HELOISA DE CASTRO BERALDO

**Contribuições à análise dinâmica de torres de
turbinas eólicas**

São Paulo

2019

HELOISA DE CASTRO BERALDO

Contribuições à análise dinâmica de torres de turbinas eólicas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de
Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Guilherme Rosa
Franzini

São Paulo

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Beraldo, Heloisa de Castro

Contribuições à análise dinâmica de torres de turbinas eólicas / H. C. Beraldo
-- versão corr. -- São Paulo, 2019.

132 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Torre de turbina eólica 2.Análise não linear 3.Excitação de suporte
4.Modelo de ordem reduzida I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Dedico este trabalho ao meu esposo e ao nosso pequeno bebê.

Agradecimentos

Agradeço em primeiro lugar a Deus e a Nossa Senhora, por terem me guiado e iluminado durante todos esses anos, principalmente nos momentos de maior dificuldade.

À Escola Politécnica e ao Laboratório de Mecânica *Offshore* por disponibilizarem ferramentas necessárias para o desenvolvimento deste trabalho.

Ao apoio da *Office of Naval Research Global* pelo projeto N62909-16-1-2066, o qual tem apoiado diversos estudos em turbinas eólicas na Escola Politécnica da USP.

Ao orientador Prof. Dr. Guilherme Rosa Franzini pela disponibilidade, competência e apoio com que conduziu este processo.

Aos Professores Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli e Dr. Alexandre Nicolaos Simos, pelas valiosas contribuições no Exame de Qualificação.

Ao Prof. Dr. Alfredo Gay Neto pelo empenho dedicado no processo de simulação dos modelos no *software* GIRAFFE.

Ao meu Pai, Sergio, por ser meu exemplo de força, calma e equilíbrio.

Ao meu esposo, Diovane, que sempre foi meu maior incentivador, que me apoiou durante todo o trabalho, com muita paciência e carinho.

À minha sogra e ao meu sogro, Leonor e Sérgio, que sempre estiveram dispostos a me ajudar e a dar uma palavra de apoio.

Aos meus amigos Tatiana Ueno, Guilherme Vernizzi, Giovanni Amaral, Prof. Dr. Renato Orsino, Igor Mancilla e Daniela Kawaguti que sempre foram muito solícitos, e que direta ou indiretamente contribuíram no desenvolvimento desta dissertação.

O presente trabalho foi realizado com apoio da Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior - Brasil (CAPES) - Código de Financiamento 001.

Resumo

BERALDO, H.C. **Contribuições à análise dinâmica de torres de turbinas eólicas**. 2019. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

A geração de energia por meio de turbinas eólicas tem ganhado mais espaço no Brasil desde 2002 como alternativa na diversificação da matriz energética. A energia eólica é uma fonte renovável e de menor impacto ambiental, se comparada com a construção de usinas hidroelétricas e termoelétricas. No entanto, o posicionamento de parques eólicos depende, principalmente, da incidência constante de ventos, o que limita a localização de tais estruturas. Dessa forma, no intuito de aumentar a geração de energia elétrica, é possível posicionar torres eólicas sobre plataformas flutuantes, onde algumas condições de operação podem ser mais favoráveis do que aquelas encontradas em terra. Tanto estruturas *onshore* como *offshore* podem ser solicitadas por movimentos oscilatórios em sua base, devido às ações sísmicas e hidrodinâmicas, respectivamente, levando ao aparecimento de um rico comportamento dinâmico. Portanto, faz-se necessário avaliar a resposta dinâmica de uma torre de turbina eólica por meio de simulações numéricas. Esse é o cenário no qual esta dissertação é enquadrada. Inicialmente realizam-se estudos sobre a influência do momento de inércia à rotação da massa na extremidade livre (conjunto rotor e a nacele) e a rotação da torre e da plataforma flutuante na frequência natural do sistema. Para tais análises, elaboram-se modelos de ordem reduzida (MOR) simplificados e também aqueles baseados no Método dos Elementos Finitos. Após os estudos, desenvolve-se um MOR não linear descritivo de uma torre, com dois graus de liberdade, a saber, os deslocamentos axial e lateral. Obtém-se a formulação analítica para uma torre de turbina eólica genérica, com carregamentos na extremidade livre e excitação forçada e paramétrica na base. As equações de movimento são particularizadas para duas configurações de torre e consideram-se diferentes excitações de suporte na base. Obtém-se simulações numéricas do modelo e verifica-se a possibilidade de ressonância clássica e paramétrica em um cenário *offshore*.

Palavras-chave: Torres de turbinas eólicas, Modelo de ordem reduzida, Cenário *offshore* e *onshore*, Excitação de suporte, Análise não linear.

Abstract

BERALDO, H.C. **Contributions to the dynamic analysis of a wind turbine towers.** 2019. 128 p. Dissertação (Mestrado em Engenharia de Estruturas) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2019.

Since 2002, it can be noticed a marked increase in the use of wind energy in Brazil. Such increase may be explained by the fact that wind energy can be an alternative source in the diversification of the energy matrix, besides being a renewable, clean and with less environmental impact if compared to the construction of hydroelectric and thermoelectric plants. However, the position of wind farm depends, mainly, on constant wind, which creates constraints regarding the location of these structures. So, in order to increase the energy generation, it is possible to deploy wind towers on offshore platforms, where the conditions for energy generation may be better than those found onshore. The both onshore and offshore structures can be subjected to oscillatory motions at the base of the tower, due to the seismic and hydrodynamics loads, respectively. These actions can lead to a rich dynamic behavior. Thus, it is necessary to evaluate the dynamic behavior of a wind turbine tower by means of numerical simulations. Firstly, studies related to rotation moment of inertia of the mass at the free end (set rotor and nacelle) and the rotation of the floating platform and the tower are evaluated, according to the natural frequency. Therefore, simplified reduced order model (ROM) and finite element model are designed. After these studies, a nonlinear ROM of the tower, with two degrees of freedom, namely, axial and lateral displacements, is made. The generic analytical formulation is obtained, excited by a load at its top and a forced and parametric base excitation. The equations of motion are particularized for two tower configurations, under different support excitation at its base. The numerical simulations of the model is obtained and the possibility of classical and parametric resonance in an offshore scenario is verified.

Keywords: Wind turbine towers, Reduced order-model, Offshore and Onshore scenario, Support excitation, Non-linear analysis.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Capacidade mundial instalada acumulada de energia eólica.	30
Figura 2 – Capacidade instalada de energia eólica <i>offshore</i>	31
Figura 3 – Fontes de energias exploradas no Brasil em 2019.	32
Figura 4 – À esquerda TEEH e à direita TEEV	34
Figura 5 – Torres de turbinas eólicas <i>offshore</i>	35
Figura 6 – Componentes de uma torre de turbina eólica.	35
Figura 7 – Torres de turbinas eólicas <i>offshore</i>	37
Figura 8 – Modelo elementar de 1gl.	39
Figura 9 – Coeficiente adimensional θ	40
Figura 10 – Pêndulo com ponto de suspensão oscilante.	45
Figura 11 – Diagrama de estabilidade da equação de Mathieu: regiões estáveis e instáveis (hachurada).	46
Figura 12 – Torre de turbina eólica sobre plataforma semissubmersível: OC4-Fase II.	52
Figura 13 – Torre de turbina eólica sobre plataforma semissubmersível SNL13,2MW.	56
Figura 14 – Modelos no GIRAFFE (a) Modelo 1: seção transversal escalonada; (b) Modelo 2: Seção transversal equivalente.	62
Figura 15 – Modelo de torre com massa na extremidade livre.	67
Figura 16 – Diagramas de momento fletor real (a) e virtual (b).	69
Figura 17 – Modelo escalonado da torre: GIRAFFE.	71
Figura 18 – (a) Modelo ilustrativo da torre OC4-Fase II e (b) 1o modo de vibrar à flexão.	71
Figura 19 – Modelo de torre com massa pontual sobre plataforma semissubmersível.	75
Figura 20 – Modelo de torre com massa pontual sobre plataforma semissubmersível - GIRAFFE.	79
Figura 21 – Frequência natural da plataforma semissubmersível: OC4- Fase II.	84
Figura 22 – Modelo de torre com massa pontual sob excitação de suporte na base.	87
Figura 23 – Modelo de viga Bernoulli-Euler	90
Figura 24 – Momento fletor atuante no conjunto nacele-rotor	91
Figura 25 – Função de interpolação de uma barra engastada-livre: (a) Vibração lateral do 1ºModo; (b) Vibração axial do 1ºModo.	97
Figura 26 – Mapa de amplitude pós crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ ; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ	102
Figura 27 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0128$; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0128$	103

Figura 28 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0386$; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0386$	104
Figura 29 – Série temporal do modelo não linear para $\eta=1,224$ ($\beta = 0,455$ Hz, $T=2,20$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$	105
Figura 30 – Série temporal do modelo não linear para $\eta=0,268$ ($\beta = 0,10$ Hz, $T=10$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$	105
Figura 31 – Série temporal do modelo linear para $\eta=1,224$ ($\beta = 0,455$ Hz, $T=2,20$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$	106
Figura 32 – Série temporal do modelo linear para $\eta=0,268$ ($\beta = 0,10$ Hz, $T=10$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$	106
Figura 33 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ ; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ	108
Figura 34 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0261$; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0261$	109
Figura 35 – Amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,01$ rad; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,01$ rad.	111
Figura 36 – Amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,02$ rad; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,02$ rad.	111
Figura 37 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>surge</i> , Nó 4 do Modelo 1.	125
Figura 38 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>pitch</i> , Nó 4 do Modelo 1.	125
Figura 39 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>heave</i> , Nó 4 do Modelo 2.	126
Figura 40 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>pitch</i> , Nó 4 do Modelo 2.	126
Figura 41 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>surge</i> , Nó 86 do Modelo 1.	127
Figura 42 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>pitch</i> , Nó 86 do Modelo 1.	127
Figura 43 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>heave</i> , Nó 86 do Modelo 2.	128
Figura 44 – (a) Série temporal, (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de <i>pitch</i> , Nó 86 do Modelo 2.	128
Figura 45 – Função Delta de Dirac.	129

Figura 46 – Configurações deformada e indeformada de um sólido.	131
Figura 47 – Modelo de viga Bernoulli-Euler.	132

Lista de tabelas

Tabela 1 – Oferta interna de energia elétrica no Brasil e Mundo (%).	32
Tabela 2 – Propriedades da torre de turbina eólica OC4-Fase II.	52
Tabela 3 – Propriedades da massa na extremidade livre (J_m): OC4- Fase II	53
Tabela 4 – Propriedades da plataforma semissubmersível: OC4- Fase II.	54
Tabela 5 – Massa adicional e período natural da plataforma semissubmersível: OC4-Fase II.	54
Tabela 6 – Informações gerais da estrutura completa: torre e plataforma: OC4-Fase II.	54
Tabela 7 – Propriedades geométricas escalonadas da torre OC4-Fase II.	55
Tabela 8 – Propriedades da torre de turbina eólica SNL 13,2MW.	57
Tabela 9 – Propriedades geométricas escalonadas da torre SNL 13,2MW.	57
Tabela 10 – Propriedades equivalentes à torre OC4-Fase II, sem adição de massa na extremidade livre.	61
Tabela 11 – Propriedades da torre escalonada: OC4-Fase II.	61
Tabela 12 – Frequência natural da torre OC4-Fase II, sem massa pontual - GIRAFFE.	62
Tabela 13 – Frequência natural da torre OC4-Fase II, com massa pontual - GIRAFFE.	63
Tabela 14 – Propriedades equivalentes à torre SNL 13,2MW, sem adição de massa na extremidade livre.	64
Tabela 15 – Propriedades da torre escalonada: SNL 13,2MW.	64
Tabela 16 – Frequência natural da torre SNL 13,2MW, sem massa pontual - GIRAFFE.	65
Tabela 17 – Frequência natural da torre SNL 13,2MW, com massa pontual - GIRAFFE.	65
Tabela 18 – Momento de inércia à rotação da massa na extremidade livre J_m .	72
Tabela 19 – Resumo das propriedades da OC4-Fase II.	72
Tabela 20 – Frequência e período natural dos modelos.	73
Tabela 21 – Diferenças entre as frequências naturais em relação ao modelo 2.	73
Tabela 22 – Constantes de rigidez das molas.	80
Tabela 23 – Frequências e períodos naturais da plataforma semissubmersível.	81
Tabela 24 – Modos naturais da plataforma semissubmersível.	81
Tabela 25 – Frequências e períodos naturais do sistema.	81
Tabela 26 – Modos naturais normalizados do sistema.	81
Tabela 27 – Frequências naturais calculadas a partir da análise espectral da resposta do nó 4.	82
Tabela 28 – Frequências naturais calculadas a partir da análise espectral da resposta do nó 86.	82
Tabela 29 – Frequência natural do MOR, da NREL e CGC.	84
Tabela 30 – Período natural do MOR, da NREL e CGC.	84

Tabela 31 – Coeficientes a_n da equação de movimento. 99

Tabela 32 – Coeficientes b_n da equação de movimento. 99

Lista de abreviaturas e siglas

ABS	<i>American Bureau of Shipping</i>
BIG	Banco de Informações de Geração
CAPES	Coordenação de Aperfeiçoamento de Ensino Superior
CENER	<i>National Renewable Energy Centre</i>
CENTEC	<i>Centre for Marine Technology and Engineering</i>
CERNE	Centro de Estratégias em Recursos Naturais e Energia
CGC	<i>China General Certification Center</i>
CeSOS	<i>Centre for Ships and Ocean Structures</i>
CSIC	<i>Chongqing Haizhung Windpower Equipment Co., Ltd.</i>
DHI	<i>Danish Hydraulic Institute</i>
DTU	<i>Technical University of Denmark</i>
EPUSP	Escola Politécnica da Universidade de São Paulo
FAST	<i>Fatigue, Aerodynamics, Structures and Turbulence</i>
GIRAFFE	<i>Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements</i>
GH	<i>Garrad Hassan</i>
GL	Graus de liberdade
GWEC	<i>Global Wind Energy Council International Energy Agency</i>
IFE	<i>Institute for Energy Technology</i>
IFPEN	<i>IFP Energies nouvelles</i>
IST	<i>Instituto Superior Tecnico</i>
JSPS	<i>Japanese Society for the Promotion of Science</i>
MARINTEK	<i>Norwegian Marine Technology Research Institute</i>
MME	Ministério de Minas e Energia

MOR	Modelos de Ordem Reduzida
NTUA	<i>National Technical University of Athens</i>
NREL	<i>National Renewable Energy Laboratory</i>
N3E	Núcleo de Estudos Estratégicos de Energia
OC3	<i>Offshore Code Comparison Collaboration</i>
OC4	<i>Offshore Code Comparison Collaboration, Continued</i>
OC5	<i>Offshore Code Comparison Collaboration, Continued, with Correlation</i>
OECD	<i>Organization for Economic Co-operation and Development</i>
ONR	<i>Office of Naval Research</i>
POSTECH	<i>Pohang University of Science and Technology</i>
RAO	<i>Response Amplitude Operator</i>
ROM	<i>Reduced Order Model</i>
SNL	<i>Sandia National Laboratories</i>
SPE	Secretaria de Planejamento e Desenvolvimento Energético
SWE	<i>University of Stuttgart's Endowed Chair of Wind Energy at the Institute of Aircraft Design</i>
SWL	<i>Still water line</i>
TEEH	Turbinas Eólicas com Eixo Horizontal
TEEV	Turbinas Eólicas com Eixo Vertical
TEV	Teorema dos esforços virtuais
UOU	<i>University of Ulsan</i>
U-TOKYO	<i>University of Tokyo</i>

Lista de símbolos

x	Direção lateral ao eixo da torre
z	Direção axial ao eixo da torre
y	Direção perpendicular ao plano da torre
α	Adimensional que relaciona a posição do centro de gravidade (CG) da torre com o comprimento da mesma
β_x	Frequência de excitação na base da torre na direção x
β_z	Frequência de excitação na base da torre na direção z
β_θ	Frequência de excitação na base da torre à rotação em torno do eixo y
$\gamma(\xi)$	Adimensional de massa
$\delta_D(z - L)$	Delta de Dirac
δq_x	Carga virtual lateral
δq_z	Carga virtual axial
δN	Esforço normal virtual
δM_y	Momento fletor virtual
Δ	Distância do binário na nacele
Δt	Passo de tempo dimensional
$\Delta \tau$	Passo de tempo adimensional
ϵ	Parâmetro muito pequeno
ϵ_N	Alongamento quadrático ou de Green
ζ	Taxa de amortecimento estrutural crítico
η_x	Adimensional que relaciona a frequência de excitação na direção x com a frequência de referência
η_z	Adimensional que relaciona a frequência de excitação na direção z com a frequência de referência

η_θ	Adimensional que relaciona a frequência de excitação ao redor do eixo y com a frequência de referência
θ	Ângulo de fase entre a excitação nas direções x e z
θ_b	Ângulo de rotação da torre, entre o eixo vertical indeslocado e deslocado
θ_p	Ângulo de excitação na base da torre, entre o eixo vertical indeslocado e deslocado
θ_s	Ângulo de rotação da plataforma semissubmersível, entre o eixo vertical indeslocado e deslocado
κ_1	Adimensional de rigidez axial
κ_2	Adimensional da derivada da rigidez axial em relação a z
Λ	Adimensional de aceleração
λ_x	Adimensional que relaciona a amplitude de excitação na direção x e o comprimento da torre
λ_z	Adimensional que relaciona a amplitude de excitação na direção z e o comprimento da torre
$\mu(z)$	Massa linear da torre
μ_0	Massa linear da torre na seção de referência
$\mu_t(z)$	Massa linear total da torre de turbina eólica
μ_f	Adimensional que relaciona a massa linear da torre e a massa linear na seção de referência
ξ	Adimensional que relaciona a posição ao longo do eixo da torre e o comprimento total
$\rho(z)$	Densidade do aço
ρ_b	Densidade do aço para torre escalonada
τ	Adimensional do tempo
$\tau_{m\acute{a}x}$	Tempo adimensional máximo de simulação
ϕ	Ângulo de fase entre a excitação na direção x e à rotação em torno de do eixo y
$\chi_1(\xi)$	Adimensional de rigidez flexional

$\chi_2(\xi), \chi_3(\xi)$	Adimensional da derivada da rigidez flexional em relação a z
$\psi_1(z)$	Função de interpolação na direção x
$\psi_2(z)$	Função de interpolação na direção z
ω	Frequência de referência
$\hat{\omega}$	Adimensional de frequência
∇u	Tensor gradiente de deslocamento
$A(z)$	Área da seção transversal da torre
A_{WL}	Área seccionada na linha d' água
A_0	Área da seção transversal equivalente
c	Amortecimento linear da torre
D_{bottom}	Diâmetro da seção transversal na base da torre
$D_{ext}(z)$	Diâmetro externo da torre da seção transversal da torre
$D_{int}(z)$	Diâmetro interno da torre da seção transversal da torre
D_{top}	Diâmetro da seção transversal no topo da torre
D_0	Diâmetro equivalente da torre
E, E_t	Módulo de elasticidade
F_E	Força de empuxo
F_x	Força no topo da torre na direção x
F_z	Força no topo da torre na direção z
$f(x)$	Função genérica
$\overline{GM}$	Altura metacêntrica
g	Aceleração da gravidade
$I(z)$	Momento de inércia da seção transversal da torre
I_t	Momento de inércia no topo da torre
I_0	Momento de inércia da torre na seção equivalente
$J_{ad,y}$	Massa adicional da plataforma em torno de y

J_b	Momento de inércia à rotação no CG da torre
J_{ii}	Momento de inércia à rotação da massa em torno de ii
$J_{p,ii}$	Momento de inércia à rotação da plataforma em torno de ii
J_m	Momento de inércia à rotação no CG da nacele e do rotor
K	Energia cinética
k_x	Coeficiente de rigidez à translação em x
k_z	Coeficiente de rigidez à translação em z
k_{θ_p}	Coeficiente de rigidez à rotação da plataforma em torno de y
k_{θ_b}	Coeficiente de rigidez à rotação da torre em torno de y
L	Comprimento da torre
l_b	Distância entre o CG e a base da torre
M_a	Massa na extremidade livre da torre
$M_{ad,x}$	Massa adicional da plataforma na direção x
$M_{ad,z}$	Massa adicional da plataforma na direção z
M_b	Massa total da torre
M_m	Massa total do conjunto nacele e rotor
M_p	Massa da plataforma semissubmersível com lastro
$M_y(t)$	Momento fletor na nacele
N_b	Número de pás
N_0	Força normal de referência
P	Frequência de rotação do rotor
$Q_1(\tau)$	Amplitude modal adimensional que descreve o movimento na direção x
$Q_2(\tau)$	Amplitude modal adimensional que descreve o movimento na direção z
r_{ii}	Raio de giração da massa
t	Tempo dimensional
t_t	Espessura da parede da seção transversal da torre

U^g	Energia potencial gravitacional
U^s	Energia potencial de deformação
u	Deslocamento lateral perpendicular à torre indeformada
u_0	Deslocamento adimensional lateral à torre
$\hat{u}(\tau, \xi)$	Função que depende do tempo e da posição adimensional na direção x
V_0	Volume deslocado
v_b	Velocidade no centro de gravidade da torre
v_m	Velocidade no centro de gravidade da massa
v_0	Deslocamento adimensional vertical
W^{nc}	Trabalho das forças não conservativas
w	Deslocamento axial paralelo à torre indeformada
$\hat{w}(\tau, \xi)$	Função que depende do tempo e da posição adimensional na direção z
X	Gradiente de deformação
x_{gs}	Locação da torre sobre a plataforma na direção x
x_1	Amplitude de excitação na base da torre, direção x
X_p	Excitação na base da torre, direção x
z_1	Amplitude de excitação na base da torre, direção z
Z_p	Excitação na base da torre na direção z
z_{gs}	Locação da torre sobre a plataforma na direção z

Sumário

1	INTRODUÇÃO	29
1.1	Os panoramas mundial e nacional	30
1.2	Tipos de turbinas eólicas e seus componentes	33
1.3	Os projetos OC3, OC4 e OC5	36
1.4	Motivação	37
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA	39
2.1	Frequência fundamental da torre	39
2.2	Modelos numéricos	41
2.3	Excitação paramétrica	44
3	METODOLOGIA	49
4	TORRE DE TURBINA EÓLICA	51
4.1	Propriedades da OC4-Fase II	51
4.1.1	Torre OC4 com seção transversal escalonada	55
4.2	Propriedades da torre SNL 13,2 MW	55
4.2.1	Torre SNL 13,2MW com seção transversal escalonada	56
5	DEFINIÇÃO DE UMA SEÇÃO TRANSVERSAL EQUIVALENTE	59
5.1	Estudo de caso: Torre OC4	60
5.2	Estudo de caso: Torre SNL 13,2MW	63
5.3	Conclusões deste capítulo	65
6	ESTUDO DOS EFEITOS DA NACELE E ROTOR	67
6.1	Formulação analítica	67
6.2	Análise numérica	70
6.3	Estudo de caso	71
6.4	Resultados	73
6.5	Conclusões deste capítulo	74
7	ESTUDO DOS EFEITOS DA PLATAFORMA FLUTUANTE SOBRE A QUAL A TORRE É MONTADA	75
7.1	Formulação analítica	75
7.2	Análise numérica	78
7.3	Estudo de caso	80
7.4	Resultados	80

7.4.1	Formulação analítica	80
7.4.2	Análise numérica	82
7.4.3	Dados da literatura relativos ao Projeto OC4-Fase II	83
7.5	Conclusões deste capítulo	85
8	MOR NÃO LINEAR COM EXCITAÇÃO DE BASE	87
8.1	Formulação analítica	87
8.1.1	Adimensionalização	94
8.1.2	Discretização	97
8.2	Análise numérica	100
8.2.1	Estudo de caso - Torre OC4	101
8.2.1.1	Excitação de suporte rotacional	101
8.2.1.2	Excitação de suporte vertical e rotacional	103
8.2.2	Estudo de caso - Torre SNL 13,2MW	107
8.2.2.1	Excitação de suporte rotacional	107
8.2.2.2	Excitação de suporte vertical e rotacional	108
8.2.2.3	Excitação de suporte vertical, horizontal e rotacional	110
8.3	Conclusões deste capítulo	112
9	CONCLUSÕES E PERSPECTIVAS DE TRABALHOS FUTUROS	115
	REFERÊNCIAS	119
	APÊNDICES	123
A	– SÉRIES TEMPORAIS E ESPECTRO DE AMPLITUDE	125
B	– FUNÇÕES DESCONTÍNUAS	129
C	– DEFORMAÇÕES INFINITESIMAIS	131

Objetivos e Organização do texto

A presente dissertação, desenvolvida junto ao Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, tem como objetivo apresentar contribuições à análise dinâmica de torres de turbinas eólicas *onshore* e *offshore* por meio de estudos numéricos.

Para tanto, desenvolvem-se modelos de ordem reduzida (MORs) e modelos segundo o método dos elementos finitos que permitem o estudo da resposta dinâmica da estrutura nos graus de liberdade considerados em cada modelo. Nas análises, utilizam-se os programas MATLAB, Mathematica e GIRAFFE (*Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements*).

O texto será organizado em nove capítulos, sendo que o capítulo 1 introduz os panoramas nacional e mundial acerca da energia eólica, as características de torres de turbinas eólicas e ilustra os projetos OC3, OC4 e OC5, desenvolvidos por instituições internacionais e coordenados pela *International Energy Agency* (IEA).

No capítulo 2, tem o objetivo de apresentar uma revisão bibliográfica sobre modelos numéricos de torres de turbinas eólicas para análise dinâmica e, além disso, tem o intuito de explicitar aspectos conceituais e trabalhos que abordaram excitação paramétrica em diferentes tipos de estruturas.

Após a revisão bibliográfica, o capítulo 3 apresenta a metodologia de estudo utilizada nos cinco capítulos subsequentes para o desenvolvimento dos MORs e modelos em elementos finitos. Primeiramente, no capítulo 4 especificam-se as propriedades das torres de turbinas eólicas utilizadas e as considerações de modelagem.

O capítulo 5 expõe a metodologia de cálculo de uma seção transversal prismática equivalente a partir de uma torre não prismática com uso do método de Lenci, Clementi e Mazzilli (2013). Por meio desta análise é possível assegurar que o uso do método em torres de turbinas eólicas, sem a devida adaptação, pode ocasionar interferências na frequência natural da estrutura.

No capítulo 6 desenvolve-se um estudo sobre a influência do momento de inércia à rotação de componentes da estrutura na frequência natural da torre. Por meio desta investigação é possível afirmar que assumir a massa na extremidade livre como pontual é satisfatório. Já no capítulo 7, em um modelo acoplado torre e plataforma, verifica-se a interferência da movimentação da plataforma semissubmersível e da torre na frequência natural e nos modos de vibrar do sistema. Nas análises nota-se um acoplamento entre translação horizontal (*surge*), a rotação da torre e plataforma (*pitch*).

A partir dos resultados obtidos nos capítulos anteriores, no capítulo 8 desenvolve-se um MOR não linear de uma torre, sob carregamentos na extremidade livre e excitação de suporte na base da estrutura. Obtém-se a resposta dinâmica nos graus de liberdade considerados por meio de simulações numéricas, para diferentes condições de excitação de suporte. A investigação mostra que a torre está sobre vibração forçada e paramétrica simultaneamente, e que o modelo linearizado não representa adequadamente a resposta da estrutura em uma condição ressonante.

Após todas as investigações, no capítulo 9 apresentam-se as conclusões acerca dos resultados obtidos nesta dissertação e são tecidas sugestões para trabalhos futuros.

1 Introdução

A busca por energias renováveis tornou-se recorrente após a década de 1970 devido à crise do petróleo, que impulsionou investimentos na geração de eletricidade a partir de fontes alternativas. A Europa e os Estados Unidos foram os pioneiros no desenvolvimento de estudos e incentivos fiscais para a expansão de novas tecnologias.

A utilização de energias renováveis permite a redução da queima de combustíveis fósseis e emissão de gases do efeito estufa, além de diversificar a matriz energética. Dentre as fontes utilizadas no mundo destacam-se a hídrica, biomassa, solar e eólica.

A energia a partir da fonte hídrica é obtida através da conversão da energia potencial gravitacional da água em energia elétrica, mediante a instalação de turbinas em usinas hidrelétricas. Em tais usinas, grandes áreas são alagadas, o que compromete a fauna e flora da região, além de ocasionar a emissão de gases do efeito estufa durante a decomposição da matéria orgânica. Outro fator importante é a queda da produção de eletricidade em períodos de estiagem e esgotamento da matriz hídrica.

Outro aproveitamento energético renovável é o da biomassa, proveniente de fontes orgânicas de origem animal e vegetal, obtido através da combustão direta ou de processos termoquímicos e biológicos (Soccol et al. (2016)). Como ressaltado por Grimoni et al. (2015), tal fonte de energia pode ser utilizada como complemento a outros processos químicos. No entanto, o uso desta modalidade apresenta danos inerentes a qualquer cultura agrícola, como desmatamento, uso de agrotóxicos e esgotamento do solo.

A radiação solar também é uma fonte renovável de energia através de sistemas fotovoltaicos e termosolares. Tais estruturas apresentam diversas vantagens como a flexibilidade de instalação e simplicidade. Entretanto, quando utilizado em larga escala, a intermitência, a posição geográfica, as condições de tempo e a perda de energia por efeito Joule são fatores que interferem na produção. Maiores detalhes acerca da energia solar podem ser encontrados em Agência Nacional de Energia Elétrica (2005).

Outra fonte de energia limpa é a eólica, que obtém energia elétrica através da conversão da energia cinética de translação do vento em energia cinética de rotação das pás, que acopladas a um gerador elétrico, são convertidas em energia elétrica. As turbinas eólicas são os sistemas responsáveis por abrigarem todos os componentes necessários à geração de energia elétrica a partir do vento.

Os parques eólicos apresentam baixo impacto ambiental se comparados às usinas hidrelétricas, devido ao reduzido índice de desmatamento, além de não emitir gases do efeito estufa. Entretanto, a energia eólica é uma fonte intermitente, apresentando questões

relacionadas à poluição sonora e visual, possibilidade de interferência nas rotas migratórias de aves e nas ondas eletromagnéticas, como explicitado em [Agencia Nacional de Energia Eletrica \(2005\)](#).

Cumpre ressaltar que, embora com aspectos negativos, os diversos aspectos positivos relacionados à energia eólica têm tornado esta modalidade de energia renovável uma das mais pesquisadas atualmente, sendo o problema motivador desta dissertação. Finalizada esta breve introdução ao tema de energia renovável, a próxima seção apresenta os panoramas mundial e nacional sobre a expansão e as perspectivas de desenvolvimento da energia eólica.

1.1 Os panoramas mundial e nacional

Segundo [Tolmasquim \(2016\)](#), a crise do petróleo em 1973 propiciou investimentos em fontes renováveis para a geração de eletricidade. Entre os anos de 1980 e 1990, a Europa e os EUA ampliaram a utilização de energia eólica e aplicaram incentivos fiscais para a redução da dependência energética e uso de outras fontes.

No fim da década de 1990 a energia eólica na Ásia (principalmente China e Índia) foi implantada e no ano 2000 estava disseminada em grande parte do mundo. Desde então, nota-se um aumento crescente na capacidade instalada de energia eólica no mundo tanto para estruturas *onshore* como *offshore* (isto é, aquelas posicionadas no mar), conforme Figura 1.

Figura 1 – Capacidade mundial instalada acumulada de energia eólica.

Fonte: Adaptado de [Global Wind Energy Council \(2018\)](#).

Conforme dados do ano de 2018 da *Global Wind Energy Council* (GWEC), 84% da capacidade eólica instalada do mundo de estruturas *onshore* encontra-se em 10 países,

sendo 36% na China, 17% nos Estados Unidos e 9% na Alemanha. Tais países formam o maior mercado tanto de produção de turbinas eólicas como aquisição e instalação de novos parques. O Brasil ocupa o sétimo lugar da lista, com 3,0% da capacidade instalada do mundo.

No contexto de torres de turbinas eólicas *offshore*, o Reino Unido, a Alemanha e a China foram os países que mais investiram em novas instalações em 2018 e somaram uma capacidade eólica instalada acumulada de 82% no mesmo ano, conforme Figura 2.

Figura 2 – Capacidade instalada de energia eólica *offshore*.

Fonte: Adaptado de [Global Wind Energy Council \(2018\)](#).

Apesar do aumento das instalações de parques eólicos, a sua participação em relação a outras fontes é modesta. A oferta interna de energia elétrica mundial proveniente da fonte eólica, ou seja, o consumo efetivo de energia, corresponde a 5,6% em relação às fontes disponíveis na Tabela 1, conforme o Núcleo de Estudos Estratégicos de Energia, da Secretaria de Planejamento e Desenvolvimento Energético e do Ministério de Minas e Energia (N3E, SPE e MME) em 2018.

No Brasil, o incentivo à fonte eólica ocorreu efetivamente a partir de 2002 por intermédio de programas do governo para a diversificação da matriz energética, segurança no abastecimento e redução da emissão de gases causadores do efeito estufa. Dentre os incentivos aplicados, ressalta-se a redução do custo das tarifas na produção, transmissão e consumo, o que viabilizou a contratação de novos parques eólicos. Uma discussão mais aprofundada do histórico da energia eólica no Brasil pode ser encontrada em [Tolmasquim \(2016\)](#).

No ano de 2018, a oferta de eletricidade no país proveniente da fonte eólica foi de 7,6%, como mostra a Tabela 1. Apesar de incipiente em relação à hidreletricidade, o mercado eólico continua em expansão, com uma oferta de 27% de potência em relação às fontes hídricas, solar, biomassa, fóssil e nuclear, conforme Figura 3. Tal figura apresenta as fontes de energia exploradas, considerando usinas em construção e que não estão em construção, mas aprovadas, até abril de 2019 no Brasil.

Tabela 1 – Oferta interna de energia elétrica no Brasil e Mundo (%).

Fonte	Brasil		OECD ¹		Outros		Mundo	
	1973	2018	1973	2018	1973	2018	1973	2018
Óleo	7,2	1,5	25,4	1,9	23,1	4,7	24,6	3,4
Gás	0,5	8,6	11,6	27,1	14,2	20,6	12,2	23,1
Carvão	1,7	2,2	37,9	26,8	40,9	46,4	38,3	37,1
Urânio	0	2,5	4,2	17,0	0,9	5,0	3,3	10,0
Outras não-renováveis	0	1,9	0	0,3	0	0,1	0,1	0,2
Hídrica	89	66,6	20,5	12,5	19,3	16,7	21,0	16,1
Biomassa sólida	1,2	8,5	0,2	3,1	1,6	1,1	0,5	2,1
Eólica	0	7,6	0	7,8	0	3,9	0	5,6
Solar	0	0,54	0	3,0	0	1,3	0	2,0
Geotérmica	0	0	0,1	0,4	0	0,3	0,1	0,3
Total renováveis (%)	90,6	83,3	20,8	26,8	20,9	23,3	21,5	26,2

Fonte: Adaptado de [Ministerio de Minas e Energia \(2019\)](#).

Figura 3 – Fontes de energias exploradas no Brasil em 2019.

Fonte: Adaptado de [Agencia Nacional de Energia Eletrica \(2018\)](#).

¹ Organization for Economic Co-operation and Development

Os dados da fonte eólica apresentados na Tabela 1 e na Figura 3 são de torres de turbinas *onshore*. As estruturas *offshore* passaram a ser uma realidade brasileira somente em 2018 com o anúncio da instalação da primeira planta eólica em alto-mar pela Petrobrás, no Rio Grande do Norte. A previsão de implantação é até 2022, sendo necessário a definição prévia do marco regulatório que estabelece as regras de produção, compra e venda de energia elétrica.

Neste contexto, em fevereiro de 2019, o Centro de Estratégias em Recursos Naturais e Energia (CERNE) coordenou uma discussão com empresas e centros de pesquisa de todo o Brasil para a elaboração de um estudo que visa a criação de um marco regulatório (Centro de estratégias em Recursos Naturais e Energia (2019)). Até a presente data não foram disponibilizadas informações acerca do tema.

Tendo em vista os aspectos aqui apresentados, ficam evidentes as motivações tecnológicas e científicas para o estudo de aspectos relacionados ao comportamento de turbinas eólicas *onshore* e *offshore*. Neste contexto, dois projetos conduzidos na Escola Politécnica da USP podem ser destacados. O primeiro projeto é financiado pela *Office of Naval Research* (ONR) e tem como foco a condução de uma série de estudos fundamentais relacionadas à turbinas eólicas *offshore* e montadas sobre plataformas flutuantes. Já o segundo projeto teve início no primeiro semestre de 2018 e envolve o apoio financeiro da Coordenação de Aperfeiçoamento do Ensino Superior (CAPES) e da *Japanese Society for the Promotion of Science* (JSPS). Este projeto é desenvolvido em conjunto com a Universidade de Tóquio e visa o desenvolvimento de um projeto de turbina eólica flutuante com vistas à instalação na costa brasileira.

Finalizada esta breve contextualização sobre os cenários nacional e internacional da energia eólica, a próxima subseção apresenta os principais componentes de uma turbina eólica.

1.2 Tipos de turbinas eólicas e seus componentes

As turbinas eólicas são estruturas cuja função é converter energia cinética do vento em energia elétrica. Segundo Pinto (2013), tais estruturas podem ser diferenciadas quanto à disposição do eixo das pás da turbina e pela sua potência. Os tipos de turbinas encontradas são as turbinas eólicas com eixo horizontal (TEEH) e as turbinas eólicas com eixo vertical (TEEV), ilustradas na Figura 4. Tais turbinas podem ser de baixo porte, com até 500kW de potência, de médio porte, de 500 a 1000kW, e de alto porte, com potência acima de 1MW, (Agencia Nacional de Energia Eletrica (2005)).

Segundo Dellezzopolles Junior (2011), a vantagem da TEEV é a facilidade de operação de manutenção, visto que a instalação do gerador fica junto ao solo e não há a necessidade de dispositivos de direcionamento do rotor. Em contrapartida, esse tipo de

estrutura tem tamanho limitado, inviabilizando seu uso em projetos de grande porte. Já a classe TEEH é amplamente empregada e possui maior aproveitamento energético se comparado ao tipo TEEV, além disso possui aplicações tanto *onshore* (ou seja, a turbina é posicionada em terra) quanto *offshore*, o que amplia as áreas disponíveis de geração.

Figura 4 – À esquerda TEEH e à direita TEEV

Fonte: [Vestas \(2017\)](#) e Centro Brasileiro de Energia Eólica, 2000.

No campo *offshore*, a torre pode ficar em estruturas flutuantes, que são conectadas em sistemas de ancoragem e têm flutuabilidade suficiente para suportar a estrutura, como representado na Figura 5. Outra opção é instalar a fundação da torre no leito marítimo quando a profundidade não superar 50m.

A estrutura é composta pela torre, pás, sistema de controle, nacele, gerador e em alguns casos, caixa de engrenagem, como mostra a Figura 6. A torre corresponde a uma estrutura tubular de aço, concreto ou híbrida, que suporta o rotor e a nacele. O rotor é formado pelas pás e pelo cubo. As pás são estruturas que interagem com o vento, com intuito de gerar torque no eixo. O cubo acomoda as pás e os sistemas de controle. A nacele, que fica sobre a torre, contém a parte elétrica e outros componentes como a caixa de engrenagem, tem a função de transferir a energia mecânica da turbina para o gerador. Por fim, o gerador converte a energia mecânica em energia elétrica.

Os componentes apresentados variam entre fabricantes e o modelo escolhido deve atender requisitos para a maximização da produção de energia elétrica. Para tanto, as empresas realizam estudos detalhados das condições ambientais do local, do custo de toda estrutura e da infraestrutura, a curto, médio e longo prazo, para definição da torre de turbina eólica mais adequada.

Figura 5 – Torres de turbinas eólicas *offshore*.

Fonte: Adaptado de [European Wind Energy Association \(2013\)](#).

Figura 6 – Componentes de uma torre de turbina eólica.

Fonte: Adaptado de [United States Department of Energy \(2017\)](#).

Com o objetivo de otimizar a geração de energia elétrica, novos modelos fabricados contemplam o aumento da potência e eficiência, a partir do desenvolvimento tecnológico do aerogerador (nacele e rotor) e do aumento do comprimento da torre e das pás. Pesquisas que abordam o estudo de torres de turbinas eólicas em maior escala são tratadas em [Sahasakkul \(2014\)](#) e [Liu et al. \(2018\)](#).

Estas estruturas podem ser dimensionadas e analisadas mediante o uso de ferramentas de simulação capazes de prever as cargas dinâmicas acopladas e as respostas do sistema. Utilizam-se códigos aero-servo-elásticos que incorporam modelos de regime de vento, aerodinâmicos, de controle e de dinâmica estrutural. Para estruturas *offshore*, os códigos são expandidos com a inclusão da modelagem de ondas incidentes, correntes de mar, hidrodinâmica e dinâmica de fundação da estrutura de suporte, como salientado em [Robertson et al. \(2014\)](#).

Estas ferramentas estão em constante desenvolvimento e visam tanto a melhoria dos modelos quanto verificações diversas. Neste contexto, essas análises geralmente envolvem diversos grupos de pesquisa ao redor do mundo, como os projetos OC3, OC4 e OC5, que avaliaram diferentes tipos de estruturas *offshore*, como podem ser vistos no item [1.3](#).

1.3 Os projetos OC3, OC4 e OC5

Os projetos OC3¹ e OC4² foram desenvolvidos por diversas instituições internacionais e coordenados pela *International Energy Agency* (IEA). O objetivo destes projetos foi de verificar a precisão de ferramentas de simulação da dinâmica de torres de turbinas eólicas por meio de comparações entre códigos desenvolvidos por diversos grupos de pesquisa, sob diferentes tipos de carregamentos, condições de flexibilidade e suporte, como salientado em [Robertson et al. \(2013\)](#). Tais projetos funcionaram de 2005 a 2013 e examinaram cinco condições diferentes de vento para a mesma turbina eólica. A estrutura de suporte *offshore* e algumas características da torre tiveram variações em cada fase, como ilustrado na Figura 7 e listado a seguir.

- OC3 Fase I: Monocoluna com base rígida;
- OC3 Fase II: Monocoluna com base flexível;
- OC3 Fase III: Tripé;
- OC3 Fase IV: Bóia *Spar* flutuante;
- OC4 Fase I: Jaqueta;
- OC4 Fase II: Semissubmersível;

As comparações entre códigos só identificaram diferenças, mas não determinam qual solução é mais precisa, dessa forma o projeto OC5³, desenvolvido entre 2014 e 2017, teve o objetivo de validar as ferramentas de simulação do vento *offshore* através da verificação da resposta dinâmica de modelos simulados e experimentais. Foram examinadas experimentalmente as soluções monocoluna e a semissubmersível em laboratório, e a tripé

¹ *Offshore Code Comparison Collaboration.*

² *Offshore Code Comparison Collaboration, Continued.*

³ *Offshore Code Comparison Collaboration, Continued, with Correlation.*

em mar aberto e em escala real.

Figura 7 – Torres de turbinas eólicas *offshore*.

Fonte: Adaptado de [Robertson et al. \(2013\)](#).

Com o intuito de desenvolver conhecimentos no tema, esta dissertação de mestrado é parte de uma iniciativa do grupo de pesquisa da EPUSP. Em particular, dar-se-á foco à análise da dinâmica da torre de uma turbina eólica, sendo que alguns aspectos estudados são válidos para torres *onshore* e *offshore*, enquanto que outros são válidos apenas para torres sobre plataformas flutuantes (*offshore*).

1.4 Motivação

Como destacado nas seções anteriores, a necessidade da diversificação da matriz energética e a redução de custos motivaram a utilização e expansão de energia eólica no Brasil e no mundo. As torres de turbinas eólicas utilizadas estão em constante desenvolvimento com o objetivo de aumentar a produção de energia elétrica.

Esta busca por estruturas com maior desempenho deve ser avaliada com critério nos diferentes nichos da engenharia. Na análise estrutural da torre, nota-se a necessidade de estudar aspectos de modelagem e o comportamento dinâmico frente às diversas condições de carregamentos e propriedades estruturais. Tal estudo, além de prever o desempenho dinâmico, serviria de base para estudos futuros sobre possíveis falhas.

Dessa forma, o objetivo desta dissertação é apresentar contribuições para a análise dinâmica de torres de turbinas eólicas para sistemas *onshore* e *offshore*. Para tanto, realizam-se estudos sobre quais considerações são pertinentes na análise do comportamento dinâmico de torres. Elaboram-se MOR's e modelos em elementos finitos utilizando a ferramenta *in-house* GIRAFFE.

Na primeira análise investiga-se a possibilidade de utilizar uma torre de turbina eólica com seção transversal prismática tendo a mesma frequência natural de uma não prismática, com o uso do método de [Lenci, Clementi e Mazzilli \(2013\)](#). No segundo estudo avalia-se a possibilidade de considerar a massa na extremidade livre da torre como pontual e a respectiva alteração da frequência natural da torre.

O terceiro estudo analisa-se um modelo acoplado, torre e plataforma, e verifica-se a importância das translações e rotação da plataforma e rotação da torre na frequência natural do sistema. E no quarto e último estudo avalia-se um modelo de torre sobre excitação de suporte e examina-se a ocorrência de vibrações paramétricas e forçadas. Além disso, investiga-se se a análise linear é suficiente para obtenção de uma resposta estrutural adequada.

Para embasar tais tipos de análises e seus resultados, elabora-se, no capítulo 2, uma revisão bibliográfica sobre modelos numéricos de torres de turbinas eólicas e também do problema de excitação paramétrica, fenômeno geralmente presente em estruturas sob excitação de suporte.

2 Revisão bibliográfica

Neste capítulo, elabora-se uma revisão bibliográfica acerca da dinâmica de torres de turbinas eólicas com o objetivo de compreender e apresentar a resposta do sistema estrutural frente a diferentes tipos de modelos, considerações e carregamentos. Além disso, expõe-se brevemente a teoria e trabalhos que abordam excitações paramétricas, fenômeno geralmente presente em estruturas sob excitação de suporte.

2.1 Frequência fundamental da torre

As torres de turbinas eólicas formam um sistema dinâmico complexo, caracterizado pelas vibrações das pás e da torre, devido às frequências de excitação dos componentes da estrutura, além das frequências de carregamento externo. Tais excitações não devem coincidir com a frequência natural da estrutura para evitar possíveis problemas de amplificação do deslocamento.

A frequência natural é uma característica própria da estrutura que depende de sua massa e rigidez. Para um sistema em vibração livre não amortecida, com um grau de liberdade (1gl), conforme Figura 8, a equação que rege o movimento é dada pela Equação 2.1. A frequência natural ω é determinada pela Equação 2.2, sendo que k corresponde a rigidez e m a massa do sistema.

Figura 8 – Modelo elementar de 1gl.

Fonte: Própria autora.

$$m\ddot{u} + ku = 0 \quad (2.1)$$

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.2)$$

Para o cálculo da frequência natural de um sistema, no entanto, muitas vezes é necessário considerar componentes da estrutura. A exemplo disso, em torres de turbinas eólicas, [Det Norske Veritas e Wind Energy Department \(2002\)](#) sugerem que a primeira frequência natural da torre deve ser medida com o protótipo de turbina conectado à mesma, sendo que sua primeira frequência natural não deve coincidir com $\pm 10\%$ da frequência de excitação do rotor 1P e de passagem da lâmina N_b P, onde N_b corresponde ao número

de pás e P à frequência de rotação do rotor. Para turbinas com velocidade variável, não deve ser permitida a operação em um intervalo de frequência definido como $\pm 10\%$ da frequência fundamental da torre.

Quando a primeira frequência natural é inferior a 1P denomina-se *design* flexível-flexível, entre 1P e 3P flexível-rígido e superior a 3P rígido-rígido. As torres com frequência natural próxima a 1P são mais interessantes na indústria eólica, por serem viáveis economicamente. No entanto, são estruturas mais flexíveis, sendo necessário uma análise criteriosa do comportamento da estrutura frente à frequência natural e a de excitação.

Lombardi (2010) apresenta uma formulação simplificada para o cálculo da primeira frequência natural à flexão de uma torre cônica, considerando uma torre engastada na base, com massa pontual na extremidade livre, conforme Equação 2.3. A frequência é expressa em Hz.

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{E_t I_t}{(M_a + 0,24M_b)L^3}} \theta \quad (2.3)$$

$$I_t = \frac{\pi}{8} D_{topo}^3 t_t \quad (2.4)$$

Onde E_t , I_t , M_a , M_b , L , t_t e D_{topo} correspondem ao módulo de elasticidade do material, momento de inércia, massa na extremidade livre, massa da torre, comprimento, espessura da parede e diâmetro do topo, respectivamente. O parâmetro θ é um adimensional que indica a relação entre a rigidez lateral de uma torre cônica e uma torre cilíndrica, ambas com base fixa. A Figura 9 mostra o valor de θ que corresponde a razão entre o diâmetro da base e do topo (D_{base}/D_{topo}).

Figura 9 – Coeficiente adimensional θ .

Fonte: Adaptado de Lombardi (2010).

Essa formulação apresenta uma primeira aproximação da frequência natural, sendo necessário avaliar a rigidez da fundação de estruturas de base fixa, como exposto em [Lombardi \(2010\)](#), [Bhattacharya e Adhikari \(2012\)](#) e [Arany et al. \(2015\)](#). Outros trabalhos que abordaram modelos numéricos de torres de turbinas eólicas e avaliam o comportamento dinâmico das mesmas frente a diferentes tipos de carregamentos serão expostos na próxima seção.

2.2 Modelos numéricos

Os modelos numéricos apresentados nesta seção têm a finalidade de ilustrar o comportamento dinâmico de torres de turbinas eólicas fixas e flutuantes frente as diferentes abordagens de modelos de ordem reduzida (MORs) e modelos de alta hierarquia, baseados no método dos elementos finitos. Tais trabalhos contribuíram para as análises desenvolvidas nesta dissertação.

A exemplo disso, [Dellezzopolles Junior \(2011\)](#) deduziu a equação de movimento linear e não linear de uma torre de turbina eólica fixa (*onshore*), engastada na base, com um grau de liberdade, a translação lateral à torre, solicitada por carregamento aerodinâmico. Avaliou-se a torre sob movimento livre e com carregamentos aplicados na nacele. Os resultados mostraram que as diferenças entre as análises lineares e não lineares são apreciáveis somente no caso de grandes deslocamentos, resultantes apenas de grandes solicitações e longe da faixa operacional. Embora o autor considere satisfatória a abordagem linear, essa consideração não pode ser estendida imediatamente para uma estrutura sob excitação de suporte resultante de ações sísmicas ou hidrodinâmicas. Desta forma, mantém-se a análise não linear nesta dissertação.

[Oliveira \(2012\)](#) apresenta análise modal de uma torre de turbina eólica por meio de modelos numéricos e de ensaios dinâmicos de uma torre real. Foram desenvolvidos três modelos em elementos finitos, com elemento de barra e casca engastados na base, e de casca com sapata na base. Os resultados obtidos foram comparados com os do ensaio de vibração ambiental. Observou-se que todos os modelos numéricos apresentaram resultados relativamente próximos aos do ensaio dinâmico e que o modelo de barras permitiu uma boa estimativa dos parâmetros modais.

[Avila et al. \(2013\)](#) também avaliou a resposta dinâmica de modelos em elementos finitos do tipo barra e casca de uma torre engastada na base, com massa pontual na extremidade livre e com massa distribuída sobre os nós do topo. Além disso, desenvolveu-se um MOR de uma barra engastada na base, com massa pontual na extremidade livre e um grau de liberdade, a translação lateral à torre. Dentre outros resultados, foram obtidas as frequências naturais e os modos de vibrar de todos os modelos estudados, e observou-se uma boa aderência entre os mesmos.

Essa concordância entre modelos ilustra que MORs oferecem qualitativamente estimativa do comportamento dinâmico da estrutura, com um baixo custo computacional. Além disso, permitem estudos teóricos de fenômenos dinâmicos complexos por meio de métodos de perturbação, que podem ser impossíveis de investigar em modelos de maior hierarquia. Note, no entanto, que os modelos em elementos finitos devem ser utilizados como ferramentas complementares aos MORs.

Robertson et al. (2014) analisaram uma torre de turbina eólica flutuante instalada sobre uma plataforma semissubmersível por meio de simulações numéricas de diferentes códigos e abordagens teóricas. Foram obtidas as frequências naturais da plataforma semissubmersível e da torre, além de séries temporais de resposta ao movimento da plataforma¹, segundo os movimentos de *surge*, *heave* e *pitch*, por meio de ensaios numéricos de decaimento. Para ondas regulares apresentaram-se séries temporais de resposta da plataforma para os movimentos de *surge*, *heave* e *pitch*; e para ondas irregulares isoladas e com ação simultânea com o vento foram expostos valores médios dos movimentos de *surge* e *pitch*. Operadores de amplitude de resposta² (RAO) da plataforma também foram ilustrados, para os casos de ondas isoladas e ação simultânea de ondas e vento. Os autores compararam os códigos, permitindo identificar as diferenças entre os modelos conforme as teorias e técnicas empregadas.

Sahasakkul (2014) apresenta algumas análises da torre do projeto OC4-Fase II para verificar a resposta da plataforma semissubmersível em regime estacionário frente às ondas regulares. As simulações foram realizadas no código computacional FAST e obtiveram-se séries temporais de resposta ao movimento da plataforma nos seis graus de liberdade³. Para frequência de excitação igual à frequência natural de *pitch* da plataforma, os movimentos de *pitch* foram amplificados devido à ressonância e os deslocamentos de *surge* foram consideravelmente menores do que os observados para ondas na frequência natural de *surge*. Além disso, nota-se uma maior amplitude de resposta da plataforma quando os transientes estão presentes, mas decaem devido ao amortecimento até que seja atingido um nível periódico em regime estacionário.

Robertson et al. (2017) realizaram estudos numéricos e experimentais de uma torre de turbina eólica sobre uma plataforma semissubmersível, analisando a compatibilidade das cargas finais e de fadiga atuantes no sistema, quando solicitado por diferentes tipos de carregamentos. Elaborou-se um modelo experimental da estrutura na escala 1:50

¹ Em engenharia naval, é comum o uso da nomenclatura em língua inglesa para os movimentos. O deslocamento lateral x é conhecido como *surge*, o deslocamento axial z como *heave* e a rotação da plataforma como *pitch*.

² Do inglês, *response amplitude operators*. O RAO fornece a amplitude do movimento nos diversos graus de liberdade como função do período de onda de amplitude unitária. As defasagens também são fornecidas pelos RAOs.

³ O deslocamento lateral x é conhecido como *surge*, o deslocamento axial z como *heave* e a rotação da plataforma como *pitch*.

em laboratório. Os modelos numéricos foram calibrados de maneira que os resultados obtidos correspondiam às medições experimentais. Para tanto, verificou-se o equilíbrio estático e realizaram testes de decaimento livre, nos seis graus de liberdade, para obtenção da frequência natural e do amortecimento da estrutura. Além disso, examinaram-se as propriedades aerodinâmicas da turbina e avaliou-se a resposta dinâmica da estrutura por meio de RAO, quando submetida às ondas regulares.

Após o processo de calibração, os modelos foram submetidos a diferentes combinações de ondas irregulares, obtiveram-se as cargas últimas e de fadiga atuantes nas linhas de amarração, na base e no topo da torre. Os resultados mostraram que os modelos numéricos subestimaram o carregamento último e de fadiga, em relação ao programa experimental. A correlação entre os resultados deve ser feita com reservas, uma vez que a campanha experimental não divulgou as incertezas dos procedimentos.

Liu et al. (2018) investigaram estruturas em maior escala, na qual elaboraram um modelo de plataforma flutuante semissubmersível para suportar uma inovadora turbina eólica de eixo horizontal de 13,2 MW com pás de 100 m de comprimento (Griffith e Resor (2011)). Definiu-se a altura de cubo da torre com 133,5m, considerando a folga necessária para navegação e algumas características da torre OC4-Fase II. A configuração da torre permitiu que a frequência natural da mesma atendesse os critérios de projeto de *design* flexível. Avaliou-se o sistema estrutural segundo o comportamento estático e dinâmico, sob ação de vento uniforme e turbulento, ondas regulares e irregulares. A partir dos RAOs verificou-se que a energia nos movimentos da plataforma está concentrada nas ondas de baixa frequência e que existe um acoplamento entre os movimentos de *surge* e *pitch* na frequência próxima a 0,01 Hz. Além disso, as amplitudes de resposta foram comparáveis às do modelo OC4 e as frequências dominantes um pouco menores, possibilitando um sistema mais sensível às excitações de baixa frequência.

Por meio dos trabalhos apresentados nesta seção pode-se afirmar que MOR e modelos simplificados do tipo barra têm a capacidade de estimar as frequências naturais, os modos de vibrar e a amplitude dos deslocamentos de torres de turbinas eólicas de maneira satisfatória. Esses resultados reforçam que o uso de tais modelos nesta dissertação é aplicável e necessário para prever a resposta da estrutura de maneira simplificada.

Também foram expostos modelos sofisticados, de alta hierarquia e totalmente acoplados, com o objetivo de indicar o comportamento de tais estruturas, além de servirem de base de comparação para os estudos desenvolvidos nesta dissertação. Outros trabalhos que serão úteis ao longo deste texto serão expostos na próxima seção.

2.3 Excitação paramétrica

As torres de turbinas eólicas fixas e flutuantes podem ser solicitadas por excitações de suporte na base, originadas por ações sísmicas ou hidrodinâmicas. As excitações são denominadas como forçadas quando o sistema é submetido à uma ação periódica no tempo, caracterizada como uma não homogeneidade da equação diferencial que rege o movimento. Quando pelo menos um dos parâmetros característicos da equação diferencial variam com o tempo, denomina-se excitação paramétrica.

A estrutura entra em ressonância paramétrica principal quando a frequência solicitante for o dobro de uma das frequências naturais, originando um aumento progressivo da amplitude de vibração. Um sistema só pode entrar em ressonância paramétrica quando o sistema estiver com mínimo de energia e o incremento de energia, causado pela excitação, exceder a quantidade de energia dissipada em um intervalo de tempo. No entanto, tal incremento não deve exceder um valor crítico, caso contrário, as perdas de energia por atrito não podem restringir o crescimento da amplitude ([Butikov \(2004\)](#)). Neste caso, em modelos lineares, a amplitude apresenta um crescimento indefinido, e em modelos não lineares, as não linearidades restringem o crescimento da amplitude.

Além disso, a abordagem linear permite determinar o crescimento inicial e o decaimento do movimento, contudo não pode explicar o comportamento ao longo do tempo no caso de decaimento. Além disso, se a amplitude inicial for grande, a análise linear pode prever um decaimento a zero, em contradição com a não linear ([Nayfeh e Mook \(2004\)](#)).

Os primeiros estudos sobre excitação paramétrica foram atribuídos a Faraday em 1831, quando observou que as ondas na superfície de um fluido dentro um cilindro oscilavam com metade da frequência de excitação vertical atuante no cilindro ([Nayfeh e Mook \(2004\)](#)). Posteriormente, [Melde \(1859\)](#) realizou experimentos, conectando uma corda entre um suporte rígido e a extremidade de um diapasão⁴. Elaboraram-se diferentes combinações de massa e tensão da corda, e frequência e volume do diapasão. Observou-se que a corda poderia vibrar lateralmente, na metade da frequência de vibração do diapasão, mesmo sob excitação longitudinal. [Rayleigh \(1887\)](#) forneceu matematicamente uma base teórica para os fenômenos observados.

Para sistemas puramente estruturais, a excitação paramétrica foi abordada, aparentemente pela primeira vez, por [Beliaev \(1924\)](#) no estudo de uma coluna bi-articulada sob ação de uma carga periódica axial. Obteve-se a equação de movimento da estrutura e a resposta dinâmica mostrou que a coluna poderia oscilar com metade da frequência de excitação, se esta estiver próxima a uma das frequências naturais do movimento lateral ([Bolotin \(1964\)](#)).

⁴ Instrumento metálico em forma de forquilha, que serve para afinar instrumentos e vozes através da vibração de um som musical de determinada altura.

Um exemplo clássico do fenômeno consiste em um pêndulo oscilando periodicamente na vertical, com amplitude A , frequência ω e comprimento L , conforme Figura 10. A equação de movimento linear deste modelo físico, de um grau de liberdade, a rotação θ , é dada pela Equação 2.6, denominada equação de Mathieu.

Figura 10 – Pêndulo com ponto de suspensão oscilante.

Fonte: Própria autora.

$$L\ddot{\theta} + (g - A\omega^2 \cos \omega t) \sin \theta = 0, \quad (2.5)$$

$$\ddot{\theta} + (\delta + \epsilon \cos \omega t) \theta = 0, \quad (2.6)$$

$$\text{onde, } \sin \theta \approx \theta, \quad \delta = \frac{g}{L}, \quad \epsilon = \frac{A\omega^2}{L}. \quad (2.7)$$

O coeficiente $(\delta + \epsilon \cos \omega t)$ é variável no tempo e excita parametricamente o sistema. A análise da estabilidade deste sistema é determinada por meio das soluções da equação de movimento, que podem ser obtidas pela teoria de Floquet, conforme Equação 2.8.

$$\theta(t) = e^{\gamma t} \phi(t) \quad (2.8)$$

onde γ corresponde ao expoente característico e $\phi(t) = \phi(t + \pi)$ às funções periódicas no tempo. A solução θ é instável (ilimitada) com o tempo quando parte real do expoente característico é positiva definida, caso contrário, quando a parte real é zero ou negativa, θ é estável (limitada).

O valor do expoente característico depende dos parâmetros δ e ϵ , que originam as curvas de transição, denominadas diagrama de estabilidade (ou de Strutt), conforme Figura 11. Tais curvas determinam se o sistema apresentará comportamento instável (hachurada) ou estável.

Figura 11 – Diagrama de estabilidade da equação de Mathieu: regiões estáveis e instáveis (hachurada).

Fonte: [Nayfeh e Mook \(2004\)](#).

A excitação paramétrica foi investigada por vários autores ao longo dos anos para diferentes tipos de sistemas estruturais. [Handoo e Sundararajan \(1971\)](#) obtiveram a equação de movimento não linear de uma coluna engastada-livre, com uma massa na extremidade livre, sob excitação harmônica vertical na base. Determinou-se a equação de Mathieu-Hill modificada, considerando a teoria de viga para pequenas deflexões. Uma análise experimental também foi realizada, com três tipos de colunas e cinco massas finais. Os limites da primeira região de instabilidade foram obtidos pelo método de Cunningham e Struble, apresentando boa aderência com resultados experimentais. Os autores concluíram que no ponto parametricamente instável, a razão entre a frequência de excitação e a frequência natural é um pouco maior que 2, dependendo da massa final na extremidade livre. Além disso, foi observado que a região de instabilidade paramétrica aumenta com o aumento da massa na extremidade livre. Dessa forma, verifica-se a necessidade de avaliar o sistema estrutural estudado nesta dissertação para razões entre frequência de excitação e frequência natural também próximas à 2.

[Nayfeh e Zavodney \(1989\)](#) deduziram a equação de movimento de uma torre engastada-livre, com massa pontual posicionada arbitrariamente no comprimento, sob excitação vertical na base. Determinou-se a solução aproximada da equação por meio do método de múltiplas escalas. Um programa experimental também foi executado, com vigas metálicas e de fibras de carbono. Obtiveram-se as curvas de resposta em frequência e amplitude, além das condições de estabilidade da solução trivial e não-trivial do modelo teórico e experimental. Os autores observaram uma boa concordância entre os resultados e concluíram que uma estrutura sob excitação paramétrica principal pode ser perigosa ou fatal, devido ao grande movimento de amplitude dos deslocamentos, além da falha por fadiga de todas as vigas metálicas ensaiadas. Desta maneira, nota-se a importância de

verificar a amplitude dos deslocamentos de torres de turbinas eólicas frente às excitações paramétricas.

Chiba, Shimazaki e Ichinohe (2014) avaliaram uma viga vertical engastada-livre, sob excitação harmônica na base nas direções vertical e horizontal. A equação de Mathieu com termos elásticos e de inércia não lineares foi deduzida. Na análise, considerou-se a frequência de excitação na direção vertical sendo aproximadamente o dobro da direção horizontal. A resposta em frequência é obtida pelo método do balanço harmônico e sua estabilidade investigada pelo método do plano de fase. Dentre outras conclusões, os autores observaram que a influência da excitação vertical é predominante quando a amplitude da excitação vertical é praticamente igual ou maior que a horizontal. No entanto, quando a amplitude de excitação horizontal é 10 vezes maior que a vertical, a influência da excitação vertical torna-se pequena. Essa análise de frequência e amplitude pode ser empregada nesta dissertação com o objetivo de verificar a similaridade dos resultados e a aplicabilidade em torre de turbinas eólicas.

Meesala e Hajj (2019) avaliaram a sensibilidade de uma microbarra engastada-livre com massa pontual na extremidade livre, inextensível, submetida a excitação paramétrica, com pequenas variações na elasticidade e massa da ponta. Aplicou-se o método de múltiplas escalas com o objetivo de detectar pequenas variações nos parâmetros não-lineares devido à pequena incerteza na elasticidade e massa da ponta. Dentre outras conclusões, os autores observaram na análise da sensibilidade que uma alteração da ordem de 0,19% na massa da ponta pode causar um efeito apreciável na resposta, alterando o tipo de bifurcação. Dessa forma, nota-se a necessidade de estudar a interferência da massa na extremidade livre da torre na resposta dinâmica da estrutura.

Estudos sobre excitação paramétrica também foram realizados por Franzini e Mazzilli (2016) por meio de um MOR não linear para a análise de *risers*. Obtiveram-se as equações de movimento de três modos de uma haste vertical imersa, sob movimento axial harmônico no topo. A instabilidade principal de Mathieu foi investigada considerando que a frequência de excitação no topo corresponde ao dobro da frequência natural da estrutura. Determinaram-se as séries temporais de amplitude modal, assim como os mapas de amplitude em regime pós-crítico no estado estacionário. Para a estrutura analisada, observa-se uma larga amplitude máxima de oscilação no estado estacionário que ocorre próximo ao k -th modo principal de excitação paramétrica. O aumento de 7,5% na frequência da excitação paramétrica, com relação ao primeiro modo da instabilidade de Mathieu, resultou na diminuição da amplitude pós crítica no estado estacionário em 34% para o mesmo modo. Além da principal região de instabilidade, foram identificadas outras regiões de instabilidade, mas com amplitudes consideravelmente menores.

Por meio dos trabalhos apresentados neste capítulo foi possível concluir que o uso de MOR's na análise de torres de turbinas eólicas permite estimar a resposta da estrutura de maneira satisfatória, com baixo custo computacional. Para tanto, alguns autores consideraram o modelo de viga engastada-livre com massa pontual na extremidade livre, representando a nacele e o rotor. No entanto, a adoção de massa pontual será investigada nesta dissertação, verificando-se a interferência desta consideração na frequência natural da estrutura.

Para estruturas flutuantes (*offshore*), observa-se que no modelo acoplado, torre com plataforma semissubmersível, a rotação do sistema pode se tornar relevante. Dessa forma, no presente estudo, analisa-se a importância da rotação da torre e da plataforma na frequência natural do sistema acoplado.

Os trabalhos que abordaram a excitação paramétrica em vigas engastada-livre com e sem massa pontual servirão de base para a análise do MOR do capítulo 8. Avalia-se a resposta em amplitude da torre quando solicitada por excitações de suporte horizontal, vertical e à rotação. Além disso, verifica-se a possibilidade de ressonância clássica e paramétrica.

Apresentada a revisão bibliográfica, no próximo capítulo expõem-se a metodologia empregada nos modelos desenvolvidos nos capítulos subsequentes.

3 Metodologia

Visando a melhor compreensão das atividades desenvolvidas, neste capítulo apresentam-se os procedimentos utilizados nos capítulos 4, 5, 6, 7 e 8, para análise de torres de turbinas eólicas. Primeiramente, no capítulo 4 especificam-se as propriedades das torres e de seus componentes utilizados nesta dissertação. O capítulo 5 expõe uma metodologia de cálculo de uma seção transversal prismática equivalente, com a mesma frequência natural de uma seção não prismática, conforme Lenci, Clementi e Mazzilli (2013). Verifica-se a aplicabilidade do método em torres de turbinas eólicas.

O capítulo 6 contém um estudo sobre a influência do momento de inércia à rotação do rotor e da nacele na frequência natural da torre. Para tanto, desenvolve-se um MOR de uma barra vertical, rígida, sobre um apoio fixo com mola rotacional, com uma massa na extremidade livre, representando o rotor e a nacele. Obtém-se a equação de movimento linear de um grau de liberdade, a rotação da torre, através do princípio estendido de Hamilton.

Além da formulação analítica, neste capítulo elabora-se um modelo de alta hierarquia, segundo o método dos elementos finitos. Utiliza-se o *software Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements* (GIRAFFE), desenvolvido pelo professor Dr. Alfredo Gay Neto na Universidade de São Paulo, estruturado na linguagem C++. O modelo corresponde a uma barra vertical com 81 nós e 243 graus de liberdade, engastada na base, com uma massa na extremidade livre. Analisa-se a resposta dinâmica do MOR e o modelo no GIRAFFE frente ao momento de inércia à rotação da massa e verifica-se a aderência entre os modelos.

No capítulo 7, investigam-se torres de turbinas eólicas flutuantes (*offshore*) e a influência da rotação da plataforma flutuante e da torre na frequência natural do sistema. Desenvolve-se um MOR de uma barra na vertical, rígida, sobre uma plataforma semissubmersível, com uma massa na extremidade livre, representando o rotor e a nacele. Determinam-se as equações de movimento lineares para os quatro graus de liberdade, a translação lateral e axial, a rotação da torre e da plataforma, por meio do princípio estendido de Hamilton. Obtém-se a frequência natural do modelo acoplado, torre e plataforma.

Além do MOR, neste capítulo elabora-se um modelo no GIRAFFE, que corresponde a uma barra vertical com 88 nós e 264 graus de liberdade, com uma massa na extremidade livre, sobre uma plataforma flutuante semissubmersível. Determinam-se as séries temporais e os espectros de amplitude nas translações e na rotação da estrutura; verifica-se a aderência entre os modelos.

Com base nos estudos apresentados, no capítulo 8 desenvolve-se um MOR não linear de uma torre de turbina eólica, aplicável para sistemas *onshore* e *offshore*. O modelo corresponde a uma barra na vertical, deformável, com uma massa pontual na extremidade livre, com dois graus de liberdade, a translação lateral e axial. Consideram-se excitações de suporte na base da estrutura e carregamentos na extremidade livre. As equações de movimento em meio contínuo são deduzidas, via mecânica analítica, conforme [Mazzilli et al. \(2008\)](#) e [Franzini e Mazzilli \(2016\)](#), e aplica-se o princípio estendido de Hamilton.

No mesmo capítulo, as formulações são particularizadas para duas configurações de torres e aplicam-se diferentes condições de excitação de suporte. As equações de movimento são integradas numericamente e obtém-se a resposta dinâmica por meio de mapas de amplitude pós-crítica em regime estacionário e séries temporais nos graus de liberdade considerados.

4 Torre de turbina eólica

Os modelos desenvolvidos nos próximos capítulos têm a finalidade de verificar quais considerações são pertinentes na análise do comportamento dinâmico de torres de turbinas eólicas. Determinam-se formulações analíticas e modelos em elementos finitos, que são particularizados para os dois tipos de torres indicados neste capítulo.

Inicialmente apresentam-se as propriedades da torre do projeto OC4-Fase II que serão utilizadas nos estudos dos capítulos 5, 6, 7 e 8. Posteriormente são expostas as propriedades da torre SNL 13,2MW, empregadas nos capítulos 5 e 8.

4.1 Propriedades da OC4-Fase II

Como descrito na seção 1.3, a torre de turbina eólica do projeto OC4-Fase II foi desenvolvida por diversas instituições internacionais, com a finalidade de verificar a representatividade das ferramentas de simulação através da comparação entre códigos. Os autores disponibilizaram informações da torre, da nacelle, do rotor e da plataforma semissubmersível, além das metodologias empregadas nas análises, conforme [Jonkman et al. \(2009\)](#) e [Robertson et al. \(2014\)](#). Nesta dissertação foram utilizadas algumas das propriedades da estrutura e outros parâmetros foram estimados. As características dos valores estimados serão detalhadas oportunamente, sendo que tais resultados encontram-se nas Tabelas 4, 5 e 6.

O modelo é ilustrado na Figura 12, onde a base da torre encontra-se fixa sobre uma plataforma flutuante semissubmersível na elevação 10m e o topo na elevação 87,60m, totalizando uma altura de 77,60m. A torre é não prismática, homogênea e apresenta uma variação linear do diâmetro e da espessura da parede, a partir da elevação de 10m, como indicado na Tabela 2.

Figura 12 – Torre de turbina eólica sobre plataforma semissubmersível: OC4-Fase II.

Fonte: Adaptado de Robertson et al. (2014).

Tabela 2 – Propriedades da torre de turbina eólica OC4-Fase II.

Propriedades	Valor e Descrição
Potência da turbina	5 MW
Orientação do rotor	<i>Upwind</i>
Número de pás	3
Diâmetro do rotor e do cubo	126 m, 3 m
Diâmetro externo da base	6,50m
Espessura da parede na base	0,027 m
Diâmetro externo do topo	3,87 m
Espessura da parede no topo	0,019 m
Altura da torre acima do SWL (L)	77,6 m
Massa da torre acima do SWL (M_b)	249710 kg
Inércia à rotação no CG da torre, em torno de y (J_b)	$1,192 \times 10^8 \text{ kgm}^2$
Módulo de elasticidade (E)	$2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
Módulo de cisalhamento	$8,08 \times 10^{10} \text{ N/m}^2$
Densidade do aço (ρ) ¹	8500 kg/m^3
Altura do cubo acima do SWL	80 m
Centro de gravidade acima do SWL	43,4 m
Taxa de amortecimento estrutural crítico (ζ)	1%

Fonte: Adaptado de Jonkman et al. (2009) e de Robertson et al. (2014).

¹ A densidade do aço de 8500 kg/m^3 é maior que a densidade do aço típica de 7850 kg/m^3 para considerar a tinta, os parafusos, as soldas e as flanges, que não estão incluídos nos dados da espessura da torre.

O momento de inércia à rotação da torre J_b foi calculado no CG da torre, sem o rotor e a nacele na extremidade livre. A partir das informações fornecidas na Tabela 2 foram obtidas as funções de massa por unidade de comprimento $\mu(z)$, área $A(z)$ e momento de inércia $I(z)$, conforme as Equações 4.1, 4.2 e 4.3. A coordenada z corresponde ao eixo da torre que varia de 0m a 77,6m.

$$\mu(z) = 0,093z^2 - 42,18z + 4667, \quad (4.1)$$

$$A(z) = 1,09 \times 10^{-5}z^2 - 4,96 \times 10^{-3}z + 0,5491, \quad (4.2)$$

$$I(z) = 1,56 \times 10^{-9}z^4 - 1,306 \times 10^{-6}z^3 + 4,07 \times 10^{-4}z^2 - 0,056z + 2,87. \quad (4.3)$$

Além das propriedades da torre, são necessários alguns dados da nacele, do cubo e das pás, que foram estimados devido a escassez de informações disponíveis. No cálculo do momento de inércia à rotação, a nacele é representada por um cilindro, o cubo por uma casca cilíndrica e as pás por um elemento rígido unifilar. Denomina-se massa na extremidade livre como sendo aquela correspondente ao sistema composto pela nacele, cubo e pás, e além disso, adota-se o centro de gravidade da massa (nacele e rotor) sendo coincidente com o término da torre. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos.

Tabela 3 – Propriedades da massa na extremidade livre (J_m): OC4- Fase II

Propriedades	Valor e Descrição
Massa nacele + cubo + pás ² (M_m)	$3,5 \times 10^5$ kg
Centro de gravidade da massa (acima do SWL)	87,60m
Inércia à rotação no CG da massa, em torno de x (J_{xx})	$3,725 \times 10^7$ kgm ²
Inércia à rotação no CG da massa, em torno de y (J_{yy})	$2,295 \times 10^7$ kgm ²
Inércia à rotação no CG da massa, em torno de z (J_{zz})	$3,654 \times 10^6$ kgm ²

Fonte: Adaptado de Jonkman et al. (2009) e Própria autora.

Explicitadas as propriedades da torre e da massa na extremidade livre, a Tabela 4 ilustra informações somente da plataforma flutuante semissubmersível, conforme Robertson et al. (2014), ou seja, sem considerar a torre, o rotor e a nacele. O momento de inércia à rotação da plataforma J_p foi calculado no CG da mesma.

A Tabela 5 indica o período natural da plataforma flutuante devido às translações nas direções x e z, e à rotação em torno do eixo y, obtidos por Gueydon et al. (2014). Além disso, apresenta-se a massa adicional nas translações em x e z, e à rotação em torno do eixo y em suas respectivas frequências naturais, determinadas pelo grupo de pesquisa da EPUSP. Para o cálculo da massa adicional utilizou-se o programa WAMIT e o modelo da OC4-Fase II para uma profundidade de 200m.

² Valor indicado em Jonkman et al. (2009).

A Tabela 6 expõe informações gerais estimadas da estrutura completa, a torre e plataforma. É importante salientar que nos modelos desenvolvidos no capítulo 7 não foi considerado o peso das linhas de amarração, dessa forma, o volume deslocado V_0 e o empuxo F_E diferem daqueles apresentados em Robertson et al. (2014). Na mesma tabela, apresenta-se a altura metacêntrica $\overline{GM}$ que foi calculada conforme descrição no capítulo 7.

Tabela 4 – Propriedades da plataforma semissubmersível: OC4- Fase II.

Propriedades	Valor e Descrição
Massa plataforma (incluído lastro) (M_p)	$1,3473 \times 10^7$ kg
Centro de gravidade da plataforma (abaixo do SWL)	13,46m
Inércia à rotação no CG da plataforma, em torno de x ($J_{p,xx}$)	$6,827 \times 10^9$ kgm ²
Inércia à rotação no CG da plataforma, em torno de y ($J_{p,yy}$)	$6,827 \times 10^9$ kgm ²
Inércia à rotação no CG da plataforma, em torno de z ($J_{p,zz}$)	$1,226 \times 10^{10}$ kgm ²

Fonte: Adaptado de Robertson et al. (2014).

Tabela 5 – Massa adicional e período natural da plataforma semissubmersível: OC4- Fase II.

Propriedades	Período natural T (s)	Massa adicional
Massa adicional, direção x ($M_{ad,x}$)	113,2	$8,791 \times 10^6$ kg
Massa adicional, direção z ($M_{ad,z}$)	17,0	$1,490 \times 10^7$ kg
Massa adicional, em torno de y ($J_{ad,y}$)	25,1	$6,324 \times 10^9$ kgm ²

Fonte: Adaptado de Gueydon et al. (2014) e grupo EPUSP.

Tabela 6 – Informações gerais da estrutura completa: torre e plataforma: OC4- Fase II.

Propriedades	Valor e Descrição
Volume deslocado (V_0)	13729,5m ³
Área seccionada na linha d' água (A_{WL})	339,29 m ²
Altura metacêntrica ($\overline{GM}$)	6,90 m
Empuxo (F_E)	138053615 N

Fonte: Própria autora.

4.1.1 Torre OC4 com seção transversal escalonada

Nos modelos desenvolvidos no *software* GIRAFFE fez-se necessário escalonar a seção transversal da torre OC4-Fase II, conforme Tabela 7. Devido ao processo de escalonamento, a densidade do aço foi ajustada de $\rho = 8500 \text{ kg/m}^3$ para $\rho_b = 8875 \text{ kg/m}^3$ para obtenção do equilíbrio estático. Outras informações sobre a torre, massa na extremidade livre, plataforma flutuante e massa adicional, são mantidas conforme a seção 4.1.

Tabela 7 – Propriedades geométricas escalonadas da torre OC4-Fase II.

Trecho	Elevação	$D_{\text{ext}}(\text{m})$	$D_{\text{int}}(\text{m})$	$A(z) (\text{m}^2)$	$I(z) (\text{m}^4)$
1	10 a 17,76m	6,237	6,185	0,511	2,465
2	17,76 a 25,52m	5,974	5,923	0,475	2,100
3	25,52 a 33,28m	5,711	5,662	0,439	1,776
4	33,28 a 41,04m	5,448	5,400	0,406	1,492
5	41,04 a 48,80m	5,185	5,139	0,373	1,242
6	48,80 a 56,56m	4,922	4,878	0,342	1,026
7	56,56 a 64,32m	4,659	4,616	0,312	0,838
8	64,32 a 72,08m	4,396	4,355	0,283	0,678
9	72,08 a 79,84m	4,133	4,093	0,256	0,541
10	79,84 a 87,60m	3,870	3,832	0,230	0,426

Fonte: Adaptado de Robertson et al. (2014).

No modelo de torre engastada na base e livre no topo, com massa pontual e seção transversal escalonada, a frequência natural à flexão é de 0,372 Hz ($T=2,688$ s), como será descrito no capítulo 5. Este valor será utilizado como frequência natural de referência, durante o processo de adimensionalização do capítulo 8.

É importante salientar que as dez seções transversais ao longo comprimento é suficiente para obter a primeira frequência natural à flexão da torre com massa pontual. Ao considerar quarenta seções transversais ocorre um aumento de 3,76% na frequência natural. Como esse aumento é relativamente pequeno, adota-se as dez seções transversais com o objetivo de simplificar o modelo em elementos finitos. Além disso, é importante destacar que a frequência natural da torre indicada em Robertson et al. (2014) é próximo de 0,43 Hz.

4.2 Propriedades da torre SNL 13,2 MW

Liu et al. (2018) elaborou um modelo integrado composto por uma torre, plataforma semissubmersível e sistema de ancoragem para suportar uma turbina eólica de 13,2 MW com pás de 100 m de comprimento, desenvolvida por *Sandia National Laboratories* (SNL) (Liu et al. (2018) e Griffith e Resor (2011)). O modelo é ilustrado na Figura 13, onde a base

da torre encontra-se fixa sobre uma plataforma flutuante semissubmersível na elevação 15m e o topo na elevação 129,6m, totalizando uma altura de 114,60m. A torre não prismática e homogênea apresenta uma variação linearmente afunilada do diâmetro e da espessura da parede, a partir da elevação de 15m, como indicado na Tabela 8.

Figura 13 – Torre de turbina eólica sobre plataforma semissubmersível SNL13,2MW.

Fonte: Adaptado de Liu et al. (2018).

A partir das informações fornecidas na Tabela 8 foram obtidas as funções de massa por unidade de comprimento $\mu(z)$, de área $A(z)$, e de momento de inércia $I(z)$, conforme as Equações 4.4, 4.5 e 4.6. A coordenada z corresponde ao eixo da torre que varia de 0m a 114,6m.

$$\mu(z) = 0,064z^2 - 42,894z + 7010,2, \quad (4.4)$$

$$A(z) = 7,53 \times 10^{-6}z^2 - 5,04 \times 10^{-3}z + 0,8247, \quad (4.5)$$

$$I(z) = 1,11 \times 10^{-9}z^4 - 1,37 \times 10^{-6}z^3 + 6,32 \times 10^{-4}z^2 - 0,1285z + 9,746. \quad (4.6)$$

4.2.1 Torre SNL 13,2MW com seção transversal escalonada

Nos modelos desenvolvidos no *software* GIRAFFE fez-se necessário escalonar a seção transversal da torre SNL 13,2MW, conforme Tabela 9. Devido ao processo de escalonamento, a densidade do aço foi ajustada de $\rho = 8500kg/m^3$ para $\rho_b = 8875kg/m^3$ para obtenção do equilíbrio estático.

Tabela 8 – Propriedades da torre de turbina eólica SNL 13,2MW.

Propriedades	Valor e Descrição
Potência do projeto	13,2 MW
Orientação do rotor	<i>Upwind</i>
Número de pás	3
Diâmetro do rotor e do cubo	205m,5m
Diâmetro externo da base	9,75 m
Espessura da parede na base	0,027 m
Diâmetro externo do topo	5,805 m
Espessura da parede no topo	0,019 m
Comprimento da torre (L)	114,60m
Massa da torre acima do SWL (M_b)	553995 kg
Massa nacele + cubo + pás (M_m)	1452131 kg
Módulo de elasticidade (E)	$2,1 \times 10^{11}$ N/m ²
Módulo de cisalhamento	$8,08 \times 10^{10}$ N/m ²
Densidade do aço (ρ)	8500 kg/m ³
Altura do cubo acima do SWL	133,5m
Taxa de amortecimento estrutural crítico (ζ)	1%

Fonte: Liu et al. (2018).

Tabela 9 – Propriedades geométricas escalonadas da torre SNL 13,2MW.

Trecho	Elevação	$D_{ext}(m)$	$D_{int}(m)$	$A(z) (m^2)$	$I(z) (m^4)$
1	15,00 a 26,46m	9,355	9,303	0,768	8,354
2	26,46 a 37,92m	8,961	8,910	0,713	7,117
3	37,92 a 49,38m	8,566	8,517	0,660	6,021
4	49,38 a 60,84m	8,172	8,124	0,609	5,056
5	60,84 a 72,30m	7,778	7,732	0,560	4,212
6	72,30 a 83,76m	7,383	7,339	0,513	3,477
7	83,76 a 95,22m	6,989	6,946	0,468	2,842
8	95,22 a 106,68m	6,594	6,553	0,425	2,298
9	106,68 a 118,14m	6,199	6,160	0,384	1,835
10	118,14 a 129,60m	5,805	5,767	0,345	1,445

Fonte: Própria autora.

No modelo de torre engastada na base e livre no topo, com massa pontual e seção transversal escalonada, a frequência natural à flexão é de 0,187 Hz ($T=5,34$ s), como será descrito no capítulo 5. Este valor será utilizado como frequência natural de referência, durante o processo de adimensionalização do capítulo 8.

Da mesma forma que a OC4-Fase II, as dez seções transversais ao longo comprimento é suficiente para obter a primeira frequência natural a flexão da torre com massa pontual.

Ao considerar quarenta seções transversais ocorre um aumento de 4,81% na frequência natural. Como esse aumento é relativamente pequeno, adota-se as dez seções transversais com o objetivo de simplificar o modelo em elementos finitos. Além disso, é importante destacar que a frequência natural da torre indicada em [Liu et al. \(2018\)](#) é um pouco abaixo de 0,20 Hz.

Apresentadas as características e considerações da OC4-Fase II e da SNL 13,2MW, no capítulo 5 verificam-se em quais condições as torres de turbinas eólicas podem ser tratadas com seção transversal prismática, sem alteração da resposta dinâmica das mesmas.

5 Definição de uma seção transversal equivalente

Este capítulo tem o objetivo de verificar sob quais condições as torres de turbinas eólicas de seção transversal não prismática podem ser tratadas como prismáticas, sem alteração da resposta dinâmica. Para tanto, utiliza-se o trabalho de [Lenci, Clementi e Mazzilli \(2013\)](#), que calculam propriedades mecânicas equivalentes de cabos e vigas prismáticas, tendo as mesmas frequências naturais das não prismáticas, pelo menos até primeira ordem. Os autores consideram diferentes tipos de vinculações, sem adição de massas pontuais.

Nesta dissertação, apresenta-se sucintamente a metodologia para vigas engastada-livre e, posteriormente, aplica-se o método para duas configurações de torre, a do projeto OC4-Fase II e a SNL 13,2MW. Além disso, com auxílio do *software* GIRAFFE obtém-se a frequência natural de tais torres, com e sem adição de massa na extremidade livre.

O procedimento consiste em utilizar a equação governante de vibração livre de uma viga clássica de Bernoulli-Euler. Aplica-se o método de desenvolvimento assintótico Poincaré-Lindstedt, para vigas engastada-livre, e obtém-se os termos de ordem zero da série expandida e a solução geral, conforme Equações 5.1 e Equação 5.2, respectivamente.

$$u_0'''(\xi) - \sigma u_0''(\xi) - \hat{\omega}^2 u_0(\xi) = 0, \quad (5.1)$$

$$u_0(\xi) = c_1 \sin(a\xi) + c_2 \cos(a\xi) + c_3 \sinh(b\xi) + c_4 \cosh(b\xi), \quad (5.2)$$

$$a = \frac{1}{2} \sqrt{-2\sigma + 2\sqrt{\sigma^2 + 4\hat{\omega}^2}}, \quad (5.3)$$

$$b = \frac{1}{2} \sqrt{2\sigma + 2\sqrt{\sigma^2 + 4\hat{\omega}^2}}, \quad (5.4)$$

$$\sigma = \frac{N_0(\sigma)L^2}{EI_0(\sigma)}, \quad (5.5)$$

$$\omega = \frac{\hat{\omega}}{L^2} \sqrt{\frac{EI_0}{\mu_0}}, \quad (5.6)$$

sendo que $\xi = z/L$ corresponde a um adimensional que relaciona a posição z e o comprimento da torre L ; $u_0(\xi)$ representa o deslocamento adimensional lateral da torre; ω e $\hat{\omega}$ são as frequências naturais dimensional e adimensional, respectivamente; I_0 o momento de inércia da seção transversal, N_0 a força normal atuante na torre e o índice zero refere-se à seção equivalente.

Para as condições de contorno de uma torre engastada-livre, $u_0(0) = u'_0(0) = u''_0(1) = u'''_0(1) - \sigma u'_0 = 0$, a equação transcendental e os coeficientes são dados pelas Equações 5.7, 5.8 e 5.9.

$$2\hat{\omega}^2 + \sigma\hat{\omega} \sin(a) \sinh(b) + (\sigma^2 + 2\hat{\omega}^2) \cos(a) \cosh(b) = 0, \quad (5.7)$$

$$c_2 = -c_4 = -c_1 \frac{a[a \sin(a) + b \sinh(b)]}{a^2 \cos(a) + b^2 \cosh(b)}, \quad (5.8)$$

$$c_3 = -c_1 \frac{a}{b}, \quad (5.9)$$

onde c_1 corresponde a uma amplitude arbitrária. Com a expansão dos termos de primeira ordem, os autores obtiveram as características da seção equivalente, indicadas pelas Equações 5.10, 5.11 e 5.12, para as condições de contorno estabelecidas.

$$EI_0 = \frac{EI(\xi)\sigma u'_0(1)u_0(1) + \int_0^1 EI(\xi)u''_0(\xi)^2 d\xi}{\sigma u'_0(1)u_0(1) + \int_0^1 u''_0(\xi)^2 d\xi} \quad (5.10)$$

$$N_0 = \frac{-N(\xi)u'_0(1)u_0(1) + \int_0^1 N(\xi)u'_0(\xi)^2 d\xi}{-u'_0(1)u_0(1) + \int_0^1 u'_0(\xi)^2 d\xi} \quad (5.11)$$

$$\mu_0 = \frac{\int_0^1 \mu(\xi)u_0^2(\xi) d\xi}{\int_0^1 u_0^2(\xi) d\xi}, \quad (5.12)$$

$$N'(\xi) = -\mu(\xi)g, \quad (5.13)$$

sendo que $\mu(\xi)$ e μ_0 correspondem às massas por unidade de comprimento da seção não prismática e da seção equivalente, respectivamente.

Após apresentação sucinta do método, nas seções 5.1 e 5.2 consideram-se as propriedades das torres estudadas para o cálculo da seção transversal e frequência natural equivalente. Além disso, verifica-se a aderência dos resultados com aqueles obtidos nos modelos desenvolvidos no GIRAFFE.

5.1 Estudo de caso: Torre OC4

Para aplicação do método, consideram-se as propriedades da torre do projeto OC4-Fase II, com seção transversal cilíndrica e linearmente afunilada, conforme Tabela 2. A partir de tais características, as expressões da massa linear e do momento de inércia foram estimadas, conforme Equações 5.14 e 5.15, respectivamente, segundo o sistema internacional de unidades. Informações adicionais sobre essa estrutura podem ser encontradas no capítulo 4.

$$\mu(\xi) = 560,13\xi^2 - 3273,3\xi + 4667 \quad (5.14)$$

$$I(\xi) = 0,0566\xi^4 - 0,6105\xi^3 + 2,451\xi^2 - 4,3466\xi + 2,8757 \quad (5.15)$$

sendo $0 \leq \xi \leq 1$

A partir das propriedades da torre não prismática, obtém-se as características da seção transversal equivalente e a respectiva frequência natural. Considerando a seção como cilíndrica, obtém-se o diâmetro externo D_{ext} , interno D_{int} e a média D_0 , com base no momento de inércia I_0 e área A_0 , indicados na Tabela 10.

Tabela 10 – Propriedades equivalentes à torre OC4-Fase II, sem adição de massa na extremidade livre.

Propriedades	Valor e Descrição	Propriedades	Valor e Descrição
EI_0	$4,5433 \times 10^{11} \text{ Nm}^2$	I_0	$2,164 \text{ m}^4$
N_0 ¹	-45278,7 N	ρ	8500 kg/m^3
μ_0	2404,81 kg/m	A_0	$0,283 \text{ m}^2$
ω	8,025 rad/s	D_{ext}	7,833 m
f	1,277 Hz	D_{int}	7,810 m
E	$2,1 \times 10^{11}$	D_0	7,820 m

Fonte: Própria autora.

Após o cálculo da seção equivalente, elaboram-se modelos de torre segundo o método dos elementos finitos por meio do *software* GIRAFFE, com o objetivo de comparar os resultados e investigar a aplicabilidade do método com e sem a adição de uma massa pontual na extremidade livre. Para essa análise consideram-se as propriedades da OC4-Fase II.

A estrutura é representada por uma barra vertical, cilíndrica, engastada na base, com 81 nós e 243 graus de liberdade. Desenvolvem-se quatro modelos, sendo que o modelo 1 apresenta seção transversal escalonada, conforme Tabela 7. O modelo 2 possui seção transversal equivalente, com as propriedades indicadas na Tabela 10. Os modelos 3 e 4 são iguais a 1 e 2, respectivamente, com a adição da massa pontual M_m no nó 81. A Tabela 11 contém um resumo das características da torre, sendo que informações adicionais encontram-se já descritas no capítulo 4.

Tabela 11 – Propriedades da torre escalonada: OC4-Fase II.

Propriedades	Valor e Descrição
L	77,6 m
E	$2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
ρ_b	8875 kg/m^3
$D(z)$ ²	var.
M_m ³	350000 kg

Fonte: Adaptado de Robertson et al. (2014) e Própria autora.

¹ Valor negativo corresponde à compressão.

Os dados inseridos nos códigos estão indicados na Figura 14, sendo que ρ_b e ρ correspondem a densidade do aço, com e sem escalonamento, respectivamente; E , L , $D(z)$, D_{ext} , D_{int} e N_0 são o módulo de elasticidade, a altura, diâmetro escalonado, o diâmetro externo e interno equivalente, e a força normal equivalente, respectivamente; e x e z são as direções lateral e axial do modelo.

Figura 14 – Modelos no GIRAFFE (a) Modelo 1: seção transversal escalonada; (b) Modelo 2: Seção transversal equivalente.

Fonte: Própria autora.

A partir do código, obtém-se as frequências naturais de todos os modelos no GIRAFFE e as diferenças percentuais em relação ao modelo 1, conforme Tabela 12. Como esperado, o método de Lenci, Clementi e Mazzilli (2013) determina frequências naturais compatíveis com os modelos 1 e 2, sendo que a diferença de 8,15% com o modelo 1 pode ser minimizada com alteração do escalonamento.

Tabela 12 – Frequência natural da torre OC4-Fase II, sem massa pontual - GIRAFFE.

Procedimento	Frequência (Hz)	Diferença (%)
Modelo 1	1,181	-
Modelo 2	1,262	6,84
Método ⁴	1,277	8,15

Fonte: Própria autora.

² Ver Tabela 7.

³ Utilizado nos modelos 3 e 4.

⁴ Lenci, Clementi e Mazzilli (2013).

Na Tabela 13 verifica-se que ao utilizar a torre com seção transversal equivalente e massa na extremidade livre, sem a devida adaptação do método, ocorre uma diferença de 14,69% na frequência natural da torre em relação a seção escalonada. Essa diferença pode comprometer a resposta dinâmica da estrutura, o que inviabiliza o uso da seção transversal equivalente em torres de turbinas eólicas. Uma sugestão de trabalho seria expandir a formulação apresentada pelos autores, considerando massa concentrada na extremidade livre.

Tabela 13 – Frequência natural da torre OC4-Fase II, com massa pontual - GIRAFFE.

Procedimento	Frequência (Hz)	Diferença (%)
Modelo 3	0,372	-
Modelo 4	0,426	14,69

Fonte: Própria autora.

5.2 Estudo de caso: Torre SNL 13,2MW

Como observado na seção anterior, a adição de massa pontual na extremidade livre da torre ocasiona uma diferença percentual de 14,69% na frequência natural da torre, entre o modelo escalonado e o de seção equivalente. Com o intuito de verificar o comportamento dessa diferença percentual, o método de [Lenci, Clementi e Mazzilli \(2013\)](#) é novamente aplicado para uma torre de maior comprimento, a SNL 13,2MW.

As propriedades da torre com seção transversal cilíndrica e linearmente afunilada encontram-se na Tabela 8. A partir de tais características, as expressões da massa linear e do momento de inércia foram estimadas, conforme Equações 5.16 e 5.17, respectivamente, segundo o sistema internacional de unidades. Informações adicionais sobre essa estrutura podem ser encontradas no capítulo 4.

$$\mu(\xi) = 841,06\xi^2 - 4915,7\xi + 7010,2 \quad (5.16)$$

$$I(\xi) = 0,192\xi^4 - 2,068\xi^3 + 8,302\xi^2 - 14,727\xi + 9,746 \quad (5.17)$$

$$\text{sendo } 0 \leq \xi \leq 1$$

A partir das propriedades da torre não prismática, obtém-se as características da seção transversal equivalente e a respectiva frequência natural. Considerando a seção como cilíndrica, obtém-se o diâmetro externo D_{ext} , interno D_{int} e a média D_0 , com base no momento de inércia I_0 e área A_0 , indicados na Tabela 14.

⁵ Valor negativo corresponde à compressão.

Tabela 14 – Propriedades equivalentes à torre SNL 13,2MW, sem adição de massa na extremidade livre.

Propriedades	Valor e Descrição	Propriedades	Valor e Descrição
EI_0	$1,545 \times 10^{12} \text{ Nm}^2$	I_0	$7,359 \text{ m}^4$
N_0 ⁵	-68023,8 N	ρ	8500 kg/m^3
μ_0	$3612,86 \text{ kg/m}$	A_0	$0,425 \text{ m}^2$
ω	$5,536 \text{ rad/s}$	D_{ext}	$11,780 \text{ m}$
f	$0,881 \text{ Hz}$	D_{int}	$11,757 \text{ m}$
E	$2,1 \times 10^{11}$	D_0	$11,769 \text{ m}$

Fonte: Própria autora.

Após o cálculo da seção equivalente, elaboram-se modelos de torre por meio do *software* GIRAFFE, ilustrados na Figura 14. A estrutura é representada por uma barra vertical, cilíndrica, engastada na base, com 81 nós e 243 graus de liberdade. Desenvolvem-se quatro modelos, sendo que o modelo 1 apresenta seção transversal escalonada, conforme Tabela 9. O modelo 2 possui seção transversal equivalente, com as propriedades indicadas na Tabela 14. Os modelos 3 e 4 são iguais a 1 e 2, respectivamente, com a adição da massa pontual M_m no nó 81. A Tabela 15 contém um resumo das características da torre, sendo que informações adicionais encontram-se já descritas no capítulo 4.

Tabela 15 – Propriedades da torre escalonada: SNL 13,2MW.

Propriedades	Valor e Descrição
L	114,6 m
E	$2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$
ρ_b	8875 kg/m^3
$D(z)$ ⁶	var.
M_m ⁷	1452131 kg

Fonte: Própria autora.

A partir do código, obtém-se as frequências naturais de todos os modelos no GIRAFFE e as diferenças percentuais em relação ao modelo 1, conforme Tabela 16. Como esperado, o método de Lenci, Clementi e Mazzilli (2013) determina frequências naturais compatíveis com os modelos 1 e 2, sendo que a diferença de 8,25% com o modelo 1 pode ser minimizada com alteração do escalonamento.

⁶ Ver Tabela 9.⁷ Utilizado nos modelos 3 e 4.⁸ Lenci, Clementi e Mazzilli (2013).

Tabela 16 – Frequência natural da torre SNL 13,2MW, sem massa pontual - GIRAFFE.

Procedimento	Frequência (Hz)	Diferença (%)
Modelo 1	0,814	-
Modelo 2	0,851	4,55
Método ⁸	0,881	8,25

Fonte: Própria autora.

Na Tabela 17 verifica-se que ao utilizar a torre com seção transversal equivalente e massa na extremidade livre, sem a devida adaptação do método, ocorre uma diferença de 16,08% na frequência natural da torre em relação a seção escalonada. Dessa forma, nota-se que a diferença percentual na frequência natural aumentou de 14,69% para 16,08% quando avaliada a torre OC4-Fase II e SNL 13,2MW, respectivamente.

Tabela 17 – Frequência natural da torre SNL 13,2MW, com massa pontual - GIRAFFE.

Procedimento	Frequência (Hz)	Diferença (%)
Modelo 3	0,187	-
Modelo 4	0,216	16,08

Fonte: Própria autora.

5.3 Conclusões deste capítulo

Nas análises deste capítulo, desenvolvem-se modelos no *software* GIRAFFE para investigar a aplicabilidade do método de [Lenci, Clementi e Mazzilli \(2013\)](#). A partir dos resultados, nota-se que a utilização do método resulta nas propriedades de uma seção transversal prismática equivalente de maneira bastante satisfatória.

O modelo de torre com seção transversal prismática equivalente foi comparado com o de seção transversal não prismática, com a adição de massa na extremidade livre. Observou-se uma diferença percentual de 14,69% e 16,08% na frequência natural, em relação a seção não prismática, para a torre do projeto OC4-fase II e a SNL 13,2MW, respectivamente. Nota-se que a utilização do método com massa pontual, sem a devida adaptação, pode interferir na resposta dinâmica da estrutura, devido à alteração da frequência natural.

Dessa forma, apesar da utilização de uma seção transversal prismática equivalente simplificar as formulações nos capítulos subsequentes, o método apresentado por [Lenci, Clementi e Mazzilli \(2013\)](#) não será utilizado neste trabalho para evitar possíveis divergências na resposta dinâmica da estrutura.

Após a análise da seção transversal da torre, o capítulo 6 expõe um estudo acerca do momento de inércia à rotação do rotor e da nacele na resposta dinâmica da estrutura.

6 Estudo dos efeitos da nacele e rotor

Neste capítulo desenvolve-se a formulação analítica e o modelo em elementos finitos de uma torre de turbina eólica. A estrutura é retratada por uma barra na vertical com uma massa na extremidade superior, representando a nacele e o rotor, com seção transversal não prismática e homogênea. Obtém-se a frequência natural dos modelos para torre com massa pontual na extremidade livre e com momento de inércia à rotação.

6.1 Formulação analítica

A estrutura corresponde uma barra na vertical, rígida, apoiada na base com uma mola rotacional de rigidez $k_{\theta b}$ e uma massa na extremidade livre. Obtém-se a equação de movimento linear, com um grau de liberdade, a rotação da torre θ_b . A Figura 15 ilustra o modelo estudado.

Figura 15 – Modelo de torre com massa na extremidade livre.

Fonte: Própria autora.

M_m e J_m são a massa e o momento de inércia à rotação da nacele e do rotor com relação centro de gravidade da mesma; M_b e J_b são a massa e o momento de inércia à rotação da torre com relação centro de gravidade da mesma; E e L são, respectivamente, o módulo de elasticidade e a altura da torre; $A(z)$, $I(z)$ e l_b são, respectivamente, área, o

momento de inércia da seção transversal e a posição do centro de gravidade da torre. x e z são, respectivamente, as direções lateral e axial do modelo; $k_{\theta b}$ corresponde a rigidez rotacional da torre.

A equação de movimento do MOR foi deduzida a partir do princípio estendido de Hamilton, apresentado em [Meirovitch \(2003\)](#), descrito como segue:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta K - \delta U + \delta W^{nc}) dt = 0 \quad (6.1)$$

Sendo δK a variação da energia cinética, δU a variação energia potencial e δW^{nc} o trabalho virtual das forças generalizadas não conservativas. A energia cinética, potencial gravitacional e potencial de deformação da mola são dadas pelas Equações 6.2, 6.3 e 6.4.

$$K = \frac{1}{2} M_b v_b^2 + \frac{1}{2} J_b \dot{\theta}_b^2 + \frac{1}{2} M_m v_m^2 + \frac{1}{2} J_m \dot{\theta}_b^2 \quad (6.2)$$

$$U^g = gL \cos \theta_b (M_b \alpha + M_m), \quad \text{onde } \alpha = \frac{l_b}{L} \quad (6.3)$$

$$U^{sm} = \frac{1}{2} k_{\theta b} \theta_b^2 \quad (6.4)$$

Sendo que v_b e v_m correspondem às velocidades no centro de gravidade da torre e da massa na extremidade livre, respectivamente, dados por:

$$\vec{v}_b = (\dot{\theta}_b \alpha L \cos \theta_b) \vec{i} + (-\dot{\theta}_b \alpha L \sin \theta_b) \vec{k} \quad (6.5)$$

$$\vec{v}_m = (\dot{\theta}_b L \cos \theta_b) \vec{i} + (-\dot{\theta}_b L \sin \theta_b) \vec{k} \quad (6.6)$$

Como o objetivo é determinar a frequência natural do modelo, então o trabalho virtual das forças não conservativas δW^{nc} é nulo. Aplicando o princípio estendido de Hamilton, obtém-se a Equação 6.7:

$$\ddot{\theta}_b [L^2 (M_b \alpha^2 + M_m) + J_b + J_m] + [k_{\theta b} - gL (M_b \alpha + M_m)] \theta_b = 0 \quad (6.7)$$

Portanto, a frequência natural do sistema é dada por:

$$\omega = \sqrt{\frac{[k_{\theta b} - gL (M_b \alpha + M_m)]}{[L^2 (M_b \alpha^2 + M_m) + J_b + J_m]}} \quad (6.8)$$

A formulação foi desenvolvida considerando a torre como elemento rígido, no entanto a torre real é uma estrutura deformável. Dessa forma, para suprir esse comportamento, foi estimada a rigidez à rotação da torre $k_{\theta b}$ ([Tomin, Pasetti e Madi \(2017\)](#)) por meio do conceito de trabalho virtual, juntamente com o teorema dos esforços virtuais (TEV).

O TEV estabelece que se o trabalho virtual complementar interno δT_i^* de uma estrutura for igual ao trabalho virtual complementar externo δT_e^* então a solução é compatível para quaisquer esforços virtuais, portanto

$$\delta T_i^* = \delta T_e^* \quad (6.9)$$

O trabalho virtual complementar dos esforços internos e externos para uma estrutura elástica linear, sem variação da temperatura, são dados pelas Equações 6.10 e 6.12, respectivamente. Os parâmetros N e M_y correspondem ao esforço normal e ao momento fletor real, e δN e δM_y ao esforço normal e ao momento fletor virtual, respectivamente; δq_x e δq_z a carga virtual lateral e axial, e u e w os deslocamentos lateral e axial, respectivamente.

$$\delta T_i^* = \int_{est} \delta N(w')ds + \int_{est} \delta M_y(-u'')ds, \quad onde \quad (6.10)$$

$$w' = \frac{N}{EA} \quad e \quad u'' = -\frac{M_y}{EI_y} \quad (6.11)$$

$$\delta T_e^* = \int_{est} (\delta q_x u + \delta q_z w)ds \quad (6.12)$$

Considera-se a torre como uma barra vertical, engastada na base e livre no topo, composta de material elástico linear. Adota-se $N = 0$, $\delta q_z = 0$ e aplica-se uma força real P e uma carga virtual $\delta q_x = 1$ na direção x na extremidade livre da torre, conforme Figura 16.

Figura 16 – Diagramas de momento fletor real (a) e virtual (b).

Fonte: Própria autora.

Substituindo as Equações 6.10, 6.11 e 6.12 na Equação 6.9, obtém-se:

$$\int_{est} \delta M_y \frac{M_y}{EI_y} ds = \int_0^L (-z + L) \frac{(-Pz + PL)}{EI(z)} dz = 1 \cdot u \quad (6.13)$$

Para pequenos deslocamentos, θ_b pode ser definido conforme Equação 6.14.

$$\theta_b = \frac{u}{L} = \frac{P}{L} \int_0^L \frac{(z^2 - 2zL + L^2)}{EI(z)} dz \quad (6.14)$$

Portanto, a rigidez à rotação da torre é dada pela Equação 6.15.

$$k_{\theta_b} = \frac{M_y(0)}{\theta_b} = L^2 \left[\int_0^L \frac{z^2 - 2zL + L^2}{EI(z)} dz \right]^{-1} \quad (6.15)$$

O MOR desenvolvido nesta seção pode ser aplicado a diferentes configurações de torres de turbinas eólicas. Na seção 6.3 as equações de movimento serão particularizadas para a torre do projeto OC4-Fase II.

6.2 Análise numérica

A formulação analítica elaborada na seção anterior apresenta reduzido número de graus de liberdade e possibilita estimar a frequência natural do sistema. Nesta seção desenvolve-se um modelo em elementos finitos por meio do *software* GIRAFFE, com o objetivo de comparar os resultados e verificar a compatibilidade entre os modelos.

O modelo é o mesmo apresentado no capítulo 5, exceto pela inclusão do momento de inércia à rotação (J_m) da massa (M_m) no nó 81. As informações inseridas no código estão indicadas na Figura 17, sendo que x e z são as direções lateral e axial, respectivamente. Figura 18 ilustra o modelo desenvolvido e o primeiro modo de vibrar à flexão por meio da ferramenta de visualização do *software* Paraview.

Na análise, foi considerada a torre do projeto OC4-Fase II, que possui uma seção transversal não prismática, cilíndrica, homogênea e afunilada ao longo da altura. Para a modelagem no GIRAFFE a estrutura foi escalonada, conforme a Tabela 7 indicada no capítulo 4.

O código desenvolvido nesta seção pode ser aplicado a diferentes configurações de torres de turbinas eólicas. Na seção 6.3 o modelo é particularizado para a torre do projeto OC4-Fase II.

Figura 17 – Modelo escalonado da torre: GIRAFFE.

Fonte: Própria autora.

Figura 18 – (a) Modelo ilustrativo da torre OC4-Fase II e (b) 1º modo de vibrar à flexão.

Fonte: Própria autora.

6.3 Estudo de caso

Para o cálculo da frequência natural do MOR e do modelo no GIRAFFE são consideradas as propriedades da torre de turbina eólica do projeto OC4-Fase II, definida

no capítulo 4. Nesta seção, além de considerar uma torre específica, avalia-se a massa no topo da torre (nacele e rotor) como sendo pontual, portanto J_m igual a zero, e com momento de inércia à rotação.

Desenvolvem-se quatro modelos para análise da interferência do momento de inércia à rotação da massa na frequência natural da estrutura. Em cada modelo empregam-se diferentes porcentagens do raio de giração da massa r_{ii} , sendo este determinado pela Equação 6.16.

$$r_{ii} = \sqrt{\frac{J_{ii}}{M_m}} \quad (6.16)$$

O modelo 1 corresponde à configuração de torre com massa pontual na extremidade livre e o modelo 2 com o raio de giração da OC4-Fase II, sendo que o momento de inércia à rotação e a massa encontram-se na Tabela 3. Os modelos 3 e 4 correspondem à 1% e 200% do raio de giração do modelo 2, respectivamente. A Tabela 18 apresenta as propriedades dos modelos estudados e a Tabela 19 indica um resumo das informações da OC4-Fase II, sendo que dados adicionais encontram-se no capítulo 4.

Tabela 18 – Momento de inércia à rotação da massa na extremidade livre J_m .

i	Modelo 2		Modelo 3		Modelo 4	
	$r_{ii}(\text{m})$	$J_{ii} \text{ (kgm}^2\text{)}$	$r_{ii}(\text{m})$	$J_{ii} \text{ (kgm}^2\text{)}$	$r_{ii}(\text{m})$	$J_{ii} \text{ (kgm}^2\text{)}$
x	10,317	$3,725 \times 10^7$	0,103	$3,725 \times 10^3$	20,634	$1,490 \times 10^8$
y	8,098	$2,295 \times 10^7$	0,081	$2,295 \times 10^3$	16,196	$9,180 \times 10^7$
z	3,231	$3,654 \times 10^6$	0,032	$3,654 \times 10^2$	6,462	$1,461 \times 10^7$

Fonte: Própria autora.

Tabela 19 – Resumo das propriedades da OC4-Fase II.

Propriedades	Valor e Descrição	Propriedades	Valor e Descrição
E	$2,1 \times 10^{11} \text{ N/m}^2$	M_b	249710 kg
L	77,6 m	M_m	350000 kg
α	0,43	J_b	$1,192 \times 10^8 \text{ kgm}^2$
g	$9,81 \text{ m/s}^2$	ρ_b	8875 kg/m^3
$D(z)$ ¹	variável	k_{θ_b}	$1,45 \times 10^{10} \text{ Nm}$

Fonte: Adaptado de Robertson et al. (2014) e Própria autora.

Com as informações apresentadas, obtém-se a frequência natural do MOR e do modelo em elementos finitos, ilustrados na seção 6.4.

¹ Ver Tabela 7.

6.4 Resultados

A partir dos modelos desenvolvidos nas seções 6.1 e 6.2 e das propriedades da torre de turbina eólica, obtiveram-se as frequências naturais da estrutura para os casos de massa pontual (modelo 1) e com raio de giração da OC4-Fase II (modelo 2). Além disso, verificaram-se os casos onde o raio de giração corresponde a 1% e 200% em relação ao modelo 2 (modelos 3 e 4, respectivamente). Os resultados numéricos são apresentados na Tabela 20.

Tabela 20 – Frequência e período natural dos modelos.

Casos	MOR		Modelo GIRAFFE	
	Frequência (Hz)	Período (s)	Frequência (Hz)	Período (s)
Modelo 1	0,3782	2,644	0,3717	2,690
Modelo 2	0,3764	2,656	0,3663	2,730
Modelo 3	0,3782	2,644	0,3720	2,688
Modelo 4	0,3714	2,692	0,3493	2,863

Fonte: Própria autora.

Com base nos resultados, observa-se uma boa aderência entre o MOR e o modelo no GIRAFFE, com uma diferença máxima na frequência de 1,74% para o modelo 1 e 2,75% para o modelo 2, em relação ao modelo no GIRAFFE.

Na análise do momento de inércia à rotação, verifica-se que ao considerar a massa na extremidade livre como pontual (modelo 1) ou com o raio de giração do modelo 2, ocorre uma diferença máxima de 1,47% na frequência natural do sistema, em relação ao modelo 2, conforme mostra a Tabela 21. Além disso, com o aumento do raio de giração para 200% em relação ao modelo 2, essa diferença chega a 4,64%. Dessa forma, assumir a massa na extremidade livre como pontual é uma hipótese simplificadora bastante aceitável para a torre em análise.

Tabela 21 – Diferenças entre as frequências naturais em relação ao modelo 2.

Casos	Diferença entre períodos (%)	
	MOR	GIRAFFE
Modelo 2 <i>versus</i> Modelo 1	0,478	1,474
Modelo 2 <i>versus</i> Modelo 4	1,328	4,641

Fonte: Própria autora.

6.5 Conclusões deste capítulo

A partir das análises deste capítulo, conclui-se que o MOR de um grau de liberdade apresenta uma boa aderência com o modelo de alta hierarquia, desenvolvido no GIRAFFE. A proximidade entre os resultados comprova que, muitas vezes, modelos simplificados possibilitam estimar a resposta da estrutura de maneira eficaz.

Além disso, nota-se que considerar a massa na extremidade livre como pontual ou com momento de inércia à rotação interfere pouco na frequência natural da estrutura. Quando o raio de giração corresponde a 200% em relação ao modelo 2, ocorre uma diferença máxima de 4,64% na frequência natural em relação ao modelo 2. Tal diferença interfere pouco no comportamento dinâmico do modelo, o que possibilita desprezar o momento de inércia à rotação da massa nos estudos posteriores, com a finalidade de simplificar as formulações. Desta maneira, nos capítulos 7 e 8 a massa na extremidade livre será considerada como pontual.

É importante salientar que Nagata e Verdini (2016) obtiveram alterações na frequência natural da torre, quando as pás são tratadas como elementos flexíveis. No entanto, nesta dissertação essa abordagem não será adotada pois excede o escopo de trabalho previsto para o programa de mestrado.

7 Estudo dos efeitos da plataforma flutuante sobre a qual a torre é montada

No capítulo 7 desenvolve-se a formulação analítica e o modelo em elementos finitos de uma torre de turbina eólica flutuante. A estrutura é retratada por uma barra na vertical com uma massa pontual na extremidade superior, representando a nacelle e o rotor, com seção transversal não prismática e homogênea. Verifica-se a interferência da movimentação da plataforma flutuante no comportamento do conjunto e a compatibilidade entre os modelos por meio das frequências naturais obtidas.

7.1 Formulação analítica

A torre corresponde uma barra na vertical, rígida, sobre uma plataforma flutuante, com uma massa pontual na extremidade livre, conforme a Figura 19. São obtidas as equações de movimento lineares, com quatro graus de liberdade, as translações x e z , e rotação θ_s da plataforma flutuante¹, e rotação da torre θ_b .

Figura 19 – Modelo de torre com massa pontual sobre plataforma semissubmersível.

Fonte: Própria autora.

¹ Em engenharia naval, é comum o uso da nomenclatura em língua inglesa para os movimentos. O deslocamento x é conhecido como *surge*, o deslocamento z como *heave* e a rotação θ_s como *pitch*.

M_m é a massa da nacela e do rotor; M_p e J_p são a massa e o momento de inércia à rotação da plataforma com relação ao seu centro de gravidade; $M_{ad,x}$, $M_{ad,z}$ e $J_{ad,y}$ são as componentes da matriz de massa adicional nas direções x e z, e em torno do eixo y; M_b e J_b são a massa e o momento de inércia à rotação da torre com relação ao seu centro de gravidade; E e L são, respectivamente, o módulo de elasticidade e a altura da torre; $A(z)$, $I(z)$ e l_b são, respectivamente, área, o momento de inércia da seção transversal e a posição do centro de gravidade da torre. x e z são as direções lateral e axial, e u e w os deslocamentos lateral e axial do modelo, respectivamente. x_{gs} e z_{gs} correspondem a localização da torre sobre a plataforma flutuante. k_x , k_z , $k_{\theta b}$ e $k_{\theta p}$ são as constantes de rigidez à translação em x e z, e à rotação da torre e da plataforma, respectivamente.

As equações de movimento do MOR foram deduzidas a partir do princípio estendido de Hamilton. A energia cinética, potencial gravitacional e de deformação da mola são dadas pelas Equações 7.1, 7.2 e 7.3, respectivamente.

$$K = \frac{1}{2}(M_p + M_{ad})v_p^2 + \frac{1}{2}(J_p + J_{ad})\dot{\theta}_s^2 + \frac{1}{2}M_b v_b^2 + \frac{1}{2}J_b \dot{\theta}_b^2 + \frac{1}{2}M_m v_m^2 \quad (7.1)$$

$$U^g = (M_p + M_{ad,z})gw + M_b g(w + l_b \cos \theta_b + z_{gs} \cos \theta_s - x_{gs} \sin \theta_s) + \\ + M_m g(w + L \cos \theta_b + z_{gs} \cos \theta_s - x_{gs} \sin \theta_s) \quad (7.2)$$

$$U^{sm} = \frac{1}{2}k_x u^2 + \frac{1}{2}k_z w^2 + \frac{1}{2}k_{\theta p} \theta_s^2 + \frac{1}{2}k_{\theta b} (\theta_s - \theta_b)^2 \quad (7.3)$$

Sendo que v_p , v_b e v_m correspondem, respectivamente, as velocidades no centro de gravidade da plataforma, da torre e da massa na extremidade livre, conforme as Equações 7.4, 7.5 e 7.6.

$$\vec{v}_p = \dot{u}\vec{i} + \dot{w}\vec{k} \quad (7.4)$$

$$\vec{v}_b = (\dot{u} + \dot{\theta}_s z_{gs} \cos \theta_s - \dot{\theta}_s x_{gs} \sin \theta_s + \dot{\theta}_b l_b \cos \theta_b)\vec{i} + \\ + (\dot{w} - \dot{\theta}_s x_{gs} \cos \theta_s - \dot{\theta}_s z_{gs} \sin \theta_s - \dot{\theta}_b l_b \sin \theta_b)\vec{k} \quad (7.5)$$

$$\vec{v}_m = (\dot{u} + \dot{\theta}_s z_{gs} \cos \theta_s - \dot{\theta}_s x_{gs} \sin \theta_s + \dot{\theta}_b L \cos \theta_b)\vec{i} + \\ + (\dot{w} - \dot{\theta}_s x_{gs} \cos \theta_s - \dot{\theta}_s z_{gs} \sin \theta_s - \dot{\theta}_b L \sin \theta_b)\vec{k} \quad (7.6)$$

Como o objetivo é determinar a frequência natural do modelo, então o trabalho virtual das forças não conservativas δW^{nc} é nulo. É importante salientar que os amortecimentos hidrodinâmicos foram desconsiderados. Aplicando o princípio estendido de Hamilton, obtém-se as Equações 7.7 a 7.10.

$$(M_p + M_b + M_m + M_{ad,x})\ddot{u} + z_{gs}(M_b + M_m)\ddot{\theta}_s + L(M_b\alpha + M_m)\ddot{\theta}_b + k_x u = 0 \quad (7.7)$$

$$(M_p + M_b + M_m + M_{ad,z})\ddot{w} - x_{gs}(M_b + M_m)\ddot{\theta}_s + k_z w + (M_p + M_b + M_m + M_{ad,z})g = 0 \quad (7.8)$$

$$\begin{aligned} & \left[(M_b + M_m)(x_{gs}^2 + z_{gs}^2) + J_p + J_{ad,y} \right] \ddot{\theta}_s + Lz_{gs}(M_b\alpha + M_m)\ddot{\theta}_b + (M_b + M_m)\ddot{u}z_{gs} + \\ & - (M_b + M_m)\ddot{w}x_{gs} + [k_{\theta p} + k_{\theta b} - z_{gs}g(M_b + M_m)]\theta_s - k_{\theta b}\theta_b - x_{gs}g(M_b + M_m) = 0 \end{aligned} \quad (7.9)$$

$$\begin{aligned} & \left[L^2(\alpha^2 M_b + M_m) + J_b \right] \ddot{\theta}_b + L(M_b\alpha + M_m)\ddot{u} + z_{gs}L(M_b\alpha + M_m)\ddot{\theta}_s + \\ & + [k_{\theta b} - Lg(M_b\alpha + M_m)]\theta_b - k_{\theta b}\theta_s = 0 \end{aligned} \quad (7.10)$$

A partir das Equações 7.7 a 7.10 obtém-se a frequência natural do sistema com os quatro graus de liberdade habilitados. Para determinar as frequências naturais da plataforma semissubmersível adota-se $\theta_s = \theta_b$. Neste caso, a rigidez à rotação da torre $k_{\theta b}$ é infinita e obtém-se as Equações 7.11 a 7.13. Por meio dos MOR's obtém-se as frequências naturais do sistema e da plataforma.

$$(M_p + M_b + M_m + M_{ad,x})\ddot{u} + [z_{gs}(M_b + M_m) + L(M_b\alpha + M_m)]\ddot{\theta}_s + k_x u = 0 \quad (7.11)$$

$$(M_p + M_b + M_m + M_{ad,z})\ddot{w} - x_{gs}(M_b + M_m)\ddot{\theta}_s + k_z w + (M_p + M_b + M_m + M_{ad,z})g = 0 \quad (7.12)$$

$$\begin{aligned} & \left[(M_b + M_m)(x_{gs}^2 + z_{gs}^2) + J_p + J_{ad,y} + 2Lz_{gs}(M_b\alpha + M_m) \right] \ddot{\theta}_s + \\ & + \left[L^2(\alpha^2 M_b + M_m) + J_b \right] \ddot{\theta}_s + [M_b(z_{gs} + \alpha L) + M_m(z_{gs} + L)]\ddot{u} - (M_b + M_m)\ddot{w}x_{gs} + \\ & + [k_{\theta p} - z_{gs}g(M_b + M_m) - Lg(M_b\alpha + M_m)]\theta_s - x_{gs}g(M_b + M_m) = 0 \end{aligned} \quad (7.13)$$

Nas equações desenvolvidas existem as constantes de rigidez k_x , k_z , $k_{\theta b}$ e $k_{\theta p}$. A rigidez à translação k_x pode ser estimada considerando o período natural de translação em x da estrutura flutuante T e a massa total do sistema, conforme Equação 7.14 e dados indicados na seção 4.1. A rigidez à translação k_z depende da área seccionada na linha d'água A_{WL} e da densidade da água $\rho = 1025 \text{ kg/m}^3$, indicada na Equação 7.15. A rigidez à rotação da torre $k_{\theta b}$ foi estimada na seção 6.1.

$$k_x = \left(\frac{2\pi}{T} \right)^2 (M_p + M_b + M_m + M_{ad,x}) \quad (7.14)$$

$$k_z = \rho g A_{WL} \quad (7.15)$$

$$k_{\theta b} = L^2 \left[\int_0^L \frac{z^2 - 2zL + L^2}{EI(z)} dz \right]^{-1} \quad (7.16)$$

A rigidez à rotação da plataforma $k_{\theta p}$ depende da densidade da água ρ , do volume deslocado V_0 e da altura metacêntrica $\overline{GM}$, conforme Equação 7.17 (Faltinsen (1993)).

$$k_{\theta_p} = \rho g \int \int_{A_0} x^2 dA + \rho g V_0 (z_B - z_G) = \rho g V_0 \overline{GM} \quad (7.17)$$

$$\overline{GM} = \overline{KB} + \overline{BM} - \overline{KG} \quad (7.18)$$

sendo K a base da plataforma, B o centro de flutuação, M o metacentro e G o centro de gravidade do sistema. O acoplamento de estruturas ou adição de massas na plataforma semissubmersível ocasiona alteração de todos os parâmetros que determinam $\overline{GM}$. De fato, a inclusão da torre (conectada a nacele e ao rotor) sobre a plataforma alteram $\overline{KB}$ e $\overline{BM}$, no entanto, para a OC4-Fase II essa alteração é pequena, próxima a 10 cm.

O termo $\overline{KG}$ está relacionado com o efeito restaurador da gravidade. Para a torre, a nacele e o rotor esse efeito foi considerado no modelo analítico nas parcelas $z_{gs}g(M_b + M_m)$ da Equação 7.9 e $Lg(M_b\alpha + M_m)$ da Equação 7.10. Já no modelo em elementos finitos esse efeito é calculado automaticamente ao considerar a aceleração da gravidade. Portanto, $\overline{KG}$ foi determinado considerando apenas o CG da plataforma, sem a torre, a nacele e o rotor. Os dados necessários para o cálculo de k_{θ_p} estão indicados na seção 4.1.

O MOR desenvolvido nesta seção pode ser aplicado a diferentes configurações de torres de turbinas eólicas. Na seção 7.3 as equações de movimento serão particularizadas para a torre do projeto OC4-Fase II, conforme propriedades indicadas na seção 4.1.

7.2 Análise numérica

A formulação analítica elaborada na seção anterior apresenta reduzido número de graus de liberdade e possibilita estimar a frequência natural e os modos de vibrar do sistema. Nesta seção, desenvolvem-se modelos segundo o método dos elementos finitos por meio do *software* GIRAFFE, com o objetivo de comparar os resultados e verificar a compatibilidade com o MOR.

O modelo contém 88 nós e 264 graus de liberdade, conforme mostra a Figura 20. A torre é representada por uma barra vertical, cilíndrica e escalonada, com uma massa pontual no nó 86. A base encontra-se no nó 6, conectada com um corpo rígido, que ilustra a plataforma flutuante. Consideram-se molas horizontal, vertical e à rotação, interligadas com o centro de gravidade da plataforma semissubmersível, localizado no nó 4. O nó 1 está habilitado à translação em x, o nó 2 à translação em z, e os nós 3, 87 e 88 à rotação em torno do eixo y. Os demais nós possuem translação em x, z e rotação em torno do eixo y. As informações inseridas no código estão indicadas na Figura 20, sendo ρ_b a densidade do aço e F_E a força de empuxo.

Figura 20 – Modelo de torre com massa pontual sobre plataforma semissubmersível - GIRAFFE.

Fonte: Própria autora.

O *software* possibilita a análise estática e dinâmica, e monitora os nós e molas do modelo. As frequências naturais são determinadas a partir de um ensaio de decaimento livre com a aplicação de forças impulsivas. Nesta dissertação, considera-se uma força instantânea lateral e axial no nó 86 e são monitorados os nós 4 e 86, conforme Figura 20.

A partir do modelo numérico, obtém-se as séries temporais das translações em x , z , e à rotação em torno de y , para 1200 s com passo de tempo de 0,01 s. Determina-se o espectro de amplitude nos graus de liberdade citados, com aplicação da Transformada de Fourier Discreta por meio da função *fft* no MATLAB.

Para o estudo, foram necessários dois modelos no GIRAFFE, pois, até o momento, o programa não contempla a inserção de uma matriz de massa com valores distintos na diagonal principal. Dessa forma, consideram-se os modelos 1 e 2, com massa adicional nas direções x e z respectivamente. A massa adicional em torno do eixo y foi somada ao momento de inércia à rotação da plataforma tanto no modelo 1 como no modelo 2.

O modelo em elementos finitos desenvolvido nesta seção pode ser aplicado a diferentes configurações de torres de turbinas eólicas flutuantes. Na seção 7.3 o código será particularizado para a torre do projeto OC4-Fase II, conforme propriedades indicadas na seção 4.1.

7.3 Estudo de caso

Para obtenção das frequências naturais do MOR e do modelo no GIRAFFE, consideram-se as propriedades da torre de turbina eólica do projeto OC4-Fase II, ilustradas na seção 4.1. Além disso, são necessárias as constantes de rigidez dadas pelas Equações 7.14, 7.15, 7.16 e 7.17, explicitadas na Tabela 22.

Tabela 22 – Constantes de rigidez das molas.

Propriedades	Valor e Descrição
Rigidez à translação em x k_x	$7,044 \times 10^4$ N/m
Rigidez à translação em z k_z	$3,412 \times 10^6$ N/m
Rigidez à rotação da plataforma k_{θ_p}	$1,495 \times 10^9$ Nm
Rigidez à rotação da torre k_{θ_b}	$1,45 \times 10^{10}$ Nm

Fonte: Própria autora.

No MOR considera-se a torre com seção transversal não prismática, homogênea e linearmente afunilada ao longo da altura. No GIRAFFE a estrutura possui seção transversal prismática, homogênea e escalonada ao longo da altura, conforme seção 4.2.1.

Com os dados expostos, na seção 7.4 apresentam-se as frequências naturais dos modelos, e além disso ilustram-se alguns dos resultados obtidos no projeto OC4-Fase II para efeito de comparação. Vale ressaltar que o comportamento da estrutura pode alterar conforme o tipo de torre de turbina eólica escolhida.

7.4 Resultados

7.4.1 Formulação analítica

As equações de movimento determinadas na seção 7.1 foram implementadas no *software* Mathematica, juntamente com as propriedades da torre de turbina eólica especificada. Obtiveram-se as frequências naturais e os modos de vibrar nos graus de liberdade (GL) estudados para a plataforma sumissubmersível, segundo Tabelas 23 e 24, e para o sistema, conforme Tabelas 25 e 26.

Tabela 23 – Frequências e períodos naturais da plataforma semissubmersível.

Modos	Frequência (Hz)	Período (s)
1° modo	0,0088	113,22
2° modo	0,0382	26,20
3° modo	0,0546	18,31

Fonte: Própria autora.

Tabela 24 – Modos naturais da plataforma semissubmersível.

Modo	x	z	θ_s	θ_b	Observação
1° modo	1,000	0,000	0,0002	0,0002	Praticamente <i>surge</i> puro
2° modo	1,000	0,000	-0,437	-0,437	Misto: x, $\theta_s = \theta_b$
3° modo	0,000	1,000	0,000	0,000	<i>Heave</i>

Fonte: Própria autora.

Tabela 25 – Frequências e períodos naturais do sistema.

Modos	Frequência (Hz)	Período (s)
1° modo	0,0088	113,22
2° modo	0,0378	26,46
3° modo	0,0546	18,31
4° modo	0,4434	2,26

Fonte: Própria autora.

Tabela 26 – Modos naturais normalizados do sistema.

Modo	x	z	θ_s	θ_b	Observação
1° modo	1,000	0,000	0,0002	0,0002	Praticamente <i>surge</i> puro
2° modo	1,000	0,000	-0,425	-0,441	Misto: x, θ_s , θ_b
3° modo	0,000	1,000	0,000	0,000	<i>Heave</i>
4° modo	1,000	0,000	0,166	-0,710	Misto: x, θ_s , θ_b

Fonte: Própria autora.

Por meio dos resultados, observa-se que ao considerar a rotação da torre igual ao da plataforma ($\theta_b = \theta_s$) o 1° e 3° modos de vibrar não sofreram alteração, no entanto o 2° modo de vibrar apresentou uma pequena modificação, conforme Tabelas 23 e 25. O acoplamento entre os GL de *surge* e *pitch* foram identificados nos dois MOR's, sendo que a rotação da torre θ_b ficou evidente apenas no 4° modo de vibrar no modelo do sistema,

conforme Tabela 26.

Além disso, nota-se que a frequência natural da plataforma semissubmersível e do sistema se encontram dentro da faixa de frequência típica das ondas do mar, entre 0,033 Hz e 0,33 Hz. Neste caso, o 2º e 3º modo de vibração entrariam em ressonância clássica, conforme Tabelas 23 e 25. Tal fenômeno já foi abordado por Sahasakkul (2014) para a torre OC4-Fase II, mas é passível de mais análises em trabalhos futuros.

7.4.2 Análise numérica

A partir do código desenvolvido na seção 7.2 e das propriedades da torre de turbina eólica especificada, realizou-se um ensaio numérico de decaimento no GIRAFFE (isto é, de vibração livre) e obtiveram-se as séries temporais e os espectros de amplitude dos nós 4 e 86, para as translações em x, z, e à rotação em torno de y. Avaliou-se o modelo 1 com massa adicional na direção x e o modelo 2 com massa adicional na direção z. Os valores numéricos das frequências naturais obtidas a partir da análise espectral destas séries temporais estão ilustradas nas Tabelas 27 e 28. As figuras das séries temporais e dos espectros de amplitude do ensaio encontram-se no apêndice A.

Tabela 27 – Frequências naturais calculadas a partir da análise espectral da resposta do nó 4.

Deslocamento	Modelo 1		Modelo 2	
	Frequência (Hz)	Período (s)	Frequência (Hz)	Período (s)
<i>Surge</i>	0,00917	109,05	-	-
<i>Heave</i>	-	-	0,0550	18,18
<i>Pitch</i>	0,0375	26,67	0,0375	26,67

Fonte: Própria autora.

Tabela 28 – Frequências naturais calculadas a partir da análise espectral da resposta do nó 86.

Deslocamento	Modelo 1		Modelo 2	
	Frequência (Hz)	Período (s)	Frequência (Hz)	Período (s)
<i>Surge</i>	0,0375	26,67	-	-
<i>Heave</i>	-	-	0,0550	18,18
<i>Pitch</i>	0,0375	26,67	0,0375	26,67

Fonte: Própria autora.

A partir dos resultados obtidos, observa-se que o nó 4 captura os deslocamentos puros de *surge* e *heave* identificados no MOR. Além disso, nota-se o acoplamento dos deslocamentos de *surge* e *pitch* no nó 86 para a frequência de 0,0375 Hz. Esse acoplamento também foi verificado por Liu et al. (2018) na análise de torres de turbinas eólicas flutuantes em maior escala.

Outra característica que pode ser ressaltada é a proximidade dos resultados com aqueles obtidos na seção 7.4.1. Dessa forma, verifica-se uma boa aderência entre os modelos, e além disso, nota-se que o MOR permite capturar o comportamento dinâmico da estrutura de maneira simplificada em comparação ao modelo em elementos finitos com vários graus de liberdade implementado na ferramenta GIRAFFE.

7.4.3 Dados da literatura relativos ao Projeto OC4-Fase II

Como descrito na seção 1.3, o projeto OC4-Fase II teve como objetivo verificar diversas ferramentas de simulação da dinâmica de torres de turbinas eólicas *offshore*. Os códigos elaborados por vários grupos de pesquisa foram comparados por meio dos resultados numéricos. Nesta seção são apresentadas as frequências naturais da plataforma semissubmersível encontradas pelos participantes do projeto, considerando todos os graus de liberdade, amortecimento e linhas de amarração.

Os participantes indicados na Figura 21 são a *National Renewable Energy Laboratory* (NREL), *Centre for Marine Technology and Engineering* (CENTEC), *Instituto Superior Técnico* (IST), Goldwind, *American Bureau of Shipping* (ABS), *National Renewable Energy Centre* (CENER), *University of Ulsan* (UOU), *Garrad Hassan* (GH), *China General Certification Center* (CGC), *Pohang University of Science and Technology* (POSTECH), 4Subsea, *Technical University of Denmark* (DTU), *National Technical University of Athens* (NTUA), *Centre for Ships and Ocean Structures* (CeSOS), *Norwegian Marine Technology Research Institute* (MARINTEK), *Institute for Energy Technology* (IFE), SAMTECH s.a. com a *Catalonia Institute for Energy Research*, PRINCIPIA com *IFP Energies nouvelles* (IFPEN), *University of Stuttgart's Endowed Chair of Wind Energy at the Institute of Aircraft Design* (SWE), *University of Tokyo* (U-TOKYO), *WavEC Offshore Renewables*, *Chongqing Haizhung Windpower Equipment Co., Ltd.* (CSIC) e *Danish Hydraulic Institute*.

As direções pertinentes para esta dissertação são a lateral x (*surge*), axial z (*heave*) e à rotação em torno de y (*pitch*). Como explicitado em Robertson et al. (2014), as frequências naturais indicadas na Figura 21 são consistentes, com exceção da rotação em torno de y (*pitch*) para POSTECH e U-TOKYO.

Figura 21 – Frequência natural da plataforma semissubmersível: OC4- Fase II.

As frequências naturais da plataforma semissubmersível obtidas pela NREL e CGC estão indicados na Tabela 29, juntamente com os resultados do MOR. Essa comparação entre os resultados não indica qual modelo é o mais preciso, mas sugere uma concordância entre os mesmos. Nota-se que o MOR linear obteve uma boa aderência com os modelos dos participantes do projeto, indicados na Figura 21.

Tabela 29 – Frequência natural do MOR, da NREL e CGC.

Deslocamento	Frequência natural (Hz)		
	MOR	NREL	CGC
<i>Surge</i>	0,0088	0,0093	0,00920
<i>Heave</i>	0,0546	0,0581	0,00573
<i>Pitch</i>	0,0382	0,0392	0,0421

Fonte: Robertson et al. (2014) e Própria autora.

Tabela 30 – Período natural do MOR, da NREL e CGC.

Deslocamento	Período natural (s)		
	MOR	NREL	CGC
<i>Surge</i>	113,22	107,53	108,66
<i>Heave</i>	18,31	17,21	17,46
<i>Pitch</i>	26,20	25,51	23,75

Fonte: Robertson et al. (2014) e Própria autora.

7.5 Conclusões deste capítulo

Neste capítulo desenvolveu-se um MOR linear e um modelo em elementos finitos de uma torre de turbina eólica flutuante, com a finalidade de verificar a aderência entre os modelos e analisar a influência dos graus de liberdade da plataforma e à rotação da torre na resposta da estrutura.

A partir dos resultados é possível observar que existe uma boa aderência entre o MOR linear e o modelo desenvolvido no GIRAFFE, devido à proximidade das frequências naturais. Além disso, nota-se que o MOR da plataforma semissubmersível detectou frequências naturais próximas àsquelas obtidas por diversas instituições internacionais no projeto OC4-Fase II.

A presença dos graus de liberdade de *surge*, *heave* e *pitch* da plataforma e à rotação da torre θ_b , resulta na alteração da frequência natural do sistema, se comparado com os resultados apresentados no capítulo 6, que trata do problema da torre engastada em um suporte rígido. Além disso, observa-se que nos dois MOR's existe um acoplamento dos movimentos de *surge* e *pitch*, sendo que a rotação da torre é evidente apenas no 4o modo de vibrar no modelo do sistema. Dessa forma, nota-se a necessidade de considerar as translações e a rotação em estruturas flutuantes, como será abordado na formulação do capítulo 8.

Outro aspecto que deve ser salientado, é a possível ressonância clássica entre o sistema estrutural e o mar, que pode ocasionar uma excessiva amplificação dos deslocamentos. Embora esse fenômeno não tenha sido abordado para o sistema acoplado, torre e plataforma, no capítulo 8 analisa-se o MOR da torre sob diferentes excitações de suporte, inclusive o caso de ressonância clássica, e verifica-se a resposta dinâmica da torre.

8 MOR não linear com excitação de base

Nos estudos desenvolvidos no capítulo 6 foi possível concluir que considerar a massa na extremidade livre como pontual é aceitável. Por meio do capítulo 7, observou-se que as translações em x e z , a rotação da plataforma e da torre interferem na frequência natural à flexão da estrutura. Sendo assim, no capítulo 8 elabora-se uma formulação analítica do modelo físico de uma torre de turbina eólica, aplicável em sistemas *onshore* e *offshore*, levando-se em consideração os resultados obtidos nos capítulos anteriores.

Determinam-se as equações de movimento não lineares em meio contínuo, via mecânica analítica (Mazzilli et al. (2008) e Franzini e Mazzilli (2016)), de uma torre sob excitação de suporte na base e carregamentos na extremidade livre. As equações são particularizadas para a torre OC4-Fase II e a SNL 13,2MW, sob diferentes condições de excitação de suporte, sendo que carregamentos na extremidade livre não serão explorados, ficando a cargo de projetos futuros esta investigação.

8.1 Formulação analítica

O modelo corresponde a uma barra vertical e prismática, dotada de uma massa pontual em sua extremidade livre, que representa a nacela e o rotor. A Figura 22 ilustra o problema aqui estudado e os deslocamentos laterais e axiais da torre (u e w respectivamente) considerados para a obtenção do modelo matemático. A estrutura é solicitada por carregamentos na extremidade livre, representando a ação do vento e do funcionamento do rotor e por uma excitação de suporte na base.

Figura 22 – Modelo de torre com massa pontual sob excitação de suporte na base.

Fonte: Própria autora.

Considere as seguintes definições: M_m é a massa do rotor e da nacele; $\mu(z)$ é a massa linear de uma torre não prismática; E , L e c são, respectivamente, o módulo de elasticidade, a altura e a constante de amortecimento linear da torre; $D(z)$, $A(z)$ e $I(z)$ são, respectivamente, o diâmetro, área e o momento de inércia da seção transversal. u corresponde ao deslocamento na direção x , perpendicular ao eixo da barra indeformada, e w ao deslocamento na direção z , no eixo da barra indeformada. As forças no topo da torre são dadas por F_x e F_z , e o momento fletor por M_y . Os parâmetros $X_p(t)$, $Z_p(t)$ e $\theta_p(t)$ são as excitações na base da torre, dados por:

$$X_p(t) = x_1 \sin(\beta_x t) \quad (8.1)$$

$$Z_p(t) = z_1 \sin(\beta_z t + \theta) \quad (8.2)$$

$$\theta_p(t) = \theta_{p1} \sin(\beta_\theta t + \phi) \quad (8.3)$$

onde β_x , β_z e β_θ correspondem às frequências de excitação em x , z e em torno do eixo y , respectivamente; θ e ϕ são os ângulos de fase em relação à excitação de suporte na direção x ; e x_1 , z_1 e θ_{p1} são as amplitudes das excitações de suporte. A massa por unidade de comprimento da torre $\mu_t(z)$ pode ser expressa com o auxílio da função delta de Dirac δ_D , como pode ser visto na Equação 8.4 e no apêndice B.

$$\mu_t(z) = \mu(z) + M_m \delta_D(z - L) \quad (8.4)$$

Primeiramente, considera-se que os símbolos $()'$ e $(\dot{})$ denotam a diferenciação em relação à coordenada axial z e ao tempo, respectivamente.

As equações de movimento foram deduzidas segundo o princípio estendido de Hamilton. A energia cinética K e sua variação δK são dadas pelas Equações 8.5 e 8.6, sendo $\vec{v}$ a velocidade de um ponto genérico da torre pela Equação 8.7.

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{2} \int_0^L \mu_t(z) (\vec{v} \cdot \vec{v}) dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^L \mu_t(z) \left[\dot{X}_p^2 + \dot{Z}_p^2 + \dot{u}^2 + \dot{w}^2 + (z^2 + u^2 + w^2 + 2wz) \dot{\theta}_p^2 \right] dz + \\ &\quad + \int_0^L \mu_t(z) (\dot{\theta}_p z + \dot{u} + \dot{\theta}_p w) (\dot{X}_p \cos \theta_p - \dot{Z}_p \sin \theta_p) dz + \\ &\quad + \int_0^L \mu_t(z) (-\dot{\theta}_p u + \dot{w}) (\dot{X}_p \sin \theta_p + \dot{Z}_p \cos \theta_p) dz + \\ &\quad + \int_0^L \mu_t(z) \dot{\theta}_p (\dot{u} z + \dot{u} w - \dot{w} u) dz \end{aligned} \quad (8.5)$$

$$\begin{aligned} \delta K &= \int_0^L \mu_t(z) [u \dot{\theta}_p^2 - \dot{\theta}_p (\dot{w} + \dot{X}_p \sin \theta_p + \dot{Z}_p \cos \theta_p)] \delta u dz + \\ &+ \int_0^L \mu_t(z) [(w + z) \dot{\theta}_p^2 + \dot{\theta}_p (\dot{u} + \dot{X}_p \cos \theta_p - \dot{Z}_p \sin \theta_p)] \delta w dz + \\ &+ \int_0^L \mu_t(z) [\dot{u} + \dot{\theta}_p (z + w) + \dot{X}_p \cos \theta_p - \dot{Z}_p \sin \theta_p] \delta \dot{u} dz + \\ &+ \int_0^L \mu_t(z) (\dot{w} - \dot{\theta}_p u + \dot{X}_p \sin \theta_p + \dot{Z}_p \cos \theta_p) \delta \dot{w} dz \end{aligned} \quad (8.6)$$

$$\begin{aligned} \vec{v} = & (\dot{X}_p + \dot{\theta}_p z \cos \theta_p + \dot{u} \cos \theta_p - \dot{\theta}_p u \sin \theta_p + \dot{w} \sin \theta_p + \dot{\theta}_p w \cos \theta_p) \vec{i} + \\ & + (\dot{Z}_p - \dot{\theta}_p z \sin \theta_p - \dot{u} \sin \theta_p - \dot{\theta}_p u \cos \theta_p + \dot{w} \cos \theta_p - \dot{\theta}_p w \sin \theta_p) \vec{k} \end{aligned} \quad (8.7)$$

Integra-se por partes a Equação 8.6, de t_1 a t_2 , e invoca-se a condição de extremos fixos $\delta u(t_1) = \delta u(t_2) = \delta w(t_1) = \delta w(t_2) = 0$ para obter:

$$\begin{aligned} \int_{t_1}^{t_2} \delta K \, dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) [\ddot{u} + \ddot{X}_p \cos \theta_p - \ddot{Z}_p \sin \theta_p + \ddot{\theta}_p (z + w)] \delta u \, dz \, dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) (u \dot{\theta}_p^2 - 2 \dot{\theta}_p \dot{w}) \delta u \, dz \, dt + \\ & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) (\ddot{w} + \ddot{X}_p \sin \theta_p + \ddot{Z}_p \cos \theta_p - \ddot{\theta}_p u) \delta w \, dz \, dt + \\ & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) [(z + w) \dot{\theta}_p^2 + 2 \dot{\theta}_p \dot{u}] \delta w \, dz \, dt \end{aligned} \quad (8.8)$$

Além da energia cinética, é necessário calcular a energia potencial. Portanto, a energia potencial gravitacional U^g e sua variação δU^g são dadas por:

$$U^g = \int_0^L \mu_t(z) g (-u \sin \theta_p + w \cos \theta_p + z_p) \, dz \quad (8.9)$$

$$\delta U^g = - \int_0^L \mu_t(z) g \sin \theta_p \delta u \, dz + \int_0^L \mu_t(z) g \cos \theta_p \delta w \, dz \quad (8.10)$$

Integra-se a Equação 8.10, de t_1 a t_2 , e obtém-se:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta U^g \, dt = - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) g \sin \theta_p \delta u \, dz \, dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) g \cos \theta_p \delta w \, dz \, dt \quad (8.11)$$

Considerando material elástico linear, a energia potencial de deformação U^s e sua variação δU^s são determinadas pelas seguintes equações:

$$U^s = \int_V \frac{1}{2} \sigma \epsilon \, dV \quad (8.12)$$

$$\delta U^s = \int_V E \epsilon \, \delta \epsilon \, dV \quad (8.13)$$

A hipótese cinemática do modelo de viga de Bernoulli-Euler consiste em supor que seções planas permanecem planas, indeformadas e ortogonais ao eixo longitudinal z da torre. Além disso, o ângulo de rotação da seção transversal em z em relação ao eixo y é muito pequeno e a deformação por cisalhamento é desprezada. Os deslocamentos de um ponto genérico N da seção transversal da torre são dadas pelas Equações 8.14, conforme Figura 23.

$$\begin{aligned} w_N &= w - x \sin \phi \approx w - x u', \\ u_N &= u + x (\cos \phi - 1) \approx u, \\ \phi &= \arctan \left(\frac{u'}{1 + w'} \right) \approx u'. \end{aligned} \quad (8.14)$$

Figura 23 – Modelo de viga Bernoulli-Euler

Fonte: Própria autora.

Para pequenas deformações, os alongamentos quadráticos e lineares podem ser confundidos. A deformação no ponto genérico N na direção axial da fibra, conforme mostra o apêndice C, é dada por:

$$\epsilon_N = \frac{1}{2}(u'_N)^2 + w'_N + \frac{1}{2}(w'_N)^2 \approx w' + \frac{1}{2}(u')^2 - xu'' \quad (8.15)$$

Substituindo a Equação 8.15 na 8.13 e integrando na seção transversal, obtém-se:

$$\begin{aligned} \delta U^s = \int_0^L EA(z) & (w' \delta w' + w' u' \delta u' - x w' \delta u'' + \frac{1}{2}(u')^2 \delta w' + \\ & + \frac{1}{2}(u')^3 \delta u' - \frac{1}{2}x(u')^2 \delta u'' - x u'' \delta w' - x u'' u' \delta u' + x^2 u'' \delta u'') dz \end{aligned} \quad (8.16)$$

O momento estático da seção transversal é zero pois o eixo passa pelo seu baricentro, portanto a Equação 8.16 resulta em:

$$\delta U^s = \int_0^L \left[EA(z) \left(w' \delta w' + w' u' \delta u' + \frac{1}{2}(u')^2 \delta w' + \frac{1}{2}(u')^3 \delta u' \right) + EI(z) u'' \delta u'' \right] dz \quad (8.17)$$

As funções u e w devem satisfazer às condições de contorno essenciais que correspondem aos deslocamentos e às rotações. Para o problema, essas condições de contorno são dadas por:

$$u(0) = 0 \quad u'(0) = 0 \quad w(0) = 0 \quad (8.18)$$

A propriedade de filtragem do Delta de Dirac é utilizada, conforme decrito no apêndice B e exemplificado a seguir:

$$\begin{aligned} \int_0^{L+\epsilon} EA w' \delta w \delta_D(z-L) dz &= EA(L) w'(L) \delta w(L) \\ \text{Sendo que } \epsilon \rightarrow 0, \text{ então } L + \epsilon &\rightarrow L \end{aligned} \quad (8.19)$$

Aplica-se a integral por partes na Equação 8.17, com o uso das propriedades do delta de Dirac e das condições de contorno, e obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta U^s = & - \int_0^L \left[EA(z) \left(w''u' + w'u'' + \frac{3}{2}(u')^2u'' \right) + EA'(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) \right] \delta u dz + \\
 & + \int_0^L [EI(z)u^{IV} + 2EI'(z)u''' + EI''(z)u''] \delta u dz + \\
 & - \int_0^L \left[EA(z) (w'' + u'u'') + EA'(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \right] \delta w dz + \\
 & + \int_0^L \left[EA(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - EI(z)u'''] \delta_D(z-L) \delta u dz + \\
 & + \int_0^L EI(z)u'' \delta_D(z-L) \delta u' dz - \int_0^L EI'(z)u'' \delta_D(z-L) \delta u dz + \\
 & + \int_0^L EA(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \delta_D(z-L) \delta w dz \quad (8.20)
 \end{aligned}$$

É importante salientar que ao aplicar a integral por partes na Equação 8.17 obteve-se o termo $EI(L)u''(L)\delta u'(L)$ que está relacionado com o momento fletor na extremidade livre. Utilizando a propriedade de filtragem do delta de Dirac e integrando por partes, obtém-se um termo com a função dipolo. Tal função pode apresentar problemas de convergência, dessa forma, para evitar este comportamento, o termo $u''(L)$ foi anulado e o momento fletor $M_y(t)$ foi substituído por um binário, conforme Figura 24.

Figura 24 – Momento fletor atuante no conjunto nacele-rotor

Fonte: Própria autora.

Reescrevendo a Equação 8.20 e integrando a variação da energia potencial de deformação entre os instantes t_1 e t_2 do problema de extremos fixos, obtém-se a Equação 8.21.

$$\begin{aligned}
 \int_{t_1}^{t_2} \delta U^s dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA(z) \left(w''u' + w'u'' + \frac{3}{2}(u')^2u'' \right) - EI(z)u^{IV} \right] \delta u dz dt + \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA'(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - 2EI'(z)u''' - EI''(z)u'' \right] \delta u dz dt + \\
 & + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - EI(z)u'''] \delta_D(z-L) \delta u dz dt + \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EA(z) \left[(w'' + u'u'') - \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \delta_D(z-L) \right] \delta w dz dt + \\
 & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EA'(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \delta w dz dt \quad (8.21)
 \end{aligned}$$

A soma das Equações 8.11 e 8.21 leva a:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta U dt = & - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA(z) \left(w''u' + w'u'' + \frac{3}{2}(u')^2u'' \right) - EI(z)u^{IV} \right] \delta u dz dt + \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA'(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - 2EI'(z)u''' - EI''(z)u'' + \mu_t(z)g \sin \theta_p \right] \delta u dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - EI(z)u''' \right] \delta_D(z-L) \delta u dz dt + \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L EA(z) \left[(w'' + u'u'') - \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \delta_D(z-L) \right] \delta w dz dt + \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA'(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) - \mu_t(z)g \cos \theta_p \right] \delta w dz dt \quad (8.22)
\end{aligned}$$

A integral de t_1 a t_2 do trabalho virtual da força externa não conservativa é dada por:

$$\begin{aligned}
\int_{t_1}^{t_2} \delta W^{nc} dt = & \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[F_x(t) \delta u + \frac{M_y(t)}{\Delta} \delta u + F_z(t) \delta w \right] \delta_D(z-L) dz dt + \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \frac{M_y(t)}{\Delta} \delta u \delta_D(z-L+\Delta) dz dt + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L -c\dot{u} \delta u dz dt \quad (8.23)
\end{aligned}$$

Substituindo as Equações 8.8, 8.22 e 8.23 no princípio estendido de Hamilton, obtém-se:

$$\begin{aligned}
& \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) \left[\ddot{u} + \ddot{X}_p \cos \theta_p - \ddot{Z}_p \sin \theta_p + \ddot{\theta}_p(z+w) - u\dot{\theta}_p^2 + 2\dot{\theta}_p\dot{w} \right] \delta u dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[-EA(z) \left(w''u' + w'u'' + \frac{3}{2}(u')^2u'' \right) + EI(z)u^{IV} \right] \delta u dz dt + \\
& - \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA'(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - 2EI'(z)u''' - EI''(z)u'' + \mu_t(z)g \sin \theta_p \right] \delta u dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - EI(z)u''' - F_x(t) \right] \delta_D(z-L) \delta u dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[\frac{M_y(t)}{\Delta} \delta_D(z-L+\Delta) - \frac{M_y(t)}{\Delta} \delta_D(z-L) + c\dot{u} \right] \delta u dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \mu_t(z) \left[\ddot{w} + \ddot{X}_p \sin \theta_p + \ddot{Z}_p \cos \theta_p - \ddot{\theta}_p u - \dot{\theta}_p^2(z+w) - 2\dot{\theta}_p\dot{u} \right] \delta w dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[-EA(z) (w'' + u'u'') - EA'(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \right] \delta w dz dt + \\
& + \int_{t_1}^{t_2} \int_0^L \left[EA(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \delta_D(z-L) - F_z(t) \delta_D(z-L) + \mu_t(z)g \cos \theta_p \right] \delta w dz dt \quad (8.24)
\end{aligned}$$

Para que a identidade da Equação 8.24 seja verdadeira, ela deve ser válida para qualquer δu , δw , t_1 e t_2 . Obtém-se as Equações 8.25 e 8.26.

$$\begin{aligned}
& \mu_t(z) \left[\ddot{u} + \ddot{X}_p \cos \theta_p - \ddot{Z}_p \sin \theta_p + \ddot{\theta}_p(z+w) - u\dot{\theta}_p^2 + 2\dot{\theta}_p\dot{w} \right] + c\dot{u} + \\
& -EA(z) \left(w''u' + w'u'' + \frac{3}{2}(u')^2u'' \right) + EI(z)u^{IV} + \\
& -EA'(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) + 2EI'(z)u''' + EI''(z)u'' - \mu_t(z)g \sin \theta_p + \\
& + \left[EA(z) \left(w'u' + \frac{1}{2}(u')^3 \right) - EI(z)u''' - F_x(t) \right] \delta_D(z-L) + \\
& + \frac{M_y(t)}{\Delta} \delta_D(z-L+\Delta) - \frac{M_y(t)}{\Delta} \delta_D(z-L) = 0 \quad (8.25)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \mu_t(z) \left[\ddot{w} + \ddot{X}_p \sin \theta_p + \ddot{Z}_p \cos \theta_p - \ddot{\theta}_p u - \dot{\theta}_p^2(z+w) - 2\dot{\theta}_p\dot{u} \right] + \\
& -EA(z) (w'' + u'u'') - EA'(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) + \\
& + EA(z) \left(w' + \frac{1}{2}(u')^2 \right) \delta_D(z-L) - F_z(t)\delta_D(z-L) + \mu_t(z)g \cos \theta_p = 0 \quad (8.26)
\end{aligned}$$

Os termos que contêm $EA(z)$ e $EI(z)$ estão relacionados com a rigidez axial e à flexão, resultados do modelo de viga de Bernoulli- Euler, também identificados em [Mazzilli et al. \(2008\)](#) no estudo de uma viga prismática biapoiada e sujeita a carregamentos axiais. Os parâmetros que multiplicam a derivada da área e do momento de inércia são decorrência do modelo de seção transversal não prismática; e os que multiplicam $\delta_D(z-L)$ estão relacionados com a massa pontual na extremidade livre.

Os parâmetros que resultam do acoplamento entre a deformação e o movimento de corpo rígido estão relacionados com $\ddot{\theta}_p$, $\dot{\theta}_p^2$ e $\dot{\theta}_p$, que correspondem a inércia devida à rotação da torre, ao efeito centrífugo e de Coriolis, respectivamente. [Simo e Vu-Quoc \(1986\)](#) também obtiveram esses termos no estudo de uma barra engastada-livre, flexível, prismática e extensível sob excitação rotacional na base. Além disso, o equacionamento continha termos lineares para as direções axial e lateral, considerava o momento de inércia à rotação da barra e a deformação por cisalhamento.

Em contrapartida, nesta dissertação, as Equações 8.25 e 8.26 contêm termos lineares e não lineares para as direções axial e lateral, para torres prismáticas e não prismáticas, com e sem massa na extremidade livre, sob diferentes condições de carregamento na extremidade livre e excitação de suporte na base. Assim, a formulação aqui apresentada pode ser interpretada como uma extensão do trabalho de [Simo e Vu-Quoc \(1986\)](#), aplicáveis tanto para sistemas *onshore* quanto *offshore*.

Nesta dissertação, a análise dinâmica será feita para as torres de turbinas eólicas OC4-Fase II e SNL 13,2MW, considerando apenas a excitação de suporte na base, sendo que carregamentos na extremidade livre não serão explorados, ficando a cargo de projetos futuros esta investigação. Inicialmente as equações serão adimensionalizadas na seção 8.1.1 e, posteriormente, particularizadas para as torres especificadas.

8.1.1 Adimensionalização

Na seção anterior foram obtidas as equações de movimento de uma torre de turbina eólica genérica. Nesta seção, tais equações serão particularizadas segundo as propriedades da torre de turbina eólica OC4-Fase II e SNL 13,2MW, indicadas no capítulo 4. Além disso, os carregamentos na extremidade livre serão desconsiderados, obtendo-se, portanto, a resposta estrutural para as excitações de suporte na base da torre. Para tanto, as Equações 8.25 e 8.26 serão adimensionalizadas conforme parâmetros indicados a seguir:

$$\xi = \frac{z}{L}, \hat{u} = \frac{u}{L}, \hat{w} = \frac{w}{L}, \lambda_x = \frac{x_1}{L}, \lambda_z = \frac{z_1}{L}, \tau = \omega t, \quad (8.27)$$

onde o parâmetro ω representa a frequência de referência, que corresponde à frequência natural da torre com massa pontual indicada no capítulo 4.

A partir desta etapa, considera-se que os símbolos $()'$ e $(\dot{})$ denotam a diferenciação em relação a posição axial adimensional ξ e ao tempo adimensional τ , respectivamente. Aplicando os parâmetros adimensionais nas derivadas de u , w , $A(z)$ e $I(z)$ em relação a z , obtém-se:

$$u' = \frac{\partial u}{\partial z} = \frac{L}{L} \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{u}}{\partial \xi} \quad (8.28)$$

$$u'' = \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) = \frac{L}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \xi^2} \quad (8.29)$$

$$u''' = \frac{\partial^3 u}{\partial z^3} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right) = \frac{L}{L^3} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \xi^3} = \frac{1}{L^2} \frac{\partial^3 \hat{u}}{\partial \xi^3} \quad (8.30)$$

$$u^{IV} = \frac{\partial^4 u}{\partial z^4} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial^3 u}{\partial z^3} \right) = \frac{L}{L^4} \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial \xi^4} = \frac{1}{L^3} \frac{\partial^4 \hat{u}}{\partial \xi^4} \quad (8.31)$$

$$w' = \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{L}{L} \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} = \frac{\partial \hat{w}}{\partial \xi} \quad (8.32)$$

$$w'' = \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) = \frac{L}{L^2} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} = \frac{1}{L} \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \xi^2} \quad (8.33)$$

$$A'(z) = \frac{\partial A(z)}{\partial z} = \frac{1}{L} \frac{\partial A(\xi)}{\partial \xi} \quad (8.34)$$

$$I^n(z) = \frac{\partial^n I(z)}{\partial z^n} = \frac{1}{L^n} \frac{\partial^n A(\xi)}{\partial \xi^n}, n = 1, 2 \quad (8.35)$$

Aplicando os parâmetros adimensionais nas derivadas de u , w , $X_p(t)$, $Z_p(t)$ e $\theta_p(t)$ em relação a t , e considerando a propriedade da função delta Dirac para a adimensionalização, têm-se:

$$\dot{u} = \frac{\partial u}{\partial t} = L\omega \frac{\partial \hat{u}}{\partial \tau} \quad (8.36)$$

$$\ddot{u} = \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial u}{\partial t} \right) = L\omega^2 \frac{\partial^2 \hat{u}}{\partial \tau^2} \quad (8.37)$$

$$\dot{w} = \frac{\partial w}{\partial t} = L\omega \frac{\partial \hat{w}}{\partial \tau} \quad (8.38)$$

$$\ddot{w} = \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial w}{\partial t} \right) = L\omega^2 \frac{\partial^2 \hat{w}}{\partial \tau^2} \quad (8.39)$$

$$\ddot{X}_p = \frac{\partial^2 X_p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial X_p}{\partial t} \right) = -x_1 \beta_x^2 \sin \left(\frac{\beta_x}{\omega} \tau \right) \quad (8.40)$$

$$\ddot{Z}_p = \frac{\partial^2 Z_p}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial Z_p}{\partial t} \right) = -z_1 \beta_z^2 \sin \left(\frac{\beta_z}{\omega} \tau + \theta \right) \quad (8.41)$$

$$\dot{\theta}_p = \frac{\partial \theta_p}{\partial t} = \theta_{p1} \beta_\theta \cos \left(\frac{\beta_\theta}{\omega} \tau + \phi \right) \quad (8.42)$$

$$\ddot{\theta}_p = \frac{\partial^2 \theta_p}{\partial t^2} = -\theta_{p1} \beta_\theta^2 \sin \left(\frac{\beta_\theta}{\omega} \tau + \phi \right) \quad (8.43)$$

$$\delta_D(z - L) = \frac{1}{L} \delta_D(\xi - 1) \quad (8.44)$$

Substituindo as considerações 8.27 a 8.44 nas Equações 8.25 e 8.26 e dividindo-as por $\mu_0 L \omega^2$ obtém-se as Equações 8.45 e 8.46.

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_t(\xi)}{\mu_0} \left[\ddot{\hat{u}} - \lambda_x \frac{\beta_x^2}{\omega^2} \sin \left(\frac{\beta_x}{\omega} \tau \right) \cos \theta_p + \lambda_z \frac{\beta_z^2}{\omega^2} \sin \left(\frac{\beta_z}{\omega} \tau + \theta \right) \sin \theta_p \right] + \\ & + \frac{c}{\mu_0 \omega} \dot{\hat{u}} + \frac{\mu_t(\xi)}{\mu_0} \left[(\xi + \hat{w}) \ddot{\theta}_p - \hat{u} \dot{\theta}_p^2 + 2 \dot{\theta}_p \dot{\hat{w}} - \frac{g}{\omega^2 L} \sin \theta_p \right] + \\ & - \left[\frac{EA(\xi)}{\mu_0 L^2 \omega^2} \right] \left[\hat{u}' \hat{w}'' + \hat{u}'' \hat{w}' + \frac{3}{2} (\hat{u}')^2 \hat{u}'' \right] + \left[\frac{EI(\xi)}{\mu_0 L^4 \omega^2} \right] \hat{u}^{IV} + \\ & - \left[\frac{EA'(\xi)}{\mu_0 L^2 \omega^2} \right] \left[\hat{u}' \hat{w}' + \frac{1}{2} (\hat{u}')^3 \right] + \left[\frac{2EI'(\xi)}{\mu_0 L^4 \omega^2} \right] \hat{u}''' + \left[\frac{EI''(\xi)}{\mu_0 L^4 \omega^2} \right] \hat{u}'' + \\ & + \delta_D(\xi - 1) \left[\frac{EA(\xi)}{\mu_0 L^2 \omega^2} \right] \left[\hat{u}' \hat{w}' + \frac{1}{2} (\hat{u}')^3 \right] - \delta_D(\xi - 1) \left[\frac{EI(\xi)}{\mu_0 L^4 \omega^2} \right] \hat{u}''' = 0 \end{aligned} \quad (8.45)$$

$$\begin{aligned} & \frac{\mu_t(\xi)}{\mu_0} \left[\ddot{\hat{w}} - \lambda_x \frac{\beta_x^2}{\omega^2} \sin \left(\frac{\beta_x}{\omega} \tau \right) \sin \theta_p - \lambda_z \frac{\beta_z^2}{\omega^2} \sin \left(\frac{\beta_z}{\omega} \tau + \theta \right) \cos \theta_p \right] + \\ & + \frac{\mu_t(\xi)}{\mu_0} \left[-\hat{u} \ddot{\theta}_p - (\hat{w} + \xi) \dot{\theta}_p^2 - 2 \dot{\theta}_p \dot{\hat{u}} + \frac{g}{\omega^2 L} \cos \theta_p \right] + \\ & - \left[\frac{EA(\xi)}{\mu_0 L^2 \omega^2} \right] (\hat{w}'' + \hat{u}'' \hat{u}') - \left[\frac{EA'(\xi)}{\mu_0 L^2 \omega^2} \right] \left[\hat{w}' + \frac{1}{2} (\hat{u}')^2 \right] + \\ & + \left[\frac{EA(\xi)}{\mu_0 L^2 \omega^2} \right] \left[\hat{w}' + \frac{1}{2} (\hat{u}')^2 \right] \delta_D(\xi - 1) = 0 \end{aligned} \quad (8.46)$$

Consideram-se os adimensionais de massa $\gamma(\xi)$, amortecimento linear crítico ζ , aceleração Λ , de frequência de excitação $(\eta_x, \eta_z, \eta_\theta)$ e de propriedades geométricas da torre, sendo que o parâmetro ω representa a frequência de referência e μ_0 a massa linear da base da torre.

$$\gamma(\xi) = \frac{\mu_t(\xi)}{\mu_0} = \frac{\mu(\xi)}{\mu_0} + \frac{M_m \delta_D(\xi - 1)}{\mu_0 L}, \zeta = \frac{c}{\mu_0 \omega}, \Lambda = \frac{g}{L \omega^2} \quad (8.47)$$

$$\eta_x = \frac{\beta_x}{\omega}, \eta_z = \frac{\beta_z}{\omega}, \eta_\theta = \frac{\beta_\theta}{\omega}, \kappa_1(\xi) = \frac{EA(\xi)}{\omega^2 L^2 \mu_0}, \quad (8.48)$$

$$\kappa_2(\xi) = \frac{EA'(\xi)}{\omega^2 L^2 \mu_0}, \chi_1(\xi) = \frac{EI(\xi)}{\omega^2 L^4 \mu_0}, \chi_2(\xi) = \frac{EI'(\xi)}{\omega^2 L^4 \mu_0}, \chi_3(\xi) = \frac{EI''(\xi)}{\omega^2 L^4 \mu_0}. \quad (8.49)$$

Alguns parâmetros adimensionais dependem de funções que variam ao longo do comprimento da torre, tais como $\mu(\xi)$, $A(\xi)$ e $I(\xi)$. Tais funções são dadas pelas Equações 8.50 a 8.52 para a torre OC4-Fase II, determinadas a partir das características da torre indicadas na Tabela 2. Essas funções possuem unidades segundo o Sistema Internacional.

$$\mu(\xi) = 560,13\xi^2 - 3273,3\xi + 4667 \quad (8.50)$$

$$A(\xi) = 0,0659\xi^2 - 0,3851\xi + 0,5491 \quad (8.51)$$

$$I(\xi) = 0,0566\xi^4 - 0,6105\xi^3 + 2,451\xi^2 - 4,3466\xi + 2,8757 \quad (8.52)$$

$$\text{sendo } 0 \leq \xi \leq 1$$

Para a torre SNL 13,2MW as funções são dadas pelas Equações 8.53 a 8.55, determinadas a partir das características da torre indicadas na Tabela 8, com unidades segundo o Sistema Internacional.

$$\mu(\xi) = 841,06\xi^2 - 4915,7\xi + 7010,2 \quad (8.53)$$

$$A(\xi) = 0,0989\xi^2 - 0,5783\xi + 0,8247 \quad (8.54)$$

$$I(\xi) = 0,1921\xi^4 - 2,0682\xi^3 + 8,3022\xi^2 - 14,727\xi + 9,746 \quad (8.55)$$

$$\text{sendo } 0 \leq \xi \leq 1$$

8.1.2 Discretização

Após a definição de todos os parâmetros adimensionais, nesta seção utiliza-se o método da separação de variáveis, também utilizado por [Laura, Pombo e Susemihl \(1974\)](#), e posteriormente aplica-se o Método de Galerkin. A separação de variáveis é dada pelas Equações 8.56 e 8.57, sendo que $\psi_1(\xi)$ e $\psi_2(\xi)$ são as funções de interpolação que devem atender as condições de contorno essenciais.

$$\hat{u} = Q_1(\tau)\psi_1(\xi), \quad (8.56)$$

$$\hat{w} = Q_2(\tau)\psi_2(\xi) \quad (8.57)$$

Consideram-se as funções ψ_1 e ψ_2 como os primeiros modos naturais de vibração lateral e axial de uma barra engastada-livre, indicadas em [Rao \(2008\)](#). Adotam-se os parâmetros adimensionais e obtém-se as Equações 8.58 e 8.59, normalizadas de maneira que seus máximos correspondam a 1. A Figura 25 ilustra o comportamento dessas funções.

$$\psi_1(\xi) = \frac{1}{2,724}[\sin 1,875\xi - \sinh 1,875\xi - 1,362(\cos 1,875\xi - \cosh 1,875\xi)] \quad (8.58)$$

$$\psi_2(\xi) = \sin \frac{\pi\xi}{2} \quad (8.59)$$

Figura 25 – Função de interpolação de uma barra engastada-livre: (a) Vibração lateral do 1ºModo; (b) Vibração axial do 1ºModo.

Fonte: Própria autora.

Sendo assim, considerando todas as funções adimensionais e o método da separação de variáveis, as Equações 8.45 e 8.46 podem ser reescritas conforme Equações 8.60 e 8.61.

$$\begin{aligned}
& \gamma \left[\psi_1 \ddot{Q}_1 - \lambda_x \eta_x^2 \sin(\eta_x \tau) \cos[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] + \lambda_z \eta_z^2 \sin(\eta_z \tau + \theta) \sin[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] \right] + \\
& + \gamma \left[-(\xi + \psi_2 Q_2) \theta_{p1} \eta_\theta^2 \sin(\eta_\theta \tau + \phi) - \theta_{p1}^2 \eta_\theta^2 \cos^2(\eta_\theta \tau + \phi) \psi_1 Q_1 \right] + \\
& + \gamma \left[2\theta_{p1} \eta_\theta \cos(\eta_\theta \tau + \phi) \psi_2 \dot{Q}_2 - \Lambda \sin[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] \right] + \\
& - \kappa_1 (\psi_1' \psi_2'' + \psi_1'' \psi_2') Q_1 Q_2 - \frac{3}{2} \kappa_1 (\psi_1'^2 \psi_1'') Q_1^3 + \chi_1 \psi_1^{IV} Q_1 - \kappa_2 (\psi_1' \psi_2') Q_1 Q_2 + \\
& - \frac{1}{2} \kappa_2 \psi_1'^3 Q_1^3 + 2\chi_2 \psi_1''' Q_1 + \chi_3 \psi_1'' Q_1 + \kappa_1 (\psi_1' \psi_2') \delta_D(\xi - 1) Q_1 Q_2 + \\
& + \frac{1}{2} \kappa_1 \psi_1'^3 \delta_D(\xi - 1) Q_1^3 - \chi_1 \psi_1''' \delta_D(\xi - 1) Q_1 + \zeta \psi_1 \dot{Q}_1 = 0 \quad (8.60)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \gamma \left[\psi_2 \ddot{Q}_2 - \lambda_x \eta_x^2 \sin(\eta_x \tau) \sin[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] - \lambda_z \eta_z^2 \sin(\eta_z \tau + \theta) \cos[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] \right] + \\
& + \gamma \left[\theta_{p1} \eta_\theta^2 \sin(\eta_\theta \tau + \phi) \psi_1 Q_1 - (\xi + \psi_2 Q_2) \theta_{p1}^2 \eta_\theta^2 \cos^2(\eta_\theta \tau + \phi) \right] + \\
& + \gamma \left[-2\theta_{p1} \eta_\theta \cos(\eta_\theta \tau + \phi) \psi_1 \dot{Q}_1 + \Lambda \cos[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] \right] + \\
& - \kappa_1 \psi_2'' Q_2 - \kappa_1 (\psi_1' \psi_1'') Q_1^2 - \kappa_2 \psi_2' Q_2 - \frac{1}{2} \kappa_2 \psi_1'^2 Q_1^2 + \kappa_1 \psi_2' \delta_D(\xi - 1) Q_2 + \\
& + \frac{1}{2} \kappa_1 \psi_1'^2 \delta_D(\xi - 1) Q_1^2 = 0 \quad (8.61)
\end{aligned}$$

Aplica-se o método de Galerkin nas equações de movimento, o qual consiste em multiplicar a Equação 8.60 por ψ_1 e a Equação 8.61 por ψ_2 e integrar ξ de 0 a 1^+ . Tal procedimento foi implementado no *software* Mathematica e obtiveram-se as Equações 8.62 e 8.63 que correspondem ao MOR de uma vibração plana para as torres avaliadas. Os coeficientes a_n e b_n encontram-se nas Tabelas 31 e 32, respectivamente. Convém ressaltar ao leitor que a metodologia aqui descrita é geral, de sorte que a inserção das propriedades de uma nova torre eólica na formulação produzirá um novo conjunto de coeficientes a_n e b_n .

$$\begin{aligned}
& a_1 \ddot{Q}_1 + a_2 \zeta \dot{Q}_1 + a_3 Q_1^3 + a_4 Q_1 + a_5 \theta_{p1}^2 \eta_\theta^2 [0.5 + 0.5 \cos(2\eta_\theta \tau + 2\phi)] Q_1 + a_6 Q_1 Q_2 + \\
& + a_7 \theta_{p1} \eta_\theta^2 \sin(\eta_\theta \tau + \phi) Q_2 + a_8 \theta_{p1} \eta_\theta \cos(\eta_\theta \tau + \phi) \dot{Q}_2 = \\
& a_9 \lambda_x \eta_x^2 \sin(\eta_x \tau) \cos[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] + a_{10} \lambda_z \eta_z^2 \sin(\eta_z \tau + \theta) \sin[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] + \\
& + a_{11} \theta_{p1} \eta_\theta^2 \sin(\eta_\theta \tau + \phi) + a_{12} \sin[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] \quad (8.62)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& b_1 \ddot{Q}_2 + b_2 Q_1^2 + b_3 Q_2 + b_4 \theta_{p1}^2 \eta_\theta^2 [0.5 + 0.5 \cos(2\eta_\theta \tau + 2\phi)] Q_2 + \\
& + b_5 \theta_{p1} \eta_\theta^2 \sin(\eta_\theta \tau + \phi) Q_1 + b_6 \theta_{p1} \eta_\theta \cos(\eta_\theta \tau + \phi) \dot{Q}_1 = \\
& b_7 \lambda_x \eta_x^2 \sin(\eta_x \tau) \sin[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] + b_8 \lambda_z \eta_z^2 \sin(\eta_z \tau + \theta) \cos[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] + \\
& + b_9 \theta_{p1}^2 \eta_\theta^2 [0.5 + 0.5 \cos(2\eta_\theta \tau + 2\phi)] + b_{10} \cos[\theta_{p1} \sin(\eta_\theta \tau + \phi)] \quad (8.63)
\end{aligned}$$

Tabela 31 – Coeficientes a_n da equação de movimento.

Coeficiente	OC4-Fase II	SNL 13,2MW
a_1	1,000	1,000
a_2	0,228	0,129
a_3	347,354	356,336
a_4	1,395	1,481
a_5	-1,000	-1,000
a_6	394,919	405,129
a_7	-1,049	-1,028
a_8	2,099	2,056
a_9	1,082	1,047
a_{10}	-1,082	-1,047
a_{11}	1,020	1,011
a_{12}	0,025	0,065

Fonte: Própria autora.

Tabela 32 – Coeficientes b_n da equação de movimento.

Coeficiente	OC4-Fase II	SNL 13,2MW
b_1	1,000	1,000
b_2	172,583	187,234
b_3	598,508	649,309
b_4	-1,000	-1,000
b_5	0,917	0,950
b_6	-1,834	-1,901
b_7	1,081	1,049
b_8	1,081	1,049
b_9	0,952	0,972
b_{10}	-0,025	-0,065

Fonte: Própria autora.

Por meio das Equações 8.62 e 8.63, observa-se que os termos que multiplicam os coeficientes a_9 e b_7 são originados pelas excitações de suporte horizontal $X_p(t)$; a_{10} e b_8 pelas excitações vertical $Z_p(t)$; e a_{11} e b_9 pelas excitações de rotação $\theta_p(t)$, e entram como não homogeneidade das equações diferenciais. Além disso, os termos que multiplicam os coeficientes a_5 , a_7 , a_8 , b_4 , b_5 e b_6 excitam parametricamente o sistema, com a amplitude rotacional θ_{p1} e a frequência η_θ . Dessa forma, o MOR está sob vibração forçada e paramétrica, resultando em uma vibração combinada.

Sabe-se que um sistema entra em ressonância paramétrica quando a frequência de variação da rigidez for o dobro de uma das frequências naturais à flexão, em modelos de um grau de liberdade, sendo que para estruturas com mais graus de liberdade, pode ocorrer uma pequena variação dessa proporção. Neste MOR, a frequência de variação da rigidez de rotação (β_θ) foi adimensionalizada com a frequência natural de uma torre engastada-livre com massa pontual na extremidade livre (ω), resultando no adimensional $\eta_\theta = \beta_\theta/\omega$. Dessa forma, por meio das Equações 8.62 e 8.63, observa-se que o sistema pode entrar em ressonância paramétrica para η_θ próximo a 1, para os termos a_5 e b_4 que multiplicam $\cos(2\eta_\theta\tau + 2\phi)$; ou para η_θ próximo a 2, para os termos a_7 e b_5 que multiplicam $\sin(\eta_\theta\tau + \phi)$. Os termos a_8 e b_6 que multiplicam $\cos(\eta_\theta\tau + \phi)$ não é possível afirmar que ocorra a ressonância paramétrica para η_θ próximo a 2, pois esse termo está relacionado com o amortecimento e não com a rigidez do sistema.

A ressonância clássica ocorre quando a frequência solicitante está próxima a uma das frequências naturais do sistema. Dessa forma, tal fenômeno pode ocorrer para η_x , η_z e η_θ próximo a 1 para os termos que multiplicam a_9 , a_{10} , a_{11} , a_{12} , b_7 , b_8 e b_{10} . Também é possível ocorrer para η_θ próximo a 0.5 para o termo b_9 que multiplica $\cos(2\eta_\theta\tau + 2\phi)$.

Dessa forma, conclui-se que para η_θ próximo a 1 o sistema certamente entra em ressonância clássica e potencialmente em ressonância paramétrica. E para η_θ próximo a 2 o sistema certamente não entra em ressonância clássica e potencialmente em ressonância paramétrica, para uma estrutura sob vibração forçada e paramétrica.

8.2 Análise numérica

Esta seção tem o objetivo de apresentar a análise numérica do MOR da torre do projeto OC4-Fase II e da SNL 13,2MW para a diferentes condições de excitação de suporte na base da estrutura. As Equações 8.62 e 8.63 foram numericamente integradas usando o método de Runge-Kutta, por meio da função *ode45* do MATLAB.

Para que a solução das equações seja uma boa aproximação da resposta é recomendável adotar um passo de tempo da ordem de $T^*/20$, sendo T^* o mínimo entre o período natural do sistema e o menor período forçante relevante. Considerando o período natural das torres analisadas, adota-se o passo de tempo adimensional de $\Delta\tau = 0,1$. No tempo dimensional, o passo de tempo é de $\Delta t = 0,0427s$ para a OC4 e $\Delta t = 0,0851s$ para a SNL. A simulação máxima corresponde a $\tau_{m\acute{a}x} = 8000$, que equivale a 1273 ciclos do primeiro modo de oscilação.

Para as análises, elaboram-se mapas de amplitude pós-crítica em regime estacionário, nos quais consideram-se diferentes valores de amplitude de excitação rotacional θ_{p1} e frequência de excitação η , com uma malha de 50×50 de resolução. Os deslocamentos abaixo de $\tau_{m\acute{a}x}/2$ foram desconsiderados devido à presença dos transientes. Para ocorrer a

ressonância paramétrica o sistema precisa de uma energia mínima, para tanto, considera-se uma amplitude lateral inicial de $Q_1(\tau) = 0,0010$, que equivale a $u = 7,76$ cm para OC4 e $u = 11,46$ cm para a SNL na extremidade livre. Outros parâmetros fixos são a taxa de amortecimento estrutural $\zeta = 1\%$ e os ângulos de fase em relação a excitação horizontal x , $\theta = \frac{\pi}{4}$ e $\phi = \frac{\pi}{2}$.

Alguns dos parâmetros que serão utilizados nas próximas seções estão indicados nas Equações 8.64, 8.65 e 8.66. Sendo que u e w correspondem ao deslocamento lateral e axial; ξ , λ_x , λ_z , η_x , η_z , η_θ e τ são adimensionais de posição, amplitude de excitação horizontal e vertical, frequência de excitação horizontal, vertical e rotacional e de tempo, respectivamente.

$$u = Q_1(\tau)\psi_1(\xi)L \quad (8.64)$$

$$w = Q_2(\tau)\psi_2(\xi)L \quad (8.65)$$

$$\xi = \frac{z}{L}, \lambda_x = \frac{x_1}{L}, \lambda_z = \frac{z_1}{L}, \eta_x = \frac{\beta_x}{\omega}, \eta_z = \frac{\beta_z}{\omega}, \eta_\theta = \frac{\beta_\theta}{\omega}, \tau = \omega t, \quad (8.66)$$

onde o parâmetro ω representa a frequência natural de referência. Para a torre OC4-Fase II essa frequência corresponde a $\omega = 0,372$ Hz ($T = 2,68$ s) e para a SNL 13,2 MW a $\omega = 0,187$ Hz ($T = 5,34$ s), conforme capítulo 4. Em uma análise preliminar, nota-se que a frequência natural da torre SNL 13,2 MW pode se enquadrar em uma situação crítica no cenário *offshore*, caso a torre seja montada sobre uma plataforma flutuante. Nesse caso, a frequência natural da torre se aproxima da faixa de frequência das ondas do mar, que varia entre 0,033 Hz e 0,33 Hz (períodos de excitação de ondas $3 \leq T \leq 30$ s) possibilitando o fenômeno de ressonância clássica. Dessa forma, nas próximas seções as duas configurações de torre serão avaliadas dinamicamente para efeito de comparação.

8.2.1 Estudo de caso - Torre OC4

Nesta seção apresenta-se a resposta dinâmica da torre do projeto OC4-Fase II para diferentes excitações de suporte na base. Avaliam-se dois casos: (1) sistema somente sob excitação de suporte rotacional e (2) excitação de suporte vertical e rotacional.

8.2.1.1 Excitação de suporte rotacional

Inicialmente, analisa-se o sistema somente com excitação de rotação na base da torre $\theta_p(\tau)$, que origina vibrações paramétricas e forçadas. Consideram-se η_θ variando de 0 a 4, e θ_{p1} de 0 a 0,035 rad ($\cong 2,0^\circ$). A amplitude de excitação rotacional de $\theta_{p1} = 0,035$ rad na base da torre equivale a um deslocamento na extremidade livre de 2,71m em relação ao eixo rotacionado e indeformado z . O mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário encontra-se na Figura 26.

Figura 26 – Mapa de amplitude pós crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ ; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ .

Fonte: Própria autora.

Por meio da Figura 26, nota-se que com o aumento da frequência de excitação (η_θ) e da amplitude de excitação rotacional θ_{p1} , ocorre um aumento progressivo da resposta em amplitude. Esse comportamento inicia próximo a $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz) e $\theta_{p1} = 0$ rad, sendo que valores acentuados encontram-se na vizinhança de 2,367 ($\beta_\theta = 0,880$ Hz) e $\theta_{p1} = 0,035$ rad ($\cong 2,0^\circ$). Para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz) e $\theta_{p1} = 0,0174$ rad ($\cong 1,0^\circ$) o deslocamento lateral na extremidade livre da torre é acentuado, pois $\max\{Q_1(\tau)\} \cong 0,059$ ($u \cong 4,57$ m). Para $\eta_\theta = 2,367$ ($\beta_\theta = 0,880$ Hz) e $\theta_{p1} = 0,035$ rad ($\cong 2,0^\circ$) o deslocamento lateral na extremidade livre da torre é excessivo, pois $\max\{Q_1(\tau)\} \cong 0,18$ ($u \cong 13,97$ m).

Supondo que as excitações de suporte correspondam a movimentos de onda em um cenário *offshore*, os casos de $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz) e $\eta_\theta = 2,367$ ($\beta_\theta = 0,880$ Hz) são improváveis de ocorrer, pois a frequência de variação da rigidez (β_θ) fica fora da faixa de frequência das ondas do mar.

Observa-se que o aumento dos deslocamentos para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz) está associado a ressonância clássica e potencialmente paramétrica, que podem ocorrer simultaneamente, como destacado na seção 8.1.2. Para η_θ próximo a 2,367 ($\beta_\theta = 0,880$ Hz) o sistema certamente não entra em ressonância clássica e potencialmente em ressonância paramétrica.

O fato de η_θ não ser exatamente igual a 1 ou a 2 pode estar associado a pequenas variações na frequência de referência, que foi definida para uma torre engastada-livre com massa pontual na extremidade livre, sem amortecimento e sem movimentos angulares. A proporção 2:1 entre a frequência de variação da rigidez e a frequência natural é válida para sistemas de um grau de liberdade, portanto, uma estrutura com mais graus de liberdade pode ocorrer alguma variação dessa proporção. Além disso, a presença da massa na

extremidade livre da torre também pode alterar o valor de η_θ , como identificado por [Handoo e Sundararajan \(1971\)](#) no estudo de barras com variações da massa pontual na extremidade livre.

8.2.1.2 Excitação de suporte vertical e rotacional

Nesta seção são apresentadas ações combinadas que correspondam aos movimentos de onda de primeira ordem em um cenário *offshore*, dessa forma, consideram-se as excitações de suporte vertical e rotacional. Neste caso, as frequências de excitação vertical e rotacional são iguais ($\eta_z = \eta_\theta = \eta$) e a excitação horizontal é anulada ($\lambda_x = \eta_x = 0$). Obtém-se os mapas de amplitude pós-crítica em regime estacionário para as amplitudes de excitação verticais de $\lambda_z = 0,0128$ ($z_1 = 1\text{m}$) e $\lambda_z = 0,0386$ ($z_1 = 3\text{m}$), segundo Figuras 27 e 28, respectivamente.

Figura 27 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0128$; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0128$.

Fonte: Própria autora.

Por meio das Figuras 27 e 28 observa-se que com a inclusão da excitação vertical o aumento progressivo dos deslocamentos identificados na seção 8.2.1.1 foi mantido. Além disso, nota-se que para $\lambda_z = 0,0128$ ($z_1 = 1\text{ m}$) e $\lambda_z = 0,0386$ ($z_1 = 3\text{ m}$) a resposta acentuada foi estendida para $\eta = 2,449$ ($\beta = 0,911\text{ Hz}$).

A partir da Figura 27, nota-se que para $\eta = 2,367$ ($\beta = 0,880\text{ Hz}$) pode ocorrer ressonância paramétrica para amplitude de excitação rotacional θ_{p1} de 0 a 0,01 rad ($\cong 0,57^\circ$) e para alguns ângulos acima de $\theta_{p1} = 0,025\text{ rad}$ ($\cong 1,43^\circ$). Esse comportamento também foi observado na Figura 28, para $\lambda_z = 0,0386$ ($z_1 = 3\text{ m}$), de maneira acentuada. Dessa forma, embora o sistema seja excitado parametricamente por θ_{p1} e η_θ , a amplitude de excitação vertical λ_z aumenta a possibilidade de ocorrer a ressonância paramétrica, principalmente para η próximo a 2,367 ($\beta = 0,880\text{ Hz}$).

Figura 28 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0386$; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0386$.

Fonte: Própria autora.

Supondo que as excitações de suporte correspondam a movimentos de onda em um cenário *offshore*, os casos de $\eta = 1,224$ ($\beta = 0,455$ Hz) e $\eta = 2,367$ ($\beta = 0,880$ Hz) são improváveis de ocorrer, pois a frequência de variação da rigidez (β) fica fora da faixa de frequência das ondas do mar. Contudo, em estudos futuros, um modelo acoplado, torre e plataforma, a ressonância paramétrica e clássica devem ser reavaliadas, uma vez que as frequências naturais da plataforma semissubmersível e do sistema completo ficam dentro da faixa de frequência das ondas do mar, principalmente para o 2º e 3º modos de vibração, indicados nas Tabelas 23 e 25 no capítulo 7.

Com o intuito de verificar o comportamento da estrutura sob ressonância clássica e possivelmente paramétrica, obtém-se as séries temporais para $\eta = 1,224$ ($\beta = 0,455$ Hz, $T=2,20$ s), $\theta_{p1}=0,0174$ rad ($\cong 1,0^\circ$) e $\lambda_z = 0,0386$ ($z_1=3$ m), dadas pela Figura 29. Comparativamente, determinam-se séries temporais de ondas que não provocam ressonância no sistema, para tanto, consideram-se $\eta = 0,268$ ($\beta = 0,10$ Hz, $T=10$ s), $\theta_{p1}=0,0174$ rad ($\cong 1,0^\circ$) e $\lambda_z = 0,0386$ ($z_1=3$ m), indicados na Figura 30.

A partir das Figuras 29 e 30 observa-se que para um sistema em ressonância clássica e possivelmente paramétrica a resposta estrutural é mais expressiva que a não ressonante, pois em ressonância, a resposta máxima lateral na extremidade livre da torre em regime estacionário corresponde a $\max\{Q_1(\tau)\} = 0,059$ ($u \cong 4,58$ m), e no caso não ressonante equivale a $\max\{Q_1(\tau)\} = 1,33 \times 10^{-3}$ ($u \cong 0,10$ m). Dessa forma, nota-se a necessidade de avaliar a estrutura em ressonância para evitar deslocamentos excessivos que podem comprometer o funcionamento da torre e de seus componentes.

Figura 29 – Série temporal do modelo não linear para $\eta=1,224$ ($\beta = 0,455$ Hz, $T=2,20$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$.

Fonte: Própria autora.

Figura 30 – Série temporal do modelo não linear para $\eta=0,268$ ($\beta = 0,10$ Hz, $T=10$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$.

Fonte: Própria autora.

Considerando as mesmas condições de carregamento que geraram as séries temporais das Figuras 29 e 30, e anulando os termos não lineares, Q_1^3 , Q_1Q_2 e Q_1^2 das Equações 8.62 e 8.63, obtém-se as séries temporais do modelo linearizado, conforme Figuras 31 e 32.

Figura 31 – Série temporal do modelo linear para $\eta=1,224$ ($\beta = 0,455$ Hz, $T=2,20$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$.

Fonte: Própria autora.

Figura 32 – Série temporal do modelo linear para $\eta=0,268$ ($\beta = 0,10$ Hz, $T=10$ s): (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ e (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$.

Fonte: Própria autora.

Por meio das Figuras 30 e 32 nota-se que em um sistema não ressonante a abordagem linear permite uma boa aproximação da resposta da estrutura, devido a proximidade dos resultados. No entanto, quando a estrutura entra em ressonância clássica e possivelmente paramétrica a abordagem linear deixa de ser satisfatória, pois na abordagem não linear a amplitude de resposta lateral na extremidade livre é $\max\{Q_1(\tau)\} = 0,059$ ($u \cong 4,58\text{m}$) e

na linear é $\max\{Q_1(\tau)\} = 0,26$ ($u \cong 20,18\text{m}$), conforme Figuras 29 e 31. Dessa forma, embora Dellezzopolles Junior (2011) tenha considerado suficiente a formulação linear em suas análises, em torres sob excitação de suporte essa afirmação deve ser avaliada com critério, como salientado na seção 2.2.

No caso de torres com base fixa, em trabalhos futuros, pode-se verificar a ação de ondas sísmicas. Nesse caso, uma ampla investigação acerca da distância do epicentro, do tipo e condições do solo, bem como a topografia, podem interferir na frequência e amplitude das ondas sísmicas. Além disso, deve-se avaliar as condições do solo, pois afetam a frequência natural da estrutura, como destacado por Det Norske Veritas e Wind Energy Department (2002) e Lombardi (2010).

Apresentada a análise dinâmica da torre do projeto OC4-Fase II, na próxima seção verifica-se a resposta dinâmica da torre SNL 13,2 MW.

8.2.2 Estudo de caso - Torre SNL 13,2MW

Nesta seção apresenta-se a resposta dinâmica da torre SNL 13,2 MW para diferentes excitações de suporte na base. Avaliam-se três casos: (1) sistema somente sob excitação de suporte rotacional, (2) excitação de suporte vertical e rotacional, e (3) excitação de suporte horizontal, vertical e rotacional.

8.2.2.1 Excitação de suporte rotacional

Inicialmente, analisa-se o sistema somente com excitação de rotação na base da torre $\theta_p(\tau)$, que origina vibrações paramétricas e forçadas. Consideram-se os mesmos intervalos avaliados na seção 8.2.1.1, que correspondem a η_θ variando de 0 a 4, e θ_{p1} de 0 a 0,035 rad ($\cong 2,0^\circ$). A amplitude de excitação rotacional de $\theta_{p1}=0,035$ rad na base da torre equivale a um deslocamento na extremidade livre de 4,0m, em relação ao eixo rotacionado e indeformado z. O mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário encontra-se na Figura 33.

Por meio da Figura 33 nota-se que com o aumento da frequência de excitação (η_θ) e da amplitude de excitação rotacional θ_{p1} , ocorre um aumento progressivo da resposta em amplitude. Esse comportamento inicia próximo a $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz) e $\theta_{p1}=0$ rad, sendo que valores acentuados encontram-se na vizinhança de 2,449 ($\beta_\theta = 0,457$ Hz) e $\theta_{p1}=0,035$ rad ($\cong 2,0^\circ$).

Fazendo uma análise comparativa com a torre OC4-Fase II, a SNL 13,2 MW apresenta a mesma ordem de grandeza de resposta lateral em amplitude, pois para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz) e $\theta_{p1}=0,0174$ rad ($\cong 1,0^\circ$) a resposta máxima corresponde a $\max\{Q_1(\tau)\} \cong 0,056$ ($u \cong 6,41$ m). Para $\eta_\theta = 2,367$ ($\beta_\theta = 0,442$ Hz) e $\theta_{p1}=0,035$ rad ($\cong 2,0^\circ$) a resposta equivale a $\max\{Q_1(\tau)\} \cong 0,177$ ($u \cong 20,28$ m). Ressalta-se, no entanto,

que o deslocamento lateral é proporcional ao comprimento da torre ($u = Q_1(\tau)\psi_1(\xi)L$), dessa forma, a torre SNL 13,2 MW apresenta deslocamento lateral maior que a OC4-Fase II.

Figura 33 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ ; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η_θ .

Fonte: Própria autora.

Supondo que as excitações de suporte correspondam a movimentos de onda em um cenário *offshore*, o caso de $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz) é possível ocorrer e $\eta_\theta = 2,449$ ($\beta_\theta = 0,457$ Hz) é improvável, pois a frequência de variação da rigidez β_θ fica dentro ou fora da faixa de frequência das ondas do mar, que varia entre 0,033 Hz e 0,33 Hz (períodos de excitação de ondas $3 \leq T \leq 30$ s).

Observa-se que o aumento dos deslocamentos para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz) está associado a ressonância clássica e potencialmente à ressonância paramétrica, que podem ocorrer simultaneamente, como destacado na seção 8.1.2. Para η_θ próximo a 2,449 ($\beta_\theta = 0,457$ Hz) o sistema certamente não entra em ressonância clássica e potencialmente em ressonância paramétrica. O fato de η_θ não ser exatamente igual a 1 ou a 2 pode estar associado aos mesmos motivos indicados na seção 8.2.1.1.

8.2.2.2 Excitação de suporte vertical e rotacional

Nesta seção são estudadas ações combinadas que correspondam aos movimentos de onda de primeira ordem em um cenário *offshore*, dessa forma, consideram-se as excitações de suporte vertical e rotacional. Neste caso, as frequências de excitação vertical e à rotação são iguais ($\eta_z = \eta_\theta = \eta$) e a excitação de suporte horizontal é anulada ($\lambda_x = \eta_x = 0$). Obtém-se os mapas de amplitude pós-crítica em regime estacionário para a amplitude de excitação vertical de $\lambda_z = 0,0261$ ($z_1 = 3$ m), segundo a Figura 34.

Figura 34 – Mapa de amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0261$; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de θ_{p1} e η , para $\lambda_z = 0,0261$.

Fonte: Própria autora.

Por meio da Figura 34, observa-se que com a inclusão da excitação vertical o aumento progressivo dos deslocamentos identificado na seção 8.2.2.1 foi mantido. Além disso, nota-se que para $\lambda_z=0,0261$ ($z_1=3$ m) a resposta acentuada foi estendida para $\eta=2,612$ ($\beta=0,488$ Hz) e $\theta_{p1}=0,035$ rad ($\cong 2^\circ$).

A ressonância clássica e possivelmente paramétrica pode ocorrer para $\eta_z = \eta_\theta = \eta = 1,224$ ($\beta=0,228$ Hz); e a ressonância paramétrica pode ocorrer para η próximo a 2,449 ($\beta=0,457$ Hz) e amplitude de excitação rotacional $\theta_{p1}=0,0014$ a 0,012 rad ($\cong 0,08^\circ$ a $0,687^\circ$) e próximo a $\theta_{p1}=0,035$ rad ($\cong 2^\circ$).

Dessa forma, embora o sistema seja excitado parametricamente por θ_{p1} e η_θ , a excitação de suporte vertical aumenta a possibilidade de ocorrência a ressonância paramétrica para amplitudes de excitação rotacional θ_{p1} próximas a 0,01 rad ($\cong 0,572^\circ$), frequência de excitação $\eta \cong 2,449$ ($\beta=0,457$ Hz) e amplitude de excitação vertical $\lambda_z=0,0261$ ($z_1=3$ m).

Essa interferência da excitação vertical na resposta da estrutura também foi identificada na torre OC4-Fase II na seção 8.2.1.2. Desta maneira, observa-se que as duas torres apresentam resposta dinâmica similar, sendo que o deslocamento final é proporcional ao comprimento da torre.

Supondo que as excitações de suporte correspondam a movimentos de onda em um cenário *offshore*, o caso de $\eta=1,224$ ($\beta=0,228$ Hz) é possível de ocorrer e $\eta=2,449$ ($\beta=0,457$ Hz) é improvável, pois a frequência de excitação (β) fica dentro ou fora da faixa de frequência das ondas do mar.

8.2.2.3 Excitação de suporte vertical, horizontal e rotacional

Esta seção tem o objetivo de verificar a resposta dinâmica da torre sob ação simultânea da excitação de suporte horizontal, vertical e rotacional. Os casos investigados nas seções anteriores também serão considerados para efeito de comparação. Determina-se a resposta máxima em amplitude $\max\{Q_1(\tau)\}$ e $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função da frequência de excitação η para quatro casos de carregamento:

- (1) somente com excitação rotacional: $\eta_\theta = \eta$;
- (2) excitação rotacional e vertical: $\eta_\theta = \eta_z = \eta$ e $\lambda_z=0,0261$ ($z_1=3\text{m}$);
- (3) excitação rotacional, vertical e horizontal: $\eta_\theta = \eta_z = \eta_x = \eta$, $\lambda_z=0,0261$ ($z_1=3\text{m}$) e $\lambda_x=0,10\lambda_z$ ($x_1=0,3\text{m}$);
- (4) excitação rotacional, vertical e horizontal: $\eta_\theta = \eta_z = \eta_x = \eta$, $\lambda_z=0,0261$ ($z_1=3\text{m}$) e $\lambda_x=0,20\lambda_z$ ($x_1=0,6\text{m}$).

O caso (1) foi investigado na seção 8.2.2.1, o caso (2) na seção 8.2.2.2, o caso (3) é igual ao (2) exceto pela inclusão da excitação horizontal que possui frequência de excitação igual às outras direções e amplitude de excitação igual a 10% da vertical, e o caso (4) é igual ao (3) exceto pela amplitude de excitação horizontal que corresponde a 20% da vertical. Os quatro casos serão avaliados para amplitude rotacional $\theta_{p1}=0,01$ rad ($\cong 0,572^\circ$) e $\theta_{p1}=0,02$ rad ($\cong 1,14^\circ$), conforme Figuras 35 e 36 respectivamente.

Por meio da Figura 35 observa-se que a presença de movimento horizontal na excitação de suporte fornece uma pequena mudança no pico de resposta de $\eta \approx 1,62$ para $\eta \approx 1,67$ com uma amplificação da resposta do movimento lateral e axial. Além disso, nota-se que a amplitude de excitação horizontal é importante para $1,67 < \eta < 4$ no caso (4).

A Figura 36 mostra a resposta lateral e axial máxima em função de η , considerando a amplitude de excitação rotacional $\theta_{p1} = 0,02$ rad. Observa-se uma amplificação na resposta lateral e axial máxima em todas as condições simuladas, além disso verifica-se que o aumento da amplitude de excitação rotacional (θ_{p1}) não aumentou significativamente a influência da excitação de suporte horizontal na resposta lateral e axial da torre, já que não houveram alterações entre os casos (2), (3) e (4) para $\eta \approx 2$.

Dessa forma, por meio das figuras é possível concluir que dependendo da amplitude de excitação rotacional e horizontal, o sistema sob excitação simultânea horizontal, vertical e rotacional pode causar interferência na resposta em amplitude próxima às frequências associadas à ressonância paramétrica.

Figura 35 – Amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,01$ rad; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,01$ rad.

Fonte: Própria autora.

Figura 36 – Amplitude pós-crítica em regime estacionário: (a) $\max\{Q_1(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,02$ rad; (b) $\max\{Q_2(\tau)\}$ em função de η para $\lambda_z=0,0261$ e $\theta_{p1}=0,02$ rad.

Fonte: Própria autora.

8.3 Conclusões deste capítulo

Neste capítulo obteve-se um MOR não linear de uma torre não prismática, com massa pontual na extremidade livre, com dois graus de liberdade, a translação lateral e axial, sob excitação de suporte na base e carregamentos na extremidade livre.

Após a determinação das equações de movimento, a análise numérica da torre do projeto OC4-Fase II foi investigada. Avaliou-se o sistema considerando excitações de suporte de rotação e de translação vertical na base da torre, sendo que carregamentos na extremidade livre foram desconsiderados.

Observa-se que para o sistema sujeito apenas à rotação como excitação de suporte, a ressonância clássica e possivelmente paramétrica fica evidente para frequência de excitação próxima a $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz); e uma possível ressonância paramétrica para $\eta_\theta \cong 2,367$ ($\beta_\theta = 0,888$ Hz). Para estruturas flutuantes *offshore*, a situação $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz) é improvável de ocorrer, pois a frequência de variação da rigidez β_θ fica fora da faixa de frequência das ondas do mar, entre 0,033 Hz e 0,33 Hz (ou seja, entre os períodos 3s e 30s).

Uma vez identificada a possibilidade de vibração paramétrica devido à excitação de suporte de rotação, nota-se a necessidade de avaliar em trabalhos futuros o modelo acoplado, torre e plataforma, pois a frequência natural da plataforma semissubmersível e do sistema, definidas no capítulo 7, se enquadram em uma possível ressonância clássica e potencialmente paramétrica.

Outro aspecto que deve ser pontuado é a necessidade de ser mantida a análise não linear, pois embora o modelo linear permita uma boa aproximação quando o sistema não está em ressonância, o mesmo modelo não responde de maneira satisfatória em caso de ressonância clássica e potencialmente paramétrica ($\eta_\theta = 1,224$, $\beta_\theta = 0,455$ Hz).

Por intermédio das séries temporais, nota-se que a amplitude de resposta dos deslocamentos, em regime estacionário, para um sistema não ressonante, é inferior em relação ao sistema em ressonância clássica e possivelmente paramétrica. Portanto, avaliar a estrutura em ressonância é essencial para evitar deslocamentos excessivos que podem comprometer o funcionamento da torre e de seus componentes.

Após a análise da torre do projeto OC4-Fase II, iniciaram-se os estudos da torre SNL 13,2 MW, que apresenta maior comprimento e massa na extremidade livre. A partir das análises, nota-se que para o sistema sujeito apenas à excitação de suporte rotacional, a estrutura também entra em ressonância clássica e possivelmente paramétrica para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz), e potencialmente em ressonância paramétrica para $\eta_\theta \cong 2,449$ ($\beta_\theta = 0,457$ Hz). Para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,224$ Hz) essa situação é possível de ocorrer em estruturas flutuantes *offshore*, pois a frequência de variação da rigidez β_θ fica dentro da faixa de frequência das ondas do mar.

Quando o sistema está sob excitação de suporte vertical e rotacional, observa-se que a excitação vertical aumenta a possibilidade de ressonância paramétrica para $\eta = 2,449$ ($\beta = 0,457$ Hz) e $\theta_{p1} \cong 0,01$ rad ($\cong 0,572^\circ$), no entanto, em estruturas flutuantes *offshore* essa situação é improvável devido a amplitude da resposta e a frequência de variação da rigidez (β).

A resposta em amplitude apresenta alterações no deslocamento lateral e axial máximo quando o sistema está sob ação simultânea da excitação de suporte horizontal, vertical e rotacional. Os resultados mostraram que a adição da excitação do suporte horizontal leva a um aumento na resposta lateral e axial máxima próxima às frequências associadas à ressonância paramétrica, dependendo da amplitude da excitação do suporte rotacional e horizontal.

Fazendo uma análise comparativa com a torre OC4-Fase II, a SNL 13,2 MW apresenta uma frequência natural menor e se enquadra em casos críticos de ressonância clássica e possivelmente paramétrica. Além disso, as duas torres apresentam a mesma ordem de grandeza de resposta lateral em amplitude $\max\{Q_1(\tau)\}$ tanto para $\eta_\theta = 1,224$ e $\theta_{p1} = 0,0174$ rad ($\cong 1,0^\circ$), como para $\eta_\theta = 2,367$ e $\theta_{p1} = 0,035$ rad ($\cong 2,0^\circ$). No entanto, é importante destacar que o deslocamento lateral é proporcional ao comprimento da torre ($u = Q_1(\tau)\psi_1(\xi)L$), dessa forma, a torre SNL 13,2 MW apresenta deslocamento lateral maior que a OC4-Fase II.

9 Conclusões e perspectivas de trabalhos futuros

O objetivo desta dissertação é apresentar contribuições para a análise dinâmica de torres de turbinas eólicas para sistemas *onshore* e *offshore*. Para tanto foram desenvolvidos MOR's e modelos em elementos finitos utilizando a ferramenta *in-house* GIRAFFE e obteve-se a resposta dinâmica de tais modelos.

Primeiramente no capítulo 5, utilizou-se o método de [Lenci, Clementi e Mazzilli \(2013\)](#) para o cálculo de uma seção transversal prismática a partir de uma não prismática, com a mesma frequência natural à flexão, para uma torre engastada-livre. Além disso, elaborou-se um modelo no GIRAFFE de torre com adição de massa pontual na extremidade livre, com seção transversal prismática previamente calculada. Conclui-se que considerar a seção transversal como prismática, sem a devida adaptação do método, pode interferir na frequência natural da estrutura. Portanto, nesta dissertação a seção prismática não foi utilizada.

No capítulo 6, desenvolveu-se um MOR e modelos no GIRAFFE para verificação da interferência do momento de inércia da nacela e do rotor na frequência natural à flexão da torre. A partir dos resultados, observou-se que o modelo de barra apresentou boa aderência com o de elementos finitos, e que o uso de massa pontual na extremidade livre é aceitável.

No capítulo 7, elaborou-se um MOR e modelos no GIRAFFE para análise da interferência da rotação da plataforma flutuante e da torre na frequência natural do sistema. Os modelos mostraram boa aderência entre si, possuindo resultados comparáveis com aqueles apresentados pelos pesquisadores do projeto OC4-Fase II. Observou-se alteração da frequência natural do sistema, se comparado com o modelo de torre engastada-livre, além do acoplamento entre os movimentos de *pitch* e *surge* da plataforma semissubmersível e de rotação da torre. Verificou-se, portanto, a importância e necessidade de considerar as translações e a rotação para estudo do comportamento dinâmico da torre e da plataforma.

No capítulo 8 desenvolveu-se um MOR não linear de torre não prismática, com massa pontual na extremidade livre, solicitada por carregamentos na massa e excitações de suporte horizontal, vertical e de rotação na base da estrutura. A formulação foi particularizada para duas configurações de torre, a do projeto OC4-Fase II e a SNL 13,2 MW, sob excitações de suporte na base.

Para a torre OC4-Fase II, observa-se que para o sistema sujeito apenas à rotação como excitação de suporte, a ressonância clássica e possivelmente paramétrica fica evidente para frequência de excitação próxima a $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz); e uma possível

ressonância paramétrica para $\eta_\theta \cong 2,367$ ($\beta_\theta = 0,88$ Hz). Em estruturas flutuantes *offshore*, considera-se uma situação improvável $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,455$ Hz), pois a frequência de variação da rigidez β_θ fica fora da faixa de frequência das ondas do mar, entre 0,033 Hz e 0,33 Hz (ou seja, entre os períodos 3s e 30s).

Por intermédio das séries temporais, nota-se que em um sistema não ressonante, a abordagem linear permitiu uma boa aproximação da resposta da estrutura. Contudo, quando a estrutura entra em ressonância clássica e possivelmente paramétrica a abordagem linear deixa de ser satisfatória, sendo necessária, portanto, a abordagem não linear para uma resposta dinâmica adequada.

Para a torre SNL 13,2 MW, verifica-se que para o sistema sujeito apenas à excitação de suporte rotacional, a estrutura também entra em ressonância clássica e possivelmente paramétrica para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz), e potencialmente em ressonância paramétrica para $\eta_\theta \cong 2,449$ ($\beta_\theta = 0,457$ Hz). Para $\eta_\theta = 1,224$ ($\beta_\theta = 0,228$ Hz) essa situação é possível de ocorrer em estruturas flutuantes *offshore*.

Quando o sistema está sob excitação de suporte vertical e rotacional, observa-se que a excitação vertical aumenta a possibilidade de ressonância paramétrica para $\eta = 2,449$ ($\beta_\theta = 0,457$ Hz) e $\theta_{p1} \cong 0,01$ rad ($\cong 0,572^\circ$), no entanto, em estruturas flutuantes *offshore* essa situação é improvável devido a frequência de variação da rigidez (β).

A resposta em amplitude apresenta alterações no deslocamento lateral e axial máximo quando o sistema está sob ação simultânea da excitação de suporte horizontal, vertical e rotacional. Verifica-se que dependendo da amplitude de excitação rotacional e horizontal, podem ocorrer interferências na resposta em amplitude próxima às frequências associadas à ressonância paramétrica.

Fazendo uma análise comparativa com a torre OC4-Fase II, a SNL 13,2 MW apresenta frequência natural menor e se enquadra em casos críticos de ressonância clássica e possivelmente paramétrica. Além disso, dependendo da amplitude de excitação rotacional e frequência de excitação, as duas torres apresentam a mesma ordem de grandeza de resposta lateral em amplitude adimensional. No entanto, como o deslocamento lateral é proporcional ao comprimento da torre, então a SNL 13,2 MW apresenta deslocamento lateral maior que a OC4-Fase II.

Uma vez identificada a possibilidade de vibração paramétrica no MOR do capítulo 8, nota-se a necessidade de avaliar o modelo acoplado, torre e plataforma da OC4-Fase II, em trabalhos futuros, pois a frequência natural da plataforma semissubmersível e do sistema, investigados no capítulo 7, se enquadram em uma ressonância clássica e possivelmente paramétrica.

As análises apresentadas nos capítulos 6, 7 e 8 podem ser estendidas a outros tipos de torres de turbinas eólicas, além de torres em geral, com seção transversal prismática ou

não prismática, com e sem massa pontual na extremidade livre, de concreto ou híbrida. Além disso, a estrutura do capítulo 8 pode ser avaliada para diferentes condições de excitação na massa na extremidade livre, decorrentes do carregamento aerodinâmico e o funcionamento do rotor.

O comportamento da torre também pode ser investigado tendo como excitação de suporte a ação de sismos. Neste caso, uma ampla investigação acerca da distância do epicentro, do tipo e condições do solo, bem como a topografia, podem interferir na frequência e amplitude das ondas sísmicas. Além disso, deve-se estudar as condições do solo, pois afetam a frequência natural da estrutura, como destacado por [Det Norske Veritas e Wind Energy Department \(2002\)](#) e [Lombardi \(2010\)](#).

Referências

AGENCIA NACIONAL DE ENERGIA ELETRICA. *Atlas de Energia Elétrica do Brasil*. 2. ed. Brasília: ANEEL, 2005.

AGENCIA NACIONAL DE ENERGIA ELETRICA. *Banco de Informações de Geração (BIG)*. 2018. Acesso em: 02 abr. 2019. Disponível em: <http://www2.aneel.gov.br/aplicacoes/capacidadebrasil/Combustivel.cfm>.

ARANY, L.; BHATTACHARYA, S.; ADHIKARI, S.; HOGAN, S. J.; MACDONALD, J. H. G. An analytical model to predict the natural frequency of offshore wind turbines on three-spring flexible foundations using two different beam models. *Soil Dynamics and Earthquake Engineering*, v. 74, p. 40–45, 2015.

AVILA, S.; SHZU, M. A. M.; PEREIRA, W. M.; SANTOS, L. S.; MORAIS, M. V. G.; PRADO, Z. J. G. Numerical modeling of the dynamic behavior of a wind turbine tower. In: *11th International Conference of Vibration Problems*. Lisboa (Portugal): [s.n.], 2013.

BELIAEV, N. M. Stability of prismatic rods, subject to variable longitudinal forces. *Engineering Construction Structural Mechanics*, v. 259, p. 149–167, 1924.

BHATTACHARYA, S.; ADHIKARI, S. Dynamic analysis of wind turbine towers on flexible foundations. *Shock and Vibration*, v. 19, p. 37–56, 2012.

BOLOTIN, V. V. *The Dynamic Stability of Elastic Systems*. San Francisco: Holden-Day, 1964.

BUCALEM, M. L.; BATHE, K. J. *The Mechanics of Solids and Structures - Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution*. [S.l.]: Springer, 2011.

BUTIKOV, E. I. Parametric excitation of a linear oscillator. *European Journal of Physics*, v. 25, p. 535–554, 2004.

CENTRO DE ESTRATEGIAS EM RECURSOS NATURAIS E ENERGIA. *Eólicas offshore: Comissão do CERNE estuda marco regulatório brasileiro em 2019*. 2019. Acesso em: 20 ago. 2019. Disponível em: <http://cerne.org.br/eolicas-offshore-comissao-estuda-marco-regulatorio-brasileiro-em-2019/>.

CHIBA, M.; SHIMAZAKI, N.; ICHINOHE, K. Dynamic stability of a slender beam under horizontal-vertical excitations. *Sound and Vibration*, v. 333, p. 1442–1472, 2014.

DELLEZZOPOLLES JUNIOR, C. *Análise Dinâmica de Torres de Energia Eólica*. 98 p. Dissertação (Mestrado) — Brasília: Faculdade de Tecnologia, Universidade de Brasília, 2011.

DET NORSKE VERITAS E WIND ENERGY DEPARTMENT. *Guidelines for Design of Wind Turbines*. 2. ed. Denmark: DNV and Riso, 2002.

EUROPEAN WIND ENERGY ASSOCIATION. *Deep Water: The Next Step for Offshore Wind Energy*. Brussels, Belgium: A report by the European Wind Energy Association: [s.n.], 2013.

- FALTINSEN, O. M. *Sea Loads on ships and offshore structures*. [S.l.]: Cambridge university press, 1993.
- FRANZINI, G. R.; MAZZILLI, C. E. N. Non-linear reduced-order model for parametric excitation of vertical and immersed slender rod. *International Journal of Non-linear Mechanics*, v. 80, p. 29–39, 2016.
- GLOBAL WIND ENERGY COUNCIL. *Global Wind Statistics*. 2018. Acesso em: 26 ago. 2019. Disponível em: <<http://www.gwec.net/>>.
- GRIFFITH, D. T.; RESOR, B. R. *Description of Model Data for SNL13.2-00-Land: A 13.2 MW Land-based Turbine Model with SNL100-00 Blades*. Sandia National Laboratories Technical Report (SAND2011-9310P), 2011.
- GRIMONI, J. A. B.; aO, L. C. R. G.; UDAETA, M. E. M.; KANAYAMA, P. H. *Iniciação a Conceitos de Sistemas Energéticos para o Desenvolvimento Limpo*. 2. ed. São Paulo: Editora da Universidade de São Paulo, 2015.
- GUEYDON, S.; DUARTE, T.; ; JONKMAN, J.; BAYATI, I.; SARMENTO, A. Comparison of second order loads on a semisubmersible floating wind turbine. In: *33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. San Francisco, California (NREL/CP-5000-61162): [s.n.], 2014.
- HANDOO, K. L.; SUNDARARAJAN, V. Parametric instability of a cantilevered column with end. *Sound and Vibration*, v. 18, p. 45–53, 1971.
- JONKMAN, J.; BUTTERFIELD, S.; MUSIAL, W.; SCOTT, G. *Definition of a 5MW Reference Wind Turbine for Offshore System Development*. Golden, CO: National Renewable Energy Laboratory (NREL/TP-500-38060), 2009.
- LAURA, P. A. A.; POMBO, J. L.; SUSEMIHL, E. A. A note on the vibrations of a clamped-free beam with a mass at the free end. *Journal of Sound and Vibration*, v. 37, p. 161–168, 1974.
- LENCI, S.; CLEMENTI, F.; MAZZILLI, C. E. N. Simple formulas for the natural frequencies of non-uniform cables and beams. *International Journal of Mechanical Sciences*, v. 80, p. 29–39, 2013.
- LIU, J.; THOMAS, E.; MANUEL, L.; GRIFFITH, D. T.; RUEHL, K. M.; BARONE, M. Integrated system design for a large wind turbine supported on a moored semi submersible platform. *Marine Science and Engineering*, v. 6(1), 2018.
- LOMBARDI, D. *Dynamics of Offshore Wind Turbines*. 182 p. Dissertação (Mestrado) — Bristol (England): University of Bristol, 2010.
- MAZZILLI, C. E. N.; SANCHES, C. T.; BARACHO NETO, O. G. P.; WIERCIGROCH, M.; KEBER, M. Non-linear modal analysis for beams subjected to axial loads: Analytical and finite-element solutions. *International Journal of Non-linear Mechanics*, v. 43, p. 551–561, 2008.
- MEESALA, V. C.; HAJJ, M. R. Parameter sensitivity of cantilever beam with tip mass to parametric excitation. *Nonlinear Dynamics*, v. 95, p. 3375–3384, 2019.
- MEIROVITCH, L. *Methods of Analytical Dynamics*. [S.l.]: Dover Publications, 2003.

MELDE, F. Über erregung stehender wellen eines fadenformigen korpers. *Annalen der Physik und Chemie*, v. 109, p. 193–215, 1859.

MINISTERIO DE MINAS E ENERGIA. *Resenha Energética Brasileira-Exercício de 2018*. 2019. Acesso em: 26 ago. 2019. Disponível em: <<http://www.mme.gov.br/documents/1138787/1732840/Resenha+Energ%C3%A9tica+Brasileira+-+edi%C3%A7%C3%A3o+2019+v2.pdf/66a837a8-4164-4b37-be4a-59a5ad270c50>>.

NAGATA, F. K.; VERDINI, Y. B. Análise dinâmica de estrutura de turbinas eólicas sob influência de sismos. Monografia de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil)- São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2016.

NAYFEH, A. H.; MOOK, D. T. *Nonlinear oscillations*. Weinheim: Wily-VCH, 2004.

NAYFEH, A. H.; ZAVODNEY, L. D. The non linear response of a slender beam carrying a lumped mass to a principal parametric excitation: theory and experiment. *International Journal Non- Linear Mechanics*, v. 24, p. 105–125, 1989.

OLIVEIRA, L. F. M. P. *Análise do comportamento dinâmico de geradores eólicos*. 120 p. Dissertação (Mestrado) — Porto (Portugal): Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto, 2012.

PASSOS, E. *Função Delta de Dirac e Função Sinal*. 2017. Acesso em: 02 abr. 2019. Disponível em: <http://fma.if.usp.br/~passos/distribuicao_delta_dirac>.

PINTO, M. O. *Fundamentos de energia eólica*. [S.l.]: Livros Técnicos e Científicos Editora Ltda - LTC, 2013.

RAO, S. S. *Vibrações Mecânicas*. 4. ed. São Paulo: Pearson Prentice Hall, 2008.

RAYLEIGH, L. On the maintenance of vibrations by forces of double frequency and on the propagation of waves through a medium endowed with a periodic structure. *Philosophical Magazine and Journal of Science*, v. 24, p. 145–159, 1887.

ROBERTSON, A.; JONKMAN, J.; MASCIOLA, M.; SONG, H.; GOUPPE, A.; COULLING, A.; LUAN, C. *Definition of the Semisubmersible Floating System for Phase II of OC4*. Golden, CO: National Renewable Energy Laboratory (NREL/TP-5000-60601), 2014.

ROBERTSON, A.; JONKMAN, J.; MUSIAL, W.; VORPAHL, F.; POPKO, W. Offshore code comparison collaboration, continuation: Phase II results of a floating semisubmersible wind system. In: *EWEA Offshore*. Frankfurt, Germany (NREL/CP-5000-60600): [s.n.], 2013.

ROBERTSON, A.; JONKMAN, J.; VORPAHL, F.; POPKO, W.; QVIST, J.; FROYD, L.; CHEN, X.; AZCONA, J.; UZUNGOGLU, E.; SOARES, C. G.; LUAN C., Y. H.; PENGCHENG, F.; YDE, A.; LARSEN, T.; NICHOLS, J.; BUILS, R.; LEI, L.; NYGARD, T. A.; HEEGE, A.; VATNE, S. R.; ORMBERG, H.; DUARTE, T.; GODREAU, C.; H., F. H.; NIELSEN, A. W.; RIBER, H.; CUNFF, C. L.; ABELE, R.; BEYER, F.; YAMAGUCHI, A.; JUNG, K. J.; SHIN, H.; SHI, W.; PARK, H.; ALVES, M.; GUERINEL, M. Offshore code comparison collaboration, continuation within iea wind task 30: Phase II results regarding a floating semisubmersible wind system. In: *33rd International Conference on Ocean, Offshore and Arctic Engineering*. San Francisco, California (NREL/CP-5000-61154): [s.n.], 2014.

ROBERTSON, A. N.; WENDT, F.; JONKMAN, J. M.; POPKO, W.; DAGHER, H.; GUEYDON, S.; QVIST, J.; VITTORI, F.; AZCONA, J.; UZUNGOGLU, E.; SOARES, C. G.; HARRIES, R.; YDE, A. OC5 project phase II: Validation of global loads of the deepwind floating semisubmersible wind turbine. *Energy Procedia*, v. 137, p. 38–57, 2017.

SAHASAKKUL, W. *Development of a Model for an Offshore Wind Turbine Supported by a Moored Semi Submersible Platform*. 118 p. Dissertação (Mestrado) — Austin (Texas): University of Texas at Austin, 2014.

SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. On the dynamics of flexible beams under large overall motions-the plane case: Part I. *Journal of Applied Mechanics*, v. 53, p. 849–854, 1986.

SOCCOL, F. J.; PEREIRA, A. L.; CELESTE, W. C.; COURA, D. J. C.; CHAVES, G. L. D. Desafios para Implementação da Geração Distribuída de Energia no Brasil: Uma Revisão Interativa da Literatura. *Brazilian Journal of Production Engineering*, v. 2, n. 3, p. 31–43, 2016. Disponível em: <<http://periodicos.ufes.br/BJPE>>.

TOLMASQUIM, M. T. *Energia Renovável: Hidráulica, Biomassa, Eólica, Solar, Oceânica*. Rio de Janeiro: Empresa de Pesquisa Energética - EPE, 2016.

TOMIN, D. O.; PASETTI, D. M.; MADI, L. S. Análise dinâmica de torres de turbinas eólicas. Monografia de Conclusão de Curso (Graduação em Engenharia Civil)- São Paulo: Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2017.

UNITED STATES DEPARTMENT OF ENERGY. *How do wind turbines work?* 2017. Acesso em: 02 abr. 2019. Disponível em: <<https://www.energy.gov/eere/wind/how-do-wind-turbines-work>>.

VESTAS. *Turbine V136-3.45 MW*. 2017. Acesso em: 02 abr. 2019. Disponível em: <https://www.vestas.com/products/4-mw-platform/v136-_3_45_mw#!firstorder>.

Apêndices

A Séries temporais e Espectro de amplitude

O apêndice A tem como objetivo apresentar as séries temporais e os espectros de amplitude do ensaio de decaimento livre obtidos no capítulo 7, por meio do *software* GIRAFFE, conforme Figuras 37, 38, 39, 40, 41, 42, 43 e 44.

Figura 37 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *surge*, Nó 4 do Modelo 1.

Fonte: Própria autora.

Figura 38 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *pitch*, Nó 4 do Modelo 1.

Fonte: Própria autora.

Figura 39 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *heave*, Nó 4 do Modelo 2.

Fonte: Própria autora.

Figura 40 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *pitch*, Nó 4 do Modelo 2.

Fonte: Própria autora.

Figura 41 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *surge*, Nó 86 do Modelo 1.

Fonte: Própria autora.

Figura 42 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *pitch*, Nó 86 do Modelo 1.

Fonte: Própria autora.

Figura 43 – (a) Série temporal; (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *heave*, Nó 86 do Modelo 2.

Fonte: Própria autora.

Figura 44 – (a) Série temporal, (b) Espectro de amplitude - Grau de liberdade de *pitch*, Nó 86 do Modelo 2.

Fonte: Própria autora.

B Funções descontínuas

O apêndice B tem como objetivo apresentar as propriedades da função Delta de Dirac utilizada na formulação matemática desenvolvida no capítulo 8.

Como descrito em [Passos \(2017\)](#), para uma função $f(x)$ qualquer, define-se a função generalizada ou de distribuição, denominada Delta de Dirac $\delta_D(x - a)$ através da Equação B.1.

$$\int_b^c f(x) \delta_D(x - a) dx = \begin{cases} f(a), & a \in (b, c) \\ 0, & a \notin (b, c) \end{cases} \quad (\text{B.1})$$

A distribuição $\delta_D(x - a)$ também pode ser definida como o limite da função contínua $\delta_\varepsilon(x - a)$, conforme Equação B.2.

$$\delta_\varepsilon(x - a) = \begin{cases} 0, & x < a - \varepsilon \\ \frac{1}{2\varepsilon}, & a - \varepsilon < x < a + \varepsilon \\ 0, & x > a + \varepsilon \end{cases} \quad (\text{B.2})$$

Figura 45 – Função Delta de Dirac.

Fonte: Adaptado de [Passos \(2017\)](#).

Como pode ser observado na Figura 45, para um ε suficientemente pequeno $\varepsilon \ll 1$, obtém-se a Equação B.3 que corresponde a propriedade de filtragem do Delta de Dirac.

$$\int_b^c f(x) \delta_D(x - a) dx = \left(f(a) \frac{1}{2\varepsilon} \right) 2\varepsilon \cong f(a) \quad (\text{B.3})$$

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon(x - a) \rightarrow \delta_D(x - a) \quad (\text{B.4})$$

C Deformações infinitesimais

O apêndice C tem como objetivo apresentar a dedução das deformações infinitesimais utilizadas na formulação matemática desenvolvida no capítulo 8. Será obtida a deformação de uma fibra infinitesimal na direção axial da torre para a determinação da energia potencial de deformação.

Considere uma fibra infinitesimal pertencente a um sólido deformável, que possui comprimento dx na configuração de referência V e comprimento dy na posição deformada V_y , como ilustrado na Figura 46.

Figura 46 – Configurações deformada e indeformada de um sólido.

Fonte: Adaptado de [Bucalem e Bathe \(2011\)](#).

A relação entre a configuração deformada e indeformada, segundo [Bucalem e Bathe \(2011\)](#), é dada por:

$$||dy||^2 = [dx]^T [X]^T [X] [dx] \quad (C.1)$$

onde, o gradiente de deformação é representado por X e o operador transposto corresponde a X^T . O gradiente de deslocamento ∇u e de deformação X são dados por:

$$X = I + \nabla u \quad (C.2)$$

$$\nabla u = \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (C.3)$$

$$X = \begin{bmatrix} 1 + \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & 1 + \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (C.4)$$

Como o objetivo é obter a deformação na direção axial da torre z , a Equação C.1 pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$||dy||^2 = ||dx|| [0 \quad 1] [X]^T [X] [0 \quad 1]^T ||dx|| \quad (\text{C.5})$$

Substituindo as matrizes $[X]$ e $[X]^T$ na Equação C.5, obtém-se:

$$||dy||^2 = ||dx||^2 \left[\left(\frac{\partial u}{\partial z} \right)^2 + 1 + 2 \cdot \frac{\partial w}{\partial z} + \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] \quad (\text{C.6})$$

O alongamento quadrático ou de Green é dado pela Equação C.7. Substituindo a Equação C.6 na Equação C.7, obtém-se:

$$\epsilon_N = \frac{1}{2} \left(\left\| \frac{dy}{dx} \right\|^2 - 1 \right) \quad (\text{C.7})$$

$$\epsilon_N = \frac{1}{2} (u'_N)^2 + w'_N + \frac{1}{2} (w'_N)^2 \quad (\text{C.8})$$

O deslocamento de um ponto genérico N segundo o modelo de viga de Bernoulli Euler é obtido a partir da Figura 47.

Figura 47 – Modelo de viga Bernoulli-Euler.

Fonte: Própria autora.

$$w_N = w - x \sin \phi \approx w - xu', \quad (\text{C.9})$$

$$u_N = u + x(\cos \phi - 1) \approx u, \quad (\text{C.10})$$

$$\phi = \arctan \left(\frac{u'}{1 + w'} \right) \approx u'. \quad (\text{C.11})$$

Para pequenas deformações, o alongamento quadrático e linear são idênticos. Substituindo as Equações C.9 a C.11 na Equação C.8, obtém-se a deformação no ponto genérico N na direção axial da fibra, conforme o modelo de viga de Bernoulli-Euler.

$$\epsilon_N \approx w' + \frac{1}{2} (u')^2 - xu'' \quad (\text{C.12})$$