MARCELLO CHEREM
ENGENHEIRO CIVIL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 2005

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS PILARES COM SEÇÃO
TRANSVERSAL EM FORMATO GEOMÉTRICO DE 'L'
CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA**

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Ricardo Leopoldo e Silva França

São Paulo
2010

MARCELLO CHEREM
ENGENHEIRO CIVIL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 2005

**CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DOS PILARES COM SEÇÃO
TRANSVERSAL EM FORMATO GEOMÉTRICO DE 'L'
CONSIDERANDO A NÃO-LINEARIDADE FÍSICA E GEOMÉTRICA**

Dissertação apresentada a Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia.

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Ricardo Leopoldo e Silva França

São Paulo
2010

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho...

Ao professor Fernando Rebouças Stucchi, pelo conhecimento transmitido, por sua amizade, bondade, bom senso, e pelas inúmeras e incansáveis vezes que, sempre disposto, desde os tempos da graduação, jamais deixou de me atender quando eu tinha dúvidas.

Ao professor Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, por sua amizade, pelo conhecimento transmitido através de sua impressionante didática e pelas diversas vezes que me fez entender as coisas com suas explicações inconfundíveis.

Ao professor João Carlos Della Bella, pelo conhecimento, por sua amizade e também por todas as vezes que, após o término das aulas, permanecia na sala incansavelmente respondendo minhas perguntas.

Ao professor Renato Ioiti Teramoto que tudo começou e, sem saber, me despertou um enorme interesse pela área de engenharia estrutural, fazendo com que esta fosse a área pela qual eu mais me interessaria.

Ao professor Ricardo Leopoldo e Silva França, pelo conhecimento transmitido, por sua amizade, bom humor, pelas reuniões agradáveis, por tudo que aprendi durante todos esses anos de convivência e por todas às vezes que, prontamente, me ajudou a resolver problemas do trabalho.

Ao professor Valdir Pignatta e Silva, pelo conhecimento transmitido, por sua amizade, bom humor, brincadeiras e pelas incansáveis vezes que ouviu meus desabafos.

AGRADECIMENTOS

Ao professor Ricardo Leopoldo e Silva França, pela orientação, bom humor, constante estímulo transmitido durante o trabalho e pelo conhecimento que me forneceu ao longo dos anos.

Ao professor Edgard Sant Anna de Almeida Neto, pela compreensão para o término deste trabalho.

Ao professor Henrique de Britto Costa, por sua imensa vontade de me ajudar e pelo grande desejo de que realmente eu entregasse o trabalho.

Aos meus amigos André Nunes, Carlos Fumio, Douglas Barros, Felipe Renato de Souza, Fulvio Bertolani, Marcelo Del Bel e Ricardo Miranda que colaboraram diretamente na execução deste trabalho, me ajudando a processar um número enorme de contas em diversos computadores.

Ao meu primo José Rodolfo Cherem, pela digitação de alguns textos e cuidadosa verificação da numeração ao longo do texto.

Ao meu grande e verdadeiro amigo Moacyr dos Santos Medeiros, pela amizade, constante estímulo, incentivo e preocupação durante todo o trabalho.

Ao meu amigo Marinaldo Bruno, pela ajuda com toda a programação computacional, sem a qual, o trabalho nem teria começado.

RESUMO

Pilares de edificios estão sempre submetidos à flexão composta oblíqua. Este trabalho tem como objetivo comparar, em seções transversais com formato geométrico de 'L', os resultados obtidos por dois métodos de cálculo: a) Integração numérica na qual, para cada direção principal, são utilizadas curvaturas reais obtidas de diagramas momento-curvatura de cada seção, sendo os efeitos de segunda ordem calculados considerando a flexão composta oblíqua; b) Integração numérica na qual, para cada direção principal é utilizada uma rigidez secante, obtida a partir dos momentos resistentes do ELU, sendo os efeitos de segunda ordem calculados ignorando-se a direção ortogonal.

2.248 seções transversais foram analisadas. Cada uma foi solicitada de 192 maneiras diferentes. A conclusão é de que o procedimento descrito no item 'b' pode ser utilizado com segurança, desde que se utilize uma rigidez secante reduzida em 10%.

Palavras-chave: Engenharia. Engenharia Civil. Concreto Armado. Pilares. Análise Não-Linear

ABSTRACT

The columns of buildings are always subject to oblique bending. This study compares, in geometric “L” shaped cross sections, the results obtained using two calculation methods: a) Numerical integration in which, for each principal direction, the actual curvatures obtained from moment-curvature relationships of each section are used, calculating the second-order effects considering the oblique bending; b) Numerical integration in which, for each principal direction, a secant stiffness is used, obtained from the moments resistances of ULS, calculating the second-order effects ignoring the orthogonal direction.

2.248 cross sections were analyzed. Each one was solicited in 192 different ways. The conclusion is that the procedure described in item ‘b’ can be safely used, provided a secant stiffness reduced to 10% is used.

Key Words - Engineering. Civil Engineering. Reinforced Concrete. Pillars. Nonlinear Analysis

SUMÁRIO

Capítulo 1 - Introdução	11
Capítulo 2 – Objetivo	13
Capítulo 3 – Comportamento Mecânico do Concreto	15
3.1. Classes	15
3.2. Módulo de elasticidade	15
3.3. Coeficiente de Poisson e Módulo de elasticidade transversal	16
3.4. Resistência à tração	16
3.5. Resistência à compressão	17
3.6. Formas do diagrama tensão-deformação	18
3.6.1. <i>Tipos de ensaio</i>	18
3.6.2. <i>Efeito da velocidade da deformação no diagrama $\sigma - \epsilon$</i>	19
3.7. Redução da resistência sob carga mantida – Efeito Rusch	22
3.8. A resistência de longa duração do concreto	27
3.9. O encurtamento último do concreto	30
3.9.1. <i>Diagrama tensão-deformação efetivo na flexão</i>	30
3.9.2. <i>Influência da forma da seção transversal e da posição da linha neutra</i>	32
3.9.3. <i>Determinação do encurtamento último</i>	33
3.9.4. <i>Generalização dos resultados</i>	36
3.9.5. <i>Comentários e conclusões</i>	38
3.10. Resistência de cálculo a ser usada no projeto	39
3.11 A forma do diagrama de tensões na compressão	40
3.11.1. <i>O diagrama parábola-retângulo</i>	40
3.11.2. <i>Influência da duração do carregamento</i>	43
3.11.3. <i>Influência da duração do carregamento sobre a resistência média da zona comprimida</i>	45
3.11.4. <i>Diagrama de tensões com carregamentos de longa duração</i>	46
3.12. Diagrama tensão-deformação para o Estado Limite Último (ELU)	49
3.12.1. <i>Diagrama tensão-deformação da NBR6118:2007</i>	49
3.12.2. <i>Diagrama tensão-deformação do CEB90</i>	50
3.12.3. <i>Diagrama tensão-deformação do Eurocode 1992:2006</i>	52
3.13. Diagrama tensão-deformação para análises não-lineares	55
3.13.1. <i>Diagrama tensão-deformação da NBR6118:2007</i>	55
3.13.2. <i>Diagrama tensão-deformação do CEB90</i>	55
3.13.3. <i>Diagrama tensão-deformação do Eurocode 2:2006</i>	55
3.14. Consideração da fluência do concreto	56
Capítulo 4 – Comportamento Mecânico do Aço de Armadura Passiva	59
4.1. Generalidades	59
4.2. Classificação	59
4.3. Massa específica	61
4.4. Coeficiente de dilatação térmica	61

4.5. Diagramas tensão-deformação	61
4.5.1. Consideração inicial	61
4.5.2. Aço Classe A (CA-25 e CA-50)	61
4.5.3. Aço Classe B (CA-60)	63
4.5.4. Diagrama tensão-deformação da NBR6118:2007	65
Capítulo 5 – Ações e o coeficiente γ_{f3}	69
Capítulo 6 – Processo Acoplado	73
6.1. Pilares em balanço	73
6.1.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem	73
6.1.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes	73
6.1.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos	75
6.1.4. Passo 4 – Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem	77
6.1.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)	77
6.2. Pilares bi-apoiados	78
6.2.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem	78
6.2.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes	78
6.2.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos	78
6.2.4. Passo 4 – Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem	80
6.2.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)	81
Capítulo 7 – Processo Desacoplado	83
7.1. Pilares em balanço	83
7.1.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem	83
7.1.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes	83
7.1.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos	84
7.1.4. Passo 4 - Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem	84
7.1.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)	84
7.2. Pilares bi-apoiados	85
7.2.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem	85
7.2.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes	85
7.2.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos	85
7.2.4. Passo 4 - Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem	85
7.2.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)	86
Capítulo 8 – Segurança Estrutural	87
8.1. Forma de apresentação dos resultados	88
8.2. Interpretação do gráfico de resultados	89

Capítulo 9 – Motivação para o estudo	93
9.1. A rigidez secante	93
9.2. Rigidez Secante usada no desacoplamento das duas direções principais	94
9.3. Por que o processo desacoplado funciona para seções retangulares?	95
Capítulo 10 – Propriedades geométricas das seções transversais	99
10.1. Introdução	99
10.2. Área da seção transversal	103
10.2.1. Área de concreto	103
10.2.2. Área das barras de aço	105
10.2.3. Área da seção homogeneizada	105
10.3. Momentos Estáticos	106
10.3.1. Momento estático da seção de concreto	106
10.3.2. Momento estático das barras de aço	108
10.3.3. Momento estático da seção homogeneizada	108
10.4. Centro Geométrico	109
10.5. Momento de inércia	109
10.5.1. Momento de inércia da seção de concreto	111
10.5.2. Momento de inércia das barras de aço	112
10.5.3. Momento de inércia da seção homogeneizada	113
10.6. Produto de inércia	113
10.6.1. Produto de inércia do concreto	114
10.6.2. Produto de inércia das barras de aço	114
10.6.3. Produto de inércia da seção homogeneizada	115
10.7. Translação do sistema	115
10.8. Eixos centrais de inércia e suas direções	115
10.9. Raio de giração	117
10.10. Numeração dos vértices	117
10.11. Software e procedimento para cálculo das propriedades geométricas	118
Capítulo 11 – Exemplo Numérico – O software de cálculo	119
11.1. Dados de entrada	119
11.2. Geração do Estado Limite Último	121
11.3. Geração da fronteira para análise de estabilidade	123
11.4. Geração da malha de pontos	125
11.5. Processo Acoplado	139
11.5.1. Dados de localização	149
11.6. Processo Desacoplado	149
11.7. Segurança do processo	163

Capítulo 12 – Universo de casos a estudar	165
12.1. Introdução	165
12.2. Cobrimento da armadura	165
12.3. Armadura longitudinal	166
12.4. Armadura transversal (estribos)	167
12.5. Valores da distância d'	167
12.6. Espaçamento mínimo entre barras da armadura longitudinal	168
12.7. Dimensões da seção transversal	170
12.8. Barras intermediárias da armadura longitudinal	173
12.9. Resistência característica do concreto (f_{ck})	175
12.10. Comprimento dos pilares	175
12.11. Esforços solicitantes	176
12.12. Resumo Geral - Análise	177
 Capítulo 13 – Resultados comparativos entre o processo acoplado e desacoplado dos pilares bi-articulados	 179
 Capítulo 14 – Resultados comparativos entre o processo acoplado e desacoplado dos pilares em balanço	 207
 Capítulo 15 – Conclusões	 233
 Referências	 235

Capítulo 1

Introdução

A norma NBR6118:2007 trouxe avanços significativos no cálculo de pilares de concreto armado. Em relação às normas brasileiras mais antigas, há agora uma grande economia para esses elementos, já que os novos métodos de cálculo conduzem a menores taxas de armadura.

Deve-se ter em mente que todos os pilares, de qualquer edificação, sempre estão em flexão composta oblíqua, porém os métodos simplificados, constantes na norma NBR6118:2007, sempre se baseiam em dois cálculos para flexão normal composta, um para cada direção.

Os cálculos em flexão normal composta são muito mais simples do que lançar mão de cálculos em flexão composta oblíqua. Se esses métodos simplificados conseguem resolver o problema com segurança, sem precisar recorrer ao cálculo oneroso da flexão composta oblíqua, devem ser utilizá-los pela economia de tempo e custo que geram.

Com o avanço dos computadores, em alguns anos, cálculos em flexão composta oblíqua serão imediatos e a tendência desses métodos simplificados, nos escritórios, é cair em desuso, todavia são necessários para aplicações expeditas para aqueles que não utilizam todos os recursos computacionais, ou ainda, para a realização de cálculos rápidos, em locais onde os recursos mais avançados não estão disponíveis.

A norma NBR6118:2007 trás dois métodos simplificados para pilares com índice de esbeltez λ até 90: método do pilar-padrão com curvatura aproximada e método do pilar-padrão com rigidez κ aproximada. Para pilares com índice de esbeltez λ até 140, outro método simplificado é permitido: método do pilar-padrão acoplado a relações N , M , $1/r$. Este último, porém, já não é simples de ser aplicado e os diagramas citados só podem ser obtidos com o auxílio dos computadores.

Esses métodos simplificados da norma são excelentes para simplificar o problema da flexão composta oblíqua. As seções transversais retangulares já foram exaustivamente estudadas com a aplicação desses métodos. Os resultados sempre foram satisfatórios, o que trouxe a consagração destas formulações.

Pretende-se testar tais métodos para outro tipo de seção transversal, a qual ainda não foi submetida a testes por essa formulação simplificada. A seção transversal com formato geométrico de ‘L’ será o foco de nosso estudo, já que também é uma seção comum em edificações.

Capítulo 2

Objetivo do Trabalho

Um cálculo preciso de um pilar, levando em consideração a não-linearidade física e geométrica, em flexão composta oblíqua, é bastante complicado. Existe acoplamento entre as duas direções, ou seja, a consideração dos efeitos da segunda ordem em uma direção (principal) depende também dos esforços solicitantes da outra direção (ortogonal). Os esforços finais e o produto de rigidez EI de uma direção dependem dos valores obtidos na outra direção, é o que se chama nesse trabalho de *acoplamento*.

Este estudo vai focar unicamente nos pilares com formato geométrico em 'L'. Teve-se como ferramenta auxiliar, para atingir-se o objetivo principal, a elaboração de um software computacional que foi utilizado na comparação que foi realizada: a possibilidade do *desacoplamento* entre as duas direções.

O intuito foi realizar com o software um cálculo preciso considerando o acoplamento, ou seja, determinar os esforços finais, incluindo a não linearidade geométrica (2ª ordem), juntamente com o produto de rigidez EI de uma dada direção, levando em conta o que acontece na outra direção (ortogonal). Depois desse cálculo mais elaborado, verificou-se se é possível e a favor da segurança, se obter os esforços finais não-lineares (de 2ª ordem) de uma dada direção sem que se leve em consideração os esforços da outra direção, ou seja, queremos saber se é possível, em um cálculo simplificado, determinar os efeitos não lineares, com uma razoável precisão, com dois cálculos em flexão normal composta, ou seja, apenas considerando a força normal e o momento de uma dada direção.

Os programas de análise estrutural estão começando a levar em consideração a real armadura das peças de concreto armado para que possam, a partir dela, determinar os valores dos produtos de rigidez EI , de modo a poder representar mais precisamente a não linearidade física. Por outro lado, se todos os programas forem começar a considerar de maneira correta o acoplamento, o tempo de resolução computacional será muito grande, pois cada barra de uma estrutura exigiria um número enorme de iterações até chegar a um valor convergente. Os computadores atuais, ainda não estão preparados para essa enorme “carga” computacional.

Essa possibilidade do desacoplamento talvez seja útil para esses softwares estruturais, pois seria uma solução ao problema, sem precisar sobrecarregar tanto o tempo de análise computacional.

Tentou-se abranger o universo real, ou seja, os pilares mais comuns utilizados nos projetos de edifícios de concreto armado, desde os mais esbeltos até os mais robustos, com baixa taxa de armadura até as máximas taxas de armadura, variando o cobrimento, os diâmetros das barras e os demais parâmetros relevantes envolvidos.

Capítulo 3

Comportamento Mecânico do Concreto

3.1. Classes

No Brasil, os concretos estruturais estão classificados conforme a NBR 8953. A nomenclatura é composta pela letra ‘C’ (de classe) seguida do valor da resistência característica à compressão (f_{ck}) em MPa (por exemplo, C30).

A mesma norma divide os concretos em duas classes distintas:

Classe I: abrange concretos com resistência de até 50 MPa (C10, C15, C20, C25, C30, C35, C40, C45 e C50);

Classe II: abrange concretos com resistência entre 55 e 80 MPa (C55, C60, C65, C70, C75 e C80).

Apesar de a norma citada incluir concretos com resistência até 80 MPa, a norma NBR6118:2007, referente ao cálculo de estruturas de concreto armado, não abrange concretos com resistência característica à compressão superior a 50 MPa. Concretos acima da resistência característica de 50 MPa, também conhecidos como concretos de alto desempenho (CAD), passam a ter um comportamento um pouco diferenciado, sendo regidos por um comportamento frágil que não pode ser negligenciado. As hipóteses de cálculo precisam então ser revistas quando da aplicação destes concretos com resistência superior a 50 MPa.

Apesar da norma brasileira de cálculo estrutural, NBR6118, não estar preparada para trabalhar com concretos de alto desempenho, muitas normas estrangeiras, como o CEB90 e o Eurocode 1992, já estipularam regras para os mesmos. Em momento oportuno apresentaremos suas características.

3.2. Módulo de elasticidade

O módulo de elasticidade deve ser obtido segundo ensaio descrito na NBR 8522, sendo considerado nesta norma o módulo de deformação tangente inicial cordal a 30% de f_c , ou outra tensão especificada em projeto.

Quando não forem feitos ensaios e não existirem dados mais precisos sobre o concreto usado na idade de 28 dias, pode-se estimar o valor do módulo de elasticidade usando a expressão:

$$E_{ci} = 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \quad (\text{Expressão 3.1})$$

onde E_{ci} e f_{ck} são dados em MPa.

O módulo de elasticidade numa idade $j \geq 7$ dias pode também ser avaliado através desta expressão, substituindo-se f_{ck} por f_{ckj} . Quando for o caso, é esse o módulo de elasticidade a ser especificado em projeto e controlado na obra.

O módulo de elasticidade secante a ser utilizado nas análises elásticas de projeto, especialmente para determinação de esforços solicitantes e verificação de estados limites de serviço, deve ser calculado pela expressão:

$$E_{cs} = 0,85 \cdot E_{ci} \quad (\text{Expressão 3.2})$$

Na avaliação do comportamento de um elemento estrutural ou seção transversal pode ser adotado um módulo de elasticidade único, à tração e à compressão, igual ao módulo de elasticidade secante (E_{cs}).

Na avaliação do comportamento global da estrutural e para o cálculo das perdas de protensão, pode ser utilizado em projeto o módulo de deformação tangente inicial (E_{ci}).

3.3. Coeficiente de Poisson e Módulo de elasticidade transversal

O coeficiente de Poisson do concreto, relativo às deformações elásticas sob tensões normais de serviço (compressão menor que $0,5f_c$ e tração maior que f_{ct}), pode ser estimado em 0,2.

O módulo de elasticidade transversal G_c pode ser tomado igual a $0,4E_{cs}$.

3.4. Resistência à tração

A resistência à tração indireta $f_{ct,sp}$ e a resistência a tração na flexão $f_{ct,f}$ devem ser obtidas em ensaios realizados segundo a NBR 7222 e NBR 12142, respectivamente.

A resistência a tração direta f_{ct} pode ser considerada igual a $0,9 f_{ct,sp}$ ou $0,7 f_{ct,f}$ ou, na falta de ensaios para a obtenção de $f_{ct,sp}$ e $f_{ct,f}$, pode ser avaliado o seu valor médio ou característico por meio das equações seguintes:

$$f_{ct,m} = 0,3 \cdot f_{ck}^{2/3} \quad (\text{Expressão 3.3})$$

$$f_{ctk,inf} = 0,7 \cdot f_{ct,m} \quad (\text{Expressão 3.4})$$

$$f_{ctk,sup} = 1,3 \cdot f_{ct,m} \quad (\text{Expressão 3.5})$$

onde: $f_{ct,m}$ e f_{ck} são expressos em megapascal.

Para o concreto não fissurado, pode ser adotado o diagrama tensão-deformação bi-linear de tração, indicado na figura 3.1.

Diagrama bi-linear de tração para o concreto
Figura 3.1

3.5. Resistência à compressão

A resistência à compressão simples é denominada f_c . Para estimá-la em um lote de concreto, são moldados e preparados corpos-de-prova para ensaios segundo a NBR5738 (Moldagem e cura de corpos-de-prova cilíndricos ou prismáticos de concreto), os quais são ensaiados segundo a NBR5739 (Concreto – Ensaio de compressão de corpos de-prova cilíndricos).

O corpo-de-prova padrão brasileiro é cilíndrico, com 15 cm de diâmetro e 30 cm de altura. A idade de referência para o ensaio é de 28 dias. Após ensaios de um número satisfatório de corpos-de-prova, um gráfico com os valores obtidos de f_c contra a quantidade de corpos-de-prova relativos a

determinado valor de f_c , também denominada densidade de frequência. A curva encontrada denomina-se Curva Estatística de Gauss ou Curva de Distribuição Normal para a resistência do concreto à compressão (Figura 3.2).

Curva de distribuição normal para a resistência do concreto
Figura 3.2

Na curva de Gauss encontram-se dois valores de fundamental importância: a resistência média do concreto à compressão (f_{cm}) e resistência característica do concreto à compressão (f_{ck}).

O valor f_{cm} é a média aritmética dos valores de f_c para o conjunto de corpos-de-prova ensaiados, e é utilizado na determinação da resistência característica f_{ck} , por meio da expressão:

$$f_{ck} = f_{cm} - 1,65 \cdot s \quad (\text{Expressão 3.6})$$

O desvio-padrão s corresponde à distância entre a abscissa de f_{cm} e a do ponto de inflexão da curva (ponto em que ela muda de concavidade).

O valor '1,65' corresponde ao quantil de 5%, ou seja, apenas 5% dos corpos-de-prova possuem $f_c < f_{ck}$, ou ainda, 95% dos corpos-de-prova possuem $f_c \geq f_{ck}$. Portanto, pode-se definir f_{ck} como sendo o valor da resistência que tem 95% de probabilidade de ser alcançado, em ensaios de corpos-de-prova de um determinado lote de concreto.

Nas obras, devido ao pequeno número de corpos-de-prova ensaiados, calcula-se $f_{ck,est}$, valor estimado da resistência característica do concreto à compressão.

3.6. Formas do diagrama tensão-deformação

3.6.1. Tipos de ensaio

Em relação ao modo de carregar, há três tipos de ensaio:

Tipo I: ensaios com velocidade de carga constante, isto é, ensaios nos quais são dados acréscimos de carga constantes por intervalo de tempo.

Tipo II: ensaios com velocidade de deformação constante, nos quais os acréscimos de carga são dados de modo que a deformação cresça de maneira constante com o tempo.

Tipo III: ensaios com carregamento de duração constante, em que o valor final da carga é rapidamente alcançado (em cerca de 20 minutos) e logo a seguir conservado constante.

Os ensaios do tipo III devem ser os padronizados por produzirem com mais fidelidade as condições reais da estrutura, em que as cargas são geralmente aplicadas instantaneamente e mantidas ao longo da sua vida útil (cargas permanentes).

3.6.2. Efeito da velocidade da deformação no diagrama $\sigma - \epsilon$

O diagrama $\sigma - \epsilon$ do concreto mostra, de início, que o material não obedece à lei de Hooke: o diagrama é curvo praticamente desde a origem. A forma desta curva é influenciada por um grande número de parâmetros, dos quais enumeramos os principais:

- resistência do concreto
- idade do concreto quando do carregamento
- modo de colocação da carga
- duração do carregamento
- forma da seção transversal
- posição da linha neutra (compressão centrada ou excêntrica)

Seria difícil e oneroso fazer ensaios diretamente sobre vigas, com a consideração de todas as influências em jogo. Foram usados prismas com seções de diversos tipos, com carregamentos centrados e excêntricos, de modo a se ter a seção do corpo de prova inteira ou parcialmente comprimida; assim, conseguiram-se situações correspondentes às variações da linha neutra da viga real. Outra vantagem é a menor dispersão de resultados obtida nos ensaios com os prismas.

O tipo de ensaio padronizado antigamente era o de velocidade constante. É fácil mostrar que este modo de ensaio não é o melhor por dois motivos:

- a) nos materiais de comportamento elasto-plástico, quando a tensão se aproxima do valor último, as deformações crescem depressa, tornando difícil a obtenção do último trecho da curva $\sigma - \epsilon$;
- b) a curva só contém um ramo ascendente, atingindo-se a ruptura com $\sigma_c = f_c$.

Diagrama tensão-deformação em ensaios do tipo I
(velocidade de carga constante)
Figura 3.3

Diagrama tensão-deformação em ensaios do tipo II
(velocidade de deformação constante)
Figura 3.4

O segundo defeito (item *b* apresentado) é o mais importante para o concreto. Rasch demonstrou que a curva tensão deformação do concreto possui também um ramo descendente (figura 3.4), havendo um histórico de deformações ulterior à máxima tensão, não detectado pelo primeiro tipo de ensaio. Rasch usou o ensaio com velocidade de deformação controlada (aproximadamente constante) e mostrou ser possível colocar carga e depois retirar carga de modo que ϵ_c cresça com velocidade constante: σ_c cai enquanto ϵ_c aumenta. O valor da deformação poderá, pois, ser maior do que se imaginava antes, com tensão menor. Quando a velocidade de deformação dada no ensaio for pequena, o efeito da deformação lenta far-se-á sentir, subindo o ramo descendente da curva (figura 3.5).

Diagrama tensão-deformação considerando o efeito das cargas de longa duração (Rusch)

Figura 3.5

De modo geral, os resultados dependem não somente das propriedades físicas da mistura e da idade do concreto no instante do início do carregamento, mas, principalmente, pela velocidade de deformação.

À medida que o ensaio de compressão se torna mais lento, observa-se a redução da resistência em relação a resistência potencial $f_{c,R}$ que é obtida em um ensaio rápido, realizado no instante da ruptura no ensaio de longa duração. Fica provado, portanto, o efeito deletérios das cargas de longa duração sobre a resistência do concreto.

Paralelamente à diminuição da resistência com o tempo de carga, também se observa o aumento da importância do ramo descendente do diagrama tensão-deformação.

Nos ensaios de longa duração, além das deformações de natureza elastoplástica, também se manifestam deformações por fluência e retração do concreto. As deformações do concreto consideradas como de natureza plástica são em grande parte de natureza pseudo-plástica, que decorrem de um processo de microfissuração da estrutura interna do material.

Para que os resultados dos ensaios de longa duração possam ser empregados no desenvolvimento de uma teoria geral sobre flexão, é preciso que os diagramas tensão-deformação sejam traçados em função das respectivas resistências obtidas em ensaios correspondentes a uma mesma idade padrão convencional. Tradicionalmente, os concretos têm resistência avaliada aos 28 dias de idade, pois é essa a resistência especificada no projeto estrutural. Esses valores são representados pelo símbolo $f_{c,28}$.

Nas investigações realizadas por Rusch, a idade-padrão de referência para a resistência do concreto foi tomada com 56 dias, com a finalidade de se diminuir a variabilidade da resistência, em virtude do maior grau de maturação dos corpos de prova. Essas resistências, obtidas em ensaios rápidos aos 56 dias de idade, são representadas por $f_{c,56}$.

Quando se pretende explicar tanto o efeito das cargas de longa duração quanto o da maturação do concreto, os resultados experimentais também podem ser representados em função de uma resistência convencional, do tipo $f_{c,28}$.

Diagramas tensão-deformação considerando os efeitos das cargas de longa duração e da maturação do concreto

Figura 3.6

Nesta representação, ficam salientados os dois fenômenos, o da queda de resistência pela carga de longa duração e do aumento da importância do ramo descendente do diagrama tensão-deformação com a diminuição da velocidade de deformação.

Note que a resistência obtida no ensaio rápido com velocidade de deformação de $1 \cdot 10^{-3}/\text{min}$ corresponde ao valor de $f_{c,56}$, sendo maior que a resistência padrão usual $f_{c,28}$, uma vez que estes corpos de prova já tinham idade de 56 dias no início do carregamento.

3.7. Redução da resistência sob carga mantida – Efeito Rusch

Até aqui tratamos de carregamentos que produzam velocidade de deformação constante. A experiência mostra que a máxima carga atingida dura pouco tempo, mesmo com baixas velocidades de deformação. Na estrutura, a carga é geralmente aplicada em um curto espaço de tempo e depois é mantida constante. Este tipo de carregamento, que corresponde a realidade, é desfavorável em relação ao primeiro, de acordo com os ensaios de RÜSCH.

A figura 3.7 mostra o tipo de resultado obtido por Rusch no estudo da influência da história do carregamento sobre a resistência do concreto. É importante assinalar que existe uma grande dificuldade na realização de ensaios dessa natureza, pois a aleatoriedade da deformação por fluência tende a eliminar a centragem da carga aplicada, centragem essa que precisa ser restaurada passo a passo por

meio de dispositivos de ensaio que permitam manter a compressão uniforme da seção transversal durante todo o tempo de duração do ensaio.

Nessa figura são usados os seguintes símbolos:

t_0 = idade do concreto no início do carregamento

Δt = duração do carregamento

$t = t_0 + \Delta t$ = idade do concreto no instante de ruptura

$f_{c,R}$ = resistência do concreto no ensaio rápido na idade $t = t_0 + \Delta t$

$f_{c,L}$ = resistência do concreto no ensaio lento, com ruptura na idade $t = t_0 + \Delta t$

Influência da duração do carregamento sobre a resistência (segundo Rusch)

Figura 3.7

As curvas em pontilhado correspondem aos ensaios com velocidade de deformação constante. O traço cheio indica carregamento rápido até certo valor de σ_c , tensão mantida constante a partir daí. As curvas em traço-ponto indicam a tendência geral dos resultados. Em abscissas coloca-se o tempo t de duração do carregamento e em ordenadas a tensão σ_c dada em valor relativo, referido a uma resistência $f_{c,R}$ obtida com ensaio rápido num corpo-de-prova cilíndrico gêmeo, do mesmo concreto, na idade $t = t_0 + \Delta t$ em que ocorreu a ruptura do corpo-de-prova submetido à carga de longa duração.

O exame do gráfico permite observar alguns pontos:

- a) quanto menor a velocidade de deformação, isto é, quanto maior a duração do carregamento, menor é a tensão de ruptura;
- b) levando-se a tensão até um certo ponto em carregamento rápido e mantendo-se tal tensão constante, a ruptura pode ocorrer depois de um certo período; a tensão de ruptura, após a permanência da carga durante um certo período, 3 meses por exemplo, é menor que a tensão de ruptura obtida no ensaio com velocidade de deformação constante correspondente à mesma duração do carregamento.

As duas curvas superiores desta figura mostram que, para rupturas ocorridas com a mesma duração Δt de carregamento, a resistência do concreto carregado progressivamente é sempre maior que a do carregado rapidamente e mantido sob carga constante.

Como a história do futuro do carregamento das estruturas não pode ser controlada, para efeito de projeto, a resistência do concreto será sempre considerada, a favor da segurança, com o valor do limite inferior aos valores $f_{c,L}$, referentes a carregamentos rápidos que são mantidos ao longo do tempo, conforme a curva da figura 3.7.

Com essa representação, fica eliminada a influência do acréscimo de maturação que ocorre ao longo do tempo Δt de duração do ensaio lento.

Constata-se, desse modo, que as tensões acima de determinados limites podem, com o tempo, provocar a ruptura do concreto. Com valores abaixo desses limites, o concreto apresenta apenas o fenômeno de fluência lenta, mas sua resistência é perene, como se indica na figura 3.8.

Influência da intensidade e da duração do carregamento sobre a deformação do concreto

Figura 3.8

Na figura, são marcados em abcissas os encurtamentos relativos do concreto em valor absoluto, e, em ordenadas, as relações entre a tensão do concreto e a resistência à ruptura por compressão sobre cilindros em ensaio rápido na idade $t = t_0 + \Delta t$ ($f_{c,R,t}$).

Observa-se também, pelos ensaios de Rusch, que a resistência do concreto sob ação de cargas de longa duração é menor que sob o efeito de carregamentos rápidos (cerca de 20 a 25% inferior).

À medida que o tempo t aumenta, a tensão σ_c última cai. Se a tensão σ_c for mantida mais baixa que a resistência à longo prazo (ponto A), após o tempo t de duração da carga (100 minutos no exemplo), não haverá ruptura; se a carga for mantida indefinidamente, também não haverá ruptura (ponto B), apenas aumento da deformação (deformação lenta). Se a tensão σ_c for mantida superior à resistência a longo prazo (ponto C), não haverá ruptura após 20 minutos do exemplo, mas se a carga se manter por mais tempo, a ruptura pode ocorrer em D (antes de 100 minutos). Vê-se, portanto, que com o aumento da duração da carga, tornam-se as curvas cada vez mais achatadas, com rupturas para relações $\frac{\sigma_c}{f_{c,R,t}}$ menores que 1,0.

De acordo com Rusch, em todos os ensaios, a relação entre a resistência $f_{c,L,t}$ obtida em um ensaio lento e a resistência $f_{c,R,t}$ obtida no correspondente ensaio rápido, com ambas as rupturas

ocorrendo na mesma idade $t = t_0 + \Delta t$, é consistentemente independente da qualidade do concreto e da idade t_0 de início de carregamento, como se assinala na figura 3.9.

Relação entre as resistências obtidas em ensaios rápidos e lentos

Figura 3.9

De acordo com os ensaios realizados por Rusch, a relação entre a resistência no ensaio lento e a resistência no correspondente ensaio rápido pode ser admitida como tendente ao limite médio de 0,8 e com praticamente todos os valores acima da relação 0,75, que é o limite a ser considerado como efetivo no estabelecimento dos critérios de segurança em relação à ruptura do concreto comprimido.

É importante assinalar que as investigações antes relatadas mantiveram a centragem da carga durante todo o tempo de carregamento, por meio de ajustes sucessivos realizados com apoios especiais existentes na máquina de ensaio idealizada por Rasch, que foi empregada por Rusch em suas investigações.

Se repetirmos os ensaios em corpos de prova com 1 ano de idade quando da aplicação da carga, teremos resultados análogos, com deformações máximas menores (a deformação lenta é menor nos concretos mais velhos).

Nos itens seguintes veremos que na prática, para cálculos em estados limites últimos, estes diagramas serão substituídos por diagramas simplificados, que se mantêm a favor da segurança em todos os casos.

3.8. A resistência de longa duração do concreto

O fenômeno da resistência de longa duração do concreto é complicado pela existência de dois fatores que atuam em sentido contrário: de um lado, o decréscimo da resistência pela duração prolongada do carregamento; de outro lado, o aumento da resistência do concreto ao longo do tempo, devido ao endurecimento, independente da atuação ou não da carga. Para que os resultados não sejam falseados, a resistência a curto prazo é então definida como a resistência de um corpo de prova moldado na mesma época e nas mesmas condições que o corpo do ensaio, e que permanece descarregado até o instante em que o corpo de prova gêmeo rompe sob carga mantida, ocasião em que o primeiro é levado à ruptura num ensaio rápido, realizado em cerca de 10 minutos de duração. Procedendo assim, as rupturas nos ensaios lento e rápido comparáveis, pois ambas referem-se à mesma idade do concreto, isto é, ao mesmo grau de endurecimento.

Os ensaios realizados por RÜSCH no Laboratório de Munich mostraram que:

- a) a relação entre a resistência sob carga mantida a longo prazo e a resistência a curto prazo não depende da qualidade do concreto;
- b) a mesma relação não depende da idade do concreto quando da aplicação da carga, tendo em vista a definição adotada.

Seja a notação:

t_0 = idade do concreto no instante em que se aplica a carga, mantida constante após cerca de 20 minutos;

Δt = duração da carga mantida constante;

$f_{c,R,28}$ = resistência na idade 28 dias, em ensaio rápido (tensão de ruptura num corpo de prova isolado: não confundir com resistência característica);

$f_{c,R,t}$ = resistência na idade $t = t_0 + \Delta t$ dias, em ensaio rápido;

$f_{c,L,t}$ = resistência do concreto sob carga axial mantida na idade $t = t_0 + \Delta t$ (carga mantida Δt dias depois da sua aplicação na idade t_0).

A figura 3.10 mostra o efeito da excentricidade da carga na resistência, onde, em função da excentricidade relativa $\lambda = e/h$, é dado o coeficiente Ke , definido por:

$$K_e = \frac{(f_{c,L,t})_{\lambda \neq 0}}{(f_{c,L,t})_{\lambda = 0}} \quad (\text{Expressão 3.7})$$

Efeito da excentricidade da carga na resistência

Figura 3.10

Os ensaios mostraram que os valores de Ke independem do tempo de duração do ensaio, de modo que podem ser determinados com ensaios rápidos.

A figura 3.11 ilustra o efeito do tempo na resistência, através dos coeficientes

$$K_j = \frac{f_{c,R,t}}{f_{c,R,28}} \quad (\text{Expressão 3.8})$$

$$K_t = \frac{f_{c,L,t}}{K_e \cdot f_{c,R,t}} \quad (\text{Expressão 3.9})$$

Efeito do tempo na resistência

Figura 3.11

O coeficiente K_j indica o acréscimo da resistência com a idade, em virtude do endurecimento. O coeficiente K_t indica o efeito RÜSCH, já eliminado o problema da excentricidade de acordo com a expressão 3.7. Os tempos que aparecem como abcissas na figura 3.11 são marcados em uma escala logarítmica: $\log t$ para K_t e $\log (j+t)$ para K_j .

Podemos agora relacionar a resistência sob carga mantida por um longo prazo com a resistência padrão obtida com ensaios rápidos em corpos de prova de 28 dias de idade. Da expressão 3.9:

$$f_{c,L,t} = K_t \cdot K_e \cdot f_{c,R,t} \quad (\text{Expressão 3.10})$$

Levando em consideração a expressão 3.8:

$$f_{c,L,t} = K_t \cdot K_e \cdot K_j \cdot f_{c,R,28} \quad (\text{Expressão 3.11})$$

Portanto, determinado experimentalmente os coeficientes K , a resistência sob carga mantida pode ser determinada em função de $f_{c,R,28}$ pela expressão 3.11.

Suponhamos dois grupos de corpos de prova carregados axialmente ($K_e = 1,0$), o primeiro grupo com a idade de 10 dias, o segundo grupo carregado na idade de 1 ano. Já sabemos que a idade t não influi na relação K_t , mas, naturalmente, influirá no valor absoluto da resistência sob carga mantida, como se vê pela expressão 3.11. A figura 3.12 mostra a influência da idade do corpo de prova quando do carregamento.

Variação da resistência do concreto com a idade e com a duração da carga

Figura 3.12

A curva tracejada K_j mostra o aumento da resistência com o tempo, em virtude do endurecimento: maior nos primeiros tempos, tendendo à estabilização depois de um ano ou dois. A curva em traço cheio indica a variação da resistência ao longo do tempo, efeito RÜSCH e efeito endurecimento combinados. Vemos que o efeito RÜSCH se faz sentir logo após a aplicação da carga; há então uma queda brusca da resistência. Trabalhando com outra escala, podemos ver que o valor mínimo da resistência é atingido após 6 horas de carga mantida no concreto jovem. Depois disto, o endurecimento prevalece e a resistência aumenta. No concreto velho também há queda rápida e o valor mínimo ainda não foi alcançado nos ensaios, mesmo depois de muitos anos. Tudo indica, felizmente que se mantém acima de $f_{c,R,28}$.

3.9. O encurtamento último do concreto

3.9.1. Diagrama tensão-deformação efetivo na flexão

Procurando estabelecer a distribuição de tensões na zona comprimida da seção de concreto submetida à flexão, convém lembrar que cada fibra sofre deformação com velocidade diferente. Aceitando a lei de NAVIER, a velocidade de deformação é proporcional à distância da fibra à linha neutra. A função desejada $\sigma = \sigma(\epsilon)$ depende da natureza da carga: se variável, da velocidade da deformação; se constante, do tempo de duração do carregamento.

Admitindo-se a hipótese de Rasch, de que as relações tensão-deformação das fibras das peças fletidas sejam as mesmas que as dadas pelos diagramas tensão-deformação determinados em ensaios de compressão uniforme com as respectivas velocidades de deformação, pode-se construir, ponto a ponto, o diagrama efetivo de tensões normais no banzo comprimido das peças fletidas, conforme o artifício explicado pelo exemplo da figura 3.13.

Determinação das tensões efetivas em uma seção transversal fletida, cuja borda mais comprimida tem a deformação $\varepsilon_{cu} = 5 \cdot 10^{-3}$, para a duração do carregamento de 1 hora

Figura 3.13

Nessa figura são mostradas as tensões σ_c da zona comprimida de uma viga ensaiada aos t dias de idade, cujo carregamento teve duração de 1 hora, provocando a deformação máxima $\varepsilon_{cu} = 5 \cdot 10^{-3}$ no final do carregamento.

De posse do diagrama de tensões normais no plano da seção transversal, uma vez conhecida a forma dessa seção, pode-se calcular a resultante de compressão R_c e a posição dessa resultante, conforme mostrado na figura 3.14.

Variação do encurtamento último no caso da seção parcialmente comprimida

Figura 3.15

Percebe-se então que cada forma de seção transversal e posição de linha neutra tendem a um resultado diferente de encurtamento último ϵ_{cu} .

3.9.3. Determinação do encurtamento último

De posse de tais resultados, cabe agora a pergunta: qual o valor da deformação última a ser adotado no cálculo? Um valor maior de ϵ_{cu} corresponde a uma tensão menor e faz baixar a linha neutra (zona de compressão maior, braço de alavanca menor), como mostra a figura 3.17. Com tantas variáveis em jogo, o caminho mais firme é calcular o momento resistente último em função do máximo encurtamento (na fibra mais comprimida).

Para uma dada forma de seção transversal e uma determinada profundidade x da linha neutra, com uma dada armadura de seção A_s de tipo conhecido, para diferentes valores da deformação extrema ϵ_c e para diferentes velocidades de deformação, obtêm-se diferentes diagramas de tensões de compressão, os quais determinam diferentes condições de solicitação de flexão composta na seção transversal.

De modo geral, no concreto estrutural as solicitações de flexão composta são mais bem representadas pela força normal acompanhada do momento fletor M_s referido ao centro geométrico da armadura de tração.

Com a notação empregada, na figura 3.14, para cada uma das situações consideradas obtêm-se os valores

$$N = R_c - A_s \cdot \sigma_s \quad (\text{Expressão 3.12})$$

e

$$M_s = R_c \cdot (d - \xi' \cdot x) \quad (\text{Expressão 3.13})$$

onde a tensão σ_s na armadura fica inteiramente determinada por x e ε_{c1} .

No caso de seções retangulares, tem-se

$$M_s = b \cdot x \cdot \alpha \cdot f_c \cdot (d - \xi' \cdot x) \quad (\text{Expressão 3.14})$$

resultando para o momento fletor reduzido o valor

$$\mu_s = \frac{M_s}{b \cdot d^2 \cdot f_c} = \xi \cdot (1 - \xi' \cdot \xi) \quad (\text{Expressão 3.15})$$

Para uma mesma profundidade x da linha neutra e uma mesma duração Δt do carregamento, os resultados obtidos com diferentes valores do encurtamento ε_{c1} da borda mais comprimida estão mostrados na figura 3.16.

Determinação do encurtamento último para uma dada velocidade de carregamento

Figura 3.16

Se essa seção transversal fosse a seção crítica de uma peça estrutural submetida a um carregamento crescente, a cada valor de μ_s aplicado nas condições especificadas para x e Δt , corresponderia uma deformação extrema ε_{c1} , dada por este diagrama da figura 3.16.

Obviamente, como o momento fletor crescente com o aumento do carregamento somente pode chegar até o vértice do diagrama, atingindo-se então uma situação última, conclui-se que a correspondente deformação máxima ε_{c1} define o valor de $\varepsilon_{c1,u}$ referente a profundidade da linha neutra e a velocidade de carregamento consideradas.

Como não se sabe a priori qual a velocidade de carregamento mais desfavorável, para tornar o encurtamento último $\varepsilon_{c1,u}$ independente do processo de carregamento, é preciso adotar o valor correspondente ao mínimo dos máximos momentos fletores últimos calculados com diferentes velocidades de carregamento.

A figura 3.18 dá uma idéia do método empregado por RÜSCH. Toda as seções tinham $f_{c,56} = 21$ MPa e $x/d = 0,40$, para diferentes velocidades de carregamento.

Figura 3.17

Figura 3.18 – Determinação do momento último

Escolhe-se uma seção transversal, uma posição da linha neutra e uma duração de carregamento. Pretende-se determinar o gráfico do momento reduzido (reduzido adimensional) em função da deformação ε_{cd} na fibra extrema. Para isto, assume-se um valor para ε_{cd} na fibra extrema. Do diagrama tensão-deformação na flexão, obtido de maneira descrita no item anterior, tira-se a tensão na fibra extrema. Como a linha neutra foi fixada, cada fibra tem ε_c conhecido e daí σ_c no mesmo gráfico. Tendo-se, então, a distribuição de tensões na zona comprimida, calcula-se o momento resistente em função do ε_{cd} assumido, do que resulta um ponto numa das curvas da figura 3.18.

Unindo-se os pontos correspondentes aos diversos momentos últimos, obtém-se uma nova curva, figura 3.18, que apresenta um ponto mínimo. O valor de ε_c correspondente ao mínimo destes máximos é o valor de ε_{cu} procurado. Portanto, quando a carga cresce de tal maneira que as velocidades de deformação nas diversas fibras permaneçam constantes, existe certa duração do carregamento que conduz ao mais baixo momento último.

3.9.4. Generalização dos resultados

Tomando como base os concretos de classe de resistência entre 20 e 50 MPa (C20 à C50), para a seção retangular, o valor de ε_{cu} varia aproximadamente entre 3,0 ‰ à 3,5 ‰ as para posições da linha neutra entre $x = 0$ e $x = h$, respectivamente. Na seção triangular com vértice mais comprimido, ε_u chega a quase 5,0 ‰. Para os concretos da classe de resistência citada, a norma brasileiro NBR6118:2007, sugere a adoção de um valor único $\varepsilon_{cu} = 3,5$ ‰, definido como encurtamento convencional de ruptura do concreto, válido como deformação na borda mais comprimida para qualquer tipo de seção

transversal e qualquer posição da linha neutra (desde $x = 0$ até $x = h$) é uma hipótese simplificadora de cálculo que a pesquisa mostrou estar a favor da segurança. A seção T constitui um caso de exceção: o encurtamento de ruptura (na borda mais comprimida) é da ordem de 2,0 ‰. Neste caso, o cálculo com 3,5 ‰ fica contra a segurança, principalmente pelo fato de superestimar a tensão na armadura superior comprimida A_{s2} . Na prática o problema não é grave, porque, ao se levar em conta a largura da mesa colaborante, tem-se em geral linha neutra alta, de modo que se usa quase sempre o trecho parabólico do diagrama de distribuição de tensões no concreto, correspondente ao sub-domínio 2a. Além disso, a existência de A_{s2} é caso excepcional.

Considerando ainda os concretos da classe de resistência mencionada anteriormente, os ensaios também mostraram, de maneira inequívoca, que a ruptura ocorre com deformações menores quando o carregamento é centrado: $\epsilon_u \cong 2 \text{ ‰}$. Estes resultados experimentais justificam os números 3,5 ‰ e 2,0 ‰ que constam no diagrama de deformações da norma NBR6118:2007. Para posições da linha neutra fora da seção, é lógico que as retas devem girar em torno do ponto C (figura 3.19), passando, com continuidade de 3,5 ‰ à deformação constante de 2 ‰, quando x varia de $x = h$ até $x \rightarrow \infty$. Se o giro fosse em torno do ponto superior (3,5 ‰), ter-se-iam valores superestimados para as tensões nos aços de resistência relativamente elevada, o que seria contra a segurança. Além disto, haveria contradição com os resultados experimentais no caso da compressão centrada.

Variação do encurtamento último nas seções transversais

Figura 3.19

Para as aplicações gerais não há necessidade de conhecimento de $\varepsilon_{cl,u}$ com grande precisão. De fato, considerando o exemplo da figura 3.18, mesmo para a situação de maior incerteza, correspondente a duração do carregamento Δt minutos, os diferentes valores de $\varepsilon_{cl,u}$, que variam aproximadamente entre $2 \cdot 10^{-3}$ e $4 \cdot 10^{-3}$, levam, com diferentes posições da linha neutra, a uma diferença, entre o máximo e o mínimo momentos fletores últimos calculados, não superior a 10%.

A influência da forma da seção transversal e da posição da linha neutra também ocorre nos concretos de alto desempenho (CAD), porém, os valores mencionados acima se alteram devido ao comportamento frágil destes concretos.

Com o avanço tecnológico do concreto, resistências da ordem de até 100 MPa são relativamente fáceis de serem obtidas. Estes concretos já fazem parte de normas internacionais como o Eurocode 2 e o CEB90, mas ainda não aparecem na NBR6118. Para os concretos de alto desempenho, os valores de deformação anteriormente mencionados, tanto para a compressão centrada (2,0 ‰), como para os casos de flexão quando a linha neutra se encontra dentro da seção transversal (3,5 ‰), deixam de ter validade. Novos valores são então necessários para corrigir o diagrama σ - ε , para que a idealização continue a conduzir a um cálculo prático sem grandes complicações e que, ao mesmo tempo, esteja sempre a favor da segurança.

3.9.5. Comentários e conclusões

Uma estrutura nova, colocada em carga prematuramente, apenas 10 dias, por exemplo, enfrenta seu maior perigo 6 horas após o carregamento. Se não romper aí, não deverá romper mais, desde que a carga permaneça sem acréscimos.

No caso de reforma de uma estrutura de concreto já considerado velho, de 2 anos de idade, por exemplo, não se pode contar com a resistência $f_{c,R,t}$ e sim com a resistência padrão $f_{c,R,28}$.

As estruturas entram em carga geralmente com 28 dias de idade. Neste momento, $K_j \cdot K_t = K_t = 0,87$. Depois de cerca de três meses, a resistência já voltou para $f_{c,R,28}$ e continua subindo.

Tendo em vista os resultados anteriores, as normas costumam exigir que as estruturas não entrem em carga antes dos 28 dias. Se houver o caso, deve-se levar em conta no cálculo a resistência menor.

3.10. Resistência de cálculo a ser usada no projeto

Considerando o modelo geral da resistência à compressão dos materiais estruturais, a resistência efetiva de cálculo pode ser expressa por:

$$f_{cd} = k_{mod} \cdot \frac{f_{ck}}{\gamma_m} \quad (\text{Expressão 3.16})$$

onde o coeficiente de modificação é dado por

$$k_{mod} = k_{mod1} \cdot k_{mod2} \cdot k_{mod3} \quad (\text{Expressão 3.17})$$

e o coeficiente de minoração da resistência do material por

$$\gamma_m = \gamma_{m1} \cdot \gamma_{m2} \cdot \gamma_{m3} \quad (\text{Expressão 3.18})$$

Sendo, então,

$$f_{cd} = (k_{mod1} \cdot k_{mod2} \cdot k_{mod3}) \cdot \frac{f_{ck}}{(\gamma_{m1} \cdot \gamma_{m2} \cdot \gamma_{m3})} \quad (\text{Expressão 3.19})$$

Nessa expressão, k_{mod1} considera o erro sistemático decorrente do emprego de corpos-de-prova de pequenas dimensões, k_{mod2} leva em conta a possível diferença entre a resistência do material da estrutura com o passar do tempo, em relação a resistência do material do corpo-de-prova no ato do ensaio de controle, e, k_{mod3} retrata a degradação da resistência do material da estrutura pela ação das cargas de longa duração.

De acordo com a teoria geral da flexão elaborada por Rusch, foram adotados os valores $k_{mod1} = 0,95$, $k_{mod2} = 1,20$ e $k_{mod3} = 0,75$, resultando então o famoso $k_{mod} = 0,85$.

De modo análogo, o coeficiente parcial de segurança γ_{m1} leva em conta a verdadeira variabilidade da resistência do material dentro de lotes homogêneos, γ_{m2} leva em conta as diferenças entre o material da estrutura e o material do corpo-de-prova, como a que existe no caso do concreto em que ocorre um peneiramento quando ele é lançado através dos espaços entre as barras das armaduras da estrutura, e, γ_{m3} considera os efeitos de todas as possíveis causas de redução da resistência que não foram consideradas no modelo de segurança, como, por exemplo, os defeitos localizados no material da estrutura.

Sendo o valor clássico de $\gamma_m = \gamma_c = 1,4$, a resistência de cálculo que deve ser utilizada em projetos fica sendo o valor largamente já conhecido pelo leitor

$$f_{cd} = 0,85 \cdot \frac{f_{ck}}{1,4} = 0,61 \cdot f_{ck} \quad (\text{Expressão 3.20})$$

3.11 A forma do diagrama de tensões na compressão

3.11.1. O diagrama parábola-retângulo

No item 3.9.3 foi mostrado como construir, ponto a ponto, o diagrama de tensões normais na zona comprimida da seção transversal das peças fletidas. Para isso, era necessário conhecer os diagramas tensão-deformação do concreto submetido a diferentes velocidades de deformação, bastando então impor o tempo Δt de duração do carregamento da peça fletida, bem como o diagrama de deformação da seção transversal a ser atingido nesse tempo Δt especificado, tudo a partir da mesma idade t do concreto.

Em uma dada seção transversal, para cada posição da linha neutra e para cada valor da deformação na borda mais comprimida, resulta certo momento fletor resistente. Variando o encurtamento da borda mais comprimida, obtêm-se diferentes momentos resistentes, cujo máximo define o encurtamento último ε_{cu1} , como mostrado na *figura 3.16*.

A generalização mostrada na *figura 3.15*, referente a resultados de seções T , retangulares e triangulares com duas profundidades extremas de linha neutra, foi elaborada com a hipótese de que a duração Δt dos carregamentos fosse, para todos eles, de 1 hora. Na *Figura 3.20* estão mostrados esses diagramas de tensões, bem como os correspondentes diagramas de deformações.

Deformações e tensões na ruptura para valores extremos de $\xi = x/d$ e $\Delta t = 1$ hora.

Figura 3.20

Na figura 3.21, todos os diagramas anteriores foram superpostos, mostrando-se que o diagrama parábola-retângulo, com trecho retangular de profundidade $3/7 x$, forma uma envoltória suficiente precisa para as aplicações práticas.

Note que mesmo no caso particular da seção triangular, com a linha neutra próxima da borda comprimida ($\xi_{\Delta} \rightarrow 0$), os erros cometidos na estimativa da resultante das tensões de compressão não afetam significativamente a determinação do momento fletor resistente.

Envoltória dos diagramas de tensões – Carregamento com duração $\Delta t = 1$ hora.

Figura 3.21

Estes mesmos resultados estão mostrados na *figura 3.22*, construída agora sob a forma de diagramas tensão-deformação. Todos os diagramas estão contidos na zona tracejada da figura.

Diagramas tensão-deformação e o diagrama parábola-retângulo

Figura 3.22

Observe que, embora o diagrama parábola-retângulo tenha sido imaginado como representativo das tensões na zona comprimida das peças fletidas, ele também pode ser interpretado como uma aproximação do diagrama tensão-deformação do concreto comprimido e, como tal, tem sido por vezes empregado nas aplicações do concreto estrutural, a despeito da incoerência entre o valor do módulo de deformação longitudinal do concreto e a tangente na origem desse diagrama.

Os resultados até agora analisados sobre as investigações realizadas sugere que o diagrama de tensões no plano da seção transversal fletida possa ser admitido como a forma de uma parábola-retângulo, todavia é importante notar que os resultados considerados foram obtidos apenas com a duração do carregamento $\Delta t = 1 \text{ hora}$.

A generalização dos resultados precisar ser feita para qualquer duração do carregamento. No entanto, a técnica experimental empregada para a obtenção dos resultados até aqui analisados levaria a uma quantidade de trabalho proibitiva se fosse empregada nessa generalização dos resultados.

Ao invés disso, a generalização foi feita de modo mais simples, conforme se mostra a seguir, controlando-se apenas as deformações na fibra mais comprimida e na fibra menos comprimida ou mais tracionada da seção transversal em observação.

3.11.2. Influência da duração do carregamento

O diagrama parábola-retângulo determinado no item anterior decorreu de ensaios realizados, todos eles, com 1 hora de duração do carregamento.

Com o objetivo de aferir a influência da duração do carregamento sobre a forma do diagrama de tensões, foram feitos ensaios de longa duração com prismas submetidos à compressão excêntrica.

Nesses ensaios, *figura 3.23*, foram medidas as deformações ϵ_{c1} e ϵ_{c2} das fibras extremas das seções transversais fletidas e a carga de ruptura para diferentes excentricidades relativas $\lambda = e/h$.

Deformações nas bordas extremas em função da excentricidade relativa $\lambda = e/h$

Figura 3.23

Os corpos-de-prova foram carregados na idade $t_0 = 56$ dias, ocorrendo ruptura após o tempo $\Delta t = 70$ dias. Nesta figura, estão mostradas as deformações nas bordas extremas, na iminência da ruptura, ocorrida na idade $t_0 + \Delta t$ e no meio do período de carregamento, na idade $t_0 + \Delta t/2$.

Os correspondentes diagramas de deformações das seções transversais das peças ensaiadas estão mostrados na figura 3.24.

Note que para a mesma excentricidade relativa é pequena a diferença da posição da linha neutra na iminência da ruptura e no meio do período de carregamento, embora as deformações nessas duas situações sejam muito diferentes entre si.

Diagramas de deformação em função da excentricidade relativa no meio do período de carregamento e na iminência da ruptura - Figura 3.24

Essa permanência da posição da linha neutra por longos períodos de tempo sob a ação de carregamentos constantes sugere que o diagrama de tensões também permaneça praticamente constante ao longo do tempo, pois as condições de equilíbrio a respeito são as mesmas durante todo o tempo considerado.

Na sequência da investigação esta hipótese de manutenção da forma do diagrama de tensões ao longo do tempo foi comprovada experimentalmente, todavia, para essa finalidade, foi preciso considerar os diagramas de deformações em situações afastadas da iminência de ruptura do concreto, pois, em situações dessa natureza, a variação das deformações é muito grande, em virtude da intensa microfissuração que precede a ruptura macroscópica.

Na investigação realizada por Rusch, foi adotado o critério prático de se considerar o diagrama de deformações no meio do período de carregamento, ou seja, o diagrama na idade $t_0 + \Delta t/2$. Com esse critério os diferentes corpos-de-prova deveriam chegar a ruptura praticamente na mesma idade $t_0 + \Delta t$.

Note que o critério prático poderia ter sido outro. Ao invés do diagrama deformações corresponder ao meio do período de carregamento sob a ação de um carregamento constante, que vai produzir a ruptura no fim de tal período, o diagrama poderia ter sido adotado, por exemplo, como sendo aquele correspondente a 90% da carga de ruptura, em ensaios com carregamentos progressivos suficientemente lentos. Com este outro critério, os ensaios de longa duração não precisariam levar todos os corpos-de-prova a ruptura, com praticamente a mesma duração Δt_u do carregamento.

3.11.3. Influência da duração do carregamento sobre a resistência média da zona comprimida

Realizando ensaios rápidos no tempo t de compressão centrada e de compressão excêntrica de um mesmo concreto, pode ser obtida a relação entre as resistências médias ($f_{c,R,\lambda} = F/A_c$ com $\lambda = e/h \neq 0$) e a resistência efetiva ($f_{c,R,\lambda=0} = F/A_c$), ambas referente à mesma idade t do concreto. Na *figura 3.25* estão mostrados ensaios que indicaram que os resultados são praticamente independentes da qualidade do concreto e de sua idade na ocasião da ruptura.

Resistência média da zona comprimida – Ensaios de Rusch

Figura 3.25

Na *figura 3.25* estão mostrados os resultados dos ensaios lentos de compressão excêntrica, expressos pela razão entre a resistência média excêntrica $f_{c,L,\lambda}$ e a resistência efetiva $f_{c,L,\lambda=0}$ obtidas com corpos-de-prova centrados submetidos à mesma história de carregamento. Nessa mesma figura também estão mostrados os valores que se obtêm corrigindo as razões antes indicadas pela relação entre a resistência $f_{c,L,t}$ de longa duração e a resistência $f_{c,R,t}$ obtida em ensaios rápidos com ruptura na mesma idade $t = t_0 + \Delta t_u$ que a do ensaio de compressão excêntrica.

Estes últimos resultados praticamente coincidem com aqueles obtidos com ensaios rápidos de compressão excêntrica. Isso mostra que a influência da excentricidade pode ser estudada experimentalmente apenas com ensaios de curta duração, sendo seus resultados aplicados também aos ensaios de longa duração. Esta conclusão permitiu que o efeito da excentricidade pudesse ser cuidadosamente analisado por meio de ensaios rápidos, que são de mais fácil execução.

3.11.4. Diagrama de tensões com carregamentos de longa duração

Conforme o item anterior, nos ensaios de ruptura por compressão excêntrica com carregamentos de longa duração, com excentricidade relativa $\lambda = e/h$ conhecida, foram medidas, no meio do período de carregamento, as deformações ε_{c1} e ε_{c2} nas fibras das bordas extremas e, a partir delas, foi determinada a posição da linha neutra, como mostrado nas *figuras 3.23 e 3.24*. Além disso, conhecendo a carga de ruptura aplicada nesses ensaios, obtêm-se a resistência média $f_{c,L,\lambda}$ da zona comprimida da seção transversal.

Traçado do diagrama de tensões

Figura 3.26

A tensão aplicada na borda mais comprimida da seção σ_{c1u} , na condição de ruptura, que se admite ser igual à resistência efetiva de longa duração do concreto, pode ser obtida a partir da resistência média $f_{c,L,\lambda}$, corrigindo-a como indicado na *figura 3.26*, pela relação $f_{c,R,\lambda=0}/f_{c,R,\lambda}$ conforme foi estabelecido no item 3.11.3, obtendo-se então o valor

$$f_{c,L,\lambda=0} = f_{c,L,\lambda} \cdot \left(\frac{f_{c,R,\lambda=0}}{f_{c,R,\lambda}} \right) \quad (\text{Expressão 3.21})$$

Admitindo-se então que seja $\sigma_{c1u} = f_{c,L,\lambda=0}$, e conhecendo-se a posição da linha neutra, é possível, por meio de tentativas, determinar o diagrama de tensões na seção transversal, como se mostra em linha pontilhada na *figura 3.26*.

O diagrama de tensões assim determinado deve respeitar as duas condições de equilíbrio, isto é, o trecho que efetivamente atua sobre a seção da peça deve ter resultante igual à força F aplicada e o centro geométrico deve estar sobre a linha de ação da força excêntrica aplicada no ensaio.

Desse modo, a partir das deformações mostradas na *figura 3.24*, para $t = t_0 + \Delta t_u/2$, foram construídos os diagramas de tensões mostrados na *figura 3.27*.

Diagramas de tensões de compressão na seção transversal fletida

Figura 3.27

Estes mesmos diagramas de tensões, construídos com a forma de diagramas tensão-deformação, estão mostrados na figura 3.28.

Envoltória parábola-retângulo dos diagramas de tensões e deformações praticamente na ruptura

Figura 3.28

Os resultados assim obtidos mostram que o diagrama parábola-retângulo pode ser aceito como representativo do diagrama de tensões de compressão no plano da seção fletida, qualquer que seja o tempo de duração do carregamento que conduz ao estado limite último de ruptura do concreto, pois, mantidas as condições de sollicitação, a posição da linha neutra é praticamente constante.

3.12. Diagrama tensão-deformação para o Estado Limite Último (ELU)

3.12.1. Diagrama tensão-deformação da NBR6118:2007

Para o dimensionamento prático, torna-se necessário simplificar as distribuições curvas de tensões no concreto que ocorrem na zona comprimida (por flexão simples ou composta) da peça. Com relação à idade do concreto quando do carregamento, contentou-se em considerar sempre a de 28 dias na verificação do estado limite último. Isto corresponde à prescrição de que as peças estruturais não devem suportar a combinação mais desfavorável de cargas prevista no cálculo antes da idade de 28 dias. Considerando todos os outros parâmetros apontados, procurou-se um diagrama σ - ϵ simplificado, uma idealização que conduzisse a um cálculo prático sem grandes complicações e que, ao mesmo tempo, estivesse sempre a favor da segurança.

Diagrama parábola retângulo de compressão para o concreto (NBR6118:2007)

Figura 3.29

Extensas pesquisas comparativas mostraram que a linha tensão-deformação da figura 3.29 (compressão mostrada como positiva), formada por uma parábola de 2º grau, desde a origem até o ponto correspondente a $\epsilon = 2,0 \text{ ‰}$, continuada por um patamar até $\epsilon = 3,5 \text{ ‰}$, com ordenada máxima $0,85 \cdot f_{cd}$ igual ao valor indicado na expressão 3.20, fornece muito boa concordância em relação a capacidade da seção nos estados limites últimos.

Do exame do diagrama retangular parabólico da figura 3.29 conclui-se que:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{2\text{‰}} \right)^2 \right] \quad \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \leq 2 \text{‰} \quad (\text{Expressão 3.22})$$

$$\sigma_c = \text{constante} = 0,85 \cdot f_{cd} \quad \text{para } 2 \text{‰} \leq \varepsilon_c \leq 3,5 \text{‰} \quad (\text{Expressão 3.23})$$

Como o diagrama retangular-parabólico é válido para qualquer forma de seção transversal, e, portanto, para qualquer forma de zona comprimida, pode ser usado também na flexão oblíqua.

A norma brasileira, como mencionado em itens anteriores, não trata de concretos de alto desempenho.

3.12.2. Diagrama tensão-deformação do CEB90

O diagrama tensão-deformação para cargas de curta duração tem a forma esquemática da figura 3.30.

Diagrama de compressão para o concreto (CEB90)

Figura 3.30

A relação entre σ_c e ε_c pode ser aproximada pela seguinte expressão:

$$\sigma_c = - \frac{\frac{E_{ci}}{E_{cl}} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \right)^2}{1 + \left(\frac{E_{ci}}{E_{cl}} - 2 \right) \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}}} \cdot f_{cm} \quad \text{para } |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{c,lim}| \quad (\text{Expressão 3.24})$$

onde

$E_{ci} \rightarrow$ módulo de elasticidade tangente: $E_{ci} = 2,15 \cdot 10^4 \text{ MPa} \cdot \left[\frac{f_{cm}}{10} \right]^{1/3}$

$$\varepsilon_{c1} = -0,0022$$

$E_{c1} \rightarrow$ módulo secante da origem até o pico de compressão ($E_{c1} = \frac{f_{cm}}{0,0022}$)

A deformação $\varepsilon_{c,lim}$ que ocorre a $\sigma_{c,lim} = -0,5f_{cm}$ pode ser calculada pela expressão 3.25.

$$\frac{\varepsilon_{c,lim}}{\varepsilon_{c1}} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right) + \left[\frac{1}{4} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{E_{ci}}{E_{c1}} + 1 \right)^2 - \frac{1}{2} \right]^{1/2} \quad (\text{Expressão 3.25})$$

Para os estados limites últimos, no dimensionamento das seções transversais, a resistência de cálculo de uma região não fissurada carregada uniaxialmente à compressão pode ser representada também pelo diagrama parábola-retângulo como segue na figura 3.31.

Diagrama parábola retângulo de compressão para o concreto (CEB90)

Figura 3.31

A deformação ε_c é mostrada em valores absolutos e são positivas para a compressão. As expressões que regem o comportamento da curva assim são as seguintes:

$$\sigma_{cd} = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c1} \quad (\text{Expressão 3.26})$$

$$\sigma_c = \text{constante} = 0,85 \cdot f_{cd} \quad \text{para } \varepsilon_{c1} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu} \quad (\text{Expressão 3.27})$$

onde o valor

$$\varepsilon_{c1} = 2\text{‰} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.28})$$

$$\varepsilon_{c1} (\%) = 2,0 + 0,5 \cdot \frac{(f_{ck} - 50)}{100} \quad \text{para } 50 < f_{ck} < 100 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.29})$$

Para a flexão, os valores de ε_{cu} são dados por

$$\varepsilon_{cu} = 0,0035 \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.30})$$

$$\varepsilon_{cu} (\%) = 2,5 + 2,0 \cdot \left(1 - \frac{f_{ck}}{100}\right) \quad \text{para } 50 < f_{ck} < 100 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.31})$$

$$n = 2,0 \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.32})$$

$$n = 2,0 - 0,008 \cdot (f_{ck} - 50) \quad \text{para } 50 < f_{ck} \leq 100 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.33})$$

O coeficiente de minoração γ_c pelo CEB tem valor 1,5, porém, para os concretos de alto desempenho, esse coeficiente deve ser ainda incrementado pelo fator

$$\gamma_{hsc} = \frac{1}{\left(1,1 - \frac{f_{ck}}{500}\right)} \quad \text{para } 50 < f_{ck} \leq 100 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.34})$$

3.12.3. Diagrama tensão-deformação do Eurocode 1992:2006

A relação entre ε_c e σ_c (compressão mostrada como positiva) para carregamento uniaxial de curta duração é descrita pela expressão 3.35 e mostrada na figura 3.32.

$$\frac{\sigma_c}{f_{cm}} = \frac{K\eta - \eta^2}{1 + (K - 2)\eta}$$

(Expressão 3.35)

Figura 3.32 - Diagrama de compressão para o concreto (Eurocode)

O coeficiente η é a relação entre a deformação correspondente ao ponto de cálculo (ε_c) e a deformação correspondente a máxima tensão (ε_{cl}).

$$\eta = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{cl}} \quad (\text{Expressão 3.36})$$

O valor da deformação correspondente a máxima tensão (ε_{cl}) pode ser estipulado conforme a expressão 3.37:

$$\varepsilon_{cl}(\text{‰}) = 0,7 \cdot f_{cm}^{0,31} \quad (\text{Expressão 3.37})$$

onde f_{cm} deve ser colocado em MPa.

O valor da resistência à compressão média do concreto (f_{cm}) é fornecida simplesmente por:

$$f_{cm} = f_{ck} + 8\text{MPa} \quad (\text{Expressão 3.38})$$

O coeficiente K é dado através da expressão 3.39 abaixo.

$$K = 1,1 \cdot E_{cm} \cdot \frac{|\varepsilon_{cl}|}{f_{cm}} \quad (\text{Expressão 3.39})$$

O módulo de elasticidade de um concreto é controlado pelo módulo de elasticidade de seus componentes. Um valor aproximado do módulo de elasticidade E_{cm} (valor secante entre $\sigma_c = 0$ e $0,4f_{cm}$), para os concretos com agregados de quartzo, é dado pela expressão 3.40.

$$E_{cm} = 22 \cdot \left(\frac{f_{cm}}{10} \right)^{0,3} \quad (\text{Expressão 3.40})$$

onde f_{cm} deve ser colocado em MPa.

A expressão 3.35 é válida para $0 < |\varepsilon_c| < |\varepsilon_{cu1}|$, onde ε_{cu1} é a deformação última máxima permitida para o concreto, conforme expressão 3.41:

$$\varepsilon_{cu1}(\text{‰}) = 2,8 + 27 \cdot \left(\frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 \quad (\text{Expressão 3.41})$$

Outras idealizações da relação tensão-deformação podem ser aplicadas, desde que representem adequadamente o comportamento do concreto considerado. Para o dimensionamento de seções

transversais, a relação tensão-deformação da figura 3.33 pode ser usada (compressão mostrada positiva):

Diagrama parábola retângulo de compressão para o concreto (Eurocode)

Figura 3.33

As expressões que regem o comportamento da curva acima são as seguintes:

$$\sigma_c = 0,85 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_{c2}} \right)^n \right] \quad \text{para } 0 \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{c2} \quad (\text{Expressão 3.42})$$

$$\sigma_c = \text{constante} = 0,85 \cdot f_{cd} \quad \text{para } \varepsilon_{c2} \leq \varepsilon_c \leq \varepsilon_{cu2} \quad (\text{Expressão 3.43})$$

onde:

$\varepsilon_{cu2} \rightarrow$ é o encurtamento ultimo (máximo) devido ao concreto.

$\varepsilon_{c2} \rightarrow$ é a deformação a partir da qual atingi-se a máxima resistência

$n \rightarrow$ expoente da parábola

$$\varepsilon_{c2} = 2\text{‰} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.44})$$

$$\varepsilon_{c2} (\text{‰}) = 2,0 + 0,085 \cdot (f_{ck} - 50)^{0,53} \quad \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.45})$$

$$\varepsilon_{cu2} (\text{‰}) = 3,5 \text{ ‰} \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.46})$$

$$\varepsilon_{cu2} (\text{‰}) = (\text{‰}) = 2,6 + 35 \cdot \left(\frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 \quad \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.47})$$

$$n = 2,0 \quad \text{para } f_{ck} \leq 50 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.48})$$

$$n = 1,4 + 23,4 \cdot \left(\frac{98 - f_{cm}}{100} \right)^4 \quad \text{para } 50 < f_{ck} \leq 90 \text{ MPa} \quad (\text{Expressão 3.49})$$

O coeficiente de minoração γ_c pelo Eurocode tem valor 1,5.

3.13. Diagrama tensão-deformação para análises não-lineares

3.13.1. Diagrama tensão-deformação da NBR6118:2007

O diagrama que deve ser usado nas análises de estabilidade, conforme item 15.3 da NBR6118:2007 é o indicado na figura 3.34.

Diagrama parábola retângulo de compressão para a análise de estabilidade (NBR6118:2007)

Figura 3.34

As expressões são análogas as obtidas no item 3.6.1.

$$\sigma_c = 1,1 \cdot f_{cd} \cdot \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{2\%} \right)^2 \right] \quad \text{para } 0 \leq \epsilon_c \leq 2\% \quad (\text{Expressão 3.50})$$

$$\sigma_c = \text{constante} = 1,1 \cdot f_{cd} \quad \text{para } 2\% \leq \epsilon_c \leq 3,5\% \quad (\text{Expressão 3.51})$$

Novamente, a NBR só trata de concretos de classe de resistência até 50 MPa.

3.13.2. Diagrama tensão-deformação do CEB90

O diagrama do CEB para análises não-lineares deve ser o mesmo descrito na figura 3.30, regido pela expressão 3.24.

3.13.3. Diagrama tensão-deformação do Eurocode 2:2006

As relações definidas pela figura 3.32 e pela expressão 3.35 podem ser usadas. Determinando os diagramas tensão-deformação baseados em valor de cálculo, o valor da carga última de cálculo é obtido diretamente da análise. Na expressão 3.38 e 3.40 o valor de f_{cm} deve ser substituído por f_{cd} e E_{cm} substituído por:

$$E_{cd} = \frac{E_{cm}}{\gamma_{cE}} \quad (\text{Expressão 3.52})$$

onde o valor de γ_{cE} é 1,2, conforme recomendado.

O diagrama tensão-deformação, para análises de segunda ordem em pilares, fica sendo o exposto na figura 3.35.

Figura 3.35 - Diagrama parábola retângulo de compressão para a análise de estabilidade (Eurocode)

3.14. Consideração da fluência do concreto

O efeito da fluência deve ser considerado em análises de 2ª ordem. A NBR 6118:2007 no seu item 8.2.11 fornece uma tabela com os valores do coeficiente de fluência $[\varphi(t_\infty, t_0)]$ que podem ser usados nos casos onde não é necessário grande precisão. O valor de $\varphi(t_\infty, t_0)$ é função da: umidade relativa do meio ambiente (UR), espessura fictícia da peça (h_0) e da idade do concreto no momento do carregamento.

A espessura fictícia é dada por $h_0 = \frac{2A_c}{u}$, onde A_c é a área da seção transversal e u o perímetro da seção em contato com a atmosfera. A NRB 6118:2007 fornece, ainda, em seu anexo A, métodos de cálculo mais precisos para a determinação de $\varphi(t_\infty, t_0)$.

Pela norma NBR6118:2007, a consideração da fluência é obrigatória quando $\lambda > 90$, mas pode realizada de maneira aproximada por uma excentricidade adicional dada no item 15.8.4.

O Eurocode 2:2006, em seu item 3.1.4, também fornece meios de se determinar o coeficiente de fluência em função das mesmas variáveis consideradas na NBR 6118. A fluência do concreto, a rigor, ocorre devido a permanência das cargas. O carregamento no pilar pode ser dividido em uma parcela permanente (de longa duração) e outra parcela devido às cargas acidentais (de curta duração).

Criando um gráfico força-descolamento, como o da figura 3.36, levando em conta a fluência, uma descrição mais realista do deslocamento no tempo seria obtida aplicando-se inicialmente a parcela permanente do peso próprio na data t_1 e, em uma data posterior t_2 , a parcela permanente devido às cargas variáveis. O caminho percorrido seria o traçado determinado pelos pontos A-B-C-D-E.

Um artifício, para simplificar a análise trabalhosa de se considerar cada carregamento na sua data, é considerar um valor equivalente para o coeficiente de fluência chamado *coeficiente efetivo de fluência* (φ_{eq}). Este coeficiente, aplicado as cargas de cálculo, resulta em uma deformação por fluência (curvatura) correspondente ao carregamento quase permanente, que tenta reproduzir os mesmos resultados que obteríamos se considerássemos o coeficiente $\varphi(t_\infty, t_0)$ para cada carga na sua respectiva data de aplicação. Seria o caminho percorrido pelos pontos A-P-E da figura 3.36.

Figura 3.36 – Fator de fluência equivalente

O Eurocode 2:2006 em seu item 5.8.4 apresenta, para o coeficiente de fluência efetivo, a expressão:

$$\varphi_{ef} = \varphi(t_{\infty}, t_0) \cdot \frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}} \quad (\text{Expressão 3.53})$$

onde

$\varphi(t_{\infty}, t_0) \rightarrow$ coeficiente de fluência final

$M_{0Eqp} \rightarrow$ momento de 1ª ordem devido à combinação quase permanente de cargas (E.L.S.)

$M_{0Ed} \rightarrow$ momento de 1ª ordem de cálculo (E.L.U.)

Se $\frac{M_{0Eqp}}{M_{0Ed}}$ varia ao longo do comprimento da peça, devemos considerar a relação correspondente à seção de máximo momento ou um valor médio representativo.

No parágrafo (4) do item 5.8.6 o Eurocode:2006 afirma: "Na ausência de modelo mais refinado, a fluência pode ser considerada multiplicando-se todos os valores das deformações do diagrama $\sigma_c \times \varepsilon_c$ pelo fator $(1 + \varphi_{ef})$, onde φ_{ef} é o coeficiente de fluência efetivo. A figura 3.37 ilustra essa consideração.

Figura 3.37 – Simplificação para aplicação do fator de fluência equivalente

O Eurocode 2:2006 sugere que a fluência possa ser ignorada se satisfeitas três condições:

$$1^a) \varphi(t_{\infty}, t_0) \leq 2,0$$

$$2^a) \lambda \leq 75$$

$$3^a) \frac{M_{0Ed}}{N_{Ed}} \geq h$$

onde

$N_{Ed} \rightarrow$ força normal axial de cálculo

$h \rightarrow$ altura da seção transversal na direção do momento.

Capítulo 4

Comportamento mecânico do aço de armadura passiva

4.1. Generalidades

As armaduras do concreto estrutural podem ser:

- passivas (também conhecidas por ordinárias);
- ativas (ou de protensão).

Por se tratar de um trabalho sobre pilares de concreto armado e não protendido, por armaduras entender-se-ão exclusivamente as ordinárias.

Só serão considerados barras e fios de aço que satisfaçam às especificações da ABNT. De acordo com a NBR7480, as barras são produtos obtidos por laminação e fios são os de bitola ϕ 10 mm ou inferior, obtidos por trefilação. Designaremos por barras da armadura tanto as barras laminadas como os fios trefilados.

4.2. Classificação

De acordo com o valor característico da tensão de escoamento, nossos aços podem ser divididos nas seguintes categorias:

- CA-25
- CA-50
- CA-60

onde o prefixo CA indica concreto armado e o número seguinte o valor da resistência característica ao escoamento (f_{yk}) em KN/cm².

De acordo com a configuração do diagrama tensão-deformação, os aços dividem-se em duas classes:

– **Aço classe A:** laminado a quente, com escoamento definido, caracterizado por patamar no diagrama tensão-deformação.

Figura 4.1 – Diagrama tensão-deformação real para o aço de classe A

Nos aços classe A, o limite de elasticidade, o limite de proporcionalidade e a tensão de escoamento (ponto A da figura 4.1) são valores praticamente coincidentes.

– **Aço classe B:** encruado por deformação a frio (como torção, compressão transversal, estiramento, relaminação a frio, trefilação), com tensão convencional de escoamento definida por uma deformação permanente de 0,2%. Na figura 4.2, OD é a deformação total ϵ_s correspondente ao ponto B do diagrama; ϵ_s compõe-se de duas parcelas: a deformação elástica (ϵ_e) e a deformação residual permanente OC (ϵ_r).

Figura 4.2 – Diagrama tensão-deformação real para o aço de classe B

Nos aços classe B (figura 4.2), o ponto A define o limite de proporcionalidade e o ponto B corresponde à tensão de escoamento convencional

Antigamente, para também indicar a classe, as categorias de aço referidas acima levavam a letra A ou B logo após o valor f_{yk} : CA-50A ou CA-50B. Atualmente, não existe mais essa referência, pois não há mais perigo de confusão. Os aços CA-25 e CA-50 não precisam da letra A, porque são sempre desta classe e o aço CA-60 é sempre da classe B (só existem fios).

Finalmente, em relação às características de aderência ao concreto (tipo de superfície), as barras são conhecidas em:

- lisas;
- entalhadas;
- de alta aderência (nervuradas).

4.3. Massa específica

Pode-se adotar para a massa específica do aço de armadura passiva o valor de 7.850 Kg/m^3 , conforme a norma NBR 6118:2007 no seu item 8.3.3.

4.4. Coeficiente de dilatação térmica

Conforme a norma NBR 6118:2007, em seu item 8.3.4, o valor $10^{-5} \text{ }^\circ\text{C}^{-1}$ pode ser considerado para o coeficiente de dilatação térmica do aço, para intervalos de temperatura entre $20 \text{ }^\circ\text{C}$ e $150 \text{ }^\circ\text{C}$.

4.5. Diagramas tensão-deformação

4.5.1. Consideração inicial

Vale salientar que os diagramas tensão-deformação que serão apresentados a seguir são válidos apenas para intervalos de temperatura entre $20 \text{ }^\circ\text{C}$ e $150 \text{ }^\circ\text{C}$.

4.5.2. Aço Classe A (CA-25 e CA-50)

A NBR6118:2007 permite simplificar o diagrama $\sigma - \epsilon$ da figura 4.1, do lado da segurança, adotando o diagrama da figura 4.3, típico de material elasto-plástico perfeito. Os alongamentos específicos são limitados a deformação ϵ_{su} , como será visto nos capítulos seguintes. Os encurtamentos

específicos não podem ser usados além de ε_{cu} devido ao concreto. Chamaremos de ε_{yd} a deformação específica correspondente ao início do escoamento no diagrama de cálculo.

Figura 4.3 – Diagrama tensão-deformação idealizado para o aço de classe A

Observemos que a figura 4.3 contém dois diagramas: o característico (em traço cheio) e o de cálculo (em pontilhado). As resistências de cálculo são:

$$f_{yd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_s} \qquad f_{yck} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \qquad (\text{Expressão 4.1})$$

O módulo de deformação longitudinal E_s do aço classe A é a relação:

$$E_s = \frac{f_{yd}}{\varepsilon_{yd}} \qquad (\text{Expressão 4.2})$$

Para todos os aços, A ou B, podemos adotar, conforme recomenda a NBR6118:2007, no seu item 8.3.5, o valor constante:

$$E_s = 210.000 \text{ MPa} \qquad (\text{Expressão 4.3})$$

Conforme será visto, os valores de cálculo das tensões podem estar abaixo da resistência de cálculo. Chamaremos de ε_{sd} e σ_{sd} as deformações e tensões de cálculo (são valores ε_s e σ_s quaisquer). Da análise da figura 4.3, podemos concluir que:

$$\text{Para } 0 \leq \varepsilon_{sd} \leq \varepsilon_{yd}: \qquad \sigma_{sd} = E_s \cdot \varepsilon_{sd} \quad \text{sendo } \sigma_{sd} \leq f_{yd} \qquad (\text{Expressão 4.4})$$

e

$$\varepsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} \quad (\text{Expressão 4.5})$$

$$\text{Para } \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{sd} \leq \varepsilon_p: \quad \sigma_{sd} = \text{constante} = f_{yd} \quad (\text{Expressão 4.6})$$

Estamos nos referindo a tração. Para compressão as fórmulas são análogas. É sabido que o valor da resistência f_{yk} costuma ser um pouco menor que f_{yk} . Nos complementos do CEB podemos encontrar que $f_{cyk} \cong 0,9 \cdot f_{yk}$ (na falta de ensaios). Segundo a NBR6118:2007, na falta de determinação experimental, admiti-se:

$$f_{yck} \cong f_{yk} \quad (\text{Expressão 4.7})$$

Os diagramas tensão-deformação, com valores numéricos para os dois tipos de aço se encontram ilustrados nas figuras 4.4 e 4.5.

Figura 4.4 – Valores numéricos para o aço CA-25

Figura 4.5 – Valores numéricos para o aço CA-50

4.5.3. Aço Classe B (CA-60)

O diagrama de cálculo será obtido dividindo-se por $\gamma_s = 1,15$ as ordenadas oblíquas, paralelas à reta de Hooke, da curva experimental que contém a resistência característica.

Diagrama tensão-deformação idealizado para o aço classe B
Figura 4.6

Tensão-Deformação limitado pelo ELU do concreto
Figura 4.7

Na falta da curva real, obtida experimentalmente, permite-se um diagrama simplificado (figura 4.6 e 4.7) composto de três trechos:

- trecho linear até o valor $\sigma_s = 0,7 \cdot f_{yd}$;
- trecho curvo entre este ponto e o ponto correspondente à resistência de escoamento convencional f_{yd} ;
- patamar desde ponto em diante.

Como anteriormente, o diagrama em traço cheio refere-se a f_{yk} , em pontilhado a f_{yd} . Os valores de E_s e f_{yck} são os já vistos nas expressões 4.3 e 4.7, respectivamente. Observa-se que agora ϵ_{yd} é definido como a deformação específica (figura 4.4) correspondente ao ponto de escoamento convencional do diagrama de cálculo:

$$\epsilon_{yd} = \frac{f_{yd}}{E_s} + 0,002 \quad (\text{Expressão 4.8})$$

Deformações e tensões de cálculo para o aço classe B:

$$\epsilon_{sd} = \frac{\sigma_{sd}}{E_s} \quad \text{para} \quad 0 \leq \sigma_{sd} \leq 0,7 \cdot f_{yd}; \quad (\text{Expressão 4.9})$$

$$\varepsilon_{sd} = \frac{\sigma_{sd}}{E_s} + \frac{1}{45} \cdot \left(\frac{\sigma_{sd}}{f_{yd}} - 0,7 \right)^2 \quad \text{para} \quad 0,7 \cdot f_{yd} \leq \sigma_{sd} \leq f_{yd}; \quad (\text{Expressão 4.10})$$

ou seja, a expressão 4.10 vale para $\frac{0,7 \cdot f_{yd}}{E_s} \leq \varepsilon_{sd} \leq \varepsilon_{yd}$ sendo ε_{yd} dado pela expressão 4.8.

$$\text{Para } \varepsilon_{yd} \leq \varepsilon_{sd} \leq \varepsilon_p \quad \rightarrow \quad \sigma_{sd} = \text{constante} = f_{yd} \quad (\text{Expressão 4.11})$$

Perceba que o trecho comprimido do diagrama é interrompido, pois os encurtamentos específicos não podem ser usados além de ε_{cu} devido ao concreto. Basta conferir no capítulo 3 e verificar que os valores numéricos de ε_{cu} ficam exatamente no trecho curvo.

O diagrama tensão-deformação, com valores numéricos para este tipo de aço se encontra ilustrado na figura 4.8. Note que o valor de ε_{cu} e σ_{su} não estão fixados, pois os mesmos dependem da classe de resistência do concreto.

Figura 4.8 – Valores numéricos para o aço CA-60

4.5.4. Diagrama tensão-deformação da NBR6118:2007

A formulação e curva do 2º grau apresentadas, destinadas aos aços de classe B, ou seja, do tipo CA-60, basearam-se no trabalho não publicado ‘Ensaio de aço nacionais à tração’, realizado pelo professor Péricles Brasiense Fusco, em 1976.

Embora essa formulação para aços de classe B seja boa e condizente com a realidade, ela não consta mais na norma NBR6118:2007 por ser um pouco trabalhosa. A NBR6118:2007 achou mais prático manter um diagrama único que se destinasse a ambas as classes de aço, designando-o apenas por 'Diagrama tensão-deformação para aços de armadura passiva'. Esse diagrama segue o padrão dos aços classe A (Figura 4.5) e pode ser usado tanto para os aços de classe A (CA-25 e CA-50) quanto de classe B (CA-60).

Figura 4.9 – Diagrama tensão-deformação a ser utilizado para qualquer aço pela NBR6118:2007

Realmente concordamos que a formulação com a curva de 2º grau seja um pouco mais trabalhosa, justificando a adoção de um diagrama único, simplificado, idêntico ao de classe A.

Se colocarmos o diagrama proposto pela NBR6118:2007 e o diagrama que utiliza a curva de 2º grau (Figura 4.10), perceberemos que há uma pequena discordância. O valor da deformação para o qual consideramos o início do escoamento (ϵ_{yd}) também são diferentes para os dois diagramas (ponto B e C).

Comparação entre o diagrama real e o idealizado para aços de classe B
Figura 4.10

Valores numéricos para o diagrama idealizado de aço CA-60
Figura 4.11

O leitor pode, a princípio, ficar um pouco preocupado, pois no intervalo mencionado, assumindo que o diagrama com a curva de 2º grau seja o mais próximo a realidade, uma determinada deformação ε_s possuiria uma tensão σ_s superior ao valor verdadeiro, o que nos faz concluir que tal fato vai contra a segurança.

A conclusão obtida no parágrafo anterior é correta, porém vale lembrar que não há com o que se preocupar, pois o aço de classe B (CA-60) geralmente é utilizado apenas no projeto de pisos industriais e lajes. Esses elementos têm grande capacidade de redistribuição plástica e apresentam diversos outros mecanismos resistentes tal que o verdadeiro Estado Limite Último (ELU) é muito superior ao que realmente obtemos no cálculo, o que faz com que esse erro de cálculo possa ser negligenciado.

O diagrama que deveria ser adotado, conforme a NBR6118:2007 pode ser visto na figura 4.11. Perceba que com esse tipo de diagrama, a armadura tem possibilidade de escoamento no trecho comprimido (ponto D), o que é impossível quando utilizamos o diagrama tensão-deformação que utiliza a formulação com a curva de 2º grau.

Capítulo 5

Ações e o coeficiente γ_{f3}

Em análises nas quais se considera uma análise linear (física e geométrica), torna-se indiferente aplicar a majoração das ações no carregamento ou nos esforços solicitantes, pois o resultado obtido será o mesmo. Considere, por exemplo, a seção do engastamento (seção A) do pilar da figura 7.1. Vamos determinar quanto vale o momento de cálculo final (M_d) que deveria ser utilizado no dimensionamento, supondo uma majoração das ações de $\gamma_f = 1,4$.

Figura 5.1

Majoração nas ações

$$\begin{aligned} M_{Ak} &= H_k \cdot L \\ M_{Ak} &= 100 \text{ kN} \cdot 5\text{m} \\ M_{Ak} &= 500 \text{ kN} \cdot \text{m} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} M_{Ad} &= \gamma_f \cdot M_{Ak} \\ M_{Ad} &= 1,4 \cdot 500 \text{ kN} \cdot \text{m} \\ \therefore \boxed{M_{Ad} = 700 \text{ kN} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

Majoração nos esforços

$$\begin{aligned} M_{Ad} &= \gamma_f \cdot H_k \cdot L \\ M_{Ad} &= 1,4 \cdot 100 \text{ kN} \cdot 5\text{m} \\ \therefore \boxed{M_{Ad} = 700 \text{ kN} \cdot \text{m}} \end{aligned}$$

Repitamos o mesmo exemplo considerando a não-linearidade geométrica. Em qualquer livro que trate do assunto podemos encontrar a expressão que fornece o valor final do momento fletor na base da coluna engastada.

Figura 5.2

Dados:

Inércia da seção transversal: $I = 0,0004\text{m}^4$

Módulo de elasticidade do material: $E = 210.000 \text{ MPa}$

Carga crítica de flambagem: $P_{CR} = \frac{\pi^2 EI}{L_{FL}^2} = 8290,47 \text{ kN}$

Momento total na base da coluna: $M_d \text{ TOTAL} = \frac{M_1}{1 - \frac{P}{P_{cr}}}$

Majoração nas ações

$$M_{1d} = \gamma_f \cdot H_k \cdot L$$

$$M_{1d} = 1,4 \cdot 100\text{KN} \cdot 5\text{m}$$

$$M_{1d} = 700 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_{d \text{ TOTAL}} = \frac{M_{1d}}{1 - \frac{P_d}{P_{cr}}}$$

$$M_{d \text{ TOTAL}} = \frac{700}{1 - \frac{600 \cdot 1,4}{8290,47}}$$

$$\therefore \boxed{M_{d \text{ TOTAL}} = 778,92 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

Majoração nos esforços

$$M_{1k} = H_k \cdot L$$

$$M_{1k} = 100\text{KN} \cdot 5\text{m}$$

$$M_{1k} = 500 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_{k \text{ TOTAL}} = \frac{M_{1k}}{1 - \frac{P_k}{P_{cr}}}$$

$$M_{k \text{ TOTAL}} = \frac{500}{1 - \frac{600}{8290,47}}$$

$$M_{k \text{ TOTAL}} = 539,01 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$M_{d \text{ TOTAL}} = 1,4 \cdot 539,01 \text{ KN} \cdot \text{m}$$

$$\therefore \boxed{M_{d \text{ TOTAL}} = 754,61 \text{ KN} \cdot \text{m}}$$

onde $M_1 \rightarrow$ momento de primeira ordem obtido em análise linear;

$M_{\text{TOTAL}} \rightarrow$ momento final, acrescido dos efeitos da não-linearidade geométrica

Se a análise leva em conta a não-linearidade geométrica, ou seja, se o equilíbrio é estabelecido considerando a posição deformada, majorar os esforços internos solicitantes não produz os mesmos resultados que obteríamos se majorássemos as cargas. Como se pode ver, a majoração provoca certo valor no momento de engastamento se aplicada às ações e outro se aplicado aos esforços solicitantes.

Com os exemplos mostrados, surge então a pergunta: qual é o correto a se fazer? Para respondermos essa pergunta, precisamos recorrer a norma NBR8681:2004 (Ações e Segurança nas Estruturas).

Devemos relembrar a definição do coeficiente de majoração dos esforços γ_f . Quando se consideram estados limites últimos, os coeficientes γ_f de ponderação das ações podem ser considerados como o produto de três outros, γ_{f1} , γ_{f2} e γ_{f3} (o coeficiente de combinação ψ_0 faz o papel do coeficiente indicado por γ_{f2}).

$$\gamma_f = \gamma_{f1} \cdot \gamma_{f2} \cdot \gamma_{f3} \quad (\text{Expressão 7.1})$$

O coeficiente parcial γ_{f1} leva em conta a variabilidade das ações, o coeficiente γ_{f2} leva em conta a simultaneidade das ações e o coeficiente γ_{f3} considera os possíveis erros de avaliação dos

efeitos das ações, seja por problemas construtivos, seja por deficiência do método de cálculo empregado. O desdobramento do coeficiente de segurança γ_f em coeficientes parciais permite que os valores gerais especificados para γ_f possam ser discriminados em função de peculiaridades dos diferentes tipos de estruturas e de materiais de construção considerados.

Pelas definições acima, percebe-se que parte dos coeficientes (γ_{f1} e γ_{f2}) foram definidos para serem aplicados as ações, mas o coeficiente γ_{f3} tenta cobrir as imprecisões do modelo de cálculo, conseqüentemente, este coeficiente deve ser aplicado somente aos resultados do modelo, ou seja, aos esforços internos solicitantes.

A pergunta que surge então é: como proceder, já que a norma de ações e segurança fornece sempre o valor de γ_f ? A resposta para essa pergunta se torna óbvia. O procedimento que deve ser sempre realizado, em análises de estabilidade, onde será considerada obrigatoriamente a não-linearidade geométrica, seria aplicar a majoração γ_f nas ações excluindo-se γ_{f3} , ou seja, ao invés de multiplicarmos as ações por γ_f , devemos multiplicá-las por $\frac{\gamma_f}{\gamma_{f3}}$. Resolvido o modelo de cálculo e obtido os esforços internos solicitantes, o fator γ_{f3} deve então ser aplicado aos mesmos. O valor de γ_{f3} , conforme consta na NBR8681, no item 5.3.2.1, deve ser sempre igual ou superior a 1,1, desse modo, adota-se, a favor da segurança, $\gamma_{f3} = 1,1$.

Repetindo o exemplo anterior, a aplicação correta da segurança na estrutura seria feita da seguinte maneira:

Figura 5.3

$$M_1 = \frac{\gamma_f}{\gamma_{f3}} \cdot H_k \cdot L = \frac{1,4}{1,1} \cdot 100 \text{ kN} \cdot 5 \text{ m} = 636,36 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\text{TOTAL}} = \frac{M_1}{1 - \frac{\gamma_f \cdot P}{P_{\text{cr}}}} = \frac{636,36}{1 - \frac{1,4 \cdot 600}{8290,47}} = 700,93 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

$$M_{\text{d TOTAL}} = \gamma_{f3} \cdot M_{\text{TOTAL}} = 1,1 \cdot 700,93 = 771,02 \text{ kN} \cdot \text{m}$$

O procedimento descrito acima não é complicado, mas também não é imediato, é necessário fazer duas contas, ao invés de uma.

Há muitos engenheiros que aplicam o coeficiente γ_f , sem redução de γ_{f3} , diretamente nas ações, promovendo a análise não-linear (geométrica e física) e obtendo diretamente os esforços de cálculo. Embora conceitualmente errado, pois o conceito de segurança não foi pensado desta maneira, o resultado obtido do esforço interno solicitante de cálculo é, em magnitude, maior do que o obtido pelo procedimento teoricamente correto. Realizar essa simplificação, para ignorar o trabalho de se retirar γ_{f3} é a favor da segurança, porém na direção contrária a economia.

Neste trabalho, a majoração das ações e dos esforços será feita seguindo rigidamente o conceito de segurança e sua correta aplicação.

Capítulo 6

Processo acoplado

6.1. Pilares em balanço

6.1.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem

Considere o pilar da figura 6.1 que possui os seguintes esforços internos solicitantes, todos considerados positivos.

Figura 6.1 – Pilar submetido a esforços quaisquer em flexão composta oblíqua

Considerando o equilíbrio na posição indeformada (linearidade geométrica), podemos escrever a equação que descreve o momento fletor em função da posição z .

$$M_{S1d}(z) = M_{S1d}^B + (M_{S1d}^T - M_{S1d}^B) \cdot \frac{z}{L} \quad (\text{Expressão 6.1})$$

$$M_{S2d}(z) = M_{S2d}^B + (M_{S2d}^T - M_{S2d}^B) \cdot \frac{z}{L} \quad (\text{Expressão 6.2})$$

6.1.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes

Do passo anterior, para uma determinada seção qualquer ao longo do comprimento, são conhecidos os esforços $N_{sd,i}$, $M_{S1d,i}$ e $M_{S2d,i}$, onde i representa uma seção qualquer, ao longo da altura. A esse terno de esforços corresponde uma única posição de linha neutra (α), uma deformação do centro geométrico (ϵ_0) e uma curvatura ($\rho_\alpha = \frac{1}{r_\alpha}$).

Obviamente a curvatura da direção inclinada pode ser decomposta em suas duas direções principais. Desse modo, cada seção transversal i , ao longo da altura tem $\varepsilon_{0,i}$, $\rho_{1,i} = \frac{1}{r_{1,i}}$ e $\rho_{2,i} = \frac{1}{r_{2,i}}$.

Com esses valores de curvaturas podemos rapidamente determinar qual a rigidez secante de cada direção principal $EI_{sec1,i}$ e $EI_{sec2,i}$, no nível exato de solicitação, conforme ilustram as figuras 6.2 e 6.3.

Figura 6.2 – Diagrama genérico Momento-Curvatura

Figura 6.3 - Diagrama genérico Momento-Curvatura

Onde:

$M_{S1d,i} \rightarrow$ momento solicitante de cálculo, na direção principal 1, da seção i considerada;

$M_{S2d,i} \rightarrow$ momento solicitante de cálculo, na direção principal 2, da seção i considerada;

Pela própria análise gráfica, pode-se concluir que:

$$EI_{sec1,i} = \frac{M_{S1d,i}}{\gamma_{f3} \cdot \rho_{1,i}} \qquad EI_{sec2,i} = \frac{M_{S2d,i}}{\gamma_{f3} \cdot \rho_{2,i}} \qquad (\text{Expressão 6.3})$$

A divisão pelo coeficiente γ_{f3} se deve ao fato já explicado. O equilíbrio deve ser determinado antes de se aplicar a segurança aos esforços internos solicitantes. A rigidez procurada é aquela que equilibra as ações majoradas por γ_{f1} e γ_{f2} , antes de se aplicar a segurança aos esforços, por isso da retirada de γ_{f3} .

A utilização da tensão $f_c = 1,10f_{cd}$ se deve ao fato de estamos querendo fazer uma análise de estabilidade, ou seja, algo mais realista, pois se utilizássemos $f_c = 0,85f_{cd}$ (valor estipulado para o

ELU) estaríamos assumindo que todas as seções teriam chance de atingir o ELU, o que é impossível, ou, no mínimo, muito conservador, já que o valor de 0,85 foi pensando no equilíbrio da seção transversal isoladamente, levando em conta apenas o ELU. O valor de $f_c = 1,10f_{cd}$, passa então a ser uma “média”, que considera que algumas seções atingem o ELU, outras estão no Estádio II e outras nem saem do Estádio I.

Os valores das rigidezes $EI_{sec1,i}$ e $EI_{sec2,i}$ são, obviamente, rigidezes mais precisas, onde cada direção leva em conta os dois materiais (concreto e aço) e ainda a direção ortogonal principal. O nome *acomplamento* surge justamente por que a rigidez de cada direção principal é determinada considerando o valor correto da rigidez da direção ortogonal.

6.1.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos

A curvatura (ρ), sem aproximações, em qualquer posição z , em qualquer direção, é dada pela conhecida expressão 6.4, expressão essa encontrada na grande maioria dos livros de Resistência dos Materiais.

$$\rho(z) = \frac{1}{r}(z) = \frac{v''(z)}{\left[1 + (z')^2\right]^{\frac{3}{2}}} \quad (\text{Expressão 6.4})$$

Para pequenas deformações e deslocamentos z' é muito pequeno quando comparado com a unidade, de tal modo que a equação diferencial fica sendo a já conhecida equação diferencial da linha elástica que aparece na resistência dos materiais.

$$\rho(z) = \frac{1}{r}(z) = v''(z) = \frac{M}{EI} \quad (\text{Expressão 6.5})$$

A expressão 6.5 é largamente conhecida, tratando-se da expressão dada em qualquer curso de Resistência dos Materiais. A primeira integração dessa equação nos fornece a rotação (ou declividade) da seção transversal em qualquer posição do eixo da peça.

$$\varphi(z) = \int_0^z \rho(z) \cdot dz + C_1 = \int_0^z \frac{1}{r}(z) \cdot dz + C_1 \quad (\text{Expressão 6.6})$$

a condição de contorno $\varphi(0) = 0$ implica que $C_1 = 0$.

A integração das rotações das seções transversais fornece o deslocamento horizontal do eixo da peça.

$$d(z) = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz + C_2 \quad (\text{Expressão 6.7})$$

a condição de contorno $d(0) = 0$ implica que $C_2 = 0$.

A declividade e o deslocamento para o pilar em balanço, em qualquer ponto z do comprimento eixo, podem ser simplesmente expressos por:

$$\varphi(z) = \int_0^z \rho(z) \cdot dz \quad (\text{Expressão 6.8})$$

$$d(z) = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz \quad (\text{Expressão 6.9})$$

Podemos então substituir a integração acima, analítica, por uma integração numérica. Suponha que a barra seja dividida em 'n' comprimentos iguais.

Figura 6.4 - Discretização

O valor do comprimento ΔL de cada trecho fica sendo dado por:

$$\Delta L = L/n \quad (\text{Expressão 6.10})$$

O número de pontos criados (i_{total}) é o número de divisões acrescido de 1:

$$i_{\text{TOTAL}} = n+1 \quad (\text{Expressão 6.11})$$

A posição (z) de cada ponto pode ser escrita do seguinte modo:

$$z_i = (i - 1) \cdot \Delta L \quad (\text{Expressão 6.12})$$

onde: $i = 1, 2, 3, 4, \dots, i_{\text{total}}$

Para nosso estudo, foi adotado um valor de $n = 20$, provocando $i_{\text{TOTAL}} = 21$, ou seja, 21 seções transversais a serem analisadas ao longo do comprimento. De qualquer modo, por se tratar de integração numérica, quanto mais pontos existirem ao longo do comprimento, mais a solução melhora e se aproxima da solução real.

Conhecido o momento fletor solicitante de cálculo ($M_{\text{sd},i}$) de cada ponto, a respectiva curvatura (ρ_i), as declividades e os deslocamentos para cada ponto ao longo da altura ficam sendo:

$$\varphi_1 = 0 \quad (\text{Expressão 6.13})$$

$$\varphi_i = \int_0^z \rho(z) \cdot dz = \varphi_{i-1} + (\rho_{i-1} + \rho_i) \cdot \frac{\Delta L}{2} \quad \text{onde } i = 2, 3, 4, \dots, i_{\text{total}}; \quad (\text{Expressão 6.14})$$

$$d_1 = 0 \quad (\text{Expressão 6.15})$$

$$d_i = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz = d_{i-1} + (\varphi_{i-1} + \varphi_i) \cdot \frac{\Delta L}{2} \quad \text{onde } i = 2, 3, 4, \dots, i_{\text{total}}; \quad (\text{Expressão 6.16})$$

6.1.4. Passo 4 – Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem

Promove-se nova análise, agora com a consideração da não-linearidade geométrica e física simultaneamente, escrevendo o equilíbrio na posição deformada, considerando as excentricidades.

$$M_{S1d}(z) = M_{S1d}^B + (M_{S1d}^T - M_{S1d}^B) \cdot \frac{z}{L} + N_{Sd} \cdot (e_1 - d_i) \quad (\text{Expressão 6.17})$$

$$M_{S2d}(z) = M_{S2d}^B + (M_{S2d}^T - M_{S2d}^B) \cdot \frac{z}{L} + N_{Sd} \cdot (e_2 - d_i) \quad (\text{Expressão 6.18})$$

onde: $e_i \rightarrow$ deslocamento no topo da coluna, da direção i considerada;

$d_i \rightarrow$ deslocamento na seção i considerada;

Obviamente, após essa análise, haverá alteração dos esforços solicitantes de cálculo (M_{Sd1i} e M_{Sd2i}), e, se os esforços se alteram, então as curvaturas também, alterando os deslocamentos, que por sua vez alteram, novamente, os esforços. Uma referência circular é criada, onde a curvatura depende do esforço e o esforço depende da curvatura.

6.1.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)

A saída para a referência circular criada é ficar fazendo iterações sucessivas, quantas vezes forem necessárias até que em uma determinada iteração, os deslocamentos d_i não se alterem significativamente (além de um valor especificado) em relação aos valores obtidos na iteração anterior, garantindo a convergência da solução. Se após um grande número de iterações, mesmo assim a convergência não for obtida, pode-se estabelecer problema de equilíbrio, caracterizando instabilidade da peça.

6.2. Pilares bi-apoiados

6.2.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem

Considere o pilar da figura 6.7 que possui os seguintes esforços internos solicitantes, todos considerados positivos.

Figura 6.5 - Pilar submetido a esforços quaisquer em flexão composta oblíqua

As expressões que fornecem os momentos de 1ª ordem, sob análise com linearidade geométrica, são os mesmos obtidos pelas expressões 6.1 e 6.2, descritas no pilar em balanço.

$$M_{S1d}(z) = M_{S1d}^B + (M_{S1d}^T - M_{S1d}^B) \cdot \frac{z}{L} \quad (\text{Expressão 6.19})$$

$$M_{S2d}(z) = M_{S2d}^B + (M_{S2d}^T - M_{S2d}^B) \cdot \frac{z}{L} \quad (\text{Expressão 6.20})$$

6.2.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes

Idêntico ao passo 2 do processo com acoplamento dos pilares em balanço, não reescreveremos o texto para não sobrecarregar o tamanho desnecessariamente.

6.2.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos

A primeira integração da equação da linha elástica fornece a rotação (ou declividade) da seção transversal em qualquer posição do eixo da peça.

$$\varphi(z) = \int_0^z \rho(z) \cdot dz + C_1 = \int_0^z \frac{1}{r}(z) \cdot dz + C_1 \quad (\text{Expressão 6.21})$$

Não há o que afirmar sobre a condição de contorno $\varphi(0)$, pois agora existe uma rotação na seção $z = 0$, o que implica $C_1 \neq 0$.

A integração das rotações das seções transversais fornece o deslocamento horizontal do eixo da peça.

$$d(z) = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz + C_1 \cdot z + C_2 \quad (\text{Expressão 6.22})$$

a condição de contorno $d(0) = 0$ implica que $C_2 = 0$.

Resta-nos descobrir agora qual o valor de C_1 a utilizar, o que não é muito difícil. A deformada da linha elástica depende única e exclusivamente do momento fletor, mais precisamente da parcela $\frac{M}{EI}$. Vamos supor, portanto, que a coluna bi-apoiada é uma coluna em balanço.

Ignoremos o apoio móvel superior, imaginando um engastamento na base inferior.

Como na coluna em balanço as condições de contorno são nulas, o topo da coluna fica livre para se deslocar, o que acontece. O que a condição de contorno deve fazer é realizar uma rotação de corpo rígido, restabelecendo a condição de deslocamento nulo no topo da coluna.

Figura 6.6 – Condição de contorno para pilares bi-apoiados

Perceba então que a condição de contorno C_1 é muito simples e mostrada na expressão 6.23.

$$C_1 = \frac{e_i}{L} \quad (\text{Expressão 6.23})$$

onde: $e_i \rightarrow$ deslocamento no topo da coluna, da direção i considerada, quando consideramos a coluna em balanço;

A declividade e o deslocamento para o pilar em balanço, em qualquer ponto z do comprimento, podem ser simplesmente expressos por:

$$\varphi(z) = \int_0^z \rho(z) \cdot dz + C_1 = \varphi^0(z) + C_1 \quad (\text{Expressão 6.24})$$

$$d(z) = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz + C_1 \cdot z = d^0(z) + C_1 \cdot z \quad (\text{Expressão 6.25})$$

onde:

$\varphi^0 \rightarrow$ rotações das seções transversais obtidas imaginando que a coluna é em balanço;

$d^0 \rightarrow$ deslocamentos imaginando que a coluna é em balanço;

A integração analítica será novamente substituída por integração numérica, identicamente ao aplicado nos pilares em balanço.

As declividades e os deslocamentos para cada ponto ao longo da altura ficam sendo:

$$\varphi_1^0 = 0 \quad (\text{Expressão 6.26})$$

$$\varphi_i^0 = \int_0^z \rho(z) \cdot dz = \varphi_{i-1} + (\rho_{i-1} + \rho_i) \cdot \frac{\Delta L}{2} \quad \text{onde } i = 2, 3, 4, \dots, i_{\text{total}}; \quad (\text{Expressão 6.27})$$

$$\varphi_i = \varphi_i^0 + C_1 \quad (\text{Expressão 6.28})$$

$$d_1^0 = 0 \quad (\text{Expressão 6.29})$$

$$d_i^0 = \int_0^z \varphi(z) \cdot dz = d_{i-1} + (\varphi_{i-1} + \varphi_i) \cdot \frac{\Delta L}{2} \quad \text{onde } i = 2, 3, 4, \dots, i_{\text{total}}; \quad (\text{Expressão 6.30})$$

$$d_i = d_i^0 + C_1 \cdot z \quad \text{onde } i = 2, 3, 4, \dots, i_{\text{total}}; \quad (\text{Expressão 6.31})$$

6.2.4. Passo 4 – Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem

Promove-se nova análise, agora com a consideração da não-linearidade geométrica e física simultaneamente, escrevendo o equilíbrio na posição deformada, considerando as excentricidades.

$$M_{S1d}(z) = M_{S1d}^B + (M_{S1d}^T - M_{S1d}^B) \cdot \frac{z}{L} + N_{Sd} \cdot d_i \quad (\text{Expressão 6.17})$$

$$M_{S2d}(z) = M_{S2d}^B + (M_{S2d}^T - M_{S2d}^B) \cdot \frac{z}{L} + N_{Sd} \cdot d_i \quad (\text{Expressão 6.18})$$

onde: $d_i \rightarrow$ deslocamento na seção i considerada;

Obviamente, após essa análise, haverá alteração dos esforços solicitantes de cálculo ($M_{Sd1,i}$ e $M_{Sd2,i}$), e, se os esforços se alteram, então as curvaturas também, alterando os deslocamentos, que por sua vez alteram, novamente, os esforços. Uma referência circular é criada, onde a curvatura depende do esforço e o esforço depende da curvatura.

6.2.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)

Idêntico ao passo 4 do processo com acoplamento dos pilares em balanço, não reescreveremos o texto para não sobrecarregar o tamanho desnecessariamente.

Capítulo 7

Processo desacoplado

7.1. Pilares em balanço

7.1.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem

A determinação dos esforços de 1ª ordem se faz identicamente a realizada no processo com acoplamento, conforme expressões 6.1 e 6.2.

7.1.2. Passo 2 - Determinação das rigidezes secantes

A rigidez secante que deve ser utilizada nesse caso, em cada direção principal, deve ser determinada no nível de solicitação dos momentos resistentes de cálculo, de cada direção principal (M_{Rd11} e M_{Rd22}), ignorando-se os momentos da direção ortogonal, conforme ilustram as figuras 7.1 e 7.2.

Figura 7.1 - Diagrama genérico Momento-Curvatura

Figura 7.2 - Diagrama genérico Momento-Curvatura

onde:

$M_{R11d}^+ \rightarrow$ momento positivo resistente último de cálculo da direção principal 1, obtido considerando-se $f_c = 0,85f_{cd}$, $N = N_{Sd}$ e $M_2 =$ qualquer, mas pequeno;

$M_{R11d}^- \rightarrow$ momento negativo resistente último de cálculo da direção principal 1, obtido considerando-se $f_c = 0,85f_{cd}$, $N = N_{Sd}$ e $M_2 =$ qualquer, mas pequeno;

$M_{R22d}^+ \rightarrow$ momento positivo resistente último de cálculo da direção principal 2, obtido considerando-se $f_c = 0,85f_{cd}$, $N = N_{Sd}$ e $M_1 =$ qualquer, mas pequeno;

$M_{R22d}^- \rightarrow$ momento negativo resistente último de cálculo da direção principal 2, obtido considerando-se $f_c = 0,85f_{cd}$, $N = N_{Sd}$ e $M_1 =$ qualquer, mas pequeno;

7.1.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos

Idêntico ao passo 3 do processo com acoplamento dos pilares em balanço, não reescreveremos o texto para não sobrecarregar o tamanho desnecessariamente.

7.1.4. Passo 4 - Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem

De posse desses dos deslocamentos iniciais (de primeira ordem), promove-se uma segunda análise, ainda utilizando as rigidezes secantes encontradas (EI_{SEC11} e EI_{SEC22}). A consideração da não-linearidade geométrica, escrevendo o equilíbrio na posição deformada, considerando as excentricidades, é obtida pelas mesmas expressões do processo acoplado (6.17 e 6.18).

Obviamente, após essa segunda análise, com a introdução dos valores de EI_{SEC} encontrados valores distintos dos primeiros deslocamentos devem aparecer, provocando novamente alteração nos esforços internos solicitantes, que por sua vez implicará em novos valores de deslocamentos. Criou-se, outra vez, uma referência circular onde o deslocamento depende do esforço e o esforço depende do deslocamento. As rigidezes de cada direção, por sua vez, foram obtidas uma única vez e são fixas, nunca irão se alterar, ou seja, a não-linearidade física é introduzida uma única vez, através de EI_{SEC11} e EI_{SEC22} , atribuída a todo o comprimento do pilar.

7.1.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)

A saída para a referência circular criada é ficar fazendo iterações sucessivas, quantas vezes forem necessárias até que em uma determinada iteração, os deslocamentos d_i não se alterem significativamente (além de um valor especificado) em relação aos valores obtidos na iteração

anterior, garantindo a convergência da solução. Se após um grande número de iterações, mesmo assim a convergência não for obtida, pode-se estabelecer problema de equilíbrio, caracterizando instabilidade da peça.

O processo descrito aqui é o chamado de processo *desacoplado*, nome dado justamente porque a rigidez de uma direção principal não leva em conta o valor da solicitação na direção ortogonal. Perceba, pelos gráficos, que as rigidezes secantes são determinadas em cada direção considerando momento nulo na direção ortogonal.

7.2. Pilares bi-apoiados

7.2.1. Passo 1 - Determinação dos esforços de 1ª ordem

A determinação dos esforços de 1ª ordem se faz identicamente a realizada no processo com acoplamento, conforme expressões 6.1 e 6.2.

7.2.2. Passo 2 - Determinação da rigidez secante

A rigidez secante que deve ser utilizada nesse caso, em cada direção principal, deve ser determinada identicamente a que foi descrita no processo desacoplado dos pilares em balanço, não havendo necessidade de nova explicação.

7.2.3. Passo 3 - Determinação das rotações e deslocamentos

Idêntico ao passo 3 do processo com acoplamento dos pilares bi-apoiados, não reescreveremos o texto para não sobrecarregar o tamanho desnecessariamente.

7.2.4. Passo 4 - Determinação dos esforços e deslocamentos de 2ª ordem

Idêntico ao passo 3 do processo sem acoplamento dos pilares em bi-apoiados, não reescreveremos o texto para não sobrecarregar o tamanho desnecessariamente.

7. 2.5. Passo 5 – Iterações sucessivas até a convergência (ou instabilidade)

Idêntico ao passo 4 do processo sem acoplamento dos pilares bi-apoiados, não reescreveremos o texto para não sobrecarregar o tamanho desnecessariamente.

Capítulo 8

Segurança estrutural

Na figura 8.1 está representado esquematicamente um diagrama $N_d-M_1-M_2$. Neste, estão indicados os módulos dos momentos.

$M_{Sd,i}^{1^{a}ordem} = OA =$ momento resultante solicitante de 1ª ordem;

$M_{Sd,i} = OC =$ momento resultante solicitante incluindo a não-linearidade (2ª ordem);

$M_{Rd,i} = OD =$ momento resistente do estado limite último.

Figura 8.1 – Segurança de uma seção transversal

A taxa de utilização (T.U) de uma seção solicitada é quantificada pela relação entre os segmentos OC e OD. Isto é:

$$T.U. = \frac{OC}{OD} = \frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \quad (\text{Expressão 8.1})$$

Quanto mais o ponto C se aproxima da curva do estado limite último, mais a taxa de utilização se aproximada da unidade.

A taxa de utilização do pilar é analisada, em cada seção transversal, pela relação entre o momento total solicitante, dado por

$$M_{Sd,i} = \sqrt{(M_{S1d,i})^2 + (M_{S2d,i})^2} \quad (\text{Expressão 8.2})$$

e o momento resistente é dado por

$$M_{Rd,i} = \sqrt{(M_{R1d})^2 + (M_{R2d})^2} \quad (\text{Expressão 8.3})$$

este último determinado para a força normal N_{Sd} e mesma inclinação θ do eixo de solicitação.

$$\theta = \arctan \left(\frac{M_{S2d,i}}{M_{S1d,i}} \right) \quad (\text{Expressão 8.4})$$

A taxa de utilização do pilar pode então ser escrita da seguinte forma:

$$T.U = \left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right) \leq 1 \quad (\text{Expressão 8.5})$$

8.1. Forma de apresentação dos resultados

É de se destacar que o processo com acoplamento é mais realista, sendo o outro uma tentativa de aproximação.

O processo com desacoplamento só merece confiança se fornecer uma taxa de utilização maior ou igual a do processo com acoplamento.

Para cada processo de cálculo são obtidas as relações conforme expressão 8.1. Os índices ‘*ac*’ ou ‘*des*’ determinam, respectivamente, processo com acoplamento e sem acoplamento. Obviamente, a taxa de utilização das seções deve ser um número menor que a unidade.

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} \quad \text{e} \quad \left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des} \quad (\text{Expressão 8. 6})$$

Após a análise dos muitos pilares que serão resolvidos, é interessante localizar o ponto P, descrito na expressão 8.7, no gráfico 8.2.

$$P = \left[\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} ; \left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des} \right] \quad (\text{Expressão 8.7})$$

Figura 8.2 – Regiões de solicitação

8.2. Interpretação do gráfico de resultados

Os resultados, obtidos para todos os pilares-exemplo, através de cada processo, serão analisados por meio do gráfico que relaciona a taxa de utilização $\left(\frac{M_{Sd}}{M_{Rd}}\right)$ dos dois processos.

Após determinado quais são as coordenadas do ponto P para a seção mais solicitada do pilar, se analisa a qual região pertence o ponto. Uma descrição breve do que representa cada região se encontra abaixo:

Região A1

Nessa região estão os pontos P dos pilares para os quais a segurança, indicada pelo processo acoplado, mais exato, é menor que a indicada pelo processo desacoplado $\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}}\right)_{ac} > \left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}}\right)_{des}$.

Entretanto, os dois processos indicam que o pilar tem segurança, ou seja,

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}}\right)_{ac} \leq 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{existe segurança real}$$

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}}\right)_{des} \leq 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{processo aproximado indica segurança}$$

Neste caso é indiferente a utilização do processo *desacoplado* ou do processo *acoplado*. Com qualquer um se chega à mesma conclusão quanto à segurança do pilar, ou seja, com ambos de

atende as condições de segurança das normas. Entretanto, a segurança indicada pelo processo com desacoplamento é exagerada.

Região A2

Nessa região estão os pontos P dos pilares para os quais a segurança, indicada pelo processo acoplado, mais exato, é maior que a indicada pelo processo desacoplado $\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} < \left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des}$.

Entretanto, os dois processos indicam que o pilar tem segurança, ou seja,

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} \leq 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{existe segurança real}$$

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des} \leq 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{processo aproximado indica segurança}$$

Portanto, neste caso também é indiferente a utilização do processo *desacoplado* ou do processo *acoplado*. Com qualquer um se chega à mesma conclusão quanto ao pilar ter segurança de norma. Esta é a região desejada para se obter resultados, já que aqui existe uma folga de segurança em relação ao processo mais exato. O pilar, na realidade, tem segurança maior que o processo com desacoplamento indica.

Região B

Nessa região estão os pontos P dos pilares para os quais se tem $M_{Sd} > M_{Rd}$ pelo processo *acoplado*, mais exato, enquanto que pelo processo *desacoplado*, menos exato, se tem $M_{Sd} < M_{Rd}$, ou seja,

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} > 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} > M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{não existe segurança real}$$

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des} \leq 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{processo aproximado indica segurança}$$

Neste caso a utilização do processo com desacoplamento daria uma falsa condição de segurança, o que seria perigoso. Esta é uma região indesejável para se obter resultados nesta análise.

Região C

Nessa região estão os pontos P dos pilares para os quais se tem $M_{Sd} > M_{Rd}$ pelo processo *desacoplado*, menos exato, enquanto que, pelo processo *acoplado*, mais exato, se tem $M_{Sd} < M_{Rd}$, ou seja,

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} \leq 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{existe segurança real}$$

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des} > 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} > M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{processo aproximado indica falta de segurança}$$

Neste caso a utilização do processo com desacoplamento daria uma falsa conclusão de falta de segurança para o pilar. Levaria a descartar um projeto de pilar que pelo processo mais exato poderia ser aproveitado. Isso ficaria a favor da segurança, embora contra a economia. Esta é uma região preferível em relação à região B, já que aqui o pilar teria mais segurança que a indicada pelo cálculo.

Região D

Nessa região estão os pontos P dos pilares para os quais se tem $M_{Sd} > M_{Rd}$ pelos dois processos.

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{ac} > 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} \leq M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{segurança real não existe}$$

$$\left(\frac{M_{Sd,i}}{M_{Rd,i}} \right)_{des} > 1 \quad \rightarrow \quad M_{Sd} > M_{Rd} \quad \rightarrow \quad \text{processo aproximado indica falta de segurança}$$

Neste caso é indiferente a utilização de um ou outro processo, já que, os dois dariam a mesma informação: de que o projeto do pilar deve ser rejeitado.

A região mais desejada para se obter resultados nesta análise é a região A2, ficando em segundo lugar a região C. Resultados na região B são indesejados e os resultados obtidos na região D podem ser descartados para uma análise estatística, já que é indiferente o emprego de um ou outro processo.

Capítulo 9

Motivação para o estudo

9.1. A rigidez secante

Um gráfico típico correlacionando o momento fletor e a curvatura, para peças de concreto armado, pode ser visto na figura 9.1.

Figura 9.1 – Momento-Curvatura e a rigidez secante

A rigidez secante é definida, por exemplo, para o ponto P , como o coeficiente angular da reta s , determinada pela origem do sistema de eixos até o ponto em estudo da curva.

O valor da rigidez secante não é um número fixo. O valor dessa rigidez depende do nível de solicitação. Níveis baixos de solicitação têm valores de rigidez mais elevados quando comparados com níveis mais altos de solicitação. O valor da rigidez secante decresce com o aumento do nível de solicitação.

Reforçando a idéia, a rigidez secante é definida através do gráfico e não pelo produto de um módulo de elasticidade por um momento de inércia, apesar de a notação manter o produto das letras EI .

$$EI_{SEC} = \text{tg } \theta$$

9.2. Rigidez Secante usada no desacoplamento das duas direções principais

Para seções retangulares já foi provado (por diversos autores) que é possível, e a favor da segurança, desconsiderar a flexão composta oblíqua e tratá-la como dois casos de flexão normal composta, um para cada direção principal. Queremos descobrir se o mesmo acontece com a seção em formato geométrico de 'L'.

A rigidez secante que deve ser utilizada nesse caso, em cada direção principal, deve ser determinada no nível de solicitação dos momentos resistentes de cálculo de cada direção principal (M_{Rd1} e M_{Rd2}), conforme ilustra a figura 9.2.

Figura 9.2 – Momentos que devem ser utilizados para definir a rigidez secante

Os valores de M_{Rd1} e M_{Rd2} , por se tratarem de esforços resistentes de cálculo, devem ser obtidos levando em consideração a força normal de cálculo atuante (N_d) e o diagrama tensão-deformação do concreto com tensão última de cálculo $\alpha \cdot f_{cd} = 0,85 f_{cd}$.

A divisão pelo coeficiente γ_{f3} se deve ao fato já explicado no capítulo 5, onde o equilíbrio deve ser determinado antes de se aplicar a segurança aos esforços internos solicitantes. A rigidez procurada é aquela que equilibra as ações majoradas por γ_{f1} e γ_{f2} , antes de se aplicar a segurança aos esforços, por isso da retirada de γ_{f3} .

A utilização da tensão $\alpha \cdot f_{cd} = 1,10f_{cd}$ se deve ao fato de estamos querendo fazer uma análise de estabilidade, ou seja, algo mais realista, pois se utilizássemos $\alpha \cdot f_{cd} = 0,85f_{cd}$ (valor estipulado para o ELU) estaríamos assumindo que todas as seções teriam chance de atingir o ELU, o que é impossível, ou, no mínimo, muito conservador, já que o valor de 0,85 foi pensando no equilíbrio da seção transversal isoladamente, levando em conta apenas o ELU. O valor de $\sigma_{cd} = 1,10f_{cd}$, passa então a ser uma “média”, que considera que algumas seções atingem o ELU, outras estão no Estádio II e outras nem saem do Estádio I.

Determinada as rigidezes secantes das direções principais, realiza-se uma análise com não-linearidade geométrica, para cada direção principal isoladamente (em flexão normal composta), associando para cada direção o valor da rigidez secante encontrada ao longo de toda a altura do pilar.

Ao final desse processo, cada seção estará submetida ao terno de esforços (N_d , M_{Sd1} , M_{Sd2}), onde os momentos já incluirão os esforços não-lineares. Basta verificar se o terno de esforços internos solicitantes se encontra dentro da região delimitada pelo diagrama de interação dos esforços resistentes.

O processo descrito aqui é o chamado de processo desacoplado, nome dado justamente porque a rigidez de uma direção principal não leva em conta o valor da solicitação na direção ortogonal.

O intuito principal de todo o trabalho é comparar esse processo com o processo que determina as rigidezes levando em conta as duas direções simultaneamente, seção a seção, em flexão composta oblíqua (processo com acoplamento) para as seções transversais com formato geométrico de ‘L’.

9.3. Por que o processo desacoplado funciona para seções retangulares?

Para seções retangulares já foi provado que o desacoplamento das duas direções funciona e é a favor da segurança. Sua análise é muito mais veloz e sobrecarrega menos os computadores do que o processo que leva em conta as duas direções principais simultaneamente.

A grande pergunta que podem surgir ao leitor é: por que os resultados finais são a favor da segurança já que estamos ignorando uma das direções? Isso sempre acontece? A pergunta realmente é intrigante.

Tomando como base as seções retangulares, que já foram largamente estudadas, se colocarmos em um gráfico a relação momento-curvatura de uma dada direção, levando em conta os esforços da direção principal ortogonal, encontraremos o gráfico típico mostrado na figura 9.3.

Figura 9.3 – Diagrama momento-curvatura para vários níveis de momento da direção ortogonal

É óbvio que a relação momento-curvatura de uma determinada direção principal se altera em função da solicitação da direção ortogonal. Como nas seções retangulares temos armadura simétrica, ao analisarmos apenas uma direção principal em flexão normal composta estamos, na verdade, traçando a curva equivalente a $M = 0$ da outra direção.

Figura 9.4 – Rigidez secante para a seção retangular

A rigidez secante definida nesse processo desacoplado é uma reta que passa “por baixo” das demais curvas (figura 9.5), ou seja, a rigidez que é considerada no cálculo é um valor baixo o suficiente para cobrir qualquer valor de momento da direção ortogonal a que se está realizando o cálculo.

Figura 9.5 – Rigidez secante comparada a qualquer nível de momento

O leitor mais atento já percebeu que isso não é verdade absoluta, existem certos pontos que podem realmente ter rigidezes mais baixas do que a reta ilustrada pela rigidez secante do processo desacoplado. Um exemplo é o ponto Q mostrado na figura 9.6.

Figura 9.6 – Ponto com rigidez inferior a secante

Comparação do ponto Q em relação ao ELU

Figura 9.7

O fator que realmente tranquiliza é que esses pontos, os quais teriam rigidez inferior à rigidez secante são pontos onde os momentos solicitantes de cálculo das duas direções (M_{sd1} e M_{sd2}) atuando concomitantemente têm valores superiores aos momentos resistentes de cálculo no ELU. Sendo assim, ao se analisar a concomitância dos momentos em flexão composta oblíqua, rapidamente perceber-se-ia que a seção não suporta os dois momentos simultaneamente, o que garante que essa seção nunca irá existir na prática.

A grande pergunta que deve ser respondida ao final desse trabalho é: isso também é verdade para seções com formato geométrico de 'L'?

Capítulo 10

Propriedades geométricas das seções transversais

10.1. Introdução

Para as seções transversais retangulares de concreto armado, a armadura geralmente é colocada de maneira simétrica, sendo o centro geométrico calculado como se a seção transversal fosse de concreto simples, ignorando-se as barras de aço da armadura. De fato, tal simplificação é válida, pois se a armadura é disposta simetricamente, o centro geométrico da seção composta se confunde com o centro geométrico da seção de concreto simples.

Em seções em que a simetria não existe faz-se extremamente necessário levar em conta os dois materiais envolvidos, porque se ignorássemos a existência conjunta dos materiais, calculando a seção transversal como se fosse de concreto simples, uma peça com curvatura nula apresentaria momento fletor, o que vai contra os princípios da Teoria das Estruturas.

Considere uma seção transversal de dois materiais como mostra a figura 10.1. O material 1 tem um módulo de elasticidade E_1 , e o material interno E_2 , sendo $E_1 \neq E_2$. Se a seção é submetida a flexão, a premissa básica de deformação usada na teoria da flexão permanece válida: as seções planas permanecem planas. Dessa forma, as deformações devem variar linearmente a partir da linha neutra, como mostra a figura 10.1b. Para o caso elástico, a tensão é proporcional à deformação, e a distribuição de tensão, admitindo $E_1 > E_2$ é mostrada na figura 10.1c.

Figura 10.1

Observe que nas superfícies de contato dos dois materiais está indicada uma descontinuidade na intensidade da tensão. Embora a deformação em ambos os materiais em tais superfícies seja igual, desenvolve-se uma tensão maior no material mais rígido. A rigidez de um material é medida pelo seu módulo de elasticidade E . A informação acima é suficiente para resolver qualquer problema de vigas de dois (ou mais) materiais, usando uma solução por tentativas e erros. Entretanto é possível uma considerável simplificação do procedimento.

Apenas as magnitudes corretas e localização das forças resistentes (e não das tensões) são significativas. A nova técnica consiste na construção de uma seção transversal de material na qual as forças resistentes são as mesmas que na seção original. Tal seção é chamada de *seção transversal transformada*, *homogeneizada*, ou ainda, *equivalente*. Após a redução de uma seção transversal de diversos materiais a outra equivalente de apenas um material, a fórmula usual da flexão elástica se aplica.

Figura 10.2

A transformação de uma seção é conseguida alterando as dimensões de uma seção transversal paralela a linha neutra na relação dos módulos de elasticidade dos materiais. Por exemplo, se a seção equivalente é desejada no material 1, as dimensões correspondentes do material 1 não são alteradas, mas as dimensões do material 2 são alteradas pela relação $r_1 = E_2/E_1$, figura 10.2a. Por outro lado, se a seção transformada é do material 2, a dimensão do outro material 1 é alterada pela relação $r_2 = E_1/E_2$, figura 10.2b. A relação r_2 é inversa a r_1 .

A legitimidade das seções transformadas é vista comparando as forças que atuam nas seções originais e nas equivalentes. A força correspondente a uma deformação ϵ_x , que atua em uma área elementar $dzdy$, na figura 10.2a, é $\epsilon_x E_1 dzdy$. O mesmo elemento de área na figura 10.2b é $r_2 dzdy$. A

força que age nele é $\epsilon x E_2 r_2 dz dy$. Entretanto, pela definição de r_2 , $E_1 = r_2 E_2$. Assim, as forças em ambos os elementos são as mesmas, e ambos, em virtude de sua localização, contribuem igualmente para o momento resistente.

Em uma seção com área transformada, as deformações e tensões variam linearmente a partir da linha neutra. As tensões calculadas de maneira usual são corretas para o material do qual a seção transversal é feita. Para o outro material, a tensão calculada deve ser multiplicada pela relação r_1 ou r_2 da área transformada para a atual. Por exemplo, a força que age sobre $r_1 dz dy$, na figura 10.2b, atua sobre $dz dy$ do material real.

Todas as propriedades geométricas das seções transversais serão tratadas a partir das coordenadas de seus vértices em relação a um sistema arbitrário Cxy . Podemos estabelecer previamente as coordenadas dos vértices para os tipos de seções transversais mais utilizadas.

A tabela abaixo resume as seções que cobrem a grande maioria dos casos na prática.

	Valores de x_i		Valores de y_i
$x(1) = 0$	$x(3) = b_w$	$y(1) = 0$	$y(3) = H$
	$x(2) = 0$	$x(4) = b_w$	$y(2) = H$	$y(4) = 0$
$x(1) = 0$	$x(3) = (B + b_w)/2$	$y(1) = 0$	$y(3) = H$
	$x(2) = (B - b_w)/2$	$x(4) = B$	$y(2) = H$	$y(4) = 0$
$x(1) = 0$	$x(3) = b_w$	$y(1) = 0$	$y(3) = 0$
	$x(2) = b_w/2$		$y(2) = H$	

	Valores de x_i		Valores de y_i	
	$x(1) = (B-b_w)/2$ $x(2) = (B-b_w)/2$ $x(3) = 0$ $x(4) = 0$	$x(5) = B$ $x(6) = B$ $x(7) = (B+b_w)/2$ $x(8) = (B+b_w)/2$	$y(1) = 0$ $y(2) = H-h_f$ $y(3) = H-h_f$ $y(4) = H$	$y(5) = H$ $y(6) = H-h_f$ $y(7) = H-h_f$ $y(8) = 0$
	$x(1) = 0$ $x(2) = 0$ $x(3) = b_w$	$x(4) = b_w$ $x(5) = B$ $x(6) = B$	$y(1) = 0$ $y(2) = H$ $y(3) = H$	$y(4) = h_f$ $y(5) = h_f$ $y(6) = 0$
	$x(1) = 0$ $x(2) = 0$ $x(3) = b_w$ $x(4) = b_w$ $x(5) = B-b_w$ $x(6) = B-b_w$	$x(7) = B$ $x(8) = B$ $x(9) = B-b_w$ $x(10) = B-b_w$ $x(11) = b_w$ $x(12) = b_w$	$y(1) = 0$ $y(2) = H$ $y(3) = H$ $y(4) = (H+h_f)/2$ $y(5) = (H+h_f)/2$ $y(6) = H$	$y(7) = H$ $y(8) = 0$ $y(9) = 0$ $y(10) = (H-h_f)/2$ $y(11) = (H-h_f)/2$ $y(12) = 0$
	$x(1) = 0$ $x(2) = 0$ $x(3) = b_w$ $x(4) = b_w$	$x(5) = B-b_w$ $x(6) = B-b_w$ $x(7) = B$ $x(8) = B$	$y(1) = 0$ $y(2) = H$ $y(3) = H$ $y(4) = h_f$	$y(5) = h_f$ $y(6) = H$ $y(7) = H$ $y(8) = 0$
	$x(1) = 0$ $x(2) = 0$ $x(3) = B$ $x(4) = B$	$x(5) = b_w$ $x(6) = b_w$ $x(7) = B$ $x(8) = B$	$y(1) = 0$ $y(2) = H$ $y(3) = H$ $y(4) = H-h_f$	$y(5) = H-h_f$ $y(6) = h_f$ $y(7) = h_f$ $y(8) = 0$

	Valores de x_i		Valores de y_i
$x(1) = 0$	$x(6) = B - b_w$	$y(1) = 0$	$y(6) = H - h_f$
	$x(2) = 0$	$x(7) = b_w$	$y(2) = H$	$y(7) = H - h_f$
	$x(3) = b_w$	$x(8) = 0$	$y(3) = H - h_f$	$y(8) = H$
	$x(4) = b_w$	$x(9) = B$	$y(4) = h_f$	$y(9) = H$
	$x(5) = B - b_w$	$x(10) = B$	$y(5) = h_f$	$y(10) = 0$
$x(1) = 0$	$x(7) = B$	$y(1) = 0$	$y(7) = H$
	$x(2) = 0$	$x(8) = B$	$y(2) = h_f$	$y(8) = H - h_f$
	$x(3) = (B - b_w)/2$	$x(9) = (B + b_w)/2$	$y(3) = h_f$	$y(9) = H - h_f$
	$x(4) = (B - b_w)/2$	$x(10) = (B + b_w)/2$	$y(4) = H - h_f$	$y(10) = h_f$
	$x(5) = 0$	$x(11) = B$	$y(5) = H - h_f$	$y(11) = h_f$
	$x(6) = 0$	$x(12) = B$	$y(6) = H$	$y(12) = 0$
Seção Qualquer	Fornecido pelo usuário		Fornecido pelo usuário	

10.2. Área da seção transversal

10.2.1. Área de concreto

Considere a seção transversal plana em estudo elaborada a partir de retas que constituem uma poligonal fechada, conforme ilustra a figura 10.3. As coordenadas dos vértices da poligonal de contorno, x_i , y_i são dadas em relação ao sistema Cxy, onde C é um ponto qualquer do plano da figura.

Estamos interessados em determinar a área (A_c) da seção delimitada pelos vértices P1, P2, P3 e P4.

Figura 10.3

Figura 10.4

É fácil perceber que para obter a área da figura desenhada, basta somar as áreas dos quatro trapézios (o primeiro deles já hachurado na figura 10.4) contando negativamente a área dos dois últimos.

Para uma reta qualquer da poligonal, a qual possua vértices i e $i+1$, a área do trapézio formado abaixo da mesma pode ser calculada facilmente.

$$A_{ci} = \frac{1}{2} \cdot [(x_{i+1} - x_i) \cdot (y_i + y_{i+1})]$$

$$A_{ci} = \frac{1}{2} \cdot (x_{i+1} y_i + x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i - x_i y_{i+1})$$

$$A_{ci} = \frac{1}{2} \cdot (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i) \quad (\text{Expressão 10.1})$$

Figura 10.5

Generalizando para uma poligonal de nv vértices, sendo o vértice $P_{nv+1} = P_1$, isto é:

$$x_{nv+1} = x_1 \quad \text{e} \quad y_{nv+1} = y_1$$

A área da seção transversal fica dada por:

$$A_c = \sum_1^{nv} A_{ci}$$

$$A_c = \sum_1^n \frac{1}{2} \cdot (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1} + x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i)$$

$$A_c = \frac{1}{2} \cdot \left[\sum_1^{nv} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) + \sum_1^{nv} (x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i) \right]$$

mas,

$$\sum_1^{nv} (x_{i+1} y_{i+1} - x_i y_i) = 0 \quad (\text{por se tratar de circuitação fechada})$$

Portanto:

$$A_c = \frac{1}{2} \cdot \sum_1^{nv} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1})$$

(Expressão 10.2)

10.2.2. Área das barras de aço

Como, para todos os casos, conhecemos a área de cada barra de aço contida na seção transversal $A_b(i)$, a área total de aço é obtida pela somatória das áreas de todas as barras alojadas na seção.

$$A_a = \sum_{i=1}^{NBtotal} A_B(i) \quad (\text{Expressão 10.3})$$

Figura 10.6

10.2.3. Área da seção homogeneizada

Definindo como α_e a relação entre os módulos de elasticidade do aço e do concreto, temos:

$$\alpha_e = \frac{E_s}{E_{cs}} \quad (\text{Expressão 10.4})$$

onde: $E_s \rightarrow$ módulo de elasticidade longitudinal do aço ($E_s = 210.000 \text{ MPa}$)

$E_{cs} \rightarrow$ módulo de elasticidade secante do concreto ($E_{cs} = 0,85 \cdot 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}}$)

A área da seção homogeneizada fica caracterizada pela simples soma das áreas já obtidas, de concreto e de aço, ficando a área de aço multiplicada pelo peso da relação α_e .

$$A = A_c + (\alpha_e - 1) \cdot A_a \quad (\text{Expressão 10.5})$$

Figura 10.7

O leitor atento irá perceber que a subtração de uma unidade, conforme mostra a expressão 10.5, subtrai a área de concreto que foi erroneamente calculada no item 10.2.1. No referido item, ignorou-se o fato de que a seção transversal continha qualquer barra de aço, calculando-se a seção como se fosse de concreto simples. Obviamente, ao se inserir uma barra de aço, com uma determinada área, a área ocupada pela barra deve ser descontada do concreto, pois, se não, estaríamos sobrepondo área de concreto e de aço na mesma região, o que é impossível, pois os dois materiais não podem coexistir ocupando o mesmo lugar no espaço.

10.3. Momentos Estáticos

A integral $\int y dA$ é conhecida como *momento estático*, ou, como também encontrado na literatura, *momento de primeira ordem* da superfície A em relação ao eixo x e será representado pela por S_x . Analogamente, a integral $\int x dA$ define o *momento estático* de A em relação ao eixo y e é representado por S_y . Escrevemos

$$S_y = \int x dA$$

$$S_x = \int y dA$$

(Expressão 10.6)

Verifica-se que os momentos estáticos da superfície A podem ser expressos como produtos de área pelas coordenadas do centro geométrico.

$$S_y = \bar{x} A$$

$$S_x = \bar{y} A$$

(Expressão 10.7)

Figura 10.8

onde $\bar{x}$ e $\bar{y}$ são as coordenadas do centro geométrico da figura de área A .

10.3.1. Momento estático da seção de concreto

Tomando a reta genérica da poligonal, o valor do momento estático do trapézio formado abaixo da mesma, pode ser facilmente determinado.

$$S_{xc}^i = \frac{1}{2} y_i (x_{i+1} - x_i) y_i + \left(y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{3} \right) \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) (y_{i+1} - y_i)$$

$$S_{xc}^i = \frac{1}{2} (x_{i+1} - x_i) \left[y_i^2 + \frac{(y_{i+1} - y_i)(2y_i + y_{i+1})}{3} \right]$$

$$S_{xc}^i = \frac{1}{6} (x_{i+1} - x_i) (y_i^2 + y_{i+1}^2 + y_i \cdot y_{i+1}) \quad \text{(Expressão 10.8)}$$

Figura 10.9

Somando algebricamente as nv parcelas

$$S_{xc} = \sum_{i=1}^{nv} S_{xc}^i$$

$$S_{yc} = \frac{1}{6} \cdot \left[\sum_1^{nv} (y_i x_{i+1}^2 + y_i x_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i^2 - y_{i+1} x_i x_{i+1}) + \sum_1^{nv} (y_i x_i^2 - y_{i+1} x_{i+1}^2) \right]$$

mas,

$$\sum_1^{nv} (y_i x_i^2 - y_{i+1} x_{i+1}^2) = 0 \text{ (por se tratar de circunferência fechada)}$$

Portanto:

$$S_{yc} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^{nv} (y_i x_{i+1}^2 + y_i x_i x_{i+1} - y_{i+1} x_i^2 - y_{i+1} x_i x_{i+1})$$

$$S_{yc} = \frac{1}{6} \cdot \sum_1^{nv} (x_{i+1} y_i - x_i y_{i+1}) (x_i + x_{i+1}) \quad (\text{Expressão 10.11})$$

10.3.2. Momento estático das barras de aço

O momento estático de cada barra de aço pode ser obtido simplesmente realizando-se o produto entre a coordenada do centro da barra (x_B, y_B) pela respectiva área da barra (A_B).

Figura 10.11

$$S_{xa}^i = y_B(i) \cdot A_B(i) \quad (\text{Expressão 10.12})$$

e

$$S_{ya}^i = x_B(i) \cdot A_B(i) \quad (\text{Expressão 10.13})$$

Obviamente, o momento estático de toda a armadura pode ser obtido simplesmente pela somatória do momento estático de cada barra de aço.

$$S_{xa} = \sum_{i=1}^{NB} S_{xa}^i$$

e

$$S_{ya} = \sum_{i=1}^{NB} S_{ya}^i$$

(Expressão 10.14)

10.3.3. Momento estático da seção homogeneizada

O momento estático da seção homogeneizada fica caracterizado pela simples soma dos momentos estáticos já obtidos, de concreto e de aço, ficando o momento estático do aço multiplicado pelo peso da relação α_e subtraído de uma unidade.

$$S_x = S_{xc} + S_{xa} \cdot (\alpha_e - 1)$$

e

$$S_y = S_{yc} + S_{ya} \cdot (\alpha_e - 1)$$

(Expressão 10.15)

10.4. Centro Geométrico

Trata-se de assunto elementar. Definida a área da figura (A) e os momentos estáticos (S_x e S_y), as coordenadas do centro geométrico, também chamado de centróide (ou ainda baricentro), podem ser obtidas dividindo-se o momento estático da superfície por sua área.

Figura 10.12

$$x_g = \frac{S_y}{A_c}$$

$$y_g = \frac{S_x}{A_c}$$

(Expressão 10.16)

Finalmente, observamos que a expressão 5.3 indica que, se o centro geométrico de uma superfície estiver situado sobre um eixo coordenado, o momento estático da superfície em relação a esse eixo será nulo.

10.5. Momento de inércia

A integral $\int y^2 dA$ é conhecida como *momento de inércia*, ou, como também encontrado na literatura, *momento de segunda ordem*, da seção A em relação ao eixo x e será representado por I_x . Analogamente, a integral $\int x^2 dA$ define o *momento de inércia* de A em relação ao eixo y e é representado por I_y . Escrevemos

Figura 10.13

$$I_x = \int y^2 dA$$

$$I_y = \int x^2 dA$$

(Expressão 10.17)

Como cada produto $y^2 dA$ ou $x^2 dA$ é positivo, sejam x e y positivos ou negativos, as integrais I_x e I_y são sempre positivas, ou, no caso extremo, nulas.

A expressão momento de segunda ordem, em teoria, seria mais apropriada que momento de inércia, uma vez que a última deveria ser usada somente para designar integrais de massa. No

entanto, na prática comum da Engenharia, momento de inércia é a expressão mais comum e é usada tanto para áreas quanto para massas.

Os momentos de inércia, em relação aos eixos baricêntricos, tanto para o retângulo quanto para o triângulo são largamente conhecidos e tabelados em diversos livros de Resistência dos Materiais. Entretanto. Estamos particularmente interessados em calcular o momento de inércia das figuras (retângulo e triângulo) em relação ao centro geométrico da seção transversal, para isso, lança-me mão do *Teorema dos Eixos Paralelos*, ou conhecido como *Teorema de Steiner*.

$$I = \bar{I} + A \cdot d^2$$

Essa expressão mostra que o momento de inércia de uma superfície em relação a eixo qualquer dado é igual ao momento de inércia $\bar{I}$ da superfície em relação ao seu eixo baricêntrico, paralelo ao outro eixo dado, mais o produto da área A pelo quadrado da distância d entre os dois eixos.

10.5.1. Momento de inércia da seção de concreto

Voltando ao nosso problema, tomando a reta da poligonal genérica, podemos escrever expressões que nos forneçam o momento de inércia I_{xi} de um trapézio em relação ao centro geométrico da seção transversal.

$$I_{xc-1} = \frac{(x_{i+1} - x_i)y_i^3}{12} + (x_{i+1} - x_i)y_i \left(y_g - \frac{y_i}{2} \right)^2$$

$$I_{xc-2} = \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)^3}{36} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2} \left(y_g - \frac{2y_i + y_{i+1}}{3} \right)^2$$

$$I_{xi} = I_{x1} + I_{x2}$$

onde: $I_{x1} \rightarrow$ momento de inércia do retângulo em relação ao eixo horizontal que passa pelo c.g.;

$I_{x2} \rightarrow$ momento de inércia do triângulo em relação ao eixo horizontal que passa pelo c.g.;

$I_{xi} \rightarrow$ momento de inércia do trapézio em relação ao eixo horizontal que passa pelo c.g.;

$y_g \rightarrow$ ordenada do centro geométrico da seção transversal.

Somando algebricamente as nv parcelas

$$I_{xc} = \sum_1^{nv} I_{xi}$$

(Expressão 10.18)

onde: $I_x \rightarrow$ momento de inércia da seção em relação ao eixo horizontal que passa pelo centro geométrico.

Analogamente, pode-se escrever o momento de inércia em relação ao eixo y .

$$I_{y-1} = \frac{(y_i - y_{i+1})x_i^3}{12} + (y_i - y_{i+1})x_i \left(x_g - \frac{x_i}{2} \right)^2$$

$$I_{y-2} = \frac{(y_i - y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)^3}{36} + \frac{(y_i - y_{i+1})(x_{i+1} - x_i)}{2} \left(x_g - \frac{2x_i + x_{i+1}}{3} \right)^2$$

$$I_{yc}^i = I_{y-1} + I_{y-2}$$

onde: $I_{y-1} \rightarrow$ momento de inércia do retângulo em relação ao eixo vertical que passa pelo c.g.;

$I_{y-2} \rightarrow$ momento de inércia do triângulo em relação ao eixo vertical que passa pelo c.g.;

$I_{yc}^i \rightarrow$ momento de inércia do trapézio em relação ao eixo vertical que passa pelo c.g.;

$x_g \rightarrow$ coordenada do centro geométrico da seção transversal.

Somando algebricamente as nv parcelas

$$I_{yc} = \sum_1^{nv} I_{yi} \quad (\text{Expressão 10.19})$$

onde: $I_y \rightarrow$ momento de inércia da seção em relação ao eixo vertical que passa pelo centro geométrico.

Cabem algumas observações quanto ao cálculo da inércia. Até o item anterior, o sistema de referência Cxy podia ser qualquer, ou seja, quaisquer que fossem as coordenadas x_i, y_i dos vértices, o cálculo da área, dos momentos estáticos e do centro geométrico resultariam corretos.

A partir de agora, **é obrigatório que todos os vértices tenham coordenadas x_i, y_i maiores ou iguais a zero** ($x_i \geq 0$ e $y_i \geq 0$). Se por algum acaso, algum vértice possuir coordenada x_i ou y_i negativa, os cálculos retornarão valores errados, podendo em alguns casos retornar até valores negativos, o que é um absurdo.

É muito difícil se obter uma formulação em que os próprios sinais dos vértices retornassem valores corretos. Se as coordenadas fossem absolutamente livres, haveria problemas na aplicação do teorema dos eixos paralelos (Teorema de Steiner). Passaria a ser necessário analisar as posições dos vértices i e $i+1$ em cada caso, de tal modo que exigiria a criação de inúmeras condições (*If...*), o que tornaria o problema computacional desnecessariamente complicado.

10.5.2. Momento de inércia das barras de aço

Para determinar a inércia das barras de aço é necessário encontrar inicialmente o *diâmetro equivalente da barra* (d_{eq}). O diâmetro equivalente é um diâmetro fictício que produz uma área de aço majorada pela relação α_e . Esse diâmetro, na verdade, não é real, mas corresponde ao diâmetro que faz com que a área real da barra seja transformada numa área de concreto equivalente.

Figura 10.14

$$A_{eq} = \alpha_e \cdot A_b(i)$$

$$\frac{\pi \cdot d_{eq}(i)^2}{4} = \alpha_e \cdot A_b(i)$$

$$d_{eq}(i) = 2 \cdot \sqrt{\frac{\alpha_e \cdot A_b(i)}{\pi}} \quad (\text{Expressão 10.20})$$

Agora podemos aplicar a expressão dos eixos paralelos e calcular a inércia de cada barra no centro geométrico da seção transversal.

$$I_{xa}(i) = \frac{\pi \cdot d_{eq}(i)^4}{64} + \alpha_e \cdot A_b(i) \cdot [y_g - y_b(i)]^2 - \frac{\pi \cdot d_b(i)^4}{64} + \alpha_e \cdot A_b(i) \cdot [y_g - y_b(i)]^2$$

$$I_{xa}(i) = \frac{\pi}{64} \cdot [d_{eq}(i)^4 - d(i)^4] + A_b(i) \cdot [y_g - y_b(i)]^2 \cdot (\alpha_e - 1) \quad (\text{Expressão 10.21})$$

Analogamente, para a direção y temos:

$$I_{ya}(i) = \frac{\pi}{64} \cdot [d_{eq}(i)^4 - d(i)^4] + A_b(i) \cdot [x_g - x_b(i)]^2 \cdot (\alpha_e - 1) \quad (\text{Expressão 10.22})$$

Obviamente, o momento de inércia de todas as barras de aço pode ser obtido simplesmente pela somatória dos momentos de inércia de cada barra de aço.

$$I_{xa} = \sum_{i=1}^{Nb} I_{xa}(i)$$

e

$$I_{ya} = \sum_{i=1}^{Nb} I_{ya}(i)$$

(Expressão 10.23)

10.5.3. Momento de inércia da seção homogeneizada

O momento de inércia da seção homogeneizada fica caracterizado pela simples soma dos momentos de inércia já obtidos, de concreto e de aço.

$I_x = I_{xc} + I_{xa}$	e	$I_y = I_{yc} + I_{ya}$	(Expressão 10.24)
-------------------------	---	-------------------------	-------------------

10.6. Produto de inércia

Figura 10.15

A integral

$I_{xy} = \int xy dA$	(Expressão 10.25)
-----------------------	-------------------

obtida multiplicando-se cada elemento dA de uma superfície A por suas coordenadas x e y e integrando sobre a superfície é conhecida como *produto de inércia* da superfície A em relação aos eixos x e y . Ao contrário dos momentos de inércia I_x e I_y , o produto de inércia I_{xy} tanto pode ser positivo quanto negativo.

obtida multiplicando-se cada elemento dA de uma superfície A por suas coordenadas x e y e integrando sobre a superfície é conhecida como *produto de inércia* da superfície A em relação aos eixos x e y . Ao contrário dos momentos de inércia I_x e I_y , o produto de inércia I_{xy} tanto pode ser positivo quanto negativo.

Os produtos de inércia, em relação aos eixos baricêntricos, tanto para o retângulo quanto para o triângulo também são largamente conhecidos e tabelados em diversos livros de Resistência dos Materiais, entretanto, estamos interessados em calcular o produto de inércia das figuras em relação ao centro geométrico da seção transversal. Um teorema de eixos paralelos, semelhante àquele estabelecido anteriormente para momentos de inércia, pode ser provado para produto de inércia.

$$I_{xy} = \overline{I_{xy}} + A \cdot d_x \cdot d_y$$

Essa expressão mostra que o produto de inércia de uma superfície em relação a qualquer par de eixos dado é igual ao produto de inércia $\overline{I_{xy}}$ da superfície em relação aos seus eixos baricêntricos

mais o produto da área A pelas distâncias, nas duas direções, do ponto baricêntrico da superfície até o ponto que se deseja calcular o produto de inércia.

10.6.1. Produto de inércia do concreto

Para o nosso caso, tomando a reta da poligonal genérica, podemos escrever expressões que nos forneçam o produto de inércia I_{xyi} de um trapézio em relação ao seu centro geométrico.

$$I_{xy1} = (x_{i+1} - x_i) y_i \left(y_g - \frac{y_i}{2} \right) \left(x_g - \frac{x_i + x_{i+1}}{2} \right)$$

$$I_{xy2} = \frac{(y_{i+1} - y_i)^2 (x_{i+1} - x_i)^2}{72} + \frac{(x_{i+1} - x_i)(y_{i+1} - y_i)}{2} \left(y_g - \frac{2y_i + y_{i+1}}{3} \right) \left(x_g - \frac{x_i + 2x_{i+1}}{3} \right)$$

$$I_{xyi} = I_{xy1} + I_{xy2}$$

onde: $I_{xy1} \rightarrow$ produto de inércia do retângulo em relação ao centro geométrico da seção transversal;

$I_{xy2} \rightarrow$ produto de inércia do triângulo em relação ao centro geométrico da seção transversal;

$I_{xyi} \rightarrow$ produto de inércia do trapézio em relação ao centro geométrico da seção transversal.

Somando algebricamente as nv parcelas

$$I_{xy} = \sum_1^{nv} I_{xyi} \quad (\text{Expressão 10.26})$$

10.6.2. Produto de inércia das barras de aço

Ainda aplicando o conceito de diâmetro equivalente, agora podemos aplicar a expressão dos eixos paralelos e calcular o produto de inércia de cada barra no centro geométrico da seção transversal.

$$I_{xya}(i) = 0 + \alpha_e \cdot A_b(i) \cdot [x_g - x_b(i)] \cdot [y_g - y_b(i)] - \{ 0 + A_b(i) \cdot [x_g - x_b(i)] \cdot [y_g - y_b(i)] \}$$

$$I_{xya}(i) = A_b(i) \cdot [x_g - x_b(i)] \cdot [y_g - y_b(i)] \cdot (\alpha_e - 1) \quad (\text{Expressão 10.27})$$

Somando algebricamente as Nb parcelas

$$I_{xya} = \sum_1^{Nb} I_{xya}(i) \quad (\text{Expressão 10.28})$$

10.6.3. Produto de inércia da seção homogeneizada

O produto de inércia da seção homogeneizada fica caracterizado pela simples soma dos produtos de inércia já obtidos, de concreto e de aço.

$$I_{xy} = I_{xyc} + I_{xya}$$

(Expressão 10.29)

10.7. Translação do sistema

O sistema adotado Cxy inicialmente foi de grande utilidade para a obtenção de todas as propriedades geométricas até aqui descritas, mas, a partir do momento em que o centro geométrico foi obtido, seria muito útil criar um novo sistema de coordenadas Oxy cuja origem coincida com o próprio centro geométrico.

A translação e as coordenadas X,Y no novo sistema Oxy é obtida facilmente fazendo a diferença entre as coordenadas no sistema Cxy (x,y) e a coordenada do centro geométrico (x_g, y_g).

Figura 10.16

$$\begin{aligned} X_i &= x_i - x_g \\ Y_i &= y_i - y_g \end{aligned} \quad \text{(Expressão 10.30)}$$

Da mesma forma, as coordenadas x_{si}, y_{si} das barras de aço que originalmente pertencem ao sistema Cxy são transladadas para o novo sistema Oxy .

$$\begin{aligned} X_{si} &= x_{si} - x_g \\ Y_{si} &= y_{si} - y_g \end{aligned} \quad \text{(Expressão 10.31)}$$

10.8. Eixos centrais de inércia e suas direções

O tratamento de tensões e as expressões deduzidas para a flexão composta oblíqua, dadas nos correntes cursos de Resistência dos Materiais, têm como hipótese que estamos tratando com um par de eixos que sejam os *eixos centrais de inércia*. Se assim não o for, as fórmulas deduzidas e apresentadas nos cursos não seriam mais válidas, pois não seria possível desacoplar o comportamento das duas direções.

Como estamos tratando de uma seção qualquer, nem sempre o sistema Oxy adotado representará os eixos centrais de inércia, conseqüentemente, os valores de I_x e I_y não

necessariamente serão os momentos centrais de inércia. De qualquer modo, designando como I_1 e I_2 os momentos centrais de inércia, esses valores podem ser facilmente calculados por

$$I_{1,2} = \frac{I_x + I_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{I_x - I_y}{2}\right)^2 + I_{xy}^2} \quad (\text{Expressão 10.32})$$

Lembrando que para a obtenção do máximo momento central de inércia deve se utilizar o sinal positivo da expressão e, o sinal negativo, se o intuito for determinar o mínimo momento central de inércia. Vale ainda lembrar que $I_x + I_y = I_1 + I_2$.

Figura 10.17

A orientação desse par de eixos, tal que resulte nos momentos centrais de inércia, fica orientada por dois ângulos, θ_1 e θ_2 . O ângulo θ_1 é o ângulo, medido no sentido anti-horário, entre o eixo x e o eixo 1, tal que fornece o momento de inércia central máximo I_1 . Analogamente, o ângulo θ_2 é o ângulo entre o eixo x e o eixo 2, que fornece o momento de inércia central mínimo I_2 , ângulo esse também medido no sentido anti-horário.

A expressão que fornece os valores dos ângulos das direções principais é a descrita abaixo:

$$\tan 2\theta_p = -\frac{2 \cdot I_{xy}}{I_x - I_y} \quad (\text{Expressão 10.33})$$

A expressão acima, apesar de fornecer os dois ângulos procurados (θ_p' e θ_p''), não indica quem é θ_1 ou θ_2 . Para distinguir exatamente θ_1 e θ_2 , precisamos lançar mão de expressões que calculem o momento de inércia num par de eixos qualquer u, v .

Figura 10.18

$$I_u = \frac{I_x + I_y}{2} + \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2\theta) - I_{xy} \cdot \sin(2\theta) \quad (\text{Expressão 10.34})$$

$$I_v = \frac{I_x + I_y}{2} - \frac{I_x - I_y}{2} \cdot \cos(2\theta) + I_{xy} \cdot \sin(2\theta) \quad (\text{Expressão 10.35})$$

As expressões 5.19 e 5.20 foram estabelecidas para o ângulo θ formado entre o eixo x e u . Desse modo, basta fazer uma simples substituição de qualquer valor θ_p na expressão de I_u , se o valor de I_u encontrado for idêntico ao valor de I_1 , o ângulo em estudo é θ_1 , caso contrário, o valor encontrado de I_u será idêntico a I_2 , indicando que o ângulo é θ_2 .

10.9. Raio de giração

O raio de giração será uma propriedade muito importante no capítulo seguinte, quando o cálculo da esbeltez do pilar for necessário.

Os raios de giração, das duas direções principais, são obtidos facilmente pela expressão 5.21.

$$\boxed{r_1 = \sqrt{\frac{I_1}{A_c}}} \quad \boxed{r_2 = \sqrt{\frac{I_2}{A_c}}} \quad (\text{Expressão 10.36})$$

10.10. Numeração dos vértices

Se o leitor ainda não percebeu, cabe aqui uma observação muito importante para que se determinem as propriedades geométricas corretamente. A numeração começa num vértice qualquer e deve ser feita no sentido horário para a poligonal externa. Se houver um ou mais vazios, a numeração das poligonais internas deve ser feita no sentido anti-horário, em seqüência. Dessa maneira, consegue-se sempre uma só poligonal, e a área A_c será positiva, pois as áreas dos vazios resultarão em valores negativos, sendo automaticamente descontados.

Número de Vértices $nv = 18$

Figura 10.19

10.11. Software e procedimento para cálculo das propriedades geométricas

É uma aplicação das expressões deduzidas nesse capítulo e ferramenta essencial para o software final de cálculo. Parte-se da idéia de que todas as coordenadas $x(i)$ e $y(i)$ já são conhecidas.

Uma tela do software, com um exemplo de cálculo das propriedades geométricas pode ser visto na figura 5.13.

Figura 10.20

Capítulo 11

Exemplo Numérico – O software de cálculo

11.1. Dados de entrada

Um software foi elaborado para resolver toda a questão e fazer a referida comparação. Nos itens seguintes, um exemplo numérico é apresentado e os resultados mostrados de modo a fazer o leitor entender a comparação.

Tipo de pilar: **Bi-Articulado** Concreto: **Classe C30**
 Norma de cálculo: **NBR6118**

A seção transversal é definida abaixo, na figura 11.1, mostrando a própria tela do software criado.

The screenshot shows the 'Seção Transversal' software interface. It includes input fields for dimensions (B, H, b, hf) and reinforcement (Armadura, Camada, Quantidade, Tipo de Aço, Barra). A diagram of an L-shaped section is displayed with dimensions w, h, B, and H. Below the input fields are two tables: one for reinforcement layers (CAM) and one for reinforcement bars (BARRA).

CAMADA	Qtde.	↑	Tipo Aço	Arranjo	x inicial	y inicial	x final	y final
CAM2	6	16,0mm	CA-50	Horizontal	5	15	55	15
CAM3	2	16,0mm	CA-50	Horizontal	5	25	15	25
CAM4	2	16,0mm	CA-50	Horizontal	5	40	15	40
CAM5	2	16,0mm	CA-50	Horizontal	5	55	15	55
CAM1	6	16,0mm	CA-50	Horizontal	5	5	55	5

Vértice	X(i)	Y(i)
V4	20	20
V5	60	20
V6	60	0
V7	0	0

BARRA	DIAMETRO	AB	ACO	XB	YB
B15	1,6	2,001	CA-50	25	5
B16	1,6	2,001	CA-50	35	5
B17	1,6	2,001	CA-50	45	5
B18	1,6	2,001	CA-50	55	5

Figura 11.1 – Dados de entrada da seção transversal escolhida

Propriedades Geométricas

Posição do Centro Geométrico: $X_g = 22$ cm $Y_g = 22$ cm

Área = 2000 cm²

Momento de inércia em relação ao eixo x (I_{xx}) = 578666,67 cm⁴

Momento de inércia em relação ao eixo y (I_{yy}) = 578666,67 cm⁴

Produto de inércia (I_{xy}) = -288000 cm⁴

Momento central principal de inércia (I_1) = 866666,67

Momento central principal de inércia (I_2) = 290666,67

Raio de giração (r_1) = 20,82

Raio de giração (r_2) = 12,06

Direção principal (Teta1) = 45

Direção principal (Teta2) = 135

[Voltar](#)

Figura 11.2 – Propriedades geométricas da seção transversal escolhida

Comprimento do pilar: **$L = 9$ m**

Força Normal solicitante de cálculo: **$N_{sd} = 2.000$ KN**

Momento da direção 1 na base do pilar: **$M_{s1d}^B = 250$ KN · m**

Momento da direção 1 no topo do pilar: **$M_{s1d}^T = 50$ KN · m**

Momento da direção 2 na base do pilar: **$M_{s2d}^B = 50$ KN · m**

Momento da direção 2 no topo do pilar: **$M_{s2d}^T = 150$ KN · m**

11.2. Geração do Estado Limite Último

Para a determinação do ELU, o software gira a linha neutra (α) de 0° a 360° , procurando, para cada inclinação, a deformação no centro geométrico (ϵ_o) e a curvatura (ρ) que retornem a força normal solicitante fornecida (N_{sd}) no estado limite último. O gráfico pode ser visualizado abaixo. Vale lembrar que para a determinação desse diagrama a tensão máxima no concreto é tomada como $0,85f_{cd}$.

Figura 11.3 – Fronteira de ELU para a seção escolhida

Tabela ELU - $N_{rd} = 2000 \text{ kN}$				
M_{1Rd} ($\text{KN} \cdot \text{m}$)	M_{2Rd} ($\text{KN} \cdot \text{m}$)	Inclinação da L.N α ($^\circ$)	Curvatura ρ ($\cdot 10^3 \text{ cm}^{-1}$)	Deformação do C.G ϵ_o (%)
-386,908	110,2686	0	0,071823	-0,7707229
-406,727	91,60008	5	0,068625	-0,7705706
-423,494	74,83028	10	0,066326	-0,7645073
-437,474	60,25944	15	0,064825	-0,751469
-449,077	47,8989	20	0,064049	-0,7309838
-459,602	36,32574	25	0,063894	-0,7054354
-469,687	24,83251	30	0,064306	-0,6763969
-479,61	13,27524	35	0,065262	-0,6450298
-489,576	1,492961	40	0,066778	-0,6117959
-499,761	-10,6998	45	0,068901	-0,5767605

-510,325	-23,5092	50	0,071712	-0,5398171
-518,961	-35,6977	55	0,075484	-0,4944239
-527,341	-48,217	60	0,080333	-0,4431141
-533,82	-59,5107	65	0,086709	-0,3786086
-537,226	-72,1992	70	0,094987	-0,3018012
-536,722	-86,1418	75	0,105865	-0,2091478
-532,709	-102,469	80	0,120005	-0,1081208
-524,125	-121,788	85	0,138044	-0,0173991
-508,095	-142,618	90	0,161215	0,0467369
-466,327	-168,273	95	0,144141	-0,0645764
-416,562	-193,965	100	0,129859	-0,1904096
-363,136	-216,321	105	0,118838	-0,2979872
-303,727	-234,227	110	0,110819	-0,3751744
-243,201	-248,569	115	0,104688	-0,4393166
-179,387	-259,085	120	0,100369	-0,4836642
-115,049	-265,288	125	0,097587	-0,5099408
-55,1882	-268,717	130	0,096061	-0,522665
1,043926	-269,374	135	0,095743	-0,5211758
56,60111	-267,965	140	0,096635	-0,5048611
114,5107	-263,816	145	0,098749	-0,4743211
175,1633	-256,69	150	0,102276	-0,4263408
234,2145	-245,128	155	0,107571	-0,3550196
286,9055	-229,171	160	0,115182	-0,2521298
341,8519	-210,499	165	0,12513	-0,1284453
397,0044	-187,869	170	0,138254	0,0235466
441,8251	-160,795	175	0,157199	0,2466269
480,5373	-131,604	180	0,180773	0,4769958
505,1596	-103,424	185	0,154387	0,3949044
522,3857	-76,7574	190	0,132999	0,2591242
533,1625	-56,177	195	0,116424	0,1191103
539,6267	-39,8442	200	0,10379	-0,0053818
541,8988	-25,3184	205	0,094269	-0,1064945
539,9322	-13,6103	210	0,086848	-0,1952025
536,7522	-3,9497	215	0,080977	-0,2757126
531,9576	6,138591	220	0,076467	-0,343515
525,6299	16,95435	225	0,073055	-0,4005586
518,0163	27,82528	230	0,070518	-0,4500204
509,1859	38,8342	235	0,068736	-0,4930492
500,0244	48,88483	240	0,067537	-0,5345264
490,8293	58,35876	245	0,066925	-0,5728708
481,4436	67,6133	250	0,066896	-0,6079127
471,4426	77,18282	255	0,067477	-0,6390221
459,6622	88,37296	260	0,068777	-0,6634311
444,5147	102,628	265	0,070944	-0,6783412
425,8472	119,4979	270	0,07407	-0,6853559
399,8941	137,9134	275	0,075037	-0,6725157
370,4265	157,516	280	0,076779	-0,6533717
336,4489	178,1072	285	0,079342	-0,6288085
295,9281	199,4655	290	0,082789	-0,6003672
249,4258	221,5801	295	0,087335	-0,5660176
197,6258	243,5639	300	0,093097	-0,529366
140,7368	264,3057	305	0,100201	-0,4958971
80,76475	281,522	310	0,108838	-0,4716716
18,62196	290,7421	315	0,119059	-0,4692536
-44,2084	279,4849	320	0,108059	-0,4933626
-102,644	260,2976	325	0,09901	-0,5316207
-157,325	238,4709	330	0,091629	-0,5762214
-207,402	215,997	335	0,085715	-0,6204456
-252,748	193,4308	340	0,08104	-0,6616482
-292,758	171,4156	345	0,077449	-0,6973186
-327,882	150,2116	350	0,074791	-0,7270914
-359,045	129,817	355	0,072941	-0,7515011
-386,908	110,2686	360	0,071823	-0,7707229

11.3. Geração da fronteira para análise de estabilidade

Para a determinação da fronteira para a análise de estabilidade, o software gira a linha neutra (α) de 0° a 360°, procurando, para cada inclinação, a deformação no centro geométrico (ϵ_o) e a curvatura (ρ) que retornem a força normal solicitante fornecida N_{Sd}/γ_{f3} para um estado limite último, mas a tensão máxima no concreto é tomada como $1,10f_{cd}$.

Figura 11.4 – Fronteira para a análise de estabilidade

Tabela ELU - $N_{rd} = 1818,18$ KN				
M_{1Rd} (KN · m)	M_{2Rd} (KN · m)	Inclinação da L.N α (°)	Curvatura ρ ($\cdot 10^3$ cm ⁻¹)	Deformação do C.G ϵ_o (%)
-508,1306	141,223	0	0,080664	-0,4347697
-526,3582	126,1688	5	0,077439	-0,4200224
-540,119	115,3708	10	0,075346	-0,3925045
-552,7316	105,4104	15	0,074027	-0,3613125
-564,951	95,4501	20	0,073355	-0,3286716
-577,0275	85,20015	25	0,073287	-0,2946332
-589,1471	74,40997	30	0,073817	-0,2587761
-599,0467	64,05486	35	0,075087	-0,2152269
-608,8427	52,78832	40	0,077053	-0,1673885
-617,1101	41,15025	45	0,079891	-0,1105079
-621,9431	30,77436	50	0,083881	-0,0374741

-626,7039	18,8133	55	0,088981	0,0429618
-628,0278	6,524054	60	0,09566	0,1401131
-625,8749	-9,203543	65	0,104179	0,2502517
-621,258	-28,77452	70	0,115065	0,374225
-610,9384	-52,42869	75	0,129436	0,5235957
-594,7633	-83,21605	80	0,148089	0,6856521
-570,1502	-122,9801	85	0,172638	0,8553416
-538,9506	-161,7007	90	0,205152	1,0133415
-488,7887	-197,7596	95	0,175988	0,6944569
-433,9604	-230,4128	100	0,153887	0,4219582
-370,8767	-257,9464	105	0,138514	0,2321614
-310,1931	-281,2496	110	0,126962	0,0800446
-245,8432	-299,808	115	0,118744	-0,0283631
-182,7489	-313,0276	120	0,113024	-0,1033351
-120,927	-320,8209	125	0,109482	-0,1454803
-63,78724	-325,2134	130	0,107578	-0,1657094
-6,32214	-325,2012	135	0,107238	-0,1635433
50,09054	-323,3721	140	0,108237	-0,1452697
104,4816	-317,341	145	0,110857	-0,1033505
159,6972	-307,5777	150	0,11529	-0,0352355
215,7243	-292,9056	155	0,122058	0,0685352
276,4897	-274,4508	160	0,131366	0,2042202
334,3931	-250,625	165	0,144682	0,3983626
388,8481	-222,2218	170	0,163548	0,6682012
446,6524	-188,5883	175	0,189607	1,0190396
503,3262	-149,9788	180	0,224512	1,4392746
536,2081	-107,3095	185	0,186739	1,2110949
563,3682	-62,77694	190	0,159639	1,0121073
582,5462	-25,87536	195	0,139509	0,8366916
595,3301	2,82005	200	0,124093	0,6782204
603,7798	25,00548	205	0,112146	0,5370513
609,3731	42,33154	210	0,102803	0,4119297
613,0757	56,06115	215	0,095459	0,3009101
612,2907	67,36424	220	0,089797	0,2067221
610,6586	76,47923	225	0,085395	0,1229836
608,689	84,05738	230	0,082022	0,0475336
603,2777	92,32483	235	0,079731	-0,0120347
596,0972	101,2388	240	0,078284	-0,0626404
589,0057	109,4883	245	0,07749	-0,110817
580,1606	118,1042	250	0,077409	-0,1534017
569,8527	127,0774	255	0,07802	-0,1920222
558,8185	135,6013	260	0,079234	-0,2321711
547,2924	144,2017	265	0,081148	-0,2724958
533,6786	154,605	270	0,084025	-0,3070572
508,3875	169,9863	275	0,084483	-0,3165994
476,173	189,1199	280	0,08599	-0,311882
436,7944	210,9697	285	0,088534	-0,2961872
389,888	234,97	290	0,092222	-0,2700046
333,8973	260,7141	295	0,097226	-0,2337612
267,5946	286,247	300	0,103965	-0,1825775
191,2124	310,3129	305	0,112718	-0,1206342
102,5264	331,1992	310	0,123493	-0,0639092
12,13386	342,1	315	0,136705	-0,0200632
-77,75738	329,871	320	0,122591	-0,0890181
-163,8504	307,7989	325	0,11132	-0,1625551
-237,3475	283,1632	330	0,102244	-0,237503
-302,0183	255,8792	335	0,095315	-0,2979308
-356,9996	229,2071	340	0,090067	-0,3454808
-403,8444	204,1655	345	0,086146	-0,3825789
-444,0537	180,9266	350	0,083343	-0,4100318
-478,6309	159,7628	355	0,081531	-0,4278197
-508,1306	141,223	360	0,080664	-0,4347697

Para um efeito comparativo, os dois diagramas anteriores foram colocados no mesmo gráfico.

Figura 11.5 – Visualização simultânea da fronteira de ELU e de estabilidade

11.4. Geração da malha de pontos

Para a determinação da malha de pontos, o software utiliza cada inclinação da linha neutra (α) de 0° a 360° , tomando como limite máximo o ponto da fronteira da análise de estabilidade. A curvatura do ponto máximo é dividida em 20 parcelas iguais e para cada ponto procura-se a deformação do centro geométrico (ε_o) que retorne o valor de N_{sd}/γ_{f3} .

Figura 11.6 – Malha de pontos para a análise de estabilidade

Tabela 1 – $\alpha = 0^\circ$				Tabela 2 – $\alpha = 5^\circ$				Tabela 3 – $\alpha = 10^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 %	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 %	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 %
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-49,34	17,32	0,0040	-0,3628	-51,70	14,84	0,0039	-0,3629	-54,17	12,59	0,0038	-0,3629
-103,48	35,25	0,0081	-0,3678	-108,31	30,22	0,0077	-0,3678	-113,34	25,66	0,0075	-0,3680
-155,77	52,42	0,0121	-0,3751	-163,17	44,80	0,0116	-0,3752	-170,84	37,87	0,0113	-0,3755
-206,00	68,78	0,0161	-0,3850	-216,05	58,53	0,0155	-0,3851	-226,20	49,24	0,0151	-0,3854
-252,55	83,57	0,0202	-0,3955	-263,96	71,66	0,0194	-0,3952	-274,72	60,57	0,0188	-0,3943
-291,27	94,98	0,0242	-0,4007	-303,56	82,70	0,0232	-0,4007	-314,86	71,08	0,0226	-0,3992
-324,02	104,08	0,0282	-0,4018	-336,95	91,48	0,0271	-0,4018	-348,58	79,76	0,0264	-0,3997
-352,28	111,59	0,0323	-0,4003	-365,69	98,75	0,0310	-0,4001	-377,45	87,02	0,0301	-0,3971
-376,93	117,91	0,0363	-0,3974	-390,72	104,88	0,0348	-0,3967	-402,48	93,24	0,0339	-0,3924
-398,56	123,26	0,0403	-0,3939	-412,67	110,09	0,0387	-0,3923	-424,36	98,62	0,0377	-0,3865
-417,55	127,76	0,0444	-0,3905	-431,96	114,49	0,0426	-0,3880	-443,54	103,28	0,0414	-0,3802
-434,42	131,60	0,0484	-0,3877	-449,06	118,22	0,0465	-0,3840	-460,48	107,32	0,0452	-0,3739
-448,50	134,43	0,0524	-0,3873	-463,99	121,31	0,0503	-0,3812	-475,31	110,70	0,0490	-0,3687
-459,06	135,83	0,0565	-0,3912	-474,97	122,52	0,0542	-0,3838	-486,90	112,46	0,0527	-0,3679
-468,68	137,00	0,0605	-0,3963	-484,96	123,45	0,0581	-0,3875	-497,07	113,44	0,0565	-0,3693
-477,56	138,02	0,0645	-0,4023	-494,22	124,21	0,0620	-0,3922	-506,56	114,15	0,0603	-0,3719
-485,86	138,92	0,0686	-0,4092	-502,89	124,83	0,0658	-0,3979	-515,53	114,67	0,0640	-0,3756
-493,66	139,74	0,0726	-0,4169	-511,08	125,35	0,0697	-0,4044	-524,06	115,02	0,0678	-0,3802
-501,07	140,50	0,0766	-0,4255	-518,88	125,79	0,0736	-0,4118	-532,24	115,25	0,0716	-0,3859
-508,13	141,22	0,0807	-0,4348	-526,36	126,17	0,0774	-0,4200	-540,12	115,37	0,0753	-0,3925

Tabela 4 – $\alpha = 15^\circ$				Tabela 5 – $\alpha = 20^\circ$				Tabela 6 – $\alpha = 25^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-56,63	10,46	0,0037	-0,3630	-59,07	8,39	0,0037	-0,3630	-61,53	6,35	0,0037	-0,3631
-118,35	21,34	0,0074	-0,3681	-123,34	17,14	0,0073	-0,3684	-128,36	13,00	0,0073	-0,3687
-178,49	31,30	0,0111	-0,3759	-186,09	24,93	0,0110	-0,3764	-193,74	18,63	0,0110	-0,3770
-235,73	40,59	0,0148	-0,3855	-244,58	32,39	0,0147	-0,3855	-252,79	24,54	0,0147	-0,3850
-284,45	50,35	0,0185	-0,3929	-293,11	40,86	0,0183	-0,3909	-300,71	32,05	0,0183	-0,3882
-324,68	59,99	0,0222	-0,3962	-332,93	49,78	0,0220	-0,3919	-339,59	40,66	0,0220	-0,3862
-358,35	68,74	0,0259	-0,3955	-366,06	58,58	0,0257	-0,3888	-371,73	49,66	0,0257	-0,3797
-386,97	76,34	0,0296	-0,3912	-394,00	66,87	0,0293	-0,3820	-399,24	58,17	0,0293	-0,3701
-411,58	83,04	0,0333	-0,3844	-418,14	74,20	0,0330	-0,3726	-423,41	65,70	0,0330	-0,3584
-432,99	89,01	0,0370	-0,3760	-439,47	80,49	0,0367	-0,3618	-445,04	72,07	0,0366	-0,3454
-451,88	94,15	0,0407	-0,3670	-458,59	85,77	0,0403	-0,3505	-464,62	77,32	0,0403	-0,3323
-468,79	98,49	0,0444	-0,3582	-475,91	90,11	0,0440	-0,3397	-482,51	81,57	0,0440	-0,3195
-483,93	101,99	0,0481	-0,3505	-491,67	93,58	0,0477	-0,3299	-499,01	84,95	0,0476	-0,3078
-496,45	104,15	0,0518	-0,3464	-504,94	95,73	0,0513	-0,3236	-512,90	86,88	0,0513	-0,2998
-507,10	104,96	0,0555	-0,3459	-516,51	96,61	0,0550	-0,3206	-525,67	88,02	0,0550	-0,2938
-517,10	105,44	0,0592	-0,3467	-527,09	96,82	0,0587	-0,3197	-536,87	87,94	0,0586	-0,2914
-526,57	105,68	0,0629	-0,3487	-537,14	96,76	0,0624	-0,3202	-547,52	87,56	0,0623	-0,2903
-535,63	105,73	0,0666	-0,3518	-546,76	96,48	0,0660	-0,3219	-557,72	86,95	0,0660	-0,2905
-544,33	105,63	0,0703	-0,3561	-556,01	96,03	0,0697	-0,3247	-567,54	86,14	0,0696	-0,2920
-552,73	105,41	0,0740	-0,3613	-564,95	95,45	0,0734	-0,3287	-577,03	85,20	0,0733	-0,2946

Tabela 7 – $\alpha = 30^\circ$				Tabela 8 – $\alpha = 35^\circ$				Tabela 9 – $\alpha = 40^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-64,05	4,31	0,0037	-0,3632	-66,77	2,22	0,0038	-0,3633	-69,68	0,04	0,0039	-0,3635
-133,50	8,84	0,0074	-0,3690	-139,07	4,59	0,0075	-0,3694	-145,02	0,16	0,0077	-0,3699
-201,38	12,36	0,0111	-0,3776	-209,28	6,07	0,0113	-0,3781	-217,15	-0,29	0,0116	-0,3784
-260,39	16,98	0,0148	-0,3841	-267,67	9,78	0,0150	-0,3825	-274,19	3,00	0,0154	-0,3800
-307,20	23,99	0,0185	-0,3844	-312,84	16,79	0,0188	-0,3793	-317,74	10,04	0,0193	-0,3727
-344,74	32,64	0,0221	-0,3788	-349,33	25,27	0,0225	-0,3700	-353,52	18,08	0,0231	-0,3599
-376,22	41,49	0,0258	-0,3690	-380,45	33,69	0,0263	-0,3569	-384,49	25,88	0,0270	-0,3435
-403,61	49,75	0,0295	-0,3565	-407,92	41,45	0,0300	-0,3414	-412,15	32,96	0,0308	-0,3250
-428,03	57,07	0,0332	-0,3423	-432,69	48,29	0,0338	-0,3246	-437,34	39,17	0,0347	-0,3056
-450,13	63,31	0,0369	-0,3273	-455,32	54,14	0,0375	-0,3074	-460,54	44,44	0,0385	-0,2859
-470,30	68,45	0,0406	-0,3123	-476,15	58,98	0,0413	-0,2904	-482,03	48,79	0,0424	-0,2666
-488,85	72,55	0,0443	-0,2979	-495,41	62,85	0,0451	-0,2741	-502,03	52,23	0,0462	-0,2483
-506,08	75,78	0,0480	-0,2843	-513,38	65,85	0,0488	-0,2588	-520,77	54,88	0,0501	-0,2310
-520,73	77,52	0,0517	-0,2745	-528,88	67,39	0,0526	-0,2472	-537,17	56,15	0,0539	-0,2172
-534,45	78,66	0,0554	-0,2663	-543,29	68,24	0,0563	-0,2373	-552,33	56,66	0,0578	-0,2056
-546,61	78,57	0,0591	-0,2615	-556,75	68,40	0,0601	-0,2294	-566,75	56,69	0,0616	-0,1954
-557,89	77,86	0,0627	-0,2588	-568,69	67,34	0,0638	-0,2251	-579,85	55,67	0,0655	-0,1883
-568,69	76,90	0,0664	-0,2575	-580,14	66,01	0,0676	-0,2222	-590,06	54,85	0,0693	-0,1804
-579,09	75,73	0,0701	-0,2576	-590,32	64,85	0,0713	-0,2192	-599,62	53,92	0,0732	-0,1733
-589,15	74,41	0,0738	-0,2588	-599,05	64,05	0,0751	-0,2152	-608,84	52,79	0,0771	-0,1674

Tabela 10 – $\alpha = 45^\circ$				Tabela 11 – $\alpha = 50^\circ$				Tabela 12 – $\alpha = 55^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-72,91	-2,28	0,0040	-0,3636	-76,70	-4,81	0,0042	-0,3638	-80,91	-7,62	0,0044	-0,3641
-151,63	-4,56	0,0080	-0,3705	-159,37	-9,72	0,0084	-0,3713	-167,97	-15,46	0,0089	-0,3722
-225,12	-6,74	0,0120	-0,3782	-233,31	-13,17	0,0126	-0,3774	-240,87	-19,45	0,0133	-0,3753
-280,18	-3,34	0,0160	-0,3761	-286,22	-9,51	0,0168	-0,3707	-291,93	-15,86	0,0178	-0,3637
-322,48	3,45	0,0200	-0,3648	-327,56	-3,22	0,0210	-0,3552	-332,59	-10,34	0,0222	-0,3439
-357,79	10,84	0,0240	-0,3483	-362,63	3,35	0,0252	-0,3348	-367,58	-4,80	0,0267	-0,3194
-388,76	17,85	0,0280	-0,3285	-393,75	9,43	0,0294	-0,3115	-398,99	0,19	0,0311	-0,2924
-416,71	24,13	0,0320	-0,3070	-422,12	14,77	0,0336	-0,2867	-427,85	4,44	0,0356	-0,2642
-442,39	29,57	0,0360	-0,2848	-448,37	19,30	0,0377	-0,2614	-454,75	7,92	0,0400	-0,2356
-466,20	34,13	0,0399	-0,2624	-472,86	23,01	0,0419	-0,2362	-479,97	10,64	0,0445	-0,2074
-488,39	37,82	0,0439	-0,2407	-495,80	25,91	0,0461	-0,2118	-503,71	12,60	0,0489	-0,1800
-509,15	40,69	0,0479	-0,2200	-517,36	28,04	0,0503	-0,1885	-526,12	13,86	0,0534	-0,1539
-528,68	42,80	0,0519	-0,2005	-537,72	29,47	0,0545	-0,1665	-547,36	14,48	0,0578	-0,1292
-545,99	43,65	0,0559	-0,1844	-555,93	29,70	0,0587	-0,1479	-564,62	14,78	0,0623	-0,1053
-561,94	43,69	0,0599	-0,1706	-571,48	29,68	0,0629	-0,1300	-579,32	14,80	0,0667	-0,0823
-576,63	43,48	0,0639	-0,1576	-584,79	29,87	0,0671	-0,1114	-592,24	15,24	0,0712	-0,0587
-588,72	43,78	0,0679	-0,1431	-597,52	29,69	0,0713	-0,0942	-602,70	16,43	0,0756	-0,0329
-599,35	42,80	0,0719	-0,1322	-608,18	30,19	0,0755	-0,0757	-611,43	17,77	0,0801	-0,0057
-609,49	41,50	0,0759	-0,1227	-615,34	30,64	0,0797	-0,0557	-619,84	18,87	0,0845	0,0208
-617,11	41,15	0,0799	-0,1105	-621,94	30,77	0,0839	-0,0375	-626,70	18,81	0,0890	0,0430

Tabela 13 – $\alpha = 60^\circ$				Tabela 14 – $\alpha = 65^\circ$				Tabela 15 – $\alpha = 70^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-85,86	-10,85	0,0048	-0,3644	-91,58	-14,61	0,0052	-0,3648	-98,26	-19,11	0,0058	-0,3654
-177,74	-21,92	0,0096	-0,3732	-188,03	-29,05	0,0104	-0,3738	-198,04	-36,50	0,0115	-0,3732
-248,32	-25,79	0,0143	-0,3716	-255,51	-32,49	0,0156	-0,3662	-262,51	-39,94	0,0173	-0,3586
-297,87	-22,64	0,0191	-0,3549	-303,86	-30,23	0,0208	-0,3437	-309,93	-39,06	0,0230	-0,3298
-338,09	-18,17	0,0239	-0,3302	-343,85	-27,13	0,0260	-0,3139	-349,90	-37,72	0,0288	-0,2942
-373,19	-13,87	0,0287	-0,3014	-379,23	-24,34	0,0313	-0,2803	-385,73	-36,79	0,0345	-0,2554
-405,02	-10,17	0,0335	-0,2703	-411,63	-22,17	0,0365	-0,2448	-418,84	-36,45	0,0403	-0,2152
-434,52	-7,19	0,0383	-0,2383	-441,87	-20,68	0,0417	-0,2087	-449,94	-36,73	0,0460	-0,1746
-462,16	-4,93	0,0430	-0,2062	-470,36	-19,85	0,0469	-0,1727	-479,38	-37,59	0,0518	-0,1344
-488,21	-3,38	0,0478	-0,1746	-497,32	-19,66	0,0521	-0,1375	-507,35	-39,01	0,0575	-0,0953
-512,83	-2,51	0,0526	-0,1440	-522,89	-20,09	0,0573	-0,1035	-530,42	-39,67	0,0633	-0,0537
-536,14	-2,29	0,0574	-0,1149	-544,14	-19,92	0,0625	-0,0675	-548,26	-38,35	0,0690	-0,0080
-555,79	-1,64	0,0622	-0,0842	-561,73	-18,70	0,0677	-0,0292	-564,79	-37,26	0,0748	0,0372
-572,30	-1,38	0,0670	-0,0547	-576,56	-17,51	0,0729	0,0083	-577,37	-36,09	0,0805	0,0845
-585,23	-0,25	0,0717	-0,0241	-587,68	-16,37	0,0781	0,0473	-586,99	-34,74	0,0863	0,1323
-596,00	1,00	0,0765	0,0081	-598,01	-15,46	0,0833	0,0857	-595,53	-33,25	0,0921	0,1806
-605,51	2,19	0,0813	0,0407	-606,04	-13,62	0,0886	0,1273	-603,68	-31,96	0,0978	0,2281
-614,41	3,26	0,0861	0,0729	-613,73	-11,98	0,0938	0,1682	-610,66	-30,75	0,1036	0,2769
-621,59	5,08	0,0909	0,1077	-620,94	-10,49	0,0990	0,2089	-616,28	-29,62	0,1093	0,3267
-628,03	6,52	0,0957	0,1401	-625,87	-9,20	0,1042	0,2503	-621,26	-28,77	0,1151	0,3742

Tabela 16 – $\alpha = 75^\circ$				Tabela 17 – $\alpha = 80^\circ$				Tabela 18 – $\alpha = 85^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-106,46	-24,68	0,0065	-0,3661	-116,23	-31,67	0,0074	-0,3671	-127,95	-40,63	0,0086	-0,3684
-207,92	-44,42	0,0129	-0,3707	-217,10	-53,27	0,0148	-0,3658	-225,42	-63,74	0,0173	-0,3577
-269,75	-48,64	0,0194	-0,3480	-276,65	-59,27	0,0222	-0,3338	-282,98	-72,81	0,0259	-0,3153
-316,55	-49,72	0,0259	-0,3119	-323,07	-63,10	0,0296	-0,2898	-329,18	-80,41	0,0345	-0,2623
-356,75	-50,65	0,0324	-0,2700	-363,68	-66,96	0,0370	-0,2406	-370,31	-88,05	0,0432	-0,2055
-393,23	-52,02	0,0388	-0,2253	-400,97	-71,21	0,0444	-0,1895	-408,49	-95,92	0,0518	-0,1476
-427,24	-53,93	0,0453	-0,1796	-436,00	-75,87	0,0518	-0,1381	-444,60	-103,96	0,0604	-0,0903
-459,37	-56,35	0,0518	-0,1341	-469,26	-80,89	0,0592	-0,0874	-470,99	-108,70	0,0691	-0,0260
-489,92	-59,25	0,0582	-0,0894	-494,31	-83,42	0,0666	-0,0307	-492,38	-111,87	0,0777	0,0411
-513,93	-60,54	0,0647	-0,0404	-514,63	-84,44	0,0740	0,0289	-509,51	-114,33	0,0863	0,1106
-532,97	-60,10	0,0712	0,0121	-532,27	-85,41	0,0814	0,0891	-520,99	-115,29	0,0950	0,1854
-550,09	-59,80	0,0777	0,0646	-544,29	-84,89	0,0889	0,1554	-531,70	-116,29	0,1036	0,2587
-563,08	-58,77	0,0841	0,1211	-555,15	-84,29	0,0963	0,2215	-541,82	-117,26	0,1122	0,3306
-573,62	-57,13	0,0906	0,1796	-565,47	-83,82	0,1037	0,2866	-550,52	-118,19	0,1208	0,4031
-582,56	-56,29	0,0971	0,2350	-574,13	-83,86	0,1111	0,3497	-555,50	-118,74	0,1295	0,4819
-591,09	-55,60	0,1035	0,2895	-580,21	-84,06	0,1185	0,4152	-559,10	-119,63	0,1381	0,5590
-597,59	-54,92	0,1100	0,3470	-584,44	-83,74	0,1259	0,4848	-562,44	-120,50	0,1467	0,6356
-603,44	-54,28	0,1165	0,4048	-588,29	-83,48	0,1333	0,5533	-565,15	-121,41	0,1554	0,7096
-607,35	-53,30	0,1230	0,4647	-591,60	-83,35	0,1407	0,6197	-567,74	-122,28	0,1640	0,7834
-610,94	-52,43	0,1294	0,5236	-594,76	-83,22	0,1481	0,6857	-570,15	-122,98	0,1726	0,8553

Tabela 19 – $\alpha = 90^\circ$				Tabela 20 – $\alpha = 95^\circ$				Tabela 21 – $\alpha = 100^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-141,61	-52,15	0,0103	-0,3702	-109,30	-48,01	0,0088	-0,3672	-83,91	-44,53	0,0077	-0,3652
-232,28	-76,85	0,0205	-0,3457	-195,58	-79,78	0,0176	-0,3591	-162,45	-80,59	0,0154	-0,3662
-287,95	-90,64	0,0308	-0,2918	-244,17	-96,73	0,0264	-0,3218	-205,91	-100,83	0,0231	-0,3423
-333,93	-103,32	0,0410	-0,2293	-282,07	-111,32	0,0352	-0,2750	-237,45	-117,43	0,0308	-0,3081
-375,53	-115,83	0,0513	-0,1646	-315,41	-125,24	0,0440	-0,2247	-264,02	-132,85	0,0385	-0,2699
-414,50	-128,18	0,0615	-0,1003	-346,27	-138,77	0,0528	-0,1736	-288,01	-147,66	0,0462	-0,2303
-442,74	-136,58	0,0718	-0,0289	-375,54	-151,90	0,0616	-0,1232	-310,49	-161,91	0,0539	-0,1906
-464,78	-142,82	0,0821	0,0456	-400,49	-163,15	0,0704	-0,0710	-332,16	-175,38	0,0616	-0,1512
-480,64	-147,43	0,0923	0,1243	-416,60	-170,75	0,0792	-0,0123	-353,37	-187,95	0,0692	-0,1125
-491,51	-150,74	0,1026	0,2061	-432,18	-177,64	0,0880	0,0453	-367,83	-196,75	0,0769	-0,0679
-501,63	-153,67	0,1128	0,2861	-443,15	-182,54	0,0968	0,1074	-379,29	-203,87	0,0846	-0,0212
-511,27	-156,18	0,1231	0,3652	-450,73	-186,19	0,1056	0,1730	-390,56	-210,30	0,0923	0,0247
-518,03	-158,17	0,1333	0,4492	-457,97	-189,40	0,1144	0,2379	-399,82	-215,40	0,1000	0,0728
-522,06	-159,73	0,1436	0,5390	-464,93	-192,31	0,1232	0,3024	-405,31	-219,29	0,1077	0,1254
-525,93	-161,12	0,1539	0,6291	-471,63	-194,99	0,1320	0,3664	-410,32	-222,55	0,1154	0,1779
-529,67	-162,37	0,1641	0,7196	-477,55	-196,40	0,1408	0,4301	-415,50	-224,86	0,1231	0,2283
-532,13	-162,30	0,1744	0,7945	-480,77	-197,18	0,1496	0,4978	-420,55	-226,97	0,1308	0,2783
-534,49	-162,16	0,1846	0,8684	-483,59	-197,65	0,1584	0,5652	-425,58	-228,32	0,1385	0,3255
-536,76	-161,95	0,1949	0,9413	-486,22	-197,74	0,1672	0,6300	-430,49	-229,56	0,1462	0,3721
-538,95	-161,70	0,2052	1,0133	-488,79	-197,76	0,1760	0,6945	-433,96	-230,41	0,1539	0,4220

Tabela 22 – $\alpha = 105^\circ$				Tabela 23 – $\alpha = 110^\circ$				Tabela 24 – $\alpha = 115^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-64,51	-42,15	0,0069	-0,3639	-48,60	-40,28	0,0063	-0,3629	-35,32	-38,95	0,0059	-0,3623
-132,83	-80,24	0,0139	-0,3689	-104,71	-78,59	0,0127	-0,3689	-78,54	-76,40	0,0119	-0,3674
-172,49	-103,93	0,0208	-0,3550	-141,43	-105,85	0,0190	-0,3629	-111,86	-107,03	0,0178	-0,3674
-199,01	-122,71	0,0277	-0,3306	-163,75	-126,91	0,0254	-0,3466	-130,49	-130,52	0,0237	-0,3576
-220,08	-139,83	0,0346	-0,3020	-180,10	-145,79	0,0317	-0,3260	-142,75	-151,16	0,0297	-0,3434
-238,39	-156,04	0,0416	-0,2717	-193,72	-163,21	0,0381	-0,3030	-152,48	-169,59	0,0356	-0,3263
-255,42	-171,24	0,0485	-0,2404	-206,24	-179,14	0,0444	-0,2785	-161,25	-186,14	0,0416	-0,3071
-271,88	-185,32	0,0554	-0,2086	-218,30	-193,72	0,0508	-0,2530	-169,64	-201,14	0,0475	-0,2864
-288,04	-198,36	0,0623	-0,1768	-230,17	-207,15	0,0571	-0,2269	-177,91	-214,86	0,0534	-0,2650
-304,05	-210,44	0,0693	-0,1453	-241,97	-219,54	0,0635	-0,2008	-186,16	-227,49	0,0594	-0,2432
-318,36	-220,74	0,0762	-0,1127	-253,75	-231,02	0,0698	-0,1750	-194,46	-239,16	0,0653	-0,2215
-328,11	-228,43	0,0831	-0,0760	-265,52	-241,67	0,0762	-0,1498	-202,81	-249,98	0,0712	-0,2000
-336,15	-235,01	0,0900	-0,0381	-274,82	-250,24	0,0825	-0,1223	-211,22	-260,10	0,0772	-0,1790
-344,13	-241,11	0,0970	-0,0008	-282,19	-257,52	0,0889	-0,0931	-219,50	-269,53	0,0831	-0,1584
-351,16	-245,81	0,1039	0,0367	-287,72	-263,10	0,0952	-0,0635	-225,57	-276,33	0,0891	-0,1366
-357,15	-249,23	0,1108	0,0746	-293,37	-267,93	0,1016	-0,0351	-231,76	-282,40	0,0950	-0,1161
-360,86	-252,07	0,1177	0,1154	-299,02	-272,48	0,1079	-0,0073	-235,70	-287,47	0,1009	-0,0933
-364,22	-254,36	0,1247	0,1554	-302,83	-275,97	0,1143	0,0233	-239,17	-292,13	0,1069	-0,0704
-367,57	-256,22	0,1316	0,1939	-306,64	-278,71	0,1206	0,0517	-242,65	-296,25	0,1128	-0,0490
-370,88	-257,95	0,1385	0,2322	-310,19	-281,25	0,1270	0,0800	-245,84	-299,81	0,1187	-0,0284

Tabela 25 – $\alpha = 120^\circ$				Tabela 26 – $\alpha = 125^\circ$				Tabela 27 – $\alpha = 130^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-23,76	-38,02	0,0057	-0,3618	-13,35	-37,48	0,0055	-0,3614	-3,55	-37,20	0,0054	-0,3612
-55,04	-74,50	0,0113	-0,3660	-33,82	-73,35	0,0109	-0,3649	-13,86	-72,76	0,0108	-0,3642
-82,68	-107,51	0,0170	-0,3693	-53,31	-107,58	0,0164	-0,3695	-24,04	-107,48	0,0161	-0,3691
-97,86	-133,58	0,0226	-0,3651	-64,81	-136,16	0,0219	-0,3696	-30,46	-137,79	0,0215	-0,3717
-106,60	-155,80	0,0283	-0,3559	-70,59	-159,73	0,0274	-0,3643	-33,77	-162,44	0,0269	-0,3691
-113,07	-175,09	0,0339	-0,3433	-74,36	-179,72	0,0328	-0,3550	-35,50	-182,92	0,0323	-0,3619
-118,70	-192,13	0,0396	-0,3281	-77,45	-197,13	0,0383	-0,3427	-36,81	-200,50	0,0377	-0,3513
-124,04	-207,44	0,0452	-0,3113	-80,38	-212,61	0,0438	-0,3284	-38,17	-215,95	0,0430	-0,3383
-129,32	-221,36	0,0509	-0,2933	-83,37	-226,57	0,0493	-0,3128	-39,76	-229,76	0,0484	-0,3236
-134,67	-234,11	0,0565	-0,2748	-86,50	-239,28	0,0547	-0,2963	-41,55	-242,26	0,0538	-0,3078
-140,10	-245,85	0,0622	-0,2561	-89,80	-250,94	0,0602	-0,2794	-43,50	-253,69	0,0592	-0,2914
-145,65	-256,72	0,0678	-0,2374	-93,27	-261,69	0,0657	-0,2624	-45,56	-264,23	0,0645	-0,2749
-151,29	-266,86	0,0735	-0,2191	-96,90	-271,70	0,0712	-0,2455	-47,70	-274,05	0,0699	-0,2584
-157,01	-276,40	0,0791	-0,2012	-100,64	-281,10	0,0766	-0,2288	-49,90	-283,28	0,0753	-0,2420
-162,95	-284,68	0,0848	-0,1852	-104,57	-289,21	0,0821	-0,2141	-52,17	-291,24	0,0807	-0,2276
-168,62	-292,02	0,0904	-0,1700	-108,58	-296,67	0,0876	-0,2005	-54,48	-298,59	0,0861	-0,2142
-172,53	-297,92	0,0961	-0,1526	-112,63	-303,79	0,0931	-0,1874	-56,80	-305,61	0,0914	-0,2013
-176,48	-303,55	0,1017	-0,1358	-116,41	-310,43	0,0985	-0,1744	-59,12	-312,36	0,0968	-0,1889
-180,45	-308,90	0,1074	-0,1195	-118,69	-315,84	0,1040	-0,1593	-61,46	-318,88	0,1022	-0,1771
-182,75	-313,03	0,1130	-0,1033	-120,93	-320,82	0,1095	-0,1455	-63,79	-325,21	0,1076	-0,1657

Tabela 28 – $\alpha = 135^\circ$				Tabela 29 – $\alpha = 140^\circ$				Tabela 30 – $\alpha = 145^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
5,97	-37,18	0,0054	-0,3610	15,56	-37,34	0,0054	-0,3608	25,54	-37,78	0,0055	-0,3607
5,56	-72,70	0,0107	-0,3638	25,12	-73,05	0,0108	-0,3635	45,49	-73,97	0,0111	-0,3636
5,19	-107,64	0,0161	-0,3686	34,55	-107,89	0,0162	-0,3681	64,19	-108,31	0,0166	-0,3673
4,78	-138,49	0,0214	-0,3718	40,02	-138,13	0,0216	-0,3701	74,25	-136,75	0,0222	-0,3661
4,29	-163,55	0,0268	-0,3699	42,17	-162,64	0,0271	-0,3667	78,53	-160,08	0,0277	-0,3593
3,71	-184,24	0,0322	-0,3634	42,62	-182,96	0,0325	-0,3587	80,76	-179,79	0,0333	-0,3483
3,06	-201,76	0,0375	-0,3530	42,56	-200,39	0,0379	-0,3472	82,28	-196,92	0,0388	-0,3342
2,36	-217,05	0,0429	-0,3399	42,50	-215,68	0,0433	-0,3333	83,61	-212,11	0,0443	-0,3180
1,64	-230,69	0,0483	-0,3250	42,61	-229,33	0,0487	-0,3175	84,98	-225,80	0,0499	-0,3004
0,89	-243,05	0,0536	-0,3090	42,90	-241,68	0,0541	-0,3007	86,49	-238,24	0,0554	-0,2818
0,13	-254,35	0,0590	-0,2925	43,31	-252,97	0,0595	-0,2832	88,16	-249,64	0,0610	-0,2627
-0,63	-264,78	0,0643	-0,2756	43,83	-263,39	0,0649	-0,2655	90,02	-260,14	0,0665	-0,2434
-1,39	-274,50	0,0697	-0,2588	44,43	-273,08	0,0704	-0,2478	92,05	-269,91	0,0721	-0,2241
-2,15	-283,64	0,0751	-0,2422	45,09	-282,21	0,0758	-0,2303	94,20	-279,09	0,0776	-0,2050
-2,87	-291,51	0,0804	-0,2275	45,90	-290,08	0,0812	-0,2146	96,59	-287,03	0,0831	-0,1877
-3,58	-298,79	0,0858	-0,2137	46,77	-297,34	0,0866	-0,1999	99,11	-294,31	0,0887	-0,1715
-4,28	-305,76	0,0912	-0,2004	47,67	-304,28	0,0920	-0,1857	101,68	-301,27	0,0942	-0,1557
-4,97	-312,45	0,0965	-0,1876	48,60	-310,95	0,0974	-0,1720	103,11	-307,21	0,0998	-0,1386
-5,65	-318,92	0,1019	-0,1753	49,55	-317,40	0,1028	-0,1588	103,79	-312,43	0,1053	-0,1206
-6,32	-325,20	0,1072	-0,1635	50,09	-323,37	0,1082	-0,1453	104,48	-317,34	0,1109	-0,1034

Tabela 31 – $\alpha = 150^\circ$				Tabela 32 – $\alpha = 155^\circ$				Tabela 33 – $\alpha = 160^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
36,32	-38,52	0,0058	-0,3607	48,44	-39,66	0,0061	-0,3608	62,49	-41,19	0,0066	-0,3610
67,49	-75,52	0,0115	-0,3639	92,09	-77,79	0,0122	-0,3645	119,14	-79,96	0,0131	-0,3646
93,94	-108,46	0,0173	-0,3655	123,33	-107,95	0,0183	-0,3614	152,89	-106,45	0,0197	-0,3540
107,08	-134,33	0,0231	-0,3591	139,44	-131,20	0,0244	-0,3484	172,25	-127,18	0,0263	-0,3330
113,91	-156,27	0,0288	-0,3476	149,28	-151,60	0,0305	-0,3307	185,67	-145,87	0,0328	-0,3076
118,51	-175,21	0,0346	-0,3323	156,77	-169,65	0,0366	-0,3098	196,59	-162,92	0,0394	-0,2796
122,29	-191,88	0,0404	-0,3143	163,35	-185,76	0,0427	-0,2866	206,55	-178,36	0,0460	-0,2497
125,77	-206,82	0,0461	-0,2945	169,59	-200,31	0,0488	-0,2617	216,12	-192,43	0,0525	-0,2185
129,21	-220,36	0,0519	-0,2734	175,72	-213,59	0,0549	-0,2359	225,54	-205,33	0,0591	-0,1864
132,70	-232,75	0,0576	-0,2516	181,87	-225,78	0,0610	-0,2095	234,93	-217,21	0,0657	-0,1541
136,31	-244,14	0,0634	-0,2295	188,08	-237,02	0,0671	-0,1830	244,33	-228,19	0,0723	-0,1219
140,04	-254,68	0,0692	-0,2074	194,37	-247,45	0,0732	-0,1567	252,31	-237,57	0,0788	-0,0884
143,89	-264,51	0,0749	-0,1855	200,75	-257,19	0,0793	-0,1306	257,87	-245,09	0,0854	-0,0523
147,84	-273,76	0,0807	-0,1638	205,27	-265,28	0,0854	-0,1026	260,20	-251,11	0,0920	-0,0131
152,09	-281,80	0,0865	-0,1440	209,13	-271,71	0,0915	-0,0751	262,76	-256,25	0,0985	0,0250
154,77	-288,12	0,0922	-0,1230	211,32	-276,87	0,0976	-0,0465	265,55	-260,56	0,1051	0,0619
156,84	-293,73	0,0980	-0,1014	212,35	-281,36	0,1037	-0,0168	268,36	-264,59	0,1117	0,0985
158,98	-299,08	0,1038	-0,0801	213,42	-285,62	0,1099	0,0127	271,17	-268,41	0,1182	0,1348
159,91	-303,81	0,1095	-0,0575	214,53	-289,56	0,1160	0,0415	274,05	-271,70	0,1248	0,1696
159,70	-307,58	0,1153	-0,0352	215,72	-292,91	0,1221	0,0685	276,49	-274,45	0,1314	0,2042

Tabela 34 – $\alpha = 165^\circ$				Tabela 35 – $\alpha = 170^\circ$				Tabela 36 – $\alpha = 175^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
79,69	-43,40	0,0072	-0,3613	101,69	-46,54	0,0082	-0,3621	130,53	-50,74	0,0095	-0,3635
147,87	-81,36	0,0145	-0,3623	178,72	-81,52	0,0164	-0,3557	212,54	-79,85	0,0190	-0,3427
184,00	-104,14	0,0217	-0,3417	218,07	-100,74	0,0245	-0,3220	256,57	-95,66	0,0284	-0,2917
207,07	-122,51	0,0289	-0,3107	245,74	-116,90	0,0327	-0,2782	290,23	-109,73	0,0379	-0,2310
224,73	-139,44	0,0362	-0,2755	268,54	-132,16	0,0409	-0,2303	319,51	-123,39	0,0474	-0,1670
239,82	-155,40	0,0434	-0,2383	288,87	-146,90	0,0491	-0,1811	346,46	-136,79	0,0569	-0,1023
253,88	-170,12	0,0506	-0,1997	308,01	-160,86	0,0572	-0,1313	371,45	-149,57	0,0664	-0,0377
267,49	-183,65	0,0579	-0,1602	326,60	-173,81	0,0654	-0,0812	383,64	-156,99	0,0758	0,0378
280,91	-196,11	0,0651	-0,1203	340,25	-183,67	0,0736	-0,0266	394,89	-163,41	0,0853	0,1139
293,85	-207,40	0,0723	-0,0800	347,81	-190,55	0,0818	0,0337	405,79	-169,00	0,0948	0,1899
301,57	-215,41	0,0796	-0,0346	355,23	-196,62	0,0900	0,0942	416,32	-173,86	0,1043	0,2657
306,16	-221,78	0,0868	0,0138	362,52	-202,04	0,0981	0,1545	421,39	-177,07	0,1138	0,3494
310,73	-227,58	0,0940	0,0623	369,68	-206,94	0,1063	0,2146	424,81	-179,79	0,1232	0,4355
315,26	-232,91	0,1013	0,1106	375,58	-211,07	0,1145	0,2765	428,00	-182,23	0,1327	0,5217
319,89	-237,59	0,1085	0,1581	378,90	-214,37	0,1227	0,3424	430,99	-184,48	0,1422	0,6080
324,80	-241,28	0,1157	0,2037	380,98	-216,48	0,1308	0,4087	433,98	-186,30	0,1517	0,6937
328,53	-244,37	0,1230	0,2512	382,96	-218,41	0,1390	0,4750	437,16	-187,44	0,1612	0,7776
331,47	-247,00	0,1302	0,3000	384,93	-220,00	0,1472	0,5405	440,38	-188,07	0,1706	0,8596
333,56	-248,91	0,1374	0,3482	386,92	-221,15	0,1554	0,6044	443,58	-188,50	0,1801	0,9406
334,39	-250,62	0,1447	0,3984	388,85	-222,22	0,1635	0,6682	446,65	-188,59	0,1896	1,0190

Tabela 37 – $\alpha = 180^\circ$				Tabela 38 – $\alpha = 185^\circ$				Tabela 39 – $\alpha = 190^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
165,77	-54,67	0,0112	-0,3642	151,53	-42,82	0,0093	-0,3641	138,48	-33,07	0,0080	-0,3629
250,13	-75,65	0,0225	-0,3204	244,23	-61,91	0,0187	-0,3378	237,47	-51,38	0,0160	-0,3497
300,95	-88,15	0,0337	-0,2469	297,42	-68,99	0,0280	-0,2788	293,08	-54,90	0,0239	-0,3028
342,53	-100,17	0,0449	-0,1649	339,63	-75,33	0,0373	-0,2089	335,95	-57,09	0,0319	-0,2435
379,97	-112,26	0,0561	-0,0808	377,00	-82,00	0,0467	-0,1350	373,22	-59,65	0,0399	-0,1789
409,50	-122,12	0,0674	0,0082	411,59	-89,05	0,0560	-0,0599	407,34	-62,78	0,0479	-0,1121
426,71	-127,74	0,0786	0,1063	438,50	-94,08	0,0654	0,0205	439,36	-66,41	0,0559	-0,0448
442,64	-133,25	0,0898	0,2028	455,91	-95,94	0,0747	0,1084	464,00	-68,22	0,0639	0,0279
456,37	-137,88	0,1010	0,3007	472,14	-98,02	0,0840	0,1954	481,08	-67,53	0,0718	0,1068
462,41	-140,55	0,1123	0,4092	486,98	-100,21	0,0934	0,2817	497,06	-67,20	0,0798	0,1850
467,92	-142,67	0,1235	0,5178	494,72	-101,31	0,1027	0,3764	511,97	-67,14	0,0878	0,2625
473,07	-144,43	0,1347	0,6266	501,06	-102,16	0,1120	0,4720	521,54	-66,55	0,0958	0,3461
477,96	-145,93	0,1459	0,7354	506,92	-102,91	0,1214	0,5675	528,73	-65,47	0,1038	0,4325
482,66	-147,25	0,1572	0,8444	512,45	-103,50	0,1307	0,6628	535,44	-64,50	0,1117	0,5188
487,22	-148,42	0,1684	0,9535	517,75	-103,92	0,1401	0,7581	541,61	-63,68	0,1197	0,6045
491,69	-149,49	0,1796	1,0626	522,54	-104,40	0,1494	0,8524	546,68	-63,37	0,1277	0,6880
496,03	-150,44	0,1908	1,1714	526,65	-105,07	0,1587	0,9451	551,51	-63,06	0,1357	0,7711
498,79	-150,28	0,2021	1,2608	530,10	-105,86	0,1681	1,0353	555,74	-62,92	0,1437	0,8524
501,46	-150,06	0,2133	1,3488	533,36	-106,62	0,1774	1,1246	559,62	-62,86	0,1517	0,9325
503,33	-149,98	0,2245	1,4393	536,21	-107,31	0,1867	1,2111	563,37	-62,78	0,1596	1,0121

Tabela 40 – $\alpha = 195^\circ$				Tabela 41 – $\alpha = 200^\circ$				Tabela 42 – $\alpha = 205^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
128,00	-25,59	0,0070	-0,3622	119,28	-19,65	0,0062	-0,3617	111,94	-14,81	0,0056	-0,3613
230,00	-42,77	0,0140	-0,3576	221,81	-35,25	0,0124	-0,3626	212,97	-28,30	0,0112	-0,3653
288,22	-44,05	0,0209	-0,3212	282,87	-35,32	0,0186	-0,3354	277,20	-27,99	0,0168	-0,3463
331,84	-43,18	0,0279	-0,2711	327,40	-32,20	0,0248	-0,2935	322,82	-23,24	0,0224	-0,3118
369,09	-42,58	0,0349	-0,2148	364,71	-29,13	0,0310	-0,2447	360,32	-18,23	0,0280	-0,2696
402,78	-42,62	0,0419	-0,1556	398,04	-26,72	0,0372	-0,1922	393,39	-13,83	0,0336	-0,2233
434,15	-43,32	0,0488	-0,0951	428,80	-25,05	0,0434	-0,1381	423,62	-10,22	0,0393	-0,1749
463,78	-44,60	0,0558	-0,0346	457,68	-24,06	0,0496	-0,0835	451,83	-7,38	0,0449	-0,1257
486,49	-44,29	0,0628	0,0310	485,06	-23,71	0,0558	-0,0291	478,42	-5,26	0,0505	-0,0764
502,89	-41,89	0,0698	0,1018	506,21	-22,14	0,0620	0,0296	503,65	-3,81	0,0561	-0,0277
518,29	-39,92	0,0767	0,1720	521,75	-18,63	0,0683	0,0931	523,28	-1,45	0,0617	0,0248
532,84	-38,30	0,0837	0,2415	536,39	-15,57	0,0745	0,1560	538,16	2,58	0,0673	0,0813
543,52	-36,57	0,0907	0,3150	550,28	-12,88	0,0807	0,2182	551,95	6,32	0,0729	0,1376
551,28	-34,11	0,0977	0,3927	560,74	-10,22	0,0869	0,2837	564,64	9,41	0,0785	0,1923
557,68	-32,23	0,1046	0,4688	568,61	-7,97	0,0931	0,3488	573,87	12,06	0,0841	0,2484
563,46	-30,64	0,1116	0,5441	574,82	-5,36	0,0993	0,4163	582,19	14,52	0,0897	0,3047
568,95	-29,15	0,1186	0,6192	580,71	-2,92	0,1055	0,4837	588,70	17,47	0,0953	0,3640
573,86	-27,91	0,1256	0,6927	586,01	-0,79	0,1117	0,5496	594,17	20,25	0,1009	0,4227
578,29	-26,87	0,1325	0,7649	590,76	1,07	0,1179	0,6141	599,08	22,70	0,1065	0,4801
582,55	-25,88	0,1395	0,8367	595,33	2,82	0,1241	0,6782	603,78	25,01	0,1121	0,5371

Tabela 43 – $\alpha = 210^\circ$				Tabela 44 – $\alpha = 215^\circ$				Tabela 45 – $\alpha = 220^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
105,67	-10,78	0,0051	-0,3611	100,23	-7,33	0,0048	-0,3609	95,57	-4,33	0,0045	-0,3608
203,50	-21,52	0,0103	-0,3663	193,75	-14,98	0,0095	-0,3662	184,58	-8,96	0,0090	-0,3657
271,22	-21,52	0,0154	-0,3546	264,89	-15,55	0,0143	-0,3607	258,33	-9,72	0,0135	-0,3650
318,17	-15,66	0,0206	-0,3267	313,43	-9,00	0,0191	-0,3389	308,77	-2,87	0,0180	-0,3488
356,03	-9,11	0,0257	-0,2905	351,84	-1,25	0,0239	-0,3083	347,92	5,80	0,0224	-0,3233
388,96	-3,09	0,0308	-0,2498	384,74	6,11	0,0286	-0,2727	380,96	14,29	0,0269	-0,2923
418,76	2,12	0,0360	-0,2066	414,21	12,68	0,0334	-0,2342	410,20	22,00	0,0314	-0,2582
446,35	6,51	0,0411	-0,1623	441,27	18,36	0,0382	-0,1943	436,82	28,78	0,0359	-0,2223
472,23	10,09	0,0463	-0,1176	466,50	23,18	0,0430	-0,1538	461,46	34,64	0,0404	-0,1856
496,67	12,94	0,0514	-0,0732	490,20	27,18	0,0477	-0,1134	484,50	39,61	0,0449	-0,1487
519,84	15,09	0,0565	-0,0297	512,59	30,41	0,0525	-0,0737	506,14	43,73	0,0494	-0,1124
537,70	18,11	0,0617	0,0175	533,79	32,96	0,0573	-0,0349	526,59	47,08	0,0539	-0,0769
552,48	21,96	0,0668	0,0669	550,16	36,30	0,0620	0,0073	546,02	49,77	0,0584	-0,0424
564,73	25,67	0,0720	0,1158	564,10	39,13	0,0668	0,0482	560,06	52,59	0,0629	-0,0067
575,83	28,63	0,0771	0,1628	574,89	42,59	0,0716	0,0904	573,09	54,72	0,0673	0,0274
584,76	31,57	0,0822	0,2121	585,18	45,68	0,0764	0,1318	583,61	57,74	0,0718	0,0637
592,61	34,37	0,0874	0,2621	593,81	48,69	0,0811	0,1748	593,16	60,79	0,0763	0,1002
599,70	36,78	0,0925	0,3106	600,83	51,45	0,0859	0,2181	601,14	63,56	0,0808	0,1367
604,64	39,64	0,0977	0,3614	607,18	53,79	0,0907	0,2594	607,10	65,88	0,0853	0,1729
609,37	42,33	0,1028	0,4119	613,08	56,06	0,0955	0,3009	612,29	67,36	0,0898	0,2067

Tabela 46 – $\alpha = 225^\circ$				Tabela 47 – $\alpha = 230^\circ$				Tabela 48 – $\alpha = 235^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
91,43	-1,65	0,0043	-0,3607	87,67	0,80	0,0041	-0,3606	84,43	3,09	0,0040	-0,3606
176,12	-3,48	0,0085	-0,3651	168,42	1,53	0,0082	-0,3646	161,76	6,21	0,0080	-0,3643
251,17	-3,77	0,0128	-0,3678	243,29	2,46	0,0123	-0,3692	235,48	8,81	0,0120	-0,3699
303,87	2,98	0,0171	-0,3568	298,53	8,83	0,0164	-0,3633	292,98	15,07	0,0159	-0,3681
343,99	12,32	0,0213	-0,3362	339,91	18,56	0,0205	-0,3473	335,98	24,91	0,0199	-0,3566
377,31	21,73	0,0256	-0,3096	373,70	28,69	0,0246	-0,3250	370,45	35,59	0,0239	-0,3384
406,44	30,41	0,0299	-0,2795	402,81	38,19	0,0287	-0,2988	399,70	45,76	0,0279	-0,3158
432,69	38,14	0,0342	-0,2473	428,76	46,72	0,0328	-0,2701	425,43	54,92	0,0319	-0,2903
456,79	44,87	0,0384	-0,2141	452,37	54,17	0,0369	-0,2400	448,61	62,93	0,0359	-0,2631
479,19	50,63	0,0427	-0,1805	474,15	60,57	0,0410	-0,2093	469,81	69,75	0,0399	-0,2350
500,12	55,47	0,0470	-0,1472	494,40	65,94	0,0451	-0,1787	489,38	75,45	0,0439	-0,2066
519,81	59,47	0,0512	-0,1146	513,35	70,39	0,0492	-0,1487	507,61	80,15	0,0478	-0,1786
538,47	62,72	0,0555	-0,0829	531,23	74,02	0,0533	-0,1194	524,78	84,03	0,0518	-0,1513
555,13	64,71	0,0598	-0,0545	547,07	76,33	0,0574	-0,0933	539,81	86,55	0,0558	-0,1275
567,79	67,13	0,0640	-0,0238	561,94	77,96	0,0615	-0,0689	554,00	88,47	0,0598	-0,1051
579,70	69,19	0,0683	0,0062	573,91	80,04	0,0656	-0,0424	567,65	89,98	0,0638	-0,0839
590,90	71,07	0,0726	0,0357	584,68	81,79	0,0697	-0,0165	578,34	90,86	0,0678	-0,0639
599,13	73,46	0,0769	0,0660	594,12	82,40	0,0738	0,0056	587,38	91,73	0,0718	-0,0442
605,69	74,90	0,0811	0,0933	602,27	82,78	0,0779	0,0254	595,45	92,11	0,0757	-0,0276
610,66	76,48	0,0854	0,1230	608,69	84,06	0,0820	0,0475	603,28	92,32	0,0797	-0,0120

Tabela 49 – $\alpha = 240^\circ$				Tabela 50 – $\alpha = 245^\circ$				Tabela 51 – $\alpha = 250^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
81,48	5,28	0,0039	-0,3606	78,64	7,41	0,0039	-0,3605	75,94	9,53	0,0039	-0,3606
155,71	10,68	0,0078	-0,3640	149,89	15,03	0,0077	-0,3638	144,37	19,34	0,0077	-0,3637
227,63	15,19	0,0117	-0,3701	219,51	21,61	0,0116	-0,3700	211,36	28,11	0,0116	-0,3698
286,65	21,94	0,0157	-0,3714	279,31	29,33	0,0155	-0,3737	271,35	37,17	0,0155	-0,3753
331,65	31,61	0,0196	-0,3644	326,14	39,03	0,0194	-0,3706	319,35	47,48	0,0194	-0,3753
367,11	42,59	0,0235	-0,3502	363,02	49,91	0,0232	-0,3607	357,75	58,17	0,0232	-0,3693
396,65	53,23	0,0274	-0,3312	393,12	60,71	0,0271	-0,3453	388,85	68,59	0,0271	-0,3575
422,26	62,84	0,0313	-0,3088	418,73	70,47	0,0310	-0,3258	414,74	78,02	0,0310	-0,3409
445,04	71,17	0,0352	-0,2842	441,18	78,86	0,0349	-0,3035	437,10	86,29	0,0348	-0,3211
465,67	78,21	0,0391	-0,2582	461,34	86,00	0,0387	-0,2797	456,93	93,45	0,0387	-0,2995
484,61	84,09	0,0431	-0,2318	479,72	92,02	0,0426	-0,2553	474,83	99,57	0,0426	-0,2772
502,19	88,98	0,0470	-0,2058	496,68	97,09	0,0465	-0,2312	491,24	104,76	0,0464	-0,2551
518,69	93,06	0,0509	-0,1804	512,49	101,33	0,0504	-0,2078	506,36	109,12	0,0503	-0,2339
532,96	95,77	0,0548	-0,1587	526,11	104,24	0,0542	-0,1881	519,40	112,26	0,0542	-0,2159
546,52	97,95	0,0587	-0,1382	539,00	106,60	0,0581	-0,1696	531,20	114,33	0,0581	-0,2007
559,02	99,21	0,0626	-0,1203	550,45	107,66	0,0620	-0,1549	542,08	115,65	0,0619	-0,1879
570,62	99,70	0,0665	-0,1049	561,47	108,44	0,0659	-0,1413	552,55	116,71	0,0658	-0,1761
580,98	100,14	0,0705	-0,0903	572,01	108,95	0,0697	-0,1293	562,64	117,55	0,0697	-0,1656
588,66	100,76	0,0744	-0,0759	581,41	108,97	0,0736	-0,1210	571,53	117,90	0,0735	-0,1589
596,10	101,24	0,0783	-0,0626	589,01	109,49	0,0775	-0,1108	580,16	118,10	0,0774	-0,1534

Tabela 52 – $\alpha = 255^\circ$				Tabela 53 – $\alpha = 260^\circ$				Tabela 54 – $\alpha = 265^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
73,32	11,68	0,0039	-0,3606	70,64	13,87	0,0040	-0,3606	67,88	16,16	0,0041	-0,3606
139,01	23,71	0,0078	-0,3636	133,52	28,17	0,0079	-0,3636	127,90	32,83	0,0081	-0,3636
203,19	34,76	0,0117	-0,3695	194,81	41,57	0,0119	-0,3693	186,22	48,66	0,0122	-0,3692
262,73	45,48	0,0156	-0,3764	253,08	54,25	0,0158	-0,3771	242,40	63,62	0,0162	-0,3774
311,35	56,84	0,0195	-0,3789	301,82	66,96	0,0198	-0,3816	290,76	77,71	0,0203	-0,3834
350,62	67,71	0,0234	-0,3757	341,33	78,03	0,0238	-0,3802	330,03	88,87	0,0243	-0,3828
382,82	77,33	0,0273	-0,3670	374,09	87,18	0,0277	-0,3734	362,87	97,94	0,0284	-0,3773
409,63	85,94	0,0312	-0,3535	401,77	95,09	0,0317	-0,3627	390,89	105,63	0,0325	-0,3683
432,34	93,80	0,0351	-0,3366	425,45	102,15	0,0357	-0,3491	415,10	112,31	0,0365	-0,3570
452,11	100,82	0,0390	-0,3176	445,86	108,57	0,0396	-0,3334	436,20	118,19	0,0406	-0,3443
469,71	106,93	0,0429	-0,2977	463,60	114,41	0,0436	-0,3166	454,66	123,40	0,0446	-0,3308
485,67	112,21	0,0468	-0,2778	479,39	119,62	0,0475	-0,2993	471,03	128,08	0,0487	-0,3171
500,16	116,65	0,0507	-0,2588	493,43	124,10	0,0515	-0,2829	485,29	132,21	0,0527	-0,3042
512,58	119,90	0,0546	-0,2430	504,88	127,02	0,0555	-0,2707	496,17	134,58	0,0568	-0,2964
523,40	121,79	0,0585	-0,2309	515,20	129,13	0,0594	-0,2607	506,22	136,75	0,0609	-0,2891
533,73	123,37	0,0624	-0,2199	525,02	130,97	0,0634	-0,2517	515,67	138,76	0,0649	-0,2825
543,68	124,71	0,0663	-0,2099	534,45	132,60	0,0673	-0,2435	524,68	140,62	0,0690	-0,2765
553,31	125,87	0,0702	-0,2009	543,57	134,06	0,0713	-0,2363	533,34	142,35	0,0730	-0,2713
561,71	126,54	0,0741	-0,1959	551,55	135,08	0,0753	-0,2327	540,85	143,63	0,0771	-0,2697
569,85	127,08	0,0780	-0,1920	558,82	135,60	0,0792	-0,2322	547,29	144,20	0,0811	-0,2725

Tabela 55 – $\alpha = 270^\circ$				Tabela 56 – $\alpha = 275^\circ$				Tabela 57 – $\alpha = 280^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
65,12	18,62	0,0042	-0,3607	60,06	20,45	0,0042	-0,3607	55,13	22,41	0,0043	-0,3608
122,26	37,84	0,0084	-0,3637	112,17	41,62	0,0084	-0,3635	102,35	45,67	0,0086	-0,3635
177,62	56,29	0,0126	-0,3693	162,56	62,16	0,0127	-0,3688	147,91	68,40	0,0129	-0,3685
230,96	73,88	0,0168	-0,3776	211,03	81,89	0,0169	-0,3764	191,62	90,02	0,0172	-0,3753
278,39	88,90	0,0210	-0,3839	255,95	97,84	0,0211	-0,3826	232,37	107,06	0,0215	-0,3801
317,05	100,36	0,0252	-0,3836	293,64	109,93	0,0253	-0,3831	268,35	119,98	0,0258	-0,3807
349,56	109,64	0,0294	-0,3787	325,47	119,72	0,0296	-0,3793	299,08	130,46	0,0301	-0,3773
377,46	117,43	0,0336	-0,3706	352,91	127,95	0,0338	-0,3725	325,62	139,33	0,0344	-0,3710
401,70	124,12	0,0378	-0,3607	376,86	135,02	0,0380	-0,3639	348,86	147,01	0,0387	-0,3629
422,92	129,93	0,0420	-0,3496	397,94	141,18	0,0422	-0,3543	369,35	153,75	0,0430	-0,3538
441,57	134,99	0,0462	-0,3383	416,53	146,55	0,0465	-0,3444	387,48	159,70	0,0473	-0,3444
458,23	139,49	0,0504	-0,3271	433,11	151,31	0,0507	-0,3347	403,60	165,00	0,0516	-0,3351
472,25	143,01	0,0546	-0,3180	447,89	155,47	0,0549	-0,3256	418,13	169,84	0,0559	-0,3261
483,25	145,23	0,0588	-0,3130	458,93	158,11	0,0591	-0,3213	429,69	173,40	0,0602	-0,3204
493,42	147,26	0,0630	-0,3087	468,79	160,46	0,0634	-0,3181	438,96	176,34	0,0645	-0,3172
502,94	149,16	0,0672	-0,3051	477,98	162,67	0,0676	-0,3156	447,52	179,13	0,0688	-0,3146
511,96	150,96	0,0714	-0,3021	486,62	164,78	0,0718	-0,3137	455,50	181,82	0,0731	-0,3126
520,57	152,70	0,0756	-0,2998	494,81	166,81	0,0760	-0,3124	463,02	184,43	0,0774	-0,3111
527,59	153,82	0,0798	-0,3020	502,37	168,64	0,0803	-0,3125	470,15	186,98	0,0817	-0,3102
533,68	154,60	0,0840	-0,3071	508,39	169,99	0,0845	-0,3166	476,17	189,12	0,0860	-0,3119

Tabela 58 – $\alpha = 285^\circ$				Tabela 59 – $\alpha = 290^\circ$				Tabela 60 – $\alpha = 295^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
50,14	24,54	0,0044	-0,3608	44,93	26,89	0,0046	-0,3610	39,31	29,54	0,0049	-0,3611
92,42	50,04	0,0089	-0,3636	82,06	54,85	0,0092	-0,3637	70,93	60,24	0,0097	-0,3641
133,10	75,12	0,0133	-0,3684	117,69	82,47	0,0138	-0,3686	101,15	90,47	0,0146	-0,3690
171,98	98,32	0,0177	-0,3743	151,54	106,92	0,0184	-0,3732	129,64	115,91	0,0194	-0,3719
208,13	116,37	0,0221	-0,3773	182,85	125,90	0,0231	-0,3741	155,83	135,77	0,0243	-0,3705
240,73	130,38	0,0266	-0,3765	211,29	140,99	0,0277	-0,3714	179,65	151,87	0,0292	-0,3654
269,60	141,76	0,0310	-0,3727	236,88	153,47	0,0323	-0,3659	201,21	165,46	0,0340	-0,3576
294,85	151,42	0,0354	-0,3662	259,80	164,15	0,0369	-0,3583	220,70	177,28	0,0389	-0,3479
316,96	159,88	0,0398	-0,3580	280,24	173,54	0,0415	-0,3492	238,27	187,79	0,0438	-0,3368
336,48	167,38	0,0443	-0,3487	298,38	181,94	0,0461	-0,3391	254,06	197,29	0,0486	-0,3249
353,75	174,08	0,0487	-0,3391	314,42	189,55	0,0507	-0,3286	268,20	205,96	0,0535	-0,3127
369,09	180,14	0,0531	-0,3295	328,64	196,51	0,0553	-0,3180	280,81	213,96	0,0583	-0,3004
382,89	185,73	0,0575	-0,3200	341,36	202,97	0,0599	-0,3075	292,09	221,43	0,0632	-0,2882
394,26	190,28	0,0620	-0,3129	351,97	208,60	0,0646	-0,2987	301,75	228,27	0,0681	-0,2770
403,54	194,23	0,0664	-0,3077	361,07	213,65	0,0692	-0,2910	309,49	234,30	0,0729	-0,2675
411,24	197,78	0,0708	-0,3042	368,29	218,25	0,0738	-0,2853	316,51	240,12	0,0778	-0,2584
418,35	201,22	0,0753	-0,3013	374,34	222,56	0,0784	-0,2808	322,03	245,57	0,0826	-0,2508
424,98	204,58	0,0797	-0,2989	379,90	226,77	0,0830	-0,2767	326,35	250,72	0,0875	-0,2447
431,21	207,86	0,0841	-0,2969	385,06	230,90	0,0876	-0,2732	330,28	255,76	0,0924	-0,2390
436,79	210,97	0,0885	-0,2962	389,89	234,97	0,0922	-0,2700	333,90	260,71	0,0972	-0,2338

Tabela 61 – $\alpha = 300^\circ$				Tabela 62 – $\alpha = 305^\circ$				Tabela 63 – $\alpha = 310^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
33,11	32,61	0,0052	-0,3613	25,96	36,19	0,0056	-0,3616	17,42	40,24	0,0062	-0,3620
58,66	66,48	0,0104	-0,3646	44,60	73,73	0,0113	-0,3654	27,90	81,89	0,0123	-0,3666
82,97	99,24	0,0156	-0,3694	62,21	108,73	0,0169	-0,3696	37,69	118,59	0,0185	-0,3696
105,64	125,55	0,0208	-0,3702	78,40	135,81	0,0225	-0,3681	46,52	146,33	0,0247	-0,3653
126,33	146,24	0,0260	-0,3662	93,04	157,30	0,0282	-0,3611	54,41	168,54	0,0309	-0,3551
145,10	163,31	0,0312	-0,3584	106,26	175,29	0,0338	-0,3501	61,46	187,36	0,0370	-0,3407
162,11	177,96	0,0364	-0,3478	118,20	190,95	0,0395	-0,3363	67,78	203,94	0,0432	-0,3236
177,51	190,90	0,0416	-0,3353	128,98	204,97	0,0451	-0,3206	73,45	218,93	0,0494	-0,3045
191,44	202,57	0,0468	-0,3215	138,70	217,75	0,0507	-0,3036	78,52	232,70	0,0556	-0,2842
203,99	213,24	0,0520	-0,3069	147,43	229,55	0,0564	-0,2859	83,03	245,51	0,0617	-0,2632
215,26	223,08	0,0572	-0,2920	155,23	240,55	0,0620	-0,2678	87,01	257,50	0,0679	-0,2420
225,33	232,25	0,0624	-0,2770	162,17	250,87	0,0676	-0,2496	90,52	268,81	0,0741	-0,2208
234,35	240,88	0,0676	-0,2622	168,36	260,63	0,0733	-0,2317	93,62	279,53	0,0803	-0,2000
242,46	249,07	0,0728	-0,2476	173,90	269,95	0,0789	-0,2140	96,40	289,77	0,0864	-0,1796
248,34	256,21	0,0780	-0,2355	177,99	278,44	0,0845	-0,1981	98,75	299,49	0,0926	-0,1601
253,61	263,08	0,0832	-0,2239	181,11	286,35	0,0902	-0,1835	99,79	306,48	0,0988	-0,1399
258,38	269,73	0,0884	-0,2127	183,90	293,67	0,0958	-0,1689	100,67	313,05	0,1050	-0,1202
262,59	276,18	0,0936	-0,2021	186,54	299,39	0,1014	-0,1524	101,42	319,38	0,1111	-0,1010
265,14	281,85	0,0988	-0,1933	188,96	304,93	0,1071	-0,1363	102,05	325,50	0,1173	-0,0825
267,59	286,25	0,1040	-0,1826	191,21	310,31	0,1127	-0,1206	102,53	331,20	0,1235	-0,0639

Tabela 64 – $\alpha = 315^\circ$				Tabela 65 – $\alpha = 320^\circ$				Tabela 66 – $\alpha = 325^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
7,05	44,82	0,0068	-0,3626	-3,38	39,83	0,0061	-0,3624	-11,87	35,54	0,0056	-0,3623
7,74	90,88	0,0137	-0,3681	-12,55	81,06	0,0123	-0,3673	-29,18	72,40	0,0111	-0,3668
8,35	128,69	0,0205	-0,3694	-21,10	117,62	0,0184	-0,3710	-45,46	107,04	0,0167	-0,3719
8,81	156,93	0,0273	-0,3620	-28,97	145,33	0,0245	-0,3674	-60,56	134,06	0,0223	-0,3717
9,15	179,72	0,0342	-0,3483	-36,11	167,53	0,0306	-0,3581	-74,34	155,53	0,0278	-0,3662
9,43	199,21	0,0410	-0,3305	-42,57	186,33	0,0368	-0,3448	-86,85	173,51	0,0334	-0,3569
9,65	216,52	0,0478	-0,3100	-48,39	202,88	0,0429	-0,3287	-98,19	189,15	0,0390	-0,3449
9,84	232,25	0,0547	-0,2877	-53,63	217,83	0,0490	-0,3107	-108,44	203,13	0,0445	-0,3311
10,01	246,78	0,0615	-0,2645	-58,32	231,57	0,0552	-0,2916	-117,69	215,87	0,0501	-0,3161
10,18	260,31	0,0684	-0,2408	-62,47	244,33	0,0613	-0,2718	-125,97	227,61	0,0557	-0,3005
10,35	272,99	0,0752	-0,2173	-66,10	256,27	0,0674	-0,2519	-133,33	238,54	0,0612	-0,2845
10,53	284,93	0,0820	-0,1941	-69,25	267,52	0,0736	-0,2320	-139,82	248,77	0,0668	-0,2687
10,71	296,27	0,0889	-0,1717	-71,98	278,17	0,0797	-0,2125	-145,54	258,44	0,0724	-0,2530
10,89	306,17	0,0957	-0,1483	-74,36	288,33	0,0858	-0,1936	-150,59	267,64	0,0779	-0,2378
11,03	314,43	0,1025	-0,1235	-76,26	297,95	0,0919	-0,1755	-154,08	275,99	0,0835	-0,2244
11,22	321,86	0,1094	-0,1011	-76,85	305,24	0,0981	-0,1576	-156,57	283,75	0,0891	-0,2124
11,48	328,19	0,1162	-0,0824	-77,29	311,73	0,1042	-0,1395	-158,67	291,23	0,0946	-0,2010
11,75	334,27	0,1230	-0,0646	-77,57	317,98	0,1103	-0,1220	-160,66	297,19	0,1002	-0,1880
11,96	338,67	0,1299	-0,0433	-77,72	324,01	0,1165	-0,1052	-162,48	302,60	0,1058	-0,1748
12,13	342,10	0,1367	-0,0201	-77,76	329,87	0,1226	-0,0890	-163,85	307,80	0,1113	-0,1626

Tabela 67 – $\alpha = 330^\circ$				Tabela 68 – $\alpha = 335^\circ$				Tabela 69 – $\alpha = 340^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-18,91	31,80	0,0051	-0,3623	-24,99	28,63	0,0048	-0,3623	-30,42	25,88	0,0045	-0,3624
-43,05	64,83	0,0102	-0,3665	-55,06	58,39	0,0095	-0,3664	-65,82	52,80	0,0090	-0,3665
-65,90	96,97	0,0153	-0,3723	-83,69	87,77	0,0143	-0,3725	-99,67	79,38	0,0135	-0,3727
-87,31	123,17	0,0204	-0,3748	-110,72	113,03	0,0191	-0,3772	-131,81	103,51	0,0180	-0,3791
-106,98	143,85	0,0256	-0,3728	-135,72	132,89	0,0238	-0,3781	-161,73	122,51	0,0225	-0,3825
-124,90	160,93	0,0307	-0,3671	-158,56	149,03	0,0286	-0,3755	-189,07	137,67	0,0270	-0,3827
-141,20	175,57	0,0358	-0,3589	-179,31	162,64	0,0334	-0,3705	-213,81	150,20	0,0315	-0,3804
-155,97	188,50	0,0409	-0,3489	-198,10	174,46	0,0381	-0,3638	-236,06	160,91	0,0360	-0,3764
-169,32	200,13	0,0460	-0,3377	-215,05	184,95	0,0429	-0,3559	-255,97	170,27	0,0405	-0,3711
-181,34	210,74	0,0511	-0,3259	-230,27	194,41	0,0477	-0,3474	-273,69	178,60	0,0450	-0,3651
-192,07	220,52	0,0562	-0,3138	-243,85	203,00	0,0524	-0,3386	-289,33	186,09	0,0495	-0,3588
-201,60	229,60	0,0613	-0,3018	-255,90	210,90	0,0572	-0,3300	-303,10	192,90	0,0540	-0,3527
-210,05	238,11	0,0665	-0,2901	-266,59	218,25	0,0620	-0,3217	-315,29	199,19	0,0585	-0,3469
-217,54	246,17	0,0716	-0,2788	-275,59	224,91	0,0667	-0,3145	-325,24	204,59	0,0630	-0,3428
-222,71	253,14	0,0767	-0,2700	-282,57	230,75	0,0715	-0,3091	-333,57	209,40	0,0675	-0,3401
-227,22	259,84	0,0818	-0,2618	-288,80	236,35	0,0763	-0,3043	-339,72	213,69	0,0721	-0,3395
-231,20	266,31	0,0869	-0,2541	-293,22	241,52	0,0810	-0,3014	-344,75	217,72	0,0766	-0,3401
-234,35	272,50	0,0920	-0,2474	-296,55	246,42	0,0858	-0,2997	-349,25	221,63	0,0811	-0,3414
-235,91	278,27	0,0971	-0,2429	-299,46	251,20	0,0905	-0,2985	-353,31	225,46	0,0856	-0,3432
-237,35	283,16	0,1022	-0,2375	-302,02	255,88	0,0953	-0,2979	-357,00	229,21	0,0901	-0,3455

Tabela 70 – $\alpha = 345^\circ$				Tabela 71 – $\alpha = 350^\circ$				Tabela 72 – $\alpha = 355^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰	M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603	6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-35,41	23,45	0,0043	-0,3625	-40,12	21,25	0,0042	-0,3626	-44,72	19,22	0,0041	-0,3627
-75,73	47,83	0,0086	-0,3667	-85,11	43,32	0,0083	-0,3670	-94,26	39,16	0,0082	-0,3673
-114,41	71,78	0,0129	-0,3730	-128,39	64,87	0,0125	-0,3735	-142,03	58,47	0,0122	-0,3742
-151,30	94,42	0,0172	-0,3807	-169,79	85,63	0,0167	-0,3821	-187,83	77,06	0,0163	-0,3834
-185,84	112,52	0,0215	-0,3863	-208,75	102,78	0,0208	-0,3898	-231,03	93,12	0,0204	-0,3930
-217,32	126,65	0,0258	-0,3889	-243,87	115,82	0,0250	-0,3943	-268,52	105,22	0,0245	-0,3983
-245,48	138,09	0,0302	-0,3888	-274,36	126,28	0,0292	-0,3954	-300,32	114,93	0,0285	-0,3997
-270,36	147,72	0,0345	-0,3866	-300,75	135,07	0,0333	-0,3940	-327,82	123,01	0,0326	-0,3986
-292,21	156,10	0,0388	-0,3829	-323,88	142,62	0,0375	-0,3911	-351,88	129,86	0,0367	-0,3959
-311,45	163,47	0,0431	-0,3784	-344,24	149,17	0,0417	-0,3875	-373,04	135,72	0,0408	-0,3927
-328,41	170,02	0,0474	-0,3737	-362,19	154,88	0,0458	-0,3839	-391,66	140,74	0,0448	-0,3895
-343,36	175,87	0,0517	-0,3693	-378,03	159,90	0,0500	-0,3807	-408,14	145,07	0,0489	-0,3869
-356,68	181,22	0,0560	-0,3654	-392,21	164,42	0,0542	-0,3780	-422,73	148,76	0,0530	-0,3852
-367,40	185,50	0,0603	-0,3637	-403,07	167,56	0,0583	-0,3787	-433,14	150,85	0,0571	-0,3884
-375,73	189,10	0,0646	-0,3644	-411,46	170,08	0,0625	-0,3821	-442,24	152,61	0,0611	-0,3929
-382,45	192,31	0,0689	-0,3668	-419,06	172,43	0,0667	-0,3863	-450,56	154,21	0,0652	-0,3984
-388,52	195,40	0,0732	-0,3698	-426,02	174,66	0,0708	-0,3913	-458,27	155,69	0,0693	-0,4046
-394,05	198,38	0,0775	-0,3735	-432,45	176,80	0,0750	-0,3969	-465,46	157,10	0,0734	-0,4117
-399,13	201,30	0,0818	-0,3778	-438,43	178,89	0,0792	-0,4032	-472,22	158,45	0,0775	-0,4194
-403,84	204,17	0,0861	-0,3826	-444,05	180,93	0,0833	-0,4100	-478,63	159,76	0,0815	-0,4278

Tabela 73 – $\alpha = 360^\circ$			
M_1 KN · m	M_2 KN · m	$\rho \cdot 10^3$ cm ⁻¹	ε_0 ‰
6,42	-1,28	0,0000	-0,3603
-49,34	17,32	0,0040	-0,3628
-103,48	35,25	0,0081	-0,3678
-155,77	52,42	0,0121	-0,3751
-206,00	68,78	0,0161	-0,3850
-252,55	83,57	0,0202	-0,3955
-291,27	94,98	0,0242	-0,4007
-324,02	104,08	0,0282	-0,4018
-352,28	111,59	0,0323	-0,4003
-376,93	117,91	0,0363	-0,3974
-398,56	123,26	0,0403	-0,3939
-417,55	127,76	0,0444	-0,3905
-434,42	131,60	0,0484	-0,3877
-448,50	134,43	0,0524	-0,3873
-459,06	135,83	0,0565	-0,3912
-468,68	137,00	0,0605	-0,3963
-477,56	138,02	0,0645	-0,4023
-485,86	138,92	0,0686	-0,4092
-493,66	139,74	0,0726	-0,4169
-501,07	140,50	0,0766	-0,4255
-508,13	141,22	0,0807	-0,4348

11.5. Processo Acoplado

Iteração 1

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0	250	-0,0115	0,2170	0,0000000
1	87,953	240	0	240	-0,0110	0,1880	0,1590586
2	91,206	230	0	230	-0,0101	0,1608	0,2960488
3	88,438	220	0	220	-0,0100	0,1348	0,4121414
4	109,403	210	0	210	-0,0077	0,1120	0,5090543
5	116,006	200	0	200	-0,0069	0,0931	0,5895694
6	68,307	190	0	190	-0,0112	0,0697	0,6534860
7	78,913	180	0	180	-0,0092	0,0434	0,6979141
8	78,982	170	0	170	-0,0087	0,0204	0,7230006
9	81,829	160	0	160	-0,0079	-0,0009	0,7306905
10	81,736	150	0	150	-0,0074	-0,0205	0,7222932
11	83,554	140	0	140	-0,0067	-0,0387	0,6990246
12	83,580	130	0	130	-0,0063	-0,0555	0,6620243
13	84,878	120	0	120	-0,0057	-0,0709	0,6123954
14	85,249	110	0	110	-0,0052	-0,0849	0,5512109
15	86,309	100	0	100	-0,0047	-0,0976	0,4795306
16	87,254	90	0	90	-0,0041	-0,1090	0,3984013
17	87,740	80	0	80	-0,0037	-0,1191	0,3088532
18	89,992	70	0	70	-0,0031	-0,1278	0,2119055
19	92,199	60	0	60	-0,0026	-0,1352	0,1086065
20	94,984	50	0	50	-0,0021	-0,1413	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0	50	0,0077	-0,3122	0,0000000
1	78,793	55	0	55	0,0084	-0,2914	-0,237022
2	78,420	60	0	60	0,0092	-0,2688	-0,457009
3	80,987	65	0	65	0,0096	-0,2445	-0,658589
4	70,733	70	0	70	0,0119	-0,2168	-0,839764
5	71,751	75	0	75	0,0125	-0,1854	-0,997697
6	103,942	80	0	80	0,0092	-0,1573	-1,132249
7	87,775	85	0	85	0,0116	-0,1304	-1,245224
8	87,368	90	0	90	0,0124	-0,0995	-1,335506
9	85,665	95	0	95	0,0133	-0,0664	-1,400660
10	85,624	100	0	100	0,0140	-0,0312	-1,438996
11	85,143	105	0	105	0,0148	0,0059	-1,448922
12	84,984	110	0	110	0,0155	0,0450	-1,428915
13	84,645	115	0	115	0,0163	0,0860	-1,377447
14	84,292	120	0	120	0,0171	0,1291	-1,292970
15	83,837	125	0	125	0,0179	0,1741	-1,173895
16	83,299	130	0	130	0,0187	0,2213	-1,018587
17	82,621	135	0	135	0,0196	0,2707	-0,825345
18	81,930	140	0	140	0,0205	0,3224	-0,592401
19	81,118	145	0	145	0,0214	0,3765	-0,317923
20	80,224	150	0	150	0,0224	0,4331	0,0000000

Iteração 2

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0	250	-0,0115	0,2335	0,0000000
1	87,776	240	3,181	243,181	-0,0111	0,2043	0,1719025
2	87,918	230	5,921	235,921	-0,0108	0,1760	0,3212371
3	106,696	220	8,243	228,243	-0,0086	0,1510	0,4496404
4	72,947	210	10,181	220,181	-0,0121	0,1242	0,5577158
5	80,305	200	11,791	211,791	-0,0106	0,0949	0,6437665
6	87,661	190	13,070	203,070	-0,0093	0,0692	0,7082073
7	85,079	180	13,958	193,958	-0,0092	0,0454	0,7531961
8	83,883	170	14,460	184,460	-0,0088	0,0221	0,7797008
9	84,113	160	14,614	174,614	-0,0084	0,0000	0,7883758
10	83,528	150	14,446	164,446	-0,0079	-0,0210	0,7801051
11	83,856	140	13,980	153,980	-0,0074	-0,0408	0,7558460
12	83,805	130	13,240	143,240	-0,0069	-0,0591	0,7166152
13	84,007	120	12,248	132,248	-0,0063	-0,0762	0,6634752
14	84,462	110	11,024	121,024	-0,0058	-0,0918	0,5975223
15	85,503	100	9,591	109,591	-0,0052	-0,1059	0,5199154
16	86,586	90	7,968	97,968	-0,0046	-0,1184	0,4318640
17	88,077	80	6,177	86,177	-0,0039	-0,1293	0,3346001
18	90,404	70	4,238	74,238	-0,0033	-0,1386	0,2293731
19	92,126	60	2,172	62,172	-0,0027	-0,1464	0,1174335
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1526	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0	50	0,0077	-0,3845	0,0000000
1	79,214	55	4,740	59,740	0,0090	-0,3629	-0,293505
2	80,517	60	9,140	69,140	0,0103	-0,3380	-0,568726
3	71,565	65	13,172	78,172	0,0131	-0,3078	-0,822303
4	96,632	70	16,795	86,795	0,0108	-0,2770	-1,051942
5	87,397	75	19,954	94,954	0,0130	-0,2463	-1,257440
6	84,278	80	22,645	102,645	0,0146	-0,2107	-1,436890
7	83,916	85	24,904	109,904	0,0157	-0,1716	-1,586995
8	83,355	90	26,710	116,710	0,0168	-0,1297	-1,705291
9	82,724	95	28,013	123,013	0,0178	-0,0850	-1,789597
10	82,111	100	28,780	128,780	0,0188	-0,0378	-1,837813
11	81,525	105	28,978	133,978	0,0197	0,0119	-1,847967
12	80,987	110	28,578	138,578	0,0205	0,0638	-1,818245
13	80,531	115	27,549	142,549	0,0212	0,1176	-1,747008
14	80,181	120	25,859	145,859	0,0218	0,1731	-1,632831
15	79,969	125	23,478	148,478	0,0223	0,2300	-1,474533
16	79,919	130	20,372	150,372	0,0226	0,2878	-1,271209
17	80,081	135	16,507	151,507	0,0227	0,3461	-1,022265
18	80,208	140	11,848	151,848	0,0227	0,4047	-0,727418
19	80,102	145	6,358	151,358	0,0227	0,4632	-0,386611
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5213	0,0000000

Iteração 3

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm ⁻¹)	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2350	0,0000000
1	87,777	240	3,438	243,438	-0,0112	0,2058	0,1730989
2	87,852	230	6,425	236,425	-0,0108	0,1775	0,3236025
3	101,435	220	8,993	228,993	-0,0091	0,1518	0,4528962
4	81,251	210	11,154	221,154	-0,0110	0,1260	0,5619682
5	84,014	200	12,875	212,875	-0,0102	0,0987	0,6501931
6	81,667	190	14,164	204,164	-0,0101	0,0726	0,7174602
7	82,307	180	15,064	195,064	-0,0095	0,0473	0,7645554
8	81,393	170	15,594	185,594	-0,0092	0,0232	0,7922599
9	82,426	160	15,768	175,768	-0,0086	0,0003	0,8015050
10	82,273	150	15,602	165,602	-0,0081	-0,0212	0,7933191
11	82,640	140	15,117	155,117	-0,0076	-0,0413	0,7687670
12	83,059	130	14,332	144,332	-0,0070	-0,0601	0,7289295
13	82,848	120	13,270	133,270	-0,0065	-0,0775	0,6749136
14	83,702	110	11,950	121,950	-0,0059	-0,0934	0,6078379
15	84,534	100	10,398	110,398	-0,0053	-0,1077	0,5288907
16	85,388	90	8,637	98,637	-0,0046	-0,1204	0,4393030
17	87,092	80	6,692	86,692	-0,0040	-0,1316	0,3403221
18	89,870	70	4,587	74,587	-0,0033	-0,1411	0,2332429
19	92,270	60	2,349	62,349	-0,0027	-0,1489	0,1193791
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1551	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm ⁻¹)	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4099	0,0000000
1	79,326	55	5,870	60,870	0,0092	-0,3881	-0,313373
2	80,728	60	11,375	71,375	0,0106	-0,3625	-0,608147
3	74,112	65	16,446	81,446	0,0132	-0,3319	-0,880848
4	86,880	70	21,039	91,039	0,0126	-0,2987	-1,128467
5	84,172	75	25,149	100,149	0,0143	-0,2641	-1,349459
6	83,655	80	28,738	108,738	0,0156	-0,2256	-1,541742
7	82,779	85	31,740	116,740	0,0169	-0,1837	-1,702446
8	82,033	90	34,106	124,106	0,0181	-0,1385	-1,828938
9	81,255	95	35,792	130,792	0,0193	-0,0902	-1,918716
10	80,551	100	36,756	136,756	0,0204	-0,0390	-1,969443
11	79,905	105	36,959	141,959	0,0213	0,0147	-1,978985
12	79,357	110	36,365	146,365	0,0221	0,0707	-1,945435
13	78,901	115	34,940	149,940	0,0228	0,1286	-1,867153
14	78,611	120	32,657	152,657	0,0233	0,1880	-1,742795
15	78,486	125	29,491	154,491	0,0236	0,2485	-1,571355
16	78,570	130	25,424	155,424	0,0237	0,3096	-1,352199
17	78,937	135	20,445	155,445	0,0236	0,3706	-1,085102
18	79,620	140	14,548	154,548	0,0233	0,4311	-0,770285
19	79,899	145	7,732	152,732	0,0229	0,4907	-0,408324
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5491	0,000000

Iteração 4

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2354	0,0000000
1	87,784	240	3,462	243,462	-0,0112	0,2062	0,1733887
2	87,847	230	6,472	236,472	-0,0108	0,1778	0,3241803
3	99,725	220	9,058	229,058	-0,0092	0,1519	0,4536788
4	85,198	210	11,239	221,239	-0,0104	0,1266	0,5630486
5	83,007	200	13,004	213,004	-0,0103	0,0998	0,6519349
6	79,940	190	14,349	204,349	-0,0103	0,0732	0,7198720
7	81,943	180	15,291	195,291	-0,0096	0,0476	0,7673147
8	80,757	170	15,845	185,845	-0,0093	0,0233	0,7951549
9	82,358	160	16,030	176,030	-0,0086	0,0003	0,8044128
10	82,060	150	15,866	165,866	-0,0081	-0,0213	0,7961595
11	82,689	140	15,375	155,375	-0,0076	-0,0415	0,7714915
12	83,006	130	14,579	144,579	-0,0070	-0,0603	0,7315044
13	82,635	120	13,498	133,498	-0,0065	-0,0777	0,6773041
14	83,602	110	12,157	122,157	-0,0059	-0,0937	0,6099990
15	84,338	100	10,578	110,578	-0,0053	-0,1081	0,5307806
16	85,089	90	8,786	98,786	-0,0047	-0,1209	0,4408804
17	86,836	80	6,806	86,806	-0,0040	-0,1321	0,3415441
18	89,625	70	4,665	74,665	-0,0034	-0,1416	0,2340741
19	92,325	60	2,388	62,388	-0,0027	-0,1494	0,1197979
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1556	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4182	0,0000000
1	79,366	55	6,267	61,267	0,0093	-0,3963	-0,319825
2	80,800	60	12,163	72,163	0,0107	-0,3705	-0,620939
3	75,031	65	17,617	82,617	0,0132	-0,3397	-0,899831
4	84,240	70	22,569	92,569	0,0132	-0,3057	-1,153251
5	83,987	75	26,989	101,989	0,0146	-0,2699	-1,379262
6	83,467	80	30,835	110,835	0,0159	-0,2306	-1,575785
7	82,403	85	34,049	119,049	0,0173	-0,1877	-1,740031
8	81,628	90	36,579	126,579	0,0186	-0,1414	-1,869248
9	80,806	95	38,374	133,374	0,0198	-0,0919	-1,960832
10	80,085	100	39,389	139,389	0,0209	-0,0394	-2,012380
11	79,429	105	39,580	144,580	0,0218	0,0157	-2,021710
12	78,876	110	38,909	148,909	0,0226	0,0730	-1,986895
13	78,421	115	37,343	152,343	0,0233	0,1322	-1,906297
14	78,147	120	34,856	154,856	0,0238	0,1929	-1,778604
15	78,046	125	31,427	156,427	0,0240	0,2546	-1,602872
16	78,168	130	27,044	157,044	0,0241	0,3166	-1,378560
17	78,593	135	21,702	156,702	0,0239	0,3785	-1,105564
18	79,358	140	15,406	155,406	0,0235	0,4397	-0,784257
19	79,836	145	8,166	153,166	0,0230	0,4996	-0,415404
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5582	0,0000000

Iteração 5

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2354	0,0000000
1	87,786	240	3,468	243,468	-0,0112	0,2062	0,1734404
2	87,847	230	6,484	236,484	-0,0108	0,1779	0,3242836
3	99,182	220	9,074	229,074	-0,0093	0,1519	0,4538072
4	86,619	210	11,261	221,261	-0,0103	0,1267	0,5632363
5	82,697	200	13,039	213,039	-0,0104	0,1001	0,6523082
6	79,403	190	14,397	204,397	-0,0104	0,0734	0,7204398
7	81,843	180	15,346	195,346	-0,0096	0,0477	0,7679764
8	80,566	170	15,903	185,903	-0,0093	0,0233	0,7958468
9	82,357	160	16,088	176,088	-0,0086	0,0003	0,8051010
10	82,009	150	15,923	165,923	-0,0081	-0,0213	0,7968244
11	82,727	140	15,430	155,430	-0,0076	-0,0416	0,7721242
12	83,008	130	14,630	144,630	-0,0070	-0,0604	0,7321003
13	82,581	120	13,546	133,546	-0,0065	-0,0778	0,6778580
14	83,585	110	12,200	122,200	-0,0059	-0,0937	0,6105013
15	84,287	100	10,616	110,616	-0,0053	-0,1081	0,5312222
16	85,001	90	8,818	98,818	-0,0047	-0,1210	0,4412512
17	86,760	80	6,831	86,831	-0,0040	-0,1322	0,3418329
18	89,550	70	4,681	74,681	-0,0034	-0,1417	0,2342711
19	92,344	60	2,396	62,396	-0,0027	-0,1495	0,1198972
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1558	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4208	0,0000000
1	79,378	55	6,396	61,396	0,0093	-0,3989	-0,321916
2	80,823	60	12,419	72,419	0,0107	-0,3731	-0,625087
3	75,331	65	17,997	82,997	0,0132	-0,3422	-0,905986
4	83,463	70	23,065	93,065	0,0134	-0,3079	-1,161289
5	83,927	75	27,585	102,585	0,0147	-0,2718	-1,388934
6	83,408	80	31,516	111,516	0,0160	-0,2322	-1,586842
7	82,284	85	34,801	119,801	0,0175	-0,1890	-1,752245
8	81,500	90	37,385	127,385	0,0188	-0,1423	-1,882352
9	80,665	95	39,217	134,217	0,0200	-0,0924	-1,974527
10	79,937	100	40,248	140,248	0,0210	-0,0395	-2,026345
11	79,279	105	40,434	145,434	0,0220	0,0160	-2,035608
12	78,723	110	39,738	149,738	0,0228	0,0737	-2,000382
13	78,269	115	38,126	153,126	0,0235	0,1334	-1,919031
14	78,001	120	35,572	155,572	0,0239	0,1945	-1,790252
15	77,907	125	32,057	157,057	0,0242	0,2565	-1,613124
16	78,040	130	27,571	157,571	0,0242	0,3189	-1,387135
17	78,483	135	22,111	157,111	0,0240	0,3811	-1,112220
18	79,273	140	15,685	155,685	0,0236	0,4425	-0,788802
19	79,815	145	8,308	153,308	0,0230	0,5025	-0,417707
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5612	0,0000000

Iteração 6

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2350	0,0000000
1	87,787	240	3,469	243,469	-0,0112	0,2058	0,1731158
2	87,847	230	6,486	236,486	-0,0108	0,1775	0,3236344
3	99,010	220	9,076	229,076	-0,0093	0,1515	0,4528252
4	87,094	210	11,265	221,265	-0,0102	0,1263	0,5619332
5	82,599	200	13,046	213,046	-0,0104	0,0998	0,6507259
6	79,231	190	14,409	204,409	-0,0104	0,0730	0,7185821
7	81,812	180	15,360	195,360	-0,0096	0,0473	0,7658115
8	82,969	170	15,917	185,917	-0,0090	0,0232	0,7934945
9	82,359	160	16,102	176,102	-0,0086	0,0005	0,8028303
10	81,994	150	15,936	165,936	-0,0081	-0,0211	0,7947696
11	82,741	140	15,442	155,442	-0,0076	-0,0413	0,7702832
12	83,011	130	14,642	144,642	-0,0070	-0,0601	0,7304726
13	82,564	120	13,557	133,557	-0,0065	-0,0775	0,6764426
14	83,582	110	12,210	122,210	-0,0059	-0,0935	0,6092958
15	84,272	100	10,624	110,624	-0,0053	-0,1079	0,5302241
16	84,973	90	8,825	98,825	-0,0047	-0,1207	0,4404579
17	86,736	80	6,837	86,837	-0,0040	-0,1319	0,3412411
18	89,526	70	4,685	74,685	-0,0034	-0,1415	0,2338778
19	92,350	60	2,398	62,398	-0,0027	-0,1493	0,1197008
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1555	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4217	0,0000000
1	79,382	55	6,438	61,438	0,0093	-0,3998	-0,322616
2	80,830	60	12,502	72,502	0,0108	-0,3740	-0,626475
3	75,427	65	18,120	83,120	0,0132	-0,3431	-0,908046
4	83,221	70	23,226	93,226	0,0134	-0,3087	-1,163981
5	83,908	75	27,779	102,779	0,0147	-0,2724	-1,392179
6	83,389	80	31,737	111,737	0,0161	-0,2328	-1,590558
7	82,246	85	35,045	120,045	0,0175	-0,1895	-1,756358
8	81,383	90	37,647	127,647	0,0188	-0,1426	-1,886767
9	80,619	95	39,491	134,491	0,0200	-0,0926	-1,979130
10	79,890	100	40,527	140,527	0,0211	-0,0396	-2,031023
11	79,231	105	40,712	145,712	0,0221	0,0161	-2,040249
12	78,675	110	40,008	150,008	0,0229	0,0740	-2,004876
13	78,220	115	38,381	153,381	0,0235	0,1338	-1,923267
14	77,954	120	35,805	155,805	0,0240	0,1950	-1,794122
15	77,862	125	32,262	157,262	0,0242	0,2572	-1,616526
16	77,999	130	27,743	157,743	0,0243	0,3197	-1,389978
17	78,448	135	22,244	157,244	0,0240	0,3820	-1,114426
18	79,246	140	15,776	155,776	0,0236	0,4434	-0,790307
19	79,808	145	8,354	153,354	0,0231	0,5035	-0,418470
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5621	0,0000000

Iteração 7

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm ⁻¹)	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2350	0,0000000
1	87,788	240	3,462	243,462	-0,0112	0,2058	0,1730870
2	87,848	230	6,473	236,473	-0,0108	0,1774	0,3235774
3	98,973	220	9,057	229,057	-0,0093	0,1515	0,4527397
4	87,225	210	11,239	221,239	-0,0102	0,1263	0,5618251
5	82,582	200	13,015	213,015	-0,0104	0,0998	0,6506103
6	79,176	190	14,372	204,372	-0,0104	0,0730	0,7184641
7	81,806	180	15,316	195,316	-0,0096	0,0472	0,7656859
8	82,965	170	15,870	185,870	-0,0090	0,0232	0,7933610
9	82,361	160	16,057	176,057	-0,0086	0,0005	0,8026928
10	81,986	150	15,895	165,895	-0,0081	-0,0211	0,7946320
11	82,747	140	15,406	155,406	-0,0076	-0,0413	0,7701491
12	83,011	130	14,609	144,609	-0,0070	-0,0601	0,7303459
13	82,557	120	13,529	133,529	-0,0065	-0,0775	0,6763265
14	83,582	110	12,186	122,186	-0,0059	-0,0935	0,6091926
15	84,268	100	10,604	110,604	-0,0053	-0,1079	0,5301359
16	84,966	90	8,809	98,809	-0,0047	-0,1207	0,4403861
17	86,730	80	6,825	86,825	-0,0040	-0,1319	0,3411865
18	89,520	70	4,678	74,678	-0,0034	-0,1414	0,2338411
19	92,353	60	2,394	62,394	-0,0027	-0,1493	0,1196823
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1555	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm ⁻¹)	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4220	0,0000000
1	79,384	55	6,452	61,452	0,0093	-0,4001	-0,322838
2	80,833	60	12,529	72,529	0,0108	-0,3742	-0,626914
3	75,453	65	18,161	83,161	0,0132	-0,3433	-0,908697
4	83,156	70	23,280	93,280	0,0135	-0,3089	-1,164831
5	83,902	75	27,844	102,844	0,0147	-0,2726	-1,393203
6	83,385	80	31,811	111,811	0,0161	-0,2329	-1,591731
7	82,235	85	35,127	120,127	0,0175	-0,1896	-1,757656
8	81,371	90	37,735	127,735	0,0188	-0,1427	-1,888161
9	80,605	95	39,583	134,583	0,0200	-0,0926	-1,980588
10	79,875	100	40,620	140,620	0,0211	-0,0396	-2,032510
11	79,216	105	40,805	145,805	0,0221	0,0161	-2,041731
12	78,659	110	40,098	150,098	0,0229	0,0741	-2,006315
13	78,204	115	38,465	153,465	0,0235	0,1339	-1,924625
14	77,938	120	35,882	155,882	0,0240	0,1952	-1,795365
15	77,847	125	32,331	157,331	0,0242	0,2574	-1,617620
16	77,986	130	27,800	157,800	0,0243	0,3200	-1,390893
17	78,436	135	22,289	157,289	0,0241	0,3823	-1,115136
18	79,237	140	15,806	155,806	0,0236	0,4437	-0,790792
19	79,806	145	8,369	153,369	0,0231	0,5038	-0,418716
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5624	0,000000

Iteração 8

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2350	0,0000000
1	87,788	240	3,462	243,462	-0,0112	0,2058	0,1730846
2	87,848	230	6,472	236,472	-0,0108	0,1774	0,3235728
3	98,957	220	9,055	229,055	-0,0093	0,1515	0,4527321
4	87,273	210	11,237	221,237	-0,0102	0,1263	0,5618160
5	82,573	200	13,012	213,012	-0,0104	0,0998	0,6506042
6	79,158	190	14,369	204,369	-0,0104	0,0730	0,7184618
7	81,803	180	15,314	195,314	-0,0096	0,0472	0,7656846
8	82,963	170	15,867	185,867	-0,0090	0,0232	0,7933592
9	82,361	160	16,054	176,054	-0,0086	0,0005	0,8026904
10	81,984	150	15,893	165,893	-0,0081	-0,0211	0,7946292
11	82,749	140	15,403	155,403	-0,0076	-0,0413	0,7701460
12	83,011	130	14,607	144,607	-0,0070	-0,0601	0,7303429
13	82,555	120	13,527	133,527	-0,0065	-0,0775	0,6763239
14	83,582	110	12,184	122,184	-0,0059	-0,0935	0,6091904
15	84,267	100	10,603	110,603	-0,0053	-0,1079	0,5301342
16	84,963	90	8,808	98,808	-0,0047	-0,1207	0,4403849
17	86,728	80	6,824	86,824	-0,0040	-0,1319	0,3411858
18	89,518	70	4,677	74,677	-0,0034	-0,1414	0,2338406
19	92,354	60	2,394	62,394	-0,0027	-0,1493	0,1196820
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1555	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4221	0,0000000
1	79,384	55	6,457	61,457	0,0093	-0,4002	-0,322909
2	80,834	60	12,538	72,538	0,0108	-0,3743	-0,627056
3	75,462	65	18,174	83,174	0,0132	-0,3434	-0,908908
4	83,133	70	23,297	93,297	0,0135	-0,3090	-1,165107
5	83,900	75	27,864	102,864	0,0147	-0,2727	-1,393535
6	83,383	80	31,835	111,835	0,0161	-0,2330	-1,592110
7	82,231	85	35,153	120,153	0,0175	-0,1896	-1,758075
8	81,367	90	37,763	127,763	0,0188	-0,1428	-1,888612
9	80,601	95	39,612	134,612	0,0200	-0,0927	-1,981059
10	79,870	100	40,650	140,650	0,0211	-0,0396	-2,032991
11	79,211	105	40,835	145,835	0,0221	0,0161	-2,042209
12	78,654	110	40,126	150,126	0,0229	0,0741	-2,006779
13	78,199	115	38,493	153,493	0,0235	0,1340	-1,925064
14	77,933	120	35,907	155,907	0,0240	0,1953	-1,795766
15	77,843	125	32,352	157,352	0,0242	0,2575	-1,617974
16	77,981	130	27,818	157,818	0,0243	0,3200	-1,391188
17	78,433	135	22,303	157,303	0,0241	0,3823	-1,115365
18	79,235	140	15,816	155,816	0,0236	0,4438	-0,790949
19	79,805	145	8,374	153,374	0,0231	0,5039	-0,418795
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5625	0,0000000

Iteração 9

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2350	0,0000000
1	87,788	240	3,462	243,462	-0,0112	0,2058	0,1730844
2	87,848	230	6,471	236,471	-0,0108	0,1774	0,3235723
3	98,951	220	9,055	229,055	-0,0093	0,1515	0,4527312
4	87,289	210	11,236	221,236	-0,0102	0,1263	0,5618151
5	82,570	200	13,012	213,012	-0,0104	0,0998	0,6506047
6	79,152	190	14,369	204,369	-0,0104	0,0730	0,7184639
7	81,802	180	15,314	195,314	-0,0096	0,0472	0,7656873
8	82,962	170	15,867	185,867	-0,0090	0,0232	0,7933619
9	82,361	160	16,054	176,054	-0,0086	0,0005	0,8026930
10	81,983	150	15,893	165,893	-0,0081	-0,0211	0,7946317
11	82,750	140	15,403	155,403	-0,0076	-0,0413	0,7701483
12	83,011	130	14,607	144,607	-0,0070	-0,0601	0,7303451
13	82,555	120	13,526	133,526	-0,0065	-0,0775	0,6763260
14	83,582	110	12,184	122,184	-0,0059	-0,0935	0,6091924
15	84,266	100	10,603	110,603	-0,0053	-0,1079	0,5301360
16	84,962	90	8,808	98,808	-0,0047	-0,1207	0,4403865
17	86,727	80	6,824	86,824	-0,0040	-0,1319	0,3411870
18	89,517	70	4,677	74,677	-0,0034	-0,1414	0,2338415
19	92,354	60	2,394	62,394	-0,0027	-0,1493	0,1196825
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1555	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4221	0,0000000
1	79,385	55	6,458	61,458	0,0093	-0,4002	-0,322933
2	80,834	60	12,541	72,541	0,0108	-0,3744	-0,627102
3	75,465	65	18,178	83,178	0,0132	-0,3434	-0,908976
4	83,125	70	23,302	93,302	0,0135	-0,3090	-1,165196
5	83,899	75	27,871	102,871	0,0147	-0,2727	-1,393642
6	83,382	80	31,842	111,842	0,0161	-0,2330	-1,592233
7	82,230	85	35,162	120,162	0,0175	-0,1897	-1,758212
8	81,365	90	37,772	127,772	0,0188	-0,1428	-1,888758
9	80,599	95	39,621	134,621	0,0200	-0,0927	-1,981212
10	79,868	100	40,660	140,660	0,0211	-0,0396	-2,033147
11	79,209	105	40,844	145,844	0,0221	0,0161	-2,042365
12	78,652	110	40,136	150,136	0,0229	0,0741	-2,006930
13	78,197	115	38,501	153,501	0,0235	0,1340	-1,925206
14	77,932	120	35,915	155,915	0,0240	0,1953	-1,795896
15	77,841	125	32,359	157,359	0,0243	0,2575	-1,618088
16	77,980	130	27,824	157,824	0,0243	0,3201	-1,391284
17	78,431	135	22,307	157,307	0,0241	0,3824	-1,115440
18	79,234	140	15,819	155,819	0,0236	0,4438	-0,791000
19	79,805	145	8,376	153,376	0,0231	0,5039	-0,418821
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5626	0,000000

Iteração 10 - Convergência

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm ⁻¹)	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	87,549	250	0,000	250,000	-0,0115	0,2350	0,0000000
1	87,788	240	3,462	243,462	-0,0112	0,2058	0,1730843
2	87,848	230	6,471	236,471	-0,0108	0,1774	0,3235723
3	98,949	220	9,055	229,055	-0,0093	0,1515	0,4527310
4	87,294	210	11,236	221,236	-0,0102	0,1263	0,5618149
5	82,569	200	13,012	213,012	-0,0104	0,0998	0,6506051
6	79,150	190	14,369	204,369	-0,0104	0,0730	0,7184648
7	81,801	180	15,314	195,314	-0,0096	0,0472	0,7656884
8	82,962	170	15,867	185,867	-0,0090	0,0232	0,7933631
9	82,361	160	16,054	176,054	-0,0086	0,0005	0,8026942
10	81,983	150	15,893	165,893	-0,0081	-0,0211	0,7946328
11	82,750	140	15,403	155,403	-0,0076	-0,0413	0,7701494
12	83,012	130	14,607	144,607	-0,0070	-0,0601	0,7303461
13	82,555	120	13,527	133,527	-0,0065	-0,0775	0,6763270
14	83,582	110	12,184	122,184	-0,0059	-0,0935	0,6091933
15	84,266	100	10,603	110,603	-0,0053	-0,1079	0,5301368
16	84,962	90	8,808	98,808	-0,0047	-0,1207	0,4403872
17	86,727	80	6,824	86,824	-0,0040	-0,1319	0,3411876
18	89,517	70	4,677	74,677	-0,0034	-0,1414	0,2338418
19	92,354	60	2,394	62,394	-0,0027	-0,1493	0,1196827
20	94,984	50	0,000	50,000	-0,0021	-0,1555	0,0000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm ⁻¹)	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	77,668	50	0,000	50,000	0,0077	-0,4221	0,0000000
1	79,385	55	6,459	61,459	0,0093	-0,4002	-0,322940
2	80,834	60	12,542	72,542	0,0108	-0,3744	-0,627117
3	75,466	65	18,180	83,180	0,0132	-0,3434	-0,908998
4	83,122	70	23,304	93,304	0,0135	-0,3090	-1,165225
5	83,899	75	27,873	102,873	0,0147	-0,2727	-1,393677
6	83,382	80	31,845	111,845	0,0161	-0,2330	-1,592273
7	82,229	85	35,164	120,164	0,0175	-0,1897	-1,758256
8	81,365	90	37,775	127,775	0,0188	-0,1428	-1,888805
9	80,599	95	39,624	134,624	0,0200	-0,0927	-1,981262
10	79,868	100	40,663	140,663	0,0211	-0,0396	-2,033197
11	79,208	105	40,847	145,847	0,0221	0,0161	-2,042415
12	78,652	110	40,139	150,139	0,0229	0,0741	-2,006979
13	78,197	115	38,504	153,504	0,0235	0,1340	-1,925252
14	77,931	120	35,918	155,918	0,0240	0,1953	-1,795939
15	77,841	125	32,362	157,362	0,0243	0,2575	-1,618125
16	77,979	130	27,826	157,826	0,0243	0,3201	-1,391315
17	78,431	135	22,309	157,309	0,0241	0,3824	-1,115464
18	79,233	140	15,820	155,820	0,0236	0,4438	-0,791016
19	79,805	145	8,376	153,376	0,0231	0,5040	-0,418829
20	80,224	150	0,000	150,000	0,0224	0,5626	0,0000000

11.5.1. Dados de localização

É claro que para cada iteração, em cada seção transversal, o software procura na malha de pontos quais são os pontos mais próximos. A partir daí, uma interpolação é feita para determinar a curvatura da seção transversal, baseada nas curvaturas dos pontos conhecidos.

Ilustrativamente, a localização da 10ª iteração é mostrada na tabela abaixo.

Dados de Localização – Iteração 10							
Seção	Pontos de Interpolação	Linha inferior	Tabela 1	Tabela 2	Linha superior	Tabela 3	Tabela 4
0	4	4	52	53	5	52	53
1	4	4	53	54	5	53	54
2	4	4	54	55	5	54	55
3	4	4	55	56	5	55	56
4	4	4	56	57	5	56	57
5	4	5	57	58	6	57	58
6	4	5	57	58	6	57	58
7	4	5	58	59	6	58	59
8	4	5	58	59	6	58	59
9	4	5	59	60	6	59	60
10	4	5	59	60	6	59	60
11	4	5	60	61	6	60	61
12	4	5	60	61	6	60	61
13	4	5	60	61	6	60	61
14	4	5	61	62	6	61	62
15	4	5	61	62	6	61	62
16	4	5	61	62	6	61	62
17	4	5	62	63	6	62	63
18	4	5	62	63	6	62	63
19	4	4	62	63	5	62	63
20	4	4	62	63	5	62	63

11.6. Processo Desacoplado

As rigidezes são determinadas aos níveis dos momentos do ELU nas direções principais:

Para $\alpha = \theta_1 = 45^\circ$: $M_{11}^- = -499,76 \text{ KN} \cdot \text{m}$ e $EI_{11}^- = 49,514\%$ de $E_{cs} \cdot I_{1c}$

Para $\alpha = \theta_1 + 180^\circ = 225^\circ$: $M_{11}^+ = 525,63 \text{ KN} \cdot \text{m}$ e $EI_{11}^+ = 46,515\%$ de $E_{cs} \cdot I_{1c}$

Para $\alpha = \theta_2 = 135^\circ$: $M_{22}^- = -269,37 \text{ KN} \cdot \text{m}$ e $EI_{22}^- = 59,299\%$ de $E_{cs} \cdot I_{2c}$

Para $\alpha = \theta_2 + 180^\circ = 315^\circ$: $M_{22}^+ = 290,74 \text{ KN} \cdot \text{m}$ e $EI_{22}^+ = 49,412\%$ de $E_{cs} \cdot I_{2c}$

Iteração 1

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0	250	-0,0216	0,4087	0,000000
1		240	0	240	-0,0208	0,3540	0,299514
2		230	0	230	-0,0199	0,3016	0,556992
3		220	0	220	-0,0190	0,2514	0,774184
4		210	0	210	-0,0182	0,2035	0,952841
5		200	0	200	-0,0173	0,1578	1,094717
6		190	0	190	-0,0164	0,1143	1,201561
7		180	0	180	-0,0156	0,0730	1,275126
8		170	0	170	-0,0147	0,0340	1,317163
9		160	0	160	-0,0138	-0,0028	1,329424
10		150	0	150	-0,0130	-0,0374	1,313660
11		140	0	140	-0,0121	-0,0697	1,271623
12		130	0	130	-0,0112	-0,0998	1,205064
13		120	0	120	-0,0104	-0,1277	1,115735
14		110	0	110	-0,0095	-0,1533	1,005388
15		100	0	100	-0,0086	-0,1767	0,875773
16		90	0	90	-0,0078	-0,1979	0,728643
17		80	0	80	-0,0069	-0,2169	0,565750
18		70	0	70	-0,0061	-0,2336	0,388843
19		60	0	60	-0,0052	-0,2481	0,199676
20		50	0	50	-0,0043	-0,2604	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0	50	0,0121	-0,5219	0,000000
1		55	0	55	0,0134	-0,4890	-0,396988
2		60	0	60	0,0146	-0,4530	-0,766937
3		65	0	65	0,0158	-0,4139	-1,107388
4		70	0	70	0,0170	-0,3717	-1,415883
5		75	0	75	0,0182	-0,3263	-1,689965
6		80	0	80	0,0194	-0,2778	-1,927175
7		85	0	85	0,0206	-0,2261	-2,125054
8		90	0	90	0,0219	-0,1714	-2,281145
9		95	0	95	0,0231	-0,1135	-2,392990
10		100	0	100	0,0243	-0,0524	-2,458131
11		105	0	105	0,0255	0,0117	-2,474109
12		110	0	110	0,0267	0,0790	-2,438466
13		115	0	115	0,0279	0,1494	-2,348744
14		120	0	120	0,0291	0,2230	-2,202485
15		125	0	125	0,0303	0,2997	-1,997231
16		130	0	130	0,0316	0,3795	-1,730524
17		135	0	135	0,0328	0,4624	-1,399905
18		140	0	140	0,0340	0,5485	-1,002917
19		145	0	145	0,0352	0,6377	-0,537102
20		150	0	150	0,0364	0,7300	0,000000

Iteração 2

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0	250	-0,0216	0,4494	0,000000
1		240	5,990	245,990	-0,0213	0,3940	0,331201
2		230	11,140	241,140	-0,0209	0,3397	0,619353
3		220	15,484	235,484	-0,0204	0,2866	0,865303
4		210	19,057	229,057	-0,0198	0,2348	1,070041
5		200	21,894	221,894	-0,0192	0,1845	1,234690
6		190	24,031	214,031	-0,0185	0,1359	1,360505
7		180	25,503	205,503	-0,0178	0,0891	1,448860
8		170	26,343	196,343	-0,0170	0,0443	1,501248
9		160	26,588	186,588	-0,0161	0,0016	1,519271
10		150	26,273	176,273	-0,0152	-0,0389	1,504638
11		140	25,432	165,432	-0,0143	-0,0770	1,459152
12		130	24,101	154,101	-0,0133	-0,1126	1,384711
13		120	22,315	142,315	-0,0123	-0,1456	1,283299
14		110	20,108	130,108	-0,0113	-0,1760	1,156978
15		100	17,515	117,515	-0,0102	-0,2036	1,007885
16		90	14,573	104,573	-0,0090	-0,2284	0,838224
17		80	11,315	91,315	-0,0079	-0,2502	0,650261
18		70	7,777	77,777	-0,0067	-0,2691	0,446315
19		60	3,994	63,994	-0,0055	-0,2849	0,228757
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,2976	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0	50	0,0121	-0,7198	0,000000
1		55	7,940	62,940	0,0153	-0,6844	-0,551436
2		60	15,339	75,339	0,0183	-0,6412	-1,071996
3		65	22,148	87,148	0,0212	-0,5903	-1,555590
4		70	28,318	98,318	0,0239	-0,5323	-1,996418
5		75	33,799	108,799	0,0264	-0,4674	-2,388996
6		80	38,543	118,543	0,0288	-0,3963	-2,728175
7		85	42,501	127,501	0,0310	-0,3193	-3,009172
8		90	45,623	135,623	0,0329	-0,2369	-3,227589
9		95	47,860	142,860	0,0347	-0,1498	-3,379439
10		100	49,163	149,163	0,0362	-0,0584	-3,461170
11		105	49,482	154,482	0,0375	0,0367	-3,469690
12		110	48,769	158,769	0,0385	0,1347	-3,402389
13		115	46,975	161,975	0,0393	0,2351	-3,257166
14		120	44,050	164,050	0,0398	0,3371	-3,032451
15		125	39,945	164,945	0,0400	0,4401	-2,727230
16		130	34,610	164,610	0,0400	0,5432	-2,341068
17		135	27,998	162,998	0,0396	0,6458	-1,874137
18		140	20,058	160,058	0,0389	0,7469	-1,327235
19		145	10,742	155,742	0,0378	0,8457	-0,701813
20		150	0,000	150,000	0,0364	0,9414	0,000000

Iteração 3

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4548	0,000000
1		240	6,624	246,624	-0,0213	0,3995	0,335490
2		230	12,387	242,387	-0,0210	0,3449	0,627820
3		220	17,306	237,306	-0,0205	0,2915	0,877732
4		210	21,401	231,401	-0,0200	0,2392	1,086114
5		200	24,694	224,694	-0,0194	0,1883	1,254001
6		190	27,210	217,210	-0,0188	0,1391	1,382566
7		180	28,977	208,977	-0,0181	0,0915	1,473118
8		170	30,025	200,025	-0,0173	0,0459	1,527098
9		160	30,385	190,385	-0,0165	0,0024	1,546073
10		150	30,093	180,093	-0,0156	-0,0389	1,531730
11		140	29,183	169,183	-0,0146	-0,0779	1,485870
12		130	27,694	157,694	-0,0136	-0,1143	1,410402
13		120	25,666	145,666	-0,0126	-0,1481	1,307336
14		110	23,140	133,140	-0,0115	-0,1792	1,178779
15		100	20,158	120,158	-0,0104	-0,2075	1,026921
16		90	16,764	106,764	-0,0092	-0,2328	0,854035
17		80	13,005	93,005	-0,0080	-0,2551	0,662465
18		70	8,926	78,926	-0,0068	-0,2742	0,454618
19		60	4,575	64,575	-0,0056	-0,2902	0,232960
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3030	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,7993	0,000000
1		55	11,029	66,029	0,0160	-0,7630	-0,613544
2		60	21,440	81,440	0,0198	-0,7169	-1,194703
3		65	31,112	96,112	0,0233	-0,6613	-1,735914
4		70	39,928	109,928	0,0267	-0,5968	-2,229980
5		75	47,780	122,780	0,0298	-0,5240	-2,670120
6		80	54,564	134,564	0,0327	-0,4434	-3,050030
7		85	60,183	145,183	0,0352	-0,3559	-3,363928
8		90	64,552	154,552	0,0375	-0,2621	-3,606604
9		95	67,589	162,589	0,0395	-0,1628	-3,773462
10		100	69,223	169,223	0,0411	-0,0590	-3,860559
11		105	69,394	174,394	0,0423	0,0486	-3,864642
12		110	68,048	178,048	0,0432	0,1589	-3,783174
13		115	65,143	180,143	0,0437	0,2710	-3,614365
14		120	60,649	180,649	0,0439	0,3839	-3,357188
15		125	54,545	179,545	0,0436	0,4966	-3,011398
16		130	46,821	176,821	0,0429	0,6082	-2,577537
17		135	37,483	172,483	0,0419	0,7175	-2,056945
18		140	26,545	166,545	0,0404	0,8236	-1,451753
19		145	14,036	159,036	0,0386	0,9255	-0,764876
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0222	0,000000

Iteração 4

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4556	0,000000
1		240	6,710	246,710	-0,0213	0,4002	0,336091
2		230	12,556	242,556	-0,0210	0,3457	0,629007
3		220	17,555	237,555	-0,0205	0,2921	0,879475
4		210	21,722	231,722	-0,0200	0,2398	1,088372
5		200	25,080	225,080	-0,0195	0,1889	1,256716
6		190	27,651	217,651	-0,0188	0,1395	1,385671
7		180	29,462	209,462	-0,0181	0,0919	1,476536
8		170	30,542	200,542	-0,0173	0,0462	1,530746
9		160	30,921	190,921	-0,0165	0,0025	1,549860
10		150	30,635	180,635	-0,0156	-0,0389	1,535562
11		140	29,717	169,717	-0,0147	-0,0780	1,489653
12		130	28,208	158,208	-0,0137	-0,1146	1,414043
13		120	26,147	146,147	-0,0126	-0,1485	1,310747
14		110	23,576	133,576	-0,0116	-0,1797	1,181874
15		100	20,538	120,538	-0,0104	-0,2080	1,029626
16		90	17,081	107,081	-0,0093	-0,2334	0,856283
17		80	13,249	93,249	-0,0081	-0,2557	0,664201
18		70	9,092	79,092	-0,0068	-0,2750	0,455800
19		60	4,659	64,659	-0,0056	-0,2910	0,233558
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3038	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8311	0,000000
1		55	12,271	67,271	0,0163	-0,7944	-0,638307
2		60	23,894	83,894	0,0204	-0,7471	-1,243621
3		65	34,718	99,718	0,0242	-0,6896	-1,807789
4		70	44,600	114,600	0,0278	-0,6225	-2,323048
5		75	53,402	128,402	0,0312	-0,5465	-2,782100
6		80	61,001	141,001	0,0342	-0,4621	-3,178175
7		85	67,279	152,279	0,0370	-0,3703	-3,505091
8		90	72,132	162,132	0,0394	-0,2719	-3,757319
9		95	75,469	170,469	0,0414	-0,1678	-3,930025
10		100	77,211	177,211	0,0430	-0,0590	-4,019120
11		105	77,293	182,293	0,0443	0,0535	-4,021297
12		110	75,663	185,663	0,0451	0,1686	-3,934064
13		115	72,287	187,287	0,0455	0,2854	-3,755769
14		120	67,144	187,144	0,0454	0,4026	-3,485616
15		125	60,228	185,228	0,0450	0,5191	-3,123676
16		130	51,551	181,551	0,0441	0,6339	-2,670890
17		135	41,139	176,139	0,0428	0,7459	-2,129062
18		140	29,035	169,035	0,0410	0,8539	-1,500847
19		145	15,298	160,298	0,0389	0,9570	-0,789731
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0541	0,000000

Iteração 5

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,722	246,722	-0,0213	0,4003	0,336176
2		230	12,580	242,580	-0,0210	0,3458	0,629175
3		220	17,590	237,590	-0,0206	0,2922	0,879722
4		210	21,767	231,767	-0,0200	0,2399	1,088690
5		200	25,134	225,134	-0,0195	0,1890	1,257099
6		190	27,713	217,713	-0,0188	0,1396	1,386109
7		180	29,531	209,531	-0,0181	0,0919	1,477019
8		170	30,615	200,615	-0,0174	0,0462	1,531261
9		160	30,997	190,997	-0,0165	0,0025	1,550395
10		150	30,711	180,711	-0,0156	-0,0389	1,536104
11		140	29,793	169,793	-0,0147	-0,0780	1,490188
12		130	28,281	158,281	-0,0137	-0,1146	1,414559
13		120	26,215	146,215	-0,0126	-0,1485	1,311230
14		110	23,637	133,637	-0,0116	-0,1797	1,182313
15		100	20,593	120,593	-0,0104	-0,2081	1,030009
16		90	17,126	107,126	-0,0093	-0,2335	0,856602
17		80	13,284	93,284	-0,0081	-0,2558	0,664447
18		70	9,116	79,116	-0,0068	-0,2751	0,455967
19		60	4,671	64,671	-0,0056	-0,2911	0,233642
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8437	0,000000
1		55	12,766	67,766	0,0165	-0,8068	-0,648147
2		60	24,872	84,872	0,0206	-0,7590	-1,263059
3		65	36,156	101,156	0,0246	-0,7008	-1,836346
4		70	46,461	116,461	0,0283	-0,6327	-2,360024
5		75	55,642	130,642	0,0317	-0,5554	-2,826584
6		80	63,563	143,563	0,0349	-0,4696	-3,229071
7		85	70,102	155,102	0,0377	-0,3761	-3,561150
8		90	75,146	165,146	0,0401	-0,2758	-3,817159
9		95	78,600	173,600	0,0421	-0,1698	-3,992174
10		100	80,382	180,382	0,0438	-0,0590	-4,082048
11		105	80,426	185,426	0,0450	0,0555	-4,083455
12		110	78,681	188,681	0,0458	0,1725	-3,993922
13		115	75,115	190,115	0,0462	0,2911	-3,811851
14		120	69,712	189,712	0,0461	0,4100	-3,536541
15		125	62,474	187,474	0,0455	0,5280	-3,168189
16		130	53,418	183,418	0,0445	0,6441	-2,707893
17		135	42,581	177,581	0,0431	0,7571	-2,157643
18		140	30,017	170,017	0,0413	0,8659	-1,520302
19		145	15,795	160,795	0,0390	0,9694	-0,799580
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0667	0,000000

Iteração 6

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336188
2		230	12,583	242,583	-0,0210	0,3458	0,629198
3		220	17,594	237,594	-0,0206	0,2922	0,879756
4		210	21,774	231,774	-0,0200	0,2399	1,088735
5		200	25,142	225,142	-0,0195	0,1890	1,257153
6		190	27,722	217,722	-0,0188	0,1396	1,386171
7		180	29,540	209,540	-0,0181	0,0919	1,477087
8		170	30,625	200,625	-0,0174	0,0462	1,531334
9		160	31,008	191,008	-0,0165	0,0025	1,550471
10		150	30,722	180,722	-0,0156	-0,0389	1,536181
11		140	29,804	169,804	-0,0147	-0,0780	1,490264
12		130	28,291	158,291	-0,0137	-0,1146	1,414631
13		120	26,225	146,225	-0,0126	-0,1485	1,311298
14		110	23,646	133,646	-0,0116	-0,1798	1,182375
15		100	20,600	120,600	-0,0104	-0,2081	1,030063
16		90	17,132	107,132	-0,0093	-0,2335	0,856647
17		80	13,289	93,289	-0,0081	-0,2558	0,664482
18		70	9,119	79,119	-0,0068	-0,2751	0,455991
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233654
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8487	0,000000
1		55	12,963	67,963	0,0165	-0,8118	-0,652053
2		60	25,261	85,261	0,0207	-0,7638	-1,270775
3		65	36,727	101,727	0,0247	-0,7053	-1,847683
4		70	47,200	117,200	0,0285	-0,6368	-2,374702
5		75	56,532	131,532	0,0319	-0,5589	-2,844241
6		80	64,581	144,581	0,0351	-0,4725	-3,249274
7		85	71,223	156,223	0,0379	-0,3783	-3,583400
8		90	76,343	166,343	0,0404	-0,2774	-3,840910
9		95	79,843	174,843	0,0424	-0,1706	-4,016840
10		100	81,641	181,641	0,0441	-0,0590	-4,107022
11		105	81,669	186,669	0,0453	0,0562	-4,108122
12		110	79,878	189,878	0,0461	0,1741	-4,017674
13		115	76,237	191,237	0,0464	0,2934	-3,834104
14		120	70,731	190,731	0,0463	0,4129	-3,556747
15		125	63,364	188,364	0,0457	0,5316	-3,185849
16		130	54,158	184,158	0,0447	0,6482	-2,722574
17		135	43,153	178,153	0,0433	0,7616	-2,168982
18		140	30,406	170,406	0,0414	0,8706	-1,528020
19		145	15,992	160,992	0,0391	0,9744	-0,803487
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0717	0,000000

Iteração 7

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336189
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879761
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088742
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257161
6		190	27,723	217,723	-0,0188	0,1396	1,386180
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477097
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531344
9		160	31,009	191,009	-0,0165	0,0025	1,550481
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536191
11		140	29,805	169,805	-0,0147	-0,0780	1,490275
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414642
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311307
14		110	23,647	133,647	-0,0116	-0,1798	1,182383
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030071
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856653
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455994
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8507	0,000000
1		55	13,041	68,041	0,0165	-0,8137	-0,653603
2		60	25,416	85,416	0,0207	-0,7657	-1,273838
3		65	36,954	101,954	0,0248	-0,7071	-1,852183
4		70	47,494	117,494	0,0285	-0,6384	-2,380527
5		75	56,885	131,885	0,0320	-0,5603	-2,851250
6		80	64,985	144,985	0,0352	-0,4737	-3,257293
7		85	71,668	156,668	0,0380	-0,3793	-3,592231
8		90	76,818	166,818	0,0405	-0,2780	-3,850336
9		95	80,337	175,337	0,0426	-0,1709	-4,026629
10		100	82,140	182,140	0,0442	-0,0590	-4,116933
11		105	82,162	187,162	0,0454	0,0565	-4,117911
12		110	80,353	190,353	0,0462	0,1747	-4,027100
13		115	76,682	191,682	0,0465	0,2943	-3,842935
14		120	71,135	191,135	0,0464	0,4141	-3,564765
15		125	63,717	188,717	0,0458	0,5330	-3,192858
16		130	54,451	184,451	0,0448	0,6498	-2,728399
17		135	43,380	178,380	0,0433	0,7633	-2,173482
18		140	30,560	170,560	0,0414	0,8725	-1,531083
19		145	16,070	161,070	0,0391	0,9763	-0,805037
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0737	0,000000

Iteração 8

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336190
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879762
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088742
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257162
6		190	27,724	217,724	-0,0188	0,1396	1,386181
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477098
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531346
9		160	31,010	191,010	-0,0165	0,0025	1,550483
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536193
11		140	29,805	169,805	-0,0147	-0,0780	1,490276
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414643
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311309
14		110	23,648	133,648	-0,0116	-0,1798	1,182385
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030072
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856654
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455995
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8515	0,000000
1		55	13,072	68,072	0,0165	-0,8145	-0,654219
2		60	25,477	85,477	0,0208	-0,7664	-1,275053
3		65	37,044	102,044	0,0248	-0,7078	-1,853968
4		70	47,611	117,611	0,0286	-0,6390	-2,382839
5		75	57,025	132,025	0,0321	-0,5609	-2,854031
6		80	65,146	145,146	0,0352	-0,4741	-3,260475
7		85	71,845	156,845	0,0381	-0,3796	-3,595736
8		90	77,007	167,007	0,0405	-0,2783	-3,854077
9		95	80,533	175,533	0,0426	-0,1710	-4,030514
10		100	82,339	182,339	0,0443	-0,0590	-4,120867
11		105	82,358	187,358	0,0455	0,0567	-4,121796
12		110	80,542	190,542	0,0463	0,1749	-4,030841
13		115	76,859	191,859	0,0466	0,2946	-3,846440
14		120	71,295	191,295	0,0464	0,4145	-3,567947
15		125	63,857	188,857	0,0459	0,5335	-3,195639
16		130	54,568	184,568	0,0448	0,6504	-2,730711
17		135	43,470	178,470	0,0433	0,7640	-2,175267
18		140	30,622	170,622	0,0414	0,8733	-1,532298
19		145	16,101	161,101	0,0391	0,9771	-0,805653
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0745	0,000000

Iteração 9

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336190
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879762
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088743
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257162
6		190	27,724	217,724	-0,0188	0,1396	1,386181
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477099
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531346
9		160	31,010	191,010	-0,0165	0,0025	1,550483
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536193
11		140	29,806	169,806	-0,0147	-0,0780	1,490276
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414643
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311309
14		110	23,648	133,648	-0,0116	-0,1798	1,182385
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030072
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856654
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455995
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8518	0,000000
1		55	13,084	68,084	0,0165	-0,8148	-0,654463
2		60	25,501	85,501	0,0208	-0,7667	-1,275536
3		65	37,079	102,079	0,0248	-0,7080	-1,854677
4		70	47,657	117,657	0,0286	-0,6393	-2,383757
5		75	57,081	132,081	0,0321	-0,5611	-2,855135
6		80	65,209	145,209	0,0353	-0,4743	-3,261738
7		85	71,915	156,915	0,0381	-0,3798	-3,597127
8		90	77,082	167,082	0,0406	-0,2783	-3,855562
9		95	80,610	175,610	0,0426	-0,1711	-4,032056
10		100	82,417	182,417	0,0443	-0,0590	-4,122428
11		105	82,436	187,436	0,0455	0,0567	-4,123338
12		110	80,617	190,617	0,0463	0,1750	-4,032326
13		115	76,929	191,929	0,0466	0,2948	-3,847831
14		120	71,359	191,359	0,0465	0,4147	-3,569210
15		125	63,913	188,913	0,0459	0,5337	-3,196743
16		130	54,614	184,614	0,0448	0,6507	-2,731629
17		135	43,505	178,505	0,0433	0,7643	-2,175976
18		140	30,646	170,646	0,0414	0,8736	-1,532781
19		145	16,113	161,113	0,0391	0,9774	-0,805897
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0748	0,000000

Iteração 10

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336190
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879762
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088743
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257162
6		190	27,724	217,724	-0,0188	0,1396	1,386181
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477099
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531346
9		160	31,010	191,010	-0,0165	0,0025	1,550483
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536193
11		140	29,806	169,806	-0,0147	-0,0780	1,490276
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414643
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311309
14		110	23,648	133,648	-0,0116	-0,1798	1,182385
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030072
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856654
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455995
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8519	0,000000
1		55	13,089	68,089	0,0165	-0,8149	-0,654560
2		60	25,511	85,511	0,0208	-0,7669	-1,275727
3		65	37,094	102,094	0,0248	-0,7081	-1,854958
4		70	47,675	117,675	0,0286	-0,6394	-2,384121
5		75	57,103	132,103	0,0321	-0,5612	-2,855573
6		80	65,235	145,235	0,0353	-0,4744	-3,262239
7		85	71,943	156,943	0,0381	-0,3798	-3,597679
8		90	77,111	167,111	0,0406	-0,2784	-3,856151
9		95	80,641	175,641	0,0426	-0,1711	-4,032668
10		100	82,449	182,449	0,0443	-0,0590	-4,123047
11		105	82,467	187,467	0,0455	0,0567	-4,123950
12		110	80,647	190,647	0,0463	0,1751	-4,032915
13		115	76,957	191,957	0,0466	0,2948	-3,848383
14		120	71,384	191,384	0,0465	0,4148	-3,569711
15		125	63,935	188,935	0,0459	0,5338	-3,197181
16		130	54,633	184,633	0,0448	0,6508	-2,731993
17		135	43,520	178,520	0,0433	0,7644	-2,176257
18		140	30,656	170,656	0,0414	0,8737	-1,532972
19		145	16,118	161,118	0,0391	0,9775	-0,805994
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0749	0,000000

Iteração 11

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336190
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879762
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088743
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257162
6		190	27,724	217,724	-0,0188	0,1396	1,386181
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477099
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531346
9		160	31,010	191,010	-0,0165	0,0025	1,550483
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536193
11		140	29,806	169,806	-0,0147	-0,0780	1,490276
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414643
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311309
14		110	23,648	133,648	-0,0116	-0,1798	1,182385
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030072
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856654
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455995
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8519	0,000000
1		55	13,091	68,091	0,0165	-0,8150	-0,654598
2		60	25,515	85,515	0,0208	-0,7669	-1,275803
3		65	37,099	102,099	0,0248	-0,7082	-1,855070
4		70	47,682	117,682	0,0286	-0,6394	-2,384265
5		75	57,111	132,111	0,0321	-0,5612	-2,855746
6		80	65,245	145,245	0,0353	-0,4744	-3,262438
7		85	71,954	156,954	0,0381	-0,3798	-3,597898
8		90	77,123	167,123	0,0406	-0,2784	-3,856385
9		95	80,653	175,653	0,0426	-0,1711	-4,032911
10		100	82,461	182,461	0,0443	-0,0590	-4,123293
11		105	82,479	187,479	0,0455	0,0567	-4,124193
12		110	80,658	190,658	0,0463	0,1751	-4,033149
13		115	76,968	191,968	0,0466	0,2948	-3,848602
14		120	71,394	191,394	0,0465	0,4148	-3,569910
15		125	63,944	188,944	0,0459	0,5339	-3,197355
16		130	54,640	184,640	0,0448	0,6508	-2,732137
17		135	43,525	178,525	0,0433	0,7645	-2,176369
18		140	30,659	170,659	0,0414	0,8737	-1,533048
19		145	16,120	161,120	0,0391	0,9776	-0,806032
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0750	0,000000

Iteração 12

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336190
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879762
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088743
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257162
6		190	27,724	217,724	-0,0188	0,1396	1,386181
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477099
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531346
9		160	31,010	191,010	-0,0165	0,0025	1,550483
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536193
11		140	29,806	169,806	-0,0147	-0,0780	1,490276
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414643
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311309
14		110	23,648	133,648	-0,0116	-0,1798	1,182385
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030072
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856654
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455995
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	50	0,000	50,000	0,0121	-0,8520	0,000000
1		55	13,092	68,092	0,0165	-0,8150	-0,654613
2		60	25,516	85,516	0,0208	-0,7669	-1,275833
3		65	37,101	102,101	0,0248	-0,7082	-1,855114
4		70	47,685	117,685	0,0286	-0,6394	-2,384322
5		75	57,115	132,115	0,0321	-0,5612	-2,855815
6		80	65,249	145,249	0,0353	-0,4744	-3,262517
7		85	71,958	156,958	0,0381	-0,3798	-3,597985
8		90	77,128	167,128	0,0406	-0,2784	-3,856477
9		95	80,658	175,658	0,0426	-0,1711	-4,033007
10		100	82,466	182,466	0,0443	-0,0590	-4,123391
11		105	82,484	187,484	0,0455	0,0567	-4,124289
12		110	80,663	190,663	0,0463	0,1751	-4,033241
13		115	76,972	191,972	0,0466	0,2949	-3,848689
14		120	71,398	191,398	0,0465	0,4148	-3,569989
15		125	63,947	188,947	0,0459	0,5339	-3,197424
16		130	54,643	184,643	0,0448	0,6508	-2,732195
17		135	43,527	178,527	0,0433	0,7645	-2,176413
18		140	30,661	170,661	0,0414	0,8738	-1,533078
19		145	16,121	161,121	0,0391	0,9776	-0,806048
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0750	0,000000

Iteração 13 - Convergência

Direção 1							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{1c}$)	M_{1d} 1ª ordem (KN · m)	M_{1d} 2ª ordem (KN · m)	M_{1d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	46,5148	250	0,000	250,000	-0,0216	0,4557	0,000000
1		240	6,724	246,724	-0,0213	0,4004	0,336190
2		230	12,584	242,584	-0,0210	0,3458	0,629202
3		220	17,595	237,595	-0,0206	0,2923	0,879762
4		210	21,775	231,775	-0,0200	0,2399	1,088743
5		200	25,143	225,143	-0,0195	0,1890	1,257162
6		190	27,724	217,724	-0,0188	0,1396	1,386181
7		180	29,542	209,542	-0,0181	0,0919	1,477099
8		170	30,627	200,627	-0,0174	0,0462	1,531346
9		160	31,010	191,010	-0,0165	0,0025	1,550483
10		150	30,724	180,724	-0,0156	-0,0389	1,536193
11		140	29,806	169,806	-0,0147	-0,0780	1,490276
12		130	28,293	158,293	-0,0137	-0,1146	1,414643
13		120	26,226	146,226	-0,0126	-0,1485	1,311309
14		110	23,648	133,648	-0,0116	-0,1798	1,182385
15		100	20,601	120,601	-0,0104	-0,2081	1,030072
16		90	17,133	107,133	-0,0093	-0,2335	0,856654
17		80	13,290	93,290	-0,0081	-0,2558	0,664487
18		70	9,120	79,120	-0,0068	-0,2751	0,455995
19		60	4,673	64,673	-0,0056	-0,2911	0,233656
20		50	0,000	50,000	-0,0043	-0,3039	0,000000

Direção 2							
Seção	EI (% de $E_{cs} \cdot I_{2c}$)	M_{2d} 1ª ordem (KN · m)	M_{2d} 2ª ordem (KN · m)	M_{2d} Total (KN · m)	Curvatura · 10^3 (cm^{-1})	Rotação (°)	Deslocamento (cm)
0	49,4122	150	0,000	50,000	0,0121	-0,8520	0,000000
1		55	13,092	68,092	0,0165	-0,8150	-0,654620
2		60	25,517	85,517	0,0208	-0,7669	-1,275845
3		65	37,102	102,102	0,0248	-0,7082	-1,855132
4		70	47,686	117,686	0,0286	-0,6394	-2,384345
5		75	57,116	132,116	0,0321	-0,5612	-2,855843
6		80	65,250	145,250	0,0353	-0,4744	-3,262548
7		85	71,960	156,960	0,0381	-0,3798	-3,598019
8		90	77,130	167,130	0,0406	-0,2784	-3,856514
9		95	80,660	175,660	0,0426	-0,1711	-4,033045
10		100	82,468	182,468	0,0443	-0,0590	-4,123429
11		105	82,486	187,486	0,0455	0,0568	-4,124327
12		110	80,665	190,665	0,0463	0,1751	-4,033278
13		115	76,974	191,974	0,0466	0,2949	-3,848723
14		120	71,400	191,400	0,0465	0,4148	-3,570020
15		125	63,948	188,948	0,0459	0,5339	-3,197451
16		130	54,644	184,644	0,0448	0,6508	-2,732218
17		135	43,528	178,528	0,0433	0,7645	-2,176431
18		140	30,662	170,662	0,0414	0,8738	-1,533090
19		145	16,121	161,121	0,0391	0,9776	-0,806054
20		150	0,000	150,000	0,0364	1,0750	0,000000

11.7. Segurança do processo

Processo Acoplado					
Seção	M _{1d} 1ª ordem (KN · m)	M _{1d} Total (KN · m)	M _{2d} 1ª ordem (KN · m)	M _{2d} Total (KN · m)	Taxa de utilização
0	250	250,000	50	50,000	0,5415
1	240	243,462	55	61,459	0,5522
2	230	236,471	60	72,542	0,5647
3	220	229,055	65	83,180	0,5781
4	210	221,236	70	93,304	0,5910
5	200	213,012	75	102,873	0,6025
6	190	204,369	80	111,845	0,6134
7	180	195,314	85	120,164	0,6233
8	170	185,867	90	127,775	0,6316
9	160	176,054	95	134,624	0,6370
10	150	165,893	100	140,663	0,6421
11	140	155,403	105	145,847	0,6425
12	130	144,607	110	150,139	0,6410
13	120	133,527	115	153,504	0,6385
14	110	122,184	120	155,918	0,6316
15	100	110,603	125	157,362	0,6214
16	90	98,808	130	157,826	0,6099
17	80	86,824	135	157,309	0,5967
18	70	74,677	140	155,820	0,5778
19	60	62,394	145	153,376	0,5580
20	50	50,000	150	150,000	0,5374

Taxa = 0,6425

Seção Crítica = 11

Processo Desacoplado					
Seção	M _{1d} 1ª ordem (KN · m)	M _{1d} Total (KN · m)	M _{2d} 1ª ordem (KN · m)	M _{2d} Total (KN · m)	Taxa de utilização
0	250	250,000	50	50,000	0,5415
1	240	246,724	55	68,092	0,5719
2	230	242,584	60	85,517	0,6066
3	220	237,595	65	102,102	0,6402
4	210	231,775	70	117,686	0,6722
5	200	225,143	75	132,116	0,7013
6	190	217,724	80	145,250	0,7292
7	180	209,542	85	156,960	0,7500
8	170	200,627	90	167,130	0,7684
9	160	191,010	95	175,660	0,7810
10	150	180,724	100	182,468	0,7868
11	140	169,806	105	187,486	0,7886
12	130	158,293	110	190,665	0,7858
13	120	146,226	115	191,974	0,7735
14	110	133,648	120	191,400	0,7558
15	100	120,601	125	188,948	0,7332
16	90	107,133	130	184,644	0,7058
17	80	93,290	135	178,528	0,6715
18	70	79,120	140	170,662	0,6304
19	60	64,673	145	161,121	0,5855
20	50	50,000	150	150,000	0,5374

Taxa = 0,7886

Seção Crítica = 11

Região do gráfico de resultados: A2

A figura 11.7 a seguir ilustra o diagrama de iteração do ELU juntamente com a resolução dos dois processos. A curva azul representa a solução pelo processo acoplado e a curva verde pelo processo desacoplado.

Figura 11.7 – Resultado comparativo dos dois processos

Capítulo 12

Universo de casos a estudar

12.1. Introdução

Nesse capítulo, temos como objetivo principal determinar os pilares que devem ser estudados.

O universo de casos possíveis é praticamente infinito. No que diz respeito a pilares com seção transversal em formato de 'L', podemos criar qualquer um, basta variar as dimensões dos lados, a armadura, o cobrimento, a resistência do concreto, o comprimento, o diâmetros das armaduras, etc. Sendo assim, devemos estabelecer certos limites de modo a criar um universo particular que será o foco de estudo, caso contrário a análise não teria fim e, certamente, analisaríamos pilares que não existem na prática.

Lembrando que estamos interessados em estudar pilares de concreto armado de edifícios, a seguir veremos as variáveis em jogo e fixaremos certos limites e intervalos para as mesmas de modo a criar o nosso universo particular de casos.

Com o auxílio de um poderoso banco de dados, faremos todas as combinações possíveis entre as variáveis mencionadas. Essa tarefa seria impossível de ser realizada manualmente, mas com poucas linhas de programação é facilmente resolvida.

12.2. Cobrimento da armadura

O cobrimento necessário da armadura baseia-se em critérios que visam à durabilidade da estrutura. O valor numérico do cobrimento, por sua vez, tem ligação com a agressividade do ambiente. Quanto mais agressivo o ambiente, mais cobrimento é necessário para proteger as armaduras.

Tipo de Estrutura	Componente ou elemento	Classe de agressividade ambiental			
		I	II	III	IV
		Cobrimento nominal (mm)			
Concreto armado	Pilar	25	30	40	50

Tabela 12.1

A tabela 7.2 da norma NBR6118, mostrada na tabela 12.1, baseia-se na informação do parágrafo anterior, fornecendo os valores de cobrimento necessários para pilares de concreto armado que visam proteger as armaduras de ataques químicos.

Como podemos ver, se tivermos uma estrutura que esteja na classe de agressividade ambiental mais favorável (classe I), o cobrimento será de 2,5 cm. Por outro lado, se o pilar estiver na classe de agressividade mais desfavorável (classe IV), o cobrimento será de 5,0 cm. Concluimos, portanto, que o cobrimento não pode se alterar indefinidamente, devendo o mesmo estar compreendido no intervalo de 2,5 a 5,0 cm.

12.3. Armadura longitudinal

Partindo do pré-suposto que todos os pilares têm armadura longitudinal de aço tipo CA-50, em tese, os diâmetros existentes no mercado são: 6,3, 8, 10, 12,5, 16, 20, 25 e 32 mm.

Conforme o item 18.4.2 da norma NBR 6118, o diâmetro mínimo das barras longitudinais não deve ser inferior a 10 mm, o que nos faz eliminar a possibilidade das barras de 6,3 e 8,0 mm. As barras também não devem ter diâmetro superior a 1/8 da menor dimensão da seção transversal.

As barras de 10 mm são usadas, em sua grande maioria, para casas térreas e pequenas residências, o que nos faz também excluir sua possibilidade, pois nosso intuito é estudar pilares de edifícios de múltiplos andares.

As barras de 32 mm são fabricadas somente por encomenda e geralmente não são usadas para estruturas de edifícios, mas sim para barragens, grandes estruturas industriais e estruturas enterradas, o que nos faz também excluir sua possibilidade.

Ficamos então com a possibilidade das seguintes barras: 10, 12,5, 16, 20 e 25 mm.

A taxa de armadura de qualquer seção transversal também deve respeitar o que consta no item 17.3.5.3.1 e 13.3.5.3.2, sendo que:

$$A_{S,MIN} = 0,15 \cdot \frac{N_d}{f_{yd}} \geq 0,004 \cdot A_C \quad (\text{Expressão 12.1})$$

$$A_{S,MAX} = 0,08 \cdot A_C \quad (\text{Expressão 12.2})$$

A maior armadura possível, como se vê na expressão 6.2, deve ser, no máximo, 8% da seção real, considerando-se inclusive a sobreposição de armadura existente em regiões de emenda. Desse

modo, vamos supor então que a máxima taxa de armadura permitida, fora da região de emendas seja um pouco maior do que a metade deste valor, ou seja:

$$A_{S,MAX} = 0,05 \cdot A_c \quad (\text{Expressão 12.3})$$

12.4. Armadura transversal (estribos)

Conforme o item 18.4.3 da NBR6118:2004, o diâmetro dos estribos em pilares não deve ser inferior a 5 mm nem a $\frac{1}{4}$ do diâmetro da barra isolada. Com isso, qualquer diâmetro acima de 5 mm seria possível teoricamente, todavia, estribos com diâmetros maiores do que 10 mm não são comuns em edificações. Sendo assim, a possibilidade de estribos restringe-se apenas as seguintes barras: 5, 6,3, 8 e 10 mm.

Perceba que os diâmetros acima não se referem somente a um tipo de aço, mas sim a dois tipos, CA-50 e CA-60. Isso, na análise, é irrelevante, pois estamos interessados apenas na medida geométrica do diâmetro, que provocará alterações no posicionamento da armadura longitudinal, não importando o seu comportamento.

Uma tabela exibindo quais são os estribos possíveis para cada diâmetro da barra da armadura longitudinal se encontra abaixo.

ϕ_L (mm)	ϕ_T (mm)
10	5, 6,3, 8 e 10
12,5	5, 6,3, 8 e 10
16	5, 6,3, 8 e 10
20	5, 6,3, 8 e 10
25	6,3, 8 e 10

Tabela 12.2

12.5. Valores da distância d'

Para o posicionamento das barras longitudinais da seção transversal, vamos substituir as três variáveis anteriores citadas (cobrimento, armadura longitudinal e armadura transversal) por apenas uma, amplamente conhecida e chamada de distância d' . Isso fará com que consigamos reduzir um pouco o número de casos em estudo. Essa distância é dada pela expressão 12.4 e ilustrada na figura 12.1.

$$d' = c + \phi_T + \frac{\phi_L}{2} \quad (\text{Expressão 12.4})$$

Figura 12.1

As três distâncias d' escolhidas para o nosso estudo serão: 4, 6 e 7,25 cm.

12.6. Espaçamento mínimo entre barras da armadura longitudinal

Conforme o item 18.4.2.2 da NBR6118:2007, as armaduras longitudinais devem ser dispostas na seção transversal de forma a garantir a adequada resistência do elemento estrutural. Em seções poligonais, deve existir pelo menos uma barra em cada vértice. Para a nossa seção em estudo, com formato geométrico de 'L', no mínimo devem constar as barras esquematizadas na figura 12.1.

As coordenadas dessas oito barras, no sistema cartesiano (x,y) são facilmente identificáveis e são transcritas na tabela 12.3.

Barra	$X_B(i)$	$Y_B(i)$
1	d'	$H - d'$
2	$b_1 - d'$	$H - d'$
3	d'	$h_1 - d'$
4	$b_1 - d'$	$h_1 - d'$
5	d'	d'
6	$b_1 - d'$	d'
7	$B - d'$	$h_1 - d'$
8	$B - d'$	d'

Tabela 12.3

O espaçamento mínimo livre entre as faces das barras longitudinais, medido no plano da seção transversal, fora da região de emendas, deve ser igual ou superior ao maior dos seguintes valores:

- 2,0 cm;
- diâmetro da barra
- 1,2 vezes a dimensão máxima característica do agregado graúdo.

Figura 12.2

Numa análise criteriosa, podemos simplificar estas últimas recomendações em apenas um valor. Perceba que o último item mencionado (1,2 vezes a dimensão máxima do agregado) será sempre maior que o primeiro item (2,0 cm). Para isto, basta lembrar que os concretos usuais para edificações são feitos com misturas de brita 1 e 2, onde a dimensão máxima característica do agregado graúdo, da brita 2, é de 24 mm, levando sempre a um espaçamento mínimo de 28,8 cm (praticamente 29 cm).

O primeiro item citado (2,0 cm) fica automaticamente excluído pela terceira condição. Agora pensemos na segunda condição, de que o espaçamento mínimo entre barras deve ser, no mínimo, o diâmetro da barra. Ora, mas para as barras possíveis da armadura longitudinal (10, 12,5, 16, 20, 25 mm), nenhuma barra tem possibilidade de superar o valor de obtido no parágrafo anterior (os 29 cm).

Pelo exposto acima, como regra geral, vamos adotar como espaçamento mínimo entre barras o valor de 30 mm (3,0 cm).

$$s_{\text{MIN}} = 3,0 \text{ cm}$$

(Expressão 12.5)

Figura 12.3

Definido o valor acima, o espaçamento mínimo entre barras, medido a partir do eixo de cada barra fica sendo conhecido pela expressão 12.6.

$$e_{\text{MIN}} = s_{\text{MIN}} + \phi_L$$

(Expressão 12.6)

Figura 12.4

12.7. Dimensões da seção transversal

Imagine a seção transversal da figura 12.5.

Figura 12.5

Nosso interesse é estudar alguns casos particulares relacionando todos os lados da seção transversal em relação à dimensão B , através dos coeficientes β .

Fixado o valor da distância d' , as dimensões da seção transversal têm que respeitar algumas considerações. Pelo próprio desenho, a largura b_1 é menor do que B e h_1 menor do que H . Não há qualquer possibilidade de b_1 ser maior do que B ou h_1 ser maior do que H . A partir dessa informação vamos identificar as restrições que existem ao se criar uma seção transversal baseada nos coeficientes β .

Sendo b_1 e h_1 as menores dimensões da seção transversal, os valores mínimos possíveis devem respeitar o critério da NBR6118:2007, onde nenhuma dimensão de pilar deve ser inferior a 12 cm. Existe outra recomendação, no item 18.4.2 da mesma norma, onde é mencionado que as barras da armadura longitudinal não devem ter diâmetro superior a $1/8$ da menor dimensão da seção transversal, conseqüentemente, nenhuma dimensão da seção transversal pode ser menor do que 8 vezes o diâmetro da barra longitudinal usada.

A terceira e última recomendação é, obviamente, baseada no arranjo e espaçamento mínimo permitido entre barras. A menor dimensão possível b_1 é obtida quando o espaçamento entre as

barras B1 e B2 se igualam ao espaçamento mínimo permitido (e_{MIN}), conforme ilustra a figura 12.6. O mesmo deve ser observado para a dimensão h_I , quando o espaçamento máximo entre as barras B7 e B8 se igualar ao espaçamento mínimo permitido (e_{MIN}).

Figura 12.6

Figura 12.7

A dimensão mínima da seção transversal b_I ou h_I tem, portanto, como limite inferior, as recomendações da expressão 12.7.

$$b_{I, \text{MIN}} \text{ ou } h_{I, \text{MIN}} = \text{maior} \begin{cases} 12\text{cm} \\ 8 \cdot \phi_L \\ e_{\text{MIN}} + 2d' \end{cases} \quad (\text{Expressão 12.7})$$

Obviamente, o valor encontrado será arredondado para o número interior superior mais próximo, pois não existem, na prática usual, pilares com dimensões que não sejam inteiros de centímetro.

Para o valor máximo da dimensão b_I ou h_I não há regra, desde que esses valores não sejam superiores aos valores de B e H , respectivamente.

A dimensão mínima possível de B , se b_I já tem um valor fixado, é aquela na qual a distância entre eixos e_2 é fixada com o espaçamento mínimo entre barras ($e_{\text{MIN}} = s_{\text{MIN}} + \phi_L$), conforme ilustra a figura 12.8.

A dimensão mínima possível de H , obviamente, se h_I já tem um valor fixado, é aquela na qual a distância entre eixos e_3 é fixada com o espaçamento mínimo entre barras ($e_{\text{MIN}} = s_{\text{MIN}} + \phi_L$), conforme ilustra a figura 12.9.

Figura 12.8

Figura 12.9

As dimensões máximas possíveis de B e H serão arbitradas como sendo cinco vezes o valor das dimensões b_1 e h_1 , limites superiores necessários para que as abas do pilar não passem a ser consideradas como pilar parede, os quais não são objetos de análise.

Baseado em todo o exposto, os casos que iremos estudar são os seguintes:

Dimensão B: 40, 60, 80, 100 e 120 cm.

Valores de β_{b1} e β_{h1} : 0,2, 0,4, 0,6 e 0,8.

Valores de β_H : 0,4, 0,6, 0,8 e 1,0.

Ao se tentar criar uma seção transversal todas as restrições mencionadas devem ser verificadas. O caso só deve ser estudado se todas as recomendações forem atendidas.

12.8. Barras intermediárias da armadura longitudinal

A seção transversal com formato geométrico de 'L', ilustrada na figura 12.5, exhibe a existência de seis faces, conseqüentemente, seis linhas possíveis para a colocação de barras intermediárias. Fixada todas as dimensões da seção transversal, e tendo alojado ainda apenas as 8 barras fixas ilustradas na figura 12.5, os valores dos espaçamentos entre barras são conhecidos.

$$e_1 = b_1 - 2d'$$

$$e_2 = B - b_1$$

$$e_3 = H - h_1$$

$$e_4 = h_1 - 2d'$$

(Expressão 12.8)

O espaçamento mínimo entre eixos de barras ($e_{\text{MIN}} = s_{\text{MIN}} + \phi_L$) já foi discutido no item 12.6. A NBR6118:2007 também recomenda que o espaçamento máximo, entre os eixos das barras, deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção transversal no trecho considerado ($2b_1$ ou $2h_1$), sem exceder 40 cm.

Esclarecendo sobre essa limitação de que o espaçamento deve ser menor ou igual a duas vezes a menor dimensão da seção transversal no trecho considerado, ao se tratar das barras que estão na aba de espessura b_1 , a condição é de que o espaçamento máximo deverá ser menor do que $2b_1$. Por outro lado, se as barras que estamos tratando se encontram na aba de espessura h_1 , essa condição se altera e o máximo correspondente fica sendo $2h_1$.

Com o conhecimento dos espaçamentos máximo e mínimo da armadura longitudinal, em cada espaçamento e , mostrado na figura 12.5, passam a existir inúmeras possibilidades de barras intermediárias. Na verdade, nos interessa conhecer os dois extremos, ou seja, qual a quantidade mínima e máxima de barras intermediárias que podem ser colocadas em cada espaçamento e . Conhecido os valores extremos, em nosso banco de dados, podemos colocar essas quantidades como outra variável, criando dois arranjos de armadura para a análise: o primeiro com a quantidade mínima possível de barras nos espaços intermediários e um segundo com a quantidade máxima possível de barras nos espaços intermediários.

Figura 12.10

As expressões que fornecem os extremos são:

$$Qtde (i)_{MAX} \leq \frac{e_i}{e_{MIN}} - 1 \quad (\text{arredondado para o inteiro inferior}) \quad (\text{Expressão 12.9})$$

$$Qtde (i)_{MIN} \geq \frac{e_i}{e_{MAX}} - 1 \quad (\text{arredondado para o inteiro superior}) \quad (\text{Expressão 12.10})$$

onde $i = 1, 2, 3$ e 4 , dependendo a face que se está tratando.

Obviamente, os resultados das expressões 12.9 e 12.10 podem retornar valores não inteiros. Como a quantidade de barras deve, obrigatoriamente, ser um número inteiro, a quantidade mínima

deve ser arredondada para o número interior superior mais próximo. A quantidade máxima, por sua vez, deve ser arredondada para o número interior inferior mais próximo.

As coordenadas dessas barras intermediárias, supostas igualmente espaçadas, ficam facilmente conhecidas, já que são conhecidas as coordenadas das barras extremas da linha.

Há de se salientar que cada quantidade i é colocada simultaneamente em dois locais da seção transversal, conforme ilustra a figura 12.10.

As coordenadas das barras intermediárias são facilmente identificáveis, pois são igualmente espaçadas e devem ser colocadas entre duas barras já conhecidas (B1 a B8).

12.9. Resistência característica do concreto (f_{ck})

Em nossa análise, pretendemos analisar os concretos desde a classe C20 até a classe C50, porém as contas serão realizadas apenas com o concreto C30. Sabemos que podemos extrapolar os resultados para todas as classes de concreto, utilizando o conceito de adimensionais.

12.10. Comprimento dos pilares

Conhecida as dimensões da seção transversal, os valores dos raios de giração das duas direções principais r_1 e r_2 , obviamente, são conhecidos quando do cálculo das propriedades geométricas.

Nosso interesse é a dividir os pilares em grupos, conforme o índice de esbeltez (λ), pois essa é a divisão que os pilares estão na norma NBR6118. **Estamos interessados em estudar pilares com os seguintes índices de esbeltez: 40, 70, 105 e 140.**

Se relembrarmos, da Resistência dos Materiais, que o índice de esbeltez de cada direção principal é:

$$\lambda_1 = \frac{L_1}{r_1} \qquad \lambda_2 = \frac{L_2}{r_2} \qquad \text{(Expressão 12.11)}$$

Podemos, invertendo a expressão acima, obter o comprimento que o pilar deve ter para atender a certo índice de esbeltez.

$$L_1 = \lambda_1 \cdot r_1 \qquad L_2 = \lambda_2 \cdot r_2 \qquad \text{(Expressão 12.12)}$$

Caso de Solicitação	Base		Topo	
	M11	M22	M11	M22
1	$0,8 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^+$
2	$0,6 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,6 \cdot M_{Rd22}^+$
3	$0,4 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,4 \cdot M_{Rd22}^+$
4	$0,8 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^+$
5	$0,6 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,6 \cdot M_{Rd22}^+$
6	$0,4 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,4 \cdot M_{Rd22}^+$
7	$0,8 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^-$
8	$0,6 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,6 \cdot M_{Rd22}^-$
9	$0,4 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,4 \cdot M_{Rd22}^-$
10	$0,8 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^-$
11	$0,6 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,6 \cdot M_{Rd22}^-$
12	$0,4 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,4 \cdot M_{Rd22}^-$
13	$0,8 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,8 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$
14	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^+$
15	$0,8 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,8 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,2 \cdot M_{Rd22}^+$
16	$0,2 \cdot M_{Rd11}^-$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^-$	$0,2 \cdot M_{Rd11}^+$	$0,8 \cdot M_{Rd22}^-$

Tabela 12.4

Note que os casos escolhidos são bem desfavoráveis, ou seja, são regiões de solicitação que se aproximam da fronteira resistente da seção transversal.

12.12. Resumo Geral - Análise

A metodologia é muito simples e tudo pode ser resumido neste item. As variáveis da tabela 12.5 servem para criar as seções transversais.

B (cm)	β_H	β_{b1}	β_{h1}	d' (cm)	ϕ_L (mm)	Arranjo		
40	0,4 0,6 0,8 1,0	0,2	0,2	4 6 7,25	12,5	Mínimo Máximo		
60		0,4	0,4		16			
80		0,6	0,6		20			
100		0,8	0,8		25			
120								

Tabela 12.5

Devemos fazer uma combinação de todas as variáveis acima, uma a uma. O trabalho envolvido é árduo, cansativo e impossível de se realizar manualmente, porém, com algumas linhas de programação, um aplicativo poderoso varre cada possibilidade. Se o caso for possível de existir, ele o registra no banco de dados, caso contrário, ele o descarta.

A cada seção criada, temos que verificar se ela atende os requisitos de norma, que são:

- a) área da seção transversal maior ou igual a 360 cm^2 ;
- b) área de aço no intervalo entre 0,4% e 5% da área de concreto;
- c) as dimensões b_1 e h_1 são maiores que as mínimas necessárias (expressão 12.7);
- d) a dimensão B é maior ou igual a $b_1 + e_{\text{MIN}}$ e a dimensão H maior ou igual que $h_1 + e_{\text{MIN}}$;
- e) dimensão b_1 menor ou igual a 5H e dimensão h_1 menor ou igual a 5B.

Pelas próprias variáveis acima, podemos ver que o número teórico total de seções transversais seria $5 \times 4 \times 4 \times 4 \times 3 \times 4 \times 2 = 7.680$, mas ao rodar nosso software, só registram-se 2.248 casos, significando que a diferença ($7.680 - 2.248 = 5.432$) foram excluídos por não atender as restrições acima.

Agora, cada uma das seções criadas é testada com as variáveis da tabela 12.6.

Esbeltez (λ)	Força Normal	Caso de solicitação
40	$0,4 \cdot N_{\text{rd,max}}$	1 a 16
70	$0,6 \cdot N_{\text{rd,max}}$	
105	$0,8 \cdot N_{\text{rd,max}}$	
140	$0,8 \cdot N_{\text{rd,max}}$	

Tabela 12.6

Agora, cada uma das seções criadas é testada com as variáveis da tabela 12.6, ou seja, cada seção é testada $4 \times 3 \times 16 = 192$ vezes, ou ainda, cada esbeltez é testada $3 \times 16 = 48$ vezes.

Capítulo 13

Resultados comparativos entre o processo acoplado e desacoplado dos pilares bi-articulados

Neste capítulo será apresentada, de maneira sucinta, a coleção de resultados obtidos após a análise do universo de casos.

Vale salientar que para conseguir os resultados foram utilizados 11 computadores simultaneamente, que permaneceram ligados por 16 dias seguidos, realizando a comparação entre os dois processos descritos. Ao todo foram 2.248 seções transversais que foram testadas para 3 níveis de força normal, 4 índices de esbeltez e 16 combinações de esforços totalizando 431.616 análises. A tabela 13.1 ilustra as quantidades de casos pertencentes a cada região.

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em unidades)				
	Região A1	Região A2	Região B	Região C	Região D
1 a 100	713	5.566	66	145	12.710
101 a 200	745	5.957	79	156	12.263
201 a 300	634	5.949	84	207	12.326
301 a 400	764	5.923	95	168	12.250
401 a 500	894	6.089	42	193	11.982
501 a 600	825	6.304	114	246	11.711
601 a 700	696	6.093	89	257	12.065
701 a 800	812	5.814	125	183	12.266
801 a 900	886	5.873	67	192	12.182
901 a 1000	875	6.310	140	243	11.632
1001 a 1100	804	6.201	170	276	11.749
1101 a 1200	762	5.954	81	250	12.153
1201 a 1300	727	6.178	95	264	11.936
1301 a 1400	835	5.677	139	243	12.306
1401 a 1500	1012	5.841	127	252	11.968
1501 a 1600	924	6.211	100	227	11.738
1601 a 1700	992	6.326	240	278	11.364
1701 a 1800	684	6.152	79	285	12.000
1801 a 1900	793	6.027	94	248	12.038
1901 a 2000	873	7.943	134	289	9.961
2001 a 2100	1049	5.732	155	236	12.028
2101 a 2200	1099	6.339	37	242	11.483
2201 a 2248	312	3157	6	88	5.653
$\Sigma =$	18.710	137.616	2.358	5.168	267.764
$\Sigma =$	431.616				

Tabela 13.1 - Resultados, em unidades, para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Após a realização do processo comparativo descrito nos capítulos anteriores, notou-se que a utilização da rigidez secante no processo desacoplado, como definida anteriormente, não foi suficiente para garantir a segurança em 100% dos casos. Dessa maneira, optou-se por fazer um novo processamento utilizando 90% da rigidez secante definida anteriormente para o processo desacoplado, o intuito era descobrir a mudança de resultados. O processo com acoplamento permaneceu sem alterações.

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em unidades)				
	Região A1	Região A2	Região B	Região C	Região D
1 a 100	33	5822	4	581	12760
101 a 200	24	6272	8	562	12334
201 a 300	29	6147	17	614	12393
301 a 400	46	6203	25	606	12320
401 a 500	19	6472	4	685	12020
501 a 600	89	6669	48	617	11777
601 a 700	40	6374	15	660	12111
701 a 800	50	6184	36	575	12355
801 a 900	19	6477	13	638	12053
901 a 1000	163	6639	71	626	11701
1001 a 1100	150	6556	91	576	11827
1101 a 1200	51	6272	31	643	12203
1201 a 1300	63	6384	15	722	12016
1301 a 1400	71	6125	42	559	12403
1401 a 1500	91	6332	21	682	12074
1501 a 1600	67	6706	29	590	11808
1601 a 1700	220	6504	140	618	11718
1701 a 1800	46	6460	27	701	11966
1801 a 1900	147	6203	17	741	12092
1901 a 2000	14	6382	21	682	12101
2001 a 2100	97	6322	39	598	12144
2101 a 2200	44	6617	3	669	11867
2201 a 2248	0	3287	0	270	5659
$\Sigma =$	1.573	143.409	717	14.215	271.702
$\Sigma =$	431.616				

Tabela 13.2 - Resultados, em unidades, para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

Desprezando os resultados da região ‘D’ que não tem importância para uma análise estatística, podemos elaborar uma tabela com as porcentagens correspondentes a cada região, conforme as tabelas 13.3 e 13.4.

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em porcentagem)				
	Total (A1+A2+B+C)	Região A1	Região A2	Região B	Região C
1 a 100	6.490	10,99 %	85,76 %	1,02 %	2,23 %
101 a 200	6.937	10,74 %	85,87 %	1,14 %	2,25 %
201 a 300	6.874	9,22 %	86,54 %	1,22 %	3,01 %
301 a 400	6.950	10,99 %	85,22 %	1,37 %	2,42 %
401 a 500	7.218	12,39 %	84,36 %	0,58 %	2,67 %
501 a 600	7.489	11,02 %	84,18 %	1,52 %	3,28 %
601 a 700	7.135	9,75 %	85,40 %	1,25 %	3,60 %
701 a 800	6.934	11,71 %	83,85 %	1,80 %	2,64 %
801 a 900	7.018	12,62 %	83,68 %	0,95 %	2,74 %
901 a 1000	7.568	11,56 %	83,38 %	1,85 %	3,21 %
1001 a 1100	7.451	10,79 %	83,22 %	2,28 %	3,70 %
1101 a 1200	7.047	10,81 %	84,49 %	1,15 %	3,55 %
1201 a 1300	7.264	10,01 %	85,05 %	1,31 %	3,63 %
1301 a 1400	6.894	12,11 %	82,35 %	2,02 %	3,52 %
1401 a 1500	7.232	13,99 %	80,77 %	1,76 %	3,48 %
1501 a 1600	7.462	12,38 %	83,24 %	1,34 %	3,04 %
1601 a 1700	7.736	12,66 %	80,73 %	3,06 %	3,55 %
1701 a 1800	7.200	9,50 %	85,44 %	1,10 %	3,96 %
1801 a 1900	7.162	11,07 %	84,15 %	1,31 %	3,46 %
1901 a 2000	9.239	9,45 %	85,97 %	1,45 %	3,13 %
2001 a 2100	7.172	14,63 %	79,92 %	2,16 %	3,29 %
2101 a 2200	7.717	14,24 %	82,14 %	0,48 %	3,14 %
2201 a 2248	3.563	8,76 %	88,61 %	0,17 %	2,47 %
$\Sigma =$	163.752 (100%)	11,419 %	83,988 %	1,439 %	3,154 %
$\Sigma =$	100 %				

Tabela 13.3 - Resultados, em porcentagem, para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em porcentagem)				
	Total (A1+A2+B+C)	Região A1	Região A2	Região B	Região C
1 a 100	6.440	0,51 %	90,40 %	0,06 %	9,02
101 a 200	6.866	0,35 %	91,35 %	0,12 %	8,19
201 a 300	6.807	0,43 %	90,30 %	0,25 %	9,02
301 a 400	6.880	0,67 %	90,16 %	0,36 %	8,81
401 a 500	7.180	0,26 %	90,14 %	0,06 %	9,54
501 a 600	7.423	1,20 %	89,84 %	0,65 %	8,31
601 a 700	7.089	0,56 %	89,91 %	0,21 %	9,31
701 a 800	6.845	0,73 %	90,34 %	0,53 %	8,40
801 a 900	7.147	0,27 %	90,63 %	0,18 %	8,93
901 a 1000	7.499	2,17 %	88,53 %	0,95 %	8,35
1001 a 1100	7.373	2,03 %	88,92 %	1,23 %	7,81
1101 a 1200	6.997	0,73 %	89,64 %	0,44 %	9,19
1201 a 1300	7.184	0,88 %	88,86 %	0,21 %	10,05
1301 a 1400	6.797	1,04 %	90,11 %	0,62 %	8,22
1401 a 1500	7.126	1,28 %	88,86 %	0,29 %	9,57

1501 a 1600	7.392	0,91 %	90,72 %	0,39 %	7,98
1601 a 1700	7.482	2,94 %	86,93 %	1,87 %	8,26
1701 a 1800	7.234	0,64 %	89,30 %	0,37 %	9,69
1801 a 1900	7.108	2,07 %	87,27 %	0,24 %	10,42
1901 a 2000	7.099	0,20 %	89,90 %	0,30 %	9,61
2001 a 2100	7.056	1,37 %	89,60 %	0,55 %	8,48
2101 a 2200	7.333	0,60 %	90,24 %	0,04 %	9,12
2201 a 2248	3.557	0,00 %	92,41 %	0,00 %	7,59 %
$\Sigma =$	159.914 (100%)	0,95	89,75	0,43	8,86
	$\Sigma =$	100 %			

Tabela 13.4 – Resultados, em porcentagem, para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

A seguir ilustram-se os resultados na forma gráfica. A linha pontilhada divide a região B em duas partes: B1 e B2. A região B1 é determinada entre o ponto 1,0 e 1,05 no eixo das abscissas, ou seja, é uma região de resultados indesejáveis, mas que, no intervalo citado, o erro ainda é aceitável. Qualquer valor acima de 2,0 foi truncado neste.

A divisão apresentada das seções transversais (cada 100 casos agrupados) não tem nenhuma justificativa especial. A divisão desses grupos de seções transversais foi feita apenas que os processadores dos computadores pudessem manipular os dados dentro de sua capacidade. Era impossível agrupar todos os resultados em uma só planilha, em um único gráfico.

SEÇÃO 1 A 100

Figura 13.1 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.2 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 101 A 200

Figura 13.3 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.4 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 201 A 300

Figura 13.5 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.6 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 301 A 400

Figura 13.7 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.8 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 401 A 500

Figura 13.9 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.10 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 501 A 600

Figura 13.11 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.12 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 601 A 700

Figura 13.13 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.14 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 701 A 800

Figura 13.15 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.16 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 801 A 900

Figura 13.17 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.18 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 901 A 1000

Figura 13.19 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.20 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1001 A 1100

Figura 13.21 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.22 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1101 A 1200

Figura 13.23 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.24 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1201 A 1300

Figura 13.25 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.26 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1301 A 1400

Figura 13.27 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.28 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1401 A 1500

Figura 13.29 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.30 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1501 A 1600

Figura 13.31 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.32 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1601 A 1700

Figura 13.33 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.34 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1701 A 1800

Figura 13.35 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.36 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1801 A 1900

Figura 13.37 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.38 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1901 A 2000

Figura 13.39 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.40 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 2001 A 2100

Figura 13.41 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.42 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 2101 A 2200

Figura 13.43 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.44 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 2201 A 2248

Figura 13.45 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 13.46 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

Capítulo 14

Resultados comparativos entre o processo acoplado e desacoplado dos pilares em balanço

Neste capítulo será apresentada, de maneira sucinta, a coleção de resultados obtidos após a análise do universo de casos. As explicações são idênticas as do capítulo anterior, desprezando novos comentários.

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em unidades)				
	Região A1	Região A2	Região B	Região C	Região D
1 a 100	727	5.499	47	197	12.730
101 a 200	685	5.736	40	207	12.532
201 a 300	647	5.795	75	303	12.380
301 a 400	727	5.790	80	214	12.389
401 a 500	684	5.910	62	177	12.367
501 a 600	831	6.120	93	321	11.835
601 a 700	701	5.944	68	307	12.180
701 a 800	828	5.645	111	293	12.323
801 a 900	668	5.995	54	229	12.254
901 a 1000	863	6.208	118	259	11.752
1001 a 1100	982	5.924	136	367	11.791
1101 a 1200	963	5.529	73	345	12.290
1201 a 1300	718	6.044	90	324	12.024
1301 a 1400	1.019	5.324	108	335	12.414
1401 a 1500	965	5.775	113	298	12.049
1501 a 1600	831	6.134	74	240	11.921
1601 a 1700	1.126	6.025	202	355	11.492
1701 a 1800	767	6.022	61	360	11.990
1801 a 1900	842	6.174	110	378	11.696
1901 a 2000	752	5.915	39	339	12.155
2001 a 2100	1.054	5.597	144	344	12.061
2101 a 2200	774	6.045	68	242	12.071
2201 a 2248	246	3.001	10	106	5.853
$\Sigma =$	18.400	132.151	1.976	6.540	272.549
$\Sigma =$	431.616				

Tabela 14.1 – Resultados, em unidades, para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em unidades)				
	Região A1	Região A2	Região B	Região C	Região D
1 a 100	164	6.507	52	625	11.852
101 a 200	40	6.055	0	592	12.513
201 a 300	61	5.961	17	723	12.438
301 a 400	61	5.961	17	723	12.438

401 a 500	155	5.920	2	620	12.503
501 a 600	153	6.470	32	670	11.875
601 a 700	61	6.138	12	753	12.236
701 a 800	160	5.960	22	692	12.366
801 a 900	44	12.242	16	1.324	5.574
901 a 1000	164	6.507	52	625	11.852
1001 a 1100	282	6.295	64	696	11.863
1101 a 1200	196	5.963	26	678	12.337
1201 a 1300	111	6.199	10	776	12.104
1301 a 1400	307	5.689	26	681	12.497
1401 a 1500	191	6.083	15	764	12.147
1501 a 1600	62	6.522	12	620	11.984
1601 a 1700	651	12.717	212	1.340	4.280
1701 a 1800	141	6.290	15	718	12.036
1801 a 1900	142	6.077	17	726	12.238
1901 a 2000	138	6.141	16	727	12.178
2001 a 2100	233	6.004	24	758	12.181
2101 a 2200	42	6.327	10	692	12.129
2201 a 2248	0	3.088	0	265	5.863
$\Sigma =$	3.559	151.116	669	16.788	259.484
$\Sigma =$	431.616				

Tabela 14.2 – Resultados, em unidades, para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

Desprezando os resultados da região ‘D’ que não tem importância para uma análise estatística, podemos elaborar uma tabela com as porcentagens correspondentes a cada região, conforme as tabelas 14.3 e 14.4.

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em porcentagem)				
	Total (A1+A2+B+C)	Região A1	Região A2	Região B	Região C
1 a 100	6470	11,24 %	84,99 %	0,73 %	3,04 %
101 a 200	6668	10,27 %	86,02 %	0,60 %	3,10 %
201 a 300	6820	9,49 %	84,97 %	1,10 %	4,44 %
301 a 400	6811	10,67 %	85,01 %	1,17 %	3,14 %
401 a 500	6833	10,01 %	86,49 %	0,91 %	2,59 %
501 a 600	7365	11,28 %	83,10 %	1,26 %	4,36 %
601 a 700	7020	9,99 %	84,67 %	0,97 %	4,37 %
701 a 800	6877	12,04 %	82,09 %	1,61 %	4,26 %
801 a 900	6946	9,62 %	86,31 %	0,78 %	3,30 %
901 a 1000	7448	11,59 %	83,35 %	1,58 %	3,48 %
1001 a 1100	7409	13,25 %	79,96 %	1,84 %	4,95 %
1101 a 1200	6910	13,94 %	80,01 %	1,06 %	4,99 %
1201 a 1300	7176	10,01 %	84,23 %	1,25 %	4,52 %
1301 a 1400	6786	15,02 %	78,46 %	1,59 %	4,94 %
1401 a 1500	7151	13,49 %	80,76 %	1,58 %	4,17 %
1501 a 1600	7279	11,42 %	84,27 %	1,02 %	3,30 %

1601 a 1700	7708	14,61 %	78,17 %	2,62 %	4,61 %
1701 a 1800	7210	10,64 %	83,52 %	0,85 %	4,99 %
1801 a 1900	7504	11,22 %	82,28 %	1,47 %	5,04 %
1901 a 2000	7045	10,67 %	83,96 %	0,55 %	4,81 %
2001 a 2100	7139	14,76 %	78,40 %	2,02 %	4,82 %
2101 a 2200	7129	10,86 %	84,79 %	0,95 %	3,39 %
2201 a 2248	3363	7,31 %	89,24 %	0,30 %	3,15 %
$\Sigma =$	159.067 (100%)	11,45 %	83,26 %	1,21 %	4,08 %
	$\Sigma =$	100 %			

Tabela 14.3 – Resultados, em porcentagem, para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Seção	Quantidade de resultados obtidos (em porcentagem)				
	Total (A1+A2+B+C)	Região A1	Região A2	Região B	Região C
1 a 100	7.348	2,23 %	88,55 %	0,71 %	8,51 %
101 a 200	6.687	0,60 %	90,55 %	0,00 %	8,85 %
201 a 300	6.762	0,90 %	88,15 %	0,25 %	10,69 %
301 a 400	6.697	2,31 %	88,40 %	0,03 %	9,26 %
401 a 500	6.771	0,53 %	90,12 %	0,00 %	9,35 %
501 a 600	7.325	2,09 %	88,33 %	0,44 %	9,15 %
601 a 700	6.964	0,88 %	88,14 %	0,17 %	10,81 %
701 a 800	6.834	2,34 %	87,21 %	0,32 %	10,13 %
801 a 900	13.626	0,32 %	89,84 %	0,12 %	9,72 %
901 a 1000	7.348	2,23 %	88,55 %	0,71 %	8,51 %
1001 a 1100	7.337	3,84 %	85,80 %	0,87 %	9,49 %
1101 a 1200	6.863	2,86 %	86,89 %	0,38 %	9,88 %
1201 a 1300	7.096	1,56 %	87,36 %	0,14 %	10,94 %
1301 a 1400	6.703	4,58 %	84,87 %	0,39 %	10,16 %
1401 a 1500	7.053	2,71 %	86,25 %	0,21 %	10,83 %
1501 a 1600	7.216	0,86 %	90,38 %	0,17 %	8,59 %
1601 a 1700	14.920	4,36 %	85,23 %	1,42 %	8,98 %
1701 a 1800	7.164	1,97 %	87,80 %	0,21 %	10,02 %
1801 a 1900	6.962	2,04 %	87,29 %	0,24 %	10,43 %
1901 a 2000	7.022	1,97 %	87,45 %	0,23 %	10,35 %
2001 a 2100	7.019	3,32 %	85,54 %	0,34 %	10,80 %
2101 a 2200	7.071	0,59 %	89,48 %	0,14 %	9,79 %
2201 a 2248	3.353	0,00 %	92,10 %	0,00 %	7,90 %
$\Sigma =$	172.141 (100%)	1,96 %	88,01 %	0,33 %	9,70 %
	$\Sigma =$	100 %			

Tabela 14.4 – Resultados, em porcentagem, para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

A seguir ilustram-se os resultados na forma gráfica. A linha pontilhada divide a região B em duas partes: B1 e B2. A região B1 é determinada entre o ponto 1,0 e 1,05 no eixo das abscissas, ou seja, é uma região de resultados indesejáveis, mas que, no intervalo citado, o erro ainda é aceitável. Qualquer valor acima de 2,0 foi truncado neste.

SEÇÃO 1 A 100

Figura 14.1 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.2 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 101 A 200

Figura 14.3 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.4 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 201 A 300

Figura 14.5 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.6 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 301 A 400

Figura 14.7 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.8 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 401 A 500

Figura 14.9 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.10 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 501 A 600

Figura 14.11 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.12 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 601 A 700

Figura 14.13 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.14 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 701 A 800

Figura 14.15 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.16 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 801 A 900

Figura 14.17 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.18 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 901 A 1000

Figura 14.19 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.20 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1001 A 1100

Figura 14.21 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.22 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1101 A 1200

Figura 14.23 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.24 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1201 A 1300

Figura 14.25 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.26 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1301 A 1400

Figura 14.27 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.28 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1401 A 1500

Figura 14.29 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.30 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1501 A 1600

Figura 14.31 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.32 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1601 A 1700

Figura 14.33 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.34 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1701 A 1800

Figura 14.35 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.36 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1801 A 1900

Figura 14.37 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.38 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 1901 A 2000

Figura 14.39 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.40 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 2001 A 2100

Figura 14.41 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.42 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 2101 A 2200

Figura 14.43 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.44 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

SEÇÃO 2201 A 2248

Figura 14.45 – Resultados para 100% da rigidez secante no processo desacoplado

Figura 14.46 – Resultados para 90% da rigidez secante no processo desacoplado

Capítulo 15

Conclusões

Percebe-se, por todos os resultados e gráficos apresentados nos capítulos 13 e 14, que apesar do desacoplamento ser muito útil e resolver bem o problema para as seções retangulares, o mesmo não acontece para uma porcentagem de casos nos pilares com o formato geométrico de 'L'.

O processo desacoplado, que inclusive consta na NBR6118:2007 nos métodos aproximados, não consegue garantir uma solução com segurança em cerca de 1,5% dos casos apresentados.

Nos gráficos exibem-se pontos com erros acima do erro máximo aceitável, o que quer dizer que podem existir solicitações em que o processo desacoplado fornece uma condição de segurança, quando, na verdade, ela não existe.

De modo a tentar solucionar o problema da quantidade significativa de casos que caem nessa região, propôs-se utilizar 90% da rigidez secante no processo desacoplado, proposta no capítulo 7, sem alterar o método de cálculo do processo acoplado. Houve uma redução significativa de pontos da região indesejada, mas isso ainda não garantiu a extinção dos pontos da região que conduz a uma falsa sensação de segurança (região B dos gráficos).

Seria um grande feito se fosse possível reduzir a zero os casos da região B, entretanto não parece ser uma tarefa fácil. O estudo precisaria ser aprofundado particularmente nesses pontos que, apesar da redução proposta, permanecem na região indesejada.

Pensando estatisticamente, é muito pouco provável que um pilar de edifício caia na solicitação que conduz a uma falsa sensação de segurança, mas, por outro lado, o problema não pode ser ignorado.

Concluindo, uma sugestão para um estudo futuro seria a de se determinar as particularidades destas seções que possuem falsa sensação de segurança, determinando-se claramente quais são as causas que conduzem a este resultado. Desse modo, poder-se-ia evitar que projetos reais venham a ter pilares dimensionados dessa maneira. De qualquer maneira, a utilização do processo desacoplado, utilizando 90% da rigidez secante definida em norma, pode ser utilizada com segurança.

REFERÊNCIAS

- AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **ACI 318-08**. Building code requirements for reinforced structural concrete. Michigan: 2008.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 6118:2007**. Projeto de estruturas de concreto. Rio de Janeiro: 2003.
- ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR 8681:2003**. Ações e Segurança nas Estruturas. Rio de Janeiro: 2003.
- CEB-FIP. - COMITE EUROPÉEN DU BETÓN. - Fédération Internationale de la Précontrainte. **Model Code 1990 (MC-90)**. Paris: Bulletin D' Information n°. 195, 196, 198, 1990.
- CEB – FIP. **High Performance Concrete**. Switzerland: Bulletin D'Information n°. 228, 1995.
- CECCON, J. L. **Análise dos efeitos de segunda ordem em pilares solicitados a flexão oblíqua composta**. Tese (Doutorado em Estrutura) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo (EPUSP). São Paulo: 2008.
- EUROCODE 2. **Design of Concrete Structures**. Commission of the European Communities, 2006.
- FRANÇA, R. L. S. **Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta**. Dissertação (Mestrado em Estrutura) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo (EPUSP). São Paulo: 1984.
- FRANÇA, R. L. S. **Contribuição ao estudo dos efeitos de segunda ordem em pilares de concreto armado**. Tese (Doutorado em Estrutura) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo (EPUSP). São Paulo: 1991.
- FUSCO, P. B. **Estruturas de Concreto – Solicitações Normais**. Rio de Janeiro: Editora Guanabara Dois, 1986.
- OLIVEIRA, P. H. A. **Processo aproximado para consideração da não-linearidade física de pilares de concreto armado**. Dissertação (Mestrado em Estrutura) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo: 2004.

OLIVEIRA, R. M. **Contribuição ao estudo da rigidez de vigas de concreto armado em análises de 2ª ordem.** Dissertação (Mestrado em Estrutura) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo: 2000.

SANTOS, L. M. **Estado limite último de instabilidade.** Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo: 1987.

SANTOS, L. M. **Cálculo de concreto armado.** Vol. 1. São Paulo: Editora Edgard Blucher Ltda, 1977.

SANTOS, L. M. **Cálculo de concreto armado.** Vol. 2. São Paulo: Editora LMS Ltda, 1981.

SANTOS, L. M. **Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado.** Vol. 1. São Paulo: Thot Editora Ltda, 1994.