LORENZO AUGUSTO RUSCHI E LUCHI

PROTENSÃO EM PONTES CELULARES CURVAS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

SÃO PAULO
2001

LORENZO AUGUSTO RUSCHI E LUCHI

PROTENSÃO EM PONTES CELULARES CURVAS

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Fernando Rebouças Stucchi

SÃO PAULO
2001

Luchi, Lorenzo Augusto Ruschi e

Protensão em Pontes Celulares Curvas. São Paulo, 2001.

115 p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1. Pontes Curvas 2. Pontes Celulares 3. Protensão I.
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de
Engenharia de Estruturas e Fundações II. t

“É triste falhar na vida; porém, mais triste é não tentar vencer.” (Roosevelt)

*Aos meus pais, Solimar e Beatriz, e
irmãos, Giulliano e Sandrine, que
sempre me apoiaram e incentivaram, e
são responsáveis pelo meu sucesso.*

AGRADECIMENTOS

Ao chegar ao fim de mais esta etapa da minha vida, gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos...

Primeiramente a Deus, pois sem Sua presença nada seria possível.

Ao meu Orientador, Professor Fernando Stucchi, pela incansável paciência, pelos conselhos concedidos e por ter me acolhido como seu orientando. A todos os professores do PEF, especialmente aos Professores Hideki Hishitani e Henrique Lindenberg, pelo apoio e incentivo.

Aos meus familiares por terem sempre acreditado no meu sucesso e me apoiado em todos os momentos.

À querida Juliana, pela dedicação, amor e compreensão.

Aos amigos Cristiano, Frederico e Valério, pela paciência. A todos os amigos e colegas da Pós-graduação do PEF por terem me apoiado com amizade e companheirismo.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo apoio financeiro para a realização desta pesquisa.

SUMÁRIO

LISTA DE SÍMBOLOS.....	i
LISTA DE FIGURAS.....	v
LISTA DE TABELAS.....	viii
LISTA DE GRÁFICOS.....	x
RESUMO.....	xii
ABSTRACT	xiii
 CAPÍTULO 1	
INTRODUÇÃO	1
 CAPÍTULO 2	
PONTES CELULARES CURVAS. AS DIFICULDADES DE UMA ABORDAGEM	
ANALÍTICA FECHADA	3
2.1. INTRODUÇÃO	3
2.2. A INTERAÇÃO ENTRE TORÇÃO E FLEXÃO	4
2.3. A DISTORÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	7
2.4. LARGURA COLABORANTE DAS LAJES E HIPERESTATICIDADE.....	10
 CAPÍTULO 3	
A PROTENSÃO	12
3.1. INTRODUÇÃO	12
3.2. O DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO E DA PROTENSÃO	13
3.2.1. Alguns Aspectos sobre o dimensionamento das Seções Celulares.....	13
3.2.2. Dimensionamento da Protensão	15
3.3. OS EFEITOS DA PROTENSÃO NAS VIGAS CURVAS	20
3.3.1. Forças de Desvio nas Seções Celulares.....	20
3.3.2. Vigas Biapoiadas.....	27
3.3.3. Vigas de Vários Vãos.....	29
3.3.4. Concepção da Protensão e Posicionamento dos Cabos.....	30
 CAPÍTULO 4	
MÉTODOS DE CÁLCULO	41
4.1. MÉTODO SIMPLIFICADO DE CÁLCULO	41
4.1.1. Cálculo dos Esforços Longitudinais.....	42

4.1.2. Cálculo da Distorção. A Analogia de Viga sobre Apoio Elástico...	46
4.2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.....	52
4.2.1. Cálculo dos Esforços através do Desmembramento das Tensões.....	55
4.2.2. Cálculo dos Esforços através da Integração Direta das Tensões....	59
4.2.3. Cálculo dos Momentos Fletores Transversais.....	59
 CAPÍTULO 5	
ESTUDO DE CASO	61
5.1. CONSIDERAÇÕES INICIAIS.....	61
5.1.1. Características Geométricas.....	62
5.1.2. Pré-dimensionamento da Protensão.....	63
5.1.3. Malha de Elementos Finitos.....	64
5.1.4. Viga de dois Vãos.....	67
5.2. CARREGAMENTOS PARA A DETERMINAÇÃO DO "SHEAR LAG ".....	68
5.2.1. Processamento R1g - Momento Fletor.....	68
5.2.2. Processamento R1n - Força Normal.....	69
5.2.3. Processamento R1t - Torção Não-uniforme	69
5.2.4. Processamento R1d - Distorção.....	70
 CAPÍTULO 6	
RESULTADOS.....	73
6.1. NOMENCLATURA	73
6.2. VALIDAÇÃO DO MODELO.....	76
6.3. VIGA BIAPOIADA.....	78
6.3.1. Estudo do efeito " <i>shear lag</i> ".....	78
6.3.2. Protensão com cabo parabólico geometricamente simétrico	90
6.2.3. Viga com cabo de excentricidade constante	104
6.2.4. Viga de dois vãos.....	106
 CAPÍTULO 7	
CONCLUSÕES	109
 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	112
 BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA.....	114

LISTA DE SÍMBOLOS

T	Momento torsor
V	Força cortante
p	Carga distribuída
t	Carregamento de torção distribuído
M	Momento fletor
R	Raio de curvatura
G	Módulo de elasticidade transversal
CC	Centro de curvatura
CT	Centro de torção
$\mathbf{q}$	Rotação axial
$\mathbf{q}_c$	Rotação axial real de torção
$\mathbf{f}$	Fluxo de torção de Bredt
h	Altura da viga
F_s	Resultante de cisalhamento na laje superior
F_i	Resultante de cisalhamento na laje inferior
F_{st}	Decomposição da resultante de cisalhamento na laje superior
F_{it}	Decomposição da resultante de cisalhamento na laje inferior
F_{at}	Decomposição da resultante de cisalhamento na alma
e_y, e_z	Excentricidade do cabo em relação ao centro de gravidade na direção y ou z
c_y, c_z	Excentricidade do cabo em relação ao centro de torção na direção y ou z
f_r	Força de desvio horizontal devido a curvatura da viga
f_r^P	Força de desvio dos cabos devido a curvatura horizontal da viga
f_r^C	Força de desvio das tensões normais no concreto
u_y^P	Força de desvio dos cabos devido ao seu perfil em relação ao eixo y da viga

u_z^p	Força de desvio dos cabos devido ao seu perfil em relação ao eixo z da viga
u_1	Componente da força de desvio vertical no cabo localizado na alma externa
u_2	Componente da força de desvio vertical no cabo localizado na alma interna
u_s	Componente da força de desvio horizontal no cabo localizado na mesa superior
u_i	Componente da força de desvio horizontal no cabo localizado na mesa inferior
α_1	Ângulo de saída dos cabos localizados na alma externa à curva
α_2	Ângulo de saída dos cabos localizados na alma interna à curva
$\ell_1, \bar{x}_1$	Comprimento da alma externa
$\ell_2, \bar{x}_2$	Comprimento da alma interna
f_1	Flecha do cabo de protensão localizado na alma externa
f_2	Flecha do cabo de protensão localizado na alma interna
A_0	Área fictícia (b.h)
b_s	Comprimento da mesa superior
b_a	Comprimento da alma
t_a	Espessura da alma
I_a, I_s, I_i	Momentos de inércia à flexão longitudinal das placas
ν	Coefficiente de Poisson
r_s, r_i	Coefficientes de rigidez relativa das placas
M	Momento fletor transversal reduzido
I_ϕ	Momento inércia à distorção do quadro
y_s, y_i, x	Proporções geométricas
σ	Tensão normal reduzida

I_w	Momento de inércia à flexão da viga análoga
E	Módulo de elasticidade longitudinal
k	Coeficiente de rigidez do apoio elástico
$\mathbf{s}_a, \mathbf{s}_b, \mathbf{s}_c$	Tensões normais de distorção em pontos da seção transversal
M_A, M_B	Momentos fletores transversais de distorção nos nós do quadro
w, w_A	Função empenamento no para distorção no ponto A
$\bar{\mathbf{f}}_0$	Correção do momento estático
$\mathbf{d}$	Coeficiente de influência do balanço
k	Bimomento de distorção
B'	Bicortante de distorção
$\mathbf{t}_1, \dots, \mathbf{t}_6$	Tensões tangenciais de distorção em pontos da seção transversal
$\mathbf{s}^{MEF}$	Tensão normal média ao longo da espessura da casca
N	Força normal
$\mathbf{s}_N^1$	Tensão normal longitudinal decorrente da força normal unitária
$\mathbf{s}_{int}$	Tensão normal longitudinal decorrente da introdução de carga
M_f	Momento fletor longitudinal
$\mathbf{s}_f^1$	Tensão normal longitudinal decorrente da flexão por momento fletor unitário
$\mathbf{s}_f^{SL}$	Tensão normal longitudinal decorrente do efeito “ <i>shear lag</i> ” por momento fletor unitário
B_{tnu}	Bimomento de Torção não-uniforme
$\mathbf{s}_{tnu}^1$	Tensão normal longitudinal decorrente da torção não-uniforme por B_{tnu} unitário
$\mathbf{s}_{tnu}^{SL}$	Tensão normal longitudinal decorrente do efeito “ <i>shear lag</i> ” por B_{tnu} unitário
B_d	Bimomento de distorção
$\mathbf{t}^{MEF}$	Tensão tangencial média ao longo da espessura da casca

T_{unif}	Momento torsor de “Saint Venant”
$\mathbf{t}_{unif}$	Tensão tangencial decorrente da torção uniforme por momento torsor unitário
B'_{inu}	Bicortante decorrente da torção não-uniforme
$\mathbf{t}_{inu}^1$	Tensão tangencial por B'_{inu} unitário
B'_d	Bicortante decorrente da distorção
$\mathbf{t}_d^1$	Tensão tangencial por B'_d unitário
$\mathbf{t}_v^1$	Tensão tangencial por força cortante unitária
z_{CG}	Distância vertical de cada nó ao centro de gravidade da seção transversal
w_{inu}	Função empenamento da seção transversal para torção não-uniforme
w_d	Função empenamento da seção transversal para distorção
f_x	Força nodal na direção do eixo x
f_z	Força nodal na direção do eixo z
f_t	Força nodal tangencial à seção (eixo z ou y)
$\mathbf{r}$	Distância de cada nó ao centro de torção
$\mathbf{s}^{R1g}$	Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1g
M_f^{R1g}	Momento Fletor na seção transversal central no processamento R1g
$\mathbf{s}^{R1n}$	Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1n
N^{R1n}	Força Normal na seção transversal central no processamento R1n
$\mathbf{s}^{R1t}$	Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1t
B_{inu}^{R1t}	Bimomento de torção não-uniforme atuante na seção transversal central no processamento R1t
$\mathbf{s}^{R1d}$	Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1t
B_d^{R1d}	Bimomento de torção não-uniforme atuante na seção transversal central

LISTA DE FIGURAS

- Figura 2.1** – Esforços solicitantes em um elemento de viga curva 4
- Figura 2.2** – Deslocamentos devidos a flexão e torção 6
- Figura 2.3** – Ponte unicelular reta, biapoiada com carregamento excêntrico 7
- Figura 2.4** – Trecho da viga de comprimento infinitesimal dx 7
- Figura 2.5** – Mecanismo portante de uma seção celular 8
- Figura 2.6** – Carregamento de Distorção 9
- Figura 2.7** - Distorção em viga celular curva decorrente da parcela $\frac{M}{R}$. 9
- Figura 2.8** - Distribuição de tensões normais de compressão decorrentes da flexão longitudinal, em seção unicelular 11
- Figura 3.1.** Disposição dos cabos na Laje superior 16
- Figura 3.2.** Cabos de protensão locados nas almas 17
- Figura 3.3.** Ponte executada em consolos sucessivos 17
- Figura 3.4.** Obra executada sobre cimbramento móvel 18
- Figura 3.5.** Ponte executada por lançamentos progressivos 19
- Figura 3.6.** Separação do Cabo de Protensão da Viga de Concreto 21
- Figura 3.7.** Equilíbrio da metade esquerda da viga 22
- Figura 3.8.** Forças distribuídas em uma viga horizontalmente curva submetida a protensão centrada 23
- Figura 3.9.** Forças de arco. 24
- Figura 3.10.** Protensão de Viga Curva com excentricidade constante. 25

Figura 3.11. Efeito local na alma	26
Figura 3.12. Componentes da força de protensão e definição dos eixos	27
Figura 3.13. Fluxos de cisalhamento em uma seção celular	29
Figura 3.14. Arranjo dos cabos em uma viga biapoiada para compensar torção e flexão	32
Figura 3.15. Esforços transversais em uma seção celular	32
Figura 3.16. Esforços transversais em uma seção celular	33
Figura 3.17. Arranjo teórico de cabos em uma viga contínua para compensar a flexão e a torção	34
Figura 3.18. Arranjo dos cabos nas lajes de topo e fundo de vigas contínuas para compensar torção devido ao carregamento permanente	34
Figura 3.19. Esforços devidos a Protensão Simétrica e Assimétrica	36
Figura 3.20. Protensão Geometricamente Simétrica de Viga Curva	37
Figura 3.21. Protensão Assimétrica de Viga Curva	39
Figura 3.22. Posicionamento dos cabos devido ao efeito local na alma	40
Figura 4.1. Torção devido a protensão dos cabos (u_1 e u_2)	45
Figura 4.2. Nomenclaturas para as dimensões da seção transversal	47
Figura 4.3. Viga sobre apoio elástico análoga	48
Figura 4.4. Tensões normais longitudinais decorrentes da distorção	50
Figura 4.5. Momentos fletores transversais decorrentes da distorção	51
Figura 4.6. Tensões tangenciais decorrentes da distorção	52
Figura 4.7. Eixos Locais no elemento “ <i>shell</i> ” do ADINA	54
Figura 4.8. Convenção dos Sinais Positivos	54

- Figura 4.9.** Cálculo de Momento Fletor Transversal através de tensão obtida pelo MEF 60
- Figura 5.1.** Ponte rodoviária unicelular com transversinas nos apoios 62
- Figura 5.2.** Condições de contorno nos apoios da viga biapoiada 63
- Figura 5.3.** Localização dos cabos na seção transversal 63
- Figura 5.4.** Malha de elementos finitos da ponte reta (0° de ângulo central) 65
- Figura 5.5.** Malha de elementos finitos de uma ponte curva ($57,3^\circ$ de ângulo central) 65
- Figura 5.6.** Condições de contorno aplicadas nos nós inferiores das transversinas de apoio 66
- Figura 5.7.** Condições de contorno nos apoios da viga de dois vãos 67
- Figura 5.8.** Carregamento de Torção Não-uniforme 70
- Figura 5.9.** Carregamento de Distorção 71
- Figura 6.1.** Numeração dos nós na seção do apoio da viga biapoiada 74
- Figura 6.2.** Numeração dos nós na seção do meio do vão da viga biapoiada 74
- Figura 6.3.** Distribuição das tensões normais longitudinais ao longo da viga reta biapoiada – carregamento de protensão 92
- Figura 6.4.** Distribuição das tensões normais longitudinais ao longo da viga curva biapoiada ($57,3^\circ$) – carregamento de protensão 92
- Figura 6.5.** Carregamentos na viga retificada para o cálculo dos Momentos Fletores 107
- Figura 6.6.** Carregamentos para o cálculo do Momentos Torsões 107
- Figura 6.7.** Carregamentos e momentos fletores na viga sobre apoio elástico para o cálculo do bimomento de distorção 108

LISTA DE TABELAS

- Tabela 4.1.** Analogia de viga sobre apoio elástico 49
- Tabela 4.2.** Parâmetros dos materiais 53
- Tabela 4.3.** Resultados na seção do elemento “*shell*” do ADINA 55
- Tabela 4.4.** Cálculo dos esforços solicitantes pela Integração Direta 59
- Tabela 5.1.** Raios de Curvaturas e Ângulos centrais adotados 62
- Tabela 5.2.** Cálculo das Posições dos Cabos 64
- Tabela 5.3.** Valores da Força de protensão inicialmente calculada 66
- Tabela 5.4.** Valores das deformações iniciais dos cabos, após a calibração 67
- Tabela 5.5.** Distribuição dos carregamentos de Distorção e Torção não-uniforme, por elemento 72
- Tabela 6.1.** Posição dos nós nas seções transversais analisadas – Viga Biapoiada 75
- Tabela 6.2.** Cálculo da Força Normal – Viga Reta, carregamento de força normal 79
- Tabela 6.3.** Cálculo do Momento Fletor – Viga Reta, carregamento de peso próprio 80
- Tabela 6.4.** Cálculo do Bimomento de Torção Não-uniforme – Viga Reta, carregamento de torção não-uniforme 81
- Tabela 6.5.** Cálculo do Bimomento de distorção – Viga Reta, carregamento de distorção 82
- Tabela 6.6.** Tensões Normais Longitudinais decorrentes de “*shear lag*” e introdução de carga, por esforço unitário 83
- Tabela 6.7.** Tensões Normais Longitudinais – carregamento de peso próprio 87

Tabela 6.8. Tensões Normais Longitudinais – Carregamento de protensão 91

Tabela 6.9. Resultados dos Esforços por desmembramento das tensões (MEF) 93

Tabela 6.10. Resultados dos Esforços por Integração das tensões (MEF) 94

Tabela 6.11. Cálculo dos Esforços Solicitantes na seção transversal central – viga curva 1, carregamento de protensão 95

Tabela 6.12. Cálculo dos Esforços Solicitantes na seção transversal do apoio – viga curva 1, carregamento de protensão 96

Tabela 6.13. Resultados dos Momentos Fletores Transversais (MEF) 97

Tabela 6.14. Valores do coeficiente corretor para o cálculo da distorção na protensão 99

Tabela 6.15. Resultados obtidos pelo MSC 99

Tabela 6.16. Resultados dos Momentos Fletores Transversais (MSC) 99

Tabela 6.17. Tensão total desmembrada por solicitação (MEF) 103

Tabela 6.18. Resultados dos Esforços por Integração das tensões na viga com cabo de protensão centrado (MEF) 105

Tabela 6.19. Resultados dos Esforços na viga contínua com cabo de protensão parabólico (MEF e MSC) 107

LISTA DE GRÁFICOS

Gráfico 6.1. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior –
Modelo de Cálculo x Modelo de Referência 76

Gráfico 6.2. Tensões Normais Longitudinais na Alma –
Modelo de Cálculo x Modelo de Referência 77

Gráfico 6.3. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior –
Modelo de Cálculo x Modelo de Referência 77

Gráfico 6.4. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior –
Carregamento de distorção 84

Gráfico 6.5. Tensões Normais Longitudinais na Alma –
Carregamento de Distorção 84

Gráfico 6.6. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior –
Carregamento de Distorção 85

Gráfico 6.7. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior –
Carregamento de Torção Não-uniforme 85

Gráfico 6.8. Tensões Normais Longitudinais na Alma –
Carregamento de Torção Não-uniforme 86

Gráfico 6.9. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior –
Carregamento de Torção Não-uniforme 86

Gráfico 6.10. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior –
Carregamento de peso próprio 88

Gráfico 6.11. Tensões Normais Longitudinais na Alma Interna –
Carregamento de peso próprio 88

Gráfico 6.12. Tensões Normais Longitudinais na Alma Externa –
Carregamento de peso próprio 89

Gráfico 6.13. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior –
Carregamento de peso próprio 89

Gráfico 6.14. Forças finais nos cabos após a deformação do concreto
– viga biapoiada 90

Gráfico 6.15. Resultados das Forças Normais na seção do meio do
vão – viga biapoiada 100

Gráfico 6.16. Resultados dos Momentos Fletores na seção do meio do
vão – viga biapoiada 101

Gráfico 6.17. Resultados dos Bimomentos de Distorção na seção do meio
do vão – viga biapoiada 101

Gráfico 6.18. Resultados dos Momentos Fletores Transversais na seção
do meio do vão – viga biapoiada 102

Gráfico 6.19. Resultados das Forças Cortantes na seção do apoio – viga
biapoiada 103

Gráfico 6.20. Resultados dos Momentos Torsores na seção do
apoio - viga biapoiada 104

Gráfico 6.21. Forças finais nos cabos após a deformação do concreto
– viga contínua 106

RESUMO

O presente trabalho faz uma comparação entre resultados obtidos por um método prático e simplificado e o Método dos Elementos Finitos na determinação de esforços solicitantes em pontes celulares curvas em planta, submetidas à protensão.

Na primeira parte, teórica, apresenta-se os conceitos fundamentais das vigas celulares curvas, mostrando-se principalmente as diferenças de seu comportamento em relação ao das vigas retas. Em seguida discute-se a protensão de peças de concreto com ênfase no seu efeito em vigas curvas. Finalmente, são apresentados os métodos a serem utilizados no cálculo, percorrendo as diversas situações de carregamento, mas sempre enfatizando o carregamento de protensão.

Na segunda parte, prática, é elaborado um estudo comparativo, tomando-se como exemplo duas pontes rodoviárias em viga unicelular, sendo uma biapoiada e outra contínua, submetidas a protensão. Após a construção de modelos, tais vigas são processadas através de um programa comercial de elementos finitos. Alguns resultados são então comparados com aqueles obtidos através do método simplificado, elaborando-se assim observações práticas e que possam ser utilizadas nos projetos corriqueiros de engenharia.

ABSTRACT

This work compares the results from a practical and simplified method and the Finite Element Method to determinate section efforts in prestressed box-girder curved bridges.

The first part, theoretical, introduces the basic principles of the cellular curved beams, showing the differences of its behavior comparing with straight beams. Next, prestressing of concrete members is discussed, emphasizing its effects in curved beams. Finally, calculation methods are presented, covering many loading situations, but always emphasizing the prestressing load.

In the second part, practical, a comparative study is elaborated, taking two road unicellular bridges, one simply supported and another continuum, submitted to prestressing load. After models construction, such beams are calculated using a commercial software of Finite Element Method. Then, some results are compared with those calculated by simplified method, thus elaborating practical comments that can be used in the current designs of engineering.

CAPÍTULO 1

INTRODUÇÃO

Seria difícil imaginar nos dias atuais a inexistência das pontes curvas. Seja nas auto-estradas, ou como alças de acesso, ou ainda, em vias urbanas, elas estão por toda a parte. Dentro desse contexto, as vigas de seção celular (ou vigas-caixão) aparecem como principal alternativa na busca de soluções que atendam os requisitos estruturais, de segurança, de conforto e estéticos.

As vigas celulares apresentam uma eficiente distribuição transversal de cargas excêntricas, grande rigidez e, principalmente, alta resistência a torção, o que as tornam especialmente indicadas para as obras curvas. Além disso, possuem grande

resistência a momentos fletores positivos e negativos, em consequência da existência de mesas de compressão superior e inferior.

As vigas de seção celular são em geral protendidas, o que permite, entre outras vantagens, alcançar grandes vãos, ganhos de resistência e um melhor controle da fissuração. Particularmente no caso das pontes curvas (peças mais solicitadas que as retas, principalmente à torção), a protensão apresenta como vantagem principal o ganho de rigidez à flexão e torção da peça, devido à inibição da fissuração.

A presente dissertação pode ser entendida como a continuação natural do trabalho iniciado por Ricardo Lorenz Barbosa, que em 1997 apresentou uma dissertação de Mestrado neste departamento intitulada “Pontes Curvas Unicelulares em Regime Elástico” e orientada pelo Prof. Dr. Fernando Rebouças Stucchi.

Os objetivos deste texto são: descrever o comportamento das vigas curvas; descrever os aspectos relevantes das seções celulares e da protensão nessas vigas, em especial às que são curvas; traçar um comparativo entre os resultados obtidos para os esforços através do Método Simplificado de Cálculo (MSC) e os resultados de modelos matemáticos pelo Método dos Elementos Finitos (MEF); e por fim, fazer algumas observações quanto a aplicabilidade desses dois métodos em projetos de vigas celulares protendidas, para várias curvaturas.

Todos os cálculos serão efetuados no estágio I_0 (peça não fissurada, desprezada a armadura passiva), devido à dificuldade na determinação do nível de fissuração e plastificação. O cálculo no regime elástico respeita as condições de equilíbrio e segundo o Teorema Estático da Teoria da Plasticidade garante a segurança à ruptura, desde que a estrutura tenha, como usualmente, ductilidade adequada.

CAPÍTULO 2

PONTES CELULARES CURVAS. AS DIFICULDADES DE UMA ABORDAGEM ANALÍTICA FECHADA

2.1. INTRODUÇÃO

Neste capítulo apresentaremos, baseados em [STUCCHI, 1984] e [BARBOSA, 1997], os vários fatores que tornam o cálculo das vigas curvas muito mais complexo que o das vigas retas. Dentre esses fatores, podemos citar:

- A flexão e a torção aparecem interligadas, tanto por condições de equilíbrio, quanto por condições de compatibilidade.
- Aumentando-se a curvatura, tornam-se consideráveis as solicitações de torção, que podem condicionar o dimensionamento e a estabilidade da peça. Só excepcionalmente é necessária a consideração da torção não-uniforme.
- O aumento da torção, por outro lado, determina um aumento da distorção, isto é, da deformação na seção transversal, que gera esforços transversais e longitudinais que não podem ser desprezados.

2.2. A INTERAÇÃO ENTRE TORÇÃO E FLEXÃO

Como as cargas mais relevantes em pontes são verticais, podemos calculá-las como vigas planas, carregadas normalmente ao seu plano. Inicialmente apresentaremos as equações fundamentais que regem este problema. Consideremos um elemento de viga curva carregada perpendicularmente ao seu plano, conforme a Figura 2.1.

Figura 2.1 – Esforços solicitantes em um elemento de viga curva [BARBOSA, 1997]

As equações são obtidas através do equilíbrio de forças e momentos nas três direções:

Equilíbrio de forças na direção y:

$$\frac{dV}{ds} = -p \quad (2.1)$$

Equilíbrio de momentos em torno do eixo z:

$$\frac{dM}{ds} = V - \frac{T}{R} \quad (2.2)$$

Equilíbrio de momentos em torno do eixo x:

$$\frac{dT}{ds} = t + \frac{M}{R} \quad (2.3)$$

Ao analisarmos a equação (2.1) percebemos que ela é válida também para um elemento de viga reta, ou seja, em se tratando de força cortante a análise é idêntica entre uma viga curva e uma viga reta. Já pelas equações (2.2) e (2.3) notamos que existe interação entre a flexão e a torção nas pontes curvas. O momento fletor provoca torção e o momento torsor provoca flexão.

Já as deformações nas vigas curvas são dadas, conforme [CALGARO e VIRLOGEUX, 1994], e mostrado na Figura 2.2, por:

$$\frac{d^2 y}{dx^2} = -\frac{M}{EI} + \frac{\mathbf{q}}{R} \quad (2.4)$$

$$\frac{d\mathbf{q}_c}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\mathbf{q} + \frac{y}{R} \right) = \frac{T}{GI_t}, \text{ onde } \mathbf{q}_c = \mathbf{q} + \frac{y}{R} \quad (2.5)$$

Assim como nos esforços solicitantes, aparece uma interação entre flexão e torção no cálculo dos deslocamentos, isto é, flexão provoca rotação axial (θ_c) e torção provoca flecha (y).

Pela equação (2.5) vemos que a rotação de torção (θ_c) é medida a partir de uma reta inclinada y / R (Figura 2.2). Portanto, em um caso particular onde não haja torção

ao longo da viga curva, suas seções girarão segundo a inclinação y / R . Num caso em que não houver flexão, ocorrerão flechas y além das rotações θ_c .

Figura 2.2 – Deslocamentos devidos a flexão e torção [BARBOSA, 1997]

As conhecidas soluções para as vigas curvas de seções transversais cheias não se aplicam na análise das seções de paredes finas, sejam elas abertas ou fechadas. Isso ocorre porque as tensões causadas pela torção não uniforme e pela deformação da seção transversal (distorção), que possuem pouca importância em seções cheias, não podem ser ignoradas em seções de paredes finas.

As hipóteses da torção uniforme de “Saint Venant” não são plenamente satisfeitas nas pontes curvas unicelulares, principalmente em relação à uniformidade do momento torsor e a indeformabilidade da seção transversal. Esta última hipótese não pode ser considerada devido a eliminação das transversinas nos modernos processos construtivos, como consolos sucessivos e lançamentos progressivos.

As vigas de seção celular possuem a parcela de torção não uniforme pequena, devido a sua elevada rigidez à torção uniforme de “Saint Venant”, porém esta parcela pode se tornar maior nas vigas curvas, na medida em que, aumentando-se a curvatura, os esforços de torção tornam-se mais significativos, devido à interação entre os esforços transversais e longitudinais já mostrada anteriormente.

2.3. A DISTORÇÃO DA SEÇÃO TRANSVERSAL

Veamos a Figura 2.3. Trata-se de uma viga reta, simplesmente apoiada, com transversinas nos apoios, solicitada por uma carga linear, uniformemente distribuída sobre uma das almas.

Figura 2.3 – Ponte unicelular reta, biapoiada com carregamento excêntrico

Tomemos um trecho de viga de comprimento infinitesimal dx como na Figura 2.4, sob um carregamento externo aplicado em uma das almas, e o decomposmos em flexão, torção e distorção (Figura 2.5). Para a torção, considera-se apenas a solução de Bredt, desprezando-se a torção não-uniforme.

Figura 2.4 – Trecho da viga de comprimento infinitesimal dx

Figura 2.5 – Mecanismo portante de uma seção celular [BARBOSA, 1997]

O carregamento de distorção corresponde à diferença entre o carregamento assimétrico e o de torção. Podemos observar que, como ambos tem resultante $dT = P/2 \cdot dx \cdot ds$, o carregamento de distorção é auto-equilibrado e origina a flexão transversal da viga, como nos mostra a Figura 2.6.

A distorção citada tem origem na diferença entre a forma como o esforço de torção decorrente da aplicação de um carregamento externo excêntrico no tabuleiro é aplicada e como ele é naturalmente equilibrado por torção uniforme nas seções celulares (torção de Bredt). Nas pontes celulares curvas, soma-se a esta distorção aquela proveniente da parcela suplementar de torção da equação de equilíbrio (2.3). Admitindo-se, por aproximação, que o momento fletor se aplique integralmente pelas lajes, esta parcela suplementar de distorção pode ser observada na Figura 2.7.

Figura 2.6 – Carregamento de Distorção

a. Elemento de viga curva

b. Decomposição do carregamento decorrente da curvatura

Figura 2.7 - Distorção em viga celular curva decorrente da parcela $\frac{M}{R}$. [BARBOSA, 1997]

Em virtude das variações longitudinais dos esforços externos, da variação do diagrama de momento fletor longitudinal (variando o carregamento de torção M/R), além da existência de transversinas rígidas (geralmente nos apoios), conclui-

se que a distorção da seção transversal não é constante ao longo da viga. Devido a essa variação da distorção, além de tensões tangenciais na seção transversal e de momentos fletores transversais nas paredes da viga, provocados pelo sistema de placas em flexão transversal (quadro), surgem também tensões normais longitudinais provocadas por um sistema de chapas em flexão longitudinal (estrutura plissada), que compatibilizam a variação dos deslocamentos entre seções adjacentes.

Nas pontes curvas unicelulares, portanto, aparecem distorções decorrentes do carregamento externo excêntrico no tabuleiro e da interação entre flexão e torção, provocando tensões tangenciais na seção transversal, momentos fletores transversais nas paredes da viga e tensões normais longitudinais.

2.4. LARGURA COLABORANTE DAS LAJES E HIPERESTATICIDADE

Podemos citar também como um fator complicador nas pontes celulares a largura de colaboração das lajes à flexão. À medida em que aumentamos a largura das lajes e a distância entre as paredes da seção celular, a distribuição horizontal de tensões normais de flexão ao longo da largura da laje deixa de ser constante, como na Figura 2.8 apresentando usualmente picos no cruzamento das almas com as lajes. Esse fenômeno de perda de rigidez às tensões normais é chamado de “*shear lag*” e ocorre como consequência das deformações por cisalhamento. Para melhor compreensão do assunto recomendamos [TESAR, 1996], que discute o fenômeno do ponto de vista da flexão e da torção.

As pontes curvas são sempre hiperestáticas. Isso ocorre mesmo nos exemplos mais simples. Analisemos uma ponte biapoiada com apoios fixos à torção. As reações de

apoio bem como os esforços solicitantes não são obtidos somente através das equações de equilíbrio, sendo necessário utilizar a compatibilidade de deslocamentos para obter tais esforços.

Figura 2.8 - Distribuição de tensões normais de compressão decorrentes da flexão longitudinal, em seção unicelular [BARBOSA, 1997]

CAPÍTULO 3

A PROTENSÃO

*“As vigas em seção celular se adaptam a diversas exigências. Este tipo de seção é particularmente indicado para vigas contínuas de **concreto protendido** (...)” [LEONHARDT, 1979]*

3.1. INTRODUÇÃO

Segundo [MENN, 1990], a protensão pode ser definida como a indução de um estado especial de tensões e deformações com o objetivo de melhorar o comportamento estrutural de uma peça. A protensão pode ser obtida através de deslocamentos dos apoios ou por pré-alongamentos nas armaduras. Em ambos os casos, ocorrem efeitos importantes de retração e fluência no concreto. Por permitir

um melhor controle desses efeitos, o método utilizado hoje em dia em concreto protendido é o de introdução da protensão através das armaduras.

As estruturas de concreto protendido podem ser pré ou pós-tracionadas. As peças pré-fabricadas são normalmente pré-tracionadas, onde o concreto é moldado sobre a forma já contendo o aço tracionado contra blocos de ancoragem externos à peça. Na pós-tração, o aço somente é tracionado após a moldagem e secagem da peça em concreto contra a própria peça. As bainhas normalmente são injetadas com *grout* após a protensão, para permitir aderência entre o concreto e a armadura, e proteger esta última contra a corrosão. A tendência moderna, no entanto, é de estarem combinados os dois tipos de protensão nas diversas obras.

Nos dias de hoje, grande parte das pontes em concreto são protendidas. Realmente, o concreto protendido reina entre as estruturas de pontes de grandes vãos. O fato de protender as obras traz inúmeras vantagens, entre elas ganho de resistência e rigidez (devido ao controle da fissuração), o que permite o alcance de maiores vãos.

Particularmente nas obras curvas, procura-se, pela protensão, através da escolha adequada dos cabos, fazer com que o momento de protensão se oponha ao momento fletor e ao momento torsor produzidos pelas cargas e pela curvatura.

3.2. O DIMENSIONAMENTO DA SEÇÃO E DA PROTENSÃO

3.2.1. Alguns Aspectos sobre o dimensionamento das Seções Celulares

Uma viga em seção celular, conforme já foi dito é normalmente protendida. Antes de falarmos da protensão propriamente dita, citaremos alguns fatores relevantes segundo [STUCCHI, 1984] no dimensionamento da seção.

Para obras de concreto protendido é recomendável o uso de concreto com f_{ck} entre 25 e 35 MPa. Em pontes rodoviárias protendidas, a relação entre altura de construção e o vão deve estar entre 1:17 e 1:25, sendo usual o emprego da relação 1:20 em obras contínuas e 1:17 em vigas isostáticas. Já em pontes ferroviárias, recomenda-se 1:10, para trens-tipo pesados. Quanto a trens-tipo mais leves, como do metrô, pode-se utilizar estruturas mais esbeltas.

As vigas de seção celular podem ter altura constante ou variável. Os vãos de pontes com altura constante usualmente chegam a 70 m em pontes rodoviárias e 50 m em pontes ferroviárias. Ao se utilizar alturas variáveis normalmente atingem-se vãos bem maiores. Neste caso, a seção do meio do vão deve ter altura entre 0,5 e 0,33 da altura do apoio, para pontes rodoviárias e, maior que 0,5 para pontes ferroviárias. Os vãos mais econômicos para pontes em concreto protendido estão entre 30 e 50 metros.

Quanto à forma da seção, esta pode ser retangular ou trapezoidal. A inclinação das almas traz algumas vantagens, como a redução do vão e da espessura média da laje inferior, sendo esta última muito importante, pois diminui o peso próprio da estrutura. Não obstante, o centro de gravidade da seção se eleva, aumentando o braço de alavanca, proporcionando maior eficiência na protensão. Em vigas contínuas geralmente aumenta-se a espessura da laje inferior próximo aos apoios intermediários para resistir aos esforços de compressão devido a momentos fletores negativos. Na seção trapezoidal esse aumento será maior que na seção retangular. Ocorre, portanto uma redução da eficiência devido a um menor braço de alavanca entre as resultantes de tração e compressão. Esta desvantagem da seção trapezoidal é compensada pela economia no meio do vão.

Quanto à distribuição da largura do tabuleiro, vale comentar alguns aspectos. Balanços muito grandes em relação à laje central são desfavoráveis, já que exigem

grande espessura de concreto e consumo de armadura, este não somente no balanço, mas também na alma adjacente. Recomenda-se protender a laje para balanços a partir de 3 m.

A espessura da alma depende do esforço cortante e dos momentos fletores transversais do engastamento da laje superior e do balanço. Usualmente adota-se de 25 a 40 cm de espessura no vão, e nos apoios de 40 a 60 cm. No nosso caso, em que tratamos de obras protendidas, esse valor deve ser suficiente para alojar a bainha de protensão e permitir uma boa concretagem. Já a laje inferior deve possuir a menor espessura possível, a fim de se reduzir o peso próprio. Esta deve estar entre 12 e 15 cm.

3.2.2. Dimensionamento da Protensão

Nas vigas em seção celular, as almas normalmente são protendidas longitudinalmente para vãos maiores que 20 m e as mesas o são transversalmente para larguras maiores que 15 m. Dessa forma elas se tornam mais esbeltas e leves. Podemos dizer que com a protensão diminui-se as deformações, controla-se melhor as fissuras e a variação das tensões no aço sob ação de cargas de tráfego variáveis, pois a resistência à tração do concreto muitas vezes não é excedida. Além disso, tensões muito altas de tração são resistidas de forma mais eficiente através de cabos protendidos.

Muitas vezes o fator dimensionante da espessura das peças, ao invés dos esforços solicitantes, é a área necessária para o alojamento das bainhas e das ancoragens dos cabos de protensão.

3.2.2.1. Protensão Transversal

Para seções com balanços acima de 3 m é usual protender-se o tabuleiro transversalmente. Utiliza-se a protensão limitada, permitindo-se o desenvolvimento de tensões de tração em fase de utilização. Normalmente, são utilizados cabos de pequena capacidade, entre 10 tf (100 kN) e 40 tf (400 kN). A geometria dos cabos é mostrada na figura 3.1.

Figura 3.1. Disposição dos cabos na Laje superior

3.2.2.2. Protensão Longitudinal

A geometria e a disposição dos cabos longitudinais estão intimamente ligadas ao processo executivo da obra.

a) Obras Moldadas “in loco”

As obras moldadas “in loco” são aquelas construídas na posição definitiva, sobre cimbramento geral. Esse processo permite maior liberdade no lançamento e alojamento dos cabos.

A tendência moderna é de se utilizar cabos de grande capacidade, 120 tf, 190 tf ou 270 tf (respectivamente 1200, 1900 e 2700 kN), para reduzir o número de cabos e facilitar o seu alojamento.

O desenvolvimento do cabo apenas dentro da alma (figura 3.2) é, executivamente, a melhor solução, pela inexistência de interferência com a armadura passiva. Além

disso, com essa disposição, conseguem-se menores perdas por atrito, devido à pequena movimentação no plano horizontal.

Figura 3.2. Cabos de protensão locados nas almas

b) Obras executadas por Balanços Sucessivos

Prática corrente atualmente na construção de pontes, o método dos “balanços sucessivos” consiste, basicamente, em executar a superestrutura por aduelas, utilizando-se uma forma que se apoia na aduela anteriormente concretada. A execução se desenvolve simetricamente em relação ao pilar, a fim de mantê-lo sempre em equilíbrio. As aduelas podem ser pré-moldadas ou moldadas “in loco”.

Em ambos os casos, sobretudo nos pré-moldados, os cabos de protensão são distribuídos na laje superior e devem ser necessariamente numerosos, para possibilitar que, em cada aduela executada, se protenda no mínimo um cabo por alma, para solidarizar a aduela ao consolo. Este processo é mostrado na figura 3.3.

Figura 3.3. Ponte executada em consolos sucessivos

c) Obras Moldadas “in loco” sobre cimbramento móvel

Esse método consiste em construir uma estrutura contínua por trechos, de maneira que a junta, entre trechos, caia próximo ao quarto do vão. Esse processo executivo (figura 3.4) é interessante para estruturas que possuam vãos iguais, possibilitando o reaproveitamento das formas para todos os vãos, no caso das vigas contínuas.

A distribuição dos cabos ao longo da alma é extremamente importante para minimizar a probabilidade do aparecimento de fissuras na região de emenda.

Figura 3.4. Obra executada sobre cimbramento móvel

d) Lançamentos Progressivos

O método construtivo de lançamentos progressivos ou por incrementos consiste em executar a obra por trechos junto a um dos encontros, e, à medida em que se termina um módulo, desloca-se todo o conjunto em direção ao outro encontro. A estrutura se desloca por meio de aparelhos de apoio provisórios, revestidos na face inferior com *teflon*, que deslizam sobre uma chapa de aço inoxidável.

Para resistir aos momentos fletores durante a fase executiva, os quais podem ser positivos e negativos, aplica-se protensão centrada com cabos retos. Essa protensão é realizada, quando possível, com cabos de menor potência, de 60 a 70 tf (600 a 700 kN).

Os cabos retos da fase executiva são incorporados à estrutura, e a protensão complementar é realizada através de cabos curvos, que são enfiados, após o término do lançamento em bainhas lançadas durante a fase de concretagem e lançamento.

Figura 3.5. Ponte executada por lançamentos progressivos

3.3. OS EFEITOS DA PROTENSÃO NAS VIGAS CURVAS

Vários autores, em diversos trabalhos científicos, têm tentado explicar o comportamento das vigas curvas em concreto protendido. Como já foi discutido no Capítulo 2, as vigas curvas em planta apresentam diversos entraves para um perfeito entendimento do seu comportamento estrutural, o que é válido também

quando é introduzida a protensão. Neste item discutiremos algumas teorias sobre o comportamento dessas obras especiais.

O estudo a seguir é muito importante para a compreensão do funcionamento real desse tipo de estrutura. Podemos citar alguns acidentes, como os descritos por [LANDUYT e BREEN, 1997] ocorridos em obras curvas protendidas, nas pontes de Las Lomas, na Califórnia (1978) e na rampa de acesso Kapiolani no Havai (1981). Em ambos os acidentes, as estruturas ruíram devido às forças laterais que surgem nas almas das vigas curvas protendidas, esforços que serão discutidos a seguir.

3.3.1. Forças de Desvio nas Seções Celulares

A tendência à retificação dos cabos em uma viga curva produz forças induzidas distribuídas ao longo dos cabos cuja intensidade e direção dependem, não somente das curvaturas em elevação e horizontal, mas também da própria inclinação da viga. Aqui trataremos apenas do caso de viga curva de seção celular com almas retas, por simplificação. Para o caso específico de almas inclinadas, recomenda-se outras bibliografias, como [ÁVILA, 1990].

3.3.1.1. Introdução. Uma Viga Isostática Reta.

Para entendermos melhor o funcionamento das vigas curvas submetidas a protensão, primeiramente vamos analisar uma viga isostática reta protendida. Esta análise foi obtida de [SKAF e STUCCHI, 1995].

Figura 3.6. Separação do Cabo de Protensão da Viga de Concreto

No meio do vão não atua nenhum esforço solicitante já que a viga não recebe carregamento externo. Na figura 3.6 separamos a viga de concreto e o cabo de protensão. Para efetuarmos a análise, devemos considerar os esforços provenientes da interação entre eles. Assim, temos:

- a força de protensão $P(x)$ em cada ancoragem;
- as forças longitudinais de atrito f_{la} ;
- as forças transversais de curvatura f_{tc} .

Como esses esforços correspondem a ação e reação, reunimos o cabo de protensão e a viga de concreto, e então eles se anulam. Assim, embora a viga esteja solicitada à flexo-compressão e o cabo à tração, quando eles são reunidos na viga protendida esses esforços solicitantes se anulam mutuamente.

Considerando-se o cabo isolado, observa-se que o conjunto de forças aplicadas a ele é auto-equilibrado, de forma que nenhuma reação de apoio é gerada. O mesmo pode ser dito na viga de concreto.

Figura 3.7. Equilíbrio da metade esquerda da viga

Consideremos agora a metade esquerda de cada um dos elementos. Como sabemos, a resultante de todos os esforços aplicados ao cabo à direita de A é a força de tração P_A no cabo, no meio do vão. Pelo princípio da ação e reação, podemos dizer que na viga de concreto, a resultante dos esforços aplicados à direita de A é a força de compressão P_A aplicada com excentricidade e . Assim, qualquer que seja a seção considerada da viga de concreto, o efeito da protensão pode ser representado pela força no cabo, aplicada em sentido inverso (compressão) no concreto.

3.3.1.2. Protensão Centrada.

Agora tomemos uma viga horizontalmente curva protendida por um cabo no seu eixo de gravidade. Ela é protendida longitudinalmente com uma força de tração P , direcionada para fora. Surgem forças distribuídas lateralmente f_r ao longo do comprimento curvo para equilibrar as forças de protensão (figura 3.8). Surgem no concreto, então, reações de compressão $C = P$ tangentes à curva e forças laterais ao cabo, f_r , direcionadas para dentro. Essas forças P , C e f_r são variáveis ao longo do vão em função das perdas. Desconsiderando-se essas perdas por atrito e mantendo a curvatura constante, a força lateral passa a ser constante ao longo do comprimento da viga, e as forças de ancoragem, iguais.

Figura 3.8. Forças distribuídas em uma viga horizontalmente curva submetida à protensão centrada

Tomemos um segmento de comprimento infinitesimal de concreto ao longo da curva. A força F_r atua ao longo de uma linha radial e uma força de compressão C atua perpendicularmente aos planos radiais nos extremos do elemento. Devido à curvatura, as forças de compressão C estão desalinhadas. As componentes normais dessas forças de compressão são aditivas e produzem a força C_{arco} .

$$L = R d\mathbf{f}$$

$$\text{sen} \frac{d\mathbf{f}}{2} = \frac{R d\mathbf{f}}{2R} = \frac{d\mathbf{f}}{2}$$

$$C_{arco} = 2P \text{sen} \frac{d\mathbf{f}}{2}$$

$$C_{arco} = P d\mathbf{f}$$

$$F_r = f_r L = f_r R d\mathbf{f} = \frac{P}{R} R d\mathbf{f} = C_{arco}$$

O equilíbrio é então estabelecido por F_r (resultante de f_r) e C_{arco} . Como resultado, não existe força lateral de cisalhamento devido à protensão. A componente radial da força de compressão é chamada por T. Y. Lin em [LANDUYT e BREEN, 1997] de “ação de força distribuída de arco” ou simplesmente “ação de arco”, por isso aqui a chamamos de C_{arco} .

Apesar da força lateral de cisalhamento resultante no plano radial ser zero, a geometria da seção transversal e o ponto de aplicação de f_r podem produzir tensões

de cisalhamento locais muito altas. Se a protensão é aplicada em uma seção transversal curva maciça, as forças de ação de arco estarão concentradas próximo a f_r (figura 3.9.a). Consequentemente, as tensões de cisalhamento serão baixas e a flexão será desprezível. No entanto, em uma viga curva em seção caixão, a situação é completamente diferente. A força f_r atua localmente no cabo, enquanto a distribuição no concreto das forças de arco é desenvolvida ao longo da seção inteira. Neste caso, altas tensões de cisalhamento e flexão transversal estão presentes na alma.

Figura 3.9. Forças de arco. Em: (a) uma seção maciça e (b) em uma seção celular; (c) Força cortante e Momento Fletor na alma.

3.3.1.3. Protensão Excêntrica.

Do ponto de vista do cálculo estático, pode parecer a primeira vista que a protensão apresente alguma dificuldade. Considere-se inicialmente uma viga de curvatura reduzida e biapoiada. A protensão a se aplicar nesse caso é simétrica, equivalente à das vigas retas.

Observando a figura 3.10, onde se considera um trecho de excentricidade constante, verifica-se que a protensão não aplica à viga nenhuma solicitação além de compressão e flexão em torno de z . Assim:

$$N = -P \quad (3.1)$$

$$M_z = -Pe$$

$$M_y = T = V_y = V_z = 0$$

A força radial f_r , decorrente da curvatura, não provoca flexão em torno do eixo y porque é usada apenas para mudar a direção da força normal conforme o eixo da barra.

Figura 3.10. Protensão de Viga Curva com excentricidade constante. (a) Forças aplicadas ao elemento de concreto; (b) elemento de concreto reduzido a uma barra curva; (c) vista em planta dos esforços; (d) vista em elevação dos esforços [STUCCHI, 1984].

Da mesma forma f_r não provoca torção porque o momento $f_r e$ é usado apenas para mudar a direção dos momentos fletores M_z . O momento $f_r e$ é anulado pelo momento decorrente das forças P nas extremidades do trecho do cabo, função da curvatura. Considerando-se a equação (2.3) tem-se:

$$\frac{dT}{ds} = t + \frac{M}{R} = f_r e - \frac{Pe}{R} = \frac{P}{R} e - \frac{Pe}{R} = 0 \quad (3.2)$$

Como essa expressão pode ser aplicada a cada um dos cabos, nem mesmo um cabo isolado (com excentricidade constante) solicita a viga à torção. De fato, o efeito isostático dos cabos não poderia, sem dúvida, ser diferente daquilo que ocorre na seção transversal.

3.3.1.4. Efeito Local na Alma.

O efeito local da presença do cabo na alma pode ser avaliado considerando-se cada alma como uma viga biengastada, na mesa superior e na mesa inferior. Esta viga é carregada pela força radial do cabo, que produz cisalhamento e momento fletor transversal. Estes esforços também sofrem influência da compressão longitudinal do concreto. O efeito de arco produz um carregamento distribuído oposto à força do cabo (mostrado na figura 3.11). A tendência de empurrar radialmente para dentro da curva pelos cabos é compensada parcialmente pela tendência de empurrar radialmente para fora pelo concreto.

Figura 3.11. Efeito local na alma (a) vão e carregamento da viga a ser considerado; (b) Momento Fletor transversal correspondente [PODOLNY, 1985].

Este efeito na alma na maioria das vezes não é considerado, mas muitas vezes as forças estão longe de estarem balanceadas, com a força do cabo sendo muito maior que a força resultante no concreto da alma. Quanto menor o raio de curvatura, maior a diferença entre as forças e maiores serão o momento fletor e a força cortante. Segundo [PODOLNY, 1985] muitas vigas resistiram a essas ações sem terem sido calculadas, mas muitas outras podem estar na iminência de colapso. Um

modelo mais preciso é o quadro completo que considera o engastamento elástico das almas nas lajes.

3.3.2. Vigas Biapoiadas

Em vigas biapoiadas, as forças de protensão no aço estão em equilíbrio com os esforços internos na seção de concreto. A obtenção desses esforços, então é quase que imediata, através dos componentes da força de protensão. Assumindo que o ângulo de inclinação do cabo seja pequeno, as componentes da força de protensão relativas ao sistema de coordenadas centroidal da figura 3.12 são as seguintes:

$$P_x \cong P \quad M_x = P_z e_y - P_y e_z \quad (3.3)$$

$$P_y = P_x \frac{de_y}{dx} \quad M_y = P_x e_z \quad (3.4)$$

$$P_z = P_x \frac{de_z}{dx} \quad M_z = -P_x e_y \quad (3.5)$$

O momento torsor está definido em relação ao centro de cisalhamento:

$$T = M_x - P_z c_y + P_y c_z = P_z (e_y - c_y) - P_y (e_z - c_z) \quad (3.6)$$

Figura 3.12. Componentes da força de protensão e definição dos eixos

Cada uma dessas componentes corresponde a um esforço igual em módulo e em sentido oposto, no concreto:

$$N_c = -P_x \quad M_{c,x} = -P_x \left(e_y \frac{de_z}{dx} - e_z \frac{de_y}{dx} \right) \quad (3.7)$$

$$V_{c,y} = -P_x \frac{de_y}{dx} \quad M_{c,y} = -P_x e_z \quad (3.8)$$

$$V_{c,z} = -P_x \frac{de_z}{dx} \quad M_{c,z} = -P_x e_y \quad (3.9)$$

$$T_c = -P_x \left[(e_y - c_y) \frac{de_z}{dx} - (e_z - c_z) \frac{de_y}{dx} \right] \quad (3.10)$$

Os esforços solicitantes no concreto produzidos pelos vários cabos são obtidos da superposição das componentes dos esforços de cada cabo individualmente.

Como visto no item anterior, a curvatura dos cabos, devido ao seu próprio perfil e à curvatura da viga produz forças de desvio normais ao eixo longitudinal da viga. Estes devem ser equilibrados na seção de concreto, tanto pelo fluxo diferenciado de cisalhamento quanto por forças de desvio das tensões normais. Mesmo que a força de desvio do cabo possa ser tomada concentrada em um único ponto, as tensões de equilíbrio no concreto são tipicamente distribuídas em toda a seção. Surgirá também flexão transversal na alma. De acordo com [MENN, 1990], como tais momentos transversais são necessários para o equilíbrio, eles devem ser considerados no estado limite último.

As forças de desvio dos cabos devido à curvatura horizontal da viga (no plano x - y) estão em equilíbrio com as forças de desvio das tensões normais no concreto devido a N_c , M_{cy} e M_{cz} :

$$f_r^p = f_r^c \quad (3.11)$$

Onde

$$f_r^p = -\frac{P_x}{R} \quad e \quad f_r^c = -\frac{1}{R} \mathbf{s}_x(N_c, M_{cy}, M_{cz}) \quad (3.12)$$

As forças de desvio dos cabos devido ao perfil dos mesmos relativo ao eixo da viga são dadas pelas seguintes expressões:

$$u_y^p = \frac{dP_y}{dx} = P_x \frac{d^2 e_y}{dx^2} \quad e \quad u_z^p = \frac{dP_z}{dx} = P_x \frac{d^2 e_z}{dx^2} \quad (3.13)$$

Assumimos que u_y^P e u_z^P estão aplicados no centro de cisalhamento. O momento torsor correspondente é então:

$$\begin{aligned} m_{t,P} &= -u_y^P (e_z - c_z) + u_z^P (e_y - c_y) \\ &= P_x \left[-\frac{d^2 e_y}{dx^2} (e_z - c_z) + \frac{d^2 e_z}{dx^2} (e_y - c_y) \right] \end{aligned} \quad (3.14)$$

Estas forças são equilibradas na seção de concreto pelo fluxo diferencial de cisalhamento dv/dx devido a V_{cy} , V_{cz} e T_c . Em uma viga prismática, a distribuição de dv/dx na seção transversal é similar ao fluxo de cisalhamento, v . A figura 3.13 nos mostra fluxos de cisalhamento em uma seção devidos a V_{cy} , V_{cz} e T_c . Para vigas com seção transversal variável, a distribuição de cisalhamento em ambos os lados da mesma devem ser considerados no cálculo de dv/dx .

Figura 3.13. Fluxos de cisalhamento em uma seção celular (a) devido a V_{cy} ; (b) devido a V_{cz} e (c) devido a T_c [MENN, 1990].

Vale ressaltar que o processo de obtenção do momento torsor apresentado em [GHALI, 1986] contraria o apresentado em [STUCCHI, 1984] e [MENN, 1990] e nos parece menos completo. Portanto não será utilizado nos cálculos a seguir.

3.3.3. Vigas de Vários Vãos

No desenvolvimento de vigas de vários vãos pode ser utilizado o princípio e as equações apresentadas no item anterior, para vigas biapoiadas.

Tanto [STUCCHI, 1984] como [MENN, 1990] comentam que o hiperestático de protensão provoca torção em decorrência da curvatura, e pode ser calculado por:

$$\frac{dT}{ds} = \frac{M(\text{hiperestático})}{R} \quad (3.15)$$

3.3.4. Concepção da Protensão e Posicionamento dos cabos

3.3.4.1. Conceitos Gerais

Muitos pesquisadores e projetistas têm tentado descrever as melhores condições para concepção e traçado dos cabos de protensão das vigas curvas. Apesar de muitos sucessos nesta área, alguns autores têm apresentado soluções confusas, com difícil aplicação prática. Neste item apresentaremos algumas soluções interessantes e suas justificativas.

A concepção da protensão em vigas curvas é normalmente baseada nas mesmas considerações das vigas retas. Segundo [MENN, 1990], deve-se pelo menos evitar o aparecimento de tensões de tração na laje inferior devidas a cargas permanentes. A torção, que como sabemos, aumenta as tensões de tração na flexão, deve ser considerada no cálculo da força de protensão necessária. Os cabos em pontes curvas podem ser arranjados como descrito no item 3.1, para pontes retas. É também possível, no entanto, arranjar os cabos para melhorar o comportamento da estrutura não somente na flexão e cisalhamento mas também na torção.

Segundo [GHALI, 1986], ao protendermos uma ponte curva utilizando a mesma força de protensão e perfil dos cabos de uma ponte reta, os resultados dos momentos torsores na maior parte dos vãos possuirão o mesmo sinal do momento torsor devido a carga permanente. Em outras palavras, a protensão simplesmente elimina o cisalhamento vertical e a flexão causadas pela carga permanente, mas aumenta a torção. Este fato não pode ser ignorado no projeto de uma viga curva.

Em pontes celulares, cabos que neutralizam a torção podem serem arranjados nas almas ou nas mesas superior e inferior. O perfil do cabo pode ser escolhido, por exemplo, para balancear uma parte dos momentos fletores devido a cargas permanentes. Em um sistema isostático, o momento torsor induzido por um cabo apenas é dado por:

$$T_c(P) = -P_x \left[(e_y - c_y) \frac{de_z}{dx} - (e_z - c_z) \frac{de_y}{dx} \right] \quad (3.16)$$

Quando o cabo é colocado na alma e $(e_y - c_y)$ é constante, a derivada de_z / dx pode ser escolhida para opor-se ao diagrama de momento torsor devido às cargas em cada ponto ao longo da viga. Do mesmo modo, quando o cabo é colocado na mesa superior ou inferior e $(e_z - c_z)$ é constante, a torção pode ser balanceada por uma escolha apropriada da derivada de_y / dx .

Finalmente, entre as soluções estritamente analíticas, podemos citar [JOHANSSON, 1975], que apresenta o cálculo do traçado de cabos de protensão considerando-se em separado a flexão e a torção. Tais soluções são obtidas através do cálculo de extensas equações diferenciais.

3.3.4.2. O Equilíbrio da Torção pela Protensão

Em vigas simplesmente apoiadas é possível posicionar os cabos de maneira a balancear um dado diagrama de momentos torsores sem alterar o efeito da protensão na flexão. Isto é feito ao colocarmos os cabos da alma externa acima e da alma interna abaixo, perfil este determinado pelo comportamento na flexão (figura 3.14). Como mostrado na figura 3.15, o equilíbrio da torção neste caso aumenta a flexão transversal. A diminuição da armadura de torção é conseguida com o aumento da armadura à flexão transversal.

Figura 3.14. Arranjo dos cabos em uma viga biapoia para compensar torção e flexão (a) modelo; (b) momentos torsores devidos a carga permanente; (c) arranjo dos cabos para compensar o momento torsor; (d) arranjo dos cabos para compensar o momento fletor; (e) superposição dos arranjos (c) e (d) [MENN, 1990].

Figura 3.15. Esforços transversais em uma seção celular (a) devido ao carregamento; (b) devido aos cabos nas almas.

Cabos nas mesas superior e inferior podem compensar a torção e o momento fletor transversal (figura 3.16). Neste arranjo, a economia nas armaduras de torção e flexão transversal é obtida com o custo da protensão adicional.

Figura 3.16. Esforços transversais em uma seção celular (a) devido ao carregamento; (b) devido a cabos de protensão situados nas lajes de topo e fundo.

Por estas razões, o equilíbrio da torção através da protensão é normalmente evitado. Apesar do arranjo dos cabos, as economias na armadura são pequenas e quase sempre desfavoráveis devido a dificuldades na construção.

Em vigas contínuas, é impossível equilibrar um dado diagrama de momentos torsores ajustando-se o perfil dos cabos nas almas sem reduzir o efeito de flexão da protensão (figura 3.17). Se a torção em vigas contínuas deve ser compensada pela protensão, é preferível usarem-se cabos adicionais nas lajes de topo e fundo (figura 3.18).

Segundo Egger e Zellner em [JOHANSSON, 1975], a protensão com dois cabos de alturas distintas nas almas é mais econômico que a protensão contra torção apenas nas mesas.

A protensão em separado para flexão e torção mostra-se vantajosa do ponto de vista da execução, em virtude da dificuldade de se colocar cabos de diferentes formas nas almas das vigas. Também é beneficiada nos casos onde os momentos fletor e torsor não estão na mesma proporção.

Figura 3.17. Arranjo teórico de cabos em uma viga contínua para compensar a flexão e a torção. (a) modelo; (b) momentos torsores devidos a carga permanente; (c) arranjo dos cabos para compensar o momento torsor; (d) arranjo dos cabos para compensar o momento fletor; (e) superposição dos arranjos (c) e (d) [MENN, 1990].

Figura 3.18. Arranjo dos cabos nas lajes de topo e fundo de vigas contínuas para compensar torção devido ao carregamento permanente [MENN, 1990].

No sub-item 3.3.4.4 mostraremos a proposta de [LEONHARDT, 1979], que contempla os requisitos mostrados acima para equilíbrio da torção e flexão, mas abordando o tema através de protensão simétrica e assimétrica.

3.3.4.3. Solicitações Transversais no Estado Limite Último

Em vigas retas o efeito da protensão longitudinal é essencialmente restrito ao comportamento estrutural longitudinal. A protensão contribui diretamente para a resistência à flexão das seções transversais; a força de ruptura dos cabos é portanto considerada no cálculo do momento último. A componente vertical da protensão, V_p , normalmente atua contra o cisalhamento devido ao carregamento. Ela pode ser adicionada à resistência da seção transversal ou, de maneira equivalente, à cortante de cálculo:

$$V_{d,efetivo} = V_d + V_p \quad (3.17)$$

Em vigas curvas, o efeito da protensão longitudinal é mais amplo. Como mostrado nas figuras 3.14 e 3.15, a protensão tanto provoca torção, como flexão transversal.

O momento torsor provocado pela protensão, T_p , pode ser adicionado ao cálculo da torção assim como para a força cortante:

$$T_{d,efetivo} = T_d + T_p \quad (3.18)$$

Os esforços efetivos na seção são também usados para o cálculo da seção transversal de peças sob efeitos combinados de cortante e flexão transversal:

$$m_{d,efetivo} = m_d + m_p \quad (3.19)$$

As componentes dos esforços efetivos na seção devido à protensão (V_p , T_p , m_p) devem ser calculadas utilizando-se P_{X} quando o esforço for diminuído pela protensão e $1,2 P_0$ quando for aumentado pela mesma.

3.3.4.4. Protensão Simétrica X Protensão Assimétrica

Neste item se fará uma análise considerando exemplos de cablagem retirados de [STUCCHI, 1984].

Observe a figura 3.19. Só solicita isostaticamente a viga curva à torção um conjunto estaticamente assimétrico de cabos, seja por $P_1 \neq P_2$, seja por $\alpha_1 \neq \alpha_2$, de forma que:

$$T = (P_1 \sin \alpha_1 - P_2 \sin \alpha_2) \frac{b}{2} \neq 0 \quad (3.20)$$

A equação acima pode ser entendida como a aplicação da equação 3.16, retirada de [MENN, 1990].

Figura 3.19. Esforços devidos a Protensão Simétrica e Assimétrica [STUCCHI, 1984]

Note-se que mesmo a protensão geométrica simétrica contém assimetria estática. A viga interior, sendo mais curta, tem cabos mais inclinados.

Essa diferença de inclinação determina torção que se adiciona à torção das cargas externas. Uma outra maneira de visualizar essa torção se obtém pela consideração das forças devido à mudança de direção dos cabos.

Figura 3.20. Protensão Geometricamente Simétrica de Viga Curva [STUCCHI, 1984]

Sendo ℓ o vão medido no eixo da viga:

$$\ell = \frac{1}{2}(\ell_1 + \ell_2) \quad (3.21)$$

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= P \frac{d^2 e}{dx^2} = 2P \sin \alpha_1 / \ell \\ u_2 &= P \frac{d^2 e}{dx^2} = 2P \sin \alpha_2 / \ell \end{aligned} \right\} u_1 < u_2$$

Note-se que u_1 e u_2 são as resultantes das forças de mudança de direção dos cabos atuantes nas almas externa e interna, respectivamente, de um elemento de viga curva de comprimento unitário, medido no eixo.

Assim se conclui que, para obter uma protensão estaticamente simétrica, basta prever o que indica a figura 3.19, isto é: $P_1=P_2$ e $\alpha_1=\alpha_2$ em todas as seções transversais.

Sendo $y_1=a_1x_1^2$ e $y_2=a_2x_2^2$ as equações das parábolas descritas pelos cabos no plano vertical, $\alpha_1=\alpha_2$ exige $a_1\bar{x}_1 = a_2\bar{x}_2$ ou:

$$\frac{a_1}{a_2} = \frac{\bar{x}_2}{\bar{x}_1} = \frac{\ell_2/2}{\ell_1/2} = \frac{\ell_2}{\ell_1}$$

Assim, em geral, $y_1 \neq y_2$ ou $f_1 \neq f_2$, ou seja, a cablagem estaticamente simétrica não é geometricamente simétrica.

Quando a curvatura da viga é mais acentuada é interessante aliviar a torção usando protensão geometricamente assimétrica. Nos casos críticos pode-se inclusive usar protensão nas lajes. [LEONHARDT, 1979] fornece indicações para esses casos, indicações essas reproduzidas na figura 3.21.

Podemos obter assimetrias por geometria ou por carregamento. Para ângulos centrais de até 50° , temos como sugestão os perfis indicados em (a) e (b). A protensão nas lajes indicada em (c) é indicada para vigas contínuas de grande curvatura. Também para grandes curvaturas, [LEONHARDT, 1979] aconselha a solução indicada em (d), com $\phi > 50^\circ$ e (e) para casos excepcionais.

Todas essas assimetrias provocam torção que procura aliviar a torção decorrente das cargas externas, aliviando consideravelmente a estrutura. Segundo [STUCCHI, 1984], ocorre porém que a torção aplicada pelos cabos não corresponde à distribuição do fluxo de Bredt, provocando, por consequência, distorção. Quanto maior o alívio da torção, tanto maior o acréscimo da distorção.

Ainda de acordo com [LEONHARDT, 1979], as forças horizontais de desvio podem provocar tração transversal na alma porque f_t^p atua como carga linear e a força no concreto f_t^c atua distribuída na alma, conforme mostrado no item 3.3.1.4. Por isso, deve-se colocar os cabos na parte exterior da alma, tendo em vista a curvatura, para se evitar tensões de tração na direção transversal fora do cabo, mostrado na figura 3.22. No caso de grandes curvaturas, pode ser necessário adotar uma armadura para absorver estes esforços atuantes na alma.

Figura 3.21. Protensão Assimétrica de Viga Curva [STUCCHI, 1984]

Figura 3.22. Posicionamento dos cabos devido ao efeito local na alma [LEONHARDT, 1979]

CAPÍTULO 4

MÉTODOS DE CÁLCULO

4.1. MÉTODO SIMPLIFICADO DE CÁLCULO

Apresentaremos neste item um Método Simplificado para cálculo dos esforços solicitantes em pontes celulares curvas protendidas, adaptado de [BARBOSA, 1997].

O método consiste em duas etapas. Primeiramente, determinam-se os esforços longitudinais na ponte retificada (momentos fletores e forças cortantes) com os carregamentos verticais atuantes na ponte curva, acrescido do momento torsor devidamente calculado. Em seguida, determina-se de maneira aproximada a

distorção da seção transversal e os efeitos a ela associados pelo “Método de Steinle”.

4.1.1. Cálculo dos Esforços Longitudinais

No cálculo dos esforços solicitantes longitudinais na viga curva, serão admitidas algumas hipóteses simplificadoras, listadas a seguir:

- a) despreza-se totalmente os efeitos da torção não-uniforme, assumindo única e exclusivamente a torção uniforme de “Saint Venant”, com todas as hipóteses nela embutidas (solução de Bredt);
- b) a seção transversal é indeformável;
- c) a distribuição das tensões normais decorrentes da flexão longitudinal obedece à distribuição linear da resistência dos materiais, sendo necessário calcular larguras colaborantes para levar em conta o efeito de “*shear lag*”;
- d) são desprezadas as parcelas de momento fletor e flecha geradas pela torção;
- e) é desprezado o carregamento de torção proveniente da excentricidade do peso próprio da viga, isto é, mesmo para seções simétricas, o peso próprio das vigas curvas é excêntrico, em decorrência da curvatura. Atua no sentido de abaixar o lado da viga externo à curva, levantando o lado interno;

4.1.1.1 Esforços provenientes de Carregamentos Externos

No caso de carregamentos externos (como o peso próprio), o Momento Fletor, Força Cortante Vertical e Flecha são calculados de acordo com a hipótese d, como se a viga fosse retificada (despreza-se T/R em (1.2) e q/R na equação (2.4)). O erro cometido no cálculo do momento fletor e da flecha é insignificante para pequenas curvaturas, pois os momentos torsores são pequenos em relação aos fletores, o mesmo ocorrendo com a rotação em relação ao deslocamento vertical. Aumentando-se a curvatura, a torção passa a ser importante, não podendo mais ser feita essa consideração. Já no cálculo da força cortante, não há erro, pois a equação da viga reta é idêntica à da viga curva.

O carregamento de torção é aplicado na viga retificada conforme a equação abaixo, já demonstrada no Capítulo 2.

$$\frac{dT}{ds} = t + \frac{M}{R} \quad (4.1)$$

A parcela t seria uma carga aplicada excentricamente no tabuleiro, e a torção proveniente da flexão seria aplicada ao tomarmos o diagrama de momentos fletores da viga retificada, dividi-lo pelo raio de curvatura e aplicá-lo como um momento distribuído de torção. Para momentos fletores positivos, a torção atua no sentido de abaixar o lado externo à curva. Após definir-se o carregamento de torção, aplica-se à viga retificada e traça-se o diagrama de torção.

4.1.1.2 Esforços Provenientes do Carregamento de Protensão com cabos parabólicos, geometricamente simétricos

Já no caso da protensão, os esforços solicitantes devem ser calculados, como descrito no capítulo 3. A força normal é dada pela força do cabo na direção normal

à seção transversal, e o momento fletor é dado por essa força normal multiplicada pela excentricidade na seção analisada.

As forças devidas à mudança de direção dos cabos podem ser calculadas por:

$$u_1 = \frac{2 \cdot P \cdot \sin \alpha_1}{\ell} \cong \frac{2 \cdot P \cdot 2 \cdot a_1 \cdot \bar{x}_1}{\ell} = \frac{4 \cdot P \cdot a_1 \cdot \bar{x}_1}{\ell} \quad (4.2)$$

$$u_2 = \frac{2 \cdot P \cdot \sin \alpha_2}{\ell} \cong \frac{2 \cdot P \cdot 2 \cdot a_2 \cdot \bar{x}_2}{\ell} = \frac{4 \cdot P \cdot a_2 \cdot \bar{x}_2}{\ell}$$

Onde :

u_1 = força de desvio na alma externa;

u_2 = força de desvio na alma interna;

$a, \bar{x}$ = parâmetros da parábola descrita pelo cabo;

ℓ = comprimento médio das almas.

Como:

$$f_1 = f_2 = a_2 \cdot \bar{x}_2^2 = a_1 \cdot \bar{x}_1^2 \quad (4.3)$$

$$a_1 \cdot \bar{x}_1 = \frac{f}{\bar{x}_1} = \frac{2 \cdot f}{\ell_1} \quad a_2 \cdot \bar{x}_2 = \frac{2 \cdot f}{\ell_2}$$

Temos:

$$\ell_1 = \frac{\ell}{R} \cdot \left(R + \frac{b_s}{2} \right) \quad u_1 = \frac{8 \cdot P \cdot f}{\ell^2 \cdot \left(1 + \frac{b_s}{2 \cdot R} \right)} \quad (4.4)$$

$$\ell_2 = \frac{\ell}{R} \cdot \left(R - \frac{b_s}{2} \right) \quad u_2 = \frac{8 \cdot P \cdot f}{\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{b_s}{2 \cdot R} \right)}$$

Onde:

f = flecha dos cabos no meio do vão;

ℓ_1, ℓ_2 = comprimento da alma externa e alma interna, respectivamente.

Figura 4.1. Torção devido a protensão dos cabos (u_1 e u_2) [STUCCHI, 1984]

De posse dos resultados acima, e lembrando que as forças de desvio nas almas estão deduzidas para um comprimento médio das almas, podemos obter a Força Cortante vertical e o Momento Torsor. Este último é calculado por:

$$t = (u_2 - u_1) \cdot \frac{b_s}{2} \quad (4.5)$$

$$T = t \cdot \frac{\ell}{2} \Rightarrow T = (u_2 - u_1) \cdot \frac{b_s \cdot \ell}{4}$$

A Força Cortante Vertical é calculada como usualmente, utilizando-se as forças de desvio verticais, calculadas anteriormente.

4.1.1.3 Cálculo das Tensões

Apesar de muito conhecidas, mostraremos em seguida as fórmulas para cálculo das tensões normais e de cisalhamento da Resistência dos Materiais, que podem ser utilizadas no caso das pontes celulares.

As tensões normais devidas aos momentos fletores são calculadas conforme usualmente, e mostradas a seguir:

$$\sigma_x = \frac{M_y z}{I_y} \quad (4.7)$$

onde M_y é o momento fletor atuante na seção; z é a distância vertical da linha neutra à fibra analisada e I_y é o momento de inércia da peça.

As tensões de cisalhamento (consideradas constantes ao longo da espessura) devidas à força cortante podem ser calculadas como a seguir:

$$\mathbf{t}_{méd} = \frac{VQ}{I_y t_p} \quad (4.8)$$

onde V é a força cortante centrada; Q é o momento estático em relação à linha neutra da área onde o limite é o ponto estudado; t_p é a espessura da parede e I_y é o momento de inércia da seção estudada.

Vale lembrar que o cálculo das tensões tangenciais de torção, como hipótese, deve ser efetuado considerando a torção uniforme de “Saint Venant”, dada pela primeira fórmula de Bredt:

$$\mathbf{t} = \frac{T}{2 \cdot t_p \cdot A} \quad (4.9)$$

onde: T é o momento torsor; t_p é a espessura da parede e A corresponde à área limitada pelos eixos da seção celular.

4.1.2. Cálculo da Distorção. A Analogia de Viga sobre Apoio Elástico

A segunda etapa do Método Simplificado de Cálculo consiste na obtenção das tensões normais, longitudinais e momentos transversais decorrentes da distorção da seção. Utilizaremos o “Método de Steinle”, analisado em detalhes em [STUCCHI, 1982].

A distorção da seção celular é resistida por dois sistemas trabalhando conjuntamente: um de placas em flexão transversal (quadro) e um sistema de chapas em flexão longitudinal (estrutura plissada). A solução do problema consiste em garantir o equilíbrio entre a soma das cargas suportadas por cada um dos sistemas e garantir a compatibilidade entre os mesmos.

A Analogia de Viga sobre Apoio Elástico é utilizada para o cálculo da distorção e das tensões normais, tangenciais e momentos fletores transversais dela decorrentes. Trata-se de uma analogia entre o problema da seção celular e uma viga em apoio elástico.

Com base em [BARBOSA, 1997], apresentaremos a seguir um roteiro para o cálculo da distorção em uma seção celular.

Inicialmente devemos calcular as propriedades geométricas da seção estudada.

Figura 4.2. Nomenclaturas para as dimensões da seção transversal

Começamos pelas áreas das seções transversais das chapas:

$$A_0 = b_s \cdot h \quad A_a = b_a \cdot t_a \quad (\text{m}^2) \quad (4.10)$$

Calculamos os momentos de inércia à flexão longitudinal das placas:

$$I_a = \frac{t_a^3}{12 \cdot (1 - \mathbf{n}^2)} \quad I_s = \frac{t_s^3}{12 \cdot (1 - \mathbf{n}^2)} \quad I_i = \frac{t_i^3}{12 \cdot (1 - \mathbf{n}^2)} \quad (\text{m}^3) \quad (4.11)$$

Devemos calcular I_Q e I_w , que são os momentos de inércia a distorção do quadro e da estrutura plissada, respectivamente, e dados por:

$$I_Q = \frac{12 \cdot I_a \cdot (\mathbf{x} + \mathbf{h})}{b_a \cdot \mathbf{x} \cdot (2 + \mathbf{r}_s - \mathbf{h})} \quad (\text{m}^2) \quad (4.12)$$

$$I_w = \frac{A_0^2 \cdot A_a}{12} \cdot \frac{b^2 \cdot y_i + 2 \cdot (b^2 - b + 1) \cdot y_s}{\left[1 + x + b \cdot \left(1 + \frac{1}{x} \right) \right]^2} \quad (\text{m}^6) \quad (4.13)$$

$$\text{onde } x = \frac{b_i}{b_s}; y_s = \frac{b^3 \cdot t_s}{b_a \cdot b_s^2 \cdot t_a}; y_i = \frac{b_i \cdot t_i}{b_a \cdot t_a}; b = \frac{y_s + x + 2}{1 + x \cdot (2 + y_i)}; r_s = \frac{b_s \cdot I_a}{b_a \cdot I_s};$$

$$r_i = \frac{b_i \cdot I_a}{b_a \cdot I_i}; h = \frac{r_s + x + 2}{r_i \cdot x + 2 \cdot x + 1} \quad (4.14)$$

A seguir, criamos uma viga análoga, reta sobre apoio elástico e definida como na figura 4.3, tendo apoios fixos onde houver transversinas.

Figura 4.3. Viga sobre apoio elástico análoga

Equação de equilíbrio:

$$F_{a0} = F_{a1} + F_{a2} \quad (4.15)$$

$$gEI_Q + g^{iv}EI_W = \frac{p_{eq}b_sb_i}{2(b_s + b_i)}$$

$$ky + EI \cdot y^{iv} = \bar{p}$$

Como foi ressaltado no capítulo 2 ao falarmos sobre a interação da torção com a flexão nas vigas curvas (Figura 2.7), temos que aplicar na viga sobre apoio elástico, além do carregamento externo excêntrico p , um carregamento equivalente devido a essa interação. Como mostrado em [STUCCHI, 1982] no caso geral e [STUCCHI, 1984] no caso específico das pontes curvas, este carregamento equivalente é dado por:

$$p_{eq} = \frac{2M}{R b_i} - p \quad (4.16)$$

Onde M é positivo quando traciona a laje inferior; p é positivo quando atua na alma interna à curva.

A convenção de sinais acima nos mostra que a distorção gerada por momentos fletores positivos é no sentido de abaixar a alma interna à curva.

Tabela 4.1. Analogia de Viga sobre Apoio Elástico

Viga sobre apoio elástico	Distorção do Perfil
Rigidez à flexão EI (tfm ²)	Rigidez da Estrutura Plissada EI_w (tfm ⁴)
Coeficiente elástico k (tf/m ²)	Rigidez do Quadro EI_Q (tf)
Carga distribuída $p_{eq} = -\frac{2M}{R b_i}$ (tf/m)	Carregamento de distorção $\frac{p_{eq} b_a b_i}{2h(b_s + b_i)}$ (tf)
Flecha y (m)	Distorção g (rad)
Momento Fletor M (tfm)	Bimomento de Distorção B (tfm ²)
Força Cortante V (tf)	Bicortante B' (tfm)
Apoio	Transversina

Por fim, devemos lembrar que o efeito da curvatura na viga análoga é desprezado, apenas sendo considerado no carregamento distribuído (parcela M/R).

No cálculo da distorção devido ao carregamento de protensão deve-se utilizar o procedimento similar ao caso da torção, utilizando-se os valores das forças de desvio verticais, demonstrado no item 4.1.1.2.

O carregamento de distorção na protensão, é então, dado por:

$$p = (u_1 - u_2) \cdot \frac{b_s \cdot b_i}{2 \cdot (b_s + b_i)} \quad (4.17)$$

4.1.2.1. Tensões Normais Longitudinais

Segundo o método descrito, o momento fletor encontrado para a viga sobre apoio elástico equivale ao bimomento de distorção B e determina o diagrama de tensões normais longitudinais da seção analisada. O diagrama é definido na Figura 4.4 levando-se em conta a convenção adotada para as cargas, o que dá bimomentos positivos.

$$\begin{aligned} s_a &= \frac{B}{I_w} \cdot \frac{\frac{h \cdot b_s}{2}}{1 + x + b \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \\ s_b &= b \cdot s_a \\ s_c &= \frac{b}{b_s} \cdot s_a \end{aligned} \quad (4.18)$$

Figura 4.4. Tensões normais longitudinais decorrentes da distorção [BARBOSA, 1997]

4.1.2.2. Momentos Fletores Transversais

Para uma dada seção, a flecha y encontrada para a viga sobre apoio elástico equivale à distorção e determina o diagrama de momentos fletores transversais desta seção da seguinte forma:

$$M_A = \frac{g \cdot 6 \cdot E \cdot I_a}{b_a \cdot (2 + r_s - h)}; M_B = h M_A \quad (4.19)$$

Figura 4.5. Momentos fletores transversais decorrentes da distorção [BARBOSA, 1997]

No caso da protensão devemos também incluir o efeito transversal do cabo na alma (chamado de efeito local), já discutido no item 3.3.1.4.

4.1.2.3. Tensões Tangenciais

Para uma dada seção, a força cortante V encontrada para a viga sobre apoio elástico equivale à derivada do bimomento B (bicortante B') e determina o diagrama de tensões tangenciais causadas pela distorção desta seção (Figura 4.6) da seguinte forma:

$$w_a = \frac{\frac{h \cdot b_s}{2}}{1 + x + b \left(1 + \frac{1}{x} \right)} \quad \bar{f}_0 = \frac{A_a \cdot w_a}{12} \cdot \left[6 \cdot (b - 1) + 3 \cdot b \cdot y_i + \frac{2 \cdot x \cdot (2 - b) - 2 \cdot y_s}{(1 + x)} \right] \quad (4.20)$$

$$d = \frac{b}{b_s}$$

Figura 4.6. Tensões tangenciais decorrentes da distorção [BARBOSA, 1997]

$$t_1 = -\frac{B'}{I_w \cdot t} \cdot w_a \cdot \frac{A_s}{4} \cdot (1 - d^2) \quad (4.21)$$

$$t_2 = -\frac{B'}{I_w \cdot t} \cdot \left\{ w_a \left[\frac{b \cdot A_i}{4} + \frac{A_a}{2} \cdot (b - 1) \right] + w_a \cdot \frac{A_s}{4} \cdot (1 - d^2) - \bar{f}_0 \right\}$$

$$t_3 = -\frac{B'}{I_w \cdot t} \cdot \left\{ w_a \left[\frac{b \cdot A_i}{4} + \frac{A_a}{2} \cdot (b - 1) \right] - \bar{f}_0 \right\}$$

$$t_4 = -\frac{B'}{I_w \cdot t} \cdot \left(w_a \cdot \frac{b \cdot A_i}{4} - \bar{f}_0 \right)$$

$$t_5 = -\frac{B'}{I_w \cdot t} \cdot (-\bar{f}_0)$$

$$t_6 = -\frac{B'}{I_w \cdot t} \cdot \left\{ w_a \left[\frac{b \cdot A_i}{4} + \frac{A_a}{2} \cdot (b - 1) \right] - w_a \cdot \frac{A_s}{4} \cdot d^2 - \bar{f}_0 \right\}$$

4.2. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Com o advento dos computadores digitais iniciou-se o desenvolvimento do Método dos Elementos Finitos para solução de problemas práticos de engenharia. O princípio do método está em conceber um modelo matemático e resolver inúmeras equações algébricas, e somente com o uso corrente dos computadores se tornou possível a sua aplicação em casos práticos.

Nos dias de hoje o Método dos Elementos Finitos é largamente utilizado e difundido entre projetistas e cientistas na resolução de estruturas.

Em um único processamento, o método permite considerar os fenômenos estudados anteriormente, como a torção não uniforme, a distorção da seção transversal, o efeito “*shear lag*” e a interação entre torção e flexão.

No problema das pontes celulares, as paredes da viga serão simuladas neste trabalho através de uma malha tridimensional de elementos finitos do tipo “*shell*”, enquanto os cabos de protensão são simulados por elementos do tipo “*truss*”. O modelo será resolvido pelo programa *ADINA*[®], desenvolvido pela equipe do Prof. K.. J. Bathe, do Massachusetts Institute of Technology, USA.

Os materiais serão adotados como homogêneos e isotrópicos, e a análise a ser efetuada será estática, com linearidade física e geométrica. Considerando-se um f_{ck} de 30 MPa e calculando-se E_c de acordo com o Projeto de Norma da nova NB1-2000, adotou-se os parâmetros para os materiais mostrados na tabela 4.2:

Tabela 4.2. Parâmetros dos Materiais

Material/parâmetro	Concreto	Aço de Protensão
E (MPa)	26.702	197.500
ν	0,2	0,3

Os elementos do tipo “*truss*” possuem dois graus de liberdade. A única força transmitida pelo elemento é a força longitudinal. A introdução da protensão é feita através de deformações iniciais sofridas pelos elementos de cabo. Por hipótese, são considerados os esforços de atrito, pois o cabo é admitido totalmente aderido ao concreto.

Os elementos do tipo “*shell*” possuem 4 nós e obedecem às seguintes hipóteses da teoria de viga de Timoshenko e de placas de Mindlin/Reissner:

- As partículas de material que originalmente estão sobre uma linha normal à superfície da casca, permanecem normais após a deformação;
- A tensão na direção normal à superfície média da casca é zero.

Os elementos tipo “*shell*” possuem 6 graus de liberdade por nó, compreendendo rotações e translações em torno dos três eixos globais.

O cálculo das resultantes de tensões, forças e momentos, as deformações de membranas e curvaturas e a posição dos eixos neutros podem ser solicitados ao *ADINA*. Estes resultados são dados nos locais correspondentes às projeções dos pontos de integração na superfície média do elemento (ver figura 4.7). A figura 4.8 mostra a convenção positiva para forças e momentos. A tabela 4.3 contém as fórmulas usadas para calcular as resultantes de tensões e deformações e as posições da linha neutra. Elas são sempre calculadas no sistema Cartesiano local, (veja figura 4.6) r , s e t .

Figura 4.7. Eixos Locais no elemento “*shell*” do *ADINA* [ADINA, 1999]

Figura 4.8. Convenção dos Sinais Positivos [ADINA, 1999]

Tabela 4.3. Resultados na seção do elemento “shell” do ADINA

Resultantes das tensões (forças e momentos)	
$R_{rr}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{rr}^- dz$	$M_{rr}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ss}^- z dz$
$R_{ss}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{ss}^- dz$	$M_{ss}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{rr}^- z dz$
$R_{rs}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{rs}^- dz$	$M_{rs}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{rs}^- z dz$
$R_{tt}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{tt}^- dz$	
$R_{rt}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{rt}^- dz$	
$R_{st}^- = \int_{-h/2}^{h/2} \mathbf{s}_{st}^- dz$	

4.2.1. Cálculo dos Esforços através do desmembramento das tensões

Após o processamento, precisa-se desmembrar as parcelas correspondentes a cada solicitação (flexão, força cortante, distorção, torção uniforme, torção não uniforme, “shear lag”). Neste item será apresentado o método desenvolvido por [BARBOSA, 1997].

4.2.1.1. Desmembramento das Tensões Normais Longitudinais

A tensão normal longitudinal pode ser desmembrada por tensões decorrentes do par P - Pe , torção não uniforme, distorção e “shear lag”, temos:

$$\mathbf{s}^{MEF} = N.(\mathbf{s}_N^1 + \mathbf{s}_{int}) + M.(\mathbf{s}_f^1 + \mathbf{s}_f^{SL}) + B_{tnu}.(\mathbf{s}_{tnu}^1 + \mathbf{s}_{tnu}^{SL}) + B_d.(\mathbf{s}_d^1 + \mathbf{s}_d^{SL}) \quad (4.22)$$

onde:

N = Força normal atuante na seção;

$\mathbf{s}_N^1$ = Tensões normais longitudinais decorrentes da força normal unitária;

s_{int} = Tensões normais longitudinais decorrentes da introdução de carga da protensão;

M_f = Momento Fletor atuante na seção;

s_f^1 = Tensões normais longitudinais decorrentes da flexão por momento fletor unitário;

s_f^{SL} = Tensões normais longitudinais decorrentes de “*shear lag*” por um momento fletor unitário;

B_{tnu} = Bimomento de torção não uniforme atuante na seção;

s_{tnu}^1 = Tensões normais longitudinais decorrentes da torção não uniforme por bimomento B_{tnu} unitário;

s_{tnu}^{SL} = Tensões normais longitudinais decorrentes de “*shear lag*” por bimomento B_{tnu} unitário;

B_d = Bimomento de distorção atuante na seção;

s_d^1 = Tensões normais longitudinais decorrentes da distorção por bimomento B_d unitário;

s_d^{SL} = Tensões normais longitudinais decorrentes de “*shear lag*” por bimomento B_d unitário;

As distribuições de tensões normais longitudinais para esforços unitários podem ser encontradas na bibliografia, como [LANGENDONCK, 1960], e [STUCCHI, 1982].

As distribuições de tensões decorrentes dos efeitos “*shear lag*” e de introdução de carga podem ser efetuadas da forma a seguir.

No modelo sem curvatura são aplicados esforços que provoquem, independentemente, compressão simples, momento fletor, bimomento de torção não uniforme e distorção. A diferença entre as tensões provenientes desses

processamentos com relação às tensões teóricas unitárias podem ser adotadas como tensões decorrentes dos efeitos “*shear lag*” e da introdução de carga para os demais processamentos onde se irá variar a curvatura.

Assim, despreza-se a variação do efeito de “*shear lag*” e introdução de carga com a curvatura. A variação ocorre pois, em pontes curvas, as fibras externas da ponte tornam-se maiores que as internas e esta diferença aumenta na medida em que aumenta-se a curvatura. Acredita-se que o erro proveniente dessa aproximação será pequeno em relação aos demais esforços, pois pontes com ângulo central muito grande são impraticáveis. As tensões obtidas pelo MEF estarão corretas, apenas a decomposição dos esforços é que estará aproximada.

Para uma seção transversal do modelo, ao tomarmos quatro pontos nodais quaisquer (i, j, k, w) monta-se o seguinte sistema linear a quatro incógnitas:

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^{MEF}(i) &= N \cdot (\mathbf{s}_N^1(i) + \mathbf{s}_{int}(i)) + M_f \cdot (\mathbf{s}_f^1(i) + \mathbf{s}_f^{SL}(i)) + B_{mu} \cdot (\mathbf{s}_{mu}^1(i) + \mathbf{s}_{mu}^{SL}(i)) + \\ &\quad + B_d \cdot (\mathbf{s}_d^1(i) + \mathbf{s}_d^{SL}(i)) \\ \mathbf{s}^{MEF}(j) &= N \cdot (\mathbf{s}_P^1(j) + \mathbf{s}_{int}(j)) + M_f \cdot (\mathbf{s}_f^1(j) + \mathbf{s}_f^{SL}(j)) + B_{mu} \cdot (\mathbf{s}_{mu}^1(j) + \mathbf{s}_{mu}^{SL}(j)) + \\ &\quad + B_d \cdot (\mathbf{s}_d^1(j) + \mathbf{s}_d^{SL}(j)) \\ \mathbf{s}^{MEF}(k) &= N \cdot (\mathbf{s}_P^1(k) + \mathbf{s}_{int}(k)) + M_f \cdot (\mathbf{s}_f^1(k) + \mathbf{s}_f^{SL}(k)) + B_{mu} \cdot (\mathbf{s}_{mu}^1(k) + \mathbf{s}_{mu}^{SL}(k)) + \\ &\quad + B_d \cdot (\mathbf{s}_d^1(k) + \mathbf{s}_d^{SL}(k)) \\ \mathbf{s}^{MEF}(w) &= N \cdot (\mathbf{s}_P^1(w) + \mathbf{s}_{int}(w)) + M_f \cdot (\mathbf{s}_f^1(w) + \mathbf{s}_f^{SL}(w)) + B_{mu} \cdot (\mathbf{s}_{mu}^1(w) + \mathbf{s}_{mu}^{SL}(w)) + \\ &\quad + B_d \cdot (\mathbf{s}_d^1(w) + \mathbf{s}_d^{SL}(w)) \end{aligned}$$

Resolvendo-se o sistema, determina-se N , M_f , B_{mu} e B_d e todas as distribuições de tensões normais longitudinais para as seções e curvaturas analisadas.

4.2.1.2. Desmembramento das Tensões Normais Longitudinais

Como no caso das tensões normais, as tensões tangenciais também precisam ser desmembradas segundo os seus efeitos.

A tensão tangencial pode ser desmembrada por tensões decorrentes da torção uniforme, torção não uniforme, distorção e força cortante. Assim, temos:

$$\mathbf{t}^{MEF} = T_{unif} \cdot \mathbf{t}_{unif} + B'_{mu} \cdot \mathbf{t}_{nu} + B'_d \cdot \mathbf{t}_d + V \cdot \mathbf{t}_v \quad (4.23)$$

onde:

T_{unif} = Momento de torção uniforme atuante na seção;

$\mathbf{t}_{unif}^1$ = Tensões tangenciais devido ao momento de torção uniforme unitário;

B'_{mu} = Variação longitudinal do Bimomento de torção não uniforme;

$\mathbf{t}_{mu}^1$ = Tensões tangenciais devido ao B'_{mu} unitário;

B'_d = Variação longitudinal do Bimomento de distorção;

$\mathbf{t}_d^1$ = Tensões tangenciais devido ao B'_d unitário;

As distribuições de tensões normais longitudinais para esforços unitários podem ser encontradas na bibliografia, como [LANGENDONCK, 1968] e [STUCCHI, 1982].

A seguir basta descobrir os valores dos esforços decorrentes de cada situação.

Para uma seção transversal do modelo, ao tomarmos três pontos nodais quaisquer (i, j, k) monta-se o seguinte sistema linear a três incógnitas:

$$\begin{aligned} \mathbf{t}^{MEF}(i) &= T_{unif} \cdot \mathbf{t}_{unif}(i) + B'_{mu} \cdot \mathbf{t}_{mu}^1(i) + B'_d \cdot \mathbf{t}_d(i) + V \cdot \mathbf{t}_v^1(i) \\ \mathbf{t}^{MEF}(j) &= T_{unif} \cdot \mathbf{t}_{unif}(j) + B'_{mu} \cdot \mathbf{t}_{mu}^1(j) + B'_d \cdot \mathbf{t}_d(j) + V \cdot \mathbf{t}_v^1(j) \\ \mathbf{t}^{MEF}(k) &= T_{unif} \cdot \mathbf{t}_{unif}(k) + B'_{mu} \cdot \mathbf{t}_{mu}^1(k) + B'_d \cdot \mathbf{t}_d(k) + V \cdot \mathbf{t}_v^1(k) \end{aligned}$$

Resolvendo-se o sistema, determina-se T_{unif} , B'_{mu} , B'_d e V e todas as distribuições de tensões tangenciais para as seções e curvaturas analisadas.

4.2.2. Cálculo dos Esforços através da Integração Direta das Tensões

Os esforços solicitantes também podem ser obtidos pela Integração das Tensões, método bastante simples, de fácil entendimento e de fácil operacionalização. Simplesmente recorre-se aos conceitos de cada esforço solicitante e faz-se a devida integração, utilizando-se resultados do MEF.

As tensões provenientes de “*shear lag*” e de introdução de carga não são determinadas, e por corresponderem a carregamentos auto-equilibrados, não causam nenhum efeito no cálculo dos esforços.

Os valores das forças em cada nó são obtidos do programa computacional e em seguida somados ou multiplicados por parâmetros de acordo com o esforço a ser calculado. Todos os cálculos são resumidos na Tabela 4.4.

Tabela 4.4. Cálculo dos esforços solicitantes pela Integração Direta

<i>Esforço</i>	<i>Valor Exato</i>	<i>Cálculo pela Integração Direta</i>
Força Normal	$\int s_x dA$	$\sum f_x$
Momento Fletor	$\int s_x z dA$	$\sum (f_x \times z_{CG})$
Bimomento de Distorção	$\int s_x w_d dA$	$\sum (f_x \times w_d)$
Bimomento de Torção Não-uniforme	$\int s w_{tu} dA$	$\sum (f_x \times w_{tu})$
Força Cortante	$\int t dA$	$\sum f_z$
Momento Torsor	$\int t r dA$	$\sum (f_t \times r)$

4.2.3. Cálculo dos Momentos Fletores Transversais

Diante da dificuldade em se obter valores dos momentos fletores transversais diretamente do programa *ADINA*, optou-se em desenvolver um procedimento de cálculo para o mesmo. Através de valores de tensão verticais obtidos pelo MEF nas

diferentes faces do elemento localizado na alma, no encontro com a mesa superior, calcula-se o momento fletor transversal.

O momento de inércia a ser considerado no cálculo é relativo a um eixo perpendicular ao plano da seção transversal, com o momento fletor sendo calculado para um valor unitário do comprimento.

$$M_{tr} = \frac{\Delta s \cdot I_x}{y}, \text{ como } I_x = \frac{1 \cdot t_a^3}{12} \text{ e } y = \frac{t_a}{2}, \text{ sendo } \Delta s = \frac{s_e - s_i}{2} \text{ teremos:}$$

$$M_{tr} = \frac{\Delta s \cdot t_a^2}{6} \quad (4.24)$$

Figura 4.9. Cálculo de Momento Fletor Transversal através de tensão obtida pelo MEF

CAPÍTULO 5

ESTUDO DE CASO

5.1. CONSIDERAÇÕES GERAIS

A seguir, é feito um estudo de caso, analisando-se uma viga pelo Método Simplificado de Cálculo e pelo Método dos Elementos Finitos. A viga foi retirada de [STUCCHI, 1984]. Inicia-se pela análise de uma viga reta que passa a ser curva, com curvatura variando de 0,1 até 1 radiano.

5.1.1. Características Geométricas

As características da seção transversal são dadas a seguir, na figura 5.1. [STUCCHI, 1984] adotou os seguintes raios de curvatura, e conseqüentemente ângulos centrais (tabela 5.1), para análise.

Tabela 5.1. Raios de Curvaturas e Ângulos centrais adotados

Ponte	Raio de Curvatura (m)	Ângulo Central (graus)
R	∞	0
C1	350	5.7
C2	150	13.4
C3	70	28.6
C4	50	40.1
C5	35	57.3

Figura 5.1. Ponte rodoviária unicelular com transversinas nos apoios

Figura 5.2. Condições de contorno nos apoios da viga biapoiada

5.1.2. Pré-dimensionamento da Protensão

Com a intenção de tornar a análise o mais próximo possível da realidade, fez-se um pré-dimensionamento da protensão a ser utilizada no modelo. Ele foi feito para a viga retificada de acordo com os dados já fornecidos para a seção.

Como já citado no capítulo 4, o concreto foi tomado com $f_{ck} = 30$ MPa, e o módulo de elasticidade calculado conforme o projeto de norma da NB1-2000.

Foram adotados cabos CP 190 de 18 cordoalhas, com diâmetro 15.2 mm. Após os cálculos, efetuados com uma planilha, chegou-se ao número de 8 cabos, sendo alocados 4 em cada alma, como mostra a figura 5.2.

Figura 5.3. Localização dos cabos na seção transversal

Para utilização no modelo de elementos finitos, fez-se necessária a adoção de um cabo equivalente por alma, que substituem, cada um, quatro cabos. O cálculo das posições dos cabos reais, bem como do cabo equivalente, encontra-se a seguir, na tabela 5.2.

Tabela 5.2. Cálculo das Posições dos Cabos

Seção	y_{ef1}	y_{ef2}	y_{ef3}	y_{ef4}	y_{ef}	e_p
0	0.8000	1.4000	2.1000	2.7500	1.76	0.20
1	0.6765	1.1625	1.7675	2.2940	1.48	0.48
2	0.5660	0.9500	1.4700	1.8860	1.22	0.74
3	0.4685	0.7625	1.2075	1.5260	0.99	0.97
4	0.3840	0.6000	0.9800	1.2140	0.79	1.17
5	0.3125	0.4625	0.7875	0.9500	0.63	1.33
6	0.2540	0.3500	0.6300	0.7340	0.49	1.47
7	0.2085	0.2625	0.5075	0.5660	0.39	1.57
8	0.1760	0.2000	0.4200	0.4460	0.31	1.65
9	0.1565	0.1625	0.3675	0.3740	0.27	1.69
10	0.1500	0.1500	0.3500	0.3500	0.25	1.71
11	0.1565	0.1625	0.3675	0.3740	0.27	1.69
12	0.1760	0.2000	0.4200	0.4460	0.31	1.65
13	0.2085	0.2625	0.5075	0.5660	0.39	1.57
14	0.2540	0.3500	0.6300	0.7340	0.49	1.47
15	0.3125	0.4625	0.7875	0.9500	0.63	1.33
16	0.3840	0.6000	0.9800	1.2140	0.79	1.17
17	0.4685	0.7625	1.2075	1.5260	0.99	0.97
18	0.5660	0.9500	1.4700	1.8860	1.22	0.74
19	0.6765	1.1625	1.7675	2.2940	1.48	0.48
20	0.8000	1.4000	2.1000	2.7500	1.76	0.20

5.1.3. Malha de Elementos Finitos

Para cada uma das seis pontes analisadas, foi elaborada uma malha de elementos finitos, através do programa *ADINA*, com as seguintes características:

- 1442 pontos nodais;
- 1430 elementos do tipo “*shell*”, definindo as paredes da viga;

- 80 elementos do tipo “*general 3D truss*”, formando o cabo de protensão equivalente.

Figura 5.4. Malha de elementos finitos da ponte reta (0° de ângulo central)

Figura 5.5. Malha de elementos finitos de uma ponte curva ($57,3^\circ$ de ângulo central)

Já que a viga é biapoiada e fixa à torção, temos que aplicar determinadas condições de contorno. Uma transversina foi restringida aos deslocamentos verticais, longitudinais para os nós extremos e transversais para um dos nós extremos. Já a outra transversina teve restringidos os deslocamentos verticais.

Figura 5.6. Condições de contorno aplicadas nos nós inferiores das transversinas de apoio

Para simular a protensão, os cabos sofreram uma deformação inicial calculada através da força requerida de 13272,3 kN:

$$\left. \begin{aligned} s &= Ee \\ s &= \frac{P}{A} \end{aligned} \right\} e = \frac{P}{EA} \quad (5.1)$$

Com a deformação no concreto, a força de protensão diminui. Para corrigir esse problema, foi efetuada uma calibração da força de protensão na seção transversal central. Foi necessário encontrar uma força inicial de protensão que, após a deformação, passe a ser de $P=13272.3$ kN. Vemos, nas tabelas 5.3 e 5.4, o cálculo das deformações iniciais dos cabos para cada ponte estudada.

Tabela 5.3. Valores da Força de protensão inicialmente calculada

ângulo (graus)	força inicial (kN)		redução
	t=0	t=1	
0	13272	12406	6.98%
5.37	13272	12338	7.03%
13.37	13272	12328	7.11%
28.65	13272	12307	7.26%
40.11	13272	12291	7.39%
57.30	13272	12265	7.58%

Tabela 5.4. Valores das deformações iniciais dos cabos, após a calibração

ângulo (graus)	força corrigida (kN)		deformação do cabo	resultado ADINA (kN)
	$t=0$	$t=1$		
0	14199	13272	0.007132	13272
5.37	14206	13272	0.007136	13272
13.37	14216	13272	0.007141	13272
28.65	14237	13272	0.007151	13272
40.11	14253	13272	0.007160	13272
57.30	14279	13272	0.007172	13272

5.1.4. Viga de dois vãos

Com o objetivo de simplificar esta análise, tomou-se duas vigas biapoiadas, como as mostradas anteriormente, e ligou-as por apoios extremos, formando uma viga contínua de dois vãos. Foi efetuado um pré-dimensionamento similar ao efetuado para a viga biapoiada, onde se determinou a posição dos cabos na viga contínua.

Foram analisadas duas vigas contínuas, sendo uma reta e uma curva. A viga reta foi gerada a partir do modelo R1 (sendo chamada a partir de agora de Rcont1) e a viga curva analisada foi gerada a partir da viga curva C4, chamada de Ccont4. Esta viga possui dois vãos de $40,11^\circ$ de ângulo central cada, totalizando um ângulo central de $80,22^\circ$.

Figura 5.7. Condições de contorno nos apoios da viga de dois vãos

5.2. CARREGAMENTOS PARA DETERMINAÇÃO DO “SHEAR LAG”

Para a aplicação do método da decomposição das tensões foram aplicados na viga reta, separadamente, os carregamentos que provocassem somente flexão, torção e distorção, como mostraremos a seguir.

5.2.1. Processamento R1g – Momento Fletor

Inicialmente aplicou-se à viga reta um carregamento de peso próprio (processamento R1g), que provoca somente flexão longitudinal na viga. O momento fletor atuante na seção central foi então calculado tomando-se as forças nodais, através da integração direta. Finalmente, com os resultados das tensões obtidos neste mesmo processamento e com as tensões dadas pela resistência dos materiais, pode-se calcular as tensões normais longitudinais decorrentes do efeito “*shear lag*” na flexão em uma ponte reta, pela expressão:

$$\mathbf{s}_f^{SL} = \frac{\mathbf{s}^{R1g}}{M_f^{R1g}} - \mathbf{s}_f^1 \quad (5.2)$$

onde

$\mathbf{s}_f^{SL}$ = Tensões normais longitudinais decorrentes do efeito “*shear lag*” por Momento Fletor unitário;

$\mathbf{s}^{R1g}$ = Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1g;

M_f^{R1g} = Momento Fletor na seção transversal central;

$\mathbf{s}_f^1$ = Tensões Normais longitudinais da Resistência dos Materiais, para Momento Fletor unitário.

5.2.2. Processamento R1n – Força Normal

Aplicou-se à viga reta um carregamento de força concentrada, no centro de gravidade da seção (processamento R1n), que provoca somente esforços normais na viga. A força normal atuante na seção central foi então calculada tomando-se as forças nodais, através da integração direta. Finalmente, com os resultados das tensões obtidos neste mesmo processamento e com as tensões dadas pela resistência dos materiais, pode-se calcular as tensões normais longitudinais decorrentes do efeito de introdução de carga em uma ponte reta, pela expressão:

$$s_n^{\text{int}} = \frac{s^{R1n}}{N^{R1n}} - s_n^1 \quad (5.3)$$

onde

s_n^{int} = Tensões normais longitudinais decorrentes do efeito de introdução de carga por Força Normal unitária;

s^{R1n} = Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1n;

N^{R1n} = Força Normal na seção transversal central;

s_n^1 = Tensões Normais longitudinais da Resistência dos Materiais, para Força Normal unitária.

5.2.3. Processamento R1t – Torção Não-uniforme

Aplicou-se à seção transversal central da viga reta o carregamento mostrado na figura 5.5 (processamento R1t) que provoca somente tensões normais longitudinais de torção não-uniforme, ou seja, somente provocadas por bimomento de torção não-uniforme, sem ocorrência de distorção e flexão longitudinal.

Figura 5.8. Carregamento de Torção Não-uniforme

O bimomento de torção não-uniforme atuante na seção central foi então calculado através da integração direta, tomando-se as forças nodais. Finalmente, com os resultados das tensões obtidos neste mesmo processamento e com as tensões dadas pela resistência dos materiais, pode-se calcular as tensões normais longitudinais decorrentes do efeito “*shear lag*” na torção não-uniforme em uma ponte reta, pela expressão:

$$\mathbf{s}_{mu}^{SL} = \frac{\mathbf{s}^{R1t}}{B_{mu}^{R1t}} - \mathbf{s}_{mu}^1 \quad (5.4)$$

onde

$\mathbf{s}_f^{SL}$ = Tensões normais longitudinais decorrentes do efeito “*shear lag*” por Bimomento de torção não-uniforme unitário;

$\mathbf{s}^{R1t}$ = Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1t;

B_{mu}^{R1t} = Bimomento de torção não-uniforme atuante na seção transversal central;

$\mathbf{s}_t^1$ = Tensões normais longitudinais da Resistência dos Materiais, para Bimomento de torção não-uniforme unitário.

5.2.4. Processamento R1d – Distorção

Aplicou-se à seção transversal central da viga reta o carregamento mostrado na figura 5.6 (processamento R1d), que provoca somente tensões normais longitudinais de distorção, ou seja, somente provocadas por bimomento de distorção, sem ocorrência de torção e flexão longitudinal.

Figura 5.9. Carregamento de Distorção

O bimomento de distorção atuante na seção central foi então calculado através da integração direta, tomando-se as forças nodais. Finalmente, com os resultados das tensões obtidos neste mesmo processamento e com as tensões dadas pela resistência dos materiais, pode-se calcular as tensões normais longitudinais decorrentes do efeito “*shear lag*” na distorção em uma ponte reta, pela expressão:

$$\mathbf{s}_d^{SL} = \frac{\mathbf{s}^{R1d}}{B_d^{R1d}} - \mathbf{s}_d^1 \quad (5.5)$$

onde

$\mathbf{s}_d^{SL}$ = Tensões normais longitudinais decorrentes do efeito “*shear lag*” por Bimomento de torção não-uniforme unitário;

$\mathbf{s}^{R1d}$ = Tensões normais longitudinais resultantes do processamento R1t;

B_d^{R1d} = Bimomento de torção não-uniforme atuante na seção transversal central;

$\mathbf{s}_d^1$ = Tensões normais longitudinais da Resistência dos Materiais, para Bimomento de torção não-uniforme unitário.

Tabela 5.5. Distribuição dos carregamentos de Distorção e Torção não-uniforme, por elemento

nó	coord.y	coord.z	largura elem.	carreg.
força-y				
516	0.000	2.760	0.508	0.184179
515	1.017	2.760	1.017	0.368357
514	2.033	2.760	1.017	0.368357
513	3.050	2.760	1.017	0.368357
512	4.067	2.760	1.017	0.368357
511	5.083	2.760	1.017	0.368357
510	6.100	2.760	0.508	0.184179
			TOTAL	2.210145
força-z				
516	0.000	2.760	0.324	0.117527
1129	0.000	2.111	0.649	0.235054
1128	0.000	1.463	0.649	0.235054
1127	0.000	0.814	0.649	0.235054
21	0.000	0.165	0.352	0.127491
1171	0.000	0.110	0.055	0.019928
1170	0.000	0.055	0.055	0.019928
229	0.000	0.000	0.028	0.009964
			TOTAL	1.000000
força-z				
510	6.100	2.760	0.324	0.117527
1334	6.100	2.111	0.649	0.235054
1333	6.100	1.463	0.649	0.235054
1332	6.100	0.814	0.649	0.235054
62	6.100	0.165	0.352	0.127491
1376	6.100	0.110	0.055	0.019928
1375	6.100	0.055	0.055	0.019928
223	6.100	0.000	0.028	0.009964
			TOTAL	1.000000
força-y				
229	0.000	0.000	0.508	0.184179
228	1.017	0.000	1.017	0.368357
227	2.033	0.000	1.017	0.368357
226	3.050	0.000	1.017	0.368357
225	4.067	0.000	1.017	0.368357
224	5.083	0.000	1.017	0.368357
223	6.100	0.000	0.508	0.184179
			TOTAL	2.210145

CAPÍTULO 6

RESULTADOS

6.1. NOMENCLATURA

Serão apresentados neste trabalho os resultados de 21 processamentos de modelos matemáticos, sendo 15 processamentos da viga biapoiada (reta e as cinco curvas), 2 processamentos da viga contínua (uma reta e uma curva) e mais 4 processamentos de uma viga biapoiada, com cabos centrados.

No caso das vigas biapoiadas, o cálculo dos esforços provenientes de tensões normais será efetuado na seção transversal central da viga. Quanto aos esforços provenientes das tensões tangenciais, estes serão calculados nas seções dos apoios.

Já as vigas contínuas, terão esforços calculados na seção do apoio central. Os resultados encontram-se nos itens a seguir segundo a numeração dos nós nas figuras 6.1 e 6.2. Já as posições dos nós encontram-se na tabela 6.1.

Figura 6.1. Numeração dos nós na seção do apoio da viga biapoiada

Figura 6.2. Numeração dos nós na seção do meio do vão da viga biapoiada

Tabela 6.1. Posição dos nós nas seções transversais analisadas – Viga Biapoiada

VÃO			APOIO		
<i>nó</i>	<i>coord.y</i>	<i>coord.z</i>	<i>nó</i>	<i>coord.y</i>	<i>coord.z</i>
761	-4.275	2.760	661	-4.275	2.760
760	-3.420	2.760	660	-3.420	2.760
759	-2.565	2.760	659	-2.565	2.760
758	-1.710	2.760	658	-1.710	2.760
757	-0.855	2.760	657	-0.855	2.760
516	0.000	2.760	376	0.000	2.760
515	1.017	2.760	375	1.017	2.760
514	2.033	2.760	374	2.033	2.760
513	3.050	2.760	373	3.050	2.760
512	4.067	2.760	372	4.067	2.760
511	5.083	2.760	371	5.083	2.760
510	6.100	2.760	370	6.100	2.760
966	6.955	2.760	866	6.955	2.760
965	7.810	2.760	865	7.810	2.760
964	8.665	2.760	864	8.665	2.760
963	9.520	2.760	863	9.520	2.760
962	10.375	2.760	862	10.375	2.760
1129	0.000	2.111	1069	0.000	2.489
1128	0.000	1.463	1068	0.000	2.219
1127	0.000	0.814	1067	0.000	1.948
21	0.000	0.165	1	0.000	1.678
1171	0.000	0.110	1131	0.000	1.118
1170	0.000	0.055	1130	0.000	0.559
229	0.000	0.000	89	0.000	0.000
228	1.017	0.000	88	1.017	0.000
227	2.033	0.000	87	2.033	0.000
226	3.050	0.000	86	3.050	0.000
225	4.067	0.000	85	4.067	0.000
224	5.083	0.000	84	5.083	0.000
223	6.100	0.000	83	6.100	0.000
1334	6.100	2.111	1274	6.100	2.489
1333	6.100	1.463	1273	6.100	2.219
1332	6.100	0.814	1272	6.100	1.948
62	6.100	0.165	42	6.100	1.678
1376	6.100	0.110	1336	6.100	1.118
1375	6.100	0.055	1335	6.100	0.559

6.2. VALIDAÇÃO DO MODELO

Com o objetivo de certificar a aplicabilidade do modelo anteriormente descrito, foram efetuadas algumas comparações entre o modelo de Cálculo, já descrito, e um modelo de Referência, mais refinado, que possui as seguintes características:

- 13748 pontos nodais;
- 13716 elementos do tipo “*shell*”, definindo as paredes da viga;
- 240 elementos do tipo “*general 3D truss*”, formando o cabo de protensão equivalente.

Foram efetuados carregamentos de protensão na ponte reta e obtidos os resultados do programa *ADINA*. Considerando-se a tensão na mesa superior, entre os modelos de Referência e o de Cálculo, tivemos uma diferença média de 5%, na alma essa diferença cai para 0,1% e na mesa inferior fica em 1,3%. Considerando-se o deslocamento vertical no nó do meio da mesa inferior, temos uma diferença entre os modelos de 1%. Os resultados estão mostrados nos gráficos abaixo.

Gráfico 6.1. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior –
Modelo de Cálculo x Modelo de Referência

Gráfico 6.2. Tensões Normais Longitudinais na Alma –
Modelo de Cálculo x Modelo de Referência

Gráfico 6.3. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior –
Modelo de Cálculo x Modelo de Referência

6.3. VIGA BIAPOIADA

Neste item mostraremos os diversos resultados obtidos pelos processamentos das vigas biapoiadas, variando-se a curvatura.

6.3.1. Estudo do efeito “*shear lag*”

Foram feitos vários processamentos com o objetivo de estudar o efeito “*shear lag*” para diversos carregamentos em pontes de seção celular. Em seguida, procedeu-se o cálculo das tensões unitárias devido ao “*shear lag*” e introdução de carga, segundo o procedimento descrito no item 5.2. Nas tabelas 6.2 a 6.5 encontram-se os valores obtidos pelos processamentos no programa *ADINA* para os carregamentos utilizados. Na tabela 6.6 encontram-se os valores calculados das tensões unitárias.

Apresentamos, nos gráficos de 6.4 a 6.9, comparações entre os resultados obtidos para as tensões através dos processamentos no programa *ADINA*, os resultados obtidos por [BARBOSA, 1997] e os resultados obtidos em [LANGENDONCK, 1968] e [STUCCHI, 1982], calculados pela Resistência dos Materiais.

Para o carregamento de peso próprio foram processados todos os casos de curvatura da viga e os resultados das tensões normais encontram-se na tabela 6.8. Nos gráficos 6.10 a 6.13 encontram-se as tensões em cada região da seção transversal central (mesa superior, mesa inferior, alma externa e alma interna), com as diferentes situações de curvatura comparadas entre si.

Tabela 6.2. Cálculo da Força Normal –

Viga Reta, carregamento de força normal

nó	coord.y	coord.z	f_{x1}	f_{x2}	f_{x3}	F_x	S_{MEF}
761	-4.275	2.760	-0.0158			-0.016	-0.120
760	-3.420	2.760	-0.0158	-0.0158		-0.032	-0.119
759	-2.565	2.760	-0.0158	-0.0157		-0.031	-0.119
758	-1.710	2.760	-0.0158	-0.0157		-0.031	-0.119
757	-0.855	2.760	-0.0158	-0.0157		-0.032	-0.119
516	0.000	2.760	-0.0189	-0.0158	-0.0194	-0.054	-0.120
515	1.017	2.760	-0.0189	-0.0188		-0.038	-0.120
514	2.033	2.760	-0.0189	-0.0189		-0.038	-0.120
513	3.050	2.760	-0.0189	-0.0189		-0.038	-0.120
512	4.067	2.760	-0.0189	-0.0189		-0.038	-0.120
511	5.083	2.760	-0.0188	-0.0189		-0.038	-0.120
510	6.100	2.760	-0.0189	-0.0158	-0.0194	-0.054	-0.120
966	6.955	2.760	-0.0157	-0.0158		-0.032	-0.119
965	7.810	2.760	-0.0157	-0.0158		-0.031	-0.119
964	8.665	2.760	-0.0157	-0.0158		-0.031	-0.119
963	9.520	2.760	-0.0158	-0.0158		-0.032	-0.119
962	10.375	2.760	-0.0158	0.0000		-0.016	-0.120
1129	0.000	2.111	-0.0193	-0.0192		-0.038	-0.119
1128	0.000	1.463	-0.0191	-0.0189		-0.038	-0.117
1127	0.000	0.814	-0.0189	-0.0186		-0.038	-0.116
21	0.000	0.165	-0.0183	-0.0018	-0.00872	-0.029	-0.114
1171	0.000	0.110	-0.0018	-0.0014		-0.003	-0.114
1170	0.000	0.055	-0.0017	-0.0014		-0.003	-0.114
229	0.000	0.000	-0.0098	-0.0015		-0.011	-0.114
228	1.017	0.000	-0.0098	-0.0098		-0.020	-0.114
227	2.033	0.000	-0.0098	-0.0098		-0.020	-0.114
226	3.050	0.000	-0.0098	-0.0098		-0.020	-0.114
225	4.067	0.000	-0.0098	-0.0098		-0.020	-0.114
224	5.083	0.000	-0.0098	-0.0098		-0.020	-0.114
223	6.100	0.000	-0.0098	-0.0015		-0.011	-0.114
1334	6.100	2.111	-0.0193	-0.0192		-0.038	-0.119
1333	6.100	1.463	-0.0191	-0.0189		-0.038	-0.117
1332	6.100	0.814	-0.0189	-0.0186		-0.038	-0.116
62	6.100	0.165	-0.0183	-0.0018	-0.00872	-0.029	-0.114
1376	6.100	0.110	-0.0018	-0.0014		-0.003	-0.114
1375	6.100	0.055	-0.0017	-0.0014		-0.003	-0.114
						N -1.000tf	

Tabela 6.3. Cálculo do Momento Fletor –
Viga Reta, carregamento de peso próprio

nó	coord.y	coord.z	z	f_{x1}	f_{x2}	f_{x3}	F_x	$F_{x.z}$	S_{MEF}
761	-4.275	2.760	-0.800	-31.72			-31.72	25.38	-238
760	-3.420	2.760	-0.800	-32.31	-31.85		-64.16	51.33	-241
759	-2.565	2.760	-0.800	-33.24	-32.44		-65.68	52.54	-247
758	-1.710	2.760	-0.800	-34.50	-33.38		-67.88	54.30	-255
757	-0.855	2.760	-0.800	-36.08	-34.64		-70.72	56.58	-266
516	0.000	2.760	-0.800	-43.36	-36.24	-39.99	-119.59	95.67	-283
515	1.017	2.760	-0.800	-42.28	-43.19		-85.47	68.38	-270
514	2.033	2.760	-0.800	-41.72	-42.18		-83.90	67.12	-265
513	3.050	2.760	-0.800	-41.69	-41.69		-83.38	66.70	-264
512	4.067	2.760	-0.800	-42.18	-41.72		-83.90	67.12	-265
511	5.083	2.760	-0.800	-43.19	-42.28		-85.47	68.38	-270
510	6.100	2.760	-0.800	-43.36	-36.24	-39.99	-119.59	95.67	-283
966	6.955	2.760	-0.800	-34.64	-36.08		-70.72	56.58	-266
965	7.810	2.760	-0.800	-33.38	-34.50		-67.88	54.30	-255
964	8.665	2.760	-0.800	-32.44	-33.24		-65.68	52.54	-247
963	9.520	2.760	-0.800	-31.85	-32.31		-64.16	51.33	-241
962	10.375	2.760	-0.800	-31.72			-31.72	25.38	-238
1129	0.000	2.111	-0.151	-5.43	-17.73		-23.16	3.50	-72
1128	0.000	1.463	0.498	29.39	16.73		46.12	22.94	141
1127	0.000	0.814	1.146	64.66	51.00		115.66	132.58	354
21	0.000	0.165	1.795	85.22	4.31	43.52	133.05	238.83	571
1171	0.000	0.110	1.850	4.24	12.02		16.26	30.08	588
1170	0.000	0.055	1.905	4.16	12.61		16.77	31.95	607
229	0.000	0.000	1.960	53.31	13.23		66.54	130.42	627
228	1.017	0.000	1.96	51.99	53.12		105.11	206.02	606
227	2.033	0.000	1.96	51.30	51.87		103.17	202.21	595
226	3.050	0.000	1.96	51.26	51.26		102.52	200.94	591
225	4.067	0.000	1.96	51.87	51.30		103.17	202.21	595
224	5.083	0.000	1.96	53.12	51.99		105.11	206.02	606
223	6.100	0.000	1.96	53.31	13.23		66.54	130.42	627
1334	6.100	2.111	-0.151	-5.43	-17.73		-23.16	3.50	-72
1333	6.100	1.463	0.498	29.39	16.73		46.12	22.94	141
1332	6.100	0.814	1.146	64.66	51.00		115.66	132.58	354
62	6.100	0.165	1.795	85.22	4.31	43.52	133.05	238.83	571
1376	6.100	0.110	1.850	4.24	12.02		16.26	30.08	588
1375	6.100	0.055	1.905	4.16	12.61		16.77	31.95	607
							M_i	3207 tfm	

Tabela 6.4. Cálculo do Bimomento de Torção Não-uniforme –

Viga Reta, carregamento de torção não-uniforme

nó	coord.y	coord.z	w_{tnu}	f_{x1}	f_{x2}	f_{x3}	F_x	$F_x \cdot w_{tnu}$	S_{MEF}
761	-4.275	2.760	0.300	-0.049			0.049	0.015	-0.407
760	-3.420	2.760	0.795	-0.026	-0.033		0.059	-0.019	-0.208
759	-2.565	2.760	1.291	-0.009	-0.010		0.019	-0.018	-0.059
758	-1.710	2.760	1.787	0.007	0.010		-0.017	0.026	0.080
757	-0.855	2.760	2.283	0.028	0.033		-0.061	0.132	0.250
516	0.000	2.760	2.778	0.019	0.080	0.142	-0.242	0.672	0.587
515	1.017	2.760	1.852	-0.042	0.110		-0.068	0.126	0.242
514	2.033	2.760	0.926	-0.062	0.090		-0.028	0.026	0.103
513	3.050	2.760	0.000	-0.077	0.077		0.000	0.000	0.000
512	4.067	2.760	-0.926	-0.090	0.062		0.028	0.026	-0.103
511	5.083	2.760	-1.852	-0.110	0.042		0.068	0.126	-0.242
510	6.100	2.760	-2.778	-0.019	-0.080	-0.142	0.242	0.672	-0.587
966	6.955	2.760	-2.283	-0.033	-0.028		0.061	0.132	-0.250
965	7.810	2.760	-1.787	-0.010	-0.007		0.017	0.026	-0.080
964	8.665	2.760	-1.291	0.010	0.009		-0.019	-0.018	0.059
963	9.520	2.760	-0.795	0.033	0.026		-0.059	-0.019	0.208
962	10.375	2.760	-0.300	0.049			-0.049	0.015	0.407
1129	0.000	2.111	1.456	0.111	-0.020		-0.092	0.134	0.239
1128	0.000	1.463	0.133	0.080	-0.065		-0.015	0.002	0.037
1127	0.000	0.814	-1.190	0.047	-0.099		0.052	0.062	-0.155
21	0.000	0.165	-2.512	-0.131	0.075		0.336	0.843	-0.358
1171	0.000	0.110	-2.625	0.075	-0.086		0.011	0.029	-0.375
1170	0.000	0.055	-2.737	0.074	-0.085		0.012	0.032	-0.396
229	0.000	0.000	-2.849	0.033	-0.085		0.053	0.150	-0.472
228	1.017	0.000	-1.899	0.061	-0.092		0.032	0.060	-0.242
227	2.033	0.000	-0.950	0.071	-0.088		0.017	0.016	-0.113
226	3.050	0.000	0.000	0.080	-0.080		0.000	0.000	0.000
225	4.067	0.000	0.950	0.088	-0.071		-0.017	0.016	0.113
224	5.083	0.000	1.899	0.092	-0.061		-0.032	0.060	0.242
223	6.100	0.000	2.849	-0.033	0.085		-0.053	0.150	0.472
1334	6.100	2.111	-1.456	-0.111	0.020		0.092	0.134	-0.239
1333	6.100	1.463	-0.133	-0.080	0.065		0.015	0.002	-0.037
1332	6.100	0.814	1.190	-0.047	0.099		-0.052	0.062	0.155
62	6.100	0.165	2.512	0.131	-0.075		0.225	-0.565	0.358
1376	6.100	0.110	2.625	-0.075	0.086		-0.011	0.029	0.375
1375	6.100	0.055	2.737	-0.074	0.085		-0.012	0.032	0.396
							B_{tnu}	3.1tfm ²	

Tabela 6.5. Cálculo do Bimomento de distorção – Viga Reta, carregamento de distorção

nó	coord.y	coord.z	w_d	f_{x1}	f_{x2}	f_{x3}	F_x	$F_x \cdot w_d$	S_{MEF}
761	-4.275	2.760	-1.474	-0.122			-0.122	0.180	-0.951
760	-3.420	2.760	-1.302	-0.108	-0.110		-0.218	0.284	-0.801
759	-2.565	2.760	-1.130	-0.102	-0.095		-0.197	0.222	-0.720
758	-1.710	2.760	-0.958	-0.107	-0.087		-0.194	0.186	-0.693
757	-0.855	2.760	-0.786	-0.134	-0.087		-0.221	0.173	-0.722
516	0.000	2.760	-0.614	-0.164	-0.088	-0.203	-0.455	0.279	-0.939
515	1.017	2.760	-0.409	-0.131	-0.051		-0.182	0.075	-0.459
514	2.033	2.760	-0.205	-0.094	0.017		-0.077	0.016	-0.215
513	3.050	2.760	0.000	-0.059	0.059		0.000	0.000	0.000
512	4.067	2.760	0.205	-0.017	0.094		0.077	0.016	0.215
511	5.083	2.760	0.409	0.051	0.131		0.182	0.075	0.459
510	6.100	2.760	0.614	0.164	0.088	0.203	0.455	0.279	0.939
966	6.955	2.760	0.786	0.087	0.134		0.221	0.173	0.722
965	7.810	2.760	0.958	0.087	0.107		0.194	0.186	0.693
964	8.665	2.760	1.130	0.095	0.102		0.197	0.222	0.720
963	9.520	2.760	1.302	0.110	0.108		0.218	0.284	0.801
962	10.375	2.760	1.474	0.122			0.122	0.180	0.951
1129	0.000	2.111	0.376	-0.065	0.027		-0.038	-0.014	-0.043
1128	0.000	1.463	1.365	0.074	0.182		0.257	0.350	0.782
1127	0.000	0.814	2.354	0.245	0.323		0.568	1.338	1.662
21	0.000	0.165	3.344	0.485	-0.020	0.216	0.680	2.274	2.836
1171	0.000	0.110	3.428	-0.015	0.102		0.087	0.297	2.966
1170	0.000	0.055	3.512	-0.010	0.102		0.092	0.323	3.118
229	0.000	0.000	3.595	0.297	0.100		0.397	1.427	3.241
228	1.017	0.000	2.397	0.199	0.123		0.322	0.773	1.630
227	2.033	0.000	1.198	0.126	0.012		0.138	0.165	0.755
226	3.050	0.000	0.000	0.060	-0.060		0.000	0.000	0.000
225	4.067	0.000	-1.198	-0.012	-0.126		-0.138	0.165	-0.755
224	5.083	0.000	-2.397	-0.123	-0.199		-0.322	0.773	-1.630
223	6.100	0.000	-3.595	-0.297	-0.100		-0.397	1.427	-3.241
1334	6.100	2.111	-0.376	0.065	-0.027		0.038	-0.014	0.043
1333	6.100	1.463	-1.365	-0.074	-0.182		-0.257	0.350	-0.782
1332	6.100	0.814	-2.354	-0.245	-0.323		-0.568	1.338	-1.662
62	6.100	0.165	-3.344	-0.485	0.020	-0.216	-0.680	2.274	-2.836
1376	6.100	0.110	-3.428	0.015	-0.102		-0.087	0.297	-2.966
1375	6.100	0.055	-3.512	0.010	-0.102		-0.092	0.323	-3.118
B_d								17 tfm²	

Tabela 6.6. Tensões Normais Longitudinais decorrentes de “shear lag” e introdução de carga, por esforço unitário

nó	Força Normal	Momento Fletor	Bimomento de distorção	Bimomento de Torção Não-uniforme
	$S_{int.} + S_{p1}$	$S_{f SL} + S_{f1}$	$S_{bd SL} + S_{bd1}$	$S_{tnu SL} + S_{tnu1}$
761	0.11954	-0.07423	-0.05695	-0.13290
760	0.11888	-0.07524	-0.04799	-0.06793
759	0.11863	-0.07703	-0.04310	-0.01938
758	0.11874	-0.07962	-0.04149	0.02619
757	0.11911	-0.08298	-0.04325	0.08167
516	0.11979	-0.08818	-0.05623	0.19160
515	0.11972	-0.08428	-0.02747	0.07888
514	0.11981	-0.08273	-0.01291	0.03354
513	0.11984	-0.08222	0.00000	0.00000
512	0.11981	-0.08273	0.01291	-0.03354
511	0.11972	-0.08428	0.02747	-0.07888
510	0.11979	-0.08818	0.05623	-0.19160
966	0.11911	-0.08298	0.04325	-0.08167
965	0.11874	-0.07962	0.04149	-0.02619
964	0.11863	-0.07703	0.04310	0.01938
963	0.11888	-0.07524	0.04799	0.06793
962	0.11954	-0.07423	0.05695	0.13290
1129	0.11866	-0.02241	-0.00259	0.07802
1128	0.11720	0.04387	0.04684	0.01196
1127	0.11567	0.11035	0.09953	-0.05047
21	0.11414	0.17802	0.16984	-0.11679
1171	0.11406	0.18342	0.17765	-0.12251
1170	0.11391	0.18938	0.18674	-0.12921
229	0.11376	0.19540	0.19416	-0.15410
228	0.11374	0.18902	0.09764	-0.07900
227	0.11371	0.18552	0.04522	-0.03701
226	0.11370	0.18435	0.00000	0.00000
225	0.11371	0.18552	-0.04522	0.03701
224	0.11374	0.18902	-0.09764	0.07900
223	0.11376	0.19540	-0.19416	0.15410
1334	0.11866	-0.02241	0.00259	-0.07802
1333	0.11720	0.04387	-0.04684	-0.01196
1332	0.11567	0.11035	-0.09953	0.05047
62	0.11414	0.17802	-0.16984	0.11679
1376	0.11406	0.18342	-0.17765	0.12251
1375	0.11391	0.18938	-0.18674	0.12921

Gráfico 6.4. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior – Carregamento de distorção

Gráfico 6.5. Tensões Normais Longitudinais na Alma – Carregamento de Distorção

Gráfico 6.6. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior – Carregamento de Distorção

Gráfico 6.7. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior – Carregamento de Torção Não-uniforme

Gráfico 6.8. Tensões Normais Longitudinais na Alma – Carregamento de Torção Não-uniforme

Gráfico 6.9. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior – Carregamento de Torção Não-uniforme

Tabela 6.7. Tensões Normais Longitudinais – carregamento de peso próprio

nó	Tensões Normais Longitudinais (tf/m ²)					
	Peso Próprio					
	R	C1	C2	C3	C4	C5
761	-238	-250	-266	-307	-344	-418
760	-241	-251	-264	-297	-327	-386
759	-247	-255	-265	-292	-317	-364
758	-255	-261	-270	-291	-311	-349
757	-266	-270	-276	-293	-308	-340
516	-283	-285	-289	-299	-310	-333
515	-270	-272	-274	-282	-292	-312
514	-265	-266	-268	-275	-283	-301
513	-264	-264	-265	-271	-278	-294
512	-265	-265	-266	-270	-276	-291
511	-270	-270	-269	-272	-277	-290
510	-283	-281	-280	-281	-285	-295
966	-266	-263	-259	-255	-255	-259
965	-255	-250	-245	-237	-233	-233
964	-247	-240	-233	-221	-215	-210
963	-241	-233	-223	-207	-198	-189
962	-238	-228	-215	-195	-184	-171
1129	-72	-69	-64	-53	-45	-29
1128	141	149	160	188	212	257
1127	354	366	385	427	466	539
21	571	588	612	671	724	826
1171	588	605	630	690	745	849
1170	607	625	651	711	767	874
229	627	645	671	734	793	904
228	606	618	636	681	723	806
227	595	601	611	639	667	724
226	591	592	594	606	621	656
225	595	590	585	582	585	599
224	606	596	583	565	556	550
223	627	610	590	555	534	508
1334	-72	-75	-80	-88	-95	-106
1333	141	133	124	107	96	82
1332	354	342	328	304	288	268
62	571	556	537	504	484	459
1376	588	573	553	520	500	474
1375	607	591	572	538	517	491

Gráfico 6.10. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Superior – Carregamento de peso próprio

Gráfico 6.11. Tensões Normais Longitudinais na Alma Interna – Carregamento de peso próprio

Gráfico 6.12. Tensões Normais Longitudinais na Alma Externa – Carregamento de peso próprio

Gráfico 6.13. Tensões Normais Longitudinais na Mesa Inferior – Carregamento de peso próprio

6.3.2. Protensão com cabo Parabólico geometricamente simétrico

A principal análise do presente trabalho foi efetuada ao se processar a viga biapoiada para os diversos casos de curvatura, submetida ao carregamento de protensão. Os dados dos cabos, bem como a suas posições estão detalhados no capítulo 5.

Conforme explicado no item 5.1.3, com a deformação do concreto, a força no cabo sofre uma redução. Essa redução é variável, e as força finais resultantes são mostradas no gráfico 6.14.

Gráfico 6.14. Forças finais nos cabos após a deformação do concreto – viga biapoiada

Os esforços solicitantes provenientes de tensões normais (Força Normal, Momento Fletor, Bimomento de Distorção e Bimomento de Torção Não-uniforme) serão calculados com dados obtidos pelo MEF por desmembramento das tensões e por integração direta das tensões. Já os esforços tangenciais (Forças Cortantes e Momento Torsor) serão calculados apenas por Integração direta.

Na tabela 6.8 são apresentados os resultados das tensões normais longitudinais para o processamento da protensão nos diversos casos de curvatura.

Tabela 6.8. Tensões Normais Longitudinais – Carregamento de protensão

nó	Tensões Normais Longitudinais (tf/m ²)					
	Protensão					
	R	C1	C2	C3	C4	C5
761	41	44	48	57	64	76
760	47	50	53	61	68	77
759	55	58	61	68	74	82
758	66	68	72	78	83	91
757	79	82	85	91	96	102
516	99	102	104	110	114	119
515	84	86	87	90	91	93
514	78	78	79	80	80	80
513	76	76	75	75	74	72
512	78	77	76	74	72	69
511	84	83	82	78	75	70
510	99	97	94	88	84	77
966	79	77	73	67	62	55
965	66	63	60	53	49	42
964	55	52	49	42	37	31
963	47	44	40	33	29	22
962	41	38	34	27	22	15
1129	-229	-230	-231	-232	-232	-232
1128	-558	-561	-565	-574	-579	-587
1127	-888	-895	-903	-920	-933	-951
21	-1217	-1226	-1238	-1264	-1284	-1314
1171	-1236	-1246	-1258	-1284	-1304	-1336
1170	-1267	-1277	-1290	-1316	-1337	-1370
229	-1300	-1308	-1320	-1345	-1364	-1393
228	-1275	-1279	-1285	-1297	-1306	-1319
227	-1260	-1262	-1265	-1270	-1274	-1278
226	-1255	-1255	-1254	-1253	-1252	-1249
225	-1260	-1257	-1254	-1247	-1241	-1232
224	-1275	-1270	-1264	-1252	-1243	-1230
223	-1300	-1291	-1280	-1258	-1243	-1220
1334	-229	-229	-228	-226	-224	-221
1333	-558	-554	-549	-540	-532	-521
1332	-888	-882	-874	-857	-845	-827
62	-1217	-1208	-1196	-1172	-1155	-1130
1376	-1236	-1227	-1215	-1191	-1174	-1149
1375	-1267	-1258	-1245	-1221	-1203	-1177

ADINA

Figura 6.3. Distribuição das tensões normais longitudinais ao longo da viga reta biapoiada – carregamento de protensão (tf/m^2)

ADINA

Figura 6.4. Distribuição das tensões normais longitudinais ao longo da viga curva biapoiada (ângulo de $57,3^\circ$) – carregamento de protensão (tf/m^2)

6.3.2.1 Resultados obtidos por desmembramento das tensões

Com os resultados até aqui obtidos e tomando-se 4 pontos quaisquer da seção transversal central, é montado o sistema de equações apresentado no item 4.2.1, para o cálculo, através do desmembramento das tensões, dos seguintes esforços solicitantes:

N = Força Normal

M_f = Momento Fletor

B_d = Bimomento de Distorção

B_{tu} = Bimomento de Torção Não-uniforme

Seguindo as orientações dadas em [BARBOSA, 1997], procuramos utilizar nos cálculos dos esforços os pontos nodais localizados nos encontros das almas com as mesas (510, 516, 223 e 229). Ao tentarmos modificar os pontos nodais de cálculo, ao contrário do esperado, observou-se uma variação muito grande entre os valores obtidos em cada conjunto de pontos, principalmente para os bimomentos, de distorção e torção não-uniforme. Por isso apresentamos apenas os valores obtidos para o conjunto simétrico de pontos nodais.

Tabela 6.9. Resultados dos Esforços por desmembramento das tensões (MEF) – (tf, m)

viga	f (graus)	N	M_f	B_d	B_{tu}
R	0	-2850	-4994	0	0
C1	5.73	-2845	-4994	-44	-0.3
C2	13.37	-2851	-4996	-103	-5
C3	28.65	-2857	-5004	-224	-11
C4	40.11	-2864	-5014	-312	-17
C5	57.30	-2881	-5026	-446	-28

6.3.2.2 Resultados obtidos por Integração Direta das tensões

Devido aos problemas citados no cálculo dos esforços pelo Desmembramento das Tensões, decidiu-se por fazer todos os cálculos por Integração Direta das tensões com o objetivo de efetuar comparações e obter resultados mais consistentes pelo MEF para posteriormente serem comparados com os resultados do Método Simplificado de Cálculo.

Nas tabelas 6.11 e 6.12 apresentamos os cálculos de Força Normal, Momento Fletor, Bimomento de Distorção e Bimomento de Torção Não-uniforme na seção transversal central e os cálculos de Força Cortante e Momento Torsor na seção transversal do apoio, todos para a ponte C1, com ângulo central de 5,73 graus. O cálculo para as outras pontes foi efetuado de maneira similar.

Tabela 6.10. Resultados dos Esforços por Integração das tensões (MEF) – (tf, m)

Viga	<i>f</i> (graus)	Seção central				Seção do Apoio	
		<i>N</i>	<i>M_f</i>	<i>B_d</i>	<i>B_{inu}</i>	<i>V</i>	<i>T</i>
<i>R</i>	0	-2654	-4743	0	0	-391	0
<i>C1</i>	5.73	-2654	-4743	-44	-34	-398	8
<i>C2</i>	13.37	-2654	-4743	-103	-79	-399	19
<i>C3</i>	28.65	-2654	-4743	-221	-170	-399	40
<i>C4</i>	40.11	-2654	-4743	-309	-238	-400	56
<i>C5</i>	57.3	-2654	-4743	-440	-338	-401	80

Tabela 6.11. Cálculo dos Esforços Solicitantes na seção transversal central – viga curva 1, carregamento de protensão

Cálculo dos Esforços Solicitantes devido a Protensão (tf,m) Seção Transversal Central – Viga Curva 1												
nó	coord.y	coord.z	z	W_d	W_{tnu}	f_{x1}	f_{x2}	f_{x3}	$F_x (= S f_x)$	$F_{x,z}$	F_{x,W_d}	$F_{x,W_{tnu}}$
761	-4.275	2.760	-0.800	-1.474	0.210	6.097			6.097	-4.877	-8.984	1.282
760	-3.420	2.760	-0.800	-1.302	-0.395	6.972	6.355		13.327	-10.662	-17.347	-5.262
759	-2.565	2.760	-0.800	-1.130	-1.000	8.203	7.238		15.441	-12.353	-17.443	-15.442
758	-1.710	2.760	-0.800	-0.958	-1.605	9.794	8.474		18.268	-14.614	-17.493	-29.323
757	-0.855	2.760	-0.800	-0.786	-2.210	11.757	10.065		21.822	-17.457	-17.143	-48.234
516	0.000	2.760	-0.800	-0.614	-2.816	14.569	12.023	6.438	33.029	-26.424	-20.267	-92.995
515	1.017	2.760	-0.800	-0.409	-1.877	13.026	14.357		27.383	-21.906	-11.201	-51.398
514	2.033	2.760	-0.800	-0.205	-0.939	12.194	12.884		25.079	-20.063	-5.129	-23.537
513	3.050	2.760	-0.800	0.000	0.000	12.072	12.119		24.192	-19.353	0.000	0.000
512	4.067	2.760	-0.800	0.205	0.939	12.647	12.061		24.708	-19.767	5.054	23.189
511	5.083	2.760	-0.800	0.409	1.877	13.900	12.697		26.598	-21.278	10.880	49.924
510	6.100	2.760	-0.800	0.614	2.816	14.008	11.438	6.135	31.581	-25.265	19.378	88.918
966	6.955	2.760	-0.800	0.786	2.210	9.438	11.141		20.579	-16.464	16.167	45.488
965	7.810	2.760	-0.800	0.958	1.605	7.809	9.137		16.946	-13.557	16.228	27.202
964	8.665	2.760	-0.800	1.130	1.000	6.532	7.506		14.037	-11.230	15.857	14.038
963	9.520	2.760	-0.800	1.302	0.395	5.594	6.229		11.823	-9.459	15.389	4.669
962	10.375	2.760	-0.800	1.474	-0.210	5.293			5.293	-4.235	7.801	-1.113
1129	0.000	2.111	-0.151	0.376	-1.493	-47.420	-27.369		-74.789	11.312	-28.101	111.648
1128	0.000	1.463	0.498	1.365	-0.170	-101.400	-80.840		-182.240	-90.664	-248.774	31.010
1127	0.000	0.814	1.146	2.354	1.153	-154.435	-134.241		-288.676	-330.895	-679.668	-332.707
21	0.000	0.165	1.795	3.344	2.475	-189.115	-8.475		-197.590	-354.674	-660.697	-489.078
1171	0.000	0.110	1.850	3.428	2.587	-8.398	-26.339		-34.737	-64.264	-119.067	-89.877
1170	0.000	0.055	1.905	3.512	2.699	-8.223	-27.237		-35.459	-67.550	-124.516	-95.722
229	0.000	0.000	1.960	3.595	2.812	-111.871	-28.233		-140.103	-274.603	-503.728	-393.918
228	1.017	0.000	1.960	2.397	1.874	-110.003	-111.764		-221.767	-434.664	-531.560	-415.683
227	2.033	0.000	1.960	1.198	0.937	-108.871	-109.712		-218.583	-428.423	-261.966	-204.858
226	3.050	0.000	1.960	0.000	0.000	-108.617	-108.690		-217.308	-425.923	0.000	0.000
225	4.067	0.000	1.960	-1.198	-0.937	-109.224	-108.537		-217.761	-426.812	260.980	204.088
224	5.083	0.000	1.960	-2.397	-1.874	-110.546	-109.241		-219.788	-430.784	526.816	411.972
223	6.100	0.000	1.960	-3.595	-2.812	-110.919	-28.062		-138.981	-272.402	499.691	390.761
1334	6.100	2.111	-0.151	-0.376	1.493	-46.801	-27.583		-74.384	11.251	27.949	-111.044
1333	6.100	1.463	0.498	-1.365	0.170	-99.845	-80.144		-179.989	-89.544	245.701	-30.627
1332	6.100	0.814	1.146	-2.354	-1.153	-151.955	-132.642		-284.598	-326.220	670.066	328.007
62	6.100	0.165	1.795	-3.344	-2.475	-186.575	-8.105		-194.680	-349.451	650.967	481.875
1376	6.100	0.110	1.850	-3.428	-2.587	-8.022	-26.189		-34.211	-63.291	117.264	88.516
1375	6.100	0.055	1.905	-3.512	-2.699	-7.844	-27.078		-34.922	-66.526	122.630	94.272
S									-2654	-4743	-44	-34

Tabela 6.12. Cálculo dos Esforços Solicitantes na seção transversal do apoio – viga curva 1, carregamento de protensão

Cálculo dos Esforços Tangenciais devido a Protensão (tf,m)							
Viga Curva 1							
nó	coord.y	coord.z	y _{CT}	z _{CT}	f _y	f _z	f.r
661	-4.275	2.760	-7.325	-0.720	0.000	0.000	0.000
660	-3.420	2.760	-6.470	-0.720	0.000	0.000	0.000
659	-2.565	2.760	-5.615	-0.720	0.000	0.000	0.000
658	-1.710	2.760	-4.760	-0.720	0.000	0.000	0.000
657	-0.855	2.760	-3.905	-0.720	0.000	0.000	0.000
376	0.000	2.760	-3.050	-0.720	-25.804	8.461	-7.227
375	1.017	2.760	-2.033	-0.720	-1.772	6.513	-11.967
374	2.033	2.760	-1.017	-0.720	5.802	-3.284	-0.838
373	3.050	2.760	0.000	-0.720	-0.032	-0.895	0.023
372	4.067	2.760	1.017	-0.720	-5.980	-3.439	0.809
371	5.083	2.760	2.033	-0.720	1.537	6.205	11.510
370	6.100	2.760	3.050	-0.720	26.143	8.680	7.650
866	6.955	2.760	3.905	-0.720	0.000	0.000	0.000
865	7.810	2.760	4.760	-0.720	0.000	0.000	0.000
864	8.665	2.760	5.615	-0.720	0.000	0.000	0.000
863	9.520	2.760	6.470	-0.720	0.000	0.000	0.000
862	10.375	2.760	7.325	-0.720	0.000	0.000	0.000
1069	0.000	2.489	-3.050	-0.449	-2.433	19.812	-59.334
1068	0.000	2.219	-3.050	-0.179	0.371	27.817	-84.907
1067	0.000	1.948	-3.050	0.092	5.186	28.113	-85.267
1	0.000	1.678	-3.050	0.363	14.634	-95.328	296.055
1131	0.000	1.118	-3.050	0.922	7.642	-96.222	300.520
1130	0.000	0.559	-3.050	1.481	1.009	-42.506	131.136
89	0.000	0.000	-3.050	2.040	27.943	-53.955	221.568
88	1.017	0.000	-2.033	2.040	44.458	-0.047	90.791
87	2.033	0.000	-1.017	2.040	25.919	-1.016	53.907
86	3.050	0.000	0.000	2.040	-0.668	0.974	-1.362
85	4.067	0.000	1.017	2.040	-27.133	-1.027	-56.395
84	5.083	0.000	2.033	2.040	-45.366	0.089	-92.366
83	6.100	0.000	3.050	2.040	-28.454	-53.976	-222.674
1274	6.100	2.489	3.050	-0.449	2.498	20.083	60.132
1273	6.100	2.219	3.050	-0.179	-0.408	27.909	85.197
1272	6.100	1.948	3.050	0.092	-5.421	28.117	85.258
42	6.100	1.678	3.050	0.363	-17.519	-93.687	-292.096
1336	6.100	1.118	3.050	0.922	-7.516	-94.208	-294.262
1335	6.100	0.559	3.050	1.481	-0.702	-41.592	-127.894
					S	-398	8

6.3.2.3 Momento Fletor Transversal

Como mostrado no item 4.2.3, foram calculados os Momentos Fletores Transversais através das tensões dadas pelo processamento de Elementos Finitos.

Tabela 6.13. Resultados dos Momentos Fletores Transversais (MEF) – (tf.m/m)

viga	M_{tr}
R	0
C1	-0.226
C2	-0.527
C3	-1.131
C4	-1.582
C5	-2.259

6.3.2.4 Resultados do MSC

No cálculo do Momento Fletor Longitudinal foi considerada a Força Normal aplicada na seção analisada. Já no cálculo do Bimomento de Distorção, Momento Fletor Transversal e no Momento Torsor foi considerada uma Força de protensão média aplicada ao longo da viga.

No cálculo do Bimomento de Distorção foram efetuadas algumas correções no processo de cálculo mostrado no item 4.1. As expressões (4.2), utilizadas para o cálculo de u_1 e u_2 são corretas para a torção, mas para distorção deve-se utilizar:

$$u_1' = \frac{8 \cdot P \cdot f}{\ell^2 \cdot \left(1 + \frac{b_s}{2 \cdot R}\right)^2} \quad (6.1)$$

$$u_2' = \frac{8 \cdot P \cdot f}{\ell^2 \cdot \left(1 - \frac{b_s}{2 \cdot R}\right)^2}$$

Ou seja, os valores de u_1 e u_2 passam a ser calculados em relação ao eixo da respectiva alma, e não mais ao eixo médio da viga, como é feito para a torção.

Em seus processamentos, [BARBOSA, 1997] observou que o valor do Bimomento de Distorção devido a um carregamento distribuído na alma externa continha um erro ao se comparar os resultados com os obtidos pelo MSC, ao contrário do carregamento aplicado na alma interna. Em vista desta observação, deseja-se corrigir novamente o cálculo do Bimomento de Distorção no caso da protensão. De [BARBOSA, 1997] obtemos:

$$\text{Para } f = 28,65^\circ \Rightarrow \begin{aligned} p_e &\cong 0,56 \times 1 \\ p_i &\cong 1,00 \times 1 \end{aligned}$$

$$\text{Para um valor } f \text{ qualquer temos: } \begin{aligned} \bar{p}_e &\cong 1 - 0,56 \times \left(\frac{f}{28,65} \right) \\ \bar{p}_i &\cong 1 \end{aligned}$$

$$\text{Assim } \begin{aligned} u_1'' &= u_1' \times \bar{p}_e \\ u_2'' &= u_2' \end{aligned}$$

Com os valores de u_1'' e u_2'' procede-se o cálculo do carregamento de distorção conforme a expressão (4.17), a ser aplicado à viga sobre apoio elástico.

A extrapolação mostrada acima não se faz necessária nos casos de ângulos menores que $28,65^\circ$, já que estamos efetuando processamentos de vigas com as mesmas curvaturas utilizadas por [BARBOSA, 1997]. Nos casos de ângulos maiores que tal valor, optamos pela extrapolação por serem resultados pouco confiáveis em virtude de erros provenientes da grande curvatura.

Tabela 6.14. Valores do coeficiente corretor para o cálculo da distorção na protensão

Ângulo central (graus)	$\bar{p}_e$
5,73	0,9393
13,37	0,8889
28,65	0,5625
40,11*	0,2125
57,30*	0,1250

* calculados por extrapolação a partir do valor de $f = 28,65$

Os resultados dos esforços solicitantes obtidos pelo MSC estão mostrados nas tabelas 6.13 e 6.14.

Tabela 6.15. Resultados obtidos pelo MSC – (tf,m)

Viga	VÃO				APOIO		
	N	M_f	B_d	B_{tuu}	N	T	V
R	-2654	-4765	0	-	-2410	0	-463
C1	-2654	-4765	-47	-	-2410	11	-463
C2	-2654	-4765	-93	-	-2410	26	-463
C3	-2654	-4765	-283	-	-2410	55	-463
C4	-2654	-4765	-465	-	-2410	78	-463
C5	-2654	-4765	-538	-	-2410	112	-463

Tabela 6.16. Resultados dos Momentos Fletores Transversais (MSC) – (tf.m/m)

Viga	M_{tr}
R	0
C1	-0.294
C2	-0.686
C3	-1.474
C4	-2.071
C5	-2.982

6.3.2.5 Análise dos Resultados

Ao analisarmos a força normal e o momento fletor aplicados ao concreto devido à protensão, podemos observar que os resultados obtidos pelo Método Simplificado de Cálculo e pelo Método dos Elementos Finitos encontram-se bem próximos. Isto pode ser observado nos gráficos 6.15 e 6.16.

Os resultados do bimomento de torção pelos dois métodos encontram-se no gráfico 6.17. Podemos observar que os valores inicialmente calculados pelo MSC (já considerando as forças atuando nas almas, e não no eixo da viga) se mostravam muito abaixo daqueles obtidos pelo MEF. Mas após a correção adotada, os valores dos bimomentos de torção se aproximam bastante dos valores de referência (MEF), principalmente para as curvaturas menores, que são usualmente utilizadas na prática (até 30°). Vale ressaltar que os valores dos bimomentos calculados pelo MSC encontram-se quase sempre a favor da segurança em relação ao MEF.

Gráfico 6.15. Resultados das Forças Normais na seção do meio do vão – viga biapoiada

Gráfico 6.16. Resultados dos Momentos Fletores na seção do meio do vão – viga biapoiada

Gráfico 6.17. Resultados dos Bimomentos de Distorção na seção do meio do vão – viga biapoiada

Gráfico 6.18. Resultados dos Momentos Fletores Transversais na seção do meio do vão – viga biapoiada

Ao analisarmos o gráfico 6.18 podemos observar que os valores dos momentos fletores transversais calculados pelo MSC estão a favor da segurança em relação aos calculados pelo MEF. É importante lembrar que a diferença entre os valores apesar de não ser muito pequena (da ordem de 20%) é plenamente justificável por não termos levado em conta o efeito local na alma que certamente reduziria os resultados obtidos pelo MSC e os aproximaria dos resultados calculados pelo MEF.

No caso da Torção não-uniforme observamos através dos resultados do MEF que apesar dos valores dos bimomentos serem consideráveis, as tensões provenientes de tais esforços são muito baixas, sendo muitas vezes desprezíveis. O MSC não considera esta solicitação que, ao contrário da torção uniforme de “Saint Venant”, é de difícil determinação analítica bem como as tensões associadas a ela. Mesmo no MEF encontramos dificuldades de se obter com precisão os valores dos

bimomentos pois através do desmembramento das tensões obtivemos valores bem diferentes dos obtidos por integração das tensões.

Tabela 6.17. Tensão total desmembrada por solicitação (MEF)

<i>Tensões devidas a cada solicitação</i>				
<i>(tf/m²) - nó 223</i>				
<i>f (°)</i>	<i>S_N</i>	<i>S_M</i>	<i>S_{Bd}</i>	<i>S_{Btnu}</i>
0	-324	-976	0	0
5.73	-324	-976	9	0
13.37	-324	-976	20	-1
28.65	-325	-978	43	-2
40.11	-326	-980	60	-3
57.3	-328	-982	86	-4

Gráfico 6.19. Resultados das Forças Cortantes na seção do apoio – viga biapoiada

Gráfico 6.20. Resultados dos Momentos Torsores na seção do apoio - viga biapoiada

Pode-se observar nos gráficos 6.19 e 6.20 que os resultados para a força cortante e para o momento torsor obtidos pelos dois métodos estão sempre a favor da segurança no MSC em relação ao MEF. As diferenças entre os resultados obtidos pelos dois métodos estão na faixa de 25% a 30%. Vale aqui lembrar que o cálculo do momento torsor e da força cortante no MSC foram efetuados com o valor da força de protensão média aplicada na viga e também com a força de protensão aplicada somente na seção do apoio.

6.3.3. Viga com Cabo de excentricidade constante

Além da análise da viga biapoiada com protensão geometricamente simétrica em cabo parabólico, processamos alguns outros casos, que mostraremos em seguida. O primeiro deles é a viga protendida com cabo de excentricidade constante. Tal análise foi efetuada com o objetivo principal de se avaliar o comportamento da distorção nessas vigas.

A viga é a mesma analisada anteriormente, com a diferença de que os cabos possuem excentricidade constante igual a 1,79 m em relação ao centro de gravidade da seção. Foi feita a análise para um cabo, localizado na alma interna, e para dois cabos, localizados um em cada alma. Foram processados para cada carregamento de protensão, dois casos, um da viga reta e outro da viga com curvatura de 5,73 graus. Os carregamentos de protensão aplicados em cada cabo são de 1329 tf, na seção transversal central. Os resultados dos esforços foram obtidos através da Integração Direta das tensões obtidas pelo programa de Elementos Finitos.

Tabela 6.18. Resultados dos Esforços por Integração das tensões na viga com cabo de protensão centrado (MEF) – (tf, m)

viga	f	N	M_f	B_d	B_{tuu}
<i>R/1 cabo</i>	0	-1329	-2375	0	0
<i>R/2 cabos</i>	0	-2658	-4751	0	0
<i>C1/1 cabo</i>	5.73	-1329	-2375	-291	544
<i>C1/ 2 cabos</i>	5.73	-2658	-4751	-50	-7

Podemos observar nos resultados acima que, conforme esperado, a força normal e os momentos fletores calculados pelo MEF são iguais à força de protensão e ao momento fletor aplicados.

Já o bimomento de distorção calculado pelo MSC para um cabo apenas é nulo, pois como o cabo de protensão é reto o carregamento vertical a ser considerado no cálculo de u_1 e u_2 é igual a zero. Através do MEF, para dois cabos obtivemos um valor diferente de zero, mas pequeno. Este valor é explicado pelo fato de ao não se conseguir fazer uma calibração perfeita dos cabos em todas as seções da viga, uma alma acaba por ter aplicado um momento fletor diferente da outra, o que gera uma distorção desprezível, mas diferente de zero. A mesma explicação é válida para o caso do cabo localizado em apenas uma das almas, vale ressaltar que agora aparece uma distorção de valor considerável.

6.3.4. Viga de dois vãos

A última análise a ser mostrada no presente trabalho é a viga contínua descrita no item 5.1.4. A seção a ser analisada corresponde ao apoio central da viga, e foram calculados os esforços solicitantes presentes em tal seção, mostrados a seguir. Os cálculos são apresentados em anexo.

As forças normais retiradas do *ADINA* foram divididas em três trechos e tomadas as forças médias em cada trecho:

$$F_1 (0-13,12 \text{ m}) - 2.166,5 \text{ tf}$$

$$F_2 (13,12 \text{ a } 27,50 \text{ m}) - 2.212,4 \text{ tf}$$

$$F_3 (27,50 \text{ a } 35 \text{ m}) - 2.225,6 \text{ tf}$$

Gráfico 6.21. Forças finais nos cabos após a deformação do concreto – viga contínua

No Método dos Elementos Finitos foram calculados os esforços solicitantes através de integração das tensões obtidas do programa.

Tabela 6.19. Resultados dos Esforços na viga contínua com cabo de protensão parabólico (MEF e MSC) – (tf, m)

Ângulo (graus)	Método de Cálculo	Seção do apoio central					
		N	M_f	B_d	B_{tu}	T	V
0	MSC	-2211	3413	0	-	0	-105
	MEF	-2211	3024	0	0	0	-93
80.22	MSC	-2211	3413	821	-	906	-105
	MEF	-2211	2903	-192	-172	750	-81

Nas figuras 6.3 a 6.5 apresenta-se respectivamente, os carregamentos para a obtenção do momento fletor, momento torsor e bimomento de distorção. Na FIGURA apresenta-se o resultados do bimomento de distorção na viga sobre apoio elástico.

Figura 6.5. Carregamentos na viga retificada para o cálculo dos Momentos Fletores

Figura 6.6. Carregamentos para o cálculo dos Momentos Torsores

Figura 6.7. Carregamentos e momentos fletores na viga sobre apoio elástico para o cálculo do bimomento de distorção

Quanto ao Método Simplificado podemos observar que mais uma vez, os resultados são satisfatórios para Força Normal e Momento Fletor. Quanto ao momento torsor e força cortante, temos resultados satisfatórios com pequenas diferenças no caso da viga curva.

No cálculo do bimomento de distorção não deve ser considerada a correção no caso das vigas contínuas, já que ela é baseada em resultados de vigas biapoiadas. No entanto, o cálculo das forças u_1 e u_2 se fez considerando-se o eixo de cada alma. Além disso, considerou-se a parcela devida à curvatura, proveniente do momento hiperestático de protensão.

Os resultados se mostram muito diferentes nos dois métodos de cálculo. Observa-se então que o cálculo para uma curvatura tão grande como a mostrada, de mais de 80 graus, não deve ser feito pelo Método Simplificado de Cálculo, já que extrapola os limites de valores de ângulos aceitáveis para a sua aplicação.

CAPÍTULO 7

CONCLUSÕES

Ao fim deste trabalho, pode-se apresentar algumas conclusões úteis tanto do ponto de vista didático como do ponto de vista prático.

A análise de uma viga unicelular curva não é muito simples, mas com algumas considerações e simplificações o seu cálculo torna-se viável através do Método Simplificado de Cálculo.

A utilização do desmembramento das tensões obtidas pelo Método dos Elementos Finitos na análise das vigas curvas submetidas ao carregamento de protensão não se mostrou plenamente confiável, ao contrário do mostrado por [BARBOSA, 1997]

para carregamentos distribuídos e cargas concentradas. No caso da protensão parece ser mais consistente a utilização, para o cálculo dos esforços solicitantes, da integração das tensões obtidas do MEF.

Através da comparação com os resultados do MEF, o Método Simplificado de Cálculo mostrou-se sempre a favor da segurança, com diferenças percentuais não muito pequenas, mas facilmente justificáveis caso a caso. Para momentos fletores longitudinais e forças normais os resultados foram praticamente iguais nos dois métodos. No caso da distorção (bimomentos e momentos fletores transversais) os erros encontrados foram muito grandes, portanto foi proposta uma correção no cálculo efetuado pelo MSC. Já na torção os erros foram menores, mas consideráveis (cerca de 30%, aumentando de acordo com a curvatura), ainda assim o processo simplificado nos levou a resultados a favor da segurança.

Quanto à análise dos bimomentos de distorção, principal objetivo deste trabalho, são propostas algumas novidades como a necessidade do cálculo de u_1 e u_2 ser efetuado em relação a cada alma e não mais em relação ao eixo da viga, como é feito no cálculo da torção. Além disso, deve ser efetuada uma correção nos seus valores baseada nas diferenças entre os resultados obtidos por [BARBOSA, 1997] para carregamentos lineares na alma externa ou interna. Enfim, com tais modificações no Método Simplificado de Cálculo a análise dos bimomentos de distorção para carregamentos de protensão passa a ter resultados bem próximos dos obtidos utilizando o MEF. Vale ressaltar que a última correção descrita ajustada para os bimomentos de distorção não é aplicável, nem necessária, no cálculo dos momentos fletores transversais, apenas a mudança para os eixos das almas deve ser efetuada. Enfim, a aproximação do problema da distorção em pontes curvas pela analogia a uma viga sobre apoio elástico, reta, gera muitos erros na protensão especialmente no cálculo dos bimomentos de distorção.

A respeito do cálculo da viga contínua podemos concluir que a distorção não deve ser calculada através do MSC para vigas com curvatura muito grande. Para definirmos limites para a aplicação do método em tais vigas seria importante um estudo aprofundado especificamente neste assunto.

Fica demonstrado que para curvaturas limitadas a ângulos centrais menores que 30 graus o projeto de pontes curvas protendidas pode ser feito por processos simplificados, inclusive a avaliação dos esforços de distorção (com a exceção das vigas contínuas, cuja análise deve ser mais cuidadosa). Na verdade é até aconselhável o uso de processos simplificados, como o MSC aqui descrito, por eles permitirem uma visão mais clara dos problemas essenciais desses projetos, reduzindo substancialmente a possibilidade de mal-entendidos e erros grosseiros.

Para o prosseguimento da pesquisa nesta área podemos citar como possíveis temas:

- estudo aprofundado das diferenças obtidas ao se utilizar o desmembramento das tensões ou a integração direta das tensões retiradas do MEF;
- análise comparativa entre o MSC e o MEF enfatizando a decomposição das tensões tangenciais;
- estudo completo dos esforços solicitantes nas pontes celulares curvas em viga contínua com grandes ângulos centrais e incluindo protensões geometricamente assimétricas;
- proposta de um método simplificado baseado no modelo de barra curva.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ADINA System On-Line Manuals. Watertown MA, 1999.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Projeto de revisão da - NBR 6118 : projeto de estruturas de concreto**. Rio de Janeiro, 2000.

ÁVILA, J. I. S. L. **Solicitações transversais em pontes curvas protendidas**. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 2, São Paulo, 1990. Anais. São Paulo: EPUSP, 15 a 17/10, 1990.

BARBOSA, R. L. **Pontes curvas unicelulares em regime elástico**. São Paulo, 1997. 167 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

CALGARO, J. A. ; VIRLOGEUX, M. **Project et construction des ponts – analyse structurale des tabliers de ponts**. Paris: Presses de l'École Nationale des Ponts et Chaussées, 1994.

GHALI, A. **Torsion in prestressed curved bridges**. Publication SP - American Concrete Institute SP-93. Detroit: American Concrete Institute, p. 815-834, 1986.

JOHANSSON, J. **Diseño y calculo de estructuras pretensadas**. . Barcelona: Marcombo de Boixareu, 1975.

LANDUYT, D. V.; BREEN, J. E. Tendon Breakout Failures in Bridges. **Concrete international**, v. 19, n. 11, p. 41-46, November 1997.

LANGENDONCK, T. Van. **Resistência dos materiais – deformações I.** Rio de Janeiro: Científica, 1960.

LANGENDONCK, T. Van. **Resistência dos materiais – deformações II.** São Paulo: Edgard Blücher, 1968.

LEONHARDT, F. **Construções de concreto, v. 6: princípios básicos da construção de pontes de concreto.** Rio de Janeiro: Interciência, 1979.

MENN, C. **Prestressed concrete bridges.** Berlin: Birkhäuser Verlag, 1990.

PODOLNY, W. The cause of cracking in post-tensioned concrete box girder bridges and retrofit procedures. **Journal of the prestressed concrete institute.** v. 30, n. 2. , p. 82-139. Mar/Apr 1985.

SKAF, K. J.; STUCCHI, F.R. **Alternativas na representação da protensão como ação.** São Paulo: EPUSP, 1995. Boletim Técnico da Escola Politécnica da USP. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, BT / PEF/9512.

STUCCHI, F. R. **Pontes celulares curvas.** Relatório de pesquisa à CERT/USP. São Paulo, 1984.

STUCCHI, F. R. **Sobre o comportamento estrutural das pontes celulares.** São Paulo, 1982. Dissertação (Mestrado). – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

TESAR, A. Shear lag in the behaviour of thinwalled box bridges. **Computers & Structures.** v. 59, n. 4, p. 607-612, 1996.

BIBLIOGRAFIA RECOMENDADA

ÁVILA, J. I. S. L. **Curved concrete bridge of segmental box construction with inclined webs.** Leeds, 1988. (Doctor of Philosophy) Thesis - Department of Civil Engineering of The University of Leeds-England.

BATHE, K. J. **Finite element procedures.** Englewood Cliffs, N.J. : Prentice Hall, 1996

COURBON, J. **Theorie des ponts courbes.** Paris: Annales de Ponts et Chaussees, 1961.

HETÉNYI, M. I. **Beams on elastic foundation: theory with applications in the fields of civil and mechanical engineering.** Ann Arbor: University of Michigan Press, 1979.

JIROUSEK, J.; BOUBERGUIG, A.; SAYGUN, A. A macro-element analysis of prestressed curved box-girder bridges. **Computer & Structures**, Vol. 10, pp. 467-482. Pergamon Press, 1979.

KRÍSTEK, V. **Theory of box girders.** Chichester : John Wiley, 1979.

MATHIVAT, J. **Construction par encorbellement des ponts en beton precontraint.** Paris: Eyrolles, 1979.

PACE, C.; DEZI, L. Extensions to curved prestressed concrete beams. **Journal of the structural division.** v. 107, n.11, p 2215-2225, November 1981.

PFEIL, W. **Pontes em concreto armado.** Rio de Janeiro: Livro Técnicos e Científicos, 1990.

PIMENTA, P. M. **Seções celulares de pontes em concreto protendido.** São Paulo, 1978. 148 p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.

SCHLAICH, J.; SCHEEF, H. **Concrete box-girder bridges.** Zürich: IABSE, 1982.

TIMOSHENKO, S. P. **Theory of plates and shells.** New York: Mc Graw-Hill, 1940.

ZAGOTTIS, D. L. **Introdução à teoria das placas e das cascas.** (Notas de Aula do curso de pontes e grandes estruturas) Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1979.

ZYL, S. F. Van ; SCORDELIS, A. C. Analysis of curved, prestressed, segmental bridges. **Journal of the Structural Division.** v. 105, n. 11 , p. 2399-2417, November 1979.