HENRIQUE FURIA SILVA

**FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA TORÇÃO UNIFORME
EM BARRAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL MACIÇA**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

EDIÇÃO REVISADA

São Paulo

2005

HENRIQUE FURIA SILVA

**FORMULAÇÃO DO PROBLEMA DA TORÇÃO UNIFORME
EM BARRAS DE SEÇÃO TRANSVERSAL MACIÇA**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas
Orientador: Prof. Dr. Valdir Pignatta e Silva

São Paulo

2005

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 17 de junho de 2005.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Henrique Furia

Formulação do problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça / Henrique Furia Silva. – São Paulo, 2005.

206 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1. Mecânica dos sólidos 2. Torção uniforme 3. Função empenamento I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II. t.

*“Aprendi a nunca desistir, mesmo quando
tudo conspira contra você”.*

*Katie Dallam,
Veja, 20/04/2005.*

DEDICATÓRIA

A meus pais Marisa e Norberto.

AGRADECIMENTOS

A meus pais, pelo apoio, amor, carinho e paciência concedidos em todos os momentos de minha vida.

Ao Professor Doutor Valdir Pignatta e Silva pela orientação desta dissertação.

Ao Professor Doutor Henrique Lindenberg Neto pelas observações na Qualificação deste trabalho.

Ao Professor Doutor Henrique de Britto Costa pela colaboração com a execução desta dissertação.

Ao Professor Doutor Carlos Alberto Soares pelas observações na Apresentação desta dissertação, as quais foram prontamente incorporadas nesta edição revisada.

Aos meus irmãos Fabio e Ricardo pela ajuda na revisão do texto final.

A CAPES pela concessão de bolsa de Mestrado.

RESUMO

O escopo do trabalho é estudar o problema da torção uniforme em barras de seção maciça e resolvê-lo analiticamente para obter o momento de inércia à torção da seção transversal e os deslocamentos ao longo de toda a barra. Este trabalho foi desenvolvido no contexto da Teoria da Elasticidade, utilizando o método semi-inverso para determinar as equações de Saint-Venant para a torção uniforme. As seções em forma de elipse e triângulo equilátero foram resolvidas utilizando a função de tensão de Prandtl, a função empenamento e a sua conjugada harmônica. A seção retangular foi resolvida utilizando as funções empenamento e de Prandtl desenvolvidas em séries infinitas. Foi desenvolvida uma formulação matricial utilizando o Método de Galerkin para resolver problemas que não possuem solução fechada.

ABSTRACT

The main purpose of this essay is to present the issue of the uniform torsion in solid section bars and to solve it analytically to achieve the moment of inertia to the torsion of the transversal section and the displacements throughout the whole bar. This essay was developed in the Elasticity Theory context, using the semi-inverse method to determine the Saint-Venant equations to the uniform torsion. The sections in ellipse and equilateral triangle were solved using the Prandtl stress function, the warping function and its harmonic conjugate. The rectangular section was solved using the warping and the Prandtl functions developed in infinite series. A formulation based on matrixes was developed using the Galerkin method to solve problems that do not have closed solution.

SUMÁRIO

Resumo	v
Abstract.....	vi
Lista de Figuras	x
Lista de Tabelas	xii
Lista de Símbolos.....	xiii
Romanos Maiúsculos	xiii
Romanos Minúsculos	xv
Gregos	xvi
1 Introdução	1
2 Teoria da Elasticidade em Três Dimensões	4
2.1 Estudo das Deformações	5
2.1.1 Alongamentos e Deformações lineares	6
2.1.2 Deformações angulares e distorções.....	7
2.1.3 Compatibilidade de deformações	9
2.2 Estudo das Tensões	11
2.2.1 O conceito de tensão	12
2.2.2 Teorema de Cauchy. Estado de tensão num ponto	16
2.2.3 Equações diferenciais de Equilíbrio	21
2.2.4 Equilíbrio de Momentos	23
2.3 Equações Constitutivas. Lei de Hooke	25
3 Torção Uniforme de Saint-Venant.....	29
3.1 Introdução	29
3.2 Torção de barras prismáticas. Problema de Neumann	30
3.2.1 Deslocamentos Transversais.....	32
3.2.2 Deslocamento Longitudinal.....	35
3.2.3 Deformações e Tensões	36
3.2.4 Equações de Equilíbrio	37
3.2.5 Geometria do Contorno da Seção	38
3.2.6 Geometria da Seção	41
3.2.7 Condições de Contorno na Superfície Lateral.....	43
3.2.8 Esforços Solicitantes nas Extremidades	45
3.2.9 Forças Cortantes	46
3.2.10 Momento de Inércia à Torção	49
3.2.11 Solução do Problema de Neumann.....	52

3.3	Torção de barras prismáticas. Problema de Dirichlet	54
3.3.1	Conjugada Harmônica.....	54
3.3.2	Deslocamentos. Deformações. Tensões. Equilíbrio	57
3.3.3	Condições de Contorno na Superfície Lateral	58
3.3.4	Momento de Inércia à Torção	60
3.3.5	Solução do Problema de Dirichlet	62
3.4	Torção de barras prismáticas. Problema de Prandtl	64
3.4.1	Condições de Contorno	64
3.4.2	Equações Diferenciais de Equilíbrio.....	65
3.4.3	Função de Tensão de Prandtl	65
3.4.4	Condições de Contorno na Superfície Lateral	66
3.4.5	Esforços Solicitantes nas Extremidades.....	68
3.4.6	Solução do Problema de Prandtl.....	70
3.5	Equações da Torção Uniforme	73
3.5.1	Relação entre as funções c e f	74
3.6	Método para encontrar Polinômios Harmônicos	76
4	Aplicação das Equações de Saint-Venant.....	77
4.1	Seção Transversal Elíptica	77
4.1.1	Propriedades Geométricas da Elipse.....	77
4.1.2	Propriedades Geométricas da Região Elíptica	80
4.1.3	Solução do Problema de Prandtl.....	82
4.1.4	Solução do Problema de Neumann	86
4.1.5	Solução do Problema de Dirichlet	89
4.1.6	Análise de Resultados	94
4.1.7	Seção Transversal Circular	97
4.2	Seção Transversal Triangular	98
4.2.1	Propriedades geométricas do contorno	98
4.2.2	Propriedades geométricas da região triangular	100
4.2.3	Solução do problema de Prandtl	102
4.2.4	Solução do problema de Neumann	106
4.2.5	Solução do problema de Dirichlet.....	112
4.2.6	Análise de Resultados	116
4.3	Seção Transversal Retangular.....	124
4.3.1	Propriedades Geométricas do Contorno	124
4.3.2	Propriedades Geométricas da Região Retangular	125
4.3.3	Solução do Problema de Neumann	127
4.3.4	Solução do Problema de Prandtl.....	136
4.3.5	Análise de Resultados	145

5	Formulação Integral por Resíduos Ponderados	147
5.1	Formulação Diferencial	147
5.2	Formulação Integral pelo Método de Galerkin	149
5.2.1	Método dos Resíduos Ponderados	150
5.2.2	Método de Galerkin Restrito	152
5.2.3	Método de Galerkin Generalizado	154
5.3	Formulação Matricial do problema da Torção Uniforme	158
5.3.1	Formulação do problema de Neumann	161
5.3.2	Formulação do problema de Prandtl	164
5.4	Solução da Seção transversal retangular	167
5.4.1	Solução por função de tensão de Prandtl	167
5.4.2	Solução do problema de Neumann	172
5.4.3	Análise dos resultados	177
6	Considerações Finais	182
	Referências Bibliográficas	192
	Bibliografia Recomendada	195
	Apêndice — Funções de Variáveis complexas	196
	Histórico	196
	Números Complexos	200
	Funções de Variáveis complexas	202
	Equações de Cauchy-Riemann	203

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1.1 – Corpo.....	4
Figura 2.1.1 – Configurações inicial e final.....	5
Figura 2.1.2 – Deslocamentos infinitesimais.	6
Figura 2.1.3 – Distorções infinitesimais.....	7
Figura 2.2.1 – Esforços ativos e reativos.	11
Figura 2.2.2 – Corte	12
Figura 2.2.3 – Partes do sólido.....	13
Figura 2.2.4 – Tensões.	14
Figura 2.2.5 – Tensão normal e de cisalhamento.	15
Figura 2.2.6 – Tensões atuantes.	16
Figura 2.2.7 – Decomposição das tensões.....	17
Figura 2.2.8 – Tetraedro em equilíbrio.	18
Figura 2.2.9 – Forças de volume.....	21
Figura 2.2.10 – Acréscimo de tensões.	21
Figura 2.3.1 – Ensaio de Tração.	25
Figura 2.3.2 – Ensaio de Cisalhamento.	26
Figura 3.2.1 – Torção de barra prismática com base retangular.	30
Figura 3.2.2 – Deslocamentos transversais.	32
Figura 3.2.3 – Contorno da seção transversal.	38
Figura 3.2.4 – Decomposição das tensões de cisalhamento.	43
Figura 3.2.5 – Tensões de cisalhamento.	45
Figura 4.1.1 – Seção elíptica.....	77
Figura 4.1.2 – Geometria da Elipse.	78
Figura 4.1.3 – Empenamento da seção elíptica.....	94
Figura 4.1.4 – Empenamento da seção elíptica (2).....	95
Figura 4.1.5 – Tensões de cisalhamento na seção elíptica.....	96
Figura 4.2.1 – Seção triangular.....	98
Figura 4.2.2 – Região triangular.	100
Figura 4.2.3 – Empenamento da seção triangular.....	118
Figura 4.2.4 – Empenamento da seção triangular (2).....	119
Figura 4.2.5 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo x	120
Figura 4.2.6 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo y	120
Figura 4.2.7 – Tensão de cisalhamento na seção triangular.....	121

Figura 4.2.8 – Versores tangentes no triângulo equilátero.	122
Figura 4.3.1 – Seção em forma de retângulo.....	124
Figura 5.4.1 – Seção retangular.....	167
Figura 5.4.2 – Tensão de cisalhamento na seção retangular.	178
Figura 5.4.3 – Empenamento da seção retangular.....	180
Figura 5.4.4 – Empenamento da seção retangular (2).....	180
Figura 7.1 – Plano dos números complexos.	202
Figura 7.2 – Plano das variáveis complexas.	204

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 – Equações da Torção Uniforme	73
Tabela 3.2 – Funções harmônicas.	76
Tabela 4.1 – Parametrização do contorno.	107
Tabela 4.2 – Análise das superfícies S_1 e S_2	107
Tabela 4.3 – Soluções para as superfícies S_1 e S_2	110
Tabela 4.4 – Propriedades geométricas da superfície retangular.	125
Tabela 4.5 – Cálculo da série.	143
Tabela 5.1 – Formulação diferencial.	148
Tabela 5.2 – Funções Multiplicadoras.	167
Tabela 5.3 – Propriedades geométricas da superfície retangular.	178

LISTA DE SÍMBOLOS

ROMANOS MAIÚSCULOS

A	Área da seção transversal
dA	Elemento infinitesimal de área
[B]	Matriz gradiente das funções coordenadas
E	Módulo de elasticidade longitudinal
$F(x, y)$	Função de variável complexa
$\Im(z)$	Função de variável complexa para a torção uniforme
G	Módulo de elasticidade transversal
$H(x, y)$	Solução da equação de Poisson
$\hat{H}(x, y)$	Função aproximadora
$H_0(x, y)$	Parte da função aproximadora que satisfaz às condições de contorno
$\bar{H}$	Valor especificado da função aproximadora no contorno essencial
I_0	Momento polar de inércia
I_T	Momento de inércia à torção
I_x	Momento de inércia à flexão em relação ao eixo x
I_y	Momento de inércia à flexão em relação ao eixo y
[K] , K_{ij}	Matriz de coeficientes no Método de Galerkin
[K] , K_j	Matriz de coeficientes no Método dos Resíduos Ponderados
M_t	Conjugado de torção
O	Origem do sistema de eixos cartesianos. Centro de torção
P	Ponto na configuração inicial
P *	Ponto na configuração final
{R} , R_i	Vetor dos termos independentes no Método de Galerkin
R	Coeficiente independente no Método dos Resíduos Ponderados
S	Contorno fechado da seção transversal
S_0, S_ℓ	Extremidades da barra torcida
S_f	Superfície de esforços especificados. Contorno natural.
S_u	Superfície de deslocamentos especificados. Contorno essencial.

$[\mathbf{T}]$	Tensor das tensões de Cauchy
$\{\mathbf{U}\}, U_j$	Vetor dos termos independentes no Método de Galerkin
$\mathbf{V}$	Sólido tridimensional na configuração inicial
dV	Elemento tridimensional de Volume
$\mathbf{V}^*$	Sólido tridimensional na configuração final
$\{\mathbf{Z}\}$	Vetor gradiente da função de contorno essencial
$Z(x, y)$	Variável complexa

ROMANOS MINÚSCULOS

a, b	Dimensões características da seção transversal
c	Termo independente da equação de Poisson
$c(r, s)$	Número complexo
$\vec{d}$	Vetor deslocamento
du, dv, dw	Deslocamentos infinitesimais
dx, dy, dz	Dimensões infinitesimais
dx^*, dy^*, dz^*	Dimensões infinitesimais na configuração final
$\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z$	Versores direcionais dos eixos cartesianos x, y, z .
$f(x, y)$	Função nula no contorno. Parte real de funções de variáveis complexas
$g(x, y)$	Parte imaginária de funções de variáveis complexas
$f(y), g(x)$	Funções de integração dos deslocamentos longitudinais
$p, p(x, y)$	Fatores multiplicadores de funções nulas no contorno
l, m	Co-senos diretores no plano
n_x, n_y, n_z	Co-senos diretores no espaço
$\vec{n}$	Versor normal à superfície ou ao contorno
$\vec{n}_{xy}, \vec{n}_{yz}, \vec{n}_{zx}$	Versores normais às faces do paralelepípedo infinitesimal
p_2, q_2 p_3, q_3 p_n, q_n	Fatores multiplicadores de funções harmônicas
q	Condição de contorno natural
$\bar{q}$	Valor especificado da função aproximadora no contorno natural
$\vec{r}$	Vetor posição na configuração inicial
$\vec{r}^*$	Vetor posição na configuração final
r	Parte real do número complexo $c(r, s)$
s	Coordenada curvilínea Parte imaginária do número complexo $c(r, s)$
t	Parâmetro da curva S ou da região A
u, v, w	Deslocamentos de um ponto
x, y, z	Eixos cartesianos. Coordenadas na configuração inicial.
$x(t), y(t)$	Equações paramétricas do contorno S
$x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t)$	Equações paramétricas da região A
x^*, y^*, z^*	Coordenadas na configuração final

GREGOS

$\mathbf{a}, \mathbf{b}$	Distorções no plano $\mathbf{O}_{xy}$
$\mathbf{b}$	Ângulo entre o versor normal $\vec{n}$ e o eixo x
$\mathbf{c}(x, y)$	Função conjugada harmônica da função empenamento
$\mathbf{c}_0, \mathbf{f}_0, \mathbf{y}_0$	Constantes das funções da torção uniforme
$\mathbf{d}$	Ângulo entre o vetor posição $\vec{r}$ e o eixo x
$\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z$	Componentes lineares de Deformação
$\mathbf{f}(x, y)$	Função de tensão de Prandtl
$\mathbf{j}_i(x, y)$	Funções coordenadas
$\mathbf{g}_{xy}, \mathbf{g}_{yz}, \mathbf{g}_{zx}$ $\mathbf{g}_{yx}, \mathbf{g}_{zy}, \mathbf{g}_{xz}$	Deformações angulares
$\mathbf{n}$	Coefficiente de Poisson
$\mathbf{k}$	Parâmetro da superfície triangular
$\mathbf{p}$	Plano de corte
$\mathbf{q}$	Rotação específica
$\mathbf{q}_c, \mathbf{q}_1, \mathbf{q}_2$	Argumentos de números complexos
Θ	Ângulo de rotação
$\vec{\mathbf{r}}$	Tensão atuante
$\mathbf{r}$	Parâmetro da região $\mathbf{A}$
$\mathbf{r}_c, \mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$	Módulos de números complexos
$\mathbf{s}_x, \mathbf{s}_y, \mathbf{s}_z$	Componentes normais de tensão
$\vec{\mathbf{r}}_{xy}, \vec{\mathbf{r}}_{yz}, \vec{\mathbf{r}}_{zx}$	Tensões atuantes nas faces do paralelepípedo infinitesimal
$\vec{\mathbf{t}}, \vec{\mathbf{t}}_k$	Versor tangente ao contorno $\mathbf{S}$ ou $\mathbf{S}_k$
$\vec{\mathbf{t}}_A, \vec{\mathbf{t}}_{S_k}$	Tensão de cisalhamento na região $\mathbf{A}$ ou da superfície $\mathbf{S}_k$
$\mathbf{t}_{xy}, \mathbf{t}_{yz}, \mathbf{t}_{zx}$ $\mathbf{t}_{yx}, \mathbf{t}_{zy}, \mathbf{t}_{xz}$	Componentes cisalhantes de tensão
$\mathbf{y}(x, y)$	Função empenamento de Saint-Venant
$\mathbf{x}$	Relação entre as dimensões características do triângulo

1 INTRODUÇÃO

O problema da torção uniforme pode ser resolvido por meio de três formulações diferenciais que constituem problemas de contorno na teoria de potencial. Estas formulações utilizam três funções principais: função empenamento de Saint-Venant, função conjugada harmônica e função de tensão de Prandtl.

Timoshenko e Goodier (1970) apresentam as formulações diferenciais por função de tensão e empenamento, enquanto que Boresi e Chong (1987) apresentam também a função conjugada harmônica da função empenamento. Ambos resolvem a seção elíptica e em forma de triângulo equilátero, mas usando apenas a função de tensão. Sokolnikoff (1978) apresenta a formulação por função de tensão e pela função conjugada harmônica da função empenamento, e resolve a seção elíptica por esta última. Através de séries infinitas, Timoshenko e Goodier (1970) resolvem a seção retangular usando a função de tensão, enquanto que Wang (1953) utiliza a função empenamento.

Este trabalho tem o objetivo de resolver o problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça, determinando o momento de inércia à torção, o campo de deslocamentos e a distribuição das tensões de cisalhamento na barra. Pretende-se utilizar todas essas formulações para encontrar a solução de seções elípticas, triangulares e retangulares, unificando o conhecimento difundido pelos diversos autores.

No Capítulo 2 são apresentadas as hipóteses e equações da teoria da elasticidade linear em três dimensões para o cálculo de deslocamentos, deformações e tensões. A lei de Hooke relaciona as tensões às deformações dela decorrentes, permitindo calcular uma em função da outra. Respeitando o equilíbrio de forças e de momentos e as condições de contorno, é possível fechar a solução de problemas da elasticidade linear.

No Capítulo 3 é apresentada a formulação diferencial do problema da torção uniforme em barras, utilizando as equações de Saint-Venant. Para seções maciças, três formulações diferenciais foram apresentadas: uma por função de deslocamento (empenamento), outra pela sua conjugada harmônica e uma por função de tensão (de Prandtl).

Primeiramente, foram feitas hipóteses quanto ao campo de deslocamentos, considerando que ocorre empenamento da seção transversal quando esta não é circular. Neste caso, o deslocamento longitudinal w é considerado proporcional a uma função de deslocamentos a ser determinada, denominada função empenamento.

Depois, são feitas considerações sobre números complexos e funções de variáveis complexas, mostrando que o problema da torção uniforme pode também ser resolvido utilizando outra função que precisa ser conjugada harmônica da função empenamento de Saint-Venant.

Por fim, foram feitas hipóteses quanto às tensões de cisalhamento que atuam na seção transversal. Elas são relacionadas a uma função de tensão a ser determinada, denominada função de Prandtl.

Os três casos são resolvidos através da aplicação do método semi-inverso de solução de problemas da elasticidade linear. Nas formulações pela função empenamento e sua conjugada harmônica, as tensões são calculadas por meio de diferenciação do campo de deslocamentos. Na formulação por função de tensão, os deslocamentos são calculados por integração do campo de tensões.

Um dos principais objetivos deste trabalho é demonstrar que as três formulações diferenciais são equivalentes e levam aos mesmos resultados, podendo ser escolhida qualquer uma delas para a solução do problema da torção uniforme em barras de seção maciça.

No Capítulo 4, as três formulações diferenciais foram aplicadas na solução de barras submetidas à torção uniforme com seção em forma de elipse e triângulo equilátero.

A solução da seção elíptica por função de tensão é apresentada por diversos autores, entre eles Timoshenko e Goodier (1970) e Boresi e Chong (1987), e explorada nos cursos de pós-graduação de engenharia de estruturas. Não foi encontrada referência sobre a solução por função empenamento, enquanto que a solução pela conjugada harmônica apresentada por Sokolnikoff (1978) não é feita de forma suficientemente detalhada. Neste trabalho a seção elíptica foi resolvida, de forma exata, por meio de cada uma das três formulações diferenciais.

Timoshenko e Goodier (1970) e Boresi e Chong (1987) apresentam a solução de seções em forma de triângulo equilátero. Neste trabalho é apresentada a solução de seções em forma de triângulo isósceles. Para cada uma das três formulações diferenciais, foi demonstrado que só é possível encontrar solução analítica fechada se este triângulo isósceles for também equilátero.

Timoshenko e Goodier (1970) e Wang (1953) resolvem a seção retangular através de séries infinitas, usando as funções empenamento e de tensão. Neste trabalho, as duas soluções são desenvolvidas empregando métodos de solução das equações diferenciais de Laplace e Poisson, por separação de variáveis.

No Capítulo 5 é apresentado o método de Galerkin, como uma variante da formulação integral por resíduos ponderados. Foram desenvolvidas formulações integrais correspondentes à função de tensão e à função empenamento. Como exemplo de aplicação, a seção retangular foi resolvida, de forma aproximada, por meio de cada uma dessas formulações.

2 TEORIA DA ELASTICIDADE EM TRÊS DIMENSÕES

O corpo da Figura 2.1.1 é submetido a um conjunto de forças externas, e representado na sua configuração inicial (KNEESE, 1979, p. 3) em relação a um sistema de eixos orientados.

Figura 2.1.1 – Corpo.

O corpo representado na figura acima é submetido a um conjunto de forças externas. A intensidade dessas forças e as propriedades do material determinam como o corpo vai se deformar ao ser submetido a elas.

No material elástico, as deformações são imediatas e reversíveis, ou seja, desaparecem imediatamente quando essas forças deixam de atuar. Se, além disso, o corpo retornar completamente à sua configuração inicial, então o material que o compõe é perfeitamente elástico. Se a deformação for proporcional à carga, então a elasticidade é linear (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970).

No entanto, se as forças que produzem deformação excederem ao limite de elasticidade, somente a deformação elástica será recuperada após a descarga, permanecendo no corpo a deformação residual.

Um material é homogêneo quando as suas propriedades físicas são as mesmas para qualquer ponto P do corpo. Se, num dado ponto P do corpo, as propriedades são as mesmas para qualquer direção considerada, então o material é isótropo.

Segundo Timoshenko e Goodier (1970), a Teoria da Elasticidade tem como hipóteses a elasticidade linear, homogeneidade, isotropia e continuidade da matéria.

2.1 ESTUDO DAS DEFORMAÇÕES

Sob carregamento, o sólido da Figura 2.1.1 sofre deformações, e passa a ocupar uma nova posição, denominada configuração final (KNEESE, 1979, p. 3), representada na Figura 2.1.1.

Figura 2.1.1 – Configurações inicial e final.

Na configuração de referência V , o ponto $P \in V$ ocupa a posição definida pelo vetor:

$$\begin{aligned}\vec{r} &= \mathbf{P} - \mathbf{O} \\ \vec{r} &= (x-0) \cdot \hat{e}_x + (y-0) \cdot \hat{e}_y + (z-0) \cdot \hat{e}_z\end{aligned}\tag{2.1.1}$$

As coordenadas do vetor posição são:

$$\vec{r} \equiv \{x, y, z\}\tag{2.1.1}$$

Após a deformação, o ponto $P \in V$ ocupará a posição $P^* \in V^*$ definida pelo vetor:

$$\begin{aligned}\vec{r}^* &= \mathbf{P}^* - \mathbf{O} \\ \vec{r}^* &= x^* \cdot \hat{e}_x + y^* \cdot \hat{e}_y + z^* \cdot \hat{e}_z \equiv \{x^*, y^*, z^*\}\end{aligned}$$

Neste processo, cada ponto do sólido V se deslocou de $\overrightarrow{PP^*} = \mathbf{P}^* - \mathbf{P} = \vec{d}$, sendo que o vetor deslocamento é dado por:

$$\begin{aligned}\vec{d} &= \mathbf{P}^* - \mathbf{P} \\ \vec{d} &= u \cdot \hat{e}_x + v \cdot \hat{e}_y + w \cdot \hat{e}_z \equiv \{u, v, w\}\end{aligned}\tag{2.1.2}$$

Pela figura, pode-se observar que:

$$\vec{d} = \vec{r}^* - \vec{r}\tag{2.1.3}$$

Em coordenadas vale que:

$$u = x^* - x \quad v = y^* - y \quad w = z^* - z \quad (2.1.4)$$

2.1.1 Alongamentos e Deformações lineares

Na Figura 2.1.2, é representado um paralelepípedo infinitesimal de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, centrado em $\mathbf{P} \in \mathbf{V}$, que se deforma por meio de alongamento na direção de x e encurtamento nas outras duas direções.

Figura 2.1.2 – Deslocamentos infinitesimais.

Com o auxílio da Figura 2.1.2, os deslocamentos indicados podem ser facilmente calculados por meio de diferenças:

$$|du| = |dx^*| - |dx| \quad |dv| = |dy| - |dy^*| \quad |dw| = |dz^*| - |dz|$$

O deslocamento é positivo quando ocorre alongamento, e negativo quando ocorre encurtamento. Portanto, algebricamente, as componentes de deslocamento infinitesimais de $\mathbf{P}$ são:

$$du = dx^* - dx \quad dv = dy^* - dy \quad dw = dz^* - dz \quad (2.1.5)$$

As expressões (2.1.5) podem ser obtidas por diferenciação de (2.1.4).

A deformação linear específica é a relação entre o deslocamento e o comprimento inicial de uma fibra numa dada direção. Para o elemento infinitesimal da Figura 2.1.2, a deformação linear específica na direção de x , denotada por e_{xx} , vale:

$$e_x = \frac{dx^* - dx}{dx} = \frac{du}{dx} \quad (2.1.6)$$

Levando ao limite em que $dV = dx \cdot dy \cdot dz \rightarrow 0$, o paralelepípedo tende ao ponto P . Estendendo o conceito apresentado em (2.1.6) para as outras direções, e utilizando derivadas parciais, obtém-se que:

$$\begin{aligned} e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \end{aligned} \quad (2.1.7)$$

2.1.2 Deformações angulares e distorções

Na Figura 2.1.3 é representado um paralelepípedo infinitesimal de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, centrado em $P \in V$, fixo em $\overrightarrow{OE}$, que se deforma pela movimentação da aresta $\overrightarrow{MN}$.

Figura 2.1.3 – Distorções infinitesimais.

Quando $\overrightarrow{MN}$ é deslocada para $\overrightarrow{M^*N^*}$, o paralelepípedo se transforma em um prisma com base em forma de paralelogramo. As arestas $\overrightarrow{OA}$ e $\overrightarrow{OB}$, inicialmente ortogonais, se distorcem, e passam a ocupar as posições $\overrightarrow{OA^*}$ e $\overrightarrow{OB^*}$, respectivamente.

A distorção ou deformação angular das direções Ox e Oy é a diferença entre os ângulos $\hat{A\hat{O}B}$ e $\hat{A^*O^*B^*}$, e vale:

$$g_{xy} = \hat{A\hat{O}B} - \hat{A^*O^*B^*} = a + b .$$

A partir da figura, verifica-se que:

$$\tan a = \frac{dv}{dx}$$

$$\tan b = \frac{du}{dy}$$

$$g_{xy} = a + b = \arctan\left(\frac{dv}{dx}\right) + \arctan\left(\frac{du}{dy}\right) \quad (2.1.8)$$

Ao supor que os deslocamentos envolvidos são suficientemente pequenos, pode ser adotada a aproximação explicada em (3.2.4)¹.

$$\sin a \approx a$$

$$\cos a \approx 1$$

Portanto:

$$g_{xy} = a + b = \frac{dv}{dx} + \frac{du}{dy} \quad (2.1.9)$$

Novamente, no limite em que $dV = dx \cdot dy \cdot dz \rightarrow 0$, o paralelogramo transforma-se no ponto **P**. Estendendo o conceito de distorção para os outros planos, e adaptando a notação para derivadas parciais, obtém-se que:

$$g_{xy} = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \quad g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (2.1.10)$$

¹ Esta hipótese é conhecida como linearidade geométrica.

2.1.3 Compatibilidade de deformações

Um campo de deformações compatível não pode ser arbitrariamente definido, pois as deformações angulares e lineares ocorrem simultaneamente. Na Figura 2.1.3 pode-se perceber que quando o plano Oxy se distorce de $\mathbf{g}_{xy}$, o ponto $\mathbf{N}$ se desloca para $\mathbf{N}^*$.

$$\overrightarrow{\mathbf{NN}^*} = \mathbf{N}^* - \mathbf{N} = (du, dv) \quad \text{Ou} \quad \|\overrightarrow{\mathbf{NN}^*}\| = \sqrt{(du)^2 + (dv)^2}$$

A recíproca também é verdadeira. O deslocamento $\overrightarrow{\mathbf{NN}^*}$ está associado à distorção $\mathbf{g}_{xy}$. É preciso então encontrar as condições para as quais o campo de deslocamentos $\vec{d}$ seja compatível.

Ao derivar $\mathbf{g}_{xy}$ duas vezes, em relação à x e a y , obtém-se:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial y \partial x}$$

Como u e v são funções contínuas (WANG; 1953), então:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^3 u}{\partial y^2 \partial x} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial y^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) \quad (2.1.11)$$

Substituindo-se (2.1.7) em (2.1.11), obtém-se que:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{yy}}{\partial x^2} \quad (2.1.12)$$

Por outro lado, ao somar a derivada de $\mathbf{g}_{xy}$ com relação a z e a x com a derivada de $\mathbf{g}_{zx}$ em relação a x e a y , obtém-se:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{zx}}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ &= \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z \partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2} + \frac{\partial^3 u}{\partial y \partial x \partial z} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{zx}}{\partial y \partial x} = 2 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x \partial z \partial x} + \frac{\partial^3 w}{\partial y \partial x^2}$$

Como as funções são contínuas, então:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{zx}}{\partial y \partial x} &= 2 \cdot \frac{\partial^3 u}{\partial x \partial z \partial y} + \frac{\partial^3 v}{\partial x^2 \partial z} + \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = \\
&= 2 \cdot \frac{\partial}{\partial y \partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.13}$$

Substituindo (2.1.7) e (2.1.10) em (2.1.13), obtém-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{zx}}{\partial y \partial x} &= 2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{yz}}{\partial x^2} \\
2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y \partial z} &= -\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{yz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial x \partial z} + \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{zx}}{\partial y \partial x} \\
2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \mathbf{g}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{g}_{zx}}{\partial y} \right)
\end{aligned} \tag{2.1.14}$$

As relações referentes às derivações em outras direções podem ser obtidas por permutação cíclica (WANG, 1953).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{g}_{xy}}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{yy}}{\partial x^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{yz}}{\partial z \partial y} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{zz}}{\partial y^2} \quad \frac{\partial^2 \mathbf{g}_{zx}}{\partial x \partial z} = \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{e}_{xx}}{\partial z^2} \tag{2.1.15}$$

$$\begin{aligned}
2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_x}{\partial y \partial z} &= \frac{\partial}{\partial x} \left(-\frac{\partial \mathbf{g}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{g}_{zx}}{\partial y} \right) \\
2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_y}{\partial z \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\partial \mathbf{g}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{g}_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}_{xy}}{\partial z} \right) \\
2 \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_z}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial z} \left(-\frac{\partial \mathbf{g}_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \mathbf{g}_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{g}_{yz}}{\partial x} \right)
\end{aligned}$$

2.2 ESTUDO DAS TENSÕES

A Figura 2.2.1, adaptada de Lindenberg Neto (1998), representa um sólido submetido a um conjunto de esforços equilibrados.

Figura 2.2.1 – Esforços ativos e reativos.

Os esforços ativos, representados por $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}, \vec{E}$, ao serem aplicados em S_f caminham pela estrutura até as regiões de vínculo, indicada por S_u , sendo equilibradas pelas reações de apoio, representadas por $\vec{R}_1, \vec{M}_1$ e $\vec{R}_2, \vec{M}_2$.

No sólido da Figura 2.2.1, os esforços ativos, representados por $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}, \vec{D}$ e $\vec{E}$, são aplicados na região S_f , enquanto que na região S_u são especificados deslocamentos, mais conhecidos como recalques de apoio.

Em resposta a essas duas ações, surgem deslocamentos na região S_f e reações de apoio na região S_u .

A região S_f é denominada de região de esforços especificados, na qual se procuram determinar os deslocamentos; a região S_u é denominada de região de deslocamentos especificados ou região de vínculo, na qual se procuram determinar as reações de apoio.

2.2.1 O conceito de tensão

A distribuição de esforços no interior de V pode ser determinada efetuando-se cortes em V , conforme indicado na Figura 2.2.2, adaptada de Lindenberg Neto (1998).

Figura 2.2.2 – Corte

Tomando-se um ponto $P \in V$ e um plano π passando por P , é possível cortar o sólido em duas partes, V_I e V_{II} , conforme indicado na Figura 2.2.3, adaptada de Lindenberg Neto (1998).

Figura 2.2.3 – Partes do sólido.

Para que as partes V_I e V_{II} fiquem em equilíbrio, é preciso existir esforços internos que impeçam que uma parte se desloque em relação à outra. Na Figura 2.2.3, $\vec{f}_{I,II}$ é a ação que a parte V_{II} exerce sobre V_I e, da mesma forma, $\vec{f}_{II,I}$ é a ação que a parte V_I exerce sobre V_{II} .

Pelo princípio da ação e reação:

$$\vec{f}_{II,I} = -\vec{f}_{I,II} \quad (2.2.1)$$

Em consequência de (2.2.1), é nula a resultante das forças que atuam na região entre as partes determinadas pelo plano π .

$$\vec{f}_{II,I} + \vec{f}_{I,II} = \vec{0}$$

A parte **I** do corpo é representada na Figura 2.2.4, adaptada de Lindenberg Neto (1998). A normal unitária externa ao plano de corte está representada por $\vec{n}$.

Figura 2.2.4 – Tensões.

Nas vizinhanças de $\mathbf{P}$ foi delimitada uma superfície $\Delta\mathbf{A}$, na qual se determinou $\Delta\vec{F}$, que é a resultante das forças de superfície $\vec{f}_{I,II}$ atuantes em $\Delta\mathbf{A}$.

$$\Delta\vec{F} = \iint_{\Delta\mathbf{A}} \vec{f}_{I,II} \cdot d\mathbf{S} \quad (2.2.2)$$

A relação $\frac{\Delta\vec{F}}{\Delta\mathbf{A}}$ é a força resultante por unidade de área que atua ao longo da superfície $\Delta\mathbf{A}$. Se $\Delta\mathbf{A}$ for tomado suficientemente pequeno, $\Delta\mathbf{A}$ tenderá a $\mathbf{P}$.

A tensão atuante em $\mathbf{P}$, no plano de normal externa $\vec{n}$ é definida por:

$$\vec{r} = \lim_{\Delta\mathbf{A} \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{F}}{\Delta\mathbf{A}} \quad (2.2.3)$$

A tensão $\vec{r}$, atuante no plano π , pode ser decomposta em duas parcelas, conforme a Figura 2.2.5. A tensão normal é ortogonal a π , atuando na direção de $\vec{n}$, A tensão de cisalhamento está no plano π , perpendicular a $\vec{n}$.

Figura 2.2.5 – Tensão normal e de cisalhamento.

Da figura observa-se que:

$$\vec{r} = \vec{s} + \vec{t} \quad \text{ou} \quad \begin{cases} s = \|\vec{r}\| \cdot \cos a \\ t = \|\vec{r}\| \cdot \sin a \end{cases} \quad (2.2.4)$$

Aproveitando-se que $\|\vec{n}\| = 1$, pode-se escrever que:

$$s = \|\vec{r}\| \cdot \cos a \cdot \|\vec{n}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \cos a \quad \Rightarrow \quad s = \vec{r} \cdot \vec{n} \quad (2.2.5)$$

$$t = \|\vec{r}\| \cdot \sin a \cdot \|\vec{n}\| = \|\vec{r}\| \cdot \|\vec{n}\| \cdot \sin a \quad \Rightarrow \quad |t| = \|\vec{r} \times \vec{n}\| \quad (2.2.6)$$

Vetorialmente:

$$\vec{s} = (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot \vec{n} \quad \vec{t} = \vec{n} \times (\vec{r} \times \vec{n}) \quad (2.2.7)$$

2.2.2 Teorema de Cauchy. Estado de tensão num ponto

Na Figura 2.2.6 , é representada uma parte infinitesimal do sólido da Figura 2.1.1, um paralelepípedo infinitesimal de volume $dV = dx \cdot dy \cdot dz$, centrado em $\mathbf{P} \in \mathbf{V}$.

Figura 2.2.6 – Tensões atuantes.

Na face **EFGH**, de normal $\hat{e}_z$, atua uma tensão $\vec{r}_z$. Na face **ABFE**, de normal $\hat{e}_x$, atua uma tensão $\vec{r}_x$, e na face **BCGF**, de normal $\hat{e}_y$, atua uma tensão $\vec{r}_y$. Cada uma dessas tensões pode ser decomposta em componentes ortogonais conforme a Figura 2.2.7.

Figura 2.2.7 – Decomposição das tensões.

Vetorialmente as tensões $\vec{r}_x$, $\vec{r}_y$ e $\vec{r}_z$ podem ser calculadas conforme as expressões (2.2.8).

$$\begin{aligned}\vec{r}_x &= s_{xx} \cdot \hat{e}_x + t_{xy} \cdot \hat{e}_y + t_{xz} \cdot \hat{e}_z \\ \vec{r}_y &= t_{yx} \cdot \hat{e}_x + s_{yy} \cdot \hat{e}_y + t_{yz} \cdot \hat{e}_z \\ \vec{r}_z &= t_{zx} \cdot \hat{e}_x + t_{zy} \cdot \hat{e}_y + s_{zz} \cdot \hat{e}_z\end{aligned}\tag{2.2.8}$$

Suas componentes normais são apresentadas em (2.2.9).

$$\begin{aligned}(\vec{r}_x \cdot \hat{e}_x) &= s_x \\ (\vec{r}_y \cdot \hat{e}_y) &= s_y \\ (\vec{r}_z \cdot \hat{e}_z) &= s_z\end{aligned}\tag{2.2.9}$$

E suas componentes de cisalhamento, em (2.2.10).

$$\begin{aligned}\|\vec{r}_x \times \hat{e}_x\| &= \sqrt{t_{xy}^2 + t_{xz}^2} \\ \|\vec{r}_y \times \hat{e}_y\| &= \sqrt{t_{yx}^2 + t_{yz}^2} \\ \|\vec{r}_z \times \hat{e}_z\| &= \sqrt{t_{zx}^2 + t_{zy}^2}\end{aligned}\tag{2.2.10}$$

Para calcular a tensão $\vec{r}$ atuante em $\mathbf{P} \in \mathbf{V}$, segundo um plano de normal unitária $\vec{n}$ qualquer, faz-se uso do tetraedro infinitesimal da Figura 2.2.8, isolado de um sólido em equilíbrio.

Figura 2.2.8 – Tetraedro em equilíbrio.

O volume do tetraedro **DABC** pode ser calculado de várias maneiras:

$$dV = \frac{1}{3} \cdot \frac{dx \cdot dy}{2} \cdot dz = \frac{1}{6} \cdot dA_z \cdot dh_z \quad (2.2.11)$$

$$dV = \frac{1}{3} \cdot \frac{dy \cdot dz}{2} \cdot dx = \frac{1}{6} \cdot dA_x \cdot dh_x \quad (2.2.12)$$

$$dV = \frac{1}{3} \cdot \frac{dz \cdot dx}{2} \cdot dy = \frac{1}{6} \cdot dA_y \cdot dh_y \quad (2.2.13)$$

Na Figura 2.2.8 e na expressão (2.2.11), G_x é o baricentro da face de área dA_x e dh_x é a altura do tetraedro relativa esta face. Conceitos análogos se aplicam às outras faces. O volume do tetraedro pode também ser calculado por:

$$dV = \frac{1}{6} \cdot dA \cdot dh \quad (2.2.14)$$

Na expressão (2.2.14), dA é a área da face inclinada **ABC**, G é o seu baricentro e h é a altura do tetraedro relativa à **ABC**. Mazzili e André (2000) demonstram algumas propriedades geométricas do tetraedro:

$$dh_x = \frac{dh}{n_x} \quad dh_y = \frac{dh}{n_y} \quad dh_z = \frac{dh}{n_z} \quad (2.2.15)$$

Onde n_x , n_y e n_z são as componente de $\vec{n}$ nas direções de $\hat{e}_x$, $\hat{e}_y$ e $\hat{e}_z$.

$$\vec{n} = n_x \cdot \hat{e}_x + n_y \cdot \hat{e}_y + n_z \cdot \hat{e}_z \equiv (n_x, n_y, n_z) \quad (2.2.16)$$

O vetor normal é unitário. Logo:

$$\|\vec{n}\| = \sqrt{n_x^2 + n_y^2 + n_z^2} = 1 \quad (2.2.17)$$

Substituindo (2.2.15) em (2.2.11), (2.2.12), (2.2.13) e (2.2.14), conclui-se que:

$$dA \cdot dh = dA_z \cdot \left(\frac{dh}{n_z} \right) = dA_x \cdot \left(\frac{dh}{n_x} \right) = dA_y \cdot \left(\frac{dh}{n_y} \right)$$

$$dA_x = n_x \cdot dA \quad dA_y = n_y \cdot dA \quad dA_z = n_z \cdot dA \quad (2.2.18)$$

Fazendo o equilíbrio vetorial de forças resulta que:

$$\vec{r} \cdot dA + (-\vec{r}_x \cdot dA_x) + (-\vec{r}_y \cdot dA_y) + (-\vec{r}_z \cdot dA_z) + \vec{f}_V \cdot dV = \vec{0} \quad (2.2.19)$$

Na equação (2.2.19), $\vec{f}_V$ são as forças de volume atuantes no tetraedro da Figura 2.2.8. Substituindo os resultados (2.2.18) em (2.2.19), resulta:

$$\vec{r} \cdot dA + (-\vec{r}_x \cdot dA \cdot n_x) + (-\vec{r}_y \cdot dA \cdot n_y) + (-\vec{r}_z \cdot dA \cdot n_z) + \vec{f}_V \cdot dA \cdot dh = \vec{0}$$

Dividindo a expressão anterior por dA , obtém-se.

$$\vec{r} - \vec{r}_x \cdot n_x - \vec{r}_y \cdot n_y - \vec{r}_z \cdot n_z + \vec{f}_V \cdot dh = \vec{0}$$

No limite em que $dV \rightarrow 0$, o tetraedro **DABC** se aproxima do ponto **D**, e então a altura do tetraedro $dh \rightarrow 0$. Finalmente:

$$\vec{r} = n_x \cdot \vec{r}_x + n_y \cdot \vec{r}_y + n_z \cdot \vec{r}_z \quad (2.2.20)$$

Substituindo-se (2.2.8) em (2.2.20):

$$\begin{aligned}
\vec{r} &= n_x \cdot (\mathbf{s}_{xx} \cdot \hat{e}_x + \mathbf{t}_{xy} \cdot \hat{e}_y + \mathbf{t}_{xz} \cdot \hat{e}_z) \\
&+ n_y \cdot (\mathbf{t}_{yx} \cdot \hat{e}_x + \mathbf{s}_{yy} \cdot \hat{e}_y + \mathbf{t}_{yz} \cdot \hat{e}_z) \\
&+ n_z \cdot (\mathbf{t}_{zx} \cdot \hat{e}_x + \mathbf{t}_{zy} \cdot \hat{e}_y + \mathbf{s}_{zz} \cdot \hat{e}_z) \\
\vec{r} &= (\mathbf{s}_{xx} \cdot n_x + \mathbf{t}_{yx} \cdot n_y + \mathbf{t}_{zx} \cdot n_z) \cdot \hat{e}_x \\
&+ (\mathbf{t}_{xy} \cdot n_x + \mathbf{s}_{yy} \cdot n_y + \mathbf{t}_{zy} \cdot n_z) \cdot \hat{e}_y \\
&+ (\mathbf{t}_{xz} \cdot n_x + \mathbf{t}_{yz} \cdot n_y + \mathbf{s}_{zz} \cdot n_z) \cdot \hat{e}_z
\end{aligned}$$

As coordenadas de $\vec{r}$ na base $(\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z)$ valem:

$$\begin{aligned}
r_x &= \mathbf{s}_{xx} \cdot n_x + \mathbf{t}_{yx} \cdot n_y + \mathbf{t}_{zx} \cdot n_z \\
r_y &= \mathbf{t}_{xy} \cdot n_x + \mathbf{s}_{yy} \cdot n_y + \mathbf{t}_{zy} \cdot n_z \\
r_z &= \mathbf{t}_{xz} \cdot n_x + \mathbf{t}_{yz} \cdot n_y + \mathbf{s}_{zz} \cdot n_z
\end{aligned} \tag{2.2.21}$$

Em notação matricial:

$$\begin{Bmatrix} r_x \\ r_y \\ r_z \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{xx} & \mathbf{t}_{yx} & \mathbf{t}_{zx} \\ \mathbf{t}_{xy} & \mathbf{s}_{yy} & \mathbf{t}_{zy} \\ \mathbf{t}_{xz} & \mathbf{t}_{yz} & \mathbf{s}_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} n_x \\ n_y \\ n_z \end{Bmatrix} \tag{2.2.22}$$

A equação (2.2.22) pode ser escrita de forma mais compacta:

$$\{\vec{r}\} = [\mathbf{T}] \cdot \{\vec{n}\} \quad \text{ou} \quad \vec{r} = \mathbf{T}(\vec{n}) \tag{2.2.23}$$

Na expressão (2.2.23), $\{\vec{r}\}$ e $\{\vec{n}\}$ representam, respectivamente, as coordenadas dos vetores $\vec{r}$ e $\vec{n}$. Define-se um operador linear $\mathbf{T}$, denominado tensor das tensões de Cauchy. A matriz de $\mathbf{T}$ na base $\{\hat{e}_x, \hat{e}_y, \hat{e}_z\}$, representada por $[\mathbf{T}]$ vale:

$$[\mathbf{T}] = \begin{pmatrix} \mathbf{s}_{xx} & \mathbf{t}_{yx} & \mathbf{t}_{zx} \\ \mathbf{t}_{xy} & \mathbf{s}_{yy} & \mathbf{t}_{zy} \\ \mathbf{t}_{xz} & \mathbf{t}_{yz} & \mathbf{s}_{zz} \end{pmatrix} \tag{2.2.24}$$

As expressões (2.2.22) e (2.2.23) são equivalentes e constituem o teorema de Cauchy (GURTIN, 1981), que permite calcular a tensão atuante em um ponto $\mathbf{P} \in \mathbf{V}$, segundo um plano de normal unitária $\vec{n}$.

2.2.3 Equações diferenciais de Equilíbrio

As forças de volume $\vec{f}_v$ podem ser decompostas segundo três componentes ortogonais X , Y e Z conforme a Figura 2.2.9.

Figura 2.2.9 – Forças de volume.

Para que o sólido se mantenha em equilíbrio, ocorrem acréscimos de tensões nas faces do paralelepípedo, conforme a Figura 2.2.10.

Figura 2.2.10 – Acréscimo de tensões.

O equilíbrio de forças nas direções de x , y e z fornece, respectivamente, as equações (2.2.25), (2.2.26) e (2.2.27):

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{s}_{xx} + \frac{\partial \mathbf{s}_{xx}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dydz - (\mathbf{s}_{xx}) \cdot dydz + \\ & \left(\mathbf{t}_{yx} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yx}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dzdx - (\mathbf{t}_{yx}) \cdot dzdx + \\ & \left(\mathbf{t}_{zx} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zx}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dxdy - (\mathbf{t}_{zx}) \cdot dxdy + X \cdot dxdydz = 0 \end{aligned} \quad (2.2.25)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{t}_{xy} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xy}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dydz - (\mathbf{t}_{xy}) \cdot dydz + \\ & \left(\mathbf{s}_{yy} + \frac{\partial \mathbf{s}_{yy}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dzdx - (\mathbf{s}_{yy}) \cdot dzdx + \\ & \left(\mathbf{t}_{zy} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zy}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dxdy - (\mathbf{t}_{zy}) \cdot dxdy + Y \cdot dxdydz = 0 \end{aligned} \quad (2.2.26)$$

$$\begin{aligned} & \left(\mathbf{t}_{xz} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xz}}{\partial x} \cdot dx \right) \cdot dydz - (\mathbf{t}_{xz}) \cdot dydz + \\ & \left(\mathbf{t}_{yz} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yz}}{\partial y} \cdot dy \right) \cdot dzdx - (\mathbf{t}_{yz}) \cdot dzdx + \\ & \left(\mathbf{s}_{zz} + \frac{\partial \mathbf{s}_{zz}}{\partial z} \cdot dz \right) \cdot dxdy - (\mathbf{s}_{zz}) \cdot dxdy + Z \cdot dxdydz = 0 \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

Ao agrupar os termos, resulta:

$$\frac{\partial \mathbf{s}_{xx}}{\partial x} \cdot dx \cdot dydz + \frac{\partial \mathbf{t}_{yx}}{\partial y} \cdot dy \cdot dzdx + \frac{\partial \mathbf{t}_{zx}}{\partial z} \cdot dz \cdot dxdy + X \cdot dxdydz = 0 \quad (2.2.28)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{xy}}{\partial x} \cdot dx \cdot dydz + \frac{\partial \mathbf{s}_{yy}}{\partial y} \cdot dy \cdot dzdx + \frac{\partial \mathbf{t}_{zy}}{\partial z} \cdot dz \cdot dxdy + Y \cdot dxdydz = 0 \quad (2.2.29)$$

$$\frac{\partial \mathbf{t}_{xz}}{\partial x} \cdot dx \cdot dydz + \frac{\partial \mathbf{t}_{yz}}{\partial y} \cdot dy \cdot dzdx + \frac{\partial \mathbf{s}_{zz}}{\partial z} \cdot dz \cdot dxdy + Z \cdot dxdydz = 0 \quad (2.2.30)$$

As equações (2.2.28), (2.2.29) e (2.2.30) podem ser divididas por $dV = dxdydz$, resultando nas equações diferenciais de equilíbrio (2.2.31).

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{s}_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zx}}{\partial z} + X &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{t}_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{s}_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zy}}{\partial z} + Y &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{t}_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{s}_{zz}}{\partial z} + Z &= 0
\end{aligned} \tag{2.2.31}$$

2.2.4 Equilíbrio de Momentos

É preciso garantir ainda o equilíbrio de momentos em relação a um ponto qualquer do paralelepípedo infinitesimal (WANG, 1953) da Figura 2.2.10.

O equilíbrio de momentos em relação ao centro $\mathbf{P}$, em torno de cada eixo x , y e z fornece, respectivamente, as equações (2.2.32), (2.2.33) e (2.2.34):

$$\begin{aligned}
M_x &= (\mathbf{t}_{yz}) \cdot dzdx \cdot \left(\frac{dy}{2}\right) + \left(\mathbf{t}_{yz} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yz}}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dzdx \cdot \left(\frac{dy}{2}\right) \\
&\quad - (\mathbf{t}_{zy}) \cdot dxdy \cdot \left(\frac{dz}{2}\right) - \left(\mathbf{t}_{zy} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zy}}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dxdy \cdot \left(\frac{dz}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.2.32}$$

$$\begin{aligned}
M_y &= (\mathbf{t}_{zx}) \cdot dydz \cdot \left(\frac{dx}{2}\right) + \left(\mathbf{t}_{zx} + \frac{\partial \mathbf{t}_{zx}}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dydz \cdot \left(\frac{dx}{2}\right) \\
&\quad - (\mathbf{t}_{xz}) \cdot dydz \cdot \left(\frac{dy}{2}\right) - \left(\mathbf{t}_{xz} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xz}}{\partial z} \cdot dz\right) \cdot dydz \cdot \left(\frac{dy}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.2.33}$$

$$\begin{aligned}
M_z &= (\mathbf{t}_{xy}) \cdot dxdy \cdot \left(\frac{dz}{2}\right) + \left(\mathbf{t}_{xy} + \frac{\partial \mathbf{t}_{xy}}{\partial y} \cdot dy\right) \cdot dxdy \cdot \left(\frac{dz}{2}\right) \\
&\quad - (\mathbf{t}_{yx}) \cdot dxdy \cdot \left(\frac{dz}{2}\right) - \left(\mathbf{t}_{yx} + \frac{\partial \mathbf{t}_{yx}}{\partial x} \cdot dx\right) \cdot dxdy \cdot \left(\frac{dz}{2}\right) \\
&= 0
\end{aligned} \tag{2.2.34}$$

Ao dividir as equações por $dV = dxdydz$, obtém-se:

$$t_{yz} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} - t_{zy} - \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} = 0 \quad (2.2.35)$$

$$t_{zx} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} \cdot \frac{dz}{2} - t_{xz} - \frac{\partial t_{xz}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} = 0 \quad (2.2.36)$$

$$t_{xy} + \frac{\partial t_{xy}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{2} - t_{yx} - \frac{\partial t_{yx}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{2} = 0 \quad (2.2.37)$$

No limite em que $dV = dxdydz \rightarrow 0$, as equações se resumem a:

$$t_{yz} = t_{zy} \quad t_{zx} = t_{xz} \quad t_{xy} = t_{yx} \quad (2.2.38)$$

As equações (2.2.38) mostram que as tensões de cisalhamento atuantes em faces ortogonais são iguais. Ao observar as faces **EFBA** e **EFGH** do paralelepípedo da Figura 2.2.7, verifica-se que as componentes de cisalhamento t_{xz} e t_{zx} têm sentido de aproximação (ou de afastamento) em relação à aresta $\overrightarrow{AE}$. Finalmente, de (2.2.38) decorre a simetria do tensor das tensões **T** apresentado em (2.2.24) (BUCALEM; MAZZILLI, 2002).

2.3 EQUAÇÕES CONSTITUTIVAS. LEI DE HOOKE

As equações constitutivas relacionam as tensões atuantes em um corpo às deformações delas decorrentes. Pelas hipóteses da Teoria da Elasticidade, os materiais serão considerados elástico-lineares, isotrópicos e homogêneos. As componentes de tensão e deformação são relacionadas linearmente pela lei de Hooke generalizada.

A Figura 2.3.1 representa um paralelepípedo submetido a tensões normais s_x uniformemente distribuídas nas faces perpendiculares a $\hat{e}_x$, como num ensaio de tração.

Figura 2.3.1 – Ensaio de Tração.

Pela lei de Hooke, o alongamento linear na direção de x é dado por:

$$e_x = \frac{s_x}{E} \quad (2.3.1)$$

Nas direções ortogonais, ocorrem encurtamentos dados por:

$$e_y = e_z = -n \cdot \frac{s_x}{E} \quad (2.3.2)$$

Nas expressões (2.3.1) e (2.3.2), E é o módulo de elasticidade linear e n o coeficiente de Poisson do material. Na Figura 2.1.2 foi apresentado um campo de deformações decorrentes de um ensaio de tração.

As mesmas relações podem ser determinadas para ensaios de tração nas outras direções, utilizando permutação cíclica dos índices x, y, z .

Devido à hipótese de linearidade entre tensões e deformações² (PIMENTA, 2002), os efeitos podem ser combinados por superposição (LINDENBERG NETO, 1998). Dessa forma, chega-se a:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_x &= \frac{1}{E} [\mathbf{s}_x - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_y + \mathbf{s}_z)] \\ \mathbf{e}_y &= \frac{1}{E} [\mathbf{s}_y - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_z + \mathbf{s}_x)] \\ \mathbf{e}_z &= \frac{1}{E} [\mathbf{s}_z - \mathbf{n} \cdot (\mathbf{s}_x + \mathbf{s}_y)] \end{aligned} \quad (2.3.3)$$

Na Figura 2.3.2 é apresentado um paralelepípedo submetido a um ensaio de cisalhamento simples.

Figura 2.3.2 – Ensaio de Cisalhamento.

Pela Lei de Hooke vale:

$$\mathbf{g}_{xy} = \frac{1}{G} \mathbf{t}_{xy} \quad \mathbf{g}_{yz} = \frac{1}{G} \mathbf{t}_{yz} \quad \mathbf{g}_{zx} = \frac{1}{G} \mathbf{t}_{zx} \quad (2.3.4)$$

² Esta hipótese é conhecida como linearidade física.

Na expressão (2.3.4), G é o módulo de elasticidade transversal do material. Ele se relaciona com o módulo de elasticidade linear e com o coeficiente de Poisson por:

$$G = \frac{E}{2 \cdot (1 + \nu)} \quad (2.3.5)$$

As equações (2.3.3) e (2.3.4) fornecem as componentes de deformação em função das componentes de tensão (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970). Para obter as componentes de tensão em função das componentes de deformação, basta somar as equações (2.3.3):

$$\begin{aligned} e_x + e_y + e_z &= \frac{1}{E} \cdot \left[s_x - \nu \cdot (s_y + s_z) + s_y - \nu \cdot (s_z + s_x) + s_z - \nu \cdot (s_x + s_y) \right] \\ e_x + e_y + e_z &= \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot (s_x + s_y + s_z) \end{aligned} \quad (2.3.6)$$

A deformação volúmica é definida por (SOARES, 2002):

$$e_v = e_x + e_y + e_z \quad (2.3.7)$$

A soma das tensões normais pode ser denotada por:

$$s_x + s_y + s_z = J \quad (2.3.8)$$

A expressão (2.3.6) pode ser reescrita de forma mais compacta utilizando a notação de (2.3.7) e (2.3.8) (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970):

$$e_v = \frac{1 - 2\nu}{E} \cdot J$$

Resolvendo as equações (2.3.3) nas incógnitas s_x , s_y e s_z , usando a notação (2.3.7), obtém-se:

$$\begin{aligned} s_x &= \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \cdot e_v + \frac{E}{1 + \nu} \cdot e_x \\ s_y &= \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \cdot e_v + \frac{E}{1 + \nu} \cdot e_y \\ s_z &= \frac{\nu \cdot E}{(1 + \nu) \cdot (1 - 2\nu)} \cdot e_v + \frac{E}{1 + \nu} \cdot e_z \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

A constante de Lamè é definida por (SOARES, 2002):

$$I = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{E}}{(1+\mathbf{n}) \cdot (1-2\mathbf{n})} \quad (2.3.10)$$

A expressão (2.3.9) pode ser reescrita de forma mais compacta utilizando a notação de (2.3.10) (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970) e aproveitando (2.3.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= I \cdot \mathbf{e}_x + 2G \cdot \mathbf{e}_x \\ \mathbf{s}_y &= I \cdot \mathbf{e}_y + 2G \cdot \mathbf{e}_y \\ \mathbf{s}_z &= I \cdot \mathbf{e}_z + 2G \cdot \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (2.3.11)$$

Por outro lado, pode-se substituir (2.3.7) expressão (2.3.9), de modo a retomar as componentes de deformação linear:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}_x &= \frac{E \cdot (1-u)}{(1+u) \cdot (1-2u)} \left[\mathbf{e}_x + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_y + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right] \\ \mathbf{s}_y &= \frac{E \cdot (1-u)}{(1+u) \cdot (1-2u)} \left[\mathbf{e}_y + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_z + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_x \right] \\ \mathbf{s}_z &= \frac{E \cdot (1-u)}{(1+u) \cdot (1-2u)} \left[\mathbf{e}_z + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_x + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_y \right] \end{aligned} \quad (2.3.12)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{t}_{xy} &= \frac{E}{2 \cdot (1+u)} \cdot \mathbf{g}_{xy} \\ \mathbf{t}_{yz} &= \frac{E}{2 \cdot (1+u)} \cdot \mathbf{g}_{yz} \\ \mathbf{t}_{zx} &= \frac{E}{2 \cdot (1+u)} \cdot \mathbf{g}_{zx} \end{aligned} \quad (2.3.13)$$

As equações (2.3.12) e (2.3.13) fornecem as componentes de tensão em função das componentes de deformação.

3 TORÇÃO UNIFORME DE SAINT-VENANT

3.1 INTRODUÇÃO

Segundo Timoshenko e Goodier (1970), o problema da torção foi estudado primeiramente por Charles Augustin Coulomb, em 1784 e depois por Louis Marie Navier, em 1864. Utilizando o método semi-inverso para a solução de problemas da elasticidade linear aplicado a função de deslocamentos, Saint-Venant encontrou em 1855 a solução correta para a torção de barras prismáticas corrigindo as hipóteses anteriormente adotadas que levavam a resultados errôneos. Em 1903, Ludwig Prandtl usou uma função de tensão, obtendo resultados equivalentes.

A formulação do problema da torção foi desenvolvida a partir do método semi-inverso de Saint-Venant, efetuando hipóteses sobre o campo de deslocamentos; as tensões foram determinadas utilizando-se as equações da elasticidade linear.

3.2 TORÇÃO DE BARRAS PRISMÁTICAS. PROBLEMA DE NEUMANN

Na Figura 3.2.1, adaptada de Ishitani e Bittencourt (2000), é mostrada uma barra de seção quadrangular submetida a um conjugado $\vec{M}_t = M_t \cdot \hat{e}_z$ aplicado em uma de suas extremidades.

Figura 3.2.1 – Torção de barra prismática com base retangular.

Sob ação de $\vec{M}_t$, a geratriz do cilindro se deforma como uma espiral (BORESI; CHONG, 1987, p.329). Para equilibrar o momento de torção $\vec{M}_t$, surgem, nas seções transversais, tensões de cisalhamento, sempre tangentes ao contorno (DIOGO, 2000).

Pela teoria linear da elasticidade, apresentada no Capítulo 2, existe linearidade geométrica, ou seja, os deslocamentos envolvidos são suficientemente pequenos para que as tensões possam ser calculadas na situação inicial de deformação da barra.

Pela linearidade geométrica, pode-se considerar que as fibras radiais de uma seção transversal permanecem retas e com comprimento constante após a aplicação da torção. Portanto, a rotação de cada seção ocorre em torno de z como corpo rígido, com intensidade proporcional à distância entre esta seção e à seção S_0 da Figura 3.2.1 (BORESI; CHONG, 1987).

As seções que eram inicialmente planas ficam encurvadas, ou sejam, empenam, e aparecem deslocamentos na direção do eixo da barra, invalidando a hipótese de Navier (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970). Na torção de Saint-Venant

(ISHITANI; BITTENCOURT, 2000), o empenamento ocorre livremente, e não varia entre seções transversais distintas.

No entanto, isto não ocorre na prática, pois os elementos estruturais possuem vinculações que restringem os deslocamentos (ISHITANI; BITTENCOURT, 2000). A tendência de provocar empenamentos diferentes em seções vizinhas gera uma série de interferências recíprocas (LANGENDONCK, 1960b). Neste caso, ocorre torção não-uniforme.

Se a barra da Figura 3.2.1 for engastada em uma das extremidades, os deslocamentos longitudinais serão ali bloqueados, e aparecerão tensões normais s_x à seção transversal, provocando, por sua vez, alterações locais no campo de deformações e de tensões.

Pelo princípio de Saint-Venant (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970), válido para seções maciças, esta mudança de distribuição de tensões ocorreria apenas nas regiões mais próximas às interferências. Segundo Boresi e Chong (1987), o princípio de Saint-Venant estabelece que dois sistemas de forças estaticamente equivalentes atuantes sucessivamente numa região de um corpo produzem as mesmas tensões e deslocamentos em um ponto do corpo suficientemente distante do local em que atuam.

Por exemplo, se a barra da Figura 3.2.1 estiver engastada em S_0 , ocorrerá torção não-uniforme em S_0 e nas suas redondezas. Em regiões mais distantes, como a seção S_ℓ ou outra seção intermediária, pode-se assumir que a torção seja uniforme. Segundo Timoshenko e Goodier (1970) a teoria da torção uniforme fornece resultados suficientemente precisos para que possa ser utilizada nestas regiões.

A solução do problema de torção uniforme em barras prismáticas é feita pelo método semi-inverso: as soluções são procuradas fazendo hipóteses sobre as componentes de deslocamentos. Se as equações da elasticidade forem satisfeitas, então a solução do problema terá sido encontrada (BORESI; CHONG, 1987).

3.2.1 Deslocamentos Transversais

Os deslocamentos de fibras radiais $\overline{OP}$ pertencentes a uma seção qualquer da barra são apresentados na Figura 3.2.2.

Figura 3.2.2 – Deslocamentos transversais.

Conforme se observa na Figura 3.2.2, quando P se desloca para P^* , as fibras radiais $\overline{OP}$ giram de um ângulo de torção Θ em torno do eixo z , denominado eixo de rotação. Segundo Langendonck, (1960a), “a intersecção deste eixo com cada seção transversal determinará o centro de rotação dessa seção”, representado pelo ponto O .

Como todas as fibras giram uniformemente, então Θ não depende de $\overline{OP}$.

$$\frac{d\Theta}{d(\overline{OP})} = 0$$

Mas as derivadas direcionais podem ser calculadas utilizando produtos escalares (GUIDORIZZI, 2001b):

$$\frac{d\Theta}{d(\overline{OP})} = \nabla \Theta \cdot \overline{OP} = \left[\frac{d\Theta}{dx}, \frac{d\Theta}{dy} \right] \cdot \{x, y\} = \frac{d\Theta}{dx} \cdot x + \frac{d\Theta}{dy} \cdot y$$

Portanto é necessário que:

$$\frac{d\Theta}{dx} \cdot x + \frac{d\Theta}{dy} \cdot y = 0$$

A expressão acima precisa valer para todo $\{x, y\}$ não necessariamente nulo.

Então:

$$\frac{d\Theta}{dx} = 0 \quad \frac{d\Theta}{dy} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Theta = \Theta(z) \quad (3.2.1)$$

Supondo ainda que o ângulo Θ varie linearmente com z .

$$\frac{d\Theta}{dz} = q \quad \Rightarrow \quad \Theta = q \cdot z + \Theta_0$$

A origem dos eixos pode ser escolhida de modo que $\Theta_0 = 0$. Assim,

$$\Theta = q \cdot z \quad (3.2.2)$$

Na expressão (3.2.2), q representa a rotação por unidade de comprimento do cilindro. Como q é constante, então a torção é denominada uniforme (PIMENTA, 2002).

Observando a Figura 3.2.2 é possível determinar as coordenadas dos pontos

P e **P***:

$$\begin{aligned} x &= r \cdot \cos a & x^* &= r \cdot \cos(\Theta + a) \\ y &= r \cdot \sin a & y^* &= r \cdot \sin(\Theta + a) \end{aligned}$$

Os deslocamentos correspondentes valem:

$$\begin{aligned} u &= x^* - x = r \cdot [\cos(\Theta + a) - \cos a] = r \cdot [\cos \Theta \cdot \cos a - \sin \Theta \cdot \sin a - \cos a] \\ v &= y^* - y = r \cdot [\sin(\Theta + a) - \sin a] = r \cdot [\sin \Theta \cdot \cos a - \cos \Theta \cdot \sin a - \sin a] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= r \cdot \cos a \cdot [\cos \Theta - 1] - r \cdot \sin a \cdot \sin \Theta \\ v &= r \cdot \sin a \cdot [\cos \Theta - 1] + r \cdot \cos a \cdot \sin \Theta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u &= x \cdot [\cos \Theta - 1] - y \cdot \sin \Theta \\ v &= y \cdot [\cos \Theta - 1] + x \cdot \sin \Theta \end{aligned} \quad (3.2.3)$$

As funções trigonométricas podem ser escritas em séries de Taylor (GUIDORIZZI, 2002b).

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \Theta &= \Theta - \frac{\Theta^3}{3!} + \frac{\Theta^5}{5!} - \frac{\Theta^7}{7!} + \dots \\ \cos \Theta &= 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \frac{\Theta^4}{4!} - \frac{\Theta^6}{6!} + \dots\end{aligned}$$

Como, por hipótese da teoria linear da elasticidade os deslocamentos são suficientemente pequenos, podem-se utilizar as aproximações (lineares) de primeira ordem.

$$\begin{aligned}\operatorname{sen} \Theta &= \Theta \\ \cos \Theta &= 1\end{aligned}\tag{3.2.4}$$

Substituindo (3.2.4) em (3.2.3) e considerando (3.2.2), obtém-se o campo de deslocamentos de pontos pertencentes à seção transversal:

$$\begin{aligned}u &= -\mathbf{q}z \cdot y \\ v &= \mathbf{q}z \cdot x\end{aligned}\tag{3.2.5}$$

O campo de deslocamentos (3.2.5) permite verificar que a extremidade da barra em que $z = 0$ está fixa no plano $\mathbf{O}_{xy}$, enquanto que a outra extremidade está livre, como sugere Sokolnikoff (1978).

De acordo com (3.2.5), todos os pontos da seção $\mathbf{S}_0$ não se deslocam, enquanto que os deslocamentos máximos ocorrem na seção $\mathbf{S}_\ell$. Isto ocorre quando a seção $\mathbf{S}_0$ está parcialmente engastada³, enquanto $\mathbf{S}_\ell$ está livre, e nela é aplicado o conjugado $\vec{M}_t$. Como consequência, os pontos da seção $\mathbf{S}_\ell$ e da superfície lateral se deslocam conforme (3.2.5), enquanto que na seção $\mathbf{S}_0$ surge um momento reativo de torção $-\vec{M}_t$.

³ O engaste perfeito resulta em torção não-uniforme.

3.2.2 Deslocamento Longitudinal

Baseado em observações experimentais, Saint-Venant verificou que o empenamento não variava entre seções (PIMENTA, 2002).

$$\frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad w = w(x, y) \quad (3.2.6)$$

Ele verificou também que a intensidade do empenamento era proporcional à rotação específica. De acordo com Boresi e Chong (1987), o deslocamento longitudinal pode ser então arbitrariamente tomado como:

$$w(x, y) = \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}(x, y) \quad (3.2.7)$$

Na expressão (3.2.7), $\mathbf{y}(x, y)$ é a função empenamento de Saint-Venant, definida no domínio da seção transversal $\mathbf{A}$ da barra.

O campo de deslocamentos de uma barra prismática submetida à torção uniforme de Saint-Venant é o seguinte:

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{q}_z \cdot y \\ v &= \mathbf{q}_z \cdot x \\ w &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}(x, y) \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

O método semi-inverso consiste em determinar como deve ser a função $\mathbf{y}(x, y)$ para que as equações da elasticidade sejam satisfeitas.

3.2.3 Deformações e Tensões

As deformações são calculadas derivando o campo de deslocamentos (3.2.8) segundo as equações (2.1.7) e (2.1.10):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{e}_x &= \frac{\partial u}{\partial x} & \mathbf{e}_y &= \frac{\partial v}{\partial y} & \mathbf{e}_z &= \frac{\partial w}{\partial z} \\
 \mathbf{g}_{xy} &= \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} & \mathbf{g}_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} & \mathbf{g}_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \\
 \mathbf{e}_x &= 0 & \mathbf{e}_y &= 0 & \mathbf{e}_z &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2.9}$$

$$\mathbf{g}_{xy} = 0 \quad \mathbf{g}_{yz} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \quad \mathbf{g}_{zx} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \tag{3.2.10}$$

As tensões são calculadas utilizando a Lei de Hooke (2.3.12) e (2.3.13)

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s}_x &= \frac{E \cdot (1-u)}{(1+u) \cdot (1-2u)} \left[\mathbf{e}_x + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_y + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_z \right] & \mathbf{t}_{xy} &= \frac{E}{2 \cdot (1+u)} \cdot \mathbf{g}_{xy} \\
 \mathbf{s}_y &= \frac{E \cdot (1-u)}{(1+u) \cdot (1-2u)} \left[\mathbf{e}_y + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_z + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_x \right] & \mathbf{t}_{yz} &= \frac{E}{2 \cdot (1+u)} \cdot \mathbf{g}_{yz} \\
 \mathbf{s}_z &= \frac{E \cdot (1-u)}{(1+u) \cdot (1-2u)} \left[\mathbf{e}_z + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_x + \left(\frac{u}{1-u} \right) \cdot \mathbf{e}_y \right] & \mathbf{t}_{zx} &= \frac{E}{2 \cdot (1+u)} \cdot \mathbf{g}_{zx} \\
 \mathbf{s}_x &= 0 & \mathbf{s}_y &= 0 & \mathbf{s}_z &= 0
 \end{aligned} \tag{3.2.11}$$

$$\mathbf{t}_{xy} = 0 \quad \mathbf{t}_{yz} = G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \quad \mathbf{t}_{zx} = G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \tag{3.2.12}$$

3.2.4 Equações de Equilíbrio

Por hipótese, não existem forças de volume no sólido, ou seja,

$$X = 0 \qquad Y = 0 \qquad Z = 0 \qquad (3.2.13)$$

Substituindo as tensões obtidas em (3.2.12) nas equações diferenciais de equilíbrio (2.2.31), e considerando a hipótese (3.2.13), obtém-se que:

$$\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - \mathbf{y} \right) \right] + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + \mathbf{x} \right) \right] + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - \mathbf{y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + \mathbf{x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z}(0) + 0 = 0$$

$$G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} \right) = 0$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} = 0 \qquad \text{Em } \mathbf{A} . \qquad (3.2.14)$$

A expressão (3.2.14) mostra que a função empenamento $\mathbf{y}(x, y)$ precisa ser harmônica no seu domínio.

3.2.5 Geometria do Contorno da Seção

Na Figura 3.2.3 é apresentada uma seção genérica de uma barra e a normal externa e o versor tangente à superfície lateral num ponto $P \in S$.

Figura 3.2.3 – Contorno da seção transversal.

O traço do contorno S pode ser representado por meio de equações paramétricas:

$$S: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad t_0 \leq t \leq t_F \quad (3.2.15)$$

Na expressão (3.2.15), t é um número real, denominado parâmetro, definido em um intervalo fixado. O comprimento da curva S é calculado por (GUIDORIZZI, 2002a):

$$L(S) = \int_{t_0}^{t_F} \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

A função comprimento de arco é apresentada por Guidorizzi (2002a):

$$s(t) = \int_{t_0}^t \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \quad (3.2.16)$$

A diferencial do comprimento de arco (3.2.16) é obtida usando o teorema fundamental de Cálculo (GUIDORIZZI, 2001a),

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt \quad (3.2.17)$$

Cada ponto $\mathbf{P} \in \mathbf{S}$ da curva possui as seguintes coordenadas:

$$\mathbf{P}(t) = (x(t), y(t))$$

O vetor posição vale:

$$\vec{r}(t) \equiv \{x(t), y(t)\} \quad (3.2.18)$$

O versor $\vec{t}$ é tangente à trajetória de $\mathbf{P}$. Portanto, tem a direção da derivada de $\vec{r}$. Considerando que $\vec{t}$ tem norma unitária:

$$\vec{t} = \frac{\frac{d\vec{r}}{dt}}{\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\|} \quad (3.2.19)$$

Diferenciando (3.2.18), obtém-se:

$$\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} \quad (3.2.20)$$

$$\left\| \frac{d\vec{r}}{dt} \right\| \equiv \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \quad (3.2.21)$$

Efetuada-se as substituições, obtém-se finalmente a expressão (3.2.22):

$$\vec{t} \equiv \left\{ \frac{\frac{dx}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}}, \frac{\frac{dy}{dt}}{\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}} \right\} \quad (3.2.22)$$

De forma mais compacta⁴:

$$\vec{t} \equiv \left\{ \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\} \quad (3.2.22)$$

Pela Figura 3.2.3, observa-se que o versor tangente $\vec{t}$ possui o mesmo sentido de orientação da curva S .

O versor normal $\vec{n}$, a ser determinado, é perpendicular ao versor tangente $\vec{t}$, possui norma unitária, e é orientado externamente à curva. A condição de perpendicularidade é representada na expressão (3.2.23):

$$\vec{t} \cdot \vec{n} = 0 \quad (3.2.23)$$

As componentes escalares do vetor normal $\vec{n}$, a serem determinadas, serão representadas por l e m .

$$\vec{n} \equiv \{l, m\} \quad (3.2.24)$$

Substituindo (3.2.22) e (3.2.24) em (3.2.23), obtém-se uma relação entre l e m :

$$\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \cdot l + \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \cdot m = 0 \quad (3.2.25)$$

A normal é orientada externamente a S . Na Figura 3.2.3, a curva está orientada no sentido anti-horário. Adotando-se uma base ortonormal que respeita o sentido positivo do produto vetorial:

$$\vec{t} \times \vec{n} = (-1) \cdot \hat{e}_z \quad (3.2.26)$$

Se a curva fosse orientada no sentido horário:

$$\vec{t} \times \vec{n} = 1 \cdot \hat{e}_z \quad (3.2.27)$$

As equações (3.2.26) e (3.2.27) mostram que a orientação da curva é muito importante. Neste trabalho é adotada a orientação no sentido anti-horário. Vale, portanto, (3.2.26).

⁴ Usando a notação: $\frac{dx}{dt} = x'$, $\frac{dy}{dt} = y'$

Substituindo (3.2.22) e (3.2.24) em (3.2.26), obtém-se:

$$-\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \cdot l + \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \cdot m = -1 \quad (3.2.28)$$

As equações (3.2.25) e (3.2.28) formam o seguinte sistema linear de equações:

$$\frac{1}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \cdot \begin{bmatrix} x' & y' \\ -y' & x' \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ -1 \end{Bmatrix} \quad (3.2.29)$$

A solução de (3.2.29) é a seguinte:

$$l = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad m = -\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad (3.2.30)$$

Substituindo (3.2.30) em (3.2.24) é possível determinar o versor normal:

$$\vec{n} \equiv \left\{ \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, -\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\} \quad (3.2.31)$$

As componentes escalares do vetor tangencial $\vec{t}$ podem ser representadas conforme a (mesma) notação de (3.2.24).

$$\vec{t} \equiv \{-m, l\} \quad (3.2.32)$$

3.2.6 Geometria da Seção

A seção transversal da barra, representada por $\mathbf{A}$, é delimitada pela curva fechada de contorno $\mathbf{S}$. Para facilitar os cálculos de integral dupla, a região $\mathbf{A}$ pode ser representada efetuando uma mudança de variáveis conveniente:

$$\mathbf{A}: \begin{cases} x = x(\mathbf{r}, t) \\ y = y(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [t_0, t_F] \\ \mathbf{r} \in [\mathbf{r}_0(t), \mathbf{r}_F(t)] \end{matrix} \quad (3.2.33)$$

A mudança de variáveis apresentada em (3.2.33) tem o objetivo de simplificar o cálculo de integrais duplas, necessárias para a determinação de propriedades geométricas da seção transversal.

As fórmulas de mudança de variável na integral dupla são apresentadas por Guidorizzi (2002a). O jacobiano da transformação vale:

$$J(\mathbf{A}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{bmatrix} \quad (3.2.34)$$

Segundo Guidorizzi (2002a), o fator de amplificação da área, representado por $\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)}$, corresponde ao determinante de (3.2.34).

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} = \det(J(\mathbf{A})) = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \mathbf{r}} \cdot \frac{\partial y}{\partial t} - \frac{\partial x}{\partial t} \cdot \frac{\partial y}{\partial \mathbf{r}} = \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \quad (3.2.35)$$

Guidorizzi (2002a) demonstra que o elemento diferencial de área $dA = dx dy$ é calculado utilizando o módulo de (3.2.35):

$$dx dy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \right| \cdot d\mathbf{r} dt \quad (3.2.36)$$

Com as transformações apresentadas, a integral dupla de uma função de duas variáveis $F(x, y)$ no domínio $\mathbf{A}$ pode ser calculada segundo (3.2.37), lembrando de efetuar a correspondência com o domínio $\mathbf{A}_t$ correspondente à transformação (3.2.33).

$$\iint_{\mathbf{A}} F(x, y) \cdot dx dy = \int_{t_0}^{t_F} \left[\int_{r_0(t)}^{r_F(t)} F(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t)) \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \right| d\mathbf{r} \right] \cdot dt \quad (3.2.37)$$

3.2.7 Condições de Contorno na Superfície Lateral

Segundo Timoshenko e Goodier (1970), a superfície lateral da barra em torção está livre de forças externas e, portanto, de tensões. Utilizando o teorema de Cauchy (2.2.22) com as tensões (3.2.12), pode-se escrever que:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & t_{zx} \\ 0 & 0 & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 0 &= 0 \cdot l + 0 \cdot m + t_{zx} \cdot 0 \\ 0 &= 0 \cdot l + 0 \cdot m + t_{zy} \cdot 0 \\ 0 &= t_{xz} \cdot l + t_{yz} \cdot m + 0 \cdot 0 \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

As primeiras duas equações (3.2.38) são automaticamente satisfeitas. A terceira se resume a:

$$t_{zx} \cdot l + t_{zy} \cdot m = 0 \quad (3.2.39)$$

A equação (3.2.39) é equivalente a:

$$t_{zx} \cdot \cos d + t_{zy} \cdot \sin d = 0 \quad (3.2.40)$$

O ângulo d e a decomposição de tensões atuantes em um ponto P do contorno da seção transversal são apresentados na Figura 3.2.4.

Figura 3.2.4 – Decomposição das tensões de cisalhamento.

A Figura 3.2.4 mostra que as tensões são tangenciais ao contorno, pois as componentes normais se anulam, conforme a equação (3.2.39).

Substituindo as tensões (3.2.12) em (3.2.40), obtém-se:

$$G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot l + G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot m = 0$$

A condição de contorno na superfície lateral se resume a (3.2.41):

$$\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot l + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot m = 0 \quad (3.2.41)$$

A equação (3.2.41) pode ser reescrita de uma forma mais conveniente, utilizando produto escalar:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \cdot m = -x \cdot m + y \cdot l$$

$$\left\{ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right\} \cdot \{l, m\} = \{x, y\} \cdot \{-m, l\}$$

Finalmente, considerando (3.2.18) e (3.2.32):

$$\nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad (3.2.42)$$

Ou, de outra forma:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \vec{n}} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad (3.2.43)$$

As expressões (3.2.41), (3.2.42) e (3.2.43) são equivalentes. Portanto, no contorno S:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \vec{n}} = \nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em S.} \quad (3.2.44)$$

3.2.8 Esforços Solicitantes nas Extremidades

Os esforços solicitantes nas extremidades da barra são apresentados por Novozhilov (1961). As forças cortantes Q_x e Q_y e a força normal N_z valem:

$$Q_x = \iint_A t_{zx} \cdot dA \quad Q_y = \iint_A t_{yz} \cdot dA \quad N_z = \iint_A s_z \cdot dA \quad (3.2.45)$$

Os momentos fletores M_x e M_y , os quais atuam em torno dos eixos x e y , valem, respectivamente:

$$M_x = \iint_A s_z \cdot y \cdot dA \quad M_y = -\iint_A s_z \cdot x \cdot dA \quad (3.2.46)$$

O momento M_z (de torção) atua em torno do eixo z , e vale:

$$M_z = \iint_A (t_{zy} \cdot x - t_{zx} \cdot y) \cdot dA \quad (3.2.47)$$

As tensões atuantes nessa região são mostradas na Figura 3.2.5, que permite compreender melhor o significado do momento de torção, apresentado em (3.2.47).

Figura 3.2.5 – Tensões de cisalhamento.

A partir de (3.2.11) decorre imediatamente que:

$$N_z = 0 \quad M_x = 0 \quad M_y = 0 \quad (3.2.48)$$

3.2.9 Forças Cortantes

Os outros esforços solicitantes precisam ser determinados. Substituindo-se (3.2.12) em (3.2.45), obtém-se:

$$Q_x = \iint_A G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot dA \quad (3.2.49)$$

$$Q_y = \iint_A G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot dA \quad (3.2.50)$$

As integrais que aparecem em (3.2.49) e (3.2.50) podem ser calculadas através de algumas transformações matemáticas.

Primeiramente foi calculada (3.2.49). Pela regra de derivação do produto de funções (GUIDORIZZI, 2001a):

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] &= x \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \\ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] - x \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + y \end{aligned} \quad (3.2.51)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] &= x \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} + 0 \\ 0 &= \frac{\partial}{\partial y} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] - x \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} \end{aligned} \quad (3.2.52)$$

A expressão (3.2.49) pode ser melhorada:

$$Q_x = G\mathbf{q} \cdot \iint_A \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y + 0 \right) \cdot dA \quad (3.2.53)$$

Substituindo (3.2.51) e (3.2.52) em (3.2.53), resulta que:

$$\begin{aligned} Q_x &= G\mathbf{q} \cdot \iint_A \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] - x \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + y \right] - y + \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] - x \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} \right] \right\} \cdot dA \\ Q_x &= G\mathbf{q} \cdot \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] + y - y - x \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} \right) \right\} \cdot dA \end{aligned}$$

Como a função empenamento é harmônica, resulta:

$$Q_x = Gq \cdot \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \right] \right\} \cdot dA \quad (3.2.54)$$

A integral que aparece em (3.2.54) é calculada através do teorema de divergência no plano (GUIDORIZZI, 2002a):

$$\iint_A \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \cdot dxdy = \oint_s (P \cdot l + Q \cdot m) \cdot ds \quad (3.2.55)$$

No caso de (3.2.54), o teorema pode ser utilizado com:

$$P = x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \quad Q = x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \quad (3.2.56)$$

Resulta que:

$$\begin{aligned} Q_x &= Gq \cdot \oint_s \left[x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \cdot l + x \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \cdot m \right] \cdot ds \\ Q_x &= Gq \cdot \oint_s x \cdot \left[\left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \cdot l + \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \cdot m \right] \cdot ds \end{aligned} \quad (3.2.57)$$

Mas de acordo com (3.2.41):

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \cdot l + \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \cdot m = 0$$

Portanto a força cortante Q_x é nula.

$$Q_x = 0 \quad (3.2.58)$$

Em seguida, foi calculada (3.2.50). A expressão (3.2.50) pode ser melhorada:

$$Q_y = \iint_A Gq \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x + 0 \right) \cdot dA \quad (3.2.59)$$

Pela regra de derivação do produto de funções:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \left[y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \right] &= y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \\ \frac{\partial y}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y} \left[y \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \right] - y \cdot \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} - x \end{aligned} \quad (3.2.60)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] = y \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + 0$$

$$0 = \frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] - y \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} \quad (3.2.61)$$

Substituindo (3.2.60) e (3.2.61) em (3.2.59), resulta que:

$$Q_y = \iint_A G\mathbf{q} \cdot \left\{ \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] - y \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} - x \right] + x + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] - y \cdot \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} \right] \right\} \cdot dA$$

$$Q_x = G\mathbf{q} \cdot \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] - x + x - y \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} \right) \right\} \cdot dA$$

$$Q_x = G\mathbf{q} \cdot \iint_A \left\{ \frac{\partial}{\partial x} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \right] \right\} \cdot dA \quad (3.2.62)$$

A integral que aparece em (3.2.62) é calculada utilizando-se o teorema de divergência no plano (3.2.55) com:

$$P = y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \quad Q = y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \quad (3.2.63)$$

Resulta que:

$$Q_x = G\mathbf{q} \cdot \oint_s \left[y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot l + y \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot m \right] \cdot ds$$

$$Q_x = G\mathbf{q} \cdot \oint_s y \cdot \left[\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot l + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot m \right] \cdot ds \quad (3.2.64)$$

Devido a (3.2.41), a força cortante Q_y também é nula.

$$Q_y = 0 \quad (3.2.65)$$

3.2.10 Momento de Inércia à Torção

O momento de torção resultante foi apresentado em (3.2.47).

$$M_z = \iint_A (\mathbf{t}_{zy} \cdot x - \mathbf{t}_{zx} \cdot y) \cdot dA$$

Na torção, ele corresponde ao conjugado M_t , que atua nas extremidades da barra. Portanto:

$$M_z = \iint_A (\mathbf{t}_{zy} \cdot x - \mathbf{t}_{zx} \cdot y) \cdot dA = M_t \quad (3.2.66)$$

Substituindo as expressões das tensões obtidas em (3.2.12), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \iint_A \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot x - G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot y \right] \cdot dA &= M_t \\ \frac{M_t}{G\mathbf{q}} &= \iint_A \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right] \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA \end{aligned} \quad (3.2.67)$$

O momento de inércia à torção da seção transversal (genérica) é definido por:

$$I_T = \frac{M_t}{G\mathbf{q}} \quad (3.2.68)$$

Ele vale:

$$I_T = \iint_A \left(x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right) \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA \quad (3.2.69)$$

A segunda das integrais de (3.2.69) corresponde ao momento polar de inércia da seção transversal.

$$\iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA = I_p \quad (3.2.70)$$

Substituindo (3.2.70) em (3.2.69):

$$I_T = \iint_A \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right] \cdot dA + I_p \quad (3.2.71)$$

Para não carregar a notação, define-se o seguinte:

$$\iint_A \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right] \cdot dA = I_y \quad (3.2.72)$$

Pela regra de derivação do produto de funções:

$$\frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \mathbf{y}) = x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + 0 \cdot \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \mathbf{y}) \quad (3.2.73)$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(y \cdot \mathbf{y}) = y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} + 0 \cdot \mathbf{y} \quad \Rightarrow \quad y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot \mathbf{y}) \quad (3.2.74)$$

Substituindo (3.2.73) e (3.2.74) em (3.2.72), resulta que:

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_{\mathbf{A}} \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right] \cdot dA \\ &= \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \mathbf{y}) - \frac{\partial}{\partial x}(y \cdot \mathbf{y}) \right] \cdot dA = \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y \cdot \mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \mathbf{y}) \right] \cdot dA \end{aligned} \quad (3.2.75)$$

Na expressão (3.2.75), (assim como em (3.2.14) e (3.2.44)) a função $\mathbf{y}$ é desconhecida, e será encontrada por meio de uma pesquisa de funções harmônicas.

$$\mathbf{y}(x, y) = \Psi(x, y) + \mathbf{y}_0 \quad (3.2.76)$$

Se a função $\mathbf{y}$ é harmônica, a função Ψ também será, pois elas diferem apenas de um constante $\mathbf{y}_0$, como explicitado em (3.2.77).

$$\Psi(x, y) = \mathbf{y}(x, y) - \mathbf{y}_0 \quad (3.2.77)$$

Substituindo (3.2.76) em (3.2.75):

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y \cdot \mathbf{y}) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \mathbf{y}) \right] \cdot dA \\ &= \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y \cdot \Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \Psi) \right] \cdot dA + \mathbf{y}_0 \cdot \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) \right] \cdot dA \\ &= \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y \cdot \Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \Psi) \right] \cdot dA + \mathbf{y}_0 \cdot \iint_{\mathbf{A}} [0 + 0] \cdot dA \\ I_y &= \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y \cdot \Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \Psi) \right] \cdot dA \end{aligned} \quad (3.2.78)$$

A integral que aparece em (3.2.78) é calculada utilizando-se o teorema de divergência no plano (3.2.55) com:

$$P = -y \cdot \Psi \quad Q = x \cdot \Psi \quad (3.2.79)$$

Resulta que:

$$\begin{aligned}
 I_y &= \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y \cdot \Psi) + \frac{\partial}{\partial y}(x \cdot \Psi) \right] \cdot dA \\
 &= \oint_s [(-y \cdot \Psi) \cdot l + (x \cdot \Psi) \cdot m] \cdot ds = \oint_s \Psi \cdot [-y \cdot l + x \cdot m] \cdot ds
 \end{aligned} \tag{3.2.80}$$

A expressão (3.2.80) pode ser reescrita na forma de produto escalar:

$$I_y = \oint_s \Psi \cdot \{x, y\} \cdot \{m, -l\} \cdot ds = - \oint_s \Psi \cdot \{x, y\} \cdot \{-m, l\} \cdot ds \tag{3.2.81}$$

Substituindo (3.2.18) e (3.2.32) em (3.2.81), e considerando (3.2.77):

$$I_y = - \oint_s (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \mathbf{f}) \cdot ds \tag{3.2.82}$$

Substituindo (3.2.82) em (3.2.71), obtém-se (novamente) o momento de inércia à torção da seção transversal:

$$I_T = - \oint_s (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \mathbf{f}) \cdot ds + I_p \tag{3.2.83}$$

As expressões (3.2.69) e (3.2.83) são equivalentes, e a escolha de qual utilizar é feita convenientemente.

3.2.11 Solução do Problema de Neumann

A resolução do problema da torção uniforme consiste então em encontrar uma função empenamento $y(x, y)$, de classe C^2 em $\mathbf{A}^5$, harmônica no domínio, conforme foi mostrado na equação (3.2.14).

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Em } \mathbf{A}.$$

As equações diferenciais no formato de (3.2.14) são conhecidas como equações de Laplace⁶. Portanto a função empenamento é uma solução da equação de Laplace que satisfaça à condição de contorno (3.2.44):

$$\frac{\partial y}{\partial \vec{n}} = \nabla y \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em } \mathbf{S}.$$

A condição de contorno (3.2.44) é conhecida como condição de Neumann (SOARES, 2002).

Segundo Pimenta (2002), as equações (3.2.14) e (3.2.44) constituem um problema de valor de contorno, o qual apresenta solução única a menos de uma constante. Este problema de valor de contorno é mais conhecido como problema de Neumann na teoria de potencial (SOARES, 2002).

O momento de inércia à torção da seção transversal é calculado aplicando $y(x, y)$ em (3.2.83) ou (3.2.69). A escolha de qual delas utilizar é feita conforme a conveniência do problema.

$$I_T = -\oint_{\mathbf{S}} (y - y_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds + I_p$$

$$I_T = \iint_{\mathbf{A}} \left(x \cdot \frac{\partial y}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot dA + \iint_{\mathbf{A}} (x^2 + y^2) \cdot dA$$

⁵ Uma função F é de classe C^n numa região $\mathbf{A}$ se todas as suas derivadas, até ordem n , são contínuas em $\mathbf{A}$. Escreve-se $F \in C^n(\mathbf{A})$.

⁶ Ver item 5.1 desta dissertação.

A rotação específica é determinada substituindo (3.2.83) em (3.2.68).

$$\mathbf{q} = \frac{M_t}{G \cdot I_T} \quad (3.2.84)$$

O campo de deslocamentos é obtido substituindo a rotação específica (3.2.84) e a função empenamento em (3.2.8):

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{q} z \cdot y \\ v &= \mathbf{q} z \cdot x \\ w &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{Y}(x, y) \end{aligned}$$

As deformações são obtidas por derivação do campo de deslocamentos, conforme as expressões em (3.2.10).

$$\mathbf{g}_{yz} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial y} + x \right) \quad \mathbf{g}_{zx} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial x} - y \right)$$

As tensões são determinadas utilizando a Lei de Hooke (2.3.13):

$$\mathbf{t}_{yz} = G \cdot \mathbf{g}_{yz} \quad \mathbf{t}_{zx} = G \cdot \mathbf{g}_{zx}$$

3.3 TORÇÃO DE BARRAS PRISMÁTICAS. PROBLEMA DE DIRICHLET

Nesta seção é apresentada uma formulação alternativa do problema da torção uniforme, utilizando uma outra função, denotada por $c(x, y)$, e que se relaciona com a função empenamento $y(x, y)$ pelas equações de Cauchy-Riemann.

3.3.1 Conjugada Harmônica

As funções de duas variáveis $y(x, y)$ e $c(x, y)$ podem ser utilizadas para construir uma função de variável complexa z , na seguinte forma⁷:

$$\Im(z) = \Im(x + i \cdot y) = y(x, y) + i \cdot c(x, y) \quad (3.3.1)$$

Ou seja, $y(x, y)$ e $c(x, y)$ são, respectivamente, as partes real e imaginária da função $\Im(z)$. Segundo Sokolnikoff e Sokolnikoff (1941), para que esta última seja diferenciável em todo z do domínio, é preciso que as primeiras estejam relacionadas pelas equações diferenciais de Cauchy-Riemann:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = \frac{\partial c}{\partial y} \quad \frac{\partial y}{\partial y} = -\frac{\partial c}{\partial x} \quad (3.3.2)$$

Como consequência de (3.3.2), as partes real e imaginária de $\Im(z)$ precisam ser harmônicas.

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 y}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Em } A. \quad (3.3.3)$$

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Em } A. \quad (3.3.4)$$

Por estarem relacionadas por meio de (3.3.2) e, como consequência, satisfizerem a (3.3.3) e (3.3.4), as funções $y(x, y)$ e $c(x, y)$ são denominadas conjugadas harmônicas.

⁷ Detalhes sobre números complexos e funções de variáveis complexas são apresentados no apêndice.

A determinação das funções conjugadas é feita por meio de integração de (3.3.2). A diferencial de c no ponto (x_0, y_0) é definida por (Guidorizzi, 2001b):

$$d\mathbf{c}(x_0, y_0) = \left[\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x}(x_0, y_0) \right] \cdot dx + \left[\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y}(x_0, y_0) \right] \cdot dy \quad (3.3.5)$$

Segundo Sokolnikoff, I. S. e Sokolnikoff, E. S., (1941), a função $c(x, y)$ é encontrada por meio da integral de linha de (3.3.5), calculada sobre um caminho ligando um ponto $\mathbf{P}_0(x_0, y_0)$ e um ponto arbitrário $\mathbf{P}(x, y)$ pertencente à região A .

$$\mathbf{c}(\mathbf{P}(x, y)) - \mathbf{c}(\mathbf{P}_0(x_0, y_0)) = \int_{\mathbf{P}_0(x_0, y_0)}^{\mathbf{P}(x, y)} \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \cdot dy \right) \quad (3.3.6)$$

Para encontrar $c(x, y)$ em função de $\mathbf{y}(x, y)$, deve-se substituir (3.3.2) em (3.3.6).

$$\mathbf{c}(x, y) - \mathbf{c}(x_0, y_0) = \int_{\mathbf{P}_0(x_0, y_0)}^{\mathbf{P}(x, y)} \left(-\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \cdot dx + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \cdot dy \right) \quad (3.3.7)$$

Para calcular a integral de linha (3.3.7) é conveniente utilizar as equações paramétricas da curva, apresentadas em (3.2.15). Portanto:

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) - \mathbf{c}(x(t_0), y(t_0)) = \int_{t_0}^t \left(-\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \cdot \frac{dy}{dt} \right) \cdot dt \quad (3.3.8)$$

A equação (3.3.8) pode ser reescrita na forma de produto escalar:

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) - \mathbf{c}_0 = \int_{t_0}^t \left\{ -\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right\} \cdot \left\{ \frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt} \right\} \cdot dt = \int_{t_0}^t \left\{ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right\} \cdot \left\{ \frac{dy}{dt}, -\frac{dx}{dt} \right\} \cdot dt \quad (3.3.9)$$

A partir de (3.2.17) pode-se escrever que:

$$dt = \frac{ds}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad (3.3.10)$$

Substituindo (3.3.10) em (3.3.9), obtém-se:

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) - \mathbf{c}_0 = \int_{s(t_0)}^{s(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right\} \cdot \{y', -x'\} \cdot \frac{ds}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) - \mathbf{c}_0 = \int_{s(t_0)}^{s(t)} \left\{ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right\} \cdot \left\{ \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{-x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\} \cdot ds \quad (3.3.11)$$

Considerando (3.2.30), a expressão (3.3.11) pode ser reescrita:

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) - \mathbf{c}_0 = \int_{s(t_0)}^{s(t)} \nabla \mathbf{y} \cdot \{l, m\} \cdot ds$$

Finalmente, obteve-se a função $\mathbf{c}$ no contorno.

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) = \int_{s(t_0)}^{s(t)} \nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} \cdot ds + \mathbf{c}_0 \quad (3.3.12)$$

Falta apenas determinar a função $\mathbf{c}$ nas variáveis x e y . A partir das equações paramétricas do contorno (3.2.15):

$$\mathbf{S}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad t_0 \leq t \leq t_F$$

Pode-se escrever que:

$$t = t(x, y) \quad (3.3.13)$$

A substituição de (3.3.13) em (3.3.12) leva a:

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) = \int_{s(t(x, y_0))}^{s(t(x, y))} \nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} \cdot ds + \mathbf{c}_0 \quad (3.3.14)$$

Segundo Sokolnikoff, I. S. e Sokolnikoff, E. S., a expressão (3.3.14), que foi calculada ao longo do contorno $\mathbf{S}$, vale também para a região $\mathbf{A}$.

Para encontrar $\mathbf{y}(x, y)$ em função de $\mathbf{c}(x, y)$, procede-se de maneira análoga:

$$\mathbf{y}(\mathbf{P}(x, y)) - \mathbf{y}(\mathbf{P}_0(x_0, y_0)) = \int_{\mathbf{P}_0(x_0, y_0)}^{\mathbf{P}(x, y)} \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \cdot dy \right) = \int_{\mathbf{P}_0(x_0, y_0)}^{\mathbf{P}(x, y)} \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \cdot dx - \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \cdot dy \right)$$

$$\mathbf{y}(x, y) = - \int_{s(t(x, y_0))}^{s(t(x, y))} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds + \mathbf{y}_0 \quad (3.3.15)$$

As expressões (3.3.14) e (3.3.15) permitem determinar uma das funções conjugadas harmônicas em função da outra. A escolha de qual utilizar dependerá do problema.

3.3.2 Deslocamentos. Deformações. Tensões. Equilíbrio

As hipóteses sobre deslocamentos utilizadas na seção 3.2 permanecem válidas, assim como o campo de deslocamentos obtido em (3.2.8).

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{z} \cdot y \\ v &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{z} \cdot x \\ w &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}(x, y) \end{aligned}$$

A função $c(x, y)$ não aparece no campo de deslocamentos. É preciso então substituir (3.3.15) em (3.2.8), de modo a obter os deslocamentos longitudinais na barra, conforme mostra (3.3.16).

$$w(x, y) = \mathbf{q} \cdot \left[- \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds + \mathbf{y}_0 \right] \quad (3.3.16)$$

As deformações obtidas para o problema de Neumann, em (3.2.10), podem ser aproveitadas, efetuando as substituições conforme (3.3.2):

$$\mathbf{g}_{yz} = \mathbf{q} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + x \right) \quad \mathbf{g}_{zx} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right) \quad (3.3.17)$$

As tensões são obtidas aplicando a Lei de Hooke (2.3.13):

$$\mathbf{t}_{yz} = G\mathbf{q} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + x \right) \quad \mathbf{t}_{zx} = G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right) \quad (3.3.18)$$

Com a distribuição de tensões (3.3.18), as equações diferenciais de equilíbrio (2.2.31) são identicamente satisfeitas:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right) \right] + 0 &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial}{\partial z} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + x \right) \right] + 0 &= 0 \\
\frac{\partial}{\partial x} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[G\mathbf{q} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z}(0) + 0 &= 0 \\
G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial y \partial x} \right) &= 0
\end{aligned} \tag{3.3.19}$$

3.3.3 Condições de Contorno na Superfície Lateral

Não ocorrem tensões na superfície lateral da barra, o que resulta na equação (3.2.39), apresentada anteriormente.

$$\mathbf{t}_{zx} \cdot l + \mathbf{t}_{zy} \cdot m = 0$$

Substituindo as tensões (3.3.18) em (3.2.39), obtém-se:

$$\begin{aligned}
G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right) \cdot l + \left[-G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} - x \right) \right] \cdot m &= 0 \\
\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \cdot l - \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \cdot m &= -x \cdot m + y \cdot l
\end{aligned} \tag{3.3.20}$$

A equação (3.3.20) pode ser reescrita na forma de produto escalar:

$$\begin{aligned}
\left\{ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right\} \cdot \{-m, l\} &= \{x, y\} \cdot \{-m, l\} \\
\nabla \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} &= \vec{r} \cdot \mathbf{f}
\end{aligned} \tag{3.3.21}$$

Ou, de outra forma:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{f}} = \vec{r} \cdot \mathbf{f} \tag{3.3.22}$$

As expressões (3.3.20), (3.3.21) e (3.3.22) são equivalentes. Portanto, no contorno S:

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial \mathbf{f}} = \nabla \mathbf{c} \cdot \mathbf{f} = \vec{r} \cdot \mathbf{f} \quad \text{Em S.} \tag{3.3.23}$$

Por outro lado, a equação (3.3.20) pode ser reescrita substituindo os valores de l e m obtidos em (3.2.30):

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) - \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \cdot \left(-\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) = x \cdot \left(\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) + y \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right)$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} \quad (3.3.24)$$

Mas:

$$\frac{d}{dt}(x \cdot x + y \cdot y) = x \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{dx}{dt} \cdot x + y \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{dy}{dt} \cdot y$$

$$x \cdot \frac{dx}{dt} + y \cdot \frac{dy}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \quad (3.3.25)$$

$$\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{d \mathbf{c}}{dt} \quad (3.3.26)$$

Substituindo (3.3.25) e (3.3.26) em (3.3.24), obtém-se:

$$\frac{d \mathbf{c}}{dt} = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt}(x^2 + y^2) \quad (3.3.27)$$

A expressão (3.3.27) pode ser integrada em relação ao parâmetro t :

$$\mathbf{c}(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + \mathbf{c}_1 \quad \text{Em S.} \quad (3.3.28)$$

Sendo $\mathbf{c}_1$ uma constante a ser determinada⁸. As expressões (3.3.23) e (3.3.28) fornecem resultados equivalentes.

⁸ É importante observar que, em geral, $\mathbf{c}_1 \neq \mathbf{c}_0$.

3.3.4 Momento de Inércia à Torção

Conforme demonstrado anteriormente, o único esforço solicitante nas extremidades da barra é o momento de torção, apresentado em (3.2.66).

$$M_z = \iint_A (\mathbf{t}_{yz} \cdot x - \mathbf{t}_{zx} \cdot y) \cdot dA = M_t$$

Substituindo em (3.2.66) as expressões das tensões obtidas em (3.3.18), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \iint_A \left[-G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} - x \right) \cdot x - G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right) \cdot y \right] \cdot dA &= M_t \\ \frac{M_t}{G\mathbf{q}} &= -\iint_A \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right] \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA \end{aligned} \quad (3.3.29)$$

A equação (3.3.29) pode ser reescrita aproveitando (3.2.68):

$$\frac{M_t}{G\mathbf{q}} = I_T$$

Para a seção (genérica) em estudo, o momento de inércia à torção vale:

$$I_T = -\iint_A \left(x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA \quad (3.3.30)$$

Substituindo (3.2.70) em (3.3.30):

$$I_T = -\iint_A \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right] \cdot dA + I_p \quad (3.3.31)$$

Falta agora efetuar o cálculo da integral de (3.3.31).

$$-\iint_A \left[x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right] \cdot dA = I_c \quad (3.3.32)$$

Pela regra de derivação do produto de funções:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathbf{c}) = x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + 1 \cdot \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathbf{c}) - 1 \cdot \mathbf{c} \quad (3.3.33)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathbf{c}) = y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} + 1 \cdot \mathbf{c} \quad \Rightarrow \quad y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathbf{c}) - 1 \cdot \mathbf{c} \quad (3.3.34)$$

Substituindo (3.3.33) e (3.3.34) em (3.3.32), resulta que:

$$I_c = - \iint_A \left[x \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right] \cdot dA = - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot c) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot c) \right] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A c \cdot dA \quad (3.3.35)$$

A função c pode ser escrita na forma:

$$c(x, y) = X(x, y) + c_0 \quad (3.3.36)$$

Substituindo (3.3.36) em (3.3.35):

$$\begin{aligned} I_c &= - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot c) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot c) \right] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A c \cdot dA \\ &= - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot X) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot X) \right] \cdot dA \\ &\quad - c_0 \cdot \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x) + \frac{\partial}{\partial y} (y) \right] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A (X + c_0) \cdot dA \\ I_c &= - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot X) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot X) \right] \cdot dA \\ &\quad - c_0 \cdot \iint_A [1+1] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A X \cdot dA + 2 \cdot c_0 \cdot \iint_A 1 \cdot dA \\ I_c &= - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot X) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot X) \right] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A X \cdot dA \end{aligned} \quad (3.3.37)$$

Utilizando o teorema de divergência no plano (3.2.55) com:

$$P = x \cdot X \quad Q = y \cdot X \quad (3.3.38)$$

Resulta que:

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot X) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot X) \right] \cdot dA &= \oint_s [(x \cdot X) \cdot l + (y \cdot X) \cdot m] \cdot ds \\ &= \oint_s X \cdot [x \cdot l + y \cdot m] \cdot ds \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

Reescrevendo (3.3.39) na forma de produto escalar e substituindo em (3.3.37) resulta que:

$$I_c = - \oint_s X \cdot \{x, y\} \cdot \{l, m\} \cdot ds + 2 \cdot \iint_A X \cdot dA \quad (3.3.40)$$

Substituindo (3.2.18) e (3.2.24) em (3.3.40), e considerando (3.3.36):

$$I_c = -\oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot ds + 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot d\mathbf{A} \quad (3.3.41)$$

Substituindo (3.3.41) e (3.2.70) em (3.3.29), obtém-se (novamente) o momento de inércia à torção da seção transversal:

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot ds + 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot d\mathbf{A} + I_p \quad (3.3.42)$$

As expressões (3.3.30) e (3.3.42) são equivalentes.

3.3.5 Solução do Problema de Dirichlet

A resolução do problema da brção uniforme consiste então em encontrar uma função $c(x, y)$, de classe C^2 e harmônica no domínio, conforme foi mostrado na equação (3.3.4).

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Em } A.$$

A função conjugada harmônica é uma solução da equação de Laplace que satisfaça à condição de contorno (3.3.23) ou (3.3.28), que fornecem resultados equivalentes.

$$\frac{\partial c}{\partial \vec{f}} = \nabla c \cdot \vec{f} = \vec{r} \cdot \vec{f} \quad \text{Em } S. \quad (3.3.23)$$

$$c = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + c_1 \quad \text{Em } S. \quad (3.3.28)$$

A condição de contorno (3.3.28) é conhecida como condição de Dirichlet (SOARES, 2002). Este problema de valor de contorno dado pelas equações (3.3.4) e (3.3.28) é mais conhecido como problema de Dirichlet (LANGENDONCK, 1952) na teoria de potencial.

O momento de inércia à torção da seção transversal é calculado aplicando $c(x, y)$ em (3.3.42) ou (3.3.30), que são expressões equivalentes.

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot ds + 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot d\mathbf{A} + I_p$$

$$I_T = -\iint_A \left(x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right) \cdot d\mathbf{A} + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot d\mathbf{A}$$

A rotação específica $\mathbf{q}$ é determinada substituindo (3.3.42) em (3.2.84).

$$\mathbf{q} = \frac{M_t}{G \cdot I_T} \quad (3.3.43)$$

A função $c(x, y)$, conjugada da função empenamento, fica determinada a menos de $\mathbf{y}_0$. A função empenamento pode ser obtida por meio de (3.3.15):

$$\mathbf{y}(x, y) = - \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds + \mathbf{y}_0$$

O deslocamento longitudinal pode ser obtido substituindo (3.3.15) no campo de deslocamentos (3.2.8). Ou diretamente, por meio de (3.3.16), usando $w_0 = \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}_0$.

$$w(x, y) = -\mathbf{q} \cdot \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds + w_0 \quad (3.3.44)$$

Os deslocamentos transversais são obtidos substituindo a rotação específica em (3.2.5):

$$u = -\mathbf{q} z \cdot y$$

$$v = \mathbf{q} z \cdot x$$

As deformações são obtidas por derivação do campo de deslocamentos, conforme as expressões em (3.3.17).

$$\mathbf{g}_{yz} = \mathbf{q} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + x \right)$$

$$\mathbf{g}_{zx} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} - y \right)$$

As tensões são determinadas utilizando a Lei de Hooke (2.3.13):

$$\mathbf{t}_{yz} = G \cdot \mathbf{g}_{yz}$$

$$\mathbf{t}_{zx} = G \cdot \mathbf{g}_{zx}$$

3.4 TORÇÃO DE BARRAS PRISMÁTICAS. PROBLEMA DE PRANDTL

Ludwig Prandtl apresenta uma formulação que conduz a condições de contorno mais simples do que as apresentadas em (3.2.44) e (3.3.23), utilizando função de tensão que satisfaça às equações diferenciais de equilíbrio.

As deformações são calculadas através das equações (2.3.3) e (2.3.4) da Lei de Hooke, e o campo de deslocamentos, através de integração combinada.

3.4.1 Condições de Contorno

A torção uniforme em barras se resume à ação de binários nas extremidades da barra. Em decorrência destas forças, aparecem na seção transversal tensões de cisalhamento cuja resultante é o momento de torção M_t .

Como o empenamento pode ocorrer livremente, não aparecem tensões normais ao longo da barra:

$$s_x = 0 \qquad s_y = 0 \qquad s_z = 0 \qquad (3.4.1)$$

Segundo Timoshenko e Goodier (1970), a superfície lateral da barra está livre de forças externas e, portanto, de tensões. A utilização do teorema de Cauchy (2.2.22) com (3.4.1) leva a:

$$\begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & t_{yx} & t_{zx} \\ t_{xy} & 0 & t_{zy} \\ t_{xz} & t_{yz} & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} l \\ m \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \begin{aligned} 0 &= 0 \cdot l + t_{yx} \cdot m + t_{zx} \cdot 0 \\ 0 &= t_{xy} \cdot l + 0 \cdot m + t_{zy} \cdot 0 \\ 0 &= t_{xz} \cdot l + t_{yz} \cdot m + 0 \cdot 0 \end{aligned}$$

$$t_{yx} = 0 \qquad t_{xy} = 0 \qquad (3.4.2)$$

$$t_{xz} \cdot l + t_{yz} \cdot m = 0 \qquad (3.4.3)$$

3.4.2 Equações Diferenciais de Equilíbrio

Em função de (3.4.1) e (3.4.2), as equações diferenciais de equilíbrio (2.2.31) se reduzem a:

$$\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial t_{zx}}{\partial z} + 0 = 0$$

$$\frac{\partial}{\partial x}(0) + \frac{\partial}{\partial y}(0) + \frac{\partial t_{zy}}{\partial z} + 0 = 0$$

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial t_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z}(0) + 0 = 0$$

$$\frac{\partial t_{xz}}{\partial z} = 0 \qquad \frac{\partial t_{yz}}{\partial z} = 0 \qquad (3.4.4)$$

$$\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zy}}{\partial y} = 0 \qquad (3.4.5)$$

As equações (3.4.4) mostram que as tensões t_{xz} e t_{yz} são independentes de z e, portanto, não variam entre seções transversais distintas.

3.4.3 Função de Tensão de Prandtl

Seja $f(x, y)$ uma função, de classe C^2 em $\mathbf{A}$. Pode-se definir a tensão t_{zx} de modo que:

$$t_{zx} = \frac{\partial f}{\partial y} \qquad (3.4.6)$$

Substituindo em (3.4.5) e integrando decorre que:

$$\frac{\partial t_{zy}}{\partial y} = -\frac{\partial t_{zx}}{\partial x} = -\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \qquad t_{zy} = -\frac{\partial f}{\partial x} + f(x)$$

Tomando $f(x)$ como arbitrariamente nula, obtém-se que:

$$t_{zy} = -\frac{\partial f}{\partial x} \qquad (3.4.7)$$

A função $f(x, y)$ é denominada função de tensão de Prandtl. Ao serem definidas conforme (3.4.6) e (3.4.7), as tensões obedecem automaticamente a (3.4.4).

Derivando as equações (3.4.7) em relação a x , e (3.4.6) em relação a y , somando, e considerando-se (3.2.12) obtém-se:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\partial t_{zy}}{\partial x} + \frac{\partial t_{zx}}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= -\frac{\partial}{\partial x} \left[Gq \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[Gq \cdot \left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \right] \\ &= -Gq \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} + 1 \right] + Gq \left[\frac{\partial^2 y}{\partial x \partial y} - 1 \right]\end{aligned}$$

Portanto, é necessário que, ao longo de toda seção A :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2Gq \quad (3.4.8)$$

3.4.4 Condições de Contorno na Superfície Lateral

Na superfície lateral, vale a equação (3.2.39), apresentada anteriormente.

$$t_{zx} \cdot l + t_{zy} \cdot m = 0$$

Substituindo (3.4.6) e (3.4.7) em (3.2.39), obtém-se:

$$\left(\frac{\partial f}{\partial y} \right) \cdot l + \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) \cdot m = 0 \quad (3.4.9)$$

A equação (3.4.9) pode ser reescrita na forma de produto escalar:

$$\begin{aligned}\left\{ \frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right\} \cdot \{-m, l\} &= 0 \\ \nabla f \cdot \bar{t} &= 0\end{aligned} \quad (3.4.10)$$

Ou, de outra forma:

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{t}} = 0 \quad (3.4.11)$$

As expressões (3.4.9), (3.4.10) e (3.4.11) são equivalentes. Portanto, no contorno S :

$$\frac{\partial f}{\partial t} = \nabla f \cdot \mathbf{t} = 0 \quad \text{Em } S. \quad (3.4.12)$$

Por outro lado, a equação (3.4.9) pode ser reescrita substituindo os valores de l e m obtidos em (3.2.30):

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \left(\frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) - \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \left(-\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right) &= 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} &= 0 \end{aligned} \quad (3.4.13)$$

Mas:

$$\frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad (3.4.14)$$

Substituindo (3.4.14) em (3.4.13), obtém-se:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 0 \quad (3.4.15)$$

A expressão (3.4.15) pode ser integrada em relação ao parâmetro t :

$$f(x, y) = f_0 \quad \text{Em } S. \quad (3.4.16)$$

Sendo f_0 uma constante a ser determinada.

3.4.5 Esforços Solicitantes nas Extremidades

Nas extremidades, da barra, vale a equação (3.2.66).

$$M_z = \iint_A (\mathbf{t}_{yz} \cdot x - \mathbf{t}_{zx} \cdot y) \cdot dA = M_t \quad (3.2.66)$$

Substituindo em (3.2.66) as expressões das tensões obtidas em (3.4.6) e (3.4.7), obtém-se que:

$$\begin{aligned} \iint_A \left(-\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot x - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot y \right) \cdot dA &= M_t \\ -M_t &= \iint_A \left(x \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) \cdot dA \end{aligned} \quad (3.4.17)$$

A primeira das integrais de (3.4.17) pode ser calculada separadamente, usando, primeiramente, a regra de derivação do produto de funções:

$$\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathbf{f}) = x \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} + 1 \cdot \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad x \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathbf{f}) - 1 \cdot \mathbf{f} \quad (3.4.18)$$

$$\frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathbf{f}) = y \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + 1 \cdot \mathbf{f} \quad \Rightarrow \quad y \cdot \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathbf{f}) - 1 \cdot \mathbf{f} \quad (3.4.19)$$

Portanto:

$$-M_t = \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathbf{f}) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathbf{f}) \right] \cdot dA - 2 \cdot \iint_A \mathbf{f} \cdot dA \quad (3.4.20)$$

A função $\mathbf{f}$ pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{f}(x, y) = \Phi(x, y) + \mathbf{f}_0 \quad (3.4.21)$$

Substituindo (3.4.21) em (3.4.20)

$$\begin{aligned} M_t &= -\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \mathbf{f}) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \mathbf{f}) \right] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A \mathbf{f} \cdot dA \\ &= -\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \Phi) \right] \cdot dA - \mathbf{f}_0 \cdot \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y) \right] \cdot dA \\ &\quad + 2 \cdot \iint_A \Phi \cdot dA + 2 \cdot \iint_A \mathbf{f}_0 \cdot dA \\ &= -\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x}(x \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial y}(y \cdot \Phi) \right] \cdot dA - \mathbf{f}_0 \cdot \iint_A [1+1] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A \Phi \cdot dA + 2 \cdot \mathbf{f}_0 \cdot \iint_A 1 \cdot dA \end{aligned}$$

$$M_t = - \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot \Phi) \right] \cdot dA + 2 \cdot \iint_A \Phi \cdot dA \quad (3.4.22)$$

Utilizando o teorema de divergência no plano (3.2.55) com:

$$P = x \cdot \Phi \quad Q = y \cdot \Phi \quad (3.4.23)$$

Resulta que:

$$\begin{aligned} \iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot \Phi) \right] \cdot dA &= \oint_s [(x \cdot \Phi) \cdot l + (y \cdot \Phi) \cdot m] \cdot ds \\ &= \oint_s \Phi \cdot [x \cdot l + y \cdot m] \cdot ds \\ &= \oint_s (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot [x \cdot l + y \cdot m] \cdot ds \end{aligned} \quad (3.4.24)$$

Mas, no contorno:

$$\mathbf{f} - \mathbf{f}_0 = 0 \quad (3.4.16)$$

Portanto:

$$\iint_A \left[\frac{\partial}{\partial x} (x \cdot \Phi) + \frac{\partial}{\partial y} (y \cdot \Phi) \right] \cdot dA = 0 \quad (3.4.25)$$

Substituindo (3.4.25) em (3.4.22), e considerando (3.4.21), obtém-se, finalmente que:

$$M_t = 2 \cdot \iint_A (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot dxdy \quad (3.4.26)$$

3.4.6 Solução do Problema de Prandtl

A resolução do problema da torção uniforme consiste em encontrar uma função de tensão $f(x, y)$, de classe C^2 em A , e que seja harmônica no seu domínio a menos de uma constante, conforme a equação (3.4.8):

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2Gq \quad \text{Em } A$$

As equações diferenciais no formato de (3.4.8) são conhecidas como equações de Poisson⁹. Portanto a função de tensão é uma solução da equação de Poisson que satisfaça à condição de contorno (3.4.16):

$$f(x, y) = f_0 \quad \text{Em } S$$

Este também é um problema de valor de contorno, e pode ser denominado problema de Prandtl.

A rotação específica é obtida implicitamente por meio da condição de contorno na extremidade (3.4.26):

$$M_t = 2 \cdot \iint_A (f - f_0) \cdot dx dy \quad \text{Em } A.$$

O momento de inércia à torção é obtido substituindo (3.4.26) em **(3.2.68)**:

$$I_T = \frac{M_t}{Gq}$$

Depois que a rotação específica q é calculada, a função de tensão de Prandtl fica determinada a menos de f_0 . As tensões são obtidas aplicando $f(x, y)$ em (3.4.6) e (3.4.7):

$$t_{zx} = \frac{\partial f}{\partial y} \quad t_{zy} = -\frac{\partial f}{\partial x}$$

As deformações são determinadas utilizando a Lei de Hooke (2.3.4).

$$g_{zy} = \frac{t_{zy}}{G} \quad g_{zx} = \frac{t_{zx}}{G}$$

⁹ Ver item 5.1 desta dissertação.

As distorções são calculadas pela substituição de (3.4.6) e (3.4.7) em (2.3.4).

$$\mathbf{g}_{zy} = -\frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) \quad \mathbf{g}_{zx} = \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) \quad (3.4.27)$$

Os deslocamentos u e v são obtidos substituindo a rotação específica $\mathbf{q}$ no campo de deslocamentos (3.2.5).

$$u = -\mathbf{q}z \cdot y$$

$$v = \mathbf{q}z \cdot x$$

As expressões das distorções foram apresentadas em (2.1.10)

$$\mathbf{g}_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \mathbf{g}_{zy} = \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}$$

Para encontrar o deslocamento w basta resolver o sistema de equações diferenciais (3.4.28).

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{g}_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = \mathbf{g}_{zy} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.4.28)$$

A substituição das componentes de deslocamentos (3.2.5) e distorções (3.4.27) em (3.4.28) levam a:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) - (-\mathbf{q} \cdot y) \quad (3.4.29)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) - \mathbf{q} \cdot x \quad (3.4.30)$$

Integrando (3.4.29) em relação a x e (3.4.30) em relação a y , obtêm-se, respectivamente, (3.4.31) e (3.4.32).

$$w(x, y) = \frac{1}{G} \cdot \int_{x_0}^x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot dx + \mathbf{q} \cdot xy + f(y) \quad (3.4.31)$$

$$w(x, y) = -\frac{1}{G} \cdot \int_{y_0}^y \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot dy - \mathbf{q} \cdot yx + g(x) \quad (3.4.32)$$

Subtraindo as equações (3.4.31) e (3.4.32), obtêm-se a relação entre as funções de integração $f(y)$ e $g(x)$.

$$g(x) - f(y) = \frac{1}{G} \cdot \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot dy + 2G\mathbf{q} \cdot xy \right) \quad (3.4.33)$$

Não é possível efetuar a separação de variáveis de (3.4.33) para o caso geral, pois o termo $2G\mathbf{q} \cdot xy$ precisará ser cancelado na soma com as funções integrais. Porém, é possível provar que (3.4.33) vale sempre, derivando-a em relação à x :

$$\frac{dg}{dx} - 0 = \frac{1}{G} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} + \int_{y_0}^y \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} \cdot dy + 2G\mathbf{q} \cdot y \right) \quad (3.4.34)$$

E o resultado, derivando em relação a y :

$$\begin{aligned} 0 - 0 &= \frac{1}{G} \cdot \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \right) + 2G\mathbf{q} \right] \\ 0 &= \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + 2G\mathbf{q} \end{aligned} \quad (3.4.35)$$

A igualdade (3.4.35) é identicamente satisfeita (sempre), pois corresponde exatamente à expressão (3.4.8) obtida anteriormente.

3.5 EQUAÇÕES DA TORÇÃO UNIFORME

As equações de Saint-Venant (e Prandtl) para a torção uniforme, relativas a todas as formulações apresentadas ao longo do presente capítulo, são apresentadas na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Equações da Torção Uniforme

	Problema de Neumann $\mathbf{y}(x, y)$	Problema de Dirichlet $\mathbf{c}(x, y)$	Problema de Prandtl $\mathbf{f}(x, y)$
Desloca- mentos	$u = -\mathbf{q}_z \cdot y$ $v = \mathbf{q}_z \cdot x$ $w = \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}(x, y)$	$u = -\mathbf{q}_z \cdot y$ $v = \mathbf{q}_z \cdot x$ $w = -\mathbf{q} \cdot \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot d\mathbf{s} + w_0$	$u = -\mathbf{q}_z \cdot y$ $v = \mathbf{q}_z \cdot x$ $\frac{\partial w}{\partial y} = \mathbf{g}_{zy} - \frac{\partial v}{\partial z}$ $\frac{\partial w}{\partial x} = \mathbf{g}_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z}$
Defor- mações	$\mathbf{g}_{yz} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right)$ $\mathbf{g}_{zx} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right)$	$\mathbf{g}_{yz} = \mathbf{q} \cdot \left(-\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + x \right)$ $\mathbf{g}_{zx} = \mathbf{q} \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} - y \right)$	$\mathbf{g}_{yz} = \frac{1}{G} \mathbf{t}_{yz}$ $\mathbf{g}_{zx} = \frac{1}{G} \mathbf{t}_{zx}$
Tensões de Cisalha- mento	$\mathbf{t}_{yz} = G \cdot \mathbf{g}_{yz}$ $\mathbf{t}_{zx} = G \cdot \mathbf{g}_{zx}$	$\mathbf{t}_{yz} = G \cdot \mathbf{g}_{yz}$ $\mathbf{t}_{zx} = G \cdot \mathbf{g}_{zx}$	$\mathbf{t}_{zy} = -\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x}$ $\mathbf{t}_{zx} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y}$
Equilíbrio	$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} = 0$		
Compati- bilidade		$\frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial y^2} = 0$	$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} = -2G\mathbf{q}$
Contorno	$\nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{\mathbf{t}}$	$\nabla \mathbf{c} \cdot \vec{\mathbf{t}} = \vec{r} \cdot \vec{\mathbf{t}}$	$\mathbf{f} = \mathbf{f}_0$
Momento de Inércia à Torção	$I_T = \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA$ $+ \iint_A \left(x \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} \right) \cdot dA$ $I_T - I_p = -\oint_S (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{\mathbf{t}} \cdot ds$	$I_T = \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA$ $- \iint_A \left(x \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right) \cdot dA$ $I_T - I_p = 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA$ $- \oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot ds$	$I_T = \frac{M_t}{G\mathbf{q}}$
Rotação Específica	$\mathbf{q} = \frac{M_t}{G \cdot I_T}$	$\mathbf{q} = \frac{M_t}{G \cdot I_T}$	$M_t = 2 \cdot \iint_A (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot dA$

3.5.1 Relação entre as funções c e f

Ao comparar as expressões das tensões do problema de Dirichlet (3.3.18) e do problema de Prandtl (3.4.7) e (3.4.6), podem-se escrever as seguintes relações:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -Gq \cdot \left(-\frac{\partial c}{\partial x} + x \right) \quad (3.5.1)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = Gq \cdot \left(\frac{\partial c}{\partial y} - y \right) \quad (3.5.2)$$

A função $f(x, y)$ pode ser determinada em função de $c(x, y)$ integrando (3.5.1) em relação a x e (3.5.2) em relação a y :

$$f(x, y) = -Gq \cdot \left(-c + \frac{x^2}{2} \right) + f(y) \quad (3.5.3)$$

$$f(x, y) = Gq \cdot \left(c - \frac{y^2}{2} \right) + g(x) \quad (3.5.4)$$

Subtraindo as equações (3.5.4) e (3.5.3) membro a membro, obtém-se:

$$g(x) - f(y) = Gq \cdot \left(-\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{2} \right)$$

Portanto, por meio de separação de variáveis, conclui-se que:

$$f(y) = -Gq \cdot \left(\frac{y^2}{2} \right) + f_0 \quad (3.5.5)$$

$$g(x) = -Gq \cdot \left(\frac{x^2}{2} \right) + f_0 \quad (3.5.6)$$

Ao substituir (3.5.6) em (3.5.4), ou (3.5.5) em (3.5.3), resulta que:

$$f(x, y) = Gq \cdot \left[c(x, y) - \frac{1}{2}(x^2 + y^2) \right] + f_0 \quad (3.5.7)$$

Nesta equação f_0 é uma constante a ser determinada.

A função $c(x, y)$ pode ser determinada em função de $f(x, y)$.

$$\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{1}{Gq} \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + x \quad (3.5.8)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = \frac{1}{Gq} \cdot \frac{\partial f}{\partial y} + y \quad (3.5.9)$$

Integrando (3.5.8) em relação a x :

$$c(x, y) = \frac{1}{Gq} \cdot f + \frac{x^2}{2} + f(y) \quad (3.5.10)$$

Integrando (3.5.9) em relação a y :

$$c(x, y) = \frac{1}{Gq} \cdot f + \frac{y^2}{2} + g(x) \quad (3.5.11)$$

Subtraindo as equações (3.5.4) e (3.5.3) membro a membro, obtém-se:

$$g(x) - f(y) = \frac{x^2}{2} - \frac{y^2}{2}$$

Portanto, por meio de separação de variáveis, conclua-se que:

$$f(y) = \frac{y^2}{2} + c_0 \quad (3.5.12)$$

$$g(x) = \frac{x^2}{2} + c_0 \quad (3.5.13)$$

Ao substituir (3.5.12) em (3.5.10), ou (3.5.13) em (3.5.11), resulta que:

$$c(x, y) = \frac{1}{Gq} \cdot f(x, y) + \frac{1}{2}(x^2 + y^2) + c_0 \quad (3.5.14)$$

Nesta equação c_0 é uma constante arbitrária.

3.6 MÉTODO PARA ENCONTRAR POLINÔMIOS HARMÔNICOS

Define-se em (3.6.1) uma função a variáveis complexas $F_n(Z)$, com $n > 0$.

$$F_n(Z) = Z^n = (x + i \cdot y)^n \quad (3.6.1)$$

Ao diferenciar a função $F_n(Z)$, conclua-se em (3.6.2) que ela é harmônica.

$$\nabla^2 F_n(Z(x, y)) = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = n \cdot (n-1) \cdot \left[(x + i \cdot y)^{n-2} \cdot 1^2 + (x + i \cdot y)^{n-2} \cdot i^2 \right]$$

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} = 0 \quad (3.6.2)$$

O binômio (3.6.1) pode ser expandido em funções polinomiais.

$$F_n(Z) = Z^n = (x + i \cdot y)^n = U_n(x, y) + i \cdot V_n(x, y) \quad (3.6.3)$$

A função $U_n(x, y)$ corresponde à parte real e o elemento $i \cdot V_n(x, y)$ corresponde à parte imaginária de $F_n(z)$.

$$H_n(x, y) = H_0 + p_n \cdot f_n(x, y) + q_n \cdot g_n(x, y) \quad (3.6.4)$$

Portanto, toda a função na forma de (3.6.4) é harmônica. As funções $U_n(x, y)$ e $V_n(x, y)$ apresentadas na Tabela 3.2 são obtidas ao expandir (3.6.1).

Tabela 3.2 – Funções harmônicas.

Grau	Funções complexas	Parte real	Parte Imaginária
n	Z^n	$U_n(x, y)$	$V_n(x, y)$
0	$(x + i \cdot y)^0$	1	0
1	$(x + i \cdot y)^1$	x	y
2	$(x + i \cdot y)^2$	$x^2 - y^2$	$2xy$
3	$(x + i \cdot y)^3$	$x^3 - 3xy^2$	$3x^2y - y^3$
4	$(x + i \cdot y)^4$	$x^4 - 6x^2y^2 + y^4$	$-4x^3y + 4xy^3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

4 APLICAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE SAINT-VENANT

Neste capítulo as equações de Saint-Venant, apresentadas na Tabela 3.1, são aplicadas para a solução do problema da torção uniforme em barras com seção em forma de elipse, triângulo isósceles e de retângulo.

4.1 SEÇÃO TRANSVERSAL ELÍPTICA

O contorno de uma seção em forma de elipse é mostrado na Figura 4.1.1.

Figura 4.1.1 – Seção elíptica.

Nesta seção serão apresentadas as soluções deste problema utilizando as três formulações apresentadas.

4.1.1 Propriedades Geométricas da Elipse

O contorno S da elipse é caracterizado por:

$$S: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 = 0 \quad (4.1.1)$$

As equações paramétricas que descrevem o contorno da elipse são:

$$S: \begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \quad t \in [0, 2\pi] \quad (4.1.2)$$

Da forma como foi apresentada (4.1.2), quando t cresce, o traço da curva S é desenhado no sentido anti-horário, como se pode observar na Figura 4.1.2, adaptada de Boulos (1997).

Figura 4.1.2 – Geometria da Elipse.

A construção geométrica é feita a partir de duas circunferências concêntricas de raios a e b . A partir de um ângulo t é traçada uma semi-reta $\overrightarrow{OQ}$, cuja intersecção com as circunferências determina os pontos M e N . O ponto P , pertencente à elipse, é a intersecção das retas horizontal e vertical que passam por estes pontos. Por isso, o parâmetro t utilizado nas equações (4.1.2) tem a interpretação geométrica de um ângulo.

A diferencial do comprimento de arco ds foi obtida em (3.2.17):

$$ds = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} \cdot dt$$

Para a elipse:

$$ds = \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot dt \quad (4.1.3)$$

O vetor posição é obtido aplicando (4.1.2) em (3.2.18):

$$\vec{r}(t) \equiv \{x(t), y(t)\}$$

$$\vec{r} \equiv \{a \cdot \cos t, b \cdot \sin t\} \quad (4.1.4)$$

As expressões de l e m foram obtidas em (3.2.30).

$$l = \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \quad m = -\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}$$

No caso da elipse, valem:

$$l = \frac{b \cdot \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad m = \frac{a \cdot \sin t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad (4.1.5)$$

Os vetores normal e tangente ao contorno S valem:

$$\vec{t} \equiv \frac{\{-a \cdot \sin t, b \cdot \cos t\}}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad (4.1.6)$$

$$\vec{n} \equiv \frac{\{b \cdot \cos t, a \cdot \sin t\}}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad (4.1.7)$$

Com as expressões (4.1.4), (4.1.6) e (4.1.7), é possível efetuar alguns cálculos presentes nas condições de contorno das equações da torção uniforme. O produto escalar $\vec{r} \cdot \vec{t}$ vale:

$$\begin{aligned} [\vec{r}(x(t), y(t))] \cdot [\vec{t}(x(t), y(t))] &\equiv \{a \cdot \cos t, b \cdot \sin t\} \cdot \frac{\{-a \cdot \sin t, b \cdot \cos t\}}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ \vec{r} \cdot \vec{t} &= \frac{(b^2 - a^2) \cdot \sin t \cdot \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{aligned} \quad (4.1.8)$$

O produto escalar $\vec{r} \cdot \vec{n}$ vale:

$$\begin{aligned} [\vec{r}(x(t), y(t))] \cdot [\vec{n}(x(t), y(t))] &\equiv \{a \cdot \cos t, b \cdot \sin t\} \cdot \frac{\{b \cdot \cos t, a \cdot \sin t\}}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ \vec{r} \cdot \vec{n} &= \frac{ab \cdot \cos^2 t + ba \cdot \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

4.1.2 Propriedades Geométricas da Região Elíptica

A região $\mathbf{A}$, que contém $\mathbf{S}$ e seu interior, são caracterizados por:

$$\mathbf{A} = \mathbf{S} \cup \text{int}(\mathbf{S}): \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \leq 0 \quad (4.1.10)$$

A expressão (4.1.10) pode ser escrita, de forma equivalente, efetuando a mudança de variáveis cartesianas para coordenadas polares.

$$\mathbf{A}: \begin{cases} x = \mathbf{r} \cdot a \cdot \cos t \\ y = \mathbf{r} \cdot b \cdot \sin t \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [0, 2\pi] \\ \mathbf{r} \in [0, 1] \end{matrix} \quad (4.1.11)$$

Da forma como foi apresentada (4.1.11), para t e $\mathbf{r}$ crescentes, a região $\mathbf{A}$ é preenchida angularmente no sentido anti-horário e radialmente do centro $\mathbf{O}$ ($\mathbf{r} = 0$) para o contorno $\mathbf{S}$ ($\mathbf{r} = 1$).

O jacobiano da transformação (4.1.11) vale:

$$J(\mathbf{A}) = \begin{pmatrix} a \cdot \cos t & \mathbf{r} \cdot b \cdot \sin t \\ -\mathbf{r} \cdot a \cdot \sin t & \mathbf{r} \cdot b \cdot \cos t \end{pmatrix} \quad (4.1.12)$$

De acordo com (3.2.35), o fator de amplificação da área é o determinante de $J(\mathbf{A})$:

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} = \det(J(\mathbf{A})) = ab \cdot \mathbf{r} \quad (4.1.13)$$

O elemento diferencial de área é calculado segundo (3.2.36)

$$dxdy = \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \right| \cdot d\mathbf{r} dt = |ab \cdot \mathbf{r}| \cdot d\mathbf{r} dt$$

Como $r \geq 0$, então:

$$dxdy = ab \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} dt \quad (4.1.14)$$

As integrais duplas de funções $F(x, y)$ no domínio A podem então ser calculadas por meio de (4.1.15).

$$\iint_A F(x, y) \cdot dxdy = \int_0^{2p} \left[\int_0^1 F(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t)) \cdot ab \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right] \cdot dt \quad (4.1.15)$$

A área da elipse vale:

$$\mathbf{A} = \iint_A 1 \cdot dxdy = \int_0^{2p} \left(\int_0^1 1 \cdot ab \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right) \cdot dt = ab \cdot \left(\int_0^1 \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right) \left(\int_0^{2p} 1 \cdot dt \right) = ab \cdot \left(\frac{1^2}{2} \right) \cdot (2p)$$

$$\mathbf{A} = p \cdot ab \quad (4.1.16)$$

O momento de inércia em relação ao eixo y vale:

$$\begin{aligned} I_y &= \iint_A x^2 \cdot dxdy = \int_0^{2p} \left(\int_0^1 \mathbf{r}^2 \cdot a^2 \cdot \cos^2 t \cdot ab \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right) \cdot dt \\ &= ab \cdot \left(\int_0^1 \mathbf{r}^3 \cdot d\mathbf{r} \right) \left(a^2 \cdot \int_0^{2p} \cos^2 t \cdot dt \right) = ab \cdot \left(\frac{1^4}{4} \right) \cdot (a^2 \cdot p) \end{aligned}$$

$$I_y = \frac{p}{4} \cdot a^3 b \quad (4.1.17)$$

O momento de inércia em relação ao eixo x vale:

$$\begin{aligned} I_x &= \iint_A y^2 \cdot dxdy = \int_0^{2p} \left(\int_0^1 \mathbf{r}^2 \cdot b^2 \cdot \sin^2 t \cdot ab \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right) \cdot dt \\ &= ab \cdot \left(\int_0^1 \mathbf{r}^3 \cdot d\mathbf{r} \right) \left(b^2 \cdot \int_0^{2p} \sin^2 t \cdot dt \right) = ab \cdot \left(\frac{1^4}{4} \right) \cdot (b^2 \cdot p) \end{aligned}$$

$$I_x = \frac{p}{4} \cdot ab^3 \quad (4.1.18)$$

O momento polar de inércia da seção é a soma dos anteriores.

$$I_p = \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dxdy = \iint_A x^2 \cdot dxdy + \iint_A y^2 \cdot dxdy = I_y + I_x \quad (4.1.19)$$

$$I_p = \frac{p}{4} \cdot ab \cdot (b^2 + a^2) \quad (4.1.20)$$

4.1.3 Solução do Problema de Prandtl

A função (4.1.21)

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \quad (4.1.21)$$

é nula no contorno S da elipse, tanto é que:

$$f(x, y) = 0$$

é equivalente a (4.1.1), o qual representa a equação do contorno. Portanto toda função da forma de (4.1.22),

$$\Phi(x, y) = p \cdot f(x, y) \quad p \in \Re \quad (4.1.22)$$

Em que p é um número real a ser determinado, será nula no contorno.

Então, considerando (3.4.21):

$$f(x, y) = \Phi(x, y) + f_0 \quad (3.4.21)$$

Para a função de tensão de Prandtl será adotada a função de teste (4.1.23), que satisfaz à condição de contorno (3.4.16).

$$f(x, y) = p \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + f_0 \quad (4.1.23)$$

Para determinar a constante p é preciso fazer com que a função f escolhida em (4.1.23) obedeça à equação de equilíbrio (3.4.8).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2Gq$$

$$2p \cdot \left(\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} \right) = -2Gq \quad \Rightarrow \quad p = - \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot Gq \quad (4.1.24)$$

Substituindo (4.1.24) em (4.1.23):

$$f(x, y) = - \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot Gq \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + f_0 \quad (4.1.25)$$

A rotação específica q é determinada implicitamente pela condição de contorno na extremidade (3.4.26).

$$M_t = 2 \cdot \iint_A (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

Substituindo (4.1.25) em (3.4.26):

$$M_t = 2 \cdot \iint_A \left[-\left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) \right] \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y}$$

$$M_t = -2 \cdot \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot G\mathbf{q} \cdot \left[\frac{1}{a^2} \cdot \iint_A x^2 \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y} + \frac{1}{b^2} \cdot \iint_A y^2 \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y} - \iint_A 1 \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y} \right] \quad (4.1.26)$$

As integrais que aparecem em (4.1.26) foram previamente calculadas no item 4.1.2. Substituindo, obtém-se:

$$M_t = -2 \cdot G\mathbf{q} \cdot \left(\frac{a^2 b^2}{a^2 + b^2} \right) \cdot \left(\frac{\mathbf{p}a^3 b}{4a^2} + \frac{\mathbf{p}ab^3}{4b^2} - \mathbf{p}ab \right)$$

$$M_t = \left(\frac{\mathbf{p}a^3 b^3}{a^2 + b^2} \right) \cdot G\mathbf{q} \quad (4.1.27)$$

A rotação específica $\mathbf{q}$ pode ser determinada a partir de (4.1.27).

$$\mathbf{q} = \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p}a^3 b^3} \quad (4.1.28)$$

E também o momento de inércia à torção da seção elíptica, conforme definido em (3.2.68).

$$I_T = \frac{M_t}{G\mathbf{q}}$$

$$I_T = \mathbf{p} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^2 + a^2} \quad (4.1.29)$$

É importante perceber que o momento de inércia à torção I_T é uma propriedade geométrica da seção.

A função de tensão Prandtl $\mathbf{f}(x, y)$ é finalmente determinada substituindo (4.1.28) na função de teste (4.1.25):

$$\mathbf{f}(x, y) = -\frac{M_t}{\mathbf{p}ab} \cdot \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1 \right) + \mathbf{f}_0 \quad (4.1.30)$$

As tensões são calculadas substituindo (4.1.30) em (3.4.7):

$$t_{zy} = -\frac{\partial f}{\partial x} \Rightarrow t_{zy} = \frac{2M_t}{pa^3b} \cdot x \quad (4.1.31)$$

$$t_{zx} = \frac{\partial f}{\partial y} \Rightarrow t_{zx} = -\frac{2M_t}{pab^3} \cdot y \quad (4.1.32)$$

As deformações são determinadas utilizando a Lei de Hooke (2.3.4).

$$g_{zy} = \frac{t_{zy}}{G} \Rightarrow g_{zy} = \frac{2M_t}{Gpa^3b} \cdot x \quad (4.1.33)$$

$$g_{zx} = \frac{t_{zx}}{G} \Rightarrow g_{zx} = -\frac{2M_t}{Gpab^3} \cdot y \quad (4.1.34)$$

Os deslocamentos transversais são obtidos substituindo a rotação específica (4.1.28) no campo de deslocamentos (3.2.5).

$$u = -qz \cdot y$$

$$v = qz \cdot x$$

$$u(y, z) = -\frac{a^2 + b^2}{pa^3b^3} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot yz \quad (4.1.35)$$

$$v(x, z) = \frac{a^2 + b^2}{pa^3b^3} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot xz \quad (4.1.36)$$

O deslocamento longitudinal é obtido substituindo (4.1.35) e (4.1.34) em (3.4.28) e integrando:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = g_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = g_{zy} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (3.4.28)$$

Substituindo (4.1.35) e (4.1.36) em (3.4.28), obtêm-se o sistema de equações diferenciais (4.1.37) e (4.1.38).

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{b^2 - a^2}{pa^3b^3} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot y \quad (4.1.37)$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{b^2 - a^2}{pa^3b^3} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot x \quad (4.1.38)$$

Integrando (4.1.37) em relação a x e (4.1.38) em relação a y , obtêm-se, respectivamente, (4.1.39) e (4.1.40).

$$w(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{pa^3b^3} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot yx + f(y) \quad (4.1.39)$$

$$w(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{pa^3b^3} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot xy + g(x) \quad (4.1.40)$$

Subtraindo as equações (4.1.39) e (4.1.40), obtém-se a relação entre as funções de integração:

$$g(x) - f(y) = 0$$

Portanto, ao separar as variáveis:

$$g(x) = w_0 \quad f(y) = w_0 \quad (4.1.41)$$

Finalmente:

$$w(x, y) = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{pa^3b^3} \cdot xy + w_0 \quad (4.1.42)$$

As equações (4.1.35), (4.1.36) e (4.1.42) compõem o campo de deslocamentos de uma barra de seção elíptica submetida à torção uniforme. Como não ocorre translação da barra, segue que $w_0 = 0$, e:

$$\begin{aligned} u(y, z) &= -\frac{M_t}{G} \cdot \frac{a^2 + b^2}{pa^3b^3} \cdot yz \\ v(x, z) &= \frac{M_t}{G} \cdot \frac{a^2 + b^2}{pa^3b^3} \cdot xz \\ w(x, y) &= \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{pa^3b^3} \cdot xy \end{aligned} \quad (4.1.43)$$

4.1.4 Solução do Problema de Neumann

O mesmo problema pode ser resolvido utilizando a função empenamento de Saint-Venant, que deve ser harmônica, conforme (3.2.14).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} = 0$$

O resultado (exato) obtido em (4.1.42) contém apenas termos múltiplos da função $f(x, y) = xy$, o que sugere que a procura de funções (harmônicas) seja feita na forma de (3.6.3) com $n = 2$:

$$F_2(z) = z^2 = (x + i \cdot y)^2 = (x^2 - y^2) + i \cdot (2xy) \quad (4.1.44)$$

A função de teste para a função empenamento será uma combinação linear das partes real e imaginária de (4.1.44), acrescida de uma constante, conforme sugerido em (3.6.4).

$$\mathbf{y}(x, y) = p_2 \cdot (x^2 - y^2) + q_2 \cdot (2xy) + \mathbf{y}_0 \quad (4.1.45)$$

Na expressão (4.1.45), p_2 , q_2 , $\mathbf{y}_0$ são constantes a serem determinadas. O gradiente da função empenamento vale:

$$\nabla \mathbf{y}(x, y) \equiv \left\{ \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} \right\} = \{ p_2 \cdot 2x + q_2 \cdot 2y, -p_2 \cdot 2y + q_2 \cdot 2x \} \quad (4.1.46)$$

A função (4.1.45) precisa satisfazer à condição de contorno (3.2.44).

$$\nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em } S$$

No contorno S , o gradiente obtido em (4.1.46) é calculado substituindo x e y pelas equações paramétricas de S , apresentadas em (4.1.2):

$$\nabla \mathbf{y}(x(t), y(t)) \equiv \{ p_2 \cdot 2a \cdot \cos t + q_2 \cdot 2b \cdot \sin t, -p_2 \cdot 2b \cdot \sin t + q_2 \cdot 2a \cdot \cos t \} \quad (4.1.47)$$

O produto escalar $\nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n}$, que aparece em (3.2.44), vale:

$$\begin{aligned} & [\nabla \mathbf{y}(x(t), y(t))] \cdot [\vec{n}(x(t), y(t))] \equiv \\ & = \{ p_2 \cdot 2a \cdot \cos t + q_2 \cdot 2b \cdot \sin t, -p_2 \cdot 2b \cdot \sin t + q_2 \cdot 2a \cdot \cos t \} \cdot \frac{\{ b \cdot \cos t, a \cdot \sin t \}}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{aligned}$$

$$\nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \frac{\left[p_2 \cdot 2ab \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) + q_2 \cdot 2 \cdot (b^2 + a^2) \sin t \cdot \cos t \right]}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \quad (4.1.48)$$

Substituindo (4.1.48) e (4.1.8) em (3.2.44):

$$\frac{\left[p_2 \cdot 2ab \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t) + q_2 \cdot 2 \cdot (b^2 + a^2) \sin t \cdot \cos t \right]}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{(b^2 - a^2) \cdot \sin t \cdot \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

Resulta que:

$$p_2 = 0 \qquad q_2 = \frac{b^2 - a^2}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \quad (4.1.49)$$

A função empenamento de Saint-Venant $\mathbf{y}(x, y)$ é finalmente determinada a menos da constante $\mathbf{y}_0$ substituindo (4.1.49) na função de teste (4.1.45).

$$\mathbf{y}(x, y) = \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot xy + \mathbf{y}_0 \quad (4.1.50)$$

O momento de inércia à torção é dado por (3.2.83):

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{t} \cdot ds + I_p$$

Ou, de forma equivalente:

$$I_T = I_y + I_p$$

Para calcular a integral de linha I_y , é preciso aplicar a função empenamento obtida em (4.1.50) na equação do contorno.

$$\begin{aligned} \mathbf{y}(x(t), y(t)) &= \frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot (a \cdot \cos t) \cdot (b \cdot \sin t) + \mathbf{y}_0 \\ \mathbf{y} &= \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot ab \cdot \sin t \cdot \cos t + \mathbf{y}_0 \end{aligned} \quad (4.1.51)$$

Finalmente, substituindo (4.1.3), (4.1.8) e (4.1.51) em (3.2.82):

$$\begin{aligned} I_y &= -\oint_S (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds = \\ &= -\int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot ab \cdot \sin t \cdot \cos t \right] \cdot \left[\frac{(b^2 - a^2) \cdot \sin t \cdot \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right] \cdot \left[\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot dt \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
I_y &= -\int_0^{2p} \frac{ab \cdot (b^2 - a^2)^2}{b^2 + a^2} \cdot (\sin t \cdot \cos t)^2 \cdot dt = -\frac{ab \cdot (b^2 - a^2)^2}{b^2 + a^2} \cdot \int_0^{2p} \left(\frac{\sin 2t}{2} \right)^2 \cdot dt = \\
&= -\frac{ab \cdot (b^2 - a^2)^2}{b^2 + a^2} \cdot \frac{1}{4} \cdot \int_0^{2p} \frac{1 - \cos 4t}{2} \cdot dt = -\frac{ab \cdot (b^2 - a^2)^2}{b^2 + a^2} \cdot \frac{1}{8} \cdot 2p \\
I_y &= -\oint_s (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot (\bar{\mathbf{r}} \cdot \bar{\mathbf{e}}) \cdot ds = -\frac{\mathbf{p} \cdot ab \cdot (b^2 - a^2)^2}{4 \cdot (b^2 + a^2)} \quad (4.1.52)
\end{aligned}$$

O momento de inércia à torção da elipse é obtido substituindo (4.1.52) e o momento polar de inércia (4.1.20) em (3.2.83):

$$\begin{aligned}
I_T &= -\frac{\mathbf{p} \cdot ab \cdot (b^2 - a^2)^2}{4 \cdot (b^2 + a^2)} + \frac{\mathbf{p} \cdot ab \cdot (b^2 + a^2)}{4} \\
I_T &= \frac{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3}{b^2 + a^2} \quad (4.1.53)
\end{aligned}$$

A rotação específica $\mathbf{q}$ é determinada substituindo (4.1.53) em (3.2.84).

$$\mathbf{q} = \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \quad (4.1.54)$$

O deslocamento longitudinal w é obtido ao substituir (4.1.54) em (3.2.7):

$$\begin{aligned}
w &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}(x, y) = \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \cdot xy + \mathbf{y}_0 \right) \\
w(x, y) &= \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot xy + \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot \mathbf{y}_0 \quad (4.1.55)
\end{aligned}$$

Como $\mathbf{y}_0$ é uma constante arbitrária, ela pode ser escolhida de forma que:

$$\frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot \mathbf{y}_0 = w_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_0 = \frac{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3}{M_t \cdot (b^2 + a^2)} \cdot w_0 \quad (4.1.56)$$

Finalmente, considerando (4.1.56), a expressão (4.1.55) pode ser reescrita de forma equivalente na forma de (4.1.57):

$$w(x, y) = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot xy + w_0 \quad (4.1.57)$$

Como era de se esperar, (4.1.57) reproduz o resultado obtido em (4.1.42) pela aplicação da formulação de Prandtl.

4.1.5 Solução do Problema de Dirichlet

O mesmo problema pode ser resolvido utilizando a conjugada harmônica da função empenamento, que é harmônica por definição, conforme (3.3.4).

$$\frac{\partial^2 c}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 c}{\partial y^2} = 0$$

A função de teste para a função $c(x, y)$ é a mesma que foi usada para a função $y(x, y)$, com p_2 , q_2 , c_0 a serem determinados.

$$c(x, y) = p_2 \cdot (x^2 - y^2) + q_2 \cdot (2xy) + c_0 \quad (4.1.58)$$

O gradiente da função c vale:

$$\nabla c(x, y) \equiv \left\{ \frac{\partial c}{\partial x}, \frac{\partial c}{\partial y} \right\} = \{ p_2 \cdot 2x + q_2 \cdot 2y, -p_2 \cdot 2y + q_2 \cdot 2x \} \quad (4.1.59)$$

Ao longo da curva S , a função (4.1.58) precisa satisfazer a (3.3.21).

$$\nabla c \cdot \vec{t} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em } S$$

O procedimento é análogo ao adotado na formulação anterior, sempre utilizando as equações paramétricas de S , apresentadas em (4.1.2).

$$\nabla c(x(t), y(t)) \equiv \{ p_2 \cdot 2a \cdot \cos t + q_2 \cdot 2b \cdot \sin t, -p_2 \cdot 2b \cdot \sin t + q_2 \cdot 2a \cdot \cos t \} \quad (4.1.60)$$

O produto escalar $\nabla c \cdot \vec{t}$, que aparece em (3.3.21), é calculado da mesma forma:

$$\begin{aligned} & [\nabla c(x(t), y(t))] \cdot [\vec{t}(x(t), y(t))] = \\ & = \{ p_2 \cdot 2a \cdot \cos t + q_2 \cdot 2b \cdot \sin t, -p_2 \cdot 2b \cdot \sin t + q_2 \cdot 2a \cdot \cos t \} \cdot \frac{\{-a \cdot \sin t, b \cdot \cos t\}}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ & \nabla c \cdot \vec{t} = \frac{[-p_2 \cdot 2 \cdot (b^2 + a^2) \cdot \sin t \cdot \cos t + q_2 \cdot 2ab \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t)]}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{aligned} \quad (4.1.61)$$

Substituindo (4.1.61) e (4.1.8) em (3.3.21), resulta que:

$$\frac{\left[-p_2 \cdot 2 \cdot (b^2 + a^2) \cdot \sin t \cdot \cos t + q_2 \cdot 2ab \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t)\right]}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \frac{(b^2 - a^2) \cdot \sin t \cdot \cos t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

$$p_2 = -\frac{(b^2 - a^2)}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \quad q_2 = 0 \quad (4.1.62)$$

Finalmente, substituindo (4.1.62) em (4.1.58), obtém-se a função conjugada, a menos de uma constante.

$$\mathbf{c}(x, y) = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{(-x^2 + y^2)}{2} + \mathbf{c}_0 \quad (4.1.63)$$

O momento de inércia à torção é dado por (3.3.42)

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds + 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA + I_0$$

Para calcular a integral de linha de (3.3.42), é preciso aplicar as equações paramétricas do contorno S , dadas por (4.1.2), na função obtida em (4.1.63).

$$\mathbf{c}(x(t), y(t)) = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{(-a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t)}{2} + \mathbf{c}_0 \quad (4.1.64)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds &= \\ &= \int_0^{2p} \left[\frac{(b^2 - a^2)}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot \frac{(-a^2 \cdot \cos^2 t)}{+b^2 \cdot \sin^2 t} \right] \cdot \left[\frac{ab}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right] \cdot \left[\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot dt \right] \\ \oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds &= \int_0^{2p} \left[\frac{(b^2 - a^2)}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot (-a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t) \right] \cdot ab \cdot dt \\ \oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds &= \\ &= \frac{ab}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot \left[(b^2 - a^2) \cdot \left(-a^2 \cdot \int_0^{2p} \cos^2 t \cdot dt + b^2 \cdot \int_0^{2p} \sin^2 t \cdot dt \right) \right] \\ \oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds &= \frac{ab}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot \left[(b^2 - a^2) \cdot (-a^2 \cdot \mathbf{p} + b^2 \cdot \mathbf{p}) \right] \end{aligned}$$

$$\oint_S \mathbf{c} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds = \frac{\mathbf{p} \cdot ab}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot (b^2 - a^2)^2 \quad (4.1.65)$$

Para calcular a integral dupla de (3.3.42), é preciso aplicar as equações em coordenadas polares da região A , dadas por (4.1.11), na mesma função obtida em (4.1.63).

$$\mathbf{c}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t)) = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}^2 \cdot (-a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t)}{2} + \mathbf{c}_0 \quad (4.1.66)$$

Portanto, considerando ainda (4.1.14),

$$\begin{aligned} \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA &= \int_0^{2p} \left[\int_0^1 \left[\left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{\mathbf{r}^2 \cdot (-a^2 \cdot \cos^2 t + b^2 \cdot \sin^2 t)}{2} \right] \cdot ab \cdot \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \right] \cdot dt \\ \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA &= \frac{ab}{2} \cdot \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \int_0^1 \mathbf{r}^3 \cdot d\mathbf{r} \cdot \left[-a^2 \cdot \int_0^{2p} \cos^2 t \cdot dt + b^2 \cdot \int_0^{2p} \sin^2 t \cdot dt \right] \\ \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA &= \frac{ab}{2} \cdot \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{1^4}{4} \cdot [-a^2 \cdot \mathbf{p} + b^2 \cdot \mathbf{p}] \\ \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA &= \frac{\mathbf{p} \cdot ab}{8 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot (b^2 - a^2)^2 \end{aligned} \quad (4.1.67)$$

O momento de inércia à torção da elipse é obtido substituindo (4.1.65), (4.1.67) e o momento polar de inércia (4.1.20) em (3.3.42):

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{n}) \cdot ds + 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA + I_p \quad (3.3.42)$$

$$I_T = -\frac{\mathbf{p} \cdot ab}{2 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot (b^2 - a^2)^2 + 2 \cdot \frac{\mathbf{p} \cdot ab}{8 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot (b^2 - a^2)^2 + \frac{\mathbf{p} \cdot ab \cdot (b^2 + a^2)}{4}$$

$$I_T = \mathbf{p} \cdot ab \cdot \left[-\frac{(b^2 - a^2)^2}{4 \cdot (b^2 + a^2)} + \frac{(b^2 + a^2)}{4} \right]$$

$$I_T = \frac{\mathbf{p} \cdot ab}{4 \cdot (b^2 + a^2)} \cdot \left[-(b^2 - a^2)^2 + (b^2 + a^2)^2 \right]$$

$$I_T = \mathbf{p} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^2 + a^2} \quad (4.1.68)$$

A rotação específica $\mathbf{q}$ é determinada substituindo (4.1.53) em (3.2.84).

$$\mathbf{q} = \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \quad (4.1.69)$$

O deslocamento longitudinal w é obtido ao substituir (4.1.69) em (3.3.16):

$$w(x, y) = \mathbf{q} \cdot \left[- \int_{(x_0, y_0)}^{(x, y)} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds + \mathbf{y}_0 \right] \quad (3.3.16)$$

O gradiente da função $\mathbf{c}$ vale:

$$\nabla \mathbf{c}(x, y) = \left\{ \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{c}}{\partial y} \right\} \equiv \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \{-x, y\} \quad (4.1.70)$$

$$\nabla \mathbf{c}(x(t), y(t)) \equiv \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \{-a \cdot \cos t, b \cdot \sin t\} \quad (4.1.71)$$

O produto escalar $\nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n}$ vale:

$$\begin{aligned} & [\nabla \mathbf{c}(x(t), y(t))] \cdot [\vec{n}(x(t), y(t))] = \\ & = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \{-a \cdot \cos t, b \cdot \sin t\} \cdot \frac{1}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \cdot \begin{Bmatrix} b \cdot \cos t \\ a \cdot \sin t \end{Bmatrix} \\ & \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{-ab \cdot \cos^2 t + ba \cdot \sin^2 t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{-ab \cdot (\cos^2 t - \sin^2 t)}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \\ & \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} = \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{-ab \cdot \cos 2t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \end{aligned} \quad (4.1.72)$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds &= \int_0^t \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot \frac{-ab \cdot \cos 2t}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot dt \\ &= - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot ab \cdot \int_0^t \cos 2t \cdot dt \\ &= - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot ab \cdot \frac{\sin 2t}{2} = - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot ab \cdot \frac{2 \cdot \sin t \cdot \cos t}{2} \\ \int_{\mathbf{p}_0}^{\mathbf{p}} \nabla \mathbf{c} \cdot \vec{n} \cdot ds &= - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot (a \cdot \cos t) \cdot (b \cdot \sin t) \end{aligned} \quad (4.1.73)$$

Para retornar às variáveis x e y basta considerar (4.1.2):

$$\begin{cases} x = a \cdot \cos t \\ y = b \cdot \sin t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a \cdot \cos t = x \\ b \cdot \sin t = y \end{cases} \quad (4.1.74)$$

Por fim:

$$\int_{\mathbf{R}_0}^{\mathbf{P}} \nabla \mathbf{C} \cdot \vec{n} \cdot d\mathbf{s} = - \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot x \cdot y \quad (4.1.75)$$

O deslocamento longitudinal w é obtido ao substituir (4.1.69) e (4.1.75) em (3.3.16):

$$w = - \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot \left[- \left(\frac{b^2 - a^2}{b^2 + a^2} \right) \cdot xy + \mathbf{y}_0 \right]$$

$$w(x, y) = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot xy - \frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot \mathbf{y}_0 \quad (4.1.76)$$

Como $\mathbf{y}_0$ é uma constante arbitrária, ela pode ser escolhida de forma que:

$$\frac{M_t \cdot (b^2 + a^2)}{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot \mathbf{y}_0 = w_0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{y}_0 = \frac{G \cdot \mathbf{p} \cdot a^3 b^3}{M_t \cdot (b^2 + a^2)} \cdot w_0 \quad (4.1.77)$$

Finalmente, considerando (4.1.56), a expressão (4.1.55) pode ser reescrita de forma equivalente na forma de (4.1.57):

$$w(x, y) = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot xy + w_0 \quad (4.1.78)$$

Como era de se esperar, (4.1.57) reproduz o resultado obtido pelas formulações anteriores.

4.1.6 Análise de Resultados

O momento de inércia à torção é uma das propriedades geométricas da elipse, e foi calculado em (4.1.53) pela função de Prandtl, em (4.1.53) pela função empenamento, e em (4.1.68) pela função conjugada. Como as três formulações são equivalentes, o resultado obtido foi (evidentemente) o mesmo.

$$I_T = \frac{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3}{b^2 + a^2}$$

Os deslocamentos longitudinais que ocorrem na seção transversal foram calculados da mesma forma, em (4.1.42) por integração das tensões, em (4.1.57) pela função empenamento, e em (4.1.78) pela função conjugada harmônica.

$$w(x, y) = \frac{M_t}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\mathbf{p} \cdot a^3 b^3} \cdot xy + w_0$$

O gráfico de $w(x, y)$, apresentado na Figura 4.1.3, foi feito com a ajuda do software Winplot[®] no caso em que $w_0 = 0$.

Figura 4.1.3 – Empenamento da seção elíptica.

Na Figura 4.1.4, é possível perceber melhor os sinais dos deslocamentos.

Figura 4.1.4 – Empenamento da seção elíptica (2).

As tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal segundo as direções dos eixos x e y foram obtidas em (4.1.32) e (4.1.31) por função de tensão de Prandtl.

$$t_{zx} = -\frac{2M_t}{pab^3} \cdot y \qquad t_{zy} = \frac{2M_t}{pa^3b} \cdot x$$

O sinal negativo em (4.1.32) mostra que a tensão t_{zx} ocorre no sentido oposto ao representado na Figura 3.2.5. A composição dessas duas tensões resulta na tensão de cisalhamento:

$$\begin{aligned} \vec{t}_A &= \left(-\frac{2M_t}{pab^3} \cdot y \right) \cdot \hat{e}_x + \left(\frac{2M_t}{pa^3b} \cdot x \right) \cdot \hat{e}_y \\ \vec{t}_A &= \frac{2M_t}{pa^2b^2} \cdot \left[-a \cdot \left(\frac{y}{b} \right) \cdot \hat{e}_x + b \cdot \left(\frac{x}{a} \right) \cdot \hat{e}_y \right] \end{aligned} \quad (4.1.79)$$

Ao utilizar a substituição de variáveis (4.1.11), a expressão (4.1.79) fica reduzida a uma forma muito mais simples:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}: \begin{cases} x = \mathbf{r} \cdot a \cdot \cos t \\ y = \mathbf{r} \cdot b \cdot \sin t \end{cases} & \begin{aligned} t &\in [0, 2\pi] \\ \mathbf{r} &\in [0, 1] \end{aligned} \\ \vec{t}_A &= \frac{2M_t}{pa^2b^2} \cdot \left[-a \cdot \left(\frac{\mathbf{r} \cdot b \cdot \sin t}{b} \right) \cdot \hat{e}_x + b \cdot \left(\frac{\mathbf{r} \cdot a \cdot \cos t}{a} \right) \cdot \hat{e}_y \right] \end{aligned}$$

$$\vec{t}_A = \frac{2M_t}{\rho a^2 b^2} \cdot \vec{r} \cdot [-a \cdot \sin t \cdot \hat{e}_x + b \cdot \cos t \cdot \hat{e}_y]$$

De forma mais simples:

$$\vec{t}_A = \frac{2M_t}{\rho a^2 b^2} \cdot \vec{r} \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \left(\frac{-a \cdot \sin t \cdot \hat{e}_x + b \cdot \cos t \cdot \hat{e}_y}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}} \right) \quad (4.1.80)$$

Ao comparar (4.1.80) com (4.1.6), fica demonstrado que as tensões de cisalhamento são tangentes ao contorno.

$$\vec{t} = \frac{-a \cdot \sin t \cdot \hat{e}_x + b \cdot \cos t \cdot \hat{e}_y}{\sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t}}$$

$$\vec{t}_A = \frac{2M_t}{\rho a^2 b^2} \cdot \vec{r} \cdot \sqrt{a^2 \sin^2 t + b^2 \cos^2 t} \cdot \vec{t} \quad (4.1.81)$$

Além disso, pela expressão (4.1.81) e pela Figura 4.1.5, pode-se observar que a tensão de cisalhamento é nula na origem ($\vec{r}=0$) e cresce linearmente até o contorno ($\vec{r}=1$).

Figura 4.1.5 – Tensões de cisalhamento na seção elíptica.

4.1.7 Seção Transversal Circular

Em barras de seção circular, utiliza-se a solução da função elíptica com

$$a = b \quad (4.1.82)$$

De (4.1.82) decorre que o deslocamento longitudinal (4.1.42) é nulo:

$$u(y, z) = -\frac{2M}{Gpa^4} \cdot yz \quad v(x, z) = \frac{2M}{Gpa^4} \cdot xz \quad w(x, y) = 0 \quad (4.1.83)$$

O resultado (4.1.83) confirma que as seções circulares são aquelas que não empenam na torção uniforme.

Este mesmo resultado pode ser obtido pela condição de contorno na superfície lateral da barra na solução do problema de Dirichlet (3.3.28):

$$c(x, y) = \frac{1}{2} \cdot (x^2 + y^2) + c_1 \quad \text{Em } S.$$

O contorno S da circunferência tem como equação:

$$S: x^2 + y^2 - a^2 = 0 \quad (4.1.84)$$

A substituição de (4.1.84) em (3.3.28) leva a:

$$c(x, y) = \frac{a^2}{2} + c_1 \quad (4.1.85)$$

Ou seja, a função conjugada harmônica é constante. Substituindo (4.1.85) em (3.3.44), resulta:

$$w(x, y) = w_0 \quad (4.1.86)$$

4.2 SEÇÃO TRANSVERSAL TRIANGULAR

Na Figura 4.2.1 é mostrada uma seção triangular isósceles.

Figura 4.2.1 – Seção triangular.

4.2.1 Propriedades geométricas do contorno

O contorno $S = S_1 \cup S_2 \cup S_3$ do triângulo é caracterizado por:

$$\begin{aligned} S_1 : 3b \cdot x + a \cdot y - 2 \cdot ab &= 0 & x \in [-a, a] \\ S_2 : -3b \cdot x + a \cdot y - 2 \cdot ab &= 0 & y \in [-b, b] \\ S_3 : y + b &= 0 \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Uma parametrização para as curvas que compõem S é a seguinte:

$$S_1 : \begin{cases} x = x_1(t) = t \\ y = y_1(t) = -\frac{3b}{a} \cdot t + 2b \end{cases} \quad t \in [0, a] \quad (4.2.2)$$

$$\mathbf{S}_2 : \begin{cases} x = x_2(t) = t \\ y = y_2(t) = \frac{3b}{a} \cdot t + 2b \end{cases} \quad t \in [-a, 0] \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{S}_3 : \begin{cases} x = x_1(t) = t \\ y = y_3(t) = -b \end{cases} \quad t \in [-a, a] \quad (4.2.4)$$

As parametrizações (4.2.2), (4.2.3) e (4.2.4) implicam na orientação da curva conforme mostra a Figura 2.1.1.

De forma geral, as curvas $\mathbf{S}_k$ podem ser parametrizadas da seguinte forma:

$$\mathbf{S}_k : \begin{cases} x = t \\ y = y_k(t) \end{cases} \quad (4.2.5)$$

A função $y_k(t)$ é definida conforme cada superfície.

A diferencial do comprimento de arco vale:

$$ds = \sqrt{1^2 + (y')^2} \cdot dt \quad (3.2.17)$$

O vetor posição é obtido aplicando (4.1.2) em (3.2.18):

$$\vec{r} \equiv \{t, y(t)\} \quad (4.2.6)$$

As componentes escalares do versor normal são as seguintes.

$$l = \frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad m = -\frac{1}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (3.2.30)$$

Os vetores tangente e normal valem:

$$\vec{t} \equiv \frac{\{1, y'\}}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (4.2.7)$$

$$\vec{n} \equiv \frac{\{y', -1\}}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (4.2.8)$$

O produto escalar $\vec{r} \cdot \vec{t}$ vale:

$$\vec{r} \cdot \vec{t} = \{t, y(t)\} \cdot \frac{\{1, y'\}}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad \Rightarrow \quad \vec{r} \cdot \vec{t} = \frac{t + y \cdot y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (4.2.9)$$

O produto escalar $\vec{r} \cdot \vec{n}$ vale:

$$\vec{r} \cdot \vec{n} = \{t, y(t)\} \cdot \frac{\{y', -1\}}{\sqrt{1+(y')^2}} \Rightarrow \vec{r} \cdot \vec{n} = \frac{t \cdot y' - y}{\sqrt{1+(y')^2}} \quad (4.2.10)$$

4.2.2 Propriedades geométricas da região triangular

A região A é caracterizada pelo contorno S e seu interior.

$$\begin{aligned} S_1: x_1(y) &= -\frac{a}{3b} \cdot y + \frac{2a}{3} \\ S_2: x_2(y) &= \frac{a}{3b} \cdot y - \frac{2a}{3} \\ S_3: y &= -b \end{aligned} \quad (4.2.11)$$

Conforme se observa na Figura 4.2.2, para $y_p \in [-b, 2b]$ fixado, o ponto P possui coordenada $x_p \in [x_2(y_p), x_1(y_p)]$.

Figura 4.2.2 – Região triangular.

Com isso, as integrais duplas de funções $F(x, y)$ no domínio A podem então ser calculadas por meio de (4.2.12), não havendo necessidade de efetuar mudanças de variáveis:

$$\iint_A F(x, y) \cdot dx dy = \int_{-b}^{2b} \left[\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} F(x, y) \cdot dx \right] \cdot dy \quad (4.2.12)$$

A área do triângulo vale:

$$A = \iint_A 1 \cdot dx dy = \int_{-b}^{2b} \left(\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} 1 \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{-b}^{2b} (x_1(y) - x_2(y)) \cdot dy = \int_{-b}^{2b} \left(-\frac{2a}{3b} \cdot y + \frac{4a}{3} \right) \cdot dy$$

$$A = 3 \cdot ab \quad (4.2.13)$$

O momento de inércia em relação ao eixo y vale:

$$I_y = \iint_A x^2 \cdot dx dy = \int_{-b}^{2b} \left(\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} x^2 \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{-b}^{2b} \frac{1}{3} \cdot (x_1^3(y) - x_2^3(y)) \cdot dy$$

$$= \int_{-b}^{2b} \frac{1}{3} \cdot \frac{2a^3}{27b^3} \cdot (-y + 2b)^3 \cdot dy$$

$$I_y = \frac{a^3 b}{2} \quad (4.2.14)$$

O momento de inércia em relação ao eixo x vale:

$$I_x = \iint_A y^2 \cdot dx dy = \int_{-b}^{2b} \left(\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} y^2 \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{-b}^{2b} y^2 \cdot (x_1(y) - x_2(y)) \cdot dy$$

$$= \int_{-b}^{2b} y^2 \cdot \left(-\frac{2a}{3b} \cdot y + \frac{4a}{3} \right) \cdot dy$$

$$I_x = \frac{3 \cdot ab^3}{2} \quad (4.2.15)$$

O momento polar de inércia da seção é a soma dos anteriores, conforme (4.1.19).

$$I_p = I_y + I_x$$

$$I_p = \frac{ab \cdot (a^2 + 3 \cdot b^2)}{2} \quad (4.2.16)$$

4.2.3 Solução do problema de Prandtl

A função de teste (4.2.17) satisfaz à condição de contorno (3.4.16).

$$\begin{aligned} f(x, y) &= p \cdot (-3bx + ay - 2ab) \cdot (3bx + ay - 2ab) \cdot (y + b) + f_0 \\ f(x, y) &= p \cdot (-9b^2 \cdot x^2 y + a^2 \cdot y^3 - 3a^2 b \cdot y^2 - 9b^3 \cdot x^2 + 4a^2 b^3) + f_0 \end{aligned} \quad (4.2.17)$$

A constante p é determinada forçando a obediência a (3.4.8).

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = p \cdot [(-18b^2 + 6a^2) \cdot y - (6a^2 b + 18b^3)] = -2Gq$$

Para que haja solução é necessário que

$$-18b^2 + 6a^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 3b^2 \quad (4.2.18)$$

Portanto, para que haja solução analítica, é necessário que o triângulo isósceles seja equilátero de altura $3b$ e lado $2\sqrt{3}b$. Nas condições de (4.2.18):

$$p = \frac{Gq}{18b^3} \quad (4.2.19)$$

Substituindo (4.2.19) e (4.2.18) em (4.2.17):

$$\begin{aligned} f(x, y) &= \frac{Gq}{18b} \cdot (-3 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y - 2\sqrt{3}b) \cdot (3 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y - 2\sqrt{3}b) \cdot (y + b) + f_0 \\ f(x, y) &= \frac{Gq}{18b} \cdot (-9x^2 y + 3y^3 - 9by^2 - 9bx^2 + 12b^3) + f_0 \end{aligned} \quad (4.2.20)$$

A determinação de q é feita substituindo-se (4.2.20) em (3.4.26).

$$M_t = 2 \cdot \iint_A (f - f_0) \cdot dx dy \quad (3.4.26)$$

$$M_t = 2 \cdot \frac{Gq}{18b} \cdot \left[\begin{aligned} &-9 \cdot \iint_A x^2 y \cdot dx dy + 3 \cdot \iint_A y^3 \cdot dx dy \\ &-9b^2 \cdot \iint_A y^2 \cdot dx dy - 9b \cdot \iint_A x^2 \cdot dx dy + 12b^3 \cdot \iint_A 1 \cdot dx dy \end{aligned} \right] \quad (4.2.21)$$

Algumas das integrais que aparecem em (4.2.21) foram calculadas previamente em (4.2.13), (4.2.14) e (4.2.15).

$$\iint_A 1 \cdot dx dy = A = 3 \cdot ab = 3 \cdot (2\sqrt{3}b) \cdot b = 3\sqrt{3} \cdot b^2 \quad (4.2.22)$$

$$\iint_{\mathbf{A}} y^2 \cdot dx dy = I_x = \frac{3 \cdot ab^3}{2} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}b) \cdot b^3}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot b^4 \quad (4.2.23)$$

$$\iint_{\mathbf{A}} x^2 \cdot dx dy = I_y = \frac{a^3 b}{2} = \frac{(\sqrt{3}b)^3 \cdot b}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot b^4 \quad (4.2.24)$$

As outras integrais valem:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{A}} y^3 \cdot dx dy &= \int_{-b}^{2b} \left(\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} y^3 \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{-b}^{2b} y^3 \cdot \left(-\frac{2a}{3b} \cdot y + \frac{4a}{3} \right) \cdot dy \\ &= \frac{3ab^4}{5} = \frac{3 \cdot (\sqrt{3}b) \cdot b^4}{5} = \frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot b^5 \end{aligned} \quad (4.2.25)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{A}} x^2 y \cdot dx dy &= \int_{-b}^{2b} \left(\int_{x_2(y)}^{x_1(y)} x^2 y \cdot dx \right) \cdot dy = \int_{-b}^{2b} y \cdot \left[\frac{1}{3} \cdot \frac{2a^3}{27b^3} \cdot (-y + 2b)^3 \right] \cdot dy \\ &= -\frac{a^3 \cdot b^2}{5} = -\frac{(\sqrt{3}b)^3 \cdot b^2}{5} = -\frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot b^5 \end{aligned} \quad (4.2.26)$$

Substituindo as integrais em (4.2.21), obtém-se que:

$$\begin{aligned} M_t &= \frac{Gq}{9b} \cdot \left[-9 \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot b^5 \right) + 3 \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot b^5 \right) \right. \\ &\quad \left. - 9b \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot b^4 \right) - 9b \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot b^4 \right) + 12b^3 \cdot (3\sqrt{3}b^2) \right] \\ M_t &= \left(\frac{9\sqrt{3} \cdot b^4}{5} \right) \cdot Gq \end{aligned} \quad (4.2.27)$$

A rotação específica q pode ser determinada a partir de (4.2.27).

$$q = \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \quad (4.2.28)$$

E também o momento de inércia à torção da seção triangular de lado $2\sqrt{3}b$.

$$I_T = \frac{9\sqrt{3} \cdot b^4}{5} \quad (4.2.29)$$

A função de Prandtl é determinada substituindo (4.2.28) em (4.2.20).

$$f(x, y) = \frac{5 \cdot M_t}{162\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (-3 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y - 2\sqrt{3}b) \cdot (3 \cdot x + \sqrt{3} \cdot y - 2\sqrt{3}b) \cdot (y + b) + f_0$$

$$f(x, y) = \frac{5 \cdot M_t}{162\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (-9x^2y + 3y^3 - 9by^2 - 9bx^2 + 12b^3) + f_0 \quad (4.2.30)$$

As tensões de cisalhamento podem ser calculadas por meio de (3.4.7) e as distorções por meio de (2.3.4).

$$t_{zy} = -\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (2xy + 2bx)$$

$$g_{zy} = \frac{t_{zy}}{G} = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (2xy + 2bx) \quad (4.2.31)$$

$$t_{zx} = \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (-x^2 + y^2 - 2by)$$

$$g_{zx} = \frac{t_{zx}}{G} = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^2 + y^2 - 2by) \quad (4.2.32)$$

Os deslocamentos u e v são obtidos substituindo (4.2.28) em (3.2.8).

$$u = -qz \cdot y \quad \Rightarrow \quad u(y, z) = -\frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot yz \quad (4.2.33)$$

$$v = qz \cdot x \quad \Rightarrow \quad v(x, z) = \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot xz \quad (4.2.34)$$

A partir de (2.1.10), é possível obter as seguintes equações diferenciais:

$$g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial y} = g_{zy} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad (4.2.35)$$

$$g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial w}{\partial x} = g_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z} \quad (4.2.36)$$

Substituindo-se os resultados obtidos:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (2xy) \quad (4.2.35)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^2 + y^2) \quad (4.2.36)$$

O deslocamento $w(x, y)$ é determinado integrando (4.2.35) em relação a y e (4.2.36) em relação a x :

$$w(x, y) = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (xy^2) + g(x) \quad (4.2.37)$$

$$w(x, y) = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot \left(\frac{-x^3}{3} + xy^2 \right) + f(y) \quad (4.2.38)$$

Subtraindo as equações (4.2.37) e (4.2.38) membro a membro, obtém-se:

$$g(x) - f(y) = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right)$$

As funções $g(x)$ e $f(y)$ são determinadas por separação de variáveis:

$$g(x) = \frac{5}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot \left(\frac{x^3}{3} \right) + w_0 \quad f(y) = w_0 \quad (4.2.39)$$

Onde $w_0 \in \mathbb{R}$ é uma constante.

Ao substituir (4.2.39) em (4.2.37) ou (4.2.38), obtém-se, finalmente, o deslocamento longitudinal na barra.

$$w(x, y) = \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^3 + 3y^2x) + w_0 \quad (4.2.40)$$

As equações (4.2.33), (4.2.34) e (4.2.40) compõem o campo de deslocamentos de um problema de torção uniforme em uma barra de seção em forma de triângulo equilátero de altura $3b$ e lado $2\sqrt{3}b$.

Nos problemas de torção uniforme não ocorre translação da barra; então $w_0 = 0$, e:

$$\begin{aligned} u(y, z) &= -\frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot yz \\ v(x, z) &= \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot xz \\ w(x, y) &= \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^3 + 3y^2x) \end{aligned} \quad (4.2.41)$$

4.2.4 Solução do problema de Neumann

A função de teste para a função empenamento de Saint-Venant, que precisa ser harmônica, pode ser escrita na forma de (3.6.4), com $n = 3$.

$$z^3 = (x + i \cdot y)^3 = (x^3 - 3xy^2) + i \cdot (-3x^2y + y^3)$$

$$y(x, y) = p_3 \cdot (x^3 - 3xy^2) + q_3 \cdot (3x^2y - y^3) + y_0 \quad (4.2.42)$$

O gradiente da função empenamento vale:

$$\nabla y = \left\{ \frac{\partial y}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial y} \right\} = 3 \cdot \{ p_3 \cdot (x^2 - y^2) + q_3 \cdot (2xy), p_3 \cdot (-2xy) + q_3 \cdot (x^2 - y^2) \} \quad (4.2.43)$$

No contorno, a função (4.2.43) precisa satisfazer a (3.2.44).

$$\nabla y \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em } S$$

Colocando as paramétricas:

$$\nabla y = 3 \cdot \{ p_3 \cdot (t^2 - y^2) + q_3 \cdot (2t \cdot y), p_3 \cdot (-2t \cdot y) + q_3 \cdot (t^2 - y^2) \} \quad (4.2.44)$$

O produto escalar $\nabla y \cdot \vec{n}$, que aparece em (3.2.44), é calculado da mesma forma:

$$\begin{aligned} \nabla y \cdot \vec{n} &= 3 \cdot \{ p_3 \cdot (t^2 - y^2) + q_3 \cdot (2t \cdot y), p_3 \cdot (-2t \cdot y) + q_3 \cdot (t^2 - y^2) \} \cdot \frac{\{y', -1\}}{\sqrt{1+(y')^2}} \\ \nabla y \cdot \vec{n} &= \frac{3 \cdot \left(p_3 \cdot [y' \cdot (t^2 - y^2) + 2t \cdot y] + q_3 \cdot [2t \cdot y \cdot y' - (t^2 - y^2)] \right)}{\sqrt{1+(y')^2}} \end{aligned} \quad (4.2.45)$$

Substituindo (4.2.45) e (4.2.9) em (3.2.44):

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot \left(p_3 \cdot [y' \cdot (t^2 - y^2) + 2t \cdot y] + q_3 \cdot [2t \cdot y \cdot y' - (t^2 - y^2)] \right)}{\sqrt{1+(y')^2}} &= \frac{t + y \cdot y'}{\sqrt{1+(y')^2}} \\ 3 \cdot \left(p_3 \cdot [y' \cdot (t^2 - y^2) + 2t \cdot y] + q_3 \cdot [2t \cdot y \cdot y' - (t^2 - y^2)] \right) &= t + y \cdot y' \end{aligned} \quad (4.2.46)$$

É preciso agora aplicar (4.2.46) para cada uma das funções $y_k(t)$ apresentadas na Tabela 4.1.

Tabela 4.1 – Parametrização do contorno.

S_k	$y_k(t)$	$y_k'(t)$	$[y_k(t)]^2$	$t^2 - [y_k(t)]^2$
S_1	$-\frac{3b}{a} \cdot t + 2b$	$-\frac{3b}{a}$	$\frac{9b^2}{a^2} \cdot t^2 - \frac{12b}{a} \cdot b \cdot t + 4b^2$	$\left(1 - \frac{9b^2}{a^2}\right) \cdot t^2 + \frac{12b}{a} \cdot b \cdot t - 4b^2$
S_2	$\frac{3b}{a} \cdot t + 2b$	$\frac{3b}{a}$	$\frac{9b^2}{a^2} \cdot t^2 + \frac{12b}{a} \cdot b \cdot t + 4b^2$	$\left(1 - \frac{9b^2}{a^2}\right) \cdot t^2 - \frac{12b}{a} \cdot b \cdot t - 4b^2$
S_3	$-b$	0	b^2	$t^2 - b^2$

Como a parcela $\frac{b}{a}$ aparece com frequência, então será definido um parâmetro adimensional auxiliar $\mathbf{x}$, estritamente positivo¹⁰.

$$\mathbf{x} = \frac{b}{a} \quad \mathbf{x} > 0 \quad (4.2.47)$$

As superfícies S_1 e S_2 podem ser analisadas de forma conjunta, ao se definir um outro parâmetro adimensional $\mathbf{k}$, que assume valores conforme a Tabela 4.2.

Tabela 4.2 – Análise das superfícies S_1 e S_2 .

S_k	$\mathbf{k}_k$	$y(t)$	$y'(t)$	$t^2 - [y(t)]^2$
S_1	-1	$(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b$	$\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}$	$(1 - 9\mathbf{x}^2) \cdot t^2 - (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b) \cdot t - 4b^2$
S_2	1			

Substituindo os resultados em (4.2.46):

$$3 \cdot \left(\begin{array}{l} p_3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} [\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}] \cdot \left[(1 - 9\mathbf{x}^2) \cdot t^2 - (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b) \cdot t - 4b^2 \right] \\ + 2t \cdot [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b] \end{array} \right\} \\ + q_3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2t \cdot [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b] \cdot [\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}] \\ - \left[(1 - 9\mathbf{x}^2) \cdot t^2 - (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b) \cdot t - 4b^2 \right] \end{array} \right\} \end{array} \right) = t + [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b] \cdot [\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}]$$

¹⁰ Quando $\mathbf{x} = 0$, o triângulo da Figura 4.2.1 se degenera num segmento de reta de comprimento $2a$, centrado em $\mathbf{O}$. Valores negativos de $\mathbf{x}$ não possuem significado físico

$$3 \cdot \left(\begin{array}{l} \left\{ p_3 \cdot [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot (3 - 9\mathbf{x}^2)] \right. \\ \left. + q_3 \cdot [2 \cdot (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) - (1 - 9\mathbf{x})] \right\} \cdot t^2 \\ + \left\{ p_3 \cdot [-(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b) + 4b] \right. \\ \left. + q_3 \cdot [4b \cdot (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) + (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b)] \right\} \cdot t \\ + \left\{ p_3 \cdot [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot (-4b^2)] \right. \\ \left. + q_3 \cdot [4b^2] \right\} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 \cdot t^2 \\ + [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) + 1] \cdot t \\ + 2b \cdot (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \end{pmatrix}$$

Mas, por definição, $\mathbf{k} = 1$ ou $\mathbf{k} = -1$. Logo, $\mathbf{k}^2 = 1$.

$$3 \cdot \left(\begin{array}{l} \left\{ p_3 \cdot [\mathbf{k} \cdot (9\mathbf{x} - 27\mathbf{x}^3)] \right\} \cdot t^2 \\ \left\{ + q_3 \cdot [-1 + 9\mathbf{x} + 18\mathbf{x}^2] \right\} \\ + \left\{ p_3 \cdot [(4 - 36\mathbf{x}^2) \cdot b] \right\} \cdot t + \left\{ p_3 \cdot [-\mathbf{k} \cdot (12\mathbf{x}) \cdot b^2] \right\} \\ \left\{ + q_3 \cdot [\mathbf{k} \cdot (24\mathbf{x}) \cdot b] \right\} + \left\{ + q_3 \cdot [(4) \cdot b^2] \right\} \end{array} \right) = \begin{pmatrix} 0 \cdot t^2 \\ + (1 + 9\mathbf{x}^2) \cdot t + \mathbf{k} \cdot 6\mathbf{x} \cdot b \end{pmatrix}$$

As constantes p_3 e q_3 devem satisfazer às seguintes equações:

$$3 \cdot (p_3 \cdot [\mathbf{k} \cdot (9\mathbf{x} - 27\mathbf{x}^3)] + q_3 \cdot [-1 + 9\mathbf{x} + 18\mathbf{x}^2]) = 0 \quad (4.2.48)$$

$$3 \cdot (p_3 \cdot [(4 - 36\mathbf{x}^2) \cdot b] + q_3 \cdot [\mathbf{k} \cdot (24\mathbf{x}) \cdot b]) = (1 + 9\mathbf{x}^2) \quad (4.2.49)$$

$$3 \cdot (p_3 \cdot [-\mathbf{k} \cdot (12\mathbf{x}) \cdot b^2] + q_3 \cdot [(4) \cdot b^2]) = \mathbf{k} \cdot 6\mathbf{x} \cdot b \quad (4.2.50)$$

Este é um sistema de três equações a duas incógnitas. Para resolvê-lo, é preciso encontrar a solução do sistema formado por duas dessas equações e verificar se essa solução satisfaz à outra equação.

O sistema escolhido é o formado pelas equações (4.2.49) e (4.2.50):

$$3 \cdot \begin{bmatrix} (4 - 36\mathbf{x}^2) \cdot b & \mathbf{k} \cdot (24\mathbf{x}) \cdot b \\ -\mathbf{k} \cdot (12\mathbf{x}) \cdot b^2 & (4) \cdot b^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + 9\mathbf{x}^2 \\ \mathbf{k} \cdot 6\mathbf{x} \cdot b \end{Bmatrix}$$

Simplificando:

$$12b \cdot \begin{bmatrix} (1 - 9\mathbf{x}^2) & \mathbf{k} \cdot (6\mathbf{x}) \\ -\mathbf{k} \cdot (3\mathbf{x}) & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + 9\mathbf{x}^2 \\ \mathbf{k} \cdot 6\mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (4.2.51)$$

A solução de (4.2.51) é:

$$\begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{-1}{12 \cdot b \cdot (1 - 9\mathbf{x}^2 + 18 \cdot \mathbf{k}^2 \cdot \mathbf{x}^2)} \begin{Bmatrix} (-1 + (36 \cdot \mathbf{k}^2 - 9) \cdot \mathbf{x}^2) \\ 9 \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \cdot (-1 + 3 \cdot \mathbf{x}^2) \end{Bmatrix} \quad (4.2.52)$$

Mas, por definição, $\mathbf{k}^2 = 1$. Então:

$$\begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{-1}{12 \cdot b \cdot (1 + 9\mathbf{x}^2)} \begin{Bmatrix} (-1 + 27 \cdot \mathbf{x}^2) \\ 9 \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \cdot (-1 + 3 \cdot \mathbf{x}^2) \end{Bmatrix} \quad (4.2.53)$$

Os valores de p_3 e q_3 precisam ainda satisfazer a (4.2.48).

$$3 \cdot \left(p_3 \cdot [\mathbf{k} \cdot (9\mathbf{x} - 27\mathbf{x}^3)] + q_3 \cdot [-1 + 9\mathbf{x} + 18\mathbf{x}^2] \right) = 0$$

A equação (4.2.48) pode ser reescrita na forma matricial

$$3 \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{k} \cdot (9\mathbf{x} - 27\mathbf{x}^3) & -1 + 9\mathbf{x} + 18\mathbf{x}^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Substituindo (4.2.53) em (4.2.48), obtém-se:

$$\mathbf{k} \cdot \frac{81}{4b} \cdot \frac{\mathbf{x}^2 \cdot (-1 + 3\mathbf{x}^2) \cdot (-1 + \mathbf{x})}{(1 + 9\mathbf{x}^2)} = 0 \quad (4.2.54)$$

A equação (4.2.54) possui cinco raízes:

$$\mathbf{x}^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}| = 0 \quad (4.2.55)$$

$$(-1 + 3\mathbf{x}^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad |\mathbf{x}| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.2.56)$$

$$(-1 + \mathbf{x}) = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{x} = 1 \quad (4.2.57)$$

Os valores nulos ou negativos de $\mathbf{x}$ são desprovidos de significado físico e devem ser descartados.

Os valores de p_3 e q_3 decorrentes de cada $\mathbf{x}$ válido são apresentados na Tabela 4.3.

Tabela 4.3 – Soluções para as superfícies S_1 e S_2 .

x	p_3	q_3
$x = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{6 \cdot b}$	0
$x = 1$	$\frac{-13}{60 \cdot b}$	$\frac{-9 \cdot k}{60 \cdot b}$

Por fim, a expressão (4.2.46) precisa ser aplicada na superfície S_3 , utilizando as condições apresentadas na Tabela 4.1.

$$3 \cdot \left(p_3 \cdot \left[y' \cdot (t^2 - y^2) + 2t \cdot y \right] + q_3 \cdot \left[2t \cdot y \cdot y' - (t^2 - y^2) \right] \right) = t + y \cdot y'$$

Na superfície S_3 ,

$$y(t) = -b \qquad y'(t) = 0 \qquad t^2 - [y(t)]^2 = t^2 - b^2 \quad (4.2.58)$$

Substituindo (4.2.58) em (4.2.46):

$$3 \cdot \left\{ p_3 \cdot [2t \cdot (-b)] + q_3 \cdot [-(t^2 - b^2)] \right\} = t$$

$$3 \cdot \left([q_3 \cdot (-1)] \cdot t^2 + [p_3 \cdot (-2b)] \cdot t + [q \cdot (b^2)] \right) = t \quad (4.2.59)$$

A solução de (4.2.59) é imediata:

$$p_3 = -\frac{1}{6b} \qquad q_3 = 0 \quad (4.2.60)$$

Este resultado só é o mesmo de (4.2.53), quando $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, como mostrado na

Tabela 4.3. Portanto, para que haja solução, é necessário que:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \qquad \Rightarrow \qquad a = \sqrt{3} \cdot b \quad (4.2.61)$$

Este resultado reproduz o que foi obtido em (4.2.18), ou seja, para que haja solução analítica fechada, o triângulo precisa ser equilátero de altura $3b$ e lado $2\sqrt{3}b$. Neste caso:

$$p = -\frac{1}{6b} \qquad q = 0 \quad (4.2.60)$$

A função empenamento de Saint-Venant $y(x, y)$ é finalmente determinada, para o triângulo equilátero, substituindo (4.2.60) na função de teste (4.2.42).

$$y(x, y) = -\frac{1}{6b} \cdot (x^3 - 3xy^2) + y_0 \quad (4.2.62)$$

O momento de inércia à torção foi apresentado em (3.2.69).

$$I_T = \iint_A \left(x \cdot \frac{\partial y}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{2b} \cdot (x^2 - y^2) \qquad \frac{\partial y}{\partial y} = -\frac{1}{2b} \cdot (-2xy)$$

$$I_T = -\frac{1}{2b} \cdot \iint_A [x \cdot (-2xy) - y \cdot (x^2 - y^2)] \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

$$I_T = \frac{3}{2b} \cdot \iint_A x^2 y \cdot dA - \frac{1}{2b} \cdot \iint_A y^3 \cdot dA + \iint_A x^2 \cdot dA + \iint_A y^2 \cdot dA \quad (4.2.63)$$

Substituindo os valores das integrais:

$$I_T = \frac{3}{2b} \cdot \left(-\frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot b^5 \right) - \frac{1}{2b} \cdot \left(\frac{3\sqrt{3}}{5} \cdot b^5 \right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot b^4 \right) + \left(\frac{3\sqrt{3}}{2} \cdot b^4 \right)$$

$$I_T = \frac{9\sqrt{3}}{5} \cdot b^4 \quad (4.2.64)$$

A rotação específica q é determinada substituindo (4.2.64) em (3.2.84).

$$q = \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \quad (4.2.65)$$

Este resultado corresponde ao obtido anteriormente em (4.2.28). O deslocamento longitudinal é determinado substituindo (4.2.65) em (3.2.7).

$$w(x, y) = \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot \left[\frac{1}{6b} \cdot (-x^3 + 3xy^2) + y_0 \right]$$

$$w(x, y) = \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^3 + 3xy^2) + \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot y_0$$

Como y_0 é uma constante arbitrária, ela pode ser escolhida de forma que:

$$\frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot y_0 = w_0 \quad \Rightarrow \quad y_0 = \frac{9\sqrt{3} \cdot b^4 \cdot G}{5 \cdot M_t} \cdot w_0 \quad (4.2.66)$$

Finalmente é obtido o deslocamento transversal:

$$w(x, y) = \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^3 + 3xy^2) + w_0 \quad (4.2.67)$$

4.2.5 Solução do problema de Dirichlet

A função de teste para a função $c(x, y)$ é a mesma que foi usada para a função $y(x, y)$, com p_3, q_3, c_0 a serem determinados.

$$c(x, y) = p_3 \cdot (x^3 - 3xy^2) + q_3 \cdot (3x^2y - y^3) + c_0 \quad (4.2.68)$$

O gradiente da função c , calculado ao longo do contorno, vale:

$$\nabla c = 3 \cdot \left\{ p_3 \cdot (t^2 - y^2) + q_3 \cdot (2t \cdot y), p_3 \cdot (-2t \cdot y) + q_3 \cdot (t^2 - y^2) \right\} \quad (4.2.69)$$

No contorno, a função (4.2.43) precisa satisfazer a (3.3.21).

$$\nabla c \cdot \vec{t} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em } S$$

O produto escalar $\nabla c \cdot \vec{t}$, calculado no contorno, vale:

$$\begin{aligned} \nabla c \cdot \vec{t} &= 3 \cdot \left\{ p_3 \cdot (t^2 - y^2) + q_3 \cdot (2t \cdot y), p_3 \cdot (-2t \cdot y) + q_3 \cdot (t^2 - y^2) \right\} \cdot \frac{\{1, y'\}}{\sqrt{1 + (y')^2}} \\ \nabla c \cdot \vec{t} &= \frac{3 \cdot \left(p_3 \cdot \left[(t^2 - y^2) - y' \cdot 2t \cdot y \right] + q_3 \cdot \left[2t \cdot y + y' \cdot (t^2 - y^2) \right] \right)}{\sqrt{1 + (y')^2}} \end{aligned} \quad (4.2.70)$$

Substituindo (4.2.70) e (4.2.7) em (3.3.21):

$$\begin{aligned} \frac{3 \cdot \left(p_3 \cdot \left[(t^2 - y^2) - y' \cdot 2t \cdot y \right] + q_3 \cdot \left[2t \cdot y + y' \cdot (t^2 - y^2) \right] \right)}{\sqrt{1 + (y')^2}} &= \frac{t + y \cdot y'}{\sqrt{1 + (y')^2}} \\ 3 \cdot \left(p_3 \cdot \left[(t^2 - y^2) - y' \cdot 2t \cdot y \right] + q_3 \cdot \left[2t \cdot y + y' \cdot (t^2 - y^2) \right] \right) &= t + y \cdot y' \end{aligned} \quad (4.2.71)$$

A aplicação dos conceitos apresentados na Tabela 4.2 resulta em:

$$3 \cdot \left(\begin{array}{l} p_3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} [(1-9\mathbf{x}^2) \cdot t^2 - (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b) \cdot t - 4b^2] \\ -(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot 2t \cdot [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b] \end{array} \right\} \\ + q_3 \cdot \left\{ \begin{array}{l} 2t \cdot [(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b] \\ +(\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot [(1-9\mathbf{x}) \cdot t^2 - (\mathbf{k} \cdot 12\mathbf{x} \cdot b) \cdot t - 4b^2] \end{array} \right\} \end{array} \right) = t + \left[\begin{array}{l} (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t \\ +2b \end{array} \right] \cdot [\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}] \quad (4.2.72)$$

Considerando que $\mathbf{k}^2 = 1$, a solução de (4.2.72) se reduz à resolução do seguinte sistema de três equações a duas incógnitas:

$$3 \cdot (p_3 \cdot [1 - 27\mathbf{x}^2] + q_3 \cdot [\mathbf{k} \cdot (9\mathbf{x} - 27\mathbf{x}^3)]) = 0 \quad (4.2.73)$$

$$3 \cdot (p_3 \cdot [-\mathbf{k} \cdot (24\mathbf{x}) \cdot b] + q_3 \cdot [(4 - 36\mathbf{x}^2) \cdot b]) = (1 + 9\mathbf{x}^2) \quad (4.2.74)$$

$$3 \cdot (p_3 \cdot [(-4) \cdot b^2] + q_3 \cdot [-\mathbf{k} \cdot (12\mathbf{x}) \cdot b^2]) = \mathbf{k} \cdot 6\mathbf{x} \cdot b \quad (4.2.75)$$

O sistema formado pelas equações (4.2.74) e (4.2.75) é o seguinte:

$$12b \cdot \begin{bmatrix} -\mathbf{k} \cdot (6\mathbf{x}) & (1 - 9\mathbf{x}^2) \\ -1 & -\mathbf{k} \cdot (3\mathbf{x}) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 + 9\mathbf{x}^2 \\ \mathbf{k} \cdot 6\mathbf{x} \end{Bmatrix} \quad (4.2.76)$$

A solução de (4.2.51), considerando que $\mathbf{k}^2 = 1$, é:

$$\begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = \frac{-1}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot \mathbf{x}^2)} \begin{Bmatrix} -9 \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \cdot (-1 + 3 \cdot \mathbf{x}^2) \\ (-1 + 27 \cdot \mathbf{x}^2) \end{Bmatrix} \quad (4.2.77)$$

Os valores de p_3 e q_3 precisam ainda satisfazer a (4.2.73), reescrita na forma matricial:

$$3 \cdot \begin{bmatrix} 1 - 27\mathbf{x}^2 & \mathbf{k} \cdot (9\mathbf{x} - 27\mathbf{x}^3) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} p_3 \\ q_3 \end{Bmatrix} = 0$$

Substituindo (4.2.53) em (4.2.48), obtém-se:

$$\mathbf{k} \cdot \frac{81}{4b} \cdot \frac{\mathbf{x}^3 \cdot (-1 + 3\mathbf{x}^2) \cdot (-1 + \mathbf{k}^2)}{(1 + 9\mathbf{x}^2)} = 0 \quad (4.2.78)$$

Como $k^2 = 1$, então a equação (4.2.78) é satisfeita para todo x . Portanto, o sistema gerado por (4.2.71), quando aplicado em S_1 ($k = -1$) e S_2 ($k = 1$), apresenta solução única e determinada por (4.2.77):

$$p_3 = \frac{9 \cdot k \cdot x \cdot (-1 + 3 \cdot x^2)}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot x^2)}$$

$$q_3 = -\frac{-1 + 27 \cdot x^2}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot x^2)}$$

Por fim, a expressão (4.2.71) precisa ser aplicada na superfície S_3 , utilizando as condições apresentadas na Tabela 4.1.

$$3 \cdot \left(p_3 \cdot \left[(t^2 - y^2) - y' \cdot 2t \cdot y \right] + q_3 \cdot \left[2t \cdot y + y' \cdot (t^2 - y^2) \right] \right) = t + y \cdot y'$$

Na superfície S_3 , vale (4.2.58):

$$y(t) = -b$$

$$y'(t) = 0$$

$$t^2 - [y(t)]^2 = t^2 - b^2$$

Substituindo (4.2.58) em (4.2.71):

$$3 \cdot \left(p_3 \cdot [t^2 - b^2] + q_3 \cdot [-2b \cdot t] \right) = t$$

$$3 \cdot \left(p_3 \cdot t^2 + q_3 \cdot (-2b) \cdot t + p_3 \cdot (-b^2) \right) = t \quad (4.2.79)$$

A solução de (4.2.59) é imediata:

$$p_3 = 0$$

$$q_3 = -\frac{1}{6b} \quad (4.2.80)$$

Para que a solução (4.2.80) seja compatível com (4.2.77), deve-se ter:

$$\frac{9 \cdot k \cdot x \cdot (-1 + 3 \cdot x^2)}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot x^2)} = 0 \quad \Rightarrow \quad (-1 + 3 \cdot x^2) = 0 \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.2.81)$$

$$-\frac{-1 + 27 \cdot x^2}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot x^2)} = -\frac{1}{6 \cdot b} \quad \Rightarrow \quad 9 \cdot x^2 = 3 \quad \Rightarrow \quad |x| = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad (4.2.82)$$

Finalmente, para que haja solução, é necessário que:

$$x = \frac{1}{\sqrt{3}} \quad \Rightarrow \quad a = \sqrt{3} \cdot b \quad (4.2.83)$$

Este resultado reproduz o que foi obtido anteriormente, ou seja, para que haja solução analítica fechada, o triângulo precisa ser equilátero de altura $3b$ e lado $2\sqrt{3}b$. Neste caso, a solução do sistema é dada por (4.2.80).

$$p_3 = 0$$

$$q_3 = -\frac{1}{6b}$$

A função conjugada $c(x, y)$ é determinada substituindo (4.2.80) na função de teste (4.2.68).

$$c(x, y) = -\frac{1}{6b} \cdot (3x^2y - y^3) \quad (4.2.84)$$

O momento de inércia à torção é calculado conforme (3.3.30).

$$I_T = -\iint_A \left(x \cdot \frac{\partial c}{\partial x} + y \cdot \frac{\partial c}{\partial y} \right) \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA \quad (3.2.69)$$

$$\frac{\partial c}{\partial y} = -\frac{1}{2b} \cdot (x^2 - y^2) \quad \frac{\partial c}{\partial x} = -\frac{1}{2b} \cdot (2xy)$$

$$I_T = \frac{1}{2b} \cdot \iint_A (2x^2y + y \cdot (x^2 - y^2)) \cdot dA + \iint_A (x^2 + y^2) \cdot dA$$

$$I_T = \frac{3}{2b} \cdot \iint_A x^2y \cdot dA - \frac{1}{2b} \cdot \iint_A y^3 \cdot dA + \iint_A x^2 \cdot dA + \iint_A y^2 \cdot dA \quad (4.2.85)$$

A expressão (4.2.85) é idêntica à expressão (4.2.63). Portanto, o momento de inércia à torção e a rotação específica valem:

$$I_T = \frac{9\sqrt{3}}{5} \cdot b^4 \quad (4.2.86)$$

$$q = \frac{5}{9\sqrt{3} \cdot b^4} \cdot \frac{M_t}{G} \quad (4.2.87)$$

Este resultado corresponde ao obtido anteriormente em (4.2.28).

4.2.6 Análise de Resultados

A seção em forma de triângulo isósceles foi resolvida utilizando as três formulações diferenciais. Em cada uma delas, foi demonstrado que só há solução analítica fechada se o triângulo for equilátero.

No problema de Prandtl, usou-se a função de teste (4.2.17) que, por construção, é constante no contorno e, portanto, satisfaz a (3.4.16):

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}_0 \quad \text{Em } S.$$

$$\mathbf{f}(x, y) = p \cdot (-9b^2 \cdot x^2 y + a^2 \cdot y^3 - 3a^2 b \cdot y^2 - 9b^3 \cdot x^2 + 4a^2 b^3) + \mathbf{f}_0$$

Para que esta função obedecesse à condição de equilíbrio (3.4.8), era necessário que o triângulo fosse equilátero, conforme (4.2.18).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} = -2G\mathbf{q} \quad \Rightarrow \quad a^2 = 3b^2$$

No problema de Neumann, usou-se a função de teste (4.2.42) que, por construção, é harmônica e, portanto, satisfaz a (3.2.14).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} = 0 \quad \text{Em } A.$$

$$\mathbf{y}(x, y) = p_3 \cdot (x^3 - 3xy^2) + q_3 \cdot (3x^2y - y^3) + \mathbf{y}_0$$

Para que esta função obedecesse à condição de contorno natural (3.2.44), algumas restrições quanto à relação $\mathbf{x} = \frac{b}{a}$ foram determinadas.

$$\nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{Em } S$$

Ao aplicar (3.2.44) nas superfícies S_1 e S_2 , obtiveram-se dois valores para $\mathbf{x}$, e dois pares de valores dos parâmetros p_3 e q_3 correspondentes, apresentados na Tabela 4.3.

$\mathbf{x}$	p_3	q_3
$\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$	$\frac{-1}{6 \cdot b}$	0
$\mathbf{x} = 1$	$\frac{-13}{60 \cdot b}$	$\frac{-9 \cdot \mathbf{k}}{60 \cdot b}$

Ao aplicar (3.2.44) na superfície S_3 , os parâmetros p_3 e q_3 foram obtidos de forma direta em (4.2.60).

$$p_3 = -\frac{1}{6b}$$

$$q_3 = 0$$

O resultado (4.2.60) mostrou que a única das possibilidades apresentadas na Tabela 4.3 que é válida é quando $\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o que determina que o triângulo seja equilátero.

No problema de Dirichlet usou-se a função de teste (4.2.68) que, por construção, é harmônica e, portanto, satisfaz a (3.3.4).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{c}}{\partial y^2} = 0$$

Em $\mathbf{A}$.

$$\mathbf{c}(x, y) = p_3 \cdot (x^3 - 3xy^2) + q_3 \cdot (3x^2y - y^3) + \mathbf{c}_0$$

Ao aplicar a condição de contorno (3.3.23) nas superfícies S_1 e S_2 , nenhuma restrição ao valor de $\mathbf{x}$ foi determinada.

$$\nabla \mathbf{c} \cdot \vec{\mathbf{f}} = \vec{\mathbf{r}} \cdot \vec{\mathbf{f}}$$

Em $\mathbf{S}$

Isto ocorreu porque a equação (4.2.78) é identicamente nula, já que $\mathbf{k}^2 = 1$.

$$\mathbf{k} \cdot \frac{81}{4b} \cdot \frac{\mathbf{x}^3 \cdot (-1 + 3\mathbf{x}^2) \cdot (-1 + \mathbf{k}^2)}{(1 + 9\mathbf{x}^2)} = 0$$

Os parâmetros p_3 e q_3 ficaram então determinados por (4.2.77), válida para qualquer triângulo isósceles.

$$p_3 = \frac{9 \cdot \mathbf{k} \cdot \mathbf{x} \cdot (-1 + 3 \cdot \mathbf{x}^2)}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot \mathbf{x}^2)}$$

$$q_3 = -\frac{-1 + 27 \cdot \mathbf{x}^2}{12 \cdot b \cdot (1 + 9 \cdot \mathbf{x}^2)}$$

No entanto, ao aplicar (3.3.23) na superfície S_3 , os parâmetros p_3 e q_3 foram obtidos em (4.2.80).

$$p_3 = 0 \qquad q_3 = -\frac{1}{6b}$$

Para que (4.2.77) e (4.2.80) sejam iguais, é necessário que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, ou seja, que o triângulo seja equilátero.

Deste ponto em diante, os três problemas foram resolvidos considerando $a = \sqrt{3} \cdot b$. O momento de inércia à torção é foi calculado em (4.2.29), (4.2.64) e (4.2.86).

$$I_T = \frac{9\sqrt{3}}{5} \cdot b^4$$

Os deslocamentos longitudinais que ocorrem na seção transversal foram calculados em (4.2.40) por integração das tensões, e em (4.2.67) pela função empenamento.

$$w(x, y) = \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot (-x^3 + 3y^2x) + w_0$$

O gráfico do deslocamento para $w_0 = 0$ é apresentado na Figura 4.2.3

Figura 4.2.3 – Empenamento da seção triangular.

Na Figura 4.2.4 é possível perceber os níveis dos pontos da seção.

Figura 4.2.4 – Empenamento da seção triangular (2).

É possível perceber que não se deslocam os pontos pertencentes às retas que ligam os vértices à origem, dadas por (4.2.88).

$$x = 0 \qquad y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad y = \frac{b}{a} \cdot x \qquad (4.2.88)$$

O primeiro caso é evidente. Ao substituir a segunda (e terceira) das equações (4.2.88) em (4.2.40), obtém-se:

$$w(x, y) = \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M_t}{G} \cdot x^3 \cdot \left(-1 + 3 \cdot \frac{b^2}{a^2} \right) + 0 \qquad (4.2.89)$$

A expressão (4.2.89) se anula devido à (4.2.18).

$$a^2 = 3b^2$$

As tensões de cisalhamento atuantes na seção transversal segundo as direções dos eixos x e y foram obtidas respectivamente em (4.1.32) e (4.1.31) pela função de tensão de Prandtl.

$$t_{zx} = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (x^2 - y \cdot (y - 2b)) \qquad t_{zy} = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot 2x \cdot (y + b)$$

Os gráficos destas tensões são representados, respectivamente, nas Figura 4.2.5 e na Figura 4.2.6.

Figura 4.2.5 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo x .

Figura 4.2.6 – Tensão de cisalhamento segundo o eixo y .

A tensão de cisalhamento resultante é a seguinte:

$$\vec{t}_A = \left[-\frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (x^2 - y \cdot (y - 2b)) \right] \cdot \hat{e}_x + \left[\frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot 2x \cdot (y + b) \right] \cdot \hat{e}_y$$

$$\vec{t}_A = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \left[-(x^2 - y \cdot (y - 2b)) \cdot \hat{e}_x + 2x \cdot (y + b) \cdot \hat{e}_y \right]$$

O valor da tensão de cisalhamento resultante pode ser calculado segundo (2.2.10).

$$t_A = \left\| \vec{r}_{xy} \times \vec{n}_{xy} \right\| = \sqrt{t_{zx}^2 + t_{zy}^2}$$

$$t_A = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \sqrt{\left[-\left(x^2 - y \cdot (y - 2b) \right) \right]^2 + \left[2x \cdot (y + b) \right]^2}$$

O gráfico da tensão é representado na Figura 4.2.7.

Figura 4.2.7 – Tensão de cisalhamento na seção triangular.

Ao longo da superfície S_3 , em que $y = -b$, a tensão de cisalhamento vale:

$$\vec{t}_{S_3} = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot (3 \cdot b^2 - x^2) \cdot \hat{e}_x \quad (4.2.90)$$

A tensão é paralela ao eixo x e, portanto, tangente ao contorno S_3 .

$$\vec{t}_{S_3} = -1 \cdot \hat{e}_y \quad (4.2.91)$$

Nas superfícies S_1 e S_2 , o contorno é caracterizado conforme a Tabela 4.2:

$$S_k : \begin{cases} x = t \\ y = (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b \end{cases}$$

É importante lembrar que na superfície S_1 , $t \in [0, a]$, enquanto que em S_2 , $t \in [-a, 0]$.

Ao longo destes contornos, a tensão de cisalhamento vale:

$$\vec{t}_{S_k} = \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \left[-\left(t^2 - ((\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 2b) \cdot (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t \right) \cdot \hat{e}_x + 2t \cdot ((\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 3b) \cdot \hat{e}_y \right]$$

$$\begin{aligned}\vec{t}_{sk} &= \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \left[-\left((1-9x^2) \cdot t^2 - (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot 2b \cdot t \right) \cdot \hat{e}_x + 2t \cdot \left((\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 3b \right) \cdot \hat{e}_y \right] \\ \vec{t}_{sk} &= \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot t \cdot \left[-\left((1-9x^2) \cdot t - (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot 2b \right) \cdot \hat{e}_x + 2 \cdot \left((\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot t + 3b \right) \cdot \hat{e}_y \right] \quad (4.2.92)\end{aligned}$$

O vetor tangente aos contornos S_1 e S_2 foi determinado em (4.2.8).

$$\vec{t}_k = \frac{1 \cdot \hat{e}_x + (\mathbf{k} \cdot 3\mathbf{x}) \cdot \hat{e}_y}{\sqrt{1+9x^2}} \quad (4.2.93)$$

Considerando que $x = \frac{1}{\sqrt{3}}$, o vetor tangente vale:

$$\vec{t}_k = \frac{1}{2} \cdot \hat{e}_x + \mathbf{k} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \hat{e}_y \quad (4.2.94)$$

A orientação das curvas e dos respectivos versores tangentes é apresentada na Figura 4.2.8.

Figura 4.2.8 – Versores tangentes no triângulo equilátero.

Ao observar a expressão (4.2.94) e a Figura 4.2.8, é possível verificar que o vetor tangente à superfície S_1 está inclinado de $\mathbf{p} - \frac{\mathbf{p}}{3}$; e o vetor tangente à superfície S_2 , de $\frac{\mathbf{p}}{3}$. Estes resultados eram esperados em virtude de o triângulo ser equilátero. Considerando que, por definição, $\mathbf{k}^2 = 1$, a tensão de cisalhamento pode ser escrita em uma forma mais simples.

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{t}}_{\text{sk}} &= \frac{5 \cdot M_t}{18\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot 2t \cdot \left[-(-t - \mathbf{k} \cdot \sqrt{3} \cdot b) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x + (\mathbf{k} \cdot \sqrt{3} \cdot t + 3b) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \right] \\ \bar{\mathbf{t}}_{\text{sk}} &= \frac{10 \cdot M_t}{9\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot t \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (t + \mathbf{k} \cdot \sqrt{3} \cdot b) \cdot \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{k} \cdot (t + \mathbf{k} \cdot \sqrt{3} \cdot b) \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \right] \\ \bar{\mathbf{t}}_{\text{sk}} &= \frac{10 \cdot M_t}{9\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot t \cdot (t + \mathbf{k} \cdot \sqrt{3} \cdot b) \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot \hat{\mathbf{e}}_x + \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_y \right] \\ \bar{\mathbf{t}}_{\text{sk}} &= -\frac{10 \cdot M_t}{9\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot t \cdot (-\mathbf{k} \cdot \sqrt{3} \cdot b - t) \cdot \bar{\mathbf{t}}_i\end{aligned}\tag{4.2.95}$$

Em função dos valores que $\mathbf{k}$ e t assumem para cada curva, verifica-se que a tensão de cisalhamento atuante ao longo dos contornos S_1 e S_2 está direcionada em sentido oposto ao do vetor tangente correspondente.

4.3 SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR

Na Figura 4.3.1 é mostrada uma seção em forma de retângulo.

Figura 4.3.1 – Seção em forma de retângulo.

4.3.1 Propriedades Geométricas do Contorno

O contorno do retângulo é formado pela união de quatro curvas:

$$S = S_1 \cup S_2 \cup S_3 \cup S_4$$

Para cada curva S_k , as equações do contorno, os vetores posição $\vec{r}_k(t)$, tangente $\vec{t}_k(t)$ e normal $\vec{n}_k(t)$ para $t \in [-1, 1]$ são apresentados na Tabela 4.4. Foram efetuados também os produtos escalares $\vec{e}_k(t) \cdot \vec{e}_k(t)$ e $\vec{e}_k(t) \cdot \vec{n}_k(t)$, e os cálculos dos elementos diferenciais ds , os quais aparecem nas integrais de linha das equações da torção uniforme.

Tabela 4.4 – Propriedades geométricas da superfície retangular.

S_k	Equações do contorno	Vetor posição	Versor tangente	Versor normal	Produtos escalares		Diferencial
		$\vec{r}_k(t)$	$\vec{t}_k(t)$	$\vec{n}_k(t)$	$\vec{r}_k \cdot \vec{g}_k$	$\vec{r}_k \cdot \vec{g}_k^n$	ds
S_1	$x = a$	$\{a, b \times t\}$	$\{0, 1\}$	$\{1, 0\}$	$b \times t$	a	$b \times dt$
S_2	$x = -a$	$\{-a, b \times t\}$	$\{0, -1\}$	$\{-1, 0\}$	$b \times t$	a	$b \times dt$
S_3	$y = b$	$\{a \times t, b\}$	$\{1, 0\}$	$\{0, 1\}$	$a \times t$	b	$a \times dt$
S_4	$y = -b$	$\{a \times t, -b\}$	$\{1, 0\}$	$\{0, -1\}$	$a \times t$	b	$a \times dt$

Da forma como foram definidas as equações paramétricas (dadas no vetor posição), o contorno retangular da Figura 4.3.1 é percorrido no sentido anti-horário.

4.3.2 Propriedades Geométricas da Região Retangular

Para facilitar os cálculos, pode ser efetuada a seguinte mudança de variáveis:

$$\mathbf{A} : \begin{cases} x = a \cdot \mathbf{r} \\ y = b \cdot t \end{cases} \quad \begin{matrix} t \in [-1, 1] \\ \mathbf{r} \in [-1, 1] \end{matrix} \quad (4.3.1)$$

As integrais duplas de funções $F(x, y)$ no domínio $\mathbf{A}$ podem então ser calculadas por meio de (4.3.2).

$$\iint_{\mathbf{A}} F(x, y) \cdot dx dy = ab \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 F(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t)) \cdot d\mathbf{r} \right] \cdot dt \quad (4.3.2)$$

A área do retângulo vale:

$$\mathbf{A} = \iint_{\mathbf{A}} 1 \cdot dx dy = ab \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 1 \cdot d\mathbf{r} \right] \cdot dt$$

$$\mathbf{A} = 4 \cdot ab \quad (4.3.3)$$

O momento de inércia em relação ao eixo y vale:

$$I_y = \iint_{\mathbf{A}} x^2 \cdot dx dy = ab \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (a \cdot \mathbf{r})^2 \cdot d\mathbf{r} \right] \cdot dt = a^3 b \cdot \int_{-1}^1 2 \cdot \left(\frac{1^3}{3} \right) \cdot dt$$

$$I_y = \frac{4}{3} \cdot a^3 b \quad (4.3.4)$$

O momento de inércia em relação ao eixo x vale:

$$I_y = \iint_A y^2 \cdot dx dy = ab \cdot \int_{-1}^1 \left[\int_{-1}^1 (b \cdot t)^2 \cdot d\mathbf{r} \right] \cdot dt = ab^3 \cdot \int_{-1}^1 2 \cdot t^2 \cdot dt$$

$$I_x = \frac{4}{3} \cdot ab^3 \quad (4.3.5)$$

O momento polar de inércia da seção é a soma dos anteriores, conforme (4.1.19).

$$I_p = I_y + I_x$$

$$I_p = \frac{4}{3} \cdot ab \cdot (a^2 + b^2) \quad (4.3.6)$$

A solução deste problema é feita de maneira diferente em relação aos problemas das seções elíptica e circular e da seção triangular. Na solução da seção retangular é apresentado o método de solução de equações diferenciais por separação de variáveis.

Primeiramente foi resolvido o problema de Neumann, regido pela equação de Laplace. Por fim, foi resolvido o problema de Neumann, regido pela equação de Poisson.

4.3.3 Solução do Problema de Neumann

A função empenamento de Saint-Venant precisa ser solução da equação de Laplace (3.2.14) e respeitar às condições de contorno de Neumann (3.2.41) ou (3.2.44).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2} = 0$$

$$\left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x} - y \right) \cdot l + \left(\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y} + x \right) \cdot m = 0 \quad \text{ou} \quad \nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t} \quad \text{em } S$$

No método de separação de variáveis, a função de teste é considerada como o produto de duas funções de uma variável: $g(x)$ e $f(y)$. A função de teste para a função empenamento é a seguinte:

$$\mathbf{y}(x, y) = \mathbf{y}_0 + g(x) \cdot f(y) \quad (4.3.7)$$

Neste caso, a equação diferencial (3.2.14) se transforma em:

$$f(y) \cdot \frac{d^2 g}{dx^2} + g(x) \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} = 0 \quad (4.3.8)$$

Wang (1953) resolveu este problema pelo método da separação de variáveis utilizando uma função de teste expressa na forma de uma série infinita:

$$\mathbf{y}(x, y) = xy - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot f_n(y) \quad (4.3.9)$$

As derivadas de (4.3.9) valem:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial x}(x, y) = y - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dg_n(x)}{dx} \cdot f_n(y) \quad \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial y}(x, y) = x - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{df_n(y)}{dy}$$

$$\frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial x^2}(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2 g_n(x)}{dx^2} \cdot f_n(y) \quad \frac{\partial^2 \mathbf{y}}{\partial y^2}(x, y) = - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2}$$

Neste caso, a equação diferencial (3.2.14) se transforma em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} \right] = 0 \quad (4.3.10)$$

A interpretação de (4.3.10) pode ser feita abrindo o somatório:

$$\begin{aligned} & \left[f_0(y) \cdot \frac{d^2 g_0}{dx^2} + g_0(x) \cdot \frac{d^2 f_0}{dy^2} \right] + \\ & + \left[f_1(y) \cdot \frac{d^2 g_1}{dx^2} + g_1(x) \cdot \frac{d^2 f_1}{dy^2} \right] + \dots \\ & \dots + \left[f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} \right] + \dots = 0 \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

As funções $f_n(y)$ e $g_n(x)$ precisam satisfazer à equação diferencial (4.3.11), escrita com $n \rightarrow \infty$. É conveniente fazer cada uma das parcelas de (4.3.11) se anularem para todo $x \in [-a, a]$ e $y \in [-b, b]$:

$$\left[f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} \right] = 0$$

Portanto, a equação diferencial do problema é:

$$f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} = 0 \quad (4.3.12)$$

A equação diferencial (4.3.12) é resolvida pelo método de separação de variáveis, que consiste em separar as partes que contém variáveis diferentes:

$$\frac{\frac{d^2 f_n}{dy^2}}{f_n(y)} = - \frac{\frac{d^2 g_n}{dx^2}}{g_n(x)} \quad (4.3.13)$$

Como o lado esquerdo só depende de x e o lado direito só depende de y , então a igualdade (4.3.13) só ocorre se ambos os lados forem iguais a uma constante (WANG, 1953). Esta constante foi denotada por k_n^2 , para garantir que seja positiva.

$$\frac{\frac{d^2 f_n}{dy^2}}{f_n(y)} = k_n^2 \quad - \frac{\frac{d^2 g_n}{dx^2}}{g_n(x)} = k_n^2 \quad (4.3.14)$$

Com a notação de (4.3.14), obtêm-se um par de equações diferenciais:

$$\frac{d^2 f_n}{dy^2} - k_n^2 \cdot f_n(y) = 0 \quad (4.3.15)$$

$$\frac{d^2 g_n}{dx^2} + k_n^2 \cdot g_n(x) = 0 \quad (4.3.16)$$

As soluções das equações diferenciais (4.3.15) e (4.3.16) foram procuradas na forma de (PÁDUA Filho, 2005):

$$f_n(y) = e^{I_n \cdot y} \quad (4.3.17)$$

$$g_n(x) = e^{I_n \cdot x} \quad (4.3.18)$$

Substituindo (4.3.17) na equação diferencial (4.3.15), e adotando o mesmo procedimento utilizado no item 4.3.3, resulta que:

$$I_n^2 \cdot e^{I_n \cdot y} - k_n^2 \cdot e^{I_n \cdot y} = 0 \quad \Rightarrow \quad (I_n^2 - k_n^2) \cdot e^{I_n \cdot y} = 0$$

Decorrem duas soluções

$$I_{n,1} = k_n \quad I_{n,2} = -k_n \quad (4.3.19)$$

O espaço vetorial das soluções da equação diferencial (4.3.15) é gerado por:

$$\{e^{I_{n,1} \cdot y}, e^{I_{n,2} \cdot y}\} \quad (4.3.20)$$

Portanto a solução será uma combinação linear das funções (4.3.20):

$$f_n(y) = A_n \cdot e^{k_n \cdot y} + B_n \cdot e^{-k_n \cdot y} \quad (4.3.21)$$

Substituindo (4.3.18) na equação diferencial (4.3.16), resulta que:

$$I_n^2 \cdot e^{I_n \cdot x} + k_n^2 \cdot e^{I_n \cdot x} = 0 \quad \Rightarrow \quad (I_n^2 + k_n^2) \cdot e^{I_n \cdot x} = 0$$

É necessário que:

$$I_n^2 + k_n^2 = 0 \quad (4.3.22)$$

A equação (4.3.22) possui duas raízes complexas:

$$I_{n,1} = i \cdot k_n \quad I_{n,2} = -i \cdot k_n \quad (4.3.23)$$

As soluções de (4.3.16) são determinadas substituindo (4.3.23) em (4.3.18):

$$g_{n,1}(x) = e^{i \cdot k_n \cdot x} \quad g_{n,2}(x) = e^{-i \cdot k_n \cdot x} \quad (4.3.24)$$

Utilizando o resultado de que (GUIDORIZZI, 2001a):

$$e^{iq} = \cos q + i \cdot \sin q \quad (4.3.25)$$

Resulta que:

$$g_{n,1}(x) = e^{i \cdot k_n \cdot x} = \cos(k_n \cdot x) + i \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

$$g_{n,2}(x) = e^{-i \cdot k_n \cdot x} = \cos(k_n \cdot x) - i \cdot \sin(k_n \cdot x)$$

O espaço vetorial das soluções da equação diferencial (4.3.18) é gerado por:

$$\{\cos(k_n \cdot x), \sin(k_n \cdot x)\} \quad (4.3.26)$$

Portanto a solução será uma combinação linear das funções (4.3.26):

$$g_n(x) = C_n \cdot \cos(k_n \cdot x) + D_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \quad (4.3.27)$$

As funções $f_n(y)$ e $g_n(x)$ precisam satisfazer às condições de contorno de Neumann (3.2.41)

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x} - y \right) \cdot l + \left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) \cdot m = 0$$

Substituindo (4.3.9) em (3.2.41), resulta:

$$\left(-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dg_n(x)}{dx} \cdot f_n(y) \right) \cdot l + \left(2x - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{df_n(y)}{dy} \right) \cdot m = 0 \quad (4.3.28)$$

Conforme a Tabela 4.4, nas curvas de contorno S_3 ($y=b$) e S_4 ($y=-b$), a componente escalar do vetor normal na direção de x vale:

$$l = 0 \quad (4.3.29)$$

Então (4.3.28) se reduz a:

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{df_n(y)}{dy} = 2x \quad (4.3.30)$$

Segundo Wang (1953), (4.3.30) precisa assumir o mesmo valor em S_3 ($y = b$) ou S_4 ($y = -b$). Isto ocorre se $\frac{df_n(y)}{dy}$ são funções simétricas em relação a y :

$$\frac{df_n(-y)}{dy} = \frac{df_n(y)}{dy} \quad (4.3.31)$$

Mas

$$\frac{df_n}{dy}(y) = k_n \cdot [A_n \cdot e^{k_n \cdot y} - B_n \cdot e^{-k_n \cdot y}]$$

Decorre que:

$$k_n \cdot [A_n \cdot e^{-k_n \cdot y} - B_n \cdot e^{+k_n \cdot y}] = k_n \cdot [A_n \cdot e^{k_n \cdot y} - B_n \cdot e^{-k_n \cdot y}]$$

$$A_n \cdot e^{-k_n \cdot y} - B_n \cdot e^{k_n \cdot y} - A_n \cdot e^{k_n \cdot y} + B_n \cdot e^{-k_n \cdot y} = 0$$

$$(A_n + B_n) \cdot e^{-k_n \cdot y} - (A_n + B_n) \cdot e^{k_n \cdot y} = 0 \Rightarrow (A_n + B_n) \cdot (e^{-k_n \cdot y} - e^{k_n \cdot y}) = 0$$

É preciso que:

$$A_n + B_n = 0$$

$$B_n = -A_n \quad (4.3.32)$$

Substituindo (4.3.32) em (4.3.21), resulta:

$$f_n(y) = A_n \cdot (e^{k_n \cdot y} - e^{-k_n \cdot y}) \quad (4.3.33)$$

A expressão (4.3.33) pode ser escrita de forma mais conveniente usando a notação (4.3.34):

$$\sinh q = \frac{e^q - e^{-q}}{2} \quad (4.3.34)$$

$$f_n(y) = A_n \cdot 2 \cdot \sinh(k_n \cdot y) \quad (4.3.35)$$

Segundo Wang (1953), a condição (4.3.30) é satisfeita se $g_n(x)$ forem são funções anti-simétricas em relação a x :

$$g_n(-x) = -g_n(x)$$

Decorre que:

$$C_n \cdot \cos(k_n \cdot x) - D_n \cdot \sin(k_n \cdot x) = -[C_n \cdot \cos(k_n \cdot x) + D_n \cdot \sin(k_n \cdot x)]$$

$$2 \cdot C_n \cdot \cos(k_n \cdot x) = 0$$

É preciso que:

$$C_n = 0 \quad (4.3.36)$$

Substituindo (4.3.36) em (4.3.27), resulta:

$$g_n(x) = D_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \quad (4.3.37)$$

Nas curvas de contorno S_1 ($x=a$) e S_2 ($x=-a$), a componente escalar do vetor normal na direção de y vale $m=0$. Então (4.3.28) se reduz a:

$$-\sum_{n=0}^{\infty} \frac{dg_n(x)}{dx} \cdot f_n(y) = 0 \quad (4.3.38)$$

Esta condição é satisfeita se:

$$\frac{dg_n(a)}{dx} = 0 \quad \frac{dg_n(-a)}{dx} = 0 \quad (4.3.39)$$

$$\frac{dg_n}{dx}(x) = k_n \cdot D_n \cdot \cos(k_n \cdot x)$$

Resulta:

$$0 = k_n \cdot D_n \cdot \cos(k_n \cdot a)$$

$$k_n \cdot a = (2n+1) \cdot \frac{p}{2} \quad \text{para } n = 0, 1, 2, \dots$$

A constante de integração k_n definida em (4.3.14) vale:

$$k_n = \frac{(2n+1) \cdot p}{2 \cdot a} \quad (4.3.40)$$

A função empenamento é finalmente determinada substituindo (4.3.35), (4.3.37) em (4.3.9).

$$y(x, y) = xy - \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot f_n(y)$$

$$y(x, y) = xy - \sum_{n=0}^{\infty} D_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot A_n \cdot 2 \cdot \sinh(k_n \cdot y)$$

Considerando-se que A_n e D_n são constantes arbitrárias, então:

$$y(x, y) = xy - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot \sinh(k_n \cdot y) \quad (4.3.41)$$

A constante $\bar{A}_n$ precisa ser determinada de modo que (4.3.41) satisfaça à condição de contorno (4.3.30):

$$\sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{df_n(b)}{dy} = 2x$$

Esta condição é equivalente a:

$$\left(\frac{\partial y}{\partial y} + x \right) = 0$$

$$\frac{\partial y}{\partial y}(x, y) = x - \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \cdot k_n \cdot \sin(k_n \cdot x) \cdot \cosh(k_n \cdot y)$$

Resulta:

$$2x = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{A}_n \cdot k_n \cdot \cosh(k_n \cdot b) \cdot \sin(k_n \cdot x) \quad (4.3.42)$$

Na equação, apareceu uma outra composição de constantes arbitrárias. Utilizou-se a seguinte notação:

$$\bar{A}_n \cdot k_n \cdot \cosh(k_n \cdot b) = \bar{B}_n \quad (4.3.43)$$

Resulta que:

$$2x = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{B}_n \cdot \text{sen}(k_n \cdot x) \quad (4.3.44)$$

A equação (4.3.44) pode ser ponderada segundo os critérios de construção das séries de Fourier. Basta multiplicar os dois lados por:

$$\text{sen}(k_m \cdot x) = \text{sen}\left[\frac{(2m+1) \cdot \mathbf{p}}{2 \cdot a} \cdot x\right] \quad x \in [-a, a]$$

O resultado pode ser integrado no domínio da variável:

$$\int_{-a}^a \text{sen}(k_n \cdot x) \cdot \text{sen}(k_m \cdot x) \cdot dx = 0 \quad m \neq n \quad (4.3.45)$$

$$\int_{-a}^a \text{sen}(k_n \cdot x) \cdot \text{sen}(k_m \cdot x) \cdot dx = a \quad m = n \quad (4.3.46)$$

Como (4.3.46) só não se anula quando $m = n$, então:

$$\int_{-a}^a 2x \cdot \text{sen}(k_m \cdot x) \cdot dx = \int_{-a}^a \bar{B}_n \cdot \text{sen}^2(k_m \cdot x) \cdot dx$$

A partir do cálculo das integrais, Wang (1953) obteve:

$$\bar{B}_m = \frac{(-1)^m \cdot 16a}{(2m+1)^2 \cdot \mathbf{p}^2} \quad (4.3.47)$$

Substituindo (4.3.47) e (4.3.40) em (4.3.43), resulta:

$$\bar{A}_n = \frac{(-1)^n \cdot 32a^2}{(2n+1)^3 \cdot \mathbf{p}^3} \cdot \frac{1}{\cosh(k_n \cdot b)} \quad (4.3.48)$$

A função empenamento é finalmente determinada:

$$\mathbf{y}(x, y) = xy - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \cdot 32a^2}{(2n+1)^3 \cdot \mathbf{p}^3} \cdot \frac{1}{\cosh(k_n \cdot b)} \cdot \text{sen}(k_n \cdot x) \cdot \text{senh}(k_n \cdot y)$$

$$\mathbf{y}(x, y) = xy - \frac{32a^2}{\mathbf{p}^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\text{senh}(k_n \cdot y)}{\cosh(k_n \cdot b)} \cdot \text{sen}(k_n \cdot x)$$

O momento de inércia à torção da seção retangular é determinado por Wang (1953) utilizando (3.2.69):

$$I_T = \iint_A \left(x^2 + y^2 + x \cdot \frac{\partial y}{\partial y} - y \cdot \frac{\partial y}{\partial x} \right) \cdot dA$$

$$I_T = \frac{8a^3b}{3} \cdot \left[1 + \frac{96}{p^4} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} - \frac{384a}{p^5b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} \right] \quad (4.3.49)$$

Usando (4.3.92):

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \frac{p^4}{96}$$

Resulta que o momento de inércia à torção da seção retangular vale:

$$I_T = 16 \cdot a^3b \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{64a}{p^5b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} \right] \quad (4.3.50)$$

A rotação específica é determinada substituindo (4.3.50) em (3.2.84)

$$q = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3b} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{192a}{p^5b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} \right]} \quad (4.3.51)$$

O deslocamento longitudinal w é obtido ao substituir (4.3.51) em (3.2.7):

$$w(x, y) = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3b} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{192a}{p^5b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} \right]} \cdot \left[xy - \frac{32a^2}{p^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sinh(k_n \cdot y)}{\cosh(k_n \cdot b)} \cdot \sin(k_n \cdot x) \right]$$

$$w(x, y) = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3b} \cdot \frac{xy - \frac{32a^2}{p^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sinh(k_n \cdot y)}{\cosh(k_n \cdot b)} \cdot \sin(k_n \cdot x)}{1 - \frac{192a}{p^5b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5}} \quad (4.3.52)$$

4.3.4 Solução do Problema de Prandtl

A função de tensão de Prandtl precisa ser solução da equação de Poisson (3.4.8) e respeitar às condições de contorno de Dirichlet¹¹ (3.4.16).

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} = -2G\mathbf{q}$$

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}_0 \quad \text{em } \mathbf{S}.$$

Uma função polinomial nula no contorno $\mathbf{S}$ do retângulo é obtida efetuando os produtos das equações do contorno da Tabela 4.4:

$$f(x, y) = (x - a) \cdot (x + a) \cdot (y - b) \cdot (y + b) = (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) \quad (4.3.53)$$

Como teste para a função de tensão de Prandtl foi escolhida a seguinte função

$$\mathbf{f}(x, y) = p \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) + \mathbf{f}_0 \quad p \in \mathbb{R} \quad (4.3.54)$$

A constante p é determinada forçando a obediência a (3.4.8).

$$2p \cdot [x^2 + y^2 - (a^2 + b^2)] = -2G\mathbf{q} \quad (4.3.55)$$

A equação (4.3.55) não tem solução; portanto a função de teste (4.3.54) não pode ser escolhida como função de tensão de Prandtl.

Portanto, as funções polinomiais não são suficientes para resolver este problema. Para determinar quais funções são adequadas neste caso, é preciso resolver a equação diferencial de Poisson.

No método de método de separação de variáveis, a função de teste é considerada como o produto de duas funções de uma única variável $g(x)$ e $f(y)$.

$$\mathbf{f}(x, y) = \mathbf{f}_0 + g(x) \cdot f(y) \quad (4.3.56)$$

¹¹ A condição de contorno de Dirichlet consiste em especificar valores para a função no contorno. Neste sentido, tanto (3.3.28) como (3.4.16) são condições de Dirichlet.

Neste caso, a equação diferencial (3.4.8) se transforma em:

$$f(y) \cdot \frac{d^2 g}{dx^2} + g(x) \cdot \frac{d^2 f}{dy^2} = -2Gq \quad (4.3.57)$$

É conveniente utilizar uma função de teste expressa na forma de uma série infinita:

$$f(x, y) = f_0 + \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot f_n(y) \quad (4.3.58)$$

As derivadas de (4.3.58) valem:

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{dg_n(x)}{dx} \cdot f_n(y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{df_n(y)}{dy} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{d^2 g_n(x)}{dx^2} \cdot f_n(y) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y) &= \sum_{n=0}^{\infty} g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} \end{aligned}$$

Utilizando séries infinitas, a equação diferencial (3.4.8) se transforma em:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} \right] = -2Gq \quad (4.3.59)$$

Para dar consistência à equação diferencial (4.3.59), é preciso expandir o termo constante em uma série infinita de mesma natureza:

$$1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} \quad (4.3.60)$$

Com isso:

$$-2Gq = -2Gq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+1}} = -Gq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{2^{n+1}} = -Gq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \quad (4.3.61)$$

Substituindo (4.3.61) na equação diferencial (4.3.59) resulta:

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} \right] &= -Gq \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n} \\ \sum_{n=0}^{\infty} \left[f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} + Gq \cdot \frac{1}{2^n} \right] &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.62)$$

Da mesma forma como no item 4.3.3, é conveniente fazer cada uma das parcelas de (4.3.62) se anularem para todo $x \in [-a, a]$ e $y \in [-b, b]$.

$$f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} = -\frac{Gq}{2^n}$$

Portanto, a equação diferencial do problema é:

$$f_n(y) \cdot \frac{d^2 g_n}{dx^2} + g_n(x) \cdot \frac{d^2 f_n}{dy^2} = -\frac{Gq}{2^n} \quad (4.3.63)$$

Timoshenko e Goodier (1970) resolveram este problema pelo método da separação de variáveis aproveitando a simetria do problema em relação ao eixo y . Eles escolheram uma função de teste expressa na forma de uma série infinita que satisfizesse apenas às condições de contorno em S_1 e S_2 :

$$f(x, y) = f_0 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cdot \cos\left(\frac{np}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot f_n(y) \quad (4.3.64)$$

De fato, a série infinita de (4.3.64) se anula quando $x = a$ ou $x = -a$. Para que a série infinita se anule também em $y = b$ e $y = -b$, é preciso que:

$$f_n(b) = 0 \quad f_n(-b) = 0 \quad (4.3.65)$$

A função $f(x, y)$ precisará satisfazer à equação diferencial (3.4.8) e às condições de contorno que não foram consideradas na construção da função de teste (4.3.65).

As derivadas de (4.3.64) valem:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{np}{2a}\right)^2 \cdot b_n \cdot \cos\left(\frac{np}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot f_n(y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cdot \cos\left(\frac{np}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2}$$

Ao introduzir a função de teste (4.3.64) na equação diferencial (3.4.8), resulta:

$$\begin{aligned}
 & - \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \right)^2 \cdot b_n \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot f_n(y) + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} = -2G\mathbf{q} \\
 & \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[- \left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \right)^2 \cdot b_n \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot f_n(y) + b_n \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} \right] = -2G\mathbf{q} \quad (4.3.66)
 \end{aligned}$$

Para resolver a equação, é necessário expandir o termo constante em séries infinitas (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970):

$$1 = \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{4}{n \cdot \mathbf{p}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) \quad (4.3.67)$$

Substituindo (4.3.67) na equação diferencial (4.3.66), resulta:

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \left[- \left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \right)^2 \cdot b_n \cdot f_n(y) + b_n \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} + \frac{2G\mathbf{q} \cdot 4}{n \cdot \mathbf{p}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) \right] = 0 \quad (4.3.68)$$

É conveniente fazer cada uma das parcelas de (4.3.68) se anularem para todo $x \in [-a, a]$ e $y \in [-b, b]$:

$$\left[- \left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \right)^2 \cdot b_n \cdot f_n(y) + b_n \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} + 2G\mathbf{q} \cdot \frac{4}{n \cdot \mathbf{p}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \right] \cdot \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2} \cdot \frac{x}{a} \right) = 0$$

Portanto:

$$- \left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \right)^2 \cdot b_n \cdot f_n(y) + b_n \cdot \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} + 2G\mathbf{q} \cdot \frac{4}{n \cdot \mathbf{p}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0$$

Cada função $f_n(y)$ precisa satisfazer à seguinte equação diferencial:

$$\frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \right)^2 \cdot f_n(y) + \frac{2G\mathbf{q}}{b_n} \cdot \frac{4}{n\mathbf{p}} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} = 0 \quad (4.3.69)$$

A solução da equação diferencial (4.3.69) foi procurada na forma de (PÁDUA Filho, 2005):

$$f_n(y) = e^{I_n \cdot y} + k_n \quad (4.3.70)$$

Neste caso:

$$\frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} = I_n^2 \cdot e^{I_n \cdot y} \quad (4.3.71)$$

Substituindo (4.3.70) e (4.3.71) na equação diferencial (4.3.69), resulta que:

$$\begin{aligned} I_n^2 \cdot e^{I_n \cdot y} - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \cdot (e^{I_n \cdot y} + k_n) + \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{4}{np} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} &= 0 \\ I_n^2 \cdot e^{I_n \cdot y} - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \cdot e^{I_n \cdot y} - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \cdot k_n + \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{4}{np} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} &= 0 \\ \left[I_n^2 - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \right] \cdot e^{I_n \cdot y} + \left[\frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{4}{np} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \cdot k_n \right] \cdot 1 &= 0 \end{aligned} \quad (4.3.72)$$

Como as funções $e^{I_n \cdot y}$ e 1 são linearmente independentes (BARONE, 1990), (4.3.72) só ocorre se:

$$\left[\frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{4}{np} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \cdot k_n \right] = 0 \quad \left[I_n^2 - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \right] = 0$$

Decorre que:

$$k_n = \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{16a^2}{(np)^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (4.3.73)$$

$$I_{n,1} = \frac{np}{2a} \quad I_{n,2} = -\frac{np}{2a} \quad (4.3.74)$$

O espaço vetorial das soluções da equação diferencial (4.3.69) é gerado por:

$$\{e^{I_{n,1} \cdot y}, e^{I_{n,2} \cdot y}, k_n\} \quad (4.3.75)$$

Portanto a solução será uma combinação linear das funções (4.3.75):

$$f_n(y) = A_n \cdot e^{\frac{np}{2a} \cdot y} + B_n \cdot e^{-\frac{np}{2a} \cdot y} + \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{16a^2}{(np)^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \quad (4.3.76)$$

A expressão (4.3.76) pode ser reescrita de forma mais compacta:

$$f_n(y) = A_n \cdot e^{a_n \cdot y} + B_n \cdot e^{-a_n \cdot y} + k_n \quad (4.3.77)$$

Onde se definiu que:

$$\frac{np}{2a} = a_n \quad (4.3.78)$$

As funções $f_n(y)$ precisam satisfazer às condições de contorno (4.3.65):

$$f_n(b) = 0 \qquad f_n(-b) = 0$$

$$0 = A_n \cdot e^{a_n \cdot b} + B_n \cdot e^{-a_n \cdot b} + k_n \quad (4.3.79)$$

$$0 = A_n \cdot e^{-a_n \cdot b} + B_n \cdot e^{a_n \cdot b} + k_n \quad (4.3.80)$$

Subtraindo (4.3.80) de (4.3.79), resulta:

$$0 = A_n \cdot (e^{a_n \cdot b} - e^{-a_n \cdot b}) + B_n \cdot (e^{-a_n \cdot b} - e^{a_n \cdot b})$$

$$0 = (A_n - B_n) \cdot (e^{a_n \cdot b} - e^{-a_n \cdot b})$$

De onde se conclui que:

$$A_n = B_n \quad (4.3.81)$$

Substituindo (4.3.81) em (4.3.79), resulta:

$$A_n = -\frac{k_n}{e^{a_n \cdot b} + e^{-a_n \cdot b}} \quad (4.3.82)$$

A expressão (4.3.82) pode ser escrita de forma mais conveniente usando a notação (4.3.83):

$$\cosh q = \frac{e^q + e^{-q}}{2} \quad (4.3.83)$$

$$A_n = -\frac{k_n}{2 \cdot \cosh(a_n \cdot b)} \quad (4.3.84)$$

A solução é determinada substituindo (4.3.84) e (4.3.81) em (4.3.77):

$$\begin{aligned}
 f_n(y) &= A_n \cdot e^{a_n \cdot y} + A_n \cdot e^{-a_n \cdot y} + k_n = A_n \cdot (e^{a_n \cdot y} + e^{-a_n \cdot y}) + k_n = \\
 &= A_n \cdot 2 \cdot \cosh(a_n \cdot y) + k_n = -\frac{k_n}{2 \cdot \cosh(a_n \cdot b)} \cdot 2 \cdot \cosh(a_n \cdot y) + k_n \\
 f_n(y) &= k_n \cdot \left[1 - \frac{\cosh(a_n \cdot y)}{\cosh(a_n \cdot b)} \right] \quad (4.3.85)
 \end{aligned}$$

Substituindo (4.3.73) e (4.3.78) em (4.3.85), obtém-se a solução da equação diferencial (4.3.69):

$$\begin{aligned}
 \frac{d^2 f_n(y)}{dy^2} - \left(\frac{np}{2a} \right)^2 \cdot f_n(y) + \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{4}{np} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} &= 0 \\
 f_n(y) &= \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{16a^2}{(np)^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot b\right)} \right] \quad (4.3.86)
 \end{aligned}$$

A função de tensão de Prandtl é determinada substituindo (4.3.86) em (4.3.64):

$$\begin{aligned}
 f(x, y) &= f_0 + \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} b_n \cdot \cos\left(\frac{np}{2} \cdot \frac{x}{a}\right) \cdot \frac{2Gq}{b_n} \cdot \frac{16a^2}{(np)^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot b\right)} \right] \\
 f(x, y) &= f_0 + \frac{32 \cdot Gq \cdot a^2}{p^3} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot b\right)} \right] \cdot \cos\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right) \quad (4.3.87)
 \end{aligned}$$

A rotação específica $\mathbf{q}$ é determinada implicitamente pela equação integral (3.4.26):

$$\begin{aligned}
 M_t &= 2 \cdot \iint_A (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot d\mathbf{x}d\mathbf{y} \\
 M_t &= 2 \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{32 \cdot G\mathbf{q} \cdot a^2}{(n\mathbf{p})^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \int_{-a}^a \cos\left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \cdot x\right) \cdot dx \cdot \int_{-b}^b \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{n\mathbf{p}}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{n\mathbf{p} \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot dy \\
 M_t &= 2 \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{32 \cdot G\mathbf{q} \cdot a^2}{(n\mathbf{p})^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[\frac{2a}{n\mathbf{p}} \cdot 2 \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{2}\right) \right] \cdot [2b] \\
 M_t &= \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{512 \cdot G\mathbf{q} \cdot a^3 b}{(n\mathbf{p})^4} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{2}\right) \quad (4.3.88)
 \end{aligned}$$

Na Tabela 4.5 são apresentados os valores de algumas das partes da série.

Tabela 4.5 – Cálculo da série.

	$(-1)^{\frac{n-1}{2}}$	$\sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{2}\right)$	$(-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \sin\left(\frac{n\mathbf{p}}{2}\right)$
$n = 1, 5, 9, \dots$	1	1	1
$n = 3, 7, 11, \dots$	-1	-1	1

Aplicando os valores da tabela, a equação (4.3.88) se reduz a:

$$M_t = \frac{512 \cdot G\mathbf{q} \cdot a^3 b}{\mathbf{p}^4} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} \quad (4.3.89)$$

De acordo com Knopp (1990):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\mathbf{p}^4}{90} \quad (4.3.90)$$

A série para n par pode ser calculada:

$$\sum_{n=2,4,6,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(2k)^4} = \frac{1}{2^4} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4} = \frac{1}{2^4} \cdot \frac{\mathbf{p}^4}{90} \quad (4.3.91)$$

A série para n ímpar é a diferença entre (4.3.90) e (4.3.91):

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{p^4}{90} - \frac{1}{2^4} \cdot \frac{p^4}{90} = \frac{p^4}{90} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^4}\right) = \frac{p^4}{90} \cdot \frac{16-1}{16}$$

$$\sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{p^4}{96} \quad (4.3.92)$$

Substituindo (4.3.92) em (4.3.89), obtém-se a rotação específica:

$$M_t = \frac{512 \cdot Gq \cdot a^3 b \cdot p^4}{p^4 \cdot 96}$$

$$q = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3 b} \quad (4.3.93)$$

A função de tensão de Prandtl é finalmente determinada substituindo (4.3.93) em (4.3.87):

$$f(x, y) = f_0 + \frac{32 \cdot Ga^2}{p^3} \cdot \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3 b} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \cos\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right)$$

$$f(x, y) = f_0 + \frac{6 \cdot M_t}{p^3 \cdot ab} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \cos\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right) \quad (4.3.94)$$

As tensões de cisalhamento são obtidas por diferenciação de (4.3.94).

$$t_{xy} = -\frac{\partial f}{\partial x} \quad t_{xz} = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$t_{xy}(x, y) = \frac{3 \cdot M_t}{p^2 \cdot a^2 b} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \sin\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right) \quad (4.3.95)$$

$$t_{xz} = -\frac{3 \cdot M_t}{p^2 \cdot a^2 b} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[\frac{\sinh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \cos\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right) \quad (4.3.96)$$

4.3.5 Análise de Resultados

A seção em forma de retângulo foi resolvida utilizando a função empenamento como uma solução da equação diferencial de Laplace (3.2.14) que satisfizesse às condições de contorno de Neumann (3.2.41).

O momento de inércia à torção foi determinado em (4.3.50):

$$I_T = 16 \cdot a^3 b \cdot \left[\frac{1}{3} - \frac{64a}{p^5 b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} \right]$$

A rotação específica foi determinada em (4.3.51):

$$q = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3 b} \cdot \frac{1}{\left[1 - \frac{192a}{p^5 b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} \right]}$$

O deslocamento longitudinal foi determinado em (4.3.52):

$$w(x, y) = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3 b} \cdot \frac{xy - \frac{32a^2}{p^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sinh(k_n \cdot y)}{\cosh(k_n \cdot b)} \cdot \sin(k_n \cdot x)}{1 - \frac{192a}{p^5 b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5}}$$

O mesmo problema foi resolvido utilizando a função de tensão Prandtl como uma solução da equação de Poisson (3.4.8) que satisfizesse às condições de contorno de Dirichlet (3.4.16).

A rotação específica foi determinada em (4.3.93):

$$q = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3 b}$$

A função de tensão de Prandtl foi determinada em (4.3.94):

$$f(x, y) = f_0 + \frac{6 \cdot M_t}{p^3 \cdot ab} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^3} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \cos\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right)$$

As tensões de cisalhamento foram calculadas por diferenciação de (4.3.94):

$$t_{zy}(x, y) = \frac{3 \cdot M_t}{p^2 \cdot a^2 b} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[1 - \frac{\cosh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \sin\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right)$$

$$t_{zx} = -\frac{3 \cdot M_t}{p^2 \cdot a^2 b} \cdot \sum_{n=1,3,5,\dots}^{\infty} \frac{1}{n^2} \cdot (-1)^{\frac{n-1}{2}} \cdot \left[\frac{\sinh\left(\frac{np}{2a} \cdot y\right)}{\cosh\left(\frac{np \cdot b}{2a}\right)} \right] \cdot \cos\left(\frac{np}{2a} \cdot x\right)$$

A partir da igualdade entre (4.3.51) e (4.3.93) resulta imediatamente que:

$$1 - \frac{192a}{p^5 b} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tanh(k_n \cdot b)}{(2n+1)^5} = 0 \quad (4.3.97)$$

Portanto o deslocamento longitudinal vale:

$$w(x, y) = \frac{3}{16} \cdot \frac{M_t}{G \cdot a^3 b} \cdot \left[xy - \frac{32a^2}{p^3} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \cdot \frac{\sinh(k_n \cdot y)}{\cosh(k_n \cdot b)} \cdot \sin(k_n \cdot x) \right] \quad (4.3.98)$$

Os problemas de Neumann e Prandtl não foram ambos resolvidos até o fim porque eles são complementares: o cálculo de deslocamentos é mais imediato no primeiro caso; enquanto que o cálculo de tensões é mais imediato no segundo caso.

Além disso, os cálculos de diferenciação e integração necessários para ir de um caso a outro são muito trabalhosos.

5 FORMULAÇÃO INTEGRAL POR RESÍDUOS PONDERADOS

Neste capítulo são desenvolvidas formulações integrais utilizando o método de Galerkin como uma variante do método dos resíduos ponderados. Como exemplo de aplicação dessas formulações, a seção retangular é resolvida de forma aproximada.

5.1 FORMULAÇÃO DIFERENCIAL

No Capítulo 3 foram apresentadas três formulações para o problema da torção uniforme: pela função empenamento de Saint-Venant (problema de Neumann), pela função conjugada (problema de Dirichlet) e pela função de tensão de Prandtl. Segundo Pimenta (2002), estes constituem problemas de valor de contorno, os quais apresentam solução única a menos de uma constante.

Como sugere Costa, (2002), as equações da torção uniforme podem ser generalizadas pela equação diferencial de Poisson:

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y) = c(x, y) \quad \text{Em } A \quad (5.1.1)$$

Quando $c(x, y) = 0$, (5.1.1) passa a se chamar equação de Laplace.

$$\nabla^2 H = 0 \quad (5.1.2)$$

Langendonck (1952) apresenta uma solução geral da equação diferencial (5.1.1) em forma de séries de potências.

$$H(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} p_n \cdot U_n(x, y) + \sum_{n=0}^{\infty} q_n \cdot V_n(x, y) \quad (5.1.3)$$

As funções $f_n(x, y)$ e $g_n(x, y)$ são polinômios que obedecem à equação de Laplace (5.1.2), ou seja, são harmônicas. Elas correspondem, respectivamente, às partes real e imaginária da função de variáveis complexas (3.6.1).

$$F_n(Z) = Z^n = (x + i \cdot y)^n$$

As partes real e imaginária de um número (ou função) complexo podem ser determinadas efetuando operações com os seus respectivos conjugados.

$$U_n(x, y) = \frac{F_n(z) + \bar{F}_n(\bar{z})}{2} \quad i \cdot V_n(x, y) = \frac{F_n(z) - \bar{F}_n(\bar{z})}{2} \quad (5.1.4)$$

$$U_n(x, y) = \frac{(x + i \cdot y)^n + (x - i \cdot y)^n}{2} \quad V_n(x, y) = \frac{(x + i \cdot y)^n - (x - i \cdot y)^n}{2 \cdot i} \quad (5.1.5)$$

As funções (5.1.5) foram calculadas na Tabela 3.2 para alguns valores de n .

A função $H(x, y)$ precisa satisfazer às condições de contorno do problema. As essenciais estão definidas no contorno S_u e as naturais, no contorno S_f . O contorno S representado na Figura 3.2.3 é a união de S_u com S_f .

$$H = \bar{H} \quad \text{Em } S_u \quad (5.1.6)$$

$$q = \frac{\partial H}{\partial \bar{n}} = \nabla H \cdot \bar{n} = \bar{q} \quad \text{Em } S_f \quad (5.1.7)$$

A equação (5.1.1) é válida para todas as formulações apresentadas. A Tabela 5.1 contém os valores de c , $\bar{H}$ e $\bar{q}$ correspondentes às formulações dos problemas de Neumann e de Prandtl¹².

Tabela 5.1 – Formulação diferencial.

	Símbolo	Neumann	Prandtl
Função Incógnita	$H(x, y)$	$y(x, y)$	$f(x, y)$
Termo Independente	$c(x, y)$	0	$-2Gq$
Condição de Contorno Essencial	S_u	–	S
	$\bar{H}$	–	f_0
Condição de Contorno Natural	S_f	S	–
	$\bar{q}$	$\bar{r} \cdot \bar{f}$	–

Conforme se pode observar na tabela acima, as condição de contorno essencial (5.1.6) e natural (5.1.7) não ocorrem simultaneamente nas duas formulações.

¹² A formulação do problema de Dirichlet não foi colocada pois ela tem a mesma equação diferencial do problema de Neumann e tem condição de contorno análoga ao problema de Prandtl.

5.2 FORMULAÇÃO INTEGRAL PELO MÉTODO DE GALERKIN

A equação diferencial (5.1.1) pode ser reescrita introduzindo a notação do laplaciano.

$$\nabla^2 H - c = 0 \quad (5.2.1)$$

O método dos resíduos ponderados consiste na obtenção de soluções aproximadas de equações diferenciais (entre elas a equação (5.1.1)) tornando mínimo o resíduo sob determinado critério.

Como solução de (5.2.1) é tomada uma função aproximadora (ASSAN, 2003) $\hat{H}(x, y)$, a qual pode ser expandida em uma série de funções coordenadas $j_j(x, y)$ (COSTA, 2002) especificadas, combinadas por parâmetros U_j a serem determinados de modo a encontrar a melhor solução. Neste sentido, uma função aproximadora pode ser tomada na seguinte forma¹³:

$$\hat{H}(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j \cdot j_j(x, y) \quad (5.2.2)$$

A função $H_0(x, y)$ pode ser construída de modo a satisfazer (sozinha) às condições de contorno essencial (5.1.6) e natural (5.1.7) do problema:

$$H_0(x, y) = \bar{H} \quad \text{Em } S_u \quad (5.2.3)$$

$$q_0(x, y) = \frac{\partial H_0}{\partial \vec{n}} = \bar{q} \quad \text{Em } S_f \quad (5.2.4)$$

As funções $j_j(x, y)$ são especificadas para satisfazer as condições de contorno homogêneas do problema.

$$j_j(x, y) = 0 \quad \text{Em } S_u \quad (5.2.5)$$

$$\frac{\partial j_j}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{Em } S_f \quad (5.2.6)$$

¹³ A aproximação é melhor quanto maior for n . Quando $n \rightarrow \infty$, (5.2.2) assume um formato equivalente a (5.1.3), que corresponde à solução exata. Portanto, o uso de séries infinitas é uma maneira de representar a solução exata. Isto foi ilustrado no item 4.3, quando foram apresentadas as soluções em séries infinitas obtidas por Wang (1953) e Timoshenko e Goodier (1970).

Desta forma, a função aproximadora $\hat{H}(x,y)$ satisfará às condições de contorno independentemente da escolha dos parâmetros U_j (FINLAYSON, 1972).

5.2.1 Método dos Resíduos Ponderados

Para resolver o problema de forma aproximada, a função de teste $\hat{H}(x,y)$ é substituída na equação diferencial (5.2.1), de modo a gerar um resíduo, denotado por $\mathfrak{R}(\hat{H})$.

$$\mathfrak{R}(\hat{H}) = \nabla^2 \hat{H} - c \quad (5.2.7)$$

Se a função aproximadora correspondesse à solução exata, então o resíduo seria nulo. A expressão (5.2.7) pode ser multiplicada por uma função de ponderação (SORIANO, 2003) arbitrária, denotada por $g(x,y)$.

$$g \cdot \mathfrak{R}(\hat{H}) = g \cdot (\nabla^2 \hat{H} - c) \quad (5.2.8)$$

Segundo Finlayson (1972), as funções peso podem ser escolhidas de diversas maneiras, e cada uma delas corresponde a diferentes variantes do método dos resíduos ponderados.

Os resíduos ponderados (5.2.8) podem ser integrados no domínio A do problema:

$$\iint_A g \cdot \mathfrak{R} \cdot dA = \iint_A g \cdot (\nabla^2 \hat{H} - c) \cdot dA$$

O método dos resíduos ponderados consiste em determinar os parâmetros U_j de modo que a integral dos resíduos $\mathfrak{R}(\hat{H})$ ponderados pela função $g(x,y)$ seja nula:

$$\iint_A g \cdot \mathfrak{R} \cdot dA = \iint_A g \cdot (\nabla^2 \hat{H} - c) \cdot dA = 0 \quad (5.2.9)$$

Reescrevendo (5.2.9), obtém-se a equação integral da torção uniforme (5.2.10) por resíduos ponderados:

$$\iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \hat{H} \cdot dA = \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA \quad (5.2.10)$$

Substituindo a função aproximadora (5.2.2) na equação (5.2.10), obtém-se:

$$\begin{aligned} \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \left(H_0 + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j \right) dA &= \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA \\ \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \left(\iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA \right) &= \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA \\ \sum_{j=1}^n U_j \cdot \left(\iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA \right) &= \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA - \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA \end{aligned}$$

Os parâmetros do problema são determinados resolvendo a seguinte equação:

$$\sum_{j=1}^n \left(\iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA \right) \cdot U_j = \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA - \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA \quad (5.2.11)$$

A equação (5.2.11) pode ser reescrita com a seguinte notação:

$$\sum_{j=1}^n K_j \cdot U_j = R \quad (5.2.12)$$

Os elementos escalares de (5.2.12) valem:

$$K_j = \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA \quad R = \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA - \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA \quad (5.2.13)$$

O somatório (5.2.12) pode ser substituído pela seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} K_1 & \cdots & K_j & \cdots & K_n \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = R \quad (5.2.14)$$

A matriz de coeficientes é definida por:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_1 & \cdots & K_j & \cdots & K_n \end{bmatrix} \quad (5.2.15)$$

O vetor das incógnitas é definido por:

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (5.2.16)$$

Utilizando as definições (5.2.16) e (5.2.15), a equação matricial (5.2.14) pode ser escrita de forma mais compacta:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = R \quad (5.2.17)$$

A equação matricial (5.2.17) admite infinitas soluções, pois existem n incógnitas. Para resolvê-la, é necessário fazer hipóteses sobre a função de ponderação $g(x, y)$. As hipóteses escolhidas dão origem às variantes do método dos resíduos ponderados.

5.2.2 Método de Galerkin Restrito

No método de Galerkin as funções peso são escolhidas como sendo as próprias funções coordenadas. Neste caso, a função aproximadora (5.2.2) pode vir a ser a própria solução exata, desde que uma quantidade suficiente de termos seja utilizada (FINLAYSON, 1972). Pela hipótese de Galerkin, a função peso é diferente para cada $i \in [0, n]$:

$$g(x, y) = j_i(x, y) \quad (5.2.18)$$

Substituindo (5.2.18) na equação (5.2.11), esta se transforma no seguinte conjunto de n equações:

$$\sum_{j=1}^n \left(\iint_{\mathbf{A}} j_i \cdot \nabla^2 j_j \cdot dA \right) \cdot U_j = \iint_{\mathbf{A}} j_i \cdot c \cdot dA - \iint_{\mathbf{A}} j_i \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA \quad (5.2.19)$$

As equações (5.2.19) podem ser reescritas com a seguinte notação:

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j = R_i \quad (5.2.20)$$

Os elementos das equações (5.2.20) valem:

$$K_{ij} = \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA \quad (5.2.21)$$

$$R_i = \iint_A \mathbf{j}_i \cdot c \cdot dA - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA \quad (5.2.22)$$

O somatório (5.2.20) pode ser substituída pela seguinte multiplicação de matrizes:

$$\begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & K_{ij} & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (5.2.23)$$

A matriz de coeficientes é definida por:

$$[\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & K_{ij} & \vdots \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad (5.2.24)$$

O vetor dos termos independentes é definido por:

$$\{\mathbf{R}\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix} \quad (5.2.25)$$

Utilizando as definições (5.2.16), (5.2.24) e (5.2.25), a equação matricial (5.2.23) pode ser escrita de forma mais compacta:

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (5.2.26)$$

Como não foram especificadas as condições de contorno, a equação matricial (5.2.26) pode ser utilizada para resolver, de forma aproximada, qualquer problema de valor de contorno cuja solução seja determinada pela equação diferencial de Poisson.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y) = c(x, y)$$

5.2.3 Método de Galerkin Generalizado

O Método de Galerkin restrito é de aplicação muito difícil, pois as funções coordenadas $\mathbf{j}_j(x, y)$ precisam satisfazer a (5.2.5) e (5.2.6), sendo de difícil construção. Além disso, a função $H_0(x, y)$ precisa satisfazer a todas as condições de contorno do problema, tornando o cálculo das integrais (5.2.21) e (5.2.22) muito trabalhoso.

No método de Galerkin generalizado as equações integrais (5.2.10) podem ser transformadas utilizando o teorema de divergência no plano para simplificar as condições de contorno do problema.

A equação integral da torção uniforme (5.2.10) pode ser reescrita utilizando a notação de derivadas parciais:

$$\iint_A \mathbf{g} \cdot \left(\frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} \right) \cdot dA = \iint_A \mathbf{g} \cdot \mathbf{c} \cdot dA \quad (5.2.27)$$

Pela regra de derivação do produto de funções:

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) = \mathbf{g} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \quad (5.2.28)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) = \mathbf{g} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{g} \cdot \frac{\partial^2 H}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) - \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \quad (5.2.29)$$

Substituindo (5.2.28) e (5.2.29) em (5.2.27), resulta que:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H \cdot d\mathbf{A} &= \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \cdot d\mathbf{A} \\ &\quad - \iint_{\mathbf{A}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

A primeira das integrais de (5.2.30) pode ser transformada utilizando o teorema de divergência no plano (3.2.55) com (5.2.31):

$$P = \mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \qquad Q = \mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \quad (5.2.31)$$

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{A}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \cdot dxdy &= \oint_{\mathbf{s}} (P \cdot l + Q \cdot m) \cdot ds \\ \iint_{\mathbf{A}} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \right] \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{\mathbf{s}} \left[\left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} \right) \cdot l + \left(\mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot m \right] \cdot ds \\ &= \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{g} \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot m \right] \cdot ds \end{aligned} \quad (5.2.32)$$

Finalmente, substituindo (5.2.32) em (5.2.30) e escrevendo o resultado na forma de produto escalar:

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{g} \cdot \left[\frac{\partial H}{\partial x} \cdot l + \frac{\partial H}{\partial y} \cdot m \right] \cdot ds - \iint_{\mathbf{A}} \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x} \cdot \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \cdot \frac{\partial H}{\partial y} \right) \cdot d\mathbf{A} \\ &= \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{g} \cdot \left\{ \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right\} \cdot \{l, m\} \cdot ds - \iint_{\mathbf{A}} \left\{ \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial x}, \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial y} \right\} \cdot \left\{ \frac{\partial H}{\partial x}, \frac{\partial H}{\partial y} \right\} \cdot d\mathbf{A} \\ \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H \cdot d\mathbf{A} &= \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{g} \cdot (\nabla H \cdot \vec{n}) \cdot ds - \iint_{\mathbf{A}} (\nabla \mathbf{g} \cdot \nabla H) \cdot d\mathbf{A} \end{aligned} \quad (5.2.33)$$

Ao substituir (5.2.33) em (5.2.27), considerando que $\nabla H \cdot \vec{n} = \frac{\partial H}{\partial \vec{n}}$, obtém-se a equação integral do método de Galerkin generalizado.

$$\begin{aligned} \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{n}} \cdot ds - \iint_{\mathbf{A}} (\nabla \mathbf{g} \cdot \nabla H) \cdot d\mathbf{A} &= \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{g} \cdot c \cdot d\mathbf{A} \\ \iint_{\mathbf{A}} (\nabla \mathbf{g} \cdot \nabla H) \cdot d\mathbf{A} &= - \iint_{\mathbf{A}} \mathbf{g} \cdot c \cdot d\mathbf{A} + \oint_{\mathbf{s}} \mathbf{g} \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{n}} \cdot ds \end{aligned} \quad (5.2.34)$$

A equação (5.2.34) corresponde à forma fraca de (5.2.10) (COSTA, 2002).

As integrais que aparecem em (5.2.34) podem ser simplificadas se a função peso $g = g(x, y)$ for construída de forma que

$$g = 0 \quad \text{Em } S_u. \quad (5.2.35)$$

Nestas condições, a integral de linha de (5.2.34) poderá ser calculada apenas em S_f .

$$\oint_S g \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{n}} \cdot ds = \oint_{S_f} g \cdot \frac{\partial H}{\partial \vec{n}} \cdot ds = \oint_{S_f} g \cdot \vec{q} \cdot ds \quad (5.2.36)$$

Na expressão (5.2.36) a condição (5.1.7) apareceu automaticamente. Por isso ela é denominada condição de contorno natural (COSTA, 2002).

Substituindo os resultados em (5.2.10), a equação integral resultante é a seguinte:

$$\iint_A (\nabla g \nabla H) \cdot dA = - \iint_A g \cdot c \cdot dA + \oint_{S_f} g \cdot \vec{q} \cdot ds \quad (5.2.37)$$

Será utilizada a mesma função aproximadora (5.2.2).

$$\hat{H}(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j(x, y)$$

A função $H_0(x, y)$ pode agora ser construída de modo a satisfazer apenas as condições de contorno essenciais (5.1.6) do problema, já que as naturais (5.1.7) aparecem em (5.2.2). Dessa forma, as funções coordenadas $\mathbf{j}_j(x, y)$ precisam satisfazer apenas a (5.2.5).

$$\mathbf{j}_j(x, y) = 0 \quad \text{Em } S_u$$

A hipótese de Galerkin (5.2.18) pode ser adotada:

$$g(x, y) = \mathbf{j}_i(x, y)$$

Substituindo (5.2.2) e (5.2.18) em (5.2.37), obtém-se:

$$\iint_A \nabla \mathbf{j}_i \nabla \left(H_0 + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j \right) \cdot dA = - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot c \cdot dA + \oint_{S_f} \mathbf{j}_i \cdot \vec{q} \cdot ds$$

$$\iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla H_0 \cdot dA + \iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \left(\sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j \right) \cdot dA = - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{c} \cdot dA + \oint_{S_f} \mathbf{j}_i \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds$$

$$\sum_{j=1}^n U_j \cdot \left(\iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j \cdot dA \right) = - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{c} \cdot dA + \oint_{S_f} \mathbf{j}_i \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds - \iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla H_0 \cdot dA \quad (5.2.38)$$

As equações (5.2.19) podem ser reescritas com a notação de (5.2.20).

$$\sum_{j=1}^n K_{ij} \cdot U_j = R_i \quad (5.2.39)$$

Os elementos das equações (5.2.39) valem:

$$K_{ij} = \iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j \cdot dA \quad (5.2.40)$$

$$R_i = - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{c} \cdot dA + \oint_{S_f} \mathbf{j}_i \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds - \iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla H_0 \cdot dA \quad (5.2.41)$$

Utilizando as definições de (5.2.16), (5.2.24) e (5.2.25), o conjunto de equações (5.2.39) pode ser transformado na equação matricial (5.2.42).

$$\{\mathbf{U}\} = \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad [\mathbf{K}] = \begin{bmatrix} K_{11} & \cdots & K_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ & K_{ij} & \\ \vdots & \ddots & \\ K_{n1} & \cdots & K_{nn} \end{bmatrix} \quad \{\mathbf{R}\} = \begin{Bmatrix} R_1 \\ \vdots \\ R_i \\ \vdots \\ R_n \end{Bmatrix}$$

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\} \quad (5.2.42)$$

5.3 FORMULAÇÃO MATRICIAL DO PROBLEMA DA TORÇÃO UNIFORME

Nesta seção a formulação integral de Galerkin é aplicada no contexto das equações da torção uniforme para desenvolver métodos práticos para a solução dos problemas de Neumann e Prandtl.

Segundo Soriano (2003), o método de Galerkin “é um dos mais importantes métodos de resíduos ponderados e o que melhor se adapta à formulação do método dos elementos finitos em mecânica dos sólidos deformáveis”. Por isso, alguns conceitos introduzidos no item 5.2 possuem analogia com o método dos elementos finitos.

Neste contexto, a nomenclatura, o formato e a dimensão das matrizes remetem ao método dos elementos finitos, e o processo de solução, à análise matricial de estruturas.

O problema da torção uniforme é regido pela equação diferencial de Poisson (5.1.1).

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y) = c(x, y)$$

Para resolvê-la de forma aproximada, foi escolhida a função aproximadora (5.2.2).

$$\hat{H}(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j(x, y)$$

O somatório de (5.2.2) pode ser convenientemente substituído por uma multiplicação de matrizes (adaptada conforme notação de Assan, 2003):

$$\hat{H}(x, y) = H_0 + \begin{bmatrix} \mathbf{j}_1(x, y) & \cdots & \mathbf{j}_j(x, y) & \cdots & \mathbf{j}_n(x, y) \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} U_1 \\ \vdots \\ U_j \\ \vdots \\ U_n \end{Bmatrix} \quad (5.3.1)$$

A matriz de funções coordenadas é definida pela seguinte matriz-linha

$$[\mathbf{j}(x, y)] = [\mathbf{j}_1(x, y) \quad \cdots \quad \mathbf{j}_j(x, y) \quad \cdots \quad \mathbf{j}_n(x, y)] \quad (5.3.2)$$

Com as notações apresentadas em (5.2.16) e (5.3.2), a expressão (5.3.1) pode ser escrita de forma mais compacta:

$$\hat{H}(x, y) = H_0(x, y) + [j(x, y)] \cdot \{U\} \quad (5.3.3)$$

Os termos da matriz de coeficientes são calculados conforme (5.2.40), transformada para a notação de derivadas parciais:

$$K_{ij} = \iint_A \left(\frac{\partial j_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial j_j}{\partial x} + \frac{\partial j_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial j_j}{\partial y} \right) \cdot dA$$

A matriz $[K]$ pode ser escrita de forma completa utilizando a seguinte multiplicação de matrizes:

$$[K] = \iint_A \begin{bmatrix} \frac{\partial j_1}{\partial x} & \frac{\partial j_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial j_i}{\partial x} & \frac{\partial j_i}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial j_n}{\partial x} & \frac{\partial j_n}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial j_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial j_j}{\partial x} & \dots & \frac{\partial j_n}{\partial x} \\ \frac{\partial j_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial j_j}{\partial y} & \dots & \frac{\partial j_n}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot dA \quad (5.3.4)$$

O resultado de (5.3.4) é uma matriz constante, quadrada e de dimensão $n \times n$. Define-se a matriz gradiente das funções coordenadas por¹⁴:

$$[B(x, y)] = \begin{bmatrix} \frac{\partial j_1}{\partial x} & \dots & \frac{\partial j_k}{\partial x} & \dots & \frac{\partial j_n}{\partial x} \\ \frac{\partial j_1}{\partial y} & \dots & \frac{\partial j_k}{\partial y} & \dots & \frac{\partial j_n}{\partial y} \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Com isso, (5.3.4) pode ser reescrita de forma mais compacta.

$$[K] = \iint_A [B(x, y)]^T \cdot [B(x, y)] \cdot dA \quad (5.3.6)$$

Pode ser feita uma mudança de variáveis na forma de (3.2.33):

$$\mathbf{A}: \begin{cases} x = x(\mathbf{r}, t) \\ y = y(\mathbf{r}, t) \end{cases} \quad \begin{cases} t \in [t_0, t_F] \\ \mathbf{r} \in [\mathbf{r}_0(t), \mathbf{r}_F(t)] \end{cases}$$

Neste caso, a matriz $[\mathbf{K}]$ pode ser calculada por meio de (5.3.7).

$$[\mathbf{K}] = \int_{t_0}^{t_F} \int_{r_0(t)}^{r_F(t)} [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))]^T \cdot [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))] \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \right| d\mathbf{r} \cdot dt \quad (5.3.7)$$

Os termos do vetor dos termos independentes são calculados conforme (5.2.41), utilizando derivadas parciais.

$$R_i = - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \mathbf{c} \cdot dA + \oint_{S_r} \mathbf{j}_i \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds - \iint_A \left(\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial H_0}{\partial y} \right) \cdot dA$$

A matriz $\{\mathbf{R}\}$ pode ser escrita de forma completa utilizando a seguinte multiplicação de matrizes:

$$\{\mathbf{R}\} = - \iint_A \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_k \\ \vdots \\ \mathbf{j}_n \end{Bmatrix} \cdot \mathbf{c} \cdot dA + \oint_{S_r} \begin{Bmatrix} \mathbf{j}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{j}_i \\ \vdots \\ \mathbf{j}_n \end{Bmatrix} \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds - \iint_A \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{j}_1}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{j}_i}{\partial y} \\ \vdots & \vdots \\ \frac{\partial \mathbf{j}_n}{\partial x} & \frac{\partial \mathbf{j}_n}{\partial y} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ \frac{\partial H_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \cdot dA \quad (5.3.8)$$

Define-se o vetor gradiente da função de contorno essencial por:

$$\{\mathbf{Z}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ \frac{\partial H_0}{\partial y} \end{Bmatrix} \quad (5.3.9)$$

Com as definições apresentadas, (5.3.8) se reescreve por:

$$\begin{aligned} \{\mathbf{R}\} = & - \iint_A [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot \mathbf{c}(x, y) \cdot dA + \oint_{S_r} [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds \\ & - \iint_A [\mathbf{B}(x, y)]^T \cdot \{\mathbf{Z}(x, y)\} \cdot dA \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

¹⁴ O símbolo $[\mathbf{B}]$ foi aproveitado da notação de Bathe (1996).

De forma mais compacta:

$$\{\mathbf{R}\} = - \iint_{\mathbf{A}} [\mathbf{j}]^T \cdot \mathbf{c} \cdot dA + \oint_{\mathbf{S}_f} [\mathbf{j}]^T \cdot \bar{q} \cdot ds - \iint_{\mathbf{A}} [\mathbf{B}]^T \cdot \{\mathbf{Z}\} \cdot dA \quad (5.3.10)$$

As matrizes (5.3.6) e (5.3.10) são válidas para resolver, de forma aproximada, o problema da torção uniforme para todas as formulações. A matriz (5.3.10) deverá ser agora particularizada para cada tipo de formulação. (Neumann e Prandtl).

5.3.1 Formulação do problema de Neumann

A função aproximadora para a função empenamento de Saint-Venant $\mathbf{y}(x, y)$ pode ser tomada na seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j(x, y) \quad (5.3.11)$$

A condição de contorno essencial não está definida nesta formulação. Portanto, nada se pode afirmar sobre as funções $\mathbf{y}_0(x, y)$ e $\mathbf{j}_j(x, y)$. No entanto, como todas as funções de prova podem ser arbitrariamente escolhidas sem restrição, a função $\mathbf{y}_0(x, y)$ pode ser escolhida como constante:

$$\mathbf{y}_0(x, y) = \mathbf{y}_0 \quad (5.3.12)$$

Nestas condições, a função aproximadora se reduz a:

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0 + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j(x, y) \quad (5.3.13)$$

Em notação matricial, obtém-se que:

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0 + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\} \quad (5.3.14)$$

A matriz de coeficientes para a solução do problema de Neumann é calculada por (5.3.6).

$$[\mathbf{K}] = \iint_{\mathbf{A}} [\mathbf{B}(x, y)]^T \cdot [\mathbf{B}(x, y)] \cdot dA$$

Para calcular o vetor dos termos independentes, são consideradas as particularizações para este problema específico, apresentadas na Tabela 5.1.

$$c(x, y) = 0 \qquad \bar{q} = \vec{r} \cdot \vec{t} \qquad (5.3.15)$$

De (5.3.12) decorre que:

$$\{\mathbf{Z}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial H_0}{\partial x} \\ \frac{\partial H_0}{\partial y} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \qquad (5.3.16)$$

A substituição de (5.3.15) e (5.3.16) em (5.3.10) leva a:

$$\{\mathbf{R}\} = \oint_{S_r} \left[\mathbf{j}(x(t), y(t)) \right]^T \cdot (\vec{r}(t) \cdot \vec{t}(t)) \cdot ds \qquad (5.3.17)$$

A diferencial do comprimento de arco foi apresentada em (3.2.17)

$$ds = \sqrt{(x')^2 + (y')^2} \cdot dt = s'(t) \cdot dt$$

O vetor $\{\mathbf{R}\}$ pode ser calculado por:

$$\{\mathbf{R}\} = \int_{t_0}^{t_F} \left[\mathbf{j}(x(t), y(t)) \right]^T \cdot (\vec{r}(t) \cdot \vec{t}(t)) \cdot s'(t) \cdot dt \qquad (5.3.18)$$

O produto $(\vec{r}(t) \cdot \vec{t}(t)) \cdot s'(t)$ pode ser calculado diretamente, eliminando os radicais que aparecem em (3.2.17):

$$(\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot s' \equiv \{x, y\} \cdot \left\{ \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\} \cdot \sqrt{(x')^2 + (y')^2}$$

$$r_{ts}(t) = (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot s' = x \cdot x' + y \cdot y' \qquad (5.3.19)$$

O vetor $\{\mathbf{R}\}$ pode finalmente ser determinado pela expressão (5.3.20), de aplicação mais prática que (5.3.17) e (5.3.18).

$$\{\mathbf{R}\} = \int_{t_0}^{t_F} \left[\mathbf{j}(x(t), y(t)) \right]^T \cdot r_{ts}(t) \cdot dt \qquad (5.3.20)$$

Após calcular as matrizes (5.3.6) e (5.3.17), é possível resolver o sistema de equações lineares a coeficientes constantes resultantes da equação matricial (5.2.26).

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\}$$

A função empenamento aproximada fica então determinada a menos da constante y_0 pela expressão (5.3.14).

$$\hat{y}(x, y) = y_0 + [j(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\}$$

O momento de inércia à torção é calculado segundo a expressão (3.2.83).

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds + I_0$$

Substituindo a função empenamento (5.3.14) em (3.2.83), obtém-se que:

$$\begin{aligned} I_T - I_0 &= -\oint_S [j(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds \\ &= -\oint_S \{\mathbf{U}\}^T \cdot [j(x, y)]^T \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds \\ &= -\{\mathbf{U}\}^T \cdot \oint_S [j(x, y)]^T \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds \end{aligned}$$

Considerando (5.3.17), obtém-se finalmente o momento de inércia à torção da seção transversal.

$$I_T = -\{\mathbf{U}\}^T \cdot \{\mathbf{R}\} + I_0 \quad (5.3.21)$$

A rotação específica q é determinada substituindo (5.3.21) em (3.2.84):

$$q = \frac{M}{G \cdot I_T}$$

Os deslocamentos, deformações e tensões são calculados como apresentado no item 3.2.11.

5.3.2 Formulação do problema de Prandtl

A função aproximadora para a função de tensão de Prandtl é a seguinte:

$$\hat{f}(x, y) = f_0(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j \cdot j_j(x, y) \quad (5.3.22)$$

Ao longo do contorno, a função de Prandtl precisa ser constante, conforme (3.4.16).

$$f(x, y) = f_0 \quad \text{Em } S$$

As funções coordenadas também são nulas no contorno, conforme (5.2.5):

$$j_j(x, y) = 0 \quad \text{Em } S_u$$

Por isso, elas devem ser na forma de (5.3.23):

$$j_j(x, y) = p_j(x, y) \cdot f(x, y) \quad (5.3.23)$$

Sendo $f(x, y)$ uma função nula no contorno e $p_j(x, y)$ funções multiplicadoras arbitrárias. Utilizando matrizes, (5.3.23) pode ser reescrita por:

$$\begin{aligned} [j(x, y)] &= [j_1(x, y) \quad \cdots \quad j_j(x, y) \quad \cdots \quad j_n(x, y)] \\ &= f(x, y) \cdot [p_1(x, y) \quad \cdots \quad p_j(x, y) \quad \cdots \quad p_n(x, y)] \end{aligned} \quad (5.3.24)$$

Define-se a matriz-linha de funções multiplicadoras por:

$$[p(x, y)] = [p_1(x, y) \quad \cdots \quad p_j(x, y) \quad \cdots \quad p_n(x, y)] \quad (5.3.25)$$

A matriz de funções coordenadas é calculada por:

$$[j(x, y)] = f(x, y) \cdot [p(x, y)] \quad (5.3.26)$$

É necessário que, ao longo do contorno:

$$f_0(x, y) = f_0 \quad \text{Em } S_u$$

A função $f_0(x, y)$ pode ser escolhida como uma constante (em todo o domínio):

$$f_0(x, y) = f_0 \quad \text{Em } A \quad (5.3.27)$$

A função aproximadora se reduz a:

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}_0 + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j(x, y) \quad (5.3.28)$$

Em forma matricial:

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}_0 + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\} \quad (5.3.29)$$

A matriz de coeficientes para a solução do problema de Prandtl é calculada por (5.3.6).

$$[\mathbf{K}] = \iint_A [\mathbf{B}(x, y)]^T \cdot [\mathbf{B}(x, y)] \cdot dA$$

Para calcular o vetor dos termos independentes, são consideradas as particularizações para este problema específico, apresentadas na Tabela 5.1.

$$\mathbf{c} = -2G\mathbf{q} \quad (5.3.30)$$

De (5.3.27) decorre que:

$$\{\mathbf{Z}(x, y)\} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.3.31)$$

A substituição de (5.3.30) e (5.3.31) em (5.3.10) leva a:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} = 2G\mathbf{q} \cdot \iint_A [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot dA + \oint_{S_f} [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds \quad (5.3.32)$$

A integral de linha é nula porque a fronteira natural não está definida neste problema, então $S_f = \{ \}$. Portanto, o vetor dos termos independentes $\{\mathbf{R}\}$ é uma função (matricial) na variável $\mathbf{q}$, até agora desconhecida:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} = 2G\mathbf{q} \cdot \iint_A [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot dA \quad (5.3.33)$$

Após calcular as matrizes (5.3.6) e (5.3.33), é possível resolver o sistema de equações lineares a coeficientes constantes resultantes da equação matricial (5.2.26).

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\}$$

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} \quad (5.3.34)$$

O vetor das incógnitas $\{\mathbf{U}\}$ é (outra) função matricial na variável $\mathbf{q}$, que será determinada resolvendo a equação (3.4.26):

$$M = 2 \cdot \iint_A (\mathbf{f} - \mathbf{f}_0) \cdot dA$$

Em notação matricial:

$$\begin{aligned} M &= 2 \cdot \iint_A [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\} \cdot dA = 2 \cdot \iint_A \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\}^T \cdot [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot dA \\ &= 2 \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\}^T \cdot \iint_A [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot dA \end{aligned} \quad (5.3.35)$$

Considerando (5.3.33), a rotação específica $\mathbf{q}$ é determinada resolvendo a seguinte equação (escalar) na variável $\mathbf{q}$:

$$M = \frac{1}{G\mathbf{q}} \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\}^T \cdot \{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} \quad (5.3.36)$$

O momento de inércia à torção é obtido substituindo a rotação específica em (3.2.68):

$$I_T = \frac{M}{G\mathbf{q}}$$

A função de tensão de Prandtl fica então determinada a menos da constante $\mathbf{f}_0$ pela expressão:

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}_0 + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\} \quad (5.3.37)$$

As tensões, deformações e deslocamentos são calculados como apresentado no item 3.4.6.

5.4 SOLUÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL RETANGULAR

Na Figura 4.3.1, repetida na Figura 5.4.1 é mostrada uma seção retangular.

Figura 5.4.1 – Seção retangular.

5.4.1 Solução por função de tensão de Prandtl

As funções multiplicadoras podem ser quaisquer. Uma boa escolha é um conjunto de funções polinomiais, como mostra a Tabela 5.2.

Tabela 5.2 – Funções Multiplicadoras.

Grau				
0	$p_{00}(x, y) = 1$			
1	$p_{10}(x, y) = x$	$p_{11}(x, y) = y$		
2	$p_{20}(x, y) = x^2$	$p_{21}(x, y) = 2xy$	$p_{22}(x, y) = y^2$	
3	$p_{30}(x, y) = x^3$	$p_{31}(x, y) = 3x^2y$	$p_{32}(x, y) = 3xy^2$	$p_{33}(x, y) = y^3$

Na solução deste problema, serão utilizadas funções de grau até 1, de acordo com a primeira aproximação de Sokolnikoff (1978). A matriz de funções multiplicadoras é a seguinte:

$$[\mathbf{p}(x, y)]^T = \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix} \quad (5.4.1)$$

A função nula no contorno foi obtida em (4.3.53):

$$f(x, y) = (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2)$$

A matriz de funções coordenadas é calculada por (5.3.26):

$$[\mathbf{j}(x, y)] = f(x, y) \cdot [\mathbf{p}(x, y)]$$

$$[\mathbf{j}(x, y)]^T = \begin{bmatrix} 1 \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) \\ x \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) \\ y \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) \end{bmatrix} \quad (5.4.2)$$

A matriz gradiente das funções coordenadas vale:

$$[\mathbf{B}(x, y)]^T = \begin{bmatrix} (y^2 - b^2) \cdot 2x & (x^2 - a^2) \cdot 2y \\ (y^2 - b^2) \cdot [2x^2 + (x^2 - a^2)] & (x^2 - a^2) \cdot 2xy \\ (y^2 - b^2) \cdot 2xy & (x^2 - a^2) \cdot [2y^2 + (y^2 - b^2)] \end{bmatrix} \quad (5.4.3)$$

A matriz de coeficientes é calculada por (5.3.6).

$$[\mathbf{K}] = \iint_A [\mathbf{B}(x, y)]^T \cdot [\mathbf{B}(x, y)] \cdot dA$$

Neste exemplo:

$$[\mathbf{K}] = ab \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))]^T \cdot [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))] d\mathbf{r} dt \quad (5.4.4)$$

$$[\mathbf{K}] = \frac{128}{15} \cdot a^3 b^3 \cdot \begin{bmatrix} \frac{b^2 + a^2}{3} & & \\ 0 & \frac{b^2}{5} + \frac{a^2}{21} & \\ 0 & 0 & \frac{b^2}{21} + \frac{a^2}{5} \end{bmatrix} \quad (5.4.5)$$

A matriz de termos independentes é calculada por (5.3.33)

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} = 2G\mathbf{q} \cdot \iint_A [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot dA$$

Neste exemplo:

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} = 2G\mathbf{q} \cdot ab \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{j}(x, y)]^T d\mathbf{r}dt \quad (5.4.6)$$

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} = \frac{32}{9} \cdot G\mathbf{q} \cdot a^3 b^3 \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4.7)$$

A solução da equação matricial (5.2.26) é a seguinte:

$$\{\mathbf{U}(\mathbf{q})\} = \frac{5}{4} \cdot \frac{G\mathbf{q}}{b^2 + a^2} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (5.4.8)$$

A rotação específica $\mathbf{q}$ é determinada resolvendo a equação (5.3.36):

$$M = \frac{1}{G\mathbf{q}} \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\}^T \cdot \{\mathbf{R}(\mathbf{q})\}$$

$$M = \frac{40}{9} \cdot \frac{a^3 b^3 \cdot G\mathbf{q}}{b^2 + a^2}$$

$$\mathbf{q} = \frac{9}{40} \cdot \frac{b^2 + a^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G} \quad (5.4.9)$$

O momento de inércia à torção vale:

$$I_T = \frac{40}{9} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^2 + a^2} \quad (5.4.10)$$

A função de tensão de Prandtl é determinada por (5.3.37).

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}_0 + \{\mathbf{j}(x, y)\} \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\}$$

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \frac{9}{32} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) + \mathbf{f}_0 \quad (5.4.11)$$

As tensões de cisalhamento podem ser calculadas por meio de (3.4.7)

$$\tau_{zy}(x, y) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot x \cdot (y^2 - b^2) \quad (5.4.12)$$

$$\tau_{zx}(x, y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot (x^2 - a^2) \cdot y \quad (5.4.13)$$

As distorções podem ser calculadas por meio de (2.3.4).

$$g_{zy}(x, y) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot x \cdot (y^2 - b^2) \quad (5.4.14)$$

$$g_{zx}(x, y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot (x^2 - a^2) \cdot y \quad (5.4.15)$$

Os deslocamentos u e v são obtidos em (3.2.8).

$$u(y, z) = -\frac{9}{40} \cdot \frac{b^2 + a^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G} \cdot yz \quad (5.4.16)$$

$$v(x, z) = \frac{9}{40} \cdot \frac{b^2 + a^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G} \cdot xz \quad (5.4.17)$$

O deslocamento $w(x, y)$ é determinado pela solução do sistema de equações diferenciais (4.2.35) e (4.2.36).

$$\frac{\partial w}{\partial y} = g_{zy} - \frac{\partial v}{\partial z} \quad \frac{\partial w}{\partial x} = g_{zx} - \frac{\partial u}{\partial z}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = -\frac{9}{80} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot x \cdot (5y^2 - 3b^2 + 2a^2) \quad (5.4.18)$$

$$\frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{9}{80} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot y \cdot (-5x^2 + 3a^2 - 2b^2) \quad (5.4.19)$$

Integrando (5.4.18) em relação a y :

$$w(x, y) = -\frac{9}{80} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot xy^3 + (2a^2 - 3b^2) \cdot xy \right) + g(x) \quad (5.4.20)$$

Integrando (4.2.36) em relação a x :

$$w(x, y) = -\frac{9}{80} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \left(-\frac{5}{3} \cdot x^3 y + (3a^2 - 2b^2) \cdot xy \right) + f(y) \quad (5.4.21)$$

Subtraindo as equações (5.4.21) e (5.4.20) membro a membro, obtém-se:

$$g(x) - f(y) = \frac{9}{80} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot xy^3 + \frac{5}{3} \cdot x^3 y - (a^2 + b^2) \cdot xy \right) \quad (5.4.22)$$

Não é possível efetuar a separação de variáveis de (5.4.22) para este caso. Este resultado viola o que foi demonstrado no item 3.4.6, que mostrava que era possível separar as variáveis de (3.4.33):

$$g(x) - f(y) = \frac{1}{G} \cdot \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot dy + 2G\mathbf{q} \cdot xy \right)$$

Isto ocorre exatamente porque a função de Prandtl encontrada em (5.4.11) não é a solução exata.

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \frac{9}{32} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) + \mathbf{f}_0$$

De fato, a equação (3.4.8) não é satisfeita.

$$\frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \mathbf{f}}{\partial x^2} = -2G\mathbf{q}$$

5.4.2 Solução do problema de Neumann

Para que a função aproximadora seja mais precisa possível com o menor número de funções coordenadas, estas podem ser harmônicas.

$$\nabla^2 \mathbf{j}_j(x, y) = 0 \quad (5.4.23)$$

A matriz de funções coordenadas foi construída utilizando funções harmônicas derivadas da expansão de (3.6.1) até o grau 4, conforme Tabela 3.2.

$$[\mathbf{j}(x, y)]^T = \begin{bmatrix} x \\ y \\ x^2 - y^2 \\ 2xy \\ x^3 - 3xy^2 \\ 3x^2y - y^3 \\ x^4 - 6x^2y^2 + y^4 \\ -4x^3y + 4xy^3 \end{bmatrix} \quad (5.4.24)$$

A matriz gradiente das funções coordenadas vale:

$$[\mathbf{B}(x, y)]^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 2x & -2y \\ 2y & 2x \\ 3x^2 - 3y^2 & -6xy \\ 6xy^3 & 3x^2 - 3y^2 \\ 4x^3 - 12xy^2 & -12x^2y + 4y^3 \\ -12x^2y + 4y^3 & -4x^3 + 12xy^2 \end{bmatrix} \quad (5.4.25)$$

A matriz de coeficientes é calculada por (5.3.7).

$$[\mathbf{K}] = \int_{t_0}^{t_F} \int_{r_0(t)}^{r_F(t)} [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))]^T \cdot [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))] \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \right| d\mathbf{r} \cdot dt$$

Neste exemplo:

$$[\mathbf{K}] = ab \cdot \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))]^T \cdot [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))] d\mathbf{r} dt \quad (5.4.26)$$

A matriz (simétrica) de coeficientes $[\mathbf{K}]$ é apresentada na página seguinte:

$$[\mathbf{K}] = 4ab \cdot \begin{bmatrix} 1 & & & & & & & & \\ 0 & 1 & & & & & & & \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \cdot (a^2 + b^2) & & & & & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4}{3} \cdot (a^2 + b^2) & & & & & \\ (a^2 - b^2) & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \cdot (a^4 + b^4) + 2 \cdot a^2 b^2 & & & & \\ 0 & (a^2 - b^2) & 0 & 0 & 0 & \frac{9}{5} \cdot (a^4 + b^4) + 2 \cdot a^2 b^2 & & & \\ 0 & 0 & \frac{8}{5} \cdot (a^4 - b^4) & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \cdot (a^6 + b^6) + \frac{16}{5} \cdot a^2 b^2 \cdot (a^2 + b^2) & & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{8}{5} \cdot (b^4 - a^4) & 0 & 0 & 0 & \frac{16}{7} \cdot (a^6 + b^6) + \frac{16}{5} \cdot a^2 b^2 \cdot (a^2 + b^2) \end{bmatrix}$$

O vetor $\{\mathbf{R}\}$ dos termos independentes é calculado por (5.3.18)

$$\{\mathbf{R}\} = \int_{t_0}^{t_F} \left[j(x(t), y(t)) \right]^T \cdot r_{ts}(t) \cdot dt$$

Como a superfície retangular é formada por quatro curvas, então a função escalar $r_{ts}(t)$, definida em (5.3.19), transforma-se em uma matriz de dimensão 1×4 , construída com base na Tabela 4.4, apresentando em cada linha k as equações da curva S_k correspondente:

$$[r_{ts}(t)] = [b^2 \cdot t \quad b^2 \cdot t \quad a^2 \cdot t \quad a^2 \cdot t] \quad (5.4.27)$$

Da mesma forma, a matriz-linha das funções coordenadas (5.4.24), quando calculada ao longo do contorno dado pela Tabela 4.4, se transformará numa matriz de dimensão 4×8 .

$$[j(x(t), y(t))]^T = \begin{bmatrix} a & -a & -a \cdot t & a \cdot t \\ b \cdot t & -b \cdot t & b & -b \\ a^2 - b^2 \cdot t & a^2 - b^2 \cdot t & a^2 \cdot t - b^2 & a^2 \cdot t - b^2 \\ 2ab \cdot t & 2ab \cdot t & -2ab \cdot t & -2ab \cdot t \\ a^3 - 3ab^2 \cdot t^2 & -a^3 + 3ab^2 \cdot t^2 & -a^3 \cdot t^3 + 3ab^2 \cdot t & a^3 \cdot t^3 - 3ab^2 \cdot t \\ 3a^2b \cdot t - b^3 \cdot t^3 & -3a^2b \cdot t + b^3 \cdot t^3 & 3a^2b \cdot t^2 - b^3 & -3a^2b \cdot t^2 + b^3 \\ a^4 - 6a^2b^2 \cdot t^2 + b^4 \cdot t^4 & a^4 - 6a^2b^2 \cdot t^2 + b^4 \cdot t^4 & a^4 \cdot t^4 - 6a^2b^2 \cdot t^2 + b^4 & a^4 \cdot t^4 - 6a^2b^2 \cdot t^2 + b^4 \\ -4a^3b \cdot t + 4ab^3 \cdot t^3 & -4a^3b \cdot t + 4ab^3 \cdot t^3 & 4a^3b \cdot t - 4ab^3 \cdot t^3 & 4a^3b \cdot t - 4ab^3 \cdot t^3 \end{bmatrix}$$

O vetor $\{\mathbf{R}\}$ dos termos independentes é então calculado por:

$$\{\mathbf{R}\} = \int_{-1}^1 [j(x(t), y(t))]^T \cdot [r_{ts}(t)]^T \cdot dt \quad (5.4.28)$$

$$\{\mathbf{R}\} = 4ab \cdot \left\{ \begin{array}{c} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{3} \cdot (b^2 - a^2) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{4}{5} \cdot (b^4 + a^4) - \frac{8}{3} \cdot a^2b^2 \end{array} \right\} \quad (5.4.29)$$

A solução da equação matricial (5.2.26) é a seguinte:

$$\{\mathbf{U}\} = -\frac{1}{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6} \cdot \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{1}{2} \cdot (a^6 + 19a^4b^2 - 19a^2b^4 - b^6) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ \frac{35}{12} \cdot a^2b^2 \end{Bmatrix} \quad (5.4.30)$$

A função empenamento é obtida por meio de (5.3.14).

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0 + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0 - \frac{1}{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \cdot (a^6 + 19a^4b^2 - 19a^2b^4 - b^6) \cdot 2xy \\ + \frac{35}{12} \cdot a^2b^2 \cdot (-4x^3y + 4xy^3) \end{pmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0 - \frac{(a^6 + 19a^4b^2 - 19a^2b^4 - b^6) \cdot xy + \frac{35}{12} \cdot a^2b^2 \cdot (-4x^3y + 4xy^3)}{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6} \quad (5.4.31)$$

O momento de inércia à torção é determinado por (5.3.21)

$$I_T = -\{\mathbf{U}\}^T \cdot \{\mathbf{R}\} + I_0$$

$$I_T = \frac{16}{9} \cdot a^3b^3 \cdot \frac{3a^4 + 32a^2b^2 + 3b^4}{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6} \quad (5.4.32)$$

A rotação específica é calculada substituindo (5.4.32) em (3.2.84):

$$\mathbf{q} = \frac{M}{G \cdot I_T}$$

$$\mathbf{q} = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3b^3} \cdot \frac{a^6 + 14a^4b^2 + 14a^2b^4 + b^6}{3a^4 + 32a^2b^2 + 3b^4} \quad (5.4.33)$$

Os deslocamentos são obtidos substituindo (5.4.33) em (3.2.8):

$$\begin{aligned} u &= -\mathbf{q} \cdot \mathbf{z} \cdot y \\ v &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{z} \cdot x \\ w &= \mathbf{q} \cdot \mathbf{y}(x, y) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u(y, z) &= -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{a^6 + 14a^4 b^2 + 14a^2 b^4 + b^6}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \cdot yz \\ v(x, z) &= \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{a^6 + 14a^4 b^2 + 14a^2 b^4 + b^6}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \cdot xz \end{aligned} \quad (5.4.34)$$

$$w(x, y) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{\left[(a^6 + 19a^4 b^2 - 19a^2 b^4 - b^6) \cdot xy + \frac{35}{12} \cdot a^2 b^2 \cdot (-4x^3 y + 4xy^3) \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} + w_0 \quad (5.4.35)$$

As deformações são calculadas por diferenciação do campo de deslocamentos.

$$\begin{aligned} g_{yz}(x, y) &= \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{a^6 + 14a^4 b^2 + 14a^2 b^4 + b^6}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \cdot x \\ &\quad - \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{(a^6 + 19a^4 b^2 - 19a^2 b^4 - b^6) \cdot x + \frac{35}{12} \cdot a^2 b^2 \cdot (-4x^3 + 12xy^2)}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \\ g_{yx}(x, y) &= \frac{3}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{\left[(-15a^4 b^2 + 99a^2 b^4 + 6b^6) \cdot x + 35 \cdot a^2 b^2 \cdot x^3 - 105 \cdot a^2 b^2 \cdot xy^2 \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \\ g_{xz}(x, y) &= -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{a^6 + 14a^4 b^2 + 14a^2 b^4 + b^6}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \cdot y \\ &\quad - \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{(a^6 + 19a^4 b^2 - 19a^2 b^4 - b^6) \cdot y + \frac{35}{12} \cdot a^2 b^2 \cdot (-12x^2 y + 4y^3)}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \\ g_{zx}(x, y) &= -\frac{3}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{\left[(6a^6 + 99a^4 b^2 - 15a^2 b^4) \cdot y + 35 \cdot a^2 b^2 \cdot (-3x^2 y + y^3) \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \end{aligned}$$

As tensões de cisalhamento são determinadas utilizando a lei de Hooke (2.3.12).

$$t_{yz}(x, y) = \frac{3}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot \frac{\left[\begin{array}{l} (-15a^4 b^2 + 99a^2 b^4 + 6b^6) \cdot x \\ -105 \cdot a^2 b^2 \cdot xy^2 + 35 \cdot a^2 b^2 \cdot x^3 \end{array} \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \quad (5.4.36)$$

$$t_{xz}(x, y) = -\frac{3}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot \frac{\left[\begin{array}{l} (6a^6 + 99a^4 b^2 - 15a^2 b^4) \cdot y \\ -105 \cdot a^2 b^2 \cdot x^2 y + 35 \cdot a^2 b^2 \cdot y^3 \end{array} \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4} \quad (5.4.37)$$

5.4.3 Análise dos resultados

Primeiramente, o problema foi resolvido pela função de tensão de Prandtl. Como funções multiplicadoras, foram utilizados polinômios de grau até 1, o que resultou em um sistema matricial de dimensão 3. A solução obtida foi uma função de tensão aproximada com apenas uma função coordenada.

A rotação específica foi determinada em (5.4.9) pela solução da equação matricial (5.3.36). O momento de inércia à torção, em (5.4.32).

$$q = \frac{9}{40} \cdot \frac{b^2 + a^2}{a^3 b^3} \cdot \frac{M}{G} \quad I_T = \frac{40}{9} \cdot \frac{a^3 b^3}{b^2 + a^2}$$

A função de Prandtl foi então determinada em (5.4.11).

$$\hat{f}(x, y) = \frac{9}{32} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot (x^2 - a^2) \cdot (y^2 - b^2) + f_0$$

As tensões de cisalhamento na direção de x e y foram determinadas por derivação da função de Prandtl, respectivamente em (5.4.13) e (5.4.12).

$$t_{xz}(x, y) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot y \cdot (a^2 - x^2) \quad t_{yz}(x, y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot x \cdot (b^2 - y^2)$$

A tensão de cisalhamento resultante é a seguinte:

$$\bar{t}_A = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot \left[-y \cdot (a^2 - x^2) \cdot \hat{e}_x + x \cdot (b^2 - y^2) \cdot \hat{e}_y \right] \quad (5.4.38)$$

O valor da tensão de cisalhamento resultante vale:

$$t_A = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot \sqrt{y^2 \cdot (a^2 - x^2)^2 + x^2 \cdot (b^2 - y^2)^2}$$

O gráfico da tensão é representado na Figura 5.4.2.

Figura 5.4.2 – Tensão de cisalhamento na seção retangular.

Ao longo dos contornos S_1 e S_2 , a componente de cisalhamento t_{zx} se anula; nos contornos S_3 e S_4 , a componente t_{zy} se anula. Em todos os casos, a direção da tensão de cisalhamento é tangente ao contorno, e o sentido obedece à orientação da Figura 4.3.1.

Tabela 5.3 – Propriedades geométricas da superfície retangular.

S_k	Equações do contorno	Versor tangente	Tensão de Cisalhamento
		$\vec{t}_k$	$\vec{t}_{sk}(x, y)$
S_1	$x = a$	$\vec{t}_1 = \hat{e}_y$	$\vec{t}_{s1}(y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot a \cdot (b^2 - y^2) \cdot \vec{t}_1$
S_2	$x = -a$	$\vec{t}_2 = -\hat{e}_x$	$\vec{t}_{s2}(x) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot b \cdot (a^2 - x^2) \cdot \vec{t}_2$
S_3	$y = b$	$\vec{t}_3 = -\hat{e}_y$	$\vec{t}_{s3}(y) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot a \cdot (b^2 - y^2) \cdot \vec{t}_3$
S_4	$y = -b$	$\vec{t}_4 = \hat{e}_x$	$\vec{t}_{s4}(x) = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot b \cdot (a^2 - x^2) \cdot \vec{t}_4$

Não foi possível determinar o deslocamento longitudinal pela integração das tensões. Isto ocorreu porque, de modo geral, não é possível executar a separação de variáveis (3.4.33) quando a solução não é exata.

$$g(x) - f(y) = \frac{1}{G} \cdot \left(\int_{x_0}^x \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial y} \cdot dx + \int_{y_0}^y \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial x} \cdot dy + 2G\mathbf{q} \cdot xy \right)$$

$$g(x) - f(y) = \frac{9}{80} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \left(\frac{5}{3} \cdot xy^3 + \frac{5}{3} \cdot x^3 y - (a^2 + b^2) \cdot xy \right)$$

Em seguida, o problema foi resolvido pela função empenamento. As funções coordenadas podem ser quaisquer, mas para encontrar uma solução aproximada utilizando menor quantidade de funções coordenadas, estas foram escolhidas entre as funções polinomiais de grau até 4, apresentadas na Tabela 3.2.

Neste caso, o sistema resultante foi de dimensão 8. Como o contorno precisou ser dividido em 4 partes, conforme apresentado na Tabela 4.4, a função escalar $r_{ts}(t)$ foi substituída por uma matriz-linha de 4 colunas. Para ser calculada no contorno, a matriz-linha das funções coordenadas foi substituída por uma matriz 4×8 . Desta forma, o vetor $\{\mathbf{R}\}$ pôde ser calculado com elementos de dimensões compatíveis.

A função empenamento foi obtida, de forma aproximada, com duas funções coordenadas. O momento de inércia à torção foi determinado de forma direta em (5.4.32) e a rotação específica em (5.4.33).

$$I_T = \frac{16}{9} \cdot a^3 b^3 \cdot \frac{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4}{a^6 + 14a^4 b^2 + 14a^2 b^4 + b^6}$$

$$\mathbf{q} = \frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{a^6 + 14a^4 b^2 + 14a^2 b^4 + b^6}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4}$$

Os deslocamentos longitudinais na barra foram determinados em (5.4.35).

Quando $w_0 = 0$, eles se reduzem a:

$$w(x, y) = -\frac{9}{16} \cdot \frac{M}{G \cdot a^3 b^3} \cdot \frac{(a^6 + 19a^4b^2 - 19a^2b^4 - b^6) \cdot xy + \frac{35}{12} \cdot a^2b^2 \cdot (-4x^3y + 4xy^3)}{3a^4 + 32a^2b^2 + 3b^4}$$

O gráfico do deslocamento transversal para $w_0 = 0$ é apresentado na Figura

5.4.3. Na Figura 5.4.4 é possível perceber os níveis dos pontos da seção.

Figura 5.4.3 – Empenamento da seção retangular.

Figura 5.4.4 – Empenamento da seção retangular (2).

As tensões de cisalhamento na seção transversal foram determinadas em (5.4.37) e (5.4.36) por diferenciação do campo de deslocamentos e pela lei de Hooke.

$$t_{xz}(x, y) = -\frac{3}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot \frac{\left[(6a^6 + 99a^4 b^2 - 15a^2 b^4) \cdot y - 105 \cdot a^2 b^2 \cdot x^2 y + 35 \cdot a^2 b^2 \cdot y^3 \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4}$$

$$t_{yz}(x, y) = \frac{3}{16} \cdot \frac{M}{a^3 b^3} \cdot \frac{\left[(-15a^4 b^2 + 99a^2 b^4 + 6b^6) \cdot x + 35 \cdot a^2 b^2 \cdot x^3 - 105 \cdot a^2 b^2 \cdot xy^2 \right]}{3a^4 + 32a^2 b^2 + 3b^4}$$

As tensões de cisalhamento obtidas pela função empenamento de Saint-Venant e pela função de tensão de Prandtl são diferentes. Isto se explica porque no primeiro caso as funções aproximadoras eram utilizadas para calcular deslocamentos; enquanto que no segundo caso, para calcular tensões.

Além disso, as componentes de cisalhamento t_{zx} não se anulam quando $|x| = a$ e t_{zy} não se anulam quando $|y| = b$. Portanto, as tensões de cisalhamento não são tangentes ao contorno.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Nesta dissertação o problema da torção uniforme em barras de seção transversal maciça foi resolvido por meio de três formulações diferenciais e duas formulações integrais por resíduos ponderados.

No Capítulo 2 foram apresentadas as equações da teoria da elasticidade linear em três dimensões. Os conceitos foram apresentados analisando uma parte infinitesimal de um sólido V em equilíbrio. No limite em que o volume desta parte tende a zero, ela se transforma em um ponto P , cujas propriedades puderam então ser determinadas.

Para o cálculo de deformações angulares, foi necessário considerar que os deslocamentos envolvidos são suficientemente pequenos para que as funções trigonométricas pudessem ser aproximadas por polinômios de grau não maior que 1. Devido à linearidade geométrica, as grandezas físicas podem ser calculadas na configuração inicial do sólido V .

As tensões atuantes nas faces de um paralelepípedo infinitesimal extraído do (mesmo) sólido V podem ser decompostas em componentes ortogonais aos eixos cartesianos. Com isso, a tensão atuante em um ponto P do sólido V , segundo um plano p de normal exterior $\vec{n}$, pode ser calculada pelo teorema de Cauchy (GURTIN, 1981), o qual foi demonstrado analisando o equilíbrio de um tetraedro infinitesimal submetido a forças de superfície.

As equações diferenciais de equilíbrio foram determinadas pela análise do equilíbrio de um paralelepípedo infinitesimal submetido a forças de volume. A partir do equilíbrio de momentos, concluiu-se que as tensões de cisalhamento em faces ortogonais são iguais, do que decorre a simetria do tensor das tensões de Cauchy (BUCALEM; MAZZILLI, 2002).

As equações constitutivas relacionam as tensões atuantes em um corpo às deformações dela decorrentes. Foi considerado que a relação entre as tensões e as deformações é linear. Devido à linearidade física (PIMENTA, 2002), os efeitos de carregamentos isolados podem ser combinados por superposição (LINDENBERG NETO, 1998).

A linearidade geométrica é uma condição recomendada para o funcionamento seguro de estruturas em situação de serviço, por motivos funcionais e estéticos. A linearidade física é respeitada nos materiais de construção mais utilizados, como concreto e aço. Portanto, a teoria linear da elasticidade é adequada para estudar a maioria dos problemas práticos de Engenharia Civil (KNEESE, 1979).

No Capítulo 3 são apresentadas as equações de Saint-Venant para a torção uniforme, construídas utilizando o método semi-inverso de solução de problemas da elasticidade linear. Os efeitos relativos à atuação de forças de volume e à variação de temperatura não são considerados, pois podem ser analisados separadamente, e combinados aplicando o princípio de superposição de efeitos. Considerou-se ainda que a rotação de cada seção ocorra em torno do centro de rotação como corpo rígido e que as fibras radiais permaneçam retas e com comprimento constante após a torção (BORESI; CHONG, 1987).

Na torção uniforme de barras prismáticas, todas as seções empenam livremente de um mesmo valor, o qual é proporcional à rotação específica. Quando ocorrem restrições ao empenamento, surgem tensões normais à seção transversal, que provocam alterações no campo de deslocamentos e no próprio campo de tensões, e a torção não é mais uniforme (LANGENDONCK, 1960b). Foi destacado ainda que, como as estruturas possuem vinculações que restringem o empenamento, a torção uniforme não ocorre na prática (ISHITANI; BITTENCOURT, 2000).

Pelo princípio de Saint-Venant (TIMOSHENKO; GOODIER, 1970) válido para barras prismáticas, a mudança de distribuição de tensões ocorre apenas nas regiões mais próximas às interferências. Nas outras regiões, as soluções elementares fornecem resultados suficientemente precisos para que a torção possa ser considerada uniforme.

Para determinar o campo de deslocamentos da barra, foi utilizado o método semi-inverso (BORESI; CHONG, 1987) aplicado à função empenamento de Saint-Venant. As deformações e as tensões foram calculadas pelas equações da teoria da elasticidade. Para que o equilíbrio da barra se estabeleça, é necessário que a função empenamento seja harmônica ao longo do domínio da seção transversal.

Utilizando elementos da geometria euclidiana aliada ao cálculo diferencial, foram determinados os versores tangente e normal ao contorno da seção de formato qualquer, o qual deve ser parametrizado por (3.2.15).

$$\mathbf{S}: \begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \end{cases} \quad t \in \mathbb{R} \quad t_0 \leq t \leq t_F$$

O versor tangente é calculado conforme (3.2.22). Se a curva fechada que descreve o contorno estiver orientada no sentido anti-horário, o versor normal é calculado conforme (3.2.31).

$$\vec{t} \equiv \left\{ \frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\} \quad \vec{n} \equiv \left\{ \frac{y'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, -\frac{x'}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}} \right\}$$

A aplicação das condições de contorno na superfície lateral da barra resultou na equação diferencial (3.2.44) envolvendo produtos escalares:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \vec{n}} = \nabla \mathbf{y} \cdot \vec{n} = \vec{r} \cdot \vec{t}$$

O momento de inércia à torção foi determinado aplicando as condições de contorno nas extremidades da barra. Utilizando o teorema de divergência no plano (GUIDORIZZI, 2002a), foi possível escrevê-lo de outra forma, utilizando produtos escalares conforme (3.2.83):

$$I_T = -\oint_s (\mathbf{y} - \mathbf{y}_0) \cdot (\vec{r} \cdot \vec{t}) \cdot ds + I_0$$

A solução do problema de Neumann (SOARES, 2002) consiste em determinar uma função harmônica que satisfaça à condição de contorno (3.2.44).

Foi demonstrado que o problema da torção uniforme pode ser resolvido utilizando uma outra função de teste, a qual deve ser conjugada harmônica da função empenamento (BORESI; CHONG, 1987). Nesse sentido, elas estão relacionadas pelas equações de Cauchy-Riemann, que permite encontrar uma delas em função da outra.

As deformações são calculadas aproveitando as relações entre a função empenamento e sua conjugada harmônica e as tensões, pela lei de Hooke (2.3.13). O equilíbrio da barra foi automaticamente satisfeito nesta formulação. A aplicação

das condições de contorno na superfície lateral da barra resultou na equação diferencial (3.3.23) envolvendo produtos escalares:

$$\frac{\partial c}{\partial \ell} = \nabla \mathbf{c} \cdot \mathbf{\ell} = \vec{r} \cdot \mathbf{\ell}$$

Utilizando algumas transformações matemáticas, a equação (3.3.23) pôde ser integrada diretamente, resultando em uma condição de contorno teoricamente mais simples, expressa pela equação (3.3.28).

O momento de inércia à torção foi determinado aplicando as condições de contorno nas extremidades da barra. Utilizando o teorema de divergência no plano, foi possível escrevê-lo de outra forma, utilizando produtos escalares conforme (3.3.42):

$$I_T = -\oint_S (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot \vec{r} \cdot \vec{n} \cdot ds + 2 \cdot \iint_A (\mathbf{c} - \mathbf{c}_0) \cdot dA + I_0$$

A solução do problema de Dirichlet (LANGENDONCK, 1952) consiste em determinar uma função harmônica que satisfaça à condição de contorno (3.3.28).

Em seguida, foi apresentada a formulação desenvolvida por Ludwig Prandtl (BORESI; CHONG, 1987). Foram feitas hipóteses sobre as tensões atuantes na superfície lateral. A aplicação das equações de equilíbrio resultou que as componentes de cisalhamento não variam entre seções transversais distintas. As tensões podem ser definidas de modo a se relacionarem com uma função de tensão de duas variáveis, que precisa então ser solução da equação de Poisson (3.4.8). Para satisfazer à condição de contorno na superfície lateral, a função de tensão de Prandtl precisa ser constante no contorno da seção.

A rotação específica é determinada implicitamente pela equação (3.4.26), a qual foi obtida utilizando o teorema de divergência no plano. As tensões são obtidas por diferenciação da função de Prandtl. As deformações, por meio da lei de Hooke (2.3.4). Os deslocamentos longitudinais são determinados resolvendo o sistema de equações diferenciais (3.4.28), o qual sempre admite solução quando a função de teste obedece à equação (3.4.8).

Por fim, foram apresentadas as equações da torção uniforme, a relação entre as funções de deslocamento de Saint-Venant e de tensão de Prandtl, e uma

metodologia para encontrar funções harmônicas na forma de polinômios extraídos de funções de variáveis complexas.

De forma geral, pode-se observar que a função empenamento de Saint-Venant é determinada encontrando uma solução da equação de Laplace que satisfaça à condição de Neumann. A função conjugada harmônica é determinada encontrando uma solução da equação de Laplace que satisfaça à condição de Dirichlet. A função de tensão de Prandtl é determinada precisando encontrar uma solução da equação de Poisson que satisfaça a outra condição de Dirichlet.

O Capítulo 4 consiste da aplicação das equações diferenciais na solução de barras de seção em forma de elipse e de triângulo equilátero, verificando que de fato as três formulações diferenciais são equivalentes.

A seção elíptica foi primeiramente resolvida utilizando a função de tensão de Prandtl, obtendo o momento de inércia à torção e as tensões de cisalhamento na seção transversal. O deslocamento longitudinal foi determinado em (4.1.42) por integração do campo de tensões.

$$w(x, y) = \frac{M}{G} \cdot \frac{b^2 - a^2}{\pi a^3 b^3} \cdot xy$$

Baseado neste campo de deslocamentos, o problema de Neumann foi resolvido utilizando como teste para a função empenamento de Saint-Venant uma função harmônica de grau 2. A mesma função de teste foi utilizada na solução do problema pela função conjugada. No entanto, para aproveitar alguns cálculos anteriormente realizados, a equação (3.3.23) foi utilizada em substituição a (3.3.28) pois, além de ambas levarem a resultados equivalentes, esta última introduziria uma constante adicional ao problema. Portanto, rigorosamente, não foi resolvido o problema de Dirichlet, mas sim um problema equivalente a este.

Conforme esperado, todas as formulações levaram aos mesmos resultados, e foi demonstrado que a direção da tensão de cisalhamento atuante na seção transversal da elipse era tangente ao contorno. Foi verificado também, que o deslocamento transversal (4.1.42) se anula automaticamente quando a elipse se reduz a uma circunferência, confirmado que não há empenamento em seções circulares.

Em seguida foi feita a solução da seção transversal em forma de triângulo isósceles. Ao submeter a função de tensão à condição de equilíbrio, resultou que o triângulo fosse equilátero, condição expressa por (4.2.18). Nestas condições, foram determinadas as rotações específicas, o momento de inércia à torção. As tensões foram calculadas pela diferenciação da função de Prandtl e o deslocamento longitudinal, em (4.2.40) por integração das tensões.

$$w(x, y) = \frac{5}{54\sqrt{3} \cdot b^5} \cdot \frac{M}{G} \cdot (-x^3 + 3y^2x) + w_0$$

Baseado neste campo de deslocamentos, os problemas de Neumann e Dirichlet foram resolvidos utilizando como teste uma função harmônica de grau 3. Ao submeter a função empenamento à condição de contorno (3.2.44) em cada uma das superfícies S_1 e S_2 , foram determinados dois valores possíveis para o parâmetro adimensional x . Ao aplicar (3.2.44) na superfície S_3 , verificou-se que o único dos valores válidos para x é aquele que implica que o triângulo seja equilátero.

A função conjugada harmônica da função empenamento respeitava automaticamente à condição de contorno (3.3.23) nas superfícies S_1 e S_2 ; mas para que isso ocorresse também ao longo da superfície S_3 , era necessário que o triângulo fosse equilátero.

Nestas condições, a função empenamento e sua conjugada harmônica ficaram determinadas a menos de uma constante. Foram então calculados o momento de inércia à torção, a rotação específica e o deslocamento longitudinal. Foi demonstrado ainda que a direção da tensão de cisalhamento atuante na seção transversal do triângulo equilátero era tangente ao contorno.

Através de séries infinitas, Timoshenko e Goodier (1970) resolvem a seção retangular usando a função de tensão, enquanto que Wang (1953) utiliza a função empenamento. Neste trabalho, as duas soluções são desenvolvidas empregando métodos de solução das equações diferenciais de Laplace e Poisson, por separação de variáveis.

A solução da seção retangular é desenvolvida utilizando elementos de equações diferenciais de derivadas parciais. Primeiramente foi resolvido o problema

de Neumann, regido pela equação de Laplace. Por fim, foi resolvido o problema de Neumann, regido pela equação de Poisson.

No Capítulo 5 foram desenvolvidas formulações integrais por resíduos ponderados para resolver problemas que não possuem solução fechada. A seção retangular foi resolvida utilizando funções de tensão e de deslocamentos.

Primeiramente, as equações da torção uniforme apresentadas no Capítulo 3 foram generalizadas no formato da equação diferencial de Poisson (5.1.1) (COSTA, 2002). As particularizações que se aplicam em cada formulação foram apresentadas na Tabela 5.1.

$$\frac{\partial^2 H}{\partial x^2}(x, y) + \frac{\partial^2 H}{\partial y^2}(x, y) = c(x, y)$$

Como solução de (5.1.1) foi tomada a função aproximadora (ASSAN, 2003) $\hat{H}(x, y)$, expandida em séries conforme (5.2.2).

$$\hat{H}(x, y) = H_0(x, y) + \sum_{j=1}^n U_j \cdot \mathbf{j}_j(x, y)$$

Como esta em geral não corresponde à solução exata de (5.1.1), os parâmetros U_j precisam ser determinados de forma otimizada. A minimização da integral dos resíduos $\Re(\hat{H})$ ponderados pela função $\mathbf{g}(x, y)$ resultou na equação integral de n incógnitas (5.2.17) com elementos escalares dados por (5.2.13):

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = R$$

$$K_j = \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA$$

$$R = \iint_A \mathbf{g} \cdot c \cdot dA - \iint_A \mathbf{g} \cdot \nabla^2 H_0 \cdot dA$$

No método de Galerkin as funções peso foram escolhidas como (5.2.18). A equação integral se transforma na equação matricial (5.2.26).

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}\} = \{\mathbf{R}\}$$

Como as condições de contorno não foram inseridas, as funções coordenadas precisam satisfazer a todas as condições de contorno do problema (COSTA, 2002). Neste caso, o método é restrito e as matrizes de (5.2.26) são obtidas conforme (5.2.21) e (5.2.22).

$$K_{ij} = \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \nabla^2 \mathbf{j}_j \cdot dA$$

$$R_i = c \cdot \iint_A \mathbf{j}_i \cdot dA - \iint_A \mathbf{j}_i \cdot \nabla^2 U_0 \cdot dA$$

No método de Galerkin generalizado foram introduzidas as condições de contorno essenciais do problema, o que resultou na forma fraca de (5.2.26). As condições de contorno naturais apareceram naturalmente em (5.2.36) (COSTA, 2002). Neste caso, as matrizes de (5.2.26) são calculadas conforme (5.2.40) e (5.2.41).

$$K_{ij} = \iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla \mathbf{j}_j \cdot dA$$

$$R_i = -c \cdot \iint_A \mathbf{j}_i \cdot dA + \oint_{S_f} \mathbf{j}_i \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds - \iint_A \nabla \mathbf{j}_i \cdot \nabla H_0 \cdot dA$$

Para poder aplicar o método de Galerkin generalizado na solução de barras submetidas à torção uniforme, foi desenvolvida uma formulação matricial geral, que foi depois particularizada para a solução dos problemas de Neumann e Prandtl.

A solução aproximada foi escrita na forma do produto de matrizes (5.3.3):

$$\hat{H}(x, y) = H_0(x, y) + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\}$$

A matriz de coeficientes é calculada conforme (5.3.6) ou (5.3.7):

$$[\mathbf{K}] = \iint_A [\mathbf{B}(x, y)]^T \cdot [\mathbf{B}(x, y)] \cdot dA$$

$$[\mathbf{K}] = \int_{t_0}^{t_F} \int_{r_0(t)}^{r_F(t)} [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))]^T \cdot [\mathbf{B}(x(\mathbf{r}, t), y(\mathbf{r}, t))] \cdot \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(\mathbf{r}, t)} \right| d\mathbf{r} \cdot dt$$

O vetor dos termos independentes foi determinado no caso geral em (5.3.10):

$$\{\mathbf{R}\} = -c \cdot \iint_A [\mathbf{j}]^T \cdot dA + \oint_{S_f} [\mathbf{j}]^T \cdot \bar{\mathbf{q}} \cdot ds - \iint_A [\mathbf{B}]^T \cdot \{\mathbf{Z}\} \cdot dA$$

A particularização de (5.3.10) para a função empenamento de Saint-Venant resulta em (5.3.20):

$$\{\mathbf{R}\} = \int_{t_0}^{t_F} [\mathbf{j}(x(t), y(t))]^T \cdot r_{ts}(t) \cdot dt$$

Após resolver o sistema de equações (5.2.26), a função empenamento é calculada por (5.3.14), e o momento de inércia à torção, em (5.3.21).

$$\hat{\mathbf{y}}(x, y) = \mathbf{y}_0 + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\}$$

$$I_T = -\{\mathbf{U}\}^T \cdot \{\mathbf{R}\} + I_0$$

Na formulação utilizando a função de tensão de Prandtl, há definição da fronteira natural, o que faz a integral de linha de (5.3.10) se anular. O vetor das incógnitas (5.3.33) é uma função da rotação específica $\mathbf{q}$.

$$\{\mathbf{R}(\mathbf{q})\} = 2G\mathbf{q} \cdot \iint_A [\mathbf{j}(x, y)]^T \cdot dA$$

O vetor das incógnitas, que também é uma função de $\mathbf{q}$, é determinado resolvendo a equação matricial (5.3.34):

$$[\mathbf{K}] \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\} = \{\mathbf{R}(\mathbf{q})\}$$

A rotação específica é finalmente determinada ao resolver a equação (5.3.36).

$$M = \frac{1}{G\mathbf{q}} \cdot \{\mathbf{U}(\mathbf{q})\}^T \cdot \{\mathbf{R}(\mathbf{q})\}$$

A função de tensão de Prandtl é então calculada de acordo com (5.3.29).

$$\hat{\mathbf{f}}(x, y) = \mathbf{f}_0 + [\mathbf{j}(x, y)] \cdot \{\mathbf{U}\}$$

A seção retangular foi resolvida utilizando as duas formulações desenvolvidas. No método dos esforços, foi resolvido um sistema de dimensão 3, cuja solução resultou na função de Prandtl com apenas uma função coordenada. Foram calculadas, de forma aproximada, a rotação específica e o momento de inércia à torção. A função de tensão de Prandtl ficou determinada a menos de uma constante. Como não foi possível separar as variáveis após a integração das tensões, os deslocamentos longitudinais não puderam ser determinados.

No método dos deslocamentos, foi resolvido um sistema de dimensão 8, cuja solução resultou na função empenamento com duas funções coordenadas. Foram calculadas, de forma aproximada, a função empenamento, o momento de inércia à torção, a rotação específica e os deslocamentos ao longo da barra. As tensões de cisalhamento foram calculadas utilizando a lei de Hooke.

Os dois métodos só fornecem resultados iguais se a função aproximadora corresponder à solução exata, o que em geral não ocorre. Por isso as tensões de cisalhamento obtidas por cada método foram diferentes. Isto se explica também

porque como a função de tensão já é aproximada, os deslocamentos obtidos por integração estariam ainda mais distantes da solução exata.

Por outro lado, como a função de deslocamentos já é aproximada, as tensões obtidas por diferenciação estariam ainda mais distantes da solução exata. Mas isso pode ser contornado com uma escolha adequada de funções coordenadas que levem a uma solução mais precisa.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABRAMENTO, Isaac. O centro de torção e o centro de cisalhamento nas barras prismáticas. Dissertação de Mestrado. 1981.

ASSAN, Aloísio Ernesto. Método dos Elementos Finitos: Primeiros Passos. 2a ed. Campinas: Unicamp, 2003.

BARONE Junior, Mario. Álgebra linear. 3a ed. 1990.

BATHE, Klaus-Jürgen. Finite Elements Procedures. Prentice-Hall, 1996.

BORESI, Arthur Peter; CHONG, Ken Pin. Elasticity in Engineering Mechanics. Elsevier, 1987.

BOULOS, Paulo; ACHCAR, Nelson. Cinemática do Ponto. Notas de Aula. 1997.

BUCALEM, Miguel Luiz; MAZZILLI, Carlos Eduardo Nigro. Fundamentos da Mecânica das Estruturas I. Notas de Aula. 2002.

CERRI, Cristina. Os Números Complexos. Notas de Aula. 1999.

CERRI, Cristina. Laboratório de Matemática II. Notas de Aula. 2004.

COSTA, Henrique de Britto. Resíduos Ponderados na Mecânica das Estruturas. Notas de Aula. 2002.

DIOGO, Luiz Antonio Cortese. Resistência dos Materiais e Estática das construções I. Notas de Aula. 2000.

EVES, Howard. Introdução à história da matemática. Unicamp, 2004.

FINLAYSON, Bruce A. The Method of Weighted Residuals and Variational Principles. Academic Press, 1972.

GARBI, Gilberto Geraldo. O Romance das Equações Algébricas. Makron Books, 1997.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo Volume 1. 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001a.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo Volume 2. 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2001b.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo Volume 3. 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002a.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. Um Curso de Cálculo Volume 4. 5a ed. Rio de Janeiro: LTC, 2002b.

GURTIN, Morton E. An introduction to continuum Mechanics.1981.

ISHITANI, Hideki; BITTENCOURT, Túlio Nogueira. Estruturas de Concreto II. Notas de Aula. 2000.

KNEESE, Fernando Queiroz dos Santos. Sobre a teoria da elasticidade não linear e suas simplificações.1979.

KNOPP, Konrad. Theory and application of infinite series.1990.

LANGENDONCK, Telêmaco Van. Funções Ortogonais na Resolução de Problemas da Teoria da Elasticidade. Tomo 1 – Generalidades e Torção.1952.

LANGENDONCK, Telêmaco Van. Curso de Mecânica das Estruturas. Resistência dos Materiais. Tensões. RM-1.1971.

LANGENDONCK, Telêmaco Van. Curso de Mecânica das Estruturas. Resistência dos Materiais. Deformações I. RM-2.1960a.

LANGENDONCK, Telêmaco Van. Curso de Mecânica das Estruturas. Resistência dos Materiais. Deformações II. RM-3.1960b.

LINDENBERG Neto, Henrique. Introdução à Mecânica das estruturas. Notas de Aula. 1998.

MAZZILI, Carlos Eduardo Nigro; ANDRÉ, João Cyro. Mecânica das Estruturas I. Notas de Aula. 2000.

NOVOZHILOV, Valentin Valentinovich; LUSHER, J. K. Theory of elasticity.1961.

PÁDUA Filho, Antonio de. História da Matemática I. Notas de Aula. 2005.

PIMENTA, Paulo de Mattos. Fundamentos da Teoria das Estruturas. Notas de Aula. 2002.

SOARES, Carlos Alberto. Teoria da Elasticidade. Notas de Aula. 2002.

SOKOLNIKOFF, Ivan Stephen; SOKOLNIKOFF, Elizabeth S. Higher mathematics for engineers and physicists.1941.

SOKOLNIKOFF, Ivan Stephen. Mathematical Theory of Elasticity. McGraw-Hill, 1978.

SORIANO, Humberto Lima. Método de Elementos Finitos em análise de Estruturas.São Paulo: Edusp, 2003.

TIMOSHENKO, Stephen Prokofievitch; GOODIER, James Norman. Theory of Elasticity. 3rd ed. McGraw-Hill, 1970.

WANG, Chi-teh. Applied elasticity.1953.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

CHURCHILL, R. V.; BROWN, J. W.; VERHEY, R. F. Complex variables and applications. 3rd ed. New York: Mc Graw-Hill, 1974.

COELHO, Flávio Ulhoa; LOURENÇO, Mary Lilian. Um Curso de Álgebra Linear. 2a ed. São Paulo: Edusp, 2005.

COSTA, Henrique de Britto. Elementos finitos via resíduos ponderados.

CRANDALL, Stephen Harry. Engineering Analysis. A Survey of numerical procedures.

NOVOZHILOV, Valentin Valentinovich. Foundations of the nonlinear Elasticity. Graylock Press, 1953.

ODEN, John Tinsley; RIPPERGER, E. A. Mechanics of Elastic Structures. 2nd ed. McGraw-Hill, 1981.

REISMANN, Herbert; PAWLIK, Peter S. Elasticity, theory and applications. 1980.

ZAGOTTIS, Décio Leal de. Estudo das deformações. Notas de Aula. 2002.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil; MORGAN, Kenneth. Finite Elements and approximation. New York: Wiley, 1983.

ZIENKIEWICZ, Olgierd Cecil. The finite element method in engineering science. 2nd ed. Maidenhead: McGraw-Hill, 1971.

APÊNDICE — FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Nesta seção é apresentado com maiores detalhes sobre números complexos e funções de variáveis complexas.

HISTÓRICO

A equação de segundo grau (7.1.1)

$$x^2 + b \cdot x + c = 0 \quad (7.1.1)$$

Admite as seguintes soluções, encontradas por Sridhara e divulgada por Baskara (CERRI, 2004).

$$x_1 = -\frac{b}{2} + \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad x_2 = -\frac{b}{2} - \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c} \quad (7.1.2)$$

A equação (7.1.1) não terá solução (real) quando ocorrer que

$$\left(\frac{b}{2}\right)^2 - c < 0 \quad (7.1.3)$$

Os problemas físicos que envolvessem equações de segundo grau em que (7.1.3) simplesmente eram admitidos sem solução, pois a aplicação de (7.1.2) resultava em números da forma:

$$x_1 = r + \sqrt{-s^2} \quad x_2 = r - \sqrt{-s^2} \quad (7.1.4)$$

Números da forma de (7.1.4) eram simplesmente ignorados por não apresentarem significado físico.

O estudo desses números surgiu na solução de equações de terceiro grau:

$$x^3 + b \cdot x^2 + c \cdot x + d = 0 \quad (7.1.5)$$

A equação (7.1.5) possui pelo menos uma solução real, que pode ser obtida pela seguinte fórmula (7.1.6)¹⁵:

$$x_1 = -\frac{b}{3} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} \quad (7.1.6)$$

Sendo:

$$p = \frac{-b^2 + 3 \cdot c}{3} \quad q = \frac{2 \cdot b^3 - 9 \cdot b \cdot c + 27 \cdot d}{27} \quad (7.1.7)$$

As outras duas soluções podem ser encontradas efetuando uma divisão de polinômios. É possível perceber de forma imediata que a fórmula (7.1.6) apresenta problemas quando:

$$\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 < 0 \quad (7.1.8)$$

Neste caso, aparece um número da seguinte forma:

$$x = m + \sqrt[3]{r + \sqrt{-s^2}} + \sqrt[3]{r - \sqrt{-s^2}} \quad s^2 > 0 \quad (7.1.9)$$

Segundo Eves (2004, p.308), os textos das teorias das equações mostram que quando (7.1.8) ocorre, a equação cúbica (7.1.5) admite três raízes reais. Mas justamente neste caso uma das raízes se expressa na forma de (7.1.9).

Isto caracteriza o caso irreduzível das equações cúbicas. Em 1572, Rafael Bombelli publicou uma álgebra envolvendo operações com números da forma de (7.1.4).

¹⁵ Esta é uma adaptação da fórmula de Cardano-Tartaglia (EVES, 2004):

$y_1 = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$. Ela serve para resolver equações do tipo $y^3 + p \cdot y + q = 0$. Estas equações são relacionadas com (7.1.5) pela substituição de variáveis: $x = y - \frac{b}{3}$. Para evitar simplificações, foi utilizada a fórmula geral (7.1.5).

A equação (7.1.10) é uma adaptação da equação cúbica irredutível que Bombelli utilizou no seu trabalho¹⁶:

$$x^3 + 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x + (-22) = 0 \quad (7.1.10)$$

Uma das raízes da equação (7.1.10) foi obtida por pesquisa de raízes.

$$x_1 = 1 \quad (7.1.11)$$

As outras duas raízes de (7.1.10) podem ser encontradas efetuando a divisão de polinômios:

$$\frac{x^3 + 9 \cdot x^2 + 12 \cdot x - 22}{x - 1} = x^2 + 10 \cdot x + 22 = 0 \quad (7.1.12)$$

A equação (7.1.12) pode ser resolvida aplicando a fórmula de Baskara (7.1.2).

$$x_2 = -5 + \sqrt{3} \quad x_3 = -5 - \sqrt{3} \quad (7.1.13)$$

Portanto a equação (7.1.10) admite três soluções reais.

A aplicação da fórmula de Cardano (7.1.6) na equação (7.1.10) resulta:

$$p = -15 \quad q = -4 \quad \left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3 = -121 \quad (7.1.14)$$

Portanto o número (7.1.15) é real.

$$\bar{x}_1 = -3 + \sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} + \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} \quad (7.1.15)$$

Supondo que.

$$\sqrt[3]{2 + \sqrt{-121}} = r + \sqrt{-s^2} \quad \sqrt[3]{2 - \sqrt{-121}} = r - \sqrt{-s^2} \quad (7.1.16)$$

Obtém-se que:

$$\bar{x}_1 = -3 + 2 \cdot r \quad (7.1.17)$$

Se $\bar{x}_1 = 1$, então:

$$r = 2 \quad (7.1.18)$$

¹⁶ Bombelli utilizou uma equação mais simples: $y^3 - 15 \cdot y - 4 = 0$. Neste trabalho foi colocada a equação completa correspondente à mudança de variáveis $y = x + \frac{9}{3}$.

Portanto:

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-s^2} \qquad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-s^2} \qquad (7.1.19)$$

A primeira das equações (7.1.19) pode ser resolvida elevando os dois membros ao cubo:

$$\left(\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}}\right)^3 = \left(2+\sqrt{-s^2}\right)^3$$

Assumindo que as operações algébricas de números reais permanecem válidas para números da forma (7.1.9), Bombelli concluiu que:

$$\begin{aligned} 2 + \sqrt{-121} &= 2^3 + 3 \cdot 2^2 \cdot \sqrt{-s^2} + 3 \cdot 2 \cdot \left(\sqrt{-s^2}\right)^2 + \left(\sqrt{-s^2}\right)^3 \\ \sqrt{-121} &= \left[6 + 6 \cdot (-s^2)\right] + \left[12 - (-s^2)\right] \cdot \sqrt{-s^2} \\ 11 \cdot \sqrt{-1} &= (6 - 6 \cdot s^2) + (12 - s^2) \cdot \sqrt{-s^2} \end{aligned} \qquad (7.1.20)$$

A solução de (7.1.20) é a seguinte:

$$s^2 = 1 \qquad (7.1.21)$$

A partir de (7.1.18) e (7.1.21), conclui-se que:

$$\sqrt{-121} = 11 \cdot \sqrt{-1} \qquad (7.1.22)$$

$$\sqrt[3]{2+\sqrt{-121}} = 2 + \sqrt{-1} \qquad \sqrt[3]{2-\sqrt{-121}} = 2 - \sqrt{-1} \qquad (7.1.23)$$

Estes números foram denominados por Descartes de números imaginários (CERRI, 2004).

NÚMEROS COMPLEXOS

Um número complexo c é um elemento da forma:

$$c = r + i \cdot s \quad (7.2.1)$$

Onde r e s são números reais e denotou-se por $\sqrt{-1}$ por i :

$$i = \sqrt{-1} \quad (7.2.2)$$

Na expressão (7.2.1), r é a parte real e s é a parte imaginária do número complexo c . Geometricamente, um número complexo pode ser representado por um par ordenado, conforme a expressão (7.2.3) e a Figura 7.1.

$$c \equiv (r, s) \quad (7.2.3)$$

Figura 7.1 – Plano dos números complexos.

O módulo de c vale:

$$r_c = \sqrt{r^2 + s^2} \quad (7.2.4)$$

E o argumento de c vale:

$$q_c = \arctan\left(\frac{s}{r}\right) \quad (7.2.5)$$

O mesmo número complexo (7.2.1) pode ser representado da seguinte maneira:

$$c = r_c \cdot (\cos q_c + i \cdot \sen q_c) \quad (7.2.6)$$

Ou, em coordenadas polares:

$$c \equiv (\mathbf{r}_c, \mathbf{q}_c) \quad (7.2.7)$$

As propriedades de números reais também valem para números complexos (CERRI, 1999). É possível definir operações entre eles. Aplicando a propriedade distributiva, a soma (ou subtração) entre dois números complexos c_1 e c_2 é calculada por:

$$c_1 + c_2 = (r_1 + r_2) + i \cdot (s_1 + s_2) \quad (7.2.8)$$

A multiplicação entre dois números complexos c_1 e c_2 é calculada por:

$$c_1 \cdot c_2 = (r_1 \cdot r_2 - s_1 \cdot s_2) + i \cdot (s_1 \cdot r_2 + r_1 \cdot s_2) \quad (7.2.9)$$

$$c_1 \cdot c_2 = \mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2 \cdot [\cos(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) + i \cdot \text{sen}(\mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2)] \equiv (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2, \mathbf{q}_1 + \mathbf{q}_2) \quad (7.2.10)$$

A potenciação é decorrente da multiplicação:

$$c^n = \mathbf{r}_c^n \cdot [\cos(n \cdot \mathbf{q}_c) + i \cdot \text{sen}(n \cdot \mathbf{q}_c)] \equiv (\mathbf{r}_c^n, n \cdot \mathbf{q}_c) \quad (7.2.11)$$

Com as manipulações algébricas convenientes, é possível calcular a divisão entre dois números complexos c_1 e c_2 :

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{r_1 \cdot r_2 + s_1 \cdot s_2}{r_2^2 + s_2^2} + i \cdot \frac{s_1 \cdot r_2 - r_1 \cdot s_2}{r_2^2 + s_2^2} \quad (7.2.12)$$

$$\frac{c_1}{c_2} = \frac{\mathbf{r}_1}{\mathbf{r}_2} \cdot [\cos(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2) + i \cdot \text{sen}(\mathbf{q}_1 - \mathbf{q}_2)] \quad (7.2.13)$$

FUNÇÕES DE VARIÁVEIS COMPLEXAS

Uma variável complexa z é um elemento da forma:

$$Z = Z(x, y) = x + i \cdot y \quad (7.3.1)$$

Onde x e y são variáveis que assumem valores reais.

$$i = \sqrt{-1} \quad (7.2.2)$$

Geometricamente, uma variável complexa pode ser representada pelo plano cartesiano, conforme a Figura 7.2:

Figura 7.2 – Plano das variáveis complexas.

As expressões relativas às operações com números complexos, apresentadas anteriormente, são válidas para variáveis de valores complexos.

Uma função de variável complexa é uma expressão do tipo

$$F(Z) = F(Z(x, y)) = F(x + i \cdot y) = f(x, y) + i \cdot g(x, y) \quad (7.3.2)$$

Na expressão (7.3.2), $f(x, y)$ é a parte real e $g(x, y)$ é a parte imaginária da função complexa $F(x + i \cdot y)$.

EQUAÇÕES DE CAUCHY-RIEMANN

É possível calcular a derivada de $F(z)$ em um ponto $z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ do plano cartesiano. É definida como (SOKOLNIKOFF; SOKOLNIKOFF, 1941):

$$\frac{dF}{dZ}(Z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(Z_0 + \Delta Z) - F(Z_0)}{\Delta Z} \quad (7.4.1)$$

A derivada existe se o limite acima existir, for finito, e único, e se:

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0^+} \frac{F(Z_0 + \Delta Z) - F(Z_0)}{\Delta Z} = \lim_{\Delta z \rightarrow 0^-} \frac{F(Z_0 + \Delta Z) - F(Z_0)}{\Delta Z} = C$$

Para que $F(Z)$ possua uma única derivada em z_0 , as funções (reais) $f(x, y)$ e $g(x, y)$ precisam satisfazer a algumas condições em (x_0, y_0) .

Substituindo a definição (7.3.1) da variável Z na derivada (7.4.1), obtém-se que:

$$\frac{dF}{dZ}(Z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Z} = \lim_{\substack{\Delta x \rightarrow 0 \\ \Delta y \rightarrow 0}} \frac{F[(x_0 + \Delta x) + i \cdot (y_0 + \Delta y)] - F[x_0 + i \cdot y_0]}{\Delta x + i \cdot \Delta y} \quad (7.4.2)$$

Na expressão (7.4.2), utilizou-se que:

$$\Delta Z = \Delta x + i \cdot \Delta y \quad (7.4.3)$$

Pela definição (7.3.2) da função $F(Z)$, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \Delta F &= F[(x_0 + \Delta x) + i \cdot (y_0 + \Delta y)] - F[x_0 + i \cdot y_0] \\ &= f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) + i \cdot g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - [f(x_0, y_0) + i \cdot g(x_0, y_0)] \\ \Delta F &= [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] + i \cdot [g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)] \end{aligned} \quad (7.4.4)$$

Dividindo-se (7.4.4) por (7.4.3) e utilizando a propriedade de divisão de números complexos (7.2.12), que também é válida para funções de variáveis complexas, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta F}{\Delta Z} &= \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \cdot \Delta x + [g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)] \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \\ &\quad + i \cdot \frac{[g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)] \cdot \Delta x - [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)] \cdot \Delta y}{\Delta x^2 + \Delta y^2} \end{aligned}$$

Se o incremento ΔZ for feito de modo que $\Delta y = 0$, então:

$$\frac{\Delta F}{\Delta Z} = \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]}{\Delta x} + i \cdot \frac{[g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)]}{\Delta x}$$

No limite em que $\Delta Z \rightarrow 0$, $\Delta x \rightarrow 0$, e:

$$\frac{dF}{dZ}(Z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Z}$$

Neste caso:

$$\frac{dF}{dZ}(Z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (7.4.5)$$

Por outro lado, se o incremento ΔZ for feito de modo que $\Delta x = 0$, então:

$$\frac{\Delta F}{\Delta Z} = \frac{[g(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - g(x_0, y_0)]}{\Delta y} - i \cdot \frac{[f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0, y_0)]}{\Delta y}$$

No limite em que $\Delta Z \rightarrow 0$, $\Delta y \rightarrow 0$, e:

$$\frac{dF}{dZ}(Z_0) = \lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Z} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Z}$$

Neste caso:

$$\frac{dF}{dZ}(Z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \quad (7.4.6)$$

Mas a derivada (7.4.1) só existirá se o limite

$$\lim_{\Delta z \rightarrow 0} \frac{F(Z_0 + \Delta Z) - F(Z_0)}{\Delta Z} = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta F}{\Delta Z}(Z_0)$$

For único, o que só é possível se as expressões (7.4.5) e (7.4.6) forem iguais:

$$\frac{dF}{dz}(Z_0) = \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - i \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + i \cdot \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0)$$

Consequentemente,

$$\left[\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \right] - i \cdot \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \right] = 0 \quad (7.4.7)$$

Da identidade (7.4.7), resulta:

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) \quad (7.4.8)$$

As equações (7.4.8) são conhecidas como equações diferenciais de Cauchy-Riemann. Elas são as condições necessárias para que a função $F(Z)$ seja diferenciável em todo ponto $Z_0 = x_0 + i \cdot y_0$ do seu domínio, e para que exista a derivada $\frac{dF}{dz}(Z_0)$ (Sokolnikoff; Sokolnikoff, 1941).

Uma das conseqüências de (7.4.8) é obtida derivando a primeira delas em relação a x e a segunda em relação a y :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) \quad (7.4.9)$$

E derivando a primeira das expressões (7.4.8) em relação a y e a segunda em relação a x :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) \quad (7.4.10)$$

Adicionando-se membro a membro as equações (7.4.9) e (7.4.10) convenientemente, chega-se a:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) - \frac{\partial g}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0 \quad (7.4.11)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0)$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(x_0, y_0) + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x_0, y_0) = 0 \quad (7.4.12)$$

As expressões (7.4.11) e (7.4.12) mostram que as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$, que são, respectivamente, as partes real e imaginária de $F(z) = F(x + i \cdot y)$, satisfazem à equação de Laplace (SOKOLNIKOFF; SOKOLNIKOFF, 1941) (5.1.2), ou seja, precisam ser harmônicas ao longo de todo ponto (x_0, y_0) do plano cartesiano pertencente aos seus domínios.

Por estarem relacionadas por meio de (7.4.8) e, como consequência, satisfazerem a (7.4.11) e (7.4.12), as funções $f(x, y)$ e $g(x, y)$ são denominadas conjugadas harmônicas.

Em decorrência disso, é harmônica toda a função de variável complexa definida conforme (7.3.2):

$$F(x + i \cdot y) = f(x, y) + i \cdot g(x, y)$$