UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO

HENRIQUE TOWATA SATO

Dimensionamento de regiões D através do método dos elementos finitos e do método de bielas e tirantes aliado à otimização topológica

São Paulo

2015

HENRIQUE TOWATA SATO

Dimensionamento de regiões D através do método dos elementos finitos e do método de bielas e tirantes aliado à otimização topológica

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

São Paulo

2015

HENRIQUE TOWATA SATO

Dimensionamento de regiões D através do método dos elementos finitos e do método de bielas e tirantes aliado à otimização topológica

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo

2015

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor. _____

Assinatura do orientador. _____

CATALOGAÇÃO-NA-PUBLICAÇÃO

Sato, Henrique Towata
Dimensionamento de regiões D através do método dos elementos finitos e do método de bielas e tirantes aliado à otimização topológica / H.T. Sato. -- versão corr. -- São Paulo, 2015.
119 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Concreto armado 2.Método dos elementos finitos 3.Método de bielas e tirantes 4.Otimização topológica I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

À Aline

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus.

À minha família, em especial à minha esposa por entender as ausências, quando foram necessárias.

Ao meu orientador, professor Dr. Paulo de Mattos Pimenta.

À Pedreira Engenharia, por permitir o desenvolvimento da dissertação em paralelo com as atividades profissionais.

Aos colegas de pós-graduação (do PPGEC e de outros programas) pela troca de ideias e experiências.

Aos meus amigos e colegas que me incentivaram na conclusão deste trabalho.

À Escola Politécnica e à Universidade de São Paulo.

Tudo tem o seu tempo determinado, e há tempo para todo o propósito debaixo do céu.
Há tempo de nascer, e tempo de morrer; tempo de plantar, e tempo de arrancar o que se plantou
Tempo de matar, e tempo de curar; tempo de derrubar, e tempo de edificar;
Eclesiastes 3:1-3

RESUMO

O dimensionamento de Regiões D (regiões em que não é aplicável a Hipótese de Bernoulli), embora amplamente estudado e discutido, é um tópico ainda em desenvolvimento e com normatização relativamente escassa. Os métodos mais comumente empregados são o Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método de Bielas e Tirantes (MBT). A dissertação expõe a base teórica e a metodologia dos dois métodos no dimensionamento de estruturas de concreto armado ao Estado Limite Último e aborda a utilização da otimização, em especial da otimização topológica, na definição dos modelos para o MBT. Metodologias para a aplicação dos dois métodos são propostas e aplicadas a exemplos práticos de Regiões D com recomendações normativas específicas para seu dimensionamento (consolo e viga parede biapoiada) e também a uma viga parede de geometria complexa, os resultados através de diferentes técnicas de dimensionamento são comparados e discutidos, assim como a utilização da otimização como meio de obtenção de modelos.

Palavras-chave: Concreto armado; descontinuidades; Método dos Elementos Finitos; Método de Bielas e Tirantes; Otimização Topológica.

ABSTRACT

The design of D-Regions (Regions where the Bernoulli hypothesis is not valid), although widely studied and discussed, is a topic still under development and with relatively little standardization, especially in Brazil. The most commonly used methods are the Finite Element Method (FEM) and the Strut-And-Tie Method (STM). The theoretical basis and methodology of both methods in the design of reinforced concrete structures are presented as well as the use of optimization, especially topology optimization, in the definition of STM models. Procedures are proposed for both methods and applied to practical examples of D-Regions with specific recommendations for its design (Corbel and Deep Beam) as well as a deep beam with complex geometry, the results using the different design methods are compared and discussed as well as the use of optimization as a means of obtaining STM models.

Keywords: Reinforced Concrete; D-Regions; Finite Element Method; Strut-and-Tie Method; Topology Optimization

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 - Seção típica de concreto sujeita à flexão. a) Seção Transversal; b) Perfil de deformações - ELU; c) Tensão; d) Resultantes. Adaptado de LMC-EPUSP (2002) 21
Figura 2 - Exemplos de Regiões D. a) Mudança brusca de seção; b) Apoio de viga; c) Transversina; d) Nó de pórtico; e) Carga concentrada em viga; f) Abertura em viga; g) Aplicação de carga concentrada; h) Consolo; i) Sapata; j) Viga parede; k) Dente Gerber. Adaptado de NBR6118 (2013).....23
Figura 3 - Critérios de resistência para o concreto simples. a) Critério da NBR6118:2013; b) Critério de Rankine; c) Critério de Rankine / Von Mises; d) Critério de Rankine / Drucker-Prager.....25
Figura 4 - Comparação entre o critério de Rankine/Von-Mises e resultados experimentais.....26
Figura 5 – Exemplos de aplicação do método Biela-Tirante: a) Nó entre viga e Pilar; b) Viga de compatibilização; c) Parede de contraventamento; d) Dente Gerber; e) Bloco de coroamento sujeito a momento; f) Apoio e ancoragem de uma viga protendida. (FIB, 2008) 32
Figura 6 - Tipos de biela segundo geometria: a) prismática; b) formato engarrafo; c) formato em leque. (FIB, 2008).....34
Figura 7 - Tipos de nós segundo o fluxo de tensões. Adaptado de (Souza, 2004) ...36
Figura 8 - Tipos de nós de acordo com esforços incidentes. (FIB, 2008) 36
Figura 9 - Nó CCC a) Forças atuantes; b) geometria das bielas e do nó delimitado pelo triângulo ABC. Adaptado de (FIB, 2008) 37
Figura 10 - Viga com mesa colaborante sujeita a esforço concentrado. a) perspectiva tridimensional; b) MBT 2D na alma; c) MBT 2D na mesa. (FIB, 2008).....38
Figura 11 - Diferentes condições de bielas. a) biela prismática sem fissuração; b) biela prismática com fissuras paralelas; c) biela prismática com fissuras não-paralelas; d) biela engarrafada com armadura de fendilhamento; e) biela engarrafada sem armadura de fendilhamento; f) biela confinada. (FIB, 2008).....39

Figura 12 - Diferentes métodos para ancoragem de tirantes. a) barra reta além da região nodal; b) barras dobradas além da região nodal; c) *studs* faceando a região nodal; d) chapa de ancoragem faceando a região nodal. (FIB, 2008).....40
Figura 13 - Processo do caminho de cargas. a) Caminho de cargas; b) Modelo biela-tirante. Adaptado de (FIB, 2008) 43
Figura 14 - Tensões principais e formação de fissuras. 45
Figura 15 - MBT obtido a partir da análise do padrão de fissuração (Schlaich J. S., 1991) 46
Figura 16 - MBT obtido a partir de tensões principais – Viga biapoiada. a) carga superior b) carga inferior (FIB, 2008) 48
Figura 17 - MBT obtido a partir de tensões principais - Parede resistindo a esforços horizontais (FIB, 2008) 49
Figura 18 - Ângulos limite entre bielas inclinadas e armadura longitudinal 50
Figura 19 – resultantes em um elemento de placa, o primeiro termo se refere ao concreto e o segundo a armadura. (FIB, 2008).....56
Figura 20 – Círculos de Mohr (FIB, 2008) 57
Figura 21 – Círculos de Mohr para reforço em apenas uma direção (FIB, 2008).....58
Figura 22 – Círculo de Mohr para armadura igual em duas direções (FIB, 2008).....58
Figura 23 – Superfície de ruptura para elemento de placa (FIB, 2008).....60
Figura 24 – Regimes de ruptura em planta (FIB, 2008) 60
Figura 25 – Interpretação do critério de resistência com Círculos de Mohr (FIB, 2008) 61
Figura 26 - Círculos de Mohr para um elemento tracionado (FIB, 2008) 63
Figura 27 - Domínio admissível para armadura (FIB, 2008) 64
Figura 28 - Algoritmo SIMPLEX 72
Figura 29 - Equilíbrio no nó 73
Figura 30 - Fluxograma para o dimensionamento de regiões D.....82
Figura 31 - Problema inicial abordado.....84
Figura 32 - Região D analisada.....91
Figura 33 - Algumas sub-regiões dentro da Região D 91
Figura 34 - Resultado para razão 2x1 entre comprimento e altura. a) resultado obtido diretamente da rotina; b) domínio duplicado, interpretação física. 94

Figura 35 - Geometria do consolo estudado 95
Figura 36 - Malha do Consolo 96
Figura 37 - Tensões observadas no consolo - direção x.....97
Figura 38 - Tensões observadas no consolo - direção y.....98
Figura 39 - Resultado da otimização topológica. a) Interface com apoios móveis; b) Interface com apoios fixos.....99
Figura 40 - Viga parede biapoiada 101
Figura 41 - Malha e condições de contorno da viga parede.....102
Figura 42 - Tensões observadas na viga parede - direção x 103
Figura 43 - Tensões observadas na viga parede - direção y 104
Figura 44 - Resultado da otimização topológica para a viga parede.....105
Figura 45 - Viga parede biapoiada com aberturas 107
Figura 46 - Resultado da otimização topológica - viga parede com aberturas.....107
Figura 47 - Resultado da otimização topológica através do ANSYS.....108
Figura 48 - MBT da viga parede com aberturas.....108
Figura 49 - malha e condições de contorno da viga parede com aberturas.....109
Figura 50 - Tensões observadas na viga parede com aberturas - direção x.....110
Figura 51 - Tensões observadas na viga parede com aberturas - direção y.....111

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Comportamento não linear em estruturas de concreto armado. 29
Tabela 2 – Estudo comparativo do consolo 100
Tabela 3 – Estudo comparativo da viga parede 106
Tabela 4 – Estudo comparativo viga parede com aberturas 111

SUMÁRIO

1 Introdução 14

1.1 Objetivo 15

1.2 Organização do Texto 16

1.3 Histórico e Revisão Bibliográfica- Otimização aplicada ao concreto armado 17

2 Concreto armado 20

2.1 Regiões B e Regiões D 22

2.2 Critérios de resistência 24

2.3 Modelagem não linear 26

3 Método de Bielas e Tirantes 31

3.1 Conceituação e Histórico 31

3.2 Componentes do MBT 34

3.3 MBT tridimensional 37

3.4 Capacidade resistente das bielas 38

3.5 Capacidade resistente de tirantes e ancoragem 40

3.6 Metodologia para o MBT 41

3.7 Definição da geometria do modelo 42

3.7.1 Caminho de cargas 42

3.7.2 Análise do padrão de fissuração 44

3.7.3 Pré-processamento através do MEF 46

3.7.4 Métodos de otimização 49

3.8 Revisão da norma NBR 6118 e suas disposições com relação ao MBT 50

3.8.1 Parâmetros de resistência 51

4 Método dos Elementos Finitos para Concreto Armado 53

4.1 Introdução 53

4.2 Análise linear x Análise não linear 54

4.3 Aplicação a membranas 56

4.4 Dimensionamento de elementos submetidos à tração e/ou cisalhamento 62

5 Otimização 67

5.1 Formulação Matemática da otimização 67

5.2 Classificação dos problemas de otimização 69

5.3 Métodos Exatos 70

5.3.1 Programação Linear 71

5.3.2 Programação não linear 76

5.4 Métodos Heurísticos 77

5.4.1 Autômato Celular 78

5.4.2 Recozimento simulado 79

5.4.3 Algoritmos genéticos 81

6 Metodologia – Aplicação a elementos de concreto armado 82

6.1 Problema inicial abordado 83

6.2 Otimização 85

6.3 Filtro 87

6.4 Adaptação para materiais diferentes submetidos à tração ou compressão (comportamento dual). 89

6.5 Dimensionamento através do MEF 91

7 Estudos de caso 93

7.1 Sensibilidade dos parâmetros de otimização 93

7.2 Comparativo entre MEF, MBT e modelos padronizados. 94

7.2.1 Consolo 95

7.2.2 Viga parede biapoiada 101
7.2.3 Viga parede com aberturas 107
8 Análise de resultados e conclusões 112

1 Introdução

A engenharia sempre buscou formas mais econômicas de atender às demandas da sociedade. Com a criação do computador e com seu crescente barateamento e avanço na capacidade de processamento, cada vez mais os engenheiros de diversas áreas utilizam estes recursos, de modo que hoje é impensável haver uma empresa de projetos ou um engenheiro que não utilize recursos computacionais.

No caso específico do projeto de estruturas civis a aplicação de métodos computacionais é em geral bastante dispendiosa. Devido ao porte destas estruturas, existe um grande número de variáveis a serem consideradas e consequentemente de cálculos e verificações a serem realizados.

Por outro lado, as edificações são modeladas com um grau relativamente baixo de discretização, e ao compararmos modelos de edificações ao de outras estruturas civis ou mecânicas, os primeiros possuem um número bem inferior de variáveis a serem computadas ao aproximá-las por estruturas de barras, mesmo havendo um grande número de variáveis de projeto. Esta aproximação, entretanto, não é possível em algumas regiões da estrutura e em certos elementos (casos em que não é válida a Hipótese de Bernoulli).

Com o intuito de otimizar também o processo de desenvolvimento do projeto e não apenas o produto, tornam-se mais interessantes os processos de otimização automatizada, em particular este estudo aborda o dimensionamento de Regiões D, através do Método dos Elementos Finitos (MEF) e o Método de Biela e Tirantes (MBT).

Para o dimensionamento destas regiões através do MBT, usualmente depende-se da avaliação do engenheiro na definição do modelo a ser utilizado, o que acaba criando uma grande subjetividade no dimensionamento destas regiões, entretanto sabe-se que para uma determinada configuração de condições de contorno existe uma solução ótima, de menor energia de deformação dada por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987):

$$\sum F_i l_i \varepsilon_i \tag{1.1}$$

Onde:

F_i é a força a que está sujeito o elemento i;

l_i é o comprimento do elemento i;

ε_i é a deformação específica média no elemento i.

Critérios semelhantes a este serão discutidos mais à frente, entretanto percebe-se que, desde a concepção do MBT já houve a preocupação com as diferentes configurações estruturais possíveis e como avaliar de forma objetiva qual seria a mais adequada.

1.1 Objetivo

O objetivo desta dissertação é o estudo das alternativas de dimensionamento em regiões de descontinuidade em estruturas de concreto armado (Regiões D), visando-se a automatização da geração de modelos para dimensionamento através do MBT e compará-los com resultados obtidos através da análise linear pelo MEF.

Portanto, têm-se como objetivos gerais:

- Melhor entendimento dos processos de otimização, das diferenças entre eles e sua aplicabilidade aos exemplos propostos;
- Melhor entendimento da aplicação da otimização topológica e do método dos elementos finitos ao concreto armado.

E como objetivos específicos:

- Estudar diferentes alternativas para o dimensionamento de Regiões D;
- Estudar a otimização topológica como meio de geração de modelos para o MBT;
- Avaliar alternativas ao processo proposto e melhorias que podem ser incorporadas.

1.2 Organização do Texto

Não há capítulo específico para a revisão bibliográfica, estando ela contida ao longo dos Capítulos 2 a 5 de acordo com o tema abordado e neste capítulo, o item 1.3 apresenta de forma ampla um breve histórico da otimização voltada para o concreto armado. Por fim os capítulos 6, 7 e 8 apresentam respectivamente a metodologia proposta; estudos de caso exemplificando a aplicação e a discussão dos resultados e conclusões.

Abaixo a descrição dos capítulos componentes deste trabalho:

O capítulo 1 (Introdução) contextualiza o problema abordado, define os objetivos da dissertação e a forma como esta organizado o texto.

No capítulo 2 (Concreto armado) é apresentado o material “Concreto armado” assim como um breve histórico de sua aplicação e as características relevantes para o estudo.

O capítulo 3 (Método de Bielas e Tirantes) expõe o Método de Bielas e Tirantes (MBT) seu histórico de desenvolvimento, suas características, a metodologia típica para a aplicação e disposições normativas.

No capítulo 4 (Método dos Elementos Finitos para Concreto Armado) são discutidos tópicos referentes ao dimensionamento do concreto armado através do Método dos Elementos Finitos (MEF).

O capítulo 5 (Otimização) apresenta a otimização como conceito matemático, suas diferentes classificações e a otimização topológica como alternativa para a definição de modelos para o MBT.

O capítulo 6 (Metodologia – Aplicação a elementos de concreto armado) descreve a metodologia empregada e seus aspectos teóricos, apresenta também como será realizada a comparação entre os resultados obtidos.

No capítulo 7 (Estudos de caso) são propostos exemplos para a aplicação da metodologia descrita no capítulo 6 e apresentados os resultados obtidos.

Por fim, no capítulo 8 (Análise de resultados e conclusões) são discutidos os resultados obtidos no capítulo anterior, recomendações a serem adotadas e para trabalhos futuros

1.3 Histórico e Revisão Bibliográfica- Otimização aplicada ao concreto armado

Existe ampla bibliografia referente à otimização de estruturas, entretanto a grande maioria dos trabalhos estuda estruturas em aço. Os estudos referentes a estruturas de concreto armado em específico são em geral desenvolvidos por brasileiros, pode-se citar Castilho (2003) com a otimização de peças pré-moldadas protendidas, Silva (2001) com a otimização de pilares e pórticos, Lima (2011) com a otimização de vigas, Vianna e Debs (2005) com a otimização de pré-dimensionamento de pórticos, Soares (1997)com a otimização de vigas em um pavimento entre outros.

Por outro lado, a bibliografia voltada para a geração de modelos MBT é um tópico atual com um grande número de publicações internacionais mas ainda pouco estudado nacionalmente

Segundo Victoria, Querin e Martí (2011) pode-se indicar o artigo de Kumar (1978) como um dos primeiros no sentido da aplicação da otimização topológica utilizando diferentes propriedades para elementos sujeitos à tração ou compressão.

Em seu trabalho Kumar (1978) aplica a analogia entre treliça e a distribuição de tensões dentro do concreto para vigas-parede tomando um material frágil à tração e resistente, idealmente plástico à compressão.

Ali (1997) propôs uma aplicação da otimização topológica para a definição da topologia da treliça equivalente para o Método de Bielas e Tirantes (MBT) de modo a minimizar o volume de aço

Liang, Xie e Steven (2000) por sua vez, propuseram a utilização de otimização estrutural evolutiva (em inglês ESO – *Evolutionary Structural Optmization*) para estruturas bidimensionais e em (2001) a otimização estrutural com base em performance (em inglês PBO – *Performance-Based Structural Optimization*) para vigas protendidas de concreto. Baseados no critério de menor energia de deformação Biondini, Bontempi e Malerba (2001) apresentaram um método para a geração automática de modelos para o MBT.

Posteriormente diversos estudos foram desenvolvidos no sentido de propor a geração automática de modelos para o MBT incorporando avanços na otimização topológica ou na análise da estrutura de concreto como: Leu et al (2006) com a utilização da otimização estrutural evolutiva refinada (em inglês – RESO) aplicada a elementos tri-dimensionais; Kwak e Noh (2006) com a utilização de elemento “planar” composto por barras de treliças em substituição ao elemento plano, Bruggi (2009) com a consideração de múltiplos casos de carregamento e Amir (2012) por sua vez apresenta a otimização topológica também tendo em vista o MBT mas visando a economia através da eliminação de material em zonas com baixas solicitações

Especificamente na consideração de comportamentos diferentes entre compressão e tração podem-se destacar os trabalhos de Prager (1958), que anteriormente junto com Drucker se dedicou ao estudo de critérios de resistência para materiais granulares, e Srithongchau e Dewhurst (2003) baseados no artigo de Prager estabelecem que para uma estrutura com materiais com diferentes propriedades na tensão e compressão, o critério de otimalidade deveria ser adaptado para que as energias de deformação por unidade de volume ou de peso fossem constantes.

Querin et al (2010) propuseram uma aplicação do critério de Dewhurst a estruturas contínuas, introduzindo uma adaptação para considerar os diferentes comportamentos à compressão e tração em uma análise isótropa. Esta abordagem será adotada no presente estudo com modificações em sua função objetivo e critério de otimização.

Por fim Luo & Kang (2013) apresentam uma metodologia considerando o comportamento diferenciado entre elementos tracionados e comprimidos aplicando a eles o critério de Drucker-Prager para a definição do dimensionamento ótimo para a solicitação, considerando todo o domínio como preenchido por concreto e alocando o reforço em aço. Para isso foram utilizadas técnicas como o relaxamento de deformações e a redução de restrições evitando singularidades e o congelamento da estrutura ótima

2 Concreto armado

O concreto armado combina as propriedades de resistência à compressão do concreto e a resistência à tração do aço, em forma de barras ou telas soldadas. Como material estrutural seu funcionamento se apoia na hipótese de que as deformações de concreto e aço sejam compatíveis, não havendo escorregamento entre os materiais.

As aplicações modernas do concreto armado datam de meados do século XIX, segundo Carvalho (2008) o ano de 1849 pode ser considerado como o da descoberta do concreto armado pelo agricultor francês Joseph-Louis Lambot ao construir um barco de argamassa armada e testá-lo com sucesso, posteriormente expondo-o na Feira Mundial de Paris.

A primeira aplicação de grande porte se daria por Joseph Monier ao construir a primeira ponte de concreto armado em 1875. De forma empírica Monier observou a deficiência do concreto aos esforços de tração e cisalhamento e posicionou barras de aço de modo a combater a fissuração esperada.

Desde então o comportamento do concreto armado já foi amplamente estudado e discutido, embora muitos tenham sido os estudiosos nesse campo, destaca-se o engenheiro alemão Emil Mörsch que entre 1900 e 1910 aplicou a teoria da resistência dos materiais e da elasticidade ao concreto armado, estabelecendo as bases científicas da análise de estruturas desse material.

A teoria do concreto armado baseia-se na compatibilidade de deformações entre as armaduras de aço e o concreto que as envolve, admitindo-se válidas as hipóteses de pequenas deformações e perfil linear ao longo de uma seção transversal, conhecida como Hipótese de Bernoulli.

A Figura 1 ilustra as considerações típicas para o dimensionamento de uma seção transversal de concreto armado à flexão com armadura simples. A Hipótese de Bernoulli é ilustrada na Figura 1b onde o perfil de deformações é suposto como

linear. A Figura 1c por sua vez expõe as hipóteses de resistência nula do concreto à tração, a consideração da aproximação do diagrama de tensões parábola-retangulo pelo retangular e a consideração de efeitos deletérios devido ao carregamento prolongado (Efeito Rüsch). Por fim a Figura 1d representa as resultantes de tensão e compressão e o momento resistente último.

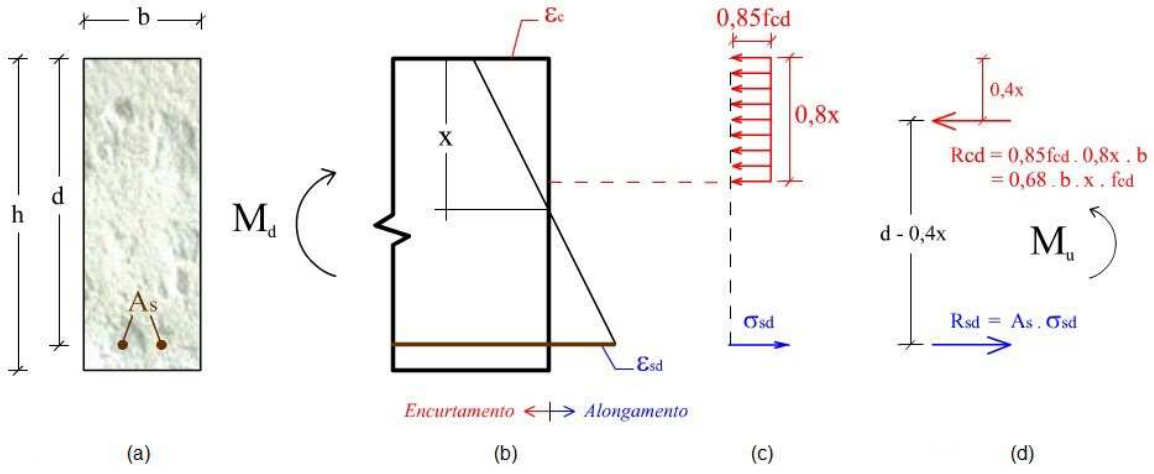

Figura 1 - Seção típica de concreto sujeita à flexão. a) Seção Transversal; b) Perfil de deformações - ELU; c) Tensão; d) Resultantes. Adaptado de LMC-EPUSP (2002)

As hipóteses adotadas para o dimensionamento à flexo-compressão são semelhantes, entretanto devem ser levados em conta efeitos de segunda ordem devido à instabilidade localizada.

Desta forma a análise da estrutura como um todo por sua vez é relativamente simples, em especial as estruturas reticuladas que, ao serem modeladas como barras, não necessitam de grande refinamento para a obtenção de resultados satisfatórios já que seu comportamento se aproxima da Hipótese de Bernoulli. Além disso, o Princípio de Saint-Vennant garante que a uma dada distância de perturbações a aproximação da seção com perfil de deformações linear volta a ser válida.

2.1 Regiões B e Regiões D

De acordo com a classificação adotada por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), as regiões onde a Hipótese de Bernoulli é aplicável dá-se o nome Regiões B, as demais são denominadas Regiões D (regiões com descontinuidades no perfil de deformação). As Regiões D podem ter seu perfil de deformações não linear por fatores geométricos, como aberturas ou mudanças de seção, ou por fatores mecânicos, como a aplicação de cargas em uma pequena região.

A Figura 2 apresenta exemplos de Regiões D e seus limites, tais limites estão ligados à maior dimensão transversal da peça, em geral sua altura, h.

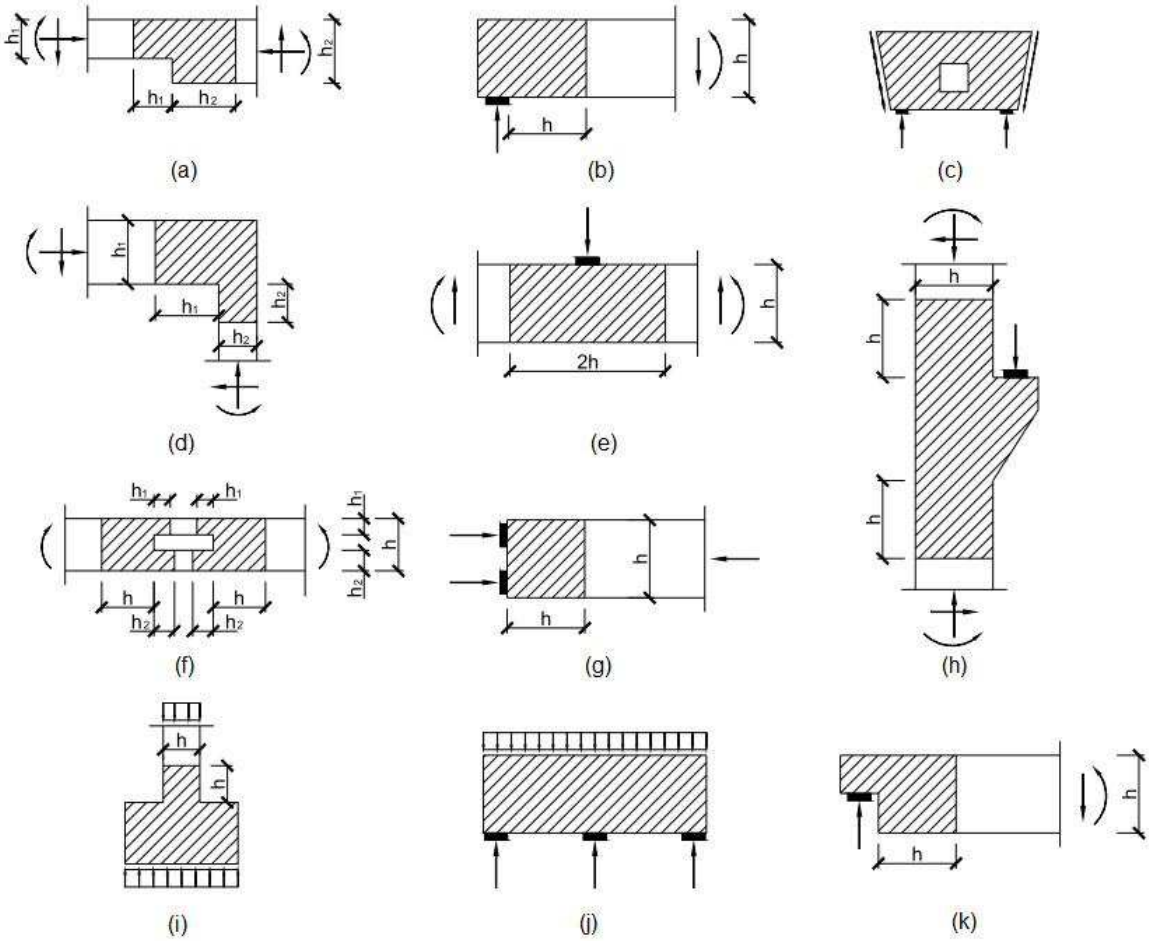

Figura 2 - Exemplos de Regiões D. a) Mudança brusca de seção; b) Apoio de viga; c) Transversina; d) Nó de pórtico; e) Carga concentrada em viga; f) Abertura em viga; g) Aplicação de carga concentrada; h) Consolo; i) Sapata; j) Viga parede; k) Dente Gerber. Adaptado de NBR6118 (2013)

Além de Regiões D bidimensionais existem também Regiões D tridimensionais, tais como blocos de coroamento com mais de dois apoios não alinhados e lajes próximas a apoios.

Existem diversos métodos para o dimensionamento das Regiões D, não sendo aplicável a teoria do concreto armado usual. Algumas das metodologias mais comumente utilizadas são o Método de Bielas e Tirantes e o Método dos Elementos Finitos.

2.2 Critérios de resistência

O critério de resistência considerado para o concreto é usualmente composto de múltiplas superfícies. Para a descrição destes critérios será convencionado que as tensões principais em um dado estado múltiplo de tensões são representadas por $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$, considerando-se tensão de tração como positiva e de compressão como negativa. Destaca-se que ao contrário deste texto e da convenção usual da mecânica dos sólidos, na teoria do concreto armado muitas vezes o esforço de compressão é adotado como positivo

A norma brasileira de concreto armado (NBR6118 , 2013) estabelece tensões limites através de duas inequações no item 8.2.6, a primeira das inequações descreve uma tensão máxima menor que a resistência do concreto à tração direta (f_{ct}), ou seja:

$$\sigma_1 \leq f_{ct} \tag{2.1}$$

O critério de tração máxima é também conhecido como Critério de Rankine, representando a ruptura frágil do concreto à tração, sendo aplicado a materiais granulares.

Em termos de invariantes pode-se expressar este critério como:

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3} I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2}\cos\theta - f_{ct} \tag{2.2}$$

A segunda inequação descrita na norma é:

$$\sigma_3 \geq -f_{ck} + 4\sigma_1 \tag{2.3}$$

Tal critério pode ser classificado como um *critério de Drucker-Prager*, já que pode ser expresso com invariantes na forma de:

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - k \tag{2.4}$$

Este tipo de critério está ligado à tensão de cisalhamento como limitante. Sendo que o cisalhamento limite varia conforme a intensidade da compressão média ou hidrostática.

A representação dos critérios combinados no domínio das tensões é apresentada abaixo conforme a NBR6118, além deste como comparação são apresentados os critérios de Rankine, Rankine & Von-Mises e por fim Rankine & Drucker-Prager:

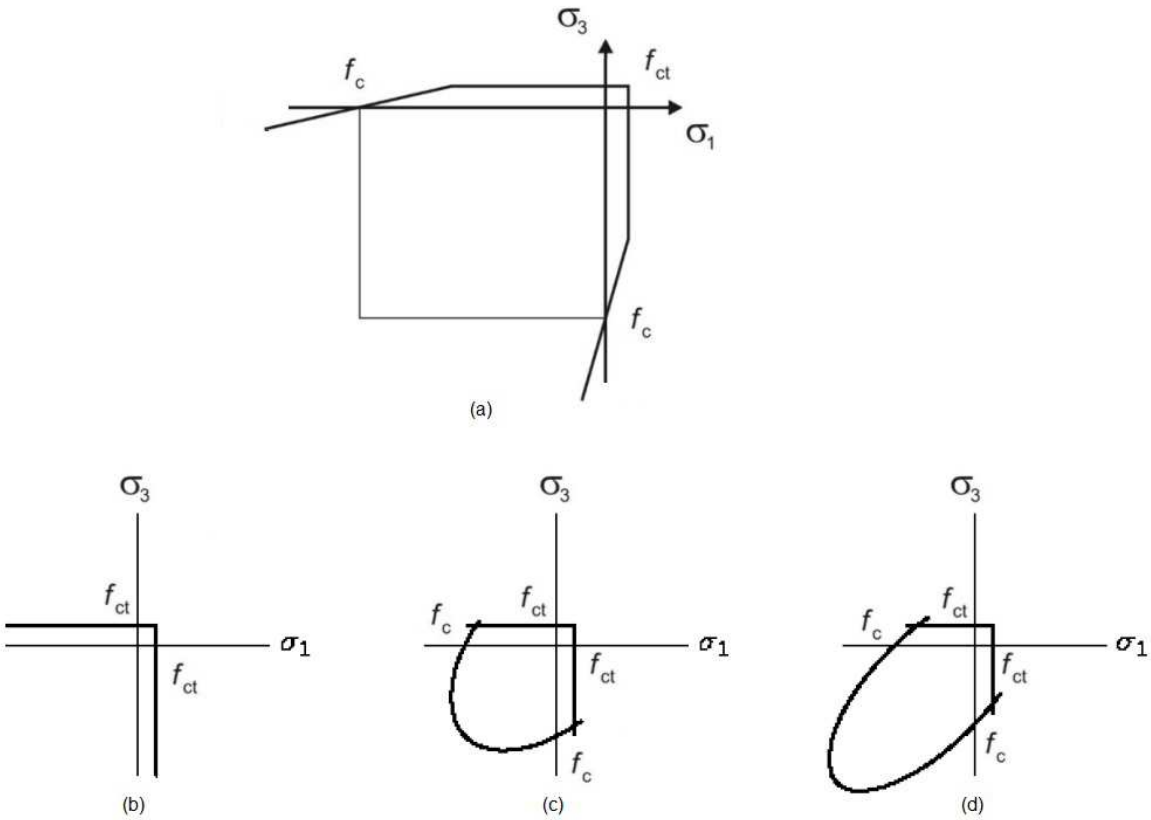

Figura 3 - Critérios de resistência para o concreto simples. a) Critério da NBR6118:2013; b) Critério de Rankine; c) Critério de Rankine / Von Mises; d) Critério de Rankine / Drucker-Prager

É importante salientar que o critério mais comumente utilizado para o concreto simples é o de Rankine & Von-Mises tendo sido validado por resultados experimentais como os de Kupfer e Gerstle (1973) conforme compilado por Feenstra e Borst (1993) na figura abaixo:

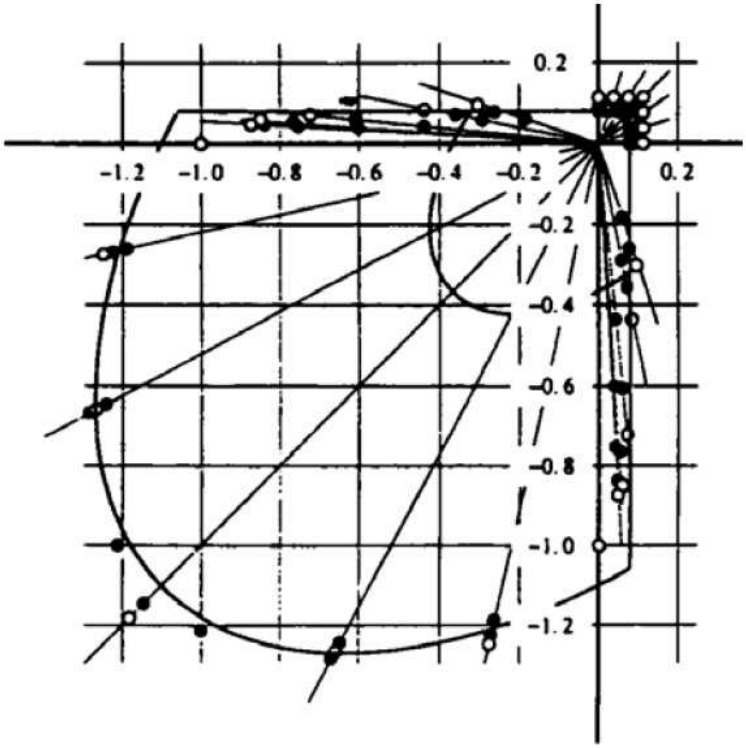

Figura 4 - Comparação entre o critério de Rankine/Von-Mises e resultados experimentais

2.3 Modelagem não linear

Embora o detalhamento de estruturas através de modelos lineares seja suficiente para garantir os requisitos de segurança ao Estado Limite Último (ELU), desde que observadas questões como a correta ancoragem de armaduras, ela não é suficiente para a avaliação dos Estados Limites de Serviço da estrutura, em especial para avaliar a fissuração e a deformabilidade da estrutura.

O boletim 45 da Federação Internacional do Concreto Estrutural (FIB, 2008) elenca algumas aplicações de análises não lineares:

- Verificação da segurança do detalhamento de peças complexas;

- Verificação da segurança de estruturas existentes;
- Verificação do modo de ruptura de uma estrutura;
- Análise de patologias apresentadas por estruturas existentes;
- Estimativa de efeitos não lineares através do processo P-δ;
- Resistência da estrutura face eventos extremos;
- Resistência ao fogo.

As origens do comportamento não linear do concreto são diversas, influenciando tanto seu comportamento sob carregamento de serviço quanto em seu Estado Limite Último. A Tabela 1 descreve esquematicamente alguns dos efeitos não lineares no concreto armado.

A tabela classifica os efeitos de acordo com o material em que atuam principalmente, concreto, aço ou a combinação de ambos. Para cada tipo de efeito são listados que tipos de medidas devem ser adotadas para sua modelagem:

- Energia: O balanço de energia deve ser levado em conta para a consideração do efeito listado;
- Rigidez: Os elementos devem ter sua rigidez variável para a consideração do efeito listado;
- Bifurcação: Indica uma modificação abrupta nas condições do modelo em oposição a uma transição continua;
- Def. plásticas (Deformações plásticas): O comportamento não pode ser descrito somente por um modelo elástico, sendo necessária a consideração e diferenciação das deformações plásticas;
- Tamanho (Influenciada pelas dimensões absolutas): o comportamento não pode ser descrito apenas pelas deformações sendo necessária

também o computo de distâncias absolutas, como a largura de fissuras.

Os efeitos não lineares não são relevantes em todas as situações, cabendo ao engenheiro levantar quais aspectos devem ou não ser levados em conta, não apenas por economia de recursos computacionais, mas principalmente para a limitação dos parâmetros que influenciam no resultado da modelagem.

Outra consideração importante é qual nível de discretização será utilizado na modelagem. Efeitos concentrados como a fissuração são altamente influenciados pelo refinamento da malha caso não sejam introduzidos tratamentos especiais para estes efeitos.

A discussão sobre a consideração de fenômenos não lineares na dissertação é aprofundada no item 4.2.

Tabela 1 - Comportamento não linear em estruturas de concreto armado.

Concreto simples		Energia	Rigidez	Bifurcação	Def. plásticas	Tamanho
Tração	Macrofissuração	x		x		x
	Amolecimento à tração	x	x			x
	Resposta cíclica		x		x	
	Fluência		x		x	
	Fechamento de Fissuras		x		x	x
	Retração		x		x	x
Compressão	Esmagamento	x		x		x
	Não linearidade sob grandes deformações		x		x	
	Descarregamento pós-pico	x	x		x	x
	Resposta cíclica		x		x	
	Fluência		x		x	
	Taxa de carregamento	x	x			
	Confinamento bi ou tri axial		x		x	
	Coeficiente de Poisson		x			
	Efeitos Térmicos		x		x	
Comportamento da Armadura						
Tração	Escoamento			x	x	
	Endurecimento por deformação		x		x	
	Efeitos Térmicos		x		x	
	Taxa de Carregamento	x	x			
	Ruptura			x		
Compressão	“Buckling”		x	x		x
Cisalhamento	Efeito Pino		x		x	x

Tabela 1 (continuação) - Comportamento não linear em estruturas de concreto armado.

Comportamento combinado concreto e armadura		Energia	Rigidez	Bifurcação	Def. plásticas	Tamanho
Tração	Ligação		x			x
	Enrijecimento à tração	x	x		x	
	Separação à tração		x	x		x
Compressão	Amolecimento à compressão		x			
Cisalhamento	Travamento de Agregados		x			x
Efeitos de dano						
	Efeitos deletérios		x		x	
	Fadiga			x		

3 Método de Bielas e Tirantes

3.1 Conceituação e Histórico

O Método de Bielas e Tirantes (MBT) consiste em uma analogia do comportamento do concreto armado com o de uma treliça, proposto inicialmente por Ritter (1899) e Mörsch (1902) no final do século XIX/início do século XX.

A aplicação inicial de Mörsch visava o dimensionamento da armadura transversal de vigas, sendo estas modeladas como treliças, no caso de uma viga biapoiada haveriam tirantes na face inferior, bielas na face superior, bielas inclinadas (no modelo inicial a 45°) e tirantes verticais ligando os nós das bielas inclinadas.

Posteriormente o modelo foi aprimorado por diversos pesquisadores, Kupfer (1964), Leonhardt (1957), Lampert e Thürlimann (1971), Collins e Mitchel (1980), Martí (1980) e (1985), sendo que o último em particular desenvolveu sua análise demonstrando a estrutura ótima no caso de tirantes coincidentes com as tensões de tração obtidas a partir de uma análise elástica do elemento como um sólido.

O método teve suas bases consolidadas com os estudos de Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) e Schlaich e Schäfer (1991) e validado por estudos experimentais como os de Rogowsky MacGregor e Ong (1986).

De forma geral, o método como exposto por Schlaich baseia-se na ideia de que os elementos de uma treliça representam os campos de tensão dentro do concreto armado, simplificando o problema original.

As barras da treliça sujeitas à compressão são denominadas bielas, as barras tracionadas são denominadas tirantes e as interseções entre elementos são denominadas nós. A Figura 5 ilustra exemplos de aplicação do método a cada tipo de elemento destacado.

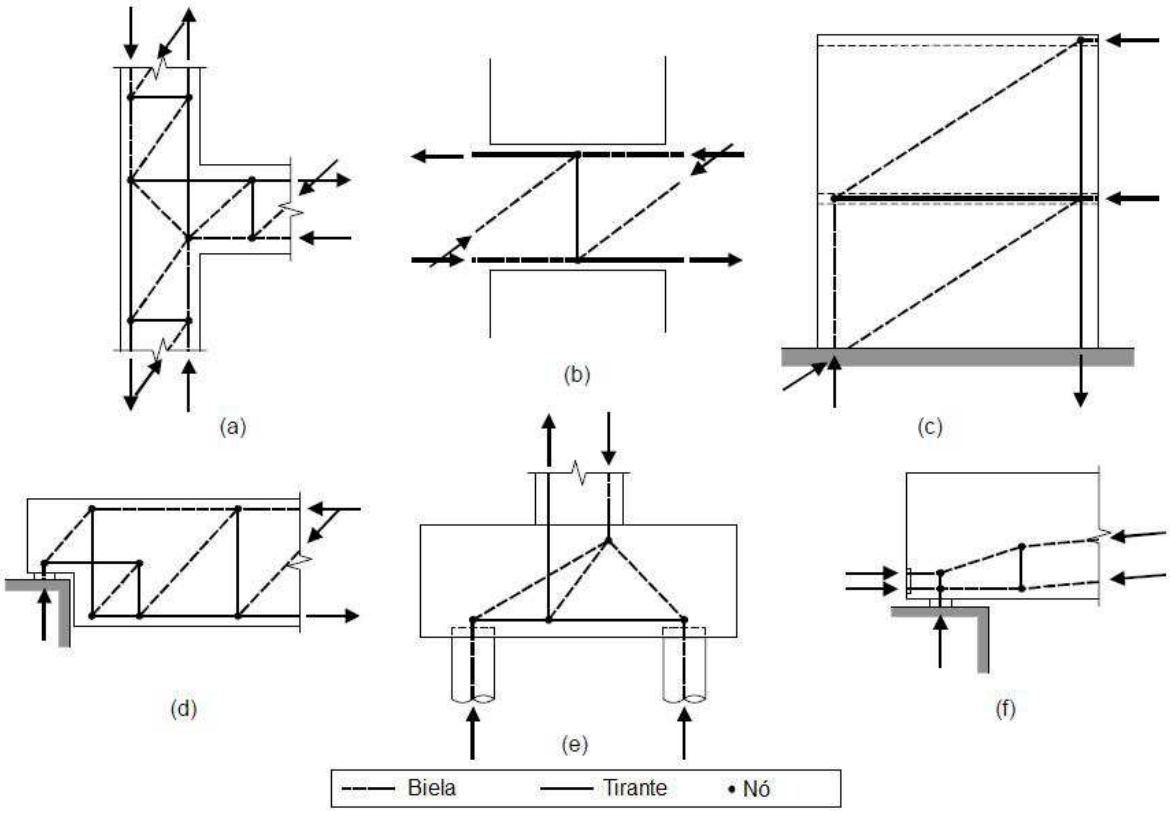

Figura 5 – Exemplos de aplicação do método Biela-Tirante: a) Nó entre viga e Pilar; b) Viga de compatibilização; c) Parede de contraventamento; d) Dente Gerber; e) Bloco de coroamento sujeito a momento; f) Apoio e ancoragem de uma viga protendida. (FIB, 2008)

Embora o MBT seja uma aproximação do comportamento da estrutura de concreto armado bastante simplificada, sua aplicação para o dimensionamento ao ELU é embasada teoricamente. O Teorema do Limite Inferior da Teoria da Plasticidade (Teorema Estático) garante que a carga de ruptura da estrutura real será inferior ao de um modelo elástico linear se garantida duas hipóteses básicas:

- O campo de tensões é estaticamente admissível
- O campo de tensões é plasticamente

Ambas as hipóteses são atendidas pelo MBT desde que observadas as recomendações de ancoragens e tensões admissíveis.

Entretanto, por não atender à compatibilidade de deformações existe um infinito número de soluções possíveis para um determinado conjunto de solicitações e reações.

Outra ressalva importante com relação ao MBT é a questão da ductilidade, o Teorema do Limite Inferior só garante a segurança da estrutura se forem verificadas também a linearidade geométrica e a ductilidade infinita. Estas duas questões se traduzem nas hipóteses de pequenas deformações, rotações e deslocamentos e na garantia do desenvolvimento completo das tensões no aço, através de ancoragem adequada nos nós.

3.2 Componentes do MBT

De acordo com Schlaich e Schäfer (1991), a partir da forma do campo de tensões idealizado por uma dada biela em uma estrutura plana, podemos classificá-la como prismática, em formato de leque ou em formato engarrafado (semelhante ao gargalo de uma garrafa), conforme ilustradas pela Figura 6, sendo que estes três tipos de bielas englobam todos os casos.

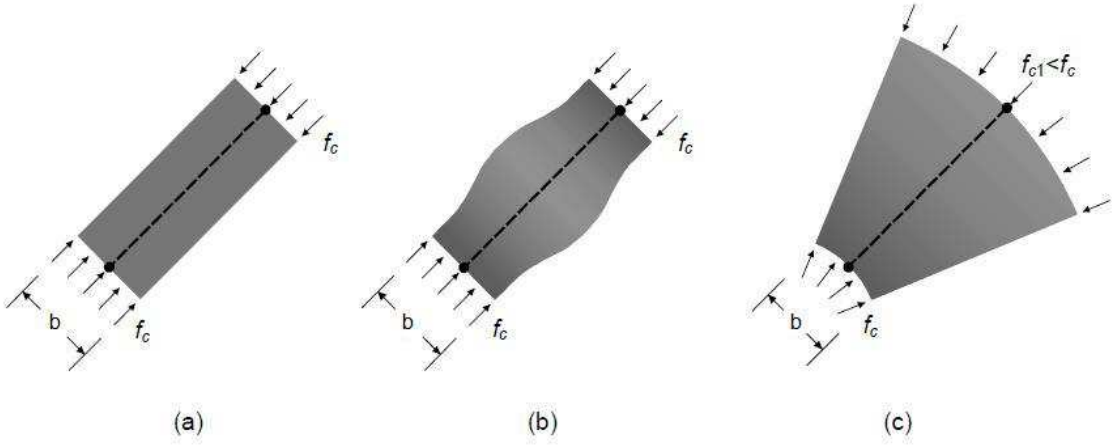

Figura 6 - Tipos de biela segundo geometria: a) prismática; b) formato engarrafo; c) formato em leque. (FIB, 2008)

As bielas do tipo prismático e em leque representam campos de tensão com nenhuma ou pequena curvatura, de modo que as tensões ortogonais a este campo são desprezíveis, em oposição, o campo engarrafado gera tensões significativas de tração devido às mudanças de direção do campo de tensões de compressão.

Como regra geral, a tensão resistente das bielas comprimidas não é a mesma da resistência característica do concreto quando ensaiado através de corpos de prova, como forma geral pode-se exprimir a resistência da biela por $f_{cdb} = \nu f_{cd}$, sendo f_{cdb} a tensão resistente da biela e ν o fator de eficiência da biela, sendo menor ou igual a 1. O valor de ν varia de acordo com o tipo de biela e outros fatores relativos ao

confinamento e tensões transversais. Além disso, as referências normativas apresentam alguma variação nos valores para as mesmas condições.

A resistência final da biela é dada por $F_{cdb} = A_c f_{cdb}$, onde A_c é a área contribuinte da biela, dada pelo produto entre profundidade fora do plano analisado, t e a largura da biela dentro do plano, b. Portanto $F_{cdb} = tbf_{cdb}$. A seção 3.4 detalha as considerações para a resistência das bielas.

Os tirantes representam o eixo de um feixe de armadura de reforço, sendo ela passiva ou protendida. Em casos especiais podem também caracterizar um campo de tensões de tração no concreto ou de alívio de compressão. A tensão limite nos tirantes é dada simplesmente pela tensão de escoamento do aço f_y, no caso de armadura passiva ou f_{yp}, no caso de armadura protendida.

Para a representação dos esforços introduzidos pela protensão, pode ser utilizada a substituição por um conjunto de esforços externos equivalentes. Desta forma ao computar-se a tensão resistente de uma armadura pré-tracionada deve ser considerada apenas a diferença entre a tensão resistente última e tensão pré-introduzida. Uma formulação geral para a resistência do tirante é dada por $F_t = f_{yd}A_s + \Delta f_p A_{ps}$, onde Δf_p é a tensão resistente residual anteriormente descrita.

Schlaich e Schäfer (1991) classificaram também os nós em dois tipos, utilizando a nomenclatura traduzida proposta por Souza e Bittencourt (2006): Nós contínuos, onde o campo de tensões principais apresenta pequena mudança de direção; e nós singulares, onde ocorrem mudanças abruptas na direção das tensões principais.

Os nós singulares devem ser mais profundamente estudados, pois neles a ancoragem de barras pode ser deficiente ou podem também apresentar problemas de ductilidade e deformação excessiva.

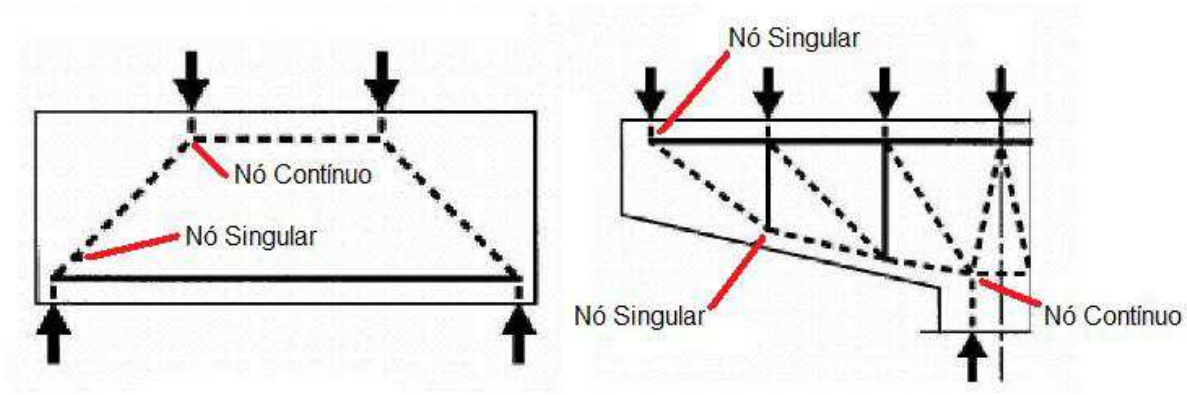

Figura 7 - Tipos de nós segundo o fluxo de tensões. Adaptado de (Souza, 2004)

Uma abordagem mais direta aos tipos de nós diz respeito aos esforços incidentes sobre eles, como regra geral os nós podem ser classificados em quatro tipos: CCC, CCT, CTT e TTT onde C e T representam a incidência de esforços de compressão ou de tração.

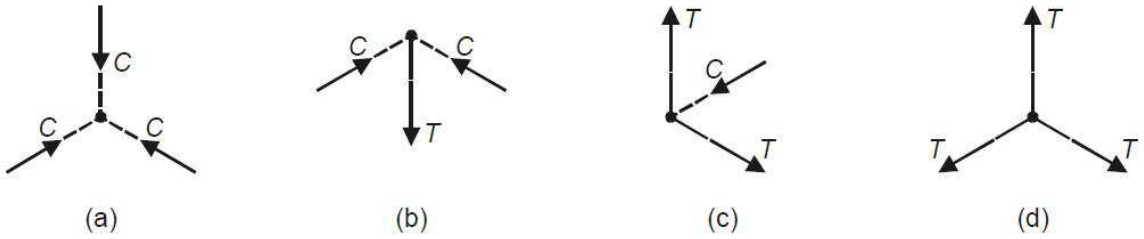

Figura 8 - Tipos de nós de acordo com esforços incidentes. (FIB, 2008)

Com relação às dimensões do nó, a definição mais direta é através da geometria das barras que nele se encontram por meio da projeção da interseção das diferentes barras conforme ilustrado pela Figura 9.

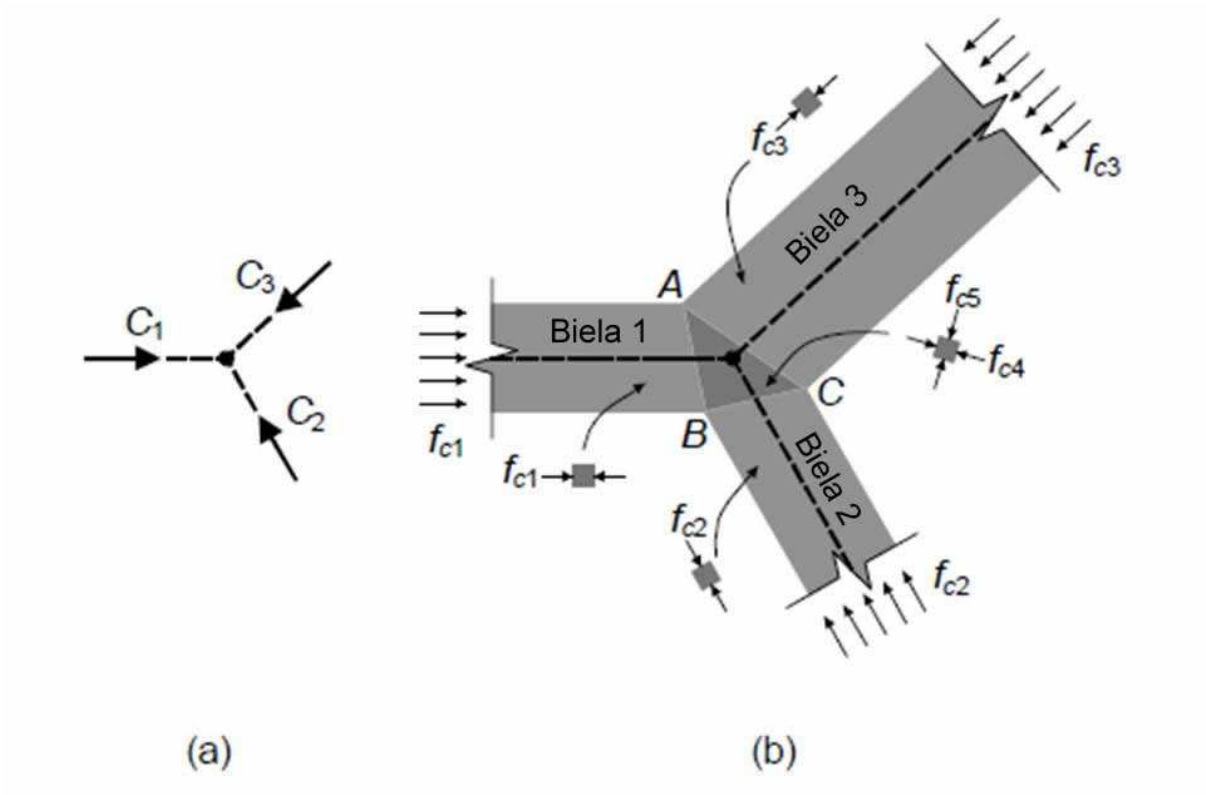

Figura 9 - Nó CCC a) Forças atuantes; b) geometria das bielas e do nó delimitado pelo triângulo ABC. Adaptado de (FIB, 2008)

3.3 MBT tridimensional

A extensão do método a modelos tridimensionais é direta, entretanto deve ser observado com maior cuidado os ângulos existentes e a geometria dos nós.

Em alguns casos, entretanto é possível e conveniente a decomposição de um modelo tridimensional em modelos bidimensionais mais simples.

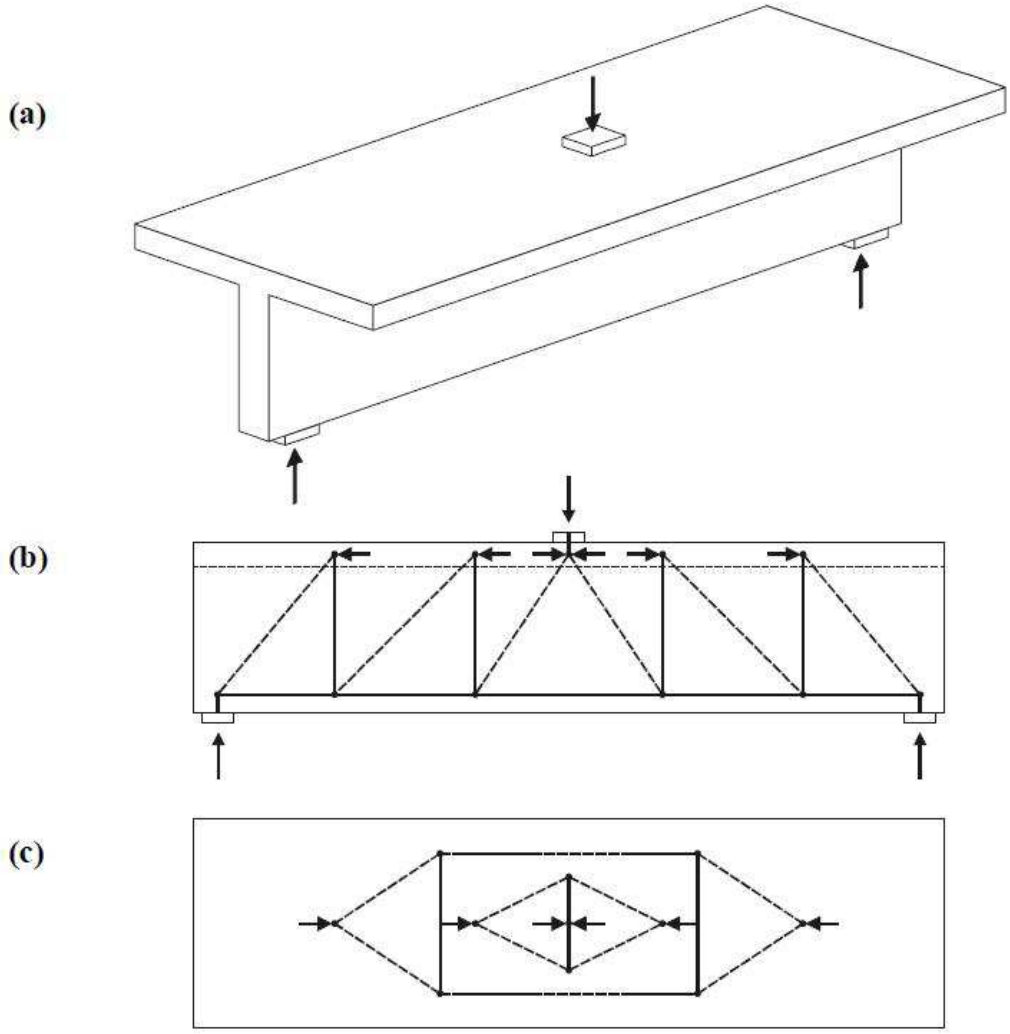

Figura 10 - Viga com mesa colaborante sujeita a esforço concentrado. a) perspectiva tridimensional; b) MBT 2D na alma; c) MBT 2D na mesa. (FIB, 2008)

3.4 Capacidade resistente das bielas

A consideração do concreto como um material rígido e perfeitamente plástico, embora simplifique a modelagem e esteja a favor da segurança, é irreal. Por esse motivo algumas considerações adicionais devem ser feitas na avaliação das bielas comprimidas.

O comportamento do concreto varia significativamente com o progressivo aumento das tensões de compressão unidirecionais devido à fissuração na direção perpendicular, além disso, a capacidade de absorver deformações é limitada e sua ruptura é frágil, por esse motivo se faz necessária a consideração do fator de eficiência ν.

Além disso, o fator ν é utilizado para a consideração de perdas de resistência causadas pela forma das bielas, e pela perturbação do campo de tensões devido à presença de fissuras ou tração transversal à biela. Também pode ser utilizado para representar ganhos de resistência devido ao confinamento por armaduras ou por tensão de compressão transversal.

A perda de resistência do concreto também pode ser resultado de fissuração devido a carregamentos cíclicos ou pelo compartilhamento de uma dada região por mais de uma estrutura resistente.

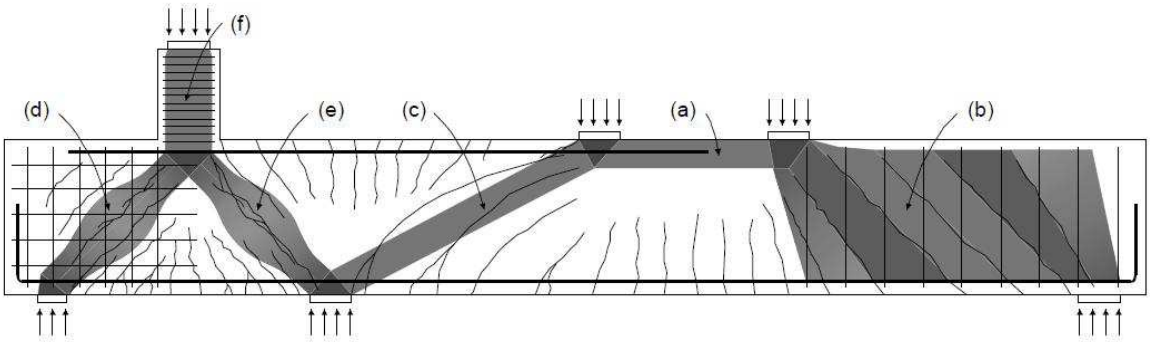

Figura 11 - Diferentes condições de bielas. a) biela prismática sem fissuração; b) biela prismática com fissuras paralelas; c) biela prismática com fissuras não-paralelas; d) biela engarrafada com armadura de fendilhamento; e) biela engarrafada sem armadura de fendilhamento; f) biela confinada. (FIB, 2008)

3.5 Capacidade resistente de tirantes e ancoragem

A capacidade resistente dos tirantes é dada, como visto na seção 3.2, por $F_t = f_{yd}A_s + \Delta f_p A_{ps}$ entretanto próximo à região dos nós existem outros aspectos a serem considerados. Os tirantes devem ter toda a capacidade resistente desenvolvida ao encontrarem-se com o nó, de modo a ser compatível com a treliça análoga.

O desenvolvimento da capacidade resistente é regido pela ancoragem das barras do tirante antes da região nodal, a Figura 12 apresenta diferentes formas de garantir esta ancoragem.

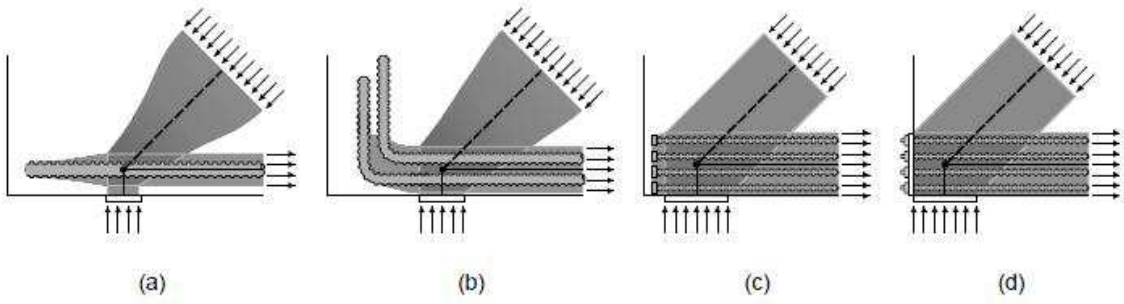

Figura 12 - Diferentes métodos para ancoragem de tirantes. a) barra reta além da região nodal; b) barras dobradas além da região nodal; c) *studs* faceando a região nodal; d) chapa de ancoragem faceando a região nodal. (FIB, 2008)

É importante destacar que à exceção da ancoragem com chapa, a largura efetiva do apoio a ser considerado deve ser reduzida em função do comprimento necessário para a ancoragem ou alojamento de patas e *studs.*

3.6 Metodologia para o MBT

De forma resumida o MBT pode ser resumido em cinco etapas (FIB, 2008):

- Definir a região D a ser considerada e suas condições de contorno e esforços atuantes;
- Definir a treliça pela qual será modelado o comportamento da estrutura e determinar os esforços internos;
- Definir a armadura de reforço necessária para os tirantes e garantir sua ancoragem;
- Verificar as bielas e nós, dimensionando-os através da definição das larguras necessárias para as bielas e a geometria dos nós;
- Garantir a ductilidade da região D através da distribuição da armadura.

O método, como exposto, é de aplicação simples, uma vez estabelecido o modelo de treliça análoga. O modelo de treliça pode ser criado de maneira empírica ou com o auxílio de ferramentas, como o método das trajetórias de cargas ou a partir do campo de tensões obtido de uma análise por elementos finitos. Os resultados, entretanto, são dependentes do projetista uma vez que os modelos não são únicos, Liang, Xie, e Steven (2000) propuseram a utilização da otimização topológica como meio de evitar esta subjetividade, a definição da geometria da treliça entretanto é o fator principal na aplicação do MBT a geometrias não usuais.

3.7 Definição da geometria do modelo

Por ser uma solução apenas estaticamente admissível, isto é, por não atender à compatibilidade de deformações, o MBT possui infinitas soluções que, embora sejam seguras do ponto de vista teórico pelo Teorema do Limite Inferior, não são necessariamente aplicáveis ao concreto armado.

Devido aos limites de ductilidade e redistribuição de esforços na estrutura de concreto armado alguns modelos adotados para o MBT podem considerar uma carga ultima superestimada. Tendo em vista este fato, os modelos mais adequados são aqueles que melhor representam o perfil de deformações e tensões na estrutura analisada e consequentemente demandam menor redistribuição de cargas e menor energia de deformação.

Para a determinação do modelo existem diferentes metodologias como o método do caminho de cargas, pré-processamento através do MEF, análise do padrão de fissuração e métodos de otimização.

3.7.1 Caminho de cargas

O método do caminho de cargas parte da premissa que as cargas tomam o caminho mais curto dos pontos de aplicação até os apoios.

Uma vez definidas as solicitações externas e as reações de apoio é traçado o fluxo das cargas, dos pontos de aplicação até os apoios com as reações correspondentes. O traçado do fluxo de tensões não deve ser necessariamente linear, e sim buscar o menor caminho entre solicitações e reações, porém dois caminhos de carga não devem se cruzar.

Curvaturas no caminhamento indicam a necessidade de mobilização de esforços internos de modo a equilibrar esta mudança do caminho das cargas, estes esforços internos podem ser providos por bielas ou tirantes adicionais, sendo definidos a partir da análise global da região estudada, avaliando-se outros caminhos existentes na região analisada.

A Figura 13 ilustra uma aplicação deste procedimento a uma viga alta biapoiada sujeita a carregamento distribuído trapezoidal. Para toda análise pelo MBT as cargas distribuídas (em vermelho na figura a) devem ser substituídas por cargas concentradas aplicadas aos nós, posteriormente é traçado o caminho de cargas e, nas regiões de curvatura surgem esforços internos.

No exemplo as curvaturas superiores poderiam ser equilibradas por um mecanismo mais complexo (envolvendo bielas e tirantes), entretanto o princípio do menor caminho de cargas também se aplica para o equilíbrio dos esforços internos, desta forma o equilíbrio por uma biela é uma melhor representação do fluxo de tensões.

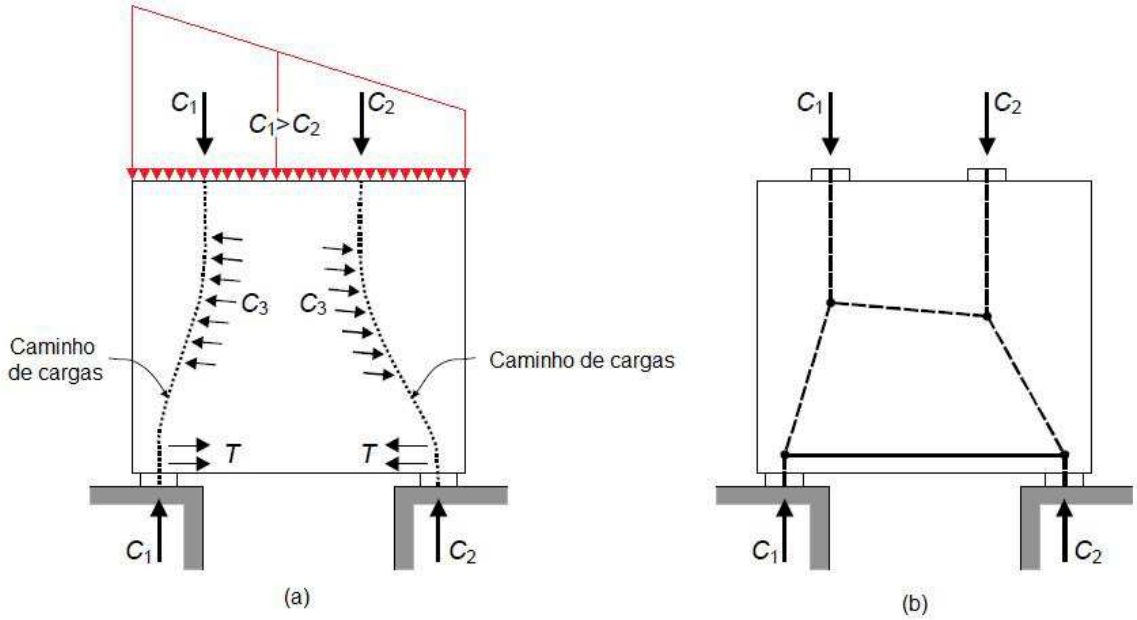

Figura 13 - Processo do caminho de cargas. a) Caminho de cargas; b) Modelo biela-tirante. Adaptado de (FIB, 2008)

A abordagem da definição do modelo pelo caminhamento de cargas requer sensibilidade do engenheiro e o entendimento do fluxo de tensões na região estudada. Porém, com a experiência do engenheiro, é possível identificar padrões estruturais comuns, levando à rápida definição de modelos resistentes, em especial para análises simples.

3.7.2 Análise do padrão de fissuração

A definição do modelo resistente através da análise do padrão de fissuração se baseia no fato de as tensões principais máximas e mínimas serem ortogonais entre si, desta forma pode-se inferir o fluxo das tensões de compressão à partir da observação das fissuras formadas.

A Figura 14 ilustra um elemento infinitesimal sujeito às tensões máxima (σ_1) e mínima (σ_3). A fissuração ocorrerá inicialmente na direção da tração máxima ao passo que a tensão mínima, ou de maior compressão será paralela às fissuras. Como regra geral conclui-se que tirantes devem ser posicionados perpendiculares às fissuras e bielas paralelas a estas, podendo inclusive estar ativas entre fissuras.

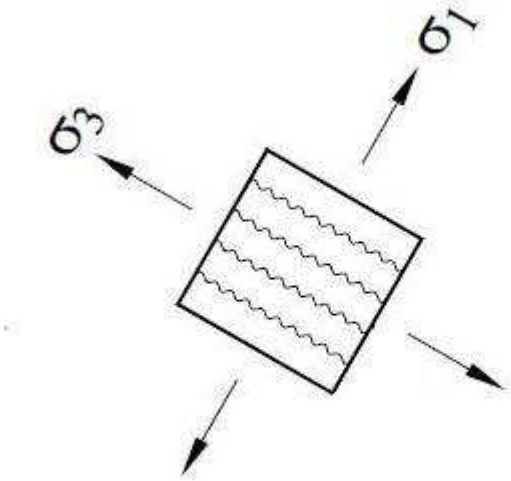

Figura 14 - Tensões principais e formação de fissuras.

A Figura 15 por sua vez apresenta uma aplicação a partir de ensaios experimentais, deve-se notar que a determinação do modelo não é necessariamente imediata em estruturas de comportamento complexo, porém a validação de um modelo proposto é imediata.

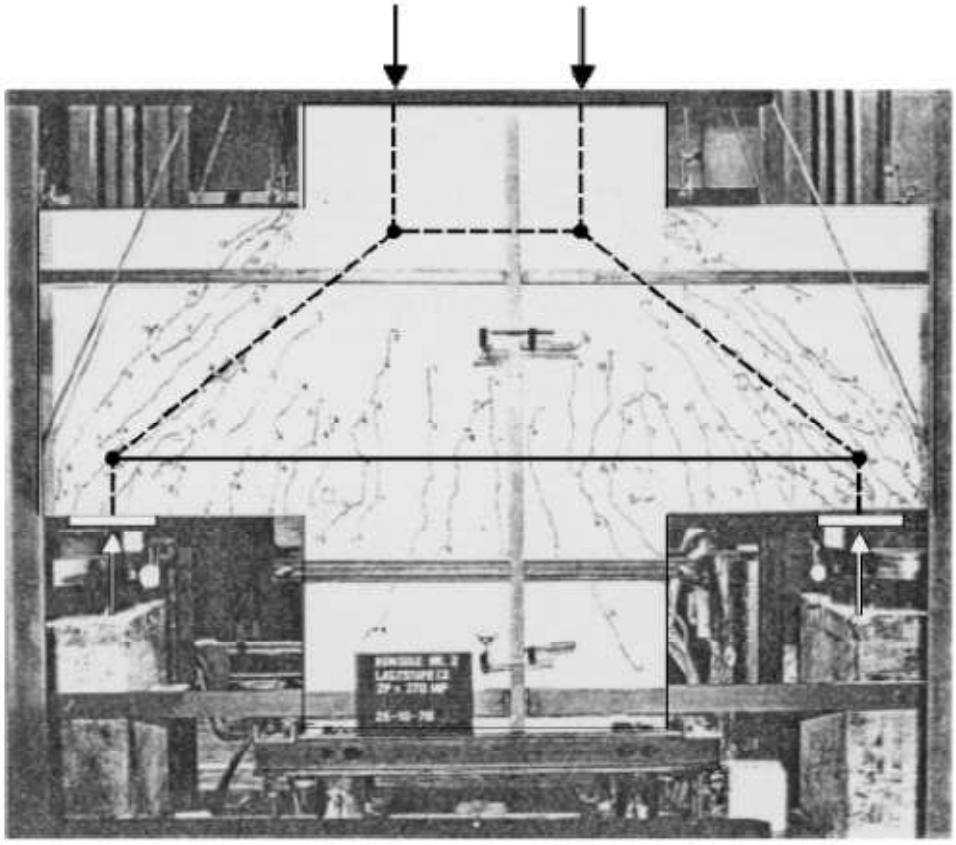

Figura 15 - MBT obtido a partir da análise do padrão de fissuração (Schlaich J. S., 1991)

O inconveniente desta abordagem é a disponibilidade de resultados experimentais semelhantes ao problema analisado, entretanto o padrão de fissuração esperado pode ser inferido a partir da análise da deformada da estrutura e do conhecimento prévio do engenheiro, porém, esta última forma de aplicação insere maior subjetividade na definição do modelo resistente.

3.7.3 Pré-processamento através do MEF

A geração de modelos de bielas e tirantes através da análise de um processamento linear foi proposta inicialmente por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987), este

processo assemelha-se ao de caminho de cargas, entretanto, o “caminho de cargas” é definido à partir da análise das tensões principais.

As bielas são definidas paralelas às tensões principais de compressão enquanto as possíveis posições dos tirantes são definidas pelas tensões principais de tração, Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987) recomenda que os tirantes se posicionem com um desvio máximo de 15° em relação à tensão principal.

A Figura 16 e a Figura 17 ilustram exemplos da aplicação desta metodologia, os pares de linhas perpendiculares representam as tensões principais obtidas em cada elemento. Note-se que embora se baseie em critérios objetivos, a definição do modelo não é única.

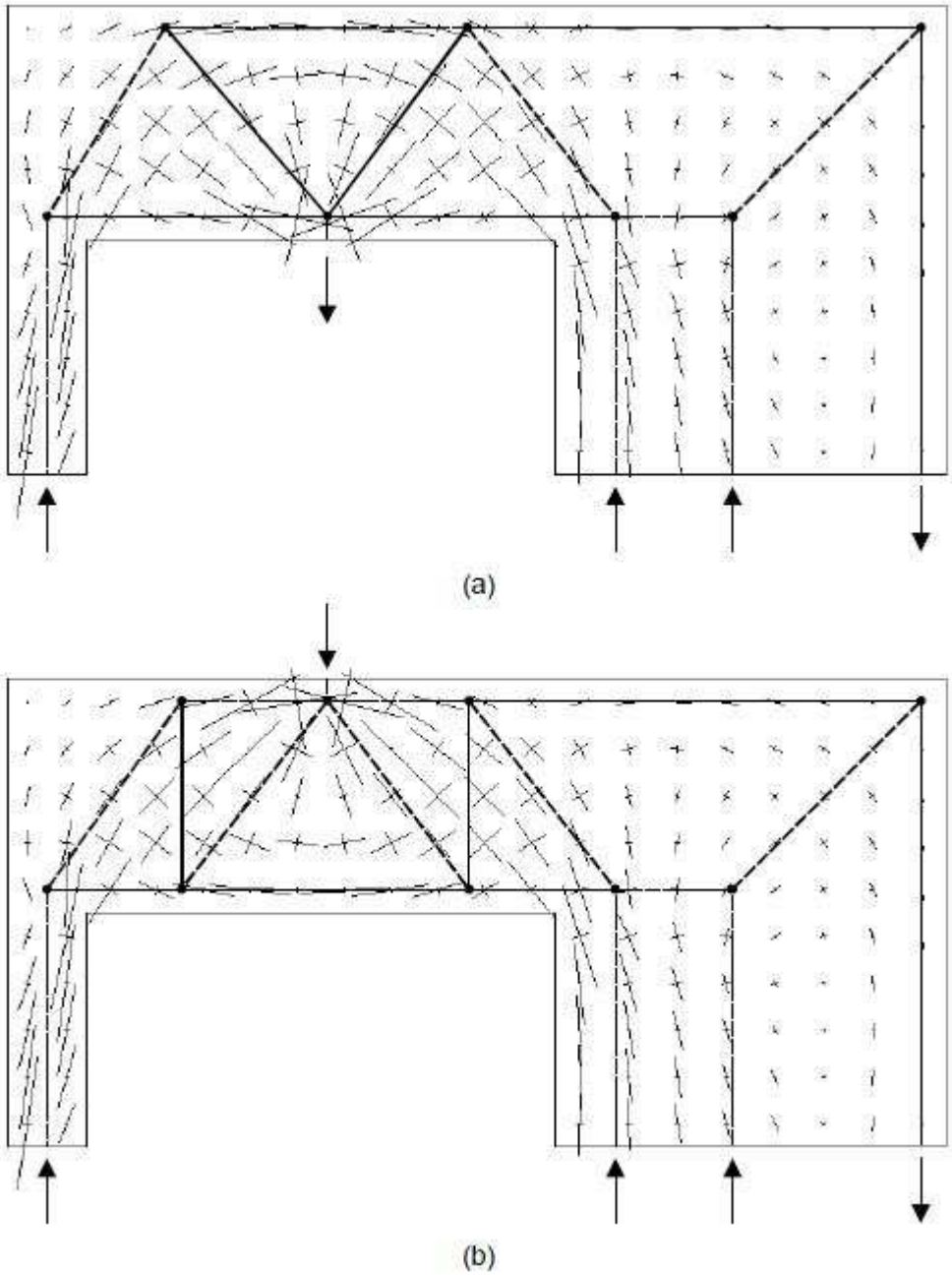

Figura 16 - MBT obtido a partir de tensões principais – Viga biapoiada. a) carga superior b) carga inferior (FIB, 2008)

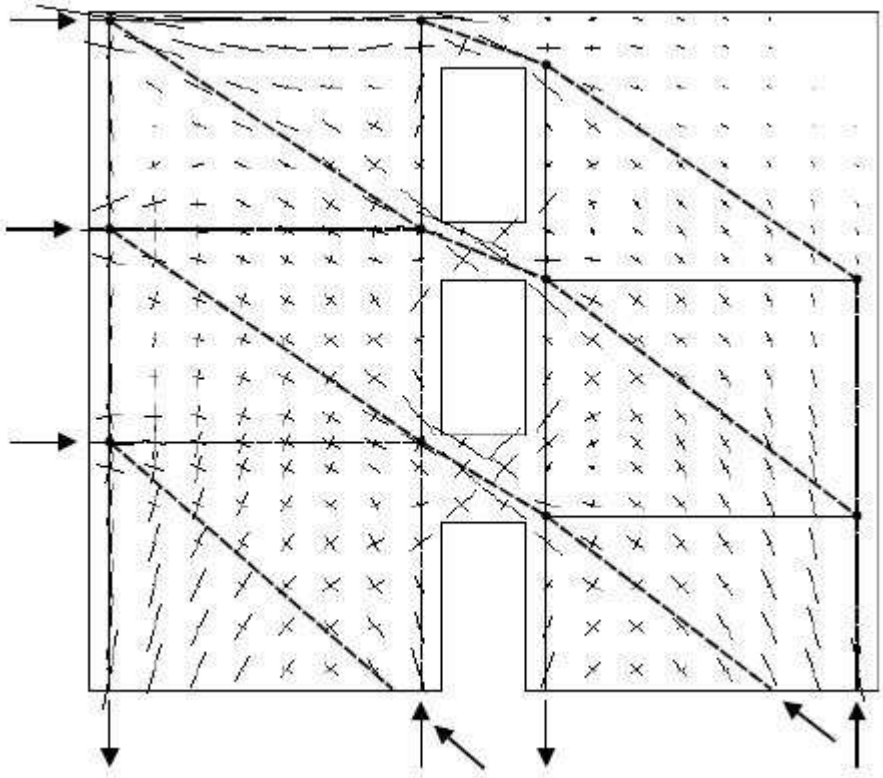

Figura 17 - MBT obtido a partir de tensões principais - Parede resistindo a esforços horizontais (FIB, 2008)

Sobre a utilização de uma análise linear em favor de uma análise não linear, o FIB (2008) argumenta que devido ao não conhecimento prévio do arranjo de armaduras, as redistribuições de tensões devido à fissuração não correspondem ao comportamento da estrutura.

3.7.4 Métodos de otimização

Os métodos de otimização podem ser aplicados à definição dos modelos de bielas e tirantes de diferentes formas, o Capítulo 5 exemplifica alguns destes métodos.

3.8 Revisão da norma NBR 6118 e suas disposições com relação ao MBT

No período de elaboração do presente trabalho foi disponibilizada em consulta nacional uma revisão da norma brasileira NBR 6118, nesta versão passa a ser abordado o dimensionamento de Regiões D através do método de Bielas e Tirantes, adotando-se os parâmetros e procedimentos descritos nesta seção.

O projeto de revisão da norma estabelece que os modelos devam ser exclusivamente isostáticos e autoequilibrados, sendo as reações de apoios obtidas a partir de um modelo linear ou não linear externo ao das bielas e tirantes.

Assim como a teoria geral os modelos devem ser compostos somente por bielas, tirantes e nós, sendo as condições de contorno exclusivamente as forças aplicadas aos nós, ativas ou reativas.

Outra limitação imposta à aplicação da teoria é a restrição ao ângulo de inclinação entre bielas inclinadas e a armadura longitudinal do elemento estrutural, sendo a tangente do ângulo limitado aos valores de 0,57 e 2.

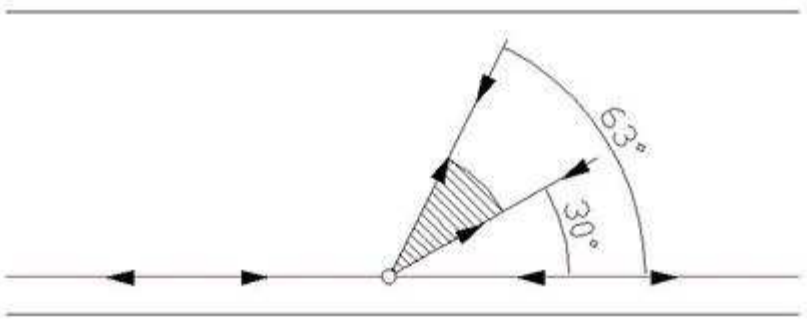

Figura 18 - Ângulos limite entre bielas inclinadas e armadura longitudinal

Esta limitação do ângulo esta também ligada aos modelos propostos para o dimensionamento de vigas submetidas a esforços cortantes, em especial o limite inferior, sendo no projeto de revisão de 30° a 45°.

3.8.1 Parâmetros de resistência

Os parâmetros de resistência para compressão máxima de bielas e nós são dados por:

$$f_{cd1} = 0{,}85 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \tag{3.1}$$

$$f_{cd2} = 0{,}60 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \tag{3.2}$$

$$f_{cd3} = 0{,}72 \cdot \alpha_{v2} \cdot f_{cd} \tag{3.3}$$

Sendo:

f_{cd1} a tensão resistente máxima em bielas com compressão transversal ou sem tensões de tração transversal e nós onde se encontram somente bielas;

f_{cd2} a tensão resistente máxima em bielas com tração e nós onde se encontram dois ou mais tirantes;

f_{cd3} a tensão resistente máxima em nós com somente um tirante;

f_{cd} a resistência de cálculo à compressão do concreto.

E:

$$\alpha_{v2} = (1 - \mathrm{f_{ck}})/250, \text{ com } \mathrm{f_{ck}} \text{ em MPa.} \tag{3.4}$$

O parâmetro de resistência do aço por sua vez é dado por:

$$f_{sd} = A_s \cdot f_{yd} \tag{3.5}$$

Sendo:

f_{sd} a tensão resistente máxima do tirante;

A_s a área de aço do tirante;

f_{yd} a tensão de escoamento do aço.

Um ponto não abordado pelo projeto de revisão da norma é a limitação da área das bielas comprimidas e nós. Tomando-se como base as seções referentes ao dimensionamento de elementos à força cortante se poderia adotar uma altura máxima igual à altura útil da peça de concreto e sua largura total.

4 Método dos Elementos Finitos para Concreto Armado

4.1 Introdução

Embora, de acordo com as normas brasileiras, a modelagem com elementos finitos seja estabelecida somente como base para uma análise através de outro método para a definição das armaduras e verificação do concreto, outros códigos internacionais são mais permissivos em relação à sua utilização para o detalhamento de peças.

A modelagem de elementos de concreto armado através do MEF, embora já difundida, deve ser tratada com cuidados adicionais já que se trata de um material heterogêneo e anisótropo.

Segundo a FIB (2008) dentre as vantagens listadas para a aplicação do método dos elementos finitos, em particular através de uma análise linear destacam-se:

- A modelagem linear em elementos finitos está bem estabelecida e sua aplicação é relativamente simples;
- Múltiplos casos de carregamento podem ser rapidamente acomodados com mudanças mínimas nos dados de entrada;
- As armaduras de reforço são posicionadas nas regiões efetivamente mais tracionadas, ou seja, aquelas em que a fissuração ocorreria inicialmente, ajudando a minimizar a propagação de fissuras.

Por outro lado, como aspectos negativos têm-se:

- Nenhuma informação é obtida com relação ao estado limite último da estrutura. Na realidade, pelo teorema do Limite inferior sabe-se apenas que a carga última é superior à estaticamente admissível;

- Limites precisam ser estabelecidos para que se possa assegurar a dutilidade da peça analisada e o atendimento ao Estado Limite de Serviço;
- Nenhuma informação é obtida com relação a fenômenos como a fissuração e a deformação obtida seria subestimada por não levar em conta efeitos inelásticos;
- O detalhamento da armadura de reforço necessária não é imediato.

4.2 Análise linear x Análise não linear

Um aspecto que deve ser analisado com atenção é a consideração ou não de efeitos não lineares e de quais efeitos considerar. Conforme exposto no item 2.3, o concreto armado está sujeito a inúmeras não linearidades, existindo estudos específicos sobre suas influências nas estruturas e formas de incorporá-los na modelagem pelo MEF.

A incorporação de efeitos não lineares para a modelagem de Regiões D introduz parâmetros adicionais a serem calibrados e cuidados adicionais a serem tomados, em especial com relação a discretização da malha. Entretanto, como citado existe extensa bibliografia sobre o assunto, em especial para efeitos presentes na maior parte das estruturas como a interface entre aço e concreto, estando inclusive incorporado em alguns pacotes comerciais de MEF.

Por outro lado, assim como discutido para o MBT, o Teorema do Limite Inferior garante que o resultado obtido a partir de uma análise elástico-linear será favorável à segurança, mesmo com a consideração do concreto armado como material isótropo-homogêneo sendo demasiadamente simplificadora.

Sendo um tópico passível de discussão o autor adotará premissas baseadas na análise de diferentes fontes bibliográficas, em especial de Souza (2004) e FIB (2008):

- O dimensionamento inicial (somente ao ELU) se dará através da análise linear da estrutura, tomando-se um material idealmente homogêneo, isótropo e elástico-linear;
    - O ELS deve ser verificado após a definição das armaduras e sua disposição, atentando-se à ductilidade da ruptura, conforme item abaixo;
- Verificações de estruturas ou dimensionamentos existentes devem ser realizadas através de análise não linear, adotando-se ao menos a discretização de armaduras e a fissuração;
    - Outros efeitos não lineares devem ser levados em conta a depender da análise realizada como fluência e efeitos térmicos.

Esta abordagem justifica-se, pois se busca uma automatização do dimensionamento das Regiões D e estando definidas as condições de contorno, o resultado é facilmente obtido e tomando-se a discretização adequada será consistente com análises paralelas.

O dimensionamento em si se dará através da análise das tensões presentes na estrutura conforme o item 4.3, estando ainda sujeito à verificação das taxas necessárias de armaduras.

Os efeitos não lineares não devem ser negligenciados sendo imprescindível a validação com sua consideração.

4.3 Aplicação a placas

Ao aplicar-se o MEF a estruturas de placas através de softwares comerciais, é comum a análise se dar sobre as tensões principais. Através da análise destas tensões é possível estabelecer-se o caminho das cargas, o que pode servir de base para a determinação do modelo de bielas e tirantes.

Uma alternativa seria analisar os resultados através de eixos ortogonais, representando as direções preferenciais da armadura, alinhados com os eixos da estrutura ou do elemento analisado.

Embora o detalhamento da armadura baseada nas direções principais seja econômico e satisfaça as condições de equilíbrio, em alguns casos não é viável construtivamente uma armadura que acompanhe tais tensões, sendo preferível a segunda abordagem com uma malha de armadura ortogonal. Neste caso a soma dos esforços no concreto e na armadura deve ser equivalente aos esforços obtidos no elemento analisado.

Supondo-se que o concreto resista somente a esforços de compressão ($\sigma_{1c} = 0$), sendo a armadura responsável por absorver todos os esforços de tração, a Figura 19 ilustra a composição de esforços no caso de tensões principais não alinhadas com os eixos de armadura.

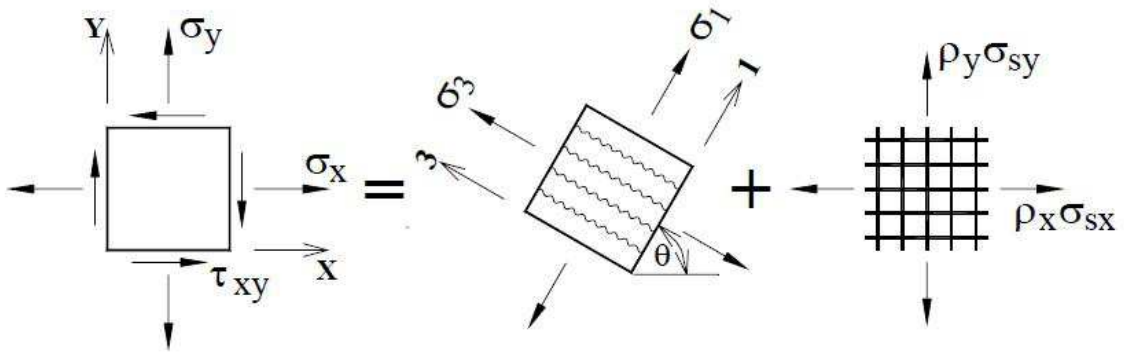

Figura 19 – resultantes em um elemento de placa, o primeiro termo se refere ao concreto e o segundo a armadura. (FIB, 2008)

Este tipo de abordagem do campo de tensões também pode ser ilustrado através de Círculos de Mohr representando as tensões no elemento de placa e as tensões no concreto. A diferença entre os pontos dos dois círculos representando o estado de tensão é equivalente às tensões absorvidas pela malha ortogonal de armaduras.

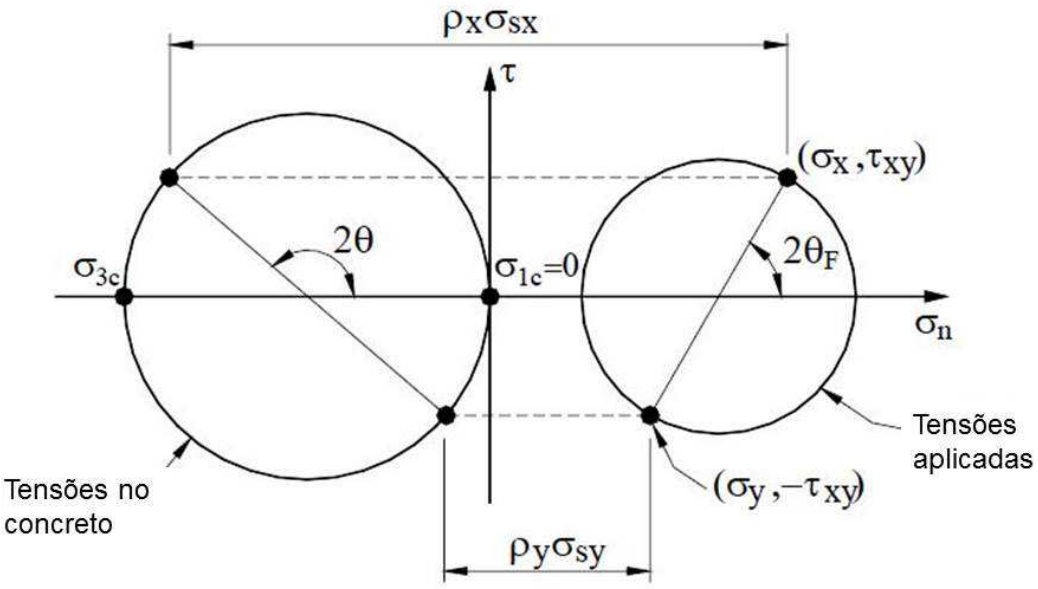

Figura 20 – Círculos de Mohr (FIB, 2008)

Ao analisar-se esta abordagem nota-se que existe um infinito número de soluções, que respeitam o equilíbrio do elemento, obtidas a partir da rotação da malha de reforço. Caso o elemento não apresente as duas tensões principais de tração é possível também o detalhamento da armadura de reforço em apenas uma direção

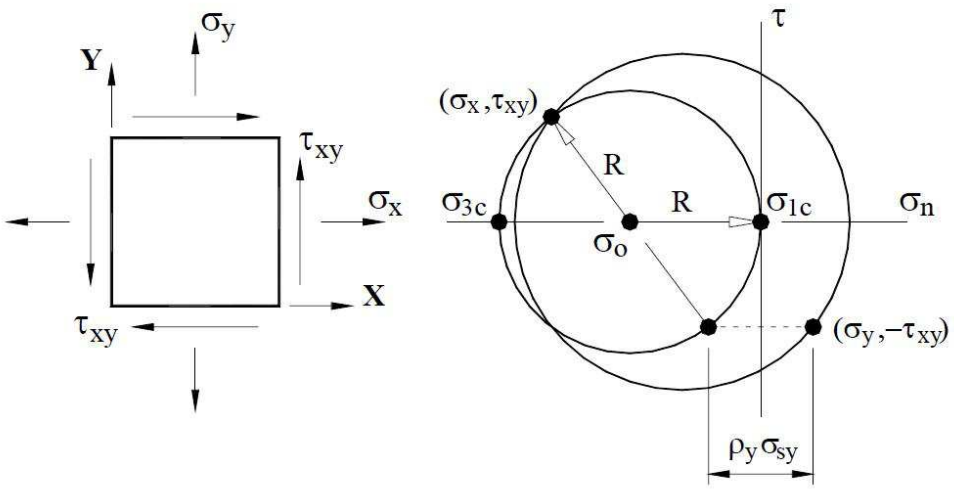

Figura 21 – Círculos de Mohr para reforço em apenas uma direção (FIB, 2008)

Outro caso interessante é o de armaduras iguais nas direções ortogonais, de onde resulta que a armadura de reforço necessária em cada uma das direções é igual àquela que absorve a tensão principal de tração, ou seja, $\rho_x \sigma_{sx} = \rho_y \sigma_{sy} = \sigma_1$, como representado na Figura 22.

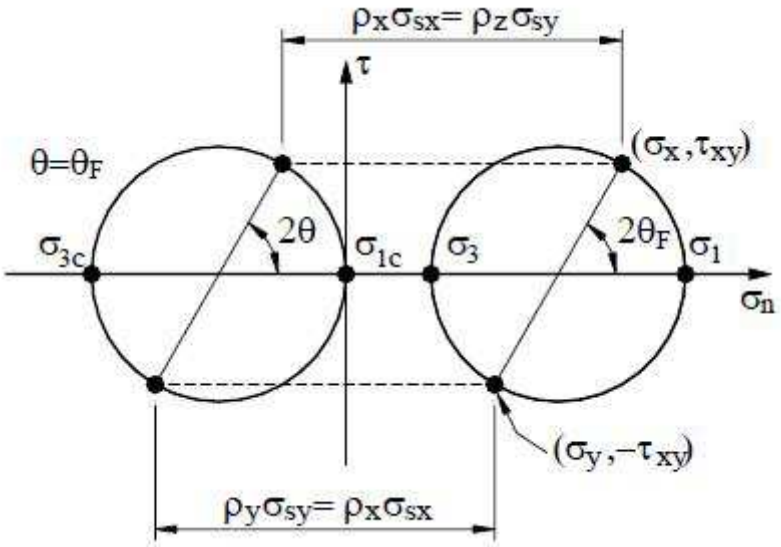

Figura 22 – Círculo de Mohr para armadura igual em duas direções (FIB, 2008)

Por fim uma formulação geral para o dimensionamento e verificação de um elemento qualquer com reforço ortogonal paralelo aos eixos X e Y pode ser obtida pelo conjunto de critérios referentes às superfícies definidas por (FIB, 2008):

$$Y1 = {\tau_{xy}}^2 - \left(\rho_x f_{ytd.x} - \sigma_x\right)\left(\rho_y f_{ytd.y} - \sigma_y\right) = 0 \tag{4.1}$$

$$Y2 = {\tau_{xy}}^2 - \left(f_{cd} - \rho_x f_{ytd.x} + \sigma_x\right)\left(\rho_x f_{ytd.x} - \sigma_x\right) = 0 \tag{4.2}$$

$$Y3 = {\tau_{xy}}^2 - \left(f_{cd} - \rho_y f_{ytd.y} + \sigma_y\right)\left(\rho_y f_{ytd.y} - \sigma_y\right) = 0 \tag{4.3}$$

$$Y4 = {\tau_{xy}}^2 - f_{cd}/4 = 0 \tag{4.4}$$

$$Y5 = {\tau_{xy}}^2 + \left(f_{cd} + \rho_x f_{ycd.x} + \sigma_x\right)\left(\rho_x f_{ycd.x} + \sigma_x\right) = 0 \tag{4.5}$$

$$Y6 = {\tau_{xy}}^2 + \left(f_{cd} + \rho_y f_{ycd.y} + \sigma_y\right)\left(\rho_y f_{ycd.y} + \sigma_y\right) = 0 \tag{4.6}$$

$$Y7 = {\tau_{xy}}^2 - \left(f_{cd} + \rho_x f_{ycd.x} + \sigma_x\right)\left(f_{cd} + \rho_y f_{ycd.y} + \sigma_y\right) = 0 \tag{4.7}$$

A equação (4.1) corresponde ao escoamento das armaduras nas direções X e Y antes do esmagamento do concreto, representando o comportamento de peças subarmadas. As equações (4.2) e (4.3) correspondem ao esmagamento do concreto em conjunto com o desenvolvimento do escoamento da armadura nas direções X ou Y respectivamente. A equação (4.4) representa o esmagamento do concreto sem o desenvolvimento do escoamento do aço.

As equações (4.5), (4.6) e (4.7) dizem respeito a elementos comprimidos nas duas direções. As equações (4.5) e (4.6) representam o esmagamento do concreto em conjunto com o escoamento do aço à compressão na direção X ou Y enquanto a equação (4.7) representa o esmagamento do concreto após o desenvolvimento do escoamento do aço nas duas direções principais.

A superfície descrita pelo conjunto de equações (4.1) à (4.7) pode ser representada no espaço tridimensional de tensões definido pelas componentes σ_x, σ_y e τ_{xy} como ilustrado na Figura 23 para um elemento de placa com taxas de armadura $\rho_x = 0.01$, $\rho_y = 0.005$ e tensão de escoamento $f_{yd} = 500MPa$. As subsuperfícies de ruptura

dadas por cada uma das equações podem ser mais facilmente distinguidas na Figura 23 e em representação planificada na Figura 24:

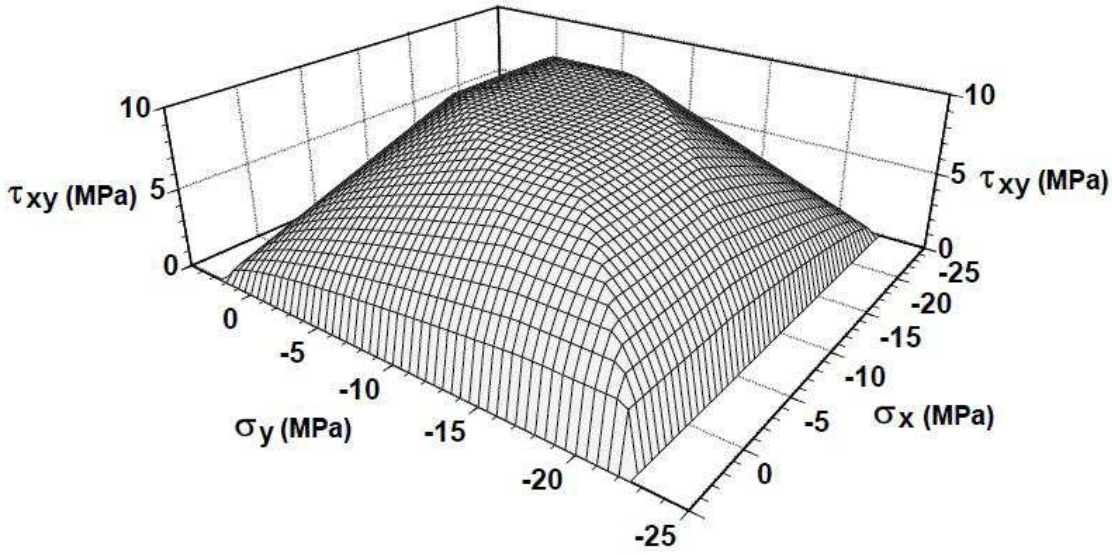

Figura 23 – Superfície de ruptura para elemento de placa (FIB, 2008)

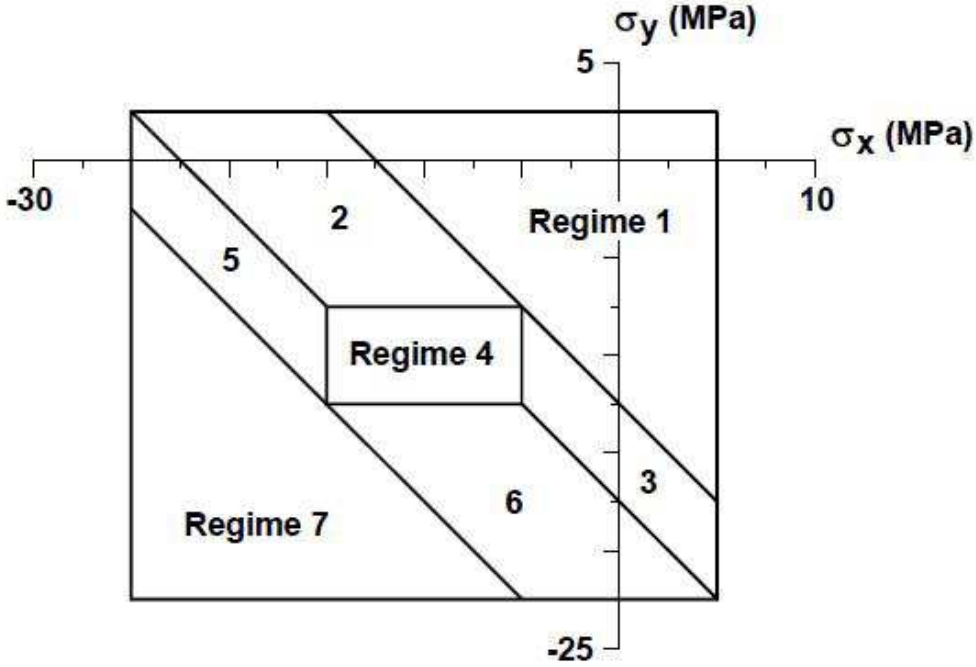

Figura 24 – Regimes de ruptura em planta (FIB, 2008)

Outra forma de interpretar graficamente os critérios de resistência apresentados é através de Círculos de Mohr, mesmo com múltiplas equações definindo o critério de resistência. A Figura 25 ilustra essa representação para o caso de um elemento com reforços ortogonais iguais.

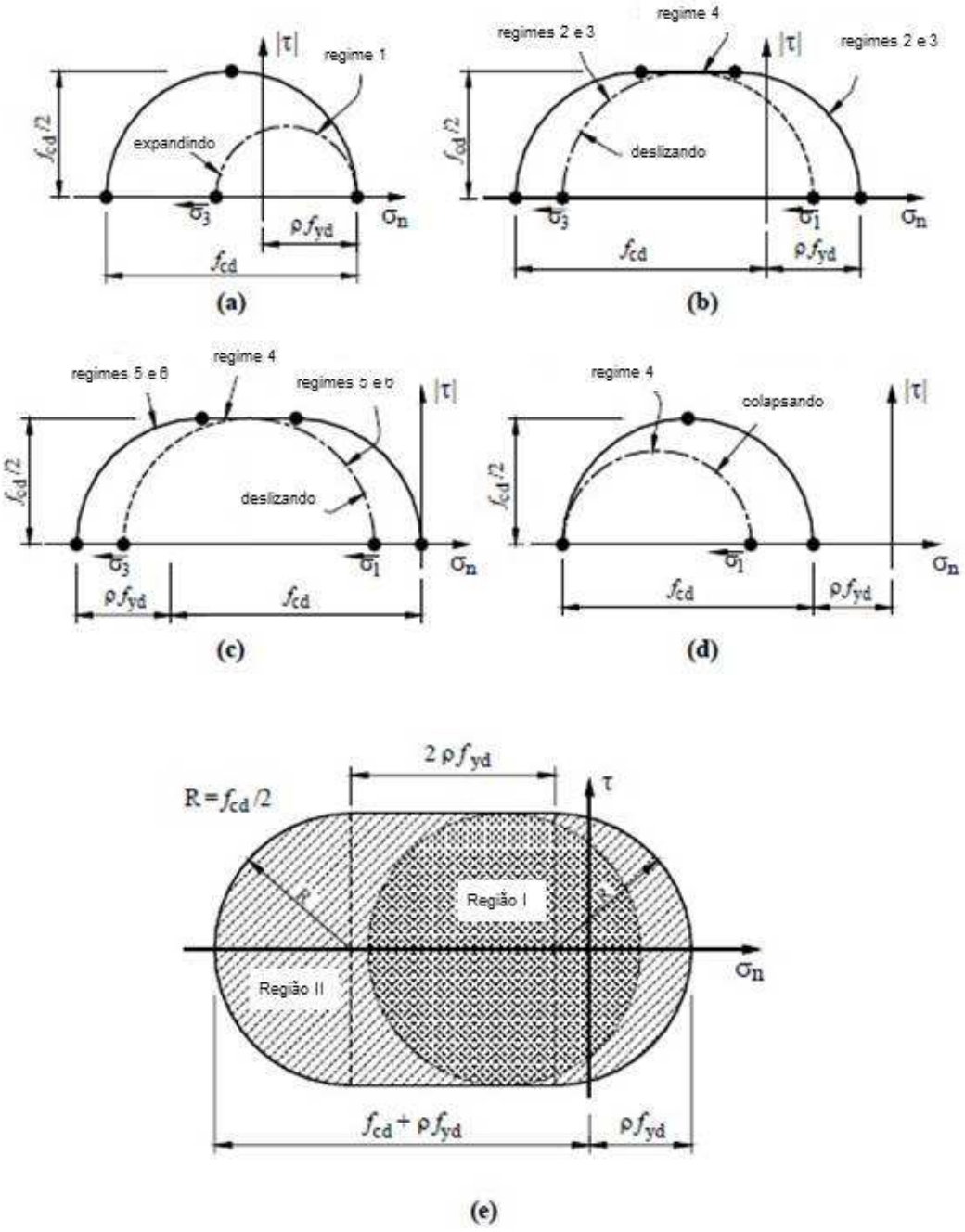

Figura 25 – Interpretação do critério de resistência com Círculos de Mohr (FIB, 2008)

A Figura 25a representa o regime 1 ou seja, a ruptura pelo escoamento do aço à tração antes da ruptura do concreto à compressão, dessa forma à partir do estado de tração dupla, $\sigma_1 = \sigma_3 = \rho f_{yd}$, o círculo se expande à medida que é reduzida a tensão principal normal inferior até que é atingida a ruptura pela tensão limite de cisalhamento $f_{cd}/2$. Neste estado de tensões a tensão principal inferior tem o valor $\sigma_3 = \rho f_{yd} - f_{cd}$.

A Figura 25b representa a redução das duas tensões normais mantendo-se a ruptura pela tensão de cisalhamento até que são atingidas as tensões $\sigma_1 = 0$ e $\sigma_3 = -f_{cd}$, representando o limite da tensão de compressão resistente do concreto.

Na Figura 25c as tensões principais normais continuam sendo reduzidas mobilizando-se a tensão resistente do aço à compressão até que é atingido o limite $\sigma_3 = -\left(f_{cd} + \rho f_{yd}\right)$ e finalmente na Figura 25d a tensão principal normal superior é reduzida até ser atingido o estado de compressão hidrostática limite $\sigma_1 = \sigma_3 = -\left(f_{cd} + \rho f_{yd}\right)$.

Finalmente, a Figura 25e representa o espaço de tensões admissíveis quando representado por Círculos de Mohr.

4.4 Dimensionamento de elementos submetidos à tração e/ou cisalhamento

Para o dimensionamento de elementos tracionados ou submetidos ao cisalhamento é possível obter-se a partir da equação 4.1 um conjunto de equações que possibilita a definição das armaduras de forma direta:

$$\rho_x f_{ytd.x} \geq \sigma_x + \left|\tau_{xy}\right| \tan|\theta| \tag{4.8}$$

$$\rho_y f_{ytd.y} \geq \sigma_y + \left|\tau_{xy}\right| \cot|\theta| \tag{4.9}$$

Com $-90° < \theta < 90°$ e $\theta \neq 0$.

A interpretação física das equações (4.8) e (4.9) pode ser observada na Figura 26.

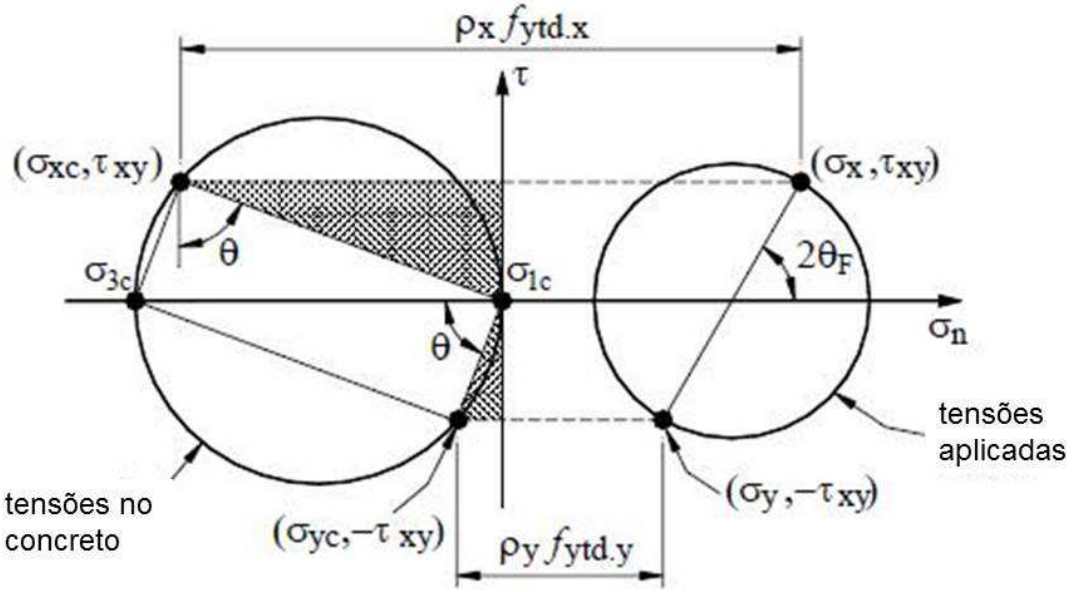

Figura 26 - Círculos de Mohr para um elemento tracionado (FIB, 2008)

É possível observar-se que ao variar-se θ existe um infinito número de combinações possíveis de $\rho_x f_{ytd.x}$ e $\rho_y f_{ytd.y}$ que satisfazem sem folgas o estado de tensões analisado. A Figura 27 ilustra a relação entre as armaduras admissíveis nas duas direções.

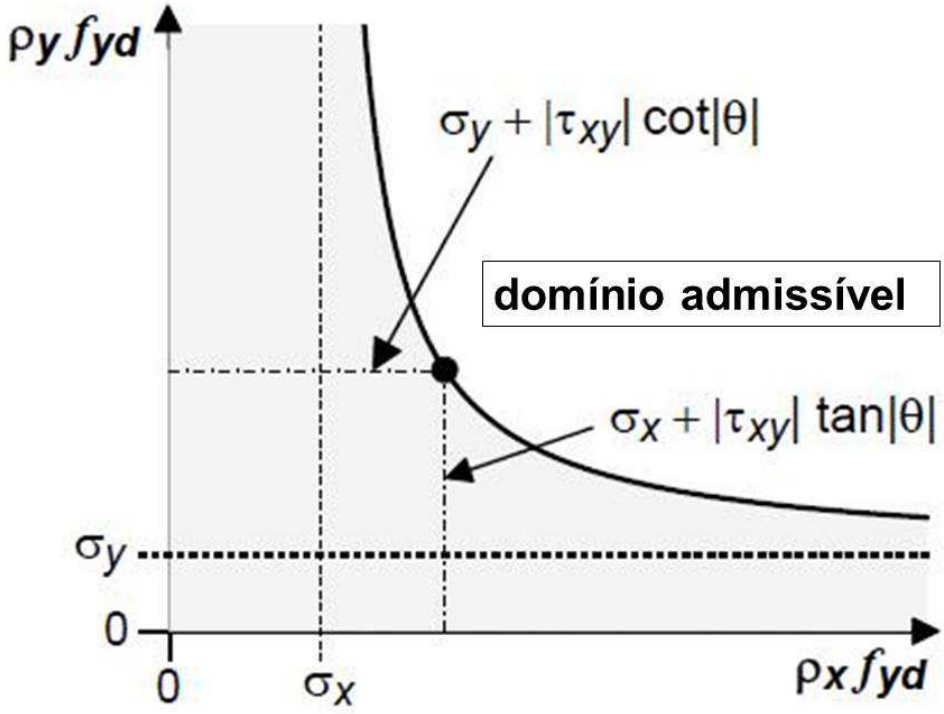

Figura 27 - Domínio admissível para armadura (FIB, 2008)

Por fim, a partir do primeiro invariante de tensões:

$$\sigma_{3c} + \sigma_{1c} = \left(\sigma_x - \rho_x f_{ytd.x}\right) + \left(\sigma_y - \rho_y f_{ytd.y}\right) \tag{4.10}$$

E tomando-se as hipóteses de $\sigma_{1c} = 0$ (não há tensões de tração resistidas pelo concreto) e $f_{cd} \geq -\sigma_{3c}$, obtém-se:

$$f_{cd} \geq \rho_x f_{ytd.x} + \rho_y f_{ytd.y} - \sigma_x - \sigma_y \tag{4.11}$$

A resistência do concreto à compressão adotada na verificação do esmagamento deve levar em conta também a presença de tensões de tração transversais, assim como no caso do MBT. Uma vez que a norma brasileira não aborda o MEF e a

minoração da resistência a compressão tem a mesma origem, recomenda-se a utilização dos parâmetros de resistência indicados no item 3.8.1.

O conjunto de inequações (4.8), (4.9) e (4.11) podem ser utilizados de forma prática na determinação de armaduras de elementos de placa desde que estabelecido o ângulo θ.

O consumo total de aço em um dado elemento poderia ser estimado por:

$$\rho_x f_{ytd.x} + \rho_y f_{ytd.y} \geq \sigma_x + \sigma_y + \left|\tau_{xy}\right|(\tan|\theta| + \cot|\theta|) \qquad (4.12)$$

De onde vem que a menor necessidade de armaduras é obtida quando $\tan|\theta| = \cot|\theta| = 1$, ou seja $\theta = 45°$.

Assim como no MBT recomenda-se que as tensões de compressão tenham uma inclinação mínima com relação às direções das armaduras. Em geral este valor é fixado em 15°.

Outra abordagem é a limitação de θ caso não se deseje esforços de compressão no aço, impondo $\rho_x f_{ytd.x} \geq 0$ à inequação (4.8) tem-se:

$$-\frac{\sigma_x}{\left|\tau_{xy}\right|} \leq \tan|\theta| < \infty, se\ \sigma_x < 0 \qquad (4.13)$$

$$0 < \tan|\theta| < \infty, se\ \sigma_x \geq 0 \qquad (4.14)$$

E analogamente para a outra direção, impondo-se $\rho_y f_{ytd.y} \geq 0$ à inequação (4.9) tem-se:

$$0 < \tan|\theta| \leq -\frac{\left|\tau_{xy}\right|}{\sigma_y}, se\ \sigma_y < 0 \qquad (4.13)$$

$$0 < \tan|\theta| < \infty, se\ \sigma_y \geq 0 \tag{4.14}$$

No caso de elementos exclusivamente comprimidos, *a priori* a tensão no elemento corresponde à tensão no concreto, já que se busca a armadura trabalhando exclusivamente à tração. Entretanto caso se deseje utilizar armadura para os esforços de compressão θ deverá ser adotado de modo a se aproximar o máximo possível da direção principal das tensões devidas ao carregamento.

5 Otimização

O conceito de otimização, de modo bastante abrangente, se refere à busca do melhor elemento em um determinado espaço, sob um critério ou um conjunto de critérios.

Em termos matemáticos, é a busca pelo máximo ou mínimo de uma dada função, chamada função objetivo, alterando-se um conjunto de variáveis em um dado domínio. Além do domínio das variáveis pode haver outros tipos de restrições ao processo de otimização, expressas por equações ou inequações.

Na engenharia civil as técnicas de otimização são aplicadas em diversas subáreas como, por exemplo, redes de transportes, dosagem de materiais, redes hidráulicas e estruturas. Este trabalho tratará da última aplicação em particular às estruturas de concreto armado.

Este capítulo busca conceituar a otimização de modo geral e aborda de forma introdutória alguns dos métodos mais comumente utilizados.

5.1 Formulação Matemática da otimização

A seguir é exposto uma formulação genérica para o problema de otimização.

Toma-se:

$$\min/\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) \tag{5.1}$$

Sujeito a:

$$h_1(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$h_2(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

$$\dots \tag{5.2}$$

$$h_p(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

e

$$g_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$g_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

$$\dots \tag{5.3}$$

$$g_q(x_1, x_2, \dots, x_n) \leq 0$$

Sendo:

$\mathrm{f}(x)$ a função que se busca otimizar (minimizar ou maximizar);

$x = (\mathrm{x}_1, \mathrm{x}_2, \dots, \mathrm{x}_\mathrm{n})$ o vetor de variáveis de projeto;

$\mathrm{h}_1, \mathrm{h}_2, \dots, \mathrm{h}_\mathrm{p}$ as funções de restrição de igualdade;

$\mathrm{g}_1, \mathrm{g}_2, \dots, \mathrm{g}_\mathrm{q}$ as funções de restrição de desigualdade.

Nota-se que os domínios de cada uma das variáveis de projeto estão definidos entre as restrições, de modo que um vetor qualquer x é denominado viável se respeita a todas as restrições h(*x*) e g(*x*) e inviável caso contrário. Ao subespaço conjunto de todos os vetores *x* viáveis dá-se o nome de região viável (Γ).

5.2 Classificação dos problemas de otimização

A otimização apresenta um campo bastante amplo, e para melhor entendimento do assunto, existem diversos tipos de classificação dos problemas:

- Classificação com relação à linearidade:
    - Lineares: problemas em que função objetivo e restrições (caso existam) variam linearmente com a alteração das variáveis de projeto;
    - Não Lineares: por extensão os problemas função objetivo ou restrições variam de forma não linear em relação às variáveis de projeto.
- Classificação com relação ao espaço de busca:
    - Paramétrica: O objeto de otimização é definido por um conjunto finito de parâmetros e o espaço de busca da solução se dá pela união dos domínios viáveis de cada parâmetro;
    - Topológica: O espaço de busca da solução é definido no próprio domínio do objeto estudado, em geral uma região do espaço (bi ou tri-dimensional), discretizada por uma malha;
    - De forma: O espaço de busca da solução também é definido no próprio domínio do objeto estudado, porém não há restrições quanto ao arranjo da estrutura.
- Classificação com relação ao rigor da solução:
    - Métodos Exatos (ou determinísticos): detalhados no item 5.3;
    - Métodos Heurísticos (ou probabilísticos): detalhados no item 5.4.

- Classificação quanto às restrições:
    - Não restringidos;
    - Restringidos:
        - Com restrições de igualdade;
        - Com restrições de desigualdade;
        - Com restrições mistas.

5.3 Métodos Exatos

Os métodos ditos exatos ou em algumas fontes nomeados como determinísticos baseiam-se em teoremas matemáticos e por extensão na aplicação de operadores diferenciais à função objetivo e às funções de restrição, desta forma sua aplicabilidade e classificação esta intimamente ligada a:

- Tipo de restrição do problema;
- Tipo de funções envolvidas (continuidade e diferenciabilidade).

Cada método tem suas hipóteses e exigências quanto a estes itens o que os restringe a algumas aplicações, entretanto são altamente sistematizados e, uma vez atendidas suas hipóteses de aplicação, garantem que chegarão a um ótimo local ao menos.

5.3.1 Programação Linear

A programação linear caracteriza-se por focar problemas em que a função objetivo e as restrições (caso existam) são lineares em função das variáveis de projeto, conforme visto no item 5.2.

Utilizando a nomenclatura apresentada no item 5.1, podemos explicitar o problema de otimização, na formulação padrão para programação linear como:

$$\min/\max f(x_1, x_2, \dots, x_n) = A_f \cdot x \tag{5.4}$$

Sujeito a:

$$A_{h/g} \cdot x = \mathrm{B_{h/g}} \tag{5.5}$$

Com:

$$x \geq 0 \text{ e } \mathrm{B_{h/g}} \geq 0 \tag{5.6}$$

Note que há uma simplificação para a notação padrão, ela é obtida através da introdução de variáveis artificiais de modo a: limitar as variáveis de projeto a valores exclusivamente positivos; inserir variáveis de folga de modo a transformar as restrições de desigualdade em restrições de igualdade.

Deste modo é possível tratar apenar problemas na formulação padrão sem perda de generalidade, de fato, os métodos da programação linear adereçam o problema na formulação padrão.

Devido à linearidade da função objetivo, pode-se garantir que a solução ótima encontra-se no limite da região viável, o que facilita a sua busca. Baseado nesta propriedade Dantzig (1953) criou o método SIMPLEX para resolução de problemas lineares.

A princípio o problema poderia ser abordado de modo a elencar todos os elementos da região viável e compará-los. Entretanto em geral se lida com problemas com um

número grande de soluções viáveis, o método SIMPLEX consiste em um algoritmo que busca na fronteira da região viável o melhor ponto existente através do algoritmo apresentado na Figura 29:

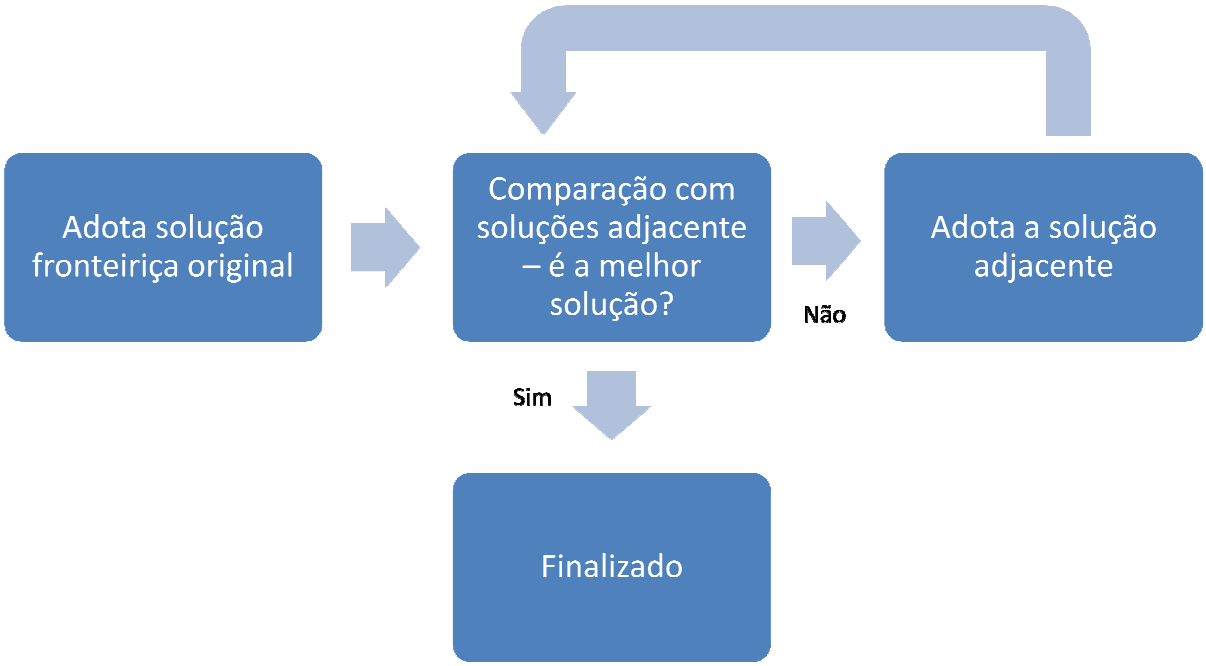

Figura 28 - Algoritmo SIMPLEX

Note que devido à busca restringir-se às soluções imediatamente adjacentes, o método SIMPLEX pode chegar a um ótimo local, dependendo da solução inicial adotada.

Para o caso específico do dimensionamento de regiões D existem diferentes possibilidades de aplicação do método. A seguir é exposto um método geral e simples para a aplicação da programação linear:

De modo geral as restrições impostas podem ser definidas por:

- Equilíbrio dos nós;
- Armaduras máximas e mínimas nos tirantes;
- Esforços máximos e mínimos nas bielas.

As armaduras máximas e mínimas nos tirantes podem ser traduzidas em termos de esforços facilmente através da equação:

$$N = f_{yd} \cdot A_s \tag{5.7}$$

Onde N é a normal atuante no tirante analisado.

O equilíbrio de um nó genérico pode ser formulado através do equilíbrio de forças em duas direções não coincidentes, de modo a facilitar a análise são adotadas as direções horizontal e vertical.

A Figura 29 ilustra um nó onde convergem *NB* barras e submetido à *NF* forças externas:

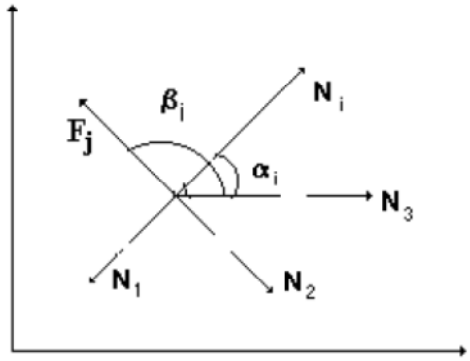

Figura 29 - Equilíbrio no nó

O equilíbrio de forças pode ser formulado como:

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \cdot \cos \alpha_i + \sum_{j=1}^{NF} F_j \cdot \cos \beta_j = 0 \tag{5.8}$$

$$\sum_{i=1}^{NB} N_i \cdot \operatorname{sen} \alpha_i + \sum_{j=1}^{NF} F_j \cdot \operatorname{sen} \beta_j = 0 \tag{5.9}$$

Sobre as limitações de esforços nos tirantes, deve-se impor:

$$N_i = f_{yd} \cdot A_{s,i} \leq f_{yd} \cdot A_{s,max} = N_{i,max} \tag{5.10}$$

$$N_i \geq 0 \tag{5.11}$$

Onde a primeira equação limita a tração máxima no tirante em função da área máxima de aço desejada no tirante e a segunda equação limita que os tirantes trabalhem somente à tração.

Da maneira análoga, para uma biela os esforços são limitados por:

$$N_i \leq 0 \tag{5.12}$$

Buscando-se generalidade na definição do problema, é conveniente considerar todas as barras como possíveis tirantes ou bielas, utilizando-se a formulação:

$$N_i = N_{T,i} + N_{E,i} \tag{5.13}$$

Onde:

N_i é o esforço na barra i;

$N_{T,i}$ é a parcela referente ao comportamento de tirante na barra i;

$N_{B,i}$ é a parcela referente ao comportamento de biela na barra i.

Deve-se notar que $N_{T,i}$ e $N_{B,i}$ não são diferentes de zero simultaneamente, ou seja apenas um tipo de comportamento está ativo para cada barra.

Supondo-se uma geometria fixa e como objetivo uma estrutura de menor custo, a função objetivo é definida por:

$$F = \sum_{i=1}^{NT} A_{s,i} \cdot l_i \tag{5.14}$$

Onde:

F é a função custo, referente ao volume de aço consumido na estrutura;

NT é o número de tirantes;

$A_{s,i}$ é a área de aço do tirante i;

l_i é o comprimento do tirante i.

Tomando-se a tensão de trabalho dos tirantes como igual à de escoamento do aço, a função objetivo pode ser reescrita como:

$$F = \sum_{i=1}^{NT} \frac{N_i}{f_{yd}} \cdot l_i \tag{5.15}$$

Desta forma todas as restrições e a função objetivo são lineares em termos de N_i, note-se que a função objetivo é semelhante àquela proposta por Schlaich, Schäfer e Jennewein (1987):

$$\sum F_i l_i \varepsilon_i \tag{5.16}$$

Os resultados obtidos considerando-se estas diferentes funções objetivo são semelhantes, entretanto conceitualmente possuem diferenças importantes já que a primeira trata do peso de aço e a segunda da energia de deformação absorvida pela estrutura.

5.3.2 Programação não linear

A programação não linear trata dos problemas não lineares (ver item 5.2), devido às próprias hipóteses dos métodos é natural classificá-los entre métodos restringidos e não restringidos.

5.3.2.1 Métodos não restringidos

Os métodos aplicáveis a problemas não restringidos possuem uma estrutura geral similar:

$$x^{k+1} \approx x^k + \lambda^k d^k \tag{5.17}$$

Sendo:

x^k o vetor de variáveis de projeto no passo k;

x^{k+1} o vetor de variáveis de projeto no passo k+1;

λ^k o passo de cálculo;

d^k a direção de busca do ponto ótimo.

Os métodos se diferenciam principalmente pela forma de determinação da direção d^k, em geral a definição da direção de busca do ponto ótimo se dá através do cálculo de derivadas da função objetivo ou através de aproximações numéricas.

A ordem da derivada utilizada caracteriza o método como métodos de ordem um, de ordem dois ou de ordem superior. Há ainda casos que utilizam a própria função objetivo na definição de d^k, nomeados métodos de ordem zero.

5.3.2.2 Métodos restringidos

Os métodos restringidos buscam de forma geral tratar as restrições de modo que o problema possa ser analisado como um problema não restringido. A forma mais direta de realizar isso é se valendo de funções de penalização, de forma geral a penalização pode ser formulada como:

$$\min_{x} P(x) \tag{5.18}$$

Onde:

$$P(x,\rho,\beta) = f(x) + \sum_{j=1}^{p} \rho_j {h_j}^2(x) + \sum_{j=1}^{q} \beta_j {h_j}^2(x) \tag{5.19}$$

Onde os fatores de penalização ρ e β são dados por:

$$\rho_j \gg 0$$

$$x^{k+1} \approx x^k + \lambda^k d^k \tag{5.20}$$

$$\text{E } \beta_j = \begin{cases} 0, se\ g_j(x) \leq 0 \\ \mu_j \gg 0, se\ g_j(x) > 0 \end{cases} \tag{5.21}$$

5.4 Métodos Heurísticos

Embora forneçam soluções sem um limite formal de qualidade, os métodos heurísticos, ou em algumas fontes nomeados como probabilísticos, são interessantes para algumas classes de problemas.

Casos em que muitas das variáveis são discretas e muitas das funções envolvidas no problema não apresentam o comportamento exigido por outros métodos

computacionais (como linearidade, continuidade ou existência de derivada até uma dada ordem), empecilhos estes que podem ser mais facilmente contornados pelas heurísticas.

Dentro das heurísticas pode-se ainda definir uma subdivisão, a computação natural, sua classificação se deve apenas à analogia com fenômenos observáveis na natureza, não havendo do ponto de vista matemático diferença no rigor das soluções obtidas. Entre os algoritmos de computação natural mais comumente encontrados temos o recozimento simulado, computação evolucionária (em especial algoritmos genéticos) e redes neurais artificiais. Abaixo algumas dos métodos heurísticos

5.4.1 Autômato Celular

O autômato celular não foi concebido como uma heurística de otimização, na verdade não foi concebido como um processo e sim como um modelo para estudo de crescimento de cristais e posteriormente aplicado no estudo de problemas em diversos campos do conhecimento.

Ele consiste basicamente de uma malha de células em um espaço n-dimensional que podem ter um número finito de estados, no caso mais simples sim e não, ou ligado e desligado.

A partir de uma dada célula delimita-se um conjunto chamado vizinhança, esta vizinhança pode ou não incluir a própria célula e um número de células vizinhas. A partir de um estado inicial (t=0) com um conjunto de células com seus estados definidos é definida a próxima etapa (t=1) para cada célula, baseada na sua vizinhança na etapa anterior.

A regra para o avanço de etapa, que define o novo estado de cada célula é fixa e em geral uma função ou regra matemática envolvendo a vizinhança.

5.4.2 Recozimento simulado

O recozimento simulado baseia-se na analogia entre o processo cíclico de aquecimento e resfriamento controlado de um metal, aplicado na metalurgia, com o problema de otimização.

O processo metalúrgico busca através destes ciclos progressivamente formar cristais de dimensões cada vez maiores, visando a produção de um material com menos defeitos. Durante o resfriamento controlado espera-se que os átomos do metal busquem uma condição de energia mínima, o que se traduz em cristais de dimensões maiores.

O algoritmo meta-heurístico foi proposto inicialmente por Metropolis et al (1953) e caracteriza-se pela seguinte analogia:

A função custo do problema real equivale à função nível de energia do sistema do problema análogo, o algoritmo proposto admite o aumenta da temperatura entre passos subsequentes o que se traduz em uma forma de contornar ótimos locais.

Os parâmetros do problema real são equivalentes aos átomos do metal do problema análogo. A cada passo do algoritmo é atribuído a estes átomos uma nova condição de energia aleatória (E_{i+1}) e consequentemente uma variação de energia (ΔE), se a energia em um passo for menor do que a do passo anterior ($E_{i+1} < E_i$), entende-se que o átomo passou para uma configuração de energia menor e a nova posição é aceita, por outro lado se a energia de um passo for maior do que a do passo anterior ($E_{i+1} > E_i$), a nova condição é aceita ou não de acordo com a probabilidade:

$$P(\Delta_E) = e^{\left(\frac{-\Delta_E}{k_B \cdot T}\right)} \tag{5.22}$$

Esta probabilidade é confrontada com um número aleatório no intervalo fechado entre 0 e 1, se o número aleatório for menor que a probabilidade a condição é aceita, caso contrário o átomo mantém sua posição anterior.

A temperatura T não possui equivalente no problema real, caracterizando-se como um parâmetro de controle, o coeficiente de Boltzman (k_B) também não possui equivalente no problema real, sendo um parâmetro de escala. Como este último faz parte do algoritmo como um multiplicador da temperatura e esta é um parâmetro de controle, ele é usualmente admitido como unitário.

O processo do recozimento simulado é análogo por sua vez ao algoritmo do problema real. O algoritmo eleva a temperatura do sistema e o resfria progressivamente. A cada nova temperatura, um número de rearranjos dos átomos é gerado (ou um número de configurações de variáveis do problema real) até que se atinja uma condição de equilíbrio.

Um algoritmo de recozimento simulado básico se caracteriza da seguinte forma (neste exemplo supõe-se que a busca é pelo ponto de mínimo):

Sendo:

- x o vetor de variáveis correspondente à solução atual;
- x^* o vetor de variáveis correspondente à melhor solução encontrada;
- $f(X)$ a função objetivo;
- T_0 a temperatura inicial;
- T a temperatura atual;
- P um número real gerado aleatoriamente em $[0,1]$.

Têm-se os seguintes passos:

1. Atribuir a x uma solução inicial qualquer;
2. Tomar $x^* = x$;
3. Definir uma temperatura inicial T_0;
4. Verificar se alguma das condições de parada foi atingida:

a. Se verdadeiro, interromper a rotina;

b. Se falso, prosseguir para o passo 5;

5. Tomar um ponto x' vizinho a x;

6. Cálcular $\Delta E = f(x') - f(x)$;

7. Verificas se $\Delta E < 0$:

   a. Se verdadeiro, tomar $x = x'$ e retornar ao passo 5;

   b. Se falso, gerar um número aleatório p' entre 0 e 1 e verificar se $p' < \boldsymbol{e}^{\left(\frac{-\Delta_E}{k_B \cdot T}\right)}$:

      i. Se verdadeiro, tomar $x = x'$ e retornar ao passo 5;

      ii. Se falso, x se mantém, seguir para passo 8;

8. Atualizar a temperatura T e retornar ao passo 4.

5.4.3 Algoritmos genéticos

Algoritmos genéticos baseiam-se na analogia entre a busca pela solução ótima com o processo da seleção natural observado na biologia evolutiva. Além disso, se valem de conceitos de genética para simular a reprodução e evolução de uma população.

6 Metodologia – Aplicação a elementos de concreto armado

A metodologia proposta para a aplicação de qualquer um dos métodos (MEF ou MBT) para o dimensionamento de estruturas de concreto armado é semelhante, podendo ser resumida conforme a Figura 30.

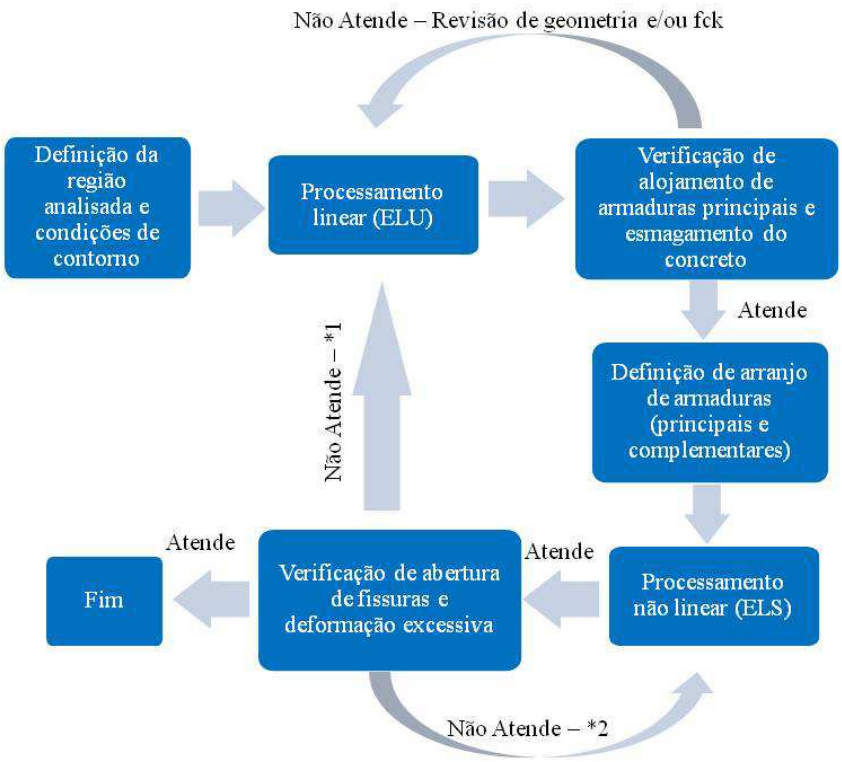

Figura 30 - Fluxograma para o dimensionamento de regiões D

Onde:

- *1 se refere à fissuração excessiva na região da armadura principal, neste caso deve ser alterada a geometria da peça. No caso de deformação excessiva, de forma geral, deve ser revista a geometria de peça;

- *2 se refere à fissuração excessiva devida ao cisalhamento ou ao fendilhamento por compressão, neste caso devem ser revistas as armaduras limitantes de fissuração.

Conforme exposto no Capítulo 1 o presente trabalho discute os métodos de dimensionamento, adotando portanto uma abordagem através da análise linear. Sendo a utilização da otimização topológica como forma de definição dos modelos MBT o ponto focal.

Os estudos realizados basearam-se em dois artigos educacionais publicados por Sigmund (2001) e Andreassen et al (2011): "*A 99 line topology optimization code written in Matlab*" e "*Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code*", respectivamente.

Os artigos consistem na exemplificação e exposição de um código para o software "Matlab" que realiza a otimização topológica de uma malha bidimensional sujeita a determinadas condições de contorno. Em linhas gerais, seguindo o artigo de Sigmund o código é composto pelas seguintes partes:

1. Programa principal;
2. Otimizador baseado no critério de "otimalidade";
3. Filtro (independência de malha ou discretização);
4. Código de elementos finitos.

6.1 Problema inicial abordado

A abordagem inicial trata da resolução do problema de otimização de um domínio retangular sujeito a condições de contorno prescritas, em particular o código original

trata de uma viga biapoiada sujeita a uma carga concentrada no centro do vão. Valendo-se da condição de simetria o problema pode ser simplificado conforme a Figura 31

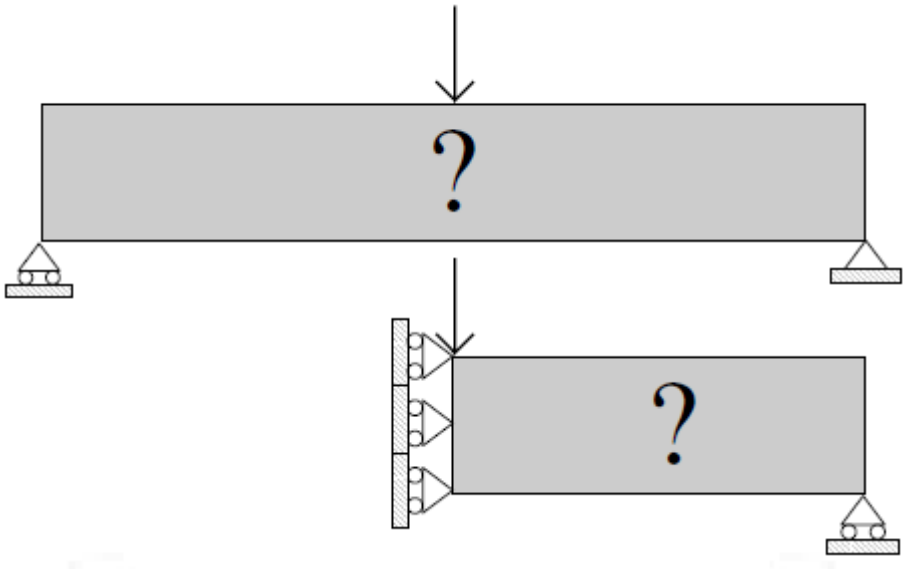

Figura 31 - Problema inicial abordado

São prescritos ao problema a discretização deste domínio em elementos quadrados em uma malha de *nelx* elementos na horizontal por *nely* elementos na vertical. A utilização de elementos quadrados é utilizada com o intuito de simplificar a numeração de elementos e nós bem como da matriz de rigidez e sua alocação.

O material considerado é isótropo e o problema consiste na alocação de material a cada um dos elementos. Esta densidade localizada de cada elemento é limitada por uma restrição à densidade global do domínio.

A densidade alocada a cada elemento influência sua rigidez modificando o módulo de elasticidade através da relação:

$$E_e(x_e) = E_{min} + {x_e}^p(E_0 - E_{min}) \tag{6.1}$$

Onde:

x_e é a densidade do elemento *e*, variando entre 0 e 1;

p é uma constante de penalização;

E_0 é o módulo de elasticidade original do material;

E_{min} é um valor extremamente baixo para o módulo de elasticidade porém diferente de 0 de modo a evitar singularidades no processamento.

O fator de penalização usualmente é tomado como 3 e tem a função de direcionar as soluções para “preto-e-branco”, isto é, busca-se na estrutura otimizada elementos com os valores próximos a 0 ou a 1.

6.2 Otimização

O processo de otimização utilizado no algoritmo busca maximizar a rigidez da estrutura com a restrição de densidade:

$$\min_{\mathrm{x}} \mathrm{c(x)} = U^{\mathrm{T}}\mathbf{K}U = \sum_{\mathrm{e=1}}^{\mathrm{N}} \mathrm{E_e(x_e)} u_e{}^{\mathrm{T}}\mathbf{k}_0 u_e \tag{6.2}$$

Sujeito a:

$$\frac{\mathrm{V(x)}}{\mathrm{V_0}} = \mathrm{f} \tag{6.3}$$

$$\mathbf{K}\boldsymbol{U} = F \tag{6.4}$$

$$0 \leq x \leq 1 \tag{6.5}$$

Sendo:

c(x) a função flexibilidade;

x o vetor de variáveis de projeto;

U o vetor de deslocamentos global;

K a matriz de rigidez global;

F o vetor de forças global;

N o número de elementos em que foi discretizado o domínio (para a malha retangular é igual a $nelx \times nely$);

e o índice do número do elemento;

u_e o vetor de deslocamentos do elemento e;

$\mathbf{k}_0$ a matriz de rigidez para um elemento e considerando-se o módulo de elasticidade unitário;

V(*x*) o volume de material empregado;

V_0 o volume total do domínio;

f a fração do volume preenchido com material, prescrito.

O problema exposto pode ser resolvido por diferentes abordagens, Sigmund (2001) sugere a utilização do critério de otimalidade por sua simplicidade, conforme elaborado por Bendsøe (1995)

$$x_e = \begin{cases} max(0, x_e - m)\,, se\ x_e {B_e}^{\eta} \leq max(0, x_e - m) \\ x_e {B_e}^{\eta}, se\ \ max(0, x_e - m) < x_e {B_e}^{\eta} < min(1, x_e + m) \\ min(1, x_e + m)\,, se\ \ min(1, x_e + m) \leq x_e {B_e}^{\eta} \end{cases} \tag{6.6}$$

Sendo:

m o limite de variação da densidade (positivo);

η o coeficiente de decaimento;

B_e o coeficiente ponderador:

$$B_e = \frac{-\frac{\partial c}{\partial x_e}}{\lambda \frac{\partial V}{\partial x_e}} \tag{6.7}$$

Com:

λ um multiplicador lagrangiano encontrado por algoritmo de bisseção;

As derivadas parciais indicadas acima são relativamente simples e são dadas por:

$$\frac{\partial c}{\partial x_e} = -p(x_e)^{p-1}(E_0 - E_{min}){u_e}^T k_0 u_e \tag{6.8}$$

$$\frac{\partial V}{\partial x_e} = 1 \tag{6.9}$$

Considerando-se que cada elemento tenha volume unitário.

6.3 Filtro

Somado ao processo de otimização, Sigmund (2001) propõe a utilização de um filtro para a independência de refinamento da malha, que embora não garanta matematicamente a existência de uma solução, segundo o artigo foi exaustivamente testada e apresenta resultados satisfatórios. Este filtro atua modificando a derivada parcial (ou sensibilidade) da função objetivo em relação à densidade de cada elemento através de:

$$\frac{\widehat{\partial c}}{\partial x_e} = \frac{1}{\max\,(\gamma, x_e)\sum_{i=1}^{N_e} H_{ei}} \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei}\, x_i \frac{\partial c}{\partial x_i} \tag{6.10}$$

Sendo o coeficiente ponderador H_{ei} dado por:

$$H_{ei} \leq \begin{cases} r_{min} - dist(e,i) \\ 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

Onde:

dist(e,i) é a distância entre o centro do elemento *e* e o centro do elemento;

N_e é o número total de elementos;

r_{min} é o raio do filtro;

γ é uma constante positiva e pequena (10^{-3}) introduzida para evitar a divisão por zero.

Alternativamente ao filtro que modifica a sensibilidade da função objetivo em relação à densidade do elemento, é possível empregar um filtro que atua diretamente na densidade:

$$\tilde{x}_e = \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_e} H_{ei}} \sum_{i=1}^{N_e} H_{ei} x_i \tag{6.12}$$

Este tipo de filtro apresenta alguns inconvenientes em relação ao anterior, pois passam a coexistir duas densidades para cada elemento: uma densidade virtual, x_e, correspondente à variável do problema de otimização de fato e uma densidade "física", $\tilde{x}_e$, correspondente à densidade após a aplicação do filtro.

Ao ser empregado o filtro de densidades as derivadas parciais discutidas anteriormente passam a ser modificadas pela regra da cadeia, onde a derivada parcial da densidade física em relação à variável de projeto é dada por:

$$\frac{\partial \tilde{x}_e}{\partial x_j} = \sum_{e=1}^{N_j} \frac{1}{\sum_{i=1}^{N_e} H_{ei}} H_{je} \tag{6.13}$$

6.4 Adaptação para materiais diferentes submetidos à tração ou compressão (comportamento dual).

A adaptação para a representação do concreto armado, ou seja, incorporando a diferença entre as propriedades mecânicas do material sujeito à tração ou compressão pode ser abordada conforme proposto por Victoria, Martí e Querin (2009) que baseia-se na premissa de Dewhurst (2005) de que a estrutura ótima, do ponto de vista da eficiência de máxima rigidez e mínimo custo (volume, peso ou qualquer outro ponderador) é obtida quando todos os elementos apresentam uma relação constante entre tensões dada por:

$$k = \frac{{\varepsilon_T}^*}{{\varepsilon_C}^*} = \sqrt{\frac{\rho_T E_C}{\rho_C E_T}} \tag{6.14}$$

Sendo:

k a razão entre deformações, idealmente constante em toda a estrutura;

${\varepsilon_T}^*$ a deformação máxima de tração na estrutura;

${\varepsilon_C}^*$ a deformação máxima de compressão na estrutura;

ρ_T o ponderador do material tracionado (massa, peso ou custo por exemplo);

ρ_C o ponderador do material comprimido (massa, peso ou custo por exemplo);

E_T o módulo de elasticidade do material tracionado;

E_C o módulo de elasticidade do material comprimido.

Deve ser incorporado ao processamento da estrutura a cada passo da otimização o cálculo das deformações em cada elemento, de modo que se possa avaliar a que situação cada um está sujeito. O fator k é utilizado então para multiplicar as componentes de deformação de compressão, modificando o campo de deformações.

Ao incorporarmos esta mudança artificial no comportamento da estrutura deve-se tomar o cuidado de modificar também as matrizes de rigidez de cada elemento, no caso geral a análise dos elementos deverá ser ortótropa, uma vez que podem estar sujeitos a deformações de compressão em uma direção e tração na outra. Neste caso há três situações possíveis:

- O elemento esta totalmente sujeito à compressão, caso em que é atribuído a ele as propriedades do material comprimido (concreto);
- O elemento está totalmente sujeito à tração, caso em que é atribuído a ele as propriedades do material tracionado (aço);
- O elemento está submetido à tração em uma das direções e compressão na outra, caso em que é atribuído a ele as propriedades de um material ortótropo.

A estratégia utilizada computacionalmente foi de criar uma matriz auxiliar de mesma dimensão da malha de elementos onde direção principal de maior tração do elemento é armazenada a cada passo, variando de $-\frac{\pi}{2}$ a $\frac{\pi}{2}$. Adicionalmente caso o elemento esteja exclusivamente tracionado está variável toma o valor de 2 e caso esteja exclusivamente comprimido toma o valor de -2.

6.5 Dimensionamento através do MEF

O dimensionamento através do MEF baseou-se na teoria exposta no item 4.4, através do conjunto de equações (4.8), (4.9) e (4.11). A fim de apresentar um dimensionamento aplicável e coerente com os comparativos, cada sub-região de interesse dentro das Regiões D foi analisada isoladamente e dentro destas sub-regiões foi determinada a armadura para cada elemento isoladamente.

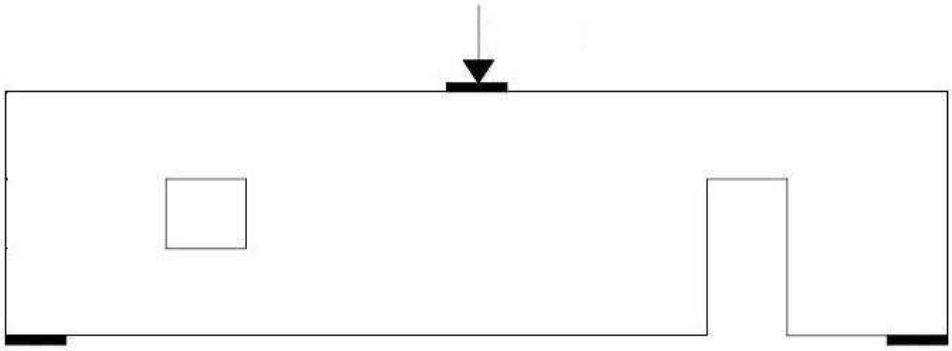

Figura 32 - Região D analisada

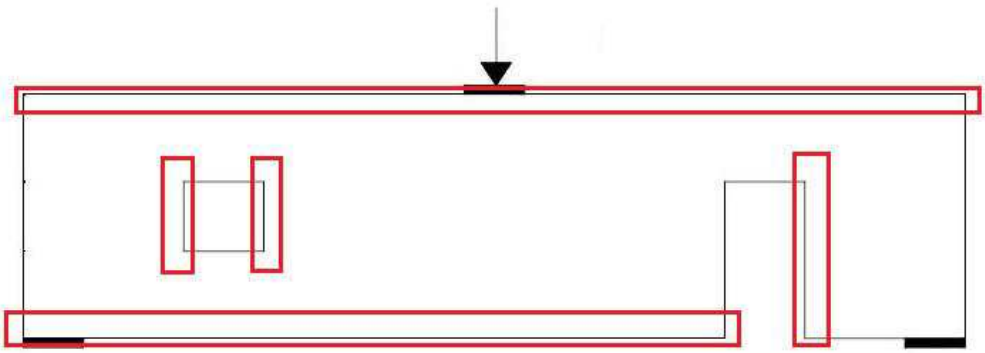

Figura 33 - Algumas sub-regiões dentro da Região D

As sub-regiões de forma geral representam trechos com um comportamento semelhante, no caso de haver um MBT paralelo, as sub-regiões podem caracterizar barras deste modelo.

O ângulo θ adotado para o dimensionamento foi mantido constante dentro de cada sub-região por simplicidade, embora em alguns casos esta consideração pudesse levar a dimensionamentos antieconômicos, o ângulo de cada sub-região foi definido tendo em vista os elementos mais solicitados, que dominam o dimensionamento.

Após a definição das armaduras necessárias em cada elemento, a armadura especificada em cada direção ($A_{s,detx}, A_{s,dety}$) é dada pela média entre a armadura obtida para cada elemento em cada direção, desprezando-se os valores inferiores à 50% do maior valor observado.

Para as tensões de compressão atuantes no concreto procedimento similar foi empregado, sendo a tensão considerada aquela oriunda da equação (4.11).

7 Estudos de caso

7.1 Sensibilidade dos parâmetros de otimização

A partir da análise do problema isótropo, conforme proposto por Sigmund (2001) e Andreassen et al (2011) são propostos os parâmetros a serem fixados nas análises posteriores:

- Relação entre altura x comprimento do semivão: deve respeitar a razão 1:2 ou menor de modo que todo o domínio analisado possa ser considerado de fato uma Região D devido às perturbações provocadas pela aplicação de forças concentradas e dos apoios. Entretanto deve se notar que para os estudos comparativos é admissível uma relação maior devida à presença de outros tipos de perturbações

- Raio do filtro rmin: Andreassen et al (2011) sugere a utilização de filtro com raio igual a 0,04 vezes a largura do domínio estudado, sendo um valor adequado para evitar-se a formação de soluções com o aspecto de tabuleiro de xadrez (*checkerboard effect*), e não sendo demasiadamente grande, o que favorece soluções “preto e branco”, ou seja, mais próximas da definição pela alocação ou não de material no elemento, e não com densidades intermediárias. Além disso, o filtro leva a topologias independentes do refinamento da malha.

- Tipo de filtro: o filtro utilizado foi o atuante na sensibilidade das funções, tanto o filtro de densidades quanto o de sensibilidades apresentam resultados satisfatórios.

- Densidade global do domínio: a relação entre o volume total do domínio e o volume preenchido pela estrutura será fixada em 0,3. Há uma faixa ampla em que o estudo poderia ser desenvolvido, evitando-

se densidades muito pequenas que levam a um número muito elevado de iterações e densidades muito grandes que tornam as regiões entre “barras” demasiadamente cinzas, distanciando o comportamento da estrutura do de treliça e aproximando ao de chapa. A densidade global de 0,3 foi estipulada após experimentações com os exemplos expostos no item 7.2, chegando a resultados com aparência de treliça.

A Figura 34 apresenta o resultado final obtido para uma malha de 50 por 25 elementos.

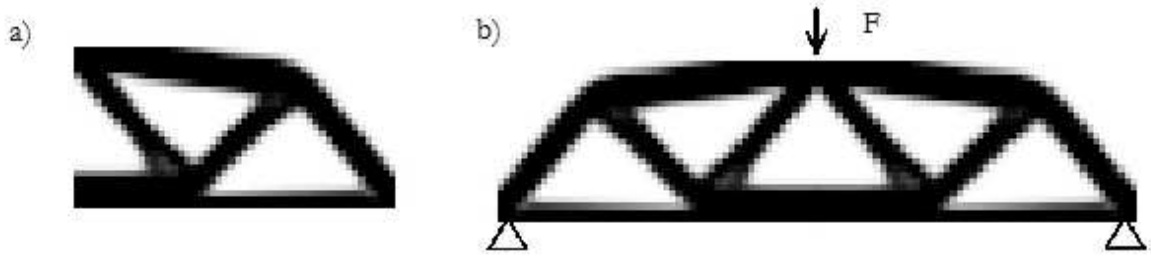

Figura 34 - Resultado para razão 2x1 entre comprimento e altura. a) resultado obtido diretamente da rotina; b) domínio duplicado, interpretação física.

7.2 Comparativo entre MEF, MBT e modelos padronizados.

Buscando comparar as metodologias sugeridas com a prática usual e as recomendações normativas atuais foram dimensionadas Regiões D com sistemática ou recomendações específicas para seu dimensionamento, a exceção é o terceiro exemplo, utilizado para comparar especificamente o MEF com o MBT em uma geometria não usual.

Como hipótese simplificadora foi adotada na modelagem a condição de estado plano de tensões com a largura do elemento estudado. Em todos os exemplos a malha de elementos finitos utilizada é composta por elementos quadrilaterais de 8 nós. A análise foi realizada através do software ANSYS ED.

7.2.1 Consolo

O consolo adotado para o estudo comparativo tem dimensões: b=50cm, a_1=35cm, h=50cm, h_1=25cm e aplicação da carga a 25 cm da face do pilar, conforme figura abaixo:

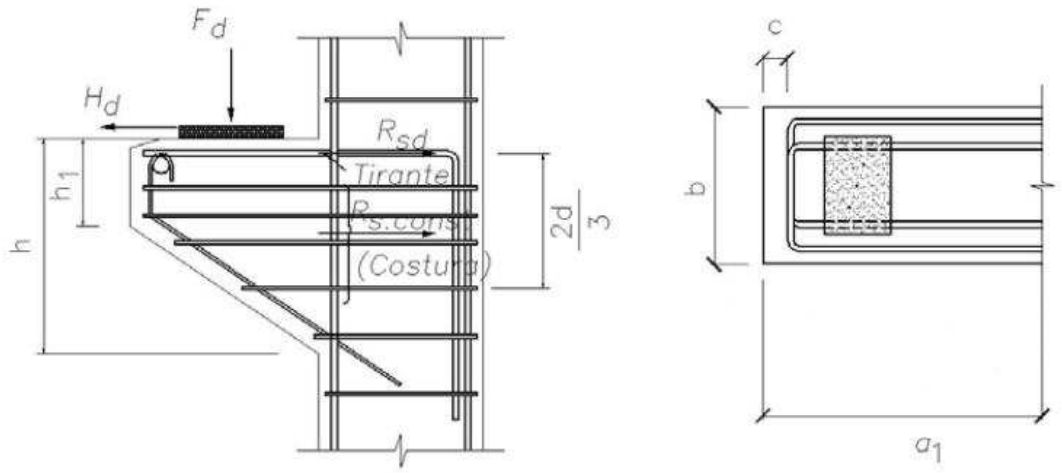

Figura 35 - Geometria do consolo estudado

O consolo está sujeito a um esforço vertical de 600kN e esforço horizontal de 96kN. Com as resistências características dos materiais fck=50MPa e fyk= 500MPa.

O modelo padronizado utilizado é aquele descrito no item 7.3.2 da norma NBR9062/2006, para o dimensionamento através do modelo padronizado foi tomado d=45cm, resultando no dimensionamento como consolo curto (relação $a/d = 0{,}56$).

O modelo padronizado estabelece para a definição da armadura do tirante:

$$A_{s,tir} = A_{sv} + H_d/f_{yd} \tag{7.1}$$

$$\text{Com, } A_{sv} = (0{,}1 + a/d)\, F_d/f_{yd} \qquad (7.2)$$

Para a biela, no caso de carga direta a tensão é limitada por f_{cd} e a armadura de costura é dada por:

$$(A_s/s)_{cost} \geq 0{,}4(A_{sv}/d) \qquad (7.1)$$

E para a armadura transversal deve ser utilizada a armadura mínima de uma viga com dimensões iguais aos do consolo no engastamento.

Na modelagem com elementos finitos a carga foi considerada distribuída ao longo do aparelho de apoio para evitar-se uma concentração irreal de esforços e após estudo de sensibilidade a malha adotada foi de 5x5cm. A figura abaixo representa a malha considerada:

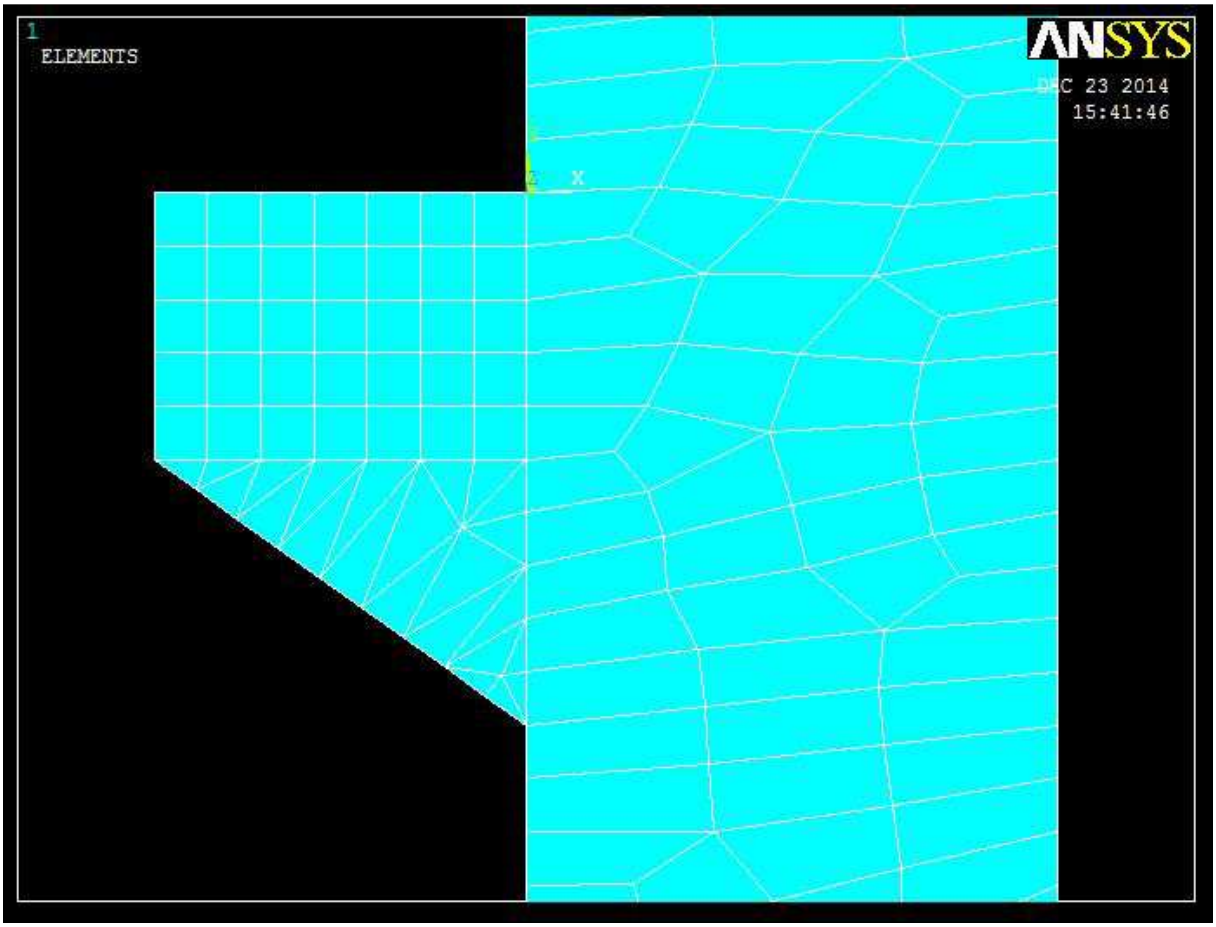

Figura 36 - Malha do Consolo

A figura abaixo apresenta o resultado nodal observado na direção x (horizontal):

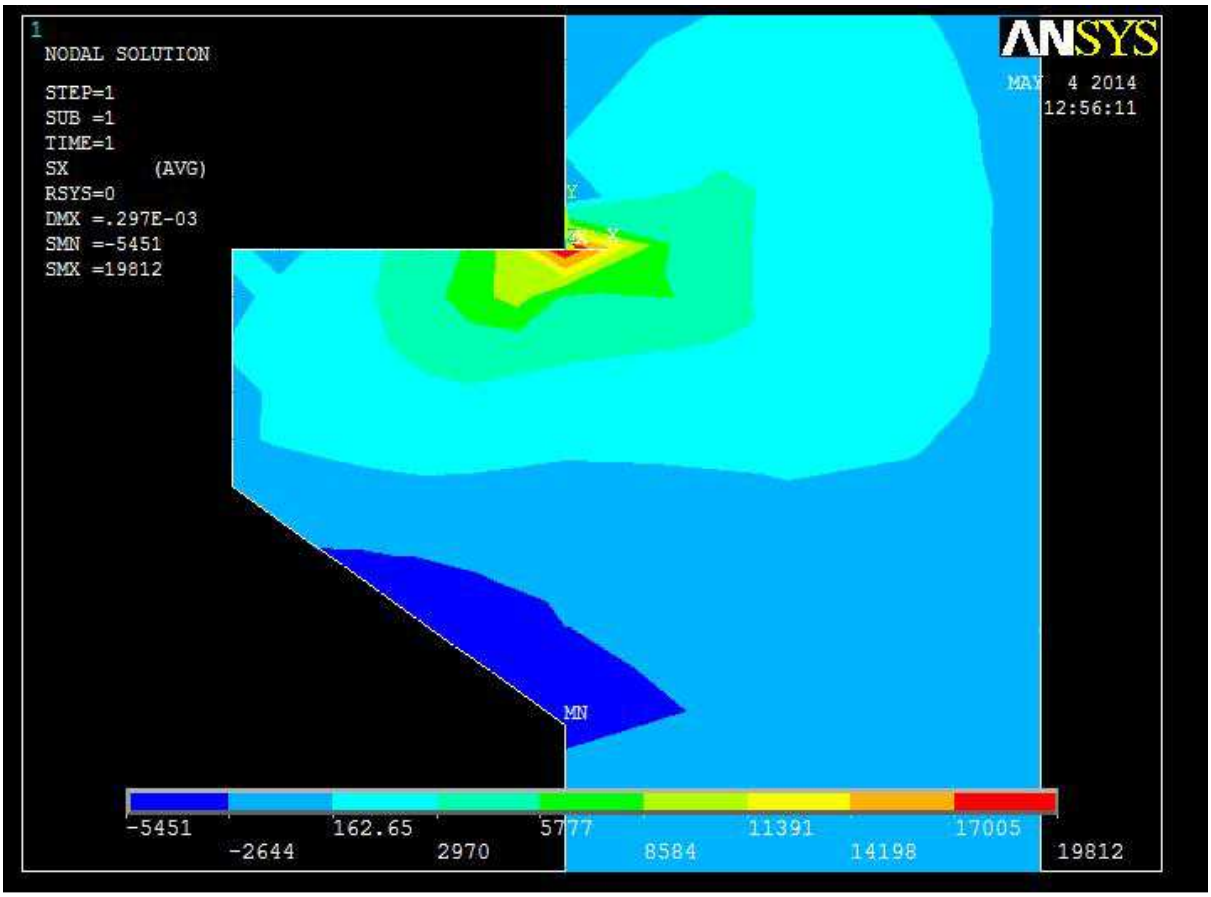

Figura 37 - Tensões observadas no consolo - direção x

E a figura abaixo apresenta o resultado nodal observado na direção y (vertical):

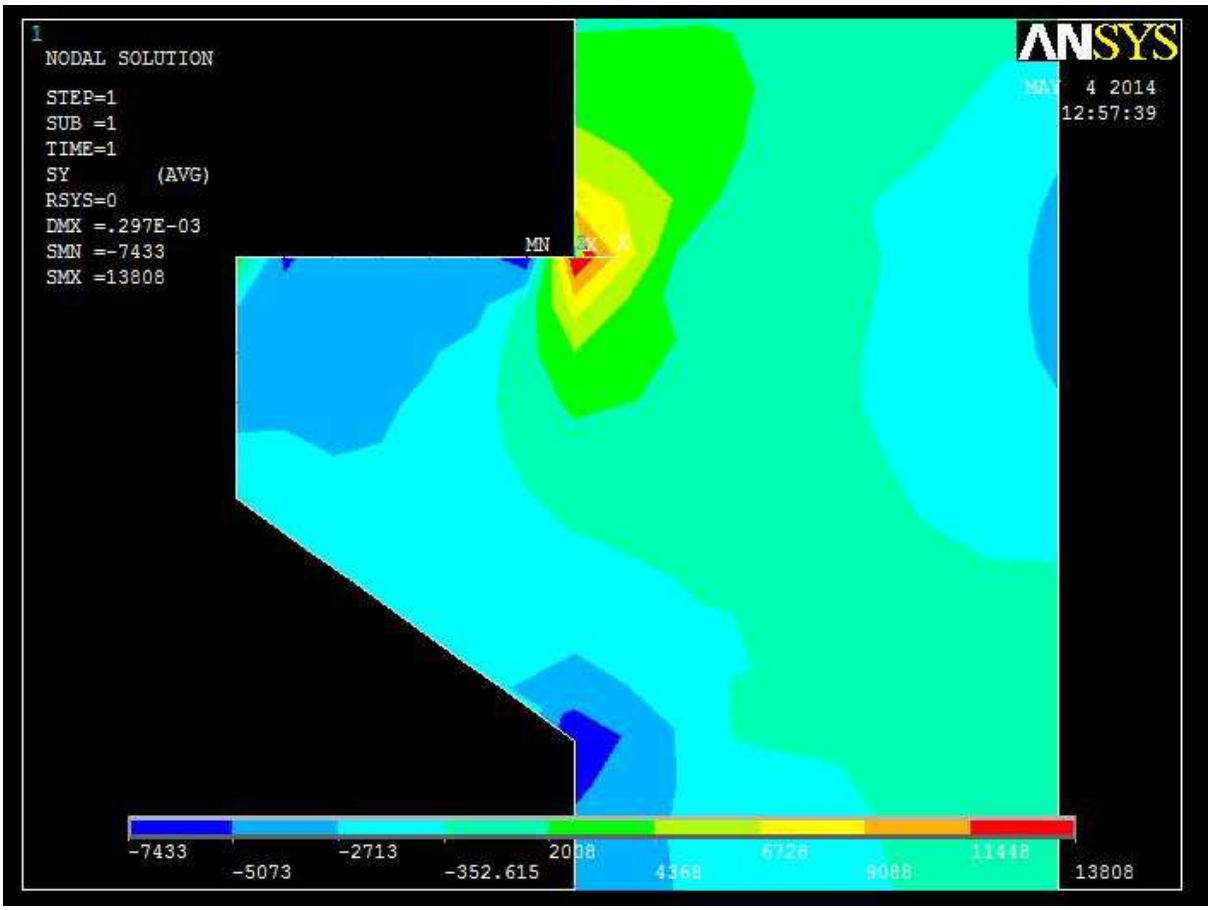

Figura 38 - Tensões observadas no consolo - direção y

A otimização topológica neste caso não seria necessária já que o MBT é bastante claro, entretanto para efeito de estudo foram propostos dois tipos de vinculação, analisando somente o consolo: Apoio móvel na vertical ao longo da interface com o pilar e apoio fixo somente no final da biela; e simulação de engaste ao longo de toda a interface com apoio fixo distribuído.

A Figura 39 ilustra os resultados obtidos, onde nota-se uma diferença significativa na topologia para as duas vinculações propostas.

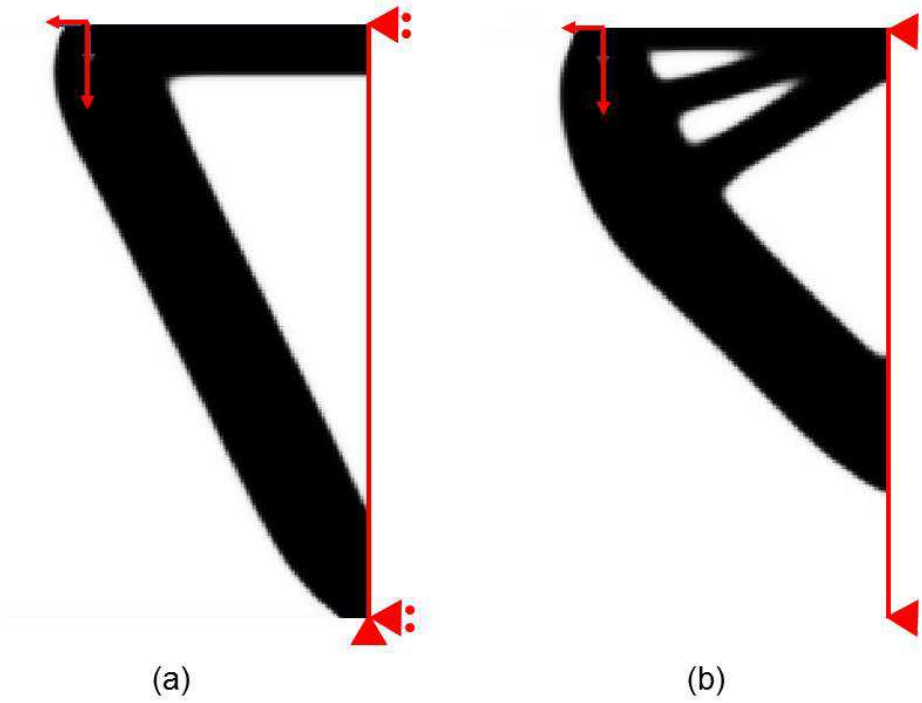

Figura 39 - Resultado da otimização topológica. a) Interface com apoios móveis; b) Interface com apoios fixos.

Em ambas as figuras 39 (a) e (b) a vinculação ao longo da lateral do consolo junto ao pilar são de apoios distribuídos, fixos ou móveis, conforme a representação.

A topologia adotada para o MBT foi aquela com apoios móveis por ser construtivamente mais simples, já que apresenta apenas tirantes horizontais. A topologia obtida com a modelagem com engaste na interface com o pilar apresenta problemas construtivos devido a ancoragem de múltiplos tirantes em um mesmo ponto de fixação, a consideração do tipo de condição de contorno será discutida no Capítulo 8.

Os resultados obtidos encontram-se resumidos na Tabela 2, onde foi adotado como valor balizador o dimensionamento através do modelo padronizado:

Tabela 2 – Estudo comparativo do consolo

		NBR9062	MEF		MBT	
			Resultado	Diferença	Resultado	Diferença
A_s tirante	cm²	11,25	12,18	8%	9,87	-12%
Tensão Limite na Biela	MPa	35,71	35,71	0%	20,57	-42%
Tensão observada na Biela	MPa	4,58	22,30	387%	4,58	0%
A_s transversal	cm²/m	8,04	2,35	-71%	-	-
A_s costura	cm²/m	8,14	13,83	70%	-	-

O MBT apresenta resultados sempre inferiores aos da norma de estruturas pré-fabricadas já que a norma baseia-se no MBT e incorpora armaduras adicionais visando à ductilidade do elemento.

O MEF por sua vez apresenta uma quantidade de aço junto à face superior semelhante da obtida por norma, porém uma maior taxa de armadura de costura devido ao fato da tração horizontal ligando consolo e pilar se distribuir ao longo de uma altura maior no MEF. Por outro lado a armadura transversal que tem função principalmente construtiva é bastante reduzida.

As tensões observadas são bastante superiores, porém ainda dentro da tensão aceitável. A grande diferença se deve à concentração de tensões em alguns elementos próximos ao engaste do pilar, ao passo que o MBT e a norma consideram uma distribuição em uma seção maior de concreto.

Mesmo com o tratamento (homogeneização) de tensões o pico de valores permanece, porém mediante uma avaliação mais cuidadosa ele pode ser considerado como não preocupante, já que há uma grande possibilidade de redistribuição das tensões de compressão.

7.2.2 Viga parede biapoiada

A viga parede adotada para o comparativo baseou-se no trabalho desenvolvido por Souza (2004), trata-se de uma viga parede com vão total de 6m e altura de 2m submetida a duas cargas concentradas nos terços do vão. A princípio analisando apenas a relação altura x vão a peça seria classificada como viga comum, entretanto a introdução dos esforços concentradas a tornam uma Região D em sua totalidade.

A Figura 40 ilustra a geometria e as condições de contorno da viga parede estudada:

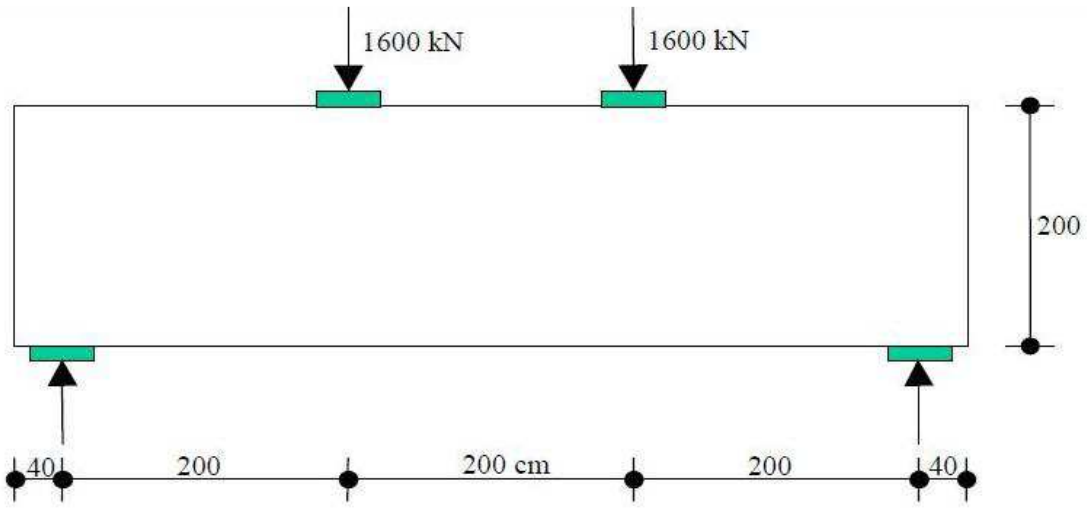

Figura 40 - Viga parede biapoiada

Os parâmetros de resistência considerados foram fck=25MPa e fyk=500MPa, a espessura da viga de 50cm e placas de apoio rígidas com dimensões 0,45x0,5m.

A modelagem para o MEF utilizou uma malha de 10x10 cm e fez uso da simetria do problema para a modelagem apenas do semivão. A figura abaixo representa a malha considerada na discretização bem como as condições de contorno:

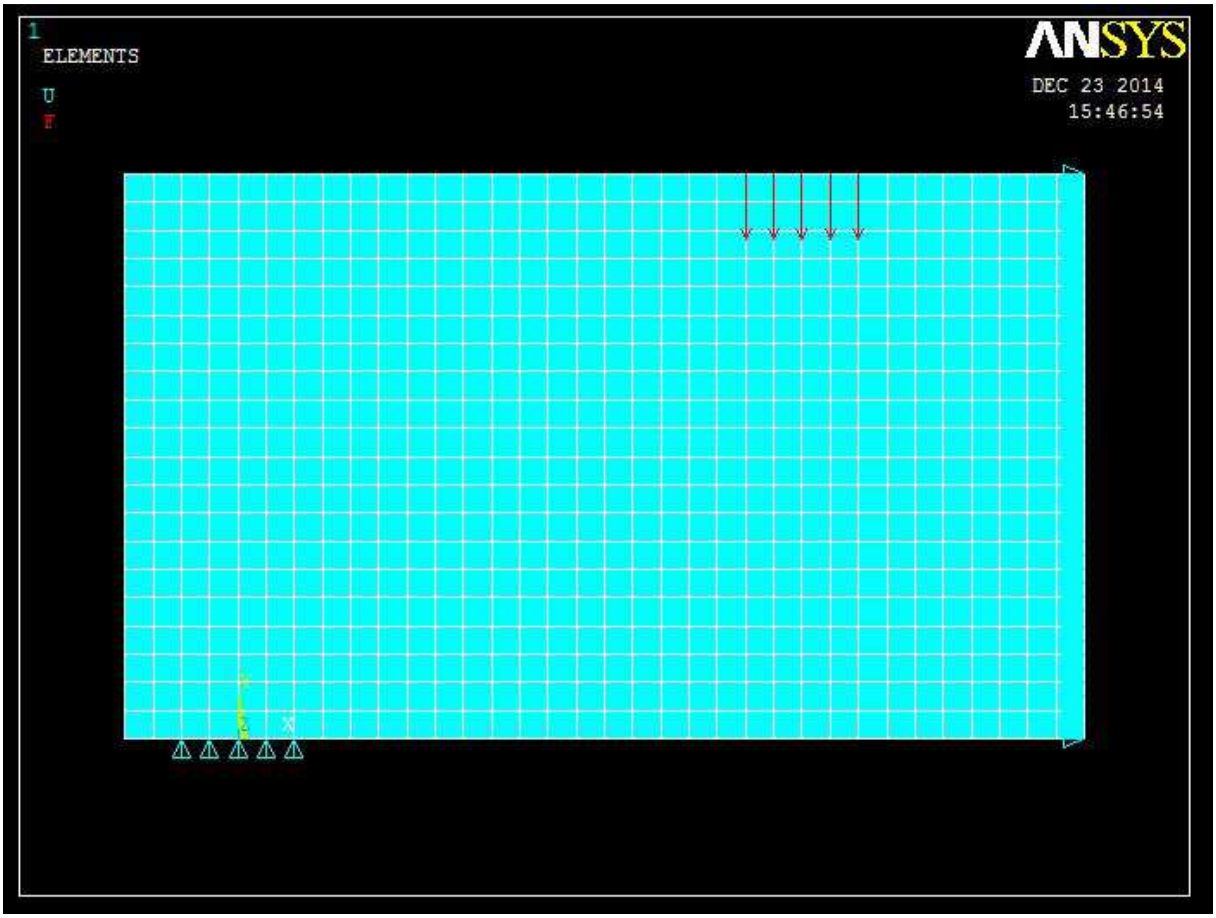

Figura 41 - Malha e condições de contorno da viga parede

A vinculação de apoio restringe exclusivamente a translação vertical (em y) enquanto a simulação do eixo de simetria restringe exclusivamente a translação horizontal (em x)

As figuras abaixo apresentam os resultados obtidos em termos de tensões nodais:

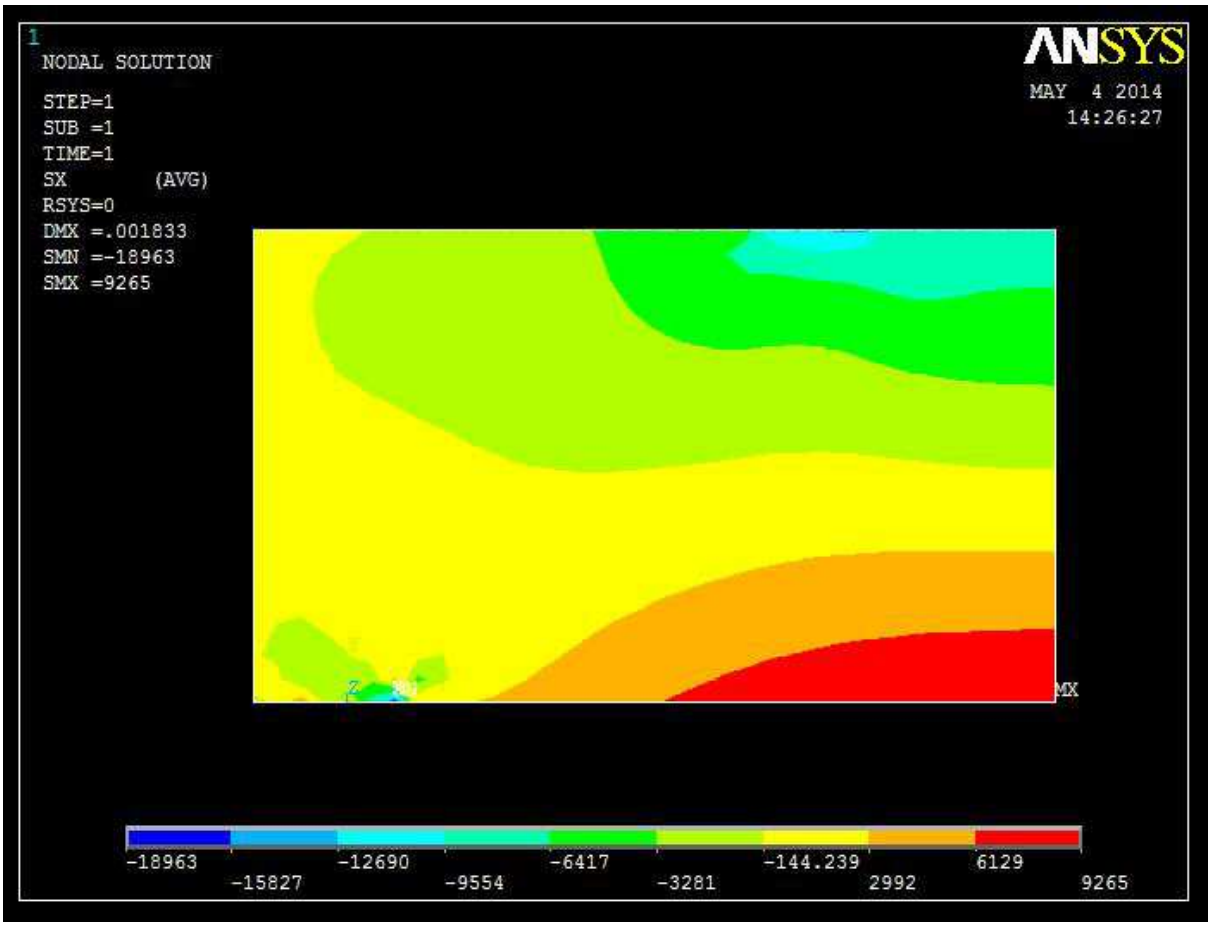

Figura 42 - Tensões observadas na viga parede - direção x

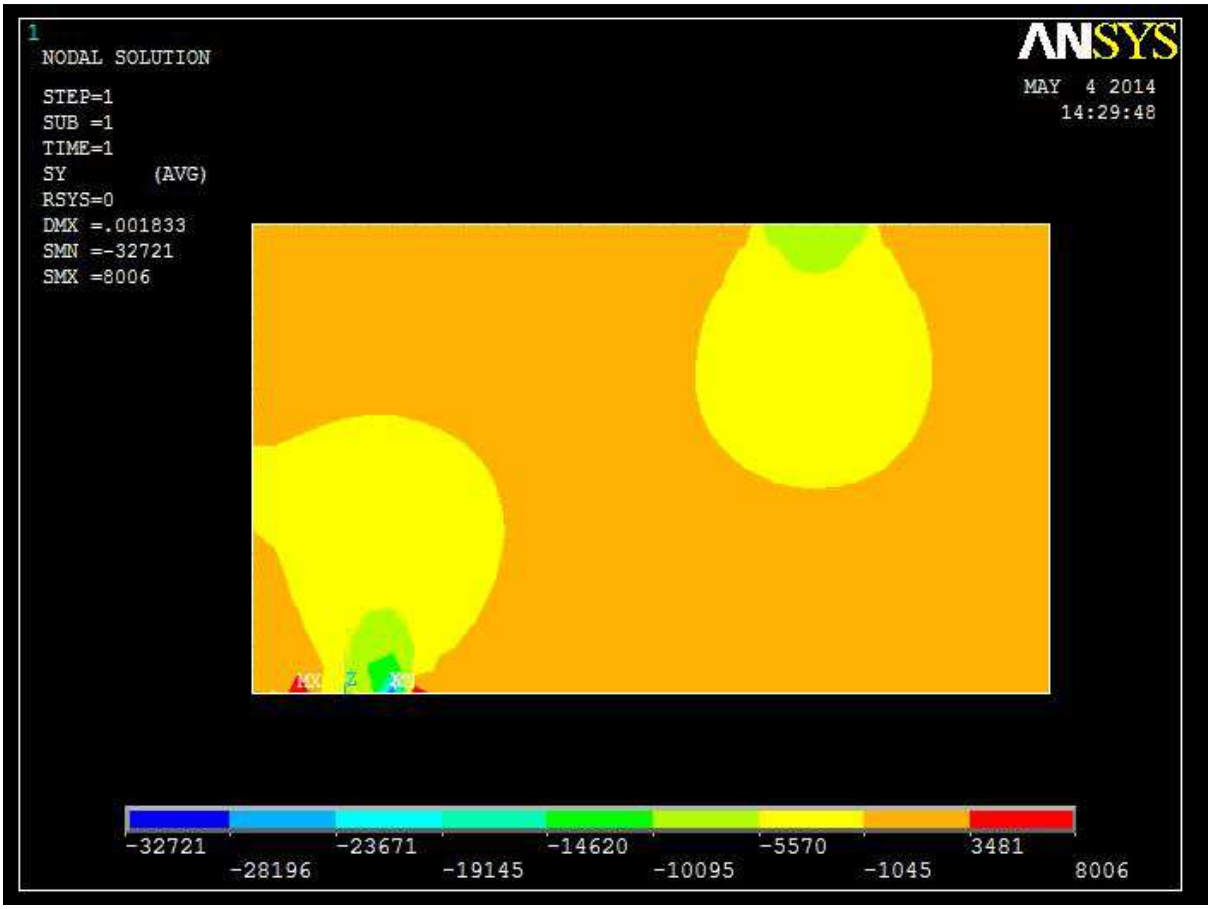

Figura 43 - Tensões observadas na viga parede - direção y

Assim como no exemplo anterior o MBT é claro, sendo formado por bielas inclinadas ligando o ponto de aplicação de cargas ao apoio próximo, uma biela superior e um tirante inferior. Para a otimização topológica também se fez uso da condição de simetria do problema, o resultado obtido esta representado pela Figura 44.

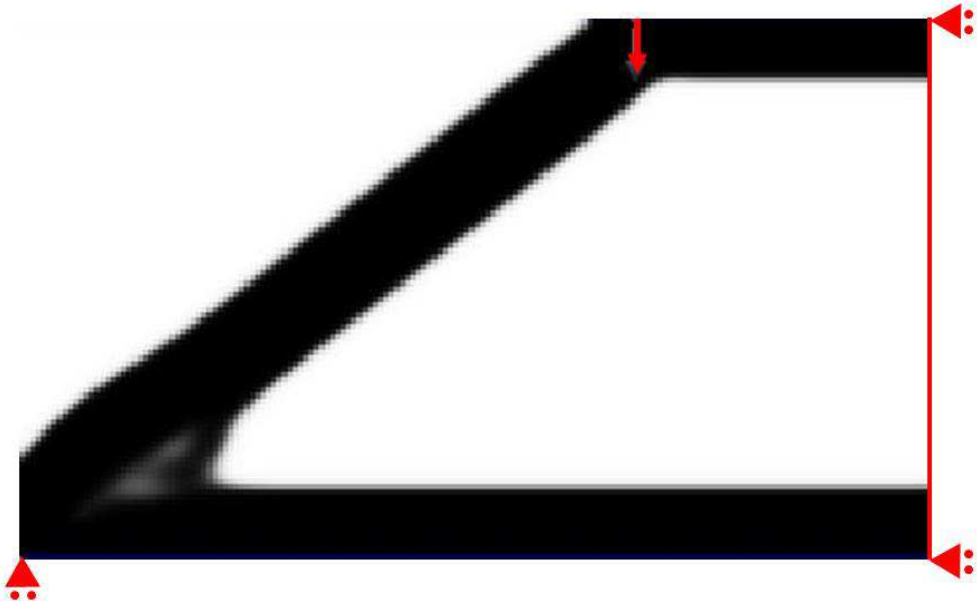

Figura 44 - Resultado da otimização topológica para a viga parede

A NBR6118 sugere a utilização do MBT com recomendações adicionais referentes às disposições das armaduras. Para efeito de comparação, foi considerado também o dimensionamento da viga parede como viga comum, através da teoria do concreto armado.

Os resultados obtidos para a viga parede são apresentados na Tabela 3, onde o valor de referência considerado foi o MBT (recomendado pela norma):

Tabela 3 – Estudo comparativo da viga parede

		NBR6118/MBT	MEF		Viga (NBR6118)	
			Resultado	Diferença	Resultado	Diferença
A_s tirante	cm²	46,00	35,85	-22%	43,96	-4%
A_s vertical	cm²/m	3,75	10,06	168%	12,9	-72%
A_s costelas	cm²/m	3,75	27,51	634%	6,15	-87%
Tensão Limite na Biela Inclinada	MPa	11,57	17,86	54%	-	-
Tensão observada na Biela Inclinada	MPa	10,24	19,36	89%	-	-
Tensão Limite na Biela Superior	MPa	13,66	17,86	31%	-	-
Tensão observada na Biela Superior	MPa	8,00	10,52	31%	-	-

Nota-se uma grande diferença entre os resultados obtidos pelos três dimensionamentos. Os resultados obtidos pelo dimensionamento como viga comum são claramente contra a segurança pois além de serem inferiores aos normativos partem de uma conceituação não aplicável (dimensionamento de região D com região B).

Ao compararem-se os resultados do MEF com o MBT nota-se a diferença no alojamento das armaduras. Enquanto o MBT concentra toda a armadura horizontal no tirante inferior, o MEF distribuiu ao longo de quase toda a altura da viga-parede, desta forma a área de aço do tirante é inferior no MEF, enquanto a armadura das costelas é superior.

De forma semelhante ao consolo as tensões de compressão observadas também são superiores no MEF, além da concentração de tensões em alguns elementos, no caso da viga parede há o fato de que como as armaduras não estão concentradas na região junto à face inferior, o braço de alavanca para a flexão é menor, levando à necessidade de maiores tensões de compressão.

7.2.3 Viga parede com aberturas

Este exemplo de aplicação busca comparar o MEF com o MBT em uma geometria não usual de modo a demonstrar a possibilidade de generalização de ambos os métodos. O exemplo também foi baseado no trabalho de Souza (2004) em que é proposto um dimensionamento através do MBT obtido da análise do caminho de cargas.

Para o exemplo são adotados fck=26MPa, fyk=500MPa, espessura da viga=50cm. O carregamento apresentado na Figura 45 refere-se ao valor de projeto.

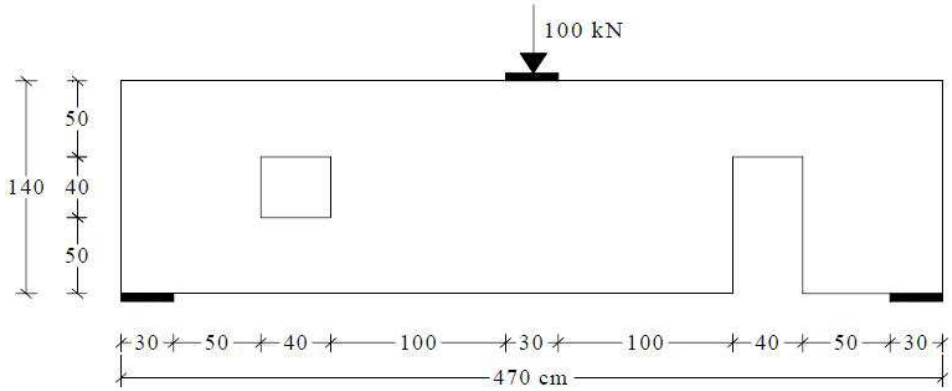

Figura 45 - Viga parede biapoiada com aberturas

Na definição do MBT foi empregada otimização topológica chegando ao resultado abaixo:

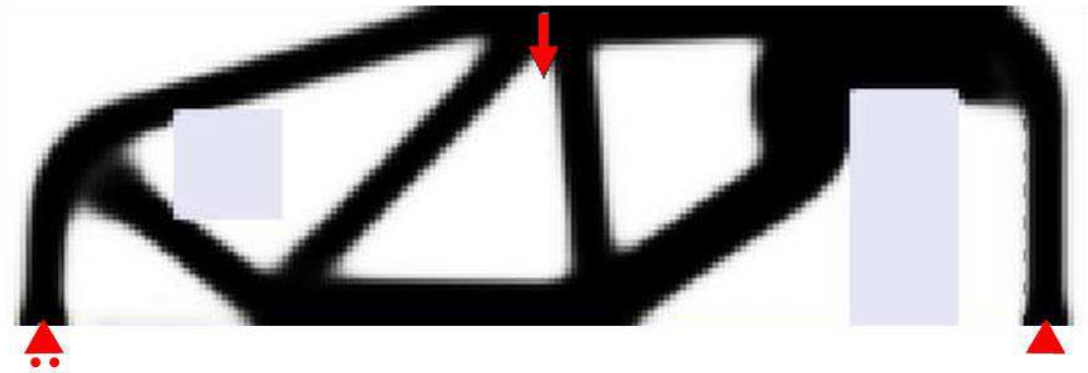

Figura 46 - Resultado da otimização topológica - viga parede com aberturas

Além da otimização topológica através do método proposto foi utilizado também o otimizador topológico presente no próprio software de análise por elementos finitos, chegando a um resultado semelhante:

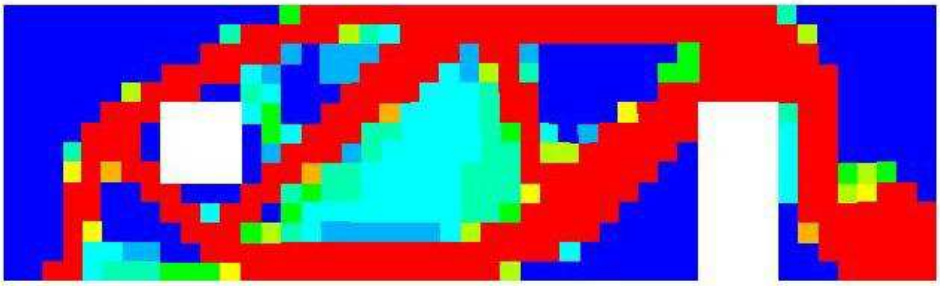

Figura 47 - Resultado da otimização topológica através do ANSYS

A partir do resultado pode observar-se a presença de tirantes inclinados sob o canto inferior esquerdo da abertura esquerda, sobre o canto superior direito da abertura esquerda e atravessando diagonalmente a peça passando sobre o canto superior esquerdo da abertura direita. Além de um tirante horizontal junto à face inferior no trecho central.

Visando um melhor arranjo construtivo os tirantes inclinados foram decompostos em tirantes verticais e horizontais, chegando-se a uma topologia semelhante à de Souza (2004) levemente simplificada:

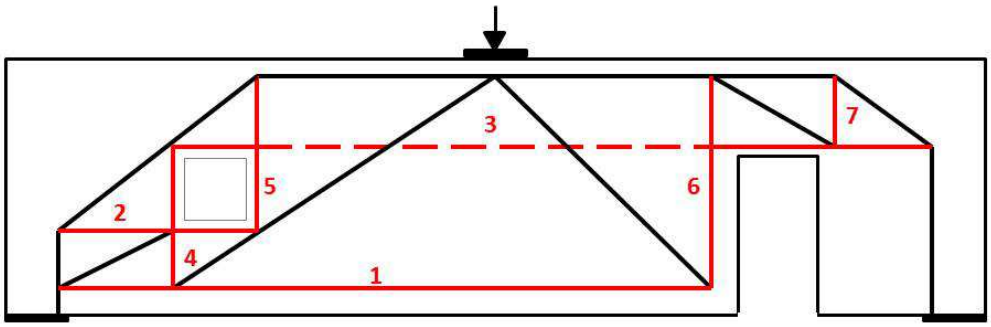

Figura 48 - MBT da viga parede com aberturas

Para o comparativo foram utilizadas as áreas de aço obtidas nos tirantes e seus equivalentes obtidos no dimensionamento direto via MEF, os tirantes estão numerados na Figura 48 e os resultados indicados na Tabela 4.

O dimensionamento através do MEF utilizou uma malha de 20x20cm, representada abaixo junto à malha empregada.

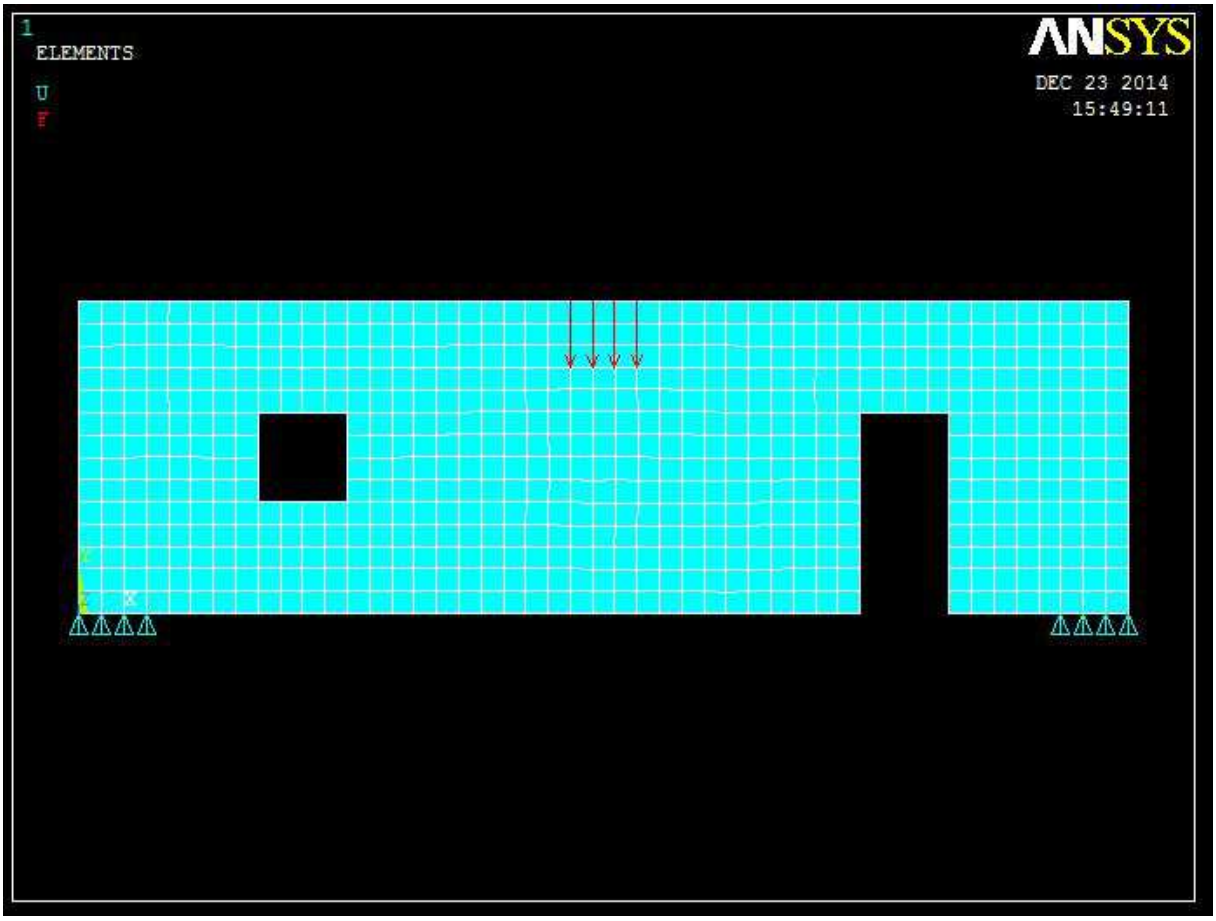

Figura 49 - malha e condições de contorno da viga parede com aberturas

Os resultados obtidos em termos de tensões nodais estão representados abaixo:

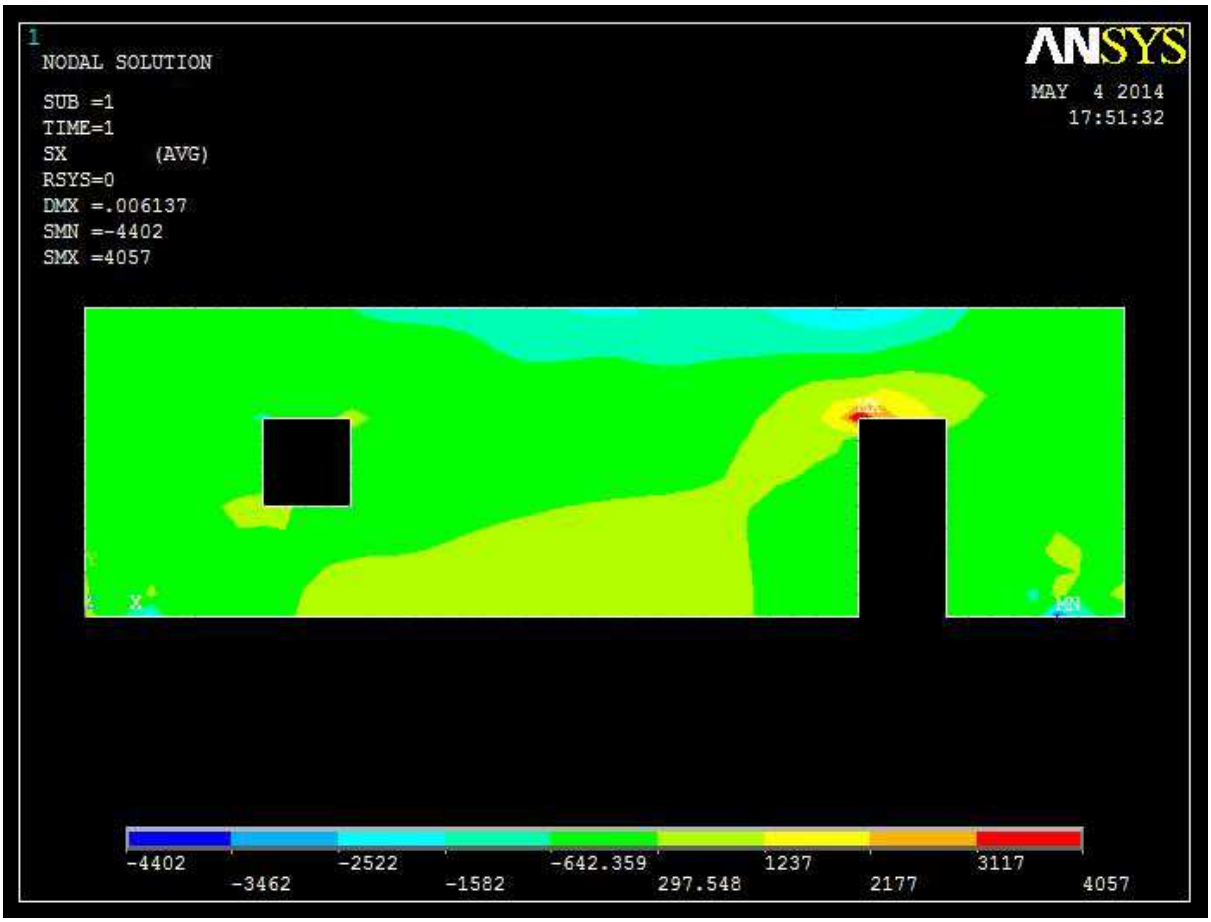

Figura 50 - Tensões observadas na viga parede com aberturas - direção x

Figura 51 - Tensões observadas na viga parede com aberturas - direção y

Tabela 4 – Estudo comparativo viga parede com aberturas

		MBT	MEF	
			Resultado	Diferença
(1) Face inferior da viga	cm²	1,67	4,45	166%
(2) Abaixo da abertura esquerda	cm²	0,99	0,56	-43%
(3) Acima das aberturas	cm²	3,48	8,81	153%
(4) À esquerda da abertura esquerda	cm²	0,40	0,28	-30%
(5) À direita da abertura esquerda	cm²	0,75	0,44	-42%
(6) À esquerda da abertura direita	cm²	1,75	6,33	261%
(7) À direita da abertura direita	cm²	1,15	0,52	-54%

8 Análise de resultados e conclusões

Esta dissertação apresentou dois importantes métodos de dimensionamento de regiões de descontinuidade no concreto armado, elementos em que a teoria clássica de barras de Euler-Bernoulli não se aplica estão presentes em todas as estruturas. Embora muitas normas abordem tipos específicos de elementos, a metodologia para o dimensionamento de Regiões D em geral poderia ser mais aprofundada.

Existe variação significativa entre o dimensionamento através do MEF em relação à teoria do concreto armado, de maneira geral as tensões observadas através da modelagem linear em elementos finitos são significativamente superiores àquelas observadas através de modelos de bielas e tirantes ou a teoria do concreto armado.

Este resultado é esperado uma vez que, ao discretizar-se uma estrutura para a aplicação de um método numérico, parte da eficiência estrutural é perdida pela limitação dos pontos analisados. Por exemplo, no dimensionamento de uma seção à flexão, o braço de alavanca passa a apresentar variações discretas em oposição à variação contínua no dimensionamento analítico. Neste sentido, o dimensionamento pela integração de esforços em uma determinada seção conforme sugerido pela norma 6118 proporcionaria economia de armadura.

Outro ponto ainda mais relevante é a consideração de modelo elástico linear. Ao não considerar-se redistribuição de tensões através do escoamento do aço e da fissuração do concreto, são observadas tensões superiores às esperadas na estrutura real.

Sobre as armaduras em que o dimensionamento através do MEF resultou inferior, nos dois primeiros exemplos, elas seriam iguais ao dimensionamento por norma, uma vez que correspondem a armaduras mínimas. No terceiro exemplo as reduções observadas nas armaduras dos tirantes (2), (4), (5) e (7) se devem ao fato de no Modelo de Bielas e Tirantes terem seu dimensionamento regido por nós do tipo CCT (encontro de 2 bielas e 1 tirante equilibrando o desvio dos esforços de compressão). Enquanto no MBT a mudança de direção dos esforços de compressão se dá de

forma abrupta no nó, no MEF a mudança se dá de forma gradual ao longo dos elementos.

O MEF é uma importante alternativa de dimensionamento para Regiões D principalmente por sua versatilidade, mesmo apresentando diferenças significativas com relação a outros métodos de dimensionamento sua aplicação pode ser considerada segura se aliada a outras disposições, em especial referentes a ancoragens e taxas mínimas de armaduras.

Neste sentido o engenheiro estrutural deve favorecer, em ordem, o dimensionamento:

1. Através da teoria do concreto armado (caso ela seja aplicável).
2. Através de modelos padronizados (caso existam).
3. Através do MBT.
4. Através do MEF.

A geração automática de modelos para o MBT através da otimização topológica mostra-se como uma ferramenta poderosa na análise de Regiões D, e em especial na automação da geração de modelos, mesmo assim cabe ao engenheiro validar o modelo, isto é especialmente importante no caso de diferentes possibilidades de vinculações e vinculações distribuídas.

As diferenças observadas no modelo para o MBT gerado pelo autor e pelo software ANSYS para a viga parede com aberturas podem ser atribuídas a dois fatores principais:

- A utilização de filtros no caso do modelo gerado pelo autor, o que diminui os elementos “cinzas” isto é, com densidades intermediárias;
- O emprego de diferentes módulos de elasticidade para o material tracionado e comprimido.

Para futuros trabalhos sugere-se:

- Englobar a não linearidade já no processamento inicial da Região D, seja na otimização topológica ou no dimensionamento via MEF;
- Limitar os tirantes às posições horizontais e verticais, ou a outro ângulo prescrito;
- Incluir a conversão direta do resultado da otimização topológica para o modelo de treliça através do reconhecimento de padrões ou da análise de vizinhança dos elementos.

Referências

ALI, M. A. **Automatic generation of truss models for the optimal design of reinforced concrete structures**. PhD thesis, Cornell Univ, Ithaca, NY, 1997

AMIR, O. **A topology optimization procedure for reinforced concrete structures**. Technion - Israel Institute of Technology, 2012

ANDREASSEN, E.; CLAUSEN, A.; SCHEVENELS, M.; LAZAROV, B.; SIGMUND, O. **Efficient topology optimization in MATLAB using 88 lines of code**. Struct. Multidisc. Optim., n.43, p.1-16, 2011

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **NBR6118**: **Projeto de estruturas de concreto - Procedimento.** 2013

BENDSØE, M.P. **Optimization of structural topology, shape and material** . Berlin, Heidelberg, New York: Springer, 1995

BIONDINI, F.; BONTEMPI, F.; MALERBA, P. G. **Stress path adapting strut-and-tie models in cracked and uncracked R.C. elements.** Struct. Eng. Mech., v.12, n.6, p.685–698, 2001

BRUGGI, M. **Generating strut-and-tie patterns for reinforced concrete structures using topology optimization**. Comput. Struct., n.87, p.1483–1495, 2009

CARVALHO, J. **Sobre as origens e desenvolvimento do concreto**. Revista Tecnológica, v.17, p.19-28, 2008

CASTILHO, V. C. **Otimização de Componentes de Concreto Pré-moldado Protendidos Mediante Algoritmos Genéticos.** 181p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2003.

COLLINS, M.P.; MITCHELL, D. **Shear and torsion design of prestressed and nonprestressed concrete beams.** PCI J. v.25, n.5, p.32–100, 1980

DANTZIG, G. **Notes on linear programming.** Santa Monica: RAND corporation. 1953

DEWHURST, P. **A general optimality criterion for combined strength and stiffness of dual-material-property structures.** Int. J. Mech. Sci. n.47, p.293–302, 2005

FEENSTRA, P. H.; BORST, R. **Aspects of Robust Computational Modeling for Plain and Reinforced Concrete.** Heron, v.38, n.04, p.3-76, 1993

INTERNATIONAL FEDERATION FOR STRUCTURAL CONCRETE (FIB). **Practitioner's guide to finite element modelling of reinforced concrete structures.** Stuttgart: Sprint-Digital-Druck, 2008

KUMAR, P. **Optimal force transmission in reinforced concrete deep beams.** Comput. Struct., v.8, n.2, p.223–229, 1978

KUPFER, H **Generalization of Mörsch truss analogy using principle of minimum strain energy.** CEB Bulletin d'information, Comite Ero-International du Beton, n.40, p.44–57, 1964

KUPFER, H. B.; GERSTLE, K. H. **Behavior of Concrete Under Biaxial Stresses.** Journal of Engineering Mechanics, ASCE, v.99, n.4, p.853-866, 1973

KWAK, H.G.; NOH, S.H. **Determination of strut-and-tie models using evolutionary structural optimization.** Eng. Struct. n.28, p.1440–1449, 2006

LABORATÓRIO DE MECÂNICA COMPUTACIONAL - ESCOLA POLITÉCNICA DA UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO. **Investigação de novas metodologias para o ensino de engenharia de estruturas utilizando recursos de multimídia interativa.** Disponível em: <http://www.lmc.ep.usp.br/pesquisas/TecEdu/>. Acesso em: jan.2013.

LAMPERT, P.; THÜRLIMANN, B. **Ultimate strength and design of reinforced concrete beams in torsion and bending.** New York: Springer, pp 107–131, 1971

LEONHARDT F. **Reducing the shear reinforcement in reinforced concrete beams and slabs.** Mag. Concr. Res., v.17, n.53, p.187, 1957

LEU, L. J,; HUANG, C. W.; CHEN, C. S.; LIAO, Y. P. **Strut-and-tie design methodology for three-dimensional reinforced concrete structures.** J. Struct. Eng., v.132, n.6, p.929–938, 2006

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. **Topology optimization of strut-and-tie models in reinforced concrete structures using an evolutionary procedure.** ACI Struct. J., v.97, n.2, p.322–330, 2000

LIANG, Q. Q.; XIE, Y. M.; STEVEN, G. P. **Generating optimal strut-and tie models in prestressed concrete beams by performance based optimization.** ACI Struct. J., v.98, n.2, p226–232, 2001

LIMA, M. L. R. **Otimização topológica e paramétrica de vigas de concreto armado utilizando algoritmos genéticos.** Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. São Paulo, 2011.

LUO, Y.; KANG, Z. **Layout design of reinforced concrete structures using two-material topology optimization with Drucker–Prager yield constraints.** Struct. Multidisc. Optim., p.95-110, 2013

MARTÍ, P. **On plastic analysis of reinforced concrete.** Institute of Structural Engineers, report no. 104, 1980

MARTÍ, P. **Basic tools of reinforced concrete beam design.** ACI J. v.82, n.1, p.46–56, 1985

METROPOLIS, N.; ROSENBLUTH, A. W.; ROSENBLUTH, M. N.; TELLER, A. H.; TELLER, E. **Equation of State Calculations by Fast Computing Machines**, J. Chem. Phys., v.21, n.6, p.1087-1092, 1953.

MÖRSCH, E. **Der Eisenbetonbau, seine Theorie und Anwendung** (Reinforced Concrete, Theory and Application). Stuttgart, 1902

PRAGER, W. **A problem of optimal design.** Em: Proceedings of the union of theoretical and applied mechanics. Warsaw, 1958

QUERIN, O.M.; VICTORIA, M.; MARTÍ, P. **Topology optimization of truss-like continua with different material properties in tension and compression.** Struct. Multidisc. Optim. n.42, p.25–32, 2010

RITTER, W. **Die Bauweise Hennebique** (The Hennebique System). Schweizerische Bauzeitung, Bd. XXXIII, 7, Zürich, 1899

ROGOWSKY, D.; MACGREGOR, J.; ONG, S **Tests of reinforced concrete deep beams.** ACI J. Proc. v.83, n.4, p.614–623, 1986

SCHLAICH, J. **The Need for Consistent and Translucent Models.** IABSE COLLOQUIUM STRUCTURAL CONCRETE, v.62, Stuttgart, p.169-184. Proceedings, 1991

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K. **Design and detailing of structural concrete using strut-and-tie models.** Struct. Eng., v.69, n.6, p.113–125, 1991

SCHLAICH, J.; SCHÄFER, K.; JENNEWEIN, M. **Toward a consistent design of structural concrete.** PCI J. v.32, n.3, p.75–150, 1987

SIGMUND, O. **A 99 line topology optimization code written in Matlab.** Struct. Multidisc. Optim. v.21, p.120–127, 2001.

SILVA, E. E. **Otimização de Estruturas de Concreto Armado Utilizando Algoritmos Genéticos.** 131p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

SOARES, R. C. **Otimização de Seções Transversais de Conccreto Armado - Aplicação a Pavimentos.** Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Carlos, São Carlos, 1997

SOUZA, R. A. **Concreto estrutural: análise e dimensionamento de elementos com descontinuidades.** Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. São Paulo, 2004

SOUZA, R. A.; BITTENCOURT, T. N. **Análise, dimensionamento e verificação de elementos especiais em concreto armado utilizando o método dos elementos finitos e o método das bielas**, Revista. Internacional de Métodos. Numéricos para. Cálculo y Diseño en. Ingeniería. Vol. 22, 1, p.31–44, 2006

SRITHONGCHAI, S.; DEWHURST, P. **Comparisons of optimality criteria for minimum-weight dual material structures.** Int. J. Mech. Sci. v.45, p.1781–1797, 2003

VIANNA, L. C.; DEBS A. L. H. **Otimização de Seções Transversais de Concreto Armado: Aplicação a Pórticos.** In: Cadernos de Engenharia de Estruturas. São Carlos. v.7, n.26, p.1-32, 2005.

VICTORIA, M.; MARTÍ, P.; QUERIN, O. M. **Topology design of twodimensional continuum structures using isolines.** Comput. Struct. v.87, n.1-2, p.101-109, 2009.

VICTORIA, M.; QUERIN, O. M.; MARTI, P. **Generation of strut-and-tie models by topology design using different material properties in tension and compression.** Struct. Multidisc. Optim. v.44, p.247–258, 2011