HÉLIO MAZZILLI XAVIER DE MENDONÇA

**SOBRE A MODELAGEM DE PROBLEMAS DA ENGENHARIA
GEOTÉCNICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia

SÃO PAULO

2005

HÉLIO MAZZILLI XAVIER DE MENDONÇA

**SOBRE A MODELAGEM DE PROBLEMAS DA ENGENHARIA
GEOTÉCNICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do Título de
Mestre em Engenharia

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Miguel Luiz Bucalem

SÃO PAULO

2005

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

São Paulo, 20 de junho de 2005.

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

FICHA CATALOGRÁFICA

Mendonça, Hélio Mazzilli Xavier de

Sobre a modelagem de problemas da engenharia geotécnica pelo método dos elementos finitos / H.M.X. Mendonça. -- São Paulo, 2005.

157 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1.Geotecnia 2.Modelagem matemática 3.Solos 4.Método dos elementos finitos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.

Aos meus pais, pela atenção e amor que sempre dedicaram à minha formação e à minha esposa Karen, pelo carinho, compreensão e incentivo presentes em todos os momentos de elaboração deste trabalho.

AGRADECIMENTOS

Muitas pessoas estiveram presentes durante esta fase de execução do trabalho. Todas elas, direta ou indiretamente, contribuíram para a sua conclusão.

Em especial, gostaria de agradecer ao professor Miguel Luiz Bucalem, com quem tive a oportunidade de trabalhar nos últimos três anos, pelo aprendizado constante e apoio em todos os momentos de dificuldade. Seu auxílio foi fundamental para o alcance das metas propostas.

Outros professores do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações também trouxeram ricas contribuições e sugestões, as quais procurei aproveitar da melhor forma possível. Não poderia deixar de destacar o auxílio inestimável do professor José Jorge Nader, pela leitura cuidadosa e interessada de meu texto, pelas suas sugestões, explicações e ensinamentos, transmitidos sempre de forma atenciosa e precisa.

Devo muito também ao meu tio Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, que na figura de professor, tio e amigo teve sempre atenção especial à minha formação. Sua postura, seriedade e competência são indiscutíveis e, em muito, têm inspirado minha caminhada até aqui.

Da minha mãe, que acompanhou meus estudos sempre de perto, recebi atenção carinhosa na revisão deste texto. Suas observações e sugestões permitiram melhorar bastante a apresentação deste trabalho.

Por fim, gostaria de recordar o apoio incondicional de minha esposa Karen, meus irmãos, Maurício, Maria Teresa e Harley, de meus avôs, meus pais, tios e amigos. O convívio alegre e a união que tivemos ao longo de todos estes anos são a minha maior riqueza.

RESUMO

Tradicionalmente, a análise de problemas da Engenharia Geotécnica esteve apoiada nos conceitos da Mecânica dos Solos, desenvolvida por Terzaghi, na Teoria da Elasticidade e nas teorias de análise limite. Este trabalho busca explorar uma abordagem que deveria ser mais utilizada neste tipo de problema, voltada à utilização de modelos constitutivos mais completos para a caracterização dos solos. Os aspectos teóricos e práticos deste tema são discutidos, dando destaque especial para sua implementação e seu desenvolvimento no âmbito do Método dos Elementos Finitos.

Seguindo uma breve discussão sobre as principais características dos solos, os modelos constitutivos mais utilizados na Engenharia Geotécnica são apresentados. Em particular, os modelos Mohr-Coulomb e Cam-clay. Na seqüência são definidas as equações de Biot para o adensamento, objetivando sua utilização em um programa de elementos finitos, no caso o ADINA.

Na segunda parte do trabalho, três estudos são realizados. O primeiro busca comparar os resultados obtidos por Nader (1993), para um solo siltoso submetido a diferentes trajetórias de tensão, com aqueles fornecidos pelos modelos Mohr-Coulomb e Cam-clay modificado, indicando os principais desvios encontrados.

Na seqüência, analisa-se o problema de determinação do coeficiente N_γ para obtenção da capacidade de carga do solo, no caso de sapatas corridas. Neste estudo, realizado através do ADINA, o modelo Mohr-Coulomb é utilizado, e a influência do ângulo de atrito (ϕ), do ângulo de dilatação (ϑ) e da rugosidade da face inferior da sapata são pesquisadas. As dificuldades numéricas presentes quando a lei de fluxo é não associada são, também, discutidas.

Finalmente, o problema de escavação de valas é discutido. O caráter evolutivo deste tipo de análise, o estudo do adensamento e a pesquisa da influência do coeficiente de empuxo em repouso (K_0) na resposta do problema são explorados. Neste caso, o modelo Cam-clay modificado é escolhido para realização de um conjunto de análises.

A partir destes três estudos pode-se perceber a importância de utilizar modelos constitutivos mais representativos do comportamento dos solos, para reproduzir mais satisfatoriamente sua resposta. Neste trabalho cumpriu-se, também, o objetivo de confirmar a eficiência do ADINA como ferramenta computacional para resolução de problemas relevantes da Engenharia Geotécnica.

ABSTRACT

Traditionally, the solution of Geotechnical Engineering problems was supported by Soil Mechanics concepts, developed by Terzaghi, Elasticity Theory and the limit analysis theories. This work tries to explore an unusual approach, which concerns the use of complete constitutive models for soils description. Both theoretical and practical aspects of the theme are discussed, with special attention devoted to the Finite Element implementation and development.

Following a brief discussion about soil characteristics, the constitutive models usually used on Geotechnical Engineering are presented. In particular, the Mohr-Coulomb and Cam-clay models are explored in details. The theoretical presentation is concluded by establishing the Biot equations for consolidation problems, observing its using on a finite element program, ADINA for instance.

On the second part of the work, three studies are carried out. The first one tries to compare the triaxial response of a silty soil when subjected to different stress paths, described by Nader (1993), with the results achieved when the Mohr-Coulomb and the modified Cam-clay models are used, showing the main differences.

After that, computations of the bearing-capacity factor N_γ have been made in order to evaluate the bearing-capacity for strip foundations. On this study, also solved in ADINA, the Mohr-Coulomb model is used, and the friction angle (ϕ), dilation angle (ψ) and footing roughness effects on the response are investigated. It is also discussed the numerical difficulties observed when non-associative conditions are applied.

Finally, the retaining wall problem is explored. The evolution aspect of the problem, the consolidation study and the pre-excavation earth pressure coefficient (K_0) effects are also discussed. On this case, the modified Cam-clay model is chosen for several analyses.

From these three studies it was noticed that in order to reproduce satisfactorily soil response, it is fundamental to chose representative constitutive models of soil behaviour. Also, this work accomplished the aim of confirming ADINA as an efficient skill to relevant Geotechnical Engineering problems solution.

Lista de Símbolos:

$\eta = q/p'$;

$\delta\epsilon_1$, $\delta\epsilon_2$ e $\delta\epsilon_3$: deformações principais incrementais;

$\delta\epsilon_a$: deformação incremental na direção axial;

$\delta\epsilon^e$: deformação elástica incremental;

$\delta\epsilon^p$: deformação plástica incremental;

$\delta\epsilon_q$: deformação de cisalhamento incremental ou diferencial;

$\delta\epsilon_r$: deformação incremental na direção radial;

$\delta\epsilon_v$ ou $\delta\epsilon_{oct}$: deformação volumétrica incremental ou diferencial;

$\delta\epsilon_{xx}$: deformação quadrática incremental na direção x

$\delta\gamma_{xy}$, $\delta\gamma_{xz}$ e $\delta\gamma_{yz}$: distorções

$\delta\epsilon_{yy}$: deformação quadrática incremental na direção y

$\delta\epsilon_{zz}$: deformação quadrática incremental na direção z

ϑ : ângulo de dilatação;

θ : ângulo de Lode;

λ : coeficiente angular da reta virgem;

κ : coeficiente angular das retas de descompressão / recompressão;

ν : coeficiente de Poisson;

σ : tensão total;

ϕ' : ângulo de atrito;

σ'_1 , σ'_2 e σ'_3 : tensões principais efetivas;

σ'_a : tensão axial efetiva;

σ'_{oct} : tensão normal octaédrica;

σ'_r : tensão radial efetiva;

σ'_{xx} : tensão normal efetiva na direção x;

σ'_{yy} : tensão normal efetiva na direção y;

σ'_{zz} : tensão normal efetiva na direção z;

γ_{oct} ou γ : distorção octaédrica;

τ_{oct} : tensão de cisalhamento octaédrica;

γ_w : peso específico da água;

τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} : tensões de cisalhamento;

$\bar{\mathbf{H}}$: matriz de interpolação utilizadas das cargas hidráulicas;

$\bar{\mathbf{E}}$: matriz obtida por diferenciação de $\bar{\mathbf{H}}$;

$\{\psi\}$: vetor característico dos parâmetros de estado do material.

$\{h\}$: parâmetros de enrijecimento e/ou amolecimento;

$\mathbf{a}$: vetor dos deslocamentos nodais;

$\mathbf{b}$: cargas hidráulicas nodais;

$\mathbf{B}$: matriz de interpolação das deformações;

$\mathbf{C}$: matriz constitutiva para estruturas;

c' : coesão;

$\mathbf{D}$: matriz constitutiva elástica;

$\mathbf{d}$: vetor dos deslocamentos;

$\mathbf{D}_{ep}$: matriz constitutiva elasto- plástica;

e : índice de vazios;

E : módulo de Young (ou de elasticidade);

$\mathbf{e}$: tensor das deformações antiesféricas;

$\mathbf{E}$: tensor das deformações de Green – Lagrange;

$F(\{\sigma\}, \{h\})$: função de plastificação;

$\mathbf{F}$: gradiente de deformação;

$G(\{\sigma\}, \{\psi\})$: função potencial plástica;

G : módulo de rigidez ao cisalhamento transversal;

h : carga hidráulica;

$\mathbf{H}$: matriz de interpolação dos deslocamentos;

i : gradiente hidráulico;

$\mathbf{I}$: matriz identidade;

I'_1 : primeiro invariante do tensor das deformações de Green- Lagrange;

J'_2 : segundo invariante do tensor das deformações antiesféricas;

J_2 : segundo invariante do tensor antiesférico das tensões;

J_3 : terceiro invariante do tensor antiesférico das tensões;

k : coeficiente de permeabilidade;

$\mathbf{K}$: matriz de rigidez;

K : módulo de rigidez volumétrica;

M, Γ : constantes associadas ao modelo Cam clay;

m : delta de Kronecker;

m : multiplicador plástico;

N_γ : coeficiente de capacidade de carga associado ao peso específico do solo;

N : índice de vazios, sobre a reta virgem, para $p'=1$;

N_c : coeficiente de capacidade de carga associado à coesão do solo;

N_q : coeficiente de capacidade de carga associado à largura da sapata;

p' : primeiro invariante do tensor das tensões principais;

p'_o : tensão de pré-adensamento;

q : tensão desviadora;

s_1, s_2 e s_3 : tensões antiesféricas principais;

S_u : resistência não drenada;

$\mathbf{T}'$: tensor das tensões principais;

$\mathbf{T}'_e$: tensor esférico das tensões efetivas;

$\mathbf{T}_a$: tensor antiesférico das tensões;

$\mathbf{T}_s$: forças de superfície;

u : pressão neutra;

v : volume específico;

v_k : índice de vazios de uma reta de descompressão / recompressão, para $p' = 1$;

v_w : velocidade de percolação (ou artificial) da água;

v_{wn} : velocidade de escoamento da água ortogonal ao contorno A ;

W^* : energia de deformação complementar;

$\mathbf{W}$: parte anti-simétrica da taxa de deformação;

W : trabalho por unidade de volume ou função energia de deformação específica;

W_d : componente do trabalho associada à distorção;

W_v : componente do trabalho associada à variação de volume;

w_x, w_y e w_z : forças por unidade de volume nas direções x, y e z ;

Lista de Figuras:

Figura 2.1: a) Plano das tensões principais efetivas. b) plano antiesférico

Figura 2.2: a) Variação de K com p' . b) Variação de G com p' e com τ_{oct}

Figura 2.3: Compressão isotrópica: curvas de descompressão e recompressão

Figura 2.4: Compressão isotrópica: retas de descompressão e recompressão

Figura 2.5: Comportamento de enrijecimento

Figura 2.6: Comportamento dos solos expansivos e compressíveis

Figura 2.7: a) Material elasto- plástico perfeito. b) Material elasto- plástico com enrijecimento. c) Material elasto- plástico com amolecimento

Figura 2.8: Superfície de plastificação

Figura 2.9: Superfície Potencial Plástica

Figura 2.10: a) Enrijecimento isotrópico. b) Enrijecimento cinemático

Figura 2.11: Círculo de Mohr – Resistência não drenada (S_u)

Figura 2.12: Superfície de plastificação do modelo de Tresca

Figura 2.13: Superfície de plastificação do modelo de Von Mises

Figura 2.14: Superfícies de Tresca e Von Mises no plano antiesférico

Figura 2.15: Círculo de Mohr: Envoltória Mohr- Coulomb

Figura 2.16: Superfície de plastificação de Mohr- Coulomb

Figura 2.17: Superfície de plastificação de Drucker Prager

Figura 2.18: Superfícies de Mohr- Coulomb e Drucker Prager no plano antiesférico

Figura 2.19: Superfície limite de estado

Figura 2.20: a) Modelo Cam clay; b) Modelo Cam clay modificado

Figura 2.21: Reta virgem e retas de descompressão - recompressão

Figura 2.22: a) Plano (p' - q) - parâmetro M . b) Plano (p' - v) – parâmetro Γ

Figura 2.23: Lado supercrítico e subcrítico da superfície de plastificação

Figura 2.24: Solos normalmente adensados ou levemente sobreadensados

Figura 2.25: Solos altamente sobreadensados

Figura 2.26: Reta paralela a reta virgem com $v=v_\lambda$ para $p'=1$

Figura 2.27: Superfície Limite de Estado

Figura 2.28: Curva $q \times \varepsilon_a - \varepsilon_r$: Determinação de G

Figura 3.1: Elemento de solo considerado para cálculo da pressão neutra

Figura 3.2: Gradiente hidráulico entre dois pontos A e B

Figura 3.3: Fluxo em um elemento infinitesimal do solo de volume $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$

Figura 5.1: Malha de elementos Finitos

Figura 5.2: Trajetória 1

Figura 5.3: Trajetória 2

Figura 5.4: Trajetória 3

Figura 5.5: Trajetória 4

Figura 5.6: Trajetória 5

Figura 5.7: Trajetória 6

Figura 5.8: Primeiro ensaio drenado com ciclo de carregamento

Figura 5.9: Segundo ensaio drenado com ciclo de carregamento

Figura 5.10: Malhas de Elementos Finitos: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3

Figura 5.11: Curvas Tensão normal – deslocamento para sapatas lisas $\phi = \vartheta = 32^\circ$. (a) ADINA; (b) OXFEM

Figura 5.12: Curvas Tensão normal ao longo da superfície de contato solo - sapata para sapatas lisas $\phi = \vartheta = 32^\circ$. (a) ADINA; (b) OXFEM

Figura 5.13: Variação de N_γ em função do número de passos da análise

Figura 5.14: Curvas Tensão normal – deslocamento para sapatas

Figura 5.15: Variação de N_γ com ϕ

Figura 5.16: Variação de N_γ : (a) $\phi = 30^\circ$; (b) $\phi = 35^\circ$; (c) $\phi = 40^\circ$; e (d) $\phi = 45^\circ$

Figura 5.17: Tensões e ângulo de atrito mobilizado no contato solo-sapata para $\phi = \vartheta = 45^\circ$

Figura 5.18: Campo de deformações plásticas para $\phi = 40^\circ$; (a) $\vartheta = 10^\circ$; (b) $\vartheta = 25^\circ$ e (c) $\vartheta = 40^\circ$

Figura 5.19: Campo de deformações plásticas para $\phi = \vartheta = 45^\circ$.

Figura 5.20: Modelo unidimensional de viga sobre apoio elástico

Figura 5.21: Seção transversal do problema

Figura 5.22: Malha de elementos finitos

Figura 5.23: Deslocamentos da parede. (a) ADINA; (b) CRISP

Figura 5.24: Momentos Fletores na parede. (a) ADINA; (b) CRISP

Figura 5.25: Tensões laterais e pressões neutras. (a), (c) e (e) ADINA; (b), (d) e (f) CRISP

Figura 5.26: Deslocamentos e Momentos Fletores na parede – Casos 1 e 2

Figura 5.27: Tensões laterais e pressões neutras

Lista de Tabelas:

Tabela 5.1: Estudo Preliminar de sensibilidade (OXFEM x ADINA)

Tabela 5.2: Valores de N_γ para sapatas lisas

Tabela 5.3: Valores de N_γ para sapatas rugosas

Tabela 5.4: Valores de N_γ para sapatas rugosas ($\phi = \vartheta = 35^\circ$)

Tabela 5.5: Parâmetros do solo

Tabela 5.6: Valores de K_0 e das tensões presentes no solo

Tabela 5.7: Esforço axial na estronca e na laje de fundo

Tabela 5.8: Variação do esforço na estronca para os casos 1 e 2

SUMÁRIO

CAPÍTULO 1 INTRODUÇÃO	1
1.1 Considerações iniciais	1
1.2 Objetivos	2
CAPÍTULO 2 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ENGENHARIA GEOTÉCNICA	4
2.1 Introdução	4
2.2 Invariantes	6
2.3 Comportamento dos solos	13
2.4 Considerações gerais sobre modelos elasto-plásticos	19
2.4.1 Teoria da Elasticidade	20
2.4.2 Teoria da Plasticidade	22
2.4.3 Matriz constitutiva elasto-plástica	30
2.5 Modelos elasto-plásticos para solos	34
2.5.1 Levantamento histórico	34
2.5.2 Modelo de Tresca	37
2.5.3 Modelo de Von Mises	40
2.5.4 Modelo Mohr-Coulomb	41
2.5.5 Modelo de Drucker-Prager	44
2.5.6 Modelo Cam-clay	45
2.5.7 Outros modelos constitutivos	69
CAPÍTULO 3 COMPORTAMENTO DA FASE FLUIDA DOS SOLOS	72
3.1 Introdução	72
3.2 Conceito de tensões efetivas e pressões neutras	73

3.3 Lei de Darcy e Equação da Continuidade	74

CAPÍTULO 4 EQUACIONAMENTO DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA SEGUNDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS..... 80

4.1 Equações de Biot 81

4.1.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais	81

4.1.2 Equação da Continuidade.....	87

4.2 Equações de equilíbrio para elementos estruturais..... 91

CAPÍTULO 5 ESTUDO DE PROBLEMAS DA ENGENHARIA GEOTÉCNICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS..... 93

5.1 Ensaios Triaxiais Drenados..... 94

5.1.1 Confronto entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e do modelo de Mohr-Coulomb com os resultados experimentais obtidos em ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão	96

5.1.2 Confronto entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e do modelo de Mohr-Coulomb com os resultados experimentais obtidos em ensaios triaxiais drenados com carregamento cíclico	106

5.2 Estudo numérico para determinação do coeficiente N_γ 109

5.2.1 Definição do problema.....	111

5.2.2 Análise Preliminar da malha de Elementos Finitos.....	113

5.2.3 Cálculo de N_γ para sapatas com face inferior lisa.....	119

5.2.4 Cálculo de N_γ para sapatas com face inferior rugosa	122

5.3 Estudo numérico da execução de paredes-diafragma 130

5.3.1 Definição do problema.....	132

5.3.2 Modelo constitutivo e caracterização do solo	134

5.3.3 Definição da malha de elementos finitos	136

5.3.4 Resultados do Caso 1	138

5.3.5 Resultados do Caso 2	142

CAPÍTULO 6 CONCLUSÃO	147
CAPÍTULO 7 BIBLIOGRAFIA	153

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Considerações iniciais

Historicamente, o processo de desenvolvimento da ciência e portanto da sociedade, tem-se confundido com o advento de novas descobertas e com a evolução permanente do conhecimento. Com base na sua capacidade de observação, experimentação e análise, o ser humano vem desenvolvendo teorias e modelos cada vez mais complexos para representação dos mais diversos fenômenos e comportamentos.

No âmbito da engenharia, isto não é diferente. A competitividade cada vez mais acirrada, os elevados padrões de qualidade exigidos, a segurança e a questão ambiental, entre outros requisitos, têm exigido do engenheiro um alto poder de análise e síntese nos projetos em que atua. Isto, sem dúvida, passa pelo conhecimento das práticas e técnicas da Engenharia já consagradas ao longo do tempo. O erro, contudo, consiste em parar por aí. A disponibilidade crescente de recursos computacionais cada vez mais disseminados, abre espaço para a utilização de ferramentas de análise mais poderosas, antes preteridas, dada a dificuldade de sua aplicação. E é sob esta óptica, em que se sugere uma mudança na forma de abordar os problemas, que o presente trabalho se insere.

Tradicionalmente, a análise de problemas em Geotecnia esteve apoiada nos conceitos da Mecânica dos Solos, desenvolvida por Terzaghi, na Teoria da Elasticidade e nas teorias de análise limite (plasticidade). A partir de observações em obras realizadas e informações sobre ensaios de laboratório, diversos modelos constitutivos foram desenvolvidos para

representação do comportamento dos solos. De maneira geral, estes primeiros modelos eram relativamente simples, de fácil utilização, mas ao mesmo tempo imprecisos para reproduzir muitas das situações observadas na prática. Sua aplicação era justificada pela simplicidade de obtenção de seus parâmetros e, principalmente, pela facilidade de solução e interpretação dos resultados. Com o passar do tempo, novos modelos constitutivos foram sendo desenvolvidos, mais completos do que os primeiros, porém não necessariamente mais complicados. Ao contrário, em alguns casos, como no modelo Cam-clay, por exemplo, a interpretação e determinação dos parâmetros decorrem, simplesmente, da realização dos ensaios usuais em laboratório.

Evidentemente, em muitas outras situações, a sofisticação dos modelos é tamanha, que a determinação de seus parâmetros deixa de ser imediata, assim com sua interpretação afasta-se do trivial. Nestes casos, mesmo sendo potencialmente superior aos modelos de hierarquia menor, sua aplicação é muito complicada, e por vezes até, discutível. Desta maneira, o que parece mais sensato em tudo isto, é que devemos buscar o máximo aproveitamento das vantagens oferecidas pelos modelos constitutivos mais avançados, face às facilidades computacionais hoje ofertadas, mas sendo criteriosos para não selecionar algo tão complexo, que não possa ser aferido nem tão pouco interpretado, sob o risco de se perder o controle da análise realizada.

1.2 Objetivos

Diante do que foi acima exposto, este trabalho objetiva apresentar os principais modelos constitutivos utilizados na Engenharia Geotécnica, discutir suas vantagens e limitações na representação dos solos e sua aplicabilidade na resolução de problemas de interesse prático, dentro de um limite de complexidade adequado.

Mais do que simplesmente compará-los em termos conceituais, busca-se aqui utilizar estes modelos para resolução de problemas relevantes da

Engenharia Geotécnica, e, assim, comparar as previsões teóricas, obtidas em um ambiente computacional, com as respostas reais, medidas ou observadas na prática. Um primeiro estudo será conduzido para avaliar a capacidade dos modelos Mohr–Coulomb e Cam-clay modificado, implementados em um programa de elementos finitos (ADINA) de representar o comportamento dos solos observado nos ensaios triaxiais, segundo diferentes trajetórias de tensão.

Na sequência, almejando destacar um problema mais freqüente do dia-a-dia da Engenharia Geotécnica, volta-se a atenção para a avaliação da capacidade de carga do solo, no caso de fundações diretas, através da determinação do coeficiente de capacidade de carga N_γ . Este parâmetro, introduzido por Terzaghi em 1943, é utilizado para calcular qual a parcela da carga de ruptura que está associada ao peso específico do solo (γ). Neste estudo, realizado também através do ADINA, o modelo Mohr–Coulomb é utilizado, e a influência do ângulo de atrito (ϕ), do ângulo de dilatação (ϑ) e da rugosidade da face inferior do elemento de fundação, na resposta do problema, são pesquisados.

Paralelamente, será dedicada atenção à análise do adensamento dos solos, considerando o comportamento acoplado entre as deformações e a percolação de água existente nos vazios. Neste caso, o objetivo maior está na constatação de que o Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta eficaz para o tratamento de problemas desta natureza, e a comprovação disto vem de um estudo de caso clássico: a escavação de valas. O caráter evolutivo deste tipo de problema, que compreende desde a remoção progressiva do solo até a instalação e retirada de elementos de contenção, é plenamente caracterizado no caso em questão.

Enfim, para satisfazer completamente aos objetivos deste trabalho, após a discussão teórica acerca dos modelos constitutivos utilizados para os solos e das equações de Biot para o adensamento, a segunda parte desta exposição concentra-se na resolução dos três casos acima citados pelo Método dos Elementos Finitos, fazendo-se uso do programa ADINA.

Capítulo 2

MODELOS CONSTITUTIVOS PARA ENGENHARIA GEOTÉCNICA

2.1 Introdução

Segundo Wood (1990) o desenvolvimento e o aprendizado científico são alcançados através da construção e análise de modelos que permitam representar determinados aspectos ou comportamentos da realidade em estudo. O objetivo principal não é de construir um espelho da realidade, incluindo todos os elementos e particularidades que a compõem, mas sim destacar e tornar possível a investigação daquilo que é decisivo para a análise.

Para a Engenharia, o desafio está em compreender, analisar e prever o comportamento dos materiais e das estruturas, face aos carregamentos e às solicitações impostas pela sua utilização. Muito embora o conhecimento dos materiais e das estruturas seja cada vez maior, é pouco provável que, ao proceder qualquer tipo de análise, o conjunto completo das características e das particularidades presentes na realidade seja plenamente representado. Esta constatação é particularmente verdadeira para o caso da Engenharia Geotécnica, onde as condições de contorno e a heterogeneidade do subsolo são conhecidas em algumas posições discretas que são investigadas.

Se por um lado, este tipo de representação mais completa é pouco usual, da mesma maneira ela é também, pouco desejada. O entendimento e a compreensão da realidade são facilitados na medida em que se reduzem as complexidades do mundo concreto, fazendo-se uma análise a partir de modelos simplificados dos objetos reais.

Da mesma maneira que os elementos da Geometria Clássica, tais como pontos e vetores, são instrumentos adequados para representação de objetos e estruturas reais, pode-se, também, recorrer a outras idealizações para caracterizar o comportamento dos materiais.

Para a Engenharia Geotécnica, em particular, um dos aspectos de maior relevância refere-se à definição das relações entre as tensões e as deformações observadas. Assim, historicamente, uma diversidade de modelos e equações constitutivas vêm sendo propostos com o objetivo de melhor representar as muitas variáveis e particularidades envolvidas no comportamento dos solos.

Os modelos propostos possibilitam representar matematicamente o comportamento dos solos, sendo que, de um modo geral, apenas o seu aspecto macroscópico é considerado. Neste sentido, características referentes a sua estrutura interna não são utilizadas, de forma direta, na construção dos modelos, ficando a atenção direcionada apenas à similaridade entre as respostas oferecidas pelo solo fictício, idealizado pelo modelo, e o solo real.

Neste capítulo, serão, inicialmente, definidos os invariantes de tensão e deformação utilizados na construção dos modelos. Em seguida, volta-se à atenção para o comportamento real observado para os solos, identificando as principais propriedades a serem satisfeitas pelos modelos reológicos. Enfim, os modelos constitutivos mais relevantes utilizados na Engenharia Geotécnica, em particular os modelos elasto-plásticos, serão apresentados, enfatizando as suas diferenças e limitações, indicando-se a sua aplicabilidade para diferentes tipos de análise.

Dentre estes modelos o Cam-clay será discutido com maior detalhe, em razão da sua comprovada eficiência em representar o comportamento dos solos reais. As equações constitutivas assim apresentadas serão, desta maneira, utilizadas na formulação das equações de equilíbrio dentro do contexto do Método dos Elementos Finitos.

A partir desta apresentação, objetiva-se reforçar o que foi dito no início deste capítulo, que a escolha do modelo constitutivo a ser empregado, nem

sempre deverá priorizar os modelos de hierarquia mais elevada. Em muitos casos, os modelos menos sofisticados, que representem adequadamente o comportamento do solo a ser investigado, são preferíveis, uma vez que simplificam a análise do problema e seus parâmetros de entrada podem ser obtidos por ensaios de laboratório já consagrados. Exemplificando: para um problema que envolva apenas verificações de estabilidade, caberá ao modelo utilizado representar adequadamente a resistência do solo existente, ao passo que, em um estudo de recalques, são preferíveis os modelos que melhor representem a rigidez do maciço. Em outras palavras, para cada um destes casos, o modelo selecionado não precisará, necessariamente, incorporar características adicionais às mínimas requeridas.

2.2 Invariantes

Com o objetivo de justificar a escolha dos invariantes de tensão e deformação utilizados na construção dos modelos constitutivos é necessário, inicialmente, compreender um pouco melhor as variáveis que permitem descrever o comportamento mecânico dos solos.

Conforme será descrito mais à frente, o desenvolvimento dos primeiros modelos constitutivos para representar a resposta tensão x deformação dos solos foram, essencialmente, os mesmos modelos utilizados para previsão da resposta tensão x deformação dos metais. A única distinção residia na introdução do conceito de tensões efetivas, para o caso dos solos, em contrapartida às tensões totais, utilizadas para descrever o comportamento dos metais. Esta diferenciação, que será objeto de discussão posterior, é muito importante, na medida em que se verifica experimentalmente que o comportamento dos solos é definido pelas tensões efetivas atuantes. De qualquer forma, para este conjunto mais antigo de modelos constitutivos seria suficiente considerar o comportamento dos solos em termos de tensões, apenas.

Entretanto, há um aspecto singular que diferencia o solo de outros materiais. Para uma determinada massa de solo, parcela considerável de seu volume é

composta por vazios. De um modo geral, nestes vazios coexistem dois fluidos: água e ar. Admite-se que, para que ocorra uma mudança no volume desta massa de solo é preciso que a fase fluida (ar e água) presente nos vazios se movimente. Naturalmente, diferentes tipos de resposta serão obtidos dependendo da restrição que o esqueleto sólido impõe ao movimento da fase fluida em seu interior. A variável utilizada para medir a dificuldade com que a fase fluida pode se movimentar nos vazios do solo é a permeabilidade. Excluídos a forma e o tamanho das partículas sólidas, a permeabilidade depende basicamente da proporção em volume existente entre os vazios e as partículas sólidas (grãos), denominada índice de vazios (e). Normalmente, é usual utilizar o volume específico (v) ao invés do índice de vazios (e), sendo que:

$$v=1+e \quad (2.1)$$

Observa-se assim, que para descrever completamente o comportamento mecânico dos solos, além das variáveis de tensão, outra variável, tal como o índice de vazios deve ser utilizada para a construção dos modelos constitutivos. Como as equações constitutivas relacionam medidas de tensão e deformação, no lugar do volume específico (v), pode-se definir a deformação volumétrica diferencial ($\delta\epsilon_v$) como sendo:

$$\delta\epsilon_v = -\frac{\delta v}{v} \quad (2.2)$$

Tendo em vista a influência que a deformação volumétrica exerce no comportamento dos solos, torna-se clara a conveniência de se separar as deformações do solo e/ ou o trabalho correspondente em suas componentes associadas à mudança de volume e à mudança de forma (distorção). Esta é então, a motivação que sugere a escolha dos invariantes de tensão e deformação, a seguir apresentados.

Considerando um elemento de solo submetido às tensões normais efetivas σ'_{xx} , σ'_{yy} e σ'_{zz} e às tensões de cisalhamento τ_{xy} , τ_{xz} e τ_{yz} , referenciadas a um sistema de eixos x , y e z , e que apresenta os correspondentes incrementos de deformação normal $\delta\epsilon_{xx}$, $\delta\epsilon_{yy}$ e $\delta\epsilon_{zz}$ e de cisalhamento $\delta\gamma_{xy}$, $\delta\gamma_{xz}$ e $\delta\gamma_{yz}$, então o trabalho realizado por unidade de volume do elemento de solo considerado, vale:

$$\delta W = \sigma'_{xx} \delta\epsilon_{xx} + \sigma'_{yy} \delta\epsilon_{yy} + \sigma'_{zz} \delta\epsilon_{zz} + \tau_{xy} \delta\gamma_{xy} + \tau_{xz} \delta\gamma_{xz} + \tau_{yz} \delta\gamma_{yz} \quad (2.3)$$

Para o caso em que as tensões presentes no elemento de solo correspondem às tensões principais efetivas σ'_1 , σ'_2 e σ'_3 e, associadas a elas, ocorrem as deformações principais incrementais $\delta\epsilon_1$, $\delta\epsilon_2$ e $\delta\epsilon_3$, a expressão do trabalho (2.3) pode ser reescrita, como:

$$\delta W = \sigma'_1 \cdot \delta\epsilon_1 + \sigma'_2 \cdot \delta\epsilon_2 + \sigma'_3 \cdot \delta\epsilon_3 \quad (2.4)$$

A equação acima, expressa em termos das tensões principais efetivas e deformações principais incrementais, já utiliza grandezas invariantes. Entretanto, no tratamento de problemas geotécnicos, conforme foi descrito anteriormente, há o interesse em trabalhar com invariantes alternativos e mais convenientes, que possibilitem separar os efeitos associados à variação de volume daqueles associados à mudança de forma.

Segundo Chen (1982) estes invariantes de tensão e deformação mais convenientes podem ser expressos a partir da combinação das tensões e deformações principais, e são definidos pelas seguintes expressões:

Invariantes de tensão:

$$p' = \frac{I_1}{3} = \frac{(\sigma'_1 + \sigma'_2 + \sigma'_3)}{3} \quad (2.5)$$

$$J_2 = \frac{1}{6} \left[(\sigma'_1 - \sigma'_2)^2 + (\sigma'_2 - \sigma'_3)^2 + (\sigma'_3 - \sigma'_1)^2 \right] \quad (2.6)$$

e que são, respectivamente, o primeiro invariante do tensor das tensões principais ($\mathbf{T}'$) e o segundo invariante do tensor antiesférico das tensões ($\mathbf{T}_a$). Diversas são as interpretações físicas associadas aos invariantes p' e J_2 . Entretanto, existem duas que são mais conhecidas e que avalizam a escolha destes invariantes: a da energia de deformação elástica e a das tensões octaédricas.

A primeira define que a energia de deformação elástica de um material pode ser dividida em duas parcelas, sendo uma associada à mudança de volume e outra relacionada à mudança de forma. Chen (1982) apresenta em “Plasticity In Reinforced Concrete”, que os invariantes p' e J_2 , relacionam-se, respectivamente, com a energia associada à variação volumétrica e à energia associada à distorção.

Com um enfoque semelhante, Chen (1982), Wu (1976) e Young (1975) fornecem a segunda interpretação, definindo as tensões octaédricas, σ'_{oct} e τ_{oct} , associadas, respectivamente, à variação de volume e distorção. Consideram que em determinado ponto material, pode ser definido um plano cuja normal coincide com uma reta que tem mesma inclinação em relação às direções principais ($\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$) no espaço das tensões principais efetivas. Tem-se que a tensão normal efetiva (σ'_{oct}) e de cisalhamento (τ_{oct}) atuantes neste plano, são as seguintes:

$$\sigma'_{\text{oct}} = p' \quad (2.7)$$

$$\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3} \cdot J_2} \quad (2.8)$$

Conforme será apresentado nas seções subseqüentes deste capítulo, o solo, quando em regime elástico, apresenta comportamentos bastante distintos, dependendo se está submetido a tensões de cisalhamento ou apenas à compressão isotrópica. Deve-se, contudo, observar que, no caso real, as respostas oferecidas por estes dois tipos de carregamento não são desacopladas, já que a aplicação de tensões de cisalhamento, além da distorção, causam, também, variação de volume.

De qualquer forma, através das duas interpretações indicadas acima, a vantagem no uso destes invariantes alternativos fica evidente, tornando a sua escolha plenamente justificada.

Para complementar a apresentação destes invariantes, além das interpretações físicas já indicadas, existe, também, uma interpretação geométrica associada à p' e J_2 . Para auxiliar na descrição desta interpretação geométrica, Chen (1982) define um terceiro invariante, designado (θ) . Este invariante pode ser escrito na forma:

$$\theta = \frac{1}{3} \cos^{-1} \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \right) \quad (2.9)$$

Para definição do invariante J_3 deve-se apresentar o conceito de tensor das tensões antiesféricas ($\mathbf{T}_a$). Este tensor pode ser determinado a partir do tensor esférico ($\mathbf{T}'_e = p' \cdot \mathbf{I}$), sendo então definido, como:

$$\mathbf{T}_a = \mathbf{T}' - \mathbf{T}'_e \quad (2.10)$$

Desta forma, pode-se escrever o invariante J_3 , como:

$$J_3 = s_1 \cdot s_2 \cdot s_3 \quad (2.11)$$

com, s_1 , s_2 e s_3 sendo os valores das tensões antiesféricas principais.

Assim, para fornecer a interpretação geométrica destes invariantes, deve-se imaginar a representação do estado de tensões de um ponto P no espaço das tensões principais efetivas ($\sigma'_1, \sigma'_2, \sigma'_3$), sendo dado pelo vetor OP (figura 2.1).

Figura 2.1: a) Plano das tensões principais efetivas. b) plano antiesférico.

Pode-se pensar no vetor OP como sendo a soma vetorial de ON e NP, com ON coincidente com a direção da diagonal do espaço das tensões ($\sigma'_1 = \sigma'_2 = \sigma'_3$).

Os planos normais a esta direção, denominada eixo hidrostático, são denominados planos antiesféricos (π), também representados na figura 2.1. Assim, definindo o vetor unitário $\mathbf{t}$ como:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\sqrt{3}}(1 \ 1 \ 1) \quad (2.12)$$

e observando que o vetor ON corresponde à distância existente entre a origem do espaço das tensões principais (O) e o plano π atual, pode-se escrever que:

$$|ON| = \xi = \sqrt{3} \cdot p' = \sqrt{3} \cdot \sigma'_{oct} \quad (2.13)$$

Por outro lado, o vetor NP, contido no plano π é determinado por:

$$|NP| = |OP - ON| = r = \sqrt{3} \cdot \tau_{oct} \quad (2.14)$$

Para definição completa do vetor NP no plano antiesférico, resta definir sua orientação neste plano. Isto é feito a partir do ângulo θ , medido a partir da direção positiva de σ_1 e pertencente ao plano antiesférico. Retomando a expressão já definida de θ , e considerando $\sigma'_1 \geq \sigma'_2 \geq \sigma'_3$, então:

$$0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ \quad (2.15)$$

Assim, compreende-se o significado do invariante θ , complementando a interpretação geométrica dos invariantes de tensão.

No que diz respeito aos invariantes de deformação, raciocínio análogo ao desenvolvido para os invariantes de tensão pode ser utilizado. Neste sentido fica clara a intenção de avaliar separadamente as deformações associadas à variação de volume em relação àquelas que geram apenas mudança de forma.

Antes de apresentar as expressões finais dos invariantes de deformação a serem utilizados, definem-se os invariantes I'_1 , associado ao tensor das deformações ($\mathbf{E}$), e J'_2 , relacionado ao tensor das deformações antiesféricas ($\mathbf{e}$), como

$$I'_1 = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 \quad (2.16)$$

$$J'_2 = \frac{1}{6} \left[(\varepsilon_1 - \varepsilon_2)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon_3)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon_1)^2 \right] \quad (2.17)$$

Considerando-se o caso em que apenas pequenas deformações estão envolvidas, os invariantes referentes à variação volumétrica (ε_v ou ε_{oct}) e à distorção (γ_{oct} , ou simplesmente γ), são os seguintes:

---

¹ ε_1 , ε_2 e ε_3 são as deformações associadas às direções principais.

$$\varepsilon_{\text{oct}} = \varepsilon_v = I_1' \quad (2.18)$$

$$\gamma_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{8}{3} \cdot J_2'} \quad (2.19)$$

Encerrada esta apresentação, a expressão (2.4) que define o trabalho incremental realizado por unidade de volume de um elemento de solo pode ser reescrita, como:

$$\delta W = \delta W_v + \delta W_d = p' \cdot \delta \varepsilon_v + \tau_{\text{oct}} \cdot \delta \gamma_{\text{oct}} \quad (2.20)$$

onde as componentes associadas à variação de volume e à distorção são facilmente identificadas.

Como comentário final desta seção, resta apenas observar que o comportamento do solo em termos de tensões médias efetivas e tensões antiesféricas só é desacoplado para o caso de solos isotrópicos. No caso de modelos que levam em consideração a anisotropia dos solos, isto não é mais verdade. Nestas condições a matriz de rigidez elástica apresenta elementos não nulos fora da diagonal principal.

2.3 Comportamento dos solos

Baseando-se, principalmente, na observação do comportamento dos solos através de ensaios de laboratório e ensaios *in situ*, diversos avanços foram conquistados no âmbito da Mecânica dos Solos, e com isto uma série de características e propriedades puderam ser enunciadas. Particularmente, através dos ensaios de adensamento (compressão edométrica) e ensaios triaxiais, os principais aspectos associados à rigidez e à resistência dos solos foram identificados.

Naturalmente, após estes primeiros avanços, o desafio da engenharia geotécnica foi de estabelecer um modelo constitutivo que melhor representasse o comportamento observado dos solos.

Antes de identificar as principais propriedades dos solos, que deverão ser satisfeitas pelos modelos constitutivos propostos, algumas definições complementares são necessárias.

Considerando um material com comportamento elástico linear a relação tensão x deformação pode ser expressa, segundo a notação de Einstein, pela seguinte relação:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.21)$$

Se o material for, também, isotrópico, a equação acima pode ser reescrita, conforme apresentado abaixo (δ_{ij} : delta de Kronecker)

$$\sigma_{ij} = K \cdot \varepsilon_{kk} \cdot \delta_{ij} + 2 \cdot G \cdot e_{ij} \quad (2.22)$$

As constantes elásticas K, módulo de rigidez volumétrica do material, e G, módulo de rigidez ao cisalhamento transversal, podem ser definidas a partir do módulo de Young (ou de elasticidade) E e do coeficiente de Poisson ν , através das expressões:

$$K = \frac{E}{3 \cdot (1 - 2\nu)}; \quad G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.23)$$

Apesar das constantes E e ν serem suficientes para descrição da resposta elástica de materiais isotrópicos, a utilização de K e G apresenta-se como mais adequada para o estudo dos solos, uma vez que permitem separar a deformação elástica em suas parcelas associadas à variação de volume e à mudança de forma, respectivamente.

Considerando os invariantes definidos na seção anterior, a seguir são apresentadas as principais propriedades dos solos, conforme destacado por Atkinson (1993) e Wu (1976), que devem ser contempladas pelos modelos constitutivos:

- Com aumento da tensão média efetiva p' e, conseqüente, redução do índice de vazios do solo, há aumento de rigidez, com conseqüente aumento

do módulo de rigidez volumétrica K e, também, do módulo de rigidez ao cisalhamento transversal G (figura 2.2a e b)²;

- Os solos sofrem redução na rigidez ao cisalhamento transversal quando submetidos a tensões cisalhantes, ou antiesféricas. Este comportamento dos solos, que é altamente não-linear, implica numa redução substancial do módulo de rigidez ao cisalhamento quando o solo se aproxima da ruptura. Em caso de descarregamento, para um novo carregamento, o valor de G volta a crescer (figura 2.2b). Esta consideração indica que o solo pode sofrer aumento significativo de rigidez com uma alteração na trajetória de tensões a que está submetido. Este aumento de rigidez é tanto maior, quanto mais expressiva for esta mudança na direção da trajetória de tensões, como no descarregamento, por exemplo;
- Utilizando-se os critérios de resistência, pode-se definir uma superfície de ruptura para os solos, a partir da qual não é mais possível aumentar as tensões antiesféricas. De um modo geral, o critério de Mohr-Coulomb é um dos mais utilizados na definição desta superfície;

Figura 2.2: a) Variação de K com p' . b) Variação de G com p' e com τ_{oct} .

- Os solos, de um modo geral, apresentam comportamentos diferenciados conforme a direção em que são solicitados. Isto significa que há uma tendência de se comportarem anisotropicamente;

² Adotam-se como positivas as tensões de compressão.

- Conforme pode ser observado a partir dos ensaios de compressão isotrópica ou ainda no ensaio de compressão edométrica, os solos sobreadensados apresentam redução de rigidez quando atingem a tensão de pré-adensamento, p'_0 (figura 2.3). Esta tensão de pré-adensamento pode ser considerada como a tensão de escoamento do solo, que nada mais é do que a fronteira entre a região de comportamento elástico e a região de comportamento plástico;
- As deformações observadas no trecho correspondente à reta virgem são irreversíveis, enquanto que sobre as curvas de descompressão e recompressão, admite-se comportamento elástico. Uma primeira hipótese, normalmente considerada, consiste em definir o par de curvas de descompressão e recompressão como sendo uma única reta. Com isto duas simplificações são introduzidas. A histerese presente na região elástica do problema, além das deformações irreversíveis, existentes dentro dos ciclos de carregamento, deixam de ser consideradas.

Com estas simplificações, a figura 2.3 é redefinida conforme apresentado na figura 2.4.

Figura 2.3: Compressão isotrópica: curvas de descompressão e recompressão;

Figura 2.4: Compressão isotrópica: retas de descompressão e recompressão.

A aproximação introduzida é justificada, uma vez que as deformações envolvidas nos ciclos de carregamento-descarregamento são muito inferiores em relação às deformações observadas sobre a reta virgem. Assim, na maior parte dos casos, estas simplificações são válidas.

A maioria dos modelos constitutivos adota esta hipótese, entretanto, modelos como o MIT-E3, desenvolvido por Whittle (1987) apud Whittle (1991), têm a preocupação de representar adequadamente o comportamento dos solos sobreadensados, considerando tanto o comportamento elástico não-linear, como também, deformações irreversíveis nos ciclos de carregamento e descarregamento.

De qualquer forma, a existência de deformações em parte irreversíveis, comprovada por diversos ensaios de laboratório (compressão isotrópica, edométrico e ensaio triaxial convencional, sem variação da tensão de confinamento), sugere a adoção de modelos elasto-plásticos para definição de modelos matemáticos para os solos.

Na figura 2.4 aparecem dois parâmetros N e v_k , ainda não definidos, que correspondem, respectivamente, à intersecção da reta virgem e de uma reta de descompressão-recompressão com a reta $p' = 1$.

- Conforme será discutido na apresentação dos modelos constitutivos, os solos apresentam, de modo geral, superfícies distintas de ruptura e de plastificação. Com isto, a utilização de modelos elasto-plásticos perfeitos não refletem, adequadamente, o comportamento real dos solos. Observa-se a partir de ensaios de laboratório que modelos elasto-plásticos com enrijecimento ou amolecimento oferecem melhores resultados.

Para um ensaio de adensamento padrão, uma amostra pode ser carregada elasticamente até uma tensão correspondente à σ'_{p1} , a partir da qual, passam a ocorrer deformações irreversíveis. Porém, ao contrário do que acontece para os materiais elasto-plásticos perfeitos, a tensão σ'_{p1} cresce com as deformações plásticas, caracterizando o enrijecimento. Considerando as trajetórias AB e CD, descarregamento e recarregamento, da figura 2.5, como trechos elásticos, as tensões σ'_{p1} e σ'_{p2} são as tensões

de plastificação correspondentes e que, portanto, crescem com deformação específica (ε_e). Esta deformação específica relaciona a variação de altura do corpo de prova com a sua altura inicial;

- Os solos, assim como os demais materiais, apresentam comportamento viscoso quando submetidos a solicitações ou deformações constantes. Neste caso, as deformações não são imediatas e sua evolução, para um dado carregamento aplicado, passa a ser função da variável tempo. Entretanto, para os objetivos deste trabalho, o fenômeno da viscosidade dos solos não será considerado;
- As areias com alta compactidade relativa e argilas bastante sobreadensadas tendem a dilatar quando submetidas ao cisalhamento (ensaios triaxiais), diferentemente das areias fofas e argilas levemente ou normalmente adensadas. A figura 2.6 apresenta esquematicamente estas situações extraídas de ensaios triaxiais:

Com base na constatação acima, que ilustra a resposta do solo quando submetido às tensões de cisalhamento, pode-se compreender melhor como ocorre o desenvolvimento de pressões neutras na realização de ensaios triaxiais não drenados. Considerando o caso de um solo saturado submetido a um ensaio não drenado, mesmo não ocorrendo variações volumétricas, o solo é induzido a apresentar tais variações. Assim, nos solos expansivos surgem pressões neutras negativas, enquanto que nos solos compressíveis aparecem pressões neutras positivas. O significado destas observações será melhor compreendido no próximo capítulo, quando serão feitas as definições formais de pressão neutra, tensões efetivas e tensões totais.

Resta observar a influência que a tensão média efetiva p' exerce sobre o comportamento acima descrito. Para baixos valores de p' existe uma maior tendência dos solos dilatarem, enquanto que para tensões médias maiores, mesmo as areias mais compactas tendem a comprimir quando cisalhadas.

Figura 2.5: Comportamento de enrijecimento.

Figura 2.6: Comportamento dos solos expansivos e compressíveis.

A bibliografia disponível sobre as propriedades dos solos reais é bastante ampla, não se restringindo apenas aos aspectos acima discutidos. Por outro lado, tratar de outros aspectos que não aqueles já apontados, consiste em tarefa suplementar e específica, que se afasta dos propósitos deste trabalho. Acredita-se, porém, que a abrangência dos assuntos discutidos já é suficiente para os objetivos que ora buscamos, bem como, para resolução dos problemas mais complexos da engenharia geotécnica.

2.4 Considerações gerais sobre modelos elasto-plásticos

Conforme examinado anteriormente, a complexidade envolvida no estudo das deformações dos solos, consiste em um dos maiores desafios da engenharia. Porém, apesar da diversidade de comportamentos, as observações experimentais apontam para um aspecto singular, válido para os mais diferentes tipos de solos encontrados na natureza. Esta característica comum, explicitada através de ensaios triaxiais, mostra que, dependendo da história de carregamento e das tensões atuantes no solo, deformações reversíveis (elásticas) e irreversíveis (plásticas) podem coexistir. Neste contexto, a adoção de modelos elasto-plásticos para a formulação das equações constitutivas é justificada.

A terminologia utilizada neste capítulo define que o material está em regime elástico, quando apenas deformações elásticas e, portanto, reversíveis estão ocorrendo. Por outro lado, no regime elasto-plástico, as deformações totais são resultado de deformações reversíveis e irreversíveis (plásticas).

A seguir, os conceitos fundamentais da teoria da elasticidade e da teoria da plasticidade serão discutidos, introduzindo a apresentação dos modelos constitutivos.

2.4.1 Teoria da Elasticidade

Define-se que um material tem comportamento elástico quando a tensão de Cauchy é dada, em cada ponto, pelo gradiente de deformação no ponto, independentemente da história do movimento até o instante considerado. Assim, para os materiais elásticos a equação constitutiva é dada na forma:

$$\mathbf{T}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{T}}(\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)) \quad (2.24)$$

onde $\mathbf{F}$ é o gradiente de deformação e $\mathbf{x}$ a posição do ponto considerado em relação a uma configuração de referência. Com isto pode-se caracterizar o tensor das tensões a partir do gradiente de deformação no ponto e no instante t considerados.

Os modelos elásticos podem assumir diversas formas, dependendo se o material considerado é isotrópico ou anisotrópico, e ainda, se apresenta comportamento linear ou não-linear. O livro “Plasticity In Reinforced Concrete” de Chen (1982) serve de base para as definições e expressões abaixo apresentadas.

- Material Elástico Linear:

Para material elástico- linear a equação constitutiva pode ser escrita, em notação técnica, na forma:

$$\sigma_{ij} = D_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (2.25)$$

sendo σ o tensor das tensões de Cauchy, D a matriz constitutiva do material e ε o tensor das deformações infinitesimais.

Caso o material seja isótropo, tem-se o que se denomina simetria de ponto, ou seja, qualquer plano passando por este ponto é plano de simetria. Assim, a matriz constitutiva é simétrica, existindo apenas duas constantes elásticas independentes, o Módulo de elasticidade E e o coeficiente de Poisson ν . Por outro lado, se o material apresenta anisotropia em todas as direções, são necessários 36 parâmetros independentes na determinação da matriz $[D]$.

- Material Elástico Não- Linear:

Nos materiais elásticos não lineares, a principal diferença em relação aos materiais elásticos lineares, reside no fato de que os parâmetros elásticos passam a depender do estado de tensão e/ ou deformação em que se encontram. No contexto da elasticidade não linear, dois tipos diferentes de materiais podem ser identificados para formulação geral do modelo.

a) Material Elástico do tipo Cauchy:

Para este material, considera-se que o estado de tensão é função apenas do estado de deformação atual. Assim, a equação constitutiva pode ser escrita na forma:

$$\sigma_{ij} = A_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (2.26)$$

onde A_{ij} é a função que representa a resposta elástica do material.

b) Material Hiperelástico (ou de Green):

A definição de material hiperelástico surgiu como uma evolução natural do material elástico do tipo Cauchy, uma vez que, este último, erroneamente, possibilita a geração de energia durante um ciclo de carregamento-descarregamento, o que viola as leis da Termodinâmica.

Assim, para construção das equações constitutivas admite-se a existência de uma função energia de deformação específica W (ou sua complementar W^*), de forma que:

$$W = \int_0^{\varepsilon_{ij}} \sigma_{ij} \cdot d\varepsilon_{ij}; \quad W^* = \int_0^{\sigma_{ij}} \varepsilon_{ij} \cdot d\sigma_{ij} \quad (2.27)$$

e

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial W^*}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.28)$$

A primeira expressão indicada em 2.28 estabelece a forma geral da relação tensão x deformação, apresentada na forma de energia. Esta relação, além de prever deformações reversíveis e independentes da trajetória de tensões e do caminho das deformações, satisfaz, também, as leis da Termodinâmica.

2.4.2 Teoria da Plasticidade

Esta seção do capítulo, que abrange o estudo dos conceitos da Plasticidade relevantes à construção dos modelos constitutivos elasto-plásticos, considera, inicialmente, a análise de um problema unidimensional, em que três comportamentos distintos são examinados: comportamento elasto-plástico perfeito linear, comportamento elasto-plástico linear com enrijecimento e comportamento elasto-plástico linear com amolecimento.

A figura 2.7a, característica dos materiais elasto-plásticos perfeitos, apresenta patamar de escoamento definido pela tensão de escoamento σ_y , que é constante, independente das deformações plásticas previamente ocorridas. Em um primeiro carregamento, compreendido entre o trecho AB, o material se comporta elasticamente. Removendo as solicitações antes de atingir a tensão correspondente ao ponto B, as deformações experimentadas pelo material são reversíveis, e a trajetória de descarregamento ocorre ao longo da linha BA. Entretanto, se o corpo material for submetido a

deformações a partir do ponto B, em direção ao ponto C, apenas deformações plásticas serão observadas. Procedendo a um descarregamento em C, retorna-se ao regime elástico, agora através da linha CD. A este novo estado, permanece associada à mesma tensão de plastificação σ_y .

Para os materiais elasto-plásticos com enrijecimento, representados pela figura 2.7b, após um trecho elástico, compreendido entre A e B, havendo deformação além do ponto B, a tensão de escoamento inicial, σ_{yB} , é excedida. Assim, como existe acréscimo de tensão, deformações elásticas serão observadas em conjunto com as deformações plásticas. No descarregamento, a partir do ponto C, o material segue a trajetória CD, sendo que para um recarregamento a tensão de escoamento passa a valer σ_{yC} , e não mais σ_{yB} , como no caso elasto-plástico perfeito.

Enfim, na figura 2.7c tem-se o comportamento dos materiais elasto-plásticos com amolecimento, para os quais, após um trecho inicial elástico AB, durante a ocorrência das deformações plásticas, trajetória BCE, a tensão de escoamento decresce.

Figura 2.7: a) Material elasto-plástico perfeito. b) Material elasto-plástico com enrijecimento. c) Material elasto-plástico com amolecimento.

A extensão destes conceitos para o estado multi-axial de tensões e deformações, em que as seis componentes de tensão e deformação têm que ser consideradas exige considerações adicionais para formulação dos modelos. A tarefa pode ser simplificada no caso de materiais isotrópicos, já que é possível trabalhar com os invariantes definidos anteriormente.

Para o caso geral, as seguintes definições são necessárias para formulação dos modelos elasto-plásticos:

- **Coincidência dos eixos**

Há coincidência entre as direções das tensões principais acumuladas e as direções das deformações incrementais. A denominação tensões acumuladas corresponde ao estado atual de tensões, resultante dos incrementos de tensão, acumulados³. Assim, é possível representar as tensões principais acumuladas e as deformações principais incrementais nos mesmos eixos do espaço multi-axial. Isto ocorre, pois, as direções dos incrementos de deformação plástica não são definidas pela trajetória de tensões seguida até a superfície de plastificação, mas sim pela combinação das tensões em um ponto particular sobre esta superfície (tensões acumuladas). Isto se opõe ao caso da elasticidade, onde as deformações elásticas, incrementais ou não, dependem dos incrementos de tensão.

- **Função de Plastificação**

Enquanto que para o caso unidimensional é possível definir um valor σ_y para a tensão de plastificação dos materiais, no estado multi-axial, a existência de diferentes componentes de tensão, exige que este conceito seja reformulado. Assim, define-se a função de plastificação $F(\{\sigma\}, \{h\})$, expressa em termos das componentes de tensão e de parâmetros de enrijecimento e/ou amolecimento $\{h\}$.

---

³ Novamente, utiliza-se do incremento de deformações e tensões, ao invés das respectivas derivadas, em razão da discretização realizada na solução numérica através do Método dos Elementos Finitos.

Os parâmetros de enrijecimento e/ou amolecimento $\{h\}$ podem ser associados às deformações plásticas observadas ou, alternativamente, com o trabalho plástico realizado.

A função F representa a fronteira entre o comportamento elástico e o elasto-plástico. No espaço das tensões, F define um conjunto de superfícies, como, por exemplo, a apresentada, esquematicamente, na figura 2.8.

Internamente a função de plastificação o regime é elástico e a derivada da tensão em relação ao tempo, taxa de tensão, é dada por:

$$\dot{\sigma} = f^e(\sigma, \dot{\epsilon}) \quad (2.29)$$

com, $f^e(\sigma, \dot{\epsilon})$ indicando a função elástica que relaciona a taxa de tensão com a taxa de deformação.

Por outro lado se o regime for elasto-plástico a taxa de tensão passa a ser escrita, na forma:

$$\dot{\sigma} = f^p(\sigma, \dot{\epsilon}) \quad (2.30)$$

Pode-se demonstrar que existe uma relação entre as funções indicadas acima e para que não haja qualquer descontinuidade nesta relação, quando $F(\{\sigma\}, \{h\}) = 0$ e $\dot{\sigma}$ é tangente à superfície de plastificação:

$$f^p(\sigma, \dot{\epsilon}) = f^e(\sigma, \dot{\epsilon}) \quad (2.31)$$

A expressão (2.31) garante que a condição de continuidade ou consistência seja satisfeita.

Considerando-se uma alteração no estado de tensões de um ponto segundo a trajetória de tensão $\sigma = \sigma(t)$, através da função F , pode-se determinar a ocorrência de regime elástico ou elasto-plástico, de acordo com as seguintes condições:

- Se $F(\{\sigma\}, \{h\}) < 0$, regime elástico e, portanto, $\dot{\sigma} = f^e(\sigma, \dot{\epsilon})$;
- Se $F(\{\sigma\}, \{h\}) = 0$, duas condições são possíveis:
  - Para $\nabla F: \dot{\sigma} \leq 0$, regime elástico e $\dot{\sigma} = f^e(\sigma, \dot{\epsilon})$;
  - Para $\nabla F: \dot{\sigma} > 0$, regime elasto-plástico, $\dot{\sigma} = f^p(\sigma, \dot{\epsilon})$ e assim:
    - $\nabla F: \dot{\sigma} > 0$, regime elasto-plástico com enrijecimento;
    - $\nabla F: \dot{\sigma} < 0$, regime elasto-plástico com amolecimento;
- $F(\{\sigma\}, \{h\}) > 0$, situação impossível.

O tensor ∇F é o gradiente da função de plastificação em $\sigma(t)$ e $\dot{\sigma}$ representa a taxa de tensão, ou ainda, para o problema discretizado, o incremento de tensão.

Figura 2.8: Superfície de plastificação

Na condição em que $\nabla F: \dot{\sigma} \leq 0$ (regime elástico), o incremento de tensão é dirigido para o interior da superfície de plastificação ou é tangente a ela. Por outro lado, se $\nabla F: \dot{\sigma} > 0$ (regime elasto-plástico), o incremento se dirige para o exterior da superfície. Como não são permitidos estados de tensão externos à superfície de plastificação, para ocorrer o incremento de tensão é necessário que uma nova superfície de plastificação seja definida, e sobre ela se localize este novo estado. As leis de enrijecimento e/ou amolecimento, que traduzem as modificações na função de plastificação serão comentadas posteriormente.

A partir da discussão acima, a função de plastificação pode ser interpretada como uma função de carregamento, já que para $F(\{\sigma\},\{h\}) = 0$, existem possibilidades diversas de incrementos de tensão. Mais precisamente, para $F(\{\sigma\}, \{h\}) = 0$, tem-se:

- $\nabla F:\dot{\sigma} < 0$, descarregamento ou amolecimento;
- $\nabla F:\dot{\sigma} = 0$, carregamento neutro, e
- $\nabla F:\dot{\sigma} > 0$, carregamento (enrijecimento).

Assim, enquanto o carregamento neutro corresponde ao regime elástico e para a condição de carregamento o regime é elasto-plástico, para as condições de descarregamento pode-se ter, tanto regime elástico quanto elasto-plástico.

• Função Potencial Plástica

Enquanto que, no caso uniaxial, a direção das deformações plásticas incrementais é coincidente com a direção da tensão imposta, para os casos multi-axiais, a situação é, evidentemente, mais complexa. Assim, para definir as direções das deformações plásticas incrementais recorre-se à lei do fluxo, expressa a seguir:

$$\Delta \varepsilon_i^p = m \cdot \frac{\partial G(\{\sigma\},\{\Psi\})}{\partial \sigma_i} \quad (2.32)$$

onde $\Delta \varepsilon_i^p$ representa as seis componentes da deformação plástica incremental, m é conhecido como o multiplicador plástico e G a função potencial plástica, sendo esta última escrita na forma:

$$G(\{\sigma\},\{\psi\}) = 0 \quad (2.33)$$

onde $\{\psi\}$ é um vetor característico dos parâmetros de estado do material.

Cabe, entretanto, ressaltar que apenas as derivadas parciais de G em relação aos eixos coordenados (as componentes de tensão) são necessárias para definir a lei de fluxo.

Figura 2.9: Superfície Potencial Plástica

A função potencial plástica define uma superfície no espaço das tensões principais (figura 2.9).

Indicando os vetores correspondentes às deformações plásticas incrementais no espaço das tensões principais e recordando a hipótese de coincidência dos eixos – discutida acima - tem-se que estes vetores serão ortogonais à superfície potencial plástica para cada estado de tensão considerado.

Na realidade, as componentes destes vetores definem a magnitude relativa das componentes de deformação plástica incremental. Isto significa que os vetores descrevem apenas os tamanhos relativos das componentes de deformação, enquanto que o parâmetro m controla a sua magnitude.

Normalmente, a definição quanto à forma imaginada para a função potencial plástica é feita de modo experimental. Entretanto, para alguns tipos de materiais pode-se considerar uma simplificação em que $G(\{\sigma\}, \{\psi\}) = F(\{\sigma\}, \{h\})$. Nestas condições o número de funções necessárias para descrever a resposta plástica do problema é reduzida pela metade. Isto significa dizer

que o esforço computacional é menor, propiciando uma solução mais rápida das equações. Para esta condição a lei de fluxo é denominada associada e, como o vetor das deformações plásticas incrementais passa a ser ortogonal à superfície de plastificação, diz-se que o postulado da normalidade é satisfeito. Em outras palavras, quando o postulado da normalidade é garantido, tem-se que a natureza das deformações plásticas está associada à função de plastificação.

É importante diferenciar este postulado daquele enunciado por Drucker (1954) e Drucker (1966) apud Wood (1990), denominado postulado da estabilidade. Este postulado está relacionado à condição de existência e unicidade, e estabelece que o trabalho realizado por um agente externo em relação aos deslocamentos por ele produzidos deve ser sempre positivo ou igual a zero. Segundo este postulado não seria possível explicar o amolecimento plástico e a condição de normalidade deveria ser sempre satisfeita. Entretanto, para o caso de aplicações mais gerais, as funções F e G são distintas, lei de fluxo não-associada, e a normalidade não é satisfeita. Neste sentido, enquanto que a estabilidade implica na normalidade, a recíproca não é verdadeira.

- **Leis de enrijecimento e amolecimento**

A definição das leis de enrijecimento e/ ou amolecimento pode ser feita estabelecendo-se a variação do parâmetro $\{h\}$ com as deformações plásticas ou, ainda, com o trabalho plástico. Uma vez definidas, estas leis permitem descrever as mudanças de posição e de tamanho da superfície de plastificação em relação às deformações plásticas percebidas.

Existem duas formas básicas de enrijecimento: o isotrópico e o cinemático. No caso isotrópico apenas o tamanho da superfície de plastificação é alterado, mantendo-se sua forma e orientação. Já no enrijecimento cinemático preservam-se o tamanho, forma e orientação, mas a superfície muda de posição no espaço das tensões. Estes dois comportamentos são apresentados na figura 2.10.

Quanto ao amolecimento, tem-se comportamento semelhante ao verificado para o enrijecimento isotrópico, exceto pelo fato de que o tamanho da superfície de plastificação é reduzido com a deformação plástica.

Para estes dois tipos de comportamento – enrijecimento ou amolecimento - pelo fato de existir uma regra que define a variação do parâmetro $\{h\}$ com as deformações plásticas, o parâmetro m , referente à magnitude destas deformações, pode ser definido. Por outro lado, se o comportamento do material for elasto-plástico perfeito este parâmetro fica indeterminado. Tem-se ainda que, para o caso elasto-plástico perfeito, a superfície definida pela função F é fixa e, portanto, coincide com a superfície de ruptura do material.

Figura 2.10: a) Enrijecimento isotrópico. b) Enrijecimento cinemático

2.4.3 Matriz constitutiva elasto-plástica

As duas seções anteriores apresentaram os aspectos essenciais dos comportamentos elástico e plástico dos materiais. Com base nas equações e conceitos enunciados, busca-se agora definir a relação entre as tensões e deformações incrementais para sua conseqüente utilização nos modelos constitutivos elasto-plásticos. O trabalho desenvolvido no Imperial College (1997) é utilizado como referência para as deduções apresentadas a seguir. Ressalta-se mais uma vez, que, a rigor, as equações deveriam ser

apresentadas em função de taxas (derivadas) de tensão e de deformação. Mas, como o trabalho está voltado para implementação dos modelos constitutivos em um ambiente de solução numérica, com conseqüente discretização do problema, simplifica-se a apresentação das equações através de uma abordagem incremental.

Definindo $[D_{ep}]$ como sendo a matriz constitutiva elasto-plástica, em contraposição à matriz elástica $[D]$, a relação entre as tensões e as deformações incrementais para um material elasto-plástico, pode ser escrita na forma:

$$\{\Delta\sigma\} = [D_{ep}] \cdot \{\Delta\varepsilon\} \quad (2.34)$$

O incremento de deformação $\{\Delta\varepsilon\}$ é, por sua vez, obtido pela soma de uma parcela elástica e outra plástica:

$$\{\Delta\varepsilon\} = \{\Delta\varepsilon^e\} + \{\Delta\varepsilon^p\} \quad (2.35)$$

Retomando as definições de material elástico e a lei de fluxo para materiais plásticos, $\{\Delta\varepsilon^e\}$ e $\{\Delta\varepsilon^p\}$ são dadas, respectivamente:

$$\{\Delta\varepsilon^e\} = [D]^{-1} \cdot \{\Delta\sigma\} \quad (2.36)$$

$$\{\Delta\varepsilon^p\} = m \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\psi\})}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.37)$$

Combinando as equações (2.36) e (2.37) com (2.35), pode-se escrever:

$$\{\Delta\sigma\} = [D] \cdot \{\Delta\varepsilon\} - m \cdot [D] \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\psi\})}{\partial \sigma} \right\} \quad (2.38)$$

Conforme discutido na apresentação da Teoria da Plasticidade, os materiais em regime plástico devem satisfazer a condição $F(\{\sigma\}, \{h\}) = 0$. Mais do que

isto, para atender a condição de consistência ou de continuidade, quando submetidos à carregamento neutro, os materiais elasto-plásticos apresentam incremento de deformação plástica nulo ($\Delta \epsilon^p = 0$) (Prager, 1949). Como não há incremento de deformação plástica, também não há enrijecimento nem tão pouco amolecimento. Isto significa dizer, que a função de plastificação não se altera, e assim, o diferencial $\dot{F}(\{\sigma\}, \{h\})$ é igual a zero.

Expandindo o diferencial $\dot{F}(\{\sigma\}, \{h\})$ através da aplicação da regra da cadeia, obtém-se a equação, denominada equação de consistência, expressa como:

$$\dot{F}(\{\sigma\}, \{h\}) = \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot \{\Delta \sigma\} + \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial h} \right\}^T \cdot \{\Delta h\} = 0 \quad (2.39)$$

A equação 2.39 pode ser reescrita na forma:

$$\{\Delta \sigma\} = - \frac{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial h} \right\}^T \cdot \{\Delta h\}}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T} \quad (2.40)$$

e combinando com (2.38), tem-se:

$$m = \frac{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D] \cdot \{\Delta \epsilon\}}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D] \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\Psi\})}{\partial \sigma} \right\} + A} \quad (2.41)$$

onde

$$A = - \frac{1}{m} \cdot \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial h} \right\}^T \cdot \{\Delta h\} \quad (2.42)$$

O parâmetro A definido na equação (2.42) depende da condição de plasticidade do material: plasticidade perfeita, plasticidade com enrijecimento ou amolecimento.

Para o caso de plasticidade perfeita, o vetor $\{h\}$ é uma constante, o que implica em $A = 0$. Por outro lado, no caso de enrijecimento e/ ou amolecimento plástico, como $\{h\}$ se relaciona com as deformações plásticas acumuladas, (ϵ^p) , a expressão (2.37) é redefinida:

$$A = -\frac{1}{m} \cdot \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial h} \right\}^T \cdot \frac{\partial \{h\}}{\partial \{\epsilon^p\}} \cdot \{\Delta \epsilon^p\} \quad (2.43)$$

Observa-se que, existindo uma relação linear entre $\{h\}$ e $\{\epsilon^p\}$

$$\frac{\partial \{h\}}{\partial \{\epsilon^p\}} = \text{cte.} \quad (\text{independente de } \{\epsilon^p\}) \quad (2.44)$$

e substituindo a expressão (2.37), equação da lei do fluxo, em (2.43), o parâmetro m pode ser cancelado, e assim, A fica determinado. Caso a relação seja não-linear, esta simplificação não é possível e o parâmetro A fica indeterminado. Esta dificuldade é estendida à determinação da matriz elasto-plástica $[D_{ep}]$.

Substituindo (2.41) em (2.38) obtém-se:

$$\{\Delta \sigma\} = [D] \cdot \{\Delta \epsilon\} - \frac{[D] \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\Psi\})}{\partial \sigma} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D] \cdot \{\Delta \epsilon\}}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D] \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\Psi\})}{\partial \sigma} \right\} + A} \quad (2.45)$$

Enfim, comparando (2.34) com (2.45), tem-se que a matriz constitutiva elasto- plástica $[D_{ep}]$ pode ser expressa por:

$$[D_{ep}] = [D] - \frac{[D] \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\Psi\})}{\partial \sigma} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D]}{\left\{ \frac{\partial F(\{\sigma\}, \{h\})}{\partial \sigma} \right\}^T \cdot [D] \cdot \left\{ \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\Psi\})}{\partial \sigma} \right\}} + A \quad (2.46)$$

2.5 Modelos elasto-plásticos para solos

2.5.1 Levantamento histórico

Da mesma maneira que ocorre em outros campos de desenvolvimento da ciência, o advento da Mecânica dos Solos, apresentada por Terzaghi, sofreu influência marcante de conceitos e teorias consolidados até então, em particular, a Teoria da Elasticidade e da Plasticidade.

Na realidade, apesar de terem influenciado desde o surgimento da Mecânica dos Solos, as teorias da Elasticidade e da Plasticidade foram aplicadas em momentos diferentes e com propósitos distintos entre si, cada qual voltada para descrição de um fenômeno diferente no comportamento dos solos. Alguns dos conceitos relativos à atual Teoria da Plasticidade encontraram suas primeiras aplicações na Engenharia Geotécnica nos trabalhos desenvolvidos por Coulomb em 1776 e Rankine em 1857, que permitiam a solução de problemas de estabilidade e de equilíbrio dos solos através dos teoremas de análise limite. Enquanto isto, a Teoria da Elasticidade teve sua primeira aplicação bem posteriormente, orientada para solução de problemas de deformação dos solos, em especial o cálculo de recalques.

Por um longo período a elasticidade e a plasticidade foram tratadas de forma independente, o que postergou, sensivelmente, o desenvolvimento de modelos constitutivos mais realistas.

Conforme discutido na seção 2.3, a deformação dos solos apresenta uma parcela irreversível, o que requer a utilização da plasticidade em conjunto com a elasticidade para a formulação das equações constitutivas. Isto, porém, aconteceu apenas a partir da segunda metade do século XX, quando Drucker e Prager (1952) propuseram uma extensão do critério de ruptura de

Von Mises para representar a superfície de plastificação. Ainda neste período, outra tentativa buscou generalizar a envoltória de ruptura de Mohr-Coulomb para definição da superfície plástica. Entretanto, a hipótese de fluxo associado, que confunde a superfície de plastificação com a superfície potencial plástica, e que é utilizada nestes dois modelos constitutivos, conduziu a previsão de uma expansão exagerada em relação ao observado na realidade.

Apesar disto, durante a década de 50 muitos avanços foram feitos no desenvolvimento dos primeiros modelos de estado crítico. Em especial, Drucker et al. (1957) sugeriram a existência de uma superfície de plastificação que interceptasse o eixo hidrostático (compressão isotrópica). Além disto, concluíram que os solos deveriam ter superfícies de plastificação e ruptura distintas, indicando que modelos elasto-plásticos com enrijecimento e/ ou amolecimento deveriam ser utilizados.

No ano seguinte, Roscoe (1958) resgatou os conceitos básicos do estado crítico e propôs a existência de uma superfície limite de estado (SLE). Utilizando-se estes conceitos, a formulação original do modelo Cam-clay foi apresentada por Roscoe e Schofield (1963) apud Imperial College (1997), na Universidade de Cambridge. Neste mesmo ano, Calladine (1963) sugeriu a teoria de enrijecimento plástico como base consistente para formulação dos modelos para os solos.

Enquanto Schofield e Wroth (1968) publicavam seu livro “Critical State Soil Mechanics”, Roscoe e Burland (1968) propuseram o modelo Cam-clay modificado, que alterou a forma da superfície de plastificação original. Adicionalmente a esta nova superfície de plastificação, foi considerada uma superfície de ruptura baseada no critério de Mohr-Coulomb.

Desde então, outras superfícies de ruptura, em substituição à superfície de Mohr-Coulomb, foram propostas por Lade & Duncan (1975), Matsuoka & Nakai (1974), assim como modificações complementares ao modelo original foram implementadas, entre as quais, aquelas propostas por: Zienkiewicz & Naylor (1973), baseando-se no trabalho de Hvorslev (1937) , Ohta & Wroth

(1976) apud Imperial College (1997), Sandler & Rubin (1979), Houlsby (1985), Chen & Baladi (1985) e Jardine et al. (1986).

Este foi um período bastante promissor no desenvolvimento de modelos reológicos, e novos modelos continuam surgindo até os dias de hoje. Naturalmente, a sua complexidade vem aumentando bastante e, conseqüentemente, o número de parâmetros requeridos. Nader (1999) destaca as novas linhas de pesquisa que surgiram após o advento do Cam-clay, inspiradas na Mecânica do Contínuo moderna. Em especial, comenta a linha de pesquisa inovadora em modelos constitutivos para solos, conduzida por Gudehus, na Universidade de Karlsruhe, Alemanha, no final da década de 60. Neste contexto, Kolymbas (1978) apud Nader (1999) propôs uma generalização da Hipoelasticidade, que passou então a se chamar Hipoplasticidade. Apenas, como curiosidade, a Hipoelasticidade surgiu a partir da reorganização dos conceitos mais primitivos e descrição mais rigorosa da Mecânica Racional, ocorrida no início da década de 1950, por matemáticos liderados por Truesdell e Noll.

Deixando este ponto um pouco de lado, visto que não será objeto de discussão deste trabalho, para finalizar este breve histórico, pode-se, ainda, citar os modelos MIT-E1 de Kavvadas (1982) apud Imperial College (1997) e MIT-E3 de Whittle (1987) apud Whittle (1991), ambos desenvolvidos a partir do Cam-clay modificado.

No que se refere à parcela elástica do modelo, houve, também, considerável evolução em relação à Elasticidade Linear comumente utilizada. Empregando-se, essencialmente, os parâmetros K e G , associados à variação de volume e distorção, a extensão natural ocorreu no sentido de considerá-los dependentes do estado de tensão e/ ou deformação presente no solo. A utilização, apenas, destes dois parâmetros, pressupõe que o solo apresente comportamento isotrópico, mas apesar da aparente simplicidade, sob esta condição, diversos modelos elásticos não-lineares foram propostos. O modelo Bi-linear, considera valores constantes de K e G até a ruptura, quando então G , assume valor muito pequeno. Um avanço neste modelo inicial foi realizado por Naylor et al (1981), expressando os parâmetros K e G

em relação aos invariantes de tensão. Neste caso, também, o valor de G é consideravelmente reduzindo nas proximidades da ruptura e três parâmetros adicionais, α_K , α_G e β_G são definidos com o objetivo de aferir o modelo para o solo em estudo.

Enquanto os dois modelos anteriores foram definidos em termos incrementais, Kondner (1963) e, posteriormente, Duncan e Chang (1970) utilizaram uma outra abordagem, expressa no modelo Hiperbólico, que relaciona tensões e deformações acumuladas. Assim, para sua utilização em análises através do Método dos Elementos Finitos, torna-se necessário diferenciar as equações do modelo, para obtenção de K e G tangentes. Este modelo, originalmente desenvolvido para ensaios não-drenados, adequou-se, também, aos ensaios drenados, após as modificações propostas por Seed et al (1975).

Mais recentemente, com avanço nas técnicas de instrumentação, percebeu-se que o solo apresentava uma considerável variação de rigidez sob pequenas deformações. Para representar este comportamento, Jardine et al. (1986) desenvolveram um modelo que fornece expressões de K e G , secantes, considerando apenas a situação de pequenas deformações no solo. O uso deste modelo, em conjunto com os modelos plásticos, representou uma evolução ainda maior.

Finalizando aqui este levantamento histórico, cabe ressaltar, que apesar dos desenvolvimentos realizados no campo dos modelos constitutivos elásticos não-lineares, recaem sobre os modelos elasto-plásticos os maiores progressos e melhores resultados na tentativa de representar os solos reais. Desta forma, a atenção deste trabalho estará voltada à análise destes modelos.

2.5.2 Modelo de Tresca

O modelo de Tresca ou modelo da máxima tensão tangencial foi, inicialmente, desenvolvido para representar o comportamento dos metais. Trata-se de um modelo elasto-plástico perfeito, portanto, sem enrijecimento

e/ ou amolecimento, cujo critério de ruptura está associado à resistência ao cisalhamento do material.

Sob este ponto de vista, o modelo de Tresca pode ser utilizado para a análise de solos não drenados, em que a resistência não drenada, S_u , é o parâmetro relacionado ao critério de ruptura (figura 2.11).

Figura 2.11: Círculo de Mohr – Resistência não drenada (S_u)

Procedendo, assim, ensaios triaxiais não drenados e expressando os resultados em termos de tensões totais, pode-se escrever:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = 2S_u \quad (2.47)$$

No modelo de Tresca a superfície de ruptura é suposta coincidente com a superfície de plastificação, que, então, fica definida por:

$$F(\{\sigma\}, \{h\}) = \sigma_1 - \sigma_3 - 2 \cdot S_u \quad (2.48)$$

Conforme mencionado anteriormente, é mais conveniente trabalhar em termos dos invariantes de tensão p' , J_2 e θ , sendo (2.48) reescrita na forma:

$$F(\{\sigma\}, \{h\}) = \sqrt{J_2} \cdot \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) - S_u \quad (2.49)$$

Observa-se a partir das expressões acima que a superfície de plastificação é independente da tensão principal intermediária σ_2 . Isto explica a forma hexagonal assumida pela superfície de plastificação no espaço das tensões principais (figura 2.12).

Figura 2.12: Superfície de plastificação do modelo de Tresca

Com relação à superfície potencial plástica, como é considerada a condição de fluxo associado, tem-se que $G(\{\sigma\}, \{\Psi\}) = F(\{\sigma\}, \{h\})$. Esta escolha é válida, uma vez que satisfaz a condição de variação volumétrica nula para ensaios não drenados, o que pode ser obtido pela expressão:

$$\Delta \varepsilon_V^p = \frac{\partial G(\{\sigma\}, \{\Psi\})}{\partial p'} = 0 \quad (2.50)$$

O modelo é, enfim, complementado com a definição dos parâmetros elásticos E_u ou K_u , e μ_u , sendo que $\mu_u = 0,5$ (sem variação elástica de volume). Além destes parâmetros, tem-se o valor da resistência não-drenada do solo, dada por S_u .

2.5.3 Modelo de Von Mises

Este modelo é derivado do modelo de Tresca, em que se introduz uma simplificação na equação da superfície de plastificação, de forma a eliminar as singularidades existentes na superfície hexagonal do modelo anterior.

Assim, $F(\{\sigma\}, \{h\})$ é redefinida, como:

$$F(\{\sigma\}, \{h\}) = \sqrt{J_2} - \alpha \quad (2.51)$$

onde: α é um parâmetro do solo associado à sua resistência não drenada, com S_u , para o caso de tração simples, sendo dado por:

$$\alpha = \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot S_u \quad (2.52)$$

Esta modificação, elimina as singularidades do modelo de Tresca, tornando a matriz elasto-plástica determinada em qualquer ponto da superfície de plastificação. Em outras palavras isto significa que a superfície de plastificação passa a depender da tensão principal intermediária σ_2 .

Representando a superfície de plastificação no espaço das tensões principais, obtém-se uma superfície cilíndrica, conforme a figura 2.3.

O equacionamento acima indica que dependendo da escolha feita para α , as superfícies de plastificação de Tresca e Von Mises podem coincidir em pontos específicos, conforme indicado na figura 2.14.

Novamente se considera o fluxo associado, com $G(\{\sigma\}, \{\Psi\}) = F(\{\sigma\}, \{h\})$.

Quanto à escolha dos parâmetros elásticos, a menos de α , pode-se seguir o mesmo que especificado para o modelo de Tresca.

Figura 2.13: Superfície de plastificação do modelo de Von Mises

Figura 2.14: Superfícies de Tresca e Von Mises no plano antiesférico.

2.5.4 Modelo Mohr-Coulomb

A formulação deste modelo utiliza-se da teoria de ruptura apresentada por Mohr em 1900, onde o estado de ruptura do material pode ser expresso através da tensão máxima de cisalhamento (τ). Mohr definiu, também, que (τ) é função da tensão normal (σ) atuante no plano, o que permite escrever:

$$\tau = f(\sigma) \quad (2.53)$$

Este modelo de dois parâmetros (τ e σ), expresso pela relação acima, define uma curva no plano σ - τ . Para a caracterização desta curva pode-se recorrer a simplificação introduzida por Coulomb, que admitiu uma relação linear entre σ e τ , permitindo escrever a equação (2.53), em termos de tensões efetivas, na forma:

$$\tau = c' + \sigma' \cdot \tan \phi' \quad (2.54)$$

sendo c' a coesão e ϕ' o ângulo de atrito do material.

Figura 2.15: Círculo de Mohr: Envolvória Mohr-Coulomb

Figura 2.16: Superfície de plastificação de Mohr-Coulomb

Esta reta, representada na figura 2.15, define o critério de ruptura de Mohr-Coulomb, que, no caso da Engenharia Geotécnica, é bastante utilizado para representar o comportamento de solos drenados, justificando a sua apresentação em termos de tensões efetivas.

Considerando que a superfície de plastificação coincide com o critério de ruptura, tem-se:

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \sigma'_1 - \sigma'_3 - 2 \cdot c' \cdot \cos \phi' - (\sigma'_1 + \sigma'_3) \cdot \tan \phi' \quad (2.55)$$

Em termos dos invariantes de tensão, pode-se reescrever:

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \sqrt{J_2} - \left(\frac{2 \cdot c'}{\tan \phi'} + 2 \cdot p' \right) \cdot g(\theta) \quad (2.56)$$

Onde:

$$g(\theta) = \frac{\sin \phi'}{\sqrt{3} \cdot \cos \theta + \sin \theta + \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos \theta \right) \cdot \sin \phi'} \quad (2.57)$$

Novamente, a superfície de plastificação independe da tensão principal intermediária σ_2 e no espaço das tensões principais é dada por um hexágono irregular, como indicado na figura 2.16.

O modelo Mohr-Coulomb é elasto-plástico perfeito, mas diferentemente dos modelos anteriores, pode assumir lei de fluxo associada ou não. Para o caso de fluxo associado, observa-se da figura 2.15, que a direção das deformações plásticas incrementais indica variação de volume positiva (expansão), o que permite definir o ângulo de dilatação ϑ , em função da direção normal à superfície de plastificação. Nestas condições, geometricamente pode-se observar que o ângulo de dilatação ϑ coincide com o ângulo de atrito ϕ' , sendo dado por:

$$\vartheta = \arcsen \cdot \left(- \frac{(\Delta \varepsilon_1^p + \Delta \varepsilon_3^p)}{(\Delta \varepsilon_1^p - \Delta \varepsilon_3^p)} \right) \quad (2.58)$$

Entretanto, os resultados práticos indicam que as deformações plásticas volumétricas (de expansão) reais são bem inferiores em relação ao previsto pelo modelo. Isto aponta para a necessidade de adotar fluxo não associado, e a superfície potencial plástica é definida por:

$$G(\{\sigma'\}, \{\psi\}) = \sqrt{J_2} - (a_g + 2 \cdot p') \cdot g_g(\theta) \quad (2.59)$$

Onde:

$$g_g(\theta) = \frac{\sin \vartheta}{\sqrt{3} \cdot \cos \theta + \sin \theta + \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos \theta \right) \cdot \sin \vartheta} \quad (2.60)$$

a_G representa a distância do vértice da superfície cônica obtida e a origem do espaço das tensões principais. Para determinar a_G , basta lembrar que, no regime plástico, a superfície potencial plástica passa pelo estado então corrente de tensões do solo, dado por p'_y , J_{2y} e θ_y , que, por sua vez, pertence à superfície de plastificação. Assim, substituindo p'_y , J_{2y} e θ_y em (2.56) e (2.59) o valor de a_G pode ser determinado.

Para complementar o modelo Mohr-Coulomb resta apenas definir os parâmetros elásticos E' ou K' e μ' .

2.5.5 Modelo de Drucker-Prager

O modelo de Drucker-Prager é uma extensão do modelo Mohr-Coulomb, que busca eliminar as singularidades existentes na superfície de plastificação $F(\{\sigma\}, \{h\})$, assim como, o modelo de Von Mises em relação ao modelo de Tresca.

Neste caso, a superfície de plastificação, figura 2.17, torna-se dependente das três componentes das tensões principais e, com relação aos invariantes de tensão, é definida por:

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \sqrt{J_2} - \left(\frac{2 \cdot c'}{\tan \phi'} + 2 \cdot p' \right) \cdot M_{DP} \quad (2.61)$$

onde:

$$M_{DP} = \frac{\sin \phi'}{\sqrt{3} \cdot \cos \theta + \sin \theta + \left(\sin \theta - \frac{\sqrt{3}}{3} \cdot \cos \theta \right) \cdot \sin \phi'} \quad (2.62)$$

Em função da escolha feita para o valor de θ , as superfícies de plastificação do modelo de Mohr-Coulomb e de Drucker-Prager podem coincidir em pontos específicos, conforme apresentado em um plano antiesférico qualquer, figura 2.18.

Figura 2.17: Superfície de plastificação de Drucker-Prager.

Figura 2.18: Superfícies de Mohr-Coulomb e Drucker-Prager no plano antiesférico.

Pelo mesmo motivo discutido no modelo Mohr-Coulomb, a lei de fluxo é suposta não associada, resultando a seguinte expressão para a superfície potencial plástica:

$$G(\{\sigma'\}, \{\psi\}) = \sqrt{J_2} - \left[\left(\frac{2 \cdot c'}{\tan \phi'} + 2 \cdot p'_y \right) \cdot \frac{M_{DP}}{M_{DP}^{PP}} - p'_y + p' \right] \cdot M_{DP}^{PP} \quad (2.63)$$

Sendo que, M_{DP}^{PP} é, normalmente, considerada igual à $g_G(\theta)$ e p'_y corresponde ao valor de p' associado ao estado de tensão presente.

Os parâmetros elásticos são, novamente, K' ou E' e μ' .

2.5.6 Modelo Cam-clay

Desde o trabalho apresentado por Drucker et al. (1957), as primeiras idéias de representar o solo como um material elasto-plástico com enrijecimento plástico foram desenvolvidas. A proposta inicial, segundo Chen e Baladi

(1985), consistiu em considerar a influência da tensão octaédrica nas condições de plastificação. Isto foi feito através da definição de sucessivas superfícies de plastificação, na forma de capas esféricas, sendo acopladas à superfície de plastificação do modelo de Drucker-Prager. As novas idéias que surgiram na seqüência, aliadas à introdução dos conceitos de enrijecimento plástico isotrópico e de estado crítico, propiciaram a formulação do modelo constitutivo Cam-clay.

O modelo Cam-clay, desenvolvido na Universidade de Cambridge por Roscoe e seus colaboradores (1963), foi formulado sob as condições de ensaios triaxiais, para analisar o comportamento de solos normalmente adensados e/ ou levemente sobreadensados. Posteriormente, Roscoe e Burland (1968) desenvolveram o modelo Cam-clay modificado, alterando a superfície de plastificação proposta pela formulação inicial. Em ambos os modelos o solo é considerado isotrópico, com comportamento elasto-plástico, cujo trecho elástico é não-linear, com enrijecimento e fluxo associado, isto é, $F(\{\sigma'\}, \{h\}) = G(\{\sigma'\}, \{\Psi\})$, mas apenas no Cam-clay modificado foram consideradas as deformações elásticas de cisalhamento.

Conforme foi discutido anteriormente, para a completa caracterização de um modelo constitutivo elasto-plástico com enrijecimento existem basicamente quatro ingredientes básicos a serem definidos:

- a) As propriedades elásticas do material;
- b) A superfície de plastificação;
- c) A função potencial plástica, e ;
- d) A lei de enrijecimento.

Assim, na apresentação dos modelos Cam-clay cada um destes ingredientes é essencial à sua formulação. Por conveniência, a discussão ficará restrita, em um primeiro momento, às condições de tensão e deformação presentes nos ensaios triaxiais, resgatando a forma original utilizada por seus idealizadores.

Terminada esta etapa da apresentação dos modelos, volta-se a atenção para sua extensão no espaço generalizado das tensões.

Definição das variáveis de tensão e deformação:

Por tudo aquilo que foi discutido e comentado no desenvolvimento deste trabalho, para o estudo dos solos, há grande interesse em estudar seu comportamento a partir de variáveis associadas à mudança de volume e à mudança de forma. Com este intuito, escolhe-se aqui discutir os modelos Cam-clay a partir das variáveis de tensão p' e q e as variáveis de deformação incremental $\delta\epsilon_v$ e $\delta\epsilon_q$. Esta escolha se justifica, na medida em que, enquanto p' e $\delta\epsilon_v$ estão associadas à mudança de volume, as variáveis q e $\delta\epsilon_q$, aqui introduzidas, estão associadas à mudança de forma da amostra de solo.

Desta maneira, considerando uma amostra cilíndrica de solo submetida aos esforços triaxiais $\sigma'_a = \sigma'_1$ (axial) e $\sigma'_r = \sigma'_2 = \sigma'_3$ (radial), e que apresenta incrementos de deformação axial e radial, $\epsilon_a = \epsilon_1$ e $\epsilon_r = \epsilon_2 = \epsilon_3$, respectivamente, o trabalho realizado por unidade de volume pode ser escrito, como:

$$\delta W = \sigma'_a \cdot \delta\epsilon_a + 2 \cdot \sigma'_r \cdot \delta\epsilon_r \quad (2.64)$$

Com o objetivo de definir as variáveis p' , q , $\delta\epsilon_v$ e $\delta\epsilon_q$, pode-se separar o trabalho total realizado, em suas componentes associadas à mudança de volume e de forma, conforme estabelecido na equação 2.20:

$$\delta W = \delta W_v + \delta W_q \quad (2.65)$$

que, por sua vez, podem ser escritas, como:

$$\delta W_v = p' \cdot \delta\epsilon_v \quad (2.66)$$

e

$$\delta W_q = q \cdot \delta\epsilon_q \quad (2.67)$$

Enfim, a partir das expressões (2.64), (2.66) e (2.67) acima, tem-se para a condição de ensaios triaxiais, que:

$$p' = \frac{\sigma'_a + 2 \cdot \sigma'_r}{3} \quad (2.68)$$

$$q = \sigma'_a - \sigma'_r \quad (2.69)$$

$$\delta \epsilon_v = \delta \epsilon_a + 2 \cdot \delta \epsilon_r \quad (2.70)$$

$$\delta \epsilon_q = \frac{2}{3} \cdot (\delta \epsilon_a - \delta \epsilon_r) \quad (2.71)$$

A definição destas variáveis é muito importante pois torna imediata sua determinação a partir dos ensaios triaxiais, sendo, também, bastante útil na dedução das equações constitutivas dos modelos.

Parâmetros do Cam-clay:

Além das variáveis de tensão e deformação apresentados, existem outros quatro parâmetros que são essenciais para a completa caracterização dos modelos. Estes parâmetros são constantes do solo, sendo aqui designadas por: M , Γ , κ e λ . Estas constantes descrevem as propriedades fundamentais do solo para uma dada mineralogia e serão definidas ao longo da apresentação dos modelos.

Solo sob compressão isotrópica:

Submetendo uma amostra de solo à compressão isotrópica, sob condições drenadas, e observando a resposta em relação aos parâmetros p' e v (volume específico), obtém-se uma trajetória semelhante à descrita na figura 2.4. Nota-se a ocorrência de uma queda no valor da rigidez dos solos sobreadensados quando a tensão de pré-adensamento é atingida. Esta tensão pode ser, claramente, considerada como a tensão de plastificação do

solo. Desta maneira, sobre as retas de descompressão e recompressão as deformações são consideradas elásticas, enquanto que, sobre a reta virgem têm-se apenas deformações plásticas e, portanto, irreversíveis.

Estas trajetórias são consideradas retas e no plano $(v-\ln p')$ podem ser expressas pelas seguintes equações:

$$v + \lambda \cdot (\ln p') = N \quad (2.72)$$

e

$$v + k \cdot (\ln p') = v_k \quad (2.73)$$

com N e v_k já definidos. Enquanto N é o valor do índice de vazios onde a reta virgem intercepta a reta $p' = 1$, v_k é o índice de vazios, de uma certa reta de descompressão/ recompressão, também quando $p' = 1$. Assim, para cada reta de descompressão/ recompressão, tem-se um diferente valor de v_k .

A partir das equações acima tem-se definidas as constantes κ e λ , que representam as declividades das retas (2.72) e (2.73).

Nota-se aqui, uma diferença relevante entre o comportamento previsto pelo modelo Cam-clay e aquele definido para os modelos elasto-plásticos perfeitos, discutidos anteriormente. Enquanto que, no modelo Cam-clay, o solo pode apresentar deformações plásticas quando submetido à compressão isotrópica, para os modelos elasto-plásticos perfeitos, as superfícies de plastificação definidas não impõem qualquer tipo de restrição ao aumento da compressão isotrópica, que pode crescer, indefinidamente, sem que deformações plásticas sejam observadas.

Elasticidade no Cam-clay:

A fronteira que define a região de comportamento elástico é dada por uma função, denominada função de plastificação, cuja forma no espaço das tensões será definida mais adiante. Assim, mudanças no estado de tensão internamente à superfície de plastificação são acompanhadas por deformações reversíveis ou puramente elásticas. Para o caso de solo

isotrópico submetido a um ensaio triaxial, a relação entre os incrementos de tensão e deformação elástica pode ser escrita, como:

$$\begin{bmatrix} \delta \epsilon_a^e \\ \delta \epsilon_r^e \end{bmatrix} = \frac{1}{E'} \cdot \begin{bmatrix} 1 & -2\nu' \\ -\nu' & 1-\nu' \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \sigma_a' \\ \delta \sigma_r' \end{bmatrix} \quad (2.74)$$

Nas equações acima o sobrescrito e é utilizado para diferenciar as deformações elásticas das deformações plásticas que serão identificadas pelo sobrescrito p . Resgatando a definição das variáveis de tensão p' e q , e de deformação $\delta \epsilon_v$ e $\delta \epsilon_q$, o sistema de equações (2.74) pode ser reescrito, na forma:

$$\begin{bmatrix} \delta \epsilon_v^e \\ \delta \epsilon_q^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{K'} & 0 \\ 0 & \frac{1}{3G'} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (2.75)$$

Os parâmetros elásticos K' e G' foram explicitados, anteriormente, a partir do módulo de Elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν . Por outro lado, a equação (2.73) descreve a reposta elástica associada à variação do volume específico v . Escrevendo (2.73) na forma incremental, obtém-se:

$$\delta v^e = -\kappa \cdot \frac{\delta p'}{p'} \quad (2.76)$$

Na medida em que um incremento no volume específico δv^e produz um incremento na deformação volumétrica $\delta \epsilon_v^e$, a expressão (2.76) pode ser revista, como:

$$\delta \epsilon_v^e = -\frac{\delta v^e}{v} = \kappa \cdot \frac{\delta p'}{v \cdot p'} \quad (2.77)$$

Assim, comparando a expressão (2.77) com (2.75) acima, o módulo de compressibilidade K' , é dado por:

$$K' = \frac{v \cdot p'}{\kappa} \quad (2.78)$$

Considerando a declividade da reta de descompressão e recompressão κ constante, implica que o módulo de compressibilidade K' cresce com p' . Com relação ao módulo de cisalhamento G' , duas possibilidades são possíveis. A primeira delas pressupõe um valor constante para o coeficiente de Poisson v' , e assim G' será variável com K' . A outra alternativa considera G' constante e, neste caso, o coeficiente de Poisson torna-se variável com K' .

Enfim, o sistema de equações (2.75) define a relação constitutiva que governa o comportamento dos solos isotrópicos em regime elástico. Observa-se, também, no sistema de equações acima a existência de termos nulos fora da diagonal principal da matriz de rigidez. Isto realmente acontece para o caso de materiais isotrópicos, visto que não há acoplamento entre os efeitos associados à variação de volume e à distorção. Para o caso de materiais anisotrópicos esta condição não é mais observada, e a matriz de rigidez apresenta elementos não nulos fora da diagonal principal.

Função de plastificação:

A definição da superfície de plastificação do modelo Cam-clay não apresenta significado físico claro. Na verdade, a escolha da forma desta superfície privilegia a simplicidade na sua obtenção e preserva pouca semelhança com a forma das superfícies de plastificação obtidas experimentalmente. Por outro lado, esta representação mais simples do comportamento real dos solos, não impediu o sucesso na aplicação do Cam-clay na resolução de problemas geotécnicos.

Na execução de ensaios de compressão isotrópica, em solos sobreadensados, a existência de uma superfície de plastificação ficou evidenciada com a redução na rigidez do solo a partir da tensão de pré-adensamento. Da mesma forma que o aumento da tensão média efetiva (p') leva o solo do regime elástico para o plástico, ao submeter a amostra de solo sobreadensado a tensões antiesféricas crescentes (q), observa-se, inicialmente, comportamento elástico até o instante em que a superfície de plastificação é atingida. Assim, o comportamento elástico fica restrito a uma região sobre as retas de descompressão e recompressão, e a função de plastificação é dada pela projeção da superfície limite de estado (SLE), no plano $q \times p'$. A superfície limite de estado será definida mais adiante, mas a figura 2.19 fornece uma idéia qualitativa desta superfície.

Figura 2.19: Superfície limite de estado

Para os modelos Cam-clay e Cam-clay modificado, a função de plastificação $F(\{\sigma'\}, \{h\})$ é dada, respectivamente, por:

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \frac{q}{p' M} - \ln \left(\frac{p'_0}{p'} \right) \quad (2.79)$$

e

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \left(\frac{q}{p' \cdot M} \right)^2 - \left(\frac{p'_o}{p'} - 1 \right) \quad (2.80)$$

onde M é um parâmetro do solo, a ser definido, e p'_o corresponde ao valor de p' na interseção entre a reta de descompressão/recompressão examinada e a reta virgem (figura 2.19).

Figura 2.20: a) Modelo Cam-clay; b) Modelo Cam-clay modificado

A partir das equações acima, observa-se que o tamanho da superfície de plastificação é, essencialmente, controlada pelo parâmetro p'_o , que, por sua vez, varia de acordo com a reta de descompressão e recompressão. Projetando estas superfícies no plano $(p'-q)$ (figura 2.20) obtém-se uma curva logarítmica para o modelo Cam-clay, e uma elipse para o Cam-clay modificado.

Função Potencial Plástica:

Na descrição feita até aqui do modelo Cam-clay, foi estabelecido equacionamento das deformações elásticas experimentadas pelo solo no interior da superfície de plastificação $F(\{\sigma'\}, \{h\})$, assim como a forma desta superfície no plano $q \times p'$.

Por outro lado, nada foi mencionado em relação às deformações plásticas. Isto será feito a partir da definição da função potencial plástica. Conforme foi

discutido na apresentação da Teoria da Plasticidade, a direção dos incrementos de deformação plástica é ortogonal à superfície potencial plástica. Ou ainda, a direção normal à superfície potencial plástica define, de modo relativo, a proporção entre as componentes de deformação plástica. Desta maneira, a completa caracterização deste modelo pressupõe conhecer a forma desta superfície.

No Cam-clay, admite-se a lei de fluxo associada, isto é, com o solo respeitando a lei da normalidade. Assim, a função potencial plástica tem, no plano $q \times p'$ a mesma forma da superfície de plastificação, o que significa dizer que $G(\{\sigma'\}, \{\Psi\}) = F(\{\sigma'\}, \{h\})$.

Assim, o vetor correspondente ao incremento das deformações plásticas, $\delta\epsilon_v^p$: $\delta\epsilon_q^p$, é ortogonal à superfície de plastificação, podendo ser escrito para o Cam-clay e o Cam-clay modificado, respectivamente, na forma:

$$\frac{\delta\epsilon_v^p}{\delta\epsilon_q^p} = M - \frac{q}{p'} \quad (2.81)$$

e

$$\frac{\delta\epsilon_v^p}{\delta\epsilon_q^p} = \frac{M^2 - \eta^2}{2 \cdot \eta} \quad (2.82)$$

com $\eta = q/p'$.

A hipótese de fluxo associado torna o equacionamento do modelo mais simples. Por outro lado, a coincidência entre as superfícies de plastificação e potencial plástica indica uma incompatibilidade do modelo Cam-clay original, já que em $q = 0$ e $p' = p'_o$, a direção do vetor normal é indeterminada. Esta foi uma das razões utilizadas por Roscoe para desenvolver o modelo Cam-clay modificado.

Em razão disto e pelo fato de que apenas o modelo Cam-clay modificado está implementado na ferramenta de elementos finitos utilizada neste trabalho, as referências ao modelo Cam-clay, daqui para frente, estarão sempre referidas ao Cam-clay modificado.

Lei de enrijecimento plástico:

Com base no que foi apresentado sobre o comportamento dos solos submetidos à compressão isotrópica, ao carregar uma amostra de solo sobreadensado até uma tensão superior à tensão de pré-adensamento, e depois descarregá-la, este descarregamento dar-se-á por uma reta de compressão e descompressão diferente, porém paralela àquela percorrida durante o carregamento. Desta forma, um ciclo completo de carregamento/descarregamento, apresentará uma deformação plástica residual, que é dada pela separação entre duas retas de compressão e descompressão, para um determinado valor da tensão média efetiva p' . A figura 2.21, onde os eixos p' e v estão invertidos, torna esta explicação mais clara.

Figura 2.21: Reta virgem e retas de descompressão-recompressão.

Outra observação importante da figura acima, diz respeito ao enrijecimento apresentado pelo solo, uma vez que é possível aumentar o valor da tensão média efetiva além da tensão de pré-adensamento. No Cam-clay, admite-se que independentemente do valor da tensão de pré-adensamento (p'_o), a superfície de plastificação é dada por (2.79) e (2.80), ou seja, a sua forma é sempre a mesma, o que caracteriza o enrijecimento isotrópico.

Por outro lado, é o valor da tensão de pré-adensamento (p_o') que define o tamanho da superfície de plastificação, sendo assim, a lei do enrijecimento isotrópico do Cam-clay controlada pelo parâmetro p_o' .

Escrevendo a expressão que define a deformação plástica, em termos do volume específico v , entre as retas de compressão 1 e 2, indicadas na figura 2.21, tem-se:

$$\Delta v^p = -\lambda \cdot \ln\left(\frac{p_{o2}'}{p_{o1}'}\right) + \kappa \cdot \ln\left(\frac{p_{o2}'}{p_{o1}'}\right) = -(\lambda - \kappa) \cdot \ln\left(\frac{p_{o2}'}{p_{o1}'}\right) \quad (2.83)$$

O primeiro termo do lado direito da expressão acima caracteriza a deformação total experimentada pela amostra de solo quando a tensão média efetiva cresce entre A e B, enquanto que o segundo termo indica a parcela de variação do volume total que é recuperada com a redução da tensão média efetiva (recuperação elástica).

No limite (2.83) pode ser escrita, como:

$$\delta v^p = -(\lambda - \kappa) \cdot \frac{\delta p_o'}{p_o'} \quad (2.84)$$

Como a apresentação do Cam-clay está sendo feita a partir de variáveis de tensão e deformação, o incremento de deformação plástica volumétrica $\delta \epsilon_v^p$, é dado por:

$$\delta \epsilon_v^p = (\lambda - \kappa) \cdot \frac{\delta p_o'}{v \cdot p_o'} \quad (2.85)$$

Assim, enquanto as deformações elásticas volumétricas ($\delta \epsilon_v^e$) ocorrem a partir da variação da tensão média efetiva p' , as deformações plásticas de volume ($\delta \epsilon_v^p$), por sua vez, ocorrem apenas quando o tamanho da superfície de plastificação se altera, o que é controlado pelo parâmetro p_o' . Cabe

ressaltar que a lei de enrijecimento estabelecida acima, é válida também para o Cam-clay original.

Relação entre tensões e deformações plásticas:

No item que tratou da resposta elástica do Cam-clay, definiu-se um sistema de equações que relacionavam os incrementos de deformação elástica a partir de incrementos de tensão. Neste sentido, para completa caracterização do Cam-clay seria interessante montar um sistema de equações análogo a este, só que agora para relacionar incrementos de deformação plástica com os incrementos de tensão.

Com base nas expressões (2.79) e (2.80) acima, pode-se escrever a equação da curva de plastificação utilizada no Cam-clay e no Cam-clay modificado, como:

$$F(p', q, p_o') = 0 \quad (2.86)$$

Como a lei de fluxo é associada $G(\{\sigma'\}, \{\Psi\}) = F(\{\sigma'\}, \{h\})$, e os incrementos de deformação plástica, para um determinado estado de tensões, valem:

$$\delta \epsilon_v^p = m \cdot \frac{\partial F}{\partial p'} \quad (2.87)$$

e

$$\delta \epsilon_q^p = m \cdot \frac{\partial F}{\partial q} \quad (2.88)$$

Diferenciando a equação que define a curva de plastificação, tem-se:

$$\frac{\partial F}{\partial p'} \cdot \delta p' + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \delta q + \frac{\partial F}{\partial p_o'} \cdot \delta p_o' = 0 \quad (2.89)$$

Combinado as três últimas equações acima, com a expressão que caracteriza o enrijecimento isotrópico (2.85), o parâmetro m é obtido:

$$m = - \frac{\left(\frac{\partial F}{\partial p'} \cdot \partial p' + \frac{\partial F}{\partial q} \cdot \partial q \right)}{\frac{\partial F}{\partial p'_o} \cdot \left(\frac{\partial F}{\partial p'} \cdot \frac{v \cdot p'_o}{(\lambda - \kappa)} \right)} \quad (2.90)$$

Substituindo (2.90) acima, nas expressões (2.87) e (2.88), o sistema de equações do Cam-clay que relaciona incrementos de deformação plástica com os respectivos incrementos de tensão, é o seguinte:

$$\begin{bmatrix} \delta \varepsilon_v^p \\ \delta \varepsilon_q^p \end{bmatrix} = \frac{(\lambda - \kappa)}{v \cdot p' \cdot (M^2 + \eta^2)} \cdot \begin{bmatrix} (M^2 - \eta^2) & 2\eta \\ 2\eta & \frac{4\eta^2}{(M^2 - \eta^2)} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta p' \\ \delta q \end{bmatrix} \quad (2.91)$$

Este sistema de equações é válido apenas para o Cam-clay modificado, visto que sua determinação é função da escolha da equação da superfície de plastificação.

Observa-se que o determinante da matriz de flexibilidade, inversa da matriz de rigidez, é nulo. Isto acontece uma vez que a relação entre as deformações plásticas $\delta \varepsilon_v^p$ e $\delta \varepsilon_q^p$ depende do estado de tensão presente no solo no instante em que ocorre a plastificação, e não dos incrementos de tensão, conforme estabelecido na equação (2.82). Assim, as equações indicadas em (2.91) são linearmente dependentes.

Estado Crítico:

Retomando a figura 2.20, observa-se que existe um ponto pertencente à superfície de plastificação, denominado ponto C, que apresenta declividade nula. Isto significa que, neste ponto, as deformações plásticas incrementais de volume serão nulas, independentemente da trajetória de tensões do solo até este ponto. O reflexo desta condição pode ser traduzido pela equação

(2.85), que estabelece a estacionaridade da função de plastificação no ponto C, uma vez que não havendo deformação plástica volumétrica, $\delta p_o' = 0$, o tamanho da superfície de plastificação permanece inalterado, não permitindo enrijecimento ou amolecimento. Este estado de tensão corresponde, então, à condição última do material, visto que as deformações plásticas de cisalhamento podem crescer indefinidamente, sem qualquer expansão ou retração da superfície de plastificação. Assim, a este estado de plasticidade perfeita dá-se o nome de estado crítico.

No estado crítico as seguintes condições são observadas:

$$\frac{\partial p'}{\partial \varepsilon_q} = \frac{\partial q}{\partial \varepsilon_q} = \frac{\partial v}{\partial \varepsilon_q} = 0 \quad (2.92)$$

e

$$\eta = M \quad (2.93)$$

Recordando a expressão que define a superfície de plastificação do Cam-clay, para $\eta = M$, obtém-se uma relação constante entre p' e p_o' . Pode-se demonstrar que o fato de existir uma relação $p'/p_o' = \text{cte.}$, permite definir, para a condição do estado crítico, uma reta no plano $v \times \ln(p')$ paralela à reta virgem. Assim, unindo a sucessão de pontos de estado crítico, entre as diferentes superfícies de plastificação, define-se uma curva, denominada linha do estado crítico (LEC), que é dada nos planos $p' \times q$ e $v \times \ln(p')$, respectivamente, pelas seguintes equações:

$$q = M \cdot p' \quad (2.94)$$

e

$$\Gamma = v + \lambda \cdot \ln(p') \quad (2.95)$$

onde M define a declividade da LEC no plano $(p'-q)$ e Γ a sua localização no plano $(\ln(p'), v)$, conforme indicado na figura 2.22.

Figura 2.22: a) Plano (p' - q) - parâmetro M . b) Plano (p' - v) – parâmetro Γ .

Na equação (2.95) observa-se que a linha do estado crítico é paralela à reta virgem.

Solos normalmente adensados e sobreadensados:

O conceito do estado crítico, acima apresentado, não é um elemento exclusivo do modelo Cam-clay. Na realidade, poder-se-ia definir outras superfícies de plastificação, e mesmo assim, o conceito de estado crítico seria válido. Por outro lado, dentre os modelos apresentados neste trabalho apenas o Cam-clay oferece condições para a sua utilização.

Assim, dentre todas as demais vantagens mencionadas, a introdução do estado crítico no Cam-clay cumpre um importante papel na diferenciação entre o comportamento dos solos normalmente adensados (ou com pequena razão de sobreadensamento (RSA)) e dos altamente sobreadensados.

Considerando um elemento de solo, submetido a um ensaio triaxial convencional ($\delta q = 3\delta p'$), e que atinja a superfície de plastificação em um

ponto à direita de C (estado crítico), as deformações plásticas incrementais volumétricas serão positivas (compressão), conforme figura 2.23.

Figura 2.23: Lado supercrítico e subcrítico da superfície de plastificação.

Considerando esta resposta na equação 2.85, tem-se enrijecimento, e os seguintes incrementos de tensão são acompanhados por uma progressiva expansão da superfície de plastificação. Com isto, a posição relativa entre o estado de tensões corrente e o ponto correspondente ao estado crítico vai-se modificando, com a razão entre $\delta\epsilon_q^p$ e $\delta\epsilon_v^p$ crescendo até atingir o estado crítico. Este lado da superfície de plastificação, à direita do ponto C, é denominado subcrítico ou úmido, e representa o comportamento dos solos normalmente adensados e/ ou levemente sobreadensados. Caso o elemento de solo atinja a superfície de plastificação à esquerda do ponto C, lado supercrítico ou seco, as deformações plásticas incrementais de volume serão negativas (expansão) e a mesma equação 2.85 indica comportamento de amolecimento. Da mesma forma que acontece para o lado subcrítico, no lado supercrítico, conforme a superfície de plastificação contrai, há uma mudança na posição relativa entre o estado de tensões corrente e o ponto correspondente ao estado crítico. Novamente, o limite é atingido quando estes dois estados coincidem.

O fato da superfície de plastificação contrair no lado supercrítico equivale a dizer que o elemento de solo não consegue sustentar o estado de tensões correspondente à plastificação. Assim, o lado supercrítico atua, também, como uma superfície de ruptura.

Este comportamento é característico dos solos altamente sobreadensados.

A analogia feita entre os solos normalmente adensados (ou com baixa RSA) com o lado subcrítico e os altamente sobreadensados com o lado supercrítico da superfície de plastificação, pode ser melhor compreendida observando-se os planos q x p' e v x $\ln(p')$ nas figuras 2.24 e 2.25, a seguir.

Figura 2.24: Solos normalmente adensados ou levemente sobreadensados

Figura 2.25: Solos altamente sobreadensados

Superfície Limite de Estado (SLE):

Na descrição feita até aqui do modelo Cam-clay, a discussão acerca da superfície de plastificação ficou restrita à sua forma no plano $q \times p'$. Entretanto, pode-se constatar pela dedução das equações que constituem o modelo que para caracterizar completamente o estado em que o solo se encontra, é preciso conhecer a combinação entre as três variáveis p' , q e v . Desta maneira, fica evidente a necessidade de se definir uma superfície mais geral, do que a superfície de plastificação, e expressa no espaço $(p'-q-v)$, que indique a transição entre o comportamento elástico e elasto-plástico do solo. E reside na obtenção desta superfície tridimensional o objeto deste item.

Conforme foi examinado anteriormente, para uma certa relação entre a tensão antiesférica e a tensão média efetiva ($q/p' = \eta$), existe uma razão constante entre p' e p_o' . Mais do que isto, relações constantes entre p' e p_o' possibilitam a definição de retas paralelas à reta virgem, e distantes desta conforme o valor de p'/p_o' . Em particular quando $\eta = M$, tem-se a linha correspondente ao estado crítico. Para outros valores de η , pode-se determinar outra seqüência de pontos sobre as superfícies de plastificação, cuja representação no plano $v \times \ln(p')$, será uma reta também paralela à reta virgem.

Figura 2.26: Reta paralela a reta virgem com $v=v_\lambda$ para $p'=1$.

Cada uma destas retas pode ser escrita na forma:

$$v_\lambda = v + \lambda \cdot \ln(p') \quad (2.96)$$

Com v_λ igual ao volume específico do solo quando $p' = 1$.

Para outros valores de η , os correspondentes valores de v_λ podem ser obtidos substituindo (2.96) na equação geral das retas de compressão e descompressão:

$$v = N - \lambda \cdot \ln(p'_o) + \kappa \cdot \ln\left(\frac{p'_o}{p'}\right) \quad (2.97)$$

o que fornece:

$$v_\lambda = N - (\lambda - \kappa) \cdot \ln\left(\frac{p'_o}{p'}\right) \quad (2.98)$$

Enfim, para obter a equação que define a superfície de plastificação tridimensional no espaço (p' - q - v) resta apenas substituir em (2.98) a expressão que a define no plano $q \times p'$. Substituindo, assim, (2.79) e (2.80) em (2.98), obtém-se uma superfície, denominada Superfície Limite de Estado, figura 2.21, que pode ser descrita por:

$$v_{\lambda} = \Gamma + (\lambda - k) \cdot \left(1 - \frac{\eta}{M}\right) \quad \text{Cam-clay} \quad (2.99)$$

$$v_{\lambda} = \Gamma + (\lambda - k) \cdot \left[\ln(2) - \ln \left(1 + \left(\frac{\eta}{M}\right)^2\right) \right] \quad \text{Cam-clay modificado} \quad (2.100)$$

Outra forma de escrever (2.100) consiste em substituir v_{λ} por sua definição, equação (2.96), o que fornece:

$$v = \Gamma - \lambda \cdot \ln(p') + (\lambda - k) \cdot \left[\ln(2) - \ln \left(1 + \left(\frac{\eta}{M}\right)^2\right) \right] \quad (2.101)$$

Figura 2.27: Superfície Limite de Estado

Assim, durante o regime elástico a trajetória dos estados do solo se desenvolve internamente a SLE, enquanto que no regime elasto-plástico a trajetória dos estados respeita a equação 2.100 (ou 2.99), permanecendo sobre a SLE. Estados representados por pontos externos a SLE não são permitidos.

Determinação dos parâmetros:

A partir da realização de ensaios triaxiais com compressão isotrópica, os principais parâmetros utilizados na formulação dos modelos Cam-clay podem ser determinados, a saber: os parâmetros de adensamento (Γ , N , λ e k), os parâmetros associados à resistência drenada (M ou ϕ) e os parâmetros elásticos (K e G ou μ).

Os parâmetros N , λ e k são obtidos diretamente pela resposta do ensaio de compressão isotrópica apresentada no plano $(\ln(p')-v)$, figura 2.4.

Para o caso de Γ , sua determinação depende do tipo de modelo selecionado: Cam-clay ou Cam-clay modificado. De acordo com a escolha realizada, tem-se:

$$\Gamma = N - (\lambda - k) \quad \text{Cam-clay} \quad (2.102)$$

$$\Gamma = N - (\lambda - k) \cdot \ln(2) \quad \text{Cam-clay modificado} \quad (2.103)$$

Já M , relaciona-se com o ângulo de atrito do solo (ϕ), pela relação:

$$M = \frac{6 \sin(\phi')}{3 - \sin(\phi')} \quad (2.104)$$

A determinação do módulo de compressibilidade elástica K já foi discutido, sendo aqui recordado:

$$K = \frac{dp'}{d\varepsilon_v^p} = \frac{v \cdot p'}{k} \quad (2.105)$$

Enfim, para o caso do modelo Cam-clay modificado, resta ainda determinar o parâmetro G (elasticidade transversal). Realizando ciclos de descarga e recarga na amostra submetida ao ensaio triaxial e, expressando os resultados em termos de q e $(\varepsilon_a - \varepsilon_r)$, tem-se que o coeficiente angular da reta de descarga- recarga vale $2G$, figura 2.28.

Figura 2.28: Curva q x $\varepsilon_a - \varepsilon_r$: Determinação de G .

Extensão para o espaço geral das tensões:

A formulação de estado crítico discutida até aqui, desenvolveu-se sobre condições de contorno bastante restritivas em termos de tensão e deformação, utilizando-se, quase que exclusivamente, resultados de ensaios triaxiais. Nestas condições, o valor da tensão principal intermediária (σ_2) será sempre igual à tensão principal menor (σ_3) ou maior (σ_1), restringindo as possibilidades de análise a uma região limitada do espaço das tensões.

Para contornar este problema, uma primeira forma de generalização, proposta por Roscoe e Burland (1968), consistiu em substituir a variável q por $\sqrt{J_2}$ nas equações da superfície de plastificação, (2.79) e (2.80).

Outra modificação surgiu da observação de resultados experimentais, que apontavam o critério de Mohr-Coulomb como mais indicado para representar

o comportamento dos solos próximo à ruptura (Bishop (1966) apud Imperial College (1997)). Isto incentivou uma nova alteração nas equações supra citadas, substituindo M por $g(\theta)$, sendo, este último, definido pela expressão (2.57). Assim, as equações (2.79) e (2.80) puderam ser redefinidas, sendo escritas na forma:

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \frac{\sqrt{J_2}}{p' \cdot g(\theta)} - \ln\left(\frac{p'_o}{p'}\right) \quad \text{Cam-clay} \quad (2.106)$$

e

$$F(\{\sigma'\}, \{h\}) = \left(\frac{\sqrt{J_2}}{p' \cdot g(\theta)}\right)^2 - \left(\frac{p'_o}{p'} - 1\right) \quad \text{Cam-clay modificado} \quad (2.107)$$

Apesar do avanço conseguido com a adoção do critério Mohr-Coulomb, outras superfícies de ruptura, que melhor representaram os resultados experimentais, foram propostas. Entre elas, pode-se citar aquelas apresentadas por Lade & Duncan (1975) e Matsuoka & Nakai (1974). Mais recentemente, Van Eekelen (1980) propôs um conjunto de superfícies de ruptura, reescrevendo $g(\theta)$, como:

$$g(\theta) = X \cdot (1 + Y \sin(3\theta))^{-Z} \quad (2.108)$$

onde X , Y e Z são constantes do solo.

Utilizando esta expressão de $g(\theta)$, nas equações 2.106 e 2.107, obtém-se uma maior flexibilidade na definição das superfícies de plastificação e potencial plástica, o que possibilita representar quaisquer das superfícies mencionadas (Lade, Matsuoka, entre outras). A importância desta flexibilização é ainda maior quando se depara com o trabalho elaborado por Potts e Gens (1984), onde é ressaltada a necessidade de adotar o fluxo não-associado para o modelo Cam-clay, sob pena de não se obter resultados confiáveis na análise. Assim, a proposta feita por Van Eekelen (1980) torna-

se uma ferramenta importante na definição de superfícies de plastificação e potencial plástica distintas.

Além destas, outras modificações podem ser feitas no modelo Cam-clay. Entre elas cabe mencionar aquela inspirada nos ensaios conduzidos por Hvorslev (1937). Apesar de serem anteriores ao desenvolvimento do Cam-clay as conclusões de Hvorslev indicam que a superfície de plastificação do Cam-clay superestima as tensões de ruptura quando esta ocorre no lado seco ou supercrítico. Por isto, uma modificação possível seria substituir o lado supercrítico do Cam-clay por outra superfície, em geral uma reta, de modo que pudesse ser utilizada em conjunto com o lado subcrítico da formulação original.

2.5.7 Outros modelos constitutivos

Após o aparecimento dos primeiros modelos constitutivos baseados no conceito de estado crítico, percebeu-se um grande avanço na modelagem matemática do comportamento dos solos, acompanhado por uma diversidade ainda maior de modelos propostos.

A tentativa de representar outras características dos solos, não previstas pelos modelos anteriores, ou mesmo de explorar comportamentos mais específicos, impulsionaram as pesquisas e os estudos que propiciaram o aparecimento destes novos modelos, com mais recursos, mas, por outro lado, mais complexos.

Neste sentido, ao mesmo tempo em uma diversidade maior de propriedades e respostas do solo puderam ser verificadas, o número de variáveis e parâmetros requeridos também aumentou. Por esta razão, muitos destes modelos mais recentes, ainda não ocupam um papel de destaque nas aplicações práticas da engenharia e, portanto, ficam além do escopo pretendido por este trabalho. Em contrapartida, os modelos mais simples, em especial o Cam-clay, mesmo com suas limitações, continuam sendo largamente utilizados.

Assim, apenas com o objetivo de mencionar outros modelos constitutivos, sem, contudo, aplicar o mesmo rigor despendido para os modelos anteriores, tem-se:

- Modelagem do solo como um material com tração limitada: Pode-se citar, por exemplo, o modelo desenvolvido por Zienkiewicz (1968). Trata-se de um modelo elasto-plástico perfeito que permite a formação de fissuras em razão das tensões de tração presentes no solo. Este modelo pode ser utilizado em conjunto com outro, que permita descrever o comportamento do solo quando submetido ao cisalhamento;
- Modelo de enrijecimento duplo de Lade (1977): Modelo apropriado para representar o comportamento de materiais granulares, em que duas superfícies de plastificação são consideradas. A construção deste modelo pressupõe elasticidade não linear e enrijecimento e/ ou amolecimento isotrópico (Lade (1977));
- Modelo MIT-E1: Modelo baseado no Cam-clay modificado e desenvolvido por Kavvas (1982) apud Imperial College (1997) para investigar o comportamento de argilas normalmente adensadas. Este modelo considera uma superfície de plastificação anisotrópica, com enrijecimento e/ ou amolecimento cinemático;
- Modelo MIT-E3: Este modelo, desenvolvido por Whittle (1987) apud Whittle (1991) para considerar o comportamento de argilas sobreadensadas, apresenta as mesmas características presentes no MIT-E1, incorporando a elas a histerese elástica – que traduz o comportamento altamente não-linear no início do descarregamento e recarregamento do solo - e uma superfície de plastificação adicional que permite prever a existência de deformações irreversíveis dentro dos ciclos de descarregamento e recarregamento, além de possibilitar o tratamento acoplado das deformações de volume e antiesféricas.

Uma apresentação mais rigorosa destes dois últimos modelos pode ser encontrada em: Whittle (1991), Kavvas (1982) apud Imperial College

(1997) e Whittle (1991 e 1993). Estes são apenas alguns dos modelos matemáticos mais recentemente propostos, sendo que muitos outros trabalhos podem ser encontrados em bibliografia específica, como também em periódicos, revistas e publicações de congressos.

Capítulo 3

COMPORTAMENTO DA FASE FLUIDA DOS SOLOS

3.1 Introdução

Ao examinar uma amostra de solo, na escala das partículas que a constituem, observa-se tratar de um material heterogêneo, composto basicamente por uma fase sólida e outra fluida aleatoriamente distribuídas. Trata-se assim de um meio poroso, com a fase sólida, composta por grãos, descontínua, tendo os vazios preenchidos pela fase fluida. Esta fase fluida é, em geral, bifásica, sendo constituída por partículas de ar e água, em diferentes proporções, dependendo do estado em que o solo se encontra. Para os propósitos deste trabalho, o solo será considerado ou totalmente seco, sem água, ou completamente saturado.

No capítulo anterior, a preocupação esteve voltada para a análise do comportamento da fase sólida do material, estrutura de grãos, observando as relações entre tensões e deformações aplicadas. De certa forma, a influência da fase fluida fez-se sentir, apenas de maneira implícita, no momento da descrição do comportamento dos solos, através da distinção de formulações, ora em termos de tensões totais, ora em relação à tensões efetivas. No presente capítulo, esta diferenciação, que até aqui foi pouco explorada, será melhor apreciada.

Por outro lado, mais do que simplesmente apresentar os conceitos de tensões totais e efetivas, atenção especial será dedicada às características da fase fluida, observando como ocorre a sua movimentação nos vazios entre os grãos e a sua conseqüente influência no comportamento dos solos.

Neste sentido, o presente capítulo objetiva estabelecer as principais equações que regem o comportamento da fase fluida dos solos, para que em conjunto com as equações constitutivas, de equilíbrio e de compatibilidade, seja possível obter, em uma etapa seguinte, a formulação completa do problema (formulação acoplada) segundo o Método dos Elementos Finitos.

3.2 Conceito de tensões efetivas e pressões neutras

O grande avanço no conhecimento do comportamento dos materiais porosos, em particular dos solos, ocorreu, fundamentalmente, no momento em que se considerou as tensões efetivamente transmitidas entre os grãos para sua caracterização. No âmbito da engenharia geotécnica, esta proposição, que foi feita por Terzaghi (1943), resultou na definição do conceito de tensão efetiva do solo (σ').

Essencialmente, Terzaghi considerou em sua proposição a existência de uma matriz de grãos totalmente imersa em água, indicando a condição de solo saturado. Considerou ainda uma tensão total σ atuante no solo, enquanto que a fase fluida estaria submetida a uma pressão u . Sob esta condição, definiu a expressão que estabelece o conceito da tensão efetiva, na forma:

$$\sigma' = \sigma - u \quad (3.1)$$

Onde:

σ : tensão total atuante no solo;

u : pressão na água.

Depreende-se da expressão acima, que a pressão na água não exerce qualquer tipo de influência na descrição do comportamento dos solos, uma vez que não interfere na tensão transmitida entre os grãos. De fato, como atua em todas as direções, a pressão na água comprime individualmente os

grãos, tidos como incompressíveis frente à compressibilidade dos solos, mas não os comprime uns contra os outros, o que mantém inalterada a tensão nos contatos entre eles. Por esta razão, a pressão da água recebeu a denominação de pressão neutra, sendo usualmente representada pela letra u .

Considerando-se o caso em que não exista movimento de água no interior do solo (repouso), e que se conheça a profundidade z_w do lençol freático, a pressão neutra atuante em um elemento do solo posicionado a uma profundidade z de um perfil geológico, (figura 3.1), é determinada por:

$$u = (z - z_w) \cdot \gamma_w \quad (3.2)$$

Figura 3.1: Elemento de solo considerado para cálculo da pressão neutra

3.3 Lei de Darcy e Equação da Continuidade

De um modo geral, a água existente no interior do solo raramente está em repouso. Frequentemente, o solo está submetido à diferentes condições de contorno hidráulicas, sejam elas: precipitações, irrigações, evaporação, drenagem, entre outras, que interferem diretamente na distribuição e movimento da água nos vazios do solo.

Claramente, este movimento da água através dos solos pode ocorrer sob duas condições distintas, a saber:

- a) Solos saturados, com os vazios totalmente preenchidos com água, e;
- b) Solos parcialmente saturados, quando nos vazios coexistem ar e água.

Neste trabalho, em função da maior complexidade envolvida na discussão do caso *b*), apenas a condição que considera este movimento através de solos saturados será considerada. As discussões apresentadas na seqüência, estarão, assim, observando sempre esta condição.

A partir da análise de diversos experimentos, Darcy, em 1856, estabeleceu as principais características físicas e geométricas que influenciavam o movimento da água no interior do solo, levando-o a propor o seguinte equacionamento:

$$v_w = k \cdot i \quad (3.3)$$

Sendo:

v_w : velocidade de percolação (ou artificial) da água;

k : coeficiente de permeabilidade;

i : gradiente hidráulico.

O coeficiente de permeabilidade acima definido, pode ser considerado uma constante, para cada tipo de solo e para uma determinada faixa de velocidades, sendo função do tamanho dos vazios existentes e, conseqüentemente, função do índice de vazios. Desta forma, é natural imaginar que a permeabilidade varie à medida em que o índice de vazios do solo seja alterado. Entretanto, para as aplicações inseridas no escopo deste trabalho, faz-se a hipótese de manutenção do coeficiente de permeabilidade constante.

Já o gradiente hidráulico corresponde à relação existente entre a carga hidráulica dh dissipada no movimento pela distância dL ao longo da qual a carga se dissipa, resultando em:

$$i = \frac{dh}{dL} \quad (3.4)$$

Para melhor compreensão do significado do gradiente hidráulico, considere a figura 3.2, em que ocorre fluxo de água entre dois pontos distintos A e B, distantes entre si de dL , e pertencentes à uma mesma camada de solo de um dado perfil geológico. Posicionando, arbitrariamente, um sistema de referência ($z=0$), e instalando piezômetros nos pontos A e B referidos, pode-se determinar o valor da carga dissipada no fluxo, dh , como sendo a diferença entre a carga total existente nestes dois pontos.

Figura 3.2: Gradiente hidráulico entre dois pontos A e B

$$h_A = z_A + \frac{u_A}{\gamma_w} \quad (3.5)$$

$$h_B = z_B + \frac{u_B}{\gamma_w} \quad (3.6)$$

$$dh = h_B - h_A \quad (3.7)$$

Cabe ressaltar, que a carga total é definida pela soma entre a carga altimétrica e a carga piezométrica (igual à pressão neutra no ponto). A parcela correspondente à energia cinética não é considerada em razão das baixas velocidades de percolação envolvidas nos problemas usuais.

Considerando o caso de um problema tridimensional, com as direções x, y e z coincidindo com as direções principais do fluxo, a lei de Darcy, para solos anisotrópicos, pode ser expandida, resultando em:

$$v_{wx} = -k_x \cdot \frac{\partial h}{\partial x} \quad (3.8)$$

$$v_{wy} = -k_y \cdot \frac{\partial h}{\partial y} \quad (3.9)$$

$$v_{wz} = -k_z \cdot \frac{\partial h}{\partial z} \quad (3.10)$$

Sendo v_{wx} , v_{wy} e v_{wz} as componentes da velocidade de percolação. Para o caso de solo isotrópico, o valor da permeabilidade k é o mesmo para as três equações acima ($k_x = k_y = k_z = k$).

O sinal negativo nas expressões acima decorre do fato que o fluxo de água ocorre na direção decrescente da carga ou potencial hidráulico.

Isto posto, considerando a existência de fluxo através de um elemento de solo, e recordando as hipóteses de solo saturado e líquido incompressível, tem-se que, associadas às variações percebidas no volume de água, existirão variações no volume do esqueleto sólido, de igual valor, mas com sinal contrário. E para traduzir esta condição, defini-se a equação da continuidade, para um elemento infinitesimal de solo, como sendo:

$$\frac{\partial v_{wx}}{\partial x} + \frac{\partial v_{wy}}{\partial y} + \frac{\partial v_{wz}}{\partial z} = \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} \quad (3.11)$$

onde, o termo do lado direito da equação corresponde à taxa de deformação volumétrica do solo com o tempo (ver figura 3.3).

Figura 3.3: Fluxo em um elemento infinitesimal do solo de volume $\delta x \cdot \delta y \cdot \delta z$

De outra maneira, utilizando a lei de Darcy generalizada, a equação da continuidade pode ser reescrita, na forma:

$$k_x \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \cdot \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial \epsilon_v}{\partial t} = 0 \quad (3.12)$$

Considerando ainda o fato de que no solo real, nem sempre é possível caracterizar seu comportamento como não drenado ou totalmente drenado, torna-se essencial a discussão e equacionamento combinados dos fenômenos relacionados à deformação e ao fluxo de água no interior dos solos.

Para este conjunto de equações do qual fazem parte a equação da continuidade (3.12), as equações de equilíbrio, constitutivas e de compatibilidade, e ainda, as relações entre as tensões totais e as tensões efetivas, utiliza-se a denominação de equações de Biot (1941) para o adensamento. A partir das equações de Biot será possível analisar de forma combinada as deformações e o fluxo de água através dos vazios dos solos, que, por sua vez, serão decorrentes da modificação nas condições de contorno do problema e dos carregamentos externos aplicados.

Ao conjunto das equações de Biot tem-se o que se conhece por teoria acoplada e o interesse, a partir de então, reside na aplicação destas equações no contexto do Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 4

EQUACIONAMENTO DA INTERAÇÃO SOLO-ESTRUTURA SEGUNDO O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Enquanto que, nos capítulos anteriores, objetivou-se definir as principais características observadas no comportamento dos solos e seu respectivo equacionamento, no desenvolvimento que se segue, o foco é redirecionado para outro objetivo deste trabalho, que consiste na resolução de problemas da Engenharia em que a interação solo-estrutura exerce papel essencial.

Desta forma, neste capítulo serão retomadas as equações de equilíbrio, de compatibilidade e constitutivas, além da equação da continuidade definidas para os solos, mas agora, sendo devidamente ajustadas para sua utilização a partir do Método dos Elementos Finitos (MEF).

Complementarmente a estas equações que regem o comportamento dos solos - equações de Biot - caberá uma breve exposição sobre o equacionamento utilizado para resolução das estruturas em interação com o solo, considerando, também para este caso, sua resolução através do Método dos Elementos Finitos.

Assim, optou-se por subdividir este capítulo em duas partes, sendo a primeira destinada à obtenção das equações de Biot, para os solos, segundo o Método dos Elementos Finitos, ficando para a segunda parte, a apresentação das equações em termos do (MEF) para o caso das estruturas. A notação e os resultados apresentados na sequência, foram extraídos do livro *Critical State Soil Mechanics Via Finite Elements*, de Britto & Gunn (1987).

4.1 Equações de Biot

Conforme discutido anteriormente, as equações de Biot combinam as equações que governam o fluxo de água através dos vazios do esqueleto sólido, com as equações que regem o comportamento tensão x deformação e de equilíbrio dos solos. Assim, em decorrência desta abordagem acoplada do problema, além dos deslocamentos, as pressões neutras (ou, ainda, as cargas hidráulicas) atuantes nos nós dos elementos serão, também, consideradas como variáveis primárias do modelo estudado.

De outra forma, os deslocamentos e pressões neutras (ou cargas hidráulicas) serão os graus de liberdade escolhidos para o equacionamento do problema, tendo seu valor no interior dos elementos, obtido através da interpolação de seu valor nos respectivos nós.

4.1.1 Princípio dos Trabalhos Virtuais

Para o estudo das equações de adensamento dos solos, através do Método dos Elementos Finitos, deve-se partir das equações de equilíbrio abaixo explicitadas:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} = w_x \quad (4.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} = w_y \quad (4.2)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} = w_z \quad (4.3)$$

Onde w_x , w_y e w_z são as forças por unidade de volume nas direções x , y e z , respectivamente.

Multiplicando as equações acima por funções escalares arbitrárias δdx , δdy e δdz , somando-as e integrando-as em relação ao volume dV , tem-se:

$$\int_V \delta d_x \cdot \left(\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zx}}{\partial z} - w_x \right) + \delta d_y \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{zy}}{\partial z} - w_y \right) + \delta d_z \cdot \left(\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} - w_z \right) \cdot dV = 0 \quad (4.4)$$

Mais do que isto, considere que estas funções escalares, que são arbitrárias, possam ser identificadas como deslocamentos nas direções x, y e z respectivamente. Dada à arbitrariedade destes deslocamentos é usual denominá-los deslocamentos virtuais.

Utilizando o teorema de Zienkiewicz – Green, integração por partes, em cada um dos termos da expressão acima, obtém-se a expressão final do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\int_V (\delta \boldsymbol{\epsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}) dV = \int_A (\delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{T}_s) dA + \int_V (\delta \mathbf{d}^T \cdot \mathbf{w}) dV \quad (4.5)$$

Com $\mathbf{T}_s$ representando as forças de superfície e sendo dado por:

$$\mathbf{T}_s = \begin{Bmatrix} n_x \cdot \sigma_{xx} + n_y \cdot \tau_{xy} + n_z \cdot \tau_{xz} \\ n_x \cdot \tau_{xy} + n_y \cdot \sigma_{yy} + n_z \cdot \tau_{yz} \\ n_x \cdot \tau_{xz} + n_y \cdot \tau_{yz} + n_z \cdot \sigma_{zz} \end{Bmatrix} \quad (4.6)$$

onde n_x , n_y e n_z , indicam os cossenos diretores correspondentes à superfície considerada.

Cabe observar, que na dedução do Princípio dos Trabalhos Virtuais, os campos de deslocamentos e deformações não são, necessariamente, coincidentes com os deslocamentos e deformações reais, decorrentes do campo de tensões atuantes. Por outro lado, é fundamental observar que a arbitrariedade de escolha destes campos não é total, ficando esta liberdade condicionada ao atendimento das equações de compatibilidade. Neste

trabalho, os campos de deslocamentos e deformações virtuais serão identificados por, $\delta \mathbf{d}$ e $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, respectivamente.

A partir do desenvolvimento feito até então, torna-se possível conceituar o problema no contexto do Método dos Elementos Finitos. A premissa básica utilizada pelo Método, considera que o problema real possa ser discretizado, ou ainda, substituído por um conjunto de elementos finitos, com os graus de liberdade definidos apenas nos nós. Além desta discretização, define-se, também, uma forma particular de variação destes graus de liberdade ao longo de cada um dos elementos, expressando-os em termos de seus valores nos nós. Para um elemento qualquer da malha de elementos finitos, o campo de deslocamentos pode ser escrito na forma matricial:

$$\mathbf{d} = \mathbf{H} \mathbf{a} \quad (4.7)$$

Sendo,

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} d_x \\ d_y \\ d_z \end{bmatrix} \quad (4.8)$$

o vetor $\mathbf{a}$ correspondente aos deslocamentos nodais do elemento e $\mathbf{H}$ a matriz que contém as funções de interpolação utilizadas na correlação entre os deslocamentos nodais e os deslocamentos no interior do elemento.

Considerando as equações de compatibilidade, pode-se definir as deformações no interior do elemento como:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4.9)$$

onde a matriz $\mathbf{B}$ contém as derivadas parciais das funções de interpolação H_i .

Com base nas relações tensão – deformação, discutidas no capítulo 2, as tensões no interior do elemento podem ser escritas a partir dos deslocamentos nodais, através de:

$$\sigma = \mathbf{DB} \mathbf{a} \quad (4.10)$$

Procedendo de maneira análoga, para determinação dos deslocamentos e deformações virtuais, e utilizando as mesmas matrizes $\mathbf{B}$ e $\mathbf{H}$, acima definidas, tem-se que:

$$\delta \mathbf{u} = \mathbf{H} \delta \mathbf{a} \quad (4.11)$$

e

$$\delta \epsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{a} \quad (4.12)$$

Antes de substituir as expressões acima na equação de equilíbrio, (4.5), duas considerações merecem destaque. A primeira delas recupera uma discussão feita na apresentação dos modelos constitutivos para os solos, em que se escreviam as relações tensão – deformação em termos incrementais ($\Delta \sigma$ e $\Delta \epsilon$). Este modo de abordagem do problema, permite reescrever o Princípio dos Trabalhos Virtuais na forma incremental, a seguir:

$$\int_V (\delta \epsilon^T \Delta \sigma) dV = \int_A (\delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{T}_s) dA + \int_V (\delta \mathbf{d}^T \Delta \mathbf{w}) dV \quad (4.13)$$

Pela mesma razão exposta acima as expressões (4.7) e (4.9) podem ser reescritas como:

$$\Delta \mathbf{d} = \mathbf{H} \Delta \mathbf{a} \quad (4.14)$$

e

$$\Delta \epsilon = \mathbf{B} \Delta \mathbf{a} \quad (4.15)$$

A segunda consideração a ser feita, refere-se à diferenciação entre tensões totais e tensões efetivas presente no estudo do comportamento dos solos. Como a expressão (4.13), acima, está escrita em termos de tensões totais e, reconhece-se que o comportamento dos solos é definido a partir das tensões efetivas atuantes, torna-se importante atentar para esta diferenciação. Recordando que:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + m\Delta u \quad (4.16)$$

com

$$\mathbf{m}^T = [1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0] \quad (4.17)$$

e, observando que em termos incrementais, o incremento de pressão neutra em determinado ponto corresponde ao incremento de carga hidráulica neste mesmo ponto, multiplicado por γ_w :

$$\Delta u = \Delta h \cdot \gamma_w \quad (4.18)$$

Então, a expressão (4.16) é redefinida, como sendo:

$$\Delta\sigma = \Delta\sigma' + \mathbf{m} \cdot \Delta h \cdot \gamma_w \quad (4.19)$$

No que se refere às relações tensão – deformação, tem-se aqui, que as tensões efetivas no interior do elemento podem ser escritas a partir dos deslocamentos nodais, através de:

$$\sigma' = \mathbf{D}' \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4.20)$$

onde a matriz constitutiva $\mathbf{D}'$ está expressa em termos de tensões efetivas. Com base nestas definições, já seria possível reescrever a expressão (4.13) em termos de tensões efetivas. Entretanto, como se pretende resolver esta equação através do Método dos Elementos Finitos e, sabendo que, as

cargas hidráulicas são, ao lado dos deslocamentos, variáveis primárias do problema, torna-se necessário redefini-las a partir dos seus valores nos nós. Isto significa considerar:

$$\mathbf{h} = \bar{\mathbf{H}} \mathbf{b} \quad (4.21)$$

E na forma incremental:

$$\Delta \mathbf{h} = \bar{\mathbf{H}} \Delta \mathbf{b} \quad (4.22)$$

com, $\bar{\mathbf{H}}$ correspondente a matriz que inclui as funções de interpolação utilizadas na correlação entre as cargas hidráulicas nodais e as cargas hidráulicas no interior do elemento.

Note-se que a matriz $\bar{\mathbf{H}}$ difere da matriz $\mathbf{H}$, utilizada para interpolação dos deslocamentos. E esta diferenciação na forma de variação dos deslocamentos e cargas hidráulicas no interior dos elementos não é por acaso. Supondo que $\mathbf{H}$ promova uma variação quadrática dos deslocamentos, as deformações e tensões efetivas teriam variação linear. Caso, $\bar{\mathbf{H}}$ também indicasse uma variação quadrática das cargas hidráulicas, o que permitiria considerá-la igual à $\mathbf{H}$, ter-se-ia, assim, uma variação quadrática nas pressões neutras. Isto, levaria à uma inconsistência entre a variação das pressões neutras e das tensões efetivas, o que justifica a escolha de $\bar{\mathbf{H}}$ diferente de $\mathbf{H}$.

Desta maneira, a partir das expressões desenvolvidas acima, obtém-se, por substituição, a seguinte expressão do Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{a}^T \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D}' \mathbf{B}) \Delta \mathbf{a} \, dV + \delta \mathbf{a}^T \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{m} \bar{\mathbf{H}}) \Delta \mathbf{b} \cdot \gamma_w \cdot dV = \delta \mathbf{a}^T \int_A (\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{T}_s) dA + \\ \delta \mathbf{a}^T \int_V (\mathbf{H}^T \mathbf{w}) dV \end{aligned} \quad (4.23)$$

Como $\delta \mathbf{a}^T$ é arbitrário, pode ser cancelado, resultando em:

$$\mathbf{K} \Delta \mathbf{a} + \mathbf{L} \Delta \mathbf{b} = \int_A (\mathbf{H}^T \Delta \mathbf{T}_s) dA + \int_V (\mathbf{H}^T \mathbf{w}) dV \quad (4.24)$$

Onde, $\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do solo considerado, dada por:

$$\mathbf{K} = \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B}) dV \quad (4.25)$$

e $\mathbf{L}$ a matriz equivalente à:

$$\mathbf{L} = \int_V (\mathbf{B}^T \mathbf{m} \bar{\mathbf{H}}) \cdot \gamma_w dV \quad (4.26)$$

Enfim, a equação (4.24) corresponde a expressão final, utilizada pelo Método dos Elementos Finitos para caracterizar o equilíbrio dos solos.

4.1.2 Equação da Continuidade

Para atender o objetivo de realizar a análise acoplada do comportamento dos solos através do Método dos Elementos Finitos, resta ainda estabelecer o equacionamento do fluxo de água nos meios porosos segundo o MEF. Em outras palavras, a equação da continuidade será reescrita, tendo em vista as interpolações estabelecidas para as variáveis primárias do problema.

O procedimento a ser empregado será semelhante àquele utilizado nas equações de equilíbrio do solo para a obtenção do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Procedendo este mesmo tipo de operação, agora para a equação da continuidade, pode-se definir um pseudo Princípio Virtual, conhecido como Princípio da Potência Virtual, conforme discutido a seguir.

Inicialmente, define-se uma função escalar δh , denominada carga hidráulica virtual. Multiplicando δh pela equação da continuidade (3.10), e integrando ao longo do volume V , tem-se:

$$\int_V \delta h \cdot \left[k_x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} + k_y \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} + k_z \frac{\partial^2 h}{\partial z^2} + \frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right] dV = 0 \quad (4.27)$$

Aplicando na expressão acima o teorema de Zienkiewicz – Green, integração por partes, obtém-se:

$$\begin{aligned} & - \int_V \left[k_x \frac{\partial h}{\partial x} \frac{\partial \delta h}{\partial x} + k_y \frac{\partial h}{\partial y} \frac{\partial \delta h}{\partial y} + k_z \frac{\partial h}{\partial z} \frac{\partial \delta h}{\partial z} \right] dV - \int_A (\delta h v_{wn}) dA \\ & + \int_V \delta h \left(\frac{\partial \varepsilon_v}{\partial t} \right) dV = 0 \end{aligned} \quad (4.28)$$

Onde v_{wn} corresponde à velocidade de escoamento da água ortogonal ao contorno A.

De maneira análoga àquela utilizada no Princípio dos Trabalhos Virtuais, a carga hidráulica virtual pode ser escrita como:

$$\delta h = \bar{\mathbf{H}} \delta \mathbf{b} \quad (4.29)$$

O gradiente da carga hidráulica, assim como o campo de deformações, é definido por:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} \\ \frac{\partial h}{\partial y} \\ \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \bar{\mathbf{E}} \mathbf{b} \quad (4.30)$$

onde a matriz $\bar{\mathbf{E}}$ é obtida por diferenciação da matriz $\bar{\mathbf{H}}$.

Lembrando, ainda, que

$$\varepsilon_v = \mathbf{m}^T \boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{m}^T \mathbf{B} \mathbf{a} \quad (4.31)$$

pode-se combinar as três últimas expressões acima, àquelas estabelecidas na seção anterior, e por substituição na equação (4.28), obtém-se:

$$\delta \mathbf{b}^T \int_V (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{m}^T \mathbf{B}) \frac{d\mathbf{a}}{dt} dV - \delta \mathbf{b}^T \int_V (\bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{E}}) \mathbf{b} dV = \delta \mathbf{b}^T \int_A \bar{\mathbf{H}} \mathbf{v}_{wn} dA \quad (4.32)$$

Com

$$\mathbf{k} = \begin{bmatrix} k_x & 0 & 0 \\ 0 & k_y & 0 \\ 0 & 0 & k_z \end{bmatrix} \quad (4.33)$$

Em função da arbitrariedade na escolha da carga hidráulica virtual, ela pode ser cancelada, de modo que (4.32) seja dada por:

$$\mathbf{L}^T \frac{d(\mathbf{a})}{dt} \cdot \frac{1}{\gamma_w} - \Phi \mathbf{b} = \int_A \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{v}_{wn} dA \quad (4.34)$$

sendo $\mathbf{L}$ definida anteriormente e a matriz Φ , expressa a seguir:

$$\Phi = \int_V \bar{\mathbf{E}}^T \mathbf{k} \bar{\mathbf{E}} dV \quad (4.35)$$

Para resolução da equação (4.34), usualmente se recorre a um processo incremental em relação ao tempo, em que, conhecendo a solução no tempo t , determina-se a solução em $t + \Delta t$. A integral desta equação no tempo, é corresponde a:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{L}^T \frac{d(\mathbf{a})}{dt} \cdot \frac{1}{\gamma_w} dt - \int_t^{t+\Delta t} \Phi \mathbf{b} dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_A \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{v}_{wn} dA dt \quad (4.36)$$

Supõe-se que, para solução da integral acima é razoável a seguinte aproximação:

$$\int_t^{t+\Delta t} \mathbf{b} dt = \{(1-\theta)\mathbf{b}(t) + \theta\mathbf{b}(t+\Delta t)\}\Delta t \quad (4.37)$$

Sendo θ , um parâmetro que define a forma de variação de $\mathbf{b}$ no intervalo Δt . Segundo alguns pesquisadores, como por exemplo, Booker e Small (1975), para garantia da estabilidade do processo incremental deve-se escolher valores de θ tais que, $\theta \geq 0,5$.

Utilizando uma aproximação similar para a integral de v_{wn} no tempo, tem-se que (4.36) pode ser escrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^T [\mathbf{a}]_t^{t+\Delta t} \cdot \frac{1}{\gamma_w} - \phi \{(1-\theta) \cdot \mathbf{b}(t) + \theta \cdot \mathbf{b}(t+\Delta t)\} \Delta t = \\ \int_A \bar{\mathbf{H}}^T \{(1-\theta) \cdot v_{wn}(t) + \theta \cdot v_{wn}(t+\Delta t)\} \Delta t dA \end{aligned} \quad (4.38)$$

Definindo, também:

$$\Delta \mathbf{a} = \mathbf{a}(t+\Delta t) - \mathbf{a}(t) \quad (4.39)$$

$$\Delta \mathbf{b} = \mathbf{b}(t+\Delta t) - \mathbf{b}(t) \quad (4.40)$$

$$\Delta v_{wn} = v_{wn}(t+\Delta t) - v_{wn}(t) \quad (4.41)$$

e promovendo estas substituições em (4.38), obtém-se:

$$\mathbf{L}^T \Delta \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\gamma_w} - \phi \Delta t \cdot \theta \Delta \mathbf{b} = \phi \Delta t \cdot \mathbf{b}(t) + \int_A \bar{\mathbf{H}}^T \{\theta \Delta v_{wn} + \theta v_{wn}(t)\} \Delta t dA \quad (4.42)$$

Assim, ao considerar o valor $\theta = 1$, a expressão acima resume-se em:

$$\mathbf{L}^T \Delta \mathbf{a} \cdot \frac{1}{\gamma_w} - \phi \Delta t \cdot \Delta \mathbf{b} = \phi \Delta t \cdot \mathbf{b}(t) + \int_A \bar{\mathbf{H}}^T v_{wn}(t+\Delta t) \cdot \Delta t dA \quad (4.43)$$

Esta última expressão corresponde à equação da continuidade no formato final a ser utilizada pelo Método dos Elementos Finitos.

Enfim, conforme foi visto anteriormente, a análise do comportamento dos solos é feita através de uma teoria acoplada, envolvendo o equilíbrio e o fluxo de água através dos vazios do solo. Isto implica em combinar as equações que regem estes comportamentos, (4.24) e (4.43), utilizando um processo incremental no tempo, em que a solução no instante $t+\Delta t$ é obtida a partir da solução conhecida em t . Recai-se, assim, no seguinte sistema de equações, expresso matricialmente por:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{K} & \mathbf{L} \\ \mathbf{L}^T \frac{1}{\gamma_w} & -\phi \Delta t \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{a} \\ \Delta \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \mathbf{H}^T \Delta \mathbf{T}_s dA + \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{w} dV \\ \int_A \overline{\mathbf{H}}^T \mathbf{v}_{wn}(t + \Delta t) \Delta t dA + \phi \Delta t \cdot \mathbf{b}(t) \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

O termo à direita na primeira equação indicada acima, corresponde aos carregamentos aplicados aos nós do elemento equivalentes às forças de volume e de superfície atuantes no solo. Com relação à segunda equação, o termo da direita é composto pela soma de um termo que se refere ao fluxo de água prescrito, ou ainda, conhecido, pelo contorno dA do elemento de solo considerado

$$\int_A \overline{\mathbf{H}}^T \mathbf{v}_{wn}(t + \Delta t) \Delta t dA \quad (4.45)$$

com o seu termo complementar, $(\phi \Delta t \cdot \mathbf{b}(t))$, calculado em cada passo do processo incremental.

4.2 Equações de equilíbrio para elementos estruturais

A descrição das equações de Biot, em termos das funções de interpolação, serviu para caracterizar adequadamente o equacionamento utilizado na análise de cada elemento finito de solo presente na malha de elementos finitos. Para realizar o estudo do problema de interação solo – estrutura,

resta ainda determinar o equacionamento a ser utilizado para os elementos das estruturas, também, presentes na malha de elementos finitos.

Diferentemente dos solos, que são meios porosos compostos por mais de uma fase, os elementos estruturais são considerados monofásicos, não havendo qualquer tipo de fluxo em seu interior. Adiciona-se a este fato, ser totalmente desnecessária a subdivisão da análise em termos de tensões totais e tensões efetivas. Para este caso, trabalha-se somente em termos de tensões totais.

Desta maneira, o equacionamento dos elementos estruturais reduz-se apenas à definição da equação de equilíbrio, ou ainda, do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Aproveitando a nomenclatura e desenvolvimentos realizados anteriormente, o Princípio dos Trabalhos para os elementos estruturais pode ser expresso por:

$$\mathbf{K}\Delta\mathbf{a} = \int_A \mathbf{H}^T \Delta\mathbf{T}_s dA + \int_V \mathbf{H}^T \mathbf{w} dV \quad (4.46)$$

Sendo $\mathbf{K}$, a matriz de rigidez da estrutura, definida como anteriormente, mas em lugar da matriz constitutiva $\mathbf{D}'$ do solo, utiliza-se a matriz constitutiva $\mathbf{C}$ da estrutura considerada.

Com a expressão acima, tem-se discutido o equacionamento completo que possibilita a abordagem dos problemas de interação solo - estrutura através da utilização do Método dos Elementos Finitos.

Capítulo 5

ESTUDO DE PROBLEMAS DA ENGENHARIA GEOTÉCNICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A apresentação do trabalho, até aqui, esteve voltada à definição das equações constitutivas usualmente utilizadas pela Engenharia Geotécnica e, também, à determinação do sistema de equações de Biot para estudo do adensamento dos solos.

Este capítulo, tendo por referência os desenvolvimentos acima mencionados, concentra a atenção na aplicação deste conjunto de equações à resolução de problemas geotécnicos, segundo o MEF.

Na realidade, ao resolver estes problemas, tem-se como objetivo mostrar que a utilização de modelos constitutivos mais avançados, desde que bem calibrados, pode conduzir a previsões e resultados melhores do que aqueles obtidos pelos métodos tradicionais, justificando, assim, o seu emprego. Entende-se por um modelo bem calibrado, aquele que reproduz adequadamente as condições de contorno e cujos parâmetros de entrada utilizados sejam representativos do problema analisado.

Para todos os casos em estudo, será utilizado o programa ADINA, desenvolvido no MIT, aproveitando-se as formulações e modelos já incorporados neste software.

De maneira preliminar, apenas como enfoque introdutório para a discussão de casos mais complexos, um primeiro exemplo traz um comparativo entre os resultados obtidos em ensaios triaxiais drenados, e extraídos do trabalho desenvolvido por Nader (1993), com as previsões teóricas fornecidas por dois modelos constitutivos, Cam-clay e Mohr-Coulomb, segundo o Método dos Elementos Finitos. Nestes ensaios, os corpos-de-prova foram submetidos a diferentes trajetórias de tensão, incluindo em alguns deles

ciclos de descarregamento e carregamento. Assim, algumas das principais diferenças existentes entre os modelos constitutivos mencionados podem ser avaliadas segundo os mais diversos comportamentos.

Na seqüência, serão apresentados os casos de investigação da capacidade de suporte de sapatas corridas, através da determinação do coeficiente de capacidade de carga N_γ , e o estudo de escavação de valas em solo homogêneo, com grau de saturação de 100%, onde a parede-diafragma funciona como elemento de contenção. Este último problema é comumente encontrado em obras viárias, para passagem de serviços públicos, ou ainda, para execução de túneis (método invertido). Para este estudo, em particular, o interesse maior está voltado para a resposta em termos de tensão e deformação do solo e da parede-diafragma, como também, para a investigação da influência do coeficiente de empuxo no repouso (K_0) na resposta.

5.1 Ensaios Triaxiais Drenados

No trabalho apresentado por Nader (1993), diversas trajetórias de tensão foram ensaiadas, para um mesmo tipo de solo, e os resultados experimentais obtidos, já tinham sido confrontados com as previsões teóricas oferecidas pelo modelo Cam-clay.

Neste sentido, o objetivo aqui presente reside na tentativa de reproduzir estes ensaios, segundo os modelos Cam-clay modificado e Mohr-Coulomb, implementados no ADINA, identificar possíveis discrepâncias entre as respostas teóricas e experimentais, e avaliar, ao menos qualitativamente, as possíveis qualidades e limitações presentes em cada um destes modelos.

O solo ensaiado apresenta a seguinte constituição: fração argila (10%), silte (63%), areia (27%), limite de liquidez (47%) e índice de plasticidade (18%). Cada corpo-de-prova utilizado no ensaio sofreu, inicialmente, adensamento isotrópico de 200 kPa, antes de ser submetido a uma das seis trajetórias retilíneas de tensão, abaixo descritas:

- Trajetória 1 : $\Delta\sigma_r$ constante

- Trajetória 2 : $\Delta\sigma_a = 7\Delta\sigma_r$
- Trajetória 3 : $\Delta\sigma_r = -\Delta\sigma_a/2$
- Trajetória 4 : $\Delta\sigma_r = -\Delta\sigma_a$
- Trajetória 5 : $\Delta\sigma_r = -2\Delta\sigma_a$
- Trajetória 6 : $\Delta\sigma_r < 0$, $\Delta\sigma_a$ constante.

Através de ensaios complementares de caracterização deste solo, realizados por Nader (1993), as principais constantes utilizadas no Cam-clay foram determinadas. A partir do ensaio de compressão isotrópica, os coeficientes angulares das retas de compressão virgem e descompressão-recompressão isotrópica, respectivamente, $-\lambda$ e $-k$, adotados foram: $\lambda = 0,070$ e $k = 0,018$. Do mesmo ensaio as constantes N e Γ do modelo Cam-clay modificado foram obtidas, sendo $N = 2,316$ e $\Gamma = 2,28$.

Para determinação do módulo de cisalhamento transversal G , Nader (1993) realizou dois ensaios triaxiais de compressão com ciclo de descarregamento-recarregamento, fornecendo duas curvas q (tensão desviadora) x γ (distorção). O coeficiente angular do trecho reto de descarregamento–recarregamento vale $2G$. Sendo, assim, adotou-se o valor de $G = 16700$ kPa.

Enfim, para constante M , adotou-se o valor de 1,46, correspondente ao estado crítico obtido para a trajetória 2 de carregamento.

Com estes parâmetros já seria possível reproduzir os ensaios triaxiais segundo o modelo Cam-clay modificado. Entretanto, como se pretende, também, avaliar as respostas fornecidas pelo modelo Mohr-Coulomb, resta definir os principais parâmetros que o compõem, a saber: ângulo de atrito (ϕ'), coesão (c), módulo de elasticidade de Young (E) e o coeficiente de Poisson (ν).

O ângulo de atrito pode ser obtido através da relação existente entre ele e o parâmetro M , descrita pela equação (2.104), e abaixo reproduzida:

$$M = \frac{6 \cdot \text{sen}(\phi')}{3 - \text{sen}(\phi')} \quad (5.1)$$

A coesão é considerada igual a zero.

Para determinar o módulo de Elasticidade (E) do solo pode-se utilizar o ensaio que considera $\sigma_r = \text{constante}$, observando-se o trecho inicial da curva tensão desviadora x deformação axial, que é elástico.

Assim, a partir das considerações acima, pode-se definir: $\phi' = 36^\circ$, $c = 0$ kPa e $E = 8889$ kPa. Para o coeficiente de Poisson adota-se o valor de $\nu = 0,3$.

Antes de prosseguir, resta ainda comentar que no seu trabalho, Nader (1993) introduziu uma modificação na expressão do modelo Cam-clay. Esta modificação, proposta inicialmente por Houlsby, Wroth e Wood em 1984, consiste em retirar o volume específico (v) do denominador da expressão que fornece a velocidade de deformação plástica (equação 2.85). Uma das conseqüências disto, é que a reta virgem e a reta do estado crítico passam a ser representadas no gráfico $\ln v \times \ln p'$ ao invés do gráfico $v \times \ln p'$.

Desta maneira, com os parâmetros acima definidos, passa-se, a seguir, à comparação entre os resultados experimentais e as previsões teóricas obtidas.

5.1.1 Confronto entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e do modelo de Mohr-Coulomb com os resultados experimentais obtidos em ensaios triaxiais drenados com diferentes trajetórias de tensão

Para construção do modelo de elementos finitos, considerou-se o corpo-de-prova cilíndrico, com diâmetro de 0,12m e altura de 0,04m. A razão da escolha destas dimensões pode ser explicada, visto que, de forma geral, os anéis que recebem os corpos-de-prova, no caso do ensaio edométrico, têm o diâmetro cerca de três vezes maior do que a altura, a fim de reduzir os efeitos do atrito lateral. Já para o caso dos ensaios triaxiais, isto não seria necessário, mas mesmo assim, optou-se por manter a relação entre estas medidas. Em função da sua geometria e condições de carregamento, foram utilizados elementos axissimétricos, resultando na seguinte configuração, apresentada a seguir:

Figura 5.1: Malha de elementos Finitos

A comparação entre os resultados experimentais e as previsões teóricas é feita com base em dois gráficos distintos: o primeiro relaciona a tensão desviadora, em kPa, com a deformação axial observada, sendo esta definida pela relação:

$$\frac{H_o - H}{H_o} \quad (5.2)$$

com H_o correspondendo à altura do corpo de prova antes da aplicação da tensão desviadora, e H sendo a altura em um determinado instante. O segundo gráfico relaciona a deformação volumétrica do corpo-de-prova, com a deformação axial. A deformação volumétrica é definida pela expressão abaixo:

$$\frac{V_o - V}{V_o} \quad (5.3)$$

Valendo para V e V_o as mesmas observações feitas para H e H_o .

As figuras 5.2 a 5.7 trazem as referidas curvas, para cada uma das trajetórias de tensão mencionadas:

Figura 5.2: Trajetória 1

Figura 5.3: Trajetória 2

Figura 5.4: Trajetória 3

Figura 5.5: Trajetória 4

Figura 5.6: Trajetória 5

Figura 5.7: Trajetória 6

Observando-se, inicialmente, as curvas tensão desviadora x deformação axial, nota-se que a avaliação da tensão desviadora que leva ao estado crítico, pelo modelo Cam-clay modificado, é maior do que a obtida pelos ensaios apenas na trajetória 2. Mais do que isto, o resultado observado na trajetória 2 é o que apresenta a maior discrepância em relação a todos os demais casos em estudo. Nas demais trajetórias os valores de tensão desviadora fornecidos pelos ensaios é sempre maior do que aqueles obtidos por Nader (1993) e no Cam-clay modificado, utilizado pelo ADINA. De qualquer forma, a menos da trajetória 2, os valores finais da tensão desviadora obtidos pelo ADINA, através do Cam-clay modificado, e aqueles apresentados por Nader (1993) aproximam-se bastante, o que já era esperado.

Em termos de deformabilidade, as trajetórias 1, 2 e 3 apresentam boa concordância entre os resultados experimentais e os teóricos, no trecho inicial das curvas, quando o modelo Cam-clay é utilizado, principalmente, quando $q/p_o \leq 1$. Deste ponto em diante, ao contrário do que acontece para o Cam-clay utilizado por Nader em relação aos resultados experimentais, o Cam-clay modificado, utilizado pelo ADINA, mostra-se menos deformável. Isto é percebido também na trajetória 4. De acordo com a teoria do Cam-clay, a condição verificada por Nader já era prevista, com uma deformabilidade menor durante o regime elástico, até atingir a superfície de plastificação, procedendo a partir daí um aumento da deformabilidade em direção ao estado crítico. Nas demais trajetórias as discrepâncias são maiores, desde o trecho inicial das curvas.

Resta ainda comentar os resultados fornecidos pelo modelo Mohr-Coulomb. Nota-se que a utilização deste modelo não permitiu representar de forma satisfatória, em nenhum dos casos, a resposta real fornecida pelos ensaios realizados. Embora, o valor da tensão desviadora máxima obtida com o modelo de Mohr-Coulomb seja a mesma obtida com o Cam-clay, a deformabilidade, por outro lado, apresenta total discrepância com o que se obtêm pelo Cam-clay e experimentalmente. A resposta em termos da tensão desviadora máxima pode ser explicado da seguinte forma: Como o valor da

tensão desviadora (q) cresce monotonicamente em todos ensaios, ela tende a um certo valor que nunca é ultrapassado e que é o mesmo para o modelo Cam-clay e o Mohr-Coulomb, desde que $c = 0$ e que o ângulo de atrito (ϕ) seja determinado pela expressão (5.1). De fato isto ocorre, pois no espaço das tensões principais, o cone de Drucker-Prager, que representa a ruptura no Cam-clay, circunscreve a pirâmide de Mohr-Coulomb (com vértice na origem), e, no caso de $\sigma_2 = \sigma_3$ (ensaio triaxiais), uma aresta da pirâmide está contida na superfície do cone. Sendo $c = 0$ e traçando as curvas tensão-deformação produzida pelos dois modelos em questão, pode-se ter a impressão visual de que a ruptura não acontece no mesmo valor de q . Isso ocorre porque obrigatoriamente temos de interromper o gráfico num certo valor de deformação. A ruptura só aconteceria, no Cam-clay, se a deformação fosse infinita.

Por outro lado, no que diz respeito a deformabilidade, pelo fato do modelo Mohr-Coulomb ser elasto-plástico perfeito, não há qualquer tipo de enrijecimento quando se atinge a superfície de plastificação. Isto significa, que durante todo o processo de carregamento o solo encontra-se em regime elástico, até atingir a superfície de plastificação, que neste caso se confunde com a superfície de ruptura.

Outra questão merece ser comentada sobre o modelo Mohr-Coulomb, e diz respeito à superfície de plastificação e/ ou ruptura utilizada. Se remetermos à teoria discutida no capítulo 2, nota-se que a superfície de plastificação é definida em termos da máxima tensão anti-esférica (ou desviadora) permitida, para cada valor da tensão média efetiva. Isto significa que se pode aumentar indefinidamente o valor da tensão média efetiva, sem que a superfície de plastificação seja atingida. Esta questão explica, também, os resultados obtidos com o uso deste modelo.

Volta-se, agora, a atenção para as curvas deformação volumétrica – deformação axial.

Observa-se que, nas trajetórias 1, 2 e 3, diferentemente do indicado pelo modelo Cam-clay utilizado por Nader (1993), os processamentos realizados no ADINA com o Cam-clay modificado, apresentam deformações

volumétricas inferiores às aquelas observadas experimentalmente. Nota-se que, no trecho inicial das curvas representativas das trajetórias 1 e 2, há boa concordância entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e as respostas experimentais. Já para a trajetória 3, praticamente não se observam discrepâncias. É interessante atentar para a resposta obtida na trajetória 3 para o modelo Mohr-Coulomb. Para esta trajetória não há mudança no valor da tensão média efetiva p' , o que reflete, em uma variação nula da deformação volumétrica para este caso.

Assim como destacado por Nader (1993), e confirmado pelo modelo Cam-clay modificado, nos ensaios 4 e 5, mesmo com redução no valor da tensão média efetiva p' , o solo apresentou redução de volume. Entretanto, esta redução de volume obtida é bem inferior àquela retratada nos ensaios, sendo da ordem da metade destas. Já o modelo Mohr-Coulomb indicou expansão exagerada, retratando grande diferença em relação à condição apresentada na realidade. Enfim, para a trajetória 6, mesmo prevendo expansão volumétrica superior ao realmente observado no ensaio, o modelo Cam-clay modificado utilizado pelo ADINA, fornece um resultado melhor do que aquele obtido por Nader (1993), inclusive no que se refere à forma das curvas. Para o modelo Mohr-Coulomb, mais uma vez as previsões não são nada satisfatórias.

5.1.2 Confronto entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e do modelo de Mohr-Coulomb com os resultados experimentais obtidos em ensaios triaxiais drenados com carregamento cíclico

Tendo, ainda, por referência o trabalho desenvolvido por Nader (1993), pode-se recuperar as respostas apresentadas em dois ensaios de compressão por carregamento (trajetória 2), em que ciclos de descarregamento- recarregamento são realizados em diferentes estágios da trajetória de tensões.

Seguindo o mesmo conceito definido para a seção anterior, o confronto entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e do modelo Mohr-Coulomb,

com as respostas experimentais é feito a partir da análise das curvas tensão desviadora – deformação axial e deformação volumétrica – deformação axial. O resultado desta análise pode ser verificado nas figuras 5.8 e 5.9, a seguir:

Figura 5.8: Primeiro ensaio drenado com ciclo de carregamento

Figura 5.9: Segundo ensaio drenado com ciclo de carregamento

Para ambos os ensaios realizados a previsão teórica obtida através do modelo Cam-clay modificado, utilizado pelo ADINA, apresenta um progresso em relação à curva do Cam-clay, visto que aparece o laço no trecho correspondente ao descarregamento-recarregamento, ao contrário da curva única, obtida por Nader. Nos demais aspectos das curvas, pode-se dizer que apresentam boa aproximação com os resultados dos ensaios.

Para as diferenças observadas no modelo Mohr-Coulomb, cabem as mesmas explicações mencionadas na seção anterior, podendo, ainda, ser complementadas pela observação que o trecho de descarregamento-recarregamento, coincide com a curva de carregamento, uma vez que o solo permaneceu no regime elástico.

Com relação à deformação volumétrica, nota-se, novamente, boa concordância entre as previsões teóricas do Cam-clay modificado e os resultados dos ensaios, principalmente, nos trechos iniciais das curvas. Ao contrário do foi constatado por Nader (1993), as deformações finais são menores do que àquelas indicadas nos ensaios, restando observar que, durante o ciclo de descarregamento-recarregamento, o solo apresentou variação volumétrica inferior às previstas pelos modelos.

Quanto ao modelo de Mohr-Coulomb valem as observações feitas anteriormente.

5.2 Estudo numérico para determinação do coeficiente N_γ

Dando continuidade à proposta de trabalho definida no início deste capítulo, passa-se, agora, para a análise do problema de determinação teórica da capacidade de suporte de sapatas corridas, apoiadas em subsolo homogêneo, submetidas a um carregamento vertical e centrado.

O interesse pelo estudo da carga de colapso de fundações diretas não é recente. Erickson e Drescher (2002) comentam as soluções em estado plano de deformações obtidas por Prandtl e Reissner, respectivamente, em 1920 e 1926 e que serviram de base outros trabalhos que vieram depois. Em especial, pode-se destacar aquele realizado por Terzaghi (1943) que

estabeleceu uma fórmula, até hoje utilizada, para determinação da capacidade de suporte de sapatas corridas carregadas axialmente:

$$q_u = c \cdot N_c + \gamma \cdot D \cdot N_q + \frac{\gamma \cdot B}{2} \cdot N_\gamma \quad (5.4)$$

Sendo c = coesão do solo; γ = peso específico; D e B : profundidade e largura da fundação; e N_c , N_q e N_γ os coeficientes de capacidade de carga.

Posteriormente, esta fórmula foi generalizada para outras formas de fundação, em especial a circular, através da utilização de coeficientes de forma, em conjunto, com os coeficientes de capacidade de carga acima apresentados.

Esta maneira de abordagem do problema direcionou a atenção dos pesquisadores à determinação dos coeficientes propostos por Terzaghi. Segundo Frydman e Burd (1997) o procedimento consagrado para determinação destes coeficientes baseia-se no método das características, utilizado por Sokolovskii (1963), onde a hipótese de fluxo associado é utilizada para previsão da resposta em regime plástico do problema. Enquanto que este método permite obter soluções exatas para os coeficientes N_c e N_q , esta mesma afirmação não pode ser feita para determinação do coeficiente N_γ . Na solução de N_c e N_q , o peso próprio do solo não é considerado e a solução estaticamente admissível pode ser obtida através da definição de um envelope plástico dentro do qual as equações de equilíbrio são satisfeitas em todos os pontos. Caso este envelope plástico seja definido por retas ou, ainda, espirais logarítmicas, na condição de solos com ângulo de dilatação diferente de zero, estas funções são, também, cinematicamente admissíveis. Diferentemente do que ocorre no cálculo dos coeficientes N_c e N_q , para a obtenção de N_γ , o peso próprio do solo é obrigatoriamente considerado, e com isto não se consegue provar que as respostas obtidas são exatas ou apenas estaticamente admissíveis. Segundo Meyerhof (1955) a utilização deste método para determinação de N_γ , apesar de respeitar as equações de equilíbrio em regime plástico, não

satisfaz, necessariamente, a cinemática do problema, o que significa que a capacidade de suporte pode ser subestimada.

Além das dificuldades acima mencionadas, o método das características apresenta outro ponto desfavorável para sua utilização, já que utiliza a hipótese de fluxo associado na descrição do solo. Enquanto que esta hipótese é necessária para garantir a validade dos teoremas da análise limite, sabe-se por outro lado, que nos solos reais o ângulo de dilatação é substancialmente menor do que o ângulo de atrito. Tentativas de utilizar o método das características considerando materiais com fluxo não associado mostraram-se termodinamicamente inadmissíveis, conforme demonstrado por Drescher e Detournay (1993).

Assim, como pode ser observado pela discussão acima, o desafio maior concentra-se na determinação de N_γ . Neste sentido, o objetivo central deste tópico do trabalho é de demonstrar a capacidade de utilização do Método dos Elementos Finitos para sua obtenção, confrontando os resultados obtidos com as previsões teóricas indicadas em Bolton e Lau (1993); Frydman e Burd (1997), sendo que este último utiliza-se tanto o Método dos Elementos Finitos quanto o Método das Diferenças Finitas.

Mais do que simplesmente confrontar as respostas obtidas com os valores teóricos disponibilizados por outros autores, indicando sua precisão, o estudo apresentado, a seguir, busca avaliar os problemas de estabilidade, ou ainda, de convergência, encontrados neste tipo de análise.

5.2.1 Definição do problema

Com vistas à comparação entre os resultados obtidos com o ADINA e àqueles indicados nos artigos acima mencionados, a definição do problema utiliza os mesmos parâmetros e características utilizados por Frydman e Burd (1997). Para evitar repetições constantes desta citação, a partir daqui, Frydman e Burd serão referidos apenas como os autores.

Trata-se do estudo de determinação do coeficiente N_γ para uma sapata corrida rígida, de largura B , disposta na superfície de um solo com coesão

nula, submetida a um carregamento vertical, centrado. Admite-se que o solo seja um material elasto-plástico perfeito, que respeita o critério de plastificação de Mohr-Coulomb. Desta maneira, os parâmetros de entrada considerados são: $B = 0,5$ m, $G = 100$ MPa (ou $E = 240$ MPa), $\nu = 0,2$, $c = 0$ e $\gamma = 18$ kN/m³. Assim como recomendado pelos autores, os resultados do estudo serão apresentados em termos adimensionais, de forma que estes parâmetros de entrada tenham pouco significado para as conclusões do trabalho.

Serão obtidas soluções para valores do ângulo de atrito do solo (ϕ) variando entre 30 a 45°, e do ângulo de dilatação (ϑ) entre $10^\circ \leq \vartheta \leq \phi$. Estes casos serão estudados para duas condições extremas em relação à rugosidade da interface solo-sapata: totalmente lisa ou rugosa. Com estes elementos fica caracterizado o problema a ser analisado.

Nota-se, que o caso onde $\vartheta = 0^\circ$, não foi considerado em razões de dificuldades numéricas a serem discutidas mais adiante.

Para simular o comportamento de sapatas lisas na definição das condições de contorno do problema, nenhuma restrição é imposta ao deslocamento horizontal (lateral) dos nós em contato com a sapata. Por outro lado, na condição de sapata rugosa basta restringir o movimento horizontal destes nós, por exemplo, definindo deslocamento horizontal relativo igual a zero.

Como o problema trata de sapatas rígidas, a solução é obtida a partir de incrementos de deslocamento verticais nos nós da malha de elementos finitos em contato com a sapata.

A análise será realizada utilizando-se o Estado Plano de Deformação, e em razão da simetria do problema, apenas metade da sapata será considerada. Esta condição já impõe a primeira condição de contorno do problema - deslocamento horizontal nulo ao longo do eixo de simetria – sendo que ao longo da outra linha vertical do modelo restringe-se apenas o movimento horizontal enquanto que o fundo é sempre fixo.

Para garantir maior credibilidade em relação às respostas obtidas nesta investigação, conforme foi realizado pelos autores, um primeiro estágio da análise será conduzido para a definição da malha de elementos finitos a ser

utilizada. Para o caso particular de uma sapata lisa apoiada em areia com $\phi = \vartheta = 32^\circ$ uma série de cálculos são realizados, variando-se alguns dos parâmetros da malha e de controle da análise, permitindo, assim, avaliar a sensibilidade dos resultados a estas modificações. Apenas a título de curiosidade, os autores utilizaram o programa FLAC, para obter as respostas pelo Método das Diferenças Finitas, e o programa OXFEM, desenvolvido em Oxford, para o caso de elementos finitos.

Assim, para este primeiro estudo de sensibilidade, serão comparados apenas os resultados obtidos pelo ADINA em relação àqueles fornecidos pelo programa OXFEM. Esta decisão é válida, na medida em que, a preocupação inicial está voltada à definição das variáveis que interferem nos modelos que se utilizam o método dos deslocamentos. Na etapa seguinte desta análise, além das comparações entre os resultados do ADINA e do OXFEM, volta-se à atenção para as respostas obtidas pelos autores com o uso do programa FLAC.

5.2.2 Análise Preliminar da malha de Elementos Finitos

Buscando ao máximo as similaridades com as condições apresentadas pelos autores, três tipos diferentes de malhas de elementos finitos foram consideradas no ADINA, e estão indicadas na figura 5.10 a seguir.

Figura 5.10: Malhas de Elementos Finitos: (a) Malha 1; (b) Malha 2; (c) Malha 3

A malha 1 tem dimensões de 3,33x3,33 m e é composta por 405 elementos quadrados de 9 nós, com 7 elementos posicionados na face inferior da meia sapata. A malha 2 tem as mesmas dimensões da malha 1, mas é constituída por uma malha menos refinada com 192 elementos, com 4 elementos posicionados sob a metade da sapata. Por fim, a malha 3 tem dimensões de 5,0x5,0 m, é composta por 750 elementos retangulares de 9 nós, e além disto é mais refinada na face inferior da metade da sapata, apresentando um total de 10 elementos. Como consequência, neste caso a malha de elementos finitos na extremidade da sapata é mais refinada.

No artigo, por sua vez, foram utilizadas três tipos de malha para os testes com o FLAC e apenas dois tipos de malha nos testes com o programa OXFEM. As malhas utilizadas pelo FLAC apresentaram dimensões variando de 3,2x2,2 m (nas direções y e z, respectivamente) até 50,0x50,0 m. Uma malha de 40x20 elementos retangulares foi utilizada em todos os casos. Com isto o número de elementos presente na interface entre o solo e metade da sapata variou de três até 30 elementos.

Sobre as duas malhas utilizadas no programa OXFEM, a primeira delas, identificada aqui como malha 1A, apresenta as mesmas dimensões que a malha 1, aqui definida. Entretanto, ao invés de utilizar elementos retangulares com 9 nós, esta malha é constituída por 183 elementos triangulares de 6 nós, com apenas 3 elementos posicionados na face inferior da metade da sapata. A segunda malha, denominada 2A, tem as mesmas dimensões da malha 3, mas como a primeira, é constituída por elementos triangulares. Neste caso tem-se um total de 928, sendo 9 deles em contato com a face inferior de metade da sapata. A utilização de um tipo a mais de malha de elementos finitos no estudo feito no ADINA visou, sobretudo, assegurar a validade das afirmações realizadas.

De qualquer forma, a escolha do tamanho e refinamento da malha deve levar em consideração diferentes aspectos, entre eles o esforço computacional necessário para processamento do modelo. A fim de reduzir o tempo de análise é interessante modelar a menor área possível do problema, cuidando, por outro lado, que a região mobilizada no colapso esteja contida no modelo. Em relação ao refinamento da malha, atenção especial é necessária para a extremidade da sapata, visto que esta singularidade gera elevados gradientes de tensão, criando dificuldades numéricas para realização da análise.

Um total de seis análises foram realizadas no ADINA e a tabela 5.1, abaixo, traz um comparativo com os resultados obtidos pelos autores, através do OXFEM. Com isto, pode-se avaliar a sensibilidade das respostas em função dos parâmetros de controle da análise e do refinamento utilizado pela escolha da malha de elementos finitos. Observa-se na tabela abaixo, que além da indicação do número de passos, outra informação de controle da análise é fornecida: o incremento de deslocamento utilizado em cada estudo. Esta informação será incorporada no estudo a ser realizado, pois é desta maneira que os autores indicaram os resultados obtidos com o uso do FLAC.

	Processamento	Malha	Número de Passos	Incremento (m/passo)	Deslocamento final da sapata δ (m)	N_γ
OXFEM	1s1	1A	500	-	2×10^{-3}	37,8
	1s2	1A	1000	-	2×10^{-3}	22,3
	1s3	1A	5000	-	4×10^{-4}	14,16
	2s1	2A	3000	-	4×10^{-4}	15,56
ADINA	1L1	1	350	-	$3,8 \times 10^{-4}$	14,38
	1L2	1	500	$< 1 \times 10^{-5}$	$4,1 \times 10^{-4}$	14,68
	1L3	1	1000	$< 5 \times 10^{-6}$	$4,5 \times 10^{-4}$	15,32
	1L4	1	3000	$< 1 \times 10^{-6}$	3×10^{-4}	11,93
	2L1	2	1000	$< 5 \times 10^{-6}$	$4,4 \times 10^{-4}$	15,14
	3L1	3	1000	$< 5 \times 10^{-6}$	$5,3 \times 10^{-4}$	15,52

Tabela 5.1: Estudo Preliminar de sensibilidade (OXFEM x ADINA)

Antes de comentar os resultados da tabela 5.1, para complementar a sua compreensão, é importante observar as curvas tensão normal no contato (q_γ) x deslocamento (δ), figura 5.11, para um ponto no centro da meia sapata, e as curvas tensão normal (q_γ) ao longo da superfície de contato solo-sapata, figura 5.12. A partir da figura 5.12 pode-se determinar o valor médio de q_γ que será utilizado no cálculo de N_γ . Conforme mencionado anteriormente, as respostas do estudo serão sempre apresentadas em termos de parâmetros adimensionais.

Figura 5.11: Curvas Tensão normal – deslocamento para sapatas lisas $\phi = \vartheta = 32^\circ$. (a) ADINA; (b) OXFEM

Figura 5.12: Curvas Tensão normal ao longo da superfície de contato solo - sapata para sapatas lisas $\phi = \vartheta = 32^\circ$. (a) ADINA; (b) OXFEM

Comparando os valores obtidos para N_γ observa-se que existe boa concordância entre os resultados fornecidos pelo ADINA com os dois últimos testes realizados pelos autores (1s3 e 2s1). Para começar a entender o motivo dos resultados dos processamentos com o OXFEM apresentarem tanta discrepância, é necessário observar as curvas que trazem a tensão normal ao longo da superfície de contato solo- sapata, em especial a figura 5.12 (b). Apesar das curvas apresentarem uma forma um tanto quanto similar nota-se que existe um afastamento entre elas na direção vertical do gráfico. A expectativa que se tem é de que nas extremidades da sapata a tensão de contato seja zero. Entretanto, isto não é observado em especial nas curvas 1s1 e 1s2, onde se encontraram os maiores desvios no cálculo de N_γ . Em razão da singularidade existente na borda da sapata, os autores propõem uma correção, que consiste em transladar estas curvas no sentido vertical do gráfico, para garantir que na borda da sapata a tensão de contato seja nula. Como esta correção não foi feita para as curvas 1s1 e 1s2, explicam-se melhor as diferenças encontradas. De qualquer forma esta correção proposta é um tanto estranha, visto que as respostas obtidas em 1s1 e 1s2, embora discutíveis fisicamente, encontram-se em equilíbrio com o carregamento externo aplicado.

Para as análises aqui realizadas com o ADINA, a tensão de contato nas bordas da sapata é nula, e assim, nenhum ajuste se fez necessário.

Com relação à sensibilidade das respostas em função dos parâmetros de controle da análise e do refinamento da malha de elementos finitos, fica claro através da figura 5.11, que embora todos resultados convirjam para um valor de tensão bem definido, para o caso do OXFEM, este valor depende muito do número de passos utilizados na análise. No ADINA, esta sensibilidade é bem menor. A figura 5.13, abaixo, reforça esta constatação.

Figura 5.13: Variação de N_γ em função do número de passos da análise

Enquanto os resultados mostraram-se sensíveis ao número de passos utilizados na análise, o refinamento da malha apresentou uma importância menor, visto que os valores obtidos para N_γ , foram praticamente os mesmos nas análises 1L3, 2L1 e 3L1. Evidentemente, um refinamento mínimo é necessário junto à borda da sapata para reduzir o efeito da singularidade existente e garantir a convergência da solução. Esta mesma observação, quanto ao refinamento das malhas, foi também destacada pelos autores. Cabe, porém, ressaltar que o fato da malha de elementos finitos não influenciar o estudo de sapatas lisas, não elimina a necessidade de confirmar esta condição para o caso de sapatas com superfície de contato rugosa.

5.2.3 Cálculo de N_γ para sapatas com face inferior lisa

No artigo de Frydman e Burd (1997) o estudo de determinação de N_γ para o caso de sapatas lisas desenvolveu-se apenas com o uso do programa FLAC. Conforme já foi discutido, o objetivo deste estudo é de avaliar os valores de N_γ para as condições de $30^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$ e $10^\circ \leq \vartheta \leq \phi$ e de compará-los com os resultados obtidos pelos autores.

Pela constatação de que a escolha da malha de elementos finitos exerce pouca influência na resposta de sapatas lisas, os processamentos do FLAC utilizaram-se apenas da malha de 50x25m, enquanto que no ADINA foi adotada a malha tipo 2.

Na tabela 5.2, a seguir, aparece um resumo das análises realizadas. Vale ressaltar que os valores apresentados sofreram a correção anteriormente mencionada, quando a tensão na borda da sapata se apresentou diferente de zero.

$\phi(^{\circ})$	$\vartheta(^{\circ})$	Processamento FLAC	Incremento (m/ passo) _FLAC	N_γ FLAC	Processamento ADINA	Incremento (m/ passo) _ADINA	N_γ ADINA	Δ (%)
30	0	v1	$<1 \times 10^{-7}$	7,9	-	-	-	-
	0	v1a	$<1 \times 10^{-7}$	7,9	-	-	-	-
	10	v2	$<1 \times 10^{-7}$	8,2	30s10	$<5 \times 10^{-6}$	7,7	6,10
	20	v3	$<1 \times 10^{-7}$	8,7	30s20	$<1 \times 10^{-6}$	8,8	1,15
	30	v4	$<1 \times 10^{-7}$	8,7	30s30	$<5 \times 10^{-6}$	9	3,45
35	0	w1	$<1 \times 10^{-7}$	18,9	-	-	-	-
	0	w1a	$<1 \times 10^{-7}$	18,9	-	-	-	-
	10	w2	$<1 \times 10^{-7}$	19,1	35s10	$<5 \times 10^{-6}$	16,3	14,66
	20	w3	$<1 \times 10^{-7}$	20	35s20	$<1 \times 10^{-6}$	19,8	1,00
	35	w4	$<1 \times 10^{-7}$	20,7	35s35	$<1 \times 10^{-6}$	20,6	0,48
40	0	t1	$<1 \times 10^{-7}$	42	-	-	-	-
	10	t2	$<1 \times 10^{-7}$	49	40s10	$<5 \times 10^{-5}$	45,8	6,53
	25	t3	$<1 \times 10^{-7}$	53	40s20	$<5 \times 10^{-5}$	46,6	*
	40	t4	$<1 \times 10^{-7}$	54,2	40s40	$<5 \times 10^{-5}$	54,5	0,55
45	0	s1	$<5 \times 10^{-8}$	92	-	-	-	-
	0	s1a	$<5 \times 10^{-8}$	91	-	-	-	-
	15	s2	$<5 \times 10^{-8}$	135	45s10	$<1 \times 10^{-4}$	99	**
	20	-	-	-	45s20	$<1 \times 10^{-4}$	142,8	*
	45	s4	$<5 \times 10^{-8}$	153	45s45	$<5 \times 10^{-4}$	159,1	3,99

* Casos onde foi adotado o ângulo de dilatação $\vartheta = 20^\circ$;

** Casos onde foi adotado o ângulo de dilatação $\vartheta = 10^\circ$.

Tabela 5.2: Valores de N_γ para sapatas lisas

Com exceção dos casos 30s10, 35s10 e 40s10 os desvios encontrados entre as respostas fornecidas pelo ADINA e àquelas disponibilizadas pelo autores são muito pequenos, se considerarmos que para os objetivos práticos da engenharia, uma diferença inferior a 5% é bem razoável. Por outro lado o que chama atenção é que justamente nos casos onde a diferença entre o ângulo de atrito e o ângulo de dilatação do solo é maior (lei de fluxo não associado), ocorreram as maiores discrepâncias de resposta. Na realidade, este comportamento já era esperado. A consideração de fluxo não associado gera dificuldades numéricas quando da utilização do Método dos Elementos Finitos. Conforme já foi observado por outros autores, Griffiths (1982), De Borst e Vermeer (1984) e, também, por Frydman e Burd (1997), os problemas de estabilidade são crescentes conforme a diferença entre ϕ e ϑ aumenta. Por esta razão, no presente estudo limitou-se a analisar o intervalo $10^\circ \leq \vartheta \leq \phi$, deixando de lado a condição extrema de $\vartheta = 0^\circ$.

Esta instabilidade numérica pode ser percebida, quando se observa, por exemplo, as curvas tensão normal no contato solo- sapata x deslocamento, para os casos extremos de $\phi = \vartheta = 40^\circ$ e $\phi = 40^\circ$, com $\vartheta = 10^\circ$. (Figura 5.14)

Figura 5.14: Curvas Tensão normal – deslocamento para sapatas

Para compreender melhor quais são estas dificuldades numéricas e porque elas ocorrem, vale a pena olhar o que acontece na condição extrema de $\vartheta = 0^\circ$. Para os problemas axissimétricos ou, ainda, de estado plano de deformação, como o caso em estudo, existe uma restrição cinemática na direção X (ortogonal ao plano em estudo). Esta restrição cinemática é um fator limitante para o desenvolvimento das deformações, visto que, quando $\vartheta = 0^\circ$ tem-se caracterizada a condição de incompressibilidade plástica.

Desta maneira, esta é, sem dúvida, uma limitação do uso do Método dos Elementos Finitos para realização de análises limites.

Retornando a atenção para os resultados apresentados na tabela 5.2, observa-se que o coeficiente N_γ cresce bastante com o aumento do ângulo de atrito ϕ . A figura 5.15 mostra a variação de N_γ com ϕ , sendo que os resultados apresentados por Bolton e Lau (1993) também são indicados.

Figura 5.15: Variação de N_γ com ϕ

Pode-se observar na figura acima, que para valores do ângulo de atrito do solo (ϕ) inferiores a 35° , não se observam grandes diferenças entre os

valores de N_γ para as condições extremas de ϑ . Porém a diferença cresce com o aumento de ϕ .

Os valores fornecidos por Bolton e Lau (1993), apesar de terem considerado a hipótese de fluxo associado, apresentaram-se bastante próximos dos valores obtidos com o ADINA para a condição de $\vartheta = 10^\circ$.

5.2.4 Cálculo de N_γ para sapatas com face inferior rugosa

Seguindo a mesma metodologia utilizada no estudo das sapatas lisas, inicia-se aqui, um estudo similar, agora voltado para o caso das sapatas rugosas. Novamente, o objetivo central é de avaliar os valores de N_γ para as condições de $30^\circ \leq \phi \leq 45^\circ$ e $10^\circ \leq \vartheta \leq \phi$ e de compará-los com os resultados obtidos pelos autores.

Entretanto, conforme foi comentado anteriormente, o estudo de sensibilidade realizado para a condição de sapata lisa, não pode ser simplesmente extrapolado para a análise das sapatas rugosas. Assim, conforme sugerido pelos autores, serão utilizados dois tipos de malha de elementos finitos para cada uma das análises realizadas. Desta forma, as malhas 1 e 2 foram selecionadas.

Os detalhes de cada um dos processamentos e os resultados obtidos são apresentados, de forma resumida, na tabela 5.3. Para este estudo, em particular, conforme definido pelos autores, nenhuma correção foi feita nos valores de N_γ .

$\phi(^{\circ})$	$\vartheta(^{\circ})$	Processamento Malha FLAC	Incremento (m/ passo) _FLAC	N_{γ} FLAC	Processamento Malha ADINA	Incremento (m/ passo) _ADINA	N_{γ} ADINA	Δ (%)
30	0	v5 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	20,8	-	-	-	-
	0	v10 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	16,7	-	-	-	-
	10	v6 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	22,8	30r10_2	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 2	23,2	1,75
	20	v12 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	19,3	30r20_1	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 1	19,51	1,09
	30	v7 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	24	30r30_2	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 2	24,5	2,08
	30	v8 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	24,4	30r30_2	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 2	24,5	0,41
	30	v11 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	21,7	30r30_1	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 1	21,85	0,69
35	0	w5 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	44,2	-	-	-	-
	0	w10 - refinada	$<5 \times 10^{-8}$	35,6	-	-	-	-
	10	w6 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	50,4	35r10_2	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 2	44	12,70
	10	w11 - refinada	$<5 \times 10^{-8}$	40,7	35r10_1	$<5 \times 10^{-6}$ - malha 1	34,3	15,72
	20	w7 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	54,6	35r20_2	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 2	53,8	1,47
	35	w8 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	60	35r35_2	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 2	56,6	5,67
	35	w9 - refinada	$<5 \times 10^{-8}$	54,2	35r35_1	$<1 \times 10^{-5}$ - malha 1	51,5	4,98
40	0	t5 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	100	-	-	-	-
	0	t12 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	73	-	-	-	-
	10	t6 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	121	40r10_2	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 2	84	30,58
	10	t11 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	96	40r10_1	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 1	65	32,29
	25	t7 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	137	40r25_2	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 2	117	14,60
	25	t10 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	115	40r25_1	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 1	100	13,04
	40	t8 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	160	40r40_2	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 2	165,4	3,37
45	40	t9 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	147	40r40_1	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 1	146,96	0,03
	0	s5 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	195,5	-	-	-	-
	0	s17 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	144	-	-	-	-
	15	s6 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	320	45r15_2	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 2	193	39,69
	15	s11 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	262	45r15_1	$<5 \times 10^{-4}$ - malha 1	188	28,24
	45	s8 - simples	$<1 \times 10^{-7}$	461	45r45_2	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 2	451	2,17
	45	s16 - refinada	$<1 \times 10^{-7}$	422	45r45_1	$<5 \times 10^{-5}$ - malha 1	422,5	0,12

Tabela 5.3: Valores de N_{γ} para sapatas rugosas

Os resultados apresentados na tabela 5.3 mostram a clara dependência de N_{γ} em relação ao ângulo de atrito (ϕ) e ao ângulo de dilatação (ϑ) do solo. Se por este aspecto há similaridade com o estudo realizado para as sapatas com superfície lisa, por outro lado, nota-se, aqui, grande sensibilidade nas respostas em função de mudanças no refinamento da malha de elementos finitos. De um modo geral, a utilização da malha mais refinada, conduziu sempre a valores inferiores de N_{γ} , tanto para o estudo feito no FLAC, como também, para aquele feito no ADINA. Mais adiante, outros aspectos da análise serão discutidos, e a maior consistência da malha mais refinada poderá ser comprovada.

A figura 5.16 mostra a variação de N_{γ} com ϑ , para os diferentes valores de ϕ . Os resultados de Bolton e Lau (1993) também são indicados.

Figura 5.16: Variação de N_γ : (a) $\phi = 30^\circ$; (b) $\phi = 35^\circ$; (c) $\phi = 40^\circ$; e (d) $\phi = 45^\circ$

Outro aspecto importante presente na tabela 5.3 diz respeito às discrepâncias encontradas nos valores de N_γ . Para os casos onde a lei de fluxo associada foi respeitada, os desvios entre as análises foram mínimos. Entretanto, assim como ocorreu para o estudo das sapatas lisas, quanto maior a diferença entre ϕ e ϑ , tanto maior a discrepância das repostas do ADINA em relação àquelas obtidas pelos autores.

As mesmas dificuldades numéricas comentadas no item anterior podem ser utilizadas para justificar estes desvios. De todo modo, apesar dos desvios e das instabilidades verificadas no processo de solução, houve convergência das repostas.

Com relação aos valores fornecidos por Bolton e Lau (1993), percebe-se que em todos os casos estes valores são inferiores àqueles obtidos com o FLAC e com o ADINA, para o caso de fluxo associado. Neste sentido, poder-se-ia

concluir que o método das características fornece resultados conservadores para o coeficiente de capacidade de carga N_γ .

Resta ainda, discutir um pouco mais a influência que o refinamento da malha de elementos finitos exerce sobre a resposta do problema das sapatas com superfície rugosa. A expectativa que se tem para este caso, é de que a distribuição às tensões na superfície de contato solo-sapata apresente tensões normais nulas nas proximidades da borda da sapata e tensões de cisalhamento máximas nesta região. Para ilustrar esta questão, utiliza-se como exemplo o caso em que $\phi = \vartheta = 45^\circ$. A figura 5.17, a seguir, traz os resultados desta análise.

Figura 5.17: Tensões e ângulo de atrito mobilizado no contato solo-sapata
para $\phi = \vartheta = 45^\circ$

Nota-se, claramente na figura acima, que para as malhas mais refinadas, o pico das tensões de cisalhamento acontece mais próximo da borda da sapata e que as tensões normais, nesta região, convergem de modo mais consistente a zero. Desta forma, parece ser mais razoável preferir os resultados obtidos com as malhas mais refinadas, em detrimento daqueles determinados com as malhas mais simples.

Apesar do foco maior do artigo estar voltado para processamentos realizados com o Método das Diferenças Finitas, algumas análises foram feitas no programa OXFEM, e são, a seguir, apresentadas.

	Processamento	Nº passos	N_γ
OXFEM	1r1 -malha1A	5000	48,4
	1r2 -malha1A	10000	47,6
	2r1 -malha2A	2000	48,8
ADINA	35r35-2	-	56,6
	35r35-1	-	51,5
FLAC	w8-simples	-	60
	w9-refinada	-	54,2

Tabela 5.4: Valores de N_γ para sapatas rugosas ($\phi = \vartheta = 35^\circ$)

Além do cálculo de N_γ para o caso de fluxo associado com $\phi = \vartheta = 35^\circ$, as curvas referentes à distribuição de tensões e ao ângulo de atrito mobilizado no contato solo-sapata obtidas com o OXFEM foram indicadas pelos autores supra citados.

A constatação de que estas curvas sofriam grandes oscilações ao longo da superfície de contato solo-sapata, levou os autores a concluir que apesar de avaliar com razoável precisão o valor de N_γ , o programa OXFEM, assim como todos os demais programas que utilizam o Método dos Elementos Finitos, não possuiriam a mesma eficácia para representar a distribuição de tensões na interface solo-sapata para os casos de sapata com superfície rugosa.

Com os resultados mostrados acima aplicando-se o ADINA, pode-se notar que esta conclusão não é plenamente verdadeira. Além de ter possibilitado a previsão mais acurada dos valores de N_γ , os processamentos feitos com o ADINA conduziram a distribuições de tensões no contato solo-sapata bastante adequadas quando comparadas àquelas fornecidas pelos autores, e obtidas com o FLAC. Por outro lado, é preciso concordar com os autores quando comentam sobre as limitações do Método dos Elementos Finitos, para aplicações sob condições extremas de fluxo não associado, em especial com $\vartheta = 0^\circ$. De qualquer forma, apesar das instabilidades numéricas comentadas, a utilização do ADINA mostrou-se bastante adequada para este tipo de análise.

Para complementar o estudo numérico de fundações diretas apoiadas em solo homogêneo com comportamento elasto-plástico perfeito, pode-se analisar a influência que o ângulo de dilatação (ϑ) e o ângulo de atrito (ϕ) exercem no campo de deformações. A figura 5.18 traz uma fotografia comparativa das deformações plásticas verificadas no solo para $\phi = 40^\circ$, considerando-se três situações: $\vartheta = 10^\circ$; $\vartheta = 25^\circ$ e $\vartheta = 40^\circ$.

PLASTIC STRAIN
RST CALC
TIME 115.0

(a)

PLASTIC STRAIN
RST CALC
TIME 115.0

(b)

(c)

Figura 5.18: Campo de deformações plásticas para $\phi = 40^\circ$; (a) $\vartheta = 10^\circ$; (b) $\vartheta = 25^\circ$ e (c) $\vartheta = 40^\circ$

A figura acima indica que com o aumento no valor do ângulo de dilatação (ϑ) as deformações na borda da sapata também aumentam. Além disto, a extensão da zona plastificada também é maior.

Para verificar a influência do ângulo de atrito (ϕ) pode-se comparar a figura 5.18 (c) com o outro caso de fluxo associado, por exemplo, com $\phi = \vartheta = 45^\circ$.

A figura 5.19 traz a resposta desta análise.

Figura 5.19: Campo de deformações plásticas para $\phi = \vartheta = 45^\circ$

Da mesma maneira que o campo de deformações e a zona plastificada aumentam com o aumento do ângulo de dilatação (ϑ), este fenômeno, também, é observado com o aumento no valor do ângulo de atrito (ϕ).

Estas características, também, comentadas por Frydman e Burd (1997) e por Erickson e Drescher (2002), apenas reforçam a possibilidade de utilização do Método dos Elementos Finitos para resolução de problemas de Análise Limite.

5.3 Estudo numérico da execução de paredes-diafragma

A construção de paredes-diafragma na realização de obras viárias e de subsolos para as edificações tem sido bastante freqüente na ocupação e reorganização do espaço físico das grandes cidades. A limitação de espaço para realização das obras enterradas inviabiliza a solução de escavação em taludes, exigindo uma solução de contenção do solo que permaneça restrita à área de realização dos serviços. Se por um lado esta realidade difundiu a utilização de paredes-diafragma, tornando sua construção quase que uma atividade rotineira, o projeto deste sistema de contenção, por sua vez, consiste em um problema de interação solo-estrutura bastante complexo, que se afasta, e muito, do trivial.

Tradicionalmente, o estudo deste tipo de problema é conduzido com base nos conceitos da teoria de análise limite, que determina os valores máximos dos empuxos, ativo e passivo, atuantes nas laterais da parede-diafragma. A parede, por sua vez, é representada através de uma viga contínua disposta sobre apoios elásticos, que representam a rigidez das estroncas, das lajes e também do próprio solo. Tem-se, assim, caracterizado um modelo unidimensional, como indicado abaixo (figura 5.20).

Figura 5.20: Modelo unidimensional de viga sobre apoio elástico

Muitos destes modelos consideram o comportamento elasto-plástico do solo, a histerese plástica e o cálculo evolutivo. Diversos programas foram, assim, desenvolvidos e vasta é a sua utilização até os dias de hoje. Como exemplo, pode-se citar o programa DEEP, desenvolvido pela Promon Engenharia, no final da década de 70, e que foi bastante utilizado em projetos metrô-viários, em especial no projeto do Metrô de São Paulo. Maffei et al. (1977) traz as principais características e premissas utilizadas para a construção deste programa.

Embora adequados para determinação da ficha da parede-diafragma e do correspondente coeficiente de segurança, estes modelos não apresentam a mesma eficácia na previsão dos deslocamentos e da resposta da interação solo-estrutura. Segundo Vaziri (1996) para determinação dos deslocamentos e esforços solicitantes na parede e demais elementos estruturais, dos recalques de superfície e a distribuição de tensões nas faces interna e externa da parede, um modelo mais elaborado é necessário. Fourie e Potts (1989), através de análises numéricas, mostraram que para os casos em que o coeficiente de empuxo no repouso (K_0) é inferior a 0,5, os momentos fletores determinados pelos modelos de análise limite são superestimados, de forma que fatores de redução são propostos (Terzaghi (1954) apud Potts e Fourie (1984)). Já para o caso em que $K_0 > 1$, a situação se inverte.

Desta forma, apesar de serem ainda bastante utilizados, os modelos unidimensionais baseados na teoria de análise limite vem cedendo um

espaço cada vez maior para o emprego de modelos bidimensionais, desenvolvidos a partir da aplicação das teorias da Elasticidade e da Plasticidade. Nesta condição o solo é tratado como um meio contínuo, de comportamento elasto-plástico, e sua interação com a parede-diafragma é efetivamente considerada.

O comportamento geral de uma parede-diafragma é afetado por diversos fatores, tais como: a rigidez do solo, da parede, dos elementos de contenção (estroncas, lajes e tirantes), o coeficiente de empuxo (K_0) antes da escavação, o método e seqüência construtiva, entre outros.

No presente estudo, o Método dos Elementos Finitos será empregado para realização de um conjunto de análises, com o objetivo de investigar a influência do coeficiente de empuxo em repouso (K_0) na resposta do problema de paredes-diafragma. Na condução deste estudo recorre-se ao artigo de Powrie e Li (1991) que utiliza o modelo de Schofield (1980) para representar o comportamento constitutivo do solo.

5.3.1 Definição do problema

O artigo acima mencionado traz uma série de análises em Elementos Finitos, realizadas com o programa CRISP (Britto e Gunn (1987)), para observar a influência de diferentes fatores no comportamento de uma parede-diafragma com dois níveis de escoramento, sendo um provisório e o outro definitivo, executada em uma camada de argila sobreadensada. Sob esta camada de argila, com 40,0 metros de espessura encontra-se rocha pouco fraturada. A parede analisada tem espessura de 1,5 e comprimento de 18,0 metros, e é responsável pela contenção de 9,0 metros de solo, no estágio final de escavação. Desta forma, a seção transversal do problema em estudo pode ser apresentada na figura 5.21, abaixo:

Figura 5.21: Seção transversal do problema

Trata-se de um estudo que considera o processo evolutivo de escavação, instalação e remoção do escoramento, que no artigo de Powrie e Li (1991), ocorre conforme o seguinte processo de construção:

- (a) Escavação de 4,0 metros de solo, em relação ao nível original do terreno (40,4 metros), durante um período de 16 dias (estágio 1);
- (b) Instalação da estronca provisória, considerada infinitamente rígida, em 1 dia;
- (c) Escavação de mais 6,0 metros de solo, até a cota 30,4 metros, em um período de 28 dias (estágio 2);
- (d) Espera de 7 dias para dissipação do excesso de pressão neutra originado pela escavação (estágio 3a);
- (e) Construção da laje de fundo, com 1,0 metro de espessura, em 7 dias (estágio 3b);
- (f) Espera de 7 dias para dissipação do excesso de pressão neutra originado pela escavação (estágio 3c);
- (g) Remoção da estronca provisória (estágio 3d);

- (h) Longo período para completa dissipação do excesso de pressão neutra, modelando o comportamento de longo prazo da parede (estágio 4).

Este caráter evolutivo da análise implica em uma abordagem não-linear do problema, visto que a matriz de rigidez é continuamente modificada a cada estágio da construção. Quanto ao número de incrementos e a definição dos instantes de escavação e instalação/remoção do escoramento, procurou-se seguir o indicado nos passos de a) a h) acima. Assim, um total de 60 incrementos foi estabelecido. Esta escolha poderá ser melhor compreendida com a descrição das propriedades do solo.

5.3.2 Modelo constitutivo e caracterização do solo

As análises apresentadas em Powrie e Li (1991) utilizaram o modelo constitutivo para os solos proposto por Schofield (1980). Neste modelo o solo é considerado um material elasto-plástico cuja superfície de plastificação incorpora a superfície de plastificação do Cam-clay, no lado subcrítico, enquanto que no lado supercrítico a superfície original do Cam-clay foi substituída pelas superfícies de Hvorslev e uma outra que impede a ocorrência de tração no solo. Para o estudo desenvolvido neste tópico do trabalho, recorreu-se ao Cam-clay modificado, visto que, dentre os modelos constitutivos disponíveis no ADINA, é aquele que mais se aproxima do utilizado por Powrie e Li (1991).

Os principais parâmetros utilizados na caracterização do solo são apresentados na tabela 5.5:

Parâmetros do solo (Cam clay modificado)	
Declividade da reta virgem	$\lambda = 0,155$
Declividade das retas de descompressão e recompressão	$\kappa = 0,155$
Volume específico sobre a LEC para $p' = 1$	$\Gamma = 0,155$
Declividade da LEC no plano $q \times p'$	$M = 1,03$
Coeficiente de Poisson	$\nu' = 0,2$
Peso específico da água	$\gamma_w = 9,81 \text{ kN/m}^3$
Peso específico do solo	$\gamma_s = 22,0 \text{ kN/m}^3$
Permeabilidade vertical e horizontal	$k_v = k_h = 10^{-8} \text{ m/s}$

Tabela 5.5: Parâmetros do solo

Um comentário importante, em relação à permeabilidade do solo, está ligado à hipótese de que a permeabilidade não se altera durante toda a análise feita com o ADINA, independentemente do estado de tensões. No artigo de Powrie e Li (1991), definiu-se o valor da permeabilidade como sendo igual a 10^{-10} m/s. Porém, como existe uma superfície que impede a ocorrência de tração, os autores admitiram que nas regiões do solo afetadas por “fraturas” de tração, a permeabilidade seria aumentada em 10.000 vezes. Desta forma, no estudo feito com o ADINA adotou-se um valor intermediário entre a permeabilidade original e aquela definida para o solo “fraturado”. Com um valor maior de permeabilidade, a dissipação do excesso de pressões neutras ocorre mais rapidamente, e as respostas dos estágios 3 e 4 praticamente se confundem. Por esta razão não foi necessário estender a análise para um número de incrementos superior a 60, dado que, neste instante, o excesso de pressão neutra já se dissipou.

Conforme já foi comentado anteriormente, um dos objetivos desta análise é de verificar a influência do coeficiente de empuxo no repouso (K_0) nas respostas do problema de paredes-diafragma como elemento de contenção do solo. Avaliar a influência deste parâmetro é de suma importância para este tipo de análise, uma vez que a construção da parede-diafragma produz, inevitavelmente, alterações no estado inicial de tensões e deformações do solo. Por outro lado quantificar estas alterações não é tarefa das mais simples. Diversos autores têm se dedicado ao estudo deste assunto, dentre os quais pode-se citar Schäfer e Triantafyllidis (2004), NG et al (1999) e Moor (1994). No estudo feito com o ADINA a parede-diafragma é imaginada já construída, e para levar em conta os efeitos de sua instalação dois casos são analisados. Em cada um deles, diferentes valores de K_0 foram utilizados para determinação das tensões laterais no solo. A tabela 5.6, abaixo, indica os valores utilizados para K_0 em cada uma das análises, e os compara com os valores apresentados pelo solo antes da construção da parede.

prof. (m)	Pressão Neutra	σ_v'	RSA*	Antes da escavação	Caso 1		Caso 2	
				Ko	Ko _{c1}	σ_{hc1}'	Ko _{c2}	σ_{hc2}'
0	0	0	-	2,56	1	0,00	2	0,00
1	0	22,00	114,6	2,56	1	22,00	2	44,00
2	9,81	34,19	74,4	2,56	1	34,19	2	68,38
4	29,43	58,57	43,7	2,56	1	58,57	2	117,14
9	78,48	119,52	21,9	2,17	1	119,52	2	239,04
14	127,53	180,47	14,8	1,83	1	180,47	1,83	330,26
18	166,77	229,23	11,9	1,66	1	229,23	1,66	380,52
18,9	175,60	240,20	11,4	1,63	1,63	391,53	1,63	391,53
25	235,44	314,56	8,9	1,46	1,46	459,26	1,46	459,26
32	304,11	399,89	7,2	1,33	1,34	535,85	1,34	535,85
40,4	386,51	502,29	6	1,23	1,23	617,81	1,23	617,81

* RSA – Razão de sobreadensamento do solo

Tabela 5.6: Valores de Ko e das tensões presentes no solo

Observa-se na tabela acima que foram preservados os valores de Ko para profundidades superiores à cota de apoio da parede-diafragma, visto que abaixo desta profundidade os efeitos de construção da parede podem ser desprezados.

Com relação à história geológica deste terreno, Powrie e Li (1991) admitiram que após o processo de adensamento do solo, procedeu-se a remoção de uma sobrecarga efetiva 2500 kPa, o que explica os valores da razão de sobreadensamento indicados na tabela 5.6.

5.3.3 Definição da malha de elementos finitos

A escolha da malha de elementos finitos e a definição das condições de contorno do problema procuraram espelhar as prescrições indicadas no artigo já mencionado.

Imaginando a parede suficientemente longa, a condição de estado plano de deformação pode ser considerada. Além disto, em função da simetria do problema apenas metade da seção transversal, indicada na figura 5.21, é representada.

A figura 5.22 traz a malha selecionada para o presente estudo, destacando as condições de contorno em termos de deslocamentos e pressões neutras.

Figura 5.22: Malha de elementos finitos

A face inferior da malha de elementos finitos corresponde a cota de transição do solo argiloso para a rocha pouco fraturada. Em função disto definiu-se que os nós presentes nesta interface são indeslocáveis e, pela característica da rocha nesta região, a vazão é considerada nula. Por outro lado a fronteira vertical do modelo, disposta à direita da parede-diafragma, foi definida com uma distância tal que não interfira nas respostas em termos de tensão e deformação quando da realização da escavação.

O solo e a parede foram modelados com elementos retangulares de 9 nós e por toda análise o nível d'água externo à escavação foi mantido constante na profundidade de 1,0m. Internamente, o nível d'água foi sendo modificado conforme o avanço da escavação.

Para a parede-diafragma, suposta impermeável, e para a laje de concreto considerou-se material elástico linear com módulo de Elasticidade $E = 17.000 \text{ MPa}$, coeficiente de Poisson $\nu' = 0,15$ e peso específico $\gamma = 22,0 \text{ kN/m}^3$. No modelo utilizado pelo ADINA, tanto a estronca provisória, quanto a laje de fundo foram modeladas como elementos de treliça, permitindo,

assim, apenas transmissão de esforço axial da parede para estes elementos estruturais.

Finalmente, outra simplificação utilizada na modelagem feita com o ADINA diz respeito a modelagem da interface entre a parede e solo. Enquanto que nos estudos feitos com o CRISP, Powrie e Li (1991) utilizaram um elemento de interface com 0,1 mm de espessura e $G = 7,5 \text{ MN/m}^2$ para permitir o escorregamento entre a parede e solo, no estudo que se segue esta questão foi ignorada. A utilização de elementos de interface traz como benefício a possibilidade de considerar uma certa rugosidade entre a parede e o solo, e resultados deste tipo de abordagem podem ser encontrados em Day e Potts (1998) e Van Langen e Vermeer (1991).

Com isto encerra-se a descrição do modelo a ser analisado, podendo-se, então, passar à discussão dos dois casos já mencionados.

5.3.4 Resultados do Caso 1

Neste primeiro caso em estudo, além de comparar os resultados em termos de deslocamentos da parede, esforços na parede-diafragma e nos elementos de escoramento é, também, apresentada a distribuição de tensões laterais totais, efetivas e pressões neutras ao longo das faces interna e externa da parede. Com isto, enquanto os resultados em termos de deslocamentos e esforços servem para comparar os efeitos do coeficiente de empuxo no repouso (K_0), a distribuição de tensões ao longo da parede busca reforçar a aplicabilidade do Método dos Elementos Finitos para resolução deste tipo de problema.

A figura 5.23 traz o perfil da parede deformada para cada um dos estágios de escavação já definidos:

Figura 5.23: Deslocamentos da parede. (a) ADINA; (b) CRISP

Observando a figura acima, nota-se grande semelhança entre a forma da estrutura deformada e os valores de deslocamentos obtidos pelas análises realizadas com o ADINA e àquelas conduzidas por Powrie e Li (1991). No estágio 1 os deslocamentos da parede correspondem, praticamente, ao movimento de corpo rígido com o centro de rotação posicionado à aproximadamente 5,0m abaixo da cota de apoio da parede. Na seqüência da escavação a parede continua deslocando para o interior da região escavada, mas com a instalação do escoramento provisório, o topo da parede move-se na direção contrária, em direção ao solo contido, como resultado da rotação da parede em relação a ponto de instalação da estronca. Pode-se observar que este ponto de instalação da estronca aparece, na figura 5.23, um pouco abaixo da profundidade de 4,0m, visto que após o primeiro estágio de escavação o nó da parede correspondente ao ponto de instalação da estronca deslocou-se um pouco para baixo (movimento de rotação). Com a retirada da estronca provisória, o deslocamento do topo da parede cresce rapidamente. Para a análise feita com o ADINA, como a permeabilidade utilizada foi maior do que àquela definida no artigo, o efeito de longo prazo no deslocamento da parede foi antecipado. Mesmo que fosse desejado prosseguir a realização da análise, o acréscimo de deslocamentos seria muito pequeno.

Com relação aos momentos fletores atuantes na parede-diafragma, a figura 5.24 traz um resumo dos resultados:

Figura 5.24: Momentos Fletores na parede. (a) ADINA; (b) CRISP

Novamente, tanto pelo aspecto qualitativo quanto pelos valores obtidos, chegou-se à boa concordância com os resultados fornecidos no artigo. A forma dos diagramas de momentos fletores está em conformidade com o esperado para cada estágio de escavação, sendo que para o estágio 2, a presença da estronca provisória funciona como um apoio intermediário da parede – imaginada como viga contínua – explicando a inversão de sinal no diagrama de momentos fletores.

De qualquer forma, a pequena diferença encontrada nos deslocamentos e momentos fletores na parede entre os resultados do ADINA e do CRISP, deve ser compensada pelos esforços presentes na estronca e na laje de fundo. Assim, para a estronca provisória e a laje de fundo, representadas através de elementos de treliça, o esforço axial ao final de cada estágio de escavação é indicado na tabela 5.7, abaixo:

	Estronca Provisória (kN/m)			Laje de fundo (kN/m)	
	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 3	Estágio 4
ADINA	0	680	0	962	960
CRISP	0	610	0	580	580

Tabela 5.7: Esforço axial na estronca e na laje de fundo

Desta maneira, conforme foi mencionado acima, o fato dos deslocamentos e esforços finais serem inferiores na reposta fornecida pelo ADINA é compensado pelo esforço axial presente nos elementos de escoramento.

Finalmente, resta apresentar a distribuição das tensões laterais totais, efetivas e pressões neutras atuantes na parede.

Figura 5.25: Tensões laterais e pressões neutras. (a), (c) e (e) ADINA; (b), (d) e (f) CRISP

Para não haver confusão com os sinais das tensões laterais e pressões neutras na interpretação dos gráficos acima, a convenção utilizada foi de definir os valores positivos para as tensões de compressão atuantes na face externa da parede, e o sinal negativo para tensões de compressão internamente à escavação. Neste sentido as mudanças de sinal observadas na distribuição de pressões neutras, para o estágio 3 de escavação, simbolizam regiões de sucção, originadas pelo alívio das tensões após a escavação.

Tendo em vista as simplificações adotadas para a análise conduzida no ADINA, a qualidade das repostas obtidas é bastante satisfatória. Assim como foi comentado em relação à forma dos diagramas de momentos fletores, aqui também, a distribuição das tensões laterais e pressões neutras corresponde àquilo que se esperava.

Naturalmente, outras respostas poderiam ser pesquisadas nesta análise, tais como: os recalques de superfície, a trajetória de tensões em determinados pontos do solo, entre outras. De qualquer modo, acredita-se que o que foi apresentado até então é suficiente para comprovar a possibilidade de utilização do ADINA, como ferramenta computacional, para a resolução deste tipo de problema.

5.3.5 Resultados do Caso 2

Enquanto na apresentação dos resultados do caso 1 a preocupação esteve voltada para comparação entre as repostas fornecidas pelo ADINA e àquelas obtidas por Powrie e Li (1991), neste momento, em que se tem comprovada a capacidade de analisar este tipo de problema, a discussão do caso 2 está voltada à investigação da influência de K_0 nos deslocamentos, diagramas de esforços solicitantes, tensões laterais e pressões neutras sobre a parede. Neste sentido, as repostas do caso 2 são diretamente comparadas com àquelas fornecidas pelo ADINA para o caso 1.

Em termos dos deslocamento e momentos fletores atuantes na parede, a figura 5.26, abaixo, traz um comparativo entre os casos 1 e 2:

Figura 5.26: Deslocamentos e Momentos Fletores na parede – Casos 1 e 2

Já a mudança no esforço axial atuante na estronca provisória e na laje de fundo é indicada na tabela 5.8:

	Estronca Provisória (kN/m)			Laje de fundo (kN/m)
	Estágio 1	Estágio 2	Estágio 3	Estágio 3
Caso 1	0	680	0	962
Caso 2	0	1440	0	1920

Tabela 5.8: Variação do esforço na estronca para os casos 1 e 2

Os resultados apresentados na figura 5.27 e na tabela 5.8 indicam que o aumento no valor do coeficiente de empuxo no repouso K_0 traz as seguintes consequências:

- (a) Aumento da ordem de 45% nos deslocamentos do topo da parede, para o estágio final de escavação;
- (b) Aumento de 100% dos momentos fletores atuantes na parede nas profundidades correspondentes à cota de instalação da estronca provisória e da laje de fundo;
- (c) Aumento da ordem 100% no esforço axial da estronca provisória e da laje de fundo.

As constatações (b) e (c) não trazem qualquer tipo de surpresa em relação ao que era esperado. Como o valor do coeficiente de empuxo no repouso dobrou, é natural imaginar que os esforços solicitantes na parede e nos escoramentos cresçam proporcionalmente. O que não parece fazer muito sentido, à primeira vista, é o aumento de apenas 45% nas deformações da parede. Isto ocorre em função do aumento da rigidez do solo que para o modelo Cam-clay é dada por:

$$E' = 3 \cdot \frac{(1 - 2 \cdot v') \cdot v' \cdot p'}{\kappa} \quad (5.5)$$

Assim, mesmo com o aumento da tensão lateral efetiva no caso 2, a tensão média efetiva p' , também cresce, e com ela a rigidez do solo, tornando

compreensível o acréscimo verificado nos deslocamentos da parede. Se ao invés de utilizar o modelo Cam-clay, a opção fosse por um modelo elástico linear, os deslocamentos seriam significativamente maiores.

Por fim, apenas como complemento da exposição feita até aqui, na figura 5.27 são indicadas as distribuições das tensões laterais totais e efetivas e também das pressões neutras para este caso 2:

Figura 5.27: Tensões laterais e pressões neutras

Terminado este estudo da influência do coeficiente de empuxo em repouso (K_0), pode-se concluir que a avaliação deste parâmetro é de extrema relevância na determinação dos esforços atuantes na parede-diafragma. Isto implica em analisar os efeitos causados pela instalação da parede, em particular do alívio das tensões no solo. Se por um lado uma avaliação mais conservadora de K_0 , como indicada no caso 2, pode vir a ser antieconômica, por outro lado ser mais arrojado nesta avaliação, como no caso 1, pode acarretar em um dimensionamento contra a segurança da parede. Já na avaliação dos deslocamentos apesar da dependência no valor de K_0 , a diferença encontrada entre os casos 1 e 2 existe, porém não é crítica.

Capítulo 6

CONCLUSÃO

Na parte teórica, desenvolvida no início deste trabalho, procurou-se resgatar e conceituar as principais propriedades e características dos solos que deveriam ser contempladas na construção dos modelos constitutivos. Assim, os principais modelos constitutivos utilizados na Engenharia Geotécnica foram apresentados. Em especial destacou-se o modelo Cam-clay, pela simplicidade de obtenção de seus parâmetros e comprovada eficiência na representação dos solos.

É importante mencionar que os desenvolvimentos nesta área são constantes e que novos modelos vem sendo continuamente estudados e testados. Basta avaliar os progressos feitos na Teoria da Hipoplasticidade aplicada aos solos. Nader (1999) ilustra importantes aspectos que são satisfeitos na construção dos modelos constitutivos, tais como, por exemplo, o princípio da objetividade material.

De qualquer modo, buscou-se ressaltar que dependendo do tipo de análise que se pretende realizar, da disponibilidade ou não de ensaios, e do conhecimento que se tem do terreno em estudo, há sempre um modelo constitutivo que pode ser indicado como mais adequado para o caso estudado. O que torna tudo isto mais simples é que a disponibilidade de recursos computacionais, existentes hoje em dia, eliminou uma barreira que antes era praticamente intransponível. Assim, este trabalho procurou mostrar a possibilidade real de utilização destes recursos em associação com modelos mais representativos, nem por isto mais complexos, para resolução dos problemas de interesse prático para a Engenharia Geotécnica.

Na seqüência do trabalho, direcionou-se a atenção para o estudo das equações de Biot que permitem tratar de maneira acoplada a resposta em termos das deformações e da percolação de água nos vazios do solo. Em outras palavras, as equações de Biot permitem solucionar um problema tradicional da Mecânica dos Solos, denominado adensamento. Para os problemas práticos da Engenharia, de um modo geral, a condição de solo seco nem sempre pode ser considerada e, assim, o uso das equações de Biot é necessário. Trata-se assim, de um elemento complementar à discussão dos modelos constitutivos, que prestou grande contribuição à parte teórica do trabalho.

Na segunda parte do trabalho, particularmente no capítulo 5, três estudos de caso foram realizados, de modo a comprovar a eficiência do modelo de Mohr–Coulomb e, em especial, do Cam-clay em representar comportamentos do solo, que dificilmente poderiam ser avaliados por modelos constitutivos mais simples. Todos estes estudos foram conduzidos através do programa ADINA, com o objetivo de introduzir uma poderosa ferramenta computacional para resolução de problemas geotécnicos pelo Método dos Elementos Finitos.

O primeiro estudo concentrou-se na investigação do comportamento de um solo siltoso, remoldado, ensaiado e descrito por Nader (1993), submetido à ensaios triaxiais segundo diferentes trajetórias de tensão no plano $q \times p'$. Os resultados obtidos por Nader (1993) são comparados com aqueles fornecidos pelos modelos Mohr–Coulomb e Cam-clay modificado, quando este problema é resolvido através do ADINA.

Enquanto os resultados obtidos com o modelo Mohr–Coulomb, mostraram-se satisfatórios na avaliação da tensão desviadora que leva ao estado crítico, o mesmo não se pode dizer em termos da previsão das deformações. Trata-se de um modelo elasto-plástico perfeito que admite deformações, apenas em regime elástico. Uma vez atingida a superfície de plastificação a análise é interrompida, pois esta superfície corresponde à superfície de ruptura.

Já o modelo Cam-clay modificado mostrou-se mais adequado para representar o comportamento do solo segundo as diferentes trajetórias de tensão. O resultado da tensão desviadora correspondente ao estado crítico é muito semelhante àquele fornecido pelos ensaios. Com relação à deformabilidade, obteve-se boa concordância entre os resultados teóricos e os experimentais, em especial no trecho inicial das trajetória 1, 2 e 3, quando $q/p_o' \leq 1$. Por outro lado, nas trajetórias 4, 5 e 6, que levam o solo, de início ao regime elástico, as discrepâncias são maiores. Este comportamento é previsto na teoria do Cam-clay, segundo a qual, durante o regime elástico o solo apresenta baixa deformabilidade até que a primeira superfície de plastificação seja atingida. A partir daí, a deformabilidade vai aumentando continuamente em direção ao estado crítico.

A expansão exagerada obtida nas trajetórias 5 e 6 justifica a opção de alguns autores de substituir a superfície de plastificação do Cam-clay, no lado supercrítico pela superfície de Hvorslev, que conduz a previsões mais realistas das deformações volumétricas. De qualquer forma os resultados alcançados através do ADINA, com o Cam-clay modificado, indicaram expansão volumétrica inferior àquela obtida por Nader (1993) com o Cam-clay.

De qualquer forma, a eficiência do modelo Cam-clay modificado na determinação da tensão desviadora correspondente ao estado crítico não é a mesma para previsão das deformações reais observadas nos ensaios triaxiais.

No complemento deste primeiro estudo de caso, um avanço em relação ao trabalho de Nader (1993) foi conseguido. Para os ensaios drenados com ciclo de carregamento, Nader constatou que o uso do Cam-clay, com as modificações propostas por Housbly et al (1984), não conseguia representar o laço no trecho correspondente ao descarregamento–recarregamento do solo. No ADINA, o uso do Cam-clay modificado possibilitou contornar esta situação.

No estudo de caso seguinte, o interesse esteve voltado para a determinação teórica da capacidade de suporte de sapatas corridas, apoiadas em subsolo

homogêneo, submetidas a um carregamento vertical e centrado. Mais especificamente o modelo Mohr–Coulomb foi utilizado para determinação do coeficiente de capacidade de carga N_γ , introduzido por Terzaghi (1943).

Duas condições extremas de rugosidade foram definidas para face inferior da sapata: totalmente lisa ou rugosa. Diversas análises foram feitas, variando-se o ângulo de atrito e o ângulo de dilatação do solo e confrontando as previsões teóricas do ADINA com àquelas indicadas por Frydman e Burd (1997) e, também, com os resultados fornecidos por Bolton e Lau (1993).

Neste estudo observou-se que para valores crescentes do ângulo de atrito do solo (ϕ), maior é a dependência do coeficiente N_γ em relação ao ângulo de dilatação (ϑ). Particularmente, para valores de ϕ menores do que 35° não se observam grandes diferenças entre os valores de N_γ para as condições extremas de ϑ . Porém a diferença cresce com o aumento de ϕ .

Outro elemento importante a ser destacado diz respeito às dificuldades numéricas encontradas na utilização do Método dos Elementos Finitos no tratamento de problemas onde a lei fluxo do material é não-associada. Conforme observado por outros autores, Griffiths (1982), Borst e Vermeer (1984) e, também, por Frydman e Burd (1997), os problemas de estabilidade numérica são crescentes conforme a diferença entre ϕ e ϑ aumenta. Em especial para a condição extrema de $\vartheta = 0^\circ$. Para os problemas axissimétricos ou, ainda, de estado plano de deformação, como o caso em questão, a imposição de $\vartheta = 0^\circ$ caracteriza uma condição de incompressibilidade plástica, gerando assim uma restrição cinemática para o desenvolvimento das deformações. Esta é, sem dúvida, uma limitação do uso do Método dos Elementos Finitos para o estudo deste tipo de problema, e encontrar uma forma de superar esta dificuldade é um tema bastante interessante para desenvolvimentos futuros.

Outro aspecto discutido por Frydman e Burd (1997), particularmente para o caso de sapatas com superfície rugosa, refere-se à obtenção das curvas que trazem a distribuição de tensões e o ângulo de atrito mobilizado ao longo do contato solo-sapata. A constatação de que no programa OXFEM, estas

curvas sofriam grandes oscilações ao longo da superfície de contato solo-sapata, levou os autores a concluir que apesar de avaliar com razoável precisão o valor de N_y , o Método dos Elementos Finitos não era uma ferramenta adequada para representar a distribuição de tensões neste tipo de problema.

Neste sentido, o que se procurou mostrar através do ADINA é que esta conclusão não é plenamente verdadeira. Além de ter possibilitado a previsão mais acurada dos valores de N_y , em relação ao programa OXFEM, os processamentos feitos com o ADINA conduziram a distribuições de tensões no contato solo-sapata bem semelhantes às aquelas fornecidas pelos autores, através do programa FLAC (Diferenças Finitas). Assim, apesar das instabilidades numéricas comentadas para o caso em que $\vartheta = 0^\circ$, a utilização do ADINA mostrou-se bastante adequada para este tipo de análise. Aqui também, encontra-se espaço para estudos futuros, a fim de consolidar o uso do Método dos Elementos Finitos.

Para finalizar este trabalho, buscou-se estudar um problema mais abrangente, em que as vantagens da utilização de um modelo constitutivo mais completo fossem comprovadas numa situação onde o acoplamento entre deformações e a percolação de água no interior dos vazios do solo estivesse presente. Optou-se, assim, pelo estudo do problema evolutivo de escavação de valas onde a parede-diafragma funciona como elemento principal de contenção. O modelo Cam-clay modificado foi escolhido para realização de um conjunto de análises, com o objetivo de investigar a influência do coeficiente de empuxo em repouso (K_0) na resposta do problema. Os resultados, assim obtidos, foram confrontados com aqueles fornecidos no artigo de Powrie e Li (1991).

Pode-se concluir, que a avaliação deste parâmetro é de extrema relevância na determinação dos esforços atuantes na parede-diafragma. Isto ressalta a importância de analisar os efeitos causados pela instalação da parede-diafragma, antes de proceder o estudo da escavação no interior da vala. O programa ADINA mostrou-se plenamente capaz de reproduzir os diferentes estágios de escavação, instalação e remoção do escoramento, de modo que

uma adequada avaliação do coeficiente de empuxo em repouso, presente após a instalação da parede, pode trazer um ganho sensível de qualidade e economia nos projetos deste tipo de obra. Isto porque, a dificuldade hoje encontrada em convencer os contrutores da necessidade de realizar mais ensaios de laboratório, prejudica uma definição mais realista da reologia do solo, impondo assim ao engenheiro projetista condições limitadas e pouco precisas para o desenvolvimento dos projetos.

A utilização do modelo Cam-clay modificado permitiu que a rigidez do solo fosse representada de maneira adequada, de modo que, mesmo durante o regime elástico, a resposta em termos de deslocamentos mostrou-se mais próxima da realidade em relação às previsões que seriam obtidas caso um modelo elástico linear fosse utilizado.

Como sugestão para trabalhos futuros sobre este assunto poder-se-ia investigar a influência de outros parâmetros na resposta em termos de deslocamentos e esforços na parede-diafragma, tais como: a rigidez da parede-diafragma, a rigidez do solo, o tipo de ligação entre os elementos de escoramento e a parede. Nesta mesma linha de raciocínio a determinação mais realista do coeficiente de empuxo no repouso (K_0) constitui um importante desafio a ser conquistado.

Nos três estudos conduzidos neste trabalho cumpriu-se, também, o objetivo de introduzir uma importante ferramenta computacional para resolução pragmática de problemas relevantes da Engenharia Geotécnica.

Capítulo 7**BIBLIOGRAFIA**

- ATKINSON, John. (1993). An Introduction to The Mechanics of Soils and Foundations, Through Critical State Soil Mechanics. Mcgraw-Hill International, London.
- BIOT, M.A. (1941). General theory of three-dimensional consolidation. Jnl. Appl. Phys., Vol.12, pp 155-164.
- BOLTON, M. D. & LAU, C.K. (1993). Vertical bearing capacity factors for circular and strip footings on Mohr-Coulomb soil; Can. Geotech. J., Ottawa, Canada, Vol. 30, No.4, pp 1024-1033.
- BOOKER, J.R. & SMALL, J.C. (1975). An investigation of the stability of numerical solutions of Biot's equations of consolidation. Int. Jnl. Solids Structures, Vol.11, pp 907-917.
- BRITTO, A. M.; GUNN, M. J. (1987). Critical State Soil Mechanics via Finite Elements. E. Horwood: Halsted Press, Chichester, West Sussex; New York.
- CALLADINE, V.R. (1963). Correspondence. Geotechnique, Vol.13, pp 250-255.
- CHEN, W. F., Baladi, G. Y. (1985). Soil plasticity: theory and implementation. Elsevier, Amsterdam; New York.
- CHEN, W.F. (1982). Plasticity in reinforced concrete; New York: Mc-Graw Hill.
- DAY, R.A. & POTTS, D.M. (1998). The effect of interface properties on retaining wall behaviour; Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech., Vol.22, pp 1021-1033.
- DE BORST, R. & VERMEER, P.A. (1984). Possibilities and limitations of

finite elements for limit analysis; *Geotechnique*, Vol. 34, No.2, pp 199-210.

- DE MOOR, E.K. (1994). An analysis of bored pile/diaphragm wall installation effects; *Geotechnique*, Vol.44, No. 2, pp 341-347.
- DRESCHER, A. & DETOURNAY, E. (1993). Limit load in translational failure mechanisms for associative and non-associative materials; *Geotechnique*, Vol.43, No.3, pp 443-456.
- DRUCKER, D.C. & PRAGER, W. (1952). Soil mechanics and plastic analysis of limit design; *Q. Appl. Math.*, Vol.10, pp 157-164.
- DRUCKER, D.C. (1954) A definition of stable inelastic material, *J. Applied Mechanics*, Trans. ASME 26, 101-106.
- DRUCKER, D.C., GIBSON, R.E. & HENKEL, D.J. (1957). Soil mechanics and work hardening theories of plasticity; *Trans. ASCE*, Vol.122, pp 338-346.
- DUNCAN, J.M. & CHANG, Y.C. (1970). Non-linear analyses of stress and strain in soils, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 96, No. SM5, pp 1629-1653.
- ERICKSON, H. L. & DRESCHER, A. (2002). Bearing Capacity of Circular Footings; *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.128, No.1, pp 38-43.
- FOURIE, A.B. & POTTS, D.M. (1989). Comparison of finite element and limiting equilibrium analyses for an embedded cantilever wall; *Geotechnique*, Vol. 39, No. 2, pp 175-188.
- FRYDMAN, S. & BURD, H.J. (1997). Numerical Studies of Bearing-Capacity Factor N_γ ; *Journal of Geotechnical and Geoenvironmental Engineering*, Vol.123, No.1, pp 20-29.
- GRIFFITHS, D.V. (1982). Computation of bearing capacity factors using finite elements; *Geotechnique*, London, England, Vol. 32, No.3, pp 195-202.
- HOULSBY, G.T. (1985). The use of a variable shear modulus in elastic-plastic models for clays; *Comput. Geotechn.*, Vol.1, pp 3-13.
- IMPERIAL COLLEGE. (1997). Numerical Analysis in Geotechnical Engineering. Short Course Notes, London.

- JARDINE, R.J., POTTS, D.M., FOURIE, A.B. & BURLAND, J.B. (1986). Studies of the influence of non-linear stress-strain characteristics in soil-structure interaction; *Geotechnique*, Vol. 36, pp 377-396.
- KONDNER, R.L. (1963). Hyperbolic stress-strain response: cohesive soils, *Proc. Am. Soc. Civ. Engrs.*, 82, No. SM1, pp 115-143.
- LADE, P.V. & DUNCAN, J.M. (1975). Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil; *Jnl. Geotechn. Eng. Div., ASCE*, Vol.101, pp 1037-1053.
- LADE, P.V. (1977). Elasto-plastic stress-strain theory for cohesionless soil with curved yield surfaces; *Int. Jnl. Soilds Structures*, Vol.13, pp 1019-1035.
- MAFFEI, C., ESQUIVEL, R. & OLIVEIRA, R. (1997). A model for calculating earth-retaining structures; *International Symposium on soil structure interaction*, Roorkee, India.
- MATSUOKA, H. & NAKAI, T. (1974). Stress-deformation and strength characteristics of soil under three different principal stresses; *Proc. JSCE*, Vol. 232, pp 59-70.
- MEYERHOF, G.G. (1955). Influence of roughness of base and ground-water conditions on the ultimate bearing capacity of foundations; *Geotechnique*, London, England, 5, pp 227-242.
- NADER, Jose Jorge. (1993). Modelos elasto-plasticos para solos : o cam-clay e sua aplicacao a diferentes trajetorias de tensão. *Dissertação (Mestrado)*, São Paulo.
- NADER, Jose Jorge. (1999). Hipoplasticidade e elastoplasticidade para solos. *Tese (Doutorado)*, São Paulo.
- NAYLOR, D.J., PANDE, G.N., SIMPSON, B. & TABB, R. (1981). *Finite elements in geotechnical engineering*, Pineridge Press, Swansea, U.K..
- NG, C.W.W., RIGBY, D.B., LEI, G.H. & NG, W.L. (1999). Observed performance of a short diaphragm wall panel; *Geotechnique*, Vol.49, No.5, pp 681-694.
- POTTS, D. M. & FOURIE, A. B. (1984). The behaviour of a propped retaining wall: results of a numerical experiment; *Geotechnique*, Vol.34,

No. 3, pp 383-404.

- POTTS, D.M. & GENS, A. (1984). The effect of the plastic potential in boundary value problems involving plane strain deformation; *Int. Jnl. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.8, pp 259-286.
- POWRIE, W. & LI, E.S.F. (1991). Finite element analyses of an in situ wall propped at formation level; *Geotechnique*, Vol.41, No. 4, pp 499-514.
- PRAGER, W. (1949). Recent developments in the mathematical theory of plasticity; *J. Appl. Physics*, vol. 20, n.3, pp 235-241.
- ROSCOE, K.H. & BURLAND, J.B. (1968). On the generalized stress-strain behaviour of 'wet' clay; *Engineering plasticity*, Cambridge Univ. Press, pp 535-609.
- ROSCOE, K.H. & SCHOFIELD, A.N. (1963). Mechanical behaviour of an idealised 'wet' clay; *Proc. 2nd Eur. Conf. SMFE*, Wiesbaden, Vol. 1, pp 47-54.
- ROSCOE, K.H., SCHOFIELD, A.N., & WROTH, C.P. (1958). On the yielding of soils; *Geotechnique*, Vol.8, pp 22-52.
- SANDLER, I.S. & RUBIN, D. (1979). An algorithm and a modular subroutine for the cap model; *Int. Jnl. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.3, pp 177-186.
- SCHÄFER, R. & TRIANTAFYLLIDIS, Th. (2004). Modelling of earth and water pressure development during diaphragm wall construction in soft clay; *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.28, pp 1305-1326.
- SCHOFIELD, A.N. & WROTH, C.P. (1968). *Critical state soil mechanics*; Mc-Graw – Hill, London.
- SCHOFIELD, A.N. (1980). *Cambridge geotechnical centrifuge operations*; *Geotechnique*, Vol.20, No. 2, pp 129-170.
- SEED, H. B., DUNCAN, J.M. & IDRIS, I.M. (1975). Criteria and methods for static and dynamic analysis of earth dams; *Criteria and Assumptions for Numerical Analysis of Dams*, pp 564-588.
- SOKOLOVSKII, V.V. (1963). *Statics of granular media*. Pergamon Press, London, England.
- TERZAGHI, K. (1943). *Theoretical soil mechanics*, Wiley, New York.

- VAN EEKELEN, H.A.M. (1980). Isotropic yield surfaces in three dimensions for use in soil mechanics; *Int. Jnl. Num. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.4, pp 89-101.
- VAN LANGEN, H. & VERMEER, P.A. (1991). Interface elements for singular plasticity points; *Int. J. Numer. Anal. Meth. Geomech.*, Vol.15, pp 301-315.
- VAZIRI, H.H. (1996). Numerical study of parameters influencing the response of flexible retaining walls; *Can. Geotech. J.*, Vol.33, pp 290-308.
- WHITTLE, A. J. (1993). Evaluation of a constitutive model for overconsolidated clays; *Geotechnique*, Vol.43, No.2.
- WHITTLE, A.J. (1991). MIT-E3: A constitutive model for overconsolidated clays; *Computer Methods and Advances in Geomechanics*, Balkema, Rotterdam.
- WOOD, D.M. (1990). *Soil Behaviour and Critical State Soil Mechanics*. Cambridge, University Press.
- WU, Tien Hsing (1982). *Soil Mechanics*. 2nd Edition. Published by Allyn and Bacon, Inc., 1976 Copyright, 1981 and reprinted by the author.
- YOUNG, Raimond N. .WARKENTIN, Benno P. (1975). *Soil Properties and Behaviour - Developments in Geotechnical Engineering*. Elsevier Scientific Publishing Company, Amsterdam.
- ZIENKIEWICZ, O.C. & NAYLOR, D.J. (1973). Finite element studies of soils and porous media; *Lect. Finite Elements in Continuum Mechanics* (Ed. J.T. Oden & E.R. de Arantes), UAH Press, pp 459-493.
- ZIENKIEWICZ, O.C., VALLIAPAN, S. & KING, I.P (1968). Stress analysis of rock as a 'no-tension' material; *Geotechnique*, Vol.18, pp 56-66.