**UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA**

NICOLAU ARCHILLA GALAN NETO

Análise dinâmica não linear bidimensional de *risers*

**São Paulo
2013**

NICOLAU ARCHILLA GALAN NETO

Análise dinâmica não linear bidimensional de *risers*

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de concentração: Engenharia
de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo
Nigro Mazzilli

**São Paulo
2013**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 08 de janeiro de 2013.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Galan Neto, Nicolau Archilla

Análise dinâmica não linear bidimensional de risers / N.A.

Galan Neto. -- ed.rev. -- São Paulo, 2013.

93 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Dinâmica 2. Método dos elementos finitos 3. Análise não linear de estruturas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t.

Dedico este trabalho a Deus,
ao Sr. Jesus Cristo,
e a toda minha família.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Professor Carlos Eduardo Nigro Mazzilli, e ao Professor Edgard Sant'Anna de Almeida Neto, que sempre me ajudaram no decorrer deste trabalho. Agradeço também a amizade que criamos no período de elaboração desta dissertação, e o esforço destes dois professores exemplares da Escola Politécnica da USP, que mesmo passando por problemas pessoais, sempre puderam me orientar da melhor forma possível.

Agradeço também a minha família e a minha amada Michele Yamao, que sempre me apoiaram e ajudaram ao longo do desenvolvimento deste trabalho, sempre me dando forças para continuar e prosperar, ajudando de forma significativa no meu desenvolvimento pessoal e profissional.

Agradeço também aos amigos que criei no LMC (Laboratório de Mecânica Computacional da EPUSP), para os quais pude pedir ajuda nas horas difíceis, mas que também pude contar pra me divertir bastante. Aos amigos que criei no NDF (Núcleo de Dinâmica e Fluídos da EPUSP) durante o período em que trabalhamos juntos.

A Capes e a Petrobras pelo apoio financeiro ao longo de parte do desenvolvimento deste trabalho.

Enfim, a todos os familiares e amigos com quem pude contar nas horas difíceis e de alegria.

SUMÁRIO

1	CAPÍTULO 1	12
1.1	INTRODUÇÃO	12
1.2	OBJETIVO	23
1.3	JUSTIFICATIVA	25
1.4	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	27
1.4.1	Método dos elementos finitos aplicado à análise de <i>risers</i>	27
1.4.2	Contato	28
1.5	ORGANIZAÇÃO DO TEXTO	30
2	CAPÍTULO 2	31
2.1	ANÁLISE ESTÁTICA	31
2.2	SISTEMA DE COORDENADAS	32
2.3	CARREGAMENTOS	34
2.3.1	Carregamento devido ao campo gravitacional terrestre	34
2.3.2	Carregamento de natureza hidrostática	35
2.3.3	Carregamento de natureza hidrodinâmica	36
2.4	EQUACIONAMENTO DOS ELEMENTOS FINITOS	38
2.4.1	Elemento de treliça bidimensional com sistema corrotacional	38
2.4.2	Elemento de barra de Bernoulli Euler bidimensional com sistema corrotacional	43
2.5	CONTATO UNILATERAL	53
2.5.1	Interação solo-estrutura	53
2.5.2	Equacionamento do contato	54
3	CAPÍTULO 3	60
3.1	ANÁLISE DINÂMICA	60
3.2	ORIGEM DOS CARREGAMENTOS DE ONDA E MOVIMENTO DA UNIDADE FLUTUANTE	61
3.2.1	Efeito da onda	61
3.2.2	Movimento da unidade flutuante	62
3.3	CARREGAMENTO DO FLUIDO	63
3.4	DISCRETIZAÇÃO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	66

3.4.1	Elemento de treliça bidimensional com sistema corrotacional.....	66
3.4.2	Elemento de barra bidimensional com sistema corrotacional	69
3.5	MATRIZES ELEMENTAIS E VETOR DE CARREGAMENTO EXTERNO..	72
3.5.1	Matriz de massa estrutural.....	72
3.5.2	Matriz de massa adicional.....	73
3.5.3	Matriz de amortecimento viscoso	74
3.5.4	Vetor de carregamento	77
3.6	MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO	79
3.7	DOMÍNIO DO TEMPO	79
3.7.1	Métodos de integração.....	80
4	CAPÍTULO 4.....	81
4.1	JUSTIFICATIVA.....	81
4.2	OBJETIVO	82
4.3	CAPACIDADES	83
4.4	SAÍDA DE RESULTADOS	84
4.5	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	84
4.6	ESTRATÉGIA DE SOLUÇÃO DO PROCESSAMENTO ESTÁTICO	85
4.6.1	<i>Riser</i> reto	85
4.6.2	<i>Riser</i> em catenária	86
5	CAPÍTULO 5.....	88
5.1	CONSIDERAÇÕES FINAIS E CONCLUSÃO	88
5.2	TRABALHOS FUTUROS	89
6	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	91

Lista de Figuras

Figura 1: Histórico de exploração de petróleo e gás no Brasil (Fonte: Petrobras)	13
Figura 2: Campo de Tupi (Fonte: Site do Jornal Folha de São Paulo datada 31/08/2009)	14
Figura 3 – Plataforma do tipo jaqueta	15
Figura 4- Plataforma TLP. (Fonte: SeaSoft Systems, 2011).....	16
Figura 5 – Plataforma FPSO. Plataforma P-54 (Petrobras)	16
Figura 6 – Plataforma SPAR. (Global Security)	17
Figura 7 – Plataforma semi-submersível. Bacia de Campos – RJ (Foto: André Luiz).....	18
Figura 8: <i>Riser</i> em catenária livre com TDZ.....	19
Figura 9: <i>Risers</i> verticais e em catenária livre.....	20
Figura 10: <i>Risers lazy-wave, lazy-s, steep-wave</i> e <i>steep-s</i>	20
Figura 11 – <i>Riser</i> flexível de seis camadas. Extraído de [23]. Figura adaptada.	21
Figura 12 – Processo de instalação de um <i>riser</i> em catenária livre. Extraído de API.	22
Figura 13 – Sistema de eixos cartesianos global e corrotacional	33
Figura 14 – Força de empuxo em trecho de <i>riser</i>	35
Figura 15 – Esquema de subtração de carregamento	36
Figura 16 – Perfil de correnteza bidimensional	37
Figura 17 – Configuração de referência e configuração atual	39
Figura 18 – Variação do ângulo θ	42
Figura 19 – Configuração de referência e atual de um elemento finito de barra, ainda se desconsiderando as deformações de flexão.....	44
Figura 20 – Configuração de referência e atual com deformações de flexão....	45
Figura 21 – Relação deslocamento axial e força axial para a barra de Bernoulli-Euler.	46
Figura 22 – Relação rotação nodal e momento fletor para a barra de Bernoulli-Euler	47
Figura 23 – Pequena variação dos deslocamentos na configuração atual.....	48
Figura 24: Região do contato do <i>riser</i> com o solo – TDZ	53

Figura 25 – Contato do tipo nó-superfície.....	54
Figura 26 – Equação constitutiva do contato na direção normal	55
Figura 27 – Equação constitutiva do contato tangencial.....	56
Figura 28 – Elemento bidimensional de treliça com a numeração dos graus de liberdade	67
Figura 29 – Nomenclatura dos deslocamentos para os graus de liberdade de um nó	67
Figura 30 – Elemento de treliça com um ponto P a uma distância genérica x ..	68
Figura 31 – Função de forma linear para os graus de liberdade do nó 1	68
Figura 32 – Função de forma linear para os graus de liberdade do nó 2	68
Figura 33 – Elemento bidimensional de barra com a numeração dos graus de liberdade	69
Figura 34 – Nomenclatura dos deslocamentos para os graus de liberdade de um nó	69
Figura 35 – Função de forma para o grau de liberdade 1	70
Figura 36 – Função de forma para o grau de liberdade 4	70
Figura 37 – Função de forma para o grau de liberdade 2	71
Figura 38 – Função de forma para o grau de liberdade 5	71
Figura 39 – Função de forma para o grau de liberdade 3	71
Figura 40 – Função de forma para o grau de liberdade 6	71

Resumo

Este trabalho contextualiza o problema da análise estrutural bidimensional de *risers* verticais ou lançados em catenária livre, fazendo uma breve descrição das etapas para a modelagem dessas estruturas. O problema que este trabalho se propõe a resolver é o da análise dinâmica não linear destas estruturas, no domínio do tempo, apresentando uma formulação que seja capaz de representar de forma adequada as etapas de modelagem destes sistemas. A modelagem foi dividida em duas etapas. A primeira delas é referente à fase de “lançamento” do *riser*, com o objetivo de determinar a configuração deformada de equilíbrio, assim como os esforços solicitantes internos decorrentes dessa configuração deformada. Ressalta-se que para os casos de *risers* em catenária livre, considera-se também o contato unilateral da estrutura com o solo marinho. A segunda etapa é a modelagem da fase de operação da estrutura, por meio de um modelo dinâmico bidimensional. Em ambas as etapas, a formulação apresentada considera os efeitos de acoplamento fluido-estrutura. No caso dos *risers* em catenária, considera-se também o efeito da interação solo-estrutura. Todo o desenvolvimento das equações foi realizado utilizando-se o método dos elementos finitos – MEF. A formulação desenvolvida contempla dois elementos finitos, um de treliça e outro de barra, utilizando-se um sistema de coordenadas corrotacionais. A utilização deste sistema de coordenadas possibilitou a adoção de teorias estruturais de pequenas deformações, para a análise de problemas que envolvem grandes deslocamentos e rotações finitas. Além da formulação do problema, também foi apresentado o projeto da ferramenta computacional *RiserSys*, que é específica para o estudo de *risers* nas configurações reta (vertical) e em catenária livre. Muito embora não seja o objetivo deste trabalho a implementação computacional do código nesta ferramenta e o estudo de casos referentes a fenômenos de dinâmica não linear nessas estruturas, nas considerações finais, propõe-se, como trabalhos futuros, a utilização desta formulação para o estudo da compressão dinâmica e a instabilidade paramétrica.

Palavras-chave: *Dinâmica. Método dos elementos finitos. Corrotacional. Riser. Catenária. Compressão dinâmica. Instabilidade paramétrica.*

Abstract

This work addresses the problem of the bidimensional analysis of *risers*, either straight or free hanging, giving a brief description of the modeling steps of these structures. The problem that it is meant to be solved is the nonlinear dynamic analysis in the time domain of these structures, presenting a formulation capable of correctly modeling the steps of the analysis of the system. The modeling was divided into two steps. The first one is referred to the *riser* “installation”, in which the objective was to find the deformed configuration of equilibrium and its internal forces. For the free hanging *risers*, the unilateral contact with the seabed is taken into account. The second step of the modeling is the phase of operation, using a bidimensional dynamic model. Both steps of the modeling consider the fluid-structure coupling phenomenon. For the free hanging *risers*, the soil-structure interaction is taken into account. All the analyses were performed using the finite element method – FEM. Two finite elements were formulated – 2D truss and 2D Bernoulli Euler beam – both using a co-rotational coordinate system. The co-rotational coordinate system allowed the use of small-strain theory to develop these finite elements to study problems that involve large displacements. Besides the problem formulation, the project of a computational code, named *RiserSys*, was described. *RiserSys* is a dedicated computational tool to analyze straight and free hanging *risers*. Although the objective of this work is not the computational implementation and the analysis of cases studies, in the concluding chapter it is proposed, as future work, the use of the formulation presented herewith to analyze non-linear dynamic phenomena that may take place in these systems, such as dynamic compression and parametric instability.

Keywords: *Dynamics. Finite-element method. Co-rotational. Riser. Catenary. Dynamic compression. Parametric instability.*

1 Capítulo 1

1.1 Introdução

A Engenharia *Offshore*, que se ocupa, entre outros temas, da prospecção e exploração de petróleo no mar, tem se deparado com situações cada vez mais extremas. As exigências nesta área são uma tendência natural, uma vez que os produtos explorados têm grande importância estratégica e econômica.

No que concerne à prospecção de novas bacias de exploração de gás e óleo, muitos países têm reservado e realizado grandes investimentos.

O Brasil é um desses países. Por consequência do aumento de investimentos nesta área, o País conseguiu aumentar sua participação de exploração destes produtos no âmbito mundial. Segundo a ANP (Agência Nacional do Petróleo, Gás Natural e Biocombustíveis), a produção brasileira de petróleo cresceu 6,9 % somente no ano de 2009.

A maior parte das bacias petrolíferas brasileiras encontra-se *offshore*. Este fato revela a importância econômica, estratégica e tecnológica que essas bacias representam ao país.

A Bacia de Campos é considerada a maior reserva petrolífera da Plataforma Continental Brasileira, com cerca de 100 mil quilômetros quadrados de área, estendendo-se do Estado do Espírito Santo até o Arraial do Cabo, no litoral norte do Estado do Rio de Janeiro.

A exploração nesta bacia começou em 1976, com um poço situado em lâmina d'água de 100 metros. Este era só o começo, pois em pouco tempo, a Petrobras começou a explorar petróleo em águas um pouco mais profundas, mas que hoje são consideradas rasas. A prospecção de novos campos em águas cada vez mais profundas se intensificou, e em decorrência dessa medida novos campos de possível exploração foram descobertos. A Figura 1 ilustra um histórico de exploração de petróleo e gás da empresa Petrobras de acordo com a profundidade da lâmina d'água até o ano de 2003.

Figura 1: Histórico de exploração de petróleo e gás no Brasil (Fonte: Petrobras)

A recente descoberta da mega reserva de petróleo e gás do Campo de Tupi, localizado na Bacia de Santos, despertou o interesse econômico e estratégico do País em ser autossuficiente quanto ao consumo interno destes produtos e, possivelmente, exportador do excedente para o mercado externo. No entanto, a exploração de gás e óleo nesta bacia não é um processo fácil, uma vez que está localizada em águas ultraprofundas, na região do pré-sal, e com profundidade média de 2000 m de lâmina d'água. A Figura 2 ilustra a região da Bacia de Santos, na região do Pré-Sal.

Figura 2: Campo de Tupi (Fonte: Site do Jornal Folha de São Paulo datada 31/08/2009)

A exploração de petróleo e gás nestas bacias exige a instalação de uma unidade de produção *offshore*. Esta unidade é um conjunto de estruturas que formam o sistema necessário para a exploração do petróleo e gás. A unidade é composta por uma plataforma na superfície do mar, um sistema de tubos e cabos de comando hidráulico e elétrico, e também um conjunto de válvulas denominado de “árvore de natal”.

As plataformas podem ser de diferentes tipos, de acordo com as condições ambientais e econômicas de cada região de exploração, podendo ser classificadas em fixas ou flutuantes.

As plataformas fixas foram as primeiras unidades a serem utilizadas na exploração *offshore* no Brasil e são as preferidas para a exploração de campos localizados em lâmina d’água de até 300 m. Um exemplo de plataforma fixa é a do tipo jaqueta, ilustrada na Figura 3, que possui uma estrutura metálica de barras que é fixa no fundo do mar.

Figura 3 – Plataforma do tipo jaqueta

As plataformas flutuantes podem ser do tipo: FPSO (*Floating Production, Storage and Offloading*), TLP (*Tension Leg Platform*), SPAR e plataformas semi-submersíveis.

As plataformas TLP, ilustrada na Figura 4, são ancoradas ao fundo do mar por cabos pré-tracionados que restringem principalmente os deslocamentos verticais. Este tipo de plataforma pode ter grande vantagem em alguns tipos de geometria de *risers*, como os *risers* verticais, que não suportam grandes variações de amplitudes, principalmente de *heave*. Outras configurações de cabos também podem ser bastante beneficiadas por este tipo de plataforma, como a catenária. A principal desvantagem é o custo inicial elevado.

Figura 4- Plataforma TLP. (Fonte: SeaSoft Systems, 2011)

As FPSO's, ilustradas na Figura 5, são navios e podem ser utilizados para a exploração, armazenamento e escoamento de óleo e gás em poços com lâmina d'água entre 200 m a 2000 m de profundidade. Estes navios são geralmente petroleiros fora de atividade, que são transformados em unidades flutuantes. Este tipo de plataforma apresenta a vantagem de alta capacidade de armazenamento de óleo, mas apresenta como desvantagem elevada deslocabilidade na superfície do mar, impondo grandes deslocamentos prescritos aos tubos e cabos submersos.

Figura 5 – Plataforma FPSO. Plataforma P-54 (Petrobras)

A plataforma SPAR, ilustrada na Figura 6, pode ser utilizada em regiões com lâmina d'água muito profunda, com aproximadamente 3000 m de profundidade. A base dessa plataforma é um cilindro vertical bastante alongado e ancorado por linhas de amarração ao solo do oceano. Este tipo de plataforma tem como principal vantagem restringir os grandes deslocamentos de translação verticais - *heave*. Devido à geometria do cilindro alongado e submerso, pode apresentar o problema das vibrações induzidas por vórtices – VIV.

Figura 6 – Plataforma SPAR. (Global Security)

As plataformas semi-submersíveis, ilustradas na Figura 7, podem ser compostas por mais de um convés e são apoiadas por colunas em flutuadores submersos. O posicionamento pode ser feito por linhas de ancoragens ou dinamicamente através de sensores e propulsores.

Figura 7 – Plataforma semi-submersível. Bacia de Campos – RJ (Foto: André Luiz)

Os tubos utilizados para o transporte de fluídos em uma unidade de produção *offshore* podem ser classificados em: rígidos ou flexíveis. Já os cabos submersos, que tem por função o acionamento elétrico, hidráulico e transmissão de sinais às válvulas instaladas no fundo do oceano (“árvore de natal”), são denominados de cabos umbilicais. Os cabos submersos com a função de ancoragem da estrutura são denominados linhas de ancoragem. Quando os tubos que fazem o transporte de fluídos apresentam um trecho apoiado sobre o solo marinho, a região apoiada recebe o nome de *flowline*. Já a região que permanece suspensa é denominada *riser*. A palavra *riser*, a partir deste ponto, será utilizada em um contexto mais geral, referindo-se não somente a parte suspensa, mas também a parte apoiada (*flowline*). Os *risers* podem ter diversas configurações, que variam de acordo com as condições ambientais da região. A configuração mais utilizada é a catenária livre, conforme ilustrado na Figura 8.

Figura 8: *Riser* em catenária livre com TDZ

Entretanto, nem sempre a catenária livre é a solução adotada, pois dependendo das condições ambientais do local, essa solução pode ser inviabilizada por conta de curvaturas muito elevadas na região do contato do *riser* com o solo, ou por compressão dinâmica que pode levar a uma instabilidade local. Essa região do contato é muito importante em análises de *risers* lançados em catenária, e recebe o nome de TDZ – *touchdown zone* – sendo o primeiro ponto de contato usualmente referido por TDP - *touchdown point*. Outro aspecto importante a ser analisado é o topo do cabo, junto à unidade flutuante, pois esta região apresenta elevadas tensões devido à protensão aplicada nestes cabos.

Outras configurações de *risers* possíveis são o vertical, *lazy-wave*, *lazy-s*, *steep-wave* e *steep-s* e estão ilustradas na Figura 9 e Figura 10.

Figura 9: *Risers* verticais e em catenária livre

Figura 10: *Risers* lazy-wave, lazy-s, steep-wave e steep-s

Os *risers* rígidos são normalmente formados de um único material, compostos por tubos de aço convencional à indústria *offshore*. Martins [1] destaca que os *risers* rígidos em catenária, conhecidos como SCR (*Steel Catenary Riser*), surgiram como

uma alternativa viável para a exploração em águas profundas, uma vez que são de fabricação simples e de baixo custo se comparado aos flexíveis.

A estrutura dos *risers* flexíveis é mais complexa, podendo ser composta por diversas camadas de materiais diferentes, em que cada uma tem uma função específica operacional e estrutural. Estas camadas interagem entre si, provocando atrito interno quando a estrutura é solicitada. Essa interação também modifica as propriedades geométricas da seção, pois como as camadas são compostas por materiais diferentes e espessuras variadas, ocorrem deformações diferentes que além de provocar o atrito interno entre camadas, pode esmagar as camadas mais internas, alterando as propriedades geométricas das seções.

De acordo com Takafuji [2], um *riser* flexível simples tem apenas quatro camadas, podendo chegar a 19 camadas, no caso mais complexo. A Figura 11 ilustra um *riser* flexível de seis camadas.

Figura 11 – Riser flexível de seis camadas. Extraído de [23]. Figura adaptada.

Em adição à descrição das plataformas e dos tipos e configurações de *risers* existentes, salienta-se a importância do processo de instalação e carregamentos atuantes, tanto nesta fase como na fase de operação.

Conforme descrito em Gay Neto [3], durante a fase de instalação de um *riser* em catenária, o ângulo de topo pode se aproximar de 90° em relação ao plano horizontal. Durante o processo de lançamento e instalação, o nível de tração no *riser* pode se tornar muito baixo, principalmente na região do TDP. A Figura 12 demonstra

as etapas do processo de instalação para um *riser* em configuração de catenária livre.

Figura 12 – Processo de instalação de um *riser* em catenária livre. Extraído de API.

Com o nível de tração baixo, o tubo perde parte da rigidez axial, o que torna propício o aparecimento de fenômenos de instabilidade. Dependendo das condições durante a fase de instalação, pode ocorrer instabilidade por torção, o que pode ocasionar o aparecimento de um laço, que pode danificar a estrutura permanentemente. Em Gay Neto [3] é possível encontrar uma discussão mais aprofundada sobre o assunto, onde inclusive todo o problema é formulado.

1.2 Objetivo

Este trabalho tem por objetivo principal o desenvolvimento de uma formulação geral e suficientemente robusta, tirando-se partido de teorias estruturais simples de pequenas deformações e bidimensionais, para modelar o problema da dinâmica não linear de *risers* verticais (reto) e em catenária livre no plano, utilizando-se o método dos elementos finitos – MEF. Para tanto, tornou-se necessário o desenvolvimento de um elemento, cuja formulação atendesse aos requisitos necessários para a análise dinâmica não linear de *risers*. Nos modelos propostos, considerou-se o contato unilateral da estrutura com o leito marinho, e também carregamentos de naturezas distintas, como o movimento imposto à plataforma, força de arrasto devido à correnteza, efeito do trem de ondas nas forças hidrodinâmicas, peso próprio da estrutura, força de empuxo hidrostático e força de protensão junto à plataforma. Os cabos submersos em meio fluido podem estar submetidos a outros carregamentos, que também são importantes no estudo e projeto dessas estruturas. As vibrações induzidas por vórtices (*Vortex Induced Vibration* – VIV) e o carregamento devido ao escoamento interno são dois exemplos de carregamentos importantes, mas que foram desconsiderados neste trabalho devido à complexidade dos assuntos, podendo ser o tema central de outra dissertação ou mesmo de uma tese de doutorado.

Devido aos problemas de *risers* em catenária envolverem situações de grandes rotações, porém ainda com pequenas deformações, foram utilizadas duas teorias estruturais para o estudo de casos, ambas para pequenas deformações e bidimensionais, sendo a primeira referente a um elemento de treliça, e a segunda a uma barra de Bernoulli-Euler. Ambas as teorias estruturais foram desenvolvidas em relação a um sistema de eixos corrotacionais para descrição das deformações e tensões, o que possibilitou a utilização de teorias estruturais de pequenas deformações para o estudo de problemas complexos, que envolvem grandes deslocamentos e rotações finitas.

O trabalho também tem por objetivo descrever o projeto da ferramenta computacional *RiserSys*, que está sendo desenvolvida especificamente com o propósito da simulação de problemas de *risers* retos e em catenária. A ferramenta *RiserSys* deve ser capaz de determinar a configuração deformada de equilíbrio do *riser*, com o respectivo estado de tensão inicial a que a estrutura está submetida

devido ao processo de “lançamento” do mesmo. Esta etapa pode ser simulada por uma análise estática, que é a determinação da configuração deformada de equilíbrio, que antecede o processamento dinâmico propriamente dito. Após a determinação desta configuração inicial, a ferramenta deve inicializar o processamento dinâmico utilizando-se os deslocamentos e o estado de tensão estabelecidos ao final do processamento estático. Muito embora a ferramenta encontre-se em estágio final de desenvolvimento e testes, não é objetivo deste trabalho a realização de estudos de casos, os quais farão parte do relatório final do projeto Petrobras, bem como de futuras dissertações ou teses a serem elaboradas e em desenvolvimento no Grupo de Pesquisa de “Dinâmica, Estabilidade e Controle de Estruturas”, coordenado pelo Prof. Carlos E.N. Mazzilli na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Dentro de um grupo de pesquisa, além do desenvolvimento da ferramenta *RiserSys* (modelo de alta hierarquia) estão em desenvolvimento trabalhos sobre a modelagem de ordem reduzida de *risers*, tanto verticais como em catenária, submetidos a carregamentos de *VIV*, imposição de deslocamentos impostos, protensão, consideração do solo elástico na resposta dinâmica da estrutura, entre outros carregamentos e considerações de modelagem, para estudar fenômenos típicos da dinâmica não linear, como por exemplo a compressão dinâmica da linha submetida a protensão, a ressonância paramétrica na região do contato e propagação de ondas na estrutura.

1.3 Justificativa

O aumento da demanda e conseqüentemente do preço dos insumos e dos investimentos na área de exploração de óleo e gás tem incentivado a ampliação da extração destes produtos e também o desenvolvimento de novas tecnologias mais eficientes e baratas. Os recursos naturais como petróleo e gás natural são muito importantes para a economia e o desenvolvimento tecnológico.

Em decorrência destes fatores, a indústria petrolífera e de gás tem visado à realização de empreendimentos cada vez mais ousados e ambiciosos, abrindo um campo de pesquisas na área para tentar adequar a segurança à boa técnica da Engenharia. No Brasil, a exploração em bacias *offshore* nunca atingiu profundidades tão grandes quanto as necessárias para a exploração na região do pré-sal.

Os conhecimentos que se têm hoje sobre dinâmica de *risers* oceânicos em suas diversas configurações possíveis são ainda limitados. Deste fato, surge a necessidade de avanços em estudos, pesquisas e experimentos para melhorar as técnicas atualmente utilizadas na prática.

O foco do trabalho será o estudo dos *risers* em configuração de catenária livre, por meio de modelos numéricos via MEF (Método dos Elementos Finitos). Como resultado, obter-se-á, uma base de resultados para comparação com estudos realizados analiticamente ou por outros métodos numéricos, inclusive por programas computacionais comerciais de largo uso. Este estudo busca a melhoria dos procedimentos de análise desses sistemas para viabilizar os projetos com segurança e qualidade.

O projeto da ferramenta computacional *RiserSys*, totalmente numérica, e que se utiliza do método dos elementos finitos para análise de lançamento e operação de *risers* em duas dimensões é um produto desta pesquisa, que está em fase final de implementação e testes. Esse programa também é de interesse da Escola Politécnica da USP, pois será utilizado para pesquisas futuras e projetos nesta área que está em grande desenvolvimento.

O mundo já conhece o grande problema que se tem quando um acidente com esse sistema de exploração de petróleo ocorre em águas muito profundas. Como exemplo deste tipo de acidente, pode-se citar o ocorrido no Golfo do México em 2010. Todas as conseqüências, porém, são desconhecidas até o momento.

Pesce [4] explica que tanto os *risers* rígidos quanto os flexíveis podem vir a falhar por diversos fatores como sobrecarga, fadiga mecânica, dano localizado, corrosão, falhas nos pontos ou cordões de solda, entre muitos outros fatores. Isso demonstra a complexidade dos estudos e os cuidados que se deve ter ao se elaborar um projeto de *riser*.

1.4 Revisão Bibliográfica

1.4.1 Método dos elementos finitos aplicado à análise de *risers*

A literatura sobre o método dos elementos finitos é muito extensa. Devido a esta extensão, não é objetivo deste tópico a descrição de todos os trabalhos nesta área, mas somente a citação de alguns dos trabalhos mais relevantes e que contribuíram diretamente para o desenvolvimento dos elementos finitos apresentados neste trabalho.

Diferentes modos de abordar a formulação podem ser encontrados em Bathe [5], Zienkiewicz [6] e Crisfield [7,8], que descrevem as abordagens Lagrangiana total, Lagrangiana atualizada e Corrotacional.

Brasil e Mazzilli [9] apresentam uma formulação dinâmica não linear para barras no plano, com a utilização da cinemática da barra de Bernoulli-Euler para pequenas deformações e pequenas rotações. A teoria apresentada é Lagrangiana total, pura em deslocamentos e não linear em relação as matrizes de massa, amortecimento e rigidez do elemento finito proposto. O procedimento para a formulação da dinâmica não linear foi por meio da utilização das equações generalizadas de Lagrange. No entanto, esta não é a única alternativa para o desenvolvimento do elemento finito proposto. Mazzilli e Baracho Neto [10] apresentaram a formulação secante da dinâmica não linear utilizando-se do princípio dos trabalhos virtuais.

A utilização da formulação em [9] não poderia ser utilizada diretamente como está descrita no trabalho, pois as análises de *risers* envolvem grandes deslocamentos, que são decorrentes de movimento de corpo rígido. Desta forma, passou-se a estudar a possibilidade da adaptação desta formulação, utilizando um sistema corrotacional, que faria a distinção de parte do deslocamento de corpo rígido do deslocamento devido à deformação da estrutura.

A formulação de elementos finitos utilizando-se um eixo corrotacional é descrita por Crisfield [7,8,11], de uma forma clara e com exemplos. Crisfield também aprofunda a discussão sobre diferentes modos de se medir deformações neste eixo corrotacionado, assim como também discorre sobre alguns métodos de integração das equações diferenciais no domínio do tempo em dinâmica não linear, abordando a questão da conservação de energia dentro do algoritmo numérico. Dessa forma,

antevê dificuldades relacionadas ao cálculo das tensões e à conservação da energia no método de integração.

Ainda em relação à formulação corrotacional, outros autores como Felippa e Haugen [12] e Battini [13,14], descrevem o procedimento e realizam estudos de caso de instabilidade elástica e plástica em barras. O primeiro se preocupa mais com a explicação do método e com as hipóteses que são feitas, enquanto que o segundo se preocupa em discutir os aspectos relacionados ao problema de instabilidade de barras no plano e no espaço.

Alternativamente à utilização da formulação corrotacional, as formulações Lagrangiana total e atualizada podem ser alternativas importantes ao alcance do objetivo do trabalho.

Os trabalhos de Simo [15,16] se destacam na literatura. Stander e Stein [17] apresentam uma teoria de barra plana em dinâmica não linear baseada nos trabalhos de Simo, com um método de conservação de energia. Esta abordagem, por não ter sido a escolhida no presente projeto de pesquisa, não foi suficientemente aprofundada nesta oportunidade.

Em relação aos algoritmos de integração direta no tempo, Newmark [18] descreve um dos métodos mais utilizados, pois é de fácil implementação e pode ser incondicionalmente estável na dinâmica linear, desde que os parâmetros do método sejam escolhidos de forma adequada. No entanto, não há garantias de que o método seja incondicionalmente estável em dinâmica não linear, podendo introduzir ou retirar energia do sistema.

Bathe [5] descreve uma série de métodos de integração implícitos e explícitos. Em relação a estes métodos pode-se citar os de Newmark, Wilson- θ , Houbolt, Euler, entre outros. Crisfield [8] também discute métodos de integração no tempo, mas foca o assunto na questão da conservação da energia, como já se afirmou.

1.4.2 Contato

O contato do *riser* com o solo marinho, na configuração de catenária, não é um problema trivial e se situa entre os que carecem de estudos mais aprofundados, que é a área da interação solo-estrutura. Diferentes modelos constitutivos poderiam ser considerados para simular os diferentes comportamentos do solo, mas esta

discussão foge ao escopo deste trabalho. Desta forma, a pesquisa bibliográfica limitou-se ao problema do contato unilateral, adotando-se a relação constitutiva elástica-linear para o solo, sem maiores preocupações com a consideração de viscoelasticidade ou plasticidade do mesmo.

Bathe [5], Bhatti [19], Zienkiewicz [6] e Wriggers [20] são algumas das referências que discutem o problema do contato, descrevendo as técnicas utilizadas para lidar com estes problemas. Especialmente em Wriggers [20], há uma discussão bastante aprofundada sobre o assunto, inclusive com a proposição e comparação dos métodos existentes e diagramas para a sua implementação numérica. Em Gay Neto [3] é possível encontrar uma adaptação do problema geral do contato descrito por Wriggers [20], mas adaptado para a resolução de problemas de *risers*. A formulação para o contato unilateral utilizada neste trabalho foi baseada nestes dois trabalhos.

1.5 Organização do texto

O texto foi dividido em cinco capítulos.

O Capítulo 1 contempla a introdução ao tema, contextualizando o problema a ser estudado, assim como os principais elementos que constituem este sistema. Os objetivos são expostos de forma sucinta. A justificativa do tema escolhido e a sucinta revisão bibliográfica sobre o método dos elementos finitos aplicado ao estudo de *risers* também são abordadas neste capítulo.

O Capítulo 2 descreve o problema da análise estática de *risers*, assim como o modelo estático utilizado neste trabalho, descrevendo as hipóteses adotadas, os carregamentos considerados e o desenvolvimento dos elementos finitos utilizados.

O Capítulo 3 descreve o problema da análise dinâmica de *risers*, descrevendo as hipóteses adotadas e os carregamentos considerados. Descreve também alguns métodos de integração numérica das equações de equilíbrio dinâmico no tempo, dando ênfase para os métodos que serão utilizados no desenvolvimento da ferramenta computacional *RiserSys*.

O Capítulo 4 apresenta o projeto da ferramenta computacional *RiserSys*, baseada no método dos elementos finitos, presentemente em fase de implementação e testes.

O Capítulo 5 apresenta as considerações finais, a conclusão do presente projeto de pesquisa e propõe trabalhos futuros.

2 Capítulo 2

Este capítulo abordará a análise estática de *risers*, utilizando o método dos elementos finitos. Esta fase antecede a análise dinâmica propriamente dita, pois as propriedades dos sistemas estruturais sob vibração dependem da configuração geométrica e dos esforços internos atuantes. A formulação que será apresentada é suficientemente geral e potente para abordar distintas configurações de *risers*, retos ou em catenária, sem ou com a consideração do contato unilateral. Evidentemente, em decorrência dos desafios mais gerais inerentes à análise estática dos *risers* em catenária livre com contato unilateral no fundo do mar, a formulação se preocupará mais explicitamente com este cenário, podendo os demais serem reconhecidos como casos particulares. Uma vez justificada a utilização do modelo estático, definiram-se os carregamentos que serão contemplados nesta oportunidade, de acordo com sua natureza de ação. Os modelos matemáticos em elementos finitos para a representação desta etapa também foram desenvolvidos.

2.1 Análise estática

A operação de lançamento e instalação de *risers* é uma etapa importante para o projeto dos mesmos. Neste momento, os *risers* podem estar sujeitos a esforços solicitantes que podem causar danos permanentes à estrutura. No caso dos *risers* em catenária, a baixa tração na região do TDP pode levar a estrutura a fenômenos de instabilidade, enfatizando a importância da rigidez flexional nesta região. Em alguns casos, pode ocorrer até a formação de laços quando a força normal passa a ser transitoriamente de compressão, mas quando a força normal volta a ser de tração, pode ocorrer de o raio de curvatura ficar muito pequeno, formando uma dobra (*kink*) e danificando a estrutura. Devido às características do processo de lançamento e instalação em campo, esta etapa pode ser simulada por meio de uma análise estática. Esta análise tem por objetivo a determinação da configuração deformada de equilíbrio, inclusive com a caracterização do estado de tensão a que a estrutura estará submetida imediatamente após o lançamento.

Nesta etapa a estrutura estará submetida a esforços estáticos e quase-estáticos. Os carregamentos de origem estática são decorrentes do peso próprio da estrutura e do

empuxo que a água exerce sobre o cabo. O carregamento hidrostático de arrasto devido à interação fluido-estrutura pode ser considerado quase-estático devido à escala de tempo, que é muito superior ao período dos modos predominantes na resposta dinâmica do *riser*.

Pesce [4] explica que a configuração de equilíbrio é imposta pelas coordenadas do ponto de suspensão na plataforma (*hang-off*), das condições de contorno nesta mesma região, que depende do tipo de *riser*, sendo que para o caso da configuração em catenária livre, a tangência com o fundo marinho e os carregamentos hidrodinâmicos estacionários associados à correnteza, também são fatores importantes para a configuração de equilíbrio.

Outro aspecto importante neste tipo de análise é o contato unilateral do *riser* com o solo marinho. Este problema pode ser abordado de diversas maneiras, sendo neste trabalho tratado pelo método das penalidades. Neste trabalho, adotou-se a hipótese de resposta elástica para o solo, conforme o modelo de *Winkler*. Outros modelos matemáticos podem ser utilizados para a representação das leis constitutivas do solo, de forma mais completa, inclusive levando-se em conta a plastificação (*trenching*), mas este assunto foge ao escopo do trabalho e não será tratado neste texto. Em Martins [1] é proposto um modelo estático para *risers* em configuração de catenária livre bidimensional. Neste modelo a rigidez axial é considerada infinita e a rigidez flexional é desprezada. Para modelar a transição entre o comportamento dominante de cabo no trecho suspenso e o de viga no trecho apoiado no solo, foi utilizada a técnica da camada limite, que corrige a curvatura nesta região, onde o efeito flexional se torna importante. Com a utilização desta técnica, o efeito do contato é simulado com a correção da curvatura devido à descontinuidade das equações regentes à esquerda e à direita do TDP. Neste capítulo, o assunto do contato é discutido e aprofundado, inclusive com o desenvolvimento de sua formulação.

2.2 Sistema de coordenadas

Esta seção define os sistemas de coordenadas global e corrotacional que foram utilizados no desenvolvimento dos elementos finitos bidimensionais de treliça e barra de Bernoulli-Euler. Na Figura 13, o sistema global é representado por $X \times Y$,

enquanto que o corrotacional, para um elemento finito genérico, é representado por $x_\ell \times y_\ell$. Os eixos OX e OY definem as direções horizontal e vertical, respectivamente. O eixo vertical tem a mesma direção da aceleração da gravidade, mas com sentido oposto. No eixo ox_ℓ define-se o versor cuja direção e sentido são caracterizados pelo segmento orientado do nó 1 ao 2. O eixo oy_ℓ é perpendicular a ox_ℓ e está contido no plano $X \times Y$. O ângulo que o sistema corrotacional (girante com o elemento finito) faz com o sistema global é definido pelo ângulo θ , conforme indicado na Figura 13.

Figura 13 – Sistema de eixos cartesianos global e corrotacional

A transformação de um determinado vetor $\mathbf{u}$ do sistema global de coordenadas para o corrotacional se faz por meio da seguinte relação:

$$\mathbf{u}_{corrot.} = \mathbf{T} \mathbf{u}_{global} \quad (2.1)$$

onde $\mathbf{T}$ é a matriz de mudança de base do sistema global para o corrotacional:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.2)$$

Utilizando-se da propriedade da ortogonalidade da matriz de mudança de base:

$$\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}^T \quad (2.3)$$

A relação inversa de transformação de vetores é, portanto, definida simplesmente por:

$$\mathbf{u}_{global} = \mathbf{T}^T \mathbf{u}_{corrot.} \quad (2.4)$$

2.3 Carregamentos

Os *risers* estão sujeitos a carregamentos decorrentes de ações distintas e as principais são o campo gravitacional terrestre e a interação fluido-estrutura. Na formulação estática proposta, foram considerados somente os carregamentos de peso próprio do *riser*, protensão, carregamentos hidrostáticos e hidrodinâmicos provenientes da interação fluido-estrutura, como o empuxo, pressão estática externa do fluido e a força de arrasto. Enfatiza-se que os carregamentos hidrodinâmicos utilizados na modelagem estática foram adaptados de forma a eliminar as parcelas de velocidade da estrutura e do gradiente de velocidade decorrente da passagem de ondas marítimas na expressão da velocidade relativa da interação fluido-estrutura. A adaptação é válida somente para a análise estática, sendo que a expressão completa foi utilizada no modelo dinâmico proposto no Capítulo 3. A interação solo-estrutura não é um carregamento propriamente dito, mas uma condição de contorno imposta no trecho da estrutura apoiada sobre o solo marinho.

2.3.1 Carregamento devido ao campo gravitacional terrestre

O carregamento de peso próprio é distribuído ao longo do *riser* e definido por:

$$\mathbf{f}_{pp} = \overline{m}(s) \cdot \mathbf{g} \quad (2.5)$$

onde:

$\mathbf{f}_{pp}$ é a força de peso próprio distribuído ao longo do *riser*;

$\overline{m}(s)$ é a massa por unidade de comprimento do *riser*, que pode ser variável ao longo de seu comprimento;

s é uma coordenada curvilínea que caracteriza uma determinada seção transversal do *riser*;

$\mathbf{g}$ é a aceleração da gravidade.

2.3.2 Carregamento de natureza hidrostática

Pelo princípio de Arquimedes, todo corpo imerso em meio fluido está sujeito a um carregamento de empuxo que é equivalente ao peso do volume de fluido deslocado, com a mesma direção da aceleração da gravidade, mas sentido oposto.

Figura 14 – Força de empuxo em trecho de *riser*

A força de empuxo agindo sobre um trecho de *riser* de comprimento Δs , e com as extremidades tampadas, é dado por:

$$\mathbf{E}(s) = \gamma_a A(s) \Delta s \mathbf{j} \quad (2.6)$$

Onde:

γ_a é o peso específico por unidade de volume do fluido;

$A(s)$ é a área delimitada pelo perímetro externo da seção transversal do *riser*;

Δs é o comprimento do trecho de *riser*;

$\mathbf{j}$ é o versor que aponta na direção e sentido do eixo global OY .

A Figura 14 não representa o caso de um *riser* contínuo submerso, mas um trecho isolado do mesmo. Na estrutura contínua, os carregamentos de pressão d'água nas extremidades não existem. Para corrigir este problema, a Figura 15 mostra o esquema de subtração de carregamento utilizado para corrigir o efeito da pressão hidrostática:

Figura 15 – Esquema de subtração de carregamento

O desenvolvimento completo das equações de equilíbrio do esquema da Figura 15 pode ser encontrado em Martins [1]. A expressão final da força hidrostática distribuída sobre a parede lateral da estrutura é dada por:

$$\begin{aligned} h_{0x} &= -\gamma_a A(s) \frac{d}{ds} \left[(h - y_0(s)) \cos(\theta) \right] \\ h_{0y} &= -\gamma_a A(s) \frac{d}{ds} \left[(h - y_0(s)) \sin(\theta) \right] \end{aligned} \quad (2.7)$$

onde:

h_{0x} e h_{0y} são as componentes do vetor de força hidrostática distribuída sobre a parede lateral do *riser*.

y_0 é a coordenada cartesiana na direção j relativa a configuração estática;

h é a profundidade local do mar.

2.3.3 Carregamento de natureza hidrodinâmica

Um tubo imerso no mar está sujeito às ações da correnteza marítima, que é variável com a profundidade e com o tempo. Martins [1] explica que a escala de variação da velocidade da correnteza com o tempo está ligada à escala de variação dos

fenômenos atmosféricos, que é da ordem de horas, e a escala de tempo do movimento da estrutura está ligada ao período das ondas, que é da ordem de segundos. Pode-se, então, adotar a hipótese de que a velocidade da correnteza é constante no tempo, e os esforços causados por ela são de natureza quase-estática. Este trabalho adotou as mesmas hipóteses de Martins [1], e a velocidade da correnteza pode ser relacionada com a profundidade da seguinte maneira:

$$\mathbf{v}_c = v_c f(y) \mathbf{i} \quad (2.8)$$

onde:

v_c é a velocidade da correnteza;

$f(y)$ é uma função que depende apenas da coordenada y ;

$\mathbf{i}$ é o versor na direção e sentido do eixo global $O\mathbf{X}$.

A Figura 16 ilustra uma função $f(y)$ típica:

Figura 16 – Perfil de correnteza bidimensional

O perfil de velocidades da correnteza pode ser projetado no sistema de coordenadas corrotacional, gerando uma parcela de velocidade na direção axial e outra na transversal, as quais são usadas na definição do carregamento de natureza hidrodinâmica, modelado pela fórmula de Morison [21]:

$$\mathbf{f}_{Da} = \frac{1}{2} C_{Da}(s) \pi D(s) \rho_a \|\mathbf{v}_{ca}\| \mathbf{v}_{ca} \quad (2.9)$$

e

$$\mathbf{f}_{Dt} = \frac{1}{2} C_{Dt}(s) D(s) \rho_a \|\mathbf{v}_{ct}\| \mathbf{v}_{ct} \quad (2.10)$$

onde:

$\mathbf{f}_{Da}$ é a força de arrasto na direção axial;

$\mathbf{f}_{Dt}$ é a força de arrasto na direção transversal;

$C_{Da}(s)$ e $C_{Dt}(s)$ são os coeficientes de arrasto axial e transversal, respectivamente;

$D(s)$ é o diâmetro externo do *riser*;

$\mathbf{v}_{ca}$ e $\mathbf{v}_{ct}$ são as velocidades da correnteza projetada na direção axial e transversal, respectivamente.

ρ_a é a massa específica do fluido.

2.4 Equacionamento dos elementos finitos

Este tópico irá desenvolver a formulação dos elementos finitos de treliça e barra de Bernoulli-Euler, ambas com referência a um sistema de coordenadas corrotacionais, que possibilitou a utilização de teorias estruturais de pequenas deformações para o estudo de problemas com contêmplam grandes deslocamentos.

2.4.1 Elemento de treliça bidimensional com sistema corrotacional

A Figura 17 esquematiza o elemento finito de treliça na configuração de referência, com comprimento ℓ_0 e ângulo de rotação inicial θ_0 em relação ao sistema de coordenadas global $X \times Y$. A figura também esquematiza o elemento na configuração atual, cujo comprimento se alterou para ℓ_n e a rotação para θ . O sistema de coordenadas corrotacionais é representado pelos eixos $x_\ell \times y_\ell$.

Figura 17 – Configuração de referência e configuração atual

O alongamento linear corrotacionado (*engineering strain*) é definido por:

$$\varepsilon_\ell = \frac{\ell - \ell_0}{\ell_0} \quad (2.11)$$

Uma vez que a deformação é medida no sistema de eixo corrotacional, para o caso da treliça, $\ell - \ell_0$ é a diferença dos deslocamentos dos nós 1 e 2:

$$\varepsilon_\ell = \frac{u_{\ell_2} - u_{\ell_1}}{\ell_0} = \frac{1}{\ell_0} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{\ell_1} \\ v_{\ell_1} \\ u_{\ell_2} \\ v_{\ell_2} \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell_0} \mathbf{c}_\ell^T \mathbf{u}_\ell^e \quad (2.12)$$

A variação de ε_ℓ é dada por:

$$\delta \varepsilon_\ell = \frac{1}{\ell_0} \mathbf{c}_\ell^T \delta \mathbf{u}_\ell^e \quad (2.13)$$

em que:

$$\mathbf{c}_\ell^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Define-se o vetor de forças desbalanceadas $\mathbf{g}_\ell^e$ por:

$$\mathbf{g}_\ell^{e^T} \delta \mathbf{u}_\ell^e = \delta W_{\text{int}}^e - \delta W_{\text{ext}}^e \quad (2.15)$$

Assumindo-se que $\delta W_{ext}^e = 0$ e utilizando-se o tensor das tensões de Cauchy $\boldsymbol{\sigma}$ e a deformação linear $\boldsymbol{\varepsilon}_\ell$ para pequenas deformações no sistema corrotacional:

$$\delta W_{int}^e = \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} : \delta \boldsymbol{\varepsilon} dV = \int_{V_0} \boldsymbol{\sigma} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_\ell dV \quad (2.16)$$

Integrando-se a equação (2.16) e igualando com (2.15), obtém-se:

$$\delta W_{int}^e = A_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{c}_\ell^T \delta \mathbf{u}_\ell^e = \mathbf{g}_\ell^e \delta \mathbf{u}_\ell^e \quad (2.17)$$

onde A_0 é a área da seção transversal da barra. Por inspeção conclui-se que:

$$\mathbf{g}_\ell^e = A_0 \boldsymbol{\sigma} \mathbf{c}_\ell \quad (2.18)$$

Substituindo a relação constitutiva de material elástico-linear na equação (2.18):

$$\mathbf{g}_\ell^e = EA_0 \boldsymbol{\varepsilon}_\ell \mathbf{c}_\ell = \frac{EA_0}{\ell_0} (\mathbf{c}_\ell \mathbf{c}_\ell^T) \mathbf{u}_\ell^e \quad (2.19)$$

Para determinar a matriz de rigidez tangente local, basta derivar $\mathbf{g}_\ell^e$ em relação aos deslocamentos:

$$\mathbf{K}_{\ell\ell} = \frac{\partial \mathbf{g}_\ell^e}{\partial \mathbf{u}_\ell^e} = \frac{EA_0}{\ell_0} (\mathbf{c}_\ell \mathbf{c}_\ell^T) \quad (2.20)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez no sistema global, utilizou-se a relação de transformação de coordenadas do sistema corrotacional para o sistema global:

$$\delta \mathbf{u}_\ell^e = \mathbf{T} \delta \mathbf{u}^e \quad (2.21)$$

onde $\mathbf{T}$ é a matriz de transformação de coordenadas do sistema global $X \times Y$ para o corrotacional $x_\ell \times y_\ell$:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

A matriz $\mathbf{T}$ pode ser escrita em função da diferença de coordenadas dos nós na configuração atual:

$$\mathbf{T} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} x'_{21} & y'_{21} & 0 & 0 \\ -y'_{21} & x'_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & x'_{21} & y'_{21} \\ 0 & 0 & -y'_{21} & x'_{21} \end{bmatrix} \quad (2.23)$$

onde $x'_{21} = x_2 - x_1$ e $y'_{21} = y_2 - y_1$.

A determinação do vetor de forças desbalanceado no sistema global é dada por:

$$\mathbf{g}^e = \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\ell^e \quad (2.24)$$

Substituindo-se (2.19) em (2.24):

$$\mathbf{g}^e = A_0 \sigma \mathbf{T}^T \mathbf{c}_\ell = \frac{A_0 \sigma}{\ell} \mathbf{c}(\mathbf{x}') \quad (2.25)$$

em que:

$$\mathbf{T}^T \mathbf{c}_\ell = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} & -\dot{y}_{21} & 0 & 0 \\ \dot{y}_{21} & \dot{x}_{21} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dot{x}_{21} & -\dot{y}_{21} \\ 0 & 0 & \dot{y}_{21} & \dot{x}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -\dot{x}_{21} \\ -\dot{y}_{21} \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{y}_{21} \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} \mathbf{c}(\mathbf{x}') \quad (2.26)$$

onde:

$$\mathbf{c}(\mathbf{x}') = \begin{bmatrix} -\dot{x}_{21} \\ -\dot{y}_{21} \\ \dot{x}_{21} \\ \dot{y}_{21} \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

Fazendo-se a variação de (2.25):

$$\delta \mathbf{g}^e = \delta \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\ell^e + \mathbf{T}^T \frac{\partial \mathbf{g}_\ell^e}{\partial \mathbf{u}_\ell^e} \delta \mathbf{u}_\ell^e = \delta \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\ell^e + \mathbf{T}^T \mathbf{K}_{t_\ell} \mathbf{T} \delta \mathbf{u}^e = \mathbf{K}_t \delta \mathbf{u}^e \quad (2.28)$$

onde $\mathbf{K}_t$ é a matriz de rigidez tangente do elemento no sistema de coordenadas global.

Determinação de $\delta \mathbf{T}^T$:

$$\delta \mathbf{T}^T = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \delta\theta \quad (2.29)$$

A variação $\delta\theta$ pode ser obtida através da variação $\delta \mathbf{u}_{21} = \delta \mathbf{u}_2 - \delta \mathbf{u}_1$ e da definição dos versores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$, conforme mostra a Figura 18.

Figura 18 – Variação do ângulo θ

Os versores $\mathbf{t}$ e $\mathbf{n}$ são definidos como:

$$\mathbf{t} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \dot{x}_{21} \\ \dot{y}_{21} \end{bmatrix} \quad (2.30)$$

e

$$\mathbf{n} = \mathbf{k} \times \mathbf{t} = \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -\dot{y}_{21} \\ \dot{x}_{21} \end{bmatrix} \quad (2.31)$$

onde $\mathbf{k}$ é o versor que completa a base ortonormal do sistema corrotacional.

A projeção de $\delta \mathbf{u}_{21}^e$ em $\mathbf{n}$ é dada por:

$$\begin{aligned} \delta a = \mathbf{n}^T \delta \mathbf{u}_{21}^e &= \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} -\dot{y}_{21} & \dot{x}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta v_2 - \delta v_1 \end{bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \dot{y}_{21} & -\dot{x}_{21} & -\dot{y}_{21} & \dot{x}_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta u_1 \\ \delta v_1 \\ \delta u_2 \\ \delta v_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\ell} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u}^e \end{aligned} \quad (2.32)$$

em que:

$$\mathbf{z}^T = \begin{bmatrix} \dot{y}_{21} & -\dot{x}_{21} & -\dot{y}_{21} & \dot{x}_{21} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

Logo, a variação $\delta \theta$ pode ser determinada pela relação:

$$\delta\theta = \frac{\delta a}{\ell} = \frac{1}{\ell^2} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u}^e \quad (2.34)$$

Substituindo-se (2.34) em (2.29) e (2.29) em (2.28), calcula-se a parcela da matriz de rigidez geométrica:

$$\delta \mathbf{T}^T \mathbf{g}_\ell^e = \begin{bmatrix} -\sin\theta & -\cos\theta & 0 & 0 \\ \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\sin\theta & -\cos\theta \\ 0 & 0 & \cos\theta & -\sin\theta \end{bmatrix} \frac{1}{\ell^2} (\mathbf{z}^T \delta \mathbf{u}^e) A_0 \sigma \mathbf{c}_\ell = \frac{A_0 \sigma}{\ell^3} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u}^e \quad (2.35)$$

Logo, a matriz de rigidez tangente no sistema global é expressa por:

$$\mathbf{K}_T = \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_G \quad (2.36)$$

onde $\mathbf{K}_M$ é a matriz de rigidez material:

$$\mathbf{K}_M = \mathbf{T}^T \left(\frac{EA_0}{\ell_0} \mathbf{c}_\ell \mathbf{c}_\ell^T \right) \mathbf{T} \quad (2.37)$$

e $\mathbf{K}_G$ é a matriz de rigidez geométrica:

$$\mathbf{K}_G = \frac{A_0 \sigma}{\ell^3} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \quad (2.38)$$

2.4.2 Elemento de barra de Bernoulli Euler bidimensional com sistema corrotacional

A dedução da formulação do elemento finito de barra bidimensional com sistema corrotacional foi baseada em Crisfield [7] e Yaw [22].

A Figura 19 esquematiza o elemento de barra na configuração de referência, com comprimento ℓ_0 e ângulo de rotação inicial θ_0 em relação ao sistema de coordenadas global $X \times Y$. A figura também esquematiza o elemento na configuração atual, cujo comprimento se alterou para ℓ e a rotação para θ . O sistema corrotacional é representado pelas coordenadas $x_\ell \times y_\ell$.

Figura 19 – Configuração de referência e atual de um elemento finito de barra, ainda se desconsiderando as deformações de flexão.

O elemento finito em sua configuração de referência tem o comprimento:

$$\ell_0 = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2} \quad (2.39)$$

O elemento finito em sua configuração atual, após os deslocamentos nodais tem o comprimento:

$$\ell = \sqrt{((x_2 + u_2) - (x_1 + u_1))^2 + ((y_2 + v_2) - (y_1 + v_1))^2} \quad (2.40)$$

O deslocamento axial no sistema corrotacional é dado por:

$$u_\ell = \ell - \ell_0 \quad (2.41)$$

A equação (2.41) pode se tornar mal condicionada em uma aplicação numérica quando a diferença entre os comprimentos de referência e atual é pequena. Para minimizar este problema, Crisfield [7] afirma que multiplicando o deslocamento axial u_ℓ por :

$$\frac{(\ell + \ell_0)}{(\ell + \ell_0)} \quad (2.42)$$

melhora o condicionamento numérico da equação (2.41), resultando em:

$$u_\ell = \frac{\ell^2 - \ell_0^2}{\ell + \ell_0} \quad (2.43)$$

A Figura 20 mostra a barra nas configurações de referência e atual. Na configuração atual, o elemento apresenta deformações axial e flexional. A transformação do elemento finito da configuração de referência para a atual passa por três etapas, que ocorrem simultaneamente. A primeira delas é a translação do elemento como corpo rígido, conforme indicado pelas linhas tracejadas que estão paralelas à configuração de referência. A segunda etapa é a rotação de corpo rígido, indicada pelo ângulo α . A terceira etapa é a deformação axial e flexional do elemento, sendo $\theta_{i\ell}$ o ângulo de rotação no sistema corrotacional e θ_i o ângulo de rotação medido a partir da configuração de referência, onde i identifica o nó do elemento.

Figura 20 – Configuração de referência e atual com deformações de flexão.

Os ângulos de rotação no sistema corrotacional são dados por:

$$\theta_{1\ell} = \theta_1 + \theta_0 - \theta \quad (2.44)$$

e

$$\theta_{2\ell} = \theta_2 + \theta_0 - \theta \quad (2.45)$$

Para que o problema não fique limitado a ângulos $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, definem-se o $\sin\theta_{1\ell}$ e o

$\cos\theta_{1\ell}$ como:

$$\sin\theta_{1\ell} = \sin(\theta_1 + \theta_0 - \theta) = \sin(\beta_1 - \theta) = \cos\theta.\sin\beta_1 - \sin\theta.\cos\beta_1 \quad (2.46)$$

e

$$\cos\theta_{1\ell} = \cos(\theta_1 + \theta_0 - \theta) = \cos(\beta_1 - \theta) = \cos\theta.\cos\beta_1 + \sin\theta.\sin\beta_1 \quad (2.47)$$

onde:

$$\beta_1 = \theta_1 + \theta_0 \quad (2.48)$$

E analogamente para:

$$\beta_2 = \theta_2 + \theta_0 \quad (2.49)$$

Utilizando-se (2.46) e (2.47), os ângulos de rotação $\theta_{1\ell}$ e $\theta_{2\ell}$ são dados por:

$$\theta_{1\ell} = \arctan\left(\frac{\cos\theta.\sin\beta_1 - \sin\theta.\cos\beta_1}{\cos\theta.\cos\beta_1 + \sin\theta.\sin\beta_1}\right) \quad (2.50)$$

e

$$\theta_{2\ell} = \arctan\left(\frac{\cos\theta.\sin\beta_2 - \sin\theta.\cos\beta_2}{\cos\theta.\cos\beta_2 + \sin\theta.\sin\beta_2}\right) \quad (2.51)$$

A Figura 21 mostra a relação do deslocamento axial unitário e o esforço solicitante de força normal interna.

Figura 21 – Relação deslocamento axial e força axial para a barra de Bernoulli-Euler.

Assumindo-se que não sejam aplicados carregamentos concentrados entre os nós do elemento finito, a relação da força normal e o deslocamento axial é definida como:

$$N = \frac{E.A.u_\ell}{\ell_0} \quad (2.52)$$

A Figura 22 demonstra a relação da rotação nodal unitária e o esforço solicitante de momentos fletores e forças cortantes nodais.

Figura 22 – Relação rotação nodal e momento fletor para a barra de Bernoulli-Euler

De acordo com a Figura 22, pode-se escrever os momentos fletores e as forças cortantes nodais como:

$$\begin{Bmatrix} \bar{M}_1 \\ \bar{M}_2 \end{Bmatrix} = \frac{2EI}{\ell_0} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1\ell} \\ \theta_{2\ell} \end{Bmatrix} \quad (2.53)$$

e

$$\begin{cases} V_1 = \frac{M_1 + M_2}{\ell_0} \\ V_2 = -V_1 \end{cases} \quad (2.54)$$

A relação entre as variáveis no sistema corrotacional e global podem ser determinadas por meio de uma pequena variação da diferença dos deslocamentos dos nós 1 e 2 $\delta \mathbf{u}_{21}$, conforme indicado na Figura 23.

Figura 23 – Pequena variação dos deslocamentos na configuração atual.

Fazendo-se a projeção de $\delta \mathbf{u}_{21}$ no versor $\mathbf{e}_1$ obtém-se:

$$\delta u_l = \mathbf{e}_1^T \delta \mathbf{u}_{21} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}^T \delta \mathbf{u}_{21} = \begin{Bmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{Bmatrix}^T \begin{Bmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta v_2 - \delta v_1 \end{Bmatrix} \quad (2.55)$$

A equação (2.55) pode ser reescrita em função dos deslocamentos nodais virtuais:

$$\begin{aligned} \delta u_l &= \cos \theta \cdot \delta u_2 - \cos \theta \cdot \delta u_1 + \sin \theta \cdot \delta v_2 - \sin \theta \cdot \delta v_1 = \\ &= -\cos \theta \cdot \delta u_1 - \sin \theta \cdot \delta v_1 + 0 \cdot \delta \theta_1 + \cos \theta \cdot \delta u_2 + \sin \theta \cdot \delta v_2 + 0 \cdot \delta \theta_2 = \\ &= [-\cos \theta \quad -\sin \theta \quad 0 \quad \cos \theta \quad \sin \theta \quad 0] \delta \mathbf{u} = \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.56)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ é a variação do vetor dos deslocamentos nodais no sistema global. Por definição:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} -\cos \theta \\ -\sin \theta \\ 0 \\ \cos \theta \\ \sin \theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.57)$$

Para determinar a relação entre as rotações no sistema corrotacional e no global, deve-se fazer a variação do ângulo $\delta \theta_{il}$. Antes da dedução desta variação, será realizada uma pequena variação do ângulo $\delta \theta$:

$$\delta\theta = \frac{1}{\ell} \delta v_\ell = \frac{1}{\ell} \mathbf{e}_2^T \delta \mathbf{u}_{21} \quad (2.58)$$

Desenvolvendo-se a equação (2.58):

$$\begin{aligned} \delta\theta &= \frac{1}{\ell} \begin{Bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \delta u_2 - \delta u_1 \\ \delta v_2 - \delta v_1 \end{Bmatrix} = \\ &= \frac{1}{\ell} (\sin\theta \cdot \delta u_1 - \sin\theta \cdot \delta u_2 - \cos\theta \cdot \delta v_1 + \cos\theta \cdot \delta v_2) = \\ &= \frac{1}{\ell} [\sin\theta \quad -\cos\theta \quad 0 \quad -\sin\theta \quad \cos\theta \quad 0] \delta \mathbf{u} \end{aligned} \quad (2.59)$$

Definindo-se:

$$\mathbf{z} = \begin{bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix} \quad (2.60)$$

A equação (2.59) pode ser reescrita:

$$\delta\theta = \frac{1}{\ell} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u} \quad (2.61)$$

Fazendo-se a variação do ângulo de rotação no sistema de coordenadas corrotacional:

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_{1\ell} \\ \delta\theta_{2\ell} \end{bmatrix} = \delta \begin{Bmatrix} \theta_1 + \theta_0 - \theta \\ \theta_2 + \theta_0 - \theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 + \delta\theta_0 - \delta\theta \\ \delta\theta_2 + \delta\theta_0 - \delta\theta \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \delta\theta_1 - \delta\theta \\ \delta\theta_2 - \delta\theta \end{Bmatrix} \quad (2.62)$$

A equação (2.62) pode ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} \delta\theta_{1\ell} \\ \delta\theta_{2\ell} \end{bmatrix} = \left[\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - \frac{1}{\ell} \begin{bmatrix} \mathbf{z}^T \\ \mathbf{z}^T \end{bmatrix} \right] \delta \mathbf{u} = \mathbf{A}^T \delta \mathbf{u} \quad (2.63)$$

Utilizando-se os resultados de (2.56) e (2.63), determinam-se as relações entre os deslocamentos nos sistemas de coordenadas corrotacional e global:

$$\delta \mathbf{u}_\ell = \begin{Bmatrix} \delta u_\ell \\ \delta\theta_{1\ell} \\ \delta\theta_{2\ell} \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{r}^T \\ \mathbf{A}^T \end{bmatrix} \delta \mathbf{u} = \mathbf{B} \delta \mathbf{u} \quad (2.64)$$

onde $\mathbf{B}$ é a matriz que relaciona diretamente os deslocamentos em ambos os sistemas de coordenadas:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\frac{\sin\theta}{\ell} & \frac{\cos\theta}{\ell} & 1 & \frac{\sin\theta}{\ell} & -\frac{\cos\theta}{\ell} & 0 \\ -\frac{\sin\theta}{\ell} & \frac{\cos\theta}{\ell} & 0 & \frac{\sin\theta}{\ell} & -\frac{\cos\theta}{\ell} & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \mathbf{b}_2^T \\ \mathbf{b}_3^T \end{bmatrix} \quad (2.65)$$

Uma vez determinada a relação entre as variáveis nos dois sistemas de coordenadas, impõe-se a equivalência de trabalho virtual interno para a viga de Bernoulli-Euler:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = N \delta u_\ell + \bar{M}_1 \delta \theta_{1\ell} + \bar{M}_2 \delta \theta_{2\ell} = \delta \mathbf{u}_\ell^T \mathbf{g}_\ell \quad (2.66)$$

onde $\mathbf{g}$ e $\mathbf{g}_\ell$ são os vetores de esforços solicitantes nodais nos sistemas de coordenadas global e corrotacional, respectivamente.

A equivalência apresentada na equação (2.66) é fundamental para a determinação da matriz de rigidez do elemento finito utilizando-se o sistema de coordenadas corrotacional.

Substituindo-se (2.64) em (2.66):

$$\delta \mathbf{u}^T \mathbf{g} = (\mathbf{B} \delta \mathbf{u})^T \mathbf{g}_\ell = \delta \mathbf{u}^T \mathbf{B}^T \mathbf{g}_\ell \quad (2.67)$$

Por inspeção, a equação (2.67) resulta a seguinte relação entre as forças internas no eixo de coordenadas global e corrotacional:

$$\mathbf{g} = \mathbf{B}^T \mathbf{g}_\ell \quad (2.68)$$

Para a obtenção da matriz de rigidez no sistema global faz-se a variação da força interna (2.68):

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{g}_\ell + \delta \mathbf{B}^T \mathbf{g}_\ell = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{g}_\ell + N \delta \mathbf{b}_1 + \bar{M}_1 \delta \mathbf{b}_2 + \bar{M}_2 \delta \mathbf{b}_3 \quad (2.69)$$

em que $\mathbf{b}_i$ é o vetor que armazena a i-ésima linha de $\mathbf{B}$, em (2.65).

Fazendo-se a variação de (2.52) e (2.53):

$$\delta \mathbf{g}_\ell = \begin{bmatrix} \delta N \\ \delta \bar{M}_1 \\ \delta \bar{M}_2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{\ell_0} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4r^2 & 2r^2 \\ 0 & 2r^2 & 4r^2 \end{bmatrix} \delta \mathbf{u}_\ell = \mathbf{C}_\ell \delta \mathbf{u}_\ell \quad (2.70)$$

onde $r = \sqrt{I/A}$ é o raio de giração.

Substituindo-se (2.70) no primeiro termo de (2.69):

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{B}^T \delta \mathbf{u}_\ell = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \delta u_\ell = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \mathbf{B} \delta \mathbf{u} = \mathbf{k}_{t1} \delta \mathbf{u} \quad (2.71)$$

Por inspeção, da equação (2.71) resulta a matriz de rigidez material:

$$\mathbf{k}_{t1} = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \mathbf{B} \quad (2.72)$$

Fazendo-se a variação do vetor $\mathbf{b}_1$:

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{b}_1 &= \delta \mathbf{r} = \delta \begin{bmatrix} -\cos\theta & -\sin\theta & 0 & \cos\theta & \sin\theta & 0 \end{bmatrix}^T = \\ &= \begin{bmatrix} \sin\theta & -\cos\theta & 0 & -\sin\theta & \cos\theta & 0 \end{bmatrix}^T \delta\theta = \mathbf{z} \delta\theta \end{aligned} \quad (2.73)$$

Da relação (2.61), reescreve-se:

$$\delta \mathbf{b}_1 = \frac{1}{\ell} \mathbf{z} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u} \quad (2.74)$$

Fazendo-se a variação do vetor $\mathbf{b}_2$:

$$\delta \mathbf{b}_2 = \delta \left(-\frac{1}{\ell} \mathbf{z} \right) = \delta \left(-\frac{1}{\ell} \right) \mathbf{z} + \left(-\frac{1}{\ell} \right) \delta \mathbf{z} \quad (2.75)$$

Fazendo-se a variação do vetor (2.60):

$$\delta \mathbf{z} = \delta \begin{Bmatrix} \sin\theta \\ -\cos\theta \\ 0 \\ -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \\ -\cos\theta \\ -\sin\theta \\ 0 \end{Bmatrix} \delta\theta = -\mathbf{r} \delta\theta = -\frac{1}{\ell} \mathbf{r} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u} \quad (2.76)$$

A variação $\delta \left(\frac{-1}{\ell} \right)$ é dada por:

$$\delta \left(\frac{-1}{\ell} \right) = (-1) \delta (\ell^{-1}) = (-1) (-\ell^{-2}) \delta u_\ell = \frac{\delta u_\ell}{\ell^2} = \frac{1}{\ell^2} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u} \quad (2.77)$$

Substituindo-se (2.76) e (2.77) em (2.75):

$$\delta \mathbf{b}_2 = \frac{1}{\ell^2} \mathbf{z} \mathbf{r}^T \delta \mathbf{u} + \frac{1}{\ell^2} \mathbf{r} \mathbf{z}^T \delta \mathbf{u} = \frac{1}{\ell^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \delta \mathbf{u} \quad (2.78)$$

A determinação da variação do vetor $\mathbf{b}_3$ é análoga ao vetor $\mathbf{b}_2$ e conclui-se que:

$$\delta \mathbf{b}_3 = \delta \mathbf{b}_2 \quad (2.79)$$

Substituindo-se (2.74), (2.78) e (2.79) em (2.69), obtém-se a matriz de rigidez geométrica:

$$\mathbf{k}_{i\sigma} = \frac{N}{\ell} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{\ell^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (2.80)$$

Logo, a matriz de rigidez tangente, que é composta pela soma da matriz de rigidez material (2.72) e da matriz de rigidez geométrica (2.80) é dada por:

$$\mathbf{k}_t = \mathbf{B}^T \mathbf{C}_\ell \mathbf{B} + \frac{N}{\ell} \mathbf{z} \mathbf{z}^T + \frac{\bar{M}_1 + \bar{M}_2}{\ell^2} (\mathbf{r} \mathbf{z}^T + \mathbf{z} \mathbf{r}^T) \quad (2.81)$$

2.5 Contato unilateral

2.5.1 Interação solo-estrutura

A interação solo-estrutura aplicada a problemas de *risers* é um tema complexo. O solo é um material de comportamento constitutivo não linear, que pode variar bastante de acordo com as condições de carregamento a que está submetido, saturação de seus poros com água e até mesmo o histórico de formação.

O contato unilateral do *riser* é fonte de não linearidades fortes no sistema, tornando-se um aspecto importante para o dimensionamento e verificação de *risers* que se apoiam sobre o leito do mar. O simples fato de o contato ser unilateral já introduz não linearidades ao sistema, pois, como o TDP varia de posição com o tempo, o comprimento da região apoiada do cabo com o solo se altera, tornando-se um problema de condições de contorno móveis.

Adicionalmente à não-linearidade intrínseca ao contato unilateral, o solo também pode apresentar comportamento constitutivo não linear. Diversos modelos constitutivos podem ser adotados para as análises, para considerar efeitos de plastificação, inclusive *hardening* e *softening* do solo, bem como viscoelásticos, associados ao adensamento. No entanto estes efeitos não serão estudados neste trabalho, pois a representação do solo será através de um modelo do tipo *Winkler*, por meio de molas elásticas equivalentes. A Figura 6 exemplifica o modelo que será adotado.

Figura 24: Região do contato do *riser* com o solo – TDZ

2.5.2 Equacionamento do contato

Todo o desenvolvimento da formulação das equações para simular o contato foi baseado no método das penalidades, especificamente para o contato nó-superfície, que simula o contato dos nós da estrutura com o solo marinho, conforme ilustra a Figura 25.

O desenvolvimento que será demonstrado contempla o caso bidimensional, sendo válido tanto para o elemento de treliça quanto para o de barra, e também levará em consideração o contato tangencial (atrito) da estrutura com o solo marinho, de acordo com o modelo Coulomb.

Figura 25 – Contato do tipo nó-superfície.

Definindo o vetor distância (*gap*) entre os pontos $\mathbf{x}_1$ e $\mathbf{x}_2$:

$$\mathbf{g} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1, \quad (2.82)$$

a caracterização das distâncias na direção normal e tangencial à superfície pode ser feita pela projeção de $\mathbf{g}$ nos versores $\mathbf{n}$ e $\mathbf{a}$:

$$g_N = \mathbf{g}^T \mathbf{n} \quad (2.83)$$

e

$$g_T = \mathbf{g}^T \mathbf{a} \quad (2.84)$$

onde:

g_N é o valor do *gap* normal

g_T é o valor do *gap* tangencial

O método das penalidades penaliza os nós que penetram nas regiões restritas, com um determinado parâmetro de penalidade ε , que regula a taxa de penetração de um corpo no outro. Desta forma, sempre que houver contato ocorrerá uma pequena interpenetração entre os corpos. A Figura 26 mostra a relação constitutiva da força normal x gap normal:

Figura 26 – Equação constitutiva do contato na direção normal

O gráfico da Figura 26 apresenta uma descontinuidade na sua derivada quando g_n vale zero, que é inerente aos problemas de contato. Para $g_n > 0$ não ocorre o contato e a força normal é nula. Quando $g_n = 0$ significa que há contato, e mais especificamente para o caso do método das penalidades, quando $g_n \leq 0$ o significado físico é de que há contato. A função que define o gráfico da Figura 26 é dada por:

$$\begin{cases} F_N = 0 & \text{quando } g_n > 0 \\ F_N = \varepsilon_N g_N & \text{quando } g_n \leq 0 \end{cases} \quad (2.85)$$

onde ε_N é o parâmetro de penalidade na direção do versor $\mathbf{n}$.

A Figura 27 ilustra a relação constitutiva da força tangencial x gap tangencial e só existe quando ocorre o contato normal, ou seja, nos casos em que $g_n \leq 0$.

Figura 27 – Equação constitutiva do contato tangencial

O gráfico da Figura 27 apresenta duas descontinuidades nas derivadas, que são referentes à mudança do tipo de contato tangencial. No trecho linear não constante, denominado de contato tangencial tipo *stick*, a força solicitante é menor que a força de atrito máxima resistida pela interação solo-estrutura, e não ocorre o deslizamento. Nos dois patamares, denominados de contato tangencial tipo *slip*, ocorre o deslizamento relativo entre solo e estrutura, pois a força solicitante ultrapassou o limite máximo que a força tangencial conseguia resistir. A função que define esta relação constitutiva é dada por:

$$\begin{cases} F_T = \varepsilon_T g_T & \text{contato sem escorregamento - } stick \\ F_T = \mu \varepsilon_N g_N \frac{\dot{\mathbf{a}}}{\|\dot{\mathbf{a}}\|} & \text{contato com escorregamento - } slip \end{cases} \quad (2.86)$$

onde:

ε_T é o parâmetro de penalidade na direção do versor $\mathbf{a}$;

μ é o coeficiente de atrito devido a interação solo estrutura.

O trabalho virtual na superfície de contato é definido por:

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_C} (p_N \delta g_N + t_T \delta g_T) d\Gamma \quad (2.87)$$

onde:

Γ_C é a superfície de contato;

p_{Ns} é a pressão na superfície de contato, na direção do versor $\mathbf{n}$;

t_{Ts} é a pressão na superfície de contato, na direção do versor $\mathbf{a}$.

Integrando-se (2.87) na superfície de contato:

$$\delta W_C = \sum_{s=1}^{N_{slave}} (p_{Ns} A_s \delta g_N + t_{Ts} A_s \delta g_{Ts}) \quad (2.88)$$

onde N_{slave} representa o número de nós do *riser* que estão na condição de contato.

A contribuição da equação (2.88) por nó é:

$$\delta W_{Cs} = p_{Ns} A_s \delta g_N + t_{Ts} A_s \delta g_{Ts} \quad (2.89)$$

onde A_s é a área de influência por nó.

Devido ao contato tangencial apresentar na relação constitutiva dois comportamentos distintos, os desenvolvimentos a seguir serão separados para o caso de contato sem escorregamento (*stick*) e com escorregamento (*slip*).

2.5.2.1 Condição de contato normal e atrito sem escorregamento (*Stick*)

O trabalho virtual neste caso é definido por:

$$\delta W_{Cs}^{Stick} = p_{Ns} A_s \delta g_{Ns} + t_{Ts} A_s \delta g_{Ts} = \varepsilon_N g_{Ns} \delta g_{Ns} + \varepsilon_T g_a \delta g_a \quad (2.90)$$

Sabendo-se que os versores $\mathbf{n}$ e $\mathbf{a}$ são constantes, no caso de superfície horizontal, as variações de δg_N e δg_a são dadas por:

$$\delta g_N = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{n} + \mathbf{g}^T \delta \mathbf{n} = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{n} \quad (2.91)$$

e

$$\delta g_a = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{a} + \mathbf{g}^T \delta \mathbf{a} = \delta \mathbf{g}^T \mathbf{a} \quad (2.92)$$

Substituindo-se (2.91) e (2.92) em (2.90):

$$\delta W_{Cs}^{Stick} = (\varepsilon_N g_{Ns} \mathbf{n}^T + \varepsilon_T g_a \mathbf{a}^T) \delta \mathbf{g} = \mathbf{f}^{T^{Stick}} \delta \mathbf{g} \quad (2.93)$$

Da equação (2.93) conclui-se que:

$$\mathbf{f}^{Stick} = \varepsilon_N g_{Ns} \mathbf{n}^T + \varepsilon_T g_a \mathbf{a}^T \quad (2.94)$$

Fazendo-se a variação de $\mathbf{f}^{Stick}$:

$$\delta \mathbf{f}^{Stick} = \varepsilon_N \delta g_{Ns} \mathbf{n} + \varepsilon_T \delta g_a \mathbf{a} \quad (2.95)$$

Substituindo-se (2.91) e (2.92) em (2.95):

$$\delta \mathbf{f}^{Stick} = \varepsilon_N \mathbf{n} \mathbf{n}^T \delta \mathbf{g} + \varepsilon_T \mathbf{a} \mathbf{a}^T \delta \mathbf{g} \quad (2.96)$$

Da equação (2.96) conclui-se que:

$$\mathbf{K}^{Stick} = \varepsilon_N \mathbf{n} \mathbf{n}^T + \varepsilon_T \mathbf{a} \mathbf{a}^T \quad (2.97)$$

2.5.2.2 Condição de contato normal e atrito com escorregamento (*Slip*)

A força de atrito na direção tangencial é dada por:

$$\mathbf{f}_{atrito}^{Slip} = \mu p_{Ns} A_s \mathbf{a} \quad (2.98)$$

O trabalho virtual na superfície de contato é definido por:

$$\delta W_C = \int_{\Gamma_C} (p_N \delta g_N + t_T \delta g_T) d\Gamma \quad (2.99)$$

O trabalho virtual por nó é dado por:

$$\delta W_{Cs} = p_{Ns} A_s \delta g_N + t_{Ts} A_s \delta g_{Ts} = f_{Ns} \delta g_{Ns} + f_{Ts} \delta g_{Ts} \quad (2.100)$$

Substituindo-se (2.91) e (2.92) em (2.100):

$$\delta W_{Cs} = \varepsilon_N g_{Ns} \mathbf{n}^T \delta \mathbf{g}_{Ns} + \mu \varepsilon_N g_{Ns} \mathbf{a}^T \delta \mathbf{g} = \mathbf{f}^{Slip^T} \delta \mathbf{g} \quad (2.101)$$

Da equação (2.101) conclui-se que:

$$\mathbf{f}^{Slip} = \varepsilon_N g_{Ns} \mathbf{n} + \mu \varepsilon_N g_{Ns} \mathbf{a} \quad (2.102)$$

A variação de (2.102) resulta em:

$$\delta \mathbf{f}^{Slip} = \varepsilon_N \delta g_{Ns} \mathbf{n} + \mu \varepsilon_N \delta g_{Ns} \mathbf{a} + \mu \varepsilon_N g_{Ns} \delta \mathbf{a} \quad (2.103)$$

Substituindo-se (2.91) e (2.92) em (2.103):

$$\delta \mathbf{f}^{Slip} = \underbrace{\varepsilon_N (\delta \mathbf{g}^T \mathbf{n}) \mathbf{n}}_{c_1} + \underbrace{\mu \varepsilon_N (\delta \mathbf{g}^T \mathbf{n}) \mathbf{a}}_{c_2} + \underbrace{\mu \varepsilon_N g_{Ns} \delta \mathbf{a}}_{c_3} \quad (2.104)$$

A equação (2.104) foi dividida em três partes. Os termos dois primeiros termos são:

$$c_1 = \varepsilon_N (\delta \mathbf{g}^T \mathbf{n}) \mathbf{n} = \varepsilon_N (\mathbf{n}^T \delta \mathbf{g}) \mathbf{n} = \varepsilon_N \mathbf{n} \mathbf{n}^T \delta \mathbf{g} \quad (2.105)$$

e

$$c_2 = \mu \varepsilon_N (\delta \mathbf{g}^T \mathbf{n}) \mathbf{a} = \mu \varepsilon_N (\mathbf{n}^T \delta \mathbf{g}) \mathbf{a} = \mu \varepsilon_N \mathbf{a} \mathbf{n}^T \delta \mathbf{g} \quad (2.106)$$

Para a determinação de c_3 , deve-se primeiro calcular a variação $\delta \mathbf{a}$. Por definição $\mathbf{a}$ pode ser expresso como:

$$\mathbf{a} = \frac{\mathbf{f}_T}{\|\mathbf{f}_T\|} \quad (2.107)$$

A variação de (2.107) resulta em:

$$\delta \mathbf{a} = \frac{\delta \mathbf{f}_T \|\mathbf{f}_T\| - \mathbf{f}_T \delta \|\mathbf{f}_T\|}{\|\mathbf{f}_T\|^2} = \frac{1}{\|\mathbf{f}_T\|} (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T) \delta \mathbf{f}_T \quad (2.108)$$

A equação (2.108) é dependente da variação da força de atrito tangencial, que, por sua vez, é uma função composta de um trecho linear, dois pontos de descontinuidade nas derivadas e dois patamares, conforme demonstra o gráfico da Figura 27. Devido a este comportamento da função força tangencial, para o cálculo da sua variação, deve-se fazer uma hipótese. A hipótese adotada será a mesma que Gay Neto[3] adotou, ou seja: uma vez ocorrido o deslizamento, isto é, a força de atrito está definida no trecho do patamar, se houver descarregamento, ele se processará paralelamente à reta de carregamento. Fisicamente, isso significa que, quando ocorre o descarregamento, após a situação de deslizamento (*Slip*), instala-se a situação de não-escorregamento (*Stick*). Caso isso não ocorra, mas pelo contrário, o carregamento continue a aumentar, pode-se dizer que não há contribuição da rigidez de deslizamento, uma vez que a variação da força de atrito para este caso se torna nula.

De acordo com a hipótese adotada, a variação $\delta \mathbf{f}_T$ pode ser escrita da forma:

$$\delta \mathbf{f}_T = \varepsilon_T \mathbf{a}\mathbf{a}^T \delta \mathbf{g} \quad (2.109)$$

Substituindo-se (2.109) em (2.106):

$$c_3 = \mu \varepsilon_N g_{Ns} \frac{1}{\|\mathbf{f}_T\|} (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T) \varepsilon_T \mathbf{a}\mathbf{a}^T \delta \mathbf{g} \quad (2.110)$$

Logo, a matriz de rigidez tangente pode ser expressa por:

$$\mathbf{K}^{Slip} = \varepsilon_N \mathbf{n}\mathbf{n}^T + \mu \varepsilon_N \mathbf{a}\mathbf{a}^T + \varepsilon_T (\mathbf{I} - \mathbf{a}\mathbf{a}^T) (\mathbf{a}\mathbf{a}^T) \quad (2.111)$$

3 Capítulo 3

3.1 Análise dinâmica

A análise estrutural de *risers* submetido às solicitações ambientais e de operação é uma questão complexa e de decisiva importância para o projeto dos mesmos. Devido à elevada esbelteza que estas estruturas apresentam, alguns fenômenos típicos de dinâmica não linear tornam-se relevantes. Em determinadas situações, as não linearidades do sistema, provenientes não somente da não-linearidade geométrica do *riser*, mas também da interação fluido estrutura e da interação solo estrutura, junto ao leito marinho, podem levar o sistema a apresentar compressão dinâmica e instabilidade paramétrica. A modelagem da estrutura nestes cenários torna-se desafiadora, uma vez que da relação fluido-estrutura surgem efeitos inerciais e dissipativos acoplados (isto é, o movimento da estrutura afeta o escoamento do fluido e vice-versa). Além disto, as forças de interação são de caráter seguidor (*follower forces*). Em adição à complexidade da interação fluido-estrutura, há que se enfrentar a adequada modelagem do contato unilateral com o solo marinho. Devido à própria natureza do contato, o problema torna-se um de condições de contorno móveis.

Fenômeno importante no projeto dos *risers* é o da vibração induzida por vórtice – *Vortex Induced Vibration* – ou simplesmente *VIV*. Este fenômeno, como consequência do já mencionado aspecto do acoplamento fluido-estrutura, é autoinduzido, produzindo o *lock-in*, quando a frequência de desprendimento de vórtices (e consequentemente do carregamento fluido) e a da frequência dominante da resposta estrutural se sintonizam. Entretanto, o estudo do *VIV* é bastante complexo e não faz parte do escopo deste trabalho, devendo ser considerado em projetos de pesquisa subsequentes.

Devido à natureza dos carregamentos variáveis no tempo durante a fase de operação do *riser*, aos efeitos de interação fluido-estrutura, à esbelteza estrutural e ao contato unilateral já mencionados, justifica-se a adoção de uma modelagem não-linear dinâmica para a simulação dessas estruturas. A análise aqui proposta buscará determinar os campos de deslocamentos, velocidades e acelerações da estrutura quando sujeitas a: carregamentos hidrodinâmicos, excluídos os efeitos de *VIV*;

deslocamentos impostos no *hang-off*; contato unilateral com o solo marinho, com repercussão em condições de contorno móveis no TDP. A partir destes campos, poderão ser caracterizados os esforços solicitantes que atuam sobre o *riser*, permitindo a realização de seu dimensionamento ou verificação, de acordo com os critérios de projeto estabelecidos.

A formulação da dinâmica não linear proposta neste trabalho é bidimensional e considera o efeito do trem de ondas nos deslocamentos prescritos à plataforma. Considera também os efeitos inerciais (massa adicional) e dissipativos do fluido – força de arrasto –, modelada pela fórmula de Morison [21], que propõe amortecimento quadrático na velocidade relativa entre a estrutura e o fluido. O carregamento de peso próprio da estrutura submersa e a condição de contorno que o contato provoca na região do TDZ também são considerados. Evidentemente, é necessário levar-se em consideração o estado inicial de tensão do *riser*, instalado após a etapa de seu lançamento e intrinsecamente associado à sua configuração deformada de equilíbrio.

3.2 Origem dos carregamentos de onda e movimento da unidade flutuante

Este item determina as componentes de velocidade, aceleração e deslocamento imposto no topo do *riser*, que serão considerados nos carregamentos do modelo dinâmico proposto. A descrição segue de forma paralela ao trabalho de Takafuji [2], mas adaptado para o caso bidimensional.

3.2.1 Efeito da onda

O potencial de velocidades ϕ associado a uma onda de superfície, suposta harmônica e propagando-se em águas profundas, adaptada para o caso bidimensional, pode ser escrito na forma [24]:

$$\phi = \frac{\|g\| A_w}{\omega} e^{K_w(y-h)} \text{sen}(K_w x - \omega t) \quad (3.1)$$

onde:

$\|\mathbf{g}\|$ é o módulo da aceleração da gravidade;

A_w é a amplitude da onda;

ω é a frequência da onda;

K_w é o número de onda;

x é a coordenada cartesiana na direção do versor $\mathbf{i}$;

y é a coordenada cartesiana na direção do versor $\mathbf{j}$.

O número de onda K_w para águas profundas é dado por:

$$K_w = \frac{\omega^2}{\|\mathbf{g}\|} \quad (3.2)$$

O campo de velocidades decorrente do potencial de velocidades (3.1) é definido como:

$$\mathbf{v}_w(t) = \nabla \phi \quad (3.3)$$

Escrevendo explicitamente cada uma das componentes de (3.3):

$$\begin{aligned} v_{w,x} &= \frac{\|\mathbf{g}\| A_w}{\omega} e^{K_w(y-h)} \cos(K_w x - \omega t) K_w \\ v_{w,y} &= \frac{\|\mathbf{g}\| A_w}{\omega} e^{K_w(y-h)} \sin(K_w x - \omega t) K_w \end{aligned} \quad (3.4)$$

A aceleração associada ao potencial de velocidades é obtida derivando-se (3.3):

$$\mathbf{a}_w(t) = \frac{d\mathbf{v}_w(t)}{dt} \quad (3.5)$$

Escrevendo explicitamente cada uma das componentes de (3.5):

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_{wx} &= \|\mathbf{g}\| A_w e^{K_w(y-h)} K_w \sin(K_w x - \omega t) \\ \mathbf{a}_{wy} &= -\|\mathbf{g}\| A_w e^{K_w(y-h)} K_w \cos(K_w x - \omega t) \end{aligned} \quad (3.6)$$

3.2.2 Movimento da unidade flutuante

As plataformas de exploração *offshore* estão em constante movimento devido à passagem das ondas marítimas. A passagem dessas ondas causa deslocamentos tanto à plataforma quanto aos cabos submersos conectados a ela. Takafuji [2] explica que o movimento da plataforma é dependente das propriedades da onda,

como frequência, amplitude, direção, e que para cada ângulo de incidência há uma função de transferência, denominada *Response Amplitude Operator – RAO*. Esta função relaciona os movimentos da unidade flutuante causados por uma onda harmônica de amplitude unitária com o ângulo de aproamento da unidade flutuante e o ângulo de incidência da onda. A *RAO* adaptada para o caso bidimensional fornece:

$$\begin{aligned}x_{topo}(t) &= X_{topo} \text{sen}(\omega t + \phi_{x_topo}) \\y_{topo}(t) &= Y_{topo} \text{sen}(\omega t + \phi_{y_topo})\end{aligned}\quad (3.7)$$

onde:

X_{topo} é a amplitude do movimento do topo na direção do versor $\mathbf{i}$;

Y_{topo} é a amplitude do movimento do topo na direção do versor $\mathbf{j}$;

ϕ_{x_topo} é a fase do movimento do topo projetada na direção do versor $\mathbf{i}$;

ϕ_{y_topo} é a fase do movimento do topo projetada na direção do versor $\mathbf{j}$.

3.3 Carregamento do fluido

A força do fluido, modelada pela fórmula de Morison, pode ser dividida em uma parcela referente à inércia do fluido e outra relativa à viscosidade. A força devido à inércia é descrita por:

$$\mathbf{f}_{if} = \rho_a A \mathbf{a}_w(t) + c_a \rho_a A (\mathbf{a}_w(t) - \ddot{\mathbf{u}}(t)) \quad (3.8)$$

onde:

ρ_a é a massa específica do fluido;

A é a área da seção transversal do riser;

c_a é o coeficiente de massa adicional.

$\ddot{\mathbf{u}}$ é a aceleração da estrutura no sistema de coordenadas global.

A equação (3.8) pode ser dividida em duas parcelas:

$$\mathbf{f}_{if1} = \rho_a A (1 + c_a) \mathbf{a}_w(t) \quad (3.9)$$

e

$$\mathbf{f}_{if2} = -c_a \rho_a A \ddot{\mathbf{u}}(t) \quad (3.10)$$

A equação (3.10) é uma força de inércia adicional a ser considerada na equação de movimento do sistema estrutural, proveniente da interação fluido-estrutura. A equação (3.9) é uma força devida somente ao fluido, e será considerada como carregamento externo na equação de movimento do sistema estrutural.

Além das forças de inércia, a interação fluido-estrutura também apresenta as forças viscosas. Elas também são modeladas pela fórmula de Morison, e são dependentes da velocidade relativa entre a estrutura, o gradiente de velocidade de onda e a velocidade da correnteza marítima. Estas forças são dependentes da configuração atual da estrutura e podem ser divididas em duas parcelas, uma axial e outra transversal. A componente axial é modelada por:

$$\mathbf{f}_{Da} = -\frac{1}{2}\rho_a\pi DC_{Da} \|\mathbf{v}_{ra}(t)\| \mathbf{v}_{ra}(t) \quad (3.11)$$

A componente transversal é modelada por:

$$\mathbf{f}_{Dt} = -\frac{1}{2}\rho_a DC_{Dt} \|\mathbf{v}_{rt}(t)\| \mathbf{v}_{rt}(t) \quad (3.12)$$

onde:

D é o diâmetro externo do *riser*;

$\mathbf{v}_{ra}(t)$ e $\mathbf{v}_{rt}(t)$ são as velocidades relativas na direção axial e transversal, respectivamente;

C_{Da} e C_{Dt} são os coeficientes de arrasto na direção axial e transversal, respectivamente;

O vetor velocidade relativa $\mathbf{v}_r$ é definido como:

$$\mathbf{v}_r(t) = \dot{\mathbf{u}}(t) - \mathbf{v}_c - \mathbf{v}_w(t) \quad (3.13)$$

onde $\mathbf{v}_c$ é a velocidade da correnteza marítima e $\mathbf{v}_w$ é o gradiente de velocidade da onda – ver (3.3).

Os vetores velocidade relativa $\mathbf{v}_{ra}(t)$ e $\mathbf{v}_{rt}(t)$ são definidos como a projeção de (3.13), respectivamente, nas direções axial e transversal, ou seja, no sistema corrotacional.

Substituindo-se as componentes axial e transversal de (3.13) em (3.11) e (3.12), obtêm-se:

$$\mathbf{f}_{Da} = -\frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Da} \left\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| \left(\dot{\mathbf{u}}_a(t) - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right) \quad (3.14)$$

e

$$\mathbf{f}_{Dt} = -\frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Dt} \left\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| \left(\dot{\mathbf{u}}_t(t) - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right) \quad (3.15)$$

Desenvolvendo-se a equação (3.14):

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Da} &= -\frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Da} \left\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) \\ &+ \frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Da} \left\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ca} + \mathbf{v}_{wa}(t)) \end{aligned} \quad (3.16)$$

A equação (3.16) pode ser dividida em duas partes:

$$\mathbf{f}_{Da1} = -\frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Da} \left\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) \quad (3.17)$$

e

$$\mathbf{f}_{Da2} = \frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Da} \left\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ca} + \mathbf{v}_{wa}(t)) \quad (3.18)$$

A equação (3.17) será considerada como uma força de amortecimento, enquanto que na equação (3.18) será considerada no vetor de forças externas.

De forma análoga, desenvolvendo-se (3.15), obtêm-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Dt} &= -\frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Dt} \left\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) \\ &+ \frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Dt} \left\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ct} + \mathbf{v}_{wt}(t)) \end{aligned} \quad (3.19)$$

A equação (3.19) pode ser dividida em duas partes:

$$\mathbf{f}_{Dt1} = -\frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Dt} \left\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) \quad (3.20)$$

e

$$\mathbf{f}_{Dt2} = \frac{1}{2} \rho_a \pi DC_{Dt} \left\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ct} + \mathbf{v}_{wt}(t)) \quad (3.21)$$

A equação (3.20) será considerada como uma força de amortecimento, enquanto que a equação (3.21) será somada ao vetor de forças externas.

3.4 Discretização pelo método dos elementos finitos

Os deslocamentos em um ponto qualquer dentro de um elemento podem ser obtidos por interpolação dos deslocamentos nodais, mediante utilização das funções de forma. A seguinte relação é válida:

$$\mathbf{u}_c = \mathbf{N}\mathbf{U}_c \quad (3.22)$$

onde:

$\mathbf{u}_c$ é o vetor deslocamento em um ponto genérico do elemento finito no sistema corrotacional

$\mathbf{N}$ é a matriz das funções de forma;

$\mathbf{U}_c$ é o vetor dos deslocamentos nodais no sistema corrotacional.

Uma vez que a matriz das funções de forma $\mathbf{N}$ não é dependente da variável tempo, as seguintes relações também são válidas:

$$\dot{\mathbf{u}}_c = \mathbf{N}\dot{\mathbf{U}}_c \quad (3.23)$$

e

$$\ddot{\mathbf{u}}_c = \mathbf{N}\ddot{\mathbf{U}}_c \quad (3.24)$$

No Capítulo 2 foram desenvolvidos os elementos finitos bidimensionais de treliça e barra de Bernoulli-Euler. Para ambos os elementos, neste item serão introduzidas as funções de forma a serem utilizadas, de acordo com os graus de liberdade analisados. O elemento de barra apresenta um grau de liberdade a mais por nó que o de treliça, referente ao seu ângulo de rotação decorrente da flexão.

O procedimento completo para a determinação das funções pode ser encontrado em Bathe [5].

3.4.1 Elemento de treliça bidimensional com sistema corrotacional

A Figura 28 ilustra o elemento de treliça bidimensional com a numeração local dos graus de liberdade considerados no seu desenvolvimento.

Figura 28 – Elemento bidimensional de treliça com a numeração dos graus de liberdade

A Figura 29 ilustra a nomenclatura adotada para os deslocamentos nodais nas direções dos graus de liberdade para um nó.

Figura 29 – Nomenclatura dos deslocamentos para os graus de liberdade de um nó

O vetor dos deslocamentos nodais no sistema corrotacional é definido como:

$$\mathbf{U}_c = \{u_1(t), v_1(t), u_2(t), v_2(t)\}^T \quad (3.25)$$

Os vetores de velocidade e aceleração nodais são dados por:

$$\dot{\mathbf{U}}_c = \{\dot{u}_1(t), \dot{v}_1(t), \dot{u}_2(t), \dot{v}_2(t)\}^T \quad (3.26)$$

e

$$\ddot{\mathbf{U}}_c = \{\ddot{u}_1(t), \ddot{v}_1(t), \ddot{u}_2(t), \ddot{v}_2(t)\}^T \quad (3.27)$$

Para um elemento de treliça, com comprimento ℓ , foram utilizadas funções de forma lineares. A Figura 30 ilustra a variável x , cujo domínio é o intervalo de zero a ℓ , que define a posição de um ponto genérico P .

Figura 30 – Elemento de treliça com um ponto P a uma distância genérica x

A função de forma adotada para os graus de liberdade u e v do nó 1 é definida conforme ilustra a Figura 31:

Figura 31 – Função de forma linear para os graus de liberdade do nó 1

O polinômio do primeiro grau ilustrado na Figura 31 é definido pela equação da reta:

$$N_1(x) = N_2(x) = 1 - \frac{x}{\ell} \quad (3.28)$$

De forma análoga, a função de forma adotada para os graus de liberdade u e v do nó 2 é definida conforme ilustra a Figura 32:

Figura 32 – Função de forma linear para os graus de liberdade do nó 2

O polinômio do primeiro grau ilustrado na Figura 32 é definido pela equação da reta:

$$N_3(x) = N_4(x) = \frac{x}{L} \quad (3.29)$$

A matriz $\mathbf{N}$, que contempla as funções de forma e define os deslocamentos nas direções dos graus de liberdade para um ponto genérico dentro do elemento, é escrita da seguinte maneira:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1(x) & 0 & N_3(x) & 0 \\ 0 & N_2(x) & 0 & N_4(x) \end{bmatrix} \quad (3.30)$$

3.4.2 Elemento de barra bidimensional com sistema corrotacional

A Figura 33 ilustra o elemento de barra bidimensional com a numeração local dos graus de liberdade considerados no desenvolvimento do mesmo.

Figura 33 – Elemento bidimensional de barra com a numeração dos graus de liberdade

A Figura 29 ilustra a nomenclatura adotada para os deslocamentos nodais nas direções dos graus de liberdade para um nó.

Figura 34 – Nomenclatura dos deslocamentos para os graus de liberdade de um nó

O vetor dos deslocamentos nodais no sistema corrotacional é definido como:

$$\mathbf{U}_c = \{u_1(t), v_1(t), \theta_1(t), u_2(t), v_2(t), \theta_2(t)\}^T \quad (3.31)$$

Os vetores de velocidade e aceleração nodais são dados por:

$$\dot{\mathbf{U}}_c = \{\dot{u}_1(t), \dot{v}_1(t), \dot{\theta}_1(t), \dot{u}_2(t), \dot{v}_2(t), \dot{\theta}_2(t)\}^T \quad (3.32)$$

e

$$\ddot{\mathbf{U}}_c = \{\ddot{u}_1(t), \ddot{v}_1(t), \ddot{\theta}_1(t), \ddot{u}_2(t), \ddot{v}_2(t), \ddot{\theta}_2(t)\}^T \quad (3.33)$$

Para um elemento de barra, com comprimento ℓ , foram utilizadas as funções de forma lineares para o deslocamento axial e as funções hermitianas para os deslocamentos transversais. A Figura 35 e Figura 36 ilustram os polinômios adotados para os deslocamentos na direção dos graus de liberdade 1 e 4, respectivamente:

Figura 35 – Função de forma para o grau de liberdade 1

Figura 36 – Função de forma para o grau de liberdade 4

A reta da Figura 35 é descrita pela função:

$$N_1(x) = 1 - \frac{x}{L} \quad (3.34)$$

A reta da Figura 36 é descrita pela função:

$$N_4(x) = \frac{x}{L} \quad (3.35)$$

A Figura 35 e a Figura 36 ilustram os polinômios de terceiro grau adotados para os deslocamentos na direção dos graus de liberdade 2 e 5, respectivamente:

Figura 37 – Função de forma para o grau de liberdade 2

Figura 38 – Função de forma para o grau de liberdade 5

Os polinômios da Figura 37 e Figura 38 são descritos pelas funções:

$$N_2(x) = \frac{2x}{\ell^3} - \frac{3x^2}{\ell^2} + 1 \quad (3.36)$$

e

$$N_5(x) = -\frac{2x^3}{\ell^3} + \frac{3x^2}{\ell^2} \quad (3.37)$$

A Figura 39 e a Figura 40 ilustram os polinômios adotados para as rotações nos graus de liberdade 3 e 6, respectivamente:

Figura 39 – Função de forma para o grau de liberdade 3

Figura 40 – Função de forma para o grau de liberdade 6

Os polinômios da Figura 39 e Figura 40 são descritos pelas funções:

$$N_3(x) = \frac{x^3}{\ell^2} - \frac{2x^2}{\ell} + x \quad (3.38)$$

e

$$N_6(x) = \frac{x^3}{\ell^2} - \frac{x^2}{\ell} \quad (3.39)$$

3.5 Matrizes elementais e vetor de carregamento externo

Este item fará a dedução das matrizes elementais de massa da estrutura, massa adicional, amortecimento fluido e do vetor de carregamento. As matrizes de rigidez para os elementos finitos bidimensionais de treliça e barra de Bernoulli-Euler foram obtidas nos itens 2.4.1 e 2.4.2, respectivamente.

3.5.1 Matriz de massa estrutural

A energia cinética, considerando a massa específica do *riser* ρ e o volume V para um elemento finito, pode ser escrita como:

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \dot{\mathbf{u}}_c(x, t)^T \dot{\mathbf{u}}_c(x, t) dV \quad (3.40)$$

Substituindo-se (3.23) em (3.40), obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}_c(t)^T \mathbf{m} \dot{\mathbf{U}}_c(t) \quad (3.41)$$

onde $\mathbf{m}$ é a matriz de massa consistente do elemento no sistema corrotacional, expressa por:

$$\mathbf{m} = \int_V \rho \mathbf{N}(x)^T \mathbf{N}(x) dV \quad (3.42)$$

3.5.1.1 Elemento de treliça

A matriz de massa para o elemento de treliça pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A \ell_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.43)$$

3.5.1.2 Elemento de barra

A matriz de massa para o elemento de barra pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{m} = \frac{\rho A \ell_0}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22\ell_0 & 0 & 54 & 13\ell_0 \\ 0 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 0 & -13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13\ell_0 & 0 & 156 & 22\ell_0 \\ 0 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 & 0 & 22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

3.5.2 Matriz de massa adicional

Com base na equação (3.10), calcula-se a energia cinética para o fluido, considerando-se somente a velocidade transversal, que já está no sistema corrotacional:

$$T = \frac{1}{2} \int_V c_a \rho_a \dot{\mathbf{u}}_t(x, t)^T \dot{\mathbf{u}}_t(x, t) dV \quad (3.45)$$

Substituindo-se a projeção de (3.23) no eixo transversal em (3.45), obtém-se:

$$T = \frac{1}{2} \dot{\mathbf{U}}_c(t)^T \mathbf{m}_a \dot{\mathbf{U}}_c(t) \quad (3.46)$$

onde $\mathbf{m}_a$ é a matriz de massa adicional consistente do elemento no sistema corrotacional, expressa por:

$$\mathbf{m}_a = \int_V c_a \rho_a \mathbf{N}_t(x)^T \mathbf{N}_t(x) dV \quad (3.47)$$

3.5.2.1 Elemento de treliça

A matriz de massa para o elemento de treliça pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{m}_a = \frac{c_a \rho_a A \ell_0}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.48)$$

3.5.2.2 Elemento de barra

A matriz de massa para o elemento de barra pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{m}_a = \frac{c_a \rho_a A \ell_0}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22\ell_0 & 0 & 54 & 13\ell_0 \\ 0 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 0 & -13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13\ell_0 & 0 & 156 & 22\ell_0 \\ 0 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 & 0 & 22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix} \quad (3.49)$$

3.5.3 Matriz de amortecimento viscoso

A matriz de amortecimento fluido viscoso será derivada da parcela da força de arrasto (3.17) e (3.20). Definindo-se os vetores velocidade do *riser* na direção transversal e axial como $\mathbf{v}_{cabo_a}$ e $\mathbf{v}_{cabo_t}$, respectivamente, as equações (3.17) e (3.20) podem ser reescritas como:

$$\mathbf{f}_{Da1} = -\frac{1}{2} \rho_a \pi D C_{Da} \left\| \mathbf{v}_{cabo_a} - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| \dot{\mathbf{u}}_a(t) \quad (3.50)$$

e

$$\mathbf{f}_{Dt1} = -\frac{1}{2} \rho_a D C_{Dt} \left\| \mathbf{v}_{cabo_t} - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| \dot{\mathbf{u}}_t(t) \quad (3.51)$$

onde:

$$\mathbf{v}_{cabo_a} = \mathbf{N}_a \dot{\mathbf{U}}_a \quad (3.52)$$

e

$$\mathbf{v}_{cabo_t} = \mathbf{N}_t \dot{\mathbf{U}}_t \quad (3.53)$$

onde:

$\mathbf{N}_a$ e $\mathbf{N}_t$ são as matrizes que contemplam as funções de forma para os graus de liberdade axiais e transversais, respectivamente;
 $\dot{\mathbf{U}}_a$ e $\dot{\mathbf{U}}_t$ são as velocidades nodais nos graus de liberdade do sistema corrotacional.

Escrevendo-se a equação da potência para um elemento finito:

$$P_a^e = \int_0^\ell \mathbf{f}_{Da}^T \dot{\mathbf{u}}_a(x, t) dx \quad (3.54)$$

A equação (3.54) pode ser reescrita na forma:

$$P_a^e = \int_0^\ell d_a \dot{\mathbf{u}}_a^T(x, t) \dot{\mathbf{u}}_a(x, t) dx \quad (3.55)$$

onde d_a é definido como:

$$d_a = \frac{1}{2} \rho_a \pi D C_{Da} \left\| \mathbf{v}_{cabo_a} - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| \quad (3.56)$$

e considerado constante dentro do elemento finito.

A equação (3.55) pode ser escrita na forma discreta como:

$$P_a^e = \dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{c}_a \dot{\mathbf{U}}_a \quad (3.57)$$

onde $\mathbf{c}_a$ é a matriz de amortecimento na direção transversal:

$$\mathbf{c}_a = \int_0^\ell d_a \mathbf{N}_a^T \mathbf{N}_a dx \quad (3.58)$$

$\mathbf{N}_a$ é a matriz das funções de forma dos graus de liberdade axiais no sistema corrotacional.

De forma análoga, a obtenção da matriz de amortecimento fluido viscoso na direção transversal fornece:

$$\mathbf{c}_t = \int_0^\ell d_t \mathbf{N}_t^T \mathbf{N}_t dx \quad (3.59)$$

onde $\mathbf{N}_t$ é a matriz das funções de forma dos graus de liberdade transversais no sistema corrotacional, e o termo d_t é definido como:

$$d_t = \frac{1}{2} \rho_a D C_{Dt} \left\| \mathbf{v}_{cabo_t} - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| \quad (3.60)$$

3.5.3.1 Elemento de treliça

A matriz de amortecimento fluido viscoso na direção axial para o elemento de treliça pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{c}_a = \frac{d_a \ell_0}{6} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.61)$$

A matriz de amortecimento fluido viscoso na direção transversal para o elemento de treliça pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{c}_t = \frac{d_t \ell_0}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad (3.62)$$

A matriz de amortecimento fluido viscoso para o elemento de treliça é a soma de (3.61) e (3.62):

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_a + \mathbf{c}_t \quad (3.63)$$

3.5.3.2 Elemento de barra

A matriz de amortecimento fluido viscoso na direção axial para o elemento de barra pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{c}_a = \frac{d_a \ell_0}{420} \begin{bmatrix} 140 & 0 & 0 & 70 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 70 & 0 & 0 & 140 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.64)$$

A matriz de amortecimento fluido viscoso na direção transversal para o elemento de barra pode ser escrita na forma explícita como:

$$\mathbf{c}_t = \frac{d_t \ell_0}{420} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 156 & -22\ell_0 & 0 & 54 & 13\ell_0 \\ 0 & -22\ell_0 & 4\ell_0^2 & 0 & -13\ell_0 & -3\ell_0^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 54 & -13\ell_0 & 0 & 156 & 22\ell_0 \\ 0 & 13\ell_0 & -3\ell_0^2 & 0 & 22\ell_0 & 4\ell_0^2 \end{bmatrix} \quad (3.65)$$

A matriz de amortecimento fluido viscoso para o elemento de barra é a soma de (3.64) e (3.65):

$$\mathbf{c} = \mathbf{c}_a + \mathbf{c}_t \quad (3.66)$$

3.5.4 Vetor de carregamento

As equações (3.9), (3.18) e (3.21) serão consideradas no modelo como vetor de carregamento. Estas forças podem ser reescritas como:

$$\mathbf{f}_{Da_carreg} = \frac{1}{2} \rho_a \pi D C_{Da} \left\| \mathbf{v}_{cabo_a} - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ca} + \mathbf{v}_{wa}(t)) \quad (3.67)$$

e

$$\begin{aligned} \mathbf{f}_{Dt_carreg} &= \frac{1}{2} \rho_a D C_{Dt} \left\| \mathbf{v}_{cabo_t} - \mathbf{v}_{ct} - \mathbf{v}_{wt}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ct} + \mathbf{v}_{wt}(t)) \\ &+ \rho_a \frac{\pi D^2}{4} (c_a + 1) \mathbf{a}_{wt}(t) \end{aligned} \quad (3.68)$$

Escrevendo-se a equação da potência para um elemento finito na direção axial:

$$P_a^e = \int_0^\ell \mathbf{f}_{Da_carreg}^T \dot{\mathbf{u}}_a(x, t) dx \quad (3.69)$$

A equação (3.69) pode ser reescrita como:

$$P_a^e = \int_0^\ell c_{a_carreg} \left\| \mathbf{v}_{cabo_a} - \mathbf{v}_{ca} - \mathbf{v}_{wa}(t) \right\| (\mathbf{v}_{ca} + \mathbf{v}_{wa}(t))^T \dot{\mathbf{u}}_a(x, t) dx \quad (3.70)$$

onde:

$$c_{a_carreg} = \frac{1}{2} \rho_a \pi D C_{Da} \quad (3.71)$$

A equação (3.69) pode ser reescrita em função dos deslocamentos nodais no sistema corrotacional como:

$$P_a^e = \dot{\mathbf{U}}_a^T \mathbf{p}_a(t) \quad (3.72)$$

onde $\mathbf{p}_a(t)$ é o vetor de carregamentos no sistema corrotacional:

$$\mathbf{p}_a(t) = \int_0^\ell c_{a_carreg} (\mathbf{N}_a)^T (\mathbf{N}_a \mathbf{V}_{a_carreg}(t)) dx \quad (3.73)$$

Onde:

$\mathbf{N}_a$ é a matriz das funções de forma dos graus de liberdade axiais;

$\mathbf{V}_{a_carreg}$ é o vetor que agrupa os termos de velocidade do vetor carregamento, na direção axial.

De forma análoga a direção axial, o vetor de carregamentos na direção transversal é expresso como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_t(t) = & \int_0^\ell c_{t_carreg} (\mathbf{N}_t)^T (\mathbf{N}_t \mathbf{V}_{t_carreg}(t)) dx \\ & + \int_0^\ell \frac{\rho_a \pi D^2}{4} (c_a + 1) (\mathbf{N}_t)^T (\mathbf{N}_t \mathbf{A}_{t_carreg}(t)) dx \end{aligned} \quad (3.74)$$

onde:

c_{t_carreg} é uma constante do carregamento no sentido transversal;

$\mathbf{N}_t$ é a matriz das funções de forma para os graus de liberdade transversais;

$\mathbf{V}_{t_carreg}$ é o vetor que agrupa os termos de velocidade do vetor carregamento, na direção transversal.

$\mathbf{A}_{t_carreg}(t)$ é o vetor que agrupa as acelerações provenientes da passagem de ondas marítimas.

A constante c_{t_carreg} é definida como:

$$c_{t_carreg} = \frac{1}{2} \rho_a D C_{Dt} \quad (3.75)$$

O vetor de carregamentos completo é a soma da parcela axial e transversal:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_a(t) + \mathbf{p}_t(t) \quad (3.76)$$

3.6 Métodos de integração

A equação de movimento não linear de um sistema pode ser escrita na forma:

$$\mathbf{M}(\mathbf{U})\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}(\mathbf{U})\mathbf{U} = \mathbf{P}(\mathbf{U}, t) \quad (3.77)$$

onde:

$\mathbf{M}(\mathbf{U})$ é a matriz de massa do modelo no sistema global;

$\mathbf{C}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ é a matriz de amortecimento do modelo no sistema global;

$\mathbf{K}(\mathbf{U})$ é a matriz de rigidez do modelo no sistema global;

$\mathbf{P}(\mathbf{U}, t)$ é o vetor de forças externas do modelo no sistema global;

$\mathbf{U}$ é o vetor deslocamento nas direções dos graus de liberdade do modelo no sistema global;

$\dot{\mathbf{U}}$ e $\ddot{\mathbf{U}}$ representam, respectivamente, a velocidade e a aceleração nas direções dos graus de liberdade do modelo no sistema global.

A solução numérica da equação de movimento (3.77) pode ser determinada no domínio do tempo utilizando-se procedimentos que aproximam a resposta temporal utilizando-se de técnicas de diferenças finitas. Neste trabalho, devido às não linearidades da equação de movimento do sistema, decorrentes da interação fluido-estrutura, contato com o leito marinho e também das próprias não linearidades geométricas da estrutura, optou-se pela utilização de métodos de integração explícitos no domínio do tempo.

3.7 Domínio do tempo

O objetivo dos métodos de integração direta no domínio do tempo é a obtenção da resposta ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ para cada incremento de tempo Δt , a partir do conhecimento dos deslocamentos ${}^t\mathbf{U}$, velocidades ${}^t\dot{\mathbf{U}}$ e acelerações ${}^t\ddot{\mathbf{U}}$ no instante t , respeitando a equação de movimento no instante $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{M}(\mathbf{U}){}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{C}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}){}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{K}(\mathbf{U}){}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{P}(\mathbf{U}, t) \quad (3.78)$$

3.7.1 Métodos de integração

Os métodos de integração numérica das equações de movimento no tempo é um assunto bastante conhecido e discutido na literatura. Este trabalho não está preocupado com a explicação de cada um dos métodos, mas na utilização dos mesmos. Estes métodos de integração podem ser encontrados em Bathe [5] e Crisfield [8].

3.7.1.1 Método de Euler explícito

Neste método de integração a velocidade em um instante $t + \Delta t$ é definida pela relação:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t \quad (3.79)$$

Assume-se também que os deslocamentos sejam calculados pela relação:

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t \quad (3.80)$$

3.7.1.2 Método da diferença central

No método da diferença central as derivadas do vetor deslocamento ${}^t\mathbf{U}$ são definidas por:

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{2\Delta t} \left({}^{t+\Delta t}\mathbf{U} - {}^{t-\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (3.81)$$

e

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2} \left({}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} \right) \quad (3.82)$$

4 Capítulo 4

Este capítulo descreve a ferramenta computacional *RiserSys*, que se encontra em estágio de desenvolvimento. Inicialmente, apresenta-se a justificativa para a sua elaboração, o objetivo que se propõe a alcançar, suas capacidades, a saída de resultados e os procedimentos para a implementação e modelagem das etapas de análise.

4.1 Justificativa

O estudo de cabos submersos é uma área da engenharia *offshore* muito específica. Recentemente, esta área vem recebendo investimentos de empresas públicas e privadas, que têm o objetivo de estimular pesquisas para o aprimoramento e o desenvolvimento de novas tecnologias que possam viabilizar a exploração *offshore* de hidrocarbonetos, em condições cada vez mais desafiadoras, em decorrência de os reservatórios se situarem em águas cada vez mais profundas e de estarem os *risers* submetidos a carregamentos hidrodinâmicos de modelagem cada vez mais complexa.

O projeto dos cabos submersos, mais especificamente os *risers*, é um processo complexo e de grande responsabilidade. Os projetos devem considerar as ações e os cenários aos quais estas estruturas podem estar submetidas durante a sua vida útil, viabilizando o projeto economicamente e garantindo a segurança necessária. Elaborar um projeto que considere todos estes quesitos em cenários complexos, nos quais as não linearidades possam afetar de forma significativa o desempenho do sistema, inclusive perante a possibilidade de ocorrência de mais de uma solução, no caso de ocorrência de fenômenos de instabilidade estática ou dinâmica, não é uma tarefa simples. A adequada modelagem desses sistemas levando-se em consideração, concomitantemente, ações de natureza distintas, torna-se essencial para um projeto seguro e mais econômico. Para tanto, além do desenvolvimento de modelos que considerem estes acoplamentos, são desenvolvidos programas que possibilitem sua análise e a obtenção de resultados numéricos significativos como resposta. A maior parte dos programas comerciais de análise estrutural disponíveis no mercado e que se utilizam do método dos elementos finitos para a modelagem do

sistema, tem por objetivo resolver uma quantidade e/ou diversidade ampla de problemas, o que normalmente os torna muito generalistas. Dessa forma, modelar problemas típicos de *risers* nestes programas pode se tornar uma tarefa complicada, quando não impossível.

Outro problema que se encontra com muita frequência em programas comerciais generalistas é a falta de informação sobre as formulações dos elementos finitos que estão implementados. Isso torna o programa uma “caixa preta”, em que o usuário deve confiar que a teoria estrutural utilizada é, de fato, adequada para a resolução do problema, limitando-se somente à análise de resultados.

Alguns programas computacionais, por outro lado, foram desenvolvidos especificamente para a modelagem de estruturas *offshore*, mais especificamente para cabos submersos. Um destes programas é o *Orcaflex*, que foi concebido para auxiliar os profissionais desta área a realizarem as modelagens necessárias para os diversos tipos de problemas com estas estruturas, e em diversas configurações. No entanto, recai-se novamente no problema de não se conhecer por completo a formulação implementada no programa e não se saber se, para o problema que se pretende resolver, a formulação utilizada é a mais adequada.

4.2 Objetivo

Por questões de prazo para a conclusão e depósito desta dissertação, seu escopo foi limitado ao desenvolvimento da formulação que dá suporte à ferramenta computacional *RiserSys*, deixando de lado a desejável realização de um conjunto representativo de estudos de casos que evidenciem seu potencial para detecção e análise de fenômenos complexos de dinâmica não linear. Evidentemente, ao utilizar as formulações desenvolvidas no Capítulo 2 e no Capítulo 3, na versão atual o *RiserSys* restringe-se à modelagem bidimensional de *risers*, mas aplica tanto à configuração vertical (reta) como em catenária.

4.3 Capacidades

Para atender aos objetivos aqui explicitados, a ferramenta *RiserSys* deve ser capaz de caracterizar a configuração deformada de equilíbrio de *risers* verticais e em catenária livre, ainda que a simulação de seu “lançamento” não se processe da mesma forma que na realidade. Ou seja, o procedimento para se chegar a uma especificada configuração deformada de equilíbrio, especialmente no caso dos *risers* em catenária, parte de uma geometria simples para o cabo sem tensões e vai introduzindo em sequência conveniente os carregamentos e aplicando deslocamentos a seus vínculos até que a configuração deformada de equilíbrio seja atingida, objetivando sempre propiciar à ferramenta computacional melhores condições para convergir para a solução numérica. Esta fase é simulada por meio do modelo estático proposto no Capítulo 2, que considera o carregamento de peso próprio da estrutura, a força de protensão inicial e a interação fluido estrutura por meio dos carregamentos hidrostáticos e hidrodinâmicos (carregamento quase-estático). A ferramenta também deve ser capaz de impor a condição de contorno de contato unilateral à estrutura nos casos de *risers* em catenária livre. O objetivo nesta etapa é a determinação da configuração deformada de equilíbrio e o estado de tensão associado a esta configuração. Uma vez determinados os esforços internos após o processo de lançamento do *riser*, parte-se para o processamento dinâmico propriamente dito. Atualizadas as matrizes elementais (dependentes dos esforços internos), o *RiserSys* deve iniciar o processo de integração numérica no domínio do tempo, utilizando-se o modelo dinâmico proposto no Capítulo 3. Neste modelo, a ferramenta computacional deve ser capaz de impor deslocamentos no *hang-off*, que são decorrentes da movimentação da plataforma devido à passagem de ondas marítimas e aplicar carregamentos hidrostáticos e hidrodinâmicos, considerados pela força de inércia e de arrasto viscoso, modelados pela fórmula de Morison[21]. Além dos carregamentos, o *RiserSys* deve impor a condição de contato unilateral a cada instante de processamento nos casos de *riser* em catenária.

4.4 Saída de resultados

A saída de resultados do *RiserSys* é dividida em duas partes. A primeira é referente à simulação do processo de “lançamento” do *riser*, por meio do modelo estático. Os dados de saída nesta etapa são as coordenadas dos nós da estrutura e os esforços solicitantes internos, que dependem do tipo de elemento utilizado.

Na segunda etapa da modelagem, análise dinâmica, os dados de saída são dependentes do tempo. Para cada instante solicitado, no arquivo de saída são gerados os vetores com os deslocamentos, velocidades e esforços solicitantes nodais.

4.5 Implementação computacional

Este item descreve a implementação computacional utilizada na ferramenta *RiserSys*. A primeira etapa da simulação, modelagem estática do processo de lançamento do *riser*, necessita de um método iterativo para a resolução do sistema de equações de equilíbrio. O método utilizado é o de *Newton-Raphson*, que é amplamente utilizado na literatura específica sobre o método dos elementos finitos em análise não linear. A descrição mais detalhada do método pode ser encontrada em Bathe [5] e Wriggers [20]. A implementação do método na ferramenta computacional, levando-se em consideração o contato unilateral por meio do método das penalidades, pode ser encontrada em Wriggers [20].

A segunda etapa de processamento é a simulação da fase de operação do *riser*, submetido a ações dinâmicas. Esta etapa é simulada pelo modelo dinâmico proposto no Capítulo 3, e foi implementado utilizando-se o método de integração numérica de Euler explícito, pois os métodos implícitos usuais perdem a vantagem da estabilidade numérica incondicional que detinham na análise linear, quando se vai para a análise não linear. A equação de movimento não linear do sistema pode ser escrita como:

$${}^t\mathbf{M}(\mathbf{U}){}^t\ddot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{C}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}){}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\mathbf{K}(\mathbf{U}){}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{P}(\mathbf{U}, t) \quad (4.1)$$

ou

$${}^t\mathbf{M}(\mathbf{U}){}^t\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\mathbf{P}(\mathbf{U}, t) - {}^t\mathbf{F}_d(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}}) - {}^t\mathbf{F}_e(\mathbf{U}) \quad (4.2)$$

onde:

${}^t\mathbf{P}(\mathbf{U}, t)$ é o vetor de forças externas no instante t ;

${}^t\mathbf{Fd}(\mathbf{U})$ é o vetor de forças de amortecimento no instante t ;

${}^t\mathbf{Fe}(\mathbf{U})$ é o vetor de forças elásticas da estrutura no instante t .

O procedimento para a integração da equação (4.2) utilizando-se o método de Euler explícito é descrito:

Para cada passo de tempo Δt :

- Montar a matriz de massa ${}^t\mathbf{M}(\mathbf{U})$ e os vetores de forças externas ${}^t\mathbf{P}(\mathbf{U}, t)$, força de amortecimento ${}^t\mathbf{Fd}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}})$ e força elástica ${}^t\mathbf{Fe}(\mathbf{U})$, para o instante t ;
- Calcular o carregamento efetivo no instante t :

$${}^t\hat{\mathbf{P}}(\mathbf{U}, t) = {}^t\mathbf{P}(\mathbf{U}, t) - {}^t\mathbf{Fe}(\mathbf{U}) - {}^t\mathbf{Fd}(\mathbf{U}, \dot{\mathbf{U}});$$
- Triangularizar a matriz de massa com a decomposição $\mathbf{LDL}^T$;
- Calcular as acelerações no instante t : $\mathbf{LDL}^T {}^t\ddot{\mathbf{U}} = {}^t\hat{\mathbf{P}}$;
- Inicializar os vetores de velocidade $\dot{\mathbf{U}}$ e aceleração $\ddot{\mathbf{U}}$ no sistema global de coordenadas;
- Calcular a velocidade e o deslocamento no instante $t + \Delta t$:

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^t\ddot{\mathbf{U}}\Delta t$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t$$

4.6 Estratégia de solução do processamento estático

A obtenção da configuração deformada de equilíbrio exige a elaboração de uma estratégia de solução. A estratégia que será utilizada depende do tipo de configuração do *riser*: reto ou em catenária. As estratégias adotadas são as seguintes:

4.6.1 *Riser* reto

A estratégia de solução é dividida em três etapas:

- 1) Modelar a estrutura para que em sua configuração de referência, ela esteja reta e na direção vertical.
- 2) Aplicar um recalque equivalente à força de protensão inicial, esticando o cabo. A estrutura neste momento ganha rigidez geométrica devido à força normal de tração.
- 3) Aplicar gradualmente o carregamento de peso próprio da estrutura submersa e o carregamento quase-estático da força de arrasto.

4.6.2 *Riser* em catenária

A estratégia de solução para o caso da modelagem dos *risers* em catenária pode variar, de acordo com a dificuldade de se resolver determinados problemas. A primeira estratégia é descrita:

- 1) Modelar a estrutura para que em sua configuração de referência, ela esteja reta e na direção horizontal, deitada no leito do mar.
- 2) Aplicar um recalque de apoio na extremidade oposta à âncora, na direção horizontal, e no sentido de protender a estrutura. Este recalque causará o aparecimento de uma força normal de tração, que é importante para a estrutura adquirir rigidez geométrica, facilitando a obtenção da convergência no método iterativo.
- 3) Aplicar de forma gradual os recalques de apoio necessários para que a extremidade oposta à âncora possa alcançar a coordenada da localização da plataforma (*hang-off*). Aplicar concomitantemente o carregamento de peso próprio submerso. Nesta etapa, o contato ocorre simultaneamente à aplicação dos carregamentos, o que dificulta o processo de convergência.
- 4) Aplicar de forma gradual o carregamento de força de arrasto, obtendo-se a configuração deformada de equilíbrio.

A segunda estratégia de solução também é composta de quatro etapas:

- 1) Modelar a estrutura para que em sua configuração de referência, ela esteja reta e na direção horizontal, deitada no leito do mar.
Aplicar um recalque de apoio na extremidade oposta à âncora, nas direções vertical e horizontal, de forma a protender a estrutura. Este recalque causará o aparecimento de uma força normal de tração, que é importante para a estrutura adquirir rigidez geométrica. O deslocamento vertical facilitará o processo de convergência, pois somente a *touchdown zone* entrará em contato e de forma gradual.
- 2) Aplicar gradualmente os recalques de apoio na direção horizontal, de forma a diminuir a força de tração, e o carregamento de peso próprio submerso da estrutura. Nesta etapa, um trecho do *riser* tocará o leito marinho, e podem surgir dificuldades de convergência.
- 3) Aplicar gradualmente a força de arrasto, obtendo-se a configuração deformada de equilíbrio.

5 Capítulo 5

5.1 Considerações finais e conclusão

O objetivo deste trabalho foi o de desenvolver uma formulação geral e suficientemente robusta, tirando-se partido de teorias estruturais simples de pequenas deformações e bidimensionais, para modelar o problema da dinâmica não linear de *risers* verticais (reto) e em catenária livre no plano. Para a correta modelagem da estrutura, o processo de “lançamento” do *riser* foi considerado como uma etapa preliminar da análise dinâmica propriamente dita. No Capítulo 2, esta etapa foi discutida e o modelo estático proposto. O modelo considerou os carregamentos de peso próprio, força inicial de protensão e carregamentos de natureza hidrostática e hidrodinâmica. A interação fluido-estrutura foi considerada no desenvolvimento dos vetores de carregamento, como a pressão estática do fluido e do carregamento quase-estático da força de arrasto, modelada pela força de Morison [21]. Ressalta-se que, neste modelo, a velocidade da correnteza marítima foi considerada constante, pois a escala de tempo de variação da velocidade é da ordem de horas, enquanto que a escala de tempo de variação da configuração estrutural está associada ao período das ondas, ou seja, da ordem de segundos. O Capítulo 2 também abordou a formulação dos elementos finitos bidimensionais de treliça e barra de Bernoulli-Euler. Todo o desenvolvimento das formulações foi baseado em duas teorias estruturais, ambas para pequenas deformações. No entanto, com o auxílio do sistema corrotacional, parte do deslocamento de corpo rígido foi separado do deslocamento total, permanecendo válidas as hipóteses das teorias de pequenas deformações. Isso permitiu a utilização destas teorias estruturais, que são mais simples que teorias estruturais para grandes deformações, para a simulação de problemas de *risers*, que contemplam grandes deslocamentos. O contato unilateral também foi considerado no modelo estático proposto. Para a imposição da condição de contorno do contato, utilizou-se o método das penalidades.

A segunda etapa na modelagem dos *risers* é a fase de operação do mesmo. Nesta fase, a estrutura está sujeita a carregamentos variáveis com o tempo. O Capítulo 3 descreveu o modelo dinâmico proposto. Neste modelo foram considerados os

carregamentos de peso próprio da estrutura, forças de natureza hidrodinâmica e a interação solo-estrutura.

No Capítulo 4, o projeto da ferramenta computacional *RiserSys* foi descrito sumariamente.

Note-se que mesmo o elemento de treliça, apenas, já permitirá a modelagem do comportamento dos *risers*, mesmo nas regiões submetidas a flexão, isto é, ao longo de todo o comprimento do *riser* reto ou nas regiões de grande variação de curvatura dos *risers* em catenária, como junto ao *hang-off* e ao *touchdown point*. De fato, com o uso de “vigas treliçadas” poder-se-á conseguir uma primeira descrição do comportamento flexional da estrutura. Evidentemente, a modelagem com elementos de barras fletidas é a que melhor se adéqua a esta situação, mas a própria intercomparação de resultados entre ambas as abordagens poderá ser de grande importância para a validação da ferramenta computacional.

A ferramenta *RiserSys* encontra-se, na data de depósito da dissertação, em fase final de desenvolvimento e testes.

5.2 Trabalhos futuros

Este trabalho esteve focado no desenvolvimento da formulação da análise estática e dinâmica, com vistas à modelagem bidimensional de *risers* retos e em catenária, bem como no projeto e implementação da ferramenta computacional *RiserSys*. Em trabalhos que virão imediatamente na sequência, será concluída sua implementação, serão realizados testes de validação e, finalmente, processados estudos de caso que demonstrem sua capacidade de detectar fenômenos complexos de dinâmica não linear, tais como a compressão dinâmica e a instabilidade paramétrica.

Entre estes estudos de casos podem ser sugeridos aqueles que identifiquem, em *risers* retos, as características de seus modos não lineares de vibração, contaminação de modos lineares por superharmônicos, ondas propagantes ao longo de seu comprimento, etc. Nos *risers* em catenária, com contato unilateral no leito do mar, devem ser considerados pelo menos três cenários distintos. O primeiro deles deve reproduzir adequadamente uma situação usual de operação, em que os parâmetros utilizados para as análises não são extremos. O segundo cenário seria

uma situação onde o fenômeno da compressão dinâmica predominaria. Já o terceiro cenário contemplaria uma situação em que o sistema apresentaria instabilidade paramétrica.

Para a verificação dos resultados obtidos, serão utilizados programas comerciais específicos da área *offshore* como, por exemplo, o *Orcaflex*, bem como programas generalistas de elementos finitos, tais como o Abaqus.

Como trabalhos futuros, em nível de doutorado, a inclusão da interação fluido-estrutura, em condições de ocorrência do fenômeno de VIV, e a generalização das formulações para a análise tridimensional, bem como sua implementação no *RiserSys* deverão ser consideradas.

6 Referências Bibliográficas

- [1] MARTINS, C. A. Uma Ferramenta Expedita para Estudo de Viabilidade de Risers Rígidos em Catenária. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2000. (Tese de Livre Docência).
- [2] TAKAFUJI, F.C.M., Dinâmica Tridimensional de Risers. São Paulo: Universidade de São Paulo, 2010. (Tese de Doutorado).
- [3] GAY NETO, A., Análise dinâmica linear e não linear de cabos submersos. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2012 (Tese de doutorado em andamento).
- [4] PESCE, C. P. Mecânica de cabos e tubos submersos lançados em catenária. São Paulo: Universidade de São Paulo, 1997. (Tese de Livre Docência).
- [5] BATHE, K. J. Finite Element Procedures. New Jersey: Prentice-Hall Inc, 1996.
- [6] ZIENKIEWICZ, O.C. e TAYLOR R.L., The finite element method. Vol. II. 6ª edição, Elsevier, 2005.
- [7] CRISFIELD, M. A. Non-linear finite element analysis of solids and structures; Volume 1. Wiley, 1991.
- [8] CRISFIELD, M. A. Non-linear finite element analysis of solids and structures; Volume 2. Wiley, 1997.
- [9] BRASIL, R.M.L.R.F., MAZZILLI, C.E.N., A general formulation of non-linear dynamics applied to accessing the static loading effect upon the dynamic response of planar frames, Applied Mechanics Review, vol 46 (11), pp.110-117, 1993.

- [10] MAZZILLI, C.E.N., BARACHO NETO, O.G.P., Matrix formulation of non-linear dynamics. Em: VII Pan-American Congress of Applied Mechanics, 2002, Temuco. Applied Mechanics in the Americas. Vol. 9. Pp. 181-184.
- [11] CRISFIELD, M. A. A consistent co-rotational formulation for non-linear, three-dimensional, beam-elements. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 81, p. 131–150, 1990.
- [12] FELIPPA, C.A., e HAUGEN, B., Unified Formulation of Small-Strain Corotational Finite Elements: I. Theory. College of Engineering – University of Colorado, 2005.
- [13] BATTINI, J.M., Co-rotational beam elements in instability problems, Ph.D Thesis, Royal Institute of Technology – Department of Mechanics, Stockholm / Sweeden, 2002.
- [14] BATTINI, J.M., PACOSTE, C., Co-rotational beam elements with warping effects in instability problems. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 191, pp. 1755-1789, 2002.
- [15] SIMO, J. C. and VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions – the plane case: parts I e II, Journal of Applied Mechanics, Vol. 53 Nº. 4, 1986, pp. 849-63.
- [16] SIMO, J. C. On the dynamics in space of rods undergoing large motions – a geometrically exact approach, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, Vol. 66 Nº. 2, 1988, pp.125-61.
- [17] STANDER, N. e STEIN, E., An energy-conserving planar finite beam element for dynamics of flexible mechanisms. Engineering Computations, Vol. 13, Nº 6, 1996, pp. 60-85.
- [18] NEWMARK, N.M., A method of computation for structural dynamics. ASCE Journal of the Engineering Mechanics Division, Vol. 85 Nº. EM3, 1959, pp. 67-94.

- [19] BHATTI, M.A., Advanced Topics in Finite Element Analysis of Structures: With Mathematica and MATLAB Computations. Wiley, 2005.
- [20] WRIGGERS, P., Computational Contact Mechanics. England: John Wiley and sons Ltd, The Atrium, Southern Gate, Chichester, West Sussex, 2002. 440 p.
- [21] MORISON, J.R., O'BRIAN, M.P., JOHNSON, J.W., SCHAAF, S.A., The force exerted by surface waves on piles. Petroleum Transactions, AIME, Vol. 189, p. 149-154, 1950.
- [22] YAW, L.L., 2D corotational beam formulation. Walla Walla University, 2009.
- [23] BAHTUI, A., BAHAI, H., ALFANO, G., A finite element analysis for unbonded flexible risers under torsion. Journal of Offshore Mechanics and Arctic Engineering 2008.
- [24] LIGHTHILL, J. Waves in Fluids. Cambridge: Cambridge University Press, 1978. 504p.