**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA**

MICHELE YAMAO

Análise dinâmica não linear bidimensional de *risers* verticais

**São Paulo
2013**

MICHELE YAMAO

Análise dinâmica não linear bidimensional de *risers* verticais

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Engenharia
de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo
Nigro Mazzilli

**São Paulo
2013**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 10 de julho de 2013.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Yamao, Michele

**Análise dinâmica não linear bidimensional de risers verticais
/ M. Yamao. -- versão corr. -- São Paulo, 2013.**

93 p.

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Geotécnica.**

**1.Dinâmica 2.Riser vertical 3.Vibração induzida por vórtices
4.Modos não lineares 5.Modelo de ordem reduzida I.Universidade
de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia
de Estruturas e Geotécnica II.t.**

“não temas, porque eu sou contigo; não te assombres, porque eu sou teu Deus; eu te fortaleço, e te ajudo, e te sustento com a minha destra fiel”
(Isaías 41:10)

AGRADECIMENTOS

Primeiramente gostaria de agradecer ao meu Deus, ao Senhor Jesus Cristo, pois Ele me deu forças e me guiou nos meus caminhos.

Agradeço também ao meu orientador, Professor Mazzilli, por toda paciência e compreensão ao longo do meu mestrado.

A meu amado, Nicolau A. Galan Neto, o meu muito obrigado por tudo. Ele foi a minha força, minha razão e meu anjo da guarda. Ele me sustentou e me socorreu nos maus momentos.

Aos meus pais, Jorge e Satiko, que me deram o exemplo de vida, que sempre me ensinaram a nunca desistir dos meus sonhos. Obrigado por toda paciência e por me apoiarem .

A minha irmã, Nathalia, eu só tenho a agradecer por aguentar o meu mau humor e minha impaciência.

A minha querida vovó, Toshiko, me ensinou a ser uma pessoa forte e lutar pelos meus objetivos. A ela, eu só tenho a agradecer por cuidar de mim.

Aos meus “irmãos”, Guilherme e Laís, o meu muito obrigado pela paciência e apoio.

A meus tios, Milton e Sônia, eu agradeço pela paciência e por sempre me apoiarem e torcerem por mim.

Aos meus antigos chefes da Outec, aos meus colegas da CNEC WorleyParsons - Equipe Civil e aos meus amigos do LMC e JAC, obrigado pela ajuda e apoio que me deram.

As pessoas que eu esqueci me citar, eu agradeço pela ajuda.

SUMÁRIO

1	CAPÍTULO 1	14
1.1	INTRODUÇÃO	14
1.2	OBJETIVO	17
1.3	JUSTIFICATIVA	19
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	20
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	23
2	CAPÍTULO 2	25
2.1	MODOS NORMAIS NÃO LINEARES DE VIBRAÇÃO	25
2.2	VARIEDADES INVARIANTES	25
2.3	MÚTIPLAS ESCALAS	25
2.4	MODELO DE ORDEM REDUZIDA	26
2.5	METODOLOGIA	26
3	CAPÍTULO 3	30
3.1	DESCRIÇÃO DO MODELO: EQUAÇÃO HOMOGÊNEA DE MOVIMENTO DA ESTRUTURA EM VIBRAÇÕES LIVRES	30
3.2	DESCRIÇÃO DO MODELO: EQUAÇÃO DE MOVIMENTO DA ESTRUTURA COM “CARREGAMENTO” DE VIV	38
4	CAPÍTULO 4	49
4.1	DETERMINAÇÃO DOS MODOS NÃO LINEARES	49
4.1.1	Equação de ordem ε	51
4.1.2	Equação de ordem ε^2	52
4.1.3	Equação de ordem ε^3	52
4.2	RECUPERAÇÃO DAS VARIEDADES INVARIANTES	55
4.3	COMPARAÇÃO DO MAPA DE FASE DETERMINADO DIRETAMENTE PELO MÉTODO DAS MÚTIPLAS ESCALAS E PELAS RELAÇÕES MODAIS	61
5	CAPÍTULO 5	66
5.1	DETERMINAÇÃO DO OSCILADOR LIVRE	66
5.2	DETERMINAÇÃO DO OSCILADOR FORÇADO DA ESTRUTURA E FLUIDO	70

6	CAPÍTULO 6.....	80
6.1	EXEMPLO NUMÉRICO	80
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS.....	91
8	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	92

Lista de Figuras

Figura 1: Histórico de exploração de petróleo e gás no Brasil (Fonte: Petrobras)	14
Figura 2: Espessuras das camadas na região do pré-sal.....	15
Figura 3: Perfil típico da região do pré-sal.(Fonte: Petrobras).....	15
Figura 4: " <i>Riser Tower</i> "(extraído da tese[9])	16
Figura 5: Exemplo de <i>riser</i> vertical submetido à correnteza marítima, proporcionando vibrações na estrutura com o desprendimento de vórtices. ..	18
Figura 6: Metodologia do estudo do <i>Riser Vertical</i>	29
Figura 7: Primeira etapa de modelagem. Esquema da barra de Bernoulli-Euler carregada axialmente somente por forças estáticas de protensão e peso próprio submerso.....	30
Figura 8: Segunda etapa de modelagem. Esquema da barra de Bernoulli-Euler com o <i>hang-off</i> fixo.	31
Figura 9: Cinemática da barra de Bernoulli-Euler	32
Figura 10: Escoamento ao redor do cilindro circular, $Re=32$, $Re=55$ e $Re=65$. Extraído de ASSI(2005) presente na tese de Lauro M.Y.da Silveira [14]	39
Figura 11: Escoamento ao redor circular, $Re=105$. Extraído de VAN DYKE(1982) presente na tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]	39
Figura 12: Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re=140$. Extraído de VAN DYKE(1982) presente na tese de Lauro M.Y. da Silveira [14].....	40
Figura 13: Campo de pressões na parede do cilindro; escoamento separado sem desprendimento de vórtices. Extraído de ASSI (2005), conforme tese de Lauro M.Y. da Silveira [14].....	40
Figura 14: Campo de pressão na parede do cilindro; desprendimento de vórtices iniciado. Extraído de ASSI (2005), conforme tese de Lauro M.Y. da Silveira[14]	41
Figura 15: Curva $StxRe$. Adaptada de FEY, KONIG, ECKELMANN (1998), conforme tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]	42
Figura 16: Cilindro montado em base viscoelastica e sujeito a escoamento uniforme. Extraído da tese de Lauro M.Y. da Silveira [14].....	43

Figura 17: Volume de controle. Extraído da tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]	44
Figura 18: Mapa de fase projetado - Método das múltiplas escalas em $0,25l$	62
Figura 19: Mapa de fase recuperado pelas relações modais em $0,25l$	62
Figura 20: Comparação dos mapas de fase das duas técnicas em $0,25l$	63
Figura 21: Mapa de fase projetado - Método das múltiplas escalas em $0,5l$	63
Figura 22: Mapa de fase recuperado pelas relações modais em $0,5l$	63
Figura 23: Comparação dos mapas de fase das duas técnicas em $0,5l$	64
Figura 24: Mapa de fase projetado - Método das múltiplas escalas em $0,75l$...	64
Figura 25: Mapa de fase recuperado pelas relações modais em $0,75l$	64
Figura 26: Comparação dos mapas de fase das duas técnicas em $0,75l$	65
Figura 27: Gráfico de $z \times \Delta \hat{\Omega}_k$	81
Figura 28: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$	82
Figura 29: Resposta no tempo : $v \times t$	82
Figura 30: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$	83
Figura 31: Resposta no tempo : $v \times t$	83
Figura 32: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$	84
Figura 33: Resposta no tempo : $v \times t$	84
Figura 34: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$ (extraído [12]).....	85
Figura 35: Resposta no tempo : $v \times t$ (extraído [12]).....	85
Figura 36: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$	86
Figura 37: Resposta no tempo: $v \times t$	87
Figura 38: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$	87
Figura 39: Resposta no tempo : $v \times t$	88
Figura 40: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$	88
Figura 41: Resposta no tempo : $v \times t$	89
Figura 42: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$ (extraído [12]).....	89
Figura 43: Resposta no tempo : $v \times t$ (extraído [12]).....	90

Resumo

Na última década foram descobertas jazidas de petróleo e gás em águas profundas ao longo da costa sudeste do Brasil, o que tem levado à reavaliação de conceitos e técnicas até então utilizados para sua exploração em pequenas profundidades. Parâmetros que anteriormente eram supostamente não críticos passaram a ser relevantes no dimensionamento estrutural dos *risers*.

Efetivamente, a descoberta de novas jazidas na Bacia de Santos incentivou o desenvolvimento de pesquisas nesta área, no Brasil e no mundo. Os depósitos de petróleo e gás encontrados abaixo da camada de sal (daí serem referidas por “pré-sal”) ocorrem em áreas com lâmina d’água de mais de 2.000 metros, requerendo novas tecnologias para viabilizar sua extração.

Os *risers* de produção nada mais são do que tubulações que levam petróleo e gás do fundo do oceano para a superfície. Nas suas diversas configurações geométricas (vertical, em catenária, *lazy wave*, entre outros), são elementos estruturais extremamente esbeltos, que devem suportar carregamentos dinâmicos oriundos da correnteza marítima em grande profundidade, ondas de superfície, escoamento interno e deslocamentos impostos, atendendo a exigentes critérios de projeto.

O *riser* vertical será o foco deste trabalho, no qual se pretende utilizar modelos matemáticos com poucos graus de liberdade, denominados modelos de ordem reduzida (MOR), mas com adequada capacidade de representação qualitativa e quantitativa da resposta estrutural, fazendo uso de modos não lineares como “funções de projeção”, dentro do método de Galerkin não linear. Os modos não lineares, intensivamente estudados no Grupo de Pesquisa “Dinâmica, Estabilidade e Controle de Sistemas Estruturais” da Escola Politécnica da USP, por conterem intrinsecamente informações de harmônicos de ordem superior, são capazes de, em menor número do que os modos lineares utilizados no método da superposição modal clássico, descreverem acuradamente a resposta do sistema não linear. Serão utilizados procedimentos baseados tanto no método das variedades invariantes, quanto no método das múltiplas escalas, em modelos analíticos. Para a redução de graus de liberdade, será utilizado o método de projeção que se baseia na imposição da igualdade entre os trabalhos virtuais dos modelos de alta e baixa hierarquia

(MOR), de sorte que o sistema sob carregamento dinâmico possa ser estudado em espaço de fase de baixa dimensão.

A presente pesquisa, além dos desafios acadêmicos inerentes ao tema, apresenta evidente relevância econômica e estratégica para o País.

Palavras-chave: *Dinâmica, Riser vertical, Vibração induzida por vórtices, Modo não linear, Modelo de ordem reduzida.*

Abstract

In the last decade, deposits of oil and gas under deep waters were discovered along the Brazilian Southeast coast, which led to reassessment of concepts and techniques previously used for their exploitation under shallow waters. Parameters that were not previously considered to be critical became relevant in the structural design of the risers.

Indeed, the discovery of new deposits in the so-called Santos Basin encouraged the development of research in this area in Brazil and worldwide. The oil and gas deposits found in the pre-salt layer occur in waters deeper than 2,000 meters, requiring new technologies to facilitate their extraction.

The risers of production are nothing more than pipes that carry oil and gas from the ocean to the surface. In its various geometric configurations (vertical, catenary, lazy waves, etc.), they are extremely slender structural elements, which must withstand dynamic loads from deep currents, surface waves, internal flow and imposed motions, observing the strict design criteria regarding ultimate and service limit states.

The vertical riser will be the focus of this work, which uses mathematical models with few degrees of freedom, known as reduced-order models (ROM), but with adequate capacity to represent the structural response both qualitatively and quantitatively, using non-linear modes as “projection functions” within the non-linear Galerkin method. The non-linear modes were intensively studied in the research group "Dynamics, Stability and Control of Structural Systems" at the *Escola Politécnica* of USP. Because they contain information of higher-order harmonics, they are able to accurately describe the response of the nonlinear system, using a smaller number of modes than the linear modes used in the classical modal superposition method. Procedures based on the method of invariant manifold and the method of multiple scales alike will be applied to analytical continuum models (with infinite number of degrees of freedom). For the reduction of degrees of freedom, a method based on the identification of the virtual works in both the high-hierarchy and the ROM will be used, so that the system under dynamic loading can be studied in a low-dimension phase space.

This research, in addition to academic challenges inherent to the subject has obvious economic and strategic importance for the country.

Keywords: *Dynamic, Vertical riser, Vortex-induced vibrations, Non-linear mode, Reduced-order model.*

1 Capítulo 1

1.1 Introdução

A progressiva escassez mundial de petróleo, na contramão da crescente demanda deste recurso foi a motivação que impulsionou a Petrobrás a enfrentar desafios cada vez maiores na prospecção e produção de petróleo e gás longe da costa brasileira e, agora, atravessando as camadas espessas de sal à procura de novas jazidas.

A mais recente descoberta ocorreu na região do campo de Tupi, na Bacia de Santos, que abriga as maiores jazidas na camada do pré-sal. Os campos de pré-sal possuem 800 km de extensão e 200 km de largura, indo desde o litoral de Santa Catarina até o Espírito Santo. Se viabilizada a exploração, o empreendimento colocará o Brasil entre os dez maiores produtores mundiais de petróleo e o consolidará como uma das maiores potências energéticas do planeta.

Figura 1: Histórico de exploração de petróleo e gás no Brasil (Fonte: Petrobras)

Para alcançar as novas jazidas, a Petrobrás deve estar preparada para vencer, além dos 2 km de profundidade da lâmina d'água, a perfuração de 1 km de rocha/solo (pós-sal), 2 km da camada de sal e 2 km de rocha/solo (pré-sal), totalizando uma profundidade de aproximadamente 7 km.

Figura 2: Espessuras das camadas na região do pré-sal
(Fonte: Site do Jornal Folha de São Paulo datada 31/08/2009)

Figura 3: Perfil típico da região do pré-sal. (Fonte: Petrobras)

É neste contexto que se propõe o estudo dos *risers* de operação, que estão presos a equipamentos no fundo do oceano e à plataforma flutuante, estando submetidos a carregamentos dinâmicos tais como a correnteza marinha, movimentos impostos pela plataforma (decorrentes de ventos e ondas) e o próprio escoamento forçado no interior da tubulação. Entre as configurações de *risers* utilizadas para a exploração em águas profundas ou ultraprofundas citam-se os *riser towers* e os *risers* verticais. O uso dos *risers* verticais é mais econômico do que os *risers* em catenária para profundidades superiores a 1,8 km.

Figura 4: "*Riser Tower*"(extraído da tese[9])

Os "*risers towers*" são um conjunto de *risers* "empacotados" em torno de um tubo central que pode ser utilizado para abrigar instalações ou garantir rigidez mecânica, ou ambos. Esta estrutura é posicionada, por meio de boias, a uma profundidade ótima, na qual se procura minimizar efeitos de ondas e correntes, e conectada às unidades flutuantes por meio de uma série de tubos flexíveis.

1.2 Objetivo

O objetivo deste trabalho é o estudo do comportamento dinâmico não linear dos *risers* verticais sob carregamento dinâmico da correnteza, que pode causar as vibrações induzidas por vórtices, ou *Vortex-Induced Vibrations (VIV)*. Para tanto, adotou-se um modelo de viga esbelta protendida. A formulação das equações não lineares de movimento de um modelo contínuo de barra esbelta, submetida a força normal variável, foi desenvolvida utilizando-se o Princípio de Hamilton. Para a obtenção dessa equação, consideraram-se apenas os carregamentos de peso próprio submerso da estrutura e a imposição de um deslocamento prescrito no topo, correspondente a uma determinada força de protensão, de forma que a estrutura ficasse na configuração vertical e tracionada. Para a caracterização dos modos não lineares de vibração, utilizou-se o método das múltiplas escalas, que foi desenvolvido em MAZZILLI, C.E.N. (2008), segundo o qual as respostas temporais das vibrações modais serão determinadas por meio de expansão assintótica.

Posteriormente, com os modos normais não lineares assim determinados, recuperaram-se as variedades invariantes, que descrevem a estrutura topológica dos modos não lineares em função das variáveis deslocamento e velocidade de uma coordenada generalizada adequada (variáveis modais ou “par mestre”).

A recuperação das variedades invariantes permitiu filtrar as informações intrínsecas dos modos não lineares, o que possibilitou a descrição da dinâmica do sistema em situações gerais.

A partir das relações modais não lineares, que associam os deslocamentos e velocidades de um ponto genérico do eixo do *riser* às variáveis modais, é possível obter os modelos de ordem reduzida, mediante uma projeção do tipo *Galerkin* não linear.

Assim, foi possível realizar a análise dos osciladores modais não lineares homogêneo (vibrações livres) e forçado (interação fluido-estrutura), no caso para o problema da vibração induzida por vórtices. Por fim, foi apresentado um exemplo numérico, em que se realizou uma análise paramétrica.

Estes estudos numéricos permitiram a comparação entre as respostas obtidas com a utilização de modos lineares como funções de projeção, realizada por PONCET, R. (2011), e aquelas obtidas com o modelo proposto neste trabalho, utilizando-se os modos não lineares como funções de projeção e, ainda, aquelas obtidas com o programa comercial Orcaflex, que foi desenvolvido especificamente para resolver

problemas da indústria *Offshore*. A Figura 5 esquematiza a estrutura submetida aos carregamentos de protensão no *hang-off* e peso próprio submerso, além do carregamento proveniente de correnteza de perfil uniforme.

Figura 5: Exemplo de *riser* vertical submetido à correnteza marítima, proporcionando vibrações na estrutura com o desprendimento de vórtices.

1.3 Justificativa

Petróleo e gás estão entre as principais fontes de energia utilizadas no mundo na atualidade, sendo de óbvio interesse econômico e estratégico.

A crescente demanda e a progressiva escassez de óleo e gás motivaram a procura por novas jazidas em regiões inexploradas.

A recente descoberta do Campo de Tupi, localizada na Bacia de Santos, trouxe à engenharia brasileira um novo desafio, ou seja, viabilizar a exploração de petróleo e gás de maneira econômica, segura e com qualidade. Por isso as empresas petrolíferas e as agências de fomento têm investido em pesquisas e laboratórios, em conjunto com as universidades e centros de pesquisas, de modo a desenvolver novas técnicas que garantam a segurança aliada à boa técnica da engenharia, com baixo custo de produção.

Os projetos estruturais da indústria petrolífera devem considerar os efeitos de VIV. A desconsideração deste fenômeno pode implicar acúmulo de danos devido ao fenômeno da fadiga do material estrutural. Uma das formas práticas de combater o fenômeno de VIV é com o uso de *strakes*, que são fitas metálicas aplicadas de forma helicoidal à estrutura tubular dos *risers* e que visam a destruir padrões regulares no desprendimento de vórtices ao longo de seu comprimento

Nesse contexto é que vem a motivação do estudo com *risers* verticais submetidos ao carregamento devido ao desprendimento de vórtices, com ênfase no aprimoramento das técnicas de análises e na utilização de ferramentas matemáticas para análise dinâmica não linear, objetivando uma melhor descrição fenomenológica.

Como proposta dessa dissertação está a representação da interação fluido-estrutura por meio de modelos fenomenológicos do VIV, como o de IWAN e BLEVINS (1974), levando a MOR's com dois osciladores acoplados, um representando o sistema estrutural e outro o fluido.

1.4 Revisão Bibliográfica

Para compreensão dos fenômenos relevantes e comportamento dos *risers* verticais foram realizadas pesquisas bibliográficas relacionadas a modos normais não lineares pelo método das variedades invariantes e pelo método das múltiplas escalas; recuperação das variedades invariantes a partir da resposta temporal obtida por esse último método; obtenção do modelo estrutural de ordem reduzida; e modelagem matemática da interação fluido-estrutura, com ênfase nos mecanismos de emissão de vórtices, levando ao fenômeno de *lock-in*, em que ocorre uma sincronização entre a frequência dominante de vibração da estrutura e a de desprendimento de vórtices.

Com relação aos modos normais não lineares, Rosenberg e Pak, em PAK, C.H., ROSENBERG, R.M. (1998), propuseram uma extensão dos modos lineares definida exclusivamente no espaço de configuração do sistema, o que não se mostrou suficientemente geral. SHAW, S.W., PIERRE, C. (1991) propuseram a redefinição do modo não linear por meio de variedades invariantes, definidas no espaço de fase, com a generalidade pretendida. NAYFEH, A.H., MOOK, D.T. (1979) abordaram a análise modal não linear por meio do método das múltiplas escalas. MAZZILLI, C.E.N., SOARES, M.E.S., BARACHO NETO, O.G.P. (2001) estenderam a técnica proposta por Shaw e Pierre para modelos de elementos finitos de estruturas reticuladas planas. BARACHO NETO, O.G.P. (2003) generalizou a abordagem de Nayfeh e Mook para determinar modos não lineares normais e multimodos em modelos de elementos finitos de estruturas reticuladas planas.

MAZZILLI, C.E.N., SANCHES, C.E.S., BARACHO NETO, O.G.P., WIERCIGROCH, M., KEBER, M. (2008) realizaram um primeiro estudo do *riser* vertical sob carregamento axial. O trabalho apresenta a idealização do *riser* como um modelo de barra de Bernoulli-Euler sob carregamento axial, mas sem variação da força normal ao longo do comprimento da barra. Os estudos foram importantes como uma primeira análise dos modos não lineares utilizando o método das múltiplas escalas. Em SANCHES, C.E.S. (2009) foram realizados diversos estudos do comportamento dinâmico não linear dos *risers* por meio do estudo dos modos não lineares de vibração e controle ativo das vibrações induzidas. Em MAZZILLI, C.E.N. (2008), foram adotadas as mesmas premissas de MAZZILLI, C.E.N., SANCHES, C.E.S., BARACHO NETO, O.G.P., WIERCIGROCH, M., KEBER, M. (2008), a menos do

carregamento axial ao longo do comprimento da barra de Bernoulli-Euler, em decorrência do efeito do peso submerso, chegando a resultados surpreendentes. Esta dissertação está baseada no estudo deste trabalho para descrever o comportamento da dinâmica não linear por meio dos modos não lineares obtidos pelo método das múltiplas escalas.

O problema do modelo de ordem reduzida do *riser* vertical sob ação de VIV foi abordado em um relatório de iniciação científica elaborado pelo aluno PONCET, R. (2011) entretanto, com a utilização dos modos lineares de vibração para obtenção do modelo de ordem reduzida (MOR). Os resultados lá obtidos servirão de comparativo para essa dissertação, que utilizará os modos não lineares com o mesmo objetivo.

O artigo elaborado por MAZZILLI, C.E.N., MONTICELLI, G.C., GALAN NETO, N.A. (2011) abordou a redução de ordem de um modelo de alta hierarquia, por meio dos modos não lineares. Foi de grande importância para compreender o procedimento bem como para comparar qualitativamente modelos de alta hierarquia e de ordem reduzida, para sistemas dinâmicos não lineares.

No que se refere ao mecanismo de emissão e desprendimento de vórtices citam-se trabalhos pioneiros sobre o estudo dos modelos fenomenológicos, iniciando por BISHOP e HASSAN (1964) que sugeriram que o comportamento do fluido podia ser representado por um simples oscilador não linear. HARTEN e CURRIE (1970) aplicaram a equação de *Van der Pol* para representar o fluido. IWAN e BLEVINS (1974) propuseram a mesma linha de raciocínio de BISHOP e HASSAN (1964) com a representação do fluido por um oscilador de *Van der Pol* acoplado ao oscilador (linear) da estrutura, que é excitado pela força de sustentação oscilante proveniente do fluido. PARRA e ARANHA (1996) reavaliaram o trabalho de IWAN e BLEVINS (1974) e propuseram um modelo similar, porém esse último trabalho não será abordado aqui.

O modelo proposto por IWAN e BLEVINS (1974) se apresentou com boa capacidade de reprodução da amplitude de pico para diversas combinações de parâmetros de massa e amortecimento, conforme relatado por Lauro M.Y da Silveira (2009).

FALCO, FOSSATI e RESTA (1999) e FACCHINETTI, DE LANGRE e BIOLLEY (2004) também discutiram osciladores fenomenológicos acoplados do fluido e da estrutura. O primeiro se utiliza de um oscilador não linear dependente da velocidade

e dos deslocamentos de ambos os osciladores. O segundo se utiliza de um oscilador do tipo *Van der Pol*.

1.5 Organização do texto

O texto foi dividido em seis capítulos.

O Capítulo 1 apresenta uma breve contextualização do estudo dos *risers* verticais, além de expor a motivação que localizou o estudo no âmbito da dinâmica não linear.

No Capítulo 2 são firmados alguns conceitos básicos necessários para a modelagem dos *risers* verticais utilizando-se os modos normais não lineares de vibração. Este capítulo resume de forma sucinta as principais ideias das metodologias utilizadas.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação das equações não lineares de movimento do *riser* vertical a partir do Princípio de Hamilton, discutindo-se inicialmente o problema das vibrações livres (equação de movimento homogênea) e, em seguida, o problema da interação fluido-estrutura mediante o acoplamento dos osciladores não lineares que representam cada sub-sistema, sendo que a resposta de um desempenha o papel de uma excitação para o outro. Esse capítulo representa a primeira etapa no estudo para a determinação dos osciladores não lineares de vibração.

O Capítulo 4 baseia-se no trabalho desenvolvido por MAZZILLI, C.E.N. (2008), onde foi aplicado o método das múltiplas escalas à equação de movimento homogênea adimensionalizada, com o objetivo de determinar os modos normais não lineares. O intuito de resumir o trabalho consiste em tornar este texto tão autocontido quanto possível, facilitando o entendimento do método para recuperação das variedades invariantes que caracterizam os modos normais não lineares. Desse modo será possível definir a correlação entre os deslocamentos e velocidades de uma seção genérica do *riser* (“par escravo”) e as coordenadas generalizadas modais da estrutura (“par mestre”).

O Capítulo 5 gera os modelos de ordem reduzida (MOR's), isto é, os osciladores não lineares da estrutura e, posteriormente, do sistema acoplado fluido-estrutura.

No Capítulo 6 é discutido um exemplo numérico, em que se analisa a resposta dinâmica de um *riser* submetido a VIV, com *lock-in* com o primeiro ou com o quarto modo. Evidentemente, utilizando-se as relações modais obtidas a partir da recuperação das variedades invariantes, pode-se determinar a resposta de qualquer “par escravo”. Tais resultados serão comparados aos obtidos por PONCET, R. (2011) e por processamentos no Orcaflex.

No Capítulo 7 serão apresentadas as conclusões finais do trabalho desenvolvido. Além disso, serão feitas propostas de melhorias do modelo analisado em trabalhos futuros.

2 Capítulo 2

2.1 Modos normais não lineares de vibração

A definição de modos não lineares proposta por Shaw e Pierre é:

“Modo normal não linear de vibração é um movimento não forçado que se desenvolve em uma variedade invariante bidimensional no espaço de fase do sistema; essa variedade contém um ponto de equilíbrio e, nesse ponto, é tangente a um autoplano (*eigenplane*) do sistema linearizado em torno do equilíbrio.”

2.2 Variedades Invariantes

As variedades invariantes de um sistema dinâmico não linear, definidas por Shaw e Pierre (1991), caracterizam os modos normais não lineares de vibração. Por meio das relações modais é possível associar os campos de deslocamentos e velocidades às variáveis modais devidamente escolhidas (“par mestre”). Um movimento iniciado sobre esta variedade permanece sempre sobre ela, obedecendo à equação do oscilador modal não linear que lhe é associado.

As relações modais têm significado de filtro de todas as informações dos modos não lineares, o que permitirá descrever a dinâmica dos sistemas não lineares utilizando modelos de ordem reduzida; de fato, essas informações serão utilizadas como *input* na técnica de redução da ordem do modelo.

2.3 Múltiplas escalas

O método das múltiplas escalas permite caracterizar os modos não lineares, sendo que as respostas modais obtidas são determinadas por meio de expansões assintóticas, conforme NAYFEH, A.H, MOOK,D.T.(1979).

A determinação dos modos não lineares por meio deste método pressupõe que as soluções possam ser escritas em forma de série de potências com ordens crescentes de um parâmetro de perturbação ε , adimensional e arbitrário, tal que $0 < \varepsilon < 1$.

A solução de primeira ordem coincide com o modo linear clássico. As correções não lineares irão aparecer nas ordens superiores do parâmetro ε .

2.4 Modelo de Ordem Reduzida

O modelo de ordem reduzida, caracterizado por poucos graus de liberdade, desempenha um papel importante que consiste em permitir o conhecimento qualitativo de um modelo associado de alta hierarquia.

O propósito do modelo de ordem reduzida não é o da substituição do modelo de alta hierarquia por um de ordem reduzida, mas efetuar análises paramétricas e identificar cenários relevantes para orientar a análise do modelo de alta hierarquia, além de reduzir o tempo e custo operacional dos estudos paramétricos.

Há vários métodos de redução da ordem do modelo, sendo que o adotado neste trabalho é do tipo *Galerkin* não linear, utilizando os modos não lineares como funções de projeção.

2.5 Metodologia

Neste trabalho é realizado o estudo do comportamento dinâmico não linear do *riser* vertical. A Figura 6 esquematiza as etapas do estudo, que compreende desde a determinação da equação de movimento até a integração do oscilador modal não linear forçado, sob ação de carregamento transversal decorrente da emissão de vórtices.

Primeiramente é adotado o modelo de barra protendida de Bernoulli Euler submetida à força normal variável. Na primeira etapa são deduzidas as equações de movimento utilizando-se o Princípio de Hamilton, conforme descrito no item 3.1 para vibrações livres e no item 3.2 para vibrações forçadas, no caso de VIV.

Na segunda etapa, de posse das equações de movimento livre, é aplicado o método das múltiplas escalas, item 4.1, quando são obtidos os modos não lineares de vibração, e a frequência modal não linear.

Na terceira etapa são recuperadas as variedades invariantes do sistema não linear por meio dos modos não lineares obtidos no item 4.2. A recuperação dos

coeficientes até ordem cúbica que compõem as relações modais, representados por $a_{1k}, a_{2k}, a_{3k}, \dots, a_{9k}$ e $b_{1k}, b_{2k}, b_{3k}, \dots, b_{9k}$, se fará conforme as equações (169) e (170).

Na quarta etapa, tema do item 5.1, consideram-se as relações modais definidas em função do “par mestre” (deslocamento U_k e velocidade V_k modais), obtidas em 4.2 e impõe-se a igualdade entre os trabalhos virtuais no modelo de alta hierarquia e no modelo de ordem reduzida, de forma que o produto escalar entre forças e deslocamentos virtuais caracteriza uma projeção do tipo *Galerkin* não linear. Ao se impor a igualdade dos trabalhos virtuais, implicitamente se considera que a energia contida no modelo de ordem reduzida seja próxima da do modelo de alta hierarquia. Ainda se pode interpretar que, ao assumir que toda a energia se concentra no(s) modo(s) não linear(es) selecionados para construir o modelo de ordem reduzida, os demais modos se comportam como se fossem rígidos e, portanto, tudo se passa como se equações de vínculos rígidos em quantidade igual ao número de graus de liberdade do modelo de alta hierarquia menos o número de graus de liberdade do modelo de ordem reduzida estivessem sendo introduzidas. O resultado do item 5.1 é o oscilador modal em vibrações livres.

Na sequência, conforme o item 5.2, considerando-se um modelo de ordem reduzida para o *riser* de um único grau de liberdade (hipótese plausível quando ocorre *lock-in*), aplica-se-lhe um carregamento forçado modal que corresponda ao efeito da interação fluido-estrutura, no caso o VIV. Supondo-se que a interação fluido-estrutura possa ser adequadamente descrita por modelos fenomenológicos do tipo IWAN e BLEVINS (1974), distribuídos ao longo do comprimento do *riser* e que as mesmas funções de projeção usadas para construir o modelo de ordem reduzida estrutural sejam também usadas para obter o modelo de ordem reduzida de um grau de liberdade do “oscilador fluido”, chega-se a um sistema de duas equações diferenciais não lineares de segunda ordem, que poderá ser estudado numérica ou analiticamente, por meio de métodos de perturbação. Análises paramétricas podem ser então realizadas, permitindo identificar atratores, sua estabilidade, eventuais bifurcações, integridade das bacias de atração, cenários críticos e até fazer estimativas sobre valores extremos da resposta dinâmica. Naturalmente, recomenda-se que ensaios numéricos correspondentes aos casos críticos sejam realizados nos modelos de alta hierarquia.

No exemplo numérico do Capítulo 6, confrontam-se os coeficientes das relações modais obtidos com a utilização dos modos não lineares para construção do modelo de ordem reduzida com os encontrados no trabalho de iniciação científica de PONCET, R. (2011), em que foram usados os modos lineares para o mesmo propósito.

Em seguida, tanto no problema de vibrações livres quanto forçadas, considerando VIV, são comparadas as respostas no tempo de ambos os modelos de ordem reduzida, após aplicação do método de integração numérica de Runge Kutta de 4ª ordem.

Figura 6: Metodologia do estudo do *Riser Vertical*

Figura 8: Segunda etapa de modelagem. Esquema da barra de Bernoulli-Euler com o *hang-off* fixo.

Na segunda etapa, o ponto do *hang off* é fixado e a dinâmica estudada.

Para ambas as etapas de modelagem consideram-se as condições de contorno $u_l = 0$ para $x = l$, ponto que está fixo ao solo marinho. Nota-se que em $x = 0$, no tempo $t = 0$, que corresponde à primeira etapa de modelagem, a barra sofre um deslocamento $-u_0$ devido ao efeito da aplicação de uma força axial de protensão $N_0(0)$ e ao carregamento axial distribuído ao longo do comprimento da barra. Uma vez que a barra vibra em torno de sua configuração deformada de equilíbrio, que corresponde à segunda etapa de modelagem, o carregamento axial passa a variar no tempo e, também, ao longo do seu comprimento. Em particular, na extremidade $x = 0$, $N_0(t) \geq N_0(0)$, permanecendo constante o deslocamento $u_0(t) = u_0$.

Para efeito do estudo das equações homogêneas não lineares de movimento de um *riser* vertical sem carregamentos dinâmicos aplicados, considerar-se-á a teoria de barras de Bernoulli-Euler.

A seguinte notação será utilizada:

- m para massa por unidade de comprimento;
- p para carregamento axial por unidade de comprimento (representando o peso submerso);

- EA para a rigidez axial da barra;
- EI para a rigidez à flexão da barra.

Considerando a cinemática da barra de Bernoulli-Euler, os deslocamentos de um ponto genérico P podem ser expressos por:

Figura 9: Cinemática da barra de Bernoulli-Euler

$$u_p = u - z \sin \phi \cong u - z w' \quad (1)$$

$$w_p = w + z(\cos \phi - 1) \cong w \quad (2)$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{w'}{1 + u'} \right) \cong w' \quad (3)$$

Assim, considerando que a barra sofra pequenas deformações quadráticas, conforme o tensor de Green-Lagrange, tem-se:

$$\varepsilon_p = u_p' + \frac{1}{2} (u_p')^2 + \frac{1}{2} (w_p')^2 \cong \varepsilon - z w'' \quad (4)$$

Assume-se que $\frac{1}{2} (u_p')^2$ possa ser desconsiderado diante dos demais termos de ε_p . A

deformação axial do eixo da barra, ε , é dada por:

$$\varepsilon \cong u' + \frac{1}{2} (w')^2 \quad (5)$$

A energia cinética, desprezando-se a inércia rotacional, é:

$$K = \int_0^l \frac{m}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (6)$$

Integrando-se por partes, chega-se a:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta K dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l m (\ddot{u} \delta u + \ddot{w} \delta w) dx dt \quad (7)$$

Para a variação da energia potencial total é possível escrever:

$$\delta V = \delta U - \int_0^l p \delta u dx + N_0 \delta u_0 \quad (8)$$

onde:

$$\delta U = \int_0^l \int_A E \varepsilon_p \delta \varepsilon_p dA dx = \int_0^l \int_A E (u' - z w'' + \frac{1}{2} w'^2) (\delta u' - z \delta w'' + w' \delta w') dA dx \quad (9)$$

Após integração por partes:

$$\begin{aligned} \delta U = & -EA \varepsilon_0 \delta u_0 - \int_0^l EA (u'' + w' w'') \delta u dx \\ & - \int_0^l EA (u'' w' + u' w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'') \delta w dx + \int_0^l EI w^{IV} \delta w dx \end{aligned} \quad (10)$$

onde ε_0 é a deformação axial no ponto onde $x=0$. Assim:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta V dt = & (N_0 - EA\varepsilon_0) \delta u_0 - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EA \left(u'' + w'w'' + \frac{P}{EA} \right) \delta u dx dt - \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) \delta w dx dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l EA w^{IV} \delta w dx dt
\end{aligned} \quad (11)$$

O Princípio de Hamilton estabelece que:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta V) dt = 0 \quad (12)$$

Substituindo (7) e (11) na equação (12) tem-se:

$$\begin{aligned}
& -(N_0 - EA\varepsilon_0) \delta u_0 + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[-m\ddot{u} + EA \left(u'' + w'w'' + \frac{P}{EA} \right) \right] \delta u dx dt + \\
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^l \left[-m\ddot{w} + EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) - EIw^{IV} \right] \delta w dx dt = 0
\end{aligned} \quad (13)$$

$$\forall \delta u_0, \delta u, \delta w$$

onde o termo $-(N_0 - EA\varepsilon_0) \delta u_0$ refere-se à primeira etapa de modelagem (Figura 7), problema estático, e o restante da equação (13) refere-se à segunda etapa de modelagem (Figura 8), problema dinâmico.

Para que a equação (13) seja verdadeira para qualquer deslocamento virtual, deve-se ter:

$$-m\ddot{u} + EA \left(u'' + w'w'' + \frac{P}{EA} \right) = 0 \quad (14)$$

$$-m\ddot{w} + EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) - EIw^{IV} = 0 \quad (15)$$

$$N_0 = EA\varepsilon_0 \quad (16)$$

Se o efeito da inércia na direção longitudinal for desprezado, então:

$$u'' + w'w'' + \frac{p}{EA} = 0 \quad (17)$$

Integrando a equação acima, obtém-se:

$$u' + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{px}{EA} = \varepsilon_0(t) \quad (18)$$

Ou, simplificando:

$$\varepsilon(x, t) = u' + \frac{1}{2} w'^2 = \varepsilon_0(t) - \frac{px}{EA} \quad (19)$$

onde a deformação $\varepsilon_0(t)$ pode ser avaliada a partir da equação (18), considerando-se o valor médio de ambos os membros ao longo do comprimento da barra:

$$\varepsilon_0(t) = \frac{u_l - u_0}{l} + \frac{1}{2l} \int_0^l w'^2 dx + \frac{pl}{2EA} \quad (20)$$

Substituindo as equações (18) e (20) para u' e a equação (17) para u'' na equação (15) resultará a equação transversal de movimento:

$$m\ddot{w} + EIw^{IV} - EA \left[\frac{u_l - u_0}{l} + \frac{1}{2l} \int_0^l w'^2 dx + \frac{p}{EA} \left(\frac{l}{2} - x \right) \right] w'' + pw' = 0 \quad (21)$$

ou

$$m\ddot{w} + EIw^{IV} - N(x, t)w'' + pw' = 0 \quad (22)$$

Sendo

$$N(x, t) = N_0(t) - px = \bar{N} + p \left(\frac{l}{2} - x \right) + \frac{EA}{2l} \int_0^l w'^2 dx \quad (23)$$

$$\bar{N} = -\frac{EAu_0}{l} \quad (24)$$

Assim:

$$N_0(t) = N_0(0) + \frac{EA}{2l} \int_0^l w'^2 dx \quad (25)$$

$$N_0(0) = -\frac{EAu_0}{l} + \frac{pl}{2} \quad (26)$$

Uma vez conhecido o deslocamento transversal da barra w , pode-se determinar seu deslocamento axial, conforme MAZZILLI, C.E.N., SANCHES, C.E.S., BARACHO NETO, O.G.P., WIERCIGROCH, M., KEBER, M. (2008):

$$u(x,t) = -\frac{\bar{N}(l-x)}{EA} + \frac{px(l-x)}{2EA} - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dw}{d\xi} \right) d\xi + \frac{x}{2l} \int_0^l w'^2 dx \quad (27)$$

Reescrevendo-se a equação de movimento transversal (22), tem-se:

$$\ddot{w} + \alpha w^{IV} - \beta w'' - \gamma \left(\frac{l}{2} - x \right) w'' + \gamma w' - \mu w'' \int_0^l w'^2 dx = 0 \quad (28)$$

onde:

$$\alpha = \frac{EI}{m} ; \beta = \frac{\bar{N}}{m} ; \gamma = \frac{p}{m} ; \mu = \frac{EA}{2ml} \quad (29)$$

Adimensionalisa-se a equação de movimento (28), definindo-se os parâmetros:

$$v = \frac{w}{l} ; z = \frac{x}{l} ; \tau = \omega_1 t \quad (29)$$

$$\omega_1 = \frac{\pi}{l} \sqrt{\beta + \frac{\pi^2}{l^2} \alpha} \quad (30)$$

onde ω_1 é a frequência do primeiro modo linear considerando-se a força normal média $\bar{N}$, como constante ao longo da extensão da barra.

Assim, é possível obter a equação diferencial de movimento transversal adimensionalizada:

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \hat{\alpha} \frac{\partial^4 v_k}{\partial z^4} - \hat{\beta} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \hat{\gamma} \frac{\partial v_k}{\partial z} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 dz = 0 \quad (31)$$

onde:

$$\hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega_1^2 l^4} ; \hat{\beta} = \frac{\beta}{\omega_1^2 l^2} ; \varepsilon^2 \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega_1^2 l} ; \hat{\mu} = \frac{\mu}{\omega_1^2 l} \quad (31)$$

3.2 Descrição do modelo: equação de movimento da estrutura com “carregamento” de VIV

Para descrever o modelo matemático por intermédio da equação de movimento não homogênea e não linear da estrutura, devido a um “carregamento” de VIV, deve-se, antes de tudo, compreender o fenômeno de interação fluido-estrutura.

Adota-se um modelo fenomenológico para a representação do mecanismo de vibrações induzidas por vórtices.

A estrutura submetida ao carregamento dinâmico de VIV pode ser modelada por um sistema de dois osciladores não lineares acoplados, sendo um da estrutura propriamente dita e outro do fluido.

Ambos os osciladores, o da estrutura e o do fluido, são acoplados entre si, de tal sorte que o movimento do fluido, por meio da força de sustentação, gera uma resposta estrutural forçada, e o movimento da estrutura, por sua vez, gera uma resposta forçada para o movimento do fluido. A força de sustentação está relacionada ao desprendimento alternado de vórtices o que leva ao movimento oscilatório na estrutura, conforme descrito em FALTISEN (1990) e SARPKAYA (2004).

No processo de formação de vórtices, o principal parâmetro em um escoamento incompressível está relacionado à variação do número de Reynolds, que expressa a relação entre as forças inerciais e as forças viscosas, conforme equação abaixo:

$$Re = \frac{\rho_{fluido} U D}{\mu_{fluido}} \quad (32)$$

ρ_{fluido} : densidade do fluido;

μ_{fluido} : viscosidade dinâmica do fluido;

U : velocidade do escoamento não perturbado;

D : diâmetro do cilindro.

Quando o número de Reynolds se aproxima da faixa de $Re = 30$ a $Re = 65$, a região da esteira começa a dar sinais de instabilidade, conforme Figura 10.

Figura 10: Escoamento ao redor do cilindro circular, $Re=32$, $Re=55$ e $Re=65$. Extraído de ASSI(2005) presente na tese de Lauro M.Y.da Silveira [14]

Com a instabilidade apresentada, os vórtices passam a se desprender e serem “convectados”, desenvolvendo, assim, a chamada esteira de *Von Kármán*, ilustrado nas Figura 11 e Figura 12.

Figura 11: Escoamento ao redor circular, $Re=105$. Extraído de VAN DYKE(1982) presente na tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]

Figura 12: Escoamento ao redor de um cilindro circular, $Re=140$. Extraído de VAN DYKE(1982) presente na tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]

A faixa do número de Reynolds aplicável aos *risers offshore* se situa de $400 < Re < 200000$. Nesse intervalo as camadas limites continuam a ter comportamento laminar com a formação de turbilhões junto à face da estrutura.

Para entender os esforços que o mecanismo do VIV provoca na estrutura com o aumento do número de Reynolds, serão apresentadas a seguir as etapas da interação do fluido-estrutura, conforme tese de SILVEIRA, L.M.Y. (2009).

- Primeira etapa: escoamento ao redor da estrutura com separação das camadas cisalhantes, mas sem o desprendimento de vórtices. O campo de pressões pode ser observado na Figura 13. A resultante da força aplicada pelo fluido sobre a estrutura é em linha com a correnteza, por decorrer de um campo de pressões simétrico. Essa força é denominada força de arrasto.

Figura 13: Campo de pressões na parede do cilindro; escoamento separado sem desprendimento de vórtices. Extraído de ASSI (2005), conforme tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]

- Segunda etapa: com o início do desprendimento alternado de vórtices, o campo de pressões é alterado e varia ao longo do tempo, conforme a Figura 14. A assimetria no campo das pressões faz com que a força aplicada pelo fluido à estrutura tenha uma componente na direção do escoamento não perturbado (força de arrasto) e outra componente na direção perpendicular ao escoamento (força de sustentação).

Figura 14: Campo de pressão na parede do cilindro; desprendimento de vórtices iniciado. Extraído de ASSI (2005), conforme tese de Lauro M.Y. da Silveira[14]

- Terceira etapa: durante o processo de emissão e desprendimento alternado de vórtices, a força de arrasto mantém o sentido, mas a força de sustentação inverte o sentido conforme o local de maior vorticidade; portanto a oscilação da força pelo fluido sobre a estrutura se dá principalmente devido à força de sustentação. Essas forças aplicadas pelo fluido são esforços oscilantes e a frequência dessa oscilação está relacionada à frequência de emissão e desprendimento de vórtices denominados *shedding*.
- Quarta etapa: o aumento gradativo da velocidade do escoamento faz com que a frequência associada à emissão e desprendimento de vórtices excite a estrutura com intensidade próxima à de uma frequência natural.
- Quinta etapa: em decorrência da quase-ressonância, a amplitude de oscilação da estrutura aumenta. Nessa fase o movimento da estrutura passa a ter uma grande influência sobre o mecanismo de desprendimento de vórtices, sendo que o *shedding* passa a ser governado pelo movimento da estrutura. Esse fenômeno é denominado de *lock-in*.

Outro adimensional importante para caracterizar o fenômeno da emissão e desprendimento de vórtices, além do número de Reynolds, é o número de Strouhal:

$$St = \frac{f_{\text{fluido}} D}{U} \quad (33)$$

Apesar de o número de Strouhal ser dependente do número de Reynolds, percebe-se que este valor permanece praticamente constante e igual a 0,20, quando $4 \times 10^2 < Re < 2 \times 10^5$, conforme ilustrado na Figura 15.

Figura 15: Curva $St \times Re$. Adaptada de FEY, KONIG, ECKELMANN (1998), conforme tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]

Num cenário em que os efeitos causados na estrutura acabam recaindo em um conjunto “limitado” quanto às amplitudes e frequência de vibração, é vantajoso utilizar-se de modelos fenomenológicos. Esses modelos permitem descrever por meio de equações diferenciais calibradas a partir de dados experimentais, a complexidade teórica envolvida no fenômeno do VIV. Esse modelo matemático consegue representar o caráter oscilatório, autoexcitado e autolimitado quanto à emissão e desprendimento de vórtices ao redor da estrutura do *riser*, conforme descrito por SILVEIRA, L.M.Y. (2009).

Os modelos experimentais são fundamentais para poder calibrar modelos matemáticos que satisfaçam à situação desejada.

Nessa dissertação será adotado o modelo fenomenológico de IWAN e BLEVINS (1974) para descrever o oscilador não linear, via equação de *van der Pol*.

A equação de *van der Pol* é clássica na teoria de sistemas dinâmicos por apresentar uma solução oscilatória, autoexcitada e autolimitada. A equação adimensional de *van der Pol* é :

$$\ddot{y} - \mu_{\text{fluido}} (1 - \dot{y}^2) \dot{y} + y = 0 \quad (34)$$

onde, μ_{fluido} é um número real positivo.

Para descrever o modelo de IWAN e BLEVINS (1974) toma-se o exemplo, apresentado em SILVEIRA, L.M.Y. (2009), que foi retirado do artigo de IWAN e BLEVINS (1974), referente a um cilindro de diâmetro D por unidade de massa, imerso em um fluido de densidade ρ_{fluido} , montado em uma base viscoelástica (constantes k e c), sujeito a um escoamento uniforme com velocidade U . Supõe-se que o cilindro tenha apenas um grau de liberdade, no caso, o deslocamento na direção perpendicular ao escoamento, conforme observado Figura 16.

Figura 16: Cilindro montado em base viscoelástica e sujeito a escoamento uniforme. Extraído da tese de Lauro M.Y. da Silveira [14]

A força de sustentação é oscilatória F_y e decorre da emissão e desprendimento de vórtices, podendo levar ao fenômeno do VIV.

A formulação proposta por IWAN e BLEVINS (1974) buscou uma ligação entre o modelo matemático e os parâmetros físicos do problema.

As seguintes hipóteses foram feitas para que os autores pudessem estabelecer essa correlação:

- Longe da esteira da formação de vórtices considera-se o escoamento invíscido;
- A esteira de vórtices é bem formada e tem frequência definida;

$$J_y = \iiint_A \rho v dx dy \quad (36)$$

onde v é a componente vertical da velocidade do fluido.

Definida a variável que representa a dinâmica do fluido y , de forma que $\dot{y}$ seja a média ponderada da componente transversal do fluxo dentro do volume de controle, tem-se:

$$J_y = a_0 \rho \dot{y} D^2 \quad (37)$$

onde a_0 é uma constante de proporcionalidade.

A aplicação da equação de *Bernoulli* fornece o campo de pressões que, integrado ao longo das linhas AB e CD (vide Figura 17), fica:

$$P_y = 0 \quad (38)$$

com $L_1 \rightarrow \infty$ e L_2 finito.

No caso de a componente oscilatória do fluxo transversal (ao escoamento) à montante do cilindro ser nula, o fluxo da quantidade de movimento ficaria:

$$S_y = \rho u_t \Gamma \quad (39)$$

onde u_t é a velocidade de translação da esteira de vórtices e Γ a circulação de um vórtice. Considera-se que a componente oscilatória do fluxo transversal à montante do cilindro seja muito pequena:

$$S_y = \rho u_t \Gamma + \text{"termos de correção"} \quad (40)$$

Os termos de correção podem ser considerados como uma série ímpar de y e $\dot{y}$. Para simplificar, apenas os termos lineares e cúbicos em $\dot{y}$ serão retidos. Assume-se que y oscile harmonicamente na frequência de desprendimento de vórtices ω_s .

$$S_y = K\rho u_t \omega_s y D - a_1 \rho U D \dot{y} + a_2 \rho \dot{y}^3 D / U \quad (41)$$

onde $a_1, a_2 \ll K$ são constantes adimensionais.

A força do fluido sobre o cilindro depende apenas das médias ponderadas da velocidade e aceleração do fluido; além disso, pode ser calculada com a ajuda de um coeficiente de sustentação que é proporcional ao ângulo relativo entre o escoamento incidente e a componente normal do fluxo. Considerando pequenos deslocamentos, o ângulo é $(\dot{y} - \dot{w}) / U$ e a força é:

$$F_y = a_3 \rho D^2 (\dot{y} - \dot{w}) + a_4 \rho D U (\dot{y} - \dot{w}) \quad (42)$$

Assim, o oscilador do fluido fica:

$$(a_0 \rho D^2) \ddot{y} + (K \rho D u_t \omega_s) y = a_1 \rho U D \dot{y} - a_2 \rho \dot{y}^3 D / U - \{a_3 \rho D^2 (\ddot{y} - \ddot{w}) + a_4 \rho D U (\dot{y} - \dot{w})\} \quad (43)$$

Já o oscilador elástico pode ser escrito na forma:

$$\begin{aligned} & \text{Primeiro membro da equação do oscilador livre da estrutura} \\ & = a_3 \rho D^2 (\ddot{y} - \ddot{w}) + a_4 \rho D U (\dot{y} - \dot{w}) \end{aligned} \quad (44)$$

O modelo fenomenológico é obtido por meio de um sistema acoplado com as duas equações (47) e (48). Para determinação dos coeficientes, IWAN e BLEVINS (1974) realizaram o estudo de duas situações. A primeira com um cilindro rígido estacionário e a segunda com movimento forçado, buscando a faixa de frequência em *lock-in*.

Com base em resultados experimentais da literatura, IWAN e BLEVINS (1974) chegaram ao seguinte conjunto de parâmetros:

$$\begin{aligned}
a_0 &= 0,48 \\
a_1 &= 0,44 \\
a_2 &= 0,20 \\
a_3 &= 0 \\
a_4 &= 0,38
\end{aligned} \tag{45}$$

Assim o sistema de equação acoplado dos osciladores não lineares do fluido e da estrutura fica:

$$\begin{aligned}
\ddot{w} + \alpha w^{IV} - \beta w'' - \gamma \left(\frac{\ell}{2} - z \right) w'' + \gamma w' - \mu w'' \int_0^\ell w'^2 dx &= \frac{a_3 \rho_{fl} D^2}{\rho A} (\ddot{y} - \ddot{w}) + \frac{a_4 \rho_{fl} D U_f}{\rho A} (\dot{y} - \dot{w}) \\
\ddot{y} + \left[\frac{U_f}{D} (a_4' - a_1') + \frac{a_2'}{U_f D} \dot{y}^2 \right] \dot{y} + \frac{K' u_t \omega_s}{D} y &= a_3' \ddot{w} + a_4' \frac{U_f}{D} \dot{w}
\end{aligned} \tag{46}$$

Na forma adimensional, estas equações ficam:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \hat{\alpha} \frac{\partial^4 v_k}{\partial z^4} - \hat{\beta} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} - \varepsilon \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} + \varepsilon \hat{\gamma} \frac{\partial v_k}{\partial z} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 dz \\
= C_m \left(\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} \right) + C_a \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} - \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right)
\end{aligned} \tag{47}$$

$$\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} + \beta_1 \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} + \beta_2 \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} \right)^3 + \beta_3 \zeta_k = \beta_4 \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \beta_5 \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \tag{48}$$

com a seguinte notação:

$$\begin{aligned}
v &= \frac{w}{D}; z = \frac{x}{\ell}; \zeta = \frac{y}{D}; \tau = \omega_1 t; \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\beta + \frac{\pi^2}{\ell^2} \alpha}; cm = \frac{a_3 \rho_{fl} D^2}{\rho A}; ca = \frac{a_4 \rho_{fl} D U_f}{\rho A} \\
\hat{\alpha} &= \frac{\alpha}{\omega_1^2 l^4}; \hat{\beta} = \frac{\beta}{\omega_1^2 l^2}; \varepsilon^2 \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega_1^2 l}; \hat{\mu} = \frac{\mu}{\omega_1^2 l} \\
\beta_1 &= \frac{(a_4' - a_1') U_f}{\omega_1 D}; \beta_2 = \frac{a_2' \omega_1 D}{U_f}; \beta_3 = \frac{K' u_\ell \omega_s}{\omega_1^2 D}; \beta_4 = a_3'; \beta_6 = \frac{a_4' U_f}{\omega_1 D}
\end{aligned} \tag{49}$$

4 Capítulo 4

Este capítulo irá reproduzir a determinação dos modos não lineares utilizando-se o método das múltiplas escalas, conforme se faz em MAZZILLI, C.E.N. (2008). Posteriormente será demonstrada a técnica de recuperação das variedades invariantes, que faz parte do escopo dessa dissertação. A técnica de recuperação tem por objetivo determinar as relações modais entre os “pares escravos” (coordenadas e velocidades generalizadas do modelo contínuo) e o “par mestre” (coordenada e velocidade generalizada modal). A determinação dessas relações modais permitirá seguir para o próximo passo que será a obtenção do oscilador modal não linear representativo da movimento da estrutura, com sua extensão ao problema “forçado”, mediante acoplamento com o oscilador modal não linear representativo do movimento do fluido, conforme se discutirá no capítulo 5.

4.1 Determinação dos modos não lineares

A aplicação do método das múltiplas escalas ao problema de determinação de modos não lineares de *risers* verticais baseia-se em MAZZILLI, C.E.N. (2008).

Segundo este procedimento, os modos não lineares são caracterizados por meio da resposta no domínio do tempo para as coordenadas generalizadas, na forma de expansões assintóticas de um parâmetro adimensional arbitrário, ε , sendo $0 < \varepsilon < 1$, que pondera a contribuição de soluções de diferentes ordens de aproximação. Estas soluções, a determinar, são funções que dependem de diferentes escalas do tempo e do espaço. Devem representar pequenas correções à série assintótica e, portanto, não podem conter termos seculares. A eliminação desses últimos, leva às chamadas *solvability conditions*, que permitem determinar as amplitudes e frequências da resposta, com suas eventuais modulações.

$$v_k(z, \tau) = \varepsilon v_1(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) + \varepsilon^2 v_2(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) + \dots \quad (50)$$

Pelas características do problema, faz-se, efetivamente, necessário usar escalas temporais e espaciais:

$$\tau_j = \varepsilon^j \tau \quad (51)$$

$$z_j = \varepsilon^j z \quad (52)$$

com $j = 0, 1, 2, \dots$

Também as derivadas em relação à variável adimensional τ podem ser expressas como séries de potências das derivadas em relação às escalas temporais:

$$D_j^q = \frac{\partial^q}{\partial \tau_j^q} \quad (53)$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau} = D_0 + \varepsilon D_1 + \varepsilon^2 D_2 + \dots \quad (54)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} = D_0^2 + 2\varepsilon D_0 D_1 + \varepsilon^2 (D_1^2 + 2D_0 D_2) + \dots \quad (55)$$

Analogamente, as derivadas em relação à variável adimensional z podem ser expressas como séries de potências das derivadas em relação às escalas espaciais:

$$\Delta_j^q = \frac{\partial^q}{\partial z_j^q} \quad (56)$$

$$\frac{\partial}{\partial z} = \Delta_0 + \varepsilon \Delta_1 + \varepsilon^2 \Delta_2 + \dots \quad (57)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} = \Delta_0^2 + 2\varepsilon \Delta_0 \Delta_1 + \varepsilon^2 (\Delta_1^2 + 2\Delta_0 \Delta_2) + \dots \quad (58)$$

$$\frac{\partial^4}{\partial z^4} = \Delta_0^4 + 4\varepsilon \Delta_0^3 \Delta_1 + \varepsilon^2 (6\Delta_0^2 \Delta_1^2 + 4\Delta_0^3 \Delta_2) + \dots \quad (59)$$

As equações (50), (53) a (59) são substituídas na equação diferencial de movimento transversal (31). Essa substituição carregará os termos ε de várias ordens. Assim o próximo passo será separar os termos de mesma ordem na potência de ε para caracterizar os modos não lineares.

4.1.1 Equação de ordem ε

A equação de ordem ε leva a:

$$D_0^2 v_1 + \hat{\alpha} \Delta_0^4 v_1 - \hat{\beta} \Delta_0^2 v_1 = 0 \quad (60)$$

A solução v_1 deve satisfazer às condições de contorno:

$$v_1(0, \tau) = v_1(l, \tau) = \Delta_0^2 v_1(0, \tau) = \Delta_0^2 v_1(l, \tau) = 0 \quad (61)$$

Assim, a solução v_1 pode ser escrita como:

$$v_1(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) = \sum_k v_{1k}(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) \quad (62)$$

$$v_{1k}(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) = r_{1k}(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) \text{sen}(\hat{\omega}_k \tau_0) + s_{1k}(z_0, z_1, \dots, \tau_0, \tau_1, \dots) \cos(\hat{\omega}_k \tau_0) \quad (63)$$

Substituindo (62) e (63) em (60) obtêm-se:

$$r_{1k} = R_{1k} \text{sen}(k\pi z_0) \quad (64)$$

$$s_{1k} = S_{1k} \text{sen}(k\pi z_0) \quad (65)$$

$$\hat{\omega}_k = k\pi \sqrt{\hat{\beta} + k^2 \pi^2 \hat{\alpha}} \quad (66)$$

onde $\hat{\omega}_k$ é a frequência linear de um modo k , normalizada em relação a ω_1 , levando em conta a rigidez geométrica e a de flexão. De acordo com MAZZILLI, C.E.N. (2008), para os casos de *risers* longos, o que prevalece é a rigidez geométrica.

4.1.2 Equação de ordem ε^2

A equação de ordem ε^2 leva a:

$$\begin{aligned} D_0^2 v_{2k} + \hat{\alpha} \Delta_0^4 v_{2k} - \hat{\beta} \Delta_0^2 v_{2k} = & -2D_0 D_1 v_{1k} - 4\hat{\alpha} \Delta_0^3 \Delta_1 v_{1k} - 2\hat{\beta} \Delta_0 \Delta_1 v_{1k} = \\ & \left[-2\hat{\omega}_k D_1 R_{1k} \sin(k\pi z_0) - 2k\pi (\hat{\beta} - 2k^2 \pi^2 \hat{\alpha}) \Delta_1 S_{1k} \cos(k\pi z_0) \right] \cos(\hat{\omega}_k \tau_0) + \\ & \left[2\hat{\omega}_k D_1 S_{1k} \sin(k\pi z_0) - 2k\pi (\hat{\beta} - 2k^2 \pi^2 \hat{\alpha}) \Delta_1 R_{1k} \cos(k\pi z_0) \right] \sin(\hat{\omega}_k \tau_0) \end{aligned} \quad (67)$$

Para eliminar os termos seculares impõem-se as condições de solvabilidade:

$$D_1 R_{1k} = D_1 S_{1k} = \Delta_1 R_{1k} = \Delta_1 S_{1k} = 0 \quad (68)$$

4.1.3 Equação de ordem ε^3 :

$$\begin{aligned} D_0^2 v_{3k} + \hat{\alpha} \Delta_0^4 v_{3k} - \hat{\beta} \Delta_0^2 v_{3k} = & -2D_0 D_2 v_{1k} - 4\hat{\alpha} \Delta_0^3 \Delta_2 v_{1k} + \hat{\gamma} (0.5 - z_0) \Delta_0^2 v_{1k} - \hat{\gamma} \Delta_0 v_{1k} \\ & + \hat{\mu} \Delta_0^2 v_{1k} \int_0^1 (\Delta_0 v_{1k})^2 dz + \left\{ -2\hat{\omega}_k D_2 R_{1k} + k^2 \pi^2 \hat{\gamma} S_{1k} (S_{1k}^2 + R_{1k}^2) \right\} \sin(k\pi z_0) + \\ & k\pi \left[2(\hat{\beta} + 2k^2 \pi^2 \hat{\alpha}) \Delta_2 S_{1k} - \hat{\gamma} S_{1k} \right] \cos(k\pi z_0) \} \cos(\hat{\omega}_k \tau_0) + \{ [2\hat{\omega}_k D_2 R_{1k} + \\ & k^2 \pi^2 \hat{\gamma} R_{1k} (0.5 - z_0) - 3/8 k^4 \pi^4 \hat{\mu} R_{1k} (S_{1k}^2 + R_{1k}^2)] \sin(k\pi z_0) \\ & + k\pi \left[2(\hat{\beta} + 2k^2 \pi^2 \hat{\alpha}) \Delta_2 R_{1k} - \hat{\gamma} R_{1k} \right] \cos(k\pi z_0) \} \sin(\hat{\omega}_k \tau_0) \\ & + 1/8 k^4 \pi^4 \hat{\mu} S_{1k} (3R_{1k}^2 - S_{1k}^2) \sin(k\pi z_0) \cos(3\hat{\omega}_k \tau_0) \\ & - 1/8 k^4 \pi^4 \hat{\mu} R_{1k} (3S_{1k}^2 - R_{1k}^2) \sin(k\pi z_0) \cos(3\hat{\omega}_k \tau_0) \end{aligned} \quad (69)$$

Na equação (69) é necessário impor as seguintes condições, para eliminação dos termos seculares:

$$-2\hat{\omega}_k D_2 R_{1k} + k^2 \pi^2 \hat{\gamma} S_{1k} \left(\frac{1}{2} - z_0 \right) - \frac{3}{8} k^4 \pi^4 \hat{\mu} S_{1k} (S_{1k}^2 + R_{1k}^2) = 0 \quad (70)$$

$$-2\hat{\omega}_k D_2 S_{1k} + k^2 \pi^2 \hat{\gamma} R_{1k} \left(\frac{1}{2} - z_0 \right) - \frac{3}{8} k^4 \pi^4 \hat{\mu} R_{1k} (S_{1k}^2 + R_{1k}^2) = 0 \quad (71)$$

$$2\left(\hat{\beta} + 2k^2\pi^2\hat{\alpha}\right)\Delta_2 S_{1k} - \hat{\gamma} S_{1k} = 0 \quad (72)$$

$$2\left(\hat{\beta} + 2k^2\pi^2\hat{\alpha}\right)\Delta_2 R_{1k} - \hat{\gamma} R_{1k} = 0 \quad (73)$$

Das duas equações anteriores é possível obter:

$$R_{1k} = R_{0k} e^{\hat{\eta}_k z_k} \quad (74)$$

$$S_{1k} = S_{0k} e^{\hat{\eta}_k z_k} \quad (75)$$

$$\hat{\eta}_k = \frac{\hat{\gamma}}{2\left(\hat{\beta} + 2k^2\pi^2\hat{\alpha}\right)} \quad (76)$$

Das duas primeiras equações (70) a (73) vem:

$$R_{0k} (D_2 R_{0k}) + S_{0k} (D_2 S_{0k}) = 0 \quad (77)$$

E, após integração,

$$R_{0k}^2 S_{0k}^2 = A_K^2 = \text{const} \quad (78)$$

Definindo-se θ_k tal que:

$$\text{sen}\theta_k = \frac{R_{0k}}{A_k} \quad (79)$$

$$\cos\theta_k = \frac{S_{0k}}{A_k} \quad (80)$$

a equação (78) fica automaticamente satisfeita. (79) e (80) em (70) a (73), resulta a equação diferencial em $\theta_k(\tau_2)$:

$$D_2(\text{sen}\theta_k) = -\frac{k^2\pi^2}{2\hat{\omega}_k} \left[\hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z_0 \right) + \frac{3k^2\pi^2}{8} \hat{\mu} A_K^2 e^{2\hat{\eta}_k z_k} \right] \quad (81)$$

ou

$$D_2\theta_k = -\frac{k^2\pi^2}{2\hat{\omega}_k} \left[\hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z_0 \right) + \frac{3k^2\pi^2}{8} \hat{\mu} A_k^2 e^{2\hat{\eta}_k z_2} \right] \quad (82)$$

E finalmente:

$$\theta_k = \theta_{0k} - \frac{k^2\pi^2}{2\hat{\omega}_k} \left[\hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z_0 \right) + \frac{3k^2\pi^2}{8} \hat{\mu} A_k^2 e^{2\hat{\eta}_k z_2} \right] \tau_2 \quad (83)$$

Portanto, a solução da equação (69) pode ser escrita da seguinte forma:

$$v_{3k} = \left(R_{3k} \operatorname{sen}(3\hat{\omega}_k \tau_0) + S_{3k} \cos(3\hat{\omega}_k \tau_0) \right) \operatorname{sen}(k\pi z_0) \quad (84)$$

$$R_{3k} = \frac{k^4\pi^4}{64\hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} A_k^3 e^{3\hat{\eta}_k z_2} \operatorname{sen}(3\theta_k) \quad (85)$$

$$S_{3k} = \frac{k^4\pi^4}{64\hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} A_k^3 e^{3\hat{\eta}_k z_2} \cos(3\theta_k) \quad (86)$$

O modo não linear para um modo k até ordem ε^3 pode ser descrito por meio da seguinte resposta no domínio do tempo:

$$v_k = (\varepsilon A_k) \operatorname{sen}(k\pi z) e^{\varepsilon^2 \hat{\eta}_k z} \left[\cos(\Omega_k \tau - \theta_{0k}) + \frac{k^4\pi^4}{64\hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} (\varepsilon A_k)^2 e^{2(\varepsilon^2 \hat{\eta}_k)z} \right] \quad (87)$$

Devendo-se notar que a frequência da resposta depende de forma não linear da amplitude do movimento e, ainda mais surpreendentemente, varia ao longo do comprimento do *riser* como consequência da variação de sua rigidez geométrica.

$$\hat{\Omega}_k = \hat{\omega}_k \left\{ 1 + \frac{k\pi^2}{2\hat{\omega}_k^2} \left[\hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) + \frac{3k^2\pi^2}{8} \hat{\mu} (\varepsilon A_k)^2 e^{2(\varepsilon^2 \hat{\eta}_k)z} \right] \right\} \quad (88)$$

4.2 Recuperação das variedades invariantes

O objetivo deste item é caracterizar as relações modais que descrevem os modos não lineares de vibração do modelo contínuo do *riser* vertical, a partir da resposta no domínio do tempo obtida no item anterior, conforme equações (87) e (88). De posse dessas variedades invariantes, será possível, por meio da técnica de modelagem de ordem reduzida, caracterizar a dinâmica não linear dos osciladores modais em vibrações livres ou forçadas.

Pode-se escrever os deslocamentos transversais adimensionais e as correspondentes velocidades, para certo modo k , como séries de potências até ordem cúbica:

$$\begin{aligned} v_k = & a_{1k}U_k + a_{2k}V_k + a_{3k}U_k^2 + a_{4k}U_kV_k + a_{5k}V_k^2 + a_{6k}U_k^3 + a_{7k}U_k^2V_k \\ & + a_{8k}U_kV_k^2 + a_{9k}V_k^3 \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} \dot{v}_k = & b_{1k}U_k + b_{2k}V_k + b_{3k}U_k^2 + b_{4k}U_kV_k + b_{5k}V_k^2 + b_{6k}U_k^3 + b_{7k}U_k^2V_k \\ & + b_{8k}U_kV_k^2 + b_{9k}V_k^3 \end{aligned} \quad (90)$$

Uma vez determinados os coeficientes $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{9k}$ e $b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{9k}$, torna-se possível caracterizar as relações modais que permitem projetar a dinâmica do sistema sobre as variedades bidimensionais caracterizadas pelo “par mestre” (U_k, V_k) .

A variável modal $U_k = v_k(\bar{z}, \tau)$ é convenientemente escolhida para uma abscissa $\bar{z}$ de sorte que:

$$\text{sen}(k\pi\bar{z}) = 1 \quad (91)$$

$$k\pi\bar{z} = \frac{\pi}{2} \rightarrow \bar{z} = \frac{1}{2k} \quad (92)$$

Assim, o deslocamento modal, na abscissa $\bar{z}$, é definido por:

$$U_k = v_k(\bar{z}, \tau) = (\varepsilon A_k) e^{(\varepsilon^2 \eta_k)/2k} \left[\cos(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}) + \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} (\varepsilon A_k)^2 e^{(\varepsilon^2 \eta_k)/2k} \cos 3(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}) \right] \quad (93)$$

A frequência modal associada vale:

$$\hat{\Omega}_k(\bar{z}) = \hat{\omega}_k \left\{ 1 + \frac{(k\pi)^2}{2\hat{\omega}_k^2} \left[\hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2k} \right) + \frac{3k^2 \pi^2}{8} \hat{\mu} (\varepsilon A_k)^2 e^{(\varepsilon^2 \eta_k)/k} \right] \right\} \quad (94)$$

Simplificando:

$$v_k(\bar{z}) = \hat{a}_k \cos(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}) + \hat{b}_k \cos 3(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}) \quad (95)$$

onde:

$$\hat{a}_k = (\varepsilon A_k) e^{(\varepsilon^2 \eta_k)/2k} \quad (96)$$

$$\hat{b}_k = (\varepsilon A_k)^3 e^{3(\varepsilon^2 \eta_k)/2k} \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} = \hat{a}_k^3 \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} \quad (97)$$

Para a velocidade modal, no ponto $\bar{z}$, $\dot{U}_k = \dot{v}_k(\bar{z}, \tau)$ tem-se:

$$V_k = \dot{U}_k = \dot{v}_k(\bar{z}, \tau) = -\hat{\Omega}_k \hat{a}_k \sin(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}) - 3\hat{\Omega}_k \hat{b}_k \sin(3\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}) \quad (98)$$

Introduz-se, agora, a notação $\hat{c}_k = -\hat{\Omega}_k \hat{a}_k$, $\hat{d}_k = \hat{\Omega}_k \hat{b}_k$ e $\hat{\theta}_k = \hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k}$.

Assim:

$$U_k = \hat{a}_k \cos \hat{\theta}_k + \hat{b}_k \cos 3\hat{\theta}_k \quad (99)$$

$$V_k = \dot{U}_k = \hat{c}_k \sin \hat{\theta}_k - 3\hat{d}_k \sin 3\hat{\theta}_k \quad (100)$$

Re-escrevem-se as expressões acima na forma:

$$U_k = \left(\hat{a}_k - 3\hat{b}_k \right) \cos \hat{\theta}_k + 4\hat{b}_k \cos^3 \hat{\theta}_k \quad (101)$$

$$V_k = \left(\hat{c}_k - 9\hat{d}_k \right) \sin \hat{\theta}_k + 12\hat{d}_k \sin^3 \hat{\theta}_k \quad (102)$$

Para o deslocamento modal em uma abscissa qualquer $\bar{z}$, tem-se:

$$v_k = \hat{a}_k \cos \left(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k} \right) + \hat{b}_k \cos 3 \left(\hat{\Omega}_k \tau - \theta_{0k} \right) \quad (103)$$

sendo que

$$\hat{a}_k = (\varepsilon A_k) e^{(\varepsilon^2 \eta_k) z} \sin(k\pi z) \rightarrow \hat{a}_k = \hat{a}_k e^{(\varepsilon^2 \eta_k) \left(z - \frac{1}{2k} \right)} \sin(k\pi z) \quad (104)$$

$$\hat{b}_k = (\varepsilon A_k)^3 e^{3(\varepsilon^2 \eta_k) z} \sin(k\pi z) \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} \rightarrow \hat{b}_k = \hat{b}_k e^{3(\varepsilon^2 \eta_k) \left(z - \frac{1}{2k} \right)} \sin(k\pi z) \quad (105)$$

Por comodidade, adota-se:

$$f(z) = e^{(\varepsilon^2 \eta_k) \left(z - \frac{1}{2k} \right)} \quad (106)$$

Assim:

$$\hat{a}_k = \hat{a}_k f(z) \sin(k\pi z) \quad (107)$$

$$\hat{b}_k = \hat{b}_k f(z)^3 \sin(k\pi z) \quad (108)$$

A frequência modal para a abscissa genérica $\bar{z}$, em função da frequência referida à abscissa $\bar{z} = \frac{1}{2k}$ do ponto onde foi definido o deslocamento modal U_k , proveniente da equação geral é:

$$\hat{\Omega}_k = \hat{\hat{\Omega}}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \quad (109)$$

sendo:

$$\Delta\hat{\Omega}_k = \hat{\omega}_k \left\{ \frac{(k\pi)^2}{2\hat{\omega}_k^2} \left[-\hat{\gamma} \left(z - \frac{1}{2k} \right) + \frac{3k^2\pi^2}{8} \hat{\mu} (\varepsilon A_k)^2 \left(e^{2\varepsilon^2\eta_k z} - e^{\varepsilon^2\eta_k/k} \right) \right] \right\} \quad (110)$$

Para determinação dos coeficientes $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{9k}$, retoma-se a equação do deslocamento transversal:

$$\begin{aligned} v_k(z) = & \hat{a}_k f(z) \sin(k\pi z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \cos \hat{\theta}_k - \hat{a}_k f(z) \sin(k\pi z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \sin \hat{\theta}_k + \\ & \hat{b}_k f(z)^3 \sin(k\pi z) \cos 3(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \left(4 \cos^3 \hat{\theta}_k - 3 \cos \hat{\theta}_k \right) - \\ & \hat{b}_k f(z)^3 \sin(k\pi z) \sin 3(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \left(3 \sin \hat{\theta}_k - 4 \sin^3 \hat{\theta}_k \right) \end{aligned} \quad (111)$$

Esta expressão deve ser identificada à expansão até termos cúbicos que caracteriza a relação modal, conforme se indica a seguir:

$$\begin{aligned}
v_k(z) = & a_{1k}U_k + a_{2k}V_k + a_{3k}U_k^2 + a_{4k}U_kV_k + a_{5k}V_k^2 + a_{6k}U_k^3 + a_{7k}U_k^2V_k + a_{8k}U_kV_k^2 + a_{9k}V_k^3 = \\
& \hat{a}_k f(z) \sin(k\pi z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \cos \hat{\theta}_k - \hat{a}_k f(z) \sin(k\pi z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \sin \hat{\theta}_k + \\
& \hat{b}_k f(z)^3 \sin(k\pi z) \cos 3(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \left(4 \cos^3 \hat{\theta}_k - 3 \cos \hat{\theta}_k \right) - \\
& \hat{b}_k f(z)^3 \sin(k\pi z) \sin 3(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \left(3 \sin \hat{\theta}_k - 4 \sin^3 \hat{\theta}_k \right)
\end{aligned} \tag{112}$$

Após substituição das expressões (101) e (102) que definem U_k e V_k , e identificação de termos correspondentes em ambos os membros de (112), chega-se a:

$$a_{1k} = f(z) \sin(k\pi z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \tag{113}$$

$$a_{2k} = \frac{f(z)}{\hat{\Omega}_k} \sin(k\pi z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \tag{114}$$

$$a_{3k} = a_{4k} = a_{5k} = 0 \tag{115}$$

$$a_{6k} = \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[f(z)^3 \cos(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - f(z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{116}$$

$$a_{7k} = 3 \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2 \hat{\Omega}_k} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[f(z)^3 \sin(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - 3 f(z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{117}$$

$$a_{8k} = 3 \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2 \hat{\Omega}_k^2} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[f(z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - f(z)^3 \cos(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{118}$$

$$a_{9k} = \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2 \hat{\Omega}_k^3} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[3 f(z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - f(z)^3 \sin(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{119}$$

Analogamente se procede para a expressão de $\dot{v}_k$, determinando os coeficientes

$$b_{1k}, b_{2k}, \dots, b_{9k}.$$

$$\begin{aligned}
\dot{v}_k(z) = & b_{1k}U_k + b_{2k}V_k + b_{3k}U_k^2 + b_{4k}U_kV_k + b_{5k}V_k^2 + b_{6k}U_k^3 + b_{7k}U_k^2V_k + b_{8k}U_kV_k^2 + b_{9k}V_k^3 = \\
& -\hat{a}_k f(z) \sin(k\pi z) \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \sin \hat{\theta}_k \\
& -\hat{a}_k f(z) \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \sin(k\pi z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \cos \hat{\theta}_k \\
& -3\hat{b}_k f(z)^3 \sin(k\pi z) \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \cos(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \left(3\sin \hat{\theta}_k - 4\sin^3 \hat{\theta}_k \right) \\
& -3\hat{b}_k f(z)^3 \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \sin(k\pi z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \left(4\cos^3 \hat{\theta}_k - 3\cos \hat{\theta}_k \right)
\end{aligned} \tag{120}$$

Assim, os coeficientes que definem as velocidades são:

$$b_{1k} = -f(z) \sin(k\pi z) \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \tag{121}$$

$$b_{2k} = \frac{f(z)}{\hat{\Omega}_k} \sin(k\pi z) \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \tag{122}$$

$$b_{3k} = b_{4k} = b_{5k} = 0 \tag{123}$$

$$b_{6k} = \frac{k^4 \pi^4}{64 \hat{\omega}_k^2} \hat{\mu} \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right) \sin(k\pi z) \left[f(z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - 3f(z)^3 \sin(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{124}$$

$$b_{7k} = 9 \frac{k^4 \pi^4 \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right)}{64 \hat{\omega}_k^2 \hat{\Omega}_k} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[-f(z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) + f(z)^3 \cos(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{125}$$

$$b_{8k} = -3 \frac{k^4 \pi^4 \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right)}{64 \hat{\omega}_k^2 \hat{\Omega}_k^2} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[f(z) \sin(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - 3f(z)^3 \sin(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{126}$$

$$b_{9k} = 3 \frac{k^4 \pi^4 \left(\hat{\Omega}_k + \Delta\hat{\Omega}_k \right)}{64 \hat{\omega}_k^2 \hat{\Omega}_k^3} \hat{\mu} \sin(k\pi z) \left[f(z) \cos(\Delta\hat{\Omega}_k \tau) - f(z)^3 \cos(3\Delta\hat{\Omega}_k \tau) \right] \tag{127}$$

4.3 Comparação do mapa de fase determinado diretamente pelo método das múltiplas escalas e pelas relações modais

No artigo MAZZILLI, C.E.N., NETO, N.A.G., YAMAO, M.. (2012) comparou-se a trajetória no plano de fase da solução encontrada pelo método das múltiplas escalas e pelas relações modais conforme descrito no item anterior.

Nesta análise foi eliminada a pulsação (*wobbling*) dos termos das variedades "invariantes", que são descritas pelos a_{ik} e b_{ik} dependentes do tempo, fazendo-se $\Delta\hat{\Omega} \cong 0$. Assim, os termos a_{ik} e b_{ik} tornam-se independentes do tempo, caracterizando efetivamente variedades invariantes conforme a definição de Shaw e Pierre.

Portanto, a título de ilustração, refere-se ao exemplo discutido em MAZZILLI, C.E.N., NETO, N.A.G., YAMAO, M.. (2012), em que foram utilizados os seguintes dados de entrada para o *riser*:

$E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m² - módulo de elasticidade;

$A = 1,1 \times 10^{-2}$ m² - área da seção transversal;

$I = 4,75 \times 10^{-5}$ m⁴ - momento inércia;

$m = 141,24$ kg/m - massa por unidade de comprimento;

$p = 727$ N/m - peso por unidade de comprimento;

$N_0 = 2 \times 10^6$ N - força de protensão inicial no topo ($t=0$);

$N_l = 6,914 \times 10^5$ N - força de protensão inicial na base ($t=0$);

$k = 1$ - modo estudado;

$\varepsilon = 0,10$ - parâmetros adimensionais adotados ($0 < \varepsilon < 1$).

Para o comprimento foram analisadas três posições de l do *riser*.

Para $0,25l$ têm-se:

Figura 18: Mapa de fase projetado - Método das múltiplas escalas em $0,25l$.

Figura 19: Mapa de fase recuperado pelas relações modais em $0,25l$.

Figura 20: Comparação dos mapas de fase das duas técnicas em $0,25l$.

Para $0,5l$ têm-se:

Figura 21: Mapa de fase projetado - Método das múltiplas escalas em $0,5l$.

Figura 22: Mapa de fase recuperado pelas relações modais em $0,5l$.

Figura 23: Comparação dos mapas de fase das duas técnicas em $0,5l$.

Para $0,75l$ têm-se:

Figura 24: Mapa de fase projetado - Método das múltiplas escalas em $0,75l$.

Figura 25: Mapa de fase recuperado pelas relações modais em $0,75l$.

Figura 26: Comparação dos mapas de fase das duas técnicas em $0,75l$.

Analisando-se os gráficos é possível notar que para o ponto localizado a $0,5l$ (par mestre), a recuperação da variedade "invariante" conserva a simetria do mapa de fase e reproduz exatamente a mesma solução obtida pelo método das múltiplas escalas. O mesmo já não é possível de se afirmar para os pontos a $0,25l$ e $0,75l$, ambos pares escravos, cuja simetria foi perdida durante a recuperação da variedade. Esta quebra de simetria não é desejável e evidencia a necessidade de melhorias na formulação dos modos não lineares.

5 Capítulo 5

Neste capítulo é abordada a determinação dos osciladores modais equivalentes por meio do método de Galerkin não linear, impondo-se a igualdade do trabalho virtual dos modelos de alta hierarquia (sistema contínuo, de infinitos graus de liberdade) e o modelo de ordem reduzida.

Inicialmente, é caracterizado o oscilador modal representativo da estrutura sob vibrações livres, para, na sequência, propor o par de osciladores modais acoplados, um para a estrutura e outro para o fluido, de forma a estudar o fenômeno de *lock-in* para as vibrações induzidas por vórtices.

5.1 Determinação do oscilador livre

Para se obter a equação do oscilador livre que caracteriza o modo não linear k do riser, faz-se, inicialmente, a especialização da equação de movimento do sistema contínuo (128) para o modo k :

$$\frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \hat{\alpha} \frac{\partial^4 v_k}{\partial z^4} - \hat{\beta} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \hat{\gamma} \frac{\partial v_k}{\partial z} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 dz = 0 \quad (128)$$

Retomam-se, agora, as relações modais encontradas no item 4.2, para re-escrever cada termo do primeiro membro da equação de movimento acima (128) em função do “par mestre” (U_k, V_k) do modo k .

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} &= \frac{\partial}{\partial \tau} \left(\frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right) = \frac{\partial}{\partial \tau} \dot{v}_k = \\ &b_{1k} \dot{U}_k + \dot{b}_{1k} U_k + b_{2k} \ddot{U}_k + \dot{b}_{2k} \dot{U}_k + 3b_{6k} U_k^2 \dot{U}_k + \dot{b}_{6k} U_k^3 + 2b_{7k} U_k \dot{U}_k^2 + b_{7k} U_k^2 \dot{U}_k \\ &+ \dot{b}_{7k} U_k^2 \dot{U}_k + b_{8k} \dot{U}_k^3 + 2b_{8k} U_k \dot{U}_k \ddot{U}_k + \dot{b}_{8k} U_k \dot{U}_k^2 + 3b_{9k} \dot{U}_k^2 \ddot{U}_k + \dot{b}_{9k} \dot{U}_k^3 \end{aligned} \quad (129)$$

$$\hat{\alpha} \frac{\partial^4 v_k}{\partial z^4} = \hat{\alpha} \left(a_{1k}^{IV} U_k + a_{2k}^{IV} \dot{U}_k + a_{6k}^{IV} U_k^3 + a_{7k}^{IV} U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k}^{IV} U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k}^{IV} \dot{U}_k^3 \right) \quad (130)$$

$$-\hat{\beta} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} = -\hat{\beta} \left(a_{1k}^{II} U_k + a_{2k}^{II} \dot{U}_k + a_{6k}^{II} U_k^3 + a_{7k}^{II} U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k}^{II} U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k}^{II} \dot{U}_k^3 \right) \quad (131)$$

$$\begin{aligned}
& -\varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} = \\
& -\varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) \left(a_{1k}'' U_k + a_{2k}'' \dot{U}_k + a_{6k}'' U_k^3 + a_{7k}'' U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k}'' U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k}'' \dot{U}_k^3 \right)
\end{aligned} \tag{132}$$

$$\varepsilon^2 \hat{\gamma} \frac{\partial v_k}{\partial z} = \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(a_{1k}' U_k + a_{2k}' \dot{U}_k + a_{6k}' U_k^3 + a_{7k}' U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k}' U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k}' \dot{U}_k^3 \right) \tag{133}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{\mu} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 dz = -\hat{\mu} \left(a_{1k}'' U_k + a_{2k}'' \dot{U}_k + a_{6k}'' U_k^3 + a_{7k}'' U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k}'' U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k}'' \dot{U}_k^3 \right) \\
& \int_0^1 \left(a_{1k}' U_k + a_{2k}' \dot{U}_k + a_{6k}' U_k^3 + a_{7k}' U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k}' U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k}' \dot{U}_k^3 \right) dz
\end{aligned} \tag{134}$$

$$\begin{aligned}
& -\hat{\mu} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dz = -\hat{\mu} (a_{1k}'' U_k + a_{2k}'' V_k + a_{6k}'' U_k^3 + a_{7k}'' U_k^2 V_k + \\
& + a_{8k}'' U_k V_k^2 + a_{9k}'' V_k^3) \int_0^1 (a_{1k}' U_k + a_{2k}' V_k + a_{6k}' U_k^3 + a_{7k}' U_k^2 V_k + \\
& + a_{8k}' U_k V_k^2 + a_{9k}' V_k^3)^2 dz
\end{aligned} \tag{135}$$

Cada um destes termos representa uma força por unidade de massa (ou aceleração) e o seu trabalho virtual poderá ser calculado mediante multiplicação pelo deslocamento virtual δv_k , que pode ser calculado a partir da equação (112), repetida abaixo por conveniência:

$$v_k = a_{1k} U_k + a_{2k} \dot{U}_k + a_{3k} U_k^2 + a_{4k} U_k \dot{U}_k + a_{5k} \dot{U}_k^3 + a_{7k} U_k^2 \dot{U}_k + a_{8k} U_k \dot{U}_k^2 + a_{9k} \dot{U}_k^3 \tag{136}$$

Daí decorre o deslocamento virtual associado ao modo::

$$\delta v_k = \delta U_k \left(a_{1k} + 3a_{6k} U_k^2 + 2a_{7k} U_k \dot{U}_k + a_{8k} \dot{U}_k^2 \right) \tag{137}$$

Portanto:

$$\delta v_k \left(\frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \hat{\alpha} \frac{\partial^4 v_k}{\partial z^4} - \hat{\beta} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} + \varepsilon^2 \hat{\gamma} \frac{\partial v_k}{\partial z} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 v_k}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v_k}{\partial z} \right)^2 dz \right) = 0 \quad (138)$$

Assim o oscilador modal livre não linear é representado por:

$$\begin{aligned} c_{0,k} \ddot{U}_k + c_{1,k} \dot{U}_k + c_{2,k} U_k + c_{3,k} U_k^2 + c_{4,k} U_k \dot{U}_k + c_{5,k} \dot{U}_k^2 + c_{6,k} U_k^3 \\ + c_{7,k} U_k^2 \dot{U}_k + c_{8,k} U_k \dot{U}_k^2 + c_{9,k} \dot{U}_k^3 = 0 \end{aligned} \quad (139)$$

Note-se que os coeficientes da equação do oscilador modal dependem da abscissa $\bar{z}$, definida entre 0 e 1, e τ . Para eliminar a dependência de $\bar{z}$, estes coeficientes serão integrados no domínio ($\bar{z}$ entre 0 e 1), restando, ainda, a dependência com τ .

Assim os coeficientes que compõe a equação do oscilador sob vibração livre são:

$$\begin{aligned} c_{0,k} = \int_0^1 [a_{1k} b_{2k} + (a_{1k} b_{7k} + 3a_{6k} b_{2k}) U_k^2 + (3a_{1k} b_{9k} + a_{8k} b_{2k}) \dot{U}_k^2 \\ + (2a_{1k} b_{8k} + 2a_{7k} b_{2k}) U_k \dot{U}_k] dz \end{aligned} \quad (140)$$

$$\begin{aligned} c_{1,k} = \int_0^1 [(a_{1k} b_{1k} + a_{1k} \dot{b}_{2k}) + \hat{\alpha} a_{1k} a_{2k}^{IV} - \hat{\beta} a_{1k} a_{2k}'' \\ - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - Z \right) a_{1k} a_{2k}'' + \varepsilon^2 \hat{\gamma} a_{1k} a_{2k}'] dz \end{aligned} \quad (141)$$

$$\begin{aligned} c_{1,k} = \int_0^1 [(a_{1k} b_{1k} + a_{1k} \dot{b}_{2k}) + \hat{\alpha} a_{1k} a_{2k}^{IV} - \hat{\beta} a_{1k} a_{2k}'' \\ - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - Z \right) a_{1k} a_{2k}'' + \varepsilon^2 \hat{\gamma} a_{1k} a_{2k}'] dz \end{aligned} \quad (142)$$

$$c_{2,k} = \int_0^1 [a_{1k} \dot{b}_{1k} + \hat{\alpha} a_{1k} a_{1k}^{IV} - \hat{\beta} a_{1k} a_{1k}'' - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) a_{1k} a_{1k}'' + \varepsilon^2 \hat{\gamma} a_{1k} a_{1k}'] dz \quad (143)$$

$$c_{3,k} = c_{4,k} = c_{5,k} = 0 \quad (144)$$

$$\begin{aligned}
c_{6,k} = & -\int_0^1 a_{1k} \dot{b}_{6k} + 3a_{6k} \dot{b}_{1k} + \hat{\alpha}(a_{1k} a_{6k}^{IV} + 3a_{6k} a_{1k}^{IV}) - \hat{\beta}(a_{1k} a_{6k}'' + 3a_{6k} a_{1k}'') \\
& - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - Z \right) (a_{1k} a_{6k}'' + 3a_{6k} a_{1k}'') + \varepsilon^2 \hat{\gamma} (a_{1k} a_{6k}' + 3a_{6k} a_{1k}') - \hat{\mu} a_{1k} a_{1k}'' \int_0^1 a_{1k}^2 dz) dz
\end{aligned} \tag{145}$$

$$\begin{aligned}
c_{7,k} = & -\int_0^1 3a_{6k} b_{6k} + a_{1k} \dot{b}_{7k} + 3a_{6k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + 2a_{7k} \dot{b}_{1k} + \hat{\alpha}(a_{1k} a_{7k}^{IV} + 2a_{7k} a_{1k}^{IV}) \\
& - \hat{\beta}(a_{1k} a_{7k}'' + 3a_{6k} a_{2k}'' + 2a_{7k} a_{1k}'') \\
& - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - Z \right) (a_{1k} a_{7k}'' + 3a_{6k} a_{2k}'' + 2a_{7k} a_{1k}'') \\
& + \varepsilon^2 \gamma (a_{1k} a_{7k}' + 3a_{6k} a_{2k}' + 2a_{7k} a_{1k}') - \hat{\mu} (a_{1k} a_{2k}'' \int_0^1 a_{1k}^2 dz + 2a_{1k} a_{1k}'' \int_0^1 a_{1k}' a_{2k}' dz) dz
\end{aligned} \tag{146}$$

$$\begin{aligned}
c_{8,k} = & -\int_0^1 [2a_{1k} b_{7k} + a_{1k} \dot{b}_{8k} + 2a_{7k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + a_{8k} \dot{b}_{1k} + \hat{\alpha}(a_{1k} a_{8k}^{IV} + 2a_{7k} a_{2k}^{IV} + a_{8k} a_{1k}'') \\
& \varepsilon^2 \hat{\gamma} (a_{1k} a_{8k}' + 2a_{7k} a_{2k}' + a_{8k} a_{1k}') - \hat{\mu} (2a_{1k} a_{2k}'' \int_0^1 a_{1k}' a_{2k}' dz + a_{1k} a_{1k}'' \int_0^1 a_{2k}^2 dz) dz
\end{aligned} \tag{147}$$

$$\begin{aligned}
c_{9,k} = & -\int_0^1 [a_{1k} (b_{8k} + \dot{b}_{9k}) + a_{8k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + \hat{\alpha}(a_{1k} a_{9k}^{IV} + a_{8k} a_{2k}^{IV}) \\
& - \hat{\beta}(a_{1k} a_{9k}'' + a_{8k} a_{2k}'') - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) (a_{1k} a_{9k}'' + a_{8k} a_{2k}'') \\
& + \varepsilon^2 \hat{\gamma} (a_{1k} a_{9k}' + a_{8k} a_{2k}') dz
\end{aligned} \tag{148}$$

5.2 Determinação do oscilador forçado da estrutura e fluido

Retomam-se as equações (47) e (48) deduzidas no item 3.2 para os osciladores acoplados que representam a estrutura e o fluido, ainda como sistemas contínuos, quando se manifesta o fenômeno de *lock-in* causado pelas vibrações induzidas por vórtices:

$$\begin{aligned} \ddot{w} + \alpha w^{IV} - \beta w'' - \gamma \left(\frac{\ell}{2} - x \right) w'' + \gamma w' - \mu w'' \int_0^\ell w'^2 dx &= \frac{a_3 \rho_f D^2}{\rho A} (\ddot{y} - \ddot{w}) + \frac{a_4 \rho_f D U_f}{\rho A} (\dot{y} - \dot{w}) \\ \ddot{y} + \left[\frac{U_f}{D} (a_4' - a_1') + \frac{a_2'}{U_f D} \dot{y}^2 \right] \dot{y} + \frac{K' u_t \omega_s}{D} y &= a_3' \ddot{w} + a_4' \frac{U_f}{D} \dot{w} \end{aligned} \quad (149)$$

Na forma adimensional, elas são re-escritas assim:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \hat{\alpha} \frac{\partial^4 v}{\partial z^4} - \hat{\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} - \varepsilon \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} + \varepsilon \hat{\gamma} \frac{\partial v}{\partial z} - \hat{\mu} \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \int_0^1 \left(\frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 dz \\ = C_m \left(\frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} \right) + C_a \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} - \frac{\partial v}{\partial \tau} \right) \\ \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} + \beta_1 \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} + \beta_2 \left(\frac{\partial \zeta}{\partial \tau} \right)^3 + \beta_3 \zeta = \beta_4 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} + \beta_5 \frac{\partial v}{\partial \tau} \end{aligned} \quad (150)$$

com a seguinte transformação de variáveis:

$$\begin{aligned} v = \frac{w}{D}; \xi = \frac{x}{\ell}; \zeta = \frac{y}{D}; \tau = \omega_1 t; \omega_1 = \frac{\pi}{\ell} \sqrt{\beta + \frac{\pi^2}{\ell^2} \alpha}; C_m = \frac{a_3 \rho_f D^2}{\rho A}; C_a = \frac{a_4 \rho_f D U_f}{\rho A} \\ \hat{\alpha} = \frac{\alpha}{\omega_1^2 \ell^4}; \hat{\beta} = \frac{\beta}{\omega_1^2 \ell^2}; \varepsilon^2 \hat{\gamma} = \frac{\gamma}{\omega_1^2 \ell}; \hat{\mu} = \frac{\mu}{\omega_1^2 \ell} \\ \beta_1 = \frac{(a_4' - a_1') U_f}{\omega_1 D}; \beta_2 = \frac{a_2' \omega_1 D}{U_f}; \beta_3 = \frac{K' u_t \omega_s}{\omega_1^2 D}; \beta_4 = a_3'; \beta_5 = \frac{a_4' U_f}{\omega_1 D} \end{aligned} \quad (151)$$

Procede-se, agora, da mesma forma que no item anterior para obter o modelo de ordem reduzida fluido-estrutura, pelo método de Galerkin não linear. Assume-se que

as relações modais para o oscilador fluido sejam análogas às do oscilador estrutural, isto é, sejam caracterizadas pelos mesmos coeficientes $a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{9k}$. Assim:

$$\begin{aligned} \zeta_k(z) = & a_{1k}W_k + a_{2k}Y_k + a_{3k}W_k^2 + a_{4k}W_kY_k + a_{5k}Y_k^2 + a_{6k}W_k^3 + a_{7k}W_k^2Y_k \\ & + a_{8k}W_kY_k^2 + a_{9k}Y_k^3 \end{aligned} \quad (152)$$

Evidentemente, pressupõe-se que o “par mestre” para o oscilador fluido seja tal que $W_k = \zeta_k(\bar{z})$ e $Y_k = \dot{\zeta}_k(\bar{z})$.

Impõe-se, agora, a igualdade dos trabalhos virtuais no sistema contínuo e no de ordem reduzida, com:

$$\delta v_k = \delta U_k (a_{1k} + 3a_{6k}U_k^2 + 2a_{7k}U_k\dot{U}_k + a_{8k}\dot{U}_k^2) \quad (153)$$

$$\delta \zeta_k = \delta W_k (a_{1k} + 3a_{6k}W_k^2 + 2a_{7k}W_k\dot{W}_k + a_{8k}\dot{W}_k^2) \quad (154)$$

Especializam-se as equações de movimento para a interação fluido-estrutura sob *lock-in* do modo k . As seguintes relações auxiliares são obtidas:

$$\begin{aligned} \delta \zeta_k \frac{\partial^2 \zeta}{\partial \tau^2} = & a_{1k}\dot{b}_{1k}W_k + a_{1k}(b_{1k} + \dot{b}_{2k})\dot{W}_k + a_{1k}b_{2k}\ddot{W}_k + (a_{1k}\dot{b}_{6k} + 3a_{6k}\dot{b}_{1k})W_k^3 \\ & + [a_{1k}(3b_{6k} + \dot{b}_{7k}) + 3a_{6k}(b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + 2a_{7k}\dot{b}_{1k}]W_k^2\dot{W}_k \\ & + [a_{1k}(2b_{7k} + \dot{b}_{8k}) + 2a_{7k}(b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + a_{8k}\dot{b}_{1k}]W_k\dot{W}_k^2 + (a_{1k}b_{7k} + 3a_{6k}b_{2k})W_k^2\dot{W}_k \\ & + [a_{1k}(b_{8k} + \dot{b}_{9k}) + a_{8k}(b_{1k} + \dot{b}_{2k})]W_k^3 + (2a_{1k}b_{8k} + 2a_{7k}b_{2k})W_k\dot{W}_k\ddot{W}_k + a_{8k}b_{2k}\ddot{W}_k\dot{W}_k^2 \end{aligned} \quad (155)$$

$$\begin{aligned} \delta \zeta_k \frac{\partial \zeta}{\partial \tau} = & a_{1k}b_{1k}W_k + a_{1k}b_{2k}\dot{W}_k + (a_{1k}b_{6k} + 3a_{6k}b_{1k})W_k^3 \\ & + (a_{1k}b_{7k} + 3a_{6k}b_{2k} + 2a_{7k}b_{1k})W_k^2\dot{W}_k + (a_{1k}b_{8k} + 2a_{7k}b_{2k} + a_{8k}b_{1k})W_k\dot{W}_k^2 \\ & + (a_{1k}b_{9k} + a_{8k}b_{2k})\dot{W}_k^3 \end{aligned} \quad (156)$$

$$\begin{aligned}
\delta \zeta_k \zeta_k &= a_{1k}^2 W_k + a_{1k} a_{2k} \dot{W}_k + (a_{1k} a_{6k} + 3a_{1k} a_{6k}) W_k^3 \\
&+ (a_{1k} a_{7k} + 3a_{2k} a_{6k} + 2a_{1k} a_{7k}) W_k^2 \dot{W}_k + (a_{1k} a_{8k} + 2a_{2k} a_{7k} + a_{1k} a_{8k}) W_k \dot{W}_k^2 \\
&+ (a_{1k} a_{9k} + a_{2k} a_{8k}) \dot{W}_k^3
\end{aligned} \quad (157)$$

Chega-se, portanto, ao modelo de ordem reduzida de dois graus de liberdade, um para a estrutura (U_k) e outro para o fluido (W_k), matematicamente caracterizados pelo sistema de equações de segunda ordem não linear:

$$\begin{aligned}
c_{0,k} \ddot{U}_k + c_{1,k} \dot{U}_k + c_{2,k} U_k + c_{3,k} U_k^2 + c_{4,k} U_k \dot{U}_k + c_{5,k} \dot{U}_k^2 + c_{6,k} U_k^3 + c_{7,k} U_k^2 \dot{U}_k \\
+ c_{8,k} U_k \dot{U}_k^2 + c_{9,k} \dot{U}_k^3 = P_k
\end{aligned} \quad (158)$$

$$\begin{aligned}
d_{0,k} \ddot{W}_k + d_{1,k} \dot{W}_k + d_{2,k} W_k + d_{3,k} W_k^2 + d_{4,k} W_k \dot{W}_k + d_{5,k} \dot{W}_k^2 + d_{6,k} W_k^3 + d_{7,k} W_k^2 \dot{W}_k \\
+ d_{8,k} W_k \dot{W}_k^2 + d_{9,k} \dot{W}_k^3 = Q_k
\end{aligned} \quad (159)$$

Os termos P_k e Q_k são forças modais generalizadas para estrutura e fluido respectivamente; $c_{i,k}$ ($i = 0$ a 9) e $d_{i,k}$ ($i = 0$ a 9) decorrem da projeção das equações do sistema contínuo no modo k .

Para P_k se escreve:

$$P_k \delta U_k = \left\{ \int_0^1 C_m \left(\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} \right) + C_a \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} - \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right) \right\} dz \delta v_k \quad (160)$$

$$P_k = C_m \left(\frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} - \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} \right) + C_a \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} - \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right)$$

onde:

$$\begin{aligned}
\delta v_k \frac{\partial^2 \zeta_k}{\partial \tau^2} &= a_{1k} \dot{b}_{1k} W_k + a_{1k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) \dot{W}_k + a_{1k} b_{2k} \ddot{W}_k + a_{1k} \dot{b}_{6k} W_k^2 + a_{1k} (3b_{6k} + \dot{b}_{7k}) W_k^2 \dot{W}_k \\
&+ a_{1k} (2b_{7k} + \dot{b}_{8k}) W_k \dot{W}_k^2 + a_{1k} b_{7k} W_k^2 \ddot{W}_k + a_{1k} (b_{3k} + \dot{b}_{9k}) \dot{W}_k^3 + 2a_{1k} b_{8k} W_k \dot{W}_k \ddot{W}_k + 3a_{1k} b_{9k} \dot{W}_k^2 \ddot{W}_k \\
&+ 3a_{6k} \dot{b}_{1k} W_k U_k^2 + 3a_{6k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) \dot{W}_k U_k^2 + 3a_{6k} b_{2k} \ddot{W}_k U_k^2 + 2a_{7k} \dot{b}_{1k} W_k U_k \dot{U}_k \\
&+ 2a_{7k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) \dot{W}_k U_k \dot{U}_k + 2a_{7k} b_{2k} \ddot{W}_k U_k \dot{U}_k + a_{8k} \dot{b}_{1k} W_k \dot{U}_k^2 + a_{8k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) \dot{W}_k \dot{U}_k^2 \\
&+ a_{8k} b_{2k} \ddot{W}_k \dot{U}_k^2
\end{aligned} \quad (161)$$

$$\begin{aligned}
\delta v_k \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} = & a_{1k} \dot{b}_{1k} U_k + a_{1k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) \dot{U}_k + a_{1k} b_{2k} \ddot{U}_k + a_{1k} \dot{b}_{6k} U_k^3 + 3a_{1k} b_{6k} U_k^2 \dot{U}_k + a_{1k} \dot{b}_{7k} U_k^2 \dot{U}_k \\
& + 2a_{1k} b_{7k} U_k \dot{U}_k^2 + a_{1k} b_{7k} U_k^2 \ddot{U}_k + a_{1k} \dot{b}_{8k} U_k \dot{U}_k^2 + 2a_{1k} b_{8k} U_k \dot{U}_k \ddot{U}_k \\
& + a_{1k} (b_{8k} + \dot{b}_{9k}) \dot{U}_k^3 + 3a_{1k} b_{9k} \dot{U}_k^2 \ddot{U}_k + 3a_{6k} \dot{b}_{1k} U_k^3 + 3a_{6k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) U_k^2 \dot{U}_k \\
& + 3a_{6k} b_{2k} U_k^2 \ddot{U}_k + 2a_{7k} \dot{b}_{1k} U_k^2 \dot{U}_k + 2a_{7k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) U_k \dot{U}_k^2 \\
& + 2a_{7k} b_{2k} U_k \dot{U}_k \ddot{U}_k + a_{8k} \dot{b}_{1k} U_k \dot{U}_k^2 + a_{8k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) \dot{U}_k^3 + a_{8k} b_{2k} \dot{U}_k^2 \ddot{U}_k
\end{aligned} \tag{162}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_k \frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} = & a_{1k} b_{1k} W_k + a_{1k} b_{2k} \dot{W}_k + a_{1k} b_{6k} W_k^3 + a_{1k} b_{7k} W_k^2 \dot{W}_k + a_{1k} b_{8k} W_k \dot{W}_k^2 \\
& + a_{1k} b_{9k} \dot{W}_k^3 + 3a_{6k} b_{1k} W_k U_k^2 + 3a_{6k} b_{2k} U_k^2 \dot{W}_k + 2a_{7k} b_{1k} U_k \dot{U}_k W_k + 2a_{7k} b_{2k} U_k \dot{U}_k \dot{W}_k \\
& + a_{8k} b_{1k} \dot{U}_k^2 W_k + a_{8k} b_{2k} \dot{U}_k^2 \dot{W}_k
\end{aligned} \tag{163}$$

$$\begin{aligned}
\delta v_k \frac{\partial v_k}{\partial \tau} = & (a_{1k} b_{1k} U_k + a_{1k} b_{2k} \dot{U}_k + a_{1k} b_{6k} U_k^3 + a_{1k} b_{7k} U_k^2 \dot{U}_k + a_{1k} b_{8k} U_k \dot{U}_k^2 \\
& + a_{1k} b_{9k} \dot{U}_k^3 + 3a_{6k} b_{1k} U_k^3 + 3a_{6k} b_{2k} U_k^2 \dot{U}_k + 2a_{7k} b_{1k} U_k^2 \dot{U}_k + 2a_{7k} b_{2k} U_k \dot{U}_k^2 \\
& + a_{8k} b_{1k} U_k \dot{U}_k^2 + a_{8k} b_{2k} \dot{U}_k^3) \delta U_k
\end{aligned} \tag{164}$$

Para Q_k , de forma análoga, escreve-se :

$$Q_k \delta W_k = \left\{ \int_0^1 \left[\beta_4 \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \beta_5 \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right] dz \right\} \delta \zeta_k \tag{165}$$

$$Q_k = \left[\beta_4 \frac{\partial^2 v_k}{\partial \tau^2} + \beta_5 \frac{\partial v_k}{\partial \tau} \right]$$

onde:

$$\begin{aligned}
\delta \zeta_k \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} = & a_{1k} \dot{b}_{1k} U + (a_{1k} b_{2k} + a_{1k} \dot{b}_{2k}) \dot{U}_k + a_{1k} b_{2k} \ddot{U}_k + a_{1k} \dot{b}_{6k} U_k^3 + a_{1k} (3b_{6k} + \dot{b}_{7k}) U_k^2 \dot{U}_k \\
& + a_{1k} (2b_{7k} + \dot{b}_{8k}) U_k \dot{U}_k^2 + a_{1k} b_{7k} U_k^2 \ddot{U}_k + a_{1k} (b_{8k} + \dot{b}_{9k}) \dot{U}_k^3 + 2a_{1k} b_{8k} U_k \dot{U}_k \ddot{U}_k + 3a_{6k} \dot{b}_{1k} U_k W_k^2 \\
& + 3a_{6k} (b_{2k} + \dot{b}_{2k}) \dot{U}_k W_k^2 + 3a_{6k} b_{2k} \ddot{U}_k W_k^2 + 2a_{7k} \dot{b}_{1k} U_k W_k \dot{W}_k + 2a_{7k} (b_{2k} + \dot{b}_{2k}) \dot{U}_k W_k \dot{W}_k \\
& + 2a_{7k} b_{2k} \ddot{U}_k W_k \dot{W}_k + a_{8k} \dot{b}_{1k} U_k \dot{W}_k^2 + a_{8k} (b_{2k} + \dot{b}_{2k}) \dot{U}_k \dot{W}_k^2 + a_{8k} b_{2k} \ddot{U}_k \dot{W}_k^2
\end{aligned} \tag{166}$$

$$\begin{aligned}
\delta\zeta_k \frac{\partial v}{\partial \tau} = & a_{1k} b_{1k} U_k + a_{1k} b_{2k} \dot{U}_k + a_{1k} b_{6k} U_k^3 + a_{1k} b_{7k} U_k^2 \dot{U}_k + a_{1k} b_{8k} U_k \dot{U}_k^2 \\
& + a_{1k} b_{9k} \dot{U}_k^3 + 3a_{6k} b_{1k} U_k W_k^2 + 3a_{6k} b_{2k} \dot{U}_k W_k^2 + 2a_{7k} b_{1k} U_k W_k \dot{W}_k \\
& + 2a_{7k} b_{2k} \dot{U}_k W_k \dot{W}_k + a_{8k} b_{1k} U_k \dot{W}_k^2 + a_{8k} b_{2k} \dot{U}_k \dot{W}_k^2
\end{aligned} \quad (167)$$

$$\delta\zeta_k \left(\frac{\partial \zeta_k}{\partial \tau} \right)^3 = (a_{1k} b_{1k}^3 W_k^3 + 3a_{1k} b_{1k}^2 b_{2k} W_k^2 \dot{W}_k + 3a_{1k} b_{2k}^2 b_{1k} W_k \dot{W}_k^2 + a_{1k} b_{2k}^3 \dot{W}_k^3) \delta W_k \quad (168)$$

Considerando as forças modais generalizadas na equação dos osciladores e reorganizando os termos acoplados da estrutura e do fluido, aparecem termos não lineares adicionais nas equações, caracterizados por novos coeficientes:

$$\begin{aligned}
& c_{0,k} \ddot{U}_k + c_{1,k} \dot{U}_k + c_{2,k} U_k + c_{3,k} U_k^2 + c_{4,k} U_k \dot{U}_k + c_{5,k} \dot{U}_k^2 + c_{6,k} U_k^3 \\
& + c_{7,k} U_k^2 \dot{U}_k + c_{8,k} U_k \dot{U}_k^2 + c_{9,k} \dot{U}_k^3 + c_{10,k} W_k + c_{11,k} \dot{W}_k + c_{12,k} \ddot{W}_k \\
& + c_{13,k} W_k^3 + c_{14,k} W_k^2 \dot{W}_k + c_{15,k} W_k \dot{W}_k^2 + c_{16,k} \dot{W}_k^3 + c_{17,k} W_k U_k^2 \\
& + c_{18,k} W_k U_k \dot{U}_k + c_{19,k} \dot{W}_k U_k \dot{U}_k + c_{20,k} W_k \dot{U}_k^2 + c_{21,k} \dot{W}_k \dot{U}_k^2 = 0
\end{aligned} \quad (169)$$

$$\begin{aligned}
& d_{0,k} \ddot{W}_k + d_{1,k} \dot{W}_k + d_{2,k} W_k + d_{3,k} W_k^2 + d_{4,k} W_k \dot{W}_k + d_{5,k} \dot{W}_k^2 + d_{6,k} W_k^3 \\
& + d_{7,k} W_k^2 \dot{W}_k + d_{8,k} W_k \dot{W}_k^2 + d_{9,k} \dot{W}_k^3 + d_{10,k} U_k + d_{11,k} \dot{U}_k + d_{12,k} \ddot{U}_k \\
& + d_{13,k} U_k^3 + d_{14,k} U_k^2 \dot{U}_k + d_{15,k} U_k \dot{U}_k^2 + d_{16,k} \dot{U}_k^3 + d_{17,k} U_k W_k^2 + d_{18,k} \dot{U}_k W_k^2 \\
& + d_{19,k} U_k W_k \dot{W}_k + d_{20,k} \dot{U}_k W_k \dot{W}_k + d_{21,k} U_k \dot{W}_k^2 + d_{22,k} \dot{U}_k \dot{W}_k^2 = 0
\end{aligned} \quad (170)$$

A seguir, são listados os coeficientes que definem o modelo de ordem reduzida, considerando o acoplamento fluido-estrutura:

$$\begin{aligned}
c_{0,k} = & \int_0^1 (1+cm) a_{1k} b_{2k} + (1+cm) (a_{1k} b_{7k} + 3a_{6k} b_{2k}) U_k^2 + (1+cm) (3a_{1k} b_{9k} + a_{8k} b_{2k}) \dot{U}_k^2 \\
& + (2a_{1k} b_{8k} + 2a_{7k} b_{2k}) U_k \dot{U}_k dz
\end{aligned} \quad (171)$$

$$\begin{aligned}
c_{1,k} = & \int_0^1 [(1+c_m) (a_{1k} b_{1k} + a_{1k} \dot{b}_{2k}) + c_a a_{1k} b_{2k}] + \hat{\alpha} a_{1k} a_{2k}^{IV} - \hat{\beta} a_{1k} a_{2k}'' \\
& - \varepsilon^2 \hat{\gamma} \left(\frac{1}{2} - z \right) a_{1k} a_{2k}'' + \varepsilon^2 \hat{\gamma} a_{1k} a_{2k}' dz
\end{aligned} \quad (172)$$

$$c_{2,k} = \int_0^1 [(a_{1k} \dot{b}_{1k} - c_m a_{1k} \dot{b}_{1k} - c_a a_{1k} b_{1k}) + \hat{\alpha} a_{1k} a_{1k}^{IV} - \hat{\beta} a_{1k} a_{1k}'' - \varepsilon^2 \hat{\gamma} (1/2 - z) a_{1k} a_{1k}'' + \varepsilon^2 \hat{\gamma} a_{1k} a_{2k}'] dz \quad (173)$$

$$c_{3,k} = c_{4,k} = c_{5,k} = 0 \quad (174)$$

$$c_{6,k} = - \int_0^1 (1 + c_m) a_{1k} \dot{b}_{6k} + 3(1 + c_m) a_{6k} \dot{b}_{1k} + c_a a_{1k} b_{6k} + 3c_a a_{6k} b_{1k} + \hat{\alpha} (a_{1k} a_{6k}^{IV} + 3a_{6k} a_{1k}^{IV}) - \hat{\beta} (a_{1k} a_{6k}'' + 3a_{6k} a_{1k}'') - \varepsilon^2 \hat{\gamma} (1/2 - z) (a_{1k} a_{6k}'' + 3a_{6k} a_{1k}'') + \varepsilon^2 \hat{\gamma} (a_{1k} a_{6k}' + 3a_{6k} a_{1k}') - \hat{\mu} a_{1k} a_{1k}'' \int_0^1 a_{1k}^2 dz) dz \quad (175)$$

$$c_{7,k} = - \int_0^1 [(1 + c_m) 3a_{6k} b_{6k} + (1 + c_m) a_{1k} \dot{b}_{7k} + 3(1 + c_m) a_{6k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + 2(1 + c_m) a_{7k} \dot{b}_{1k} + c_a a_{1k} b_{7k} + 3c_a a_{6k} b_{2k} + 2c_a a_{7k} b_{1k} + \hat{\alpha} (a_{1k} a_{7k}^{IV} + 2a_{7k} a_{1k}^{IV}) - \hat{\beta} (a_{1k} a_{7k}'' + 3a_{6k} a_{2k}'' + 2a_{7k} a_{1k}'') - \varepsilon^2 \hat{\gamma} (1/2 - z) (a_{1k} a_{7k}'' + 3a_{6k} a_{2k}'' + 2a_{7k} a_{1k}'') + \varepsilon^2 \gamma (a_{1k} a_{7k}' + 3a_{6k} a_{1k}' + 2a_{7k} a_{1k}') - \hat{\mu} (a_{1k} a_{2k}'' \int_0^1 a_{1k}^2 dz + 2a_{1k} a_{1k}'' \int_0^1 a_{1k} a_{2k}' dz)] dz \quad (176)$$

$$c_{8,k} = - \int_0^1 (1 + c_m) 2a_{1k} b_{7k} + (1 + c_m) 2a_{7k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + (1 + c_m) a_{8k} \dot{b}_{1k} + c_a a_{1k} b_{8k} + 2c_a a_{7k} b_{2k} + c_a a_{8k} b_{1k} + \hat{\alpha} (a_{1k} a_{8k}^{IV} + 2a_{7k} a_{2k}^{IV} + a_{8k} a_{1k}'') - \varepsilon^2 \hat{\gamma} (1/2 - z) (a_{1k} a_{8k}'' + 2a_{7k} a_{2k}'' + a_{8k} a_{1k}'') + \varepsilon^2 \hat{\gamma} (a_{1k} a_{8k}' + 2a_{7k} a_{2k}' + a_{8k} a_{1k}') - \hat{\mu} (2a_{1k} a_{2k}'' \int_0^1 a_{1k} a_{2k}' dz + a_{1k} a_{1k}'' \int_0^1 a_{2k}^2 dz)] dz \quad (177)$$

$$\begin{aligned}
c_{9,k} = & -\int_0^1 [(1+c_m)a_{1k}(b_{8k}+\dot{b}_{9k})+(1+c_m)a_{8k}(b_{1k}+\dot{b}_{2k})+c_a a_{1k}b_{9k}+c_a a_{8k}b_{2k} \\
& +\hat{\alpha}(a_{1k}a_{9k}^{IV}+a_{8k}a_{2k}^{IV})-\hat{\beta}(a_{1k}a_{9k}''+a_{8k}a_{2k}'')-\varepsilon^2\hat{\gamma}(1/2-z)(a_{1k}a_{9k}''+a_{8k}a_{2k}'') \\
& +\varepsilon^2\hat{\gamma}(a_{1k}a_{9k}'+a_{8k}a_{2k}')]dz
\end{aligned} \tag{178}$$

$$c_{10,k} = -\int_0^1 [c_m a_{1k} \dot{b}_{1k} + c_a a_{1k} b_{1k}] dz \tag{179}$$

$$c_{11,k} = -\int_0^1 [c_m a_{1k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + c_a a_{1k} b_{k2}] dz \tag{180}$$

$$c_{12,k} = -\int_0^1 c_m a_{1k} b_{2k} dz \tag{181}$$

$$c_{13,k} = -\int_0^1 [c_m a_{1k} \dot{b}_{6k} + c_a a_{1k} b_{6k}] dz \tag{182}$$

$$c_{14,k} = -\int_0^1 [c_m a_{1k} (3b_{6k} + \dot{b}_{7k}) + c_a a_{1k} b_{7k}] dz \tag{183}$$

$$c_{15,k} = -\int_0^1 [c_m a_{1k} (2b_{7k} + \dot{b}_{8k}) + c_a a_{1k} b_{8k}] dz \tag{184}$$

$$c_{16,k} = -\int_0^1 [c_m a_{1k} (b_{8k} + \dot{b}_{9k}) + c_a a_{1k} b_{9k}] dz \tag{185}$$

$$c_{17,k} = -\int_0^1 [3c_m a_{6k} \dot{b}_{1k} + 3c_a a_{6k} b_{1k}] dz \tag{186}$$

$$c_{18,k} = -\int_0^1 \left[2c_m a_{7k} \dot{b}_{1k} + 2c_a a_{7k} b_{1k} \right] dz \quad (187)$$

$$c_{19,k} = -\int_0^1 2c_m a_{7k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) dz \quad (188)$$

$$c_{20,k} = -\int_0^1 \left[c_m a_{8k} \dot{b}_{1k} + c_a a_{8k} b_{1k} \right] dz \quad (189)$$

$$c_{21,k} = -\int_0^1 \left[c_m a_{8k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + c_a a_{8k} b_{2k} \right] dz \quad (190)$$

$$d_{0,k} = \int_0^1 [a_{1k} b_{2k} + (a_{1k} b_{7k} + 3a_{6k} b_{2k}) W_k^2 + (2a_{1k} b_{8k} + 2a_{7k} b_{2k}) W_k \dot{W}_k + a_{8k} b_{2k} \dot{W}_k^2] dz \quad (191)$$

$$d_{1,k} = \int_0^1 \left[a_{1k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + \beta_1 a_{1k} b_{2k} + \beta_3 a_{1k} a_{2k} \right] dz \quad (192)$$

$$d_{2,k} = \int_0^1 \left[a_{1k} \dot{b}_{1k} + \beta_1 a_{1k} b_{1k} + \beta_3 a_{1k}^2 \right] dz \quad (193)$$

$$d_{3,k} = d_{4,k} = d_{5,k} = 0 \quad (194)$$

$$d_{6,k} = -\int_0^1 [(a_{1k} \dot{b}_{6k} + 3a_{6k} \dot{b}_{1k}) + \beta_1 (a_{1k} b_{6k} + 3a_{6k} b_{1k}) + \beta_3 (a_{1k} a_{6k} + 3a_{1k} a_{6k}) + \beta_2 a_{1k} b_{1k}^3] dz \quad (195)$$

$$d_{7,k} = -\int_0^1 [a_{1k} (3b_{6k} + \dot{b}_{7k}) + 3a_{6k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + 2a_{7k} \dot{b}_{1k} + \beta_1 (a_{1k} b_{7k} + 3a_{6k} b_{2k} + 2a_{7k} b_{1k}) + \beta_3 (a_{1k} a_{7k} + 3a_{2k} a_{6k} + 2a_{1k} a_{7k}) + 3\beta_2 a_{1k} b_{1k}^2 b_{2k}] dz \quad (196)$$

$$d_{8,k} = -\int_0^1 [a_{1k} (2b_{7k} + \dot{b}_{8k}) + 2a_{7k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + a_{8k} \dot{b}_{1k} + \beta_1 (a_{1k} b_{8k} + 2a_{7k} b_{2k} + a_{8k} b_{1k}) + \beta_3 (a_{1k} a_{8k} + 2a_{2k} a_{7k} + a_{1k} a_{8k}) + 3\beta_2 a_{1k} b_{1k} b_{2k}^2] dz \quad (197)$$

$$d_{9,k} = -\int_0^1 [a_{1k} (b_{8k} + \dot{b}_{9k}) + a_{8k} (b_{1k} + \dot{b}_{2k}) + \beta_1 (a_{1k} b_{9k} + a_{8k} b_{2k}) + \beta_3 (a_{1k} a_{9k} + a_{2k} a_{8k}) + \beta_2 a_{1k} b_{2k}^3] dz \quad (198)$$

$$d_{10,k} = -\int_0^1 [\beta_4 a_{1k} \dot{b}_{1k} + \beta_5 a_{1k} b_{1k}] dz \quad (199)$$

$$d_{11,k} = -\int_0^1 [\beta_4 (a_{1k} b_{2k} + a_{1k} \dot{b}_{2k}) + \beta_5 a_{1k} b_{2k}] dz \quad (200)$$

$$d_{12,k} = -\int_0^1 \beta_4 a_{1k} b_{2k} dz \quad (201)$$

$$d_{13,k} = -\int_0^1 [\beta_4 a_{1k} \dot{b}_{6k} + \beta_5 a_{1k} b_{6k}] dz \quad (202)$$

$$d_{14,k} = -\int_0^1 [\beta_4 a_{1k} (3b_{6k} + \dot{b}_{7k}) + \beta_5 a_{1k} b_{7k} + \beta_4 a_{1k} b_{7k}] dz \quad (203)$$

$$d_{15,k} = -\int_0^1 [\beta_4 a_{1k} (2b_{7k} + \dot{b}_{8k}) + \beta_5 a_{1k} b_{8k}] dz \quad (204)$$

$$d_{16,k} = -\int_0^1 [\beta_4 a_{1k} (b_{8k} + \dot{b}_{9k}) + \beta_5 a_{1k} b_{9k}] dz \quad (205)$$

$$d_{17,k} = -\int_0^1 [3\beta_4 a_{6k} \dot{b}_{1k} + 3\beta_5 a_{6k} b_{2k}] dz \quad (206)$$

$$d_{18,k} = -\int_0^1 \left[3\beta_4 a_{6k} (b_{2k} + \dot{b}_{2k}) + 3\beta_5 a_{6k} b_{2k} \right] dz \quad (207)$$

$$d_{19,k} = -\int_0^1 \left[2\beta_4 a_{7k} \dot{b}_{1k} + 2\beta_5 a_{7k} b_{1k} \right] dz \quad (208)$$

$$d_{20,k} = -\int_0^1 \left[2\beta_4 a_{7k} (b_{2k} + \dot{b}_{2k}) + 2\beta_5 a_{7k} b_{2k} \right] dz \quad (209)$$

$$d_{21,k} = -\int_0^1 \left[\beta_4 a_{8k} \dot{b}_{1k} + \beta_4 a_{8k} b_{1k} \right] dz \quad (210)$$

$$d_{22,k} = -\int_0^1 \left[\beta_4 a_{8k} (b_{2k} + \dot{b}_{2k}) + \beta_5 a_{8k} b_{2k} \right] dz \quad (211)$$

6 Capítulo 6

6.1 Exemplo numérico

Para abordar o exemplo numérico foi desenvolvida uma rotina no programa *Matlab*. O objetivo deste exemplo é verificar a capacidade do modelo de ordem reduzida acoplado fluido-estrutura de simular o fenômeno de vibração induzida por vórtices (VIV).

São, inicialmente, calculados os coeficientes que definem o modelo de ordem reduzida acoplado e, em seguida, as equações diferenciais de segunda ordem não lineares que o definem. Como esses coeficientes dependem da posição (abscissa normalizada), por conveniência eles são integrados numericamente no domínio $[0,1]$, e o sistema de equações diferenciais também é integrado, agora no domínio do tempo, de forma que sejam obtidas as respostas das vibrações estruturais.

Evidentemente, é possível comparar os resultados obtidos com aqueles do modelo de ordem reduzida estudado em [11], onde foram usados os modos lineares como funções de projeção das mesmas equações não lineares que caracterizam os osciladores da estrutura e do fluido, como sistemas contínuos.

Os dados de entrada para a análise numérica do *riser* submetido a VIV são:

$E = 2,1 \times 10^{11}$ N/m² - módulo de elasticidade;

$A = 1,1 \times 10^{-2}$ m² - área da seção transversal;

$I = 4,75 \times 10^{-5}$ m⁴ - momento inércia;

$m = 141,24$ kg/m - massa por unidade de comprimento;

$p = 727$ N/m - peso por unidade de comprimento;

$N_0 = 2 \times 10^6$ N - força de protensão inicial no topo ($t=0$);

$N_l = 6,914 \times 10^5$ N - força de protensão inicial na base ($t=0$);

$\varepsilon = 0,10$ - parâmetros adimensionais adotados ($0 < \varepsilon < 1$).

$\rho_{fluido} = 1025$ kg/m³ - peso específico da água do mar;

$D = 0,2032$ m - diâmetro externo do *riser*;

$S_t = 0,2$ - número de Strouhal;

$U = 0,0271\text{m/s}$ - velocidade da corrente;

Coeficientes do modelo fenomenológico proposto por Iwan e Blevins:

$$a_0 = 0,48$$

$$a_1 = 0,44$$

$$a_2 = 0,20$$

$$a_3 = 0$$

$$a_4 = 0,38$$

Adotam-se as seguintes condições iniciais para o sistema acoplado:

$$U = 0,01$$

$$\dot{U} = 0$$

$$W = 0$$

$$\dot{W} = 0$$

No atual estágio de implementação computacional, foram adotadas as seguintes hipóteses simplificadoras:

- Linearizaram-se as massas modais de ambos os osciladores:

$$c_{0,k} = \int_0^1 [(1 + C_m) a_{1k} b_{2k}] dz \quad (212)$$

$$d_{0,k} = \int_0^1 [a_{1k} b_{2k}] dz \quad (213)$$

- Adotou-se $\Delta\hat{\Omega}_k = 0$, que corresponde ao valor médio de $\Delta\hat{\Omega}_k$, como pode ser observado no gráfico abaixo:

Figura 27: Gráfico de $z \times \Delta\hat{\Omega}_k$

Para *lock-in* com o primeiro modo, $k=1$, velocidade do fluido $U = 0,0271 m/s$ e frequência de desprendimento de vórtices $\omega_s = 0,168 rad/s$, a resposta no tempo e o mapa de fase para o modelo de ordem reduzida obtido com o primeiro modo não linear, equação (169), são dados respectivamente pelas Figura 28 e Figura 29:

Figura 28: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$

Figura 29: Resposta no tempo : $v \times t$

O mapa de fase e a resposta no tempo utilizando-se os modos lineares como função de projeção PONCET, R. (2011) são dados pelas Figura 30 e Figura 31, respectivamente.

Figura 30: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$

Figura 31: Resposta no tempo : $v \times t$

As Figura 32 e Figura 33 comparam os modelos de ordem reduzida para o primeiro modo, $k=1$, onde a cor vermelha representa o obtido com o modo não linear e o azul, com o modo linear.

Figura 32: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$

Figura 33: Resposta no tempo : $v \times t$

Analisando os gráficos sobrepostos é possível perceber que as soluções dos dois modelos de ordem reduzida divergiram as soluções variando entre $2D$ a $1,5D$, demonstrando que a resposta não linear obteve um deslocamento transversal maior que a do linear. O mesmo problema foi estudado com o programa em elementos finitos Orcaflex, e a resposta obtida para *lock-in* com o primeiro modo, $k=1$, que

também não apresentou uma boa convergência com os modelos de ordem reduzida obtido com o modo não linear e linear, conforme demonstrado abaixo:

Figura 34: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$ (extraído [12])

Figura 35: Resposta no tempo : $v \times t$ (extraído [12])

Conclui-se que as respostas de ambos os modelos de ordem reduzida não permitem uma boa análise para *lock-in* com o primeiro modo, podendo fornecer respostas acima do esperado. Isto decorre, conforme discutido em [12] do fato de que apenas

uma pequena região próxima ao ventre do primeiro modo efetivamente atende às condições de *lock-in*, e não a totalidade do comprimento do riser, conforme implicitamente assumido naquele trabalho.

A seguir será analisada a solução para *lock-in* com o quarto modo de vibração, sendo adotado $U = 0,1029 m/s$ e frequência de desprendimento de vórtices $\omega_s = 0,636 rad/s$. Para o modelo de ordem reduzida obtido com o quarto modo não linear tem-se:

Figura 36: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$

Figura 37: Resposta no tempo: $v \times t$

Utilizando os mesmos parâmetros que o modelo de ordem reduzida obtido com o quarto modo não linear, em [12] obtiveram-se os resultados das Figura 38 e Figura 39:

Figura 38: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$

Figura 39: Resposta no tempo : $v \times t$

As Figura 40 e Figura 41 comparam os modelos de ordem reduzida para do quarto modo, $k=4$, onde a cor vermelha representa o obtido com o modo não linear e o azul, com o modo linear.

Figura 40: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$

Figura 41: Resposta no tempo : $v \times t$

Pelo programa Orcaflex, o resultado obtido foi:

Figura 42: Mapa de fase - $\dot{v} \times v$ (extraído [12])

Figura 43: Resposta no tempo : $v \times t$ (extraído [12])

Por meio dos mapas de fase e dos gráficos da resposta no tempo é possível notar que a solução para o quarto modo obtida pelo Orcaflex apresentou uma resposta do deslocamento transversal do ciclo limite de aproximadamente $1,5D$, o que apresentou ser uma solução intermediária entre as encontradas para o quarto modo de ambos os modelos

7 Considerações Finais

Neste trabalho foi possível observar que o tema em estudo é complexo e bastante trabalhoso. Os resultados obtidos sugerem que algumas das hipóteses devem ser revistas, uma vez que não há indícios na literatura especializada no assunto de que as respostas obtidas numericamente estejam em boa concordância com as respostas obtidas por meio de experimentos em laboratório. Muito embora os resultados não sejam satisfatórios, o estudo do assunto foi de grande importância, pois reabriu discussões sobre hipóteses de modelagem que estavam sendo adotadas como satisfatórias. Após a obtenção dos resultados numéricos, reanalisaram-se as hipóteses adotadas neste trabalho, e notou-se que uma das condições de resolubilidade adotada era suficiente, mas não era necessária. Acredita-se que grande simplificação poderá advir da imposição de condições necessárias de resolubilidade, conduzindo a modos não lineares mais simples e, eventualmente mais adequados para utilização na técnica de redução de graus de liberdade. . Infelizmente ao se notar isso, não havia mais tempo para reformulação ou estudo do impacto nos resultados do modelo matemático de ordem reduzida. Sugere-se, como trabalhos futuros, um estudo mais aprofundado da mudança dessa condição de solvabilidade no desenvolvimento da formulação, assim como a variação das condições de contorno do riser e a variação do perfil da correnteza marítima ao longo do comprimento da linha, que pode representar situações mais reais de campo.

8 Referências Bibliográficas

- [1] PAK,C.H., ROSENBERG,R.M.(1998) On the Existence of Normal Mode Vibrations in Nonlinear Systems, *Quarterly of Applied Mathematics*, 26, pp.403-416.
- [2] SHAW,S.W, PIERRE,C.(1991) Non-linear normal modes and invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, 150(1), pp.170-173.
- [3] SHAW,S.W, PIERRE,C.(1994) Normal Modes for Non-linear Vibratory Systems. *Journal of Structure*, 164(1), pp.85-124.
- [4] SHAW,S.W, PIERRE,C.(1994) Normal Modes of Vibrations for Non-linear Continuous Systems. *Journal of Sound and Vibrations*, 169(3), pp.319-347.
- [5] NAYFEH, A.H, MOOK,D.T.(1979). *Nonlinear Oscillations*, Jonh Wiley, New York.
- [6] SOARES,M.E.S. (1998) *Modos não-lineares em sistemas discretizados pelo método dos elementos finitos*, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [7] MAZZILLI, C.E.N, SOARES,M.E.S., BARACHO NETO, O.G.P.(2001) Reduction of Finite-Element models of Planar Frames using Non-Linear Normal Modes, *International Journal of Solids and Structure*, 38, pp.1993-2008.
- [8] BARACHO NETO, O.G.P.(2003) Modos normais e multimodos na dinâmica das estruturas de comportamento não-linear, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [9] MAZZILLI, C.E.N., SANCHES, C.E.S., BARACHO NETO, O.G.P., WIERCIGROCH, M., KEBER, M. (2008) Nonlinear modal analysis for beams subjected to axial loads: analytical and finite elemento solution, *Internacional Journal of Non-Linear Mechenics*, vol. 43, pp.551-561.

- [10] SANCHES, C.E.S. (2009) Modos não-lineares de vibração e controle ativo de *risers*, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [11] MAZZILLI, C.E.N. (2008) Effect of linearly varying normal force upon the nonlinear modal analysis of slender beams, *ENOC 2008, Saint Petersburg, Russia, June, 30-July, 4 2008*.
- [12] PONCET, R. (2011) Dynamics analysis of offshore *risers*, Iniciação científica, Ecole des Ponts Paristech e Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [13] MAZZILLI, C.E.N., MONTICELLI, G.C., GALAN NETO, N.A. (2011) Reduced-order modeling in non-linear dynamics: an approach based on non-linear modes, *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part C: Journal of Mechanical Engineering Science*. July 5, 2011.
- [14] SILVEIRA, L.M.Y. (2009) Modelo Hidro-elástico para Simular as Vibrações Induzidas por Vórtices em Cabos Subterrâneos, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [15] CUNHA, L.D. (2005) Vibrações Induzidas por Vórtices: Análise Crítica de Modelos Fenomenológicos, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- [16] MAZZILLI, C.E.N., NETO, N.A.G., YAMAO, M.. (2012) Non-Linear Reduced-Order Modelling of Vortex-Induced Vibrations In Straight Risers Using Non-Linear Normal Modes, *Diname 2013, Buzios-RJ, 17 – 22 February*.