THIAGO DIAS

ANÁLISE DA INSTABILIDADE PARAMÉTRICA DE *RISERS* RETOS VIA MODELO
DE ORDEM REDUZIDA BASEADO EM MODO NÃO LINEAR COM FUNÇÃO DO
TIPO BESSEL

SÃO PAULO
2015

THIAGO DIAS

ANÁLISE DA INSTABILIDADE PARAMÉTRICA DE *RISERS* RETOS VIA MODELO
DE ORDEM REDUZIDA BASEADO EM MODO NÃO LINEAR COM FUNÇÃO DO
TIPO BESSEL

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Civil

SÃO PAULO
2015

THIAGO DIAS

ANÁLISE DA INSTABILIDADE PARAMÉTRICA DE *RISERS* RETOS VIA MODELO
DE ORDEM REDUZIDA BASEADO EM MODO NÃO LINEAR COM FUNÇÃO DO
TIPO BESSEL

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia Civil

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr.
Carlos Eduardo Nigro Mazilli

SÃO PAULO
2015

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, ____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Dias, Thiago

ANÁLISE DA INSTABILIDADE PARAMÉTRICA DE RISERS RETOS VIA
MODELO DE ORDEM REDUZIDA BASEADO EM MODO NÃO LINEAR COM
FUNÇÃO DO TIPO BESSEL / T. Dias -- versão corr. -- São Paulo, 2015.
171 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.dinâmica não linear 2.riser vertical 3.movimento imposto de heave
4.modelos de ordem reduzida I.Universidade de São Paulo. Escola
Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Dedico este trabalho à minha família, por me apoiarem e acreditarem em meu potencial. A vocês, toda a minha gratidão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, que sempre escuta as minhas orações e preces, concedendo-me força e sabedoria para superar os momentos difíceis e guiando-me por caminhos de paz.

Ao meu orientador Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, por todo o incentivo, ensinamento, confiança, apoio, compreensão, inspiração e, principalmente, por me apresentar um novo e fascinante mundo dinâmico.

À Escola Politécnica, por me acolher como aluno e propiciar um ambiente estimulante ao ensino e à pesquisa.

Ao Prof. Guilherme Franzini, por todo o apoio no desenvolvimento das rotinas numéricas, pelas dúvidas sanadas e pelas valiosas contribuições ao longo do desenvolvimento deste trabalho.

Ao amigo Fábio Rizza, pelo esforço despendido na comparação e compreensão dos resultados obtidos por meio dos modelos elaborados.

Ao Núcleo Projetos e Consultoria, pelo tempo cedido para a realização desse trabalho; e aos meus colegas de profissão, pelo auxílio e apoio.

Aos amigos da VLB Engenharia, em especial, à engenheira Flávia Carvalho Carreira, pelo conhecimento transmitido no início de minha formação profissional; e aos amigos Richard, Paloma, Silvia, Paula e Filipe, pelas ricas discussões técnicas e pela amizade que se mantém viva ao longo desses anos.

Aos professores da Escola de Engenharia da Universidade Federal de Minas Gerais, Dr. Gabriel de Oliveira Ribeiro e Dr.^a Sofia Maria Carrato Diniz, pelo incentivo à pesquisa e por acreditarem em meu potencial.

À minha avó Therezinha (*in memoriam*) e à minha mãe Carla, que em meio às dificuldades sempre se mantiveram em pé, alimentando seus sonhos e esperanças.

Ao grande companheiro e amigo Maykon Diego, por toda sua paciência, compreensão, afeto e carinho nos momentos difíceis e prazerosos dessa caminhada.

Aos amigos Fernando, Wanderson e Mariana, pela amizade que ultrapassa a distância e o tempo; e a todos aqueles que propiciaram momentos de alegria e souberam compreender a ausência.

“O cientista não estuda a natureza porque ela é útil; ele a estuda porque se deleita nela, e se deleita nela porque ela é bela. Se a natureza não fosse bela, não valeria a pena ser conhecida, e se não valesse a pena ser conhecida, a vida não valeria a pena ser vivida.”

Henry Poincaré

RESUMO

Recentes descobertas de campos de petróleo e gás, a centenas de quilômetros da costa Sudeste do Brasil, em lâmina d'água acima de 2.000m, demandam avanços científicos e tecnológicos para sua exploração segura. Entre os desafios para os engenheiros, a análise dinâmica de *risers offshore* é de extrema relevância devido à propensão à fadiga do material estrutural. Os movimentos de unidades flutuantes, que ocorrem devido às ondas de gravidade, impõem um tipo particular de carregamento dinâmico para os *risers*. Por uma questão de simplicidade, apenas o movimento de *heave* é considerado, embora *pitch* and *roll* também possam desempenhar um papel relevante na análise. De fato, o efeito de *heave* provoca a modulação de tensão-amplitude ao longo da estrutura tubular e flexível, o que pode conduzir à ressonância paramétrica como consequência da conhecida instabilidade de Mathieu. O *riser* vertical será o foco desse trabalho. A teoria bidimensional de vigas de Bernoulli-Euler é utilizada para se obter uma equação diferencial não linear de movimento para o *riser* submetido a uma carga axial e peso submerso. Modelos matemáticos - conhecidos como modelos de ordem reduzida (MOR's) - com poucos graus de liberdade são adotados, mas com capacidade adequada para representar a resposta estrutural tanto qualitativa como quantitativamente. Utilizando os modos não lineares como funções de projeção no procedimento de Galerkin não linear, a interpretação física vem da igualdade dos trabalhos virtuais tanto no modelo de alta hierarquia quanto do MOR, com a consequente introdução de vínculos rígidos nos modos excluídos da análise. Aqui, a relação não linear entre as amplitudes modais e modos de vibração/frequências são levados em conta. Os resultados obtidos estão de acordo com os resultados dos testes experimentais de um modelo em escala reduzida realizado sob coordenação do LIFE&MO (Laboratório de Interação Fluido-Estrutura e Mecânica *Offshore*), fornecendo uma calibração do coeficiente de arrasto equivalente, para se levar em conta o sistema dissipativo que inclui tanto o amortecimento hidrodinâmico e estrutural. As respostas também são comparadas com as obtidas através do estudo de um modelo de elementos finitos, elaborado com o auxílio de um *software* comercial, o OrcaFlex®, e com funções clássicas de projecção, em particular, a função trigonométrica. Em seguida, variando-se os parâmetros de controle, as respostas do estado estacionário pós-crítica são mapeadas e plotadas em um diagrama policromático.

Palavras-chave: dinâmica não linear, *riser* vertical, movimento imposto de *heave*, modelos de ordem reduzida.

ABSTRACT

Recent discoveries of oil and gas fields, hundreds of kilometers off the Southeast coast of Brazil, in water depths above 2,000m, demand scientific and technological advances to support their safe exploitation. Among the challenges posed to engineers, the dynamic analysis of offshore risers is of utmost relevance, due to fatigue of the structural material. The motions of floating units, which occur due to gravity waves, impose a particular type of dynamic loading to the risers. As a matter of simplicity, only heave is considered herewith, although pitch and roll can also play a relevant role in the analysis. In fact, the effect of heave causes tension-amplitude modulation to the long and flexible tubular structure, which may drive parametric resonance as a consequence of the well-known Mathieu's instability. The vertical riser will be the focus of this work. Bernoulli-Euler two-dimensional beam theory is used to obtain a non-linear differential equation of motion for the riser subjected to an axial thrust and submerged weight. Mathematical models – known as reduced-order models (ROMs) – with few degrees of freedom are used, but with adequate capacity to represent the structural response both qualitatively and quantitatively. Using non-linear modes as projection functions within the non-linear Galerkin's procedure, the physical interpretation of which being the identification of virtual works in both the high-hierarchy model and the ROM, with consequent introduction of rigid constraints in the modes excluded from the analysis. Here the non-linear relationship between modal amplitudes and mode shapes/frequencies are taken into account. The results obtained here agree well with those of experimental tests with a small-scale model carried out under coordination LIFE&MO (Laboratory of Fluid-Structure Interaction & Offshore Mechanics), provided calibration of the equivalent drag coefficient is carried out, to account for the overall system dissipation including both hydrodynamic and structural damping. The responses are also compared with those given by finite element models studied with the help of commercial software, the OrcaFlex® and with classical projection functions, in particular the trigonometric function. Then varying the control parameters, the responses of post-critical steady state are mapped and plotted in diagram polychromatic.

Keywords: non-linear dynamics, vertical risers, heave-imposed motion, reduced-order model.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1	– Oferta Interna de Energia no Brasil – OIE (%).....	23
Figura 1.2	– Localização da camada pré-sal.....	25
Figura 1.3	– Perfil da camada pré-sal.....	26
Figura 1.4	– Elementos do sistema de produção.....	27
Figura 1.5	– Tipos de plataforma de produção.....	28
Figura 1.6	– Exemplo de cabos umbilicais.....	29
Figura 1.7	– <i>Riser</i> flexível e suas camadas internas.....	30
Figura 1.8	– <i>Riser</i> rígido.....	31
Figura 1.9	– <i>Riser</i> SCR.....	32
Figura 1.10	– <i>Riser Tower</i>	34
Figura 1.11	– <i>Top-tension riser</i>	35
Figura 1.12	– Configuração <i>lazy-wave</i>	37
Figura 1.13	– Configuração <i>lazy-s</i>	37
Figura 1.14	– Configurações <i>steep-wave</i> (à esquerda na figura) e <i>steep-s</i> (à direita na figura).....	37
Figura 1.15	– Movimentos da unidade flutuante.....	39
Figura 2.1	– Diagrama de Strutt para sistemas dinâmicos não amortecidos.....	57
Figura 2.2	– Efeito do amortecimento viscoso na estabilidade de soluções da equação de Mathieu.....	58
Figura 3.1	– Unidade flutuante sob <i>heave</i> impondo vibrações no <i>riser</i>	62
Figura 4.1	– Primeira etapa de modelagem do <i>riser</i>	67
Figura 4.2	– Segunda etapa de modelagem do <i>riser</i>	68
Figura 4.3	– Cinemática da barra de Euler-Bernoulli.....	69

Figura 4.4	– Primeiro modo de vibração com incremento da não linearidade.....	82
Figura 4.5	– Segundo modo de vibração com incremento da não linearidade.....	82
Figura 4.6	– Terceiro modo de vibração com incremento da não linearidade.....	83
Figura 4.7	– Quarto modo de vibração com incremento da não linearidade.....	83
Figura 4.8	– Quinto modo de vibração com incremento da não linearidade.....	84
Figura 4.9	– Sexto modo de vibração com incremento da não linearidade	84
Figura 4.10	– Sétimo modo de vibração com incremento da não linearidade.....	85
Figura 4.11	– Oitavo modo de vibração com incremento da não linearidade.....	85
Figura 4.12	– Nono modo de vibração com incremento da não linearidade.	86
Figura 4.13	– Décimo modo de vibração com incremento da não linearidade.....	86
Figura 4.14	– Curva <i>backbone</i> para modos 1 a 5 e 10.....	87
Figura 5.1	– Cálculo das inclinações com o método de quarta-ordem de Runge-Kutta.....	101
Figura 5.2	– Dimensões esquemáticas do modelo em escala reduzida....	103
Figura 5.3	– Vista superior do carro dinamométrico.....	103
Figura 5.4	– Modelo em escala reduzida do <i>riser</i>	104
Figura 5.5	– Vista do aparelho servo-motor indutor do <i>heave</i>	104
Figura 5.6	– Câmera emersa.....	105
Figura 5.7	– Câmera submersa.....	105
Figura 5.8	– Vista geral do ensaio mostrando o <i>riser</i> , o servo-motor, equipamento de leitura ótica e uma parte do tanque.....	106

Figura 5.9	– Amplitude modal experimental.....	108
Figura 5.10	– Mapa de fase experimental.....	108
Figura 5.11	– Frequências de oscilação nas direções x (à esquerda na figura) e y (à direita na figura).....	109
Figura 5.12	– Deslocamentos nodais - normalizado pelo diâmetro.....	109
Figura 5.13	– Variação de C_d com o número de Reynolds Re	112
Figura 5.14	– Amplitude modal adimensional para o MOR com modo quase-Bessel “não linear”	113
Figura 5.15	– Mapa de Fase para o MOR com modo quase-Bessel “não linear”	113
Figura 5.16	– Espectro de amplitude para o MOR com modo quase-Bessel “não linear”	114
Figura 5.17	– Forma modal de vibração do MOR com modo quase-Bessel “não linear” – Modo 1.....	115
Figura 5.18	– Amplitude modal adimensional para o MOR com modo quase-Bessel “linear”	117
Figura 5.19	– Mapa de fase para o MOR com modo quase-Bessel “linear”.	117
Figura 5.20	– Espectro de amplitude para o MOR com modo quase-Bessel “linear”	118
Figura 5.21	– Comparação da forma modal das funções “não linear” e “linear”	118
Figura 5.22	– Amplitude modal adimensional para o MOR com modo trigonométrico.....	121
Figura 5.23	– Mapa de fase para o MOR com modo trigonométrico.....	121
Figura 5.24	– Espectro de amplitude para o MOR com modo trigonométrico.....	122
Figura 5.25	– Forma modal trigonométrica do primeiro modo.....	123
Figura 5.26	– Comparação da forma modal do primeiro modo com função trigonométrica e quase-Bessel “não linear”	124

Figura 5.27	– Modelo de elementos finitos OrcaFlex®.....	126
Figura 5.28	– Modelo de cálculo do OrcaFlex® renderizado.....	128
Figura 5.29	– Forma modal OrcaFlex® - Primeiro modo.....	129
Figura 5.30	– Amplitude modal OrcaFlex® na coordenada no meio do vão	130
Figura 5.31	– Variação da amplitude modal com o coeficiente de arrasto...	131
Figura 5.32	– Variação da amplitude modal normalizada pelo diâmetro com o coeficiente de arrasto.....	135
Figura 5.33	– Diagrama Franzini-Sakamoto para o MOR com modo quase-Bessel “não linear” - $\bar{\xi} = 0,50$	137
Figura 5.34	– Diagrama Franzini-Sakamoto para o MOR com modo trigonométrico - $\bar{\xi} = 0,50$	138
Figura 5.35	– Localização das coordenadas modais de análise do décimo modo de vibração	141
Figura 5.36	– Amplitude modal adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$ no décimo modo de vibração	142
Figura 5.37	– Mapa de fase adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$ no décimo modo de vibração	143
Figura 5.38	– Espectro de amplitude para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$ no décimo modo de vibração	143
Figura 5.39	– Forma modal não linear do décimo modo de vibração – Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$	144
Figura 5.40	– Comparação das formais modais “linear” e “não linear” para o décimo modo de vibração - Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$	145
Figura 5.41	– Comparação das formais modais não linear e trigonométrica para o décimo modo de vibração - Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$	146

Figura 5.42	– Comparação das formas modais “linear”, “não linear” e trigonométrica para o décimo modo de vibração – Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$	147
Figura 5.43	– Diagrama Franzini-Sakamoto para o décimo modo de vibração – função quase-Bessel “não linear” – Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$	148
Figura 5.44	– Diagrama Franzini-Sakamoto para o décimo modo de vibração – função trigonométrica – Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$	149
Figura 5.45	– Amplitude modal adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$ no décimo modo de vibração	151
Figura 5.46	– Mapa de fase adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$ no décimo modo de vibração	151
Figura 5.47	– Espectro de amplitude para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$ no décimo modo de vibração	152
Figura 5.48	– Forma modal não linear do décimo modo de vibração – Coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$	153
Figura 5.49	– Comparação das formas modais “não lineares” para as diferentes coordenadas modais escolhidas.....	154

LISTA DE TABELAS

Tabela 4.1	– Frequências naturais para o modelo de cabo.....	88
Tabela 4.2	– Frequências naturais para o modelo de viga.....	89
Tabela 5.1	– Parâmetros do ensaio em escala reduzida.....	107
Tabela 5.2	– Valores de η para primeiro modo de vibração não linear.....	112
Tabela 5.3	– Coeficiente de arrasto e amplitude modal.....	131
Tabela 5.4	– Coeficientes integrais do MOR para distintas funções de projeção.....	133
Tabela 5.5	– Amplitudes modais, em função do diâmetro, para C_d variável.....	134
Tabela 5.6	– Amplitude modal em $\bar{\xi} = 0,04$ para o décimo modo de vibração.....	142
Tabela 5.7	– Coeficientes da equação do MOR para coordenada $\bar{\xi} = 0,04$	150
Tabela 5.8	– Amplitude modal em $\bar{\xi} = 0,94$ para o décimo modo de vibração.....	150
Tabela 6.1	– Resultados para primeiro modo de vibração no ventre do modo clássico.....	156
Tabela 6.2	– Resultados para décimo modo de vibração - $\bar{\xi} = 0,04$	158
Tabela 6.3	– Resultados para décimo modo de vibração - $\bar{\xi} = 0,94$	159

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

OIE	Oferta Interna de Energia
TEP	Tonelada Equivalente de Petróleo
OCED	Organização para Cooperação e o desenvolvimento Econômico
TLP	Plataforma de Pernas Tracionadas (<i>Tension-leg Platform</i>)
FPSO	Unidade de Armazenamento e Transferências (<i>Floating Production Storage Offloading</i>)
SCR	<i>Riser</i> de Aço em Catenária (<i>Steel Catenary Riser</i>)
TDP	Ponto de Toque (<i>Touch Down Point</i>)
TDZ	Zona de Toque (<i>Touch Down Zone</i>)
TTR	<i>Riser</i> Tracionado no Topo (<i>Top Tension Riser</i>)
VIV's	Vibrações Induzidas por Vórtice
MAH	Modelo de Alta Hierarquia
MBH	Modelo de Baixa Hierarquia
MOR	Modelo de Ordem Reduzida
LIFE&MO	Laboratório de Interação Fluido-Estrutura e Mecânica <i>Offshore</i>
IPT	Instituto de Pesquisas Técnicas
USP	Universidade de São Paulo
MME	Método das Múltiplas Escalas
PVI	Problema de Valor Inicial
MATLAB®	<i>Matrix Laboratory</i>

LISTA DE SÍMBOLOS

x	na equação de Mathieu é o deslocamento axial
$\ddot{x}$	na equação de Mathieu é a segunda derivada do deslocamento em relação ao tempo
δ	na equação de Mathieu é a relação entre a frequência natural do sistema e a frequência de excitação do topo
ϵ	na equação de Mathieu é a amplitude da excitação
t	tempo
ω	frequência natural do sistema
Ω	frequência de excitação do topo
δW	trabalho virtual
$\delta \mathbf{p}$	no Método de Galerkin é o vetor de deslocamentos virtuais generalizados no MAH
$\mathbf{F}_p$	no Método de Galerkin é o vetor de cargas generalizadas do MAH
$\delta \mathbf{U}$	no Método de Galerkin é o vetor de deslocamentos reais do MBH
$\mathbf{F}_u$	no Método de Galerkin é o vetor de cargas generalizadas do MBH
$h(t)$	efeito <i>heave</i>
h_0	amplitude de pico do movimento <i>heave</i>
$\hat{\Omega}$	frequência do movimento <i>heave</i>
z	eixo de coordenadas no sentido perpendicular à seção do <i>riser</i>
w	deslocamento transversal do <i>riser</i>
x	na modelagem do <i>riser</i> como viga é o eixo de coordenadas no sentido longitudinal à seção
u	deslocamento axial do <i>riser</i>
N_ℓ	força de protensão inicial no <i>riser</i>
u_ℓ	deslocamento gerado pela força de protensão inicial no <i>riser</i>
p	carregamento axial por unidade de comprimento
ℓ	comprimento do <i>riser</i>

S	seção transversal genérica
P	ponto qualquer na seção transversal genérica
S'	seção transversal genérica deformada
P'	ponto qualquer na seção transversal genérica deformada
φ	rotação da seção genérica deformada
ε_p	deformação axial do ponto P da seção transversal
ε	deformação axial de um ponto genérico da seção transversal
ε_0	deformação axial inicial produzida pela força N_0
u_p	deslocamento axial do ponto P
w_p	deslocamento transversal do ponto P
u'_p	primeira derivada do deslocamento axial do ponto P em relação à coordenada axial
w'_p	primeira derivada do deslocamento transversal do ponto P em relação à coordenada axial
u'	primeira derivada do deslocamento axial de um ponto genérico em relação à coordenada axial
u''	segunda derivada do deslocamento axial de um ponto genérico em relação à coordenada axial
w'	primeira derivada do deslocamento transversal de um ponto genérico em relação à coordenada axial
w''	segunda derivada do deslocamento transversal de um ponto genérico em relação à coordenada axial
w^{IV}	quarta derivada do deslocamento transversal de um ponto genérico em relação à coordenada axial
δT	variação da energia cinética
δV	variação da energia potencial
T	energia cinética
m	massa por unidade de comprimento
$\dot{u}$	primeira derivada do deslocamento axial em relação ao tempo
$\ddot{u}$	segunda derivada do deslocamento axial em relação ao tempo

$\dot{w}$	primeira derivada do deslocamento transversal em relação ao tempo
$\ddot{w}$	segunda derivada do deslocamento transversal em relação ao tempo
t_i	tempo no instante i
E_p	energia potencial das forças externas conservativas
δE_p	variação da energia potencial das forças externas conservativas
U	energia interna
δU	variação da energia interna
E	módulo de elasticidades
A	área da seção transversal
I	momento de inércia da seção transversal
N	força normal na seção transversal
$\bar{N}$	força normal média
α	coeficiente da equação de movimento
β	coeficiente da equação de movimento
γ	coeficiente da equação de movimento
W	função da amplitude modal
W'	primeira derivada da função da amplitude modal
W''	segunda derivada da função da amplitude modal
W^{IV}	quarta derivada da função da amplitude modal
$N^*(x)$	força normal fictícia
n	identificação do modo de vibração
W_{0n}	amplitude inicial do movimento no modo de vibração n
$N_{0\eta}$	<i>primeira aproximação da força normal fictícia</i>
EI_{eq}	rigidez equivalente
η_n	amplitude modal adimensional do modo n
r	raio de giração da seção transversal
ω_n	frequência natural do modo n

a	variável auxiliar
z	variável auxiliar
N_{b_0}	força inicial na base do <i>riser</i>
N_{b_n}	força na base do <i>riser</i> no modo n
X_n	família de soluções modais
C_n	coeficiente auxiliar
D_n	coeficiente auxiliar
β_n	coeficiente auxiliar
N_{t_0}	força inicial no topo do <i>riser</i>
N_{t_n}	força no topo do <i>riser</i> no modo n
ψ_n	função modal quase-Bessel adimensional
$\underline{\alpha}$	coeficiente auxiliar
$\underline{\beta}$	coeficiente auxiliar
$\frac{\partial}{\partial x}$	derivada explícita de uma função em relação a coordenada axial
$\frac{\partial}{\partial t}$	derivada explícita de uma função em relação ao tempo
β_h	função adimensional do efeito <i>heave</i>
$\hat{\omega}_n$	frequência natural do <i>riser</i> imerso na água
C_a^*	relação entre a massa de água deslocada pelo <i>riser</i> por unidade de comprimento e massa do <i>riser</i> por unidade de comprimento
ϑ_w	carga transversal do movimento relativo fluido-estrutura
q_w	força de Morison
C_a	coeficiente de massa adicional
C_d	coeficiente de arrasto
ρ_{fl}	densidade do fluido
D	diâmetro do <i>riser</i>
v	deslocamento transversal normalizado pelo diâmetro

ξ	coordenada axial normalizada pelo comprimento
$\bar{\xi}$	coordenada modal
τ	tempo normalizado pela frequência natural na água
$\frac{\partial}{\partial \xi}$	derivada explícita em relação à coordenada normalizada
$\frac{\partial}{\partial \tau}$	derivada explícita em relação ao tempo normalizado
a_1^*	coeficiente auxiliar
ϕ	função quase-Bessel normalizada
$I_0 - I_6$	coeficientes integrais da equação do MOR
$\alpha_1 - \alpha_6$	coeficientes auxiliares do MOR
α_h	coeficiente auxiliar do MOR
x^*	no experimento em escala reduzida, é o deslocamento nodal na direção paralela à correnteza, normalizado pelo diâmetro
y^*	no experimento em escala reduzida, é o deslocamento nodal na direção perpendicular à correnteza, normalizada pelo diâmetro
z^*	no experimento em escala reduzida é a posição ao longo da envergadura, normalizada pelo diâmetro

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	23
1.1	Aspectos gerais	23
1.2	Objetivos.....	40
1.3	Justificativa	42
1.4	Revisão bibliográfica.....	43
1.5	Organização do texto.....	48
2	CONCEITOS FUNDAMENTAIS.....	50
2.1	Modos normais não lineares de vibração	50
2.1.1	<i>Análise modal linear</i>	<i>50</i>
2.1.2	<i>Modos normais não lineares.....</i>	<i>51</i>
2.1.3	<i>Propriedades fundamentais e aplicações.....</i>	<i>53</i>
2.2	Ressonância paramétrica – instabilidade de Mathieu.....	55
2.3	Método de projeção de Galerkin não linear	59
2.4	Modelo de ordem reduzida (MOR)	60
3	FORMULAÇÃO E METODOLOGIA DE ABORDAGEM DO PROBLEMA..	62
3.1	Formulação do problema.....	62
3.2	Metodologia de abordagem do problema	63
4	DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM VIBRAÇÕES LIVRES NÃO LINEARES À OBTENÇÃO DO MODELO DE ORDEM REDUZIDA (MOR)	66
4.1	Descrição do modelo: teoria de barras de Euler-Bernoulli e equação de movimento do sistema dinâmico.....	66
4.2	Vibrações livres não lineares.....	74
4.3	Modelo de ordem reduzida para excitação de topo	89
5	INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DO MOR E RESULTADOS.....	98

5.1	O método de Runge-Kutta.....	98
5.2	Ensaio em escala reduzida.....	101
5.3	Integração numérica da equação do MOR	110
5.4	Comparação da função quase-Bessel “não linear” com o ensaio em escala reduzida.....	115
5.5	Comparação da função quase-Bessel “não linear” com a função “linear”.....	116
5.6	Comparação com a função trigonométrica	120
5.7	Comparação da função quase-Bessel “não linear” com o OrcaFlex®.....	125
5.8	Estudos paramétricos	130
5.8.1	<i>Variação do coeficiente de arrasto C_d na função de projeção do tipo quase-Bessel “não linear”.....</i>	<i>130</i>
5.8.2	<i>Coeficientes da equação do MOR.....</i>	<i>133</i>
5.8.3	<i>Variação do coeficiente de arrasto C_d para diferentes funções de projeção. .</i>	<i>134</i>
5.9	Mapeamento das amplitudes do estado estacionário - diagrama Franzini-Sakamoto	136
5.10	O décimo modo de vibração.....	139
5.10.1	<i>Análise com amplitude modal definida na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$.....</i>	<i>141</i>
5.10.2	<i>Avaliação dos coeficientes integrais do MOR para o décimo modo de vibração na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$</i>	<i>149</i>
5.10.3	<i>Análise com amplitude modal definida na coordenada $\bar{\xi} = 0,94$.....</i>	<i>150</i>
6	CONCLUSÃO.....	155
7	REFERÊNCIAS	161

1 INTRODUÇÃO

1.1 Aspectos gerais

A matriz energética de um país pode ser definida como toda a energia disponível para ser transformada, distribuída e consumida no processo produtivo de uma sociedade. Pode ser dividida em fontes renováveis - como o etanol, biomassa, recursos hídricos - e não renováveis, tais como carvão mineral, gás natural e o petróleo. A grande dependência de energia que provém das fontes não renováveis pode ser depreendida a partir dos seguintes dados: no Brasil, em torno de 50,7% da matriz energética ainda deriva do petróleo e do gás natural, sendo que desse total, 75% derivam exclusivamente do petróleo, segundo dados do Ministério das Minas e Energia disponíveis na Resenha Energética de 2013, edição de Junho de 2014 (1). Ressalta-se ainda que a matriz energética mundial é composta por 13,2% de fontes renováveis no caso dos países industrializados, diminuindo para 8,2% entre as nações em desenvolvimento, de acordo com a mesma agência. A figura 1.1 ilustra esses dados.

Figura 1.1 – Oferta Interna de Energia no Brasil – OIE (%)

Fonte: Resenha Energética 2013 - Edição Junho de 2014 (1)

Cujas siglas significam:

TEP - tonelada equivalente de petróleo;

OCED - Organização para Cooperação e o Desenvolvimento Econômico.

Na década de 70 ocorreu a chamada Crise do Petróleo, em que a extração de óleo se tornou insuficiente devido ao consumo acelerado e à escassez de fontes alternativas. Aliou-se a essa crise a grande instabilidade política dos países do Oriente Médio, os quais possuem as maiores reservas em exploração no mundo, convertendo o petróleo em um instrumento de manipulação política. Sendo assim, esse produto torna-se referenciado por muitos como “Ouro Negro”. Ainda hoje, alguns dos maiores produtores enfrentam instabilidades políticas internas que se refletem no declínio das taxas de produção, bem como em oscilações significativas do preço, tornando o cenário instável e incerto sobre a oferta contínua do óleo.

Alia-se a essa conjuntura a maturação de alguns importantes campos de produção (como por exemplo, o do Mar do Norte, que atingiu seu pico de produção nos anos 2000) nos países de primeiro mundo, que são os maiores e principais consumidores. Nesse cenário, surge a necessidade pela busca de novas jazidas, impulsionando companhias mundiais em uma cruzada na procura de novas bacias produtoras, principalmente em países em desenvolvimento. O que se observa no transcorrer do processo histórico e econômico, é que por terem recursos financeiros escassos, essas nações não conseguiam prospectar e explorar suas reservas de maneira satisfatória. Via de regra, os mercados dos países em desenvolvimento instituíram medidas protecionistas, pois consideram as reservas de petróleo como elemento estratégico para o seu desenvolvimento, deixando companhias internacionais em desvantagem estratégica.

A fim de dirimir tais dificuldades, observa-se a formação de consórcios entre as companhias estrangeiras e as nacionais, cabendo às últimas participação majoritária nos consórcios, aporte de conhecimentos - por exemplo, geológicos e geotécnicos - e às companhias estrangeiras, o subsídio financeiro para desenvolvimento de novas tecnologias.

Importantes campos têm sido descobertos em regiões marítimas de países como Angola, Nigéria e Brasil, tornando a exploração de poços de petróleo e gás uma das principais atividades econômicas dessas nações. O Brasil, por exemplo, anunciou em 2007 a descoberta de petróleo em uma região conhecida como pré-sal - com

formações geológicas a 4.000 metros abaixo do fundo do mar - composta por camadas de rocha, terra e sal. As bacias do pré-sal possuem 800 km de extensão e 200 km de largura, situando-se do litoral de Santa Catarina até o Espírito Santo, conforme ilustrado na figura 1.2.

Figura 1.2 – Localização da camada pré-sal

Fonte: Revista Nova Escola (2) – adaptado pelo autor

Os campos mais importantes estão localizados na Bacia de Santos, na qual se destacam os de Tupi e Lara, com volumes totais estimados de 8 a 12 bilhões de barris de petróleo e gás (barris de óleo equivalente). Porém, os poços de óleo e gás estão localizados em águas profundas e ultraprofundas. Atualmente, considera-se água profunda aquela com lâmina d'água superior a 1.000 metros, e água ultraprofunda, superior a 2.000 metros. Na figura 1.3, apresenta-se um perfil das camadas que compõem o pré-sal.

Figura 1.3 – Perfil da camada pré-sal

Fonte: Revista Nova Escola (2)

Os elementos típicos que compõem o sistema submarino de produção são ilustrados na figura 1.4.

Figura 1.4 – Elementos do sistema de produção

Fonte: Site “Diário do pré-sal” (3) – adaptado pelo autor

As plataformas de produção (ver figura 1.5) são definidas em função da profundidade da lâmina d’água; para profundidades limitadas a 400m, as mais utilizadas são as plataformas fixas. As torres complacentes também compõem o conjunto das plataformas fixas, porém, por serem mais esbeltas, acabam permitindo maiores movimentos no topo com maiores períodos de oscilação, o que evita a ressonância causada pelo deslocamento das ondas. Para águas profundas, as mais utilizadas são as plataformas de tendões verticais atirantados - ou *Tension Leg Platforms (TLP’s)* - e as flutuantes na forma cilíndrica e vertical (*SPAR’s*). Para águas ultraprofundas, também se utilizam as plataformas do tipo *SPAR*, contudo, as mais comumente utilizadas são as plataformas semissubmersíveis e as unidades flutuantes de produção baseadas em navios tanques ou *Floating Production Storage Offloading (FPSO)*. No Brasil, as soluções mais adotadas são as semissubmersíveis e as *FPSO’s*.

Figura 1.5 – Tipos de plataforma de produção

Fonte: *Sítio Petróleo no Mar* (4) – adaptado pelo autor

As árvores de natal - instaladas no local de perfuração do poço - possuem um conjunto de válvulas de pressão que controlam o fluxo de óleo e de gás no poço. O *manifold* também é instalado no fundo do mar e tem a função de conectar os cabos e tubos dos diversos poços perfurados à plataforma.

O cabo umbilical assemelha-se ao *riser*, porém é dotado de um conjunto de mangueiras de controle hidráulico e injeção de produtos químicos, bem como de cabos de fibra ótica e controles elétricos. Exemplos de cabos umbilicais podem ser vistos na figura 1.6. As linhas de ancoragem fixam as unidades flutuantes ao fundo do mar, permitindo um deslocamento horizontal em cerca de 10% em relação à profundidade da lâmina d'água explorada.

Figura 1.6 – Exemplo de cabos umbilicais

Fonte: Prysmian (62)

Os *risers* são tubos que fazem a ligação entre os poços de petróleo e gás no fundo do mar e as plataformas ou navios na superfície. São considerados como uma das partes críticas do sistema de exploração *offshore*. O trecho suspenso do tubo recebe o nome de *riser* e aquele no qual o tubo fica deitado no leito submarino é denominado *flowline*.

Os *risers* podem ser classificados em rígidos ou flexíveis. Os rígidos são tubos de aço de alta resistência formados por segmentos soldados entre si; podem ser utilizados em atividades de perfuração e produção, porém, apenas em plataformas que apresentem pequenos movimentos. Já os *risers* flexíveis são tubos compostos por multicamadas sobrepostas de diferentes materiais, organizados de forma a se obter as melhores características de resistência à tração, compressão, pressões internas e externas, proteção contra agentes corrosivos e boa flexibilidade; são utilizados nas atividades de produção e transporte de gás, água e óleos, além da injeção de água, gases e produtos químicos nos poços explorados. Dadas as suas características construtivas, são subdivididos em duas categorias, a saber: “*Bonded*” - quando as camadas são unidas por meio de adesivos ou processo de vulcanização; e os “*Unbonded Pipes*” - os quais não possuem nenhuma ligação entre as camadas, propiciando maior flexibilidade e maior simplicidade de instalação. Apesar do custo elevado, se comparado aos componentes rígidos, os *risers* flexíveis são amplamente adotados, em especial pela Petrobras, dadas suas características superiores de resistência e facilidade de instalação, justificando assim a importância do estudo das

solicitações aos quais estão submetidos, bem como de sua manutenção e aprimoramento. A figura 1.7 apresenta um *riser* flexível e suas camadas internas; já a figura 1.8, um *riser* rígido.

Figura 1.7 – *Riser* flexível e suas camadas internas

Fonte: Vaz e Rizzo (5) - adaptado pelo autor

Figura 1.8 – *Riser* rígido

Fonte: Aker Solutions (6)

Os *risers* também podem ser classificados quanto à finalidade da plataforma, sendo que quando ela é de perfuração, o *riser* recebe o nome de *riser* de perfuração. Com uma configuração vertical, ele leva em seu interior o tubo de perfuração que transporta o fluido até a broca; a finalidade do fluido é facilitar a perfuração. Em seguida, o fluido retorna à plataforma juntamente com os detritos da perfuração que sobem através do vão entre as paredes do *riser* e o tubo de perfuração. Se a plataforma é de produção, o *riser* é chamado de *riser* de produção - quando recebe o petróleo e o gás dos poços - e *riser* de injeção, quando leva água ou gás aos poços. A água é injetada em um poço distinto do de produção, tendo como função ocupar o lugar do petróleo no poço, evitando-se diminuir as pressões no mesmo e, por consequência, impedir o desprendimento de gases que estão dissolvidos no petróleo. Já o gás é injetado através do mesmo poço de produção, com o intuito de gerar bolhas no petróleo, diminuindo assim sua densidade e facilitando a subida até a plataforma, em uma operação conhecida como *gaslift*.

Outra classificação pertinente é a que diz respeito à sua configuração de instalação. As principais são: *riser* de aço em catenária (*Steel Catenary Riser – SCR*), o qual é lançado individualmente; torre de *risers* (*Riser Tower*), que consiste em um conjunto de *risers* empacotados em uma torre vertical; e os *risers* tracionados no topo (*Top Tension Risers - TTR*), que são os *risers* verticais.

O SCR deixa a unidade flutuante em catenária até o encontro com o fundo do mar, quando passa a acompanhar o relevo submarino. A interface com a unidade flutuante é composta por uma estrutura de suporte e uma junta flexível para absorver as variações dinâmicas geradas pelo movimento dessa unidade; a região de contato com o fundo do mar está constantemente mudando. O ponto de toque é chamado de *Touch Down Point* (TDP) e pode se mover tanto na vertical quanto na horizontal. Esse movimento define uma região à qual se dá o nome de *Touch Dow Zone* (TDZ), e que é bastante sensível à fadiga mecânica, requerendo inspeção e manutenção frequentes. Em geral, são montados *offshore* utilizando uma embarcação especial que possui uma extensão de instalação. Comumente, precisam ser instalados já com a unidade flutuante posicionada, o que envolve uma operação complexa e delicada entre a embarcação de *pipelay* e a unidade flutuante, sendo que a unidade de lançamento de dutos trabalha consideravelmente próxima à unidade de produção. A figura 1.9 apresenta um exemplo de SCR com alguns elementos que compõe o sistema.

Figura 1.9 – Riser SCR

Fonte: Oil & Gas Technology (63) – adaptado pelo autor.

O *Riser Tower* é definido como um conjunto de *risers* empacotados em torno de um tubo central cuja fabricação e montagem acontece *onshore*. O objetivo do

conjunto é transportar fluidos e propiciar uma elevada rigidez mecânica. O tubo central é tracionado por um tanque de empuxo localizado no topo do conjunto que é posicionado a uma profundidade pré-determinada, de modo a minimizar os efeitos das ondas bem como os impactos das correntes marítimas; são conectados à unidade flutuante por meio de outros tubos flexíveis (*jumpers*), garantindo o fluxo contínuo de produção e diminuindo os movimentos verticais. No fundo do mar, a torre é conectada por meio de uma âncora que garante a fixação estática com o leito submarino. No fundo do mar, o *riser* e os *flowlines* se conectam tanto aos *spools* de produção como a outras diversas conexões. A figura 1.10 apresenta os elementos desse conjunto. O exemplo demonstra as três torres utilizadas no campo de Girassol, no Oeste da África, mais especificamente, em Angola, no ano de 1998.

Figura 1.10 – Riser Tower

Fonte: Alliot e Carre (8) – adaptado pelo autor.

Usados em TLP's e SPAR's, a configuração de TTR é um sistema de *risers* rígidos completamente verticais que partem logo abaixo da plataforma. Embora ancoradas, as unidades flutuantes são capazes de se deslocar lateralmente, sujeitas

à ação do vento e das ondas. Como os *risers* deste tipo são fixos no leito submarino, ocorrem deslocamentos verticais entre o topo do *riser* e o ponto de conexão com a instalação. Há duas soluções para esse problema: na primeira, um compensador de movimento pode ser instalado no topo do sistema, mantendo a tensão constante no *riser*, isto é, expandindo-se e contraindo-se de acordo com o movimento da plataforma; já a segunda solução contempla a instalação de boias, implementadas em torno do exterior do *riser*, a fim de manter o seu funcionamento. Em seguida, a parte superior do *riser* é ligada à unidade flutuante por meio de um tubo flexível capaz de acomodar os movimentos da instalação. A figura 1.11 apresenta um conjunto de *risers* verticais.

Figura 1.11 – *Top-tension riser*

Fonte: Company Atlantica (65) – adaptado pelo autor.

Avaliando a competitividade entre as soluções de *risers tower* e *SCR*, os primeiros se mostram mais onerosos em profundidades de até 1000 metros. Contudo, são soluções extremamente competitivas e exequíveis para águas profundas e

ultraprofundas, ressaltando-se ainda o alívio do congestionamento do leito marinho e as exigências de isolamento térmico de alto desempenho. O projeto e a construção tornam-se mais simples e a instalação é feita por meio da embarcação de perfuração padrão.

Uma das configurações de lançamento mais comumente utilizada é a catenária livre, dada a facilidade de instalação e operação. Contudo, a depender da profundidade da coluna d'água e das condições ambientais, a instalação de *riser* em catenária pode ser inviabilizada devido ao elevado nível de tração, à curvatura acentuada ou à flambagem por compressão dinâmica. Assim, configurações alternativas são concebidas, como por exemplo, a *lazy-wave* - com uma configuração similar à da catenária livre, porém, com boias intermediárias. Uma das finalidades da flutuação intermediária é aliviar o esforço concentrado no topo da plataforma, oriundo do peso do *riser*, e também diminuir o movimento na região da TDZ, reduzindo consequentemente a possibilidade de compressão dinâmica. Outra configuração similar é a *lazy-s*, na qual os flutuadores intermediários são substituídos por uma boia presa ao fundo do mar, reduzindo o movimento na parte inferior do *riser*. Outros exemplos de configurações podem ser citados, tais como a *steep-wave* e a *steep-s*, que são variações da *lazy-wave* e da *lazy-s*, respectivamente. A principal diferença é que o *riser* toca o fundo do mar com um ângulo quase próximo da vertical e não existe parte inferior apoiada, sendo amplamente utilizadas em situações nas quais não existe muito espaço disponível. Os exemplos supradescritos são ilustrados nas figuras 1.12 a 1.14. Outras configurações podem ser concebidas aliando-se as particularidades de cada uma das configurações descritas anteriormente, tornando assim vasto o sistema de instalação de *risers*, bem como proporcionando inúmeras possibilidades de adaptações.

Figura 1.12 – Configuração *lazy-wave*

Fonte: Offshore Magazine (64).

Figura 1.13 – Configuração *lazy-s*

Fonte: Offshore Magazine (64).

Figura 1.14 – Configurações *steep-wave* (à esquerda na figura) e *steep-s* (à direita na figura)

Fonte: Offshore Magazine (64).

Os *risers* típicos têm em torno de 5 a 20" de diâmetro (em torno de 12 a 50 centímetros) em lâminas d'água que podem ultrapassar os 2000 metros de profundidade, tornando-os, assim, elementos extremamente esbeltos. Apesar de possuírem comportamento de cabo em grande parte do trecho, a rigidez flexional não pode ser desconsiderada em certas regiões do *riser*, como por exemplo, o topo, a TDZ e os trechos intermediários que estão acoplados a flutuadores e boias. A rigidez flexional domina os modos transversais mais altos com semicomprimento de onda da ordem do comprimento de flexão (definido como a raiz quadrada da razão entre a rigidez flexional – EI - e a tração local). Já a rigidez geométrica domina os modos transversais mais baixos com semicomprimento de onda da ordem da profundidade.

Todo esse cenário leva os sistemas estruturais de exploração em águas ultraprofundas a regimes não lineares que antes podiam ser desconsiderados em condições mais controladas de solicitações. As não linearidades geométricas, por exemplo, não podem ser negligenciadas, visto que o comportamento de cabo, por sua natureza, é não linear, pois o esforço de tração depende da configuração de equilíbrio assumida pelo cabo e a configuração de equilíbrio, por sua vez, depende do esforço de tração. Os outros tipos de não linearidades que podem ser considerados são: o atrito e contato unilateral da estrutura com o leito submarino; a interação entre o escoamento interno do fluido e a estrutura; e o amortecimento hidrodinâmico.

Outro fator que colabora para a complexidade dos problemas típicos de engenharia *offshore* é a natureza dos carregamentos atuantes. Conforme Pesce (12), o carregamento é essencialmente de natureza hidrodinâmica. Cita as ondas de superfície e o perfil de correnteza oceânica ao longo do comprimento do *riser* provocando efeitos de vibrações induzidas por vórtice (VIV's). As ondas geram solicitações de duas maneiras distintas: diretamente, com efeitos mais acentuados junto à superfície, e que diminuem exponencialmente ao longo da profundidade; e indiretamente, alterando a posição da unidade flutuante, o que gera movimentos impostos ao topo do *riser*, conforme indicado na figura 1.15. A correnteza gera - ao longo do comprimento do *riser* - o desprendimento de vórtices alternados de cada lado do tubo, acompanhados de solicitações transversais ao eixo longitudinal. Eventualmente, se essa frequência de desprendimento for próxima ou igual à frequência de algum modo de vibração, a estrutura entra em *lock-in* e os deslocamentos transversais são amplificados, podendo chegar a amplitudes da ordem de até duas vezes o diâmetro do *riser*. Cabe ainda considerar o escoamento interno

do óleo ou gás e também as ações do vento que, de forma indireta, também movimentam a unidade flutuante.

Figura 1.15 – Movimentos da unidade flutuante

Fonte: *Platform Concepts* (11).

Os movimentos da unidade flutuante mencionados anteriormente são assim caracterizados:

- Com relação ao eixo longitudinal:
Translação: *surge*
Rotação: *roll*
- Com relação ao eixo transversal:
Translação: *sway*
Rotação: *pitch*
- Com relação ao eixo vertical:
Translação: *heave*
Rotação: *yaw*

Os carregamentos dinâmicos exemplificados anteriormente possuem específicas escalas de períodos. Movimentos rápidos no plano vertical de *heave*, *roll* e *pitch* apresentam períodos da ordem de 2 segundos para as TLP's, 10 segundos

para os navios e FPSO's e 20 segundos para plataformas semissubmersíveis. Os movimentos mais lentos no plano horizontal de *surge*, *sway* e *yaw* apresentam períodos de 1 a 3 minutos. O espectro de energia dos ventos é caracterizado por uma ampla faixa de frequência e possuem períodos de segundos ou minutos quando associados a rajadas; as ondas de grande amplitude possuem períodos de 10 a 15 segundos; e as ondas de pequenas amplitudes períodos de 3 a 10 segundos. As vibrações induzidas por vórtice apresentam períodos abaixo dos 20 segundos de acordo com Pesce (12).

A quantidade e a natureza das cargas dinâmicas às quais o *riser* está submetido, torna o cenário ainda mais complexo. Um fenômeno que merece ser destacado é o da ressonância paramétrica, a qual ocorre quando o termo forçante aparece como um coeficiente da equação que caracteriza o movimento, sendo que esse coeficiente varia harmonicamente com o tempo para particulares relações entre a frequência de excitação e uma frequência natural do *riser*. Ela difere da ressonância clássica que ocorre quando o termo forçante - caracterizado por uma não homogeneidade da equação de movimento - tem frequência igual ou próxima de uma frequência natural da estrutura. Algumas relações racionais caracterizam a ressonância paramétrica, entre elas, a relação 2:1 - em que a frequência de excitação é o dobro de uma frequência natural do sistema dinâmico. Quando o sistema entra em ressonância paramétrica, a configuração de equilíbrio trivial torna-se instável e o sistema busca uma configuração de equilíbrio dinâmico no estado estacionário (ciclo limite), que pode ou não existir, dependendo das características do sistema. No *riser*, a variação da rigidez geométrica com o tempo é caracterizada pela variação da tração com o tempo o que pode conduzir a estrutura a uma situação de instabilidade, justificando pois a importância do estudo do cenário da ressonância paramétrica.

1.2 Objetivos

O presente trabalho busca desenvolver o estudo dinâmico de *risers* retos submetidos à excitação paramétrica de topo, utilizando modos não lineares de vibração baseados em funções do tipo Bessel, de modo a se obter modelos matemáticos de ordem reduzida com poucos graus de liberdade. Espera-se que esses

modelos representem adequadamente o comportamento dinâmico do sistema estrutural.

Os *risers* retos são inicialmente tratados como vigas esbeltas protendidas pela teoria de barras de Euler-Bernoulli. Utilizando-se o Princípio de Hamilton, obtém-se a equação não linear de movimento para vibrações livres em um plano vertical. Para obtenção dessa equação, consideram-se apenas os carregamentos de peso próprio submerso da estrutura e um deslocamento imposto no topo, correspondente a uma força de protensão, de sorte que a estrutura fique na configuração vertical e tracionada. A resposta da estrutura caracteriza modos de vibração não lineares com funções do tipo “quase-Bessel”. Recebem essa denominação por serem originadas das funções de Bessel mas possuem respostas distintas das mesmas.

A partir da modelagem matemática no meio contínuo, procede-se a uma técnica de redução do número de graus de liberdade, de infinitos, para o caso de meio contínuo, para um modelo com um único grau de liberdade. Esse único grau de liberdade corresponde ao deslocamento transversal do *riser*, que pode ser considerado como um caso particular de um modelo de alta hierarquia. A conversão do modelo de alta hierarquia para o modelo de ordem reduzida é feita utilizando-se o Método de Galerkin não linear. Fisicamente, o Método de Galerkin impõe a igualdade entre os trabalhos virtuais no modelo de alta hierarquia e no modelo de baixa hierarquia, concentrando neste toda a energia do sistema. A equação do MOR é integrada numericamente, e são obtidas tanto as respostas no domínio do tempo, como o mapa de fase e o espectro de amplitude para determinadas frequências. Esses resultados são comparados aos resultados experimentais de um ensaio em escala reduzida, realizado sob coordenação do LIFE&MO (10) no tanque de provas do Instituto de Pesquisas Técnicas (IPT) da Universidade de São Paulo - USP, e às respostas obtidas por meio de um *software* dedicado à análise de estruturas *offshore* - o OrcaFlex[®] -, de modo a se estudar o potencial da ferramenta desenvolvida.

Embora o modelo matemático obtido via MOR permita análises abrangentes, o trabalho focaliza, particularmente, a ressonância paramétrica em que a frequência de excitação é o dobro da frequência natural do sistema dinâmico. Essa relação racional 2:1 define a principal região de ressonância paramétrica no diagrama de Strutt, pois é a que apresenta maior área de instabilidade para baixos valores da amplitude de excitação.

Em seguida, análises paramétricas são realizadas com o objetivo de avaliar a sensibilidade e calibração do modelo aos diversos parâmetros que influenciam a resposta, tal como, por exemplo, o coeficiente de arrasto. Finalmente, as discussões concentram-se nas limitações e potencialidades tanto da equação não linear que caracteriza o sistema dinâmico, quanto do MOR, permitindo-se fazer estimativas sobre os valores extremos da resposta dinâmica do sistema estrutural no regime pós-crítico.

1.3 Justificativa

Mesmo sendo caracterizado como uma fonte de energia altamente poluente - e também com o recente aumento de investimentos em tecnologias limpas como a eólica e solar -, o petróleo ainda compõe a base de quase toda matriz energética mundial. E, por isso, a infraestrutura implantada tanto de exploração, como de refino e distribuição, tornam o petróleo competitivo e vantajoso frente às demais fontes de energia. Contudo, as novas reservas descobertas apresentam desafios tecnológicos e científicos, tanto no sentido de otimizar a exploração quanto torná-la mais segura a fim de se evitar acidentes como os ocorridos no Golfo do México, em 2010, e na Bacia de Campos, em 2011, ambos com danos ambientais irreparáveis.

Assim, dada a importância do cenário de exploração do petróleo, surge a necessidade de desenvolver e melhorar as tecnologias de todo o sistema. Entre os pontos mais suscetíveis, destacam-se os *risers* - haja vista que as diversas solicitações estruturais às quais estão submetidos podem reduzir sua vida útil, conduzindo a interrupções na produção para que sejam efetuados reparos e, em casos extremos, levando ao colapso estrutural. Com isso, os modelos matemáticos e computacionais adquirem cada vez mais importância e buscam representar de maneira adequada os sistemas reais. Com esses procedimentos e ferramental mais desenvolvidos, pode-se levar em conta efeitos até então negligenciados.

Diante da variedade de carregamentos e da esbeltez da estrutura, as não linearidades advindas das formulações não podem ser desprezadas. Porém, análises não lineares físicas e geométricas conduzem a modelos matemáticos complexos com elevado número de graus de liberdade. Modelos com número excessivo de graus de liberdade demandam esforços computacionais consideráveis, dificultando a análise e

compreensão dos resultados e, até mesmo, dificultando a identificação do comportamento qualitativo do sistema e de efeitos dominantes na análise dinâmica.

Para contornar essa dificuldade, abordam-se os modos não lineares de vibração, pois estes permitem reduzir significativamente os graus de liberdade do modelo sem perder a capacidade de representação do sistema estrutural, preservando sua fidelidade e comportamento fenomenológico. Esses modos podem capturar a influência de modos lineares superiores devido à consideração de termos não lineares em sua formulação. Dessa forma, um único modo não linear pode conter informações de dois ou mais modos lineares. Os MOR's são modelos de baixa hierarquia obtidos mediante o uso dos modos lineares ou não lineares no método de Galerkin; permitem a análise qualitativa e, até mesmo, quantitativa da resposta dinâmica, auxiliando na interpretação dos resultados do modelo de alta hierarquia. Os MOR's permitem a discussão de cenários críticos mediante a análise paramétrica das variáveis de controle, portanto, norteiam e complementam os modelos de alta hierarquia.

Pretende-se que, com o modelo estudado nessa dissertação, seja possível a aplicação de novas técnicas de modelagem e análise dinâmica de *risers* em sua configuração vertical, levando-se em consideração os efeitos não lineares mais representativos, de modo que as técnicas descritas possam ser incluídas na implementação de projetos e metodologias de avaliação do comportamento dinâmicos dessas estruturas.

1.4 Revisão bibliográfica

Analisa-se aqui as referências bibliográficas sobre o tema proposto com a finalidade de identificar correntes de sistematização do conhecimento relativo à dinâmica não linear de *risers* que possam contribuir para o desenvolvimento da pesquisa.

Os primórdios da análise modal não linear, de acordo com Kerschen et al., (66) foram apresentados originalmente por Lyanupov (67) em seu trabalho de 1892, no qual tratou a existência de soluções periódicas para sistemas não lineares. Contudo, o mesmo autor também credits aos teoremas de Poincaré (68) uma significativa importância, pois correspondem ao embasamento do método dos modos

normais lineares, que são essenciais para o desenvolvimento da teoria dos modos normais não lineares de vibração.

Os conceitos fundamentais sobre modos não lineares iniciaram-se com Rosemberg (70) definindo-os como movimentos de um sistema dinâmico em torno de uma configuração de equilíbrio. Se o movimento é característico da própria natureza do sistema, e ocorre sem influência de excitação externa, as vibrações são denominadas vibrações livres e, caso ocorram sob a influência de excitação externa, denominam-se vibrações forçadas. Essa definição é ampla o suficiente para que os modos normais sejam um caso particular dos modos normais não lineares. O autor concentrou seus trabalhos no desenvolvimento de métodos para construção de modos para sistemas discretos, conservativos e com certas condições de simetria. Rosemberg utiliza o método geométrico, determinando inicialmente as coordenadas generalizadas e, em seguida, a frequência modal.

Já em seus primeiros trabalhos, Rosemberg (71) começou a observar o fenômeno da multiplicidade de modos, que não ocorre na análise linear. Em (72), o mesmo autor apresentou um estudo da estabilidade desses modos generalizando o método para sistemas com n graus de liberdade. Em (73), Rosemberg se dedicou às propriedades dos modos normais não similares.

O aprofundamento teórico dos modos normais não lineares tem como destaque o trabalho de Rosemberg (74), no qual foram lançadas as bases em que se apoiaram os desenvolvimentos de inúmeros autores, entre eles Wah (75), que generalizou o conceito desenvolvido por Rosemberg para sistemas contínuos e Anand (76) e Rand e Vito (77), que estudaram o fenômeno da ressonância interna e a propriedade de multiplicidade dos modos.

Vakakis (78) (79) (81) e Vakakis e Rand (80) apresentaram algumas investigações à respeito da existência, estabilidade e bifurcações de certos modos normais não lineares, baseados nos resultados de Rosemberg; os resultados foram resumidos e apresentados por Vakakis (83).

A dinâmica não linear ganha uma importante contribuição quando Shaw e Pierre (14) definiram que, se para os sistemas lineares a solução do problema de vibrações livres está contida em uma superfície plana bidimensional no espaço de fase, para os sistemas não lineares, a trajetória da solução modal deve estar contida em uma superfície bidimensional no espaço de fase que não necessariamente deve

ser plana. Assim, diferentemente dos modos lineares, as coordenadas generalizadas do sistema se relacionam não linearmente entre si.

Shaw e Pierre (15) (16) (17) mostraram que para os sistemas não lineares, uma vez que a solução esteja contida na superfície modal, no instante inicial, aí permanecerá para todo o tempo, justificando-se chamar essa superfície de variedade invariante. As vantagens da nova definição proposta é que ela abrange os sistemas não conservativos e sem a necessidade específica de simetrias, abrangendo uma ampla gama de sistemas não lineares, englobando a definição de Rosemberg como um caso particular.

Nayfeh e Mook (9) estudaram as vibrações não lineares em vigas, obtendo as correspondentes variedades invariantes ao resolverem as equações diferenciais não lineares de vibrações livres por meio de expansões assintóticas, tais como o método das múltiplas escalas de tempo (MME). O método introduz um parâmetro de perturbação ϵ com valor entre 0 e 1, com a finalidade de criar um fator de escala que direcione as não linearidades para uma escala temporal mais lenta na qual se resolvem equações lineares. As respostas lineares para uma certa ordem ϵ são substituídas nas equações de ordem superior, originando termos forçantes de uma nova equação linear. Nestas últimas, é necessário eliminar os termos seculares por meio das equações de resolubilidade, as quais permitem caracterizar a modulação das amplitudes e das frequências.

Boivin, Pierre e Shaw (18) (19) apresentaram o conceito de multimodos para tratar os sistemas com ressonância interna, ou seja, nos quais há acoplamento modal não linear. Nos multimodos, os movimentos acontecem em uma variedade invariante em dimensão $2M$, na qual M é definido como o número de modos lineares acoplados não linearmente. Essa variedade contém uma solução estacionária e tangente a todos os M autoplanos que caracterizam os modos lineares acoplados. Os multimodos são o resultado da busca pela manutenção da propriedade de invariância face à presença de ressonâncias internas.

Mazzilli et al. (20) (21) (22) aplicaram o MME com a finalidade de encontrar modos normais não lineares em distintos sistemas estruturais que apresentam ressonância interna.

Com a consolidação dos multimodos e do MME, começaram a surgir esforços para desenvolver metodologias de obtenção de modelos de ordem reduzida em dinâmica não linear. Steindl e Troger (23) abordaram o método de projeção de

Galerkin linear e não linear, reduzindo os graus de liberdade de alguns sistemas dinâmicos contínuos. Em Baracho Neto (24), a técnica de Galerkin foi utilizada para projeção em campos não lineares de deslocamentos, apresentando resultados iniciais bastante promissores. No primeiro instante, foram abordadas as estruturas aporticadas planas. Em Mazzilli et al. (25), a técnica foi utilizada para projeção sobre modos não lineares normais. Em Mazzilli et al. (26), a técnica alcançou destaque quando foi utilizada sobre modos não lineares normais e multimodos, apresentando um procedimento geral para a obtenção dos modelos de ordem reduzida.

Ainda sobre os modelos de ordem reduzida, o trabalho de Touzé e Amabili (89) apresentou a obtenção de MOR's para vibrações não lineares de estruturas finas nas quais os osciladores não lineares eram compostos por não linearidades quadráticas e cúbicas, reduzindo substancialmente a dinâmica de uma estrutura continua. Rega e Troger (90), em publicação especial da revista *Nonlinear Dynamics*, apresentaram um artigo sobre modelos de dimensão reduzida, analisando os métodos mais comuns de redução da dimensão para o estudo da dinâmica não linear, com ênfase em aplicações mecânica.

Sobre a ressonância paramétrica, a Teoria de Floquet - abordada em Nayfeh (9) - surge como ferramenta para estudo da estabilidade da solução trivial da equação de Mathieu. Destaca-se o pioneiro trabalho de Rainey (116) que investiga, teórica e experimentalmente, a instabilidade paramétrica de *TLP's* e *risers*.

Cartmel (28) apresentou um estudo sobre a ressonância paramétrica para sistemas dinâmicos lineares que serviu como fonte para Soares (29), o qual estudou a excitação paramétrica em sistemas com um grau de liberdade. A aplicação direta a *risers* surge com Chatjigeorgiou e Mavrakos (30), os quais apresentaram estudos de ressonância paramétrica para frequência excitante igual ao dobro da frequência natural do primeiro modo de vibração do *riser* vertical. Chatjigeorgiou e Mavrakos obtiveram uma solução fechada por meio do MME, considerando os dois primeiros modos não lineares. Meirovitch (91) aborda, no contexto da teoria de dinâmica analítica, o problema da instabilidade paramétrica com grande propriedade. Estudos analíticos apresentados por Patel (117) investigaram os efeitos do amortecimento quadrático hidrodinâmico e a influência da variação linear da força normal nas estruturas. Como principal conclusão, destacou-se que o amortecimento hidrodinâmico é responsável por limitar a amplitude de oscilação, mesmo na região

instável do diagrama de Strutt e que a consideração da variação da força normal ao longo do comprimento do *riser* é característica determinante na análise do problema.

Mazzilli et al. (31) apresentam uma formulação não linear das equações não lineares de movimento para barras, orientada para o método dos elementos finitos. Em 2008, Mazzilli et al. (32) lançaram as bases do estudo dos modos não lineares de vibração de *risers* verticais submetidos a esforço axial; esse trabalho apresenta um *riser* idealizado como uma viga de Euler-Bernoulli submetido a um carregamento axial, considerando constante a força normal ao longo do comprimento da barra. As soluções foram obtidas via MME, sendo que Sanches (33) avaliou o comportamento dinâmico dos *risers* utilizando modos não lineares e introduzindo controle ativo das vibrações.

Mazzilli (22) apresentou uma variação conceitual para a formulação da equação de movimento de uma barra carregada axialmente com variação da força normal ao longo do comprimento em decorrência do peso submerso, alcançando resultados melhores do que os obtidos anteriormente, quando os modos de vibração foram caracterizados por uma onda não estacionária.

Senjanovic et al. (34) apresentaram, em 2006, a análise de *risers* retos considerando-os como cabo e, posteriormente, como viga com pouca rigidez à flexão; as soluções exatas e assintóticas para a formulação de cabo foram apresentadas. No tratamento de vigas, a solução de cabo foi modificada pelo chamado método da segmentação. Os resultados foram comparados com análises via método dos elementos finitos, observando-se boa concordância entre os procedimentos utilizados.

Mazzilli et al. (35) apresentaram a solução da equação diferencial de movimento para um *riser* submetido a força normal variável ao longo do seu comprimento utilizando os princípios de Senjanovic et al. (34). Nesse trabalho, a equação de movimento do *riser* foi tratada como um caso particular da equação do cabo. A consideração da rigidez flexional da viga foi abordada por meio da correção da força normal que define a rigidez do cabo. A metodologia de resolução se torna muito mais fácil e manipulável do que aquela proposta por Senjanovic et al. (34) e, quando os resultados foram confrontados, apresentaram uma excelente concordância, validando o procedimento adotado.

Sobre a análise experimental de *riser*, cita-se o ensaio em escala reduzida - realizado sob coordenação do LIFE&MO (10) no tanque de provas do IPT - no qual um modelo de *riser* vertical, montado em um carro dinamométrico, foi submetido à

excitação pelo fenômeno de vibrações induzidas pela emissão de vórtices e por movimento imposto ao topo, provocando a instabilidade paramétrica. Para os ensaios realizados com cilindros rígidos sob ação de VIV's, destacam-se os trabalhos de Jauvtis e Williamson (95), que avaliaram as vibrações transversais de um *riser* com dois graus de liberdade; e também Sarpkaya (98) e Williamson e Govardhan (99), os quais elaboraram uma revisão abrangente dos ensaios experimentais realizados para *risers* submetidos a um fluxo uniforme estável.

Para os cilindros flexíveis, é possível citar os trabalhos de Pesce e Fuarra (96), Fuarra et al. (94) e Pesce e Fuarra (97), que estudaram o fenômeno de VIV's em um cilindro flexível em balanço, apresentando similaridades com os resultados previamente conhecidos para modelos rígidos elasticamente apoiados. Em LIFE&MO (102), tem-se os resultados de um experimento para cilindros flexíveis em catenária e, em LIFE&MO (103), os cilindros flexíveis foram ensaiados em um canal de água recirculante.

Nos experimentos de Chaplin et al. (92) e Chaplin et al. (93), o modelo flexível foi submetido à correnteza somente em sua parte inferior, enquanto que a parte superior encontrava-se em uma câmara de vácuo; esses autores também apresentaram uma extensa comparação dos resultados experimentais com os resultados previstos em códigos numéricos empregados por diferentes centros de pesquisa. Franzini et al. (100) apresentaram resultados relativos a experimentos cujo modelo flexível é bastante longo, porém, imerso somente em sua parte inferior. Nesse trabalho, foi aplicada uma técnica de análise de sinais que permitiu a obtenção temporal das variações de amplitude e frequência. Franzini et al. (101) apresentaram - para um cilindro com variações em sua relação de massa - a comparação de seu comportamento para um sistema com um e com dois graus de liberdade.

1.5 Organização do texto

A presente dissertação está subdividida em 6 capítulos, os quais estão descritos resumidamente nesta seção.

O capítulo 1 apresenta uma contextualização sistêmica da exploração do petróleo, dos elementos de engenharia *offshore*, em geral, e de *risers*, em particular, bem como a motivação e justificativa do trabalho.

O capítulo 2 contempla alguns conceitos fundamentais de modos normais não lineares, ressonância paramétrica, método de Galerkin não linear e modelos de ordem reduzida.

O capítulo 3 expõe a formulação específica do problema e a metodologia proposta para sua resolução, indicando brevemente as ferramentas e hipóteses simplificadoras adotadas.

O capítulo 4 encarrega-se de apresentar a formulação da equação não linear de movimento do *riser* vertical utilizando-se o princípio de Hamilton. As primeiras discussões são sobre as vibrações livres tratadas pela equação homogênea e, em seguida, introduz-se uma não homogeneidade referente à interação fluido-estrutura. Posteriormente, é apresentado um comparativo dos resultados parciais com outras formulações adotadas no trabalho de Senjanovic et al. (34). Finalmente, com a definição da equação, esta é projetada conforme preconiza o método de Galerkin para obtenção do modelo de ordem reduzida.

O capítulo 5 trata da análise numérica do modelo de ordem reduzida, das hipóteses e definições numéricas. Os resultados obtidos do modelo matemático são, em um primeiro momento, confrontados com os resultados experimentais de um ensaio em escala reduzida realizado sob coordenação do LIFE&MO no IPT da Universidade de São Paulo e também com um *software* dedicado à análise de estruturas *offshore*, o OrcaFlex®. Discussões e análises paramétricas são apresentadas no transcorrer do capítulo para avaliação da sensibilidade do modelo em relação aos parâmetros de controle. Finalmente, a instabilidade paramétrica de modos de vibração mais altos é discutida e os resultados obtidos são novamente confrontados com funções de projeção clássica.

O capítulo 6 reúne as conclusões e discussões dos resultados obtidos por meio do modelo de ordem reduzida, expondo suas potencialidades e limites, bem como propondo sugestões de melhorias e avanços na pesquisa.

Finalmente, são apresentadas as referências bibliográficas que compõem a dissertação.

2 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

2.1 Modos normais não lineares de vibração

Conforme mencionado no capítulo 1, alguns sistemas estruturais podem estar sujeitos a grandes amplitudes de deslocamentos que quase sempre demandam a consideração das não linearidades inerentes ao modelo físico e matemático que simulam o problema. Entretanto, a análise das vibrações não lineares dos sistemas dinâmicos é geralmente um processo oneroso, demorado e sensível aos seus vários parâmetros de controle. Muitos desses fenômenos são de complexa identificação e, quase sempre, descritos por modelos com um grande número de graus de liberdade. A redução de graus de liberdade é uma abordagem apropriada para se contornar essas dificuldades, além de constituir um procedimento eficiente para obtenção de um entendimento fenomenológico adequado do comportamento dinâmico de sistemas não lineares. A análise modal não linear tem sido abordada de modo análogo à análise modal linear, sendo portanto, uma alternativa viável para obtenção de modelos de ordem reduzida de sistemas não lineares, conforme Pierre et al. (107).

Inicialmente, são apresentadas as principais características dos sistemas lineares, já que a primeira definição dos modos normais não lineares utiliza uma extensão dos conceitos lineares. As definições de Rosemberg (72) e Shaw e Pierre (16) são exploradas, expondo resumidamente as vantagens e desvantagens de cada definição. Assim, as propriedades fundamentais dos modos normais não lineares podem ser apresentadas junto a uma breve explicação das aplicações e potencialidades dos modos.

2.1.1 *Análise modal linear*

A análise modal não linear foi inicialmente desenvolvida por meio de uma aproximação teórica com a análise linear. Portanto, compreender os fundamentos da análise linear é imprescindível para entender essa analogia.

A equação de movimento que caracteriza um sistema dinâmico linear com n graus de liberdade é escrita em sua forma matricial como:

$$\{\ddot{x}\} + [A]\{x\} = \{0\}. \quad (2.1)$$

Sendo A uma matriz simétrica e positiva definida, a obtenção dos n autovalores corresponde às frequências naturais e os n autovetores aos modos normais de vibração. A matriz A é uma característica da massa, da rigidez e da distribuição espacial do sistema. Dessa forma, as frequências e os modos normais de vibração tornam-se características inerentes ao sistema dinâmico. Junto com a interpretação física dos autovalores e dos autovetores, os modos normais lineares apresentam como características o desacoplamento das equações de movimento em n equações diferenciais ordinárias de segunda ordem independentes. Do desacoplamento modal surge a propriedade da invariância, na qual um movimento iniciado em um modo específico tende a permanecer nele durante todo o tempo. Outra característica é a superposição modal, na qual os modos podem ser tratados por meio de uma combinação linear entre eles, com o objetivo de descrever qualquer movimento do sistema. Modos normais permitem ainda algumas propriedades de redução modal, análises experimentais, modelagem por meio do método dos elementos finitos e o controle das vibrações.

2.1.2 Modos normais não lineares

Na literatura referente à dinâmica não linear, podem ser encontrados vários conceitos referentes aos modos normais não lineares, destacando-se as definições de Rosemberg (72) e Shaw e Pierre (14), rerepresentadas a seguir.

A definição de Rosemberg (72) pode ser entendida como uma extensão natural da análise modal linear para sistemas com comportamentos não lineares. Consoante esse autor, para um sistema conservativo, durante o movimento em um modo normal, cada grau de liberdade se move com a mesma frequência e com a mesma razão entre os deslocamentos dos seus graus de liberdade. Assim, para sistemas conservativos não lineares, os modos normais não lineares podem ser definidos como uma oscilação periódica e síncrona, de maneira que todos os pontos materiais do sistema passem, ao mesmo tempo, pela posição de equilíbrio e de amplitude máxima. Pela natureza da definição, o conceito apresenta algumas

limitações como sua inaplicabilidade a sistemas não conservativos bem como situações nas quais o sistema apresenta o fenômeno de ressonância interna. As limitações decorrem do fato de que, em ambos os casos, a vibração do sistema não é síncrona.

Para contornar essa limitação, Shaw e Pierre (14) desenvolvem o conceito dos modos normais não lineares, baseando-se na teoria das variedades invariantes. Um modo normal não linear pode ser definido como um movimento que ocorre em uma variedade invariante bidimensional no espaço de fase do sistema. Essas variedades invariantes passam pela posição de equilíbrio estável do sistema na qual se tornam tangentes ao autoespaço bidimensional que corresponde ao sistema linearizado em relação à sua posição de equilíbrio estável. Nas variedades invariantes, o sistema dinâmico é regido por uma equação de movimento que envolve um par de variáveis de estado, comportando-se como um oscilador modal não linear de um único grau de liberdade.

O principal objetivo dessa abordagem é determinar as equações de restrição que descrevem a topologia das variedades invariantes no espaço de fase do sistema, sendo representadas por planos (no caso dos modos lineares e modos não lineares similares - tendo em vista que modos normais não lineares similares são aqueles em que a forma independe da energia do sistema enquanto a frequência depende da energia) e por superfícies curvas (no caso dos modos normais não lineares não similares - levando-se em consideração que modos normais não lineares não similares são aqueles em que tanto a forma quanto a frequência de vibração, independem da energia do sistema, consoante Rosemberg (74)). Definidas as equações de restrição de um modo específico, a dinâmica do sistema é reduzida à de um oscilar modal não linear por meio da substituição das equações de restrição nas equações de movimento, obtendo-se assim, um modelo de ordem reduzida do sistema (66).

Avaliando-se as duas definições anteriores, nota-se que a definição de Rosemberg é mais compacta, de fácil formulação matemática e aplicada aos sistemas contínuos e conservativos. A definição baseada nas variedades invariantes de Shaw e Pierre é mais inovadora e, ao mesmo tempo, generalista, podendo ser aplicada a uma abrangente gama de sistemas dinâmicos, incluindo os forçados e amortecidos (108).

2.1.3 *Propriedades fundamentais e aplicações*

Embora a análise modal não linear tenha se desenvolvido como uma adaptação à análise modal linear para sistemas dinâmicos não lineares, algumas propriedades não se aplicam aos problemas não lineares. Assim, a analogia proposta entre as análises não pode ser completa e extensa.

No caso dos sistemas lineares, o desacoplamento dinâmico entre modos normais diferentes permite que a resposta múltipla de vários modos possa ser obtida pela superposição individual dos modos, gerando uma base para compor a resposta completa do sistema, o que não é válido para os sistemas não lineares. O fato de não ser possível efetuar a superposição modal nos modos não lineares é um dos maiores limitantes em sua aplicação; além disso, os modos normais não lineares não apresentam relações de ortogonalidade entre si (109).

Uma característica exclusiva dos sistemas não lineares é a multiplicidade dos modos, em que o número de modos excede o número de graus de liberdade do sistema (71). Conforme Nayfeh et al. (110), isso ocorre devido aos fenômenos de ressonância interna e bifurcação dos modos. Em linhas gerais, a bifurcação modal ocorre para determinados níveis de energia ou variação de alguns parâmetros de controle do sistema. Já ressonância interna surge quando a relação entre as frequências é expressa por um número inteiro (e verificada para dois ou mais modos), possibilitando que os modos possam interagir entre si durante o movimento e, conseqüentemente, quebrando a propriedade de invariância.

Um fenômeno possível em ambas as análises é a troca de energia entre os modos, que é reversível para os modos lineares e pode ser irreversível para os modos não lineares. No caso linear, a troca de energia provoca o efeito de batimento, ou seja, quando dois ou mais modos com frequências naturais aproximadamente iguais trocam energia entre si. Para os não lineares, a troca de energia ocorre dos modos excitados para os modos não excitados, dada à interação modal existente (111).

Cabe estabelecer aqui uma distinção superficial entre a ressonância interna e o acoplamento modal. Apesar de ambos darem origem aos fenômenos de troca de energia e formação de modos acoplados, a ressonância interna é identificada por métodos de perturbação ou por singularidades nas expansões modais das equações de restrição das variedades invariantes, ao passo que o acoplamento modal ocorre quando existe a perda de estabilidade de um modo normal (112).

Nos modos normais lineares, os parâmetros lineares de análise do sistema são, basicamente, a amplitude do movimento, a frequência de vibração, o vetor modal e o ângulo de fase. Para a análise modal não linear (baseada na definição de variedades invariantes), o parâmetro modal principal é a topologia do subespaço, definida pelas funções de restrição e relações frequência-amplitude de cada modo. Conforme mencionado anteriormente, os parâmetros modais da análise linear correspondem às características intrínsecas ao sistema, cuja solução é um problema de autovalores e autovetores. Entretanto, na análise não linear, os parâmetros modais dependem também das características do próprio movimento que está associado à energia disponível e à amplitude de vibração. De acordo com Rosemberg (74), a impossibilidade de se reproduzir a mesma metodologia para obtenção dessas características se dá pelo fato de que, para sistemas não lineares, a energia potencial varia de forma quadrática, o que, em geral, não ocorre para os sistemas lineares.

Sobre a estabilidade, o diagrama de Strutt tem sido amplamente utilizado em conjunto com a análise modal não linear para o estudo da estabilidade da solução dos sistemas discretos. O estudo da estabilidade de um movimento periódico em um sistema não linear envolve a perturbação da solução do sistema linearizado, na qual se aplica a Teoria de Floquet, para então a estabilidade do sistema reduzido ser investigada pela equação de Mathieu (66). Outra metodologia é a adoção da seção de Poincaré, na qual a estabilidade também é verificada pela inspeção dos multiplicadores característicos do sistema (112).

Dessa forma, a análise modal não linear é utilizada a fim de se investigar o comportamento de sistemas dinâmicos complexos que apresentem casos de ressonância interna, acoplamentos modais, trocas de energia entre os modos e na aplicação de redução modal. Pode ser aplicada no estudo dos sistemas que apresentem vibrações forçadas e amortecidas, abrangendo, portanto, grande parte dos problemas de engenharia.

2.2 Ressonância paramétrica – instabilidade de Mathieu.

Sistemas estruturais dinâmicos possuem a particularidade de apresentarem o fenômeno da ressonância que é um comportamento específico do oscilador modal quando o mesmo é submetido a uma frequência determinada. A ressonância clássica acontece quando a frequência de excitação do carregamento periódico, caracterizada por uma não homogeneidade na equação de movimento, é igual à frequência natural do sistema. Já a excitação paramétrica designa um caso particular de ação dinâmica em que a solicitação surge na equação de movimento não como uma não homogeneidade, mas por meio de parâmetros que variam com o tempo, frequentemente de forma periódica, nas equações de movimento homogêneas, consoante Soares (29).

Para um *riser*, cuja extremidade inferior está ancorada no fundo do mar e a extremidade superior fixa a um flutuador, com a passagem das ondas, os movimentos de *surge* e, principalmente, *heave* das unidades flutuantes, provocam uma oscilação da força de tração. Como o comportamento do *riser* é similar ao de um cabo, a sua rigidez geométrica é proporcional à força de tração. O cenário configura uma situação em que a rigidez do *riser* torna-se variável com o tempo e, portanto, suscetível à instabilidade paramétrica para especiais relações entre a frequência de excitação de topo e a frequência natural da estrutura. Quando o sistema está em ressonância paramétrica, a configuração de equilíbrio trivial torna-se instável e o sistema busca uma configuração de equilíbrio dinâmico em estado estacionário (ciclo limite), que pode ou não existir, dependendo das características do sistema.

A ressonância paramétrica ocorre quando se observa uma relação racional entre as frequências de excitação do topo Ω e uma frequência natural do sistema ω . Matematicamente, o fenômeno da ressonância paramétrica pode ser entendido avaliando a equação de Mathieu, indicada na equação (2.2), que modela o comportamento de um sistema dinâmico com um grau de liberdade:

$$\ddot{x} + (\delta + 2\epsilon \cos 2t)x = 0 \quad (2.2)$$

com a seguinte relação, indicada na equação (2.3), entre os parâmetros:

$$\delta = \left(\frac{2\omega}{\Omega}\right)^2 \text{ ou } \sqrt{\delta} = \left(\frac{2\omega}{\Omega}\right) = n \text{ com } n \in \mathbb{N} \quad (2.3)$$

na qual ω e Ω foram definidos anteriormente e ϵ é a amplitude da excitação normalizada. Na equação (2.2), a rigidez do modelo também varia com o tempo, de forma similar ao comportamento do *riser*.

A equação (2.2) não apresenta solução imediata. Utilizando-se a Teoria de Floquet (9), é possível demonstrar que as soluções normais são da forma:

$$x(t) = \phi(t)e^{\gamma t} \quad (2.4)$$

sendo que γ é denominado de expoente característico e $\phi(t) = \phi(t + \pi)$. Se a parte real de um dos γ 's é positiva, a solução $x = 0$ é instável e cresce ilimitadamente com o tempo. Se a parte real de todos os γ 's é negativa, a solução $x = 0$ é estável. O valor nulo da parte real dos γ 's separa os movimentos estáveis dos instáveis. O lugar geométrico dos pontos (δ, ϵ) , que corresponde à parte real nula de algum expoente característico, caracteriza as curvas de transição. Dessa forma, pode-se dividir o plano dos parâmetros de controle (δ, ϵ) em regiões que representam a estabilidade ou a instabilidade da solução da teoria linear. Se $\epsilon = 0$, os valores positivos de δ caracterizam configurações estáveis e os valores negativos de δ caracterizam as configurações instáveis.

Ainda de acordo com Nayfeh (9), as técnicas para se determinar o expoente característico e as curvas de transição combinam a Teoria de Floquet com a integração numérica da equação (2.2). A determinação das curvas de transição envolve a divisão do plano (δ, ϵ) em subdomínios de uma malha reticulada na qual são verificadas as soluções para cada centro desse subdomínio. Alternativamente, para um ϵ pequeno, porém finito, pode-se utilizar um método de perturbação, como por exemplo, o método das múltiplas escalas, conforme abordado por Soares (29). A aplicação da Teoria de Floquet à equação de Mathieu conduz a um cenário no qual verifica-se que determinados pares de (δ, ϵ) definem equações cuja solução cresce de forma ilimitada com o tempo e, para outros pares de valores, a solução é limitada,

porém, aperiódica. A representação gráfica desses conjuntos de pontos permite elaborar o Diagrama de Strutt, apresentado na figura 2.1.

Figura 2.1 – Diagrama de Strutt para sistemas dinâmicos não amortecidos

Fonte: Nayfeh e Mook (9)

No Diagrama de Strutt, as regiões hachuradas correspondem às regiões de ressonância paramétrica nas quais a solução cresce de forma ilimitada com o tempo e são separadas - pelas curvas de transição - das regiões de soluções estáveis e aperiódicas.

Para sistemas não lineares, é relevante estudar a principal região de instabilidade paramétrica, para a qual $\Omega \cong 2\omega$, de modo a verificar se ainda ocorre o crescimento ilimitado da resposta, conforme indicado no diagrama de Strutt, clássico para sistemas lineares.

A discussão anterior não leva em conta os efeitos dissipativos que estão presente em quase todos os sistemas físicos. Dissipação tem um efeito estabilizador sobre todos os sistemas de um grau de liberdade no qual atua. Portanto, introduzindo um parâmetro referente ao amortecimento estrutural viscoso linear, μ , na equação de Mathieu, é possível obter um diagrama similar ao de Strutt, porém, com áreas de instabilidades menores e mais espaçadas, conforme apresenta a figura 2.2.

Figura 2.2 – Efeito do amortecimento viscoso na estabilidade de soluções da equação de Mathieu

Fonte: Nayfeh e Mook (9)

As regiões hachuradas representam áreas de instabilidade. Nota-se que à medida que o parâmetro μ aumenta, as regiões de instabilidade diminuem e algumas desaparecem para determinados valores dos parâmetros de controle (δ, ϵ).

2.3 Método de projeção de Galerkin não linear

Para se transformar o modelo contínuo de alta hierarquia em um modelo de ordem reduzida com apenas um grau de liberdade, é conveniente lançar mão do método de Galerkin. Em tal método, é imposta a igualdade entre os trabalhos virtuais no modelo de alta hierarquia e no modelo de ordem reduzida, de forma que o produto escalar entre as forças generalizadas e deslocamentos virtuais generalizados caracterize a projeção, conforme indica a relação a seguir:

$$\delta W = \underbrace{\delta \mathbf{p}^T \mathbf{F}_p}_{MAH} = \underbrace{\delta \mathbf{U}^T \mathbf{F}_u}_{MOR} \quad (2.5)$$

na qual δW é o trabalho virtual, $\mathbf{F}_p$ e $\mathbf{F}_u$ representam o vetor de cargas generalizadas e $\delta \mathbf{p}$ e $\delta \mathbf{U}$ representam o vetor de coordenadas generalizadas nos modelos de alta hierarquia e baixa hierarquia respectivamente.

Ao se impor a igualdade dos trabalhos virtuais, considera-se, implicitamente, que a energia contida no modelo de ordem reduzida seja igual à energia do modelo de alta hierarquia. Admitindo-se que toda a energia esteja agora contida no modo (ou nos modos) selecionado(s), para se obter o modelo de ordem reduzida, assume-se que os demais modos se comportam como se fossem infinitamente rígidos. Dessa forma, o procedimento ocorre como se fossem introduzidas equações de vínculos rígidos na mesma quantidade do número de graus de liberdade do modelo de alta hierarquia menos o número de graus de liberdade do modelo de ordem reduzida.

Embora possam ser utilizadas quaisquer funções cinematicamente admissíveis no método de Galerkin - inclusive os próprios modos normais lineares -, os modos normais não lineares podem se tornar uma alternativa atraente, na medida em que, contendo harmônicos de ordem superior, permitem uma redução maior de graus de liberdade para a mesma capacidade de representação dos fenômenos. Naturalmente, é possível construir MOR's com mais de um grau de liberdade, caso seja necessário para representação dos efeitos dominantes, selecionando-se mais de um modo não linear para realizar a projeção mencionada. Aplicações do método podem ser vistas em Steindl e Troger (23).

2.4 Modelo de ordem reduzida (MOR)

A análise dinâmica completa de sistemas estruturais com infinitos graus de liberdade é, em geral, uma tarefa complexa e, em alguns casos, inviável, mesmo utilizando-se a análise modal linear para uma avaliação do comportamento global dinâmico. Por isso, a procura por uma forma eficiente e precisa de redução de ordem tem motivado a busca para que seja possível estabelecer uma análise modal não linear correspondente.

A busca por uma modelagem precisa das estruturas - com a consideração de todos os cenários e carregamentos possíveis, com elementos de vibrações não lineares - conduz a modelos que requerem um alto número de graus de liberdade na discretização pelo método dos elementos finitos. Geralmente, isso decorre do acoplamento modal que conduz a uma lenta convergência, levando a simulação numérica desses modelos, mesmo por meio da modelagem via elementos finitos, a demandarem uma grande quantidade de tempo, resultando em estudos paramétricos lentos e demorados ciclos de análise e resultados de projeto, conforme Apiwattananlunggarn (104).

Em Pesheck (105), observa-se que a resposta dinâmica dos sistemas é tipicamente dominada por um número consideravelmente baixo de modos ativos de vibração, pois os efeitos não lineares, na maioria das vezes, ficam restritos a um número pequeno de modos e coordenadas, enquanto os demais modos de vibração se comportam de maneira similar ao sistema linear, seja pelas características das não linearidades ou sua influência na resposta modal. Além do que, quase sempre os modos mais procurados são aqueles que apresentam maiores amplitudes de movimento ou que estão localizados em um certo domínio de frequência, excluindo uma parcela significativa dos demais modos (104).

Dessa forma, os modelos de ordem reduzida precisam alinhar duas características básicas, a saber: devem ter considerável abrangência para que efeitos não lineares estejam presentes mesmo após o truncamento dos graus de liberdade e seus respectivos modos; e também devem ser suficientemente específicos e objetivos para que resultem em uma análise simplificada (105).

Desde quando foram estabelecidos, os modos normais não lineares têm se destacado por fornecer grandes possibilidades de obtenção de modelos de ordem reduzida. A própria essência de algumas definições é extremamente favorável à

redução modal; por exemplo, as variedades invariantes são um subconjunto do espaço de fase no qual o sistema se comporta como um sistema de dimensão reduzida (105). A propriedade de invariância possibilita que a interferência de modos desprezados seja evitada enquanto somente modos de interesse específico são analisados (106). Pode-se, portanto, estabelecer uma analogia em que se considera o modo não linear como uma redução modal que leva em conta a contribuição de todos os modos lineares no modo não linear simulado (105). Dessa forma, somente poucos modos precisam ser considerados para que se obtenha o grau de precisão e confiabilidade requerido, já que os modos normais não lineares de baixa ordem conseguem capturar a influência da contribuição de muitos modos lineares de alta ordem, por meio das equações parciais acopladas das variedades invariantes que descrevem o movimento desses modos (45).

Dessa forma, os modelos de ordem reduzida permitem o conhecimento qualitativo e, até mesmo, quantitativo de um modelo associado de alta hierarquia para o modo projetado. O propósito do MOR não é o da substituição do modelo de alta hierarquia por um de ordem reduzida, mas sim o de efetuar análises paramétricas e identificar cenários relevantes para orientar a análise do modelo de alta hierarquia, além de reduzir o tempo e o custo computacional dos estudos paramétricos.

3 FORMULAÇÃO E METODOLOGIA DE ABORDAGEM DO PROBLEMA

3.1 Formulação do problema

A figura 3.1 ilustra, de maneira sucinta, uma unidade flutuante em seu movimento de *heave* e, assim, impondo deslocamento no topo do *riser* que vibra sob a excitação:

Figura 3.1 – Unidade flutuante sob *heave* impondo vibrações no *riser*

Fonte: Autor

O movimento oscilatório imposto pela unidade flutuante ao *riser*, caracterizado por uma amplitude e uma fase, pode ser modelado pela equação (3.1):

$$h(t) = h_0 \cos \hat{\Omega} t \quad (3.1)$$

na qual h_0 é a amplitude do movimento de *heave* e $\hat{\Omega}$ a frequência do movimento.

Assim, sob a ação desse movimento oscilatório, a rigidez geométrica do *riser* fica sujeita à modulação da força de tração. Eventualmente, para particulares frequências do *heave* e a de um modo de vibrar do *riser*, podem ocorrer incrementos importantes nos deslocamentos transversais, conforme ilustrado anteriormente. Portanto, busca-se determinar o valor desses deslocamentos transversais quando o *riser* está submetido à excitação paramétrica na razão principal 2:1.

3.2 Metodologia de abordagem do problema

Inicialmente, foram estudadas as condições de contorno do *riser*, bem como sua vinculação no topo e na base, definindo-se o problema com uma parte estática e outra dinâmica. Admitindo-se que são válidas as hipóteses da teoria de Euler-Bernoulli para a barra protendida, aplica-se o princípio de Hamilton e deduzem-se as equações de movimento que governam o sistema estrutural, conforme descrito na seção 4.1. É oportuno esclarecer que não se considera, nesse momento, para efeito de determinação dos modos de vibrar, o amortecimento estrutural ou qualquer outro efeito dissipativo.

O procedimento seguinte apresenta - para a equação de movimento determinada anteriormente - as vibrações livres não lineares, assimiladas como a assinatura do movimento do *riser*. Para a determinação das vibrações livres admite-se, conforme Mazzilli (35), que após manipulações algébricas, a equação de movimento assuma a forma da equação do cabo, em que a rigidez à flexão - que caracteriza o comportamento de viga - apareça como uma parcela incremental na força de tração que estabiliza o cabo. Posteriormente, comparam-se as frequências obtidas com os resultados de Senjanovic et al. (34), validando a formulação adotada. Apresenta-se, de maneira gráfica, o modo como as formas modais são influenciadas à medida que aumenta a rigidez à flexão.

A próxima etapa consiste na introdução na equação de movimento da força que representa a interação fluido-estrutura. Adota-se a equação semiempírica de Morison composta de uma parcela referente à força inercial e, a outra, da força de arrasto. Essa equação traz consigo dois coeficientes, a saber: C_d (definido como

coeficiente de arrasto); e C_a (definido como coeficiente de massa adicional), que devem ser calibrados experimentalmente.

Com a equação do movimento completamente caracterizada, aplica-se o método de Galerkin não linear a fim de se obter a equação que representa o modelo de ordem reduzida referente ao problema proposto. Sendo assim, o modo de vibração e a coordenada modal que serve como base para análise da amplitude máxima da resposta são definidos. As discussões e hipóteses que validam as decisões são então apresentadas.

A equação que caracteriza o MOR de um grau de liberdade é então integrada numericamente no *software* de cálculo MATLAB®, por meio do qual são obtidas as respostas no domínio do tempo da amplitude modal máxima. A justificativa para a construção de um MOR com único grau de liberdade é que, conforme se observa no ensaio experimental, grande parte da energia é canalizada para um modo de vibração, o primeiro. Para o modo de vibração e a coordenada modal considerados, apresentam-se a amplitude máxima em função do tempo, o mapa de fase caracterizando topologicamente esse movimento e o espectro de amplitude. Os resultados obtidos são confrontados com os resultados do ensaio em escala reduzida realizado sob coordenação do LIFE&MO (10) no tanque do IPT com as saídas do programa dedicado OrcaFlex® e utilizando-se a função trigonométrica como função de projeção. As discussões e conclusões para essa etapa intermediária são apresentadas.

Com o intuito de avaliar a sensibilidade do MOR, realizam-se alguns estudos paramétricos dos coeficientes que caracterizam a equação. Estuda-se a influência do coeficiente de arrasto na amplitude modal máxima e sua linha de tendência nos resultados. Ao se aprofundar no estudo desse coeficiente, o trabalho apresenta o modo pelo qual outras funções de projeção consideradas clássicas são influenciadas pelo arrasto nas condições estabelecidas.

Finalizada a etapa de obtenção, calibração e validação do MOR, estudam-se as amplitudes estacionárias no regime pós-crítico recriando um diagrama similar ao diagrama de Strutt. Enquanto tal diagrama indica as regiões consideradas instáveis, o aqui denominado Diagrama Franzini-Sakamoto fornece, em uma escala policromática, o valor da amplitude modal máxima no regime estacionário à medida que os parâmetros de controle são alterados.

Finalizando o conjunto da dissertação, os resultados para um modo de vibração mais alto sob ressonância paramétrica são apresentados. Para um conjunto de pontos localizados estrategicamente ao longo do comprimento do *riser*, são apresentados a amplitude modal máxima, o mapa de fase, o espectro de amplitude e o Diagrama Franzini-Sakamoto. Como o ensaio em escala reduzida não contempla modos de vibração elevados, os resultados aqui obtidos são comparados com uma função de projeção comumente adotada.

4 DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO EM VIBRAÇÕES LIVRES NÃO LINEARES À OBTENÇÃO DO MODELO DE ORDEM REDUZIDA (MOR)

O objetivo do presente capítulo é apresentar a formulação da equação homogênea de movimento do *riser* reto protendido em vibrações livres não lineares contidas em um plano. Por se tratar de um elemento estrutural com relação diâmetro/comprimento muito baixa, admitem-se válidas as considerações da teoria de viga de Euler-Bernoulli e, por meio do Princípio de Hamilton, é obtida a equação de movimento transversal, após considerações que levam ao desacoplamento entre esse e o movimento longitudinal. Para o caso de vibrações livres, determinam-se os modos não lineares do tipo quase-Bessel. Na sequência, o método de projeção de Galerkin, segundo um único modo não linear, é aplicado ao sistema dinâmico contínuo submetido à excitação paramétrica de topo (*heave*) e à força hidrodinâmica de Morison, resultando em um modelo de ordem reduzida de um único grau de liberdade.

4.1 Descrição do modelo: teoria de barras de Euler-Bernoulli e equação de movimento do sistema dinâmico

A modelagem da estrutura é descrita em etapas distintas. Em um primeiro momento, após a instalação do cabo e sua fixação no leito submarino, com a imediata atuação do peso próprio submerso, introduz-se uma força de protensão no topo do *riser* com a finalidade de estabilizar a estrutura, mediante à aplicação de um deslocamento u_ℓ , conforme mostra a figura 4.1:

Figura 4.1 – Primeira etapa de modelagem do *riser*

Fonte: Autor

Aqui, ℓ é o comprimento indeformado do *riser*, p seu peso próprio submerso distribuído linearmente, N_ℓ a força de protensão aplicada no instante da instalação e u_ℓ o deslocamento inicial imposto. O sistema de coordenadas também está indicado na figura anterior.

A seguir, o vínculo no topo é fixado e o comprimento deformado do *riser* passa a ser $\ell + u_\ell$. A nova configuração da estrutura é apresentada na figura 4.2:

Figura 4.2 – Segunda etapa de modelagem do *riser*

Fonte: Autor

Assume-se que o *riser* é vertical, modelado como uma viga protendida de seção transversal constante, material isótropo e homogêneo e com força axial estática variável linearmente ao longo do seu comprimento, conforme consta em Mazzilli et al. (32).

Como condição de contorno, considera-se a base como um apoio fixo nas duas etapas supradescritas, ou seja, $u(0, t) = 0$ e $w(0, t) = 0$ em qualquer instante. Para $x = \ell$, no estudo dos modos de vibrar, faz-se $u(\ell, t) = u_\ell$ e $w(\ell, t) = 0$ para qualquer t . Dado que a barra vibra em torno da sua configuração deformada de equilíbrio estático, definida no segundo momento da modelagem, o carregamento axial passa a ser variável ao longo do tempo, como também ao longo do comprimento.

Utiliza-se a seguinte notação para as variáveis do modelo:

m : massa por unidade de comprimento (kg/m);

p : carregamento axial por unidade de comprimento (N/m);

EA : rigidez axial da barra (N);
 EI : rigidez à flexão da barra (Nm²);
 ℓ : comprimento do *riser* (m);
 N : força axial (N).

Na formulação cinemática da barra de Euler-Bernoulli, o deslocamento de um ponto genérico da seção transversal, definido como P, representado na figura 4.3, é expresso por:

Figura 4.3 – Cinemática da barra de Euler-Bernoulli

Fonte: Mazzilli et al. (32)

$$\begin{aligned}
 u_p &= u - z \sin \varphi \cong u - z w' \\
 w_p &= w + z (\cos \varphi - 1) \cong w \\
 \varphi &= \arctan \left(\frac{w'}{1 + u'} \right) \cong w'
 \end{aligned}
 \tag{4.1}$$

no qual o apóstrofo representa diferenciação em relação à coordenada axial x . Admitindo-se que a barra sofra pequenas deformações, pode-se escrever para a deformação axial:

$$\varepsilon_p = u'_p + \frac{1}{2}(u'_p)^2 + \frac{1}{2}(w'_p)^2 \cong u' - zw'' + \frac{1}{2}(w')^2 = \varepsilon - zw''. \quad (4.2)$$

Onde ε é a deformação axial da barra:

$$\varepsilon \cong u' + \frac{1}{2}(w')^2. \quad (4.3)$$

Admite-se que o termo $\frac{1}{2}(u'_p)^2$ possa ser desconsiderado quando comparado aos demais termos de ε_p .

A equação de movimento para vibração livre é obtida por meio do Princípio de Hamilton que estabelece:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V) dt = 0 \quad (4.4)$$

sendo que δT é a variação de energia cinética e δV a variação de energia potencial total do sistema. A energia cinética, desprezando a inércia rotacional, é definida como:

$$T = \int_0^\ell \frac{m}{2} (\dot{u}^2 + \dot{w}^2) dx \quad (4.5)$$

sendo a diferenciação em relação ao tempo expressa pelo ponto sobrescrito. Procedendo à integração por partes, após as condições de contorno naturais serem aplicadas, obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta T dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell m (\dot{u} \delta u + \dot{w} \delta w) dx dt. \quad (4.6)$$

A energia potencial total é definida como a soma da energia de deformação U com a energia potencial das forças externas conservativas E_p , para o qual vale:

$$\delta E_p = \int_0^\ell p \delta u dx \quad (4.7)$$

e, portanto:

$$\delta V = \delta U + \int_0^\ell p \delta u dx \quad (4.8)$$

sendo:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^\ell \int_A E \varepsilon_p \delta \varepsilon_p dA dx \\ &= \int_0^\ell \int_A E \left(u' - zw'' + \frac{1}{2} w'^2 \right) (\delta u' - z \delta w'' + w' \delta w') dA dx. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Após integração por partes e a consideração das condições de contorno naturais, vem:

$$\begin{aligned} \delta U &= \int_0^\ell EA(u'' + w'w'') \delta u dx \\ &\quad - \int_0^\ell EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) \delta w dx + \int_0^\ell EI w^{IV} \delta w dx. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Portanto:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta V dt &= \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell EA \left(u'' + w'w'' + \frac{p}{EA} \right) \delta u dx dt \\ &\quad - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) \delta w dx dt \\ &\quad + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell EA w^{IV} \delta w dx dt \end{aligned} \quad (4.11)$$

Substituindo-se as equações (4.6) e (4.11) na equação (4.4) tem-se:

$$\begin{aligned} & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \left[-m\ddot{u} + EA \left(u'' + w'w'' + \frac{p}{EA} \right) \right] \delta u dx dt \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^\ell \left[-m\ddot{w} + EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) - EI w^{IV} \right] \delta w dx dt = 0 \end{aligned} \quad (4.12)$$

$$\forall \delta u, \delta w, t_1 e t_2$$

Para que a equação (4.12) seja verdadeira:

$$-m\ddot{u} + EA \left(u'' + w'w'' + \frac{p}{EA} \right) = 0 \quad (4.13)$$

$$-m\ddot{w} + EA \left(u''w' + u'w'' + \frac{3}{2} w'^2 w'' \right) - EI w^{IV} = 0. \quad (4.14)$$

A demonstração do sistema de equações diferenciais com acoplamento entre os movimentos longitudinal e transversal apresentada acima concorda com a apresentada em Mazzilli et al. (32), observando-se porém, que os sistemas de referência são distintos. Desprezando-se os efeitos inerciais na direção longitudinal, ou seja, $m\ddot{u} = 0$ escreve-se:

$$u'' + w'w'' + \frac{p}{EA} = 0. \quad (4.15)$$

Integrando-se a equação anterior tem-se:

$$u' + \frac{1}{2} w'^2 + \frac{px}{EA} = \varepsilon_0(t). \quad (4.16)$$

Portanto:

$$\varepsilon(x, t) = u' + \frac{1}{2} w'^2 = \varepsilon_0(t) - \frac{px}{EA} \quad (4.17)$$

sendo que a deformação $\varepsilon_0(t)$ é uma constante de integração da equação (4.15) que tem o significado físico da deformação axial em $x = 0$ e pode ser avaliada integrando-se a equação (4.16) entre $x = 0$ e $x = \ell$.

$$\varepsilon_0(t) = \frac{u_\ell}{\ell} + \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell w'^2 dx + \frac{p\ell}{2EA}. \quad (4.18)$$

Substituindo as equações (4.16) e (4.18) para u' e a equação (4.15) para u'' na equação (4.14), resulta a equação do movimento transversal:

$$m\ddot{w} + EIw^{IV} - EA \left[\frac{u_\ell}{\ell} + \frac{1}{2\ell} \int_0^\ell w'^2 dx - \frac{p}{EA} \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \right] w'' - pw' = 0 \quad (4.19)$$

ou em notação compacta:

$$m\ddot{w} + EIw^{IV} - N(x, t)w'' - pw' = 0. \quad (4.20)$$

Sendo:

$$N(x, t) = N_0(t) + px = \bar{N} - p \left(\frac{\ell}{2} - x \right) + \frac{EA}{2\ell} \int_0^\ell w'^2 dx \quad (4.21)$$

$$\bar{N} = \frac{EAu_\ell}{\ell}. \quad (4.22)$$

Logo:

$$N_0(t) = N_0(0) + \frac{EA}{2\ell} \int_0^\ell w'^2 dx \quad (4.23)$$

com:

$$N_0(0) = \frac{EAu_\ell}{\ell} - \frac{p\ell}{2}. \quad (4.24)$$

Uma vez conhecido o deslocamento transversal da barra w , pode-se determinar seu deslocamento axial de acordo com a expressão 4.25 que difere da apresentada em Mazzilli et al. (32), dado o novo sistema de referência:

$$u(x, t) = \frac{\bar{N}x}{EA} + \frac{px(\ell - x)}{2EA} - \frac{1}{2} \int_0^x \left(\frac{dw}{d\xi} \right)^2 d\xi + \frac{x}{2\ell} \int_0^\ell w'^2 dx. \quad (4.25)$$

Reescreve-se, então, a equação (4.20) na forma:

$$\ddot{w} + \alpha w^{IV} - \beta w'' + \gamma \left(\frac{\ell}{2} - x \right) w'' - \gamma w' - \mu w'' \int_0^\ell w'^2 dx = 0 \quad (4.26)$$

com as seguintes constantes:

$$\alpha = \frac{EI}{m} \quad \beta = \frac{\bar{N}}{m} \quad \gamma = \frac{p}{m} \quad \mu = \frac{EA}{2m\ell} \quad (4.27)$$

4.2 Vibrações livres não lineares

A equação de movimento determinada anteriormente é reescrita de forma mais expandida para uma melhor avaliação das vibrações livres. Assim, reorganizando-se os membros e retornando os coeficientes, tem-se:

$$m\ddot{w} + EIw^{IV} - \left[\frac{EAu_\ell}{\ell} - p \left(\frac{\ell}{2} - x \right) + \frac{EA}{2\ell} \int_0^\ell w'^2 dx \right] w'' - pw' = 0. \quad (4.28)$$

Admite-se para o *riser*, em uma primeira aproximação, que a resposta dinâmica seja dominada por um único modo de vibração tal que:

$$w(x, t) = W(x) \sin \omega t. \quad (4.29)$$

Substituindo a equação (4.29) na equação (4.28), vem:

$$EIW^{IV} - N(x)W'' - pW' - \frac{EA}{2\ell} W'' \int_0^\ell W'^2 \sin^2 \omega t \, dx - m\omega^2 W = 0 \quad (4.30)$$

com $N(x)$ indicando simplifcadamente a força normal em $t = 0$, isto é:

$$N(x) = \frac{EAu_\ell}{\ell} - p\left(\frac{\ell}{2} - x\right) = N(x, 0) \quad (4.31)$$

Nota-se que a equação (4.30) possui uma dependência espacial (expressa pelos termos W' , W'' e W^{IV}) e uma dependência temporal expressa por $\sin^2 \omega t$. Para eliminar a dependência temporal, aplica-se o método de Galerkin como uma projeção temporal, no qual os termos da equação são multiplicados por $\sin \omega t$ e integrados em um período de resposta corresponde a $2\pi/\omega$ de modo que se obtém:

$$EIW^{IV} - N(x)W'' - pW' - \frac{3EA}{8\ell} W'' \int_0^\ell W'^2 \, dx - m\omega^2 W = 0. \quad (4.32)$$

Por conveniência, define-se uma força normal fictícia adicional, $N^*(x)$, expressa por:

$$EIW^{IV} - \frac{3EA}{8\ell} W'' \int_0^\ell W'^2 \, dx = -N^*(x) W''. \quad (4.33)$$

Dessa forma, chega-se a uma equação similar à equação do cabo com um acréscimo na parcela da tração, $[N(x) + N^*(x)]$. Logo, a equação (4.32) pode ser reescrita como:

$$[N(x) + N^*(x)]W'' + pW' + m\omega^2W = 0. \quad (4.34)$$

Uma última aproximação permite a determinação da força normal fictícia adicional, a partir do modo normal linear de uma barra biapoiada prismática com força normal constante. A resposta para esse modo específico é:

$$W(x) \cong W_{0n} \sin\left(\frac{n\pi x}{\ell}\right) \quad (4.35)$$

sendo que n indica o modo de vibração excitado e W_{0n} a amplitude inicial do movimento. Pode-se então escrever que:

$$N^*(x) \cong N_{0n} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI_{eq} \quad (4.36)$$

com a definição auxiliar de um produto de rigidez à flexão equivalente:

$$EI_{eq} = EI \left[1 + \frac{3\eta_n^2}{16} \right]. \quad (4.37)$$

A última aproximação introduzida pode ser encarada como o primeiro passo de um processo iterativo no qual uma nova solução para $W(x)$ seria pesquisada a partir da equação (4.34) para $N^*(x) \cong N_{0n}$ e, em seguida, uma nova estimativa para $N^*(x)$ seria obtida a partir da equação (4.33) e assim por diante. Entretanto, essa dissertação trabalha com a primeira aproximação da força normal fictícia adicional definida pela equação (4.36).

Observa-se na equação (4.37) que o produto de rigidez à flexão equivalente difere da definição usual por uma parcela não linear dependente da amplitude do

movimento, expressa em função do raio de giração da seção transversal do *riser*, de acordo com:

$$\eta_n = \frac{W_{0n}}{r} \quad (4.38)$$

que é a amplitude modal adimensional do n -ésimo modo. Já a amplitude modal dimensional do n -ésimo modo é dada por:

$$W_{0n}(t) = r\eta(t). \quad (4.39)$$

Recorda-se que o raio de giração é definido como:

$$r = \sqrt{\frac{I}{A}} \quad (4.40)$$

Dessa forma, a equação do cabo equivalente é:

$$[N_{0n} + N(x)]W'' + pW' + m\omega^2 W = 0. \quad (4.41)$$

O próximo passo consiste em calcular, para a equação (4.41), os modos de vibração livre. Para isso, introduz-se uma transformação de variáveis do tipo:

$$x = \frac{az^2}{4} - \frac{N_{bn}}{p} \quad (4.42)$$

$$z = 2\sqrt{\frac{m(N_{bn} + px)}{p}}\omega_n \quad (4.43)$$

Destaca-se que, daqui em diante, utilizar-se-ão os subscritos b (*bottom*) e t (*top*) para fazer referência às extremidades $x = 0$ e $x = \ell$ respectivamente.

Voltando-se às equações anteriores, tem-se que:

$$a = \frac{p}{m\omega_n^2} \quad (4.44)$$

$$N_{b_n} = N_b(0) + N_{0_n} \quad (4.45)$$

de modo que:

$$\frac{d^2 W_n}{dz^2} + \frac{1}{z} \frac{dW_n}{dz} + W_n = 0. \quad (4.46)$$

Além disso, define-se uma variável, X_n , de modo que:

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{z}} X_n \quad (4.47)$$

levando à equação diferencial:

$$\frac{d^2 X_n}{dz^2} + \left(1 + \frac{1}{4z^2}\right) X_n = 0 \quad (4.48)$$

que admite como soluções combinações lineares das funções de Bessel. Na busca de soluções mais simples (a partir daqui nomeadas de soluções do tipo “quase-Bessel”), mas com as características essenciais das soluções exatas de (4.48), introduzem-se simplificações adicionais, a partir da observação de que:

$$\frac{1}{4z^2} \ll 1 \quad (4.49)$$

sendo seu valor médio dado por:

$$2\varepsilon = \frac{1}{z_t - z_b} \int_{z_b}^{z_t} \frac{dz}{4z^2} = \frac{1}{4z_b z_t} \ll 1 \quad (4.50)$$

Uma família de equações que caracterize os movimentos modais (variando n) é expressa por:

$$\frac{d^2 X_n}{dz^2} + (1 + 2\varepsilon)X_n = 0 \quad (4.51)$$

cuja solução, de forma aproximada, é dada por:

$$X_n(z) \cong C_n \sin \beta_n z + D_n \cos \beta_n z \quad (4.52)$$

com:

$$\beta_n = \sqrt{1 + 2\varepsilon} \cong 1 + \varepsilon \cong 1. \quad (4.53)$$

Logo:

$$W_n = \frac{1}{\sqrt{z}} [C_n \sin z + D_n \cos z]. \quad (4.54)$$

Relembrando que o *riser* foi tratado como uma viga apoiada em suas extremidades e aplicando-se as condições de contorno:

$$W_n(z_b) = W_n(z_t) = 0 \quad (4.55)$$

forma-se o seguinte sistema de equações homogêneas:

$$\begin{bmatrix} \frac{\text{sen } z_b}{\sqrt{z_b}} + \frac{\text{cos } z_b}{\sqrt{z_b}} \\ \frac{\text{sen } z_t}{\sqrt{z_t}} + \frac{\text{cos } z_t}{\sqrt{z_t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_n \\ D_n \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (4.56)$$

que requer:

$$\frac{1}{\sqrt{z_b z_t}} \sin(z_t - z_b) = 0 \quad (4.57)$$

de sorte que:

$$z_t - z_b = n\pi. \quad (4.58)$$

Definindo:

$$C_n = \sqrt{z_b} \cos z_b \quad (4.59)$$

chega-se, finalmente, às expressões que caracterizam os modos não lineares de vibração do tipo quase-Bessel:

$$\begin{aligned} \omega_n &= \frac{n\pi}{2\ell\sqrt{m}} \left(\sqrt{N_{b_n}} + \sqrt{N_{t_n}} \right) \\ W_n(z) &= \sqrt[4]{\frac{N_{b_n}}{N_{b_n} + px}} \sin(z - z_b) \\ z &= \frac{\sqrt{N_{b_n} + px}}{\sqrt{N_{b_n}} - \sqrt{N_{t_n}}} n\pi. \end{aligned} \quad (4.60)$$

Combinando as equações anteriores é possível caracterizar os modos quase-Bessel $\psi_n(x, \eta_n)$ reescrevendo a expressão $W_n(z)$ conforme segue:

$$\psi_n(x, \eta_n) = \frac{1}{\sqrt[4]{(1 + \underline{\alpha}x)}} \cdot \text{sen} \left[\underline{\beta}(\sqrt{1 + \underline{\alpha}x} - 1) \right] \quad (4.61)$$

com as variáveis seguindo a notação:

$$\begin{aligned} \underline{\alpha} &= \frac{p}{N_{bn}} \\ N_{bn} &= N_{b(o)} + \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 EI \left(1 + \frac{3}{16} \eta_n^2 \right) \\ N_{b(o)} &= \bar{N} - \frac{p\ell}{2} \\ \underline{\beta} &= \frac{n\pi}{\sqrt{1 + \underline{\alpha}\ell} - 1}. \end{aligned} \quad (4.62)$$

É interessante observar na equação (4.61) que o coeficiente $1/\sqrt[4]{(1 + \underline{\alpha}x)}$ representa uma modulação da amplitude, definindo o comportamento base, e o segundo termo, $\text{sen} \left[\underline{\beta}(\sqrt{1 + \underline{\alpha}x} - 1) \right]$, a modulação da fase. A equação se aproxima das formulações desenvolvidas por Pesce em (12) e (57), utilizando-se do método WKB para um *riser* em catenária, sugerindo o caráter promissor da formulação. Os modos não lineares quase-Bessel carregam informações mais precisas sobre as formas modais do que os modos clássicos trigonométricos, podendo ser utilizadas como funções de projeção dentro do procedimento de Galerkin não linear para obtenção de modelos de ordem reduzida (MOR) mais eficientes.

De forma a ilustrar como a rigidez à flexão influencia o comportamento básico do modo, apresentam-se para os dez primeiros modos a forma pela qual essas funções variam ao longo do comprimento do *riser*, quando se consideram os efeitos não lineares. As não linearidades são contempladas por meio do parâmetro η , em uma gama de 2,5 a 15. O eixo da viga está representado na abscissa e a amplitude na ordenada.

Figura 4.4 - Primeiro modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.5 – Segundo modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.6 - Terceiro modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.7 - Quarto modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.8 - Quinto modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.9 - Sexto modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.10 - Sétimo modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.11 - Oitavo modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.12 - Nono modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Figura 4.13 – Décimo modo de vibração com incremento da não linearidade

Fonte: Mazzilli et al (35)

Como apresentado nos gráficos anteriores, nos modos mais baixos, como o primeiro e segundo, é possível desprezar o termo não linear de (4.37), abaixo repetida como (4.63) na relação frequência-amplitude e na forma modal, sem prejuízo

significativo nos resultados. O mesmo não é válido para modos mais altos, como o nono e décimo, nos quais é claramente possível observar a influência da não linearidade gerando um efeito de desempacotamento - próximo a $x = 0$ de empacotamento, próximo a $x = \ell$ - e alterando a localização da amplitude modal máxima e o seu valor.

$$EI_{eq} = EI \left[1 + \frac{3\eta_n^2}{16} \right] \quad (4.63)$$

Finalmente, a figura 4.14 apresenta a curva *backbone*, que mostra o efeito de *hardening* – variação da frequência natural com a amplitude modal - à medida que as não linearidades crescem para os modos 1 a 5 e 10. Os efeitos de *hardening* e *softening*, caso aconteçam, só conseguem ser captados com a utilização dos modos não lineares.

Figura 4.14 – Curva *backbone* para modos 1 a 5 e 10

Fonte: Mazzilli et al (35)

Com o intuito de validar as equações de vibração livre, os resultados obtidos com a formulação descrita são comparados com os de Senjanovic et al. (34), que

solucionaram a equação dinâmica do *riser* pelo método da segmentação. O método da segmentação, em linhas gerais, consiste em avaliar a vibração de vigas modificando a solução de cabo para cada meia-onda da forma modal para vibrações livres, que é chamada de segmento. São avaliadas as frequências de vibração dos modos 1 a 5 e 10. A comparação também pode ser vista em Mazzilli et al. (35).

A validação ocorrerá em duas etapas distintas: primeiramente, verificam-se as frequências naturais para um modelo tratado como cabo e, em seguida, determinam-se as frequências naturais considerando o modelo de viga.

Os dados de entrada são:

$$\ell = 2000 \text{ m};$$

$$p = 3433,5 \text{ N/m};$$

$$EI = 0 \text{ (para modelo de cabo)};$$

$$EI = 3,19 \times 10^8 \text{ Nm}^2 \text{ (para o modelo de viga)};$$

$$N_b = 6,867 \times 10^5 \text{ N};$$

$$N_t = 7,5537 \times 10^6 \text{ N};$$

$$m = 1200 \text{ kg/m}.$$

Para o modelo de cabo, as frequências determinadas para os modos 1 a 5 e 10 são apresentadas na tabela 4.1 a seguir:

Tabela 4.1 – Frequências naturais para o modelo de cabo

Modo n	$\omega_n \text{ (rad/s)}^1$	$\omega_n \text{ (rad/s)}^2$	$\omega_n \text{ (rad/s)}^3$
1	0,08109	0,08108	0,07973
2	0,16218	0,16217	0,16140
3	0,24400	0,24260	0,24273
4	0,32500	0,32435	0,32395
5	0,40700	0,40511	0,40511
10	0,82500	0,81089	0,81072

Fonte: Autor

na qual (1) corresponde à solução com as funções do tipo quase-Bessel; (2) com a solução assintótica (34); e (3) com a solução exata da teoria de cabos (34).

Para o modelo linear de viga, os resultados são apresentados na tabela 4.2. Vale ressaltar que o modelo de viga leva em conta apenas a rigidez à flexão, porém foi desprezada a correção não linear na amplitude, ou seja, admite-se $\eta_n = 0$ nas equações (4.37) e (4.63).

Tabela 4.2 – Frequências naturais para o modelo de viga

Modo n	ω_n (rad/s) ¹	ω_n (rad/s) ²	ω_n (rad/s) ³
1	0,08109	0,08115	0,07983
2	0,16218	0,16238	0,16176
3	0,24400	0,24399	0,24370
4	0,32500	0,32610	0,32602
5	0,40700	0,40886	0,40891
10	0,82500	0,83553	0,83580

Fonte: Autor.

na qual (1) corresponde à solução com as funções do tipo quase-Bessel; (2) com a solução pelo método da segmentação (34); e (3) com o método dos elementos finitos (34).

Nota-se que os resultados obtidos pelas funções do tipo quase-Bessel se apresentam bastante satisfatórios, mostrando o grande potencial que elas apresentam para descreverem o comportamento físico do modelo e para serem utilizadas como função de projeção no método de Galerkin não linear.

4.3 Modelo de ordem reduzida para excitação de topo

Partindo da equação não linear de vibração do *riser* em (4.26), adiciona-se o termo referente ao efeito da excitação de topo – *heave* – como sendo uma oscilação harmônica de frequência forçada igual a duas vezes uma das frequências naturais da estrutura, projetando o cenário de ressonância paramétrica caracterizada pela instabilidade de Mathieu.

A função de projeção do tipo quase-Bessel é usada para projetar - por meio do método de Galerkin - o sistema dinâmico contínuo em um único grau de liberdade, obtendo-se assim o modelo de ordem reduzida. Essa hipótese é razoável, já que toda a energia do sistema é canalizada para o modo ressonante.

Reescreve-se a equação dimensional para vibração livre não linear do *riser*, explicitando as derivadas temporais e espaciais:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} - \beta \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial w}{\partial x} - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0 \quad (4.64)$$

acrescenta-se o efeito do efeito da excitação vertical paramétrica, definido como $\beta_h(t)$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} - (\beta + \beta_h) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial w}{\partial x} \\ - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = 0 \end{aligned} \quad (4.65)$$

com $\beta_h(t)$ expresso por:

$$\beta_h(t) = \frac{EAh(t)}{m\ell}. \quad (4.66)$$

Para o movimento da unidade flutuante, adota-se a função harmônica:

$$h(t) = h_0 \cos(\hat{\Omega}t) \quad (4.67)$$

na qual $\hat{\Omega}$ é a frequência de oscilação do movimento *heave*, definido como $\hat{\Omega} = 2\hat{\omega}_n$, correspondente ao dobro da frequência natural do modo excitado. A frequência natural do modo n do *riser* imerso na água, $\hat{\omega}_n$, relaciona-se com a correspondente frequência natural do *riser* imerso no ar, ω_n , por meio do parâmetro $\sqrt{1 + C_a^*}$, de modo que:

$$\hat{\omega}_n = \frac{\omega_n}{\sqrt{1 + C_a^*}} \quad (4.68)$$

no qual o coeficiente C_a^* é a relação entre a massa de água deslocada pelo *riser* por unidade de comprimento e a massa do *riser* por unidade de comprimento. Este modelo é baseado na teoria do escoamento potencial e válido para cilindro circular apenas. Discussões a respeito do coeficiente de massa adicional em outros tipos de escoamento está fora do escopo desse trabalho.

Já a frequência natural do modo n do *riser* imerso no ar é determinada pela equação (4.60) reescrita como (4.69), a seguir:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2\ell\sqrt{m}} \left(\sqrt{N_{b_n}} + \sqrt{N_{t_n}} \right). \quad (4.69)$$

Entretanto, a carga transversal $\vartheta_w(t)$ - devido à interação fluido-estrutura - deve ser considerada. Nessa dissertação, adota-se a formulação de Morison, conforme (4.72):

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} - (\beta + \beta_h) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial w}{\partial x} \\ - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \vartheta_w(t) \end{aligned} \quad (4.70)$$

com:

$$\vartheta_w(t) = \frac{q_w(t)}{m} \quad (4.71)$$

na qual:

$$q_w(t) = -C_a \rho_{fl} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{2} C_d \rho_{fl} D \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| \frac{\partial w}{\partial t}. \quad (4.72)$$

Finalmente, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \alpha \frac{\partial^4 w}{\partial x^2} - (\beta + \beta_h(t)) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \gamma \left(\frac{\ell}{2} - x \right) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \gamma \frac{\partial w}{\partial x} \\
& - \mu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \int_0^\ell \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = - \frac{C_a}{m} \rho_{fl} \frac{\pi D^2}{4} \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} - \frac{1}{2} \frac{C_d}{m} \rho_{fl} D \left| \frac{\partial w}{\partial t} \right| \frac{\partial w}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{4.73}$$

A equação de Morison é uma equação semiempírica para a força distribuída ao longo do comprimento do *riser* em fluxo oscilatório, sendo então a soma da força inercial - primeira parcela de (4.72) - e da força de arrasto - segunda parcela de (4.72). Possui dois coeficientes hidrodinâmicos empíricos: o coeficiente de massa adicional C_a e o coeficiente de arrasto C_d que depende do número de Keulegan-Carpenter, número de Reynolds e rugosidade da superfície em torno da qual ocorre o escoamento. Na formulação ρ_{fl} representa a densidade do fluido e D o diâmetro do tubo.

O coeficiente de massa adicional clássico C_a relaciona-se ao coeficiente C_a^* usado em (4.68), por meio de:

$$C_a^* = \frac{\pi D^2}{4} \frac{\rho_{fl}}{m} C_a. \tag{4.74}$$

Os coeficientes C_a (ou C_a^*) e C_d devem ser calibrados a partir de resultados experimentais.

É conveniente reescrever a equação (4.70) de forma adimensional, tanto no espaço quanto no tempo, introduzindo novas variáveis, a saber: v , ξ e τ :

$$v = \frac{w}{D} \tag{4.75}$$

$$\xi = \frac{x}{\ell} \tag{4.76}$$

$$\tau = \hat{\omega}_n t \tag{4.77}$$

sendo que (4.75) refere-se ao deslocamento transversal, (4.76) à abscissa do *riser* e (4.77) ao tempo. Pela regra da cadeia para as derivadas, são válidas as relações:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= \frac{\partial v}{\partial \xi} \frac{d\xi}{dx} = \frac{1}{\ell} \frac{\partial v}{\partial \xi} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} \\
\frac{\partial^4 v}{\partial x^4} &= \frac{1}{\ell^4} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} \\
\frac{\partial v}{\partial t} &= \frac{\partial v}{\partial \tau} \frac{d\tau}{dt} = \hat{\omega}_n \frac{\partial v}{\partial \tau} \\
\frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= \hat{\omega}_n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2}
\end{aligned} \tag{4.78}$$

logo, tornando adimensional a equação de movimento do *riser* sob efeito da excitação de topo e reorganizando os membros:

$$\begin{aligned}
&\hat{\omega}_n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} D + C_a^* \hat{\omega}_n^2 \frac{\partial^2 v}{\partial \tau^2} D + a_1^* \hat{\omega}_n^2 \left| \frac{\partial v}{\partial \tau} \right| \frac{\partial v}{\partial \tau} D^2 \\
&+ \alpha \frac{1}{\ell^4} \frac{\partial^4 v}{\partial \xi^4} D - [\beta + \beta_h(\tau)] \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} D + \gamma \ell \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \frac{1}{\ell^2} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} D \\
&- \gamma \frac{1}{\ell} \frac{\partial v}{\partial \xi} D - \mu \frac{1}{\ell} \frac{\partial^2 v}{\partial \xi^2} D \int_0^1 \left(\frac{1}{\ell} \frac{\partial v}{\partial \xi} D \right)^2 d\xi = 0
\end{aligned} \tag{4.79}$$

com:

$$a_1^* = \frac{C_d \rho_f l D}{2m} \tag{4.80}$$

e $h(\tau)$ também adimensionalizada em função do tempo de acordo com:

$$h(\tau) = h_0 \cos \left(\hat{\Omega} \frac{\tau}{\hat{\omega}_n} \right). \tag{4.81}$$

Para a função “quase-Bessel” (4.61), reescrita como (4.82), usando as variáveis adimensionais ξ e τ , tem-se:

$$\psi_n(\xi, \eta_n) = (1 + \underline{\alpha}\ell\xi)^{-\frac{1}{4}} \cdot \sin \left[\underline{\beta}(\sqrt{1 + \underline{\alpha}\ell\xi} - 1) \right] \quad (4.82)$$

$$w_n(\xi, \eta_n, \tau) = W_{0n}(\tau) \frac{\psi_n(\xi, \eta)}{\psi_n(\bar{\xi}, \eta)} = W_{0n}(\tau) \phi(\xi, \eta_n) \quad (4.83)$$

$$w_n(\xi, \eta_n, \tau) = W_{0n}(\tau) \phi(\xi, \eta_n) = r\eta_n(\tau) \phi(\xi, \eta_n) \quad (4.84)$$

$$v_n(\xi, \eta_n, \tau) = \eta_n(\tau) \frac{r}{D} \phi(\xi, \eta_n) \quad (4.85)$$

A equação (4.83) refere-se a uma normalização em relação à coordenada modal escolhida para avaliar a amplitude do movimento. Em uma referência ao modo trigonométrico clássico, escolhe-se como coordenada modal de referência um ponto no qual a função $\sin n\pi x/\ell$ adquira o valor máximo, por exemplo, na coordenada $\bar{\xi} = (2n)^{-1}$. Consequentemente, $\psi_n(\bar{\xi}, \eta)$ torna-se um número puro, normalizando o modo quase-Bessel em relação ao ventre do modo clássico (senoidal) correspondente.

A equação (4.79) é usada para projetar, via método de Galerkin, o sistema dinâmico contínuo em um único grau de liberdade. Com o intuito de tornar mais leve a notação, denota-se a frequência $\hat{\omega}_n$ simplesmente por $\hat{\omega}$ e a amplitude adimensionalizada em relação ao raio de giração η_n por η .

Portanto, com a substituição das variáveis:

$$\begin{aligned} & \hat{\omega}^2 r \ddot{\eta} \phi + C_a^* \hat{\omega}^2 r \ddot{\eta} \phi + a_1^* |\dot{\eta} \phi| \cdot r^2 \eta \cdot \hat{\omega}^2 \cdot \phi \\ & + \alpha \frac{1}{\ell^4} r \eta \phi^{IV} - \frac{[\beta + \beta_h(\tau)]}{\ell^2} r \eta \phi^{II} + \frac{\gamma}{\ell} \left(\frac{1}{2} - \xi \right) r \eta \phi^{II} \\ & - \frac{\gamma}{\ell} r \eta \phi^I - \frac{\mu}{\ell^3} r \eta \phi^{II} \int_0^1 (r \eta \phi^I)^2 d\xi = 0 \end{aligned} \quad (4.86)$$

Dividindo a equação anterior por $\hat{\omega}^2 r$, chega-se a:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\eta}\phi(1 + C_a^*) + a_1^*|\dot{\eta}\phi|r\dot{\eta}\phi + \alpha \frac{1}{\hat{\omega}^2\ell^4}\eta\phi^{IV} \\
& - \frac{[\beta + \beta_h(\tau)]}{\hat{\omega}^2\ell^2}\eta\phi^{II} + \frac{\gamma}{\hat{\omega}^2\ell}\left(\frac{1}{2} - \xi\right)\eta\phi^{II} - \frac{\gamma}{\hat{\omega}^2\ell}\eta\phi^I \\
& - \frac{\mu}{\hat{\omega}^2\ell^3}\eta\phi^{II} \int_0^1 (r\eta\phi^I)^2 d\xi = 0
\end{aligned} \tag{4.87}$$

O método de projeção não linear de Galerkin requer a multiplicação da equação (4.87) pelos deslocamentos virtuais, conforme equação (4.88) e integração no domínio para ξ entre 0 e 1:

$$\delta v(\xi, \eta, \tau) = \delta \left(\frac{W_{0n}(\tau)}{D} \right) \phi(\xi, \eta) = \delta \left(\frac{r}{D} \eta(\tau) \right) \phi(\xi, \eta) \tag{4.88}$$

produzindo:

$$\begin{aligned}
& \ddot{\eta}(1 + C_a^*) \int_0^1 \phi^2 d\xi + a_1^*r|\dot{\eta}|\dot{\eta} \int_0^1 |\phi|\phi^2 d\xi + \alpha \frac{1}{\hat{\omega}^2\ell^4}\eta \int_0^1 \phi^{IV} \phi d\xi \\
& - \frac{[\beta + \beta_h(\tau)]}{\hat{\omega}^2\ell^2}\eta \int_0^1 \phi^{II} \phi d\xi + \frac{\gamma}{\hat{\omega}^2\ell}\eta \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \xi\right) \phi^{II} \phi d\xi \\
& - \frac{\gamma}{\hat{\omega}^2\ell}\eta \int_0^1 \phi^I \phi d\xi - \frac{\mu r^2}{\hat{\omega}^2\ell^3}\eta^3 \int_0^1 \phi^{II} \phi d\xi \left(\int_0^1 (\phi^I)^2 d\xi \right) = 0.
\end{aligned} \tag{4.89}$$

Por conveniência, são introduzidos os seguintes coeficientes para as integrais:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \int_0^1 \phi^2 d\xi \\
 I_1 &= \int_0^1 |\phi| \phi^2 d\xi \\
 I_2 &= \int_0^1 \phi^{IV} \phi d\xi \\
 I_3 &= \int_0^1 \phi^{II} \phi d\xi \\
 I_4 &= \int_0^1 \left(\frac{1}{2} - \xi \right) \phi^{II} \phi d\xi \\
 I_5 &= \int_0^1 \phi^I \phi d\xi \\
 I_6 &= \int_0^1 \phi^{II} \phi d\xi \int_0^1 (\phi^I)^2 d\xi
 \end{aligned} \tag{4.90}$$

e os coeficientes auxiliares:

$$\begin{aligned}
 \alpha_1 &= \frac{a_1^* r}{(1 + C_a^*)} \\
 \alpha_2 &= \frac{\alpha}{\widehat{\omega}^2 \ell^4 (1 + C_a^*)} \\
 \alpha_3 &= \frac{\beta}{\widehat{\omega}^2 \ell^2 (1 + C_a^*)} \\
 \alpha_h &= \frac{\beta_h}{\widehat{\omega}^2 \ell^2 (1 + C_a^*)} \\
 \alpha_4 &= \frac{\gamma}{\widehat{\omega}^2 \ell (1 + C_a^*)} \\
 \alpha_5 &= \frac{\gamma}{\widehat{\omega}^2 \ell (1 + C_a^*)} \\
 \alpha_6 &= \frac{\mu r^2}{\widehat{\omega}^2 \ell^3 (1 + C_a^*)}
 \end{aligned} \tag{4.91}$$

Assim, a equação do modelo de ordem reduzida com um grau de liberdade que caracteriza a ressonância paramétrica é expressa por:

$$\ddot{\eta}I_0 + \dot{\eta}|\dot{\eta}|\alpha_1I_1 + \eta\alpha_2I_2 - \eta(\alpha_3 + \alpha_h)I_3 + \eta\alpha_4I_4 - \eta\alpha_5I_5 - \eta^3\alpha_6I_6 = 0 \quad (4.92)$$

5 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA DO MOR E RESULTADOS

O intuito do capítulo 5 é apresentar de maneira mais ampla tanto o método de resolução da equação diferencial que caracteriza o modelo de ordem reduzida como o ensaio em menor escala realizado sob coordenação do LIFE&MO no tanque de provas do IPT, em São Paulo, que fornecerá os dados para análise numérica, calibração e validação dos resultados do MOR. Comparam-se os resultados obtidos com outras funções de projeção clássicas e também com os resultados do *software* comercial OrcaFlex®. Análises paramétricas também são apresentadas de modo a se discutir a influência de alguns parâmetros na resposta do modelo.

5.1 O método de Runge-Kutta

A equação do modelo de ordem reduzida apresentada em (4.92) será resolvida por meio de um processo numérico utilizando o MATLAB® (*MATrix LABoratory*), um *software* interativo de alta performance destinado ao cálculo simbólico e numérico, além de uma abrangente gama de aplicativos para análise de sinais e processamento de imagens, por exemplo. Entre as possibilidades de rotinas disponibilizadas para a integração de equações diferenciais, a mais utilizada é o Método Dormand-Prince RKPD. O método RKPD é uma importante família de métodos iterativos implícitos e explícitos - que são usados em discretizações temporais, relativas à aproximação das soluções de equações diferenciais ordinárias (denominados Método de Runge-Kutta) - e está implementado nos algoritmos da função ODE45. Especificamente, esse método trabalha com seis avaliações da derivada de uma função para calcular soluções precisas de quarta e quinta ordem, sendo a solução determinada por instantes de cálculo, conforme se representa o instante de tempo t_{j+1} na figura 5.1. Dessa forma, é necessário conhecer apenas a solução no instante anterior, representado pelo ponto t_j da figura 5.1, que corresponde às condições iniciais do problema.

Em linhas gerais, apresentam-se os aspectos fundamentais do método de Runge-Kutta para solução das equações diferenciais ordinárias. O exemplo para explanação será o método de Runge-Kutta de quarta-ordem.

Seja um problema de valor inicial (PVI) definido por:

$$\dot{y} = f(y, t), \quad y(t_0) = y_0 \quad (5.1)$$

o método utiliza a média ponderada da inclinação avaliada em várias etapas de acordo com:

$$y_{j+1} = y_j + h \sum \alpha_m k_m \quad (5.2)$$

$$t_{j+1} = t_j + h \quad (5.3)$$

sendo que y_{j+1} é a aproximação numérica do resultado de $y(t_{j+1})$. Também de acordo com (5.1) e (5.2), α_m são os coeficientes de ponderação que variam de acordo com a ordem do método a ser adotado, e k_m as inclinações avaliadas nos pontos contidos no intervalo tal que:

$$t_j \leq t \leq t_{j+1}. \quad (5.4)$$

O método de quarta ordem calcula as inclinações em quatro posições dentro de cada etapa. Tem-se:

$$k_1 = f(t_j, y_j) \quad (5.5)$$

$$k_2 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_1\right) \quad (5.6)$$

$$k_3 = f\left(t_j + \frac{h}{2}, y_j + \frac{h}{2}k_2\right) \quad (5.7)$$

$$k_4 = f(t_j + h, y_j + hk_3) \quad (5.8)$$

Sendo o próximo valor de y_{j+1} determinado pelo valor atual y_n somado ao produto do tamanho do intervalo h e uma inclinação estimada. As inclinações são definidas como:

k_1 : inclinação no início do intervalo;

k_2 : a inclinação no ponto médio do intervalo, usando a inclinação k_1 para determinar o valor de y no ponto $t_j + h/2$ através do método de Euler (também conhecido como método da reta tangente);

k_3 : inclinação no ponto médio do intervalo, porém, utilizando a inclinação k_2 para determinar o valor de y ;

k_4 : a inclinação no final do intervalo com seu valor y determinado utilizando k_3 .

Assim, é possível obter:

$$y_{j+1} = y_j + h \left[\frac{k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4}{6} \right]. \quad (5.9)$$

No qual, ao se fazer a média ponderada das quatro inclinações, um peso maior é dado para as inclinações do ponto médio. A formulação é válida tanto para funções escalares quanto para funções vetoriais.

O método de Runge-Kutta de quarta ordem possui erro de truncamento local da ordem $O(h^5)$ e erro de truncamento global da ordem $O(h^4)$, daí o nome do método.

Figura 5.1 – Cálculo das inclinações com o método de quarta-ordem de Runge-Kutta

Fonte: Boyce e DiPrima (36) – adaptado pelo autor

5.2 Ensaio em escala reduzida

Com a finalidade de verificar o potencial da função de projeção determinada no capítulo anterior em descrever o comportamento dominante de um *riser*, adota-se como referência os resultados do ensaio em escala reduzida realizados sob orientação do Laboratório de Mecânica *Offshore* (LMO) em parceria com a Petrobrás. Um dos núcleos do LMO é formado por pesquisadores que se dedicam ao estudo de fenômenos de interações fluido-estrutura, além de outros aspectos da mecânica *offshore*. Nesse grupo destaca-se o Laboratório de Interação Fluido-Estrutura e Mecânica *Offshore* (LIFE&MO) que tem se dedicado à dinâmica de *risers* combinando metodologias analíticas, numéricas e experimentais ao longo de quase duas décadas de trabalho. Baseado nesse contexto, o LIFE&MO conduziu um projeto de pesquisa e desenvolvimento patrocinado pela Petrobrás, por meio da Rede de Pesquisa em Estruturas Submarinas, intitulado: “Dinâmica Não Linear de *Risers*: interações não lineares de natureza hidro-elástica e de contato”. Em linhas gerais, os objetivos do projeto eram:

- Aprofundar a investigação do tema Dinâmica Não Linear de *Risers*, baseando-se em estudos de interações não lineares de natureza hidro-elástica e de

contato, por meio do aprimoramento dos métodos analíticos, numéricos e métodos dinâmicos de sistemas não-lineares;

- Idealizar e realizar experimentos com modelos em escala reduzida no canal de água circulante do Núcleo de Dinâmica e Fluidos, no laboratório do Tanque de Provas Numérico da Escola Politécnica da USP e no Tanque de Provas do IPT, observando, explorando e analisando as interações não lineares;
- Fundamentar e planejar futuros experimentos de dinâmica não linear de *risers*;
- Fornecer à contratante Petrobrás um conjunto de novos conhecimentos no tema, com o intuito de enriquecer as análises dinâmicas e a metodologia de projeto dos *risers*.

Cabe ressaltar que o projeto permitiu ao LIFE&MO avançar no estado da arte nas pesquisas sobre vibrações induzidas por vórtice e excitação paramétrica de topo tanto para os *riser* em catenária quanto verticais, contribuindo com tópicos técnicos e científicos relacionados aos modelos teóricos e experimentais. Os resultados compõem uma série de relatórios - LIFE&MO (116) e (117) – além de constituírem uma extensa base de dados experimentais ainda a serem explorados.

Para o ensaio em escala reduzida do *riser* vertical, foi montado um tanque de dimensões 240m x 4m x 6m no IPT. Com a finalidade de caracterizar a dinâmica do modelo, foram monitorados os deslocamentos de 44 pontos reflexivos posicionados ao longo do comprimento do *riser*, medidos através de um sistema de rastreamento ótico, o Qualysis®. A estimativa do erro é da ordem de 0,1 milímetros. As leituras foram realizadas com uma frequência de 60Hz durante 5 minutos do estado estacionário. Os movimentos harmônicos do *heave* foram impostos ao *riser* por meio de um conjunto servo-motor que opera em diferentes frequências. A tração no topo foi monitorada com o uso de uma célula de carga HBM. A extremidade inferior do modelo foi posicionada em uma placa de alumínio, à qual foi afixada uma placa circular com um certo diâmetro. A placa tem a mesma finalidade de um *end-plate*, ou seja, diminuir os efeitos tridimensionais do escoamento desenvolvido junto à referida extremidade do modelo. As figuras 5.2 e 5.3 apresentam, de maneira esquemática, a montagem do modelo no carro dinamométrico:

Figura 5.2 – Dimensões esquemáticas do modelo em escala reduzida

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.3 – Vista superior do carro dinamométrico

Fonte: LIFE&MO (10)

As fotos a seguir mostram alguns dos aparelhos descritos bem como uma visão geral do ensaio:

Figura 5.4 – Modelo em escala reduzida do riser.

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.5 – Vista do aparelho servo-motor indutor do heave

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.6 – Câmera emersa

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.7 – Câmera submersa

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.8 – Vista geral do ensaio mostrando o *riser*, o servo-motor, equipamento de leitura ótica e uma parte do tanque

Fonte: LIFE&MO (10)

Os dados do ensaio são apresentados na tabela 5.1. Um dos modos de vibração estudados foi o primeiro, cujas frequências naturais no ar e na água também são indicadas na tabela.

Tabela 5.1 – Parâmetros do ensaio em escala reduzida

Parâmetros do modelo em escala reduzida		
Comprimento indeformado	ℓ_0	2552 mm
Comprimento deformado	ℓ	2602 mm
Comprimento imerso	ℓ_i	2257 mm
Diâmetro interno	D_i	15,8 mm
Diâmetro externo	D_e	22,2 mm
Massa do <i>riser</i> por unidade de comprimento	m	1,190 kg/m
Peso submerso por unidade de comprimento	p	7,869 N/m
Rigidez axial	EA	1207 N
Rigidez à flexão	EI	0,056 Nm ²
Força normal média	$\bar{N}$	23,65 N
Densidade da água	ρ_{fl}	1000 kg/m ³
Frequência fundamental no ar	ω_1	5,7731 rad·s ⁻¹
Frequência fundamental na água	$\hat{\omega}_1$	5,0150 rad·s ⁻¹
Amplitude do <i>heave</i>	h_0	0,025 m
Frequência do <i>heave</i>	$\hat{\Omega}$	10,0300 rad·s ⁻¹

Fonte: LIFE&MO (10)

Foram acompanhados os deslocamentos no ponto médio do *riser* que coincide com o ventre do modo clássico trigonométrico, ou seja, $\bar{\xi} = 0,50$. Para essa coordenada, a amplitude modal máxima observada foi de:

$$A_{m\acute{a}x} = 0,0151m \quad (5.10)$$

resultado que servirá como calibração do MOR. As figuras 5.09 a 5.11 apresentam os resultados experimentais para o histórico da amplitude modal, o mapa de fase e as

frequências de oscilação. Apresenta-se também a figura 5.12 que correspondente às amplitudes de oscilação do movimento nas duas direções avaliadas.

Figura 5.9 – Amplitude modal experimental

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.10 – Mapa de fase experimental

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.11 – Espectro de energia de oscilação nas direções x (à esquerda na figura) e y (à direita na figura)

Fonte: LIFE&MO (10)

Figura 5.12 – Deslocamentos nodais – normalizado pelo diâmetro

Fonte: LIFE&MO (10)

Sendo que x^* e y^* referem-se aos deslocamentos nodais normalizados pelo diâmetro na direção paralela e perpendicular à correnteza respectivamente. O termo z^* refere-se à posição ao longo da envergadura, normalizada pelo diâmetro. Para determinação da amplitude modal no ventre do ensaio, excluem-se os valores de pico e calculada a média dos 10% maiores valores. No ventre do modo, observa-se um deslocamento de 0,7 vezes o diâmetro, que corresponde a 0,0150m. Mais informações e detalhes sobre o ensaio e seus resultados podem ser encontrados em (10).

5.3 Integração numérica da equação do MOR

Para a avaliação numérica do modelo de ordem reduzida, segue-se o procedimento:

- Avalia-se a ressonância paramétrica no primeiro modo de vibração, isto é, $n = 1$. Procedendo-se assim, admite-se que toda a energia do sistema é injetada no primeiro modo de vibração e os demais modos, por consequência, são considerados rígidos, conforme premissa estabelecida na projeção de Galerkin.
- Os dados utilizados na integração numérica são os mesmos do ensaio em escala reduzida indicados na tabela 5.1.
- As integrais indicadas em (4.90) são computadas numericamente utilizando-se a quadratura de Gauss-Kronrod, exceto para a integral I_6 que, devido ao termo modular, foi computada por meio do método do trapézio. Foram realizados estudos de convergência numérica de modo a se minimizar o erro residual da integração.

São estudados dois cenários para avaliação da força normal fictícia adicional definida em (4.36) e (4.37) reescritas em conjunto como a equação (5.11) a seguir:

$$N_{0n} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI \left[1 + \frac{3\eta_n^2}{16}\right]. \quad (5.11)$$

No primeiro cenário, a atualização na amplitude modal η é desconsiderada, deixando o seu valor nulo durante todo o processo, $\eta_0 = 0$. Esse procedimento será - em diversos momentos desse texto - tratado como função quase-Bessel “linear”. Ressalta-se que o termo “linear” refere-se ao fato de não se considerar a relação não linear entre a frequência modal, a amplitude modal, e não à equação de projeção que descreve o comportamento do *riser* que, por natureza, já possui características não lineares. Essa estratégia será discutida no item 5.5.

O segundo cenário considera as correções na amplitude modal em (5.11). Nessa estratégia, é adotado um processo iterativo para verificar a convergência da amplitude modal adimensional. Inicia-se o processo com um valor nulo para a não linearidade ($\eta_0 = 0$) em (4.62), integra-se a equação (4.92) do MOR, da qual se obtém um novo valor da amplitude modal η_1 . Com esse novo valor, recalcula-se a equação (4.62) e, por integração de (4.92), obtém-se uma nova estimativa da amplitude modal η_2 . O processo é repetido até a convergência dos valores de η , isto é, quando a diferença entre o valor anterior e o atual estiver dentro de uma tolerância pré-estabelecida que não afete o resultado encontrado. Essa estratégia será, em alguns momentos, referida como função quase-Bessel “não linear”.

O coeficiente C_a^* foi obtido de forma a garantir a igualdade entre o valor analítico e o experimental para o primeiro modo de vibração na água. O valor de C_a^* obtido para calibração do MOR foi: $C_a^* = 0,3252$, que corresponde ao coeficiente de massa adicional $C_a = 0,9998$. O coeficiente C_d foi obtido de modo que a amplitude modal do movimento plano dominante no ensaio experimental concordasse com o correspondente valor do MOR. Admitindo-se que o valor de referência seja o apresentado em (5.10) no meio do vão do primeiro modo de vibração, o valor do coeficiente de arrasto C_d obtido para a calibração do MOR foi:

$$C_d = 1,96 \quad (5.12)$$

Alternativamente, o valor de C_d poderia ser avaliado pelas características do escoamento com o auxílio da clássica relação com o número de Reynolds, Re . A figura 5.13 apresenta essa relação.

Figura 5.13 – Variação de C_d com o número de Reynolds Re

Fonte: (37) – adaptado pelo autor.

A faixa de valores do número de Reynolds aplicável aos *risers* é $10^2 < Re < 10^4$, conforme Fernandes et al. (113). Nesse intervalo, o valor do coeficiente de arrasto para cilindro liso está contido no intervalo $1 < C_d < 2$. Assim, o valor observado de 1,96 apresenta boa concordância com o proposto pela literatura. Considerações adicionais e inferências são discutidas na seção referente ao estudo paramétrico desse coeficiente.

Portanto, tomando-se como base os valores da tabela 5.1 e os coeficientes de massa adicional e de arrasto obtidos por calibração do MOR, os valores das correções não lineares obtidos durante o procedimento iterativo da segunda estratégia são indicados na tabela 5.2 para ressonância paramétrica do primeiro modo:

Tabela 5.2 – Valores de η para primeiro modo de vibração não linear

Iteração	Entrada	Saída
1ª	0,0000	2,2226
2ª	2,2226	2,2210
3ª	2,2210	2,2210

Fonte: Autor

Os resultados para a função quase-Bessel “não linear” em termos da amplitude modal no histórico do tempo, o mapa de fase bidimensional e o espectro de amplitude são apresentados a seguir:

Figura 5.14 – Amplitude modal adimensional para o MOR com modo quase-Bessel “não linear”

Fonte: Autor

Figura 5.15 – Mapa de fase para o MOR com modo quase-Bessel “não linear”

Fonte: Autor

Figura 5.16 – Espectro de amplitude para o MOR com modo quase-Bessel “não linear”

Fonte: Autor

A figura 5.14 apresenta os dados instantâneos, η , em função do tempo, τ . Após o regime transitório, caracterizado pela instabilidade da configuração trivial de equilíbrio, o movimento entra em seu estado estacionário com o aparecimento de um ciclo limite de amplitude modal constante igual $\eta = 2,2210$. A figura 5.15 caracteriza, no plano de fase modal, o ciclo limite estável. Já figura 5.16 apresenta a raia com a amplitude máxima dimensional do movimento para a frequência da resposta igual à frequência do primeiro modo de vibração, notando-se ainda uma pequena participação do terceiro harmônico em decorrência da não linearidade cúbica do modelo.

Conforme definido em (4.38), os dados das figuras (5.14) e (5.15) estão normalizados pelo raio de giração. O valor da amplitude máxima adimensional é de $\eta = 2,2210$, que multiplicado pelo raio de giração $r = 0,0068$, fornece uma amplitude modal máxima de $A_{m\acute{a}x} = 0,0151m$ concordando com o valor experimental do ensaio em escala reduzida, o que não surpreende, pois o MOR foi calibrado para que esse resultado fosse obtido, confirmando a consistência do método.

A forma modal é apresentada na figura 5.17. A máxima amplitude modal observada no MOR para o primeiro modo de vibração foi de $A_{m\acute{a}x} = 0,0156m$, que é observada na figura 5.16, localizada na coordenada $\bar{\xi} = 0,40$, lembrando que o eixo de coordenadas foi orientado do leito submarino à superfície oceânica e está representado de forma adimensional na figura.

Figura 5.17 – Forma modal de vibração do MOR com modo quase-Bessel “não linear” – Modo 1

Fonte: Autor

A amplitude modal adimensional pode ser comparada com a apresentada em Mazzilli e Rizza (38), na qual são trabalhadas as funções de projeção do tipo quase-Bessel “linear”, cujo resultado é $\eta = 2,2239$, apresentando uma ótima concordância entre os modelos, o que era esperado para o primeiro modo de vibração, conforme se pode observar na figura 4.4.

5.4 Comparação da função quase-Bessel “não linear” com o ensaio em escala reduzida

Apesar de o modelo de ordem reduzida ter sido calibrado para que a amplitude modal no ventre do modo clássico coincida com o resultado do ensaio em escala reduzida apresentado no item 5.2, é interessante observar o comportamento dos resultados obtidos. Tanto no MOR, quanto no ensaio, a amplitude modal foi obtida do estado estacionário dentro de um ciclo limite. O mapa de fase do ensaio

experimental difere do obtido pelo MOR sugerindo que, no modelo de ordem reduzida, o movimento é perfeitamente periódico contido em um plano também perfeitamente definido e limitado. Já para o ensaio em escala reduzida, observa-se um movimento que flutua em torno de um movimento periódico médio complexo, com duas “alças” sugerindo a existência de modos não lineares de vibração acoplados, ou seja, o experimento consegue captar que existe um acoplamento modal com o sistema vibrando em dois ou mais modos em planos diferentes. Isto se percebe da projeção do movimento do modelo experimental no plano horizontal, em que se observam figuras de *Lissajous*. Nota-se que esse efeito não é capturado pelo MOR que tem apenas um único grau de liberdade. O espectro de amplitude do MOR mostra, como era esperado, que grande parte da energia do movimento está contida no primeiro modo de vibração, sobrando um residual em possível terceiro modo de vibração, comprovando que a geração do MOR para o primeiro modo é a mais indicada para capturar os efeitos dominantes do ensaio. Já o gráfico da frequência de oscilação do modelo experimental mostra importante contribuição da frequência do segundo modo, o que reforça a hipótese de acoplamento modal com modos fora do plano do movimento dominante. Cabe ainda ressaltar o comportamento similar da forma modal de oscilação do ensaio (quando avaliam-se os deslocamentos nodais médios da figura 5.12) com o MOR gerado, no qual o ventre do modo clássico desloca-se para uma coordenada abaixo do ponto médio do *riser*, comprovando a qualidade da formulação empregada.

5.5 Comparação da função quase-Bessel “não linear” com a função “linear”

A função de projeção quase-Bessel “não linear” é confrontada com a função de projeção quase-Bessel “linear”, conforme o primeiro cenário descrito anteriormente. Coerentemente apresentado na figura 4.4 que confronta o primeiro modo de vibração para amplitudes modais crescentes, espera-se que essas funções não apresentem uma diferença significativa. Seguindo a mesma metodologia anterior, avalia-se qual o valor do coeficiente de arrasto para calibrar o MOR com o ensaio em escala reduzida. Assim, chega-se ao valor de $C_d = 1,97$, sendo que a não linearidade obtida é $\eta = 2,2108$ que, multiplicada pelo raio de giração, fornece a amplitude modal de $A_{m\acute{a}x} = 0,0151m$, apresentando uma boa concordância com os valores da função “não linear”. Os resultados em termos de amplitude modal, mapa de fase e espectro de amplitude

são apresentados a seguir.

Figura 5.18 – Amplitude modal adimensional para o MOR com modo quase-Bessel “linear”

Fonte: Autor

Figura 5.19 – Mapa de fase para o MOR com modo quase-Bessel “linear”

Fonte: Autor

Figura 5.20 – Espectro de amplitude para o MOR com modo quase-Bessel “linear”

Fonte: Autor

Comparando as formas modais na figura 5.21, nota-se que a sobreposição confirma a premissa de que, para o primeiro modo, as funções “não linear” e “linear” possuem praticamente o mesmo comportamento, sendo possível desprezar as correções não lineares, sem prejuízo da resposta modal.

Figura 5.21 – Comparação da forma modal das funções “não linear” e “linear”

Fonte: Autor

Mesmo sendo possível desconsiderar as correções não lineares, uma observação que se faz necessária refere-se ao valor da força normal quando a mesma é corrigida. Avaliando a equação (4.36) que foi reescrita como (5.11), pode-se inferir o quanto a força normal fictícia adicional é incrementada com as correções não lineares, conforme indicado a seguir:

- Para a função “linear” com $\eta = 0$:

$$N_{0n} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI \left[1 + \frac{3\eta_n^2}{16}\right] = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI \quad (5.13)$$

- Para a função “não linear” com $\eta = 2,2210$:

$$N_{0n} = \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI \left[1 + \frac{3(2,2210)^2}{16}\right] = 1,9249 \left(\frac{n\pi}{\ell}\right)^2 EI \quad (5.14)$$

Portanto, apesar de ser plausível a desconsideração da influência da amplitude nas propriedades modais para o primeiro modo de vibração, é interessante observar que, de uma metodologia para a outra, a força normal fictícia adicional pode sofrer um acréscimo de quase 100%. Tratando-se da força normal adicional fictícia, não se pode inferir diretamente que o incremento das tensões normais seja da mesma ordem, mas é um ponto de atenção para verificação em projetos de *risers*.

Eventualmente, se utilizada a função quase-Bessel “linear” com o coeficiente de arrasto definido para função “não linear”, os resultados serão praticamente iguais, dada a grande similaridade de comportamento das funções no primeiro modo de vibração. Portanto, idealizando a função “linear” como um estudo independente, o coeficiente de arrasto será mantido com $C_d = 1,97$. Discussões sobre o valor de C_d e sua influência na resposta modal são apresentadas na seção 5.9.1.

Como conclusão, pode-se dizer que para a ressonância paramétrica com modos de ordem baixa, o procedimento mais simples (sem iteração), utilizando os modos quase-Bessel “lineares” é suficientemente preciso.

5.6 Comparação com a função trigonométrica

O modelo de ordem reduzida construído com a função de projeção quase-Bessel “não linear” é agora comparado ao MOR obtido com a função trigonométrica clássica, avaliando-se como essas duas funções descrevem o comportamento do *riser*. A função trigonométrica adotada é da forma:

$$v_k(n, \xi) = A_n \sin(n\pi\xi) \quad (5.15)$$

na qual $n = 1, 2, 3 \dots$ é a ordem do modo considerado.

De modo análogo ao da função quase-Bessel “não linear”, o MOR correspondente à função trigonométrica é calibrado para que a amplitude modal no ponto médio do *riser* seja igual ao do ensaio em escala. Assim, o valor do coeficiente de arrasto para essa calibração é tal que:

$$C_d = 2,34. \quad (5.16)$$

Os resultados para o MOR trigonométrico clássico com parâmetros definidos na tabela 5.1, coeficiente de arrasto definido em 5.16 e amplitude modal avaliada na coordenada modal $\bar{\xi} = 0,50$, são apresentados a seguir:

Figura 5.22 – Amplitude modal adimensional para o MOR com modo trigonométrico

Fonte: Autor

Figura 5.23 – Mapa de fase para o MOR com modo trigonométrico

Fonte: Autor

Figura 5.24 – Espectro de amplitude para o MOR com modo trigonométrico

Fonte: Autor

De forma similar ao realizado anteriormente, os dados das figuras 5.22 e 5.23 estão normalizados pelo do raio de giração. O valor da amplitude máxima adimensional observada é de $\eta = 2,2103$ que, multiplicado pelo raio de giração $r = 0,0068m$, fornece uma amplitude modal máxima de $A_{m\acute{a}x} = 0,0151m$, o que era esperado de acordo com a metodologia de calibração do MOR. O espectro de amplitude da figura 5.24 confirma a amplitude máxima do movimento.

A forma modal para o primeiro modo trigonométrico é apresentada na figura 5.25.

Figura 5.25 – Forma modal trigonométrica do primeiro modo

Fonte: Autor

Destaca-se que a máxima amplitude modal do caso trigonométrico se localiza no ponto médio do modelo do *riser*, o que difere da formulação obtida pela função quase-Bessel “não linear” na qual o ventre modal está deslocado em direção à região mais próxima do leito submarino. Contrapondo essas duas formulações, a observação torna-se mais evidente na figura 5.26.

Figura 5.26 – Comparação da forma modal do primeiro modo com função trigonométrica e quase-Bessel “não linear”

Fonte: Autor

Portanto, ter conhecimento das diferenças propostas pelas formulações é de extrema importância para que o projetista de estruturas *offshore* tome a decisão mais coerente com sua linha de definições. Por exemplo, a função trigonométrica - para os mesmos dados e condições do ensaio - apresenta o valor da amplitude máxima de oscilação menor do que a obtida pela função quase-Bessel não linear, o que, em um primeiro momento, pode dar uma sensação de menor segurança estrutural em relação aos esforços solicitantes, às verificações à fadiga e até mesmo ao colapso estrutural.

Ressalta-se que conclusões a respeito do valor da amplitude máxima de oscilação devem ser conduzidas com muita cautela, já que as amplitudes estão relacionadas diretamente com o coeficiente de arrasto. Por exemplo, caso se opte pela manutenção do valor de 1,96 para o coeficiente de arrasto, obter-se-ia para o MOR trigonométrico uma amplitude máxima de oscilação de 0,0181m, valor maior do que a amplitude obtida pela função do tipo quase-Bessel “não linear”, conduzindo a conclusões divergentes das propostas anteriormente.

Outro aspecto relevante é sobre a localização da amplitude modal máxima, que no MOR gerado com a função quase-Bessel “não linear” ocorre na coordenada

$\bar{\xi} = 0,40$ e, no MOR obtido com a função trigonométrica, ocorre na coordenada $\bar{\xi} = 0,50$. Observa-se que a função quase-Bessel “não linear” descreve um comportamento mais próximo do observado no ensaio em escala reduzida do que o comportamento da função trigonométrica.

Finalmente, cabe um questionamento sobre a hipótese de alteração do valor do coeficiente de arrasto para os diversos MOR's estudados. Sabe-se que o coeficiente de arrasto sofre alterações em função tanto do modo de vibração, como da forma modal desenvolvida, do efeito de acoplamento de modos e até mesmo da localização da coordenada modal escolhida para análise, justificando-se pois a recalibração dos modelos com o objetivo de se adequarem ao comportamento do ensaio em escala reduzida.

5.7 Comparação da função quase-Bessel “não linear” com o OrcaFlex®

As empresas que atuam na área de engenharia *offshore* trabalham com *softwares* dedicados à análise de estrutural de elementos que compõem o caminho críticos dos projetos. Um desses *softwares* é o OrcaFlex®, programa desenvolvido pela empresa Orcina, dedicado à análise estática e dinâmica de estruturas submarinas, especialmente os *risers*.

Mantendo-se o mais fiel possível ao descrito no tutorial do programa, em linhas gerais, o *software* soluciona a seguinte equação matricial de movimento:

$$\mathbf{M}(p, a) + \mathbf{C}(p, v) + \mathbf{K}(p) = \mathbf{F}(p, v, t) \quad (5.17)$$

na qual:

$\mathbf{M}(p, a)$ são as forças inerciais do sistema;

$\mathbf{C}(p, v)$ o amortecimento estrutural do sistema;

$\mathbf{K}(p)$ a rigidez do sistema dinâmico;

$\mathbf{F}(p, v, t)$ as cargas externas,

sendo que p , v e a referem-se, respectivamente, aos vetores de posição, velocidade e aceleração das massas concentradas e t o tempo da simulação.

Os sistemas de integração da equação diferencial acima implementados no programa recalculam a geometria do sistema em cada instante, fazendo com que a simulação considere plenamente os efeitos da não linearidade geométrica do *riser*, incluindo a variação espacial proveniente das cargas de onda e de contato. As cargas hidrodinâmicas atuantes são calculadas utilizando-se uma forma estendida da equação de Morison, de acordo com o apresentado no tutorial do programa (39).

O modelo em elementos finitos implementado pelo programa consiste em discretizar o *riser* em uma série de segmentos de reta sem massa que são conectados através de nós em cada extremidade. Esses nós concentram a massa dos segmentos, conforme ilustra a figura 5.27:

Figura 5.27 – Modelo de elementos finitos OrcaFlex®

Fonte: (39)

O modelo gerado no OrcaFlex® utiliza os mesmos dados apresentados na tabela 5.1. Inicialmente, o *riser* é modelado de forma a serem obtidas as forças normais que coincidam com o ensaio em escala reduzida. Assim, as forças no topo e na base devem ser tais que, quando computada a média, coincida com o valor do

ensaio em escala reduzida. Desse modo, as forças obtidas no modelo gerado no OrcaFlex® são:

força normal no topo do *riser*: $N_t(0) = 33,74 \text{ N}$

força normal na base do *riser*: $N_b(0) = 14,04 \text{ N}$

com média de $\bar{N} = 23,89 \text{ N}$ próxima do valor esperado de $\bar{N} = 23,65 \text{ N}$. Como a força normal é definida por meio do alongamento, os valores indicados anteriormente foram obtidos ajustando-se o comprimento do *riser* antes da atuação dos efeitos de *heave*. Assim, pode-se definir que as forças correspondem a uma distribuição estática. Finalmente, com esses dados, o comprimento ajustado do *riser* torna-se:

$$\ell = 2,552 \text{ m} \quad (5.18)$$

Assim, o modelo elaborado pode ser visto, sem grandes detalhes, na figura 5.28 a seguir, na qual o sistema de referência global tem sua origem na base do *riser*, que corresponde ao leito submarino.

Figura 5.28 – Modelo de cálculo do OrcaFlex® renderizado

Fonte: Autor

Apresenta-se a seguir a amplitude modal para a simulação dinâmica em cada ponto distribuído ao longo do comprimento do *riser* e, em seguida, o histórico temporal da amplitude de uma coordenada localizada no meio do vão.

Figura 5.29 – Forma modal OrcaFlex® - Primeiro modo

Fonte: Autor

Figura 5.30 – Amplitude modal OrcaFlex® na coordenada no meio do vão

Fonte: Autor

O gráfico da forma modal apresentada na figura 5.29 indica uma amplitude máxima de oscilação de $A_{m\acute{a}x} = 0,0350\text{ m}$, localizada nas proximidades da coordenada $x \approx 1,5$. No *software*, a origem do sistema local de coordenadas para o *riser* localiza-se na unidade flutuante; portanto, a coordenada adimensional na qual localiza-se o ventre é $\bar{\xi} \approx 0,6$ ou $\bar{\xi} \approx 0,4$, caso se considere a origem do sistema de coordenadas na sua parte inferior. No meio do vão, o histórico da amplitude modal de oscilação, caracterizado pela figura 5.30, fornece o valor de $A_{meio\grave{v}\tilde{a}o} = 0,0330\text{ m}$. Os resultados apresentam boa concordância com o modelo do OrcaFlex® gerado no relatório apresentado por LIFE&MO (10).

Sobre a amplitude no meio do vão, observa-se que o resultado do modelo elaborado por meio do OrcaFlex® está fornecendo mais do que o dobro do resultado experimental e do MOR gerado pela função quase-Bessel “não linear”. A localização do ventre modal do modelo do OrcaFlex® está de acordo com o resultado do ensaio experimental e do MOR da função quase-Bessel, o que era esperado, já que, de acordo com o tutorial do programa (39), a solução da equação diferencial de movimento é obtida, também, com as funções de Bessel. Porém, o resultado difere do apresentado para o MOR obtido pela função trigonométrica.

Programas dedicados possuem a vantagem de considerar, com maior facilidade, uma infindável variedade de carregamentos e modificações em parâmetros que auxiliam tanto na obtenção de respostas mais rápidas como na compreensão do fenômeno. Dessa forma, tanto o MOR quanto os programas dedicados devem ser encarados como ferramentais complementares e não excludentes ou definitivos.

5.8 Estudos paramétricos

5.8.1 Variação do coeficiente de arrasto C_d na função de projeção do tipo quase-Bessel “não linear”

Com o intuito de avaliar a influência do coeficiente de arrasto C_d na resposta do MOR, propõe-se um estudo paramétrico variando seus valores no intervalo de 0,5 a 3,0. Obtém-se o valor da amplitude modal adimensional seguindo o mesmo procedimento iterativo descrito na seção 5.3 e, posteriormente, recupera-se o deslocamento dimensional multiplicando-o pelo raio de giração. Apresenta-se também

o deslocamento normalizado pelo diâmetro do *riser*, como é usual. São avaliados os deslocamentos na coordenada $\bar{\xi} = 0,50$. Os resultados obtidos são apresentados na tabela 5.3

Tabela 5.3 – Coeficiente de arrasto e amplitude modal

C_d	η_n						$A_{max} (m)$	A_{max}/D
	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_n		
0,5	0,0000	12,4457	12,2337	12,2394	12,2393	12,2393	0,0832	3,75
1,0	0,0000	4,6862	4,6691	4,6692		4,6692	0,0318	1,43
1,5	0,0000	2,9564	2,9525			2,9525	0,0201	0,90
2,0	0,0000	2,1761	2,1745			2,1745	0,0148	0,67
2,5	0,0000	1,7262	1,7255			1,7255	0,0117	0,53
3,0	0,0000	1,4320	1,4316			1,4316	0,0097	0,44

Fonte: Autor

A figura 5.31 representa, de forma gráfica, os resultados da tabela 5.2 para a amplitude modal máxima normalizado pelo diâmetro do *riser*.

Figura 5.31 – Variação da amplitude modal com o coeficiente de arrasto

Fonte: Autor

É possível observar na figura 5.31 a grande sensibilidade do modelo de ordem reduzida aos valores do coeficiente de arrasto C_d , especialmente na faixa entre 0,5 e 1,0, na qual os valores da amplitude, em função do diâmetro, caem de uma relação

de 3,68 para 1,40. O que se infere, matematicamente, é que valores baixos do coeficiente de arrasto não diminuem as contribuições da força inercial, permitindo que, nessa faixa de valores, o movimento inercial governe as respostas dinâmicas. Para uma compreensão física dessa resposta ao coeficiente de arrasto, resgata-se a própria definição do coeficiente. Quando um corpo ou um objeto qualquer imerso em um fluido (seja o ar ou água, por exemplo) tende a iniciar um movimento, o fluido exerce sobre o corpo uma resistência - denominada de força de arrasto - que atua para reduzir a velocidade do objeto. Tal força depende de alguns fatores como a forma do objeto, as propriedades do fluido e da velocidade relativa do corpo em relação ao fluido. A natureza da força de arrasto mostra que ela tende a aumentar quando a velocidade do corpo aumenta, porém, nem sempre de forma linear. Para pequenas velocidades, a força de arrasto é aproximadamente proporcional à velocidade do corpo, no entanto, para velocidades mais altas, é aproximadamente proporcional ao quadrado da velocidade. Logo, o que se percebe é que à medida que o *riser* tende a vibrar com maiores amplitudes, o arrasto também proporciona uma maior resistência, fazendo a amplitude de oscilação apresentar uma maior uniformidade nos valores máximos. Esse comportamento pode ser visto na região em que a amplitude modal tende a se estabilizar com o aumento do valor de C_d .

Outra discussão que se faz pertinente é acerca do fato de o modelo de ordem reduzida não contemplar a parcela referente ao amortecimento estrutural, o que, aliás, não seria um problema do ponto de vista analítico e numérico: bastaria acrescentar à equação de movimento (4.92) um termo proporcional a $\dot{\eta}$. Entretanto, a determinação do coeficiente de amortecimento viscoso linear modal careceria de calibração experimental, o que até o presente momento não está disponível.

Dessa forma, acredita-se que, aqui, o coeficiente de arrasto represente uma espécie de “coeficiente de amortecimento não linear equivalente” já que, além da responsabilidade de modelar o arrasto hidrodinâmico, ele também é o responsável pela modelagem de outros efeitos dissipativos, tais como o estrutural, e o atrito nas extremidades do modelo em escala reduzida. Portanto, espera-se que, quando as equações de movimento - e, conseqüentemente, o MOR - forem aprimorados com a inclusão da parcela referente ao amortecimento estrutural, a forte dependência da amplitude modal máxima com o coeficiente de arrasto diminua, e novos estudos paramétricos mais realistas possam ser feitos a fim de determinar a real influência do coeficiente na resposta dinâmica do *riser*.

5.8.2 Coeficientes da equação do MOR

A abordagem desenvolvida nesse tópico tem como finalidade avaliar a influência dos termos definidos pelas integrais $I_0 - I_6$ indicados na equação (4.90) na resposta do MOR. Esses parâmetros são estudados para as três funções de projeção referenciadas ao longo do texto, a saber:

- Função do tipo 1 – F1: Função quase-Bessel “não linear”;
- Função do tipo 2 – F2: Função quase-Bessel “linear”;
- Função do tipo 3 – F3: Função trigonométrica.

Adotam-se as mesmas considerações estabelecidas anteriormente como amortecimento estrutural nulo e os seguintes valores de C_d : para a função quase-Bessel “não linear”, $C_d = 1,96$; para a função “linear”, $C_d = 1,97$; e para a função trigonométrica, $C_d = 1,96$. As integrais $I_0 - I_6$ são avaliadas no primeiro modo de vibração e, para a função F1, adota-se $\eta = 2,2210$, conforme procedimento descrito em 5.2. Os resultados são apresentados na tabela 5.4:

Tabela 5.4 – Coeficientes integrais do MOR para distintas funções de projeção

Integrais	Função de Projeção		
	F1	F2	F3
	$C_d = 1,96$	$C_d = 1,97$	$C_d = 2,34$
I_0	0,5287	0,5289	0,5000
I_1	40,6672	40,5610	48,7045
I_2	-5,5277	-5,5321	-4,9348
I_3	-0,6854	-0,6884	0,0000
I_4	3,07E-16	7,89E-17	-3,26E-17
I_5	-30,5552	-30,6043	-24,3523
I_6	0,4623	0,4626	0,4244

Fonte: Autor

Confirmando as expectativas, para as funções do tipo quase-Bessel, não ocorrem diferenças significativas entre as projeções “não linear” e “linear”. Porém,

quando se compara com a função trigonométrica, é interessante observar o comportamento do termo I_3 . Essa integral, conforme apresentado em (4.90), está associada à curvatura da função de projeção provocada pelo efeito de *heave*. Como as integrais são computadas ao longo do comprimento do *riser*, o termo nulo indica que a função trigonométrica assume uma curvatura simétrica no modo de vibração, o que é esperado para a função senoidal, e não ocorre com os modos quase-Bessel. Outra observação pertinente diz respeito ao valor da integral I_4 , que pode ser considerado praticamente nulo em todas as funções de projeção consideradas, em um resultado ainda a ser melhor avaliado.

5.8.3 Variação do coeficiente de arrasto C_d para diferentes funções de projeção

De modo mais abrangente, pode-se estudar a influência do coeficiente de arrasto C_d segundo as várias funções de projeção tratadas ao longo do texto. Mantendo-se a nomenclatura das funções de projeção definidas no item 5.9.2 e o amortecimento estrutural nulo, constrói-se a tabela 5.5 indicada a seguir:

Tabela 5.5 – Amplitudes modais, em função do diâmetro, para C_d variável

C_d	F1								F2		F3	
	η_n						$A_{max}(m)$	A_{max}/D	$A_{max}(m)$	A_{max}/D	$A_{max}(m)$	A_{max}/D
	η_0	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5						
0,5	0,0000	12,4457	12,2337	12,2394	12,2393	12,239	0,0832	3,75	0,0848	3,82	0,0849	3,82
1,0	0,0000	4,6862	4,6691	4,6692		4,6692	0,0318	1,43	0,0319	1,44	0,037	1,67
1,5	0,0000	2,9564	2,9525			2,9525	0,0201	0,90	0,0202	0,91	0,0239	1,08
2,0	0,0000	2,1761	2,1745			2,1745	0,0148	0,67	0,0149	0,67	0,0177	0,80
2,5	0,0000	1,7262	1,7255			1,7255	0,0117	0,53	0,0118	0,53	0,0141	0,63
3,0	0,0000	1,4320	1,4316			1,4316	0,0097	0,44	0,0099	0,45	0,0117	0,53

Fonte: Autor

A figura 5.32 apresenta os gráficos das amplitudes modais normalizadas pelo diâmetro do *riser* em função dos valores de C_d :

Figura 5.32 – Variação da amplitude modal normalizada pelo diâmetro com o coeficiente de arrasto

Fonte: Autor

As funções do tipo quase-Bessel “não linear” e “linear”, assim como a função trigonométrica, apresentam o mesmo comportamento quando são submetidas a uma variação do coeficiente de arrasto. Infere-se que o MOR é muito sensível aos valores de C_d , especialmente no trecho que varia de 0,5 a 1,0 com a função trigonométrica apresentando deslocamentos um pouco maiores. Contudo, à medida que o valor aumenta, as amplitudes apresentam uma tendência assintótica, com a função trigonométrica apresentando deslocamentos um pouco maiores.

5.9 Mapeamento das amplitudes do estado estacionário - diagrama Franzini-Sakamoto

Conforme apresentado na seção 2.2, o cenário mais relevante da ressonância paramétrica ocorre quando a frequência da excitação de topo é o dobro de uma frequência natural do sistema dinâmico. Caso o sistema entre em ressonância paramétrica, a configuração de equilíbrio estático trivial fica instável, obrigando o sistema a buscar uma configuração de equilíbrio dinâmico. A região de instabilidade paramétrica principal que nasce no diagrama de Strutt no ponto $\delta = 1$ (ou $\Omega = 2\omega$) e $\epsilon = 0$, caracteriza amplitudes de vibração crescendo ilimitadamente para a equação linear de Mathieu.

Para o modelo de ordem reduzida gerado, adota-se uma metodologia similar ao do diagrama de Strutt para construir um mapa que, em função de um par de parâmetros de controle, forneça a amplitude do ciclo limite estável que aparece para a equação (4.93) do MOR, em contraste com o resultado clássico da equação de Mathieu. Para tanto, investigam-se as soluções estacionárias do regime pós-crítico.

Inicialmente, são definidos os parâmetros de controle, sendo h_0 o que caracteriza a amplitude do movimento imposto e, $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1$, a razão entre a frequência do movimento imposto e a primeira frequência natural da estrutura na água. Para um dado valor de h_0 , variam-se os valores de $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1$ e arquivam-se as amplitudes modais máximas obtidos no regime estacionário. Então, um incremento é dado ao parâmetro h_0 e variam-se novamente os valores da relação $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1$, na qual as novas amplitudes são arquivadas. O processo é repetido tantas vezes quantas as definidas pelo usuário. Os resultados são lançados em um diagrama, segundo uma escala policromática de isoamplitudes, ao qual se referiu como diagrama Franzini-Sakamoto. O diagrama foi inicialmente idealizado por Prado, Sakamoto e Mazzilli (115) e depois aperfeiçoado por Franzini e Mazzilli (114).

Assim, para o MOR gerado com a projeção da função do tipo quase-Bessel “não linear”, constrói-se o seguinte diagrama Franzini-Sakamoto apresentado na figura 5.33:

Figura 5.33 – Diagrama Franzini-Sakamoto para o MOR com modo quase-Bessel “não linear” - $\bar{\xi} = 0,50$

Fonte: Autor

Na figura anterior, a abscissa mostra diferentes relações entre a frequência do movimento imposto e a frequência natural do sistema. A coluna lateral à direita indica a amplitude modal máxima em metros. O diagrama foi construído variando-se o parâmetro h_0 entre 0 e 0,03125m (equivalente a uma variação de 0 a 1,25 h , sendo $h_0 = 0,025m$) com 500 subdivisões; o parâmetro $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1$ entre 0 e 6 também com 500 subdivisões. Enquanto que para o sistema linear e homogêneo representado pela equação de Mathieu surgem hachuras indicando regiões instáveis; para o sistema não linear, as amplitudes não crescem ilimitadamente, ou seja, no lugar de uma região instável do diagrama de Strutt surge uma franja análoga, mas que agora identifica as amplitudes máximas do estado estacionário pós-crítico estável. Para $h_0 = 0,03125m$, a amplitude tende ao valor de $A = 0,0325 m$, algo em torno de 1,5 vezes o diâmetro do modelo do *riser*. Destaca-se que, quando essa relação é 1:1 - indicada no termo $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1 = 1$ -, surge no diagrama uma franja, em tom azul mais claro, que corresponde às amplitudes da segunda região de instabilidade paramétrica para a qual $2\hat{\omega}_1/\hat{\Omega} = 2$ e, portanto, $\hat{\Omega} = \hat{\omega}_1$. Também se constata o início da formação de uma franja nas proximidades do termo $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1 = 0,67$, sugerindo o aparecimento da terceira região de

instabilidade paramétrica, para a qual $2\hat{\omega}_1/\hat{\Omega} = 3$ ou $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1 = 2/3$. De maneira sutil, a quarta região de instabilidade começa a se formar próxima ao termo $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1 = 0,50$ que corresponde a $2\hat{\omega}_1/\hat{\Omega} = 4$ ou $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_1 = 2/4$.

O mesmo procedimento é adotado para se construir o diagrama correspondente à função trigonométrica, indicado na figura 5.34, tal que:

Figura 5.34 – Diagrama Franzini-Sakamoto para o MOR com modo trigonométrico - $\bar{\xi} = 0,50$

Fonte: Autor

Não se observam diferenças qualitativas no comportamento das funções quase-Bessel “não linear” e trigonométrica. No diagrama da função trigonométrica, a quarta franja de instabilidade paramétrica ainda não começou a se formar e, para $h_0 = 0,03125m$, a amplitude tende ao valor de $A = 0,0206 m$, equivalente a 0,93 vezes o diâmetro.

5.10 O décimo modo de vibração

O modelo de ordem reduzida foi avaliado para ressonância paramétrica com o décimo modo de vibração. Inicialmente, utilizando os dados da tabela 5.1, calcula-se a frequência natural desse modo de vibração, conforme indicado em (4.60) e reapresentado a seguir:

$$\omega_n = \frac{n\pi}{2\ell\sqrt{m}} \left(\sqrt{N_{b_n}} + \sqrt{N_{t_n}} \right) \quad (5.19)$$

no qual:

$$N_{b_n} = N_b + N_{0_n}$$

$$N_b = \bar{N} - \frac{p\ell}{2}$$

$$N_{t_n} = N_t + N_{0_n} \quad (5.20)$$

$$N_t = N_b + p\ell$$

$$N_{0_n} = \left(\frac{n\pi}{\ell} \right)^2 EI \left[1 + \frac{3\eta_n^2}{16} \right].$$

Interessante observar que a frequência pode ser ajustada em função das não linearidades que afetam a amplitude modal e que são calculadas durante o processo iterativo. Em teoria, significa que, além de o processo ser iterativo para o cálculo das não linearidades, deveria também ser iterativo para o ajuste das frequências. Partindo-se da frequência inicial do modo com $\eta = 0$, tem-se:

$$N_b = 23,65 - \frac{7,869 \times 2,6020}{2} = 13,4124 \text{ N}$$

$$N_t = 13,4124 + 7,869 \times 2,6020 = 33,8876 \text{ N}$$

$$N_{0n} = \left(\frac{10 \times \pi}{2,6020} \right)^2 \times 0,056 \times \left[1 + \frac{3(0)^2}{16} \right] = 8,1634 \text{ N}$$

$$N_{b_n} = 13,4124 + 8,1634 = 21,5758 \text{ N} \quad (5.21)$$

$$N_{t_n} = 33,8876 + 8,1634 = 42,0510 \text{ N}$$

$$\omega_{10} = \frac{10 \times \pi}{2 \times 2,6020 \times \sqrt{1,19}} \left(\sqrt{42510} + \sqrt{21,5758} \right)$$

$$\omega_{10} = 61,59 \text{ rad/s}$$

Corrige-se a frequência para o *riser* imerso em água, mediante a consideração da razão de massa C_a^* :

$$\hat{\omega}_{10} = \frac{61,59}{\sqrt{1 + 0,3252}} = 53,50 \text{ rad/s} \quad (5.22)$$

Considera-se a frequência de excitação do topo para provocar a ressonância paramétrica:

$$\hat{\Omega} = 2\hat{\omega}_{10} = 107,00 \text{ rad/s} \quad (5.23)$$

Para avaliação da amplitude modal do décimo modo, serão escolhidas algumas coordenadas estratégicas para análise, indicadas na figura 5.35:

Figura 5.35 – Localização das coordenadas modais de análise do décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Os resultados foram gerados utilizando-se os dados da tabela 5.1, coeficiente de arrasto $C_d = 1,96$. Sabe-se que o coeficiente de arrasto é função da frequência, mas, pela falta de dados experimentais para uma recalibração do modelo, optou-se por adotar o mesmo valor encontrado para o primeiro modo. A taxa de amortecimento estrutural continua sendo considerada nula.

5.10.1 Análise com amplitude modal definida na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$

Para definição da primeira coordenada modal, foi feito um estudo prévio procurando qual o ponto que apresentaria maior amplitude no primeiro trecho das vibrações, sendo esse valor máximo ocorrendo na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$. Assim como no primeiro modo, realizou-se um estudo de convergência das não linearidades, apresentados na tabela 5.6 a seguir:

Tabela 5.6 – Amplitude modal em $\bar{\xi} = 0,04$ para o décimo modo de vibração

Iteração	Entrada	Saída
1ª	0,0000	1,8572
2ª	1,8572	1,8479
3ª	1,8479	1,8480
4ª	1,8480	1,8480

Fonte: Autor

Os resultados para a amplitude modal, mapa de fase e espectro de amplitude são apresentados a seguir:

Figura 5.36 – Amplitude modal adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$ no décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Figura 5.37 – Mapa de fase adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$ no décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Figura 5.38 – Espectro de amplitude para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$ no décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Os valores das figuras 5.36 e 5.37 estão normalizados pelo raio de giração. O valor da amplitude máxima adimensional é $\eta = 1,8480$ que, multiplicado pelo raio de giração $r = 0,0068m$, fornece uma amplitude modal de $A_m = 0,0126m$, confirmado no espectro de amplitude da figura 5.38.

Com a amplitude modal obtida para a coordenada $\bar{\xi} = 0,04$, é possível obter a forma modal do décimo modo de vibração, conforme apresentado na figura 5.39:

Figura 5.39 – Forma modal não linear do décimo modo de vibração – Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$

Fonte: Autor

Comparando a figura 5.38 com a figura 4.13, o MOR confirma as expectativas para o décimo modo de vibração, mostrando o efeito de desempacotamento/empacotamento das ondas e as maiores amplitudes na região próxima do leito submarino, na qual se localiza a origem do sistema de referência do modelo. O ventre modal é deslocado em direção ao fundo. A fim de estudar as diferenças entre a função de projeção quase-Bessel “linear” e “não linear” nesse contexto, o gráfico da figura 5.40 apresenta a sobreposição das formas modais.

Figura 5.40 – Comparação das formas modais “linear” e “não linear” para o décimo modo de vibração
- Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$

Fonte: Autor

Para o décimo modo de vibração a diferença entre as funções não linear e linear torna-se mais sensível do que a diferença observada no primeiro modo de vibração. Na primeira meia-onda que vai da coordenada 0 a 0,10, os valores de pico são praticamente os mesmos inclusive a coordenada modal onde esse pico acontece. A título de ilustração, para função quase-Bessel “linear”, o ventre acontece na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$ e tem valor $A = 0,0127m$. Para a função quase-Bessel “não linear”, acontece na mesma coordenada e tem valor $A = 0,0126m$. Para a última meia onda, localizada entre as coordenadas 0,90 e 1,00 a amplitude modal máxima ocorre em $\bar{\xi} = 0,93$ com valor $A = -0,0109m$ e para a função “não linear” ocorre na coordenada $\bar{\xi} = 0,94$ com valor $A = -0,0111m$. Ressalta-se que, apesar de estarem próximos devido à escala reduzida do modelo de *riser* estudado, em uma situação real essas diferenças podem se tornar significativas para efeito de projeto.

Estabelecendo-se, neste momento, como critério de comparação a função de projeção trigonométrica, as diferenças se tornam ainda mais evidentes, conforme apresentado na figura 5.41.

Figura 5.41 – Comparação das formas modais não linear e trigonométrica para o décimo modo de vibração - Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$

Fonte: Autor

Como já afirmado, na primeira meia-onda, o pico da função quase-Bessel “não linear” ocorre na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$ e tem valor de $A = 0,0126m$. Já para a função trigonométrica, o ventre ocorre na coordenada $\bar{\xi} = 0,05$ com amplitude modal de $A = 0,0114m$. Para a última meia-onda, a função “não linear” apresenta valores de pico na coordenada $\bar{\xi} = 0,94$ com intensidade $A = -0,0111m$. A função trigonométrica, pela simetria do movimento, apresenta coordenada de pico igual a $\bar{\xi} = 0,95$ com valor $A = -0,0114m$.

Finalmente, as três funções são comparadas em um único gráfico, conforme a figura 5.42.

Figura 5.42 – Comparação das formas modais “linear”, “não linear” e trigonométrica para o décimo modo de vibração - Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$

Fonte: Autor

Ressalta-se que, mais importante do que a diferença quantitativa, é a diferença qualitativa de comportamento entre as funções projetadas, sendo que nas funções quase-Bessel, o ventre está deslocado comparando-se com a função trigonométrica.

As amplitudes modais do estado estacionário pós-crítico podem ser mapeadas no diagrama Franzini-Sakamoto. Para a coordenada modal definida em $\bar{\xi} = 0,04$, o diagrama adquire a configuração da figura 5.43.

Figura 5.43 – Diagrama Franzini-Sakamoto para o décimo modo de vibração – função quase-Bessel “não linear” - Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$

Fonte: Autor

É interessante observar que, diferentemente do mapa para o primeiro modo de vibração, o mapa do décimo modo não é simétrico em relação ao parâmetro de controle $\hat{\Omega}/\hat{\omega}_{10}$, o que é um resultado a ser ainda explicado física e matematicamente. Para a coordenada $\bar{\xi} = 0,04$, as amplitudes modais máximas mapeadas tendem ao valor $A_m = 0,0180 \text{ m}$, ou seja, em torno de 0,8 vezes o diâmetro do *riser*. Avaliando-se o formato do décimo modo de vibração - ao ocorrer em uma meia-onda um deslocamento da ordem de 0,8D -, o *riser* estará submetido a importantes inflexões, fazendo com que, em um trecho da ordem de 20% de seu comprimento, atinja algo em torno de 1,6D de distância entre crista e cavado. Devem ser esperados importantes esforços de flexão nesse caso.

Apresenta-se na figura 5.44, o diagrama Franzini-Sakamoto para a coordenada $\bar{\xi} = 0,04$, construído a partir da função trigonométrica.

Figura 5.44 – Diagrama Franzini-Sakamoto para o décimo modo de vibração – função trigonométrica
- Coordenada modal de análise na posição $\bar{\xi} = 0,04$

Fonte: Autor

No décimo modo de vibração, assim como para o primeiro modo de vibração, as diferenças quantitativas podem não ser determinantes nas avaliações. Relevante observar que, no mapa obtido pela função trigonométrica, não se observa a franja referente à terceira região de instabilidade paramétrica, presente no diagrama da função quase-Bessel “não linear”.

5.10.2 Avaliação dos coeficientes integrais do MOR para o décimo modo de vibração na coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$

Conforme abordado no primeiro modo de vibração, estudam-se os coeficientes integrais da equação do modelo de ordem reduzida para a coordenada modal $\bar{\xi} = 0,04$. Admitindo-se a mesma nomenclatura que define como função F1 a função quase-Bessel “não linear”, F2 a função quase-Bessel “linear” e F3 a função trigonométrica, os coeficientes caracterizados pelas integrais de (4.90) são apresentados na tabela a seguir.

Tabela 5.7 – Coeficientes da equação do MOR para coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,04$

Integrais	Função de Projeção		
	F1	F2	F3
	$C_d = 1,96$	$C_d = 1,97$	$C_d = 2,34$
I_0	0,4423	0,4276	0,5528
I_1	4,60E+05	4,56E+05	5,38E+05
I_2	-445,3663	-434,1825	-545,5783
I_3	-31,4168	-35,9214	-5,33E-15
I_4	3,55E-15	7,72E-15	-2,64E-15
I_5	1,98E+05	1,89E+05	2,98E+05
I_6	0,3540	0,3371	0,4934

Fonte: Autor

Avaliando-se a tabela anterior, nota-se que não existem diferenças significativas entre os valores das integrais da função “não linear”, “linear” e, até mesmo, da função trigonométrica, exceto pelo valor da integral I_3 . Conforme mencionado anteriormente, a integral relaciona-se diretamente com a curvatura da seção, indicando que para o modo trigonométrico, antissimétrico, a contribuição da curvatura da seção na determinação da amplitude modal não é significativa.

5.10.3 Análise com amplitude modal definida na coordenada $\bar{\xi} = 0,94$

Apresentam-se, neste momento, os resultados definindo a amplitude modal no ventre da última semionda do modelo do *riser*, localizada proximalmente à unidade flutuante, tal que $\bar{\xi} = 0,94$. O processo iterativo de verificação da convergência das não linearidades fornece:

Tabela 5.8 – Amplitude modal na coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$ para o décimo modo de vibração

Iteração	Entrada	Saída
1ª	0,0000	1,5990
2ª	1,5990	1,6261
3ª	1,6261	1,6268
4ª	1,6268	1,6268

Fonte: Autor

Os resultados para a amplitude modal, mapa de fase e espectro de amplitude são apresentados a seguir:

Figura 5.45 – Amplitude modal adimensional para a coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$ no décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Figura 5.46 – Mapa de fase adimensional para a coordenada modal de análise a $\bar{\xi} = 0,94$ no décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Figura 5.47 – Espectro de amplitude para a coordenada modal de análise a $\bar{\xi} = 0,94$ no décimo modo de vibração

Fonte: Autor

Os dados das figuras 5.44 e 5.45 estão normalizados pelo raio de giração. O valor da amplitude máxima adimensional é de $\eta = 1,6268$ que, multiplicado pelo raio de giração $r = 0,0068m$, fornece uma amplitude modal de $A_m = 0,0111m$, confirmado no espectro de amplitude da figura 5.46.

Com a amplitude modal obtida para a coordenada $\bar{\xi} = 0,94$, é possível obter a forma modal do modo de vibração, conforme a figura 5.48:

Figura 5.48 – Forma modal não linear do décimo modo de vibração – Coordenada modal de análise $\bar{\xi} = 0,94$

Fonte: Autor

A função quase-Bessel “linear” para essa coordenada apresenta amplitude de pico $A_m = 0,0109 \text{ m}$. Já a função trigonométrica, como possui a mesma amplitude de pico em todas as meia-ondas, tem $A_m = 0,0114 \text{ m}$. Observa-se que o comportamento da resposta modal avaliada na coordenada $\bar{\xi} = 0,94$ é similar ao comportamento mostrado para a coordenada $\bar{\xi} = 0,04$. Sobrepondo essas duas formas modais, tem-se na figura 5.49:

Figura 5.49 – Comparação das formas modais “não lineares” para as diferentes coordenadas modais escolhidas

Fonte: Autor

Conforme esperado, não existem diferenças significativas para o comportamento modal quando o mesmo é avaliado na coordenada $\bar{\xi} = 0,04$ ou $\bar{\xi} = 0,94$, sugerindo que qualquer coordenada modal escolhida para avaliar o modo apresentará uma boa concordância entre os resultados. Além disso, pode-se estender todas as conclusões da coordenada $\bar{\xi} = 0,04$ para a coordenada $\bar{\xi} = 0,94$, incluindo as comparações com a função quase-Bessel “linear” e a função trigonométrica, as discussões acerca do diagrama Franzini-Sakamoto e as inferências sobre o comportamento dos coeficientes da equação do MOR.

6 CONCLUSÃO

O intuito do texto dessa dissertação foi apresentar o estudo analítico do MOR de um *riser* vertical com força normal variável ao longo de seu comprimento, submetido à excitação de suporte oriunda do movimento de *heave* da unidade flutuante à qual o *riser* está conectado. Dependendo da relação entre a frequência de excitação do topo e a frequência natural da estrutura, pode ocorrer o cenário de ressonância paramétrica. A rigidez geométrica do *riser*, parâmetro que determina a configuração estática da estrutura, é modulada de forma a produzir a instabilidade do equilíbrio trivial. Ao contrário da ressonância clássica, que decorre de uma não homogeneidade na equação de movimento com frequência igual a uma frequência natural do sistema, a ressonância paramétrica principal acontece quando a razão entre essas frequências é 2:1.

Para formular o MOR, primeiramente, o *riser* foi tratado como uma viga biapoiada carregada axialmente com força normal variável ao longo de seu comprimento, assumindo as hipóteses da teoria de barras de Euler-Bernoulli. Com as deformações determinadas pelas hipóteses cinemáticas dessa teoria, aplicou-se o princípio de Hamilton para obtenção da equação de movimento que governa a dinâmica do sistema. A equação de movimento foi manipulada algebricamente de forma a se obter uma equação similar à de um cabo equivalente, em que o efeito da rigidez à flexão aparece na forma de uma força normal fictícia adicional à força de tração que estabiliza o sistema. As vibrações livres não lineares são determinadas, sendo que as funções que caracterizam a forma do modo de vibração são denominadas quase-Bessel por serem similares às funções de Bessel. As vibrações não lineares apresentam como característica a variação de sua forma modal e da frequência em função da amplitude do movimento. É característica de modos não lineares que um único deles contenha informações de harmônicos de ordem superior, o que é um diferencial competitivo para a geração de MOR's. Os primeiros resultados da teoria proposta são confrontados com as soluções obtidas por outros autores que utilizaram metodologias diferentes. Comparações entre as frequências naturais determinadas pelas funções do tipo quase-Bessel e as frequências naturais determinadas por Senjanovic et al. (34) por meio do método da segmentação e do método dos elementos finitos apresentam uma excelente concordância, com as diferenças ficando na ordem de 1%, conforme as tabelas 4.1 e 4.2. Assim, com um

método mais simples do que aquele proposto por Senjanovic et al. (34), obtém-se uma ferramenta potencialmente forte para descrição dos modos de vibração.

Uma das consequências de se trabalhar com modos de vibração não lineares é capturar o efeito de *hardening* ou *softening*, que não são visíveis quando se trabalha com modos lineares. Tal cenário torna extremamente favorável a utilização dos modos não lineares como funções de projeção no Método de Galerkin para obtenção de modelos de ordem reduzida.

A equação de movimento ganha a contribuição do termo referente ao efeito de *heave* e do movimento relativo fluido-estrutura por meio da força de Morison. A mesma é adimensionalizada e aplica-se o método de projeção de Galerkin utilizando-se as funções não lineares do tipo quase-Bessel determinadas anteriormente, obtendo-se assim o modelo de ordem reduzida do problema. Os MOR's permitem análises paramétricas mais rápidas e objetivas, fornecendo uma boa compreensão fenomenológica sobre o comportamento da estrutura; devem ser considerados como complementares aos modelos de alta hierarquia e não seus substitutos.

A integração numérica das equações diferenciais do MOR associado ao modelo em escala reduzida ensaiado pelo LIFE&MO (10) foi realizada. Foram comparados os resultados para distintas funções de projeção, a saber: quase-Bessel “não linear”, “linear” e função trigonométrica. Para a simulação realizada no *software* OrcaFlex®, indicou-se a máxima amplitude modal observada no ventre do modo. Os resultados podem ser contemplados na tabela 6.1:

Tabela 6.1 – Resultados para primeiro modo de vibração no ventre do modo clássico

<i>Modelo</i>	<i>h_0 (cm)</i>	<i>Ω (rad/s)</i>	<i>W_{01} (cm)</i>
<i>Experimental</i>	2,50	10,03	1,50
<i>MOR quase-Bessel não linear</i>	2,50	10,03	1,51
<i>MOR quase-Bessel linear</i>	2,50	10,03	1,51
<i>MOR trigonométrico</i>	2,50	10,03	1,51
<i>OrcaFlex®</i>	2,50	10,03	3,33

Fonte: Autor

Dos resultados acima destaca-se que não foi observada diferença significativa entre as funções quase-Bessel “não linear” e “linear”, confirmando-se a expectativa de que, para o primeiro modo de vibração, não há prejuízo na resposta global, caso a influência das amplitudes modais sejam desconsideradas na frequência e formas

modais. As amplitudes fornecidas pelo modo trigonométrico são 20% maiores do que as fornecidas para o MOR gerado via função “não linear”. O modelo do OrcaFlex® apresenta amplitudes maiores do que o dobro para as funções de projeção estudadas. Destaca-se que a maior divergência entre as metodologias diz respeito à forma modal. Enquanto as funções quase-Bessel “não linear” e “linear” apresentam ventre na coordenada $\bar{\xi} = 0,40$, a partir do leito submarino, a função trigonométrica tem amplitude de pico na coordenada $\bar{\xi} = 0,50$ e, a simulação do OrcaFlex®, na coordenada $\bar{\xi} = 0,60$. Torna-se evidente que o modelo trigonométrico superestimou as amplitudes máximas para o mesmo coeficiente de arrasto – conforme observado na figura 5.32 - e o modelo de alta hierarquia gerado no OrcaFlex® não ofereceu uma boa estimativa do comportamento da resposta dinâmica do *riser* em termos da amplitude modal máxima.

Os estudos paramétricos com o coeficiente de arrasto mostraram o quanto os modelos são sensíveis para baixos valores de C_d . Convém ressaltar que o valor de C_d , além de modelar a relação fluido-estrutura, carrega a responsabilidade de compensar os demais efeitos dissipativos que não estão incluídos na equação do MOR.

O estudo paramétrico com os coeficientes integrais da equação de movimento do MOR revela que para as funções quase-Bessel “não linear” e “linear” não existem diferenças significativas. Contudo, quando essas funções são comparadas à função trigonométrica, nota-se que a última não agrega valor significativo ao termo definido pela integral I_3 que leva em consideração a curvatura do modo de vibrar, indicando que seu caráter simétrico ou antissimétrico contribui pouco - ou quase nada - para o incremento da amplitude em função da forma modal assumida. Já o termo referente a I_4 torna-se praticamente nulo em todas as funções, em um resultado que ainda demanda uma análise mais detalhada para que seja esclarecido.

Uma das principais características do MOR é a possibilidade de realizar fácil e rapidamente uma análise dos parâmetros que governam a resposta estrutural do sistema. Dessa forma, apresenta-se o mapeamento das amplitudes estacionárias do regime pós-crítico por meio do diagrama Franzini-Sakamoto, em uma tentativa de reconstruir o diagrama de Strutt, empregado para a equação de Mathieu, porém, avaliando as respostas não lineares fornecidas pela função quase-Bessel em um MOR com não linearidades e efeitos dissipativos do amortecimento de Morison. No

diagrama, visualizam-se facilmente as amplitudes de pico para diversas relações racionais de frequência de excitação e frequência do modo excitado. Avaliando-se a intensidade das cores, é possível encontrar em quais condições a ressonância paramétrica tem início, pois nota-se um salto nos valores das amplitudes mapeadas. O diagrama revela também o quanto a modelagem é sensível a esses parâmetros de controle, sugerindo a importância da avaliação fenomenológica. O diagrama gerado para o primeiro modo de vibração indica uma tendência das amplitudes de atingirem valores na ordem $A = 0,0325\text{ m}$ para $h_0 = 0,03125\text{ m}$, o que equivale a um deslocamento da ordem de 1,5 vezes o diâmetro. Além da ressonância paramétrica principal na relação racional 2:1, o diagrama mostra a ressonância paramétrica na relação 1:1 e a ressonância paramétrica na relação 2:3.

Com a finalidade de testar as potencialidades das funções não lineares de projeção e do MOR, foi estudado o décimo modo de vibração, mesmo sem dados experimentais. Primeiramente, avaliou-se a amplitude na coordenada modal $\bar{\xi} = 0,04$ para as funções quase-Bessel “linear”, “não linear” e trigonométrica. Os resultados são visualizados na tabela 6.2:

Tabela 6.2 – Resultados para décimo modo de vibração - $\bar{\xi} = 0,04$

Modelo	$h_0\text{ (cm)}$	$\Omega\text{ (rad/s)}$	$W_{01}\text{ (cm)}$
MOR quase-Bessel não linear	2,50	10,03	1,26
MOR quase-Bessel linear	2,50	10,03	1,27
MOR trigonométrico	2,50	10,03	1,14

Fonte: Autor

As funções quase-Bessel “não linear” e “linear” não apresentaram diferenças significativas na avaliação da amplitude modal máxima. Já o modelo com modo trigonométrico, subestimou as amplitudes em torno de 11%. As diferenças se tornam significativas na forma de vibrar do modo. Enquanto o modelo com modo trigonométrico apresenta meias-ondas com a mesma amplitude de pico e mesmo comprimento de onda ao longo do comprimento do *riser*, as funções quase-Bessel mostram que as amplitudes pós-críticas são maiores quanto mais próximo do fundo se encontra a coordenada de análise. Fisicamente, pode-se entender que na região mais próxima do leito submarino, a força normal instaurada no cabo é menor, diminuindo a rigidez geométrica do *riser* e permitindo maiores amplitudes de

oscilação. Também os comprimentos de onda variam ao longo do comprimento do *riser*, verificando o fenômeno de seu desempacotamento/empacotamento.

O estudo dos coeficientes integrais para o MOR gerado para a ressonância paramétrica com o décimo modo revela comportamento similar ao obtido para o primeiro modo de vibração, de forma que, para a função trigonométrica, a contribuição do coeficiente definido por I_3 é desprezável pela forma simétrica antissimétrica do modo de vibração.

O diagrama Franzini-Sakamoto para o décimo modo de vibração mostra que não existe uma simetria dos resultados das amplitudes de pico em torno da relação 2:1. Para esse caso, a tendência das amplitudes de pico é atingir o valor $A = 0,018\text{ m}$, considerando $h_0 = 0,03125\text{ m}$, o que equivale a aproximadamente 0,8 vezes o diâmetro.

Com o intuito de verificar o quanto a escolha da coordenada modal influencia a resposta do modo de vibração, a etapa seguinte consistiu em escolher a coordenada $\bar{\xi} = 0,94$, na última meia-onda antes de se atingir a unidade flutuante, de forma a contrastar com a escolha da coordenada $\bar{\xi} = 0,04$ na primeira onda próxima ao fundo. Para essa coordenada, as respostas da análise modal estão indicadas na tabela 6.3:

Tabela 6.3 – Resultados para décimo modo de vibração - $\bar{\xi} = 0,94$

Modelo	h_0 (cm)	Ω (rad/s)	W_{01} (cm)
MOR quase-Bessel não linear	2,50	10,03	1,11
MOR quase-Bessel linear	2,50	10,03	1,09
MOR trigonométrico	2,50	10,03	1,14

Fonte: Autor

Nota-se que entre as funções quase-Bessel não existe diferença significativa no valor da amplitude de pico. O modelo com modo trigonométrico apresenta resultados superestimados em 2%. Contudo, pode-se concluir que as discussões e conclusões estabelecidas para a coordenada $\bar{\xi} = 0,04$, baseadas na função de projeção do tipo quase-Bessel, podem ser estendidas para a coordenada $\bar{\xi} = 0,94$.

Finalmente, conclui-se que o caráter inovador da metodologia em aproximar a equação de movimento do *riser* pela equação de um cabo equivalente - para o qual a rigidez à flexão é modelada como uma força adicional à força de tração estabilizadora - permite obter funções não lineares do tipo Bessel que, quando

utilizadas para geração dos modelos de ordem reduzida, conseguem captar o efeito dominante observado no ensaio em escala reduzida realizado pelo LIFE&MO (10) no IPT, em São Paulo, descrevendo quantitativa e qualitativamente seus resultados. Para trabalhos futuros, sugere-se a verificação da convergência da força normal fictícia adicional com o intuito de finalizar todas as etapas de obtenção das respostas das vibrações livres não lineares.

Recomenda-se ainda a formulação de um modelo de ordem reduzida tridimensional, a fim de captar o efeito de acoplamento modal observado no mapa de fase do ensaio em escala reduzida, no qual pode-se tratar efeitos de *heave* e VIV concomitantemente. Recomenda-se, também, estudos sobre a variação do coeficiente de arrasto com o modo de vibração, a forma modal e ao longo do comprimento do *riser*, além, é claro, da consideração do amortecimento estrutural nos modelos de ordem reduzida.

7 REFERÊNCIAS

- (1) MINISTÉRIO DAS MINAS E ENERGIA. *Resenha Energética Brasileira – Exercício de 2013*. 2014. Disponível em: <<http://www.mme.gov.br/documents/1138787/1732840/Resenha+Energética+-+Brasil+2015.pdf/4e6b9a34-6b2e-48fa-9ef8-dc7008470bf2>>. Acesso em: 06 jul. 2015.
- (2) REVISTA ESCOLA BRASIL. Como será feita a exploração de petróleo na camada pré-sal? 2013. Disponível em: <<http://revistaescola.abril.com.br/geografia/fundamentos/como-sera-feita-exploracao-petroleo-camada-pre-sal-621953.shtml>>. Acesso em: 06 jul. 2015.
- (3) DIÁRIO DO PRÉ-SAL. Prospecção e Extração de petróleo e gás natural. 2013. Disponível em: <<https://diariodopresal.wordpress.com/petroleo-e-gas/>>. Acesso em: 06 jul. 2015.
- (4) PETRÓLEO NO MAR. Tipos de plataformas de petróleo. Disponível em: <<http://petroleonomar.blogspot.com.br>>. Acesso em: 07 jul. 2015.
- (5) VAZ, M. A.; RIZZO, N. A. S. A finite element model for flexible pipe armor wire instability. *Marine Structures*, in press, 2011, pp. 1-17.
- (6) Disponível em: <<http://www.akersolutions.com/en/Global-menu/Products-and-Services/Engineering/Riser-systems1/>>. Acesso em: 07 jul. 2015.
- (7) Disponível em: <<http://www.petrobras.com/pt/magazine/post/recebemos-o-premio-offshore-technology-conference-2015.htm>>. Acesso em: 07 jul. 2015.
- (8) ALLIOT, V.; CARRÉ, O. Riser Tower Installation, AMG - Alto Mar Girassol / Stolt Offshore, *Offshore Technology Conference*, OTC 14211, Houston, Texas USA, May 2002.
- (9) NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations*. New York: John Wiley & Sons, 1979.
- (10) LIFE&MO. Experimentos hidro-elásticos com modelo vertical de *riser*, sujeito a correnteza uniforme e a imposição de movimentos verticais no topo (IPT). In: *DINÂMICA NÃO-LINEAR DE RISERS: Interações não-lineares de natureza hidro-elástica e de contato*, RT 3.3, Módulo 4: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Projeto de Pesquisa e Desenvolvimento para a PETROBRAS. (Acesso Restrito). 2013.
- (11) Disponível em: <<http://www.ogj.com/articles/print/volume-96/issue-25/in-this-issue/production/patents-protect-deepwater-platform-concepts.html>>. Acesso em: 07 jul. 2015.
- (12) PESCE, C.P. *Mecânica de Cabos e Tubos Submersos Lançados em Catenária: Uma Abordagem Analítica e Experimental*. Tese de Livre Docência, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1997.

- (13) ROSEMBERG, R. M. On nonlinear vibrations of systems with degrees of freedom, *Advances in Applied Mechanics*, v. 9, p. 155-242, 1996.
- (14) SHAW, S. W.; PIERRE, C. Non-linear normal modes and invariant manifolds, *Journal of Sound and Vibration*, v. 150 (1), p. 170-173, 1991.
- (15) SHAW, S. W.; PIERRE, C., Normal modes for non-linear vibratory systems, *Journal of Structures*, v. 164 (1), p. 85-124, 1993.
- (16) SHAW, S. W.; PIERRE, C. Normal modes of vibration for nonlinear continuous systems, *Journal of Sound and Vibration*, v. 169(3), p. 319-347, 1994.
- (17) SHAW, S. W.; PIERRE, C. PESHECK, E., Modal analysis-based reduced-order models for nonlinear structures - an invariant manifold approach, *The Shock and Vibration Digest*, v. 31, p. 3-16, 1999.
- (18) BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Nonlinear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds. *Dynamics Specialists Conference. Hilton Head, South Carolina*: (s.n.). 1994.
- (19) BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Nonlinear modal analysis of structural systems featuring internal resonances. *Journal of Sound and Vibration*, v. 182, p. 336-341, 1995.
- (20) MAZZILLI, C. E. N.; BARACHO NETO, O. G. D. P. Evaluation of non-linear normal modes. *Computers & Structures*, v. 80, p. 957-965, 2002.
- (21) MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S.; BARACHO NETO, O. G. D. P. Non-linear normal modes of a simply-supported beam: continuous system and finite-element models. *Computers & Structures*, v. 82, p. 2683-2691, 2004.
- (22) MAZZILLI, C. E. N. Effect of linearly varying normal force upon the nonlinear modal analysis of slender beams. *6th Euromech Nonlinear Dynamics Conference. Saint Petersburg*: (s.n.). 2008.
- (23) STEINDL, A.; TROGER, H. Methods for dimension reduction and their application in nonlinear dynamics. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 2131-2147, 2001.
- (24) NETO, O. G. D. P. B. *Redução de graus de liberdade: uma proposta para a análise dinâmica de estruturas aporricadas planas de comportamento geometricamente não linear*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1998. Dissertação de Mestrado.
- (25) MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S.; BARACHO NETO, O. G. P. Reduction of finite-element models of planar frames using nonlinear normal modes. *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 1993-2008, 2001.
- (26) MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S. A generalised procedure for reduced-

order modelling in nonlinear dynamics using nonlinear modes. *IUTAM Symposium on Nonlinear Dynamics for Advanced Technologies and Engineering Design*. Aberdeen: (s.n.). 2010.

(27) MAZZILLI, C. E. N.; MONTICELLI, G. C.; NETO, N. A. G. Reduced-order modelling in nonlinear dynamics: an approach based on nonlinear modes. *Journal of Mechanical Engineering Science*, v. 225, p. 2354-2368, 2011.

(28) CARTMELL, M. *Introduction to linear, parametric and nonlinear vibrations*. London: Chapman and Hall, 1990.

(29) SOARES, M. E. S. *Excitação paramétrica em sistemas com um grau de liberdade*. São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1992. Dissertação de Mestrado.

(30) CHATJIGEORGIOU, I. K.; MAVRAKOS, S. A. Nonlinear resonances of parametrically excited risers. *Computers & Structures*, v. 83, p. 560-573, 2005.

(31) MAZZILLI, C. E. N. Non-linear finite-element formulation in dynamics-II, *Boletim Técnico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9008, 1990.

(32) MAZZILLI, C. E. N.; SANCHES, C. E. S.; BARACHO NETO, O. G. P.; WIERCIGROCH, M.; KEBER, M. Nonlinear modal analysis for beams subjected to axial loads: analytical and finite element solution, *Internacional Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 43, 2008, p.551-561.

(33) SANCHES, C. E. S. *Modos não-lineares de vibração e controle ativo de risers*, Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

(34) SENJANOVIC I.; LJUSTINA A. M.; PARUBOV J. Natural Vibration Analysis of Tensioned Risers by Segmentation Method. *Oil & Gas Science and Technology*. V. 61, Number 5, 2006, p. 647-659.

(35) MAZZILLI, C. E. N.; LENCI, S.; DEMEIO, L. Non-linear Free Vibrations of Tensioned Vertical Risers. *Proceedings of the 8th European Nonlinear Dynamics Conference*, Vienna, 2014, ISBN 978-3-200-03433-4.

(36) BOYCE, .W. E.; DIPRIMA, R. C.. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 9ª edição, LTC, 2012.

(37) MUNSON, B. R.; YOUNG, D. F.; OKIISHI, T. H. *Fundamentos da Mecânica dos Fluidos*. 4ª ed. São Paulo: Blucher, 2004.

(38) RIZZA, F.; MAZZILLI, C. E. N. *Reduced-order model of a vertical riser under heave-imposed motion*. Trabalho final de curso. São Paulo, 2014.

(39) ORCAFLEX MANUAL. Disponível em:
<www.orcina.com/SoftwareProducts/OrcaFlex/Documentation/OrcaFlex.pdf>.
Acesso em:15 jan. 2015.

- (40) SILVEIRA, L. M. Y.; MARTINS, C.; A.; ARANHA, J. A. P. A qualitative study of the response of the Ginzburg-Landau equations when coupled to the structural model of a submerged cable, In: *Fifth Conference on Bluff Body Wakes and Vortex-Induced Vibrations*, 2007, Costa do Sauípe, Book of Papers, 2007, v. Único, p. 75-78.
- (41) BARACHO NETO, O. G. P.; MAZZILLI, C. E. N. Evaluation of non-linear normal modes for finite-element models, *Computers and Structures*, v. 80, p. 957-965, 2002.
- (42) BARACHO NETO, O. G. P. *Modos normais e multi-modos na dinâmica das estruturas de comportamento não linear*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- (43) BARACHO NETO, O. G. P.; MAZZILLI, C. E. N. Evaluation of multi-modes for finite- element models: systems tuned into 1:2 internal resonance, *International Journal of Solids and Structures*, v. 42, p. 5795-5820, 2005.
- (44) BARACHO NETO, O. G. P.; MAZZILLI, C. E. N. Evaluation of multi-modes for finite- element models: systems tuned into 1:3 internal resonance, to be published in *Journal of Sound and Vibration*, 2008.
- (45) BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Non-linear modal analysis of structural systems using multi-mode invariant manifolds, *AIAA Dynamics Specialists Conference*, South Carolina, 1994.
- (46) BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Non-linear modal analysis of structural systems featuring internal resonances, *Journal of Sound and Vibration*, 182 (2), p. 336-341, 1995.
- (47) BOIVIN, N.; PIERRE, C.; SHAW, S. W. Non-linear modal analysis of the forced response of structural systems, *AIAA Dynamics Specialists Conference*, Utah, 1996.
- (48) BRASIL, R. M. L. R. F.; MAZZILLI, C. E. N. A general formulation of non-linear dynamics applied to accessing the static loading effect upon the dynamic response of planar frames, *Applied Mechanics Review*, v. 46 (11), p.110-117, 1993.
- (49) CLOUGH, R. W.; PENZIEN, J. *Dynamics of Structures*, McGraw-Hill, 1975.
- (50) MAZZILLI, C. E. N. Non-linear finite-element formulation in dynamics-II, *Boletim Técnico da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT/PEF/9008, 1990.
- (51) MAZZILLI, C. E. N.; SOARES, M. E. S.; BARACHO NETO, O. G. P. Reduction of finite- element models of planar frames using non-linear normal modes, *International Journal of Solids and Structures*, v. 38, p. 1993-2008, 2001.
- (52) MAZZILLI, C. E. N.; SANCHES, C. T.; BARACHO NETO, O. G. P.; WIERCIGROCH, M.; KEBER, M. *Non-linear modes of beams subjected to axial loads*. Euromech 483, Porto, 2007.

- (53) MAZZILLI, C. E. N.; SANCHES, C. E. S.; BARACHO NETO, O. G. P.; KEBER, M.; WIERCIGROCH, M. Nonlinear modal analysis for beams subjected to axial loads: analytical and finite element solution, *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 43, p. 551-561, 2008.
- (54) MAZZILLI, C. E. N.; LENCI, S. Normal vibration modes of a slender beam on elastic foundation with unilateral contact, *XXII ICTAM*, 25-29 de Agosto, 2008, Adelaide, Australia.
- (55) NAYFEH A. H; NAYFEH S. A. On nonlinear modes of continuous systems, *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 116, p. 129-136, 1994.
- (56) PESCE, C. P.; MARTINS, C. A. Numerical computation of riser dynamics, numerical modelling in fluid-structure interaction, *Advances in Fluid Mechanics Series*, S. Chakrabarti ed., WIT, chap. 7, p. 253–309, 2005.
- (57) PESCE, C. P; FUJARRA, A. L. C.; SIMOS, A. N.; TANNURI, E. A. Analytical and closed form solutions for deep water riser-like eigenvalue problem, *ISOPE 1999*, v. 2, p. 255-264, Goa, Índia, 1999.
- (58) SANCHES, C. T. *Modos não lineares de vibração em arcos discretizados pelo método dos elementos finitos*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- (59) SANCHES, C. T.; MAZZILLI, C. E. N.; CUNHA, L. D.; PESCE, C. P. Non-linear modal analysis applied to riser dynamics, *ISOPE 2007*, Lisboa, 2007.
- (60) SOARES, M. E. S. *Modos não lineares em sistemas discretizados pelo método dos elementos finitos*. Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1998.
- (61) SOARES, M. E. S.; MAZZILLI, C. E. N. Nonlinear normal modes of planar frames discretised by the finite element method, *Computers and Structures*, v. 77, p. 485- 493, 2000.
- (62) PRYSMIAN. *Umbilicais Thermoplastic and Steel Tube*. Disponível em: <http://prysmiangroup.com/en/business_markets/markets/oil-and-gas/products/subsea-umbilicals-risers-and-flowlines-surf/Umbilicals/>. Acesso em: 11 jul. 2015.
- (63) OIL & GAS TECHNOLOGIES. Disponível em: <<https://oilandgastechnologies.wordpress.com/2012/08/27/steel-catenary-risers-scr/>>. Acesso em: 12 jul. 2015.
- (64) OFFSHORE MAGAZINE. Disponível em: <<http://www.offshore-mag.com/index.html>>. Acesso em: 12 jul. 2015.
- (65) COMPANY ATLANTICA. Disponível em: <<http://www.atlanticatd.com>>. Acesso em: 12 jul. 2015.

- (66) KERSCHEN, G.; PEETERS, M.; GOLINVAL, J. C.; VAKAKIS, A. F. Nonlinear normal modes, Part I: A useful framework for the structural dynamicist. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 23, p. 170-194, 2009.
- (67) LYAPUNOV, A. M. *The General Problem of the Stability of Motion*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1947.
- (68) POINCARÉ, H. *Les Méthodes Nouvelle de la Mécanique Céleste*. Ed. Gauthier-Villars, Paris, 1989.
- (69) ROSEMBERG, R. M.; ATKINSON, C. P. On natural modes and their stability in nonlinear two-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 26, p. 377-392, 1959.
- (70) ROSEMBERG, R. M. Normal modes of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, p. 263-268, 1960.
- (71) ROSEMBERG, R. M. On normal vibrations of a general class of nonlinear dual-mode systems. *Journal of Applied Mechanics*, p. 275-283, 1961.
- (72) ROSEMBERG, R. M. The normal modes of nonlinear n-degree-of-freedom systems. *Journal of Applied Mechanics*, p. 7-14, 1962.
- (73) ROSEMBERG, R. M.; KUO, J. K. Nonsimilar normal mode vibrations of nonlinear systems having two degrees of freedom. *Journal of Applied Mechanics*, v. 31, p. 283-290, 1964.
- (74) ROSEMBERG, R. M. On nonlinear vibrations of systems with many degrees of freedom. *Advances in Applied Mechanics*, v. 9, p. 155-242, 1966.
- (75) WAH, T. The normal modes of vibration of certain nonlinear continuous systems. *Journal of Applied Mechanics*, v. 31, n. 1, p. 139-140, 1964.
- (76) ANAND, G. Natural modes of a coupled nonlinear system. *International Journal of Nonlinear Mechanics*, v. 7, p. 81-91, 1972.
- (77) RAND, R. H.; VITO, R. Nonlinear vibrations of two-degree-of-freedom systems with repeated linearized natural frequencies. *Journal of Applied Mechanics*, p. 296-297, 1972.
- (78) VAKAKIS, A. F. *Analysis and Identification of linear and Nonlinear Normal Modes in Vibrating Systems*, 320 f. Tese de Doutorado, California Institute of Technology, Pasadena, 1991.
- (79) VAKAKIS, A. F. Fundamental and subharmonic resonances in a system with a '1-1' internal resonance. *Nonlinear Dynamics*, v. 3, p. 123 – 143, 1992.

- (80) VAKAKIS, A. F.; RAND, R. H. Normal modes and global dynamics of a two-degree-of-freedom non-linear system – I. Low energies. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 27, n. 5, p. 861-874, 1992.
- (81) VAKAKIS, A. F. Passive spatial confinement of impulsive responses in coupled nonlinear beams. *AIAA Journal*, v. 32, n. 9, 1994.
- (82) VAKAKIS, A. F.; MANEVITCH, L. I.; MIKHLIN, Y.; PILIPCHUK, V. N.; ZEVIN, A. A. *Normal Modes and Localization in Nonlinear Systems*. Wiley Ed, 552 f., 1996.
- (83) VAKAKIS, A. F. Non-linear normal modes (NNMs) and their applications in vibration theory: an overview. *Mechanical Systems and Signal Processing*, v. 11, n. 1, p. 3-22, 1997.
- (84) FOIAS, C.; JOLLY, M. S.; KEVREKIDIS, I. G.; SELL, G. R. R.; TITI, E. S. On the computation of inertial mani-folds. *Phys. Lett.*, 1988, A131, 433-437.
- (85) MARION, M.; TEMAM, R. Nonlinear Galerkinmeth- ods. *SIAM J. Num. Anal.*, 1989, 26, 1139–1157.
- (86) BROWN, H. S.; JOLLY, M. S.; KEVREKIDIS, I. G.; TITI, E. S. Use of approximate inertial manifolds in bifurcation calculations. In: *Continuation and bifurcations: numerical techniques and applications* (Eds D. ROOSE, B. De DIER, A. SPENCE), 1990, p. 9-23, (Kluwer Academic Publishers, Dordrecht).
- (87) GARCIA-ARCHILLA, B.; NOVO, J.; TITI, E. S. Postprocessing the Galerkin method: a novel approach to approximate inertial manifolds. *SIAM J. Num. Anal.*, 1998, 35, 941–972.
- (88) LAING, C. R.; MCROBIE, A.; SELL, G. R.; THOMPSON, J. M. T. The post-processed Galerkin method applied to nonlinear shell vibrations. *Dyn. Stab. Syst.*, 1999, 14, 163–181.
- (89) TOUZÉ, C.; AMABILI, M. Nonlinear normal modes for damped geometrically nonlinear systems: application to ‘reduced-order’ modelling of harmonically forced structures. *J. Sound Vib.*, 2006, 298, 968-981.
- (90) REGA, G.; TROGER, H., Dimension reduction of dynamical systems: Methods, models, applications. *Nonlinear Dynamics*, v. 41, p. 1-15, 2005.
- (91) MEIROVITCH, L. (1986). *Elements of Vibration Analysis*. McGraw-Hill Book Company.
- (92) CHAPLIN, J.; BEARMAN, P.; CHENG, Y.; FONTAINE, E.; GRAHAM, J.; HERFJORD, K.; HUERA HUARTE, F.; ISHERWOOD, M.; LAMBRAKOS, K.; LARSEN, C.; MENEGHINI, J.; MOE, G.; PATTENDEN, R.; TRIANTAFYLLOU, M.; WILLDEN, R. (2005a). Blind predictions of laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a tension riser. *Journal of Fluids and Structures*, 21(1):25–40.
- (93) CHAPLIN, J.; BEARMAN, P.; HUERA HUARTE, F.; PATTENDEN, R. (2005b).

Laboratory measurements of vortex-induced vibrations of a vertical tension riser in a stepped current. *Journal of Fluids and Structures*, 21(1):3-24.

(94) FUJARRA, A.; PESCE, C.; FLEMMING, F.; WILLIAMSON, C. (2001a). Vortex-induced vibration of a flexible cantilever. *Journal of Fluids and Structures*, 15:651–658.

(95) JAUVTIS, N.; WILLIAMSON, C. H. K. (2004). The effect of two degrees of freedom on vortex-induced vibration at low mass and damping. *Journal of Fluid Mechanics*, 509:23–62.

(96) PESCE, C. P.; FUJARRA, A. L. C. (2000). Vortex-induced vibrations and jump phenomenon: Experiments with a clamped flexible cylinder in water. *International Journal of Offshore and Polar Engineering*, 10(1):26–33.

(97) PESCE, C. P.; FUJARRA, A. L. C. (2005). The “super-upper branch” VIV response of flexible cylinders. In *4th Bluff-Bodies Wakes and Vortex-Induced Vibrations Conference - BBVIV4*.

(98) SARPKAYA, T. (2004). A critical review of the intrinsic nature of vortex-induced vibrations. *Journal of Fluids and Structures*, 19:389–447.

(99) WILLIAMSON, C. H. K.; GOVARDHAN, R. N. (2004). Vortex-induced vibrations. *Annual Review of Fluids Mechanics*, 36:413–455.

(100) FRANZINI, G. R.; GONÇALVES, R. T.; PESCE, C. P.; FUJARRA, A. L. C.; MAZZILLI, C. E. N.; MENECHINI, J. R.; MENDES, P. (2013). Vortex-induced vibrations experiments with a very flexible cylinder under tension modulation: Fourier transform and hilbert- huang spectral analysis. In: *Proceedings of the XV International Symposium on Dynamic Problems of Mechanics - DINAME 13*.

(101) FRANZINI, G. R.; GONÇALVES, R. T.; MENECHINI, J. R.; FUJARRA, A. L. C. Comparison between force measurements of one and two degrees-of-freedom VIV on cylinder with small and large mass ratio. In: *Proceedings of the 10th FIV 2012 - International Conference on Flow-Induced Vibrations Conference (& Flow-Induced Noise)*. 2012.

(102) LIFE&MO. Experimentos hidro-elásticos com cilindros flexíveis em catenária. *Relatório Técnico do Projeto de Dinâmica Não linear de Risers: Interações Não-Lineares de Natureza Hidro-Elástica e de Contato*: RT- 3.2, Módulo 4:, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Projeto de Pesquisa e Desenvolvimento para a PETROBRAS. (Acesso Restrito). 2012a.

(103) LIFE&MO. Experimentos hidro-elásticos com cilindros flexíveis verticais em canal de água recirculante (NDF). *Relatório Técnico do Projeto de Dinâmica Não linear de Risers: Interações Não-Lineares de Natureza Hidro-Elástica e de Contato*: RT-3.1, Módulo 4:, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Projeto de Pesquisa para a PETROBRAS. (Acesso Restrito). 2012b.

- (104) APIWATTANALUNGGARN, P. et al. Finite-element-based nonlinear modal reduction of a rotating beam with large-amplitude motion. *Journal of Vibration and Control*, v. 9, p. 235–263, 2003.
- (105) PESHECK, E. *Reduced Order Modeling of Nonlinear Structural Systems Using Nonlinear Normal Modes and Invariant Manifolds*. 177f. Tese de Doutorado – University of Michigan, Ann Arbor, 2000.
- (106) PESHECK, E.; PIERRE, C.; SHAW, W. S. Modal reduction of a nonlinear rotating beam through nonlinear normal modes. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 124, p. 229-236, 2002b.
- (107) PIERRE, C.; JIANG, D.; SHAW, S. Nonlinear normal modes and their application in structural dynamics. *Mathematical Problems in Engineering*, p. 1-15, 2006.
- (108) GUOJING, Z.; JIANGUO, W. Invariant sub-manifolds and modes of nonlinear autonomous systems. *Applied Mathematics and Mechanics*, v. 19, n. 7, 1998.
- (109) PESHECK, E.; PIERRE, C.; SHAW, W. S. A new galerkin-based approach for accurate non-linear normal modes through invariant manifolds. *Journal of Sound and Vibration*, v. 249, v. 5, p. 971-993, 2002a.
- (110) NAYFEH, A. H.; CHIN, C.; NAYFEH, S. A. On nonlinear normal modes of systems with internal resonance. *Journal of Vibration and Acoustics*, v. 118, p. 340-345, 1996.
- (111) ANDERSON, T. J.; BALACHANDRAN, B.; NAYFEH, A. H. Nonlinear resonances in a flexible cantilever beam. *Journal of Vibrations and Acoustics*, v. 116, p. 480-484, 1994.
- (112) PAK, C. H. On the coupling of non-linear normal modes. *International Journal of Non-Linear Mechanics*, v. 41, p. 716-725, 2006.
- (113) FERNANDES, A. C.; MOURELLE, M. M.; SERTÃ, O. B.; PARRA, P. H. C. C. Hydrodynamic Coefficients in the Design of Steel Catenary Risers. *Proceedings of the 16th Int Symposium on Offshore Mechanics and Arctic Engineering*, Yokohama, Japan, 1997.
- (114) FRANZINI, G. R.; MAZZILLI, C. E. N. Non-linear reduced-order model for parametric excitation of vertical and immersed slender beam. Submitted to the *International Journal of Nonlinear Mechanics*, 2015.
- (115) PRADO, F. S.; SAKAMOTO, F. Y.; MAZZILLI, C. E. N. An analysis of parametric instability of risers. *Latin American Journal of Solids and Structure*, Rio de Janeiro, v. 11, n. 3, p. 348-368, May 2014.
- (116) Rainey, R. C. T., “The dynamics of tethered platforms”. Transactions of the Royal Institution of Naval Architects. 1977.

- (117) Patel, M. H., and Park, H. I., "Dynamics of tension leg platform tethers at low tension. Part I - Mathieu stability at large parameters". *Marine Structures*, 4, pp. 257–273, 1991.