \mathbf{r}$$
(4.37)

e portanto

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{int}} - \mathbf{R}_{\text{ext}} = \mathbf{0}, \tag{4.38}$$

onde \mathbf{R} é definido como vetor das forças resultantes nodais.

4.6. O problema tangente

O sistema de equações que resulta de (4.38) é não linear e precisa ser resolvido por algum método numérico. Neste trabalho será adotado o Método de Newton-Raphson para solução de sistemas não lineares, sendo para isso necessário o cálculo da matriz de rigidez tangente do problema. A solução do problema (4.38) é obtida de forma iterativa por

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\mathbf{r}_k)\mathbf{\delta} = -\mathbf{R}(\mathbf{r}) \\ \mathbf{r}_{k+1} = \mathbf{r}_k + \mathbf{\delta}, \end{cases}$$
(4.39)

onde k é o número da iteração e

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}_{k}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{R}(\mathbf{r}) \Big|_{k}$$
(4.40)

é a matriz de rigidez tangente do problema obtida como se segue. A derivada de (4.38) em relação ao vetor dos deslocamentos nodais é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{R} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}} \mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{int}}^{e}}{\partial \mathbf{u}_{e}} \frac{\partial \mathbf{u}_{e}}{\partial \mathbf{r}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \frac{\partial \mathbf{R}_{\text{int}}^{e}}{\partial \mathbf{u}_{e}} \mathbf{A}_{e}.$$
(4.41)

A derivada parcial na última expressão é a matriz de rigidez tangente de um elemento e pode ser calculada por

$$\mathbf{K}_{Te} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}_{,i}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{i}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{j}} \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}_{j}}{\partial \mathbf{u}_{e}} d\Omega_{e}^{r} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}_{,i}^{\mathrm{T}} \frac{\partial \boldsymbol{\tau}_{i}}{\partial \boldsymbol{\gamma}_{j}} \mathbf{N}_{,j} d\Omega_{e}^{r}.$$
(4.42)

Com ajuda de (4.20),

$$\mathbf{K}_{Te} = \int_{\Omega_e^r} \mathbf{N}_{,i}^{\mathrm{T}} \boldsymbol{C}_{ij} \mathbf{N}_{,j} d\Omega_e^r.$$
(4.43)

Finalmente, a matriz de rigidez tangente do problema é obtida espalhando-se a matriz de rigidez do elemento

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathsf{T}} \mathbf{K}_{Te} \mathbf{A}_e.$$
(4.44)

4.7. Problema dinâmico

Reescrevendo o problema estático definido em (4.6) e acrescentando a este as forças de inércia e condições iniciais, obtemos o problema dinâmico da teoria não linear da elasticidade em sua forma forte dado por

$$div \mathbf{P} + \mathbf{b}^{r} = \rho^{r} \ddot{\mathbf{u}} \quad \text{em } \Omega^{r},$$

$$\mathbf{u} = \overline{\mathbf{u}} \qquad \text{em } \Gamma_{u}^{r},$$

$$\mathbf{Pn}^{r} = \overline{\mathbf{t}}^{r} \qquad \text{em } \Gamma_{t}^{r},$$

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_{0} \qquad \text{em } \Omega^{r} \text{ e } t = 0,$$

$$(4.45)$$

onde ρ^r é a massa específica do sólido na configuração de referência.

4.8. Forma fraca

Escrevendo a equação de conservação do momento em (4.45) na sua forma integral, tem-se

$$\int_{\Omega^r} \left(\operatorname{div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r - \rho^r \boldsymbol{\ddot{u}} \right) \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r = 0, \quad \forall \ \delta \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}.$$
(4.46)

Valendo-se da relação (4.7) e substituindo (4.22) em (4.46), pode-se enunciar o problema descrito por (4.45) de forma equivale como: encontrar $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t) \in \boldsymbol{S} \times [0,T]$ tal que para todo $\delta \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}$ tenha-se

$$\int_{\Omega^r} \boldsymbol{P} : \nabla \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r + \int_{\Omega^r} \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r = \int_{\Gamma^r} \boldsymbol{t}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Gamma^r + \int_{\Omega^r} \boldsymbol{b}^r \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r, \quad \forall \ \delta \boldsymbol{u} \in \boldsymbol{\mathcal{V}}. (4.47)$$

A expressão (4.47) é a forma fraca do problema dinâmico da teoria da elasticidade não linear. Note que, em relação à forma fraca do problema estático, surge um termo adicional do lado esquerdo da equação (4.47) que é definido, dentro do contexto do Teorema dos Trabalhos Virtuais, como a variação virtual da energia cinética, dada por

$$\delta T = \int_{\Omega^r} \rho^r \ddot{\boldsymbol{u}} \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Omega^r.$$
(4.48)

Usando as definições de trabalhos virtuais dos esforços internos e externos em (4.24) e (4.25), respectivamente, podemos escrever que

$$\delta W_{\text{ext}} = \delta W_{\text{int}} + \delta T, \quad \forall \ \delta u \in \mathcal{V}.$$
(4.49)

Ou seja, o trabalho virtual dos esforços externos é igual ao trabalho virtual dos esforços internos mais a variação virtual da energia cinética para qualquer campo de deslocamento virtual δu de um sólido que satisfaz a equação local do movimento

$$\operatorname{div} \boldsymbol{P} + \boldsymbol{b}^r = \rho^r \boldsymbol{\ddot{u}} \ \operatorname{em} \ \Omega^r$$

e as condições de contorno

$$Pn^r = \overline{t}^r \text{ em } \Gamma_t^r$$

na fronteira natural.

4.9. Discretização por elementos finitos

O discretização espacial por elementos finitos do problema dinâmico é idêntica ao exposto na Seção 4.4 com acréscimo do termo de inércia definido em (4.48). As funções de aproximação da aceleração e da função peso são dadas por

$$\ddot{\boldsymbol{u}}^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}_{e}, \quad \delta \boldsymbol{u}^{h}(\boldsymbol{x}) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_{e}, \qquad (4.50)$$

onde Né a matriz das funções de forma do elemento finito já definida anteriormente e $\ddot{\mathbf{u}}_e$ o vetor das acelerações nodais do elemento. A variação virtual da energia cinética de um elemento finito pode ser escrita então como

$$\delta T^{e} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \rho^{r} \mathbf{N} \ddot{\mathbf{u}}^{e} \cdot \mathbf{N} \delta \mathbf{u}_{e} d\Omega_{e}^{r} = \delta \mathbf{u}_{e}^{T} \int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}^{T} \rho^{r} \mathbf{N} d\Omega_{e}^{r} \ddot{\mathbf{u}}_{e}, \qquad (4.51)$$

onde a última integral da equação (4.51) é a matriz de massa local do elemento definida por

$$\mathbf{M}_{e} = \int_{\Omega_{e}^{r}} \mathbf{N}^{T} \rho^{r} \mathbf{N} d\Omega_{e}^{r}.$$
(4.52)

Substituindo (4.52) em (4.51), tem-se

$$\delta T^e = \delta \mathbf{u}_e^T \mathbf{M}_e \ddot{\mathbf{u}}_e, \tag{4.53}$$

que pode ser espalhado para se obter a variação virtual da energia cinética de toda a estrutura, ou seja,

$$\delta T = \delta \mathbf{r}^T \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_e \mathbf{A}_e^{\mathsf{T}} \mathbf{H} \mathbf{\ddot{r}} = \delta \mathbf{r}^T \mathbf{M} \mathbf{\ddot{r}}.$$
(4.54)

Na equação (4.54) acima, M é a matriz de massa global da estrutura, $\delta \mathbf{r}$ é o vetor dos deslocamentos virtuais nodais global da estrutura e $\ddot{\mathbf{r}}$ é o vetor das acelerações nodais global.

Aplicando agora o Teorema dos Trabalhos Virtuais para o problema dinâmico, equação (4.49) , obtém-se

$$\delta \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{\mathrm{ext}} = \delta \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mathbf{R}_{\mathrm{int}} + \delta \mathbf{r}^{\mathrm{T}} \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}, \quad \forall \ \delta \mathbf{r}.$$
(4.55)

Devido à arbitrariedade de $\delta \mathbf{r}$, a equação (4.55) é equivalente a

$$\mathbf{R}_{\text{ext}} = \mathbf{R}_{\text{int}} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}},\tag{4.56}$$

que é a equação do movimento da estrutura. Observe que este problema está na forma semidiscreta, uma vez que apenas o espaço foi discretizado. A discretização do tempo será feita na seção seguinte.

4.10. Integração no tempo

O algoritmo utilizado para discretizar no tempo a equação (4.47) foi o Método de Newmark [86], no qual o vetor dos deslocamentos nodais, \mathbf{r} , e o vetor das velocidades nodais, $\dot{\mathbf{r}}$, são dados pelas expressões

$$\mathbf{r}^{n+1} = \mathbf{r}^{n} + \dot{\mathbf{r}}^{n} \Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \beta \right) \ddot{\mathbf{r}}^{n} + \beta \ddot{\mathbf{r}}^{n+1} \right] \Delta t^{2},$$

$$\dot{\mathbf{r}}^{n+1} = \dot{\mathbf{r}}^{n} + \left[\left(1 - \gamma \right) \ddot{\mathbf{r}}^{n} + \gamma \ddot{\mathbf{r}}^{n+1} \right] \Delta t,$$
(4.57)

onde Δt é o incremento de tempo entre dois instantes 'n' e 'n + 1' consecutivos e β e γ os parâmetros do Método de Newmark. Reescrevendo a equação do movimento (4.56) para o instante de tempo 'n + 1', tem-se

$$\mathbf{R}_{\text{ext}}^{n+1} = \mathbf{R}_{\text{int}}^{n+1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}^{n+1}.$$
(4.58)

Ou, de forma mais compacta,

$$\mathbf{R}^{n+1} + \mathbf{M}\ddot{\mathbf{r}}^{n+1} = \mathbf{0},\tag{4.59}$$

4.11. O problema tangente

Novamente o sistema de equações que resulta de (4.59) é não linear e será resolvido pelo Método de Newton-Raphson. Reescrevendo o problema (4.59) na forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{d}) = \mathbf{0} \tag{4.60}$$

e considerando o vetor aceleração no instante 'n + 1' como incógnita do problema, ou seja,

$$\mathbf{d} = \left\{ \ddot{\mathbf{r}}^{n+1} \right\},\tag{4.61}$$

tem-se

$$\begin{cases} \mathbf{A}(\ddot{\mathbf{r}}_{k}^{n+1})\mathbf{\delta} = -\mathbf{R}(\ddot{\mathbf{r}}^{n+1}) \\ \ddot{\mathbf{r}}_{k+1}^{n+1} = \ddot{\mathbf{r}}_{k}^{n+1} + \mathbf{\delta}, \end{cases}$$
(4.62)

onde

$$\mathbf{A}(\ddot{\mathbf{r}}_{k}^{n+1}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{d}} \mathbf{F}(\mathbf{d}) \Big|_{k}$$
(4.63)

é a matriz de rigidez tangente do problema dinâmico. A derivada de (4.59), desta vez com relação ao vetor das acelerações nodais, será dada por

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{d}}\mathbf{F}(\mathbf{d}) = \frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{r}}^{n+1}} \Big(\mathbf{R}^{n+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}^{n+1} \Big) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{r}^{n+1}} \mathbf{R}_{\text{int}}^{n+1} \frac{\partial \mathbf{r}^{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{r}}^{n+1}} + \mathbf{M}.$$
 (4.64)

Da primeira expressão de (4.57), podemos escrever que

$$\frac{\partial \mathbf{r}^{n+1}}{\partial \ddot{\mathbf{r}}^{n+1}} = \beta \Delta t^2. \tag{4.65}$$
Substituindo agora (4.41), aplicado ao instante 'n + 1', e (4.65) em (4.64), obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial \ddot{\mathbf{r}}^{n+1}} \left(\mathbf{R}^{n+1} + \mathbf{M} \ddot{\mathbf{r}}^{n+1} \right) = \beta \Delta t^2 \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathsf{T}} \left(\frac{\partial \mathbf{R}_{\text{int}}^e}{\partial \mathbf{u}_e} \right)^{n+1} \mathbf{A}_e + \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^{\mathsf{T}} \mathbf{M}_e \mathbf{A}_e.$$
(4.66)

A matriz de rigidez tangente de um elemento, para o problema dinâmico, pode ser extraída de (4.66) e escrita como

$$\beta \Delta t^2 \mathbf{K}_{Te} + \mathbf{M}_e. \tag{4.67}$$

Finalmente, a matriz de rigidez tangente do problema é obtida espalhando-se a matriz de rigidez do elemento

$$\mathbf{A}(\ddot{\mathbf{r}}_{k}^{n+1}) = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \left(\beta \Delta \mathbf{t}^{2} \mathbf{K}_{Te} + \mathbf{M}_{e} \right) \mathbf{A}_{e}.$$
(4.68)

Muitas vezes, por problemas de instabilidade numérica, é desejável usar o vetor dos deslocamentos nodais \mathbf{r}^{n+1} como incógnita do problema (4.59). O desenvolvimento é análogo e obtém-se, ao final, a seguinte matriz tangente local:

$$\mathbf{K}_{Te} + \frac{1}{\beta \Delta t^2} \mathbf{M}_e. \tag{4.69}$$

4.12. O problema plano

A formulação do problema estrutural apresentada até o momento será particularizada para duas dimensões, nesta Seção, em virtude dos exemplos que serão apresentados mais adiante no texto. Esta particularização se faz impondo a hipótese cinemática

$$\gamma_3 = 0 \tag{4.70}$$

ao gradiente dos deslocamentos (4.5), que corresponde ao estado plano de deformação de um sólido. Dessa forma, temos

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\gamma}_1 & \boldsymbol{\gamma}_2 & \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}$$
(4.71)

e

$$\boldsymbol{F} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{f}_1 & \boldsymbol{f}_2 & \boldsymbol{e}_3 \end{bmatrix}. \tag{4.72}$$

Os vetores g_i , por sua vez, podem ser escritos como

$$g_1 = -\text{Skew}(e_3)f_2,$$

$$g_2 = \text{Skew}(e_3)f_1 \text{ e}$$
(4.73)

$$g_3 = f_1 \times f_2.$$

Observe que, uma vez que f_1 e f_2 estão no plano definido por e_1 e e_2 , o vetor g_3 tem componente não nula apenas na direção de e_3 . O cálculo dos tensores C_{ij} , ver equação (4.20), para os índices i e j variando de 1 a 2 resulta em

$$C_{11} = \left[\bar{\Phi}(J)\right] g_1 \otimes g_1 + \mu I,$$

$$C_{22} = \left[\bar{\Phi}(J)\right] g_2 \otimes g_2 + \mu I e$$

$$C_{12} = \left[\bar{\Phi}(J)\right] g_1 \otimes g_2 - \Phi(J) \text{Skew}(e_3).$$
(4.74)

Nas expressões (4.74), as funções $\overline{\varPhi}(J)$ e $\varPhi(J)$ são definidas por

$$\overline{\Phi}(J) = \frac{1}{2}\lambda(1+J^{-2}) + \mu J^{-2} \quad \text{e} \quad \Phi(J) = \left[\frac{1}{2}\lambda(J^2-1) - \mu\right]J^{-1}.$$
 (4.75)

5.0 Problema de Interação Fluido-Estrutura

Neste capítulo, será descrita a formulação usada para resolver o problema acoplado de Interação Fluido-Estrutura (IFE). Esta formulação utiliza o conceito de fronteiras imersas como alternativa às formulações ALE clássicas.

5.1. Introdução

A ideia básica está em se utilizar GFEM em conjunto com Multiplicadores de Lagrange para impor as condições de contorno na interface entre o fluido e a estrutura e foi originalmente proposta em [69] e [67]. Essa técnica permite que o problema fluido seja resolvido a partir de uma malha Euleriana fixa na qual os elementos intersectados pela fronteira da estrutura são enriquecidos de modo a prover as descontinuidades exigidas na velocidade e pressão. Além disso, em geral, a fronteira da estrutura não coincide com os nós da malha do fluido e, portanto, a velocidade do fluido nesta interface necessita ser imposta na forma fraca do problema. A fim de se formular o problema acoplado de IFE, algumas definições se fazem necessárias. Seja então Ω o domínio computacional que contém o domínio estrutural Ω^s e o domínio fluido Ω^f , sendo que este se estende parcial ou totalmente sobre o domínio Ω^s de modo que

$$\Omega^{f} \cap \Omega^{s} \neq \emptyset.$$

A Figura 40 ilustra os domínios do fluido e da estrutura que acabaram de ser definidos bem como seus respectivos vetores normais unitários n^f e n^s na interface Γ^i .



Figura 40. Definição dos domínios no problema acoplado.

A interface Γ^i , denominada aqui também de "superfície molhada", por sua vez, divide o domínio fluido em dois novos subconjuntos que serão chamados de Ω^+ e Ω^- , o segundo sem significado físico algum e chamado de domínio fictício. A decomposição de Ω^f em Ω^+ e Ω^- se dá através de uma bipartição por disjunção, ou seja,

$$\Omega^f = \Omega^+ \cup \Omega^- \quad \text{e} \quad \Omega^+ \cap \Omega^- = \varnothing.$$

A Figura 41 ilustra estes novos domínios.



Figura 41. Decomposição do domínio fluido em Ω^+ e Ω^- .

Vale lembrar que durante a computação numérica do problema, os elementos finitos de fluido pertencentes a Ω^- serão desativados, evitando assim um aumento desnecessário do custo computacional de processamento e memória necessária para resolver o problema.

5.2. Imposição das condições na interface

As condições que precisam ser satisfeitas na interface podem ser escritas como

$$\boldsymbol{u}^f = \dot{\boldsymbol{u}}^s \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \Gamma^i \tag{5.1}$$

e

$$T^f n^f = -T^s n^s \quad \forall \quad x \in \Gamma^i.$$
 (5.2)

A eq. (5.1) estabelece uma condição cinemática de aderência que consiste em velocidades do fluido e da estrutura iguais ao longo da interface enquanto que a eq. (5.2) é uma condição dinâmica, que impõe o equilíbrio de forças sobre Γ^i . Este equilíbrio de forças se resume a uma igualdade de tensões uma vez que a área da superfície na qual atuam estas forças é a mesma. O sinal contrário deve-se à orientação invertida dos vetores normais, de acordo com a Figura 40. Conforme já mencionado no Capítulo 4, os índices 's' e 'f' serão utilizados para distinguir as grandezas da estrutura e do fluido, respectivamente, e serão omitidos quando não houver necessidade.

5.3. O problema fluido com interfaces móveis

Se admitirmos que a transformação, ou movimento, da estrutura é conhecida *a priori*, o problema acoplado de IFE se reduz a um problema fluido com interfaces móveis. Dessa forma, podemos reescrever as condições (5.1) e (5.2) como

$$\boldsymbol{u}^f = \boldsymbol{\bar{u}}^i \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \boldsymbol{\Gamma}^+ \tag{5.3}$$

e

$$\overline{t}^f = 0 \quad \forall \quad x \in \Gamma^-, \tag{5.4}$$

onde o sinal positivo ou negativo de Γ refere-se por onde aproximamos da interface, se por Ω^+ ou Ω^- , respectivamente. \overline{u}^i é a velocidade da interface móvel. Note que com essas definições, tem-se condições de contorno de Dirichlet na interface de Ω^+ e condições de

contorno do tipo Neumann no contorno do domínio fictício Ω^- . Impondo ainda as seguintes condições iniciais ao domínio fictício do fluido

$$\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x},t=0) = \boldsymbol{0} \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \Omega^{-},$$

$$\boldsymbol{p}(\boldsymbol{x},t=0) = 0 \ \forall \ \boldsymbol{x} \in \Omega^{-},$$

(5.5)

e admitindo que não atuem forças de volume neste domínio, garante-se que não haverá escoamento em Ω^- durante toda a simulação do problema. Satisfazer as condições de (5.3) a (5.5), entretanto, requer campos de velocidade e pressão descontínuos. Este campo descontínuo será provido durante a discretização do problema no espaço. A imposição da condição (5.3) é feita via Multiplicadores de Lagrange (ver [69,70,96,67]). Pode-se então definir um funcional dado por

$$\pi = \int_{\Gamma^+} \lambda \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}^i) d\Gamma^+, \qquad (5.6)$$

onde λ representa os Multiplicadores de Lagrange da condição (5.3) e, portanto, constitui uma incógnita adicional ao problema. Por uma análise dimensional, conclui-se que λ é uma tensão aplicada ao longo de Γ^+ , possibilitando, por sua vez, atribuir uma intepretação física de uma tensão exercida pela interface imersa de modo que o escoamento do fluido satisfaça (5.3). A variação de (5.6) fornece

$$\delta \pi = \int_{\Gamma^+} \delta \lambda \cdot (\boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}^i) d\Gamma^+ + \int_{\Gamma^+} \lambda \cdot \delta \boldsymbol{u} d\Gamma^+.$$
(5.7)

Introduzindo, finalmente, os termos obtidos no contorno Γ^+ da equação (5.7) em (3.25), tem-se

$$\left\{ \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega^{f}} + \gamma \Delta t \left[c \left(\boldsymbol{u}; \boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega^{f}} + a \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}\right)_{\Omega^{f}} - \left(\operatorname{div} \boldsymbol{w}, p\right)_{\Omega^{f}} + \left(q, \operatorname{div} \boldsymbol{u}\right)_{\Omega^{f}} - \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{b}\right)_{\Omega^{f}} \right. \\ \left. - \left(\boldsymbol{w}, \overline{\boldsymbol{t}}\right)_{\Gamma_{t}} - \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{\lambda}\right)_{\Gamma^{+}} - \left(\delta \boldsymbol{\lambda}, \boldsymbol{u} - \overline{\boldsymbol{u}}^{i}\right)_{\Gamma^{+}} \right] \right\}^{n+1} = \left(\boldsymbol{w}, \boldsymbol{u}^{n}\right)_{\Omega^{f}} + (1 - \gamma) \Delta t \left(\boldsymbol{w}, \dot{\boldsymbol{u}}^{n}\right)_{\Omega^{f}},$$

$$(5.8)$$

onde a variação das velocidades δu foi substituída pela função peso w apenas por fim de uniformidade da notação.

Discretização do espaço por elementos finitos

Conforme mencionado anteriormente, a discretização do espaço precisa prover uma descontinuidade nos campos de velocidade e pressão dos elementos cortados pela interface Γ^i . Isso pode ser feito enriquecendo as funções de forma dos elementos da seguinte maneira

$$\boldsymbol{u}^{h}(\boldsymbol{x},t) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \phi(\boldsymbol{x},t) \mathbf{N}_{u} \mathbf{u}_{e}, \qquad p^{h}(\boldsymbol{x},t) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \phi(\boldsymbol{x},t) \mathbf{N}_{p} \mathbf{p}_{e},$$

$$\boldsymbol{w}^{h}(\boldsymbol{x},t) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \phi(\boldsymbol{x},t) \mathbf{N}_{u} \mathbf{w}_{e}, \qquad q^{h}(\boldsymbol{x},t) = \bigcup_{e=1}^{Nel} \phi(\boldsymbol{x},t) \mathbf{N}_{p} \mathbf{q}_{e},$$
(5.9)

onde $\phi(\mathbf{x}, t)$ é uma função degrau definida por

$$\phi(\boldsymbol{x},t) = \begin{cases} 1 \text{ se } \boldsymbol{x} \in \Omega^+ \\ 0 \text{ se } \boldsymbol{x} \in \Omega^-. \end{cases}$$
(5.10)

Note que para os elementos do domínio real do fluido, Ω^+ , não intersectados pela interface, as funções em (5.9) se reduzem às funções de aproximação e peso usuais definidas em (3.26). Vale ressaltar ainda que, como a interface estará em movimento durante um problema de IFE, a função degrau é função também do tempo. A Figura 42 mostra um exemplo de como seriam as funções de forma enriquecidas de um elemento quadrilateral biquadrático intersectado pela interface em dois lados opostos.



Figura 42. Funções de forma enriquecidas de um elemento quadrilateral biquadrático.

Discretização da interface

Os Multiplicadores de Lagrange λ e sua função teste $\delta\lambda$ precisam ser discretizados ao longo da interface Γ^i . Uma maneira intuitiva de se fazer isso é definindo nós nas interseções entre a interface e os lados dos elementos da malha do fluido, conforme sugerido em [67]. A Figura 43 ilustra de forma esquemática como a interface é discretizada nesta abordagem. Os Multiplicadores de Lagrange são portanto aproximados por funções de forma que utilizam os nós simbolizados por triângulos na Figura 43 para interpolação.

Dessa forma, as funções de aproximação e teste dos Multiplicadores de Lagrange podem ser definidas por

$$\boldsymbol{\lambda}^{h} = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N}_{\lambda} \boldsymbol{\lambda}_{e} \quad \mathbf{e} \quad \delta \boldsymbol{\lambda}^{h} = \bigcup_{e=1}^{Nel} \mathbf{N}_{\lambda} \delta \boldsymbol{\lambda}_{e}.$$
(5.11)



Figura 43. Discretização da interface definindo nós na interseção entre Γ^i e elementos de fluido.

A discretização da interface mostrada na Figura 43 possui alguns inconvenientes com relação à implementação e instabilidade numérica, especialmente quando são utilizados elementos finitos com funções de interpolação de baixa ordem na formulação do problema fluido. Este fato já foi alertado em [67] e [70], uma vez que a combinação do subespaço de aproximação de λ com os subespaços da velocidade e pressão pode ser incompatível (LBB) e, por isso, gerar instabilidades numéricas. A alternativa sugerida neste trabalho é a construção de uma malha para interface independente da malha do fluido (técnica indicada em [96]) em conjunto com funções de aproximação descontínuas para interpolação dos Multiplicadores de Lagrange a fim de tornar flexível a escolha da dimensão do subespaço de aproximação destes e facilitar o cálculo dos termos a serem integrados ao longo da interface.



Figura 44. Discretização da interface usando funções descontínuas e constantes no interior dos elementos. A malha da interface é construída independente da malha do fluido.

Problema matricial

Substituindo (5.9) e (5.11) na forma fraca apresentada em (5.8) e após algumas manipulações algébricas, chega-se ao seguinte sistema de equações

$$\begin{bmatrix} \mathbf{M} \\ \gamma \Delta t + (\mathbf{C}(\mathbf{u}^{n+1}) + \mathbf{K}) & \mathbf{G} & -\mathbf{M}_{\lambda}^{\mathrm{T}} \\ \mathbf{G}^{\mathrm{T}} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{\lambda} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{u}^{n+1} \\ \mathbf{p}^{n+1} \\ \boldsymbol{\lambda}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{f}^{n+1} + \frac{\mathbf{M}}{\gamma \Delta t} \mathbf{u}^{n} + \frac{(1-\gamma)}{\gamma} \mathbf{M} \dot{\mathbf{u}}^{n} \\ \mathbf{0} \\ -\mathbf{M}_{\lambda} \overline{\mathbf{u}}^{i} \end{bmatrix}, (5.12)$$

onde o operador \mathbf{M}_{λ} é definido por

$$\mathbf{M}_{\lambda} = \sum_{\substack{elementos\\enriquecidos}} \mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \int_{\Gamma_{e}^{+}} \mathbf{N}_{\lambda}^{\mathrm{T}} \mathbf{N}_{u} d\Gamma_{e}^{+} \mathbf{A}_{e}.$$
(5.13)

Alternativamente, no cálculo da contribuição dos elementos enriquecidos às matrizes do sistema (5.12), pode-se subdividir a região pertencente a Ω^+ destes elementos em células de integração, evitando assim o uso das funções de enriquecimento definidas em (5.9) e (5.10).

5.4. O problema acoplado

Eliminando a hipótese da seção anterior de que a transformação da estrutura é conhecida a priori, algum algoritmo se faz necessário a fim de resolver o problema acoplado. Optou-se aqui por um método implícito e alternado (*staggered scheme*) que, apesar de possuir taxa de convergência em geral mais lenta quando comparado com métodos chamados monolíticos, tem sua vantagem na possibilidade de se utilizar programas computacionais prontos do problema estrutural sem necessidade de modificação alguma. O algoritmo utilizado é descrito a seguir:

Algoritmo do problema acoplado

A cada novo instante de tempo n + 1:

- 1) Estimar a nova posição da interface Γ^i e seus deslocamentos $u_{\Gamma,0}^{s,n+1}$ em t = n + 1;
- 2) **Problema fluido**: calcular as condições de contorno de Dirichlet na interface e resolver o problema fluido, obtendo, dentre outros, as tensões na interface $t_{\Gamma_i}^{f,n+1}$;
- 3) **Problema estrutural**: usar as tensões calculadas no passo anterior e resolver o problema estrutural. Obter os deslocamentos da interface na nova posição $\tilde{u}_{T_i}^{s,n+1}$;
- 4) Relaxação dos deslocamentos da interface: usar o parâmetro de relaxação Aitken para estimar os deslocamentos da interface para a próxima iteração *u*^{s,n+1}_{Γ,i} = ω_i ũ^{s,n+1}_{Γ,i} + (1 - ω_i) ũ^{s,n+1}_{Γ,i-1};
- 5) Checar convergência. Se não satisfeita, voltar ao passo 2).

5.5. Simulações numéricas

Nesta Seção, serão apresentados alguns resultados de simulações numéricas conduzidas com o objetivo de verificar as formulações apresentadas. Novamente, o *software* de pré e pós processamento Gid [91] foi utilizado.

Problema 5.1: escoamento estacionário em torno de um cilindro (Re=20)

Aqui o problema de escoamento em torno de um cilindro é revisitado. Os dados do problema são novamente os mesmos da referência [93] e o leitor pode consultá-los no Problema 3.3 da Seção 3.9, onde os mesmos foram apresentados de forma detalhada. A Figura 45 foi repetida apenas por razões didáticas de exposição.



Figura 45. Escoamento estacionário em torno de um cilindro. Desenho esquemático do Problema 5.1.

Desta vez, entretanto, todo o domínio do problema foi discretizado com elementos finitos de fluido e, portanto, a fronteira entre o fluido e a estrutura, no caso o cilindro, está imersa. Este fato pode ser observado na Figura 46 para o elemento de Taylor-Hood Q2Q1 e na Figura 47 para os elementos Taylor-Hood P2P1 e P2P1i.



Figura 46. Malha do fluido utilizada na simulação do Problema 5.1. 23049 elementos Taylor Hood Q2Q1 e 92825 nós.



Figura 47. Malha do fluido utilizada na simulação do Problema 5.1. 7914 elementos Taylor Hood P2P1 (ou P2P1i) e 16090 nós.

No caso do elemento Taylor-Hood Q2Q1, a interface foi discretizada criando-se nós nas interseções desta com os lados dos elementos de fluido, conforme apresentado na Figura 43 e utilizando funções de interpolação lineares. O cilindro foi considerado como um corpo rígido e por isso não precisou ser discretizado. A interface, por sua vez, foi definida de forma analítica internamente no código computacional em razão de sua simplicidade geométrica. Os resultados de velocidade e pressão obtidos com o elemento Q2Q1 podem ser observados na Figura 48 e na Figura 49, respectivamente.



Figura 48. Campo de velocidades obtido com o elemento finito Taylor-Hood Q2Q1.



Figura 49. Campo de pressão obtido com o elemento finito Taylor-Hood Q2Q1.

Na Figura 50, é mostrada em detalhe a distribuição de pressão em torno do cilindro. O leitor pode notar que a pressão não foi interpolada corretamente pelo pós processador Gid, causando uma falsa impressão de que a distribuição de pressão não é suave ao longo do contorno do cilindro. Isso se deve ao fato de que o Gid não possui implementadas as funções de enriquecimento definidas pelas eqs. (5.9).



Figura 50. Detalhe da distribuição de pressão ao longo do contorno do cilindro obtido com o elemento finito Taylor-Hood Q2Q1.

Entretanto, é possível calcular a pressão no contorno do cilindro internamente no código computacional, utilizando as funções de forma enriquecidas. Este resultado é mostrado na Figura 51 juntamente com os Multiplicadores de Lagrange.



(a) Pressão ao longo do contorno do cilindro.

(b) Q2Q1; 96 Multiplicadores de Lagrange definidos pela interseção entre a interface e os elementos de fluido.

Figura 51. (a) Pressão no contorno do cilindro e (b) Multiplicadores de Lagrange obtidos com o elemento Taylor-Hood Q2Q1.

Percebe-se claramente a partir da Figura 51(a) que a distribuição de pressão é suave em torno do cilindro e está em concordância muito boa com resultados da literatura (ver comparação dos resultados mais adiante na Tabela 6. Na Figura 51(b), percebe-se também que não há evidências de instabilidade numérica por incompatibilidade dos subespaços utilizados neste problema.



(a) P2P1; 361 Multiplicadores de Lagrange definidos pela interseção entre a interface e os elementos de fluido.



(b) P2P1; 170 Multiplicadores de Lagrange definidos de forma independente da malha do fluido.



(c) P2P1i; 361 Multiplicadores de Lagrange definidos pela interseção entre a interface e os elementos de fluido.



(d) P2P1i; 150 multiplicadores de Lagrange definidos de forma independente da malha do fluido.

Figura 52. Multiplicadores de Lagrange obtidos com os elementos P2P1 e P2P1i. Comparação entre as técnicas de discretização da interface apresentadas em 5.3.

Ao tentar resolver este mesmo problema usando outros elementos finitos de fluido com funções de interpolação de grau menor, em especial os elementos P2P1 e P2P1i, foram evidenciados fenômenos de instabilidade numérica. Tais instabilidades, entretanto, foram eliminadas ao discretizar a interface de forma independente da malha do fluido e com funções de forma descontínuas e constantes no interior do elemento, conforme descrito na seção 5.3 e ilustrado na Figura 44. Os resultados obtidos para os Multiplicadores de Lagrange são mostrados de forma comparativa na Figura 52. Os coeficientes de sustentação c_L e de arrasto c_D , definidos por (3.70), foram também calculados e os resultados são mostrados na Tabela 6.

	c_L	c_D	ΔP
Q2Q1 com 96 Multiplicadores de Lagrange na interface	0,0106	5,5759	0,1172
P2P1 com 361 Multiplicadores de Lagrange na interface	0,0096	5,5812	0,1174
P2P1 com 170 Multiplicadores de Lagrange na interface	0,0107	5,5867	0,1173
P2P1i com 361 Multiplicadores de Lagrange na interface	0,0083	5,5899	0,1185
P2P1i com 150 Multiplicadores de Lagrange na interface	0,0104	5,5903	0,1174
[R. Rannacher, S. Turek]	0,0106	5,5755	0,1173

Tabela 6. Comparação dos resultados obtidos com os elementos Q2Q1, P2P1 e P2P1i e resultados de [93] para o caso de escoamento estacionário.

Problema 5.2: escoamento em torno de um cilindro em movimento (Re=100)

Este exemplo foi conduzido em duas etapas. Inicialmente, o cilindro foi mantido fixo até que o escoamento atingisse regime periódico com desprendimento alternado de vórtices. Na segunda etapa, é imposto um movimento vertical ao cilindro com baixa velocidade, da ordem de 10%, comparada à velocidade do escoamento. Os dados do problema são os mesmos utilizados por Brooks e Hughes em [43] e os resultados são mostrados para fins qualitativos apenas. A malha do fluido é menos refinada que nos exemplos anteriores: 1200 elementos Taylor-Hood Q2Q1 e 4941 nós foram utilizados (ver Figura 53).



Figura 53. Malha utilizada no Problema 5.2: 1200 elementos Taylor-Hood Q2Q1 e 4941 nós.

O tempo foi discretizado usando o método de primeira ordem Euler Implícito e em intervalos de 0,05 segundos. Pelo menos duas iterações foram computadas por incremento de tempo. Aos 26 segundos de simulação, ainda se observa uma solução simétrica com dois vórtices paralelos e auto equilibrados na esteira do cilindro, conforme ilustra a Figura 54 (a) e (b).





(a) Campo de velocidades. Solução simétrica para t=26 s.



(c) Campo de velocidades. Solução para t=94 s.

(b) Campo de pressão. Solução simétrica para t=26 s.





Figura 54. Contornos de velocidade e pressão obtidos para o problema de escoamento transiente em torno de um cilindro com Re=100. (a) e (b) são soluções simétricas para t=26seg; (c) e (d) são soluções após estabilização do desprendimento de vórtices para t=94seg.

A Figura 54 (c) e (d) mostra o escoamento já estabilizado decorridos 94 segundos de simulação. A partir deste instante, é imposto um movimento vertical ao cilindro para cima até que seu centro atinja uma distância de 1,5D (onde D é o diâmetro do cilindro) da sua posição inicial e, na sequência, é imposto um movimento para baixo até que o centro atinja a posição de 1,5D abaixo da posição inicial. Finalmente, o cilindro é conduzido até sua posição inicial. A Figura 55 ilustra o campo de velocidades em vários instantes de tempo para que o leitor consiga perceber o movimento global do cilindro. Nas legendas, a posição do cilindro é identificada pela distância (*offset*) em relação à posição inicial. Os resultados da Figura 55 são apenas para fins qualitativos em virtude da malha relativamente grosseira e do Δt grande que foram usados.





(c) Offset +0,75D. T=119,5 s.



(e) Offset -0,75D. T=134,5 s.





(f) Offset +1,5D. T=142 s.



Problema 5.3: escoamento estacionário em um canal com obstáculo elástico

Este é um exemplo muito simples e consiste em um escoamento estacionário em um canal com uma barra elástica como obstáculo à passagem do fluido, conforme ilustra o desenho esquemático da Figura 56. As fronteiras no topo e no fundo do canal têm velocidades prescritas iguais a zero. Na saída, condição de contorno livre (tensão zero) é assumida. A velocidade vertical na entrada do canal é zero enquanto que a velocidade horizontal tem perfil parabólico valendo zero nas extremidades e 1,0 m/s na altura média. A densidade e viscosidade cinemática valem $\rho = 1,0 \text{ kg/m}^3$ e $\nu = 1,0 \text{ m}^2/\text{s}$, respectivamente, e o domínio fluido foi novamente discretizado com elementos Taylor-Hood Q2Q1. O domínio estrutural foi discretizado com 20 elementos quadrilaterais de 9 nós em estado plano de deformação. O material é Neo-Hookiano de Ciarlet-Simo com módulo de elasticidade $E = 5200 \text{ N/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0,48$. A Figura 57 mostra os resultados de velocidade e pressão

após convergência da posição da interface no problema acoplado de Interação Fluido-Estrutura. Novamente estes resultados são apenas para fins qualitativos.



Figura 56. Desenho esquemático do Problema 5.3



Figura 57. Campos de velocidade e pressão do Problema 5.3.

Problema 5.4: escoamento em torno de um cilindro com barra flexível atrás

Este exemplo é clássico e bastante usado como teste de novas formulações e códigos computacionais para solução de problemas de IFE. Em [97], o leitor pode verificar uma extensa comparação entre alguns dos principais métodos usados por diferentes grupos de pesquisa em atividade pelo mundo. A ideia do problema é avaliar a interação entre a esteira de vórtices formada atrás do cilindro e uma barra muito flexível presa a este para duas situações de escoamento: estacionário e transiente. O escoamento se dá através de um canal estreito de largura H = 0,41 m e comprimento L = 2,5 m, conforme ilustra a Figura 58. O cilindro tem raio r = 0,05 m e seu centro está posicionado nas coordenadas C = (0,2;0,2). A origem do sistema de referência está no canto inferior esquerdo do domínio do problema. A barra flexível está presa à jusante do cilindro e tem dimensões l = 0,35 m e h = 0,02 m. O ponto A, na extremidade direita da barra, tem coordenadas (0,6;0,2) no instante inicial e seu movimento é gravado durante a simulação para comparação dos resultados.



Figura 58. Desenho esquemático do Problema 5.4.

As condições de contorno essenciais do fluido são do tipo homogênea nas paredes superior e inferior do canal e na superfície do cilindro, ou seja, velocidades zero nestas fronteiras. Na interface com a estrutura, as condições de aderência e equilíbrio de forças, descritas em 5.2 são exigidas. A velocidade na entrada do canal é prescrita com um perfil parabólico dado por

$$\boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} 1, 5\overline{U} \frac{x_2(H - x_2)}{(H / 2)^2} & 0 \end{bmatrix}^{\mathrm{T}},$$
(5.14)

onde \overline{U} é a velocidade média na entrada do canal de modo que a velocidade máxima nesta fronteira é de $1, 5\overline{U}$. Na saída do canal, impõe-se condição de contorno natural de tensão nula. Os parâmetros do fluido e da estrutura, para escoamento estacionário e transiente, são definidos na Tabela 7 a seguir.

	Estacionário	Transiente
$ ho^s [10^3 \mathrm{kg/m^3}]$	1	1
$\lambda^s [10^6 \mathrm{kg/ms^2}]$	2,0	8,0
$\mu^s \left[10^6 \mathrm{kg/ms^2} ight]$	0,5	2,0
$ ho^f \left[10^3 \mathrm{kg/m^3} ight]$	1	1
$ u^{f} \left[10^{-3} \mathrm{m}^{2} / \mathrm{s} ight] $	1	1
\overline{U} [m/s]	0,2	2,0
Re	20	200

Tabela 7. Parâmetros do fluido e da estrutura do Problema 5.4.

O número de Reynolds, na última linha da Tabela 7, foi definido como

$$Re = \frac{2r\bar{U}}{\nu^f}.$$
(5.15)

O domínio do fluido foi discretizado com 54.852 elementos P2P1 e sua malha pode ser observada na Figura 59. O domínio estrutural foi discretizado com 126 elementos quadrilaterais de 9 nós em estado plano de deformação. Na simulação do escoamento transiente, o tempo foi discretizado em intervalos de $\Delta t = 0,005$ s.



Figura 59. Malha do fluido do Problema 5.4: 54852 elementos P2P1 e 110026 nós.

A Figura 61 mostra os resultados de velocidade e pressão para o escoamento estacionário. Resultados do escoamento transiente, em dois instantes de tempo distintos, são mostrados na Figura 61.



Figura 60. Campos de velocidade e pressão. Escoamento estacionário do Problema 5.4



Figura 61. Campos de velocidade e pressão em dois instantes de tempo. Escoamento transiente do Problema 5.4.

Os deslocamentos horizontal e vertical do ponto A, para o caso de escoamento estacionário, são mostrados na Tabela 8 juntamente com resultados de [97] para comparação, onde pode ser observada muito boa concordância.

	# incógnitas	u_1	u_2
Presente trabalho	181.390	2,1513e-5	8,2912e-4
[Krafczyk/Rank]	14.155.776	2,2160e-5	8,2010e-4
[Wall]	164.262	2,2680e-5	8,2310e-4
[Bletzinger]	217.500	2,2640e-5	8,2800e-4

Tabela 8. Comparação entre os resultados de deslocamentos horizontal (u_1) e vertical (u_2) do ponto A obtidos neste trabalho e resultados de [97] para o caso de escoamento estacionário do Problema 5.4.

No caso de escoamento transiente, os resultados são apresentados na Tabela 9. Observe que, neste caso, o movimento do ponto A será do tipo oscilatório, o que justifica o formato dos resultados de u_1 e u_2 nesta tabela. Na penúltima e última colunas, são apresentados os resultados de frequência, em s^{-1} , dos movimentos horizontal e vertical, respectivamente, do ponto A.

	# incógnitas	Δt	$u_1 [imes 10^{-3}]$	$u_2 [imes 10^{-3}]$	f_1	f_2
Presente trabalho	181.390	5,0e-3	-2,04±2,53	2,68±30,22	10,25	5,13
[Krafczyk/Rank]	2.480.814	5,1e-5	-2,88±2,71	1,48±35,10	11,00	5,50
[Wall]	27.147	5,0e-4	-2,00±1,89	1,45±29,00	10,60	5,30
[Bletzinger]	271.740	5,0e-4	-3,04±2,87	1,55±36,63	10,99	5,51

Tabela 9. Comparação do movimento descrito pelo ponto A obtido neste trabalho e em [97] para o caso de escoamento transiente do Problema 5.4.

Mais uma vez pode ser evidenciada uma concordância muito boa dos resultados obtidos neste trabalho com resultados da literatura. Uma leve discordância pode ser observada no valor médio de u_2 com relação às referências citadas, entretanto, esta discordância reflete-se em uma diferença menor do que 5% nos valores das amplitudes máximas e mínimas do deslocamento vertical do ponto A.

6. Discussão e Conclusões

Após todo o conteúdo apresentado nos capítulos anteriores, pode-se concluir que o desafio proposto como objetivo desta tese de doutoramento foi alcançado com sucesso. Os exemplos numéricos resolvidos comprovaram que a formulação e implementação em elementos finitos desenvolvidas neste trabalho são capazes de

- Resolver problemas de escoamento 2D de fluidos descrito pela Equação de Navier-Stokes para escoamentos incompressíveis, inclusive em regimes com convecção dominante;
- ✓ Utilização de elementos finitos com pares de velocidade/pressão que não satisfazem a condição LBB;
- Simulação de problemas de fluidos com interfaces móveis usando o conceito de fronteiras imersas em duas dimensões;
- ✓ Simulação de problemas de IFE dinâmicos e estacionários também usando o conceito de fronteiras imersas em duas dimensões, incluindo grandes deslocamentos e grandes deformações da estrutura.

Apesar de os exemplos numéricos mostrados estarem limitados a duas dimensões do espaço, a formulação foi desenvolvida e apresentada para o caso geral em três dimensões. O autor acredita, portanto, que a extensão das aplicações para problemas em 3D seja simples, apesar de exigir uma maior eficiência computacional comparada com a eficiência que possui hoje o código computacional desenvolvido aqui em MATLAB e com algumas sub-rotinas em C++. Algum paralelismo também já pode ser observado neste código, porém num estágio ainda prematuro.

A utilização de funções descontínuas para interpolar os Multiplicadores de Lagrange ao longo da interface, associada a uma discretização da interface independente da malha do fluido, forneceu resultados livres de possíveis instabilidades numéricas, dispensando assim estabilizações adicionais à formulação e é talvez o ponto forte deste trabalho. A construção de uma malha de Multiplicadores de Lagrange independente da malha do fluido, além de flexibilizar a dimensão do subespaço de aproximação desta variável, minimiza o efeito deletério que se obtém ao cortar um elemento fluido muito próximo a um de seus vértices. Outra vantagem em se utilizar interpolação descontínua entre os Multiplicadores de Lagrange

é a simplificação do código computacional, pois facilita a computação dos termos integrados ao longo da interface.

Como possível melhoria a ser incorporada a este trabalho em projetos futuros pode-se destacar o aprimoramento do método de acoplamento descrito no Seção 5.4 que, conforme já mencionado, possui taxa de convergência lenta. Em geral, o número de iterações necessárias para cada passo de tempo tem variado de cinco a quinze iterações nos problemas analisados. Outra melhoria que se pode pensar é com relação ao algoritmo geométrico de identificação dos elementos intersectados pela interface e cálculo de suas contribuições ao sistema (5.12). Ocasionalmente, singularidades na malha são identificadas, especialmente em simulações longas como as do Problema 5.2 e do Problema 5.4, e a solução adotada para contornar esta dificuldade foi a modificação do incremento de tempo.

Finalmente, o autor acredita ter contribuído, com este trabalho, para a inserção deste grupo de pesquisa na área de simulação computacional de problemas acoplados de Interação Fluido-Estrutura e também sugere, no próximo Capítulo, possíveis estudos a serem realizados com o objetivo de dar continuidade a esta pesquisa.

7. Propostas de Trabalhos Futuros

Como propostas para trabalhos futuros, o autor sugere os seguintes desafios listados a seguir

- ✓ Extensão deste trabalho para simulação de problemas em três dimensões. Neste tópico, poder-se-á usufruir de trabalhos desenvolvidos por este grupo de pesquisa na área da Mecânica das Estruturas [98,99];
- Implementação da formulação em uma linguagem de programação mais eficiente e fazendo uso de computação paralela;
- ✓ Aplicação a problemas de biomecânica;
- ✓ Incorporação da superfície livre do fluido e contato entre sólidos, permitindo ampliar enormemente a classe de problemas aos quais se aplica este trabalho.

8. Referências Bibliográficas

- [1] Löhner R, Yang C, Oñate E. On the simulation of flows with violent free surface motion. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006; **195**:5597–5620
- [2] Dettmer W, Peric D. A computational framework for free surface fluid flows accounting for surface tension. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006; **195** :3038–3071
- [3] Feng YT, Peric D. A time-adaptive space-time finite element method for incompressible Lagrangian flows with free surfaces: computational issues. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000; 190:499-518
- [4] Braess H, Wriggers P. Arbitrary Lagrangian Eulerian finite element analysis of free surface flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000; **190**:95-109
- [5] Marrone S et al. d-SPH model for simulating violent impact flows. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2011; 200:1526-1542
- [6] Akkerman I et al. Toward free-surface modeling of planing vessels: simulation of the Fridsma hull using ALE-VMS. *Comput. Mech.* 2012; 50:719–727
- [7] Takizawa K et al. Computation of free-surface flows and fluid-object interactions with the CIP method based on adaptive meshless soroban grids. *Comput. Mech.* 2007; 40:167–183
- [8] Kulasegaram S, Bonet J, Lewis RW, Profit M. A variational formulation based contact algorithm for rigid boundaries in two-dimensional SPH applications. *Comput. Mech.* 2004; 33:316–325
- [9] Lins EF, Elias RN, Rochinha FA, Coutinho ALGA. Residual-based variational multiscale simulation of free surface flows. *Comput. Mech.* 2010; 46:545–557
- [10] Elias RN et al. Computational Techniques for Stabilized Edge-Based Finite Element Simulation of Nonlinear Free-Surface Flows. J. Offshore Mech. Arct. Eng. 2009; 131:041103-0411-7

- [11] Buscaglia GC, Ausas RF. Variational formulations for surface tension, capillarity and wetting. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2011; 200:3011-3025
- [12] Tezduyar TE et al. Fluid–structure interaction modeling of ringsail parachutes. *Comput. Mech.* 2008; 43:133–142
- [13] Tacoma Narrows Bridge (1940) Wikipedia, the free encyclopedia. Disponível em: http://en.wikipedia.org/wiki/Tacoma_Narrows_Bridge_(1940). Acessado em: 11th December 2012.
- [14] Bazilevs Y, Calo VM, Hughes TJ, Zhang Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Comput. Mech.* 2008; 43:3-37
- [15] Bazilevs Y, Hsu M-C, Scott MA. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with emphasis on non-matching discretizations, and with application to wind turbines. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2012; 249-252:28-41
- [16] Küttler U, Wall WA. Fixed-point fluid-structure interaction solvers with dynamic relaxation. *Comput. Mech.* 2008; 43:61-72
- [17] Förster C, Wall WA, Ramm E. Artificial added mass instabilities in sequential staggered coupling of nonlinear structures and incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2007; **196**:1278-1293
- [18] Takizawa K, Christopher J, Tezduyar TE, Sathe S. Space-time finite element computation of arterial fluid-structure interactions with patient-specific data. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.* 2010; 26:101-116
- [19] Tezduyar TE, Takizawa K, Brummer T, Chen PR. Space-time fluid-structure interaction modeling of patient-specific cerebral aneurysms. *Int. J. Numer. Meth. Biomed. Engng.* 2011; 27:1665–1710
- [20] Torii R et al. Influencing factors in image-based fluid-structure interaction computation of cerebral aneurysms. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2011; **65**:324–340
- [21] Maier A et al. A Comparison of Diameter, Wall Stress, and Rupture Potential Index for Abdominal Aortic Aneurysm Rupture Risk Prediction. Annals of Biomedical

Engineering 2010; 38:3124–3134

- [22] Torii R et al. Numerical investigation of the effect of hypertensive blood pressure on cerebral aneurysm—Dependence of the effect on the aneurysm shape. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2007; 54:995–1009
- [23] Torii R et al. Fluid–structure interaction modeling of blood flow and cerebral aneurysm: Significance of artery and aneurysm shapes. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2009; 198:3613–3621
- [24] Bazilevs Y et al. Patient-specific isogeometric fluid–structure interaction analysis of thoracic aortic blood flow due to implantation of the Jarvik 2000 left ventricular assist device. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2009; **198**:3534–3550
- [25] Argyris JH, Straub K. STATIC AND DYNAMIC STABILITY OF NONLINEAR ELASTIC SYSTEMS UNDER NONCONSERVATIVE FORCES-NATURAL APPROACH. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1982; 32:59-83
- [26] Gamnitzer P, Gravemeier V, Wall WA. Time-dependent subgrid scales in residual-based large eddy simulation of turbulent channel flow. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010; 199:819–827
- [27] Bazilevs Y et al. Variational multiscale residual-based turbulence modeling for large eddy simulation of incompressible flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2007; 197:173–201
- [28] Lieu T, Farhat C, Lesoinne M. Reduced-order fluid/structure modeling of a complete aircraft configuration. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006; **195**:5730–5742
- [29] Bismarck-Nasr MN. *Structural Dynamics in Aeronautical Engineering*. American Institute of Aeronautics and Astronautics, Inc : Reston, Virginia, 1999.
- [30] Mouroutis ZS, Markou GA, Papadrakakis M. An efficient mesh updating technique for fluid-structure interaction problems. *Int. J. Comput. Methods* 2007; 4:249-263
- [31] Barcelos M, Maute K. Aeroelastic design optimization for laminar and turbulent flows.

Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2008; 197:1813–1832

- [32] Appa K, Argyris J, Guruswamy GP, Martin CA. Synergistic aircraft design using CFD air loads. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1998; 166:247-259
- [33] Idelsohn SR, Storti MA, Oñate E. Lagrangian formulations to solve free surface incompressible inviscid fluid flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001; 191:583-593
- [34] Oñate E, García J. A finite element method for fluid-structure interaction with surface waves using a finite calculus formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001; 191:635-660
- [35] Idelsohn SR, Marti J, Limache A, Oñate E. Unified Lagrangian Formulation for Elastic Solids and Incompressible Fluids: Application to Fluid–Structure Interaction Problems via the PFEM. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2008; **197**:1762-1776
- [36] Idelsohn SR, Oñate E, Pin FD, Calvo N. Fluid–Structure Interaction using the Particle Finite Element Method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006; 195:2100-2123
- [37] Oñate E, Idelsohn SR, Celigueta MA, Rossi R. Advances in the Particle Finite Element Method for the Analysis of Fluid–Multibody Interaction and Bed Erosion in Free Surface Flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2008; **197**:1777-1800
- [38] Oden JT. Finite-Element Analogue of Navier-Stokes Equation. J. Eng. Mech. Div. ASCE 1970; 96:529
- [39] Taylor C, Hood P. A Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations using the Finite Element Technique. *Comput. Fluids* 1973; 1:73-100
- [40] Cheng RT-S. Numerical Solution of the Navier-Stokes Equations by the Finite Element Method. *Phys. Fluids* 1972; 15:2098
- [41] Maliska CR. Transferência de Calor e Mecânica dos Fluidos Computacional, 2nd ed. Livros Técnicos e Científicos : Rio de Janeiro, 2004.

- [42] Ferziger JH, Peric M. Computational Methods for Fluids Dynamics, 3rd ed. Springer : 2002.
- [43] Brooks AN, Hughes TJR. Streamline Upwind/Pretrov-Galerkin Formulations for Convective Dominated Flows with Particular Emphasis on the Incompressible Navier-Stokes Equations. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1982; 32:199-259
- [44] Argyris JH, Doltsinis JS, Pimenta PM, Wüstenberg H. Natural Finite Element Techniques for Viscous Fluid Motion. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1984; 45:3-55
- [45] Förster C, Wall WA, Ramm E. Stabilized Finite Element Formulation for Incompressible Flow on Distorted Meshes. Int. J. Numer. Meth. Fluids 2009; 60:1103–1126
- [46] Hsu M-C et al. Improving stability of stabilized and multiscale formulations in flow simulations at small time step. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2010; **199**:828-840
- [47] Oñate E. Derivation of Stabilizad Equations for Numerical Solution of Advective-Diffusive Transport and Fluid Flow Problems. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1998; 151:233-265
- [48] Franca LP, Frey SL, Hughes TJR. Stabilized Finite Element Methods: I. Application to the Advective-Diffusive Model. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1992; 95:253-276
- [49] Franca LP, Frey SL. Stabilized Finite Element Methods: II. The Incompressible Navier-Stokes Equations. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 1992; 99:209-233
- [50] Tezduyar TE, Osawa Y. Finite Element Stabilization Parameters Computed from Element Matrices and Vectors. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2000; **190**:411-430
- [51] Brezzi F, Fortin M. Mixed and Hibrid Finite Element Methods. Springer-Verlag New York : 1991.
- [52] Hughes TJR, Franca LP. A New Finite Element Formulation for Computational Fluid Dynamics: VII. The Stokes Problem with Various Well-Posed Boundary Conditions: Symmetric Formulations that Converge for All Velocity/Pressure Spaces. *Comput.*

Methods Appl. Mech. Engrg. 1987; 65:85-96

- [53] Tezduyar TE, Mittal S, Ray SE, Shih R. Incompressible Flow Computations with Stabilized Bilinear and Linear Equal-Order-Interpolation Velocity-Pressure Elements. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1992; 95:221-242
- [54] Peskin CS. Flow Patterns Around Heart Valves: A Numerical Method. J. Comput. Phys. 1972; 10:252-271
- [55] Peskin CS. Numerical Analysis of Blood Flow in the Heart. J. Comput. Phys. 1977;25:220-252
- [56] Belytschko TB, Kennedy JM. Computer models for subassembly simulation. J. Nucl. Eng. Des. 1978; 49:17-38
- [57] Hughes JR, Liu WK, Zimmermann TK. Lagrangian-Eulerian finite element formulation for incompressible viscous flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 1981; 29:329-349
- [58] Wall WA et al. Large Deformation Fluid-Structure Interaction Advances in ALE Methods and New Fixed Grid Approaches. In *Fluid-Structure Interaction. Modelling, Simulation, Optimisation*, Bungartz H J, Schäfer M (eds), vol. 53. Springer, 2006;195-232.
- [59] Kuhl E, Hulshoff S, Borst RD. An arbitrary Lagrangian Eulerian finite-element approach for fluid–structure interaction phenomena. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2003; 57:117–142
- [60] Zhang Q, Hisada T. Analysis of fluid-structure interaction problems with structural buckling and large domain changes by ALE finite element method. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2001; **190**:6341-6357
- [61] Sawada T, Hisada T. Fluid–structure interaction analysis of the two-dimensional flag-inwind problem by an interface-tracking ALE finite element method. *Comput. Fluids* 2007; 36:136–146
- [62] Farhat C, Geuzaine P, Brown G. Application of a three-field nonlinear fluid–structure formulation to the prediction of the aeroelastic parameters of an F-16 fighter. *Comput.*

Fluids 2003; 32:3-29

- [63] Tallec PL, Mouro J. Fluid structure interaction with large structural displacements. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 2001; 190:3039-3067
- [64] Hirt CW, Amsden AA, Cook JL. An Arbitrary Lagrangian–Eulerian Computing Method for All Flow Speeds. J. Comput. Phys. 1974; 14:227–253
- [65] Moës N, Dolbow J, Belytschko T. A Finite Element Method for Crack Growth without Remeshing. Int. J. Numer. Methods Engrg. 1999; 46:131-150
- [66] Belytschko T, Black T. Elastic crack growth in finite elements with minimal remeshing. Int. J. Numer. Methods Engrg. 1999; 45:601-620
- [67] Gerstenberger A, Wall WA. An eXtended Finite Element Method/Lagrange Multiplier based Approach for Fluid-Structure Interaction. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2008; 197:1699-1714
- [68] Gerstenberger A, Wall WA. Enhancement of fixed-grid methods towards complex fluid– structure interaction applications. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2008; 57:1227–1248
- [69] Legay A, Chessa J, Belytschko T. An Eulerian-Lagrangian method for fluid-structure interaction based on level sets. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2006; 195:2070-2087
- [70] Moës N, Béchet E, Tourbier M. Imposing Dirichlet boundary conditions in the extended finite element method. Int. J. Numer. Methods Engrg 2006; 67:1641-1669
- [71] Sawada T, Tezuka A. LLM and X-FEM based interface modeling of fluid–thin structure interactions on a non-interface-fitted mesh. *Comput. Mech.* 2011; **48**:319–332
- [72] Gomes HC, Pimenta PM. Embedded interface with discontinuous Lagrange multipliers for bidimensional fluid-structure interaction analysis. *Comput. Mech. Em revisão*.
- [73] Gomes HC, Pimenta PM. Embedded interface with discontinuous Lagrange multipliers for bidimensional fluid-structure interaction analysis. *Comput. Mech.* Submetido em 26-

Apr-2011 (Manuscript ID: CM-11-0123)

- [74] Zhaosheng Y. A DLM/FD method for fluid/flexible-body interactions. J. Comput. Phys. 2005; 207:1-27
- [75] Zilian A, Legay A. The enriched space-time finite element method (EST) for simultaneous solution of fluid-structure interaction. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2008; 75:305–334
- [76] Sanders JD, Laursen TA, Puso MA. A Nitsche embedded mesh method. *Comput. Mech.* 2012; 49:243–257
- [77] Rüberg T, Cirak F. Subdivision-stabilised immersed b-spline finite elements for moving boundary flows. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2012; 209–212:266–283
- [78] Gerstenberger A, Wall WA. An embedded Dirichlet formulation for 3D continua. Int. J. Numer. Meth. Engng 2010
- [79] Zilian A, Fries T-P. A localized mixed-hybrid method for imposing interfacial constraints in the extended finite element method (XFEM). *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2009; **79**:733–752
- [80] Baiges J et al. A symmetric method for weakly imposing Dirichlet boundary conditions in embedded finite element meshes. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2012; 90:636–658
- [81] Lew AJ, Buscaglia GC. A discontinuous-Galerkin-based immersed boundary method. Int. J. Numer. Meth. Engng 2008; 76:427-454
- [82] White FM. Viscous Fluid Flow, 2nd ed. McGraw-Hill : 1991.
- [83] Anderson JD. Fundamentals of Aerodynamics, 3rd ed. McGraw-Hill : New York, 2001.
- [84] Donea J, Huerta A. The Finite Element Method for Flow Problems. John Wiley : 2003.
- [85] Dettmer W, Peric D. An analysis of the time integration algorithms for the finite element solutions of incompressible Navier–Stokes equations based on a stabilised formulation. *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* 2003; **192**:1177-1226

- [86] Newmark NM. A method of computation for structural dynamics. J. Eng. Mech. 1959;85:67-94
- [87] Hughes TJR. The finite element method. Linear static and dynamic finite element analysis. New Jersey, 1987.
- [88] Gomes HC, Pimenta PM. Mixed triangular finite element applied to incompressible fluid flow problems. Proceedings of The 30th edition of the Iberian-Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Armação de Buzios, Brazil, 2009
- [89] Gomes HC, Pimenta PM. Extended Finite Element Method for 2D Fluid-Structure Interaction Problems. Proceedings of the 4th European Congress on Computational Mechanics, Paris, 2010
- [90] Gomes HC, Pimenta PM. Extended Finite Element Method Applied to Fluid-Structure Interaction Problems. Proceedings of The 9th World Congress on Computational Mechanics and 4th Asian Pacific Congress on Computational Mechanics (WCCM/APCOM 2010), Sydney, 2010
- [91] Gid. The Personal Pre and PostProcessor. Version 9.0.2 International Center for Numerical Methods in Engineering CIMNE, 2008
- [92] Zienkiewicz OC, Taylor RL. *The Finite Element Method. Fluid Dynamics.*, vol. 3. McGraw-Hill: London, 2000.
- [93] Schäfer M, Turek S. Benchmark computations of laminar flow around a cylinder. Notes Numer. Fluid Mech. 1996; 52:547-566
- [94] Wriggers P. Nonlinear Finite Element Methods. Berlin, 2008.
- [95] Pimenta PM. Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas. Apostila do curso de Fundamentos I. Escola Politécnica da USP. São Paulo, 2008.
- [96] Sawada T, Tezuka A. High-order Gaussian quadrature in X-FEM with the Lagrangemultiplier for fluid-structure coupling. *Int. J. Numer. Meth. Fluids* 2010; **64**:1219-1239

- [97] Turek S et al. Numerical Benchmarking of Fluid-Structure Interaction: A comparison of different discretization and solution approaches. *Lecture Notes in Computational Science* and Engineering 2010; 73:413-424
- [98] Pimenta PM, Campello EMB, Wriggers P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. *Comput. Mech.* 2004; 34:181-193
- [99] Pimenta P, Campello EMB. Shell curvature as an initial deformation: A geometrically exact finite element approach. *Int. J. Numer. Meth. Engng* 2009; 78:1094–1112

9. Apêndice

Neste apêndice, são deduzidas as matrizes oriundas da discretização do problema fluido por elementos finitos (Seção 3.5).

9.1. Matriz convectiva:

$$\begin{split} \left(\boldsymbol{w}^{h}, (\nabla \boldsymbol{u}^{h})\boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \left[(\nabla \boldsymbol{u}^{h})\boldsymbol{u}^{h} \right] d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \left[(\nabla \boldsymbol{u}^{h})\boldsymbol{u}^{h} \right] d\Omega_{e} \\ &= \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \left(\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{w} \right)^{\mathrm{T}} \left[\left(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{u}_{e} \right) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \right] \mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{u} d\Omega_{e} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{\mathrm{T}} \left[\left(\mathbf{N}_{u,i} \mathbf{u}_{e} \right) \otimes \boldsymbol{e}_{i} \right] \mathbf{N}_{u} d\Omega_{e} \mathbf{A}_{e} \right] \mathbf{u} \\ &= \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}_{e} \mathbf{A}_{e} \right) \mathbf{u} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}} \mathbf{C}(\mathbf{u}) \mathbf{u}; \end{split}$$

9.2. Matriz viscosa:

$$\begin{split} \left(\nabla \boldsymbol{w}^{h}, \nu \nabla \boldsymbol{u}^{h}\right)_{\Omega} &= \int_{\Omega} \nabla \boldsymbol{w}^{h} : \nu \nabla \boldsymbol{u}^{h} d\Omega = \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \nabla \boldsymbol{w}^{h} : \nu \nabla \boldsymbol{u}^{h} d\Omega_{e} \\ &= \sum_{e} \int_{\Omega_{e}} \left[\left(\nabla \mathbf{N}_{u}\right) \mathbf{A}_{e} \mathbf{w} \right]^{\mathsf{T}} \nu \left[\left(\nabla \mathbf{N}_{u}\right) \mathbf{A}_{e} \mathbf{u} \right] d\Omega_{e} = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \int_{\Omega_{e}} \mathbf{B}^{\mathsf{T}} \nu \mathbf{B} d\Omega_{e} \mathbf{A}_{e} \right) \mathbf{u} \\ &= \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \mathbf{K}_{e} \mathbf{A}_{e} \right) \mathbf{u} = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \mathbf{K} \mathbf{u}; \end{split}$$

9.3. Operador gradiente:

$$\begin{split} &-\left(\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{h},p^{h}\right)_{\Omega}=\int_{\Omega}-\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{h}\cdot p^{h}d\Omega=\sum_{e}\int_{\Omega_{e}}-\operatorname{div}\boldsymbol{w}^{h}\cdot p^{h}d\Omega_{e}\\ &=\sum_{e}\int_{\Omega_{e}}-\left[\left(\nabla\cdot\mathbf{N}_{u}\right)\mathbf{A}_{e}\mathbf{w}\right]^{\mathrm{T}}\left[\mathbf{N}_{p}\mathbf{A}_{e}\mathbf{p}\right]d\Omega_{e}=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\sum_{e}\left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}}\int_{\Omega_{e}}-\left(\nabla\cdot\mathbf{N}_{u}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{N}_{p}d\Omega_{e}\mathbf{A}_{e}\right)\mathbf{p}\\ &=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\sum_{e}\left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}_{e}\mathbf{A}_{e}\right)\mathbf{p}=\mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{G}\mathbf{p};\end{split}$$
9.4. Vetor das forças de volume e tensão aplicada:

$$\begin{split} \left(\boldsymbol{w}^{h},\boldsymbol{b}\right)_{\Omega} + \left(\boldsymbol{w}^{h},\overline{\boldsymbol{t}}\right)_{\Gamma_{t}} &= \int_{\Omega} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \boldsymbol{b} d\Omega + \int_{\Gamma_{t}} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{t} = \sum_{e} \Biggl\{ \int_{\Omega_{e}} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \boldsymbol{b} d\Omega_{e} + \int_{\Gamma_{te}} \boldsymbol{w}^{h} \cdot \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{te} \Biggr\} \\ &= \sum_{e} \Biggl\{ \int_{\Omega_{e}} \left(\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{w} \right)^{\mathsf{T}} \boldsymbol{b} d\Omega_{e} + \int_{\Gamma_{te}} \left(\mathbf{N}_{u} \mathbf{A}_{e} \mathbf{w} \right)^{\mathsf{T}} \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{te} \Biggr\} = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \sum_{e} \Biggl\{ \mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \Biggl[\int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{b} d\Omega_{e} + \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}_{u}^{\mathsf{T}} \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{te} \Biggr\} = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \sum_{e} \Biggl\{ \mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \Biggl[\int_{\Omega_{e}} \mathbf{N}_{u}^{\mathsf{T}} \boldsymbol{b} d\Omega_{e} + \int_{\Gamma_{te}} \mathbf{N}_{u}^{\mathsf{T}} \overline{\boldsymbol{t}} d\Gamma_{te} \Biggr\} \Biggr\} \\ &= \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \sum_{e} \Biggl(\mathbf{A}_{e}^{\mathsf{T}} \mathbf{f}_{e} \Biggr) = \mathbf{w}^{\mathsf{T}} \mathbf{f}. \end{split}$$

9.5. Matriz viscosa (3.35)

$$\begin{split} a\left(\boldsymbol{u}^{h},\boldsymbol{w}^{h}\right) &= \int_{\Omega} 2\nu\nabla^{s}\boldsymbol{w}^{h}: \nabla^{s}\boldsymbol{u}^{h}d\Omega = \sum_{e}\int_{\Omega_{e}} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\boldsymbol{w}^{h}\right)^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\nu}: \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\left(\boldsymbol{u}^{h}\right)d\Omega_{e} \\ &= \sum_{e}\int_{\Omega_{e}} \left[\mathbf{B}\mathbf{A}_{e}\mathbf{w}\right]^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\nu}\left[\mathbf{B}\mathbf{A}_{e}\mathbf{u}\right]d\Omega_{e} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}}\int_{\Omega_{e}}\mathbf{B}^{\mathrm{T}}\mathbf{C}_{\nu}\mathbf{B}d\Omega_{e}\mathbf{A}_{e}\right)\mathbf{u} \\ &= \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\sum_{e} \left(\mathbf{A}_{e}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}_{e}\mathbf{A}_{e}\right)\mathbf{u} = \mathbf{w}^{\mathrm{T}}\mathbf{K}\mathbf{u}; \end{split}$$