NÁDIA SUEMI NOBRE OTA

O ELEMENTO FINITO T6-3I NA ANÁLISE DE PLACAS E DINÂMICA DE
CASCAS

São Paulo
2016

NÁDIA SUEMI NOBRE OTA

O ELEMENTO FINITO T6-3I NA ANÁLISE DE PLACAS E DINÂMICA DE
CASCAS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de mestre em Ciências

São Paulo
2016

NÁDIA SUEMI NOBRE OTA

O ELEMENTO FINITO T6-3I NA ANÁLISE DE PLACAS E DINÂMICA DE CASCAS

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de mestre em Ciências

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo
2016

Catálogo-na-publicação

Ota, Nádia Suemi Nobre

O elemento finito T6-3i na análise de placas e dinâmica de cascas / Ota, N S N --São Paulo, 2016.

83 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Cascas 2. Método dos elementos finitos 3. Tensões 4. Análise dinâmica não linear I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t.

Aos meus pais,
Inês e André

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Paulo de Mattos Pimenta pela acolhida, dedicação e competente orientação.

Aos Professores Alfredo Gay Neto e Eduardo Campello pela confiança e sugestões sobre o trabalho.

Aos amigos da pós-graduação: Jorge Costa, Fernando Gonçalves, Eduardo Simões, Paulo Nigro e Yuri Teixeira, por toda ajuda que me deram.

Aos antigos amigos: Antonio, Roger, Marcela, Bruno, André, Thaís, Bruna, Vanessa e Carol, pela amizade eterna.

A todos os amigos que me acompanharam, me ajudaram e me apoiaram.

Aos meus pais, Inês e André, meus irmãos, Laura, Iuri e Lara, e a Dana, Bila e Hamtaro, por todo o carinho.

À CAPES, pelo suporte financeiro.

RESUMO

O método dos elementos finitos é o método numérico mais difundido na análise de estruturas. Ao longo das últimas décadas foram formulados inúmeros elementos finitos para análise de cascas e placas. As formulações de elementos finitos lidam bem com o campo de deslocamentos, mas geralmente faltam testes que possam validar os resultados obtidos para o campo das tensões. Este trabalho analisa o elemento finito T6-3i, um elemento finito triangular de seis nós proposto dentro de uma formulação geometricamente exata, em relação aos seus resultados de tensões, comparando-os com as teorias analíticas de placas, resultados de tabelas para o cálculo de momentos em placas retangulares e do ANSYS[®], um software comercial para análise estrutural, mostrando que o T6-3i pode apresentar resultados insatisfatórios. Na segunda parte deste trabalho, as potencialidades do T6-3i são expandidas, sendo proposta uma formulação dinâmica para análise não linear de cascas. Utiliza-se um modelo Lagrangiano atualizado e a forma fraca é obtida do Teorema dos Trabalhos Virtuais. São feitas simulações numéricas da deformação de domos finos que apresentam vários snap-throughs e snap-backs, incluindo domos com vincos curvos, mostrando a robustez, simplicidade e versatilidade do elemento na sua formulação e na geração das malhas não estruturadas necessárias para as simulações.

Palavras-chave: Cascas. Método dos elementos finitos. Tensões. Análise dinâmica não linear.

ABSTRACT

The Finite Element Method (FEM) is the numerical method most commonly used in structural analysis. A number of shell and plate finite elements has been suggested in the last decades. Finite element formulations deal well with the displacements field, but they usually lack tests that can validate the results obtained for the stress field. This work analyzes the finite element T6-3i, a six-nodes triangular finite element derived from a geometrically exact theory, regarding its stress results, comparing them with analytic plate theories, results from tables of moments in rectangular plates and from ANSYS[®], a commercial software for structural analysis, showing that T6-3i can present unsatisfactory results. In the second part of this work, the T6-3i potentialities are expanded as a dynamic formulation for nonlinear shell analysis is proposed. An updated Lagrangian framework has been used and the weak form is obtained from the Principle of Virtual Work. Several numerical examples of folding a thin dome, which present various snap-throughs and snap-backs are presented, including creased shells, showing the robustness, simplicity and versatility of the element formulation and in generation of the unstructured curved meshes indispensable for the simulations.

Keywords: Shells. Finite element method. Stress. Nonlinear dynamic analysis.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1	Cinemática da casca e suas grandezas fundamentais (CAMPELLO, 2005)	20
Figura 2	Elemento finito T6-3i (CAMPELLO, 2005)	30
Figura 3	Vinculações e carregamentos - placas circulares [E: engastada; A: simplesmente apoiada; D: carregamento distribuído; C: carregamento concentrado]	43
Figura 4	Vinculações e carregamentos - placas retangulares [E: engastada; A: simplesmente apoiada; D: carregamento distribuído; C: carregamento concentrado]	44
Figura 5	Discretizações - placas circulares	44
Figura 6	Discretizações - placas retangulares	44
Figura 7	Esforços	45
Figura 8	Discretizações - ANSYS®	46
Figura 9	Elemento finito shell281 (ANSYS, 2009)	46
Figura 10	Gráficos ($y = 0$) - M_x e M_y - placas circulares com carregamento distribuído	47
Figura 11	Gráficos ($y = 0$) - M_x e M_y - placas circulares com carregamento concentrado	48
Figura 12	M_x e M_y ($y = 0$) - Placa retangular simplesmente apoiada	49
Figura 13	M_x ($y = 0$) e M_y ($x = 0$) - placa retangular engastada com carregamento distribuído	49
Figura 14	M_x ($y = 0$) e M_y ($x = 0$) - placa retangular engastada com carregamento concentrado	50
Figura 15	Gráficos ($x = y$) - M_{xy} - placas circulares com carregamento distribuído	51
Figura 16	Gráficos ($x = y$) - M_{xy} - placas circulares com carregamento concentrado	51
Figura 17	M_{xy} ($x = 2y$) - placa retangular simplesmente apoiada	52
Figura 18	M_{xy} ($x = 2y$) - placa retangular engastada	53
Figura 19	Gráficos ($y = 0$) - Q_x - placas circulares com carregamento distribuído	54
Figura 20	Gráficos ($y = 0$) - Q_x - placas circulares com carregamento concentrado	54

Figura 21	$Q_x (y = 0)$ e $Q_y (x = 0)$ - placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído	55
Figura 22	$Q_x (y = 0)$ e $Q_y (x = 0)$ - placa retangular simplesmente apoiada com carregamento concentrado	56
Figura 23	Gráficos - Q_x e Q_y - placa retangular engastada com carregamento distribuído	56
Figura 24	Gráficos - Q_x e Q_y - placa retangular engastada com carregamento concentrado	57
Figura 25	Modelo atualizado de casca (adaptada de (MOREIRA, 2009)) . .	59
Figura 26	Domo engastado - gráfico	67
Figura 27	Variação do deslocamento prescrito com o tempo	68
Figura 28	Domo engastado - sequência das deformações	69
Figura 29	Domo engastado com vinco curvo com $\phi = 0.6$ - gráfico	70
Figura 30	Domo engastado com vinco curvo com $\phi = 0.6$ - sequência das deformações	71
Figura 31	Domo virando do avesso - sequência das deformações	72
Figura 32	Dome virando do avesso - gráfico	72
Figura 33	Deformações do domo com malha estruturada	73

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
1.1 ESTADO DA ARTE	13
1.2 OBJETIVOS	16
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	17
1.4 NOTAÇÃO UTILIZADA	17
2 FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE EXATA DE CASCA E O T6-3I	18
2.1 INTRODUÇÃO	18
2.2 PARAMETRIZAÇÃO DAS ROTAÇÕES	18
2.3 CINEMÁTICA	19
2.4 ESTÁTICA	24
2.5 EQUILÍBRIO	27
2.6 IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS - O T6-3I	29
3 CÁLCULO DE PLACAS	33
3.1 INTRODUÇÃO	33
3.2 HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS	34
3.3 FORMULAÇÃO DA TEORIA DE PLACAS FINAS	38
3.3.1 Placas circulares	39
3.3.2 Placas retangulares	41
3.4 TESTES NUMÉRICOS COM O T6-3I	43
3.4.1 Esforços de flexão	47
3.4.2 Esforços de torção	50
3.4.3 Esforços cortantes	53
4 DINÂMICA DE CASCAS	58
4.1 INTRODUÇÃO	58
4.2 CINEMÁTICA	58
4.3 DEFORMAÇÕES	60
4.4 POTÊNCIA DOS ESFORÇOS INTERNOS E EXTERNOS	62
4.5 EFEITOS INERCIAIS	63
4.6 FORMA FRACA E DISCRETIZAÇÃO	64
4.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS	67
4.7.1 Domo engastado	67
4.7.2 Domo engastado com vinco curvo com $\phi = 0.6$	70

4.7.3	Domo virando do avesso	71
4.7.4	Observação	72
5	CONCLUSÕES	74
	Referências	76

1 INTRODUÇÃO

Uma casca é um corpo 3D limitado por duas superfícies curvas, cuja distância entre elas, sua espessura, é pequena comparada com as outras dimensões. Placas compõem um subconjunto das cascas, que se caracterizam por apresentarem superfícies planas em sua configuração indeformada, trabalhando principalmente à flexão.

Muitos são os exemplos de estruturas naturais ou construídas pelo homem que podem ser modeladas como estruturas de cascas: cascas de ovos, crânios, olhos, sinos, tubos e encanamentos, latas e garrafas, tigelas, funis, cones de alto-falantes, bulbo de lâmpadas, tendas, pneus, taças de vinho, domos e abóbadas, telhados, tanques e silos, estruturas de aviões, submarinos, barcos, foguetes, mísseis, conchas e carapaças, folhas e pétalas, bolas, balões, bexigas, capas, foles, lentes de contato, canudos, tampas de bueiros, estruturas de contenção, paraquedas, guarda-chuvas, frigideiras, painéis, etc.

A grande presença de estruturas de cascas na natureza e construções humanas se deve a suas várias vantagens: grande eficiência em suportar carregamentos externos ao mesmo tempo que servem de abrigo para componentes internos, boa relação resistência/peso da estrutura, devido à distribuição favorável do material e bom aspecto estético. Cascas têm uma alta eficiência estrutural devido a sua curvatura, já que trabalha simultaneamente à flexão e ao alongamento para suportar as deformações, fazendo-as energeticamente custosas para se deformarem.

As teorias de cascas lineares oferecem resultados adequados para as tensões e deslocamentos de placas que apresentam pequenas deformações. As equações diferenciais governantes dessas teorias se baseiam na lei de Hooke e na omissão das rotações nas expressões das deformações e equilíbrio. Quando a hipótese de pequenos deslocamentos é abandonada, resultam as teorias geometricamente não lineares para a análise de grandes deslocamentos e rotações.

As soluções analíticas de cascas são muito limitadas a geometrias, condições de contorno e carregamentos simples, sendo essencial a utilização de métodos numéricos na resolução dessas estruturas.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) oferece grande flexibilidade para resolver problemas complexos com geometrias reais, fácil implementação numérica e grande amadurecimento, sendo amplamente conhecidas suas potencialidades e limitações, por isso é o método numérico mais utilizado atualmente na engenharia. A crescente utilização do MEF, associado ao grande avanço tecnológico dos equipamentos de computação, permitiu que se impulsionassem estudos do comportamento mais real

das estruturas, analisando-as no espaço 3D e considerando a não linearidade física e geométrica.

1.1 ESTADO DA ARTE

Os primeiros estudos de placas se deram no campo da análise de vibrações. Um dos primeiros registros de uma análise matemática de problemas de placas é atribuído a Euler (EULER, 1766), que em 1766 analisou matematicamente problemas de placas em vibração livre. Em 1802, Ernst Chladni (CHLADNI, 1802) publicou seus experimentos realizados em placas recobertas com areia que ao vibrarem formavam padrões regulares. Esses padrões geométricos variavam com as diferentes frequências de vibração da placa e resultavam do acúmulo de areia nas linhas nodais onde não havia deslocamento vertical da placa durante a vibração. Por esses estudos, Chladni é considerado o fundador da acústica. Em 1789, Jacob II Bernoulli (BERNOULLI, 1789) publicou um ensaio em que tentava explicar os resultados de Chladni se baseando na teoria de flexão de vigas de Bernoulli-Euler. Bernoulli considerou a placa como uma malha de faixas perpendiculares, cada faixa funcionando como uma viga. Sophie Germain também tentou explicar os resultados de Chladni, submetendo em 1811, 1813 e 1816 três trabalhos explicando o fenômeno para um concurso da Academia Francesa de Ciências. Recebeu o prêmio com seu trabalho de 1816, "*Mémoire sur les vibrations des lames élastiques*", o qual publicou mais tarde em 1821 e 1826 (GERMAIN, 1821), (GERMAIN, 1826). Lagrange, que era um dos juízes do concurso, corrigiu os erros do trabalho de Germain de 1811 em um artigo que só foi publicado em 1828 (LAGRANGE, 1828).

Em 1823, Navier (NAVIER, 1823) determinou as soluções exatas para a flexão de placas retangulares simplesmente apoiadas utilizando séries trigonométricas duplas que haviam sido apresentadas por Fourier nessa época, transformando a equação diferencial da placa em expressões algébricas.

Cauchy (1828) (CAUCHY, 1828) e Poisson (1829) (POISSON, 1829) propuseram um método utilizando séries de potência para a resolução de flexão de placas. Os deslocamentos e tensões eram expandidos em séries cuja variável era a distância z à superfície média de um dado ponto da placa. Os resultados obtidos dependem do número de termos usados nessas séries, de tal forma que a solução tende ao valor exato quando a quantidade de termos tende a infinito. Porém, devido a problemas de convergência das séries e dificuldades de impor as condições de contorno, esse método acabou sendo pouco utilizado.

Em 1850, Kirchhoff (KIRCHHOFF, 1850) publicou um trabalho no qual definia algumas hipóteses fundamentais com as quais simplificou o funcional de energia da teoria de elasticidade 3D para o caso de placas fletidas. Kirchhoff obteve uma equação diferencial de quarta ordem, sendo o deslocamento uma função de duas coordenadas no plano médio da placa e a rigidez à flexão foi definida em termos do módulo de elasticidade e do coeficiente de Poisson. Devido às hipóteses consideradas, essa teoria não leva em conta o efeito da deformação por cortante, sendo válida para placas finas nas quais essa deformação pode ser desprezada. Assim considerando o caso de flexão de placas finas para pequenos deslocamentos, a teoria de Kirchhoff apresenta boa precisão de resultados e é amplamente utilizada até os dias de hoje.

Em 1899, Levy (LEVY, 1899) resolveu problemas de flexão de placas retangulares com dois lados opostos simplesmente apoiados e os outros dois lados com condições de contorno essenciais (vínculos) arbitrárias. Levy utilizou séries simples de Fourier levando em conta que as séries duplas de Fourier usadas por Navier convergiam devagar.

Em 1915, Timoshenko (TIMOSHENKO, 1915) encontrou soluções para grandes deflexões em placas circulares. Em 1940, Timoshenko e Woinowsky-Krieger publicaram o livro "*Theory of plates and shells*" (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959), reeditado em 1959, obra fundamental no estudo de flexão de placas.

Em 1945, Reissner (REISSNER, 1945) propôs uma teoria de placas que considera as deformações causadas pelas forças cortantes para análise de placas espessas onde o efeito das deformações cisalhantes transversais é significativo e não pode ser negligenciado.

Em 1951, Mindlin (MINDLIN, 1951) também formulou um modelo muito próximo daquele de Reissner para a análise de placas espessas. A teoria de Mindlin é baseada em deslocamentos impostos, enquanto a de Reissner é baseada em tensões impostas. A teoria de Mindlin necessita de um fator de correção do cisalhamento para compensar o erro devido à hipótese de uma deformação por cisalhamento constante ao longo da espessura da placa e que viola a condição de tensão cisalhante igual a zero nas superfícies livres. Os fatores de correção não apenas dependem do material e parâmetros geométricos mas também do carregamento e das condições de contorno.

Em 1979, Cheng (CHENG, 1979) publicou uma teoria exata de placas obtida da teoria de elasticidade tridimensional. Em 1988, Barrett e Ellis (BARRETT; ELLIS, 1988) estenderam o trabalho de Cheng, mostrando ainda como as teorias clássicas de Kirchhoff, Reissner e Mindlin se relacionam com a teoria exata.

Em 1987, Reissner (REISSNER, 1987) generalizou algumas fórmulas da teoria de

placas moderadamente espessas.

O estudo das cascas data o século XIX, quando Love (LOVE, 1888) apresentou contribuições importantes para a teoria de cascas finas. Ele aplicou as hipóteses de Kirchhoff (KIRCHHOFF, 1850), originalmente propostas para a teoria de flexão de placas finas, para a teoria de cascas, juntamente com as hipóteses de pequenas deflexões e pequena espessura da casca. Teorias aproximadas de cascas similares (de primeira ordem) foram apresentadas por Donnell (DONNELL, 1933), Sanders (JR, 1959) e Flügge (FLÜGGE, 1960).

Uma teoria de cascas de segunda ordem foi proposta por E. Reissner (REISSNER, 1949) (REISSNER, 1952), onde a hipótese de que as normais ao plano médio permanecem normais a ele foi abandonada, considerando assim as deformações causadas pelas forças cortantes.

Em 1989, Simo e Fox (SIMO; FOX, 1989) apresentaram formulações de modelos de cascas geometricamente exatos. Em 1993, Pimenta (PIMENTA, 1993) publicou uma teoria unificada para cascas. Em 2003, Campello et al. (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003) implementaram o modelo de casca. Pimenta et al. (PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2004) apresentaram em 2004 uma generalização da formulação que permite a variação da espessura da casca.

A teoria de cascas geometricamente não linear também teve contribuições consideráveis por autores como Mushtari (MUSHTARI; GALIMOV, 1961), Sanders (JR, 1961), Naghdi e Nordgren (NAGHDI; NORDGREN, 1962), Vlasov (VLASOV, 1964), Simmonds e Danielson (SIMMONDS; DANIELSON, 1972), Ibrahimbegovic (IBRAHIMBEGOVIC, 1997) (IBRAHIMBEGOVIC; BRANK; COURTOIS, 2001) e Libai e Simmonds (LIBAI; SIMMONDS, 2005). Formulações sobre a dinâmica não linear de estruturas de cascas foram apresentadas por Simo et al. (SIMO; RIFAI; FOX, 1992), Kuhl and Ramm (KUHL; RAMM, 1996), Brank et al. (BRANK et al., 1998), Campello et al. (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2011), entre outros. Em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2011), materiais hiperelásticos quaisquer podem ser usados para a análise dinâmica não linear de cascas com graus de liberdade de rotação.

Estudos recentes analisam o comportamento de estruturas de cascas avançadas, como estruturas dobráveis (TRAUTZ; HERKRATH, 2009) (TACHI, 2010) (KEBADZE; GUEST; PELLEGRINO, 2004) (BLOCK; STRAUBEL; WIEDEMANN, 2011), estruturas que podem ser transportadas em uma forma compacta e abertas para sua extensão total quando necessário, metamateriais (SILVERBERG et al., 2014) (FLORIJN; COULAIS; HECKE, 2014), cujas propriedades incomuns se devem mais a sua estrutura do que a sua composição, estruturas de cascas que mudam de formato (PIRRERA; AVITABILE;

WEAVER, 2010) (HU et al., 2015) (LAMACCHIA et al., 2015), cascas capazes de passar por grandes mudanças em seu formato enquanto permanecem dentro do limite elástico do material, e estruturas multiestáveis (MATTIONI et al., 2006) (HOLMES; CROSBY, 2007), (BENDE et al., 2015), que possuem mais de um estado estável e podem mover-se elasticamente de um estado para outro.

Atualmente, o desenvolvimento das teorias de cascas combina-se com as técnicas numéricas de solução de equações diferenciais, como o método dos elementos finitos, possibilitando um grande desenvolvimento de modelos e teorias no assunto.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho de mestrado é analisar o modelo de casca proposto em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003) em relação aos resultados de tensões no cálculo de flexão de placas (ver capítulo 3), bem como propor uma extensão desse modelo de casca para a análise dinâmica de cascas sob não linearidade geométrica, calculando estruturas avançadas de cascas (ver capítulo 4).

O elemento finito de casca proposto em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003), o T6-3i, é triangular, permitindo discretizações numéricas robustas e versáteis. A formulação é pura em deslocamentos, na qual nenhum tipo de variável mista ou híbrida é utilizada, não apresenta travamento numérico devido à incompatibilidade do elemento no campo das rotações, e os graus de liberdade utilizados são simples e com significado físico: os deslocamentos e rotações do diretor da casca. A cinemática é do tipo Reissner-Mindlin, que leva em consideração os efeitos das deformações por força cortante.

A teoria na qual o T6-3i está baseado foi primeiramente apresentada em (PIMENTA, 1993) e aplicada numericamente para barras em (PIMENTA; YOJO, 1993). Em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003), o modelo foi implementado e testado para cascas, sendo proposto o elemento finito T6-3i, um elemento finito triangular de 6 nós para a interpolação do campo dos deslocamentos e 3 nós para a interpolação do campo das rotações, sendo incompatível em relação às rotações. Em (PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2004), a variação da espessura foi incorporada na cinemática da casca. A parametrização do campo das rotações usando os parâmetros de Rodrigues, que proporciona uma atualização simples do vetor das rotações foi apresentada em (PIMENTA; CAMPELLO, 2005). Em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2011), foi implementada a dinâmica de casca para hiperelasticidade geral utilizando o teorema das potências virtuais. Em (PIMENTA et al., 2016) é apresentada uma visão geral do

elemento finito t6-3i.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TEXTO

Este trabalho está dividido em três partes. A primeira parte trata do elemento finito t6-3i, proposto por Campello et al. (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003), apresentando sua formulação e características.

A segunda parte trata da análise de placas. As principais teorias no assunto são comentadas, a teoria de Kirchhoff para placas finas, a teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas e as teorias geometricamente exatas para placas em problemas não lineares. Segue-se um breve histórico do desenvolvimento de elementos finitos de flexão de placas. Uma formulação analítica para placas circulares e retangulares com diversas condições de contorno e carregamento é apresentada para posterior validação dos resultados numéricos. Em seguida, analisa-se o elemento finito T6-3i em relação aos seus resultados de tensões na análise de placas, comparando-os com as teorias analíticas de placas, resultados de tabelas para o cálculo de momentos em placas retangulares e do ANSYS®, um software comercial para análise estrutural.

Na terceira parte deste trabalho é apresentada uma formulação dinâmica para análise não linear de cascas implementada com o T6-3i. Utiliza-se um modelo Lagrangiano atualizado e a forma fraca é obtida do Teorema dos Trabalhos Virtuais. São feitas simulações numéricas da deformação de domos que apresentam vários *snap-throughs* e *snap-backs*, incluindo domos com vincos curvos, mostrando a robustez, simplicidade e versatilidade do elemento na sua formulação e na geração das malhas não estruturadas necessárias para as simulações.

Por fim, são apresentadas as conclusões deste trabalho.

1.4 NOTAÇÃO UTILIZADA

Neste trabalho, as letras minúsculas latinas ou gregas em itálico ($a, b, \dots, \alpha, \beta, \dots$) representam grandezas escalares, as letras minúsculas latinas ou gregas em negrito itálico ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots$) representam vetores. Letras maiúsculas latinas ou gregas em negrito itálico ($\mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$) representam tensores de segunda ordem no espaço Euclidiano tridimensional. Adota-se a convenção da soma sobre índices repetidos, com valores de 1 a 2 para letras gregas e de 1 a 3 para letras latinas.

2 FORMULAÇÃO GEOMETRICAMENTE EXATA DE CASCA E O T6-3I

2.1 INTRODUÇÃO

A formulação geometricamente exata apresentada neste capítulo para análise de cascas sob não linearidade geométrica foi primeiro proposta em (PIMENTA, 1993) e foi desenvolvida e implementada numericamente em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003) e (CAMPELLO, 2005).

O modelo Lagrangiano total trabalha com seis graus de liberdade (3 deslocamentos e 3 rotações). As rotações finitas são tratadas usando parâmetros de Rodrigues, que oferecem expressões computacionalmente mais eficientes. As deformações devido à força cortante são consideradas. O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff e o gradiente das deformações são variáveis primárias. A formulação de equilíbrio utiliza o Teorema dos Trabalhos Virtuais.

Ao final do capítulo, o T6-3i, um elemento de casca triangular puro de deslocamentos, é apresentado. O elemento tem seis nós e é plano na configuração de referência. É linear não conforme para o campo de rotações e possui uma interpolação quadrática compatível para o campo de deslocamentos. Não utiliza nenhuma técnica numérica para evitar o travamento, apresentando grande simplicidade, robustez e versatilidade.

2.2 PARAMETRIZAÇÃO DAS ROTAÇÕES

O desenvolvimento das teorias geometricamente exatas só foi possível graças a um tratamento das rotações finitas de maneira exata. A dificuldade de lidar com as rotações no espaço tridimensional se deve ao fato de essas operações não serem comutativas, não obedecendo às leis do cálculo vetorial.

Neste trabalho, o tensor das rotações $\mathbf{Q}$ é expresso em termos dos parâmetros de rotação de Rodrigues, como em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003). A parametrização com o vetor das rotações de Rodrigues leva a expressões mais simples e computacionalmente mais eficientes comparadas à parametrização clássica de Euler, pois não utiliza funções trigonométricas em sua formulação.

O vetor rotação de Rodrigues é definido por (PIMENTA; CAMPELLO, 2001):

$$\alpha = \frac{\tan(\theta/2)}{\theta} \theta \quad (1)$$

onde θ é o vetor rotação clássico de Euler representando um rotação finita arbitrá-

ria no espaço 3D e $\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|$ é a sua magnitude – o ângulo de rotação de Euler. O tensor rotação $\mathbf{Q}$ expresso em termos do parâmetro de rotação de Rodrigues $\boldsymbol{\alpha}$ pode então ser escrito como (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003):

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{4}{4 + \alpha^2} \left(\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{A}^2 \right) \quad (2)$$

com $\alpha = \|\boldsymbol{\alpha}\|$, e $\mathbf{A} = skew(\boldsymbol{\alpha})$ ¹.

Na parametrização com o vetor rotação de Rodrigues, devido à definição dada em (1), o ângulo de rotação é limitado a $-\pi < \theta < \pi$. No entanto, usando uma formulação atualizada (ver capítulo 4), isso não se torna uma restrição já que as rotações não excedem π dentro de um único incremento de tempo.

2.3 CINEMÁTICA

Assume-se que a superfície média da casca é plana na configuração inicial de referência. Nessa configuração, definimos uma base ortonormal local $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$, com coordenadas $\{\xi_1, \xi_2, \zeta\}$. Os vetores $\mathbf{e}_\alpha^r$ localizam-se na superfície média da casca $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ e $\mathbf{e}_3^r$ é normal a este plano (ver Fig. 1).

Nessa configuração de referência, a posição $\boldsymbol{\xi}$ de qualquer ponto material em relação à origem pode ser descrita pelo campo vetorial:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a}^r \quad (3)$$

onde o vetor $\boldsymbol{\zeta} = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r$ ($\alpha = 1, 2$) define um ponto sobre a superfície média de referência e $\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r$ é o vetor posição de um ponto qualquer da seção transversal em relação à superfície média ou o vetor diretor nesse ponto, com $\zeta \in H = [-h^b, h^t]$ sendo a coordenada de espessura e $h = h^b + h^t$ a espessura da casca na configuração de referência.

A base ortonormal local na configuração deformada $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ é obtida pela aplicação de uma rotação promovida pelo tensor de rotação $\mathbf{Q}$ à base definida na configuração de referência.

¹Tensores antissimétricos: Seja $\mathbf{a} = a_1 \mathbf{e}_1 + a_2 \mathbf{e}_2 + a_3 \mathbf{e}_3$ um vetor qualquer no espaço 3D, com $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3\}$ uma base ortonormal. Pode-se construir um tensor de segunda ordem $\mathbf{A}$ dado por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 0 & -a_3 & a_2 \\ a_3 & 0 & -a_1 \\ -a_2 & a_1 & 0 \end{bmatrix} = skew(\mathbf{a})$$

Esse tensor é antissimétrico, pois $\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T$. Nesse caso, o vetor $\mathbf{a}$ é chamado de vetor axial de $\mathbf{A}$ ($\mathbf{a} = axial(\mathbf{A})$). Se $\mathbf{A}$ é um tensor antissimétrico e $\mathbf{a}$ é seu vetor axial, então $\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{a} \times \mathbf{v}$, $\forall \mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$.

Figura 1 - Cinemática da casca e suas grandezas fundamentais (CAMPELLO, 2005)

ração de referência, de modo que $e_i = Qe_i^r$. Essa rotação sobre a base $\{e_i^r\}$ é genérica, com isso, o plano definido pelos vetores e_α não é necessariamente tangente à superfície média deformada e e_3 não é necessariamente ortogonal à mesma, dessa forma a hipótese de Reissner-Mindlin é válida, ou seja, é permitida a distorção devido à força cortante.

O vetor posição de um ponto qualquer da seção transversal em relação à superfície média na configuração deformada é dado por:

$$\mathbf{a} = Q\mathbf{a}^r \quad (4)$$

A substituição da equação $\mathbf{a}^r = \zeta\mathbf{e}_3^r$ em (4) resulta $\mathbf{a} = \zeta\mathbf{e}_3$, dessa forma $\mathbf{e}_3$ está alinhado com $\mathbf{a}$ e a magnitude do diretor é preservada durante o movimento, isto é, não é permitida a deformação da espessura.

O deslocamento dos pontos sobre a superfície média da casca é dado pelo vetor:

$$\mathbf{u} = \mathbf{z} - \zeta \quad (5)$$

onde $\mathbf{z}$ é o vetor posição de um ponto material sobre a superfície média na configuração deformada. As componentes de $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ no sistema cartesiano global constituem os seis graus de liberdade do modelo.

O vetor posição $\mathbf{x}$ de um ponto material qualquer da seção transversal em relação à origem na configuração deformada é dado por:

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{a} \quad (6)$$

Utilizando a notação $(\bullet)_{,\alpha} = \partial(\bullet)/\partial\xi_\alpha$ e $(\bullet)' = \partial(\bullet)/\partial\zeta$, pode-se escrever o gradiente da deformação obtido pela derivação de (6) em relação ao vetor posição ξ na configuração de referência²:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \zeta} \otimes \mathbf{e}_3^r \\ &= \mathbf{x}_{,\alpha} \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{x}' \otimes \mathbf{e}_3^r \end{aligned} \quad (7)$$

Como $\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r$ e $\mathbf{a}^r = \mathbf{Q}^T \mathbf{a}$, tem-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_{,\alpha} &= \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha} \zeta \mathbf{e}_3^r \\ &= \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{Q}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T \mathbf{a} \\ &= \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{a} \end{aligned} \quad (8)$$

onde $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}_{,\alpha} \mathbf{Q}^T$ é o tensor das rotações específicas do diretor. $\mathbf{K}_\alpha$ é um tensor antissimétrico, cujo vetor axial é:

$$\kappa_\alpha = axial(\mathbf{K}_\alpha) = \mathbf{\Xi} \mathbf{a}_{,\alpha} \quad (9)$$

onde

$$\mathbf{\Xi} = \frac{4}{4 + \alpha^2} \left(\mathbf{I} + \frac{1}{2} \mathbf{A} \right) \quad (10)$$

com $\mathbf{A} = skew(\mathbf{a})$.

A derivada de (6) em relação a ζ resulta:

$$\mathbf{x}' = \mathbf{Q} \mathbf{e}_3^r = \mathbf{a}' \quad (11)$$

Com isso, (7) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} &= (\mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{a}' \otimes \mathbf{e}_3^r \\ &= (\mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{a}' \otimes \mathbf{e}_3^r \\ &= (\boldsymbol{\eta}_\alpha + \mathbf{e}_\alpha + \kappa_\alpha \times \mathbf{a}) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{a}' \otimes \mathbf{e}_3^r \end{aligned} \quad (12)$$

²Produto tensorial ou diádico $\otimes$: Sejam $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^3$ dois vetores quaisquer, o produto tensorial entre eles é dado por: $\mathbf{a} \otimes \mathbf{b} = \mathbf{a} \mathbf{b}^T$.

onde $\eta_\alpha = \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha$ é o vetor das deformações generalizadas da seção transversal. Retrorrotacionando as deformações e as rotações específicas do diretor para a configuração de referência, resulta:

$$\eta_\alpha^r = \mathbf{Q}^T \eta_\alpha \quad (13)$$

$$\kappa_\alpha^r = \mathbf{Q}^T \kappa_\alpha \quad (14)$$

Substituindo (13) e (14) em (12), obtém-se:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \left[\mathbf{I} + \left(\eta_\alpha^r + \kappa_\alpha^r \times \mathbf{a}^r \right) \otimes \mathbf{e}_\alpha^r \right] \quad (15)$$

e definindo

$$\gamma_\alpha^r = \eta_\alpha^r + \kappa_\alpha^r \times \mathbf{a}^r \quad (16)$$

resulta:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \left(\mathbf{I} + \gamma_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r \right) \quad (17)$$

Com esse resultado, $\mathbf{F}$ pode ser reescrito como:

$$\mathbf{F} = \mathbf{Q} \mathbf{F}^r \quad (18)$$

onde o gradiente da deformação retrorrotacionado $\mathbf{F}^r$ é expresso por:

$$\mathbf{F}^r = \mathbf{I} + \gamma_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r \quad (19)$$

Utilizando a notação $(\dot{\bullet})$ para indicar diferenciação no tempo e aplicando essa operação sobre a equação (18), resulta no gradiente das velocidades:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{F}} &= \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{F}^r + \mathbf{Q} \dot{\mathbf{F}}^r \\ &= \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T \mathbf{F} + \mathbf{Q} \left(\dot{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r \right) \\ &= \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \mathbf{Q} \left(\dot{\gamma}_\alpha^r \otimes \mathbf{e}_\alpha^r \right) \end{aligned} \quad (20)$$

onde o tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{Q}^T$ representa a velocidade angular do diretor e apresenta vetor axial $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega})$, dado por:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \quad (21)$$

Em (20), tem-se:

$$\dot{\gamma}_\alpha^r = \dot{\eta}_\alpha^r + \dot{\kappa}_\alpha^r \times \mathbf{a}^r \quad (22)$$

As derivadas $\dot{\eta}_\alpha^r$ e $\dot{\kappa}_\alpha^r$ são obtidas promovendo a diferenciação temporal de (13) e (14)³:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha^r &= \dot{Q}^T \eta_\alpha + Q^T \dot{\eta}_\alpha \\ &= \dot{Q}^T (\mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha) + Q^T (\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha} - \dot{Q} Q^T \mathbf{e}_\alpha) \\ &= -Q^T \boldsymbol{\Omega} (\mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha} - \mathbf{e}_\alpha) + Q^T (\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha} - \boldsymbol{\Omega} \mathbf{e}_\alpha) \\ &= Q^T (-\boldsymbol{\Omega} (\mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha}) + \dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}) \end{aligned} \quad (23)$$

Como $\mathbf{z}_{,\alpha} = \mathbf{e}_\alpha^r + \mathbf{u}_{,\alpha}$, e $\mathbf{Z}_{,\alpha} = \text{skew}(\mathbf{z}_{,\alpha})$, (23) resulta:

$$\begin{aligned} \dot{\eta}_\alpha^r &= Q^T (-\boldsymbol{\Omega} \mathbf{z}_{,\alpha} + \dot{\mathbf{u}}_{,\alpha}) \\ &= Q^T (\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha} + \mathbf{z}_{,\alpha} \times \boldsymbol{\omega}) \\ &= Q^T (\dot{\mathbf{u}}_{,\alpha} + \mathbf{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \end{aligned} \quad (24)$$

Para obtenção do termo $\dot{\kappa}_\alpha^r$, tem-se⁴:

$$\begin{aligned} \dot{\kappa}_\alpha^r &= \dot{Q}^T \kappa_\alpha + Q^T \dot{\kappa}_\alpha \\ &= Q^T (-\boldsymbol{\Omega} \kappa_\alpha + \dot{\kappa}_\alpha) \\ &= Q^T (-\boldsymbol{\omega} \times \kappa_\alpha + \dot{\kappa}_\alpha) \\ &= Q^T \boldsymbol{\omega}_{,\alpha} \end{aligned} \quad (25)$$

e levando em conta (21):

$$\dot{\kappa}_\alpha^r = Q^T (\boldsymbol{\Xi}_{,\alpha} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,\alpha}) \quad (26)$$

³Diferenciando no tempo a propriedade $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, tem-se $\dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T + \mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T = 0$, logo, $\boldsymbol{\Omega} = -\mathbf{Q}\dot{\mathbf{Q}}^T$, resulta que $\dot{Q}^T = -Q^T \boldsymbol{\Omega}$.

⁴Como $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\mathbf{Q}}\mathbf{Q}^T$, tem-se $\boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q} = \dot{\mathbf{Q}}$, diferenciando em relação a ξ_α , resulta $\dot{\mathbf{Q}}_\alpha = \boldsymbol{\Omega}_{,\alpha}\mathbf{Q} + \boldsymbol{\Omega}\mathbf{Q}_{,\alpha}$. Como $\mathbf{K}_\alpha = \mathbf{Q}_{,\alpha}\mathbf{Q}^T$, tem-se $\mathbf{K}_\alpha\mathbf{Q} = \mathbf{Q}_{,\alpha}$, diferenciando no tempo, resulta $\dot{\mathbf{Q}}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{K}}_\alpha\mathbf{Q} + \mathbf{K}_\alpha\dot{\mathbf{Q}}$. Igualando os resultados e multiplicando por $\mathbf{Q}^T$, obtém-se $\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} = \dot{\mathbf{K}}_\alpha + \mathbf{K}_\alpha\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{K}_\alpha$.

Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são tensores antissimétricos, cujos vetores axiais são $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$, então $\mathbf{C} = \mathbf{AB} - \mathbf{BA}$ também é antissimétrico, e seu vetor axial é dado por $\mathbf{c} = \text{axial}(\mathbf{C}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Com isso, $\boldsymbol{\omega}_{,\alpha} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha}) = \text{axial}(\dot{\mathbf{K}}_\alpha) + \text{axial}(\mathbf{K}_\alpha\boldsymbol{\Omega} - \boldsymbol{\Omega}\mathbf{K}_\alpha) = \dot{\kappa}_\alpha + \kappa_\alpha \times \boldsymbol{\omega} = \dot{\kappa}_\alpha - \boldsymbol{\omega} \times \kappa_\alpha$.

onde

$$\mathbf{\Xi}_{,\alpha} = \frac{1}{2} \frac{4}{4 + \alpha^2} (\mathbf{A}_{,\alpha} - (\alpha \cdot \alpha_{,\alpha}) \mathbf{\Xi}) \quad (27)$$

2.4 ESTÁTICA

O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff $\mathbf{P}$ é representado por

$$\mathbf{P} = \boldsymbol{\tau}_i \otimes \mathbf{e}_i^r \quad (28)$$

onde os vetores-colunas $\boldsymbol{\tau}_i$ representam as tensões na configuração deformada que podem ser expressas em função de $\boldsymbol{\tau}_i^r$, suas equivalentes retrorrotacionadas por unidade de área da configuração de referência e atuam em planos dos quais as normais nesta configuração são dadas por $\mathbf{e}_i^r$, pela relação $\boldsymbol{\tau}_i = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_i^r$, obtendo-se então:

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \mathbf{e}_i^r \quad (29)$$

Usando os tensores energeticamente conjugados $\mathbf{P}$ e $\mathbf{F}$, a potência dos esforços internos por unidade de volume de referência vale:

$$P_{int} = \int_{V^r} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dV^r \quad (30)$$

Calculando $\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} &= \mathbf{P} : (\boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \mathbf{Q}(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \times \mathbf{e}_\alpha^r)) \\ &= \mathbf{P} : \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} + \mathbf{Q} \boldsymbol{\tau}_i^r \times \mathbf{e}_i^r : \mathbf{Q} \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \times \mathbf{e}_\alpha^r \\ &= \boldsymbol{\tau}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \end{aligned} \quad (31)$$

O termo $\mathbf{P} : \boldsymbol{\Omega} \mathbf{F} = \mathbf{P} \mathbf{F}^T : \boldsymbol{\Omega} = 0$, decorre do balanço do momento angular. A potência associada a $\boldsymbol{\tau}_3^r$ é nula devido a hipótese de diretor com magnitude constante. Substituindo (22) em (31), tem-se:

$$\mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} = \boldsymbol{\tau}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + (\mathbf{a}^r \times \boldsymbol{\tau}_\alpha^r) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \quad (32)$$

e realizando a integração ao longo da espessura, resulta:

$$\int_H \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\zeta = \mathbf{n}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \mathbf{m}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \quad (33)$$

onde

$$\mathbf{n}_\alpha^r = \int_H \boldsymbol{\tau}_\alpha^r d\zeta \quad (34)$$

$$\mathbf{m}_\alpha^r = \int_H \mathbf{a}^r \times \boldsymbol{\tau}_\alpha^r d\zeta \quad (35)$$

Os vetores $\mathbf{n}_\alpha^r$ representam as forças generalizadas retrorrotacionadas atuantes na seção transversal com normal $\mathbf{e}_\alpha^r$, e $\mathbf{m}_\alpha^r$ os momentos generalizados retrorrotacionados na mesma seção, todos por unidade de comprimento da configuração de referência. Os vetores retrorrotacionados são grandezas objetivas, não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido.

Pode-se agrupar as grandezas da seção transversal nos três vetores abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \sigma_1^r \\ \sigma_2^r \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\sigma}_\alpha^r = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\alpha^r \\ \mathbf{m}_\alpha^r \end{bmatrix} \quad (36)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_2^r \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\varepsilon}_\alpha^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_\alpha^r \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \end{bmatrix} \quad (37)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (38)$$

Com auxílio desses vetores, a expressão (33) pode ser reescrita como:

$$\int_H \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\zeta = \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r \quad (39)$$

e com auxílio das expressões (24) e (26), a derivada temporal $\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r$ é dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^r \\ \dot{\varepsilon}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}_{,1} + \mathbf{Z}_{,1} \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Xi}_{,1} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,1}) \\ \mathbf{Q}^T (\dot{\mathbf{u}}_{,2} + \mathbf{Z}_{,2} \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}) \\ \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Xi}_{,2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Xi} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,2}) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Utilizando os operadores:

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \mathbf{Q}^T & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,1} \boldsymbol{\Xi} \\ \mathbf{O} & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Xi} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Xi}_{,1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^T & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^T \mathbf{Z}_{,2} \boldsymbol{\Xi} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Xi} & \mathbf{Q}^T \boldsymbol{\Xi}_{,2} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} I \frac{\partial}{\partial \xi_1} & O \\ O & I \frac{\partial}{\partial \xi_1} \\ I \frac{\partial}{\partial \xi_2} & O \\ O & I \frac{\partial}{\partial \xi_2} \\ O & I \end{bmatrix} \quad (42)$$

é possível reescrever a expressão (40) como:

$$\dot{\epsilon}^r = \Psi \Delta \dot{d} \quad (43)$$

Integrando a equação (39) no domínio Ω , obtém-se a potência dos esforços internos, dada por:

$$\begin{aligned} P_{int} &= \int_{\Omega} \int_H \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} d\zeta d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma^r \cdot \dot{\epsilon}^r d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \sigma^r \cdot \Psi \Delta \dot{d} d\Omega \end{aligned} \quad (44)$$

A potência dos esforços externos pode ser definida por:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \left(\bar{\mathbf{t}}^t \cdot \dot{\mathbf{x}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b \cdot \dot{\mathbf{x}}^b + \int_H \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\mathbf{x}} d\zeta \right) d\Omega \quad (45)$$

onde $\bar{\mathbf{t}}^t$ e $\bar{\mathbf{t}}^b$ são respectivamente os vetores das forças externas distribuídas que atuam nas superfícies de topo e de fundo da casca, por unidade de área da configuração de referência, e o vetor $\bar{\mathbf{b}}$ as forças externas distribuídas no volume de referência. Por diferenciação no tempo de (6), obtém-se:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{x}} &= \dot{\mathbf{z}} + \dot{\mathbf{a}} \\ &= \dot{\mathbf{u}} + \dot{\mathbf{Q}} \mathbf{a}^r \\ &= \dot{\mathbf{u}} + \Omega \mathbf{a} \\ &= \dot{\mathbf{u}} + \omega \times \mathbf{a} \end{aligned} \quad (46)$$

Em (45), tem-se $\dot{\mathbf{x}}^t = \dot{\mathbf{u}} + \omega \times \mathbf{a}^t$ e $\dot{\mathbf{x}}^b = \dot{\mathbf{u}} + \omega \times \mathbf{a}^b$. Substituindo (21) em (46), e o resultado desta operação em (45), chega-se a:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \left(\bar{\mathbf{n}} \cdot \dot{\mathbf{u}} + \Xi^T \bar{\mathbf{m}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right) d\Omega \quad (47)$$

onde

$$\bar{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{t}}^t + \bar{\mathbf{t}}^b + \int_H \bar{\mathbf{b}} d\zeta \quad (48)$$

$$\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a}^t \times \bar{\mathbf{t}}^t + \mathbf{a}^b \times \bar{\mathbf{t}}^b + \int_H \mathbf{a} \times \bar{\mathbf{b}} d\zeta \quad (49)$$

são respectivamente as resultantes externas de força e momento, ambas por unidade de área da configuração de referência. Definindo:

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}} \\ \boldsymbol{\Xi}^T \bar{\mathbf{m}} \end{bmatrix} \quad (50)$$

tem-se:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \mathbf{d} d\Omega \quad (51)$$

2.5 EQUILÍBRIO

Considera-se que os campos $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ satisfazem as condições de contorno essenciais na fronteira da superfície média da casca. Sejam os campos virtuais de deslocamentos e rotações representados respectivamente por $\delta \mathbf{u}$ e $\delta \boldsymbol{\alpha}$, definidos sobre o plano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ da configuração de referência, tem-se:

$$\delta \mathbf{d} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (52)$$

O trabalho virtual dos esforços internos é dado por:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \mathbf{d} d\Omega \quad (53)$$

onde

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \mathbf{d} \quad (54)$$

é obtido de modo equivalente a (43). O trabalho virtual dos esforços externos é dado por:

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \quad (55)$$

O equilíbrio estático da casca com condições de contorno essenciais nas fronteiras pode ser formulado na forma fraca por meio do teorema dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \delta W_{int} - \delta W_{ext} = 0, \quad \forall \delta \mathbf{d} \mid \delta \mathbf{d} = \mathbf{o} \text{ em } \Gamma \quad (56)$$

sendo Γ a fronteira de Ω . Substituindo (53) e (55) em (56), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega - \int_{\Omega} \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\mathbf{n}_{\alpha}^r \cdot \mathbf{Q}^T (\delta \mathbf{u}_{,\alpha} + \mathbf{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Xi} \delta \boldsymbol{\alpha}) + \mathbf{m}_{\alpha}^r \cdot \mathbf{Q}^T (\boldsymbol{\Xi}_{,\alpha} \delta \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Xi} \delta \boldsymbol{\alpha}_{,\alpha}) \right] d\Omega - \\ &\quad - \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{n}} \cdot \delta \mathbf{u} + \boldsymbol{\Xi}^T \bar{\mathbf{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\alpha}) d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (57)$$

Integrando por partes os termos com $\delta \mathbf{u}_{,\alpha}$ e $(\boldsymbol{\Xi} \delta \boldsymbol{\alpha})_{,\alpha}$, e utilizando o lema fundamental do cálculo variacional, obtêm-se as seguintes equações locais do equilíbrio:

$$\mathbf{n}_{\alpha,\alpha} + \bar{\mathbf{n}} = \mathbf{o} \quad (58)$$

$$\mathbf{m}_{\alpha,\alpha} + \mathbf{z}_{,\alpha} \times \mathbf{n}_{\alpha} + \bar{\mathbf{m}} = \mathbf{o} \quad (59)$$

A linearização consistente de (56) resulta no operador tangente:

$$\Delta(\delta W) = \Delta \left[\int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r - \bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d}) d\Omega \right] \quad (60)$$

que depois de alguma álgebra pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W) &= \int_{\Omega} (\boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{D} \boldsymbol{\Psi} \Delta \delta \mathbf{d}) d\Omega + \\ &\quad + \int_{\Omega} (\Delta \delta \mathbf{d}) \cdot (\mathbf{G} \Delta \delta \mathbf{d}) d\Omega - \int_{\Omega} (\delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{L} \Delta \delta \mathbf{d}) d\Omega \end{aligned} \quad (61)$$

As matrizes $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{L}$ são dadas por:

$$\mathbf{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_1^r}{\partial \kappa_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_1^r}{\partial \kappa_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial \mathbf{n}_2^r}{\partial \kappa_2^r} \\ \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \eta_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \kappa_1^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \eta_2^r} & \frac{\partial \mathbf{m}_2^r}{\partial \kappa_2^r} \end{bmatrix} \quad (62)$$

$$\mathbf{G} = \begin{bmatrix} \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_1^{u'\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_1^{\alpha'\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_2^{u'\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{G}_2^{\alpha'\alpha} \\ \mathbf{G}_1^{\alpha u'} & \mathbf{G}_1^{\alpha \alpha'} & \mathbf{G}_2^{\alpha u'} & \mathbf{G}_2^{\alpha \alpha'} & \mathbf{G}_1^{\alpha \alpha} + \mathbf{G}_2^{\alpha \alpha} \end{bmatrix} \quad (63)$$

$$\mathbf{L} = \frac{\partial \bar{\mathbf{q}}}{\partial \mathbf{d}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \bar{\mathbf{n}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \\ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \mathbf{u}} & \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} \quad (64)$$

As matrizes $\mathbf{D}$, $\mathbf{G}$ e $\mathbf{L}$ representam respectivamente as contribuições constitutivas, geométricas dos esforços internos e geométricas dos esforços externos. As submatrizes de $\mathbf{G}$ são encontradas em (CAMPELLO, 2005) e foram primeiramente publicadas em (PIMENTA; YOJO, 1993). Para campos $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ quaisquer, $\mathbf{G}$ é sempre simétrico. A formulação do material empregada é a mesma apresentada em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003) e (TIAGO, 2007).

2.6 IMPLEMENTAÇÃO EM ELEMENTOS FINITOS - O T6-3I

O T6-3i (PIMENTA et al., 2016) é um elemento finito triangular de seis nós, derivado de uma teoria geometricamente exata, que lida com grandes deslocamentos e grandes rotações. É plano em sua configuração indeformada e com numeração nodal dada pela figura 2. Neste elemento, todos os nós possuem graus de liberdade para os deslocamentos, mas apenas os nós do meio das arestas possuem graus de liberdade para as rotações. O T6-3i possui interpolação quadrática compatível para os deslocamentos e é linear não conforme para as rotações.

Figura 2 - Elemento finito T6-3i (CAMPELLO, 2005)

Esse elemento é similar aos elementos triangulares lineares de placas do tipo Reissner-Mindlin apresentados por Oñate et al. (OÑATE; ZARATE; FLORES, 1994) e Arnold et al. (ARNOLD; FALK, 1997), nos quais a ausência de graus de liberdade de rotação nos nós dos cantos do elemento faz com que este seja não conforme em relação ao campo de rotações. O T6-3i difere desses elementos por não utilizar uma formulação mista, ou qualquer outra técnica numérica para evitar o travamento (CAMPELLO, 2005), e por apresentar interpolação quadrática para os deslocamentos ao invés de funções de forma lineares como faz Oñate. Conforme (CAMPELLO, 2005), o travamento numérico não é observado devido à incompatibilidade de α e à interpolação quadrática de u que tornam o elemento, puro de deslocamentos, suficientemente flexível.

Define-se p_i ($i = 1, \dots, 6$) como o vetor dos graus de liberdade do nó i , de modo que:

$$p_i = u_i, \text{ se } i = 1, 2, 3 \text{ ou } p_i = \begin{bmatrix} u_i \\ \alpha_i \end{bmatrix}, \text{ se } i = 4, 5, 6 \quad (65)$$

Construído desta forma, o elemento apresenta graus de liberdade de deslocamento em todos os nós e rotação apenas nos nós localizados no meio dos lados. A interpolação dos deslocamentos é feita por funções quadráticas completas, enquanto as rotações são interpoladas por funções lineares a partir dos nós intermediários.

Seja A a área total do elemento triangular e A_i ($i = 1, 2, 3$) as áreas indicadas na

figura 2. As funções de interpolação de $\mathbf{u}$ podem ser expressas por:

$$\begin{aligned} N_1^u &= (2L_1 - 1)L_1 & N_4^u &= 4L_1L_2 \\ N_2^u &= (2L_2 - 1)L_2 & N_5^u &= 4L_2L_3 \\ N_3^u &= (2L_3 - 1)L_3 & N_6^u &= 4L_3L_1 \end{aligned} \quad (66)$$

com

$$L_i = \frac{A_i}{A}, \quad i = 1, 2, 3 \quad (67)$$

em coordenadas cartesianas L_i pode ser escrito como:

$$L_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y), \quad i = 1, 2, 3 \quad (68)$$

com

$$\begin{aligned} a_1 &= x_2 y_3 - x_3 y_2 & a_2 &= x_3 y_1 - x_1 y_3 & a_3 &= x_1 y_2 - x_2 y_1 \\ b_1 &= y_2 - y_3 & b_2 &= y_3 - y_1 & b_3 &= y_1 - y_2 \\ c_1 &= x_3 - x_2 & c_2 &= x_1 - x_3 & c_3 &= x_2 - x_1 \end{aligned} \quad (69)$$

As funções de interpolação de α são dadas por:

$$\begin{aligned} N_4^\alpha &= 1 - 2L_3 \\ N_5^\alpha &= 1 - 2L_1 \\ N_6^\alpha &= 1 - 2L_2 \end{aligned} \quad (70)$$

Definindo $\mathbf{p}$ como o vetor que agrupa os graus de liberdade nodais do T6-3i, e escrevendo:

$$\mathbf{p} = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_6 \end{bmatrix} \quad (71)$$

os campos de deslocamentos e rotações em seu interior são obtidos pela equação:

$$\mathbf{d} = \mathbf{N} \mathbf{p} \quad (72)$$

onde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^u \mathbf{I} & N_2^u \mathbf{I} & N_3^u \mathbf{I} & N_4^u \mathbf{I} & \mathbf{O} & N_5^u \mathbf{I} & \mathbf{O} & N_6^u \mathbf{I} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & N_4^\alpha \mathbf{I} & \mathbf{O} & N_5^\alpha \mathbf{I} & \mathbf{O} & N_6^\alpha \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (73)$$

é a matriz de interpolação. Fazendo a substituição de (72) na expressão de trabalhos virtuais (53) e (55) e fazendo a discretização do domínio $\Omega \cong \cup \Omega_e$, obtém-se o vetor P_e dos esforços nodais desbalanceados:

$$P_e = \int_{\Omega_e} [(\Psi \Delta N)^T \sigma^r - N^T \bar{q}] d\Omega_e \quad (74)$$

onde Ω_e representa o domínio do elemento. A matriz de rigidez é obtida diferenciando (74) em relação a p . Desta operação resulta:

$$K_e = \int_{\Omega_e} [(\Psi \Delta N)^T D (\Psi \Delta N) + (\Delta N)^T G (\Delta N) - N^T L N] d\Omega_e \quad (75)$$

Devido a problemas de travamento, muitos pesquisadores ocuparam-se essencialmente com elementos quadrilaterais em detrimento ao uso de elementos triangulares, apesar destes últimos oferecem uma maior flexibilidade na geração de malhas. Da mesma forma, a utilização de elementos de alta ordem também era uma alternativa para evitar o travamento, que no entanto exigem um maior tempo de processamento. Técnicas alternativas para elementos de baixa ordem como a integração seletiva e reduzida, os métodos EAS e ANS (ver seção 3.2) também foram soluções muito estudadas.

Outra maneira de evitar o fenômeno de travamento é o desenvolvimento de elementos não conformes. Elementos não conformes caracterizam-se por não apresentar continuidade de deslocamentos ou de suas derivadas até uma ordem abaixo da maior ordem de derivação que ocorre no funcional nas interfaces dos elementos. Muitos elementos finitos não conforme de placas também foram formulados devido à dificuldade de obter a continuidade necessária das teorias clássicas de placas.

O T6-3i procura ser um elemento triangular de baixa ordem para análises lineares e não lineares, sem utilizar qualquer técnica numérica para lidar com o travamento, sendo para isso não conforme em relação ao campo de rotações.

3 CÁLCULO DE PLACAS

3.1 INTRODUÇÃO

Placas são componentes estruturais planos. Sua espessura é muito menor do que as outras duas dimensões, não ultrapassando $1/10$ da medida de seu menor lado. Aproveitando-se disso, é possível simplificar os problemas de placas com hipóteses que empregam essa relação entre as suas dimensões, reduzindo os problemas em três dimensões para duas dimensões, assim as placas são casos particulares de sólidos. Nas placas, a espessura é medida na direção perpendicular à sua superfície média e os carregamentos são aplicados perpendicularmente ao seu plano, trabalhando predominantemente em flexão.

As placas são um dos mais importantes elementos estruturais e são frequentemente encontradas em muitas estruturas na engenharia, como em lajes de edifícios, pontes, passarelas, partes de automóveis, aviões, navios, elementos como aquecedores solares, pisos, bancadas, etc. As soluções analíticas para placas, no entanto, são muito limitadas a geometrias, condições de contorno e carregamentos simples. Dessa forma, o uso de métodos numéricos na resolução de placas é essencial.

Dezenas de elementos finitos para flexão de placas têm sido sugeridos nas últimas décadas. Muitos oferecem bons resultados, mas podem apresentar travamento numérico em situações de placas muito finas. Para solucionar esse problema, muitas técnicas numéricas alternativas foram propostas (ver seção 3.2), mas ainda nenhum elemento em particular emergiu como o "melhor" elemento para análise de placas.

As principais teorias no assunto são a teoria de Kirchhoff para placas finas, a teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas e as teorias geometricamente exatas para placas em problemas não lineares.

A teoria de Kirchhoff (KIRCHHOFF, 1850) para placas finas é uma extensão da teoria de barras de Bernoulli-Euler. Partindo das equações gerais da teoria da elasticidade, Kirchhoff propôs algumas hipóteses afim de simplificar a obtenção da solução para placas finas, transformando o problema de análise tridimensional em um problema bidimensional. Essa teoria se limita a situações de pequenos deslocamentos e deformações e situações nas quais as deformações por esforço cortante possam ser desprezadas. Dentro do seu domínio de validade, a teoria de Kirchhoff é bastante precisa e muito utilizada para o cálculo de placas finas. Seu equacionamento encontra-se na seção 3.3.

As deformações causadas pelas forças cortantes na flexão de placas são despre-

zadas na teoria clássica de Kirchhoff, o que leva a erros consideráveis quando lida-se com placas espessas. Outro problema da teoria clássica de placas é a inconsistência entre a ordem das equações de equilíbrio governantes e o número de condições de contorno.

Reissner (1945) (REISSNER, 1945) e Mindlin (1951) (MINDLIN, 1951) desenvolveram uma teoria para placas espessas que inclui os efeitos das deformações da força cortante. A teoria de Mindlin é baseada em deslocamentos impostos, enquanto a de Reissner é baseada em tensões impostas. Nessa teoria, pode-se definir três condições de contorno para cada ponto da fronteira ao invés de dois como na teoria clássica, o que elimina a inconsistência da teoria de Kirchhoff no contorno.

Na teoria de Reissner-Mindlin, as fibras retas perpendiculares à superfície média da placa permanecem retas, mas não necessariamente perpendiculares à superfície média, considerando assim, a distorção por força cortante, e permitindo que as rotações sejam independentes dos deslocamentos, relaxando os requisitos de continuidade. As hipóteses de linearidade física e geométrica se mantêm. O modelo de placa de Reissner-Mindlin é o equivalente da viga de Timoshenko (TIMOSHENKO, 1921).

As teorias geometricamente exatas para cascas foram propostas por vários pesquisadores, entre eles Simo e Fox (SIMO; FOX, 1989), Pimenta (PIMENTA, 1993) e Campello, Pimenta e Wriggers (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003), (PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2004). Formulações geometricamente exatas indicam que nenhuma aproximação de natureza geométrica foi realizada. Uma grande dificuldade das teorias exatas se deve às rotações finitas no espaço tridimensional, que não é uma operação comutativa. Assim, as teorias geometricamente exatas tiveram um real desenvolvimento apenas após a obtenção de uma descrição consistente das rotações finitas. Devido à complexidade das análises exatas, seu desenvolvimento também se deve à utilização de métodos numéricos aproximados para análise não linear geométrica de estruturas principalmente em problemas que envolvem grandes deslocamentos e grandes rotações. Assim, as teorias geometricamente exatas são válidas para análises lineares e não lineares de placas finas e espessas, permitindo grandes deslocamentos e grandes rotações.

3.2 HISTÓRICO DO DESENVOLVIMENTO DE ELEMENTOS FINITOS DE PLACAS

Com o surgimento do método dos elementos finitos no final da década de 1950, muitos pesquisadores se dedicaram ao seu estudo, impulsionando seu grande desenvolvimento. Inicialmente, as pesquisas referentes ao método se focaram no desenvol-

vimento dos elementos finitos. No caso de placas sob a ação de momentos fletores, dezenas de elementos foram propostos. Um artigo publicado em 1984 (HRABOK; HRUDEY, 1984) citava 88 elementos de placas desenvolvidos até então. Atualmente, os trabalhos relativos ao método dos elementos finitos têm focado nas suas diversas aplicações. A quantidade de trabalhos propondo novos elementos diminuiu em relação àquela época, porém, no campo de flexão de placas ainda não foi encontrado um elemento considerado o melhor.

Os primeiros elementos propostos para placas na década de 1960 eram do tipo de deslocamentos e baseados na teoria de Kirchhoff para placas finas. Como exemplo, podemos citar o elemento quadrilateral de Adini e Clough (ADINI; CLOUGH, 1960), o elemento quadrilateral de Melosh (MELOSH, 1961), o elemento triangular de Adini (ADINI, 1961), o elemento triangular de Tocher (TOCHER, 1962), o HCT, elemento triangular dividido em três subdomínios para obter compatibilidade interelementos, de (Hsieh), Clough e Tocher (CLOUGH; TOCHER, 1965) e o elemento triangular não conforme de nove graus de liberdade de Bazeley et al. (BAZELEY et al., 1965).

Devido às hipóteses da teoria de Kirchhoff, as rotações e os deslocamentos são acoplados, assim as funções de forma do elemento exigem pelo menos continuidade C^1 , sendo necessária a conformidade para assegurar a convergência do elemento. A conformidade para problemas de placas é difícil de conseguir já que é necessária a continuidade interelementos dos deslocamentos e rotações. Com isso, a maioria dos primeiros elementos de flexão de placas eram não conformes.

A conformidade total é mais fácil de ser obtida com elementos retangulares, como o elemento quadrilateral conforme baseado no uso das funções Hermitianas de Bogner et al. (BOGNER; FOX; JR., 1965). No entanto, esses elementos possuem derivadas segundas de deslocamentos como graus de liberdade. O que se deve à impossibilidade de se obter um elemento conforme usando polinômios simples e apenas os três graus de liberdade geométricos, conforme explicado por Irons e Draper em 1965 (IRONS; DRAPER, 1965).

A maioria dos elementos, no entanto, não passavam no "*Patch test*", que assegura que o elemento converge em análise linear, ou convergiam a resultados incorretos.

A forma mais direta de se obter um elemento de placa conforme é utilizando-se polinômios de ordem mais alta. Exemplos de elementos assim obtidos são os elementos propostos por Argyris et al. (ARGYRIS; FRIED; SCHARPF, 1968), Bell (BELL, 1969), Visser (VISSER, 1969) e Cowper et al. (COWPER et al., 1968).

Na década de 1970, foram propostos elementos baseados na teoria de Reissner-Mindlin para placas espessas. Seguindo as hipóteses dessa teoria, as rotações e des-

locamentos são interpolados separadamente, assim as funções de forma de elementos de placa de Reissner-Mindlin devem satisfazer apenas continuidade C^0 .

Elementos de placas baseados na degeneração de um elemento finito sólido tridimensional impondo as hipóteses estáticas e cinemáticas de placas foram propostos por muitos pesquisadores, pioneiramente por Ahmad et al. (AHMAD; IRONS; ZIENKIEWICZ, 1970) em 1970.

Esses elementos apresentam bons resultados para o cálculo de placas espessas, porém, com a redução da espessura da placa os resultados não tendem aos da teoria clássica de Kirchhoff para placas finas, o elemento torna-se excessivamente rígido caracterizando o fenômeno de travamento de cisalhamento (*shear locking*) e resultando em valores incorretos para as deformações.

O travamento de cisalhamento ocorre em formulações desenvolvidas para barras, placas e cascas espessas que consideram a deformação por cortante, onde o parâmetro dependente é a espessura " t ". Quando a espessura é muito pequena, t tende a zero, os efeitos de travamento podem aparecer levando a baixas taxas de convergência e oferecendo falsos resultados. O travamento de cisalhamento ocorre em elementos de baixa ordem com integração completa, como elementos sólidos, elementos de barra de Timoshenko e elementos de placa de Reissner-Mindlin. No limite, quando a espessura t tende a zero, as soluções analíticas dos modelos de placas espessas tendem à teoria de placas de Kirchhoff. A solução de elementos finitos também é forçada a satisfazer às hipóteses de Kirchhoff, nas quais a deformação por cortante é nula. Quando o elemento não é capaz de apresentar deformações cisalhantes nulas, ocorre o travamento. Esse fenômeno é atribuído a elementos cuja formulação é baseada em deslocamentos. No travamento de cisalhamento a solução converge, mas de forma muito mais lenta. O travamento pode ser evitado com o refinamento da malha ou usando funções de interpolação do elemento de ordens mais altas. No entanto, isso também eleva o tempo de processamento exigido para a análise.

Para resolver os problemas de travamento numérico do método dos elementos finitos, algumas técnicas alternativas têm sido propostas para elementos de baixa ordem como a integração reduzida (ZIENKIEWICZ; TAYLOR; TOO, 1971), (PAWSEY; CLOUGH, 1971), (PUGH; HINTON; ZIENKIEWICZ, 1978), integração seletiva (HUGHES; COHEN, 1978), (MALKUS; HUGHES, 1978), métodos de estabilização dos modos espúrios de energia, métodos híbridos (PIAN; TONG, 1969), (TONG, 1970) e mistos (BREZZI; FORTIN, 1991), como o ANS e o EAS.

O método mais simples para evitar o travamento é o método de integração reduzida, na qual são adicionados menos valores à matriz de rigidez, tornando-a "menos

rígida". A integração reduzida aumenta a eficiência computacional. No entanto, os resultados obtidos por elementos com integração reduzida podem ser insatisfatórios devido à excitação de modos espúrios de deformação (*hourglass*), decorrentes da excessiva flexibilidade do elemento. Com isso, é necessário um controle dos modos espúrios na utilização de elementos com integração reduzida. Os modos espúrios podem ser solucionados adicionando uma rigidez artificial ao elemento. Essa rigidez deve ser cuidadosamente escolhida de forma a atuar apenas nos modos espúrios. Quando é utilizada a integração reduzida em apenas uma parte da matriz de rigidez, aquela responsável pelo travamento da estrutura, tem-se a integração reduzida seletiva.

Nos métodos híbridos e mistos, que inclui os métodos ANS e EAS, uma ou mais suposições de campos independentes para deformações, tensões e deslocamentos incompatíveis podem ser assumidos, juntamente com a aproximação usual dos deslocamentos. Nesta formulação é possível obter boas soluções dos campos de tensão e deslocamentos, aproveitando-se da redução do requerimento de continuidade dos campos aproximados. Nos modelos híbridos, definem-se aproximações independentes no domínio e na fronteira do elemento. Já nos modelos mistos define-se mais do que uma aproximação independente no domínio de cada elemento. Vantagens da utilização de formulações não convencionais de elementos finitos incluem uma maior flexibilidade na escolha das funções de aproximação e uma definição independente das aproximações dos diferentes campos, possibilitando a adoção de aproximações com diferentes graus.

O método ANS (*Assumed Natural Strain*) utiliza campos de deformações assumidas no lugar das deformações obtidas da interpolação dos deslocamentos antes de efetuar a integração. A ideia principal do método ANS é assumir um campo de deformações independente do campo de deslocamentos. O elemento bilinear de casca de 4 nós, MITC4 (*Mixed Interpolated Tensorial Component*) de Dvorkin e Bathe (DVORKIN; BATHE, 1984) é considerado o elemento ANS mais simples e é uma das formulações de cascas mais conhecidas.

O método EAS (*Enhanced Assumed Strain*), proposto por Simo e Rifai (SIMO; RIFAI, 1990) adota um funcional de três campos, deslocamentos, tensões e deformações aprimorado, baseado no princípio variacional de Hu-Washizu. O campo de deformações aprimorado não requer continuidade interelementos. O EAS funciona bem contra o travamento de cisalhamento e o travamento volumétrico e oferece bons resultados em malhas grosseiras (WRIGGERS; KORELC, 1996).

Na tentativa de simplificação dos elementos de placas, foram propostas formu-

lações que não utilizam nenhuma dessas técnicas numéricas. Dentre elas, o T6-3i (CAMPELLO, 2005), incompatível em relação ao campo de rotações e com interpolação quadrática do campo de deslocamentos, o que o torna suficientemente flexível, apresentando bons resultados em vários casos analisados.

Ao longo das últimas décadas foram formulados inúmeros elementos finitos para análise de placas. As formulações de elementos finitos lidam bem com o campo de deslocamentos mas geralmente faltam testes que possam validar os resultados obtidos para o campo das tensões. Este trabalho analisa o elemento finito T6-3i em relação aos seus resultados de tensões.

3.3 FORMULAÇÃO DA TEORIA DE PLACAS FINAS

A formulação da teoria de placas finas é aqui apresentada para servir como base de comparações com os resultados obtidos pelos métodos numéricos.

Partindo das equações da teoria da elasticidade, Kirchhoff propôs algumas hipóteses a fim de simplificar a obtenção da solução para placas finas.

São elas:

- linearidade física (o material é homogêneo, isotrópico e elástico linear);
- linearidade geométrica (hipótese de pequenos deslocamentos e pequenas deformações, permitindo que as condições de equilíbrio sejam estabelecidas com base na configuração indeformada da estrutura);
- fibras retas inicialmente perpendiculares à superfície média da placa permanecem retas após a deformação e perpendiculares à superfície média (despreza-se assim a deformação por esforço cortante);
- a tensão na direção normal à superfície média pode ser desprezada;
- a superfície média da placa permanece indeformável durante a flexão e a espessura não varia.

Aplicando-se essas hipóteses nas equações gerais da elasticidade, transforma-se o problema de análise tridimensional em um problema bidimensional, chegando-se à equação linear diferencial parcial de Germain-Lagrange (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959):

$$\nabla^4 w = \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D} \quad (76)$$

onde w é a deflexão da placa, q é o carregamento externo,

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \quad (77)$$

é a rigidez flexional da placa, E é o módulo de elasticidade do material, ν é o coeficiente de Poisson, h é a espessura da placa e

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2\frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4} \quad (78)$$

é o operador biarmônico.

Essa equação representa a deflexão de uma placa de material homogêneo e isotrópico. É uma equação diferencial parcial de quarta ordem e tem solução analítica difícil de ser obtida, a menos quando a geometria e as condições de contorno são simples.

Os momentos de flexão, M_x e M_y , de torção, M_{xy} , e as forças cortantes, Q_x e Q_y , por unidade de comprimento são obtidos do campo de deflexões através das equações:

$$M_x = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (79)$$

$$M_y = -D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (80)$$

$$M_{xy} = -D(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} = -M_{yx} \quad (81)$$

$$Q_x = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right) \quad (82)$$

$$Q_y = -D \left(\frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} \right) \quad (83)$$

3.3.1 Placas circulares

As placas circulares possuem solução analítica exata. As deduções para as deflexões das placas para diferentes vinculações e carregamentos podem ser obtidas facilmente na literatura, como em (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959). Tais deflexões foram aqui passadas para coordenadas cartesianas para maior facilidade de comparação com os resultados obtidos pelos programas PEFSYS e ANSYS®, que os oferecem em coordenadas cartesianas.

Placa circular engastada com carga distribuída

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{q}{64D}(x^2 + y^2 - a^2)^2 \\
 M_x &= \frac{q}{16}(a^2(\nu + 1) - x^2(\nu + 3) - y^2(3\nu + 1)) \\
 M_y &= \frac{q}{16}(a^2(\nu + 1) - x^2(3\nu + 1) - y^2(\nu + 3)) \\
 M_{xy} &= \frac{q}{8}(1 - \nu)xy \\
 Q_x &= \frac{q}{2}x \\
 Q_y &= \frac{q}{2}y
 \end{aligned} \tag{84}$$

Placa circular simplesmente apoiada com carga distribuída

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{q(a^2 - x^2 - y^2)}{64D} \left(\frac{5 + \nu}{1 + \nu} a^2 - x^2 - y^2 \right) \\
 M_x &= \frac{q}{16(\nu + 1)} ((x^2 - a^2)(3 + 4\nu + \nu^2) + y^2(1 + 4\nu + 3\nu^2)) \\
 M_y &= \frac{q}{16(\nu + 1)} ((y^2 - a^2)(3 + 4\nu + \nu^2) + x^2(1 + 4\nu + 3\nu^2)) \\
 M_{xy} &= \frac{q}{8}(1 - \nu)xy \\
 Q_x &= \frac{q}{2}x \\
 Q_y &= \frac{q}{2}y
 \end{aligned} \tag{85}$$

Placa circular engastada com carga concentrada

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{16\pi D} \left(2(x^2 + y^2) \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) + a^2 - (x^2 + y^2) \right) \\
 M_x &= \frac{P}{8\pi(x^2 + y^2)} \left((\nu + 1)(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + (2\nu - 2\nu \ln(a) - 2\ln(a))y^2 + (2 - 2\nu \ln(a) - 2\ln(a))x^2 \right) \\
 M_y &= \frac{P}{8\pi(x^2 + y^2)} \left((\nu + 1)(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + (2\nu - 2\nu \ln(a) - 2\ln(a))x^2 + (2 - 2\nu \ln(a) - 2\ln(a))y^2 \right) \\
 M_{xy} &= \frac{P(\nu - 1)xy}{4\pi(x^2 + y^2)} \\
 Q_x &= \frac{Px}{2\pi(x^2 + y^2)} \\
 Q_y &= \frac{Py}{2\pi(x^2 + y^2)}
 \end{aligned} \tag{86}$$

Placa circular simplesmente apoiada com carga concentrada

$$\begin{aligned}
 w &= \frac{P}{16\pi D} \left(\frac{3 + \nu}{1 + \nu} (a^2 - x^2 - y^2) + 2(x^2 + y^2) \ln \left(\frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{a} \right) \right) \\
 M_x &= \frac{P}{8\pi(x^2 + y^2)} \left((\nu + 1)(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + (2\nu - 2\nu \ln(a) - 2\ln(a) - 2)y^2 + (-2\ln(a)(\nu + 1))x^2 \right) \\
 M_y &= \frac{P}{8\pi(x^2 + y^2)} \left((\nu + 1)(x^2 + y^2) \ln(x^2 + y^2) + (2\nu - 2\nu \ln(a) - 2\ln(a) - 2)x^2 + (-2\ln(a)(\nu + 1))y^2 \right) \\
 Q_x &= \frac{Px}{4\pi(x^2 + y^2)} \\
 Q_y &= \frac{Py}{2\pi(x^2 + y^2)}
 \end{aligned} \tag{87}$$

3.3.2 Placas retangulares

As placas retangulares não possuem solução analítica exata. As cargas e deflexões podem ser obtidas através de séries, como as soluções de Navier para placas simplesmente apoiadas. Deve-se atentar que a origem do sistema de coordenadas dessa solução encontra-se no ponto de encontro das bordas inferior e esquerda e não no ponto central da placa. A convergência das séries é geralmente rápida para o caso de carregamentos distribuídos, no entanto, a convergência pode tornar-se lenta para carregamentos concentrados.

Pela solução de Navier para placas retangulares simplesmente apoiadas, a deflexão é dada por:

$$w = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \quad (88)$$

onde

$$K_{mn} = \frac{a_{mn}}{D\pi^4 \left(\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{L_y^2} \right)^2}$$

com L , o lado maior da placa e L_y , o lado menor da placa.

Com isso, tem-se:

$$\begin{aligned} M_x &= \pi^2 D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} \left(\left(\frac{n}{L} \right)^2 + \nu \left(\frac{m}{L_y} \right)^2 \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \\ M_y &= \pi^2 D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} \left(\left(\frac{m}{L_y} \right)^2 + \nu \left(\frac{n}{L} \right)^2 \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \\ M_{xy} &= \pi^2 D (1 - \nu) \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} \frac{mn}{L_y L} \cos \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \\ Q_x &= \pi^3 D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} \left(\left(\frac{n}{L} \right)^3 + \frac{n}{L} \left(\frac{m}{L_y} \right)^2 \right) \cos \frac{n\pi x}{L} \sin \frac{m\pi y}{L_y} \\ Q_y &= \pi^3 D \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=1}^{\infty} K_{mn} \left(\left(\frac{m}{L_y} \right)^3 + \frac{m}{L_y} \left(\frac{n}{L} \right)^2 \right) \sin \frac{n\pi x}{L} \cos \frac{m\pi y}{L_y} \end{aligned} \quad (89)$$

Para o caso de um carregamento uniformemente distribuído:

$$a_{mn} = \frac{16q}{\pi^2 mn}, \quad \text{com } n, m = 1, 3, 5... \quad (90)$$

Para o caso de um carregamento concentrado:

$$a_{mn} = \frac{4P}{L \cdot L_y} \sin \frac{n\pi a}{L} \sin \frac{m\pi b}{L_y}, \quad \text{com } a = L/2 \text{ e } b = L_y/2 \quad (91)$$

Para o caso de placas com todos os bordos engastados, a solução analítica é mais complicada, sobrepondo resultados de deflexões para bordos apoiados com deflexões de uma placa com momentos aplicados nas bordas. Para tais situações é possível encontrar tabelas para a obtenção dos momentos em pontos determinados das placas, usualmente no ponto central e nos pontos do meio dos lados da placa, como em fórmulas dadas por Timoshenko (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959) e por Bares (BARES; ARIAS; KAPPELMACHER, 1981).

3.4 TESTES NUMÉRICOS COM O T6-3I

O elemento finito T6-3i foi analisado em relação a seus resultados de tensões, comparando-os com as teorias analíticas de placas, resultados de tabelas para o cálculo de momentos em placas retangulares e resultados obtido com o ANSYS®, um software comercial para análise estrutural.

O T6-3i está codificado no programa de elementos finitos PEFSYS, em linguagem FORTRAN 90/2003, desenvolvido no Laboratório de Mecânica Computacional da Escola Politécnica da USP. O PEFSYS utiliza como interface gráfica para pré- e pós-processamento das análises o programa GiD da Universidade Politécnica de Catalunha (Espanha). Facilitando a modelagem computacional de estruturas e a visualização dos resultados.

Buscou-se analisar placas de diferentes geometrias submetidas a condições de vinculação e carregamentos variados, obtendo-se os esforços correspondentes.

Definiu-se duas geometrias (ver figuras 3 e 4), a primeira dada por placas circulares de raio $a = 1$ m e espessura $h = 0.01$ m, e a segunda geometria definida para placas retangulares com lado maior $L = 4$ m e lado menor $L_y = 2$ m e espessura $h = 0.01$ m. Duas condições de vinculações foram analisadas, placas com todo o seu contorno engastado e placas com todo o seu contorno simplesmente apoiado. E duas condições de carregamento: carregamento uniformemente distribuído $q = 1$ N/m² e carregamento concentrado $P = 1$ N aplicado no ponto central da placa. Considerou-se, para todos os casos, material com módulo de elasticidade $E = 2.10^{11}$ N/m² e coeficiente de Poisson $\nu = 0.3$. Todas as análises estão sob linearidade geométrica. Nas placas simplesmente apoiadas, os graus de liberdade dos nós do meio das arestas dos elementos da borda externa da placa foram todos liberados para a obtenção dos esforços.

Figura 3 - Vinculações e carregamentos - placas circulares [E: engastada; A: simplesmente apoiada; D: carregamento distribuído; C: carregamento concentrado]

Figura 4 - Vinculações e carregamentos - placas retangulares [E: engastada; A: simplesmente apoiada; D: carregamento distribuído; C: carregamento concentrado]

Para o cálculo por elementos finitos, diferentes discretizações foram utilizadas. Os quadrantes das placas circulares tiveram todos os seus lados divididos em 10, 20, 30 ou 40 elementos, conforme figura 5. Os quadrantes das placas retangulares tiveram seus lados maiores divididos em 10, 20, 30 ou 40 elementos, e seus lados menores em 5, 10, 15 ou 20 elementos respectivamente, conforme figura 6.

Figura 5 - Discretizações - placas circulares

Figura 6 - Discretizações - placas retangulares

O PEFSYS oferece 12 resultados de esforços por unidade de comprimento para um

elemento de casca, dados pelo vetor:

$$\sigma = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \end{bmatrix}, \quad \sigma_1 = \begin{bmatrix} n_{11} \\ n_{12} \\ n_{13} \\ m_{11} \\ m_{12} \\ m_{13} \end{bmatrix}, \quad \sigma_2 = \begin{bmatrix} n_{21} \\ n_{22} \\ n_{23} \\ m_{21} \\ m_{22} \\ m_{23} \end{bmatrix} \quad (92)$$

no qual σ_1 são os esforços da face cuja normal é paralela ao eixo 1 e σ_2 são os esforços da face cuja normal é paralela ao eixo 2. As três primeiras componentes representam as forças e as três últimas, os momentos, conforme figura 7.

Figura 7 - Esforços

Para comparações dos resultados, os mesmos casos foram calculados com o programa ANSYS®, nos quais foram utilizados elementos finitos do tipo shell281 com 8 nós, e discretização mostrada na figura 8, na qual o quadrante da placa circular tem cada um de seus bordos de simetria divididos em 40 elementos, totalizando 1375 elementos, e o quadrante da placa retangular tem seu lado maior dividido em 40 elementos e seu lado menor dividido em 20 elementos, resultando 800 elementos.

Figura 8 - Discretizações - ANSYS®

O elemento finito shell281 (ANSYS, 2009) é um elemento de casca estrutural de 8 nós, desenvolvido para analisar estruturas de cascas finas a moderadamente espessas, incluindo em sua formulação a hipótese de Reissner-Mindlin. O elemento possui oito nós com seis graus de liberdade por nó: deslocamentos nos eixos x , y e z , e rotações sobre os eixos x , y e z . O elemento pode ser utilizado em análises lineares e não lineares e considera a variação da espessura. A geometria, localização dos nós (I,J,K,L,M,N,O,P) e sistema de coordenadas do elemento estão mostrados na figura 9. O elemento pode ser degenerado para um formato triangular mesclando os nós K, L e O, porém não é recomendado para maior acurácia. A formulação do elemento é baseada em deformações logarítmicas e medida das tensões verdadeiras.

Figura 9 - Elemento finito shell281 (ANSYS, 2009)

3.4.1 Esforços de flexão

Os esforços de flexão da placa, M_x - momento de flexão no plano XZ e M_y - momento de flexão no plano YZ, são dados pelo PEFSYS pelos esforços m_{12} e m_{21} , respectivamente.

Placas circulares com carregamento distribuído

Sendo (0,0) o ponto central da placa de raio 1 m, os esforços de flexão estão plotados nos gráficos da figura 10 em função da distância do centro da placa. Nas placas circulares, os valores do momento M_x nos pontos do eixo para $x = 0$ são os mesmos valores do momento M_y no eixo $y = 0$, com sinal contrário. Os resultados para os esforços de flexão obtidos pelo PEFSYS são muito próximos aos resultados analíticos e aos resultados obtidos pelo ANSYS®, reduzindo a diferença entre eles com o refinamento da malha. A borda, no entanto, necessita de um maior refinamento em relação ao resto da malha para se aproximar da solução analítica, problema comum a elementos de casca.

Figura 10 - Gráficos ($y = 0$) - M_x e M_y - placas circulares com carregamento distribuído

Placas circulares com carregamento concentrado

Para os casos de um carregamento concentrado aplicado no centro da placa circular (figura 11), não há necessidade de refinamento maior na borda. Porém, no centro da placa, no ponto de aplicação do carregamento, quanto maior o refinamento da malha, maior, em módulo, o valor do esforço obtido. Não é possível obter o valor dos esforços de flexão nesse ponto, já que teoricamente eles tendem a infinito, tal como

acontece ao se refinar a malha.

Figura 11 - Gráficos ($y = 0$) - M_x e M_y - placas circulares com carregamento concentrado

Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Para o caso de placas retangulares com carregamento distribuído (figura 12a), surge também a necessidade de maior refinamento na borda para melhor obtenção dos esforços de flexão. Os resultados obtidos pelo PEFSYS se aproximam dos resultados analíticos conforme temos malhas mais refinadas.

Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento concentrado

A solução analítica pela solução de Navier permite o cálculo do valor dos esforços no ponto de aplicação do carregamento concentrado. O resultado apresentado foi obtido variando os índices m e n de 1 a 20. Conforme refinamos a malha, o valor dos esforços nesses pontos aumentam em módulo, ultrapassando o valor analítico obtido, como pode ser visto na figura 12b.

Figura 12 - M_x e M_y ($y = 0$) - Placa retangular simplesmente apoiada

Placa retangular engastada com carregamento distribuído

Cálculos analíticos para placas com todos os bordos engastados são difíceis de se obter. Para tais situações alguns autores oferecem soluções para pontos determinados. No caso da placa retangular com todos os bordos engastados submetida a um carregamento distribuído, temos soluções para o ponto central da placa, e para os pontos nos meios dos lados. Foram calculados os momentos através de fórmulas dadas por Timoshenko (TIMOSHENKO; WOINOWSKY-KRIEGER, 1959) e por Bares (BARES; ARIAS; KAPPELMACHER, 1981), que resultam muito próximos, no ponto central e no ponto do meio da borda. Os valores obtidos pelo PEFSYS estão muito próximos aos analíticos no ponto central da placa, no entanto nas bordas, mostra-se necessário maior refinamento da malha. A figura 13 mostra esses resultados.

Figura 13 - M_x ($y = 0$) e M_y ($x = 0$) - placa retangular engastada com carregamento distribuído

Placa retangular engastada com carregamento concentrado

Não foi possível obter resultados analíticos para uma placa retangular com todos os bordos engastados e com um carregamento concentrado atuando no ponto central. Comparando os resultados obtidos pelo PEFSYS e pelo ANSYS®, obtemos soluções próximas (figura 14). Diferentes discretizações oferecem diferentes resultados próximo ao ponto de aplicação do carregamento.

Figura 14 - M_x ($y = 0$) e M_y ($x = 0$) - placa retangular engastada com carregamento concentrado

3.4.2 Esforços de torção

Os esforços de torção da placa, M_{xy} e M_{yx} , são dados pelo PEFSYS pelos esforços m_{11} e m_{22} , respectivamente.

Placas circulares com carregamento distribuído

Os esforços de torção, analisados segundo o eixo $x = y$, apresentam bons resultados, com necessidade de melhor refinamento nas bordas. Os valores dos esforços de torção não variam com a vinculação da borda (figura 15).

Figura 15 - Gráficos $(x = y)$ - M_{xy} - placas circulares com carregamento distribuído

Placas circulares com carregamento concentrado

Analiticamente, não é possível calcular o valor do momento de torção no ponto de aplicação do carregamento, mas sabe-se que fora desse ponto, ele toma um valor constante segundo uma direção radial. Para malhas grosseiras, os valores do momento torçor varia de forma decrescente até atingir o valor constante. Para malhas mais refinadas, calculadas com o PEFSYS, surge uma região de máximo local próxima do ponto de aplicação do carregamento. Os resultados obtidos pelo ANSYS® não apresentam esse comportamento, oferecendo valores diferentes para essa região de singularidade, como pode ser visto na figura 16.

Figura 16 - Gráficos $(x = y)$ - M_{xy} - placas circulares com carregamento concentrado

Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Para os casos de placas retangulares simplesmente apoiadas submetidas a um carregamento uniformemente distribuído (figura 17a), os resultados obtidos são bons, porém com o problema de borda, resolvido com maior refinamento da malha na região.

Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento concentrado

O carregamento concentrado é uma singularidade difícil de ser modelada em problemas de cascas. A solução analítica por séries de Navier oferece um valor nulo de esforço de torção no centro da placa simplesmente apoiada, independente do carregamento. Porém, próximo a esse ponto, a solução de Navier tem valores oscilantes para o carregamento concentrado. Os resultados obtidos pelo PEFSYS passam todos por um pico de mesma intensidade, que se aproximam mais do ponto de aplicação do carregamento conforme aumenta o refinamento da malha. No ponto central, os valores aumentam, em módulo, com o maior refinamento. Os valores obtidos pelo ANSYS® apresentam também um leve pico, mas no ponto de aplicação do carregamento deve ter um tratamento para que seus valores não cresçam tanto como no PEFSYS (figura 17b).

(a) carregamento distribuído

(b) carregamento concentrado

Figura 17 - M_{xy} ($x = 2y$) - placa retangular simplesmente apoiada

Placa retangular engastada com carregamento distribuído

Os esforços de torção obtidos pelo PEFSYS foram comparados com os resultados do ANSYS® e apresentam boa aproximação com o refinamento da malha (figura 18a).

Placa retangular engastada com carregamento concentrado

O mesmo comportamento apresentado no caso da placa simplesmente apoiada ocorre com a placa engastada para o carregamento concentrado (figura 18b). No ponto de aplicação, os valores tendem a crescer com o refinamento da malha, e próximo a esse ponto, passam por um região de máximo local. Os resultados do ANSYS® têm um pico menor e não apresentam a queda abrupta no ponto de aplicação do carregamento.

Figura 18 - $M_{xy} (x = 2y)$ - placa retangular engastada

3.4.3 Esforços cortantes

Os esforços cortantes da placa, Q_x - cortante em seção de normal X e Q_y - cortante em seção de normal Y, são dados pelo PEFSYS pelos esforços n_{13} e n_{23} , respectivamente.

Placas circulares com carregamento distribuído

Para as condições de simetria simuladas, os esforços cortantes apresentam picos bastante acentuados nas duas pontas dos lados que definem a simetria (figura 19).

Caso a placa fosse modelada inteira, esses picos não apareceriam. Os resultados calculados pelo PEFSYS apresentam valores oscilantes a medida que se aproxima da borda, quanto mais grosseira a malha, maior essa oscilação.

Figura 19 - Gráficos ($y = 0$) - Q_x - placas circulares com carregamento distribuído

Placas circulares com carregamento concentrado

No ponto de aplicação do carregamento concentrado, a solução analítica para o esforço cortante tende a infinito (figura 20). O mesmo acontece a medida que aumenta o refinamento da malha. O ANSYS® apresenta algum tratamento para evitar esse problema. Perto desse ponto, os resultados do PEFSYS apresentam uma oscilação nos valores.

Figura 20 - Gráficos ($y = 0$) - Q_x - placas circulares com carregamento concentrado

Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Para a placa retangular com os bordos simplesmente apoiados submetida a um carregamento distribuído (figura 21), os resultados obtidos pelo PEFSYS apresentam variações extremas no interior dos elementos da borda. No eixo $y = 0$, no entanto, os resultados seguem a mesma tendência que as placas circulares, problemas de ponta pelas condições de simetria e oscilações próximas à borda da placa, reduzidas com o refinamento da malha. O ANSYS® não apresenta essa grande variação no interior dos elementos da borda, e os resultados obtidos são melhor visualizados.

Figura 21 - Q_x ($y = 0$) e Q_y ($x = 0$) - placa retangular simplesmente apoiada com carregamento distribuído

Placa retangular simplesmente apoiada com carregamento concentrado

Os esforços cortantes calculados pela solução de Navier para placas apoiadas oferecem resultados nulos no ponto central independentemente do carregamento aplicado (figura 22). Para a quantidade de termos utilizada nos cálculos, m e n variando de 1 a 20, os valores analíticos apresentam oscilações, demonstrando convergência lenta, tanto pelo fato de se estar calculando o esforço cortante, quanto pelo fato de ser um carregamento concentrado. Os esforços calculados pelo PEFSYS tendem a aumentar com o refinamento da malha no ponto de aplicação do carregamento.

Figura 22 - Q_x ($y = 0$) e Q_y ($x = 0$) - placa retangular simplesmente apoiada com carregamento concentrado

Placa retangular engastada com carregamento distribuído

Os esforços cortantes calculados pelo PEFSYS apresentam uma ligeira queda nos valores ao aproximarem-se da borda, como mostra a figura 23. Conforme a distância do centro da placa aumenta, mais os valores obtidos pelo PEFSYS se distanciam dos valores obtidos pelo ANSYS®.

Figura 23 - Gráficos - Q_x e Q_y - placa retangular engastada com carregamento distribuído

Placa retangular engastada com carregamento concentrado

Para o carregamento concentrado, os valores dos esforços cortantes tendem a crescer conforme se refina a malha, tendendo a infinito, problema que o ANSYS® resolve de alguma forma (figura 24). Próximo ao ponto de aplicação do carregamento, os valores obtidos pelo PEFSYS apresentam uma oscilação em torno dos valores fornecidos pelo ANSYS®. Longe do carregamento, os valores apresentam-se satisfató-

rios.

(a) Gráfico Q_x ($y = 0$)

(b) Gráfico Q_y ($x = 0$)

Figura 24 - Gráficos - Q_x e Q_y - placa retangular engastada com carregamento concentrado

4 DINÂMICA DE CASCAS

4.1 INTRODUÇÃO

A simulação de estruturas avançadas de cascas, como estruturas dobráveis e multiestáveis (ver seção 1.1), não é uma tarefa trivial: a estrutura passa por vários saltos dinâmicos de uma configuração estável para outra. Nesses casos, é necessária a utilização de métodos como o *Arc-length* ou uma formulação dinâmica para fazer tais simulações.

Neste capítulo é apresentada uma formulação geometricamente exata, com o objetivo de utilizar o elemento finito T6-3i para a análise dinâmica de estruturas de cascas sob não linearidade geométrica, que envolvem grandes deslocamentos e grandes rotações.

É utilizado um modelo Lagrangiano atualizado para trabalhos virtuais, de forma que a limitação do ângulo de rotação, que deve estar restrito entre $-\pi < \theta < \pi$, devido à definição (1) na parametrização com o vetor rotação de Rodrigues, não tenha influência, já que as rotações não excederiam π dentro de um único incremento de tempo.

Exemplos numéricos da deformação de um domo fino são apresentados, incluindo domos com vincos (BENDE et al., 2015). O elemento finito triangular de casca usado, o T6-3i, oferece grande flexibilidade para a geração das malhas curvas não estruturadas, bem como bom resultados.

4.2 CINEMÁTICA

Neste capítulo, o tensor das rotações $\mathbf{Q}$ é expresso em termos dos parâmetros de rotação de Rodrigues, como na seção 2.2.

A figura 25 (adaptada de (MOREIRA, 2009)) mostra o modelo atualizado de casca. Assume-se que a superfície média da casca é plana na configuração inicial de referência. Nessa configuração, é definido um sistema ortonormal local $\{\mathbf{e}_1^r, \mathbf{e}_2^r, \mathbf{e}_3^r\}$, com coordenadas $\{\xi_1, \xi_2, \zeta\}$. Os vetores $\mathbf{e}_\alpha^r$ ($\alpha = 1, 2$) localizam-se sobre a superfície média da casca e $\mathbf{e}_3^r$ é normal a essa superfície.

Nessa configuração de referência, a posição $\boldsymbol{\xi}$ de qualquer ponto material pode ser descrita pelo campo vetorial:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \mathbf{a}^r \quad (93)$$

Figura 25 - Modelo atualizado de casca (adaptada de (MOREIRA, 2009))

onde o vetor $\zeta = \xi_\alpha \mathbf{e}_\alpha^r$ descreve a posição dos pontos na superfície média de referência e $\mathbf{a}^r = \zeta \mathbf{e}_3^r$ é o diretor da casca, com $\zeta \in H = [-h^b, h^t]$ sendo a coordenada da espessura e $h = h^b + h^t$ a espessura da casca na configuração de referência.

No instante " i ", é definido um sistema ortonormal local $\{\mathbf{e}_1^i, \mathbf{e}_2^i, \mathbf{e}_3^i\}$, com $\mathbf{e}_i^i = \mathbf{Q} \mathbf{e}_i^r$ (ver figura 25), com $\mathbf{e}_3^i$ alinhado com o diretor nesse instante e $\mathbf{e}_\alpha^i$ normal a ele. Ressalta-se que o diretor não é necessariamente normal à superfície média deformada, considerando assim as deformações cisalhantes de primeira ordem. Um ponto material qualquer nessa configuração pode ser descrito por:

$$\mathbf{x}^i = \mathbf{z}^i + \mathbf{a}^i \quad (94)$$

onde $\mathbf{z}^i = \hat{\mathbf{z}}(\xi_\alpha)$ é a posição de um ponto material na superfície média e $\mathbf{a}^i$ é o diretor nesse ponto, obtido por $\mathbf{a}^i = \mathbf{Q} \mathbf{a}^r$.

Similarmente, a posição de qualquer ponto material na configuração no instante " $i+1$ ", o final do passo de tempo presente, é descrito por:

$$\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1} + \mathbf{a}^{i+1} \quad (95)$$

Aqui $\mathbf{a}^{i+1} = \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{a}^i$, onde $\mathbf{Q}^\Delta$ é o tensor representando a rotação entre os instantes " i " e " $i+1$ ". O índice " Δ " refere-se a grandezas que relacionam os instantes " $i+1$ " e

" i ". Como $\mathbf{a}^i = \zeta \mathbf{e}_3^i$, logo, $\mathbf{x}^{i+1} = \mathbf{z}^{i+1} + \zeta \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{e}_3^i$, e diferenciando essa expressão no tempo, pode-se obter o vetor velocidade de qualquer ponto material:

$$\dot{\mathbf{x}}^{i+1} = \dot{\mathbf{z}}^{i+1} + \zeta \dot{\mathbf{Q}}^\Delta \mathbf{e}_3^i = \dot{\mathbf{z}}^{i+1} + \zeta \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1} \quad (96)$$

O deslocamento associado a qualquer ponto da superfície média é dado pelo vetor $\mathbf{u}$, que pode ser atualizado através de:

$$\mathbf{u}^{i+1} = \mathbf{u}^i + \mathbf{u}^\Delta \quad (97)$$

As rotações podem ser atualizadas por (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2011):

$$\boldsymbol{\alpha}^{i+1} = \frac{4}{4 - \boldsymbol{\alpha}^\Delta \cdot \boldsymbol{\alpha}^i} \left(\boldsymbol{\alpha}^\Delta + \boldsymbol{\alpha}^i + \frac{1}{2} \boldsymbol{\alpha}^\Delta \times \boldsymbol{\alpha}^i \right) \quad (98)$$

onde $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$ é o vetor rotação que ocorre da configuração " i " à configuração " $i + 1$ ".

4.3 DEFORMAÇÕES

Os vetores das deformações são calculados na configuração de referência, dessa forma, não são afetados por movimento de corpo rígido, evitando problemas de objetividade. Usando a notação $(\bullet)_{,\alpha} = \partial(\bullet)/\partial \xi_\alpha$ e $(\bullet)' = \partial(\bullet)/\partial \zeta$, pode-se definir os vetores das deformações da casca. O vetor das deformações translacionais $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ no instante " $i + 1$ " é dado por:

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1} = \mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^{i+1} \quad (99)$$

seu equivalente retrorrotacionado é obtido multiplicando ambos os lados de (99) por $\mathbf{Q}^{i+1^T}$:

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^{i+1^r} = \mathbf{Q}^{i+1^T} \mathbf{z}_{,\alpha}^{i+1} - \mathbf{e}_\alpha^r \quad (100)$$

Utilizando (9), pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha^{i+1} = \text{axial}(\mathbf{Q}_{,\alpha}^{i+1} \mathbf{Q}^{i+1^T}) \quad (101)$$

O tensor rotação no instante " $i + 1$ " é dado por:

$$\mathbf{Q}^{i+1} = \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{Q}^i \quad (102)$$

onde Q^Δ é o tensor que representa a rotação entre os instantes de tempo " i " e " $i + 1$ ", e Q^i é o tensor rotação no instante " i ". Derivando (102), obtém-se:

$$Q_{,\alpha}^{i+1} = Q_{,\alpha}^\Delta Q^i + Q^\Delta Q_{,\alpha}^i \quad (103)$$

A transposta de (102) é dada por:

$$Q^{i+1T} = Q^{iT} Q^{\Delta T} \quad (104)$$

Assim, (101) pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \kappa_\alpha^{i+1} &= axial((Q_{,\alpha}^\Delta Q^i + Q^\Delta Q_{,\alpha}^i)(Q^{iT} Q^{\Delta T})) \\ &= axial(Q_{,\alpha}^\Delta Q^{\Delta T} + Q^\Delta Q_{,\alpha}^i Q^{iT} Q^{\Delta T}) \\ &= axial(Q_{,\alpha}^\Delta Q^{\Delta T}) + Q^\Delta axial(Q_{,\alpha}^i Q^{iT}) \end{aligned} \quad (105)$$

Sendo que $\kappa_\alpha^\Delta = axial(Q_{,\alpha}^\Delta Q^{\Delta T}) = \Xi^\Delta \alpha_{,\alpha}^\Delta$ e $\kappa_\alpha^i = axial(Q_{,\alpha}^i Q^{iT})$, (105) resulta:

$$\kappa_\alpha^{i+1} = \Xi^\Delta \alpha_{,\alpha}^\Delta + Q^\Delta \kappa_\alpha^i \quad (106)$$

o vetor retrorrotacionado das rotações específicas no instante " $i + 1$ " é obtido multiplicando ambos os lados de (106) por Q^{i+1T} :

$$\kappa_\alpha^{i+1r} = Q^{iT} \Xi^{\Delta T} \alpha_{,\alpha}^\Delta + \kappa_\alpha^{ir} \quad (107)$$

com

$$\Xi^\Delta = \frac{4}{4 + (\alpha^\Delta)^2} \left(I + \frac{1}{2} A^\Delta \right) \quad (108)$$

onde A^Δ é o tensor antissimétrico de α^Δ . O vetor das deformações generalizadas retrorrotacionado para a configuração de referência pode ser escrito como:

$$\epsilon^{i+1r} = \begin{bmatrix} \epsilon_1^{i+1r} \\ \epsilon_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \epsilon_\alpha^{i+1r} = \begin{bmatrix} \eta_\alpha^{i+1r} \\ \kappa_\alpha^{i+1r} \end{bmatrix} \quad (109)$$

Diferenciando (109) no tempo, resulta:

$$\dot{\epsilon}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \dot{\epsilon}_1^{i+1r} \\ \dot{\epsilon}_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \dot{\epsilon}_\alpha^{i+1r} = \begin{bmatrix} \dot{\eta}_\alpha^{i+1r} \\ \dot{\kappa}_\alpha^{i+1r} \end{bmatrix} \quad (110)$$

que pode ser reescrito como:

$$\dot{\epsilon}_\alpha^{i+1r} = \Lambda^{i+1T} \Phi^{i+1} Y^\Delta \Delta \dot{d}^\Delta \quad (111)$$

onde

$$\mathbf{\Lambda}^{i+1} = \begin{bmatrix} Q^{i+1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & Q^{i+1} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & Q^{i+1} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{O} & Q^{i+1} \end{bmatrix} \quad (112)$$

$$\mathbf{\Phi}^{i+1} = \begin{bmatrix} \mathbf{\Phi}_1 & \mathbf{O}_{6 \times 9} \\ \mathbf{O}_{6 \times 9} & \mathbf{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{\Phi}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{Z}_{,\alpha}^{i+1} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} & \mathbf{O} \end{bmatrix} \quad (113)$$

onde $\mathbf{Z}^{i+1} = \text{skew}(\mathbf{z}^{i+1})$

$$\mathbf{Y}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1^\Delta & \mathbf{O}_{9 \times 9} \\ \mathbf{O}_{9 \times 9} & \mathbf{Y}_2^\Delta \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{Y}_\alpha^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{I} & \mathbf{O} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{\Xi}^\Delta & \mathbf{\Xi}_{,\alpha}^\Delta \\ \mathbf{O} & \mathbf{O} & \mathbf{\Xi}^\Delta \end{bmatrix} \quad (114)$$

$$\mathbf{\Delta} = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \mathbf{\Delta}_\alpha = \begin{bmatrix} \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} & \mathbf{O} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \frac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \\ \mathbf{O} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (115)$$

$$\mathbf{\dot{d}}^\Delta = \begin{bmatrix} \dot{\mathbf{u}}^\Delta \\ \dot{\mathbf{\alpha}}^\Delta \end{bmatrix} \quad (116)$$

4.4 POTÊNCIA DOS ESFORÇOS INTERNOS E EXTERNOS

A potência dos esforços internos no instante " $i + 1$ " no domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$ pode ser obtida através de :

$$P_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1r} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{i+1r} \cdot \mathbf{\Lambda}^{i+1T} \mathbf{\Phi}^{i+1} \mathbf{Y}^\Delta \mathbf{\Delta} \mathbf{\dot{d}}^\Delta d\Omega \quad (117)$$

onde o vetor dos esforços internos generalizados da seção transversal é dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}^{i+1r} = \begin{bmatrix} \sigma_1^{i+1r} \\ \sigma_2^{i+1r} \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{\sigma}_\alpha^{i+1r} = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_\alpha^{i+1r} \\ \mathbf{m}_\alpha^{i+1r} \end{bmatrix} \quad (118)$$

onde $\mathbf{n}_\alpha^{i+1r}$ são as forças generalizadas retrorrotacionadas que atuam na seção transversal e $\mathbf{m}_\alpha^{i+1r}$ são os momentos generalizados retrorrotacionados que atuam na seção transversal, ambos por unidade de comprimento da configuração de referência no instante " $i + 1$ ". São obtidos por integração ao longo da espessura da casca dos vetores dos esforços internos retrorrotacionados que atuam nos planos da seção transversal cujas normais na configuração de referência são $\mathbf{e}_i^r$.

Definindo o vetor $\mathbf{t}$ as forças externas distribuídas que atuam nas superfícies da casca por unidade de área da configuração de referência e $\mathbf{b}$ o vetor das forças externas distribuídas no volume de referência, a potência dos esforços externos no instante " $i + 1$ " é dada por:

$$P_{ext} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{q}} \cdot \dot{\mathbf{d}}^{\Delta}) d\Omega \quad (119)$$

onde $\bar{\mathbf{q}}$ é o vetor das forças externas generalizadas dado por:

$$\bar{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\mathbf{n}} \\ \mathbf{\Xi}^T \bar{\mathbf{m}} \end{bmatrix} \quad (120)$$

no qual $\bar{\mathbf{n}} = \mathbf{t}^t + \mathbf{t}^b + \int_H \mathbf{b} d\zeta$ são as resultantes externas de forças e $\bar{\mathbf{m}} = \mathbf{a}^t \times \mathbf{t}^t + \mathbf{a}^b \times \mathbf{t}^b + \int_H \mathbf{a} \times \mathbf{b} d\zeta$ é o vetor dos momentos externos, ambos por unidade de área da superfície média da configuração de referência.

4.5 EFEITOS INERCIAIS

Os efeitos inerciais são obtidos através da energia cinética da casca T . Seja V o volume da casca, a energia cinética é dada por:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{x}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{x}}^{i+1} dV \quad (121)$$

onde ρ é a massa específica da casca. Substituindo (96) em (121), temos:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho (\dot{\mathbf{z}}^{i+1} + \xi \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\dot{\mathbf{z}}^{i+1} + \xi \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) dV$$

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{z}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{z}}^{i+1} dV + \int_V \rho \dot{\mathbf{z}}^{i+1} \cdot (\xi \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \xi^2 (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) dV \quad (122)$$

Como $\int_V \rho \dot{\mathbf{z}}^{i+1} \cdot (\xi \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) dV = 0$ para o caso particular da posição da superfície média tal que $h^t = h^b = h/2$, chega-se a:

$$T = \frac{1}{2} h \rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{z}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{z}}^{i+1} d\Omega + \frac{1}{2} \rho \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) d\Omega \quad (123)$$

A equação da energia cinética pode ser decomposta em duas componentes $T = T_1 + T_2$, onde:

$$T_1 = \frac{1}{2} h \rho \int_{\Omega} \dot{\mathbf{z}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{z}}^{i+1} d\Omega \quad (124)$$

$$T_2 = \frac{1}{2} \rho \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) d\Omega \quad (125)$$

Calculando a derivada temporal de (124) e (125), temos:

$$\dot{T}_1 = h\rho \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{z}}^{i+1} \cdot \dot{\mathbf{z}}^{i+1} d\Omega = \rho h \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot \dot{\mathbf{u}}^{\Delta} d\Omega \quad (126)$$

$$\dot{T}_2 = \rho \frac{h^3}{12} \int_{\Omega} (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\dot{\boldsymbol{\omega}} \times \mathbf{e}_3^{i+1} + \boldsymbol{\omega} \times \dot{\mathbf{e}}_3^{i+1}) d\Omega \quad (127)$$

Definindo $\mathbf{E}_3^{i+1} = \text{skew}(\mathbf{e}_3^{i+1})$, a equação (127) pode ser reescrita como:

$$\dot{T}_2 = \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} [(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (-\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}) + (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) \cdot (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}))] d\Omega \quad (128)$$

E aplicando a propriedade $(\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1}) = -\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}$, temos:

$$\dot{T}_2 = \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} [(\mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}) \cdot (\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}) + (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1})) \cdot (-\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega})] d\Omega \quad (129)$$

Com alguma álgebra, podemos reescrever (129) como:

$$\dot{T}_2 = \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{E}_3^{i+1 T} \mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \boldsymbol{\omega} d\Omega + \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} -\mathbf{E}_3^{i+1 T} (\boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{e}_3^{i+1})) \cdot \boldsymbol{\omega} d\Omega \quad (130)$$

Aplicando (21), a derivada temporal da componente T_2 da energia cinética é dada por:

$$\dot{T}_2 = \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{E}_3^{i+1 T} \mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} d\Omega + \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \boldsymbol{\Xi}^T \mathbf{E}_3^{i+1 T} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega})) \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} d\Omega \quad (131)$$

A equação (126) é termo referente aos efeitos inerciais translacionais, e em (131), o termo $\mathbf{E}_3^{i+1 T} \mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}}$ descreve o efeito da aceleração angular, e o termo $(\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega}))$ descreve o efeito giroscópico da energia cinética.

4.6 FORMA FRACA E DISCRETIZAÇÃO

A forma fraca é obtida a partir do Teorema dos Trabalhos Virtuais. Os trabalhos virtuais dos esforços internos e externos, δW_{int} e δW_{ext} respectivamente, podem ser expressos por:

$$\delta W_{int} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{i+1 r} \cdot \delta \dot{\boldsymbol{\epsilon}}^{i+1 r} d\Omega = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma}^{i+1 r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{i+1 T} \boldsymbol{\Phi}^{i+1} \mathbf{Y}^{\Delta} \Delta \delta \mathbf{d}^{\Delta}) d\Omega \quad (132)$$

$$\delta W_{ext} = \int_{\Omega} (\bar{\mathbf{q}} \cdot \delta \mathbf{d}^{\Delta}) d\Omega \quad (133)$$

Seja δT a variação virtual da energia cinética, o teorema dos trabalhos virtuais oferece:

$$\delta W_{int} - \delta W_{ext} + \delta T = 0 \quad (134)$$

onde $\delta T = \delta T_1 + \delta T_2$, e

$$\delta T_1 = \rho h \int_{\Omega} \ddot{\mathbf{u}}^{\Delta} \cdot \delta \mathbf{u}^{\Delta} d\Omega \quad (135)$$

$$\delta T_2 = \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{\Xi}^T \left[\mathbf{E}_3^{i+1T} \mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{E}_3^{i+1T} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega})) \right] \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} d\Omega \quad (136)$$

A linearização consistente de (134) resulta no operador tangente:

$$\Delta(\delta W) = \Delta(\delta W_{int}) - \Delta(\delta W_{ext}) + \Delta(\delta T) \quad (137)$$

As componentes do operador tangente $\Delta(\delta W_{int})$ e $\Delta(\delta W_{ext})$ estão desenvolvidas na seção 2.5. A formulação do material empregada é a mesma apresentada em (CAMPELLO; PIMENTA; WRIGGERS, 2003) e (TIAGO, 2007). A componente da energia cinética $\Delta(\delta T)$ é obtida por:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta T) &= \Delta(\delta T_1) + \Delta(\delta T_2) \\ &= \rho h \int_{\Omega} (f_{u,u} \Delta \mathbf{u}^{\Delta} + f_{u,\alpha} \Delta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \delta \mathbf{u}^{\Delta} d\Omega + \\ &\quad \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} (f_{\alpha,u} \Delta \mathbf{u}^{\Delta} + f_{\alpha,\alpha} \Delta \boldsymbol{\alpha}) \cdot \delta \boldsymbol{\alpha} d\Omega \end{aligned} \quad (138)$$

com $f_u = \ddot{\mathbf{u}}$ e

$$f_{\alpha} = \mathbf{\Xi}^T \left[\mathbf{E}_3^{i+1T} \mathbf{E}_3^{i+1} \dot{\boldsymbol{\omega}} + \mathbf{E}_3^{i+1T} (\boldsymbol{\omega} \times (\mathbf{E}_3^{i+1} \boldsymbol{\omega})) \right] \quad (139)$$

Na forma matricial:

$$\Delta(\delta T) = \begin{bmatrix} \rho h \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f_{u,u} \mathbf{N} d\Omega & \rho h \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f_{u,\alpha} \mathbf{N} d\Omega \\ \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f_{\alpha,u} \mathbf{N} d\Omega & \frac{\rho h^3}{12} \int_{\Omega} \mathbf{N}^T f_{\alpha,\alpha} \mathbf{N} d\Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{u}^{\Delta} \\ \Delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u}^{\Delta} \\ \delta \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix} \quad (140)$$

onde $\mathbf{N}$ é a matriz de funções de forma construída usando polinômios de Lagrange. As variáveis $\ddot{\mathbf{u}}$, $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ e $\boldsymbol{\omega}$ são determinadas como funções de $\mathbf{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ pelas expressões

de Newmark (WRIGGERS, 2008). O método de Newmark foi utilizado para integração no tempo e o método dos elementos finitos para discretizar os deslocamentos e rotações no espaço. Empregou-se a integração das rotações finitas apresentada em (IBRAHIMBEGOVIĆ; MIKIDAD, 1998) e as ideias da integração dos parâmetros de Rodrigues de (PIMENTA; CAMPELLO; WRIGGERS, 2008). Sejam β e γ os parâmetros clássicos da integração de Newmark (nos exemplos aqui calculados, foram adotados como $\beta = 0.3$ e $\gamma = 0.51$) e Δt o intervalo de tempo, os coeficientes $\alpha_1, \dots, \alpha_6$ são dados por (WRIGGERS, 2008):

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \frac{1}{\beta(\Delta t)^2}, & \alpha_2 &= \frac{1}{\beta\Delta t}, & \alpha_3 &= \frac{1-2\beta}{2\beta} \\ \alpha_4 &= \frac{\gamma}{\beta\Delta t}, & \alpha_5 &= 1 - \frac{\gamma}{\beta}, & \alpha_6 &= \left(1 - \frac{\gamma}{2\beta}\right)\Delta t \end{aligned} \quad (141)$$

A aceleração e a velocidade relacionadas à configuração " $i+1$ " podem ser escritas como:

$$\begin{cases} \ddot{\mathbf{u}}^{i+1} = \alpha_1 \mathbf{u}^\Delta - \alpha_2 \dot{\mathbf{u}}^i - \alpha_3 \ddot{\mathbf{u}}^i \\ \dot{\mathbf{u}}^{i+1} = \alpha_4 \mathbf{u}^\Delta + \alpha_5 \dot{\mathbf{u}}^i + \alpha_6 \ddot{\mathbf{u}}^i \end{cases} \quad (142)$$

$$\begin{cases} \boldsymbol{\omega}^{i+1} = \mathbf{Q}^\Delta (\alpha_4 \boldsymbol{\alpha}^\Delta + \alpha_5 \boldsymbol{\omega}^i + \alpha_6 \dot{\boldsymbol{\omega}}^i) \\ \dot{\boldsymbol{\omega}}^{i+1} = \mathbf{Q}^\Delta (\alpha_1 \boldsymbol{\alpha}^\Delta - \alpha_2 \boldsymbol{\omega}^i - \alpha_3 \dot{\boldsymbol{\omega}}^i) \end{cases} \quad (143)$$

Dessa forma, a forma fraca é função apenas dos deslocamentos generalizados $\mathbf{u}^\Delta$ e rotações $\boldsymbol{\alpha}^\Delta$, e das condições iniciais em cada passo de tempo $\dot{\mathbf{u}}^i$, $\ddot{\mathbf{u}}^i$, $\boldsymbol{\omega}^i$ e $\dot{\boldsymbol{\omega}}^i$.

As funções $f_{u,u}$, $f_{u,\alpha}$, $f_{\alpha,u}$ e $f_{\alpha,\alpha}$ foram obtidas usando os programas *Mathematica*® e *AceGen*® (ver (KORELC, 2002) (KORELC, 1997)).

A discretização espacial foi feita usando o elemento finito T6-3i (PIMENTA et al., 2016). Seja $\mathbf{p}^\Delta$ um vetor associado a cada nó, contendo os deslocamentos e rotações, a aproximação por elementos finitos é dada por:

$$\mathbf{d}^\Delta = \mathbf{N} \mathbf{p}^\Delta \quad (144)$$

onde

$$\mathbf{d}^\Delta = \begin{bmatrix} \mathbf{u}^\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}^\Delta \end{bmatrix} \quad (145)$$

4.7 EXEMPLOS NUMÉRICOS

O T6-3i na formulação dinâmica apresentada neste capítulo foi implementado no programa GIRAFFE (Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements) (NETO, 2016) desenvolvido pelo Prof. Alfredo Gay Neto na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, feito em linguagem C++. Esse programa é uma interface de elementos finitos na qual já está implementada um modelo de vigas (NETO; MARTINS; PIMENTA, 2014) e modelos de contato entre vigas (NETO; PIMENTA; WRIGGERS, 2016). A visualização dos resultados foi feita utilizando o programa de código aberto *Paraview*.

4.7.1 Domo engastado

O domo, uma semiesfera oca, é totalmente engastado em sua base. A raio do domo mede 50 mm e sua espessura é de 1 mm. O material considerado é o polivinilsiloxano com módulo de elasticidade $E = 100 \text{ kN/m}^2$ e coeficiente de Poisson $\nu = 0.499$. Foi usada uma malha não estruturada com 4632 elementos triangulares de seis nós, 9329 nós, com seis graus de liberdade (deslocamentos e rotações) por nó do meio dos lados e três graus de liberdade (deslocamentos) por nó no canto do elemento.

Figura 26 - Domo engastado - gráfico

O topo do hemisfério é puxado para baixo de forma a controlar os deslocamentos e obter a força reativa. A simulação apresenta vários *snap-throughs* e *snap-backs*, e a simulação estática diverge já que não foi empregado métodos de *arc-length*. O último

ponto convergido é no deslocamento $d = 41.1$ mm, um *snap-back*, como pode ser visto na figura 26. Para passar desse ponto, uma formulação dinâmica foi empregada.

A figura 27 mostra o deslocamento prescrito usado na análise dinâmica. O deslocamento varia linearmente de zero a 100 mm em 5 segundos. Essa escala de tempo foi escolhida de forma que não houvesse efeitos dinâmicos relevantes na análise estática do problema, levando a um comportamento quase estático. Quando os *snap-throughs* e *snap-backs* ocorrem, então os efeitos dinâmicos são relevantes.

Figura 27 - Variação do deslocamento prescrito com o tempo

Na figura 28 é apresentado o comportamento da estrutura com vistas isométrica, superior e lateral. O formato da estrutura deformada apresenta várias transições. Primeiro, a deformação é circular, depois ela possui três lóbulos. No instante em que o topo está na altura da base do domo, ele apresenta quatro lóbulos. Perto do fim da simulação, apresenta cinco lóbulos, depois seis e termina com sete lóbulos.

Figura 28 - Domo engastado - sequência das deformações

4.7.2 Domo engastado com vinco curvo com $\phi = 0.6$

Figura 29 - Domo engastado com vinco curvo com $\phi = 0.6$ - gráfico

Um domo com as mesmas dimensões e material do hemisfério da seção 4.7.1 possui um vinco curvo paralelo a sua base, como em (BENDE et al., 2015). O vinco foi modelado de forma que seus nós apresentam apenas os deslocamentos acoplados, mas rotações independentes (livres). A distância do vinco em relação à base do domo é medida através do número ϕ , que relaciona o raio do domo com o raio do vinco através da equação:

$$\phi = \frac{R_t}{R_s} \quad (146)$$

onde R_t é o raio do vinco circular e R_s é o raio do domo. Neste exemplo, $\phi = 0.6$, dessa forma, o raio do vinco mede $R_t = 30$ mm e sua distância da base mede 40 mm. Foi usada uma malha não estruturada com 9082 elementos triangulares de seis nós, 18517 nós, com seis graus de liberdade (deslocamentos e rotações) por nó do meio dos lados e três graus de liberdade (deslocamentos) por nó no canto do elemento. A figura 29 mostra o gráfico da força reativa em função do deslocamento do ponto localizado no topo do domo. A formulação estática diverge no deslocamento $d = 14.2$ mm, um *snap-through*. Depois desse ponto, pela simulação dinâmica, a força se torna negativa até o deslocamento $d = 19.0$ mm, quando a deformação ainda possui formato circular. A força então aumenta atingindo $F = 0.071$ N no deslocamento $d = 28.2$ mm.

Logo em seguida, a deformação "cai" para o lado, aparecendo dois lóbulos e a força cai para $F = 0.016$ N. Esses dois lóbulos se espalham em um formato quase circular antes de passar para quatro lóbulos. Perto do fim da simulação, a deformação apresenta cinco lóbulos, seis e por fim, sete lóbulos. A figura 30 apresenta a sequência de deformações do domo.

Figura 30 - Domo engastado com vinco curvo com $\phi = 0.6$ - sequência das deformações

4.7.3 Domo virando do avesso

A fim de analisar o caso de um domo virando do avesso, todas as rotações da base do domo foram liberadas e os deslocamentos mantidos, como a vinculação usada para modelar o vinco na seção 4.7.2, como se o número $\phi = 1$. Foi usada uma malha não estruturada com 4632 elementos triangulares de seis nós, 9329 nós, com seis graus de liberdade (deslocamentos e rotações) por nó do meio dos lados e três graus de liberdade (deslocamentos) por nó no canto do elemento. A sequência das deformações é mostrada na figura 31, ela é similar ao caso da seção 4.7.1 até o momento em que o domo começa a virar do avesso perto do fim da simulação, o número de lóbulos para de crescer e os lóbulos existentes se espalham, até atingir o formato de um domo virado para baixo. A figura 32 apresenta o gráfico da força reativa em função do deslocamento do ponto localizado no topo do domo. A formulação estática diverge no deslocamento $d = 43.4$ mm. No momento em que o hemisfério começa a virar do avesso, para um deslocamento de $d = 94.6$ mm, a força, que alcançou seu

máximo de $F = 0.114$ N, começa a cair drasticamente, tornando-se negativa quando o domo está completamente do avesso.

Figura 31 - Domo virando do avesso - sequência das deformações

Figura 32 - Dome virando do avesso - gráfico

4.7.4 Observação

As simulações do domo apresentadas neste capítulo precisam ser calculadas com uma malha não estruturada. A figura 33 apresenta o domo da seção 4.7.1 com

uma malha estruturada. É possível observar a influência da malha na deformação do domo: do começo ao fim da simulação, ele apresenta sempre quatro lóbulos, seguindo a simetria da malha.

Uma malha livre, no entanto, não cria um nó exatamente no topo do domo. Para isso, foi criada uma pequena região no topo do domo com uma malha estruturada, de forma que um nó fosse criado exatamente no topo do hemisfério, e no resto do domo gerou-se uma malha livre.

Figura 33 - Deformações do domo com malha estruturada

5 CONCLUSÕES

Este trabalho analisou o elemento finito T6-3i, um elemento de casca triangular de seis nós puro de deslocamentos. O elemento possui uma interpolação quadrática compatível para o campo dos deslocamentos e é linear não conforme para o campo das rotações. Não utiliza nenhuma técnica numérica para evitar o travamento, apresentando grande simplicidade, robustez e versatilidade. Por ser puro de deslocamentos, não apresenta bons resultados para as tensões, como foi analisado neste trabalho, comparando os resultados obtidos com o T6-3i em relação às tensões com as teorias analíticas de placas, tabelas para o cálculo de placas, e o ANSYS®, chegando às seguintes conclusões:

- Os valores dos esforços obtidos pelo PEFSYS, que utiliza o T6-3i como elemento finito, são insatisfatórios, melhorando com o grau de refinamento da malha.
- Com carregamento concentrado, os valores dos esforços tendem a crescer conforme se refina a malha, tendendo a infinito. Próximo ao ponto de aplicação do carregamento, no caso de carregamento concentrado, e próximo à borda, no caso de carregamentos distribuídos, os valores obtidos são menos precisos, apresentando oscilações e necessitando de maior refinamento da malha nessas regiões.
- Devido às condições de simetria adotadas, obtivemos picos de esforços nas pontas, nos encontros dos bordos e das linhas que definem a simetria, que não apareceriam caso trabalhássemos com a geometria inteira do problema.
- Para o caso de placas simplesmente apoiadas, o T6-3i necessita da liberação dos graus de liberdade dos nós do meio das arestas dos elementos da borda externa da placa para a obtenção dos esforços de momento e cortante.

Na segunda parte deste trabalho, um modelo de casca geometricamente exato para análise dinâmica não linear de cascas foi proposto. A formulação de casca considera um modelo Lagrangiano atualizado, permitindo grandes rotações. O campo das rotações foi descrito usando o vetor rotação de Rodrigues, que resulta em uma forma extremamente simples de atualizar as variáveis rotacionais. O modelo cinemático da casca é simples e consistente. A forma fraca foi obtida por meio do teorema dos trabalhos virtuais. O elemento finito triangular puro de deslocamentos usado permite uma discretização robusta e versátil, permitindo uma geração simples das malhas não estruturadas das simulações aqui analisadas, e trabalhando em um regime

completamente não linear em aplicações estáticas e dinâmicas, sem usar qualquer técnica possivelmente custosa com a ANS, EAS ou controle dos modos espúrios. A validade e a robustez da formulação foram mostradas nas simulações numéricas, que apresentaram um bom desempenho nos casos analisados. O modelo de casca discutido apresentou bons resultados e grande flexibilidade para analisar os problemas altamente não lineares que aparecem nos estudos de cascas mais recentes.

Referências

- ADINI, A. **Analysis of shell structures by the finite element method**. 1961. Tese (Doutorado) — University of California, Berkeley.
- ADINI, A.; CLOUGH, R. W. **Analysis of plate bending by the finite element method**. [S.l.]: University of California, 1960.
- AHMAD, S.; IRONS, B. M.; ZIENKIEWICZ, O. C. Analysis of thick and thin shell structures by curved finite elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 2, n. 3, p. 419–451, 1970.
- ANSYS. Element reference. **Release 12.1**, 2009.
- ARGYRIS, J. H.; FRIED, I.; SCHARPF, D. W. The tuba family of plate elements for the matrix displacement method. **The Aeronaut. J. Royal Aeronaut. Soc.**, v. 72, p. 701–709, 1968.
- ARNOLD, D. N.; FALK, R. S. Analysis of a linear–linear finite element for the reissner–mindlin plate model. **Mathematical Models and Methods in Applied Sciences**, World Scientific, v. 7, n. 2, p. 217–238, 1997.
- BARES, R.; ARIAS, J. M. C.; KAPPELMACHER, C. **Tablas para el calculo de placas y vigas pared**. Barcelona: Gustavo Gili, 1981.
- BARRETT, K. E.; ELLIS, S. An exact theory of elastic plates. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 24, n. 9, p. 859–880, 1988.
- BAZELEY, G. P. et al. Triangular elements in plate bending—conforming and nonconforming solutions. **Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**. p. 547–576, Oct. 1965.
- BELL, K. A refined triangular plate bending finite element. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 101–122, 1969.
- BENDE, N. P. et al. Geometrically controlled snapping transitions in shells with curved creases. **Proceedings of the National Academy of Sciences**, National Acad Sciences, v. 112, n. 36, p. 11175–11180, 2015.
- BERNOULLI, J. I. Essai théoretique sur les vibrations des plaques élastiques, rectangulaires et li. **Nova Acta Academiae Scientiarum Imperialis Petropolitanae**, v. 5, p. 197–219, 1789.

BLOCK, J.; STRAUBEL, M.; WIEDEMANN, M. Ultralight deployable booms for solar sails and other large gossamer structures in space. **Acta Astronautica**, Elsevier, v. 68, n. 7, p. 984–992, 2011.

BOGNER, F. K.; FOX, R. L.; JR., L. A. The generation of inter-element-compatible stiffness and mass matrices by the use of interpolation formulas. **Proc. 1st Conf. on Matrix Meth. in Struct. Mech.**, p. 397–443, Oct. 1965.

BRANK, B. et al. On non-linear dynamics of shells: implementation of energy-momentum conserving algorithm for a finite rotation shell model. **International journal for numerical methods in engineering**, Chichester, New York, Wiley [etc.] 1969-, v. 42, n. 3, p. 409–442, 1998.

BREZZI, F.; FORTIN, M. **Mixed and hybrid finite element methods**. [S.l.]: Springer, 1991.

CAMPELLO, E. M. B. **Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos**. 2005. Tese (Doutorado) — Ph. D. Thesis (in portuguese). Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo.

CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. d. M.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 2: shells. **Computational Mechanics**, Springer, v. 48, n. 2, p. 195–211, 2011.

CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. **Computational Mechanics**, Springer, v. 31, n. 6, p. 505–518, 2003.

CAUCHY, A. L. Sur l'équilibre et le mouvement d'une plaque solide. **Exercices de Mathématique**, v. 3, p. 328–355, 1828.

CHENG, S. Elasticity theory of plates and a refined theory. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 46, n. 3, p. 644–650, 1979.

CHLADNI, E. F. F. **Die Akustik**. [S.l.: s.n.], 1802.

CLOUGH, R. W.; TOCHER, J. L. Finite element stiffness matrices for analysis of plates in bending. **Proceedings of the 1st Conference on Matrix Methods in Structural Mechanics**. p. 515–545, Oct. 1965.

COWPER, G. R. et al. Formulation of a new triangular plate bending element. **Trans. Canadian Aeronaut. Space Inst.**, v. 1, n. 2, p. 86–90, 1968.

DONNELL, L. H. **Stability of thin-walled tubes under torsion** (No. NACA-R-479). [S.l.: s.n.], 1933.

DVORKIN, E. N.; BATHE, K.-J. A continuum mechanics based four-node shell element for general non-linear analysis. **Engineering computations**, MCB UP Ltd, v. 1, n. 1, p. 77–88, 1984.

EULER, L. De motu vibratorio tympanorum. **Novi Commentarii academiae scientiarum Petropolitanae**, v. 10, p. 243–260, 1766.

FLORIJN, B.; COULAIS, C.; HECKE, M. van. Programmable mechanical metamaterials. **Physical review letters**, APS, v. 113, n. 17, p. 175503, 2014.

FLÜGGE, W. **Stresses in shells**. Springer-Verlag, Berlin, 1960.

GERMAIN, S. **Recherches sur la theorie des surfaces elastiques**. [S.l.]: V. Courcier, 1821.

GERMAIN, S. **Remarques sur la nature, les bornes et l'étendue de la question des surfaces élastiques, et équation générale de ces surfaces**. [With copious MS. additions by the authoress.]. Paris: Huzard-Courcier, 1826.

HOLMES, D. P.; CROSBY, A. J. Snapping surfaces. **Advanced Materials**, Wiley Online Library, v. 19, n. 21, p. 3589–3593, 2007.

HRABOK, M. M.; HRUDEY, T. M. A review and catalogue of plate bending finite elements. **Computers & structures**, Elsevier, v. 19, n. 3, p. 479–495, 1984.

HU, N. et al. Buckling-induced smart applications: recent advances and trends. **Smart Materials and Structures**, IOP Publishing, v. 24, n. 6, p. 063001, 2015.

HUGHES, T. J. R.; COHEN, M. The “heterosis” finite element for plate bending. **Computers & Structures**, Elsevier, v. 9, n. 5, p. 445–450, 1978.

IBRAHIMBEGOVIC, A. Stress resultant geometrically exact shell theory for finite rotations and its finite element implementation. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers, v. 50, n. 4, p. 199–226, 1997.

IBRAHIMBEGOVIC, A.; BRANK, B.; COURTOIS, P. Stress resultant geometrically exact form of classical shell model and vector-like parameterization of constrained finite rotations. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 52, n. 11, p. 1235–1252, 2001.

IBRAHIMBEGOVIĆ, A.; MIKDAD, M. A. Finite rotations in dynamics of beams and implicit time-stepping schemes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 41, n. 5, p. 781–814, 1998.

IRONS, B. M. R.; DRAPER, K. J. Inadequacy of nodal connections in a stiffness solution for plate bending. **Am. Inst. Aeronaut. Astronaut. Journal**, v. 3, n. 5, p. 961–961, 1965.

JR, J. L. An improved first-approximation theory for thin shells (nasa tr-r24). **US Government Printing Office, Washington DC**, 1959.

JR, J. L. **Nonlinear theories for thin shells (No. TR10)**. [S.l.: s.n.], 1961.

KEBADZE, E.; GUEST, S. D.; PELLEGRINO, S. Bistable prestressed shell structures. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 41, n. 11, p. 2801–2820, 2004.

KIRCHHOFF, G. R. Über das gleichgewicht und die bewegung einer elastischen scheib. **Journal für die reine und angewandte Mathematik**, v. 40, p. 51–88, 1850.

KORELC, J. Automatic generation of finite-element code by simultaneous optimization of expressions. **Theoretical Computer Science**, Elsevier, v. 187, n. 1, p. 231–248, 1997.

KORELC, J. Multi-language and multi-environment generation of nonlinear finite element codes. **Engineering with computers**, Springer, v. 18, n. 4, p. 312–327, 2002.

KUHL, D.; RAMM, E. Constraint energy momentum algorithm and its application to non-linear dynamics of shells. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 136, n. 3, p. 293–315, 1996.

LAGRANGE, J. L. Note communiquée aux commissaires pour le prix de la surface élastique (dec. 1811), ct. **Annales de Chimie**. v. 39, p. 149–207, 1828.

LAMACCHIA, E. et al. Morphing shell structures: a generalised modelling approach. **Composite Structures**, Elsevier, v. 131, p. 1017–1027, 2015.

LEVY, M. Sur l'équilibre élastique d'une plaque rectangul. **Comptes Rendus Acad. Sci. Paris**, v. 129, p. 535–539, 1899.

LIBAI, A.; SIMMONDS, J. G. **The nonlinear theory of elastic shells**. [S.l.]: Cambridge university press, 2005.

LOVE, A. E. H. On the small free vibrations and deformations of elastic shells. **Philosophical Transactions of the Royal Society of London**, JSTOR, v. 179, p. 491–546, 1888.

MALKUS, D. S.; HUGHES, T. J. R. Mixed finite element methods – reduced and selective integration techniques: a unification of concepts. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 15, n. 1, p. 63–81, 1978.

MATTIONI, F. et al. The application of residual stress tailoring of snap-through composites for variable sweep wings. **Proc. 47th AIAA/ASME/ASCE/AHS/ASC Structures, Structural Dynamics, and Materials Conf.(SDM)**. 2006.

MELOSH, R. J. A stiffness matrix for the analysis of thin plates in bending. **J. Aeronaut. Sci.**, v. 28, n. 1, p. 34–42, 1961.

MINDLIN, R. Influence of rotatory inertia and shear in flexural motions of isotropic, elastic plates. **Journal of Applied Mechanics**, v. 18, p. 31–38, 1951.

MOREIRA, M. d. L. T. **Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas**. 2009. Tese (Doutorado) — Universidade de São Paulo.

MUSHTARI, K. M.; GALIMOV, K. Z. **Non-linear theory of thin elastic shells**. [S.l.]: Published for the National Science Foundation by the Israel Program for the Scientific Translations; available from the Office of Technical Services, US Dept. of Commerce, 1961. 62.

NAGHDI, P. M.; NORDGREN, R. P. **On the nonlinear theory of elastic shells under the Kirchhoff hypothesis (No. TR17)**. [S.l.: s.n.], 1962.

NAVIER, C.-L. Extrait des recherches sur la flexion des plans elastiques. **Bulletin des Science de la Société Philomathique de Paris**, p. 92–102, 1823.

NETO, A. Giraffe (generic interface readily accessible for finite elements) user's manual. **University of São Paulo, Brazil**, n. v. 1.0.100, 2016.

NETO, A.; MARTINS, C. A.; PIMENTA, P. M. Static analysis of offshore risers with a geometrically-exact 3d beam model subjected to unilateral contact. **Computational Mechanics**, Springer, v. 53, n. 1, p. 125–145, 2014.

NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A master-surface to master-surface formulation for beam to beam contact. part i: frictionless interaction. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, 2016.

OÑATE, E.; ZARATE, F.; FLORES, F. A simple triangular element for thick and thin plate and shell analysis. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 37, n. 15, p. 2569–2582, 1994.

PAWSEY, S. F.; CLOUGH, R. W. Improved numerical integration of thick shell finite elements. **International journal for numerical methods in engineering**, Wiley Online Library, v. 3, n. 4, p. 575–586, 1971.

PIAN, T. H. H.; TONG, P. Basis of finite element methods for solid continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 1, n. 1, p. 3–28, 1969.

PIMENTA, P. d. M.; CAMPELLO, E. d. M. B.; WRIGGERS, P. An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational dofs and general hyperelasticity. part 1: rods. **Computational Mechanics**, Springer, v. 42, n. 5, p. 715–732, 2008.

PIMENTA, P. M. On a geometrically-exact finite-strain shell model. **Proceedings of the 3rd Pan-American Congress on Applied Mechanics, PACAM III**. p. 616–619, 1993.

PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. Geometrically nonlinear analysis of thin-walled space frames. **Proceedings of the Second European Conference on Computational Mechanics, II ECCM, Cracow, Poland**. 2001.

PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. Finite rotation parameterizations for the nonlinear static and dynamic analysis of shells. **Proceedings of the 5th international conference on computation of shell and spatial structures, Salzburg, Austria**. 2005.

PIMENTA, P. M. et al. A simple, robust and versatile shell finite element. **IACM Expressions**, n. 38, p. 18–22, 2016.

PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B.; WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. **Computational Mechanics**, Springer, v. 34, n. 3, p. 181–193, 2004.

PIMENTA, P. M.; YOJO, T. Geometrically exact analysis of spatial frames. **Applied Mechanics Reviews**, American Society of Mechanical Engineers, v. 46, n. 11, p. 118–128, 1993.

PIRRERA, A.; AVITABILE, D.; WEAVER, P. M. Bistable plates for morphing structures: a refined analytical approach with high-order polynomials. **International Journal of Solids and Structures**, Elsevier, v. 47, n. 25, p. 3412–3425, 2010.

POISSON, S.-D. *Mémoire sur l'équilibre et mouvement des corps élastiques*. [S.l.]: L'Académie des sciences, 1829.

PUGH, E. D. L.; HINTON, E.; ZIENKIEWICZ, O. C. A study of quadrilateral plate bending elements with “reduced” integration. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 12, n. 7, p. 1059–1079, 1978.

REISSNER, E. The effect of transverse shear deformation on the bending of elastic plates. **Journal of applied Mechanics**, v. 12, p. 69–76, 1945.

REISSNER, E. **On the theory of thin elastic shells**. [S.l.]: JW Edwards Ann Arbor, Michigan, 1949.

REISSNER, E. Stress strain relations in the theory of thin elastic shells. **Journal of Mathematics and Physics**, Wiley Online Library, v. 31, n. 1, p. 109–119, 1952.

REISSNER, E. On a generalization of some formulas of the theory of moderately thick elastic plates. **International journal of solids and structures**, Elsevier, v. 23, n. 6, p. 711–717, 1987.

SILVERBERG, J. L. et al. Using origami design principles to fold reprogrammable mechanical metamaterials. **Science**, American Association for the Advancement of Science, v. 345, n. 6197, p. 647–650, 2014.

SIMMONDS, J. G.; DANIELSON, D. A. Nonlinear shell theory with finite rotation and stress-function vectors. **Journal of Applied Mechanics**, American Society of Mechanical Engineers, v. 39, n. 4, p. 1085–1090, 1972.

SIMO, J. C.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part i: formulation and optimal parametrization. **Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering**, Elsevier, v. 72, n. 3, p. 267–304, 1989.

SIMO, J. C.; RIFAI, M. S. A class of mixed assumed strain methods and the method of incompatible modes. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 29, n. 8, p. 1595–1638, 1990.

SIMO, J. C.; RIFAI, M. S.; FOX, D. D. On a stress resultant geometrically exact shell model. part vi: conserving algorithms for non-linear dynamics. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 34, n. 1, p. 117–164, 1992.

TACHI, T. Freeform rigid-foldable structure using bidirectionally flat-foldable planar quadrilateral mesh. **Advances in architectural geometry 2010**, Springer, p. 87–102, 2010.

TIAGO, C. **Meshless methods: Extending the linear formulation and its generalization to geometrically exact structural analysis**. 2007. Tese (Doutorado) — Instituto Superior Técnico da Universidade Técnica de Lisboa.

TIMOSHENKO, S. P. On large deflections of circular plates. **Mem Inst Ways Commun**, v. 89, 1915.

TIMOSHENKO, S. P. On the correction factor for shear of the differential equation for transverse vibrations of bars of uniform cross-section. **Philosophical Magazine**, v. 41, p. 744–746, 1921.

TIMOSHENKO, S. P.; WOINOWSKY-KRIEGER, S. **Theory of plates and shells**. [S.l.]: McGraw-hill New York, 1st Ed. 1940, 2nd Ed. 1959, 1959. v. 2.

TOCHER, J. L. **Analysis of plate bending using triangular elements**. 1962. Tese (Doutorado) — University of California, Berkeley.

TONG, P. New displacement hybrid finite element models for solid continua. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 2, n. 1, p. 73–83, 1970.

TRAUTZ, M.; HERKRATH, R. The application of folded plate principles on spatial structures with regular, irregular and free-form geometries. **Symposium of the International Association for Shell and Spatial Structures (50th. 2009. Valencia). Evolution and Trends in Design, Analysis and Construction of Shell and Spatial Structures: Proceedings**. 2009.

VISSER, W. A refined mixed type plate bending element. **Am. Inst. Aeronaut. and Astronaut. Journal**, v. 7, n. 9, p. 1801–1803, 1969.

VLASOV, V. Z. **General theory of shells and its applications in engineering**. [S.l.]: National Aeronautics and Space Administration, 1964. v. 99.

WRIGGERS, P. **Nonlinear finite element methods**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2008.

WRIGGERS, P.; KORELC, J. On enhanced strain methods for small and finite deformations of solids. **Computational Mechanics**, Springer, v. 18, n. 6, p. 413–428, 1996.

ZIENKIEWICZ, O. C.; TAYLOR, R. L.; TOO, J. M. Reduced integration technique in general analysis of plates and shells. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Wiley Online Library, v. 3, n. 2, p. 275–290, 1971.