RICARDO OLIVEIRA

ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE ESTRUTURAS PLANAS DE CONCRETO ARMADO COM A CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA

Tese de doutorado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de doutor em Ciências, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

São Paulo

2011

RICARDO OLIVEIRA

ANÁLISE TEÓRICA E EXPERIMENTAL DE ESTRUTURAS PLANAS DE CONCRETO ARMADO COM A CONSIDERAÇÃO DA FLUÊNCIA

Tese de doutorado apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de doutor em Ciências, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt

São Paulo

2011

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho à minha filha, Marina. A flor do meu Jardim.

AGRADECIMENTOS

A Deus nosso Senhor Jesus Cristo.

Em especial a minha família: a minha linda filha Marina; meus pais João Inácio e Aurelina do Espírito Santo, que nos educou com exemplos; meus irmãos, sempre unidos e muito presentes: Fernando, Tânia, Cristina, Isabel, Anselmo, Sônia, Vera e Inácio; e sobrinhos.

Ao meu orientador Túlio Nogueira Bittencourt pela confiança, orientação e apoio à realização deste trabalho.

A família Loberto: João, Luzia, Roberto, Carlinhos e Marquinhos, sempre presentes durante esses anos.

Ao amigo Maurílio, pela grande amizade e pedaladas. Aos amigos de longas datas, César, Wilson, Winston, Adriano Correa e Neirivaldo pelo prazer de tê-los presentes.

A turma do PCC, Juarez, Rui Barbosa, Brunoro, Waleska, Eliane e Marylinda, que de forma indireta participaram deste trabalho.

As amigas Carol e Luciana pelo apoio experimental e a Marcelo pelo apoio numérico. A Juliana pelo apoio e otimismo. Aos novos amigos Alfredo, Leila, Ritermayer e Plínio. Aos amigos Luís Bitencourt e Leandro, sempre dispostos a ajudar.

A turma da sexta-feira: Geo, Túlio, Freitas e Reginaldo pelo companheirismo.

Aos companheiros do LMC, Cristiano, Lucas, Diogo, Igor, Paulo Nigro, pela amizade e companhia durante esse período.

Aos funcionários do Laboratório de Estruturas e Materiais Estruturais (LEM) pelo apoio na experimentação e contribuições técnicas.

A CAPES – Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, pelo auxílio financeiro à pesquisa.

RESUMO

Neste trabalho desenvolveu-se um método para análise de estruturas planas em concreto armado, em que considerou-se os efeitos de segunda ordem e da fluência. Foi utilizado o método dos elementos finitos (MEF) com elemento de barra com seis graus de liberdade, formulado com as hipóteses da teoria de viga Bernoulli-Euler, com seção transversal subdividida em lamelas. A não linearidade geométrica é representada pela descrição corrotacional para grandes deslocamentos e rotações e pequenas deformações. O efeito viscoelástico para prever a fluência no concreto é obtido pelo modelo de Maxwell em camadas, calibrado a partir de funções de fluência fornecidas por normas. Uma análise envolvendo o modelo desenvolvido em plataforma MATLAB pode ser dividida em duas etapas: na primeira busca-se a resposta da estrutura para um carregamento instantâneo e na segunda o comportamento é dependente do tempo. Inicialmente fizeram-se comparações com alguns resultados disponíveis na literatura a fim de avaliar o comportamento do modelo implementado. Por fim, foi feita a análise de um modelo reduzido. Esse modelo consistiu em um pórtico moldado em microconcreto armado, que foi instrumentado com sensores elétricos para medir suas deformações e deslocamentos. O pórtico foi ensaiado na idade de trinta e três dias e monitorado durante cento e vinte e cinco dias. A partir dos resultados analisados por este aplicativo, concluiu-se que o mesmo é capaz de fazer análise não linear física e geométrica de estruturas planas em concreto armado, considerando a fluência. Os resultados de previsão de fluência fornecidos pelo programa para elementos de concreto armado submetidos à força axial são muito próximos dos resultados experimentais de Kataoka (2010). No entanto, para a análise do pilar do pórtico, que corresponde a um caso de flexo-compressão, houve uma diferença significativa, pois a análise numérica gerou curvaturas maiores do que as experimentais. Em relação aos resultados monitorados foi observado que a umidade tem grande influência nas deformações medidas.

Palavras-chave: concreto armado; elementos finitos; fluência; análise não linear; monitoramento de estruturas.

ABSTRACT

In this work a methodology for the analysis of plane structures of reinforced concrete was developed. The second-order effect and creep were considered. The methodology is based in the finite element method (FEM). Beam elements with 6 degrees of freedom (d.o.f), which takes into account the Euler-Bernoulli beam theory with cross-section divided in layers, was used. The geometric nonlinearity is described by the co-rotational formulation for large displacements and rotations and small deformations. The viscoelastic effect of the creep in the concrete is obtained with the use of the Maxwell model in layers, calibrated with creep functions obtained in the standards. The model developed was implemented in MATLAB language, in which the analysis is sub-divided in two phases: in the first phase one seeks the response of the structure for an instantaneous load and in the second, the behaviour is time dependent. Firstly, some comparison with some available results in the literature were done with the aim to assess the accuracy of the model implemented. After that, the analysis of a prototype was done. The prototype consists of a frame made of reinforced micro-concrete. The frame was instrumented with electric sensors to measure the displacements and deformations. The frame was loaded after at the age of 33 days and monitored during 125 days. The results showed that the program is able to analysis plane structures of reinforced concrete with material and geometric nonlinearity, with the consideration of creep. The results obtained with the analysis program for an element of reinforced concrete under axial load are very close to the experimental results obtained by Kataoka (2010). However, in the analysis of frame-columns, corresponds to combined bending and compression loads, noticeable differences appears due to bigger curvatures in the numerical analysis than in the experimental one. With respect to the monitored results it was noted that the humidity has large influence in the deformations measured.

Keywords: reinforced concrete; finite elements; creep; nonlinear analysis; monitoring.

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO

Os comportamentos das estruturas de concreto armado, submetidas a carregamentos diversos, têm sido objetos de estudos desde que o concreto começou a ser amplamente utilizado como material na engenharia. No projeto estrutural dos edifícios altos é extremamente importante uma correta avaliação do comportamento estrutural, considerando-se os efeitos da não linearidade física, da não linearidade geométrica, e da reologia do material na análise estrutural (PINTO, 2002).

Até relativamente pouco tempo, os engenheiros deram pouca atenção à fluência e retração no projeto de edifícios de concreto. Eles consideravam que a fluência tinha a função de transferência de tensões de seções mais solicitadas para seções pouco solicitadas e a retração era considerada como um fenômeno inevitável (SMITH & COULL, 1991). No entanto, com o aumento da altura dos edifícios, a importância das deformações diferenciais dependentes do tempo, de colunas e paredes de cisalhamento, tornou-se objeto de estudo, devido à natureza acumulativa das deformações. Essas deformações podem causar danos a elementos não estruturais como: divisórias, paredes de alvenaria e janelas, bem como gerar esforços adicionais nas vigas em níveis superiores e também resultar na redistribuição de forças axiais nos pilares (SMITH & COULL, 1991 e MARU *et al.*, 2003). Com o passar do tempo, essas deformações e redistribuição de tensões, se não detectadas e adequadamente tratadas, podem provocar a degradação progressiva das estruturas, resultando em consideráveis custos econômicos e sociais (ALMEIDA, 2006).

Para avaliar o desempenho das estruturas de concreto, tem-se utilizado cada vez mais o recurso de monitoramento de corpos em prova para caracterização das propriedades de fluência e retração, assim como em estruturas reais durante a sua construção e após a sua conclusão (ASSIS, 2007). A figura 1.1 mostra um edifício de dezenove andares monitorado durante cinco anos desde a sua construção. As informações obtidas contribuem para a calibração de modelos disponíveis na literatura para previsão da fluência e retração, assim como para avaliação de critérios de projeto e o acompanhamento da evolução do comportamento das construções.

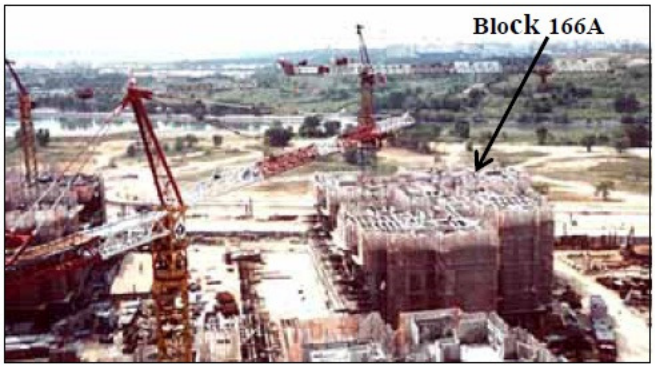


Figura 1.1 - Edifício em construção (GLISIC *et al.* 2007)

Visando contribuir para a compreensão do fenômeno da fluência em estruturas planas em concreto armado, sujeitas aos efeitos de segunda ordem, foi desenvolvido um aplicativo que simula os efeitos da não linearidade física e geométrica, considerando a previsão da fluência no concreto.

1.1 JUSTIFICATIVA

Embora o estudo da deformabilidade das estruturas de concreto armado, decorrentes das propriedades da retração e fluência tenha sido objeto de estudo de diversos pesquisadores, estas propriedades estão ainda longe de serem totalmente compreendidas (BAŽANT, 2001).

Apesar de alguns pesquisadores apontarem a fluência e a retração como causas principais de patologias em estruturas de concreto armado, devido à deformação dos elementos estruturais, os aplicativos comumente usados em escritórios de projetos tais como: TQS, EBERIK e CYPECAD, dimensionam e detalham estruturas de concreto armado, sem a consideração desses fenômenos ou considerando-os de forma simplificada.

As deformações devido à fluência e retração em elementos de concreto armado dependem da taxa de armadura e da relação volume-superfície, bem como das propriedades dos materiais. Essas deformações diminuem quando há um aumento na nas áreas das barras das armaduras e da seção transversal de peças submetidas ao mesmo carregamento (SMITH & COULL, 1991). A partir disso nota-se a necessidade de considerar no cálculo da armação de pilares a

previsão do efeito da retração e da fluência. Um exemplo dessa necessidade pode ser comprovado analisando o edifício em construção, mostrado na figura 1.2, situado na Avenida JK, São Paulo - SP. A maioria dos pilares que compõem este edifício tem a mesma seção transversal e, consequentemente, mesma relação volume-superfície. Nesse caso, a armação terá um efeito importante na prevenção do encurtamento diferencial entre os pilares, tão prejudicial ao comportamento das estruturas. Este procedimento também é comum em estruturas pré-moldadas, pois os pilares pré-moldados são dimensionados para atender a uma faixa de carregamento.

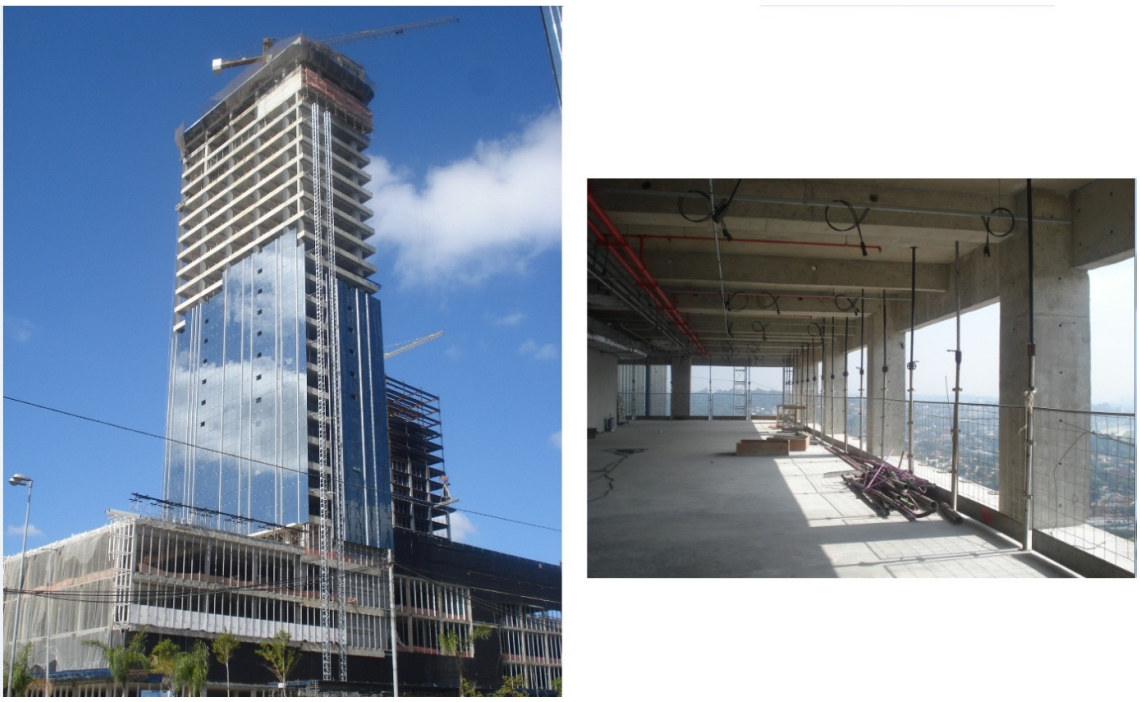


Figura 1.2 - Edifício em construção localizado na Av. JK, São Paulo (Wtorre JK, 2011)

Impulsionado por esses motivos, esta tese tem o intuito de apresentar e discutir uma formulação não linear física e geométrica com a superposição da viscoelasticidade, aplicada ao elemento finito de barra. Com a finalidade de obter informações para a validação do aplicativo desenvolvido nesta tese, foi construído um pórtico em microconcreto armado e monitorado durante cinco meses.

1.2 OBJETIVO

O objetivo principal desta pesquisa foi o desenvolvimento de um aplicativo, com pequeno custo computacional, que faça análise de estruturas planas em concreto armado com a consideração do efeito de segunda ordem e da fluência do concreto.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- Estudar um modelo de previsão de fluência, cuja formulação possa ser calibrada a partir de funções de fluência indicadas em normas e que possa ser implementado em um programa de análise numérica via método dos elementos finitos;
- Desenvolver um aplicativo computacional utilizando um modelo de previsão de fluência, que seja capaz de simular estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos utilizando elementos finitos de barra, considerando a não linearidade geométrica (formulação corrotacional);
- Construir e instrumentar um pórtico de concreto armado, para análise do seu comportamento ao longo do tempo;
- Análise o aplicativo desenvolvido nesta tese, através da simulação e comparação com resultados disponíveis na literatura e do pórtico em concreto armado confeccionado neste trabalho.

1.3 ESTRUTURA DA PESQUISA

Este trabalho está organizado em sete capítulos:

O primeiro é constituído pela introdução, justificativa, objetivo e estrutura da pesquisa.

O segundo capítulo apresenta a conceituação das deformações do concreto. São discutidas as causas, os fatores que a influenciam e os efeitos da fluência e da retração.

O terceiro capítulo trata da análise não linear física e geométrica aplicada ao elemento de barra. Inicialmente são abordados os diversos tipos de comportamento não lineares. Em seguida é apresentada a formulação linear para o elemento finito de barra, a formulação não linear física e a descrição corrotacional, que simula o efeito de segunda ordem. Por fim é apresentado o aplicativo desenvolvido para análise imediata em estruturas de concreto armado e os exemplos de validação desse aplicativo.

No quarto capítulo é apresentado o modelo matemático usado para fazer a previsão de fluência no concreto. Discute-se a formulação elasto-viscoplástica, o modelo viscoelástico de Maxwell e a calibração do modelo de Maxwell em camadas, a partir de funções de fluência. As principais características do aplicativo desenvolvido para previsão de fluência são abordadas, bem como sua validação e avaliação a partir da comparação com os ensaios de fluência realizados por Kataoka (2010).

No quinto capítulo é feita uma abordagem detalhada do programa experimental para o ensaio de fluência do pórtico em microconcreto armado. São descritos os procedimentos para a fabricação e moldagem do mesmo, o sistema de aquisição e os sensores elétricos utilizados.

No sexto capítulo são apresentados e comentados os resultados das deformações e deslocamentos obtidos no ensaio do pórtico. Ainda neste capítulo é feita uma análise comparativa entre os resultados numéricos e os experimentais.

O sétimo capítulo apresenta a conclusão, observações e algumas sugestões para trabalhos futuros.

2 CONCRETO: DEFORMAÇÕES AO LONGO DO TEMPO

Neste capítulo é apresentado o comportamento ao longo do tempo do concreto. Para tanto, são abordados os seguintes assuntos: os tipos de deformações no concreto, o diagrama tensão-deformação sob força mantida, proposto por Rüsch (1960) e os fenômenos de fluência e retração com análise de suas causas, fatores que influenciam e efeitos.

2.1 DEFORMABILIDADE DO CONCRETO

O concreto é um material heterogêneo, composto por cimento, água, agregados miúdo e graúdo, no qual ocorrem diferentes fenômenos físicos e químicos durante o processo de endurecimento e as propriedades do concreto endurecido são grandemente influenciadas por sua estrutura interna, que pode ser imaginada como sendo formada pelo agregado graúdo embebido numa matriz de argamassa. As propriedades reológicas do concreto decorrem essencialmente da constituição dessa matriz, cuja heterogeneidade é condicionada pelas reações de hidratação do cimento (FUSCO, 1976).

Esses dois componentes, isto é, a matriz de argamassa e o agregado graúdo quando sob força de compressão axial apresentam uma curva tensão-deformação sensivelmente linear, embora o concreto seja não linear, como mostrado na figura 2.1 (NEVILLE, 1997).

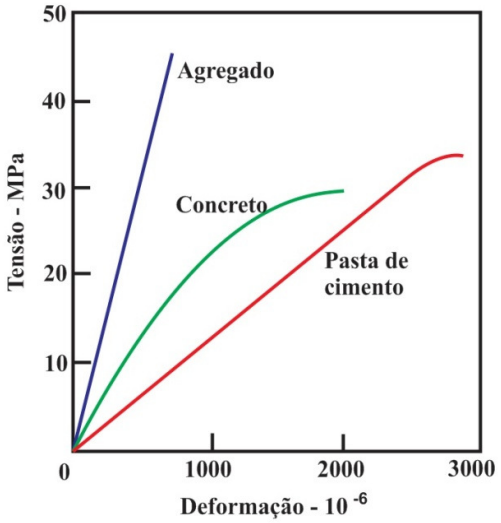


Figura 2.1 - Curvas tensão-deformação do agregado, concreto e da pasta de cimento (NEVILLE, 1997)

O concreto sob condições de exposição atmosféricas normais (ocorre o fenômeno da retração), devido às diferenças nos módulos de elasticidade dos materiais que o compõe, apresenta deformações diferenciais entre a matriz e o agregado graúdo, causando fissuras na zona de transição na interface. Assim, mesmo antes da aplicação de força externa, já podem existir microfissuras na zona de transição entre a matriz de argamassa e o agregado graúdo. Para forças menores do que cerca de 30% da força última, essas microfissuras mantêm-se estáveis e a curva tensão-deformação pode ser considerada linear. Além desse valor, sob tensão crescente, as microfissuras aumentam em comprimento, abertura e quantidade e a curva tensão-deformação começa a inclinar, (METHA e MONTEIRO, 2008).

Ensaios realizados por Rüsch (1960) mostraram que o concreto apresenta uma resistência à compressão a longo prazo cerca de 20% inferior à resistência a curto prazo. Santos (1983) explica esse fenômeno a partir da figura 2.2, reproduzida do MC CEB-FIP (1974). Esses ensaios foram realizados em corpos-de-prova cilíndricos carregados aos 28 dias de idade e mantidos sob força com diferentes durações. Foi observado que à medida que o tempo de manutenção da carga aumenta a tensão última diminui. Como pode ser visto na figura 2.2, se for aplicada uma tensão menor do que de $0{,}8f_c$ (f_c é a resistência à compressão do corpo-de-prova), por exemplo, no ponto A e mantida por 100 minutos, não haverá ruptura mesmo que essa força permaneça indefinidamente. Ocorrerá apenas o aumento de deformação (deformação lenta). Mas se a tensão for aplicada acima de $0{,}8f_c$ e mantida por 20 minutos

(ponto C) não haverá ruptura. No entanto, se a tensão aplicada for mantida, a ruptura ocorrerá antes de 100 minutos, como pode ser visto no ponto D.

Como mencionado anteriormente, o ensaio foi realizado em corpos-de-prova com idade de 28 dias. Caso este ensaio fosse repetido em corpos-de-prova com idade de um ano, os resultados seriam análogos, mas com deformações máximas menores. Ou seja, a deformação lenta é menor em concretos com idades mais avançadas.

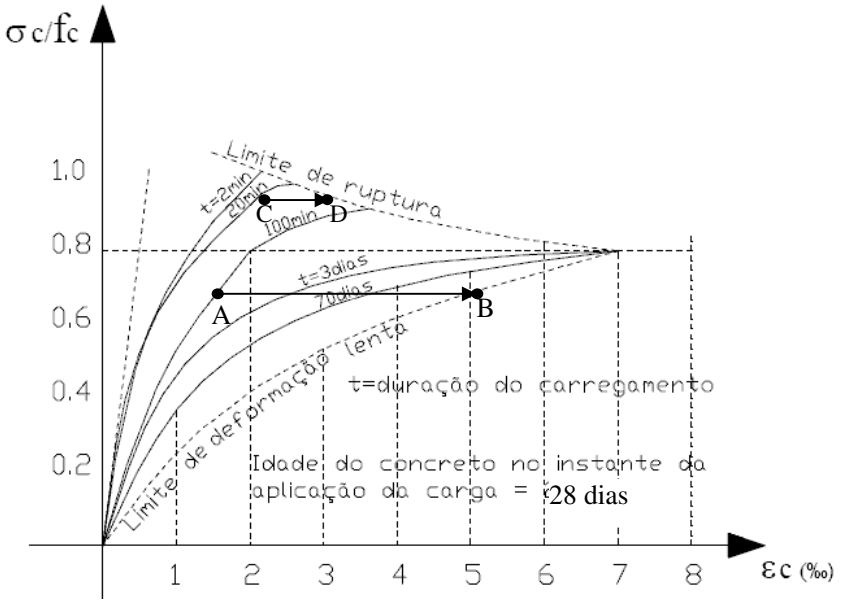


Figura 2.2 - Diagrama tensão-deformação para carregamento de longa duração (SANTOS, 1983)

2.2 DEFORMAÇÃO NO CONCRETO

O concreto submetido a carregamento pode apresentar deformações elásticas, viscoelásticas e plásticas. A deformação elástica é imediata, linear e recuperável com o descarregamento, sua relação tensão-deformação é regida pela lei de Hooke. Já a deformação plástica também é imediata, mas sem proporcionalidade entre tensão e deformação e irreversível (NEVILLE, 1997). Além das deformações devido à força aplicada, há deformações inerentes ao concreto como, por exemplo, a retração.

Assim as deformações no concreto, segundo o MC CEB-FIP (2010), podem ser classificadas em mecânicas, devido à aplicação de carregamento, e não mecânicas,

independentes da aplicação de qualquer carregamento. A deformação total pode ser expressa como:

$$\varepsilon_c(t) = \underbrace{\varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t)}_{\varepsilon_{c\sigma}} + \underbrace{\varepsilon_{cs}(t) + \varepsilon_{cT}(t)}_{\varepsilon_{cn}} \tag{2-1}$$

sendo,

- $\varepsilon_{ci}(t_0)$, deformação no instante do carregamento;
- $\varepsilon_{cc}(t)$, deformação devido à fluência;
- $\varepsilon_{cs}(t)$, deformação devido à retração;
- $\varepsilon_{cT}(t)$, deformação devido à temperatura;
- $\varepsilon_{c\sigma}(t)$, deformação relacionada à tensão;
- $\varepsilon_{cn}(t)$, deformação independente da tensão.

2.2.1 RETRAÇÃO

Quando a água se desloca para fora de um corpo poroso não totalmente rígido, verifica-se uma contração. No concreto geralmente ocorre esse tipo de deslocamento de água desde o estado fresco até idades mais avançadas (NEVILLE, 1997).

O concreto, ainda no estado plástico, perde água por evaporação, provocando contração conhecida como *retração plástica.* Depois da pega há uma redução do volume do material cimentício devido à hidratação do cimento, chamada de *retração autógena*. Esta retração é consequência da remoção de umidade dos poros capilares pela hidratação do cimento ainda não hidratado. A retirada da água do concreto conservado em ar não saturado causa a retração hidráulica ou retração por secagem. Uma parte dessa variação de volume é irreversível e deve ser diferenciada das variações reversíveis de umidade causadas por exposição alternada a condições secas e úmidas (NEVILLE, 1997).

2.2.2 FLUÊNCIA DO CONCRETO

A fluência pode ser definida como o aumento da deformação ao longo do tempo, sob tensão constante, como ilustra a figura 2.3.

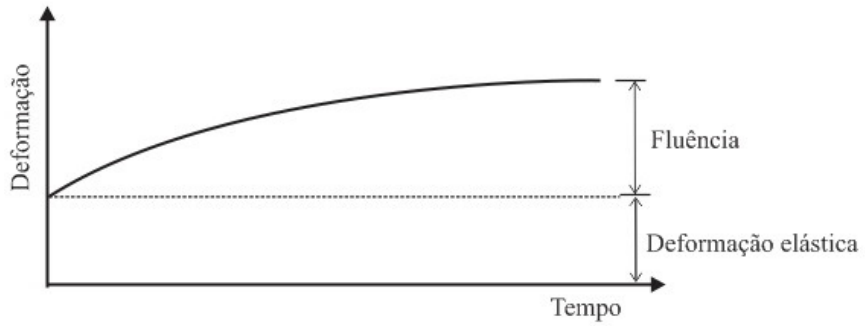


Figura 2.3 - Fluência de elemento de concreto em equilíbrio higroscópico (NEVILLE, 1997)

A curva da figura 2.3, corresponde a um concreto conservado em 100% de umidade relativa, chamada de *fluência básica*. Se um elemento perde umidade enquanto mantém-se carregado, é usual admitir que a fluência e a retração atuem simultaneamente, assim a fluência é calculada como a diferença entre a deformação lenta e a retração de um elemento semelhante conservado nas mesmas condições durante igual período de tempo. A fluência que ocorre quando a estrutura de concreto está submetida à secagem é chamada de *fluência por secagem*. A figura 2.4 apresenta as deformações citadas (NEVILLE, 1997).

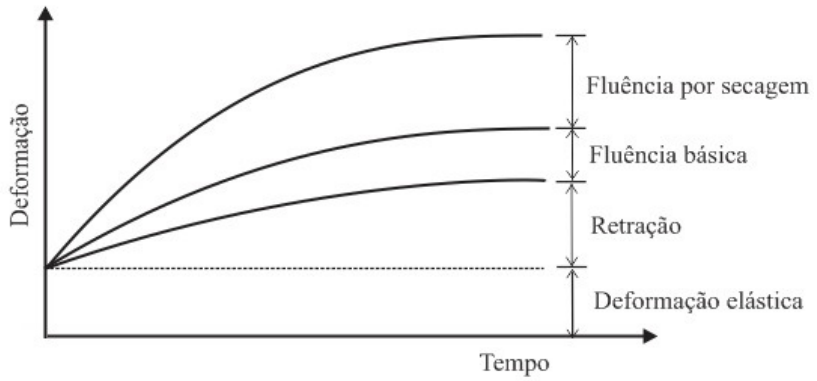


Figura 2.4 - Deformação de elemento de concreto carregado, submetido a secagem (NEVILLE, 1997)

2.2.3 REVERSIBILIDADE

Foi desenvolvido por McHenry (*apud* NEVILLE, 1997) um tratamento possível da recuperação parcial da fluência a partir do princípio da superposição das deformações. Esse tratamento estabelece que as deformações produzidas no concreto em qualquer tempo t, devido a uma tensão aplicada em um instante t_0, não dependem dos efeitos de qualquer tensão antes ou depois de t_0. Caso parte da força seja removida em t_1, a recuperação será igual à fluência de um elemento semelhante submetido a uma mesma tensão na idade t_1. Como pode ser visto na figura 2.5.

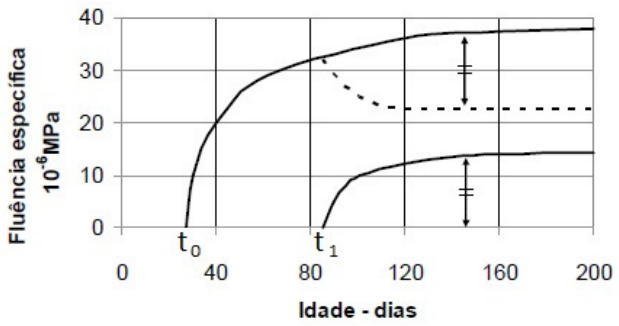


Figura 2.5 - Princípio da superposição das deformações (NEVILLE, 1997)

Entretanto, de acordo com Neville (1997), o princípio da superposição leva a um erro tolerável no caso de concreto massa, isto é, quando somente ocorre fluência básica, mas o erro aumenta quando se verifica fluência por secagem, pois a recuperação é grosseiramente supere[1]stimada.

Bažant, Li e Yu (2008) também afirmam que não há desvio do princípio da superposição para fluência básica, sendo notada apenas na fluência por secagem. Entretanto, Gardner e Tsuruta (2004) concluem que, para intensidades de tensão de 0,25 a 0,4, a reversibilidade tanto da fluência básica quanto por secagem é somente de 70 a 80% e, portanto, a superposição não é válida nem para concretos sujeitos a secagem ou àqueles selados, em situações que envolvem descarregamento.

---

[1] *McHenry, A new aspect f creep in concrete and its application to design, Proc. ASTM., 43, pp. 1069-84 (1943).*

É comum na literatura encontrar uma analogia entre o comportamento do concreto devido à secagem e reumidificação e a carga e descarga sob compressão uniaxial, pois ambos apresentam uma parcela de irreversibilidade, como ilustrado nas figuras 2.6 e 2.7. Na figura 2.6 mostra que, após a primeira secagem, o concreto não volta mais a condição inicial na reumidificação. Desta forma a retração por secagem foi classificada como *retração reversível*, que é parte da retração total reproduzível em ciclos de molhagem-secagem e *retração irreversível*, que é a parte da retração total que não pode ser reproduzida em ciclos subsequentes de secagem-molhagem (METHA e MONTEIRO, 2008).

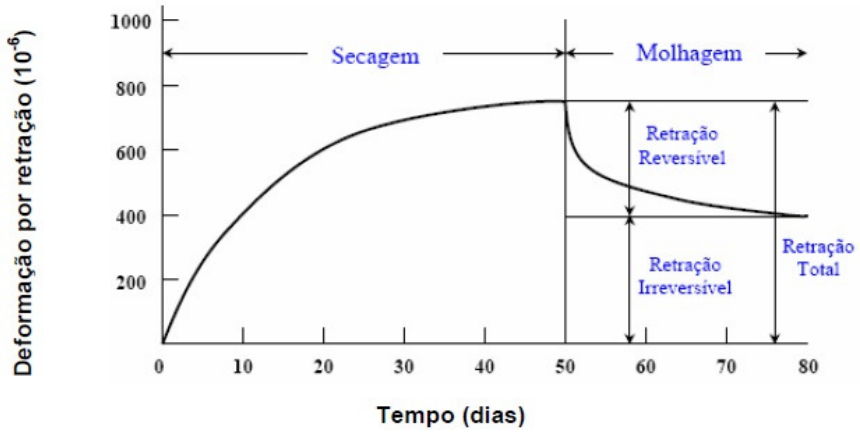


Figura 2.6 - Reversibilidade da retração por secagem (METHA e MONTEIRO, 2008)

Na figura 2.7 é apresentada a deformação ao longo do tempo de um vcorpo de prova de concreto submetido à compressão uniaxial durante 91 dias e depois descarregado. No instante do carregamento o concreto apresenta deformação elástica, seguida da deformação lenta. Quando descarregado ocorre uma recuperação instantânea seguida por uma redução gradual da deformação denominada recuperação da fluência. Embora a recuperação da fluência ocorra mais rapidamente que a fluência, a reversão da deformação por fluência não é total. Analogamente na retração por secagem, essa propriedade é definida pelos termos correspondentes, reversível e irreversível (METHA e MONTEIRO, 2008).

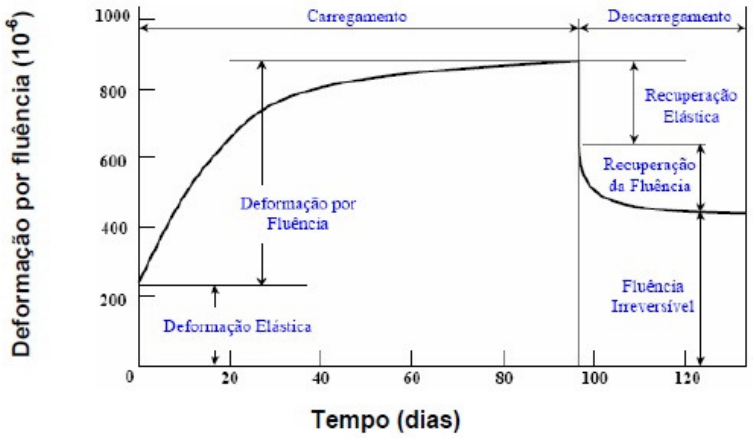


Figura 2.7 - Reversibilidade da deformação lenta (METHA e MONTEIRO, 2008)

2.3 FLUÊNCIA E RETRAÇÃO DO CONCRETO

Quando o concreto é mantido sob uma carga permanente, a deformação aumenta com o tempo, isto é, o concreto apresenta fluência. Além disso, submetido ou não a carregamento, o concreto se contrai, sofrendo retração. As intensidades da retração e da fluência são da mesma ordem de grandeza das deformações elástica devidas a tensões usuais, de modo que os diversos tipos de deformações sempre devem ser considerados (NEVILLE, 1997).

Os movimentos da umidade na pasta de cimento hidratada controlam essencialmente as deformações da retração por secagem e os da fluência no concreto, a diferença é que no primeiro caso, a umidade diferencial relativa entre o concreto e o ambiente é a força motriz, enquanto no outro, é a tensão mantida ao longo do tempo, as quais são influenciadas por vários fatores que interagem. As inter-relações entre esses fatores são bastante complexas e de difícil compreensão (METHA e MONTEIRO, 2008).

2.3.1 CAUSAS DA FLUÊNCIA E RETRAÇÃO POR SECAGEM

O concreto perde água fisicamente adsorvida a estrutura do CSH (Silicato de cálcio hidratado) quando a pasta de cimento saturada é exposta a um ambiente menos saturado, provocando deformação por retração. Uma causa menos intensa de retração do sistema é a remoção da água mantida por tensão hidrostática em pequenos capilares (5 a 50nm) da pasta de cimento hidratada, causada por secagem ou tensão aplicada (METHA e MONTEIRO, 2008).

Quando uma pasta de cimento hidratada é submetida à tensão constante, dependendo da magnitude e da duração da tensão aplicada, o CSH perde uma grande quantidade de água fisicamente adsorvida e a pasta apresentará fluência. Isso não quer dizer que não existam outras causas que contribuam para a fluência no concreto, no entanto a perda de água adsorvida sob pressão constante parece ser a causa mais importante (METHA e MONTEIRO, 2008).

As causas da fluência no concreto são mais complexas. Em geral concorda-se que, além dos movimentos de umidade, há outras causas que contribuem para o fenômeno da fluência. A não linearidade da relação tensão-deformação no concreto, especialmente para intensidades de tensão maiores de que 30 a 40% da tensão última, claramente demonstra a contribuição das microfissuras da interface para o aumento da deformação por fluência. Outra causa é a ocorrência de uma resposta elástica atrasada no agregado, pois a tensão é transferida da pasta para o agregado, a deformação elástica retardada do agregado contribui para a fluência (METHA e MONTEIRO, 2008).

2.3.2 FATORES QUE INFLUENCIAM NA FLUÊNCIA E RETRAÇÃO POR SECAGEM

A fluência e retração por secagem dependem de vários fatores relacionados entre si, alguns deles estão listados a seguir.

- **Materiais e dosagem**

Segundo Metha e Monteiro (2008), o tamanho máximo e a forma do agregado influenciam bastante na fluência e retração por secagem no concreto. Quando há uma mudança no teor do agregado de 65% para 75% pode reduzir a fluência em 10%. O módulo de elasticidade do agregado é a propriedade física que mais influencia na fluência do concreto, quanto maior o teor de agregado, menor a fluência.

Para um dado consumo de cimento e crescente relação água/cimento há um aumento da retração por secagem e da fluência, devido ao aumento da permeabilidade e diminuição da resistência, Metha e Monteiro (2008). De acordo com Tazawa e Miyazawa (1993, *apud* Kataoka, 2010), para concretos e pastas com pequena relação água/cimento, a retração autógena é maior. Além disso, concluiu que para pastas e concretos com relação água/aglomerante entre 0,3 e 0,4 a retração por secagem é muito maior que a retração autógena, enquanto que para relação água/aglomerante de 0,17 praticamente não há diferença entre ambas as retração autógena e por secagem.
[2]

- **Tensão e resistência**

De acordo com Neville (1997) existe uma proporcionalidade direta entre a fluência e a tensão aplicada, exceção feita para elementos carregados nas primeiras idades. Esta

---

[2] TAZAWA, E.; MIYAZAWA, S. Autogenous shrinkage of concrete and its importance in concrete technology. In: CREEP AND SHRINKAGE - PROCEEDINGS OF THE FIFTH INTERNATIONAL RILEM SYMPOSIUM, Barcelona, Spain, 1993.

proporcionalidade é válida desde que a tensão aplicada esteja na fase linear da relação tensão-deformação, ou seja, até 0,4 da resistência última.

A fluência também é afetada consideravelmente pela resistência a compressão do concreto. A fluência é inversamente proporcional à resistência do concreto no momento da aplicação da carga (METHA e MONTEIRO, 2008). Quando a resistência do concreto é aumentada a fluência decresce, pois para aumentar à resistência do concreto, a quantidade de água utilizada tem que ser reduzida, (HOWELLS et al. 2005).

- **Cimento**

Foi observado por muitos pesquisadores que mudanças na finura e composição do cimento têm pouca influência na retração do concreto. No entanto, como o tipo do cimento influencia na resistência do concreto no instante da aplicação da força, a fluência é afetada (METHA e MONTEIRO, 2008). Por este motivo, qualquer comparação entre concretos feitos com diferentes tipos de cimento deveria levar em conta a influência do tipo de cimento sobre a resistência no instante da aplicação da carga, (NEVILLE, 1997). Quando carregado nas primeiras idades, o concreto que utiliza cimento Portland comum apresenta fluência maior do que o concreto com cimento de alta resistência inicial. Em virtude de sua pequena resistência inicial, misturas de concreto feitas com cimento de escória apresentam maior fluência em idade inicial (METHA e MONTEIRO, 2008).

- **Umidade relativa do ambiente e temperatura**

A umidade relativa tem grande influência na retração e na fluência do concreto. Para um mesmo concreto, quanto menor a umidade relativa, maior a fluência. A figura 2.8 ilustra a fluência de peças curadas à umidade relativa de 100% e depois carregadas e expostas a diversas umidades. A secagem da peça enquanto carregada aumenta a fluência, isto é, induz a fluência adicional por secagem. A influência da umidade é menor, ou nenhuma, no caso de elementos que tenham atingido equilíbrio higroscópico com o meio antes da aplicação da carga (NEVILLE, 1997).

A umidade relativa do ambiente que envolve a peça de concreto tem muita influência sobre a retração, ver figura 2.9. Nessa figura nota-se que a expansão do concreto (100% de umidade) é pequena quando comparado com a retração (NEVILLE, 1997).

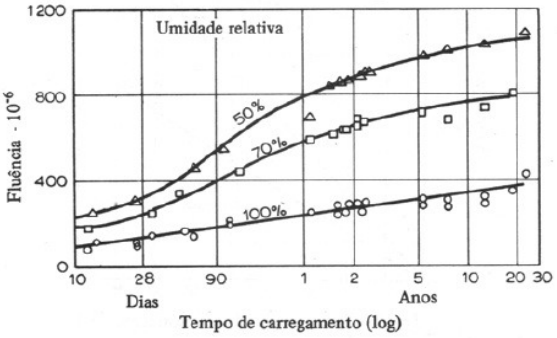


Figura 2.8 - Fluência de concreto carregado aos 28 e conservados em diferentes umidades relativas (NEVILLE, 1997)

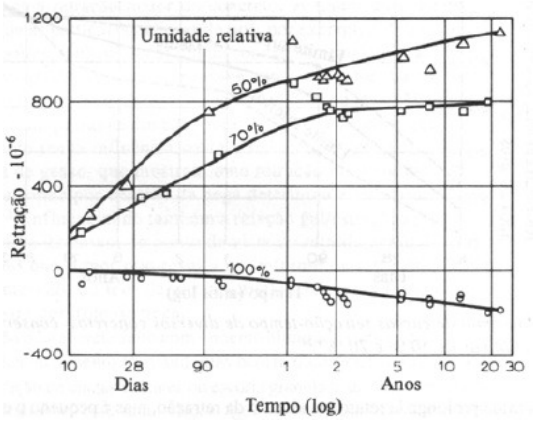


Figura 2.9 - Retração em concretos conservados em diferentes umidades relativas. Tempo contado a partir de 28 dias de cura (NEVILLE, 1997)

A temperatura à qual o concreto é exposto pode ter dois efeitos opostos na fluência. Se um elemento de concreto é curado a uma temperatura acima do normal antes da aplicação do carregamento, a resistência aumentará e a deformação por fluência será menor do que um concreto curado a uma temperatura menor. Por outro lado, a exposição à alta temperatura durante o período sob carregamento pode aumentar a fluência (METHA e MONTEIRO, 2008).

2.3.3 EFEITOS DA FLUÊNCIA E RETRAÇÃO POR SECAGEM

A fluência tem efeitos nas deformações, deslocamentos e muitas vezes na distribuição de tensões, mas esses efeitos variam com o tipo de estrutura. Em pilares de concreto armado a fluência resulta numa transferência gradativa de carga do concreto para a armadura. Em colunas carregadas excentricamente, a fluência aumenta o deslocamento, podendo levar à ruptura por instabilidade (NEVILLE, 1997). Um estudo feito por Costa Neto (2004), no qual foram ensaiados seis pilares sob carga excêntrica de 0,8% da carga última, observou-

se ruína de alguns pilares devido à fluência. Além disso, a fluência e retração podem gerar problemas de encurtamento diferencial entre pilares. (CARREIRA e BURG, 2000).

Um dos efeitos benéficos da fluência é o alívio de concentrações de tensões induzidas pela retração, por variações térmicas ou por movimentação das fundações. Em todas as estruturas de concreto, a fluência reduz as tensões internas devidas à retração não uniforme, reduzindo a intensidade de fissuração (NEVILLE, 1997). Apesar deste efeito benéfico, na maioria das vezes, o interesse dos engenheiros na fluência e retração está no deslocamento e/ou deformações em elementos estruturais e perda de tensão em peças protendidas.

Em concreto protendido, a fluência provoca a perda de protensão, gerando tensões menores em idades mais avançadas. A fluência também pode levar a deslocamentos excessivos de elementos estruturais e causar problemas de utilização, principalmente em edifícios de grande altura e pontes muito longas (NEVILLE, 1997).

3 ANÁLISE NÃO LINEAR DE ESTRUTURAS EM CONCRETO ARMADO

Este capítulo apresenta a formulação matemática utilizada neste trabalho para a análise não linear física e geométrica de estruturas de concreto armado. Inicialmente é abordado o comportamento dos diversos tipos de não linearidades a partir da resposta força-deslocamento. Em seguida é apresentada a teoria de Bernoulli-Euler, o uso do método das lamelas para simular a perda de rigidez da seção de concreto armado (não linearidade física) e a formulação não linear geométrica segundo a descrição corrotacional. Por fim, toda a formulação é validada comparando-a com alguns exemplos disponíveis na literatura.

3.1 COMPORTAMENTO NÃO LINEAR DAS ESTRUTURAS

O objetivo da análise estrutural é determinar o comportamento da estrutura submetida a ações externas e internas, ou seja, obter tensões, deformações e deslocamentos que estão intimamente ligados aos parâmetros e modelos definidos na modelagem.

A maioria das estruturas de engenharia exibe um comportamento linear elástico sob cargas de serviços, algumas exceções como estruturas esbeltas, arcos, edifícios altos, estruturas submetidas a escoamento localizado prematuro e estruturas fissuradas apresentam um comportamento não linear.

A figura 3.1 apresenta os tipos mais comuns de análise de estruturas de engenharia. Na ***análise elástica linear de primeira ordem***, a relação tensão-deformação do material segue a lei de Hooke e as mudanças de configuração do sistema estrutural devem ser suficientemente pequenas, de modo a permitir a utilização da relação deformação-deslocamento linear, com as equações de equilíbrio relacionadas à geometria inicial.

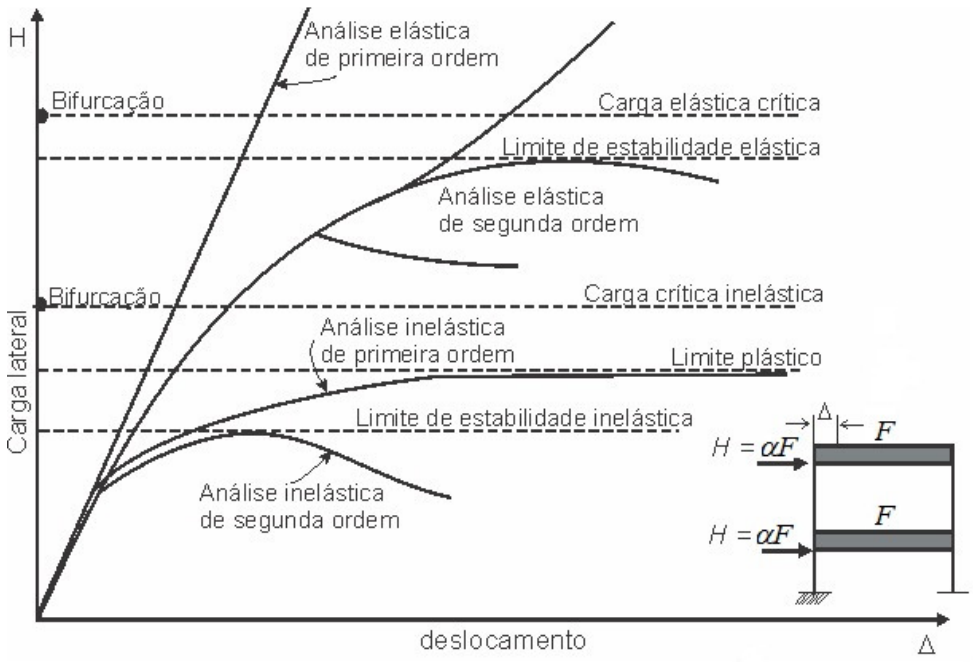


Figura 3.1 - Tipos de Análises (McGuire *et al.* 2000).

Em uma ***análise elástica de segunda ordem*** tem-se o material obedecendo à lei de Hooke, mas devido à consideração dos deslocamentos finitos na formulação das equações de equilíbrio a análise é denominada de não linear geométrica.

Na ***análise inelástica de primeira ordem*** os materiais são regidos por modelos constitutivos não lineares, mas as equações de equilíbrio são escritas com relação a estrutura indeformada. Este tipo de análise é eficiente quando os deslocamentos devido ao efeito de segunda ordem são insignificantes, como no comportamento elastoplástico de vigas.

A ***análise inelástica de segunda ordem*** é mais completa, pois as equações de equilíbrio são escritas em termos da geometria deformada (não linearidade geométrica – NLG) e os materiais também são regidos por modelos constitutivos não lineares (não linearidade física – NLF). Uma estrutura esbelta de concreto armado ou protendido é um caso típico para aplicação desse tipo de análise.

3.2 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

A complexidade dos modelos matemáticos que representam o comportamento de muitos problemas de engenharia levou ao desenvolvimento de métodos aproximados para a sua solução, destacando-se os métodos variacionais e de resíduos ponderados. O método de Rayleigh-Ritz e o método Galerkin são os mais conhecidos e deles originaram o método dos elementos finitos.

No cálculo variacional, procura-se a função $y(x)$ que dentre todas as funções admissíveis é a solução exata para minimizar um determinado funcional. No método de Rayleigh-Ritz, a função $y(x)$ é substituída por uma função aproximada $v(x)$, formada por uma combinação linear de funções $\phi_i(x)$. Após a substituição de $v(x)$ no funcional, este é minimizado. A escolha adequada das funções $\phi_i(x)$ é importante para se obter uma boa aproximação para a solução do problema, no entanto, pode conduzir a funções de alta ordem e consequentemente difícil solução.

O método dos elementos finitos consiste na divisão do domínio de integração em um número finito de pequenas regiões denominadas elementos finitos, transformando o meio contínuo em um conjunto de elementos discretos, conhecida por malha de elementos finitos, como se vê na figura 3.2. Os elementos são ligados entre si por pontos de intersecção chamados de nós.

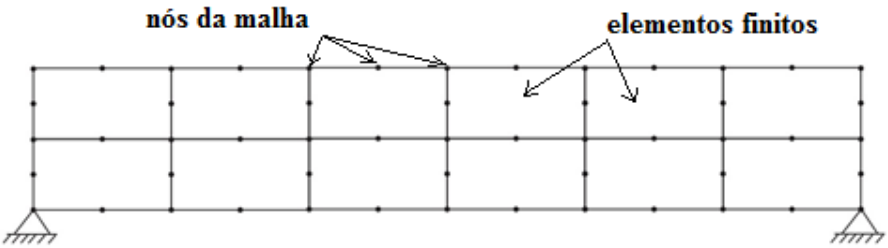


Figura 3.2 - Malha de elementos finitos

Ao invés de buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio, no método dos elementos finitos as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento, desta forma para cada elemento finito *i* monta-se um funcional Π_i, e a soma de todos eles representa o funcional para o domínio, (equação 3-1).

$$\Pi = \sum_{i=1}^{n} \Pi_i \tag{3-1}$$

Para cada elemento i, a função aproximadora (v) é formada por parâmetros nodais (a_j) e por funções denominadas de funções de forma (ϕ_j), (equação 3-2).

$$v = \sum_{j=1}^{m} a_j \phi_j \tag{3-2}$$

Aplicando-se a condição de estacionariedade (mínimo) nos funcionais obtêm-se os parâmetros nodais que podem ser deslocamentos, forças internas, ou ambos, dependendo da formulação do método dos elementos finitos que se utiliza, (equação 3-3).

$$\delta\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \delta\Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \tag{3-3}$$

Se o campo de deslocamentos é descrito por funções aproximadoras, as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais, conforme o método dos deslocamentos ou da rigidez.

3.2.1 ELEMENTO DE BARRA LINEAR

Nesta sessão é apresentada a teoria de barra de Bernoulli-Euler, representada através da figura 3.3, a qual possui as seguintes hipóteses:

- Pequenas deformações, rotações e deslocamentos;
- Linearidade Física (lei de Hooke);
- As seções transversais permanecem planas e perpendiculares ao eixo deformado da barra (Hipótese de Navier);

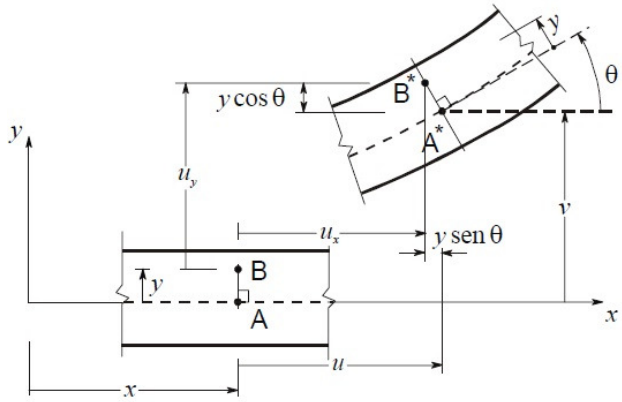


Figura 3.3 - Elemento na configuração indeformada e deformada (YSHIL, 2002).

a) Equação de compatibilidade

Conforme a figura 3.3, a hipótese de Navier nos permite expressar os deslocamentos de um ponto B(x,y) da seção em função dos deslocamentos axial *u(x)* e transversal *v(x)* do ponto A(x,y) no eixo da barra:

$$u_B(x, y) = u(x) - y \cdot v' \tag{3-4}$$

Considerando pequenas rotações ($\theta(x) = v'(x)$), a deformação do ponto Q é dada por:

$$\varepsilon_x = u' - y \cdot v'' \tag{3-5}$$

b) Equação constitutiva

Aplicando a lei de Hooke, $\sigma = E \cdot \varepsilon$, tem-se,

$$\sigma_x = E \cdot (u' - y \cdot v'') \tag{3-6}$$

c) Equilíbrio

Pode-se escrever o equilíbrio da barra utilizando o princípio dos trabalhos virtuais (PTV), no qual, o trabalho virtual realizado pelas forças internas é igual ao trabalho virtual realizado pelas forças externas devidas um deslocamento virtual aplicado, (equação 3-7).

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{ext} \tag{3-7}$$

A equação 3-5 pode também ser escrita em termos de deslocamentos e deformações virtuais, resultando:

$$\delta\varepsilon_x = \delta u' - y \cdot \delta v'' \tag{3-8}$$

O trabalho virtual interno é definido como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\varepsilon_{\text{x}} \cdot \sigma_{\text{x}}\, d\Omega \tag{3-7}$$

O trabalho virtual realizado pelos esforços solicitantes pode ser escrito como:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} &= \int_{\Omega} (\delta u' - y \cdot \delta v'') \cdot \sigma_x\, d\Omega \\ &= \int_0^l [\, \delta u' \int_A \sigma_x dA + \delta v''(-\int_A \sigma_x \cdot y\, dA)\,]\, dx \\ &= \int_0^l (\delta u' \cdot N + \delta v'' \cdot M)\, dx \end{aligned} \tag{3-8}$$

Pode-se calcular os esforços solicitantes a partir das tensões:

$$\begin{aligned} N &= \int_A \sigma_x\, dA = \int_A E \cdot (u' - y \cdot v'') \cdot dA = u' \int_A E\, dA - v'' \int_A E \cdot y\, dA\,, \\ M &= -\int_A \sigma_x \cdot y\, dA = -\int_A E \cdot (u' - y \cdot v'') \cdot y\, dA = -u' \int_A E \cdot y\, dA + v'' \int_A E \cdot y^2\, dA \end{aligned} \tag{3-9}$$

Resolvendo a integral e escrevendo a equação 3-9 na forma matricial, define-se a matriz de **rigidez da seção (*D*) .**

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A EdA & -\int_A E \cdot ydA \\ -\int_A E \cdot ydA & \int_A E \cdot y^2 dA \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u' \\ v'' \end{bmatrix} \tag{3-10}$$

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{u} \tag{3-11}$$

Se o eixo x passar pelo centro geométrico da seção, o momento estático, definido pela integral $\int_A y\, dA$ torna-se igual a zero e a força normal (*N*) e o momento fletor (*M*) resultam em:

$$N = (EA \cdot u'), \quad M = (EI \cdot v'') \tag{3-12}$$

Desta forma a matriz de rigidez da seção ***D***, muda para o caso típico de material linear elástico.

$$\boldsymbol{D} = \begin{bmatrix} EA & 0 \\ 0 & EI \end{bmatrix} \tag{3-13}$$

Para o concreto armado ver-se-á, no próximo item, através do método das lamelas, que a matriz de rigidez da seção tem o formato como está apresentada na equação 3-10.

Substituindo a equação 3-12 em 3-8, o trabalho virtual interno fica definido como:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^l (\, \delta u' \cdot EA \cdot u' + \delta v'' \cdot EI \cdot v'' \,)\, dx \tag{3-14}$$

Por fim, o trabalho virtual externo, δW_{ext}, é definido pela integração das forças de superfície somadas com as forças aplicadas diretamente nos nós, conforme figura 3.4.

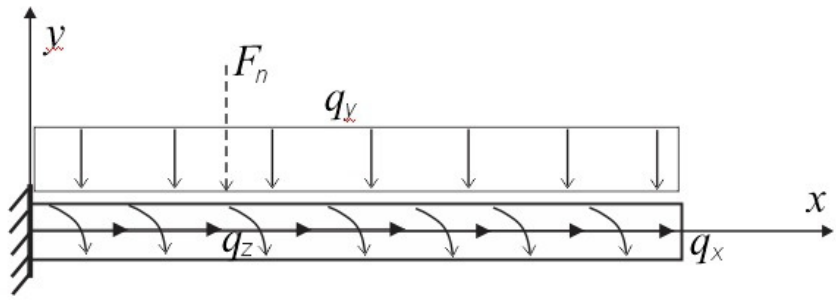


Figura 3.4 - Ações genéricas

$$\delta W_{ext} = \int_0^l (\ \delta u \cdot q_x + \delta v \cdot q_y + \delta v' \cdot q_z\ )\ dx + \delta d^T \cdot P_n \tag{3-15}$$

$$\delta W_{ext} = \int_0^l \boldsymbol{\delta u}^T \cdot \boldsymbol{q}\ dx + \delta d^T \cdot P_n \tag{3-16}$$

3.2.2 FORMULAÇÃO DO ELEMENTO DE BARRA - FUNÇÕES APROXIMADORAS

Neste item é apresentada a formulação dos elementos de treliça, viga e barra.

- **Elemento de treliça**

A figura 3.5 ilustra a convenção de sinais para o elemento.

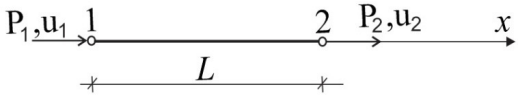


Figura 3.5 - Convenção de sinais positivos para o elemento de treliça

Este elemento adota uma função aproximadora linear, para o campo de deslocamento axial. Desta forma, o deslocamento ao longo do elemento fica definido por:

$$u(x) = a_1 + a_2 \cdot x \tag{3-17}$$

Aplicando as condições de contorno, $u(0)=u_1\,;u(L)=u_2$ na equação 3-17, resulta em:

$$u(x)=u_1\left(\frac{L-x}{L}\right)+u_2\cdot\left(\frac{x}{L}\right)\longrightarrow u(x)=\boldsymbol{N}\cdot\boldsymbol{u} \tag{3-18}$$

Sendo que:

- $\boldsymbol{u}$ é vetor de deslocamentos nodais e $\boldsymbol{N}$, matriz de interpolação dos deslocamentos;
- $N_1=\left(\frac{L-x}{L}\right)$ e $N_2=\left(\frac{x}{L}\right)$ são as funções de forma;

a) Equação de compatibilidade

A relação entre deslocamento e deformação axial fica definida como:

$$\varepsilon_x=\frac{du}{dx}=\frac{d}{dx}(N_1\cdot u_1+N_2\cdot u_2)=\frac{dN_1}{dx}\cdot u_1+\frac{dN_2}{dx}\cdot u_2 \tag{3-19}$$

$$\varepsilon_x=\boldsymbol{B}\cdot\boldsymbol{u} \tag{3-20}$$

Sendo $\boldsymbol{B}$ é a matriz deformação-deslocamento:

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix}\frac{dN_1}{dx} & \frac{dN_2}{dx}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{L} & \frac{1}{L}\end{bmatrix} \tag{3-21}$$

b) Equação constitutiva

É admitida a lei de Hooke, para o comportamento tensão-deformação.

$$\sigma_x=E\cdot\varepsilon_x \tag{3-22}$$

c) Equação de equilíbrio

Inserindo a equação 3-20 e 3-22 na expressão do trabalho virtual interno e considerando a área da seção transversal, A, constante ao longo do elemento, chega-se a:

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}\, d\Omega = \int_{\Omega} \delta\boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot E \cdot \boldsymbol{\varepsilon}\, d\Omega \\ &= \int_0^l \delta\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{B}^T \cdot EA \cdot \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u}\, dx \\ &= \delta\boldsymbol{u}^T \left[\int_0^l \boldsymbol{B}^T \cdot EA \cdot \boldsymbol{B}\, dx \right] \cdot \boldsymbol{u}\end{aligned} \tag{3-23}$$

Considerando que possam existir forças de superfície e forças aplicadas nos nós, o trabalho virtual externo fica definido como:

$$\delta W_{ext} = \int_0^l \delta\boldsymbol{u}^T \cdot \boldsymbol{q}\, dx + \delta\boldsymbol{d}^T \cdot \boldsymbol{P}_n \tag{3-24}$$

Fazendo o equilíbrio chega-se na equação linear, $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{R}$, do método dos deslocamentos.

$$\delta\boldsymbol{u}^T \left[\int_0^l \boldsymbol{B}^T \cdot EA \cdot \boldsymbol{B}\, dx \right] \cdot \boldsymbol{u} = \delta\boldsymbol{u}^T \int_0^l \boldsymbol{q}\, dx + \delta\boldsymbol{d}^T \cdot \boldsymbol{P}_n \tag{3-25}$$

Sendo o campo de deslocamento virtual arbitrário, resulta em,

$$\underbrace{\left[\int_0^l \boldsymbol{B}^T \cdot EA \cdot \boldsymbol{B}\, dx \right]}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{u} = \underbrace{\int_0^l \boldsymbol{q}\, dx + \boldsymbol{P}_n}_{\boldsymbol{R}} \tag{3-26}$$

Assim, define-se a matriz de rigidez (***k***) do elemento. Resolvendo a integral, a matriz de rigidez para o elemento de treliça, resulta em:

$$k = \int_0^l \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} \cdot EA \cdot \frac{1}{L} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} dx$$
$$= \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \tag{3-27}$$

– **Elemento de viga**

A formulação apresentada para o cálculo das deformações da viga foi desenvolvida de acordo com as hipóteses de Bernoulli-Euler. A figura 3.6 apresenta a convenção positiva dos sinais para o elemento.

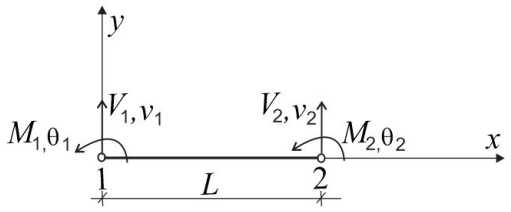


Figura 3.6 - Convenção de sinais positivos para o elemento de viga

Agora, têm-se quatro incógnitas a serem encontradas, desta forma precisa-se de um polinômio de terceiro grau para representar a função aproximadora.

$$v(x) = a_1 + a_2 \cdot x + a_3 \cdot x^2 + a_4 \cdot x^3 \tag{3-28}$$

Fazendo a substituição dos valores de *v(x)* para *x = 0* e *x=L* na equação 3-28, obtem-se:

$$v(0) = a_1$$
$$v(L) = a_1 + a_2 \cdot L + a_3 \cdot L^2 + a_4 \cdot L^3 \tag{3-29}$$

Sabendo que,

$$\theta(x) = \frac{dv}{dx} = a_2 + 2a_3 \cdot x \ + 3a_4 \cdot x^2 \tag{3-30}$$

E substituindo os valores para *x = 0* e *x=L* na equação 3-30, tem-se,

$$\theta(0) = a_2 \; ;$$
$$\theta(L) = a_2 + 2a_3 \cdot L + 3a_4 \cdot L^2 \tag{3-31}$$

Encontrando os valores a_1, a_2, a_3, e a_4 e substituindo na equação 3-28, chega-se ao campo de deslocamento vertical,

$$v(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_1 + \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3\right]v_2 + x\left[1 - \frac{x}{L}\right]^2\theta_1 + x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right]\theta_2 \tag{3-32}$$

Reescrevendo,

$$v(x) = N_1 \cdot v_1 + N_2 \cdot v_2 + N_3 \cdot \theta_1 + N_2 \cdot \theta_2$$
$$v(x) = \boldsymbol{N} \cdot \boldsymbol{u} \tag{3-33}$$

Sendo que, N_1, N_2, N_3, e N_4 são as funções de forma.

Calculando a segunda derivada do campo de deslocamento (equação 3-33), tem-se a curvatura (ϕ),

$$\phi(x) = \frac{d^2v}{dx^2} = \frac{d^2N}{dx^2} \cdot \boldsymbol{u} = \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{u} \tag{3-34}$$

$$\phi(x) = \frac{6}{L^2}\left[-1 + \frac{2x}{L}\right]v_1 + \frac{6}{L^2}\left[1 - \frac{2x}{L}\right]v_2 + \frac{2}{L}\left[-2 + \frac{3x}{L}\right]\theta_1 + \frac{2}{L}\left[\frac{3x}{L} - 1\right]\theta_2 \tag{3-35}$$

Fazendo analogia ao elemento de treliça o cálculo da matriz de rigidez para o elemento de viga é definido por,

$$k = \int_{\Omega} \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B} \; d\Omega \tag{3-36}$$

Supondo que o eixo x passe pelo centro elástico da seção, a matriz constitutiva resume-se a $D = EI$ e resolvendo a integral da equação 3-36, obtém-se:

$$k = \frac{2EI}{L}\begin{bmatrix} \frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} & -\frac{6}{L^2} & \frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 2 & -\frac{3}{L^2} & 1 \\ -\frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} & \frac{6}{L^2} & -\frac{3}{L} \\ \frac{3}{L} & 1 & -\frac{3}{L} & 2 \end{bmatrix} \tag{3-37}$$

– **Elemento de barra**

O elemento de barra apresentado aqui é o acoplamento do elemento de treliça como o de viga, desta forma tem-se três graus de liberdade para cada nó, ver figura 3.7.

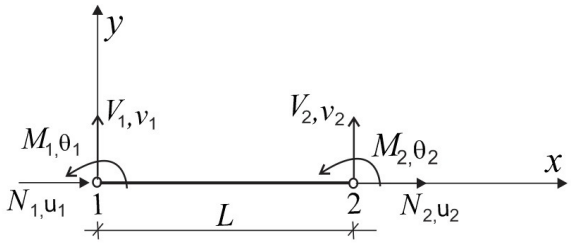


Figura 3.7 - Convenção de sinais positivos para o elemento de pórtico

A matriz de interpolação dos deslocamentos ***N,*** e a matriz deformação-deslocamento ***B,*** estão definidas abaixo:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \frac{L-x}{L} & 0 & 0 & \frac{x}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 1-3\left(\frac{x}{L}\right)^2+2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & 3\left(\frac{x}{L}\right)^2-2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & 0 & x\left[1-\frac{x}{L}\right]^2 & x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2-\frac{x}{L}\right] \end{bmatrix} \tag{3-38}$$

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{-1}{L} & 0 & 0 & \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{L^2}\left[-1+\frac{2x}{L}\right] & \frac{2}{L}\left[-2+\frac{3x}{L}\right] & 0 & \frac{6}{L^2}\left[1-\frac{2x}{L}\right] & \frac{2}{L}\left[\frac{3x}{L}-1\right] \end{bmatrix} \tag{3-39}$$

3.3 NÃO LINEARIDADE EM CONCRETO ARMADO - MÉTODO DAS LAMELAS

O método das lamelas possibilita o estudo não linear físico de estruturas reticuladas. Ele consiste na discretização da seção transversal, em cada ponto de Gauss, em lamelas de ordenada y em relação a um eixo longitudinal x de referência. As lamelas podem ter diferentes espessuras e serem constituídas por diferentes materiais, sendo compatibilizadas pelo campo de deformação contínuo considerando a hipótese das seções planas, permitindo o comportamento diferenciado de cada material constituinte da seção, por exemplo, a simulação de barras longitudinais de aço posicionadas no concreto, como também mantas de fibras de carbono coladas na superfície do concreto. Vários são os pesquisadores que têm contribuído com estudos nessa área como é o caso de Owen e Hinton (1980), Araripe (1998), Bradford e Gilbert (1999), Ferraz (2001), Chimello (2003), Kwak e Kim (2006), Stramandinoli (2007), entre outros. Marí (2000) estendeu o método de 2D para 3D, para possibilitar a análise não linear física de pórticos espaciais de concreto armado.

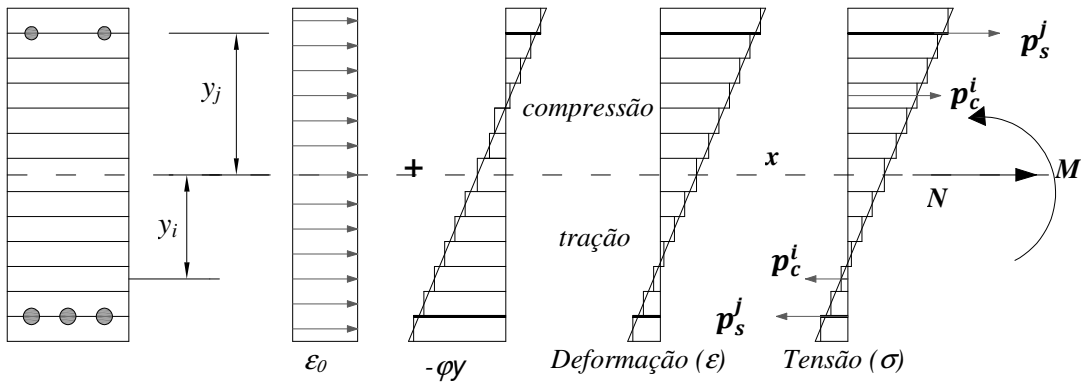


Figura 3.8 - Discretização da seção em lamelas

Os esforços solicitantes são calculados admitindo a hipótese de Bernoulli-Euler em que seções planas permanecem planas após a deformação. A figura 3.8 expõe a distribuição linear das deformações, na qual se obtém as equações seguintes, que determina a deformação em cada lamela.

$$\phi = -\frac{\varepsilon(y_c^i) - \varepsilon_0}{y_c^i} \tag{3-40}$$

resultando em:

$$\varepsilon(y_c^i) = \varepsilon_0 - \phi \cdot y_c^i \tag{3-41}$$

De maneira análoga para o aço tem-se:

$$\varepsilon(y_s^j) = \varepsilon_0 - \phi \cdot y_s^j \tag{3-42}$$

sendo:

ϕ = curvatura;

ε = deformação;

ε_0 = deformação axial;

y_c^i = posição, em relação ao eixo de referência *x*, na lamela de concreto *i*;

y_s^j = posição, em relação ao eixo de referência *x*, na barra de aço *j*.

A partir da deformação em cada lamela calcula-se a tensão, de acordo com a equação constitutiva empregada. O ponto médio de cada lamela define a tensão constante para a mesma, desta forma o resultado é afetado pelo o grau de discretização, segundo Ferraz (2001) para o caso de concreto, 8 a 12 camadas, de espessuras diferentes, dispondo as mais delgadas próximas aos extremos da seção são suficientes para a obtenção de bons resultados.

No caso de uma seção em concreto armado, a força normal (N) tem uma parcela do concreto e outra do aço. As forças resultantes no concreto (N_c) e nas barras de aço (N_s) são calculadas pelo somatório das forças nas lamelas e nas barras respectivamente, como vem-se na equação 3-43.

$$N = \int_A \sigma_c dA + \sum_{j=1}^{nb} \sigma_s^j A_s^j \cong \underbrace{\sum_{i=1}^{nc} \sigma_c^i \Delta A_c^i}_{N_C} + \underbrace{\sum_{j=1}^{nb} \sigma_s^j A_s^j}_{N_S} \tag{3-43}$$

Multiplicando as forças nas lamelas de concreto (p_c^i) e as forças nas barras de aço (p_s^j) pelas distâncias ao eixo de referência x e fazendo o somatório obtem-se o momento fletor (M) na seção de acordo com a equação 3-44.

$$M = \underbrace{-\sum_{i=1}^{nc}(\sigma_c^i \Delta A_c^i)\cdot y_c^i}_{M_C} \underbrace{-\sum_{j=1}^{nb}(\sigma_s^j A_s^j)\cdot y_s^j}_{M_S} \tag{3-44}$$

Derivando-se a curva tensão-deformação do concreto e do aço, chega-se ao módulo tangente em função da deformação em cada lamela de concreto ou barra de aço.

$$\begin{aligned} \frac{\partial \sigma_c}{\partial \varepsilon} &= E_c^i(\varepsilon_c^i) \\ \frac{\partial \sigma_s}{\partial \varepsilon} &= E_s^j(\varepsilon_s^j) \end{aligned} \tag{3-45}$$

Substituindo o módulo tangente nas equações 3-43 e 3-44, tem-se:

$$N = \underbrace{\sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \varepsilon_c^i \Delta A_c^i}_{N_C} + \underbrace{\sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot \varepsilon_s^j A_s^j}_{N_S} \tag{3-46}$$

$$M = \underbrace{-\sum_{i=1}^{nc}(E_c^i \cdot \varepsilon_c^i \Delta A_c^i)\cdot y_c^i}_{M_C} \underbrace{-\sum_{j=1}^{nb}(E_s^j \cdot \varepsilon_s^j A_s^j)\cdot y_s^j}_{M_S} \tag{3-47}$$

Substituindo as equações 3-41 e 3-42 nas equações 3-46 e 3-47, temos:

$$N_c = \varepsilon_0 \cdot \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i - \phi \cdot \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot y_c^i \tag{3-48}$$

$$N_s = \varepsilon_0 \cdot \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j - \phi \cdot \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot y_s^j \tag{3-49}$$

$$M_c = -[\varepsilon_0 \cdot \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot y_c^i - \phi \cdot \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot (y_c^i)^2] \tag{3-50}$$

$$M_s = -[\varepsilon_0 \cdot \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot y_s^j - \phi \cdot \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot (y_s^j)^2] \tag{3-51}$$

sendo:

nb = número de barras de aço;

nc = número de camadas (lamelas) de concreto;

σ_c^i = tensão na lamela de concreto *i*;

σ_s^j = tensão na barra de aço *j*;

ΔA_c^i = área da lamela de concreto *i*;

A_s^j = área da barra de aço *j*;

N = força normal na seção transversal;

N_s = força normal na seção transversal, correspondente a parcela do aço;

N_c = força normal na seção transversal, correspondente a parcela do concreto;

M = Momento fletor na seção transversal;

M_s = Momento fletor na seção transversal, correspondente a parcela do aço;

M_c = Momento fletor na seção transversal, correspondente a parcela do concreto;

E_c^i = módulo de elasticidade secante na lamela de concreto *i*;

E_s^j = módulo de elasticidade secante na barra de aço *j*.

Escrevendo a parcela correspondente ao concreto, equações 3-48 e 3-50, na forma matricial tem-se:

$$\begin{bmatrix} N_c \\ M_c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i & -\sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot y_c^i \\ -\sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot y_c^i & \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot (y_c^i)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi \end{bmatrix} \tag{3-52}$$

Fazendo o mesmo com a parcela do aço, equações 3-49 e 3-51 chega-se:

$$\begin{bmatrix} N_s \\ M_s \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j & -\sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot y_s^j \\ -\sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot y_s^j & \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot (y_s^j)^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi \end{bmatrix} \tag{3-53}$$

Desta forma os esforços solicitantes, ***N*** e ***M***, são definidos por:

$$\begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi \end{bmatrix} \tag{3-54}$$

sendo:

$$D_{11} = \sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i + \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \tag{3-55}$$

$$D_{12} = D_{21} = -\sum_{i=1}^{nc} E_c^i \cdot \Delta A_c^i \cdot y_c^i - \sum_{j=1}^{nb} E_s^j \cdot A_s^j \cdot y_s^j \tag{3-56}$$

$$D_{22} = \sum_{i=1}^{nc} E_c^i [\Delta A_c^i \cdot (y_c^i)^2] + \sum_{j=1}^{nb} E_s^j [A_s^j \cdot (y_s^j)^2] \tag{3-57}$$

3.3.1 MODELOS CONSTITUTIVOS

O concreto comprimido foi representado pelo modelo parábola-retângulo, figura B.5, na maioria dos exemplos e pelo modelo linear elástico em alguns corpos-de-prova submetidos à fluência. Em nenhum dos casos foi considerada a tração no concreto. O aço foi representado pelo modelo elastoplástico bilinear, figura B.11

3.4 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA

O aumento do uso de estruturas cada vez mais esbeltas em várias áreas da engenharia pode provocar fenômenos de instabilidade de equilíbrio, que ocorrem localmente ou de maneira global.

Essa instabilidade não implica necessariamente na perda da capacidade portante, que está intimamente relacionada com a natureza da instabilidade do equilíbrio da estrutura. Desta forma é necessário conhecer a natureza, desse fenômeno, para avaliar a resistência da estrutura, em especial na fase pós-critica.

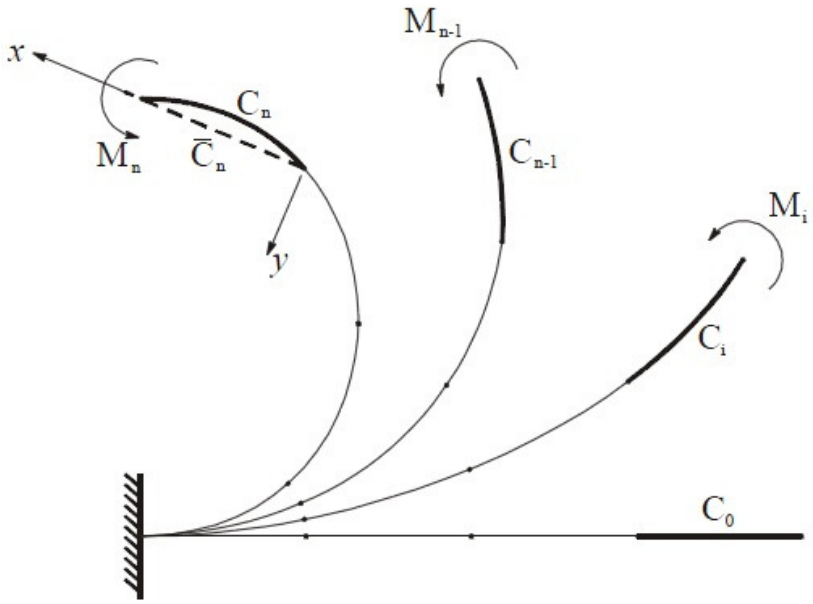


Figura 3.9 - Configurações de equilíbrio (YSHIL, 2002)

Na figura 3.9 tem-se uma viga dividida em quatro elementos finitos e sujeita a grandes rotações, provocada pela aplicação de um momento na extremidade da viga.

A configuração C_n, pode ser obtida por algumas descrições cinemáticas, diferenciadas entre si, a partir da configuração de referência. Se o processo incremental-iterativo, necessário para solução do problema não linear, tomar como referência uma configuração de equilíbrio conhecida, utiliza-se uma descrição Lagrangiana. Na representação lagrangiana total a configuração de referência, C_0 é raramente ou nunca mudada e em geral é igual à configuração ao longo de toda análise, sendo as tensões e deformações medidas em relação a essa configuração. Na formulação lagrangiana atualizada as equações do MEF são formuladas em relação à última configuração de equilíbrio C_{n-1}, ou seja, a configuração de referência é mantida fixa durante o processo iterativo, até que se obtenha o novo equilíbrio e as tensões e deformações sejam definidas para aquele passo de carga. A descrição Euleriana usa a própria configuração desconhecida, C_n. Já a chamada descrição corrotacional baseia-se na separação explícita dos movimentos de corpo rígido (translações e rotações), dos movimentos deformacionais. Dessa forma, a configuração de referência é dividida em dois sistemas distintos: uma configuração de base, que permanece fixa ao longo de toda a análise que será usada para atualizar os deslocamentos de corpo rígido; e uma configuração corrotacional que acompanha cada um dos elementos, a partir da qual são calculadas tensões e deformações.

3.4.1 MODELO CORROTACIONAL

A formulação corrotacional é a descrição cinemática mais recente dentre as descrições comentadas anteriormente. Seu principal conceito é a divisão ou decomposição da configuração de referência na configuração inicial (C_0), que é mantida fixa ao longo de toda a análise e na configuração corrotacionada ($\overline{C}_n$), que varia de elemento para elemento sendo obtida através do deslocamento de corpo rígido em relação à configuração inicial.

A hipótese de Bernoulli-Euler em que seções transversais planas e normais ao eixo do elemento, permanecem planas após a deformação, define o campo de deslocamento equação 3-58. A figura 3.3 esclarece a expressão.

$$u_x(x) = u(x) - ysen(\theta)$$
$$u_y(x) = v(x) - y(1 - \cos(\theta)) \tag{3-58}$$

Na maioria dos casos de instabilidade a estrutura ou componente estrutural apresenta grandes deslocamentos e rotações, acompanhadas por pequenas deformações, possibilitando que se adote a hipótese que as deformações sejam pequenas ou mesmas infinitesimais. Esta simplificação resulta em uma série de benefícios na construção dos modelos de elementos finitos para análise de instabilidade (MENIN, 2006).

Além da hipótese de pequenas deformações considerando a hipótese de pequenas rotações de um determinado elemento da configuração $\overline{C}_n$ para C_n,, têm-se as seguintes simplificações. Mais detalhes ver (YSHIL, 2002).

$$sen(\theta) \cong tg(\theta) \cong v'; \quad \cos(\theta) \cong 1 \tag{3-59}$$

$$u_x(x) = u(x) - yv'$$
$$u_y(x) = v(x) \tag{3-60}$$

e

$$\varepsilon_0 = \frac{\partial u_x}{\partial x} \tag{3-61}$$

Assim a equação de compatibilidade continua sendo a mesma da análise linear,

$$\varepsilon_x = u' - y \cdot v'' \tag{3-62}$$

A hipótese de pequenas rotações é alcançada quando a configuração $\overline{C}_n$ se aproxima da configuração C_n, ou seja, o tamanho do elemento finito aproxima-se da corda. Essa hipótese, não elimina a possibilidade da formulação corrotacional representar o comportamento de estruturas sujeitas a grandes rotações. Assim a formulação apresentada neste trabalho é capaz de simular o comportamento de grandes deslocamentos e rotações e

pequenas deformações. Três fontes de pesquisa foram estudadas para a descrição da formulação corrotacional, (TEIXEIRA, 2009), (YSHIL, 2002) e (MENIN, 2006).

3.4.1.1. Descrição Cinemática

Considere um elemento de barra plano que inicialmente na configuração de referência C_0, é solicitado e após transladar, rotacionar e deformar muda para a configuração C_n. A formulação corrotacional acrescenta a configuração $\overline{C}_n$, para cada elemento, que corresponde à rotação e translação desse elemento. A figura 3.10, mostra essas configurações, deslocamentos, rotações e deformações de um elemento de barra.

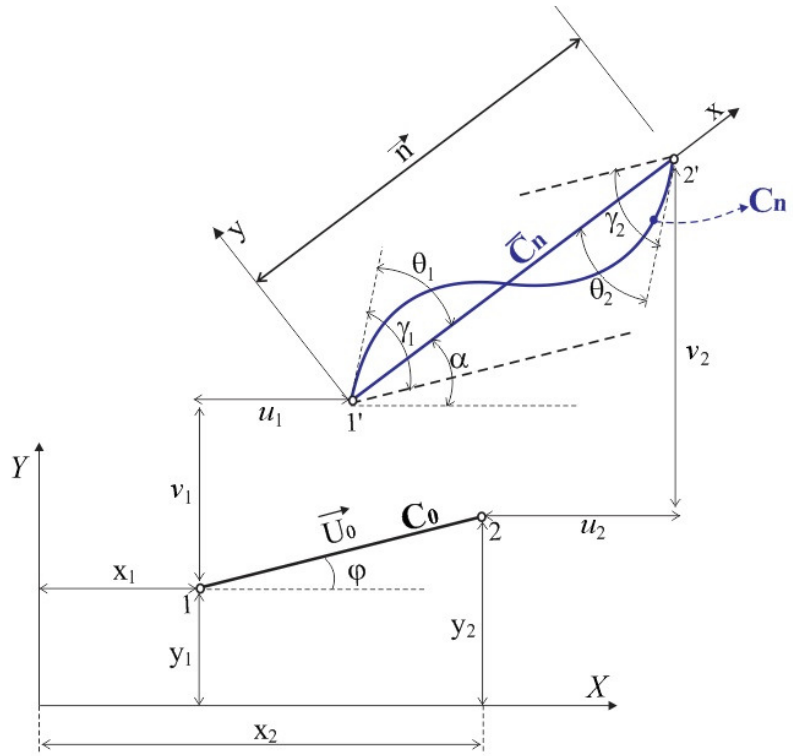


Figura 3.10 - Elemento de barra na configuração indeformada e deformada (corrotacional) (TEIXEIRA, 2009)

Mudando a localização dos elementos da figura 3.10 para o sistema vetorial é possível determinar o comprimento inicial L_0, o comprimento final L_f, e o deslocamento axial u_l, no sistema local, com a manipulação desses vetores. Os vetores $\boldsymbol{X_1}$ e $\boldsymbol{X_2}$ posicionam o elemento indeformado e o módulo da subtração vetorial de $\boldsymbol{X_2}$ por $\boldsymbol{X_1}$ define o

comprimento inicial L_0. Os vetores $\boldsymbol{U_1}$ e $\boldsymbol{U_2}$ determinam a mudança de posição do elemento e a subtração $\boldsymbol{U_2}$ por $\boldsymbol{U_1}$ sua deformação. O comprimento final é calculado pelo módulo do vetor $\boldsymbol{n}$, que é a soma de $\boldsymbol{X_{21}}$ e $\boldsymbol{U_{21}}$. A figura 3.11 apresenta esse sistema vetorial.

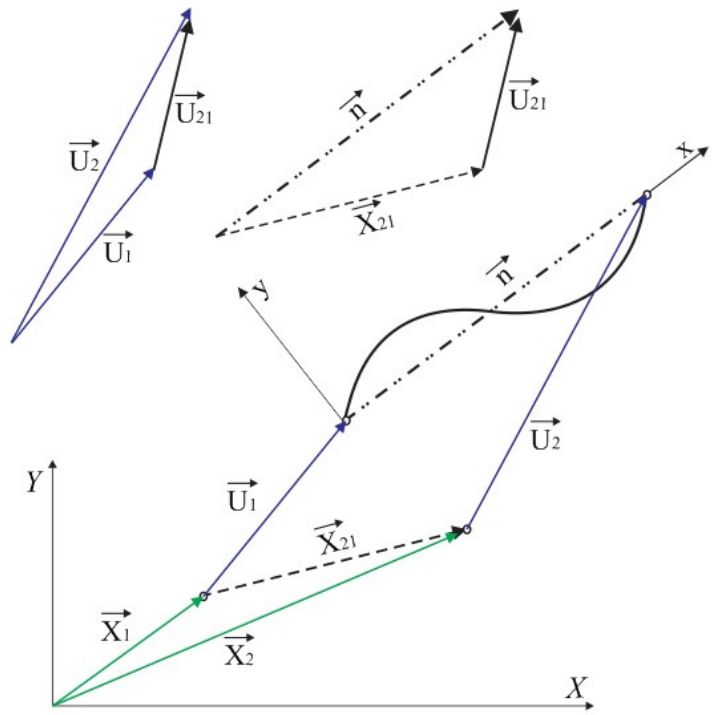


Figura 3.11 - Posicionamento vetorial para elemento de barra (corrotacional)

As expressões 3-63 a 3-68 definem numericamente os vetores da figura 3.11.

$$\boldsymbol{X}_1 = x_1 \cdot \boldsymbol{i} + y_1 \cdot \boldsymbol{j}\,; \quad \boldsymbol{X}_2 = x_2 \cdot \boldsymbol{i} + y_2 \cdot \boldsymbol{j} \tag{3-63}$$

$$\boldsymbol{U}_1 = u_1 \cdot \boldsymbol{i} + v_1 \cdot \boldsymbol{j}\,; \quad \boldsymbol{U}_2 = u_2 \cdot \boldsymbol{i} + v_2 \cdot \boldsymbol{j} \tag{3-64}$$

$$\boldsymbol{X}_{21} = \boldsymbol{X}_2 - \boldsymbol{X}_1 \tag{3-65}$$

$$\boldsymbol{U}_{21} = \boldsymbol{U}_2 - \boldsymbol{U}_1 \tag{3-66}$$

$$\boldsymbol{n} = \boldsymbol{U}_{21} + \boldsymbol{X}_{21} \tag{3-67}$$

$$L_0 = \|\boldsymbol{X}_{21}\| \quad e \quad L_f = \|\boldsymbol{n}\| \tag{3-68}$$

Dois sistemas de eixos coordenados são utilizados na formulação corrotacional, um global (XY), que se mantém fixo durante toda a análise e outro local (xy), que se movimenta conjuntamente com o elemento até a configuração atual. O elemento de barra, no sistema global, tem seis graus de liberdade (u_1, v_1, γ_1, u_2, v_2 e γ_2), quatro translações e duas

rotações e no sistema local três *(u_L, θ_1 e θ_2)*, uma deformação axial e uma rotação em cada nó extremo, ver figura 3.12.

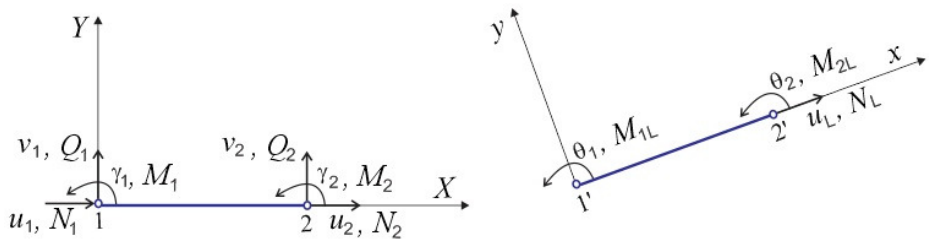


Figura 3.12 - Sistema de eixos global e local para elemento de barra (corrotacional)

Assim, tem-se para o elemento de barra no sistema global o vetor de forças $\boldsymbol{p}$, e de deslocamentos $\boldsymbol{u}$, e para o sistema local o vetor de forças $\boldsymbol{p_L}$, e vetor de deslocamentos $\boldsymbol{u_L}$.

$$\boldsymbol{p} = [\, N_1, Q_1\, M_1, N_2, Q_2\, M_2 \,] \tag{3-69}$$

$$\boldsymbol{u} = [\, u_1, v_1\, \gamma_1, u_2, v_2\, \gamma_2 \,] \tag{3-70}$$

$$\boldsymbol{p_L} = [\, N_L, M_{1L}, M_{2L} \,] \tag{3-71}$$

$$\boldsymbol{u_L} = [\, u_L, \theta_1, \theta_2 \,] \tag{3-72}$$

O cálculo dos deslocamentos no sistema local, denominados de deslocamentos co-rotacionais é apresentado segundo (TEIXEIRA, 2009). A expressão 3-73 define o deslocamento axial u_{1L}, e as expresseões 3-74 e 3-75 as rotações:

$$u_L = \frac{\boldsymbol{U}_{21}^T \cdot \boldsymbol{U}_{21} + 2\boldsymbol{U}_{21}^T \cdot \boldsymbol{X}_{21}}{L_f - L_0} \tag{3-73}$$

$$\theta_1 = arctg\left[\frac{sen\beta_1 \cos\alpha - \cos\beta_1\, sen\alpha}{\cos\beta_1\, sen\alpha - sen\beta_1 \cos\alpha}\right] \tag{3-74}$$

$$\theta_2 = arctg\left[\frac{sen\beta_2 \cos\alpha - \cos\beta_2\, sen\alpha}{\cos\beta_2\, sen\alpha - sen\beta_2 \cos\alpha}\right] \tag{3-75}$$

sendo:

$$\beta_1 = \gamma_1 + \varphi; \quad \beta_2 = \gamma_2 + \varphi; \tag{3-76}$$

$$\alpha = arctg\frac{n_1}{n_1}; \quad \boldsymbol{n} = n_1\boldsymbol{i} + n_2\boldsymbol{j} \tag{3-77}$$

A matriz ***T,*** que transforma vetor de deslocamentos, vetor de forças e matriz de rigidez do sistema local para o sistema global, também é usada para o cálculo da matriz de rigidez geométrica. Ela é obtida a partir da derivada do campo de deslocamento local pelo campo do deslocamento global.

$$\boldsymbol{T} = \frac{\partial \boldsymbol{u}_L}{\partial \boldsymbol{u}} =$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_{1L}}{\partial u_1} & \frac{\partial u_{1L}}{\partial v_1} & \frac{\partial u_{1L}}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial u_{1L}}{\partial u_2} & \frac{\partial u_{1L}}{\partial v_2} & \frac{\partial u_{1L}}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial \theta_1}{\partial u_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial v_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \theta_1}{\partial u_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial v_2} & \frac{\partial \theta_1}{\partial \gamma_2} \\ \frac{\partial \theta_2}{\partial u_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial v_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \gamma_1} & \frac{\partial \theta_2}{\partial u_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial v_2} & \frac{\partial \theta_2}{\partial \gamma_2} \end{bmatrix} =$$

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} -cs & -s\alpha & 0 & c\alpha & s\alpha & 0 \\ \frac{-s\alpha}{L_f} & \frac{c\alpha}{L_f} & 1 & \frac{s\alpha}{L_f} & \frac{-c\alpha}{L_f} & 0 \\ \frac{-s\alpha}{L_f} & \frac{c\alpha}{L_f} & 0 & \frac{s\alpha}{L_f} & \frac{-c\alpha}{L_f} & 1 \end{bmatrix} \qquad c - \text{cosseno}\,;\, s - \text{seno} \tag{3-78}$$

Para facilitar a análise da matriz ***T***, esta é reescrita em função dos vetores ***r*** e ***s***.

$$\boldsymbol{r} = \begin{bmatrix} -c\alpha & -s\alpha & 0 & c\alpha & s\alpha & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3-79}$$

$$\boldsymbol{s} = \begin{bmatrix} s\alpha & -c\alpha & 0 & -s\alpha & c\alpha & 0 \end{bmatrix}^T \tag{3-80}$$

Assim a matriz fica,

$$\boldsymbol{T} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \boldsymbol{r} \\ \frac{-\boldsymbol{s}}{L_f} \\ \frac{-\boldsymbol{s}}{L_f} \end{bmatrix} \tag{3-81}$$

3.4.1.2. Elemento Finito de barra não linear

A formulação foi feita considerando o elemento finito no sistema local, com três graus de liberdade, como está representado na figura 3.12. De acordo coma as hipóteses definidas anteriormente a equação de compatibilidade é a mesma para o caso linear. A não linearidade do material é obtida a partir da integração da seção pelo método das lamelas, representada pela matriz de rigidez da seção ***D.***

$$\boldsymbol{f} = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}$$
$$\begin{Bmatrix} N \\ M \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} \\ D_{21} & D_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \varepsilon_0 \\ \phi \end{Bmatrix} \tag{3-82}$$

a) Cálculo das forças internas do elemento

O cálculo das forças solicitantes do elemento é feito a partir do equilíbrio de um elemento infinitesimal. Desta forma, isolando-se um elemento de comprimento infinitesimal e impondo-lhe equilíbrio entre esforços solicitantes e carregamentos, tem-se a situação indicada na figura 3.13.

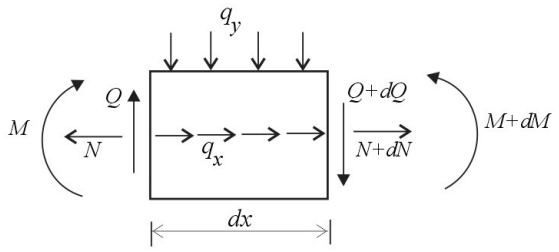


Figura 3.13 - Elemento infinitesimal

Do equilíbrio das forças longitudinais:

$$\frac{dN}{dx} = -q_x \tag{3-83}$$

Equilibrando as forças na direção transversal, vem:

$$\frac{dQ}{dx} = -q_y \tag{3-84}$$

Do equilíbrio de momentos, resulta:

$$\frac{dM}{dx} = Q \tag{3-85}$$

Combinado a expressão 3-84 com 3-85, temos:

$$\frac{dM^2}{d^2x} = -q_y \tag{3-86}$$

Aplicando deslocamentos virtuais δu e δv nas expressões 3-83 e 3-86 e integrando ao longo do comprimento, resultam nas equações 3-87 e 3-88.

$$\int_0^L \frac{dN}{dx}\delta u\, dx + \int_0^L q_x\, \delta u\, dx = 0 \tag{3-87}$$

$$\int_0^L \frac{d^2M}{dx^2}\delta v\, dx + \int_0^L q_y\, \delta v\, dx = 0 \tag{3-88}$$

Somando as equações 3-87 e 3-88, aplicando as equações de compatibilidade e as condições de contorno, obtêm-se os trabalhos virtuais internos "δW_{int}" e externos "δW_{ext}".

Condições de contorno:

$$M(0) = M_{1L}, \frac{dv}{dx}(0) = \theta_1; \quad N(L) = N_L, M(L) = M_{2L}, u(L) = u_L, \frac{dv}{dx}(L) = \theta_2 \tag{3-89}$$

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \cdot \boldsymbol{f}\ dx \tag{3-90}$$

$$\delta W_{ext} = \int_0^L \delta \boldsymbol{u}_L{}^T \cdot \boldsymbol{q}\ dx + \delta \boldsymbol{u}_L \cdot \boldsymbol{p}_L \tag{3-91}$$

Considerando que não haja carregamento distribuído o vetor $\boldsymbol{q}^T = [q_x, q_y]$ torna-se igual a zero e a equação dos trabalhos externos resume-se a forças aplicadas nos nós.

$$\delta W_{ext} = \delta \boldsymbol{u}_L \cdot \boldsymbol{p}_L \tag{3-92}$$

Fazendo o equilíbrio dos trabalhos virtuais no elemento e substituindo a equação 3-93, tem-se:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{B} \cdot \delta \boldsymbol{u} \tag{3-93}$$

$$\begin{gathered} \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext} = 0 \\ \left[\int_0^L \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{f} \; dx - \boldsymbol{p}_L \right] \delta \boldsymbol{u}_L = 0 \end{gathered} \tag{3-94}$$

Assim, o vetor de forças internas fica definido como:

$$\boldsymbol{p}_L = \int_0^L \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{f} \; dx \tag{3-95}$$

Sabendo que $\boldsymbol{f} = [N, M]^T$ e $\boldsymbol{B}$ a matriz deformação-deslocamento obtida, como está definida na equação 3-39, a partir das funções interpoladoras, simplificando para três graus de liberdade no sistema local, resulta,

$$\boldsymbol{B} = \begin{bmatrix} \frac{1}{L} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{L}\left[-2 + \frac{3x}{L}\right] & \frac{2}{L}\left[\frac{3x}{L} - 1\right] \end{bmatrix} \tag{3-96}$$

Aplicando a matriz de transformação $\boldsymbol{T}$ no vetor $\boldsymbol{p}_L$ obtém-se o vetor de forças no sistema global.

$$\boldsymbol{p} = T^T \cdot \boldsymbol{p}_L \tag{3-97}$$

b) Matriz de Rigidez

O campo do deslocamento em uma análise não linear física e geométrica tem a contribuição da não linearidade do material e o efeito de segunda ordem, desta forma há uma influência direta de um fenômeno no outro.

A matriz de rigidez do material é obtida da derivada do vetor de forças no sistema local pelo vetor de deslocamento.

$$\boldsymbol{k}_{L,mat} = \frac{\partial \boldsymbol{p}_L}{\partial \boldsymbol{u}_L} = \int_0^L \left[\boldsymbol{B}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{u}_L} \right] dx = \int_0^L \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{B}\, dx \tag{3-98}$$

Transformando para o sistema global, obtém-se a parcela correspondente a não linearidade física.

$$\boldsymbol{k}_{mat} = \boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{k}_{L,mat} \cdot \boldsymbol{T} \tag{3-99}$$

A matriz de rigidez do elemento que é a soma da matriz de rigidez geométrica e do material, pode ser calculada derivando-se as forças globais (***p***) em relação aos deslocamentos globais (***u***).

$$\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{u}} = \boldsymbol{k} = \boldsymbol{k}_{geo} + \boldsymbol{k}_{mat} \tag{3-100}$$

Desenvolvendo a derivada e aplicando as equações 3-97 e 3-78, tem-se:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{p}}{\partial \boldsymbol{u}} &= \frac{\partial (\boldsymbol{T}^T \cdot \boldsymbol{p}_L)}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{T}^T}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{p}_L + \boldsymbol{T}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}_L}{\partial \boldsymbol{u}} \\
\boldsymbol{k} &= \frac{\partial \boldsymbol{T}^T}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{p}_L + \boldsymbol{T}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}_L}{\partial \boldsymbol{u}_L} \cdot \frac{\partial \boldsymbol{u}_L}{\partial \boldsymbol{u}} \\
\boldsymbol{k} &= \frac{\partial \boldsymbol{T}^T}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{p}_L + \boldsymbol{T}^T \cdot \frac{\partial \boldsymbol{p}_L}{\partial \boldsymbol{u}_L} \cdot \boldsymbol{T} \\
\boldsymbol{k} &= \boldsymbol{k}_{geo} + \boldsymbol{k}_{mat}
\end{aligned} \tag{3-101}$$

Comparando a expressão 3-100 e 3-101, conclui-se que a matriz de rigidez geométrica do elemento de barra no sistema global é:

$$\boldsymbol{k}_{geo} = \frac{\partial \boldsymbol{T}^T}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \boldsymbol{p}_L \tag{3-102}$$

Resolvendo a derivada da equação 3-101 e usando a matriz $\boldsymbol{T}$ da expressão 3-81, chega-se:

$$\boldsymbol{k}_{geo} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{r}^T}{\partial \boldsymbol{u}} & -\dfrac{\partial \dfrac{\boldsymbol{s}^T}{L_f}}{\partial \boldsymbol{u}} & -\dfrac{\partial \dfrac{\boldsymbol{s}^T}{L_f}}{\partial \boldsymbol{u}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_L \\ \boldsymbol{M}_{1L} \\ \boldsymbol{M}_{2L} \end{bmatrix} \tag{3-103}$$

Resolvendo as derivadas da equação 3-103:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial \boldsymbol{r}^T}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{r}^T}{\partial \alpha} \cdot \frac{\partial \alpha}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{1}{L_f} \cdot \boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{s} \\ &\frac{\partial \dfrac{\boldsymbol{s}^T}{L_f}}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{\partial \boldsymbol{s}^T}{\partial \boldsymbol{u}} \cdot \frac{1}{L_f} - \frac{\boldsymbol{s}^T}{L_f^2} \cdot \frac{\partial L_f}{\partial \boldsymbol{u}} = \frac{1}{L_f^2}(-\boldsymbol{r}^T \cdot \boldsymbol{s} - \boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{r}) \end{aligned} \tag{3-104}$$

Reescrevendo a matriz de rigidez geométrica, fica:

$$\boldsymbol{k}_{geo} = \frac{N_L}{L_f}\left(\boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{s}\right) + \frac{1}{L_f^2}(M_{1L} + M_{2L})(+\boldsymbol{r}^T \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{r}) \tag{3-105}$$

Sabendo que a força cortante é:

$$Q = \frac{(M_{1L} + M_{2L})}{L_f} \tag{3-106}$$

Assim a matriz de rigidez geométrica fica:

$$\boldsymbol{k}_{geo} = \frac{N_L}{L_f}\left(\boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{s}\right) + \frac{1}{L_f} Q(+\boldsymbol{r}^T \cdot \boldsymbol{s} + \boldsymbol{s}^T \cdot \boldsymbol{r}) \tag{3-107}$$

3.5 SOLUÇÃO DE SISTEMAS NÃO LINEARES

A solução de problemas estruturais envolvendo não linearidade física e/ou geométrica era geralmente tratada com métodos puramente incrementais sob controle de força. Estes métodos têm a grande desvantagem de poder desviar a solução da trajetória de equilíbrio. Uma vez que nesses métodos não se faz a verificação de forças residuais ou desequilibradas, o erro associado é dependente do passo de carga e, freqüentemente, é acumulativo durante a análise, necessitando um passo de carga muito pequeno para uma análise mais precisa.

A solução para essa imprecisão apareceu com o desenvolvimento de métodos incrementais iterativos. Nos quais, cada novo incremento é corrigido com a finalidade de trazer solução para a trajetória de equilíbrio. Assim, a solução torna-se menos dependente do tamanho do passo de carga utilizado. Neste trabalho utilizou-se o método clássico de Newton-Raphson (figura 3.14 b), em que uma nova matriz de rigidez é calculada a cada iteração, levando-se em consideração as novas características geométricas ou físicas.

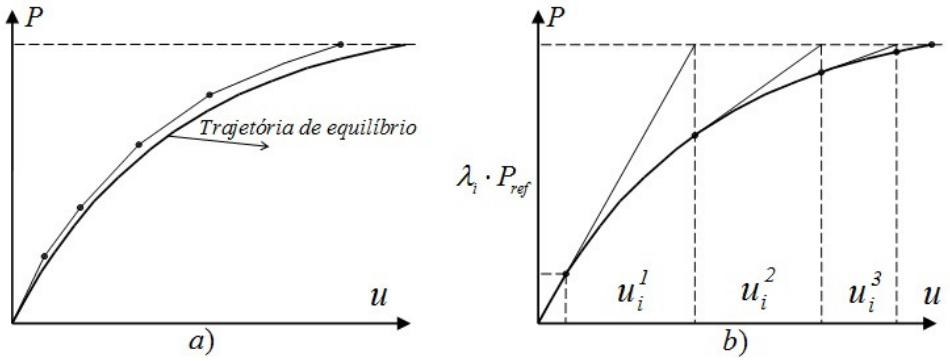


Figura 3.14 - Método de Newton-Raphson

Para os casos em que é necessário ultrapassar os pontos limites de carga (pontos críticos ou de bifurcação), caracterizados por uma matriz de rigidez tangente singular, deve-se optar por métodos que possibilitem uma variação simultânea da força e do deslocamento, dentre os

quais se destaca o método de comprimento de arco. Segundo Crisfield (1991) nenhum método é aplicável a todos os tipos de problemas, porém, os algoritmos do tipo comprimento de arco são considerados os mais versáteis para problemas de engenharia estrutural.

3.5.1 PROCESSO INCREMENTAL-ITERATIVO

A equação que governa os problemas não lineares é definida por:

$$R(x_i^j) = T_i^j - \lambda_i P_{ref} = 0 \tag{3-108}$$

sendo,

- $i =$ incremento;
- $j =$ iteração;
- $R =$ vetor de forças residuais;
- $T_i^j =$ vetor de forças internas;
- $\lambda_i =$ fator de carga para o passo i;
- $P_{ref} =$ vetor de cargas de referência;
- U_i^j vetor de deslocamentos nodais.

O vetor de forças residuais ou desequilibradas é calculado no final de cada iteração para verificar a convergência ou, se for o caso, alimentar novamente o processo, como mostrado na equação 3-108.

O vetor de deslocamentos nodais é sempre atualizado a cada nova iteração por u_i^j (acréscimo de deslocamento na iteração j), sendo definido pela equação 3-109.

$$U_i^j = U_i^{j-1} + u_i^j \tag{3-109}$$

$$K(U_i^{j-1}) \cdot u_i^j = -R_i^{j-1} \tag{3-110}$$

O estado estacionário pode ser obtido examinando-se o valor da multiplicação entre o vetor de acréscimo dos deslocamentos "u_i^j", pelo o vetor transposto da força residual "R_i^j". A condição de convergência é atingida quando essa quantidade torna-se menor que uma tolerância preestabelecida. Neste trabalho essa tolerância é de 10^{-6}, mostrada na equação 3-111.

$$\left| u_i^j \cdot R_i^{jT} \right| \leq 10^{-6} \tag{3-111}$$

3.6 APLICATIVO – ANÁLISE DE ESTRUTURAS PLANAS EM CONCRETO ARMADO

A formulação matemática apresentada neste capítulo foi implementada na plataforma MATLAB. A entrada de dados é simples e feita diretamente no código, como mostra o Anexo C. Nesse anexo também está implementado o algoritmo da figura 3.15 que descreve os principais passos para resolução de problemas não lineares, segundo o processo de Newton-Raphson (Bonet; Wood, 1997).

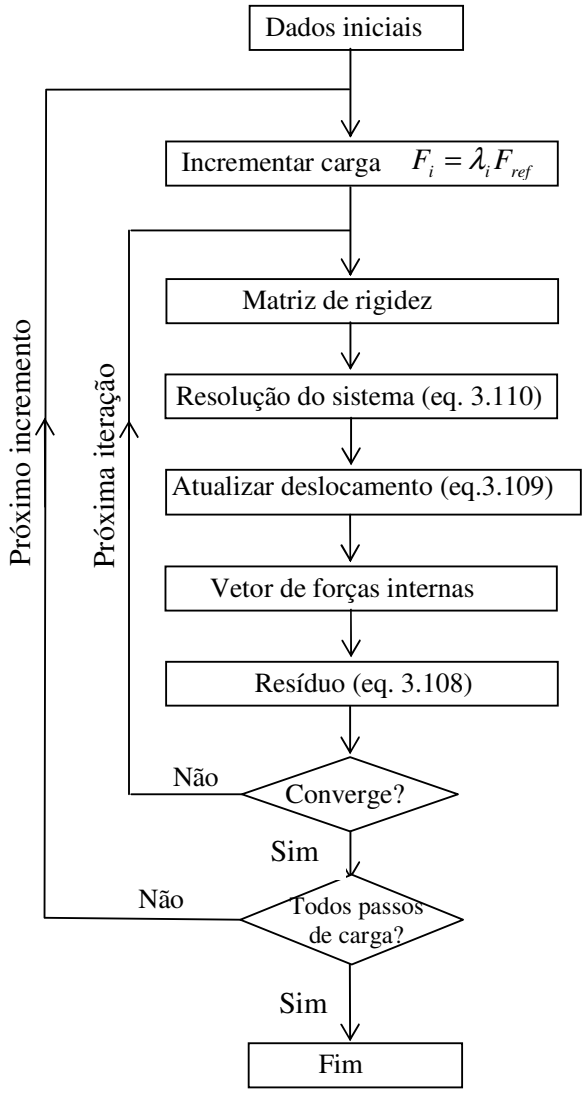


Figura 3.15 - Algoritmo segundo Newton-Raphson

3.6.1 EXEMPLO DE ANÁLISE – VIGA DE CONCRETO ARMADO (ARARIPE, 1998)

Este exemplo foi desenvolvido por Araripe (1998), que considera a não linearidade geométrica através da descrição lagrangiana total e a não linearidade física a partir do método das lamelas. O concreto comprimido foi representado pelo modelo constitutivo parábola-retângulo e a tração no concreto não foi considerada. O aço foi representado pelo modelo elastoplástico bilinear, figura B.11.

A viga da figura 3.16 é submetida a uma força axial mantida constante e uma transversal que é aumentada até que haja perda de estabilidade ou ruína da seção transversal.

Dados:

- Aço classe A;
- As = 2x15,1 cm^2;
- f_y = 483,0 MPa, E_s =210000MPa, fc = 32,94 MPa;
- γ_c = 1,4, $\gamma_s = 1,15$
- Índice de esbeltez = 69,3.

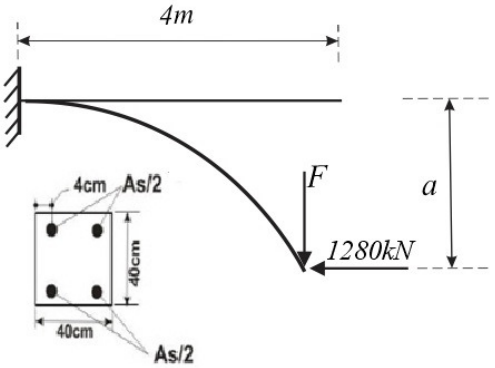


Figura 3.16 - Pilar com não linearidade física e geométrica (ARARIPE, 1998)

A viga foi modelada com 10 elementos ao longo do comprimento e seção transversal dividida em 10 lamelas, como ilustrada na figura 3.17.

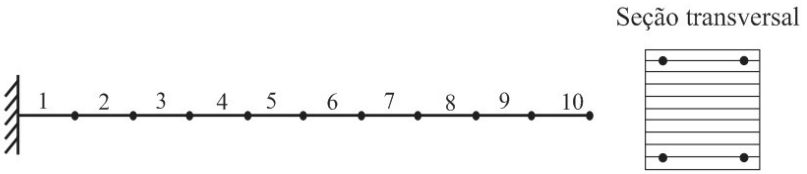


Figura 3.17 - Discretização da viga

A figura 3.18 mostra uma boa aproximação dos resultados obtidos para resposta força-deslocamento até a força crítica.

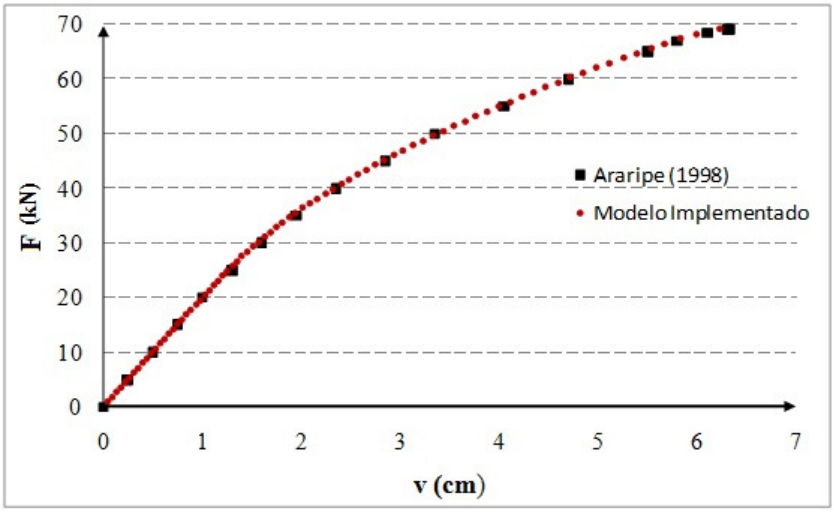


Figura 3.18 - Curva força-deslocamento

3.6.2 EXEMPLOS DE VALIDAÇÃO - VIGA (VECCHIO E SHIM – 2004)

Neste exemplo aplica-se o modelo constitutivo parábola-retângulo para o concreto à compressão. Nesse modelo o coeficiente 0,85, foi substituído por 1, pois a força aplicada foi de curta duração. A tração no concreto não foi considerada e o aço foi representado pelo modelo elastoplástico bilinear. A viga foi discretizada com vinte elementos, com tamanhos iguais, ao longo do comprimento e a seção transversal subdividida em dez lamelas de concreto.

Esta viga foi ensaiada por Bresler e Scordelis (1963) e reproduzida por Vecchio e Shin (2004). As propriedades dos materiais e os dados geométricos correspondem ao ensaio de Vecchio e Shin (2004).

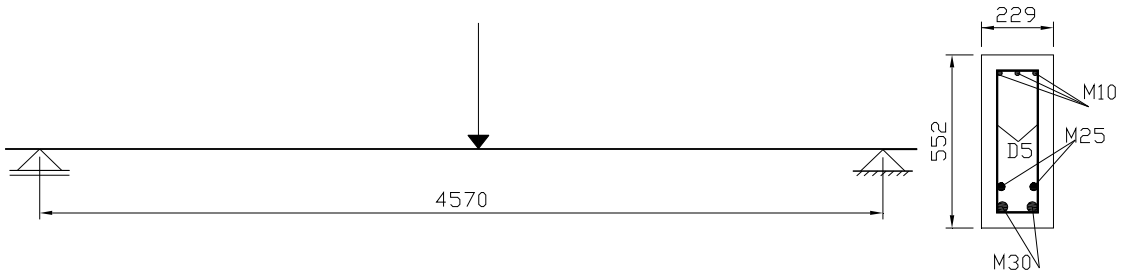


Figura 3.19 - Dados geométricos (mm) e posição da força

Os estribos foram espaçados a cada 190 mm. A seção transversal da figura 3.19 mostra o detalhamento e os diferentes tipos de armaduras que compõe a viga.

Tabela 3.1 - Propriedades das barras de aço (VECCHIO e SHIN, 2004)

Barra	Aço				
	Diâmetro (mm)	Área (mm^2)	f_y (MPa)	f_u (MPa)	E_y (MPa)
D5	6,4	32,2	600	649	200.000
M10	11,3	100	315	460	200.000
M25	25,2	500	440	615	210.000
M30	29,9	700	436	700	200.000

Propriedades do concreto:

- resistência à compressão ($f_c^{'}$) = 25,90 MPa;
- resistência à tração (f_t) = 3,37 MPa;
- módulo de elasticidade (E_c) = 32.900,00 MPa

Os gráficos da figura 3.20 apresentam o comportamento força-deslocamento no meio do vão. O gráfico correspondente ao ensaio de Bresler & Scordelis (1963) apresenta o comportamento da viga até a força última, pois foi realizado com controle de força, já Vecchio & Shim (2004) usaram o controle de deslocamento e puderam analisar o comportamento pós-pico.

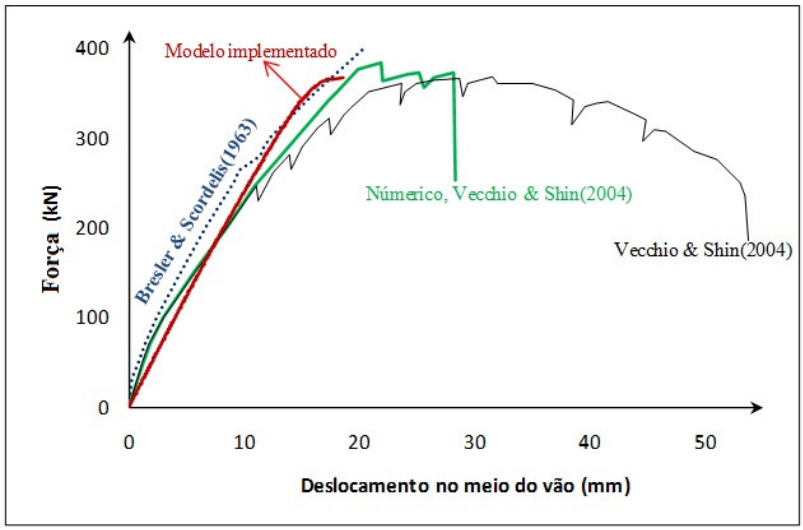


Figura 3.20 - Curva força - deslocamento (VECCHIO e SHIN, 2004)

A resposta carga-deslocamento gerada a partir do modelo implementado tem uma inclinação menor, no início da curva, do que os ensaios Bresler e Scordelis (1963) e Vecchio e Shin (2004), isso se deve ao fato da não consideração da tração do concreto, nem a participação do concreto entre fissuras, levando a uma menor rigidez da seção transversal.

A análise do modelo implementado é representada praticamente por uma reta, mudando apenas quando o aço escoa. A figura 3.21 corresponde ao campo de deformação da seção mais solicitada da viga para diversos níveis de carregamento, na qual se vê que a linha neutra permanece inalterada, mudando apenas a curvatura, isso ocorreu porque nenhuma lamela a mais tracionou além das que já tinham tracionadas.

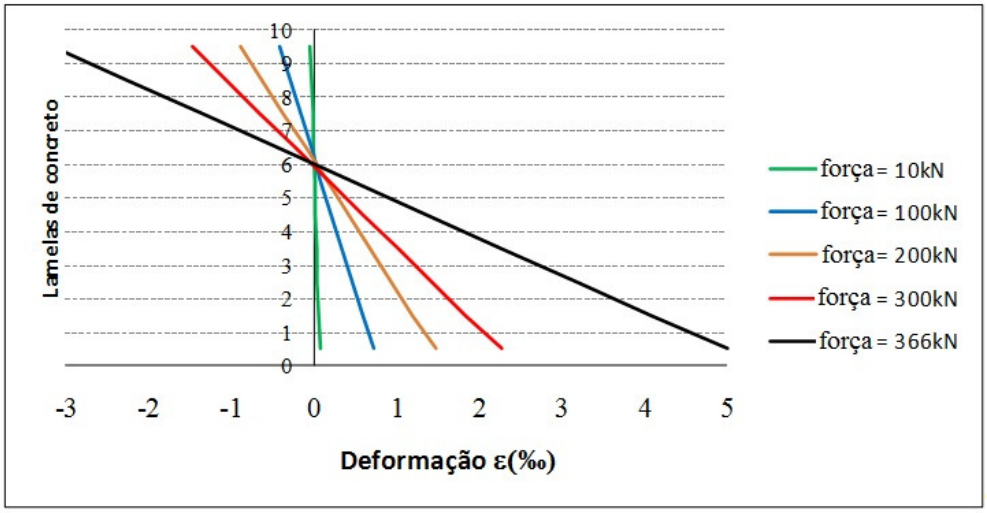


Figura 3.21 - Campo de deformação

A camada de aço M30 escoa para uma força de 325kN, e, nesta etapa, a resposta força-deslocamento deixa de ser uma reta, já a camada M25 escoa quando a força atinge 356kN a analise prossegue até 366kN, a partir daí a rigidez da viga diminui drasticamente e a matriz de rigidez torna-se singular.

4 MODELO MATEMÁTICO DE FLUÊNCIA DO CONCRETO

Neste capítulo a fluência foi considerada a partir da formulação elasto-viscoplástica de Owen e Hinton (1980), que consiste na aplicação de taxas viscosas em função da tensão em cada intervalo de tempo. Esse modelo simula também a viscoelasticidade, quando o atrito é eliminado e o modelo reológico transforma-se no modelo de Maxwell. Devido ao comportamento complexo do concreto foi aplicado o modelo de Maxwell com cinco camadas, o qual é calibrado a partir de funções de fluência em diferentes idades, com a finalidade de representar o envelhecimento do concreto.

Os trabalhos de Prates Júnior (1992), Claure (1994), e Machado (2002) serviram de base para o desenvolvimento deste capítulo.

4.1 MODELO ELASTO-VISCOPLÁSTICO

A teoria viscoplástica permite introduzir o efeito do tempo no processo de deformação plástica, assim, após iniciado o escoamento do material, o fluxo plástico, as tensões e deformações são dependentes do tempo. Esses efeitos estão sempre presentes nos materiais, mas só em algumas situações são relevantes, como em metais à alta temperatura. No caso de concreto, rocha, solos e metais à temperatura ambiente a teoria plástica é suficiente para representar o comportamento do material.

A partir do modelo elasto-viscoplástico (figura 4.1) é possível encontrar soluções para estruturas submetidas a forças estáticas, problema elastoplástico e força de longa duração, problema elasto-viscoplástico e viscoelástico, como fluência e relaxação.

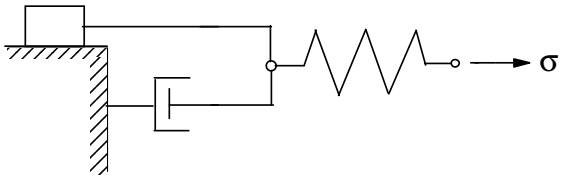


Figura 4.1 - Modelo elastoplástico

Quando o tempo tende ao infinito o modelo elasto-viscoplástico é substituído pelo modelo elastoplástico (figura 4.2), como qual é possível obter resposta de uma estrutura submetida a forças de curta duração.

Figura 4.2 - Modelo elastoplástico

Quando o atrito (tensão de plastificação) é considerado nulo o modelo representa o comportamento viscoelástico (figura 4.3) do material. A resposta é obtida após transcorrido um determinado tempo da aplicação da força. Este modelo é chamado de modelo de Maxwell.

Figura 4.3 - Modelo de Maxwell

Para representar o comportamento viscoelástico do concreto foi adotado o modelo de Maxwell em camadas (figura 4.4), cada camada possui propriedades mecânicas diferentes, o que torna o modelo mais representativo para a fluência do concreto. Esse modelo foi proposto por BAŽANT e Wu (1974). Yojo (1988) usou esse modelo para analisar o comportamento viscoelástico de treliças espaciais de madeira.

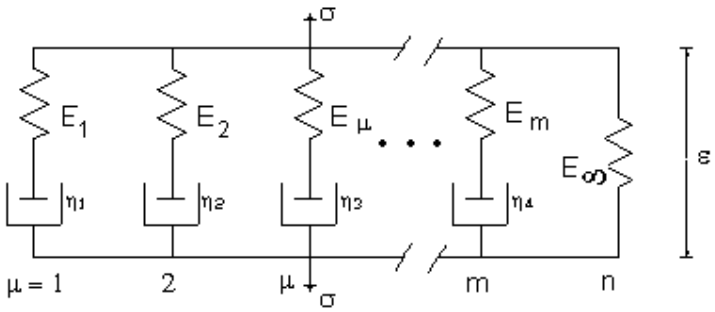


Figura 4.4 - Modelo elasto-viscoplástico

4.1.1 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A formulação matemática proposta por Owen e Hinton (1980) para o modelo elasto-viscoplástico, da figura 4.1, é adequada ao método dos elementos finitos para análise meios contínuos. Esse modelo se aplica a análise estrutural não linear de um material isotrópico e homogêneo.

A deformação total (ε) é a soma da deformação elástica (ε_e), com a viscoplástica (ε_{vp}) como está mostrada na equação 4-1.

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}_e + \boldsymbol{\varepsilon}_{vp} \tag{4-1}$$

A tensão total (σ) é igual à tensão elástica (σ_e), calculada a partir da deformação elástica, de acordo com:

$$\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}_e = \boldsymbol{D} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}_e \tag{4-2}$$

Sendo que $\boldsymbol{D}$ é a matriz constitutiva do material.

Nesse modelo, o comportamento viscoplástico do material é governado por uma superfície de plastificação, equação 4-3. Quando a tensão aplicada torna-se maior que a tensão de plastificação $F(\sigma) > F_0$, inicia-se o comportamento viscoplástico. Para problemas viscoelásticos, a tensão de plastificação F_0 é considerada nula.

$$F(\boldsymbol{\sigma}) - F_0 = 0 \tag{4-3}$$

Uma vez atingida a superfície de plastificação é necessário estabelecer uma lei para determinar a taxa de deformação viscoplástica. Owen e Hinton (1980) sugerem considerar:

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \gamma \cdot \Phi(\sigma) \cdot \frac{\partial Q}{\partial \sigma} \quad para \quad F > F_0$$
$$\dot{\varepsilon}_{vp} = 0 \quad para \quad F \leq F_0 \tag{4-4}$$

sendo:

- $\gamma = 1/\eta$ é o parâmetro que controla o fluxo plástico;
- $Q = Q(\boldsymbol{\sigma})$ é a função potencial plástico;
- $\Phi(\sigma) = F - F_0$, para o caso da viscoelástico $\Phi(\sigma) = F$.

Para o caso de plasticidade associada, F ≡ Q a equação 4-4 é reduzia a:

$$\dot{\varepsilon}_{vp} = \gamma \Phi(\boldsymbol{\sigma}) \frac{\partial F}{\partial \sigma} = \gamma \Phi(\boldsymbol{\sigma}) \boldsymbol{a} \tag{4-5}$$

sendo:

- ***a,*** é o vetor de fluxo plástico, que dependente do critério de plastificação utilizado. Neste trabalho utiliza-se o critério de Von Mises. No caso do elemento de barra o valor do fluxo plástico resume-se a um escalar igual a 1.

O incremento de deformação viscoplástica é diretamente proporcional ao intervalo de tempo analisado

$$\Delta(\varepsilon_{vp})_n = \Delta t_n \cdot (\dot{\varepsilon}_{vp})_n \tag{4-6}$$

Utilizando-se a forma incremental na equação 4-2 e substituindo-se a equação 4-1 também na forma incremental, obtém-se:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{D}_n \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{e,n} = \boldsymbol{D}_n \cdot (\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n - \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{vp,n}) \tag{4-7}$$

O incremento de deformação total é calculado a partir do incremento de deslocamento.

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}_n = \boldsymbol{B} \cdot \Delta\boldsymbol{u}_n \tag{4-8}$$

sendo:

- $\boldsymbol{B}$ = é a matriz de relações deformações-deslocamentos;
- $\Delta\boldsymbol{u}_n$ = vetor incremental de deslocamentos.

Substituindo-se as equações 4-6 e 4-8 na equação 4-7, obtém-se o incremento de tensão:

$$\Delta\boldsymbol{\sigma}_n = \boldsymbol{D}_n \cdot \left(\boldsymbol{B} \cdot \Delta\mathbf{u}_n - \Delta t_n \, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{vp,n}\right) \tag{4-9}$$

O incremento de deslocamento, em cada nova iteração, é calculado como segue:

$$\Delta\boldsymbol{u}_n = \boldsymbol{K}_n^{-1} \cdot \Delta\boldsymbol{V} \tag{4-10}$$

$$\Delta\boldsymbol{V} = \boldsymbol{R_n} + \Delta\boldsymbol{P}_n + \underbrace{\int_V \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D}_n \cdot \Delta\boldsymbol{\varepsilon}_{vp,n} \, dV}_{\Delta Pseudo_n} \tag{4-11}$$

$$\boldsymbol{K}_n = \int_V \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{D}_n \cdot \boldsymbol{B} \, dV \tag{4-12}$$

em que:

– $\Delta\boldsymbol{F}_n$ representa a variação do vetor de cargas nodais equivalentes durante um intervalo de tempo. Na maioria dos casos, o incremento de carga é aplicado como passo discreto, considerando-se $\Delta\boldsymbol{F}_n$ = 0 para todos os passos de tempo, exceto para o primeiro passo dentro de um incremento de carga.

– $\Delta\boldsymbol{F}_{seudo_n}$ = Pseudo carga obtida a partir do incremento de deformação viscoelastica;

– $\boldsymbol{K}_n$ = matriz de rigidez tangente global;

– $\boldsymbol{R_n}$ é a força residual.

Após calculados os incrementos de tensão e deslocamento, esses vetores são atualizados:

$$\boldsymbol{\sigma}_{n+1} = \boldsymbol{\sigma}_n + \Delta\boldsymbol{\sigma}_n \tag{4-13}$$

$$\boldsymbol{u}_{n+1} = \boldsymbol{u}_n + \Delta\boldsymbol{u}_n \tag{4-14}$$

O vetor de forças residuais é calculado pela diferença entre as forças internas e as forças externas nodais equivalentes em cada iteração.

$$\boldsymbol{R}_{n+1} = \int_V \boldsymbol{B}^T \cdot \boldsymbol{\sigma}_{n+1} \cdot dV - \boldsymbol{F}_n \tag{4-15}$$

A convergência pode ser definida da mesma forma como mostrada no item 3.5.1 do capítulo anterior.

4.1.2 MODELO DE CAMADAS

A formulação apresentada no item anterior é aplicada para o modelo elasto-viscoplástico (figura 4-1). Esse modelo é muito simples para representar a história de deformações ao longo do tempo para materiais com o comportamento tão complexo como o concreto. Pande, Owen e Zienkiewickz (1975) sugeriram representar tais materiais, dividindo-os em um número conveniente de camadas, as quais se deformam igualmente. Cada camada possui propriedades mecânicas distintas e contribui com uma parcela da tensão total.

Para simular o comportamento viscoelástico com o envelhecimento do concreto, adotou-se o modelo com cinco camadas superpostas (modelo de Maxwell em camadas, figura 4-4), excluindo-se os elementos de atrito do modelo elasto-viscoplático, considerando nulas as tensões de plastificação.

No modelo em camadas a tensão total é definida pela soma das cinco camadas.

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum_{i=1}^{5} \boldsymbol{\sigma}_i \tag{4-16}$$

A matriz de rigidez tangente para cada elemento é a soma das contribuições de cada camada, ou seja:

$$\mathbf{K}_n = \sum_{j=1}^{5} \int_V \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{D}_{j,n} \cdot B \, \mathrm{dV} \tag{4-17}$$

sendo:

$\mathbf{D}_{j,n}$ = matriz constitutiva de cada camada, calculada em função das suas propriedades.

4.2 MODELO VISCOELÁTICO PARA O CONCRETO

A resposta de uma estrutura de concreto a uma ação, depende não só da intensidade e do tempo decorrido desde o início, mas também da idade do concreto no instante da aplicação do carregamento. Portanto, em um modelo viscoelástico, os valores dos diversos módulos de elasticidade e coeficientes de viscosidade variam com o tempo. A esse fenômeno denomina-se envelhecimento do concreto (XI Seminário Nacional de Grandes Barragens, 1976).

4.2.1 HIPÓTESE BÁSICA

Conforme Creus (1986), as deformações por fluência, devidas a tensões em dois instantes diferentes, podem ser consideradas como aditivas, obedecendo à lei da superposição de efeitos.

A ABNT NBR 8224:1983 recomenda que a tensão a ser aplicada em corpos-de-prova nos ensaios de fluência deve ser de 40% da resistência à compressão do concreto na idade do carregamento. O MC CEB-FIP 1990 e MC CEB-FIP 2010 admitem a superposição dos efeitos quando a tensão no concreto não exceder a $0{,}40f_{cm}(t_0)$, sendo que f_{cm} é igual à resistência média à compressão e t_0 a idade do concreto no dia da aplicação do carregamento. Essa intensidade de tensão corresponde a estruturas submetidas a ações de serviço, que é o caso do modelo estudado neste trabalho.

4.2.2 RELAÇÃO CONSTITUTIVA UNIAXIAL

A linearidade da equação constitutiva 4-19 justifica a superposição de efeitos, permitindo concluir que os campos de tensão e de deformação em qualquer instante t, produzidos por diversas ações, podem ser obtidos pela superposição dos correspondentes campos produzidos por essas mesmas ações no instante t.

A lei do tipo integral para a fluência pode ser expressa, simplificadamente, a partir da integral hereditária da equação 4-18. Observa-se que, em cada instante t, a deformação $\varepsilon(t)$ não depende apenas da tensão $\sigma(t)$ nesse mesmo instante, mas sim de todo o histórico de tensões anterior.

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t,t_0) + \int_{t_0^+}^{t} J(t,\tau)\, d\sigma(\tau) \tag{4-18}$$

sendo:

- $J(t,\tau)$ = função de fluência. Representa a deformação agindo no intervalo de tempo de τ a t, devido a uma tensão unitária.
- t_0 = idade do concreto no instante da aplicação do carregamento.

Se o histórico de tensão puder ser expresso em incrementos discretos de tensão ao longo do tempo, a equação 4-18 pode ser aproximada para:

$$\varepsilon(t) = \sigma(t_0) \cdot J(t,t_0) + \sum_{i=1}^{n} J(t,\tau_i)\Delta\sigma_i \tag{4-19}$$

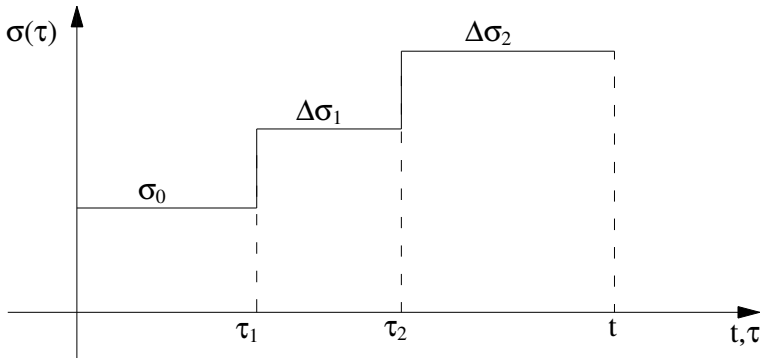


Figura 4.5 - Histórico de tensões

Para o caso de histórico de deformações, pode-se representar a lei do tipo integral para a relaxação, a partir da equação 4-20.

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0) \cdot R(t,t_0) + \int_{t_0^+}^{t} R(t,\tau)\, d\varepsilon(\tau) \tag{4-20}$$

sendo:

- $R(t,\tau)$ = função de relaxação. Representa a tensão agindo no intervalo de tempo de τ a t, devido a uma deformação unitária.

Expressando-se o histórico de deformação em incrementos discretos, a equação 4-20 pode ser aproximada para:

$$\sigma(t) = \varepsilon(t_0) \cdot R(t,t_0) + \sum_{i=1}^{n} R(t,\tau_i)\Delta\varepsilon_i \tag{4-21}$$

As equações 4-18 a 4-20 mostram a importância da determinação das funções de fluência e relaxação. Essa é a razão pela qual os resultados de ensaios com tensão ou deformação constantes são muito importantes.

Se, ao contrário, o histórico de deformações for prescrito na equação 4-18 e o histórico de tensões for prescrito na equação 4-20, estas duas equações representariam as integrais de Volterra, não homogêneas e seriam obtidas respectivamente as tensões e as deformações.

A relação entre a função de fluência e a função de relaxação é importante, pois com ela obtém-se uma função a partir da outra. Esta relação pode ser obtida com a imposição da deformação unitária a partir de certo instante, na equação 4-18, ou seja:

- $\varepsilon(t) = 0,\ para\ t < t_0;$
- $\varepsilon(t, t_0) = 1,\ para\ t \geq t_0;$

Por definição tem-se que $\sigma(t,t_0) = R(t,t_0)$ e considerando que $R(t,t_0) = E_c(t,t_0)$. Substituindo na equação 4-18 vem:

$$1 = E_c(t_0) \cdot J(t,t_0) + \int_{t_0}^{t} J(t,\tau) dR(\tau) \tag{4-22}$$

A equação 4-22 representa uma equação integral, não-homogênea, de Volterra, para a determinação da função de relaxação, a partir da função de fluência.

4.2.3 MODELO DE MAXWELL

O modelo reológico adotado neste trabalho para representar o comportamento do concreto dependente do tempo, foi o modelo em paralelo de Maxwell generalizado. Bažant e Wu (1974) recomendaram o uso deste modelo para representar a viscoelasticidade do concreto e os pesquisadores Fairbairn, Longo e Zheng (1974) comprovaram que cinco camadas eram suficientes (figura 4.6).

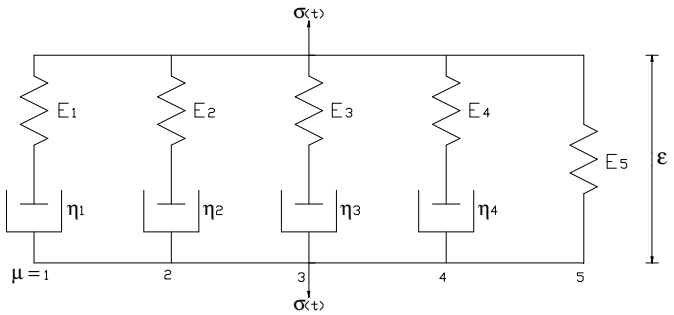


Figura 4.6 - Modelo de Maxwell em camadas

A equação 4-23 faz a relação entre o modulo de elasticidade e o coeficiente de atrito de cada camada de Maxwell.

$$\tau_\mu = \frac{\eta_\mu}{E_\mu} \tag{4-23}$$

Sendo que τ_μ é definido como tempo de relaxação, este valor não varia e, após alguns testes feitos por Bažant e Wu (1974), foi recomendado o uso dos seguintes valores:

$$\tau_\mu = 10^{\mu-1} \cdot \tau_1 \quad (\mu = 1, \cdots, 4; \quad \tau_1 = 10) \tag{4-24}$$

Para simular a última camada, que é composta por uma mola, adota-se um valor grande para $\tau_5 = 10^{30}$,assim $\eta_5 \to \infty$.

As equações a seguir se aplicam ao modelo de Maxwell (figura 4-3), mola e amortecedor em série:

- equação de equilíbrio:

$$\sigma_e(t) = \sigma_\eta(t) = \sigma(t) \tag{4-25}$$

- equação de compatibilidade:

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_e(t) + \varepsilon_\eta(t) \tag{4-26}$$

- equação constitutiva para a mola:

$$\sigma_e(t) = E \cdot \varepsilon_e(t) \tag{4-27}$$

- equação constitutiva para o amortecedor:

$$\sigma_\eta(t) = \eta \cdot \dot{\varepsilon}_\eta(t) \tag{4-28}$$

Derivando as equações 4-26 e 4-27 em função do tempo e substituindo as equações 4-27 e 4-28 na equação 4-26, obedecendo á equação 4-25, tem-se:

$$\dot{\varepsilon}(t) = \frac{\dot{\sigma}(t)}{E} + \frac{\sigma(t)}{\eta} \tag{4-29}$$

A tensão, ao longo do tempo, obtida a partir da equação diferencial 4-29 é aproximada em exponenciais reais, chamadas de séries de Dirichlet.

$$\sigma(t, t_0) = \sigma(t_0) \cdot e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_\mu}} \tag{4-30}$$

A equação 4-30 representa a função de relaxação R(t, t_0), quando uma deformação unitária é imposta em t = t_0 e mantida constante para t > t_0, assim $\sigma(t) = E(t)$, desta forma tem-se:

$$R(t, t_0) = E(t_0) \cdot e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_\mu}} \tag{4-31}$$

Para a cadeia de Maxwell em paralelo (figura 4-6) pode-se escrever:

- A tensão σ(t) aplicada na cadeia é a soma das parcelas em cada camada, ou seja:

$$\sigma(t) = \sum_{\mu=1}^{5} \sigma_\mu(t) \tag{4-32}$$

- Consequentemente a função de relaxação é representada da seguinte forma:

$$R(t, t_0) = \sum_{\mu=1}^{5} E_\mu(t_0) \cdot e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_\mu}} \tag{4-33}$$

4.2.4 CALIBRAÇÃO DA CADEIA DE MAXWELL

A calibração da cadeia de Maxwell consiste em calcular os módulos de elasticidades $E_\mu(t)$ e a partir deles, os correspondentes coeficientes de viscosidade $\eta_\mu(t)$. A determinação dos termos $E_\mu(t)$, pode ser feita a partir de uma função de relaxação ($\overline{R}(t_i,t_0)$), cujos valores discretos nos tempos t_0, são conhecidos.

4.2.4.1. Determinação da função de relaxação

Os pontos discretos, $\overline{R}(t_i,t_0)$, são obtidos, a partir da integração numérica da equação 4-22. As funções de fluência $J(t_i,t_0)$ podem ser obtidas em laboratório ou por expressões analíticas, sugeridas em normas para a previsão da fluência.

Para determinar $\overline{R}(t_i,t_0)$, a partir da equação 4-22, necessita-se conhecer $J(t_i,t_0)$ em qualquer idade (t_0) de aplicação da força e a sua duração $(t-t_0)$, dentro do intervalo de tempo considerado.

Quando o problema se afasta das hipóteses requeridas para a aplicação do método algébrico, utiliza-se a integração passo-a-passo, que consiste na divisão do tempo em diversos intervalos. São duas as regras normalmente utilizadas para aproximação da função de fluência: regra dos retângulos e a regra dos trapézios.

A equação 4-34 mostra a aproximação da função de fluência, usando a regra dos retângulos.

$$\varepsilon(t_n)=\sum_{i=1}^{n} J(t_n,t_i)\,\Delta\sigma(t_i) \tag{4-34}$$

E a equação 4-35 apresenta a aproximação da função de fluência, usando a regra dos trapézios, esta conduz a resultados mais precisos.

$$\varepsilon(t_n) = \sum_{i=1}^{n} \frac{J(t_n,t_i) + J(t_n,t_{i-1})}{2} \cdot \Delta\sigma(t_i) \tag{4-35}$$

As expressões 4-34 e 4-35 continuam válidas mesmo para variações instantâneas da tensão desde que se defina um intervalo de tempo com duração nula.

Usando a regra trapezoidal, Bažant e Wu (1974) definiram a equação 4-36, que é a solução aproximada da expressão 4-26, e corresponde a solução da integral de Volterra,

$$\Delta\overline{R} = -(J_{i,i} + J_{i,i-1})^{-1} \sum_{j=1}^{i-1} \Delta\overline{R}_j (J_{i,j} + J_{i,j-1} - J_{i-1,j} - J_{i-1,j-1}) \tag{4-36}$$

em que:

- $J_{i,j} = J(t_i,t_j)$;
- $\Delta\overline{R}_1 = E(t_0)$ = valor inicial para a relaxação.

Os valores discretos da função de relaxação em cada instante são obtidos a partir da equação 4-37.

$$\overline{R}(t_i,t_0) = \overline{R}(t_{i-1},t_0) + \Delta\overline{R}_i \tag{4-37}$$

Desta forma, conhecendo-se os valores de $J(t_i,t_0)$ para vários instantes (t_0), dentro de um intervalo de tempo considerado (t - t_0) obtêm-se os respectivos valores de $\overline{R}(t_i,t_0)$ nos vários tempos discretos.

Os instantes (t_0), de aplicação das ações, foram variados em escala logarítmica, de forma que pudesse varrer uma quantidade de tempo com poucas curvas, segundo a equação 4-38. Nesta pesquisa, adotaram-se oito curvas. Para tanto é preciso adotar o primeiro valor.

$$t_n = 10^{0,5} t_{n-1} \ (dias)$$

t_1	t_2	t_3	t_4	t_5	t_6	t_7	t_8
2,8	8,8	28,0	88,5	280,0	885,4	2800,0	8854,4

(4-38)

Para cada uma das oito curvas de fluência são geradas trinta pontos, espaçados em escala logarítmica a partir da equação 4-43,

$$(t_i - t_0) = 10^{0,1} \cdot (t_{i-1} - t_0) \tag{4-39}$$

sendo:

- $(t_1 - t_0) = 0 \ dias$;
- $(t_2 - t_0) = 3,525 \ dias$;
- $(t_{30} - t_0) = 2224,18 \ dias$. Último ponto de cada curva de fluência.

4.2.4.2. Determinação dos parâmetros E_μ (t) e η_μ (t).

A determinação dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell com cinco camadas pode ser feita pelo método dos mínimos quadrados, a partir dos pontos conhecidos da função de relaxação $\bar{R}(t_i, t_0)$. A aplicação deste método é feita através da minimização da soma dos quadrados do desvio, ϕ, ou seja:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} [R(t_i, t_0) - \bar{R}(t_i, t_0)]^2 + \pi \tag{4-40}$$

sendo π, o termo residual para melhorar o ajuste da função, definido por:

$$\pi = \varpi_1 \sum_{\mu=1}^{3} (E_{\mu+1} - E_\mu)^2 + \varpi_2 \sum_{\mu=1}^{2} (E_{\mu+2} - 2E_{\mu+1} + E_\mu)^2 \tag{4-41}$$

Para calibrar o modelo de Maxwell, a partir das funções de fluência geradas pelO MC CEB-FIP 1990 e MC CEB-FIP 2010, foram adotados os seguintes pesos para o termo residual: ϖ_1 = 0,01 e ϖ_2 = 0,001.

Substituindo-se a função de relaxação, equação 4-33, na expressão 4-40 do desvio, sem o termo residual, tem-se:

$$\phi = \sum_{i=1}^{30} [\sum_{\mu=1}^{5} E_\mu(t_0) e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_\mu}} - \bar{R}(t_i, t_0)]^2 \tag{4-42}$$

As incógnitas $E_\mu(t_0)$ são obtidas a partir da minimização da equação 4-42.

$$\frac{\partial \phi}{\partial E_\mu} = 0, \quad \mu = 1, \ldots, 5 \tag{4-43}$$

As equações 4-43 formam um sistema de cinco equações com cinco incógnitas. A resolução deste sistema conduz a valores positivos de $E_\mu(t_0)$, pois a inclinação da curva de relaxação é sempre positiva. Desenvolvendo-se a equação j do sistema 4-43, obtém-se:

$$\sum_{i=1}^{30} [\sum_{\mu=1}^{5} E_\mu(t_0) e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_\mu}} - \bar{R}(t_i, t_0)] \sum_{i=1}^{30} e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_j}} = 0 \tag{4-44}$$

Essa expressão pode ser reescrita da seguinte forma:

$$\sum_{i=1}^{30} [\sum_{\mu=1}^{5} E_\mu(t_0) e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau_\mu} + \frac{t-t_0}{\tau_j}\right)}] = \sum_{i=1}^{30} \bar{R}(t_i, t_0) e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_j}} \tag{4-45}$$

Representando a equação 4-45 na forma matricial tem-se:

$$A \cdot E = B \tag{4-46}$$

em que:

$$A_{jk} = \sum_{i=1}^{30} e^{-\left(\frac{t-t_0}{\tau_\mu}+\frac{t-t_0}{\tau_j}\right)}, \quad k = 1,\ldots,5 \quad ;$$

$$E_j = E_j(t_0) \quad ;$$

$$B_j = \sum_{i=1}^{30} \overline{R}(t_i, t_0)\, e^{\frac{-(t-t_0)}{\tau_j}} \tag{4-47}$$

Introduzindo-se o termo residual, π, nas equações 4-43, os elementos A_{ij} da matriz [A], devem ser corrigidos da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
&A_{1,1} = A_{1,1} + \varpi_1 + \varpi_2 && A_{3,1} = A_{3,1} + \varpi_2 \;; \\
&A_{1,2} = A_{1,2} - \varpi_1 + 2\varpi_2 && A_{3,2} = A_{3,2} - \varpi_1 + 4\varpi_2 \;; \\
&A_{1,3} = A_{1,3} + \varpi_2 && A_{3,3} = A_{3,3} + 2\varpi_1 + 5\varpi_2 \;; \\
&A_{2,1} = A_{2,1} - \varpi_1 - 2\varpi_2 && A_{3,4} = A_{3,4} - \varpi_1 - 2\varpi_2 \;; \\
&A_{2,2} = A_{2,2} + 2\varpi_1 + 5\varpi_2 && A_{4,3} = A_{4,3} - \varpi_1 - 2\varpi_2 \;; \\
&A_{2,3} = A_{2,3} - \varpi_1 - 4\varpi_2 && A_{4,4} = A_{4,4} + \varpi_1 + \varpi_2 \;; \\
&A_{2,4} = A_{2,4} + \varpi_2
\end{aligned} \tag{4-48}$$

Resolvendo-se o sistema 4-43, determinam-se os valores dos módulos de elasticidade da cadeia de Maxwell, $E_\mu(t_0)$, para os valores de t_0, quando os dados discretos de $\overline{R}(t_i, t_0)$ são fornecidos para t_0. Já, para qualquer idade t, os valores de $E_\mu(t)$ são interpolados pela expressão:

$$\begin{aligned}
&E_\mu(t) = \\
&E_\mu(t_{0,i-1})[\log(t_{0,i}) - \log(t)] + E_\mu(t_{0,i})[\log(t) - \log(t_{0,i-1})] / [\log(t_{0,i}) - \log(t_{0,i-1})]
\end{aligned} \tag{4-49}$$

para $i = 2,\ldots,8$ e $\mu = 1,\ldots,5$.

Conhecidos os valores de E_μ para as cinco camadas, obtêm-se os respectivos valores de η_μ, através da expressão 4-23. Assim, os valores de E_μ e η_μ podem ser obtidos para qualquer idade "t" do concreto, na fase viscoelástica.

4.3 FUNÇÃO DE FLUÊNCIA – MODELO CEB-FIP 1990 E DO CEB-FIP 2010

A função de fluência representa a deformação ao longo do tempo para uma tensão unitária. A deformação para uma dada tensão no instante, t_0, é dada pela expressão 4-50.

$$\begin{aligned}\varepsilon_{c\sigma}(t) &= \varepsilon_{ci}(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) \\ &= \sigma(t)\underbrace{\left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t,t_0)}{E_{c,28}}\right]}_{J(t,t_0)}\end{aligned} \tag{4-50}$$

$\sigma_c(t_0)$ é a tensão aplicada no instante do carregamento e $J(t,t_0)$ a Função de Fluência, que representa a deformação na idade "*t*", provocada por uma tensão unitária no instante "t_0".

Os parâmetros do modelo de Maxwell em camadas (figura 4.6) são obtidos a partir de valores de relaxação $\overline{R}(t,t_0)$. Na ausência desses valores de relaxação podem-se utilizar Funções de Fluência, como pode ser visto no item anterior.

A Função de Fluência, expressão 4-51, tem a mesma formulação em qualquer norma, mudando apenas a maneira de cálculo de suas variáveis, coeficiente de fluência $(\varphi(t,t_0))$ e os módulos de elasticidade. Este trabalho adotou a proposta do código MC CEB-FIP 1990.

$$J(t,t_0) = \frac{\varphi(t,t_0)}{E_{c28}} + \frac{1}{E_c(t_0)} \tag{4-51}$$

Na ausência de dados experimentais o módulo de elasticidade aos 28 dias pode ser definido pela equação 4-52.

$$E_{c28} = 21500 \cdot \sqrt[3]{\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}}; \qquad MC - \text{CEB} - \text{FIP 1990}$$
$$E_{c28} = E_{c0} \cdot \alpha_E \cdot \sqrt[3]{\frac{f_{cm}}{f_{cm0}}}; \quad MC - \text{CEB} - \text{FIP 2010} \tag{4-52}$$
$$f_{cm0} = 10MPa;$$

Tabela 4.1 – Efeito do tipo do agregado no módulo de elasticidade (MC CEB-FIP 2010)

Tipos de agregado	α_E	$E_{c0.}\ \alpha_E$ (MPa)
Basalto	1,2	25800
Quartzo	1,0	21500
Calcário	0,9	19400
Arenito	0,7	15100

f_{cm} representa a resistência média à compressão do concreto e $E_c(t_0)$, o módulo de elasticidade do concreto calculado no instante, t_0, de aplicação do carregamento, calculado pela expressão 4-53.

$$E_c(t_0) = \beta_E(t_0)E_{c28}$$
$$\beta_E = \sqrt{\beta_{cc}(t_0)} \qquad \text{MC - CEB} - \text{FIP 1990 e 2010} \tag{4-53}$$
$$\beta_{cc} = \exp\left[s\left[1 - \sqrt{\frac{28}{t_T}}\right]\right]$$

O coeficiente β_{cc} leva em consideração a idade do concreto, a partir da correção do tempo pela variável t_T, calculada pela equação 4-57, *s* representa o tipo do cimento, s = 0,20, para cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial; s = 0,25, para cimento de endurecimento rápido e normal; s = 0,38 para cimento de endurecimento lento.

O coeficiente de fluência $\varphi(t,t_0)$, é calculado por:

$$\varphi(t,t_0) = \varphi_0\beta_c(t,t_0) \tag{4-54}$$

Sendo, φ_0 o coeficiente de fluência nominal, estimado pela expressão 4-55 e $\beta_c(t,t_0)$ a variável que descreve o efeito do tempo depois do carregamento.

ME CEB-FIP 1990	MC CEB-FIP 2010
$\varphi_0 = \varphi_{RH}\beta(f_{cm})\beta(t_0)$	igual
$\varphi_{RH} = 1 + \dfrac{1 - RH/100}{0{,}46(h/100)^{1/3}}$	$\varphi_{RH} = \left[1 + \dfrac{1 - RH/100}{0{,}1 \cdot h^{1/3}} \cdot \alpha_1\right] \cdot \alpha_2$
$\beta(f_{cm}) = \dfrac{5{,}3}{f_{cm}/10)^{0{,}5}}$	igual
$\beta(t_0) = \dfrac{1}{0{,}1 + t_0^{\,0{,}2}}$	igual
$h = \dfrac{2A_c}{u}$	igual

(4-55)

Das expressões acima é preciso esclarecer que *h* é a espessura fictícia em milímetros, *Ac* a área da seção transversal, *u* o perímetro da seção em contato com o meio externo e *RH* a umidade relativa do ar em porcentagem.

O coeficiente de fluência, $\beta_c(t,t_0)$ é previsto pela expressão 4-56,

$$\beta_c(t,t_0) = \left[\frac{(t - t_0)}{\beta_H + (t - t_0)}\right]^{0{,}3}$$

$$\beta_H = 1{,}5 \cdot h\left[1 + \left(1{,}2\frac{RH}{100}\right)^{18}\right] + 250 \le 1500 \qquad \text{MC} - \text{CEB} - \text{FIP 1990} \tag{4-56}$$

$$\beta_H = 1{,}5 \cdot h\left[1 + \left(1{,}2\frac{RH}{100}\right)^{18}\right] + 250 \cdot \alpha_3 \le 1500 \cdot \alpha_3 \quad \text{MC} - \text{CEB} - \text{FIP 2010}$$

sendo que:

$$\alpha_1 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0{,}7}; \alpha_2 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0{,}2}; \alpha_3 = \left(\frac{35}{f_{cm}}\right)^{0{,}5} \tag{4-57}$$

A correção do tempo, devido à variação de temperatura e o tipo de cimento é considerado pela aplicação da expressão 4-58,

$$t_0 = t_{0,T}\left[\frac{9}{2 + t_{0,T}^{\;1,2} + 1}\right]^{\alpha} \geq 0{,}5\ dias$$
$$t_{0,T} = \sum_{i=1}^{n} \Delta t_i \exp\left[13{,}65 - \frac{4000}{273 + T(\Delta t_i)}\right]; \quad \text{MC} - \text{CEB} - \text{FIP 1990 e 2010} \tag{4-58}$$

em que:

- $t_{0,T}$ é a idade do concreto ajustada de acordo com a temperatura;
- Δt_i é o número de dias em que a temperatura T permanece inalterada;
- $T(\Delta t_i)$ é a temperatura em ^{0}C durante o período Δt_i.

4.4 APLICATIVO – FLUÊNCIA NO CONCRETO

Esse aplicativo foi desenvolvido com base na formulação de Owen e Hinton (1980) e nos trabalhos de Machado (2002) e Prates Junior (1992). Nele é possível fazer previsão de fluência em estrutura planas de concreto armado, submetida à força axial.

Cada ponto de Gauss de um determinado elemento finito corresponde a uma seção transversal, que é subdividida em lamelas e nessas aplica-se o modelo de Maxwell, como pode ser visto na figura 4.7.

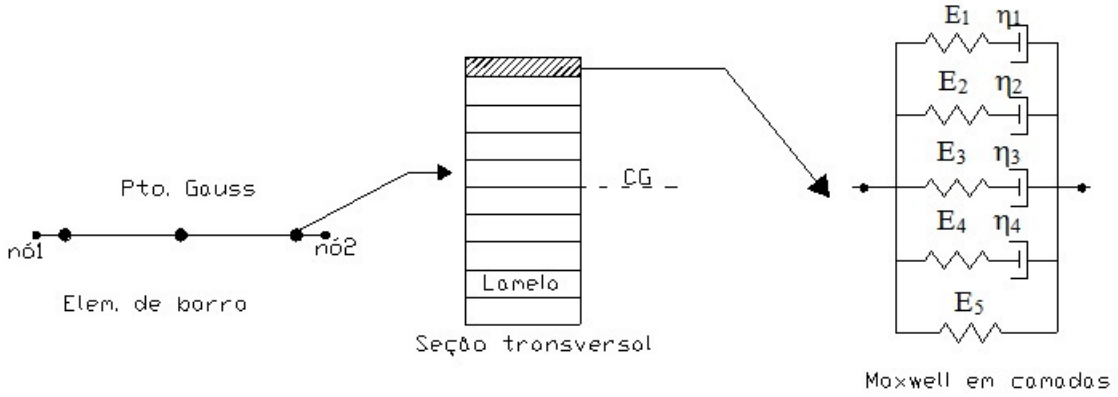


Figura 4.7 - Modelos intrínsecos no ponto de Gauss

De acordo com a figura 4.7, é necessário armazenar várias informações para cada elemento finito. Duas variáveis necessitam utilizar durante toda a análise, a configuração acima, a deformação viscosa ($\boldsymbol{\varepsilon}_{\mathbf{vis}}$) e a tensão ($\boldsymbol{\sigma}$). Essas variáveis têm a seguinte dimensão, $(n_{pg} \cdot n_{elem} \cdot n_{Maxwell})X(n_{lamela})$, sendo que:

- n_{pg} é o número de pontos de Gauss;
- n_{elem} é o número de elementos de barra;
- $n_{Maxwell}$ é o número camadas de Maxwell no modelo reológico, foi aplicado 5 camadas;
- n_{lamela} é o número de lamelas na seção transversal;

O fluxograma da figura 4.8, resume os principais passos do aplicativo desenvolvido neste trabalho, com ênfase na etapa de tempo.

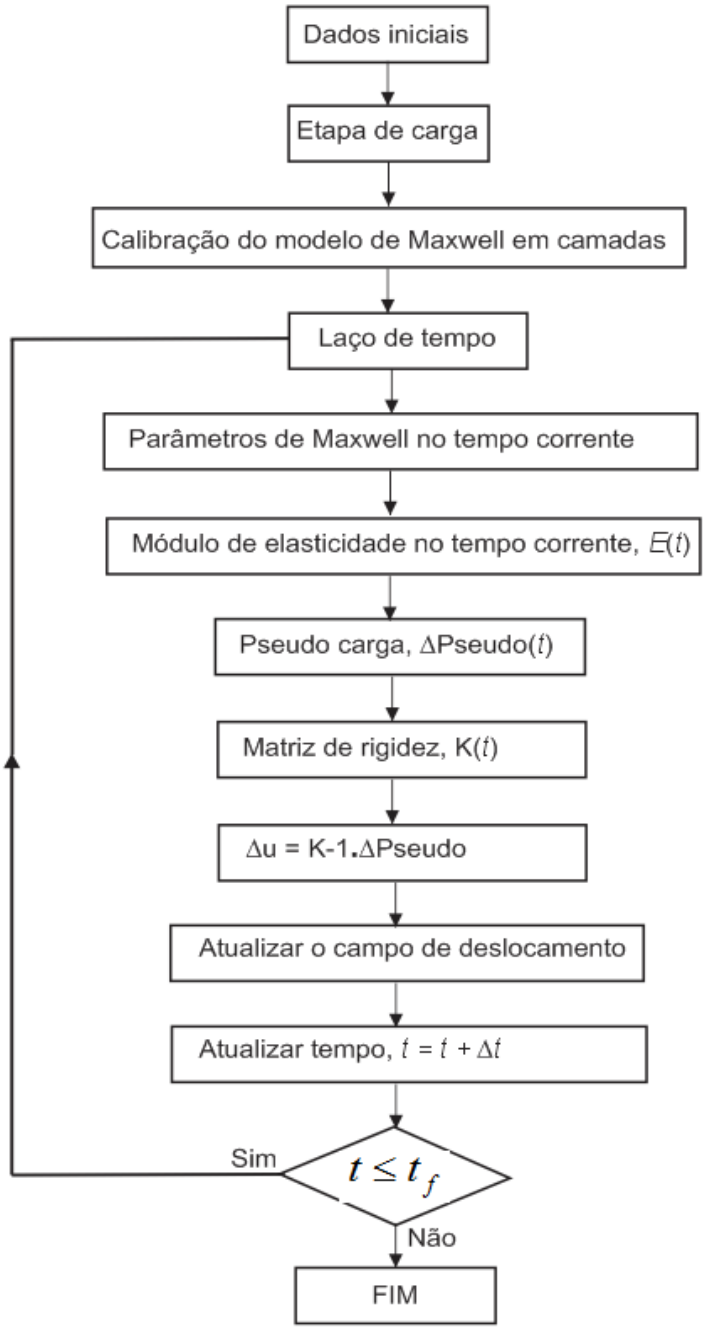


Figura 4.8 – Fluxograma para o aplicativo de fluência do concreto

4.4.1. Resumo da calibração do modelo reológico

A calibração definida no item 4.2.4 consiste na determinação das propriedades do modelo de Maxwell em camadas (figura 4.6) para diferentes intervalos de tempo, de forma a considerar o envelhecimento do concreto.

Oito curvas de função de fluência são usadas nessa calibração, cada curva com 30 pontos, espaçados entre si por intervalos de tempo de acordo com a equação 4-39. As curvas são geradas para diferentes instantes de carregamento, como mostra a figura 4.8.

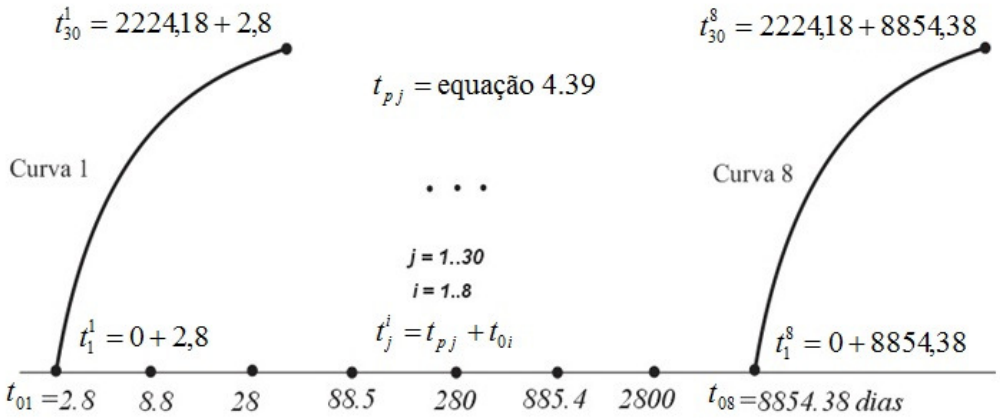


Figura 4.9 - Curvas de fluência

Do resultado da calibração obtêm-se oito grupos de módulos de elasticidade, cada um com uma idade de envelhecimento, definida pela equação 4-38. Cada grupo com cinco valores, que representam os módulos do modelo de Maxwell em camadas. Para instantes de tempos diferentes dos pré-definidos nesses oitos grupos, é feita interpolação para definir os módulos correspondentes ao tempo corrente.

Os valores das componentes dos amortecedores são calculados pela equação 4-23.

O cálculo da pseudo carga correspondente a uma deformação viscoelástica, está detalhada no fluxograma da figura 4.10.

Laço p/ o n^0 de elementos (***i***)

$$\Delta\varepsilon_{0,i} = \frac{u_2 - u_1}{L_0}$$

Laço p/ o n^0 de pontos de Gauss (***j***)

Laço p/ o n^0 de lamelas (***k***)

$$\Delta\varepsilon_{(k)} = \Delta\varepsilon_{0(i)} - y_{(k)} \cdot \varphi_{(j)}$$

fim

Laço p/ o n^0 de camadas de Maxwell (

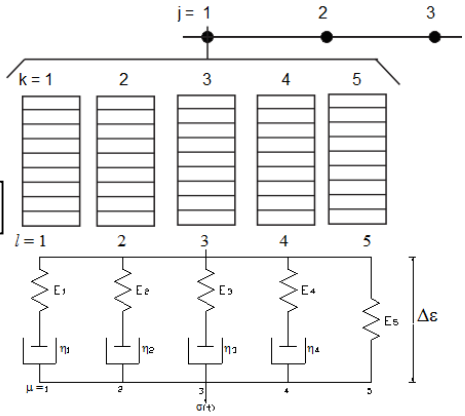
$$\Delta\varepsilon_{elast} = \Delta\varepsilon_{(nl,j)} - \Delta\varepsilon_{visc(nl,l)}$$

fim

$$\Delta\sigma_n = E_{(l)} \cdot \Delta\varepsilon_{elast}$$

$$\sigma_{n+1} = \sigma_n + \Delta\sigma_n$$

$$\Delta\varepsilon_{visc,n+1} = \Delta t \cdot \sigma_{n+1} \cdot \gamma$$



nl = número de lamelas

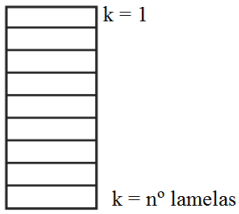
Laço p/ o n^0 de lamelas (***k***)

Laço p/ o n^0 de camadas de Maxwell

$$\Delta\sigma_{visc(k,l)} = \Delta\sigma_{visc(k,l)} + E_l \cdot \Delta\varepsilon_{visco(k,l)}$$

fim

fim



Seção transversal

Laço p/ o n^0 de lamelas (***k***)

$$N_{(k)} = \Delta\sigma_{visco(k)} \cdot A_{(k)}$$

fim

$$N = \sum_{k=1}^{nlamelas} N_k \quad e \quad M = \sum_{k=1}^{nlamelas} N_k \cdot y_k$$

$$p_{seudo} = B^t \cdot \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix}$$

fim

fim

Figura 4.10 – Fluxograma para o cálculo da pseudo carga

4.4.2. Exemplo de análise

Este exemplo tem a finalidade de comparar o ajuste entre os resultados gerados pelo modelo da figura 4.7 e os dados fornecidos pela função de fluência obtida do MC CEB-FIP 1990. Um corpo-de-prova (CP) cilíndrico de concreto de 15x30cm foi modelado por um elemento de barra e carregado axialmente de forma que a tensão mantida ao longo do tempo fosse de uma unidade. Os dados a seguir são aplicados nesse exemplo.

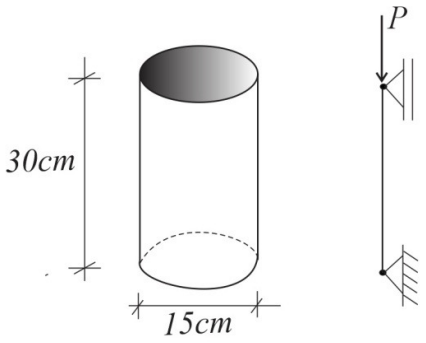


Figura 4.11 – Corpo-de-prova e elemento de barra

Dados:

- Resistência média à compressão do concreto, f_{cm} =3,0 kN/cm^2;
- Umidade relativa do a ar = 80%;
- Cimento de endurecimento rápido e alta resistência inicial;
- Temperatura de 20^{0}C;
- Força axial igual, F = 225πkN.

A seguir são apresentadas algumas curvas de deformação pelo tempo, para diferentes instantes de carregamento, 28; 88,54 e 885,44 dias. Nota-se um ótimo ajuste entre os resultados gerados pelo modelo implementado e as funções de fluência da expressão 4-51.

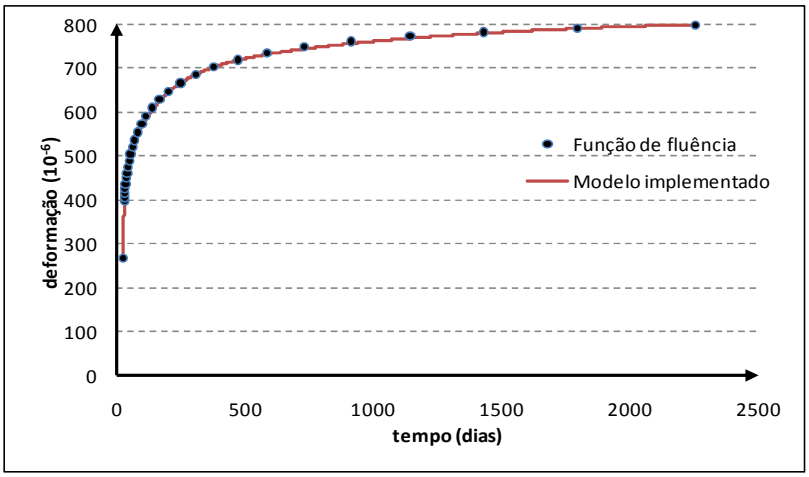


Figura 4.12 - Comparação entre o modelo da figura 4.8 e a função de fluência para t_o = 28 dias

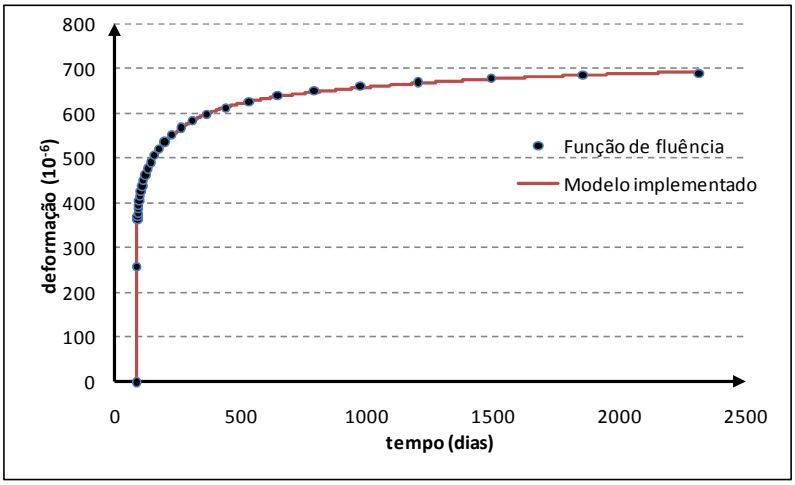


Figura 4.13 - Comparação entre o modelo da figura 4.8 e a função de fluência para t_o = 88,54 dias

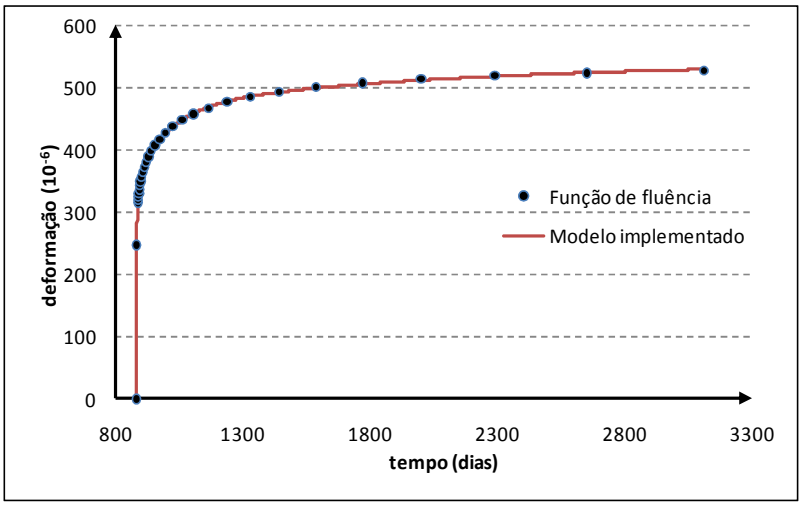


Figura 4.14 - Comparação entre o modelo da figura 4.8 e a função de fluência para t_o = 885,44 dias

4.4.3. Exemplo com dados experimentais

Os exemplos a seguir foram obtidos de ensaios de fluência e retração realizados por Kataoka (2010). Os resultados utilizados são provenientes do ensaio de um corpo-de-prova (CP) e de dois pilares curtos, com e sem armadura. Todos os ensaios foram realizados em uma câmara climatizada com controle de umidade e temperatura (23^0C ± 1^0C e 60% ± 4%, respectivamente). O monitoramento foi realizado desde a data de carregamento, aos 7 dias de idade do concreto até 91 dias de idade. Além da umidade e temperatura os quatro ensaios têm em comum os seguintes dados:

- Cimento, CPII40RS, com endurecimento lento;
- O agregado miúdo consiste da mistura de brita de calcário e areia natural;
- Agregado graúdo de origem calcária com dimensão máxima de 19mm.

As deformações foram monitoradas utilizando sensores elétricos embebidos no concreto localizados no eixo longitudinal do CP e dos pilares. Os resultados, apresentados nas figuras 4.15, 4.16 e 4.18, correspondem à fluência por secagem, já que a deformação lida foi deduzida da retração total (secagem e autógena).

Para a intensidade do carregamento aplicado, o modelo constitutivo parábola-retângulo pode ser substituído por um modelo linear. Nos exemplos a seguir optou-se pelo modelo linear, com aplicação do módulo obtido no ensaio na idade do carregamento. Já ao longo do tempo o módulo foi calculado de acordo com a calibração do modelo reológico.
Nos quatro exemplos o encurtamento do concreto foi representado com sinal positivo.

- **Exemplo 01**

Corpo-de-prova cilíndrico de 15cmx30cm, com força proporcional axial a 40% da resistência média à compressão aos 7dias (f_{cm7}).

Propriedades mecânicas:

- Resistência média à compressão aos 7 dias (f_{cm7}). = 26,2 MPa;
- Resistência média à compressão aos 28 dias (f_{cm28}). = 33,3 MPa;

- Módulo de elasticidade aos 7 dias = 26,8 MPa;
- Módulo de elasticidade aos 28 dias = 29,8 MPa.

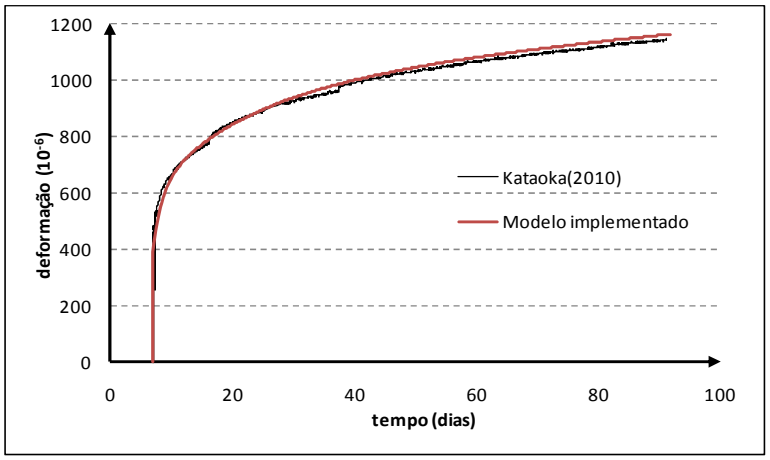


Figura 4.15 - Fluência por secagem – Ensaio CP 40%f_{cm7} (KATAOKA, 2010) e Modelo implementado

A deformação imediata do ensaio foi de 399,43x10^{-6} e do modelo implementado de 391,04x10^{-6}, ou seja, a diferença é menor que 1%. A figura 4.15 apresenta um bom ajuste entre os dados do ensaio e a previsão de deformação ao longo do tempo segundo o MC CEB-FIP 1990.

- **Exemplo 02**

Pilar de seção transversal quadrada com medida de lado igual a 15cm, 60cm de altura, sem armação. As propriedades mecânicas são as mesmas do exemplo 01 e mesmo carregamento.

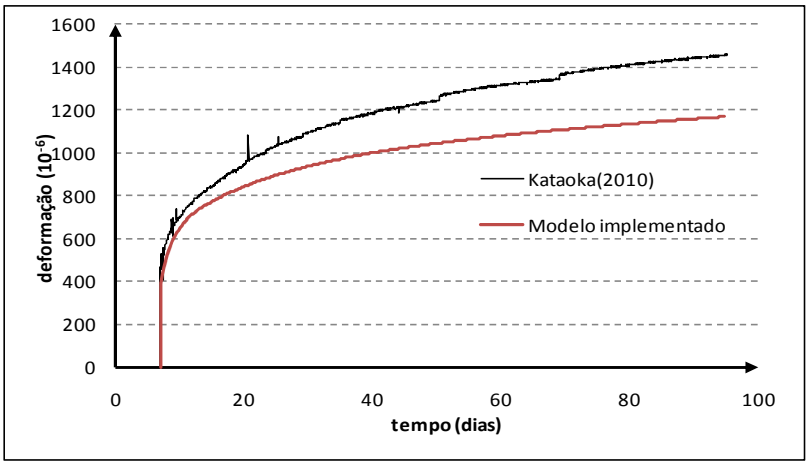


Figura 4.16 - Fluência por secagem – Ensaio CP 40%f_{cm7} (KATAOKA, 2010) e Modelo implementado

A deformação imediata do ensaio foi de 407,52x10^{-6} e do modelo implementado de 391,04x10^{-6}. Nota-se uma tendência de aumento da diferença entre os resultados experimentais e os gerados pelo modelo analítico, até aos 91 dias de análise a diferença chegou a 24,4%.

- **Exemplo 03**

Pilar de seção transversal quadrada com medida de lado igual a 15cm, 60cm de altura, armação de 4 barras de 10mm correspondendo a 1,4% da seção e estribos de 6,3mm espaçados a cada 11cm, ver figura 4.17. As propriedades mecânicas são as mesmas do exemplo 01 e mesmo carregamento. A figura 4.18 mostra os resultados.

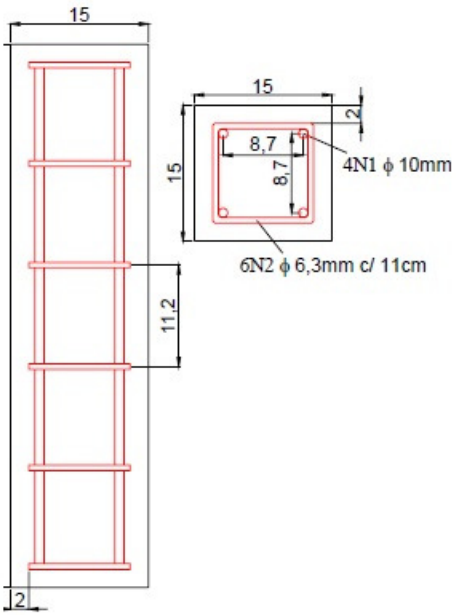


Figura 4.17 - Armação do pilar (KATAOKA, 2010)

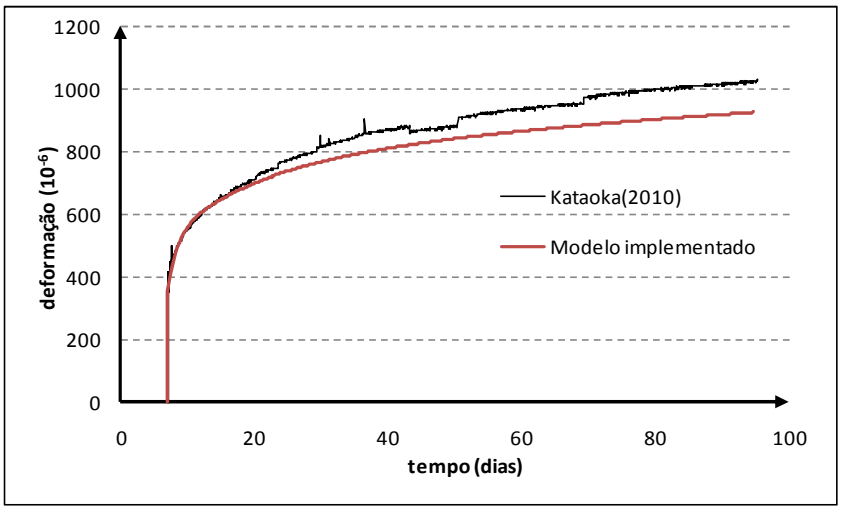


Figura 4.18 - Fluência por secagem – Ensaio pilar 40%f_{cm7} (KATAOKA, 2010) e Modelo implementado

A deformação imediata do ensaio foi de 350,11x10^{-6} e do modelo implementado de 352,48x10^{-6}. A diferença entre os dados da figura 4.18, até o instante de análise, chegou a 10,5%.

Algumas conclusões podem ser observadas dessas análises:

- O aplicativo desenvolvido nesta tese consegue fazer previsão de fluência, segundo modelos de normas, em estruturas submetida a força axial.

- O pilar com armação, por ser mais rígido, deforma menos que o pilar sem armação. Aparentemente a armação restringe a deformação lenta, como pode ser visto nas respostas das figuras 4.16 e 4.18. O pilar sem armação apresenta, aos 91 dias, uma diferença de 24,4% enquanto o pilar com armação a 10,5% em relação aos resultados teóricos.
- Apesar dos exemplos 01 e 02 considerarem corpo-de-prova e elemento estrutural pilar, respectivamente, os resultados analíticos são iguais, pois os dados que alimentam as funções de fluência são os mesmos, inclusive o fator que leva em consideração a variação de geometria entre elementos, ou seja, a espessura equivalente.
- Comparando os dados de ensaio do pilar sem armação e analíticos no exemplo 02, foi observada uma diferença grande. Uma explicação para isso se deve ao fato que os modelos de previsão de fluência são calibrados a partir de resultados de corpos-de-prova cilíndricos.

5 ANÁLISE EXPERIMENTAL DE UM PÓRTICO EM MICROCONCRETO ARMADO

Este capítulo apresenta o programa experimental para a construção de um pórtico em modelo reduzido em microconcreto armado, que se resume: na fabricação da fôrma; confecção do microconcreto, que consiste na dosagem, moldagem e cura; instrumentação por sensores elétricos; força aplicada; sistema de monitoramento de dados.

No estudo experimental de peças estruturais de concreto armado são comuns resultados experimentais de vigas e pilares, mas ensaios de pórticos são escassos, cujo principal obstáculo é o espaço necessário para sua realização. Para suprir a necessidade de resultados experimentais, foi desenvolvido um pórtico esbelto, de forma que pudesse ser estudada a não linearidade geométrica. O pórtico possui elementos estruturais de 6cmx6cm de seção transversal e 142cm de altura, cujo índice de esbeltez do pilar é 71,59. Não foi utilizado concreto convencional, porque para se obter a mesma esbeltez seriam necessárias peças com medidas de 15cmx15cm de seção transversal com altura de 310 cm e forças de grande intensidade.

5.1 MICROCONCRETO

Na moldagem do pórtico foi utilizado um microconcreto, obtido pela mistura mecânica de um aglomerante (cimento Portland) com um material inerte (areia) e água. A areia é definida por frações granulométricas, com predominância da fração mais grossa. O diâmetro máximo da fração mais grossa identifica o tipo do microconcreto. Assim um microconcreto 4,8 possui agregado com diâmetro máximo de 4,8mm, que passa na peneira 4,8mm e fica retido na 2,4mm. O agregado desse microconcreto é composto por frações retidas nas peneiras 2,4; 1,2; 0,6; 0,3 e 0,15. A figura 5.1 apresenta essas frações.

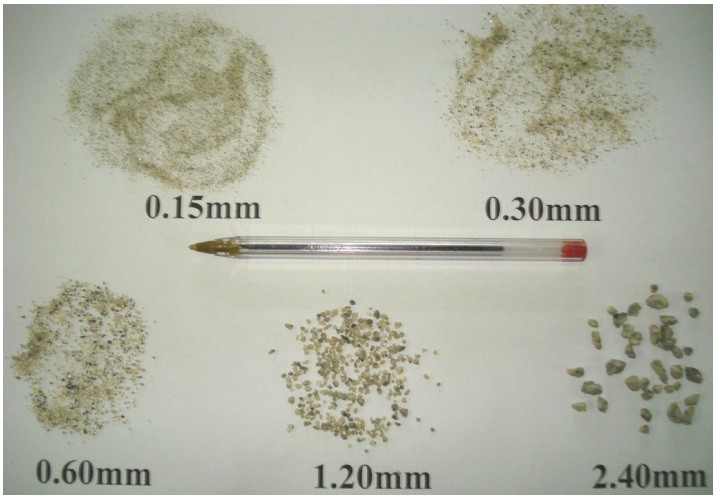


Figura 5.1 - Frações granulométrica da areia para o microconcreto 4,8mm

No estudo do comportamento de estruturas por meio de modelos reduzidos, o microconcreto se apresenta como um material adequado para execução de microestruturas. Para que o microconcreto seja um material semelhante ao concreto, é necessário que propriedades físicas como: o módulo de deformação longitudinal, resistência à compressão e à tração, diagrama tensão-deformação sejam compatíveis com a do concreto.

No item 5.1.1 apresenta-se um procedimento de moldagem sugerido por Klein (1985) e Martins (1990), o qual foi seguido neste experimento.

5.1.1 Método de dosagem do microconcreto

O microconcreto fabricado segundo métodos apropriados possui semelhança reológica com o concreto estrutural (MARTINS, 1990). A composição adequada dos agregados pode minimizar os vazios da mistura, atribuindo máxima compacidade e, consequentemente, maior resistência. De acordo com Klein (1985) o método de Gorisse adotado neste trabalho é o que melhor se ajusta ao microconcreto.

Devido ao pequeno espaço a ser preenchido pelo microconcreto a trabalhabilidade torna-se a propriedade mais importante desse material fresco (KLEIN 1985). Vários fatores

influenciam nessa propriedade, como a relação água/cimento, a relação água/materiais secos, a granulometria e a natureza dos agregados, a forma do grão, o tipo do cimento, o procedimento de mistura, o tipo de adensamento, o cobrimento das peças, as dimensões das armaduras e das peças. Os passos a seguir servem de base para a dosagem do microconcreto.

– Inicialmente é preciso definir o diâmetro máximo do microconcreto, que depende das dimensões e cobrimento das peças e do diâmetro e disposição das armaduras. O diâmetro máximo do microconcreto define a sua nomenclatura.

– Resistência média à compressão do microconcreto aos 28 dias calculada pela equação 5.1, segundo a ABNT NBR 12655:2006,

$$f_{cj} = f_{ck} + 1{,}65\, S_d \tag{5-1}$$

sendo que:

f_{cj} é a resistência média do concreto à compressão, prevista para a idade de j dias, no caso desse experimento j = 28 dias, resistência em *MPa*;

f_{ck} é a resistência característica à compressão do concreto em *MPa*;

S_{d} é o desvio padrão da dosagem, em MPa.

– A relação água/cimento pode ser definida a partir da curva de Abrams, traçada para o tipo de cimento e da resistência à compressão do microconcreto aos 28 dias. Esse fator é a variável mais importante no estudo das propriedades do microconcreto fresco e está diretamente ligado à resistência à compressão.

– A relação água/materiais secos (H) relaciona a quantidade de água total empregada na mistura do microconcreto com a trabalhabilidade. A lei de Lyse, diz que essa relação praticamente independe do traço para uma dada trabalhabilidade, (equação 5.2),

$$a = \frac{100x}{H} - 1 \tag{5-2}$$

sendo que:

x é o fator água/cimento;

H é o fator água/materiais secos.

A tabela 5.1 apresenta valores de H, para diferentes microconcretos.

Tabela 5.1 - Valores de H (KLEIN, 1985)

Microconcreto (mm)	H(%)
4,8	10,0
2,4	10,9
1,2	13,0

– Cálculo do consumo de cimento, feito a partir da equação 5.3,

$$C = \frac{1000}{\frac{1}{\gamma_c} + \frac{a}{\gamma_a} + x} \tag{5-3}$$

sendo:

C = consumo de cimento por metro cúbico de concreto (kg/m^3);

x = relação água/cimento, massa de água por massa de cimento;

a = traço em massa de agregado na mistura;

γ_c = massa específica do cimento (kg/dm^3);

γ_a = massa específica do agregado (kg/dm^3).

– As frações da granulometria do microconcreto são definidas de acordo com o método de Gorisse, que consiste na determinação de uma curva bilinear com os pontos, A(0,15, 0), B(X, 100-Y) e C($d_{máx}$, 100). A figura 5.2 mostra esse gráfico, cujo eixo das abscissas corresponde à abertura das peneiras em milímetro e o das ordenadas à percentagem de cada fração dos agregados.

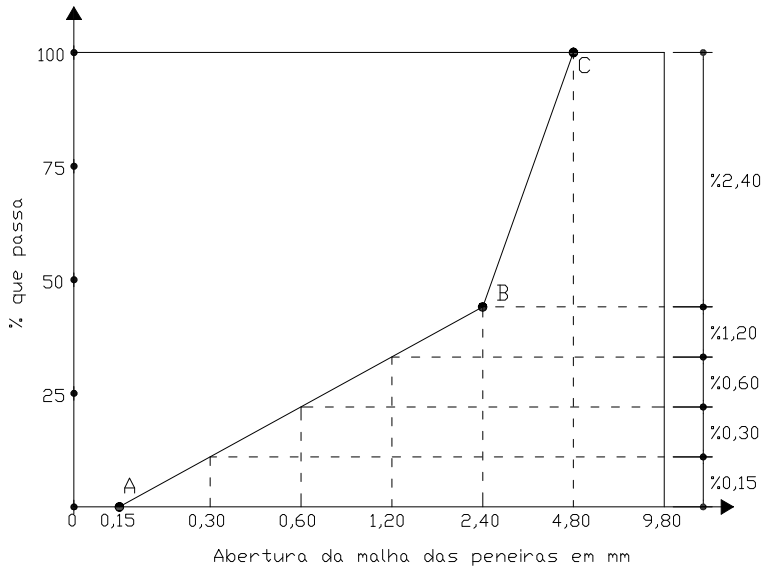


Figura 5.2 - Curva granulométrica de Gorisse para o microconcreto 4,8 (KLEIN, 1985)

A curva bilinear simplificada acima, foi proposta por Gorisse (1972). O ponto B é definido pelas equações 5.4 e 5.5,

$$X = \frac{d_{máx}}{2} \tag{5-4}$$

$$Y = 50 - \sqrt{d_{máx}} + K \tag{5-5}$$

sendo:

$d_{máx}$ = diâmetro máximo do agregado;

K = parâmetro de correção. K depende do consumo do cimento, definido pela tabela 5.2.

Tabela 5.2 - Valores de K (KLEIN, 1985)

Consumo de cimento em kg/m^3	K
600	-10
550	-8
500	-6
450	-4
400	-2
350	0
300	+2

5.2 METODOLOGIA DO ENSAIO

Neste item é estabelecida a metodologia utilizada para a dosagem, moldagem e cura dos corpos-de-prova e do protótipo feitos em microconcreto. Também são especificados os procedimentos adotados para a construção e monitoramento do pórtico, que inclui a montagem da fôrma, armação, instrumentação, aquisição de resultados experimentais e carregamento.

5.2.1. MATERIAIS EMPREGADOS NO MICROCONCRETO

Os materiais para confecção do microconcreto foram fornecidos pela empresa Engemix. Para compor a granulometria necessária do agregado foi preciso misturar brita 0 do Grupo Embu S.A da unidade Perus SP e areia de brita tipo II da Votorantim Cimento Brasil S.A de Araçariguama SP. No anexo A estão detalhados os ensaios de caracterização física desses dois agregados.

Utilizou-se o cimento CPII-E-40 Votorantim Cimento Brasil S.A da unidade Santa Helena.

5.2.2. DOSAGEM, MOLDAGEM E CURA

Os detalhes para confecção do pórtico são listados abaixo.

a) Dosagem

A composição do microconcreto foi obtida a partir do item 5.1 e da suposição de alguns parâmetros, que estão definidos nos passos abaixo:

- Diâmetro máximo do agregado = 4,8mm;
- Resistência média à compressão, aos 28 dias igual a 36,6MPa. (valor obtido admitindo-se $f_{ck} = 30MPa$ e desvio padrão de 4,0. Esses valores são substituídos na equação 5.1);
- A partir do f_{c28}, da curva Abrams e do cimento CPII obtém-se a relação água/cimento que deveria ser 0,45. Entretanto, para aumentar a trabalhabilidade, foi definida uma relação de 0,5;
- A relação água/materiais secos (H) foi considerada igual a 10%, (definida na tabela 5.1);
- Para o cálculo do consumo de cimento foi adotada uma massa específica do cimento igual a 2,62kg/dm^3 e do agregado igual a 3,15kg/dm^3. Aplicando a expressão 5.3 chega-se ao valor do consumo de cimento de 426,59kg/m^3;
- A composição dos agregados foi calculada de acordo com o método de Gorisse, que consiste na definição do gráfico da figura 5.2, sendo necessário o cálculo de $X = \frac{4,8}{2} = 2,4mm$, com K = -3,06 (obtido na tabela 5.2) e de Y= 44,74%. Com os quais se obtém a composição do agregado em percentagem: 55,22% dos agregados que passam na peneira 4,8mm e ficam retidos na 2,4mm; 11,186% passa na 2,4mm e retido na 1,2mm; 11,186% passa na 1,2mm e retido na 0,6mm; 11,186% passa na 0,6mm e retido na 0,3mm e 11,186% passa na 0,3mm e retido na 0,15. A tabela 5.3 detalha o traço do microconcreto.

Tabela 5.3 - Traço do microconcreto

Materiais		Traço		Consumo (kg/m^3)
	Cimento	1	1	426,59
Agregados	2,40	2,2102		942,84
	1,20	0,4475		190,88
	0,60	0,4475	4	190,88
	0,30	0,4475		190,88
	0,15	0,4475		190,88
	Água	0,5	0,5	213,29 litros

Foi utilizado como procedimento de preparo o recomendado pela norma ABNT NBR 7215:2009 adequada para argamassa. Inicialmente é colocada toda água e cimento na cuba, misturando-os em velocidade baixa por 30s. Após esse tempo e com o misturador ainda na velocidade baixa, colocam-se os agregados em aproximadamente 30s. Imediatamente após a colocação dos agregados, dá-se continuidade a mistura na velocidade alta, durante 60s. Depois o misturador é desligado e mantido assim por 2min. Nos primeiros 30s remove-se o microconcreto que fica aderido no fundo da cuba, com auxílio de uma espátula, no tempo restante o microconcreto deve ficar em repouso, com a cuba coberta com pano úmido. Logo após esse intervalo liga-se o misturador na velocidade alta por 2min. É preciso registrar o instante que o cimento entra em contato com a água.

Foram feitas três massadas com 7,6 litros cada, para se obter o volume necessário da moldagem do protótipo e dos corpos-de-prova destinados à caracterização do microconcreto no estado endurecido. Os índices de consistência obtidos em cada moldagem foram de 245mm, 250mm e 250mm. A figura 5.3, apresenta o misturador e a mesa para o ensaio de índice de consistência.

Figura 5.3 - Misturador e mesa para índice de consistência

b) Moldagem

Com a finalidade de adotar o mesmo critério de moldagem, foi criada uma plataforma de madeira para fixar a fôrma do pórtico, os corpos-de-prova e os prismas de retração, como é visto na figura 5.4. O adensamento foi feito inicialmente com um soquete e aplicados vinte golpes em cada uma das três camadas no microconcreto do pórtico, dos corpos-de-prova e dos prismas de retração. Em seguida, foi usado um vibrador de agulha nas paredes das fôrmas e, finalmente, a mesa vibratória por 6 segundos.

a) Moldagem com soquete **b)** Moldagem com vibrador

Figura 5.4 - Moldagem do pórtico, corpos-de-prova e prismas de retração

c) Cura

A cura úmida de todas as peças estruturais foi feita por 25 dias. Após esta data, as peças foram mantidas em temperatura e umidade ambiente até 33 dias. Inicialmente toda estrutura foi envolvida por um plástico, (figura 5.5). Depois de três horas o pórtico, os corpos-de-prova e os prismas de retração foram cobertos por panos úmidos e mantidos assim por 18 horas. Passadas 24 horas da concretagem, todo o conjunto foi colocado na câmara úmida, (figura 5.6). Depois de quatro dias de permanência na câmara úmida foi feita a desfôrma dos corpos-de-prova, das laterais do pórtico e dos prismas de retração. Após a desfôrma, todas as peças permaneceram na câmara úmida por mais 20 dias. Aos 25 dias, as peças foram retiradas da câmara úmida e mantidas em temperatura e umidade ambiente por um período de 8 dias.

Figura 5.5 - Cura inicial

Figura 5.6 - Cura na câmara úmida

5.2.3. FÔRMA E ARMAÇÃO

Junto com o pórtico foram fixados três prismas de 6cmx6cmx30cm para ensaio de retração e 18 corpos-de-prova cilíndricos de 5cmx10cm. A partir desses corpos-de-prova foram caracterizadas a resistência à compressão, resistência à tração e o módulo de elasticidade do microconcreto. Para que houvesse o mesmo critério de moldagem, foi desenvolvida uma plataforma rígida de madeira, onde se fixaram os prismas, os corpos-de-prova e o próprio pórtico, como apresenta a figura 5.7.

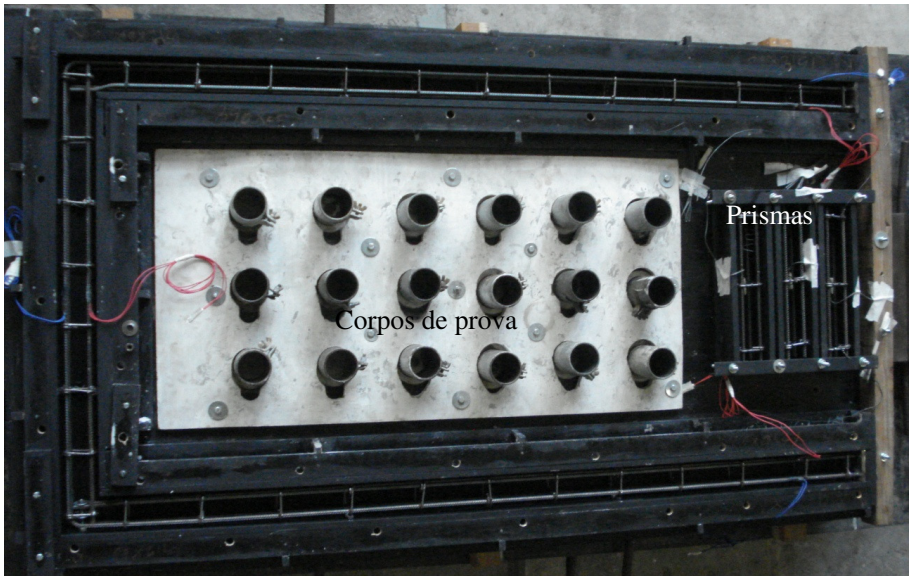


Figura 5.7 - Fôrma para o pórtico, prismas e corpos-de-prova

Os dois pilares e a viga foram armados com quatro barras longitudinais de ϕ6,3mm e estribos de ϕ3,4mm espaçados de acordo com a figura 5.8. O cobrimento adotado é de 5mm e as barras longitudinais estão posicionadas em relação a face externa do pilar de 11,55mm.

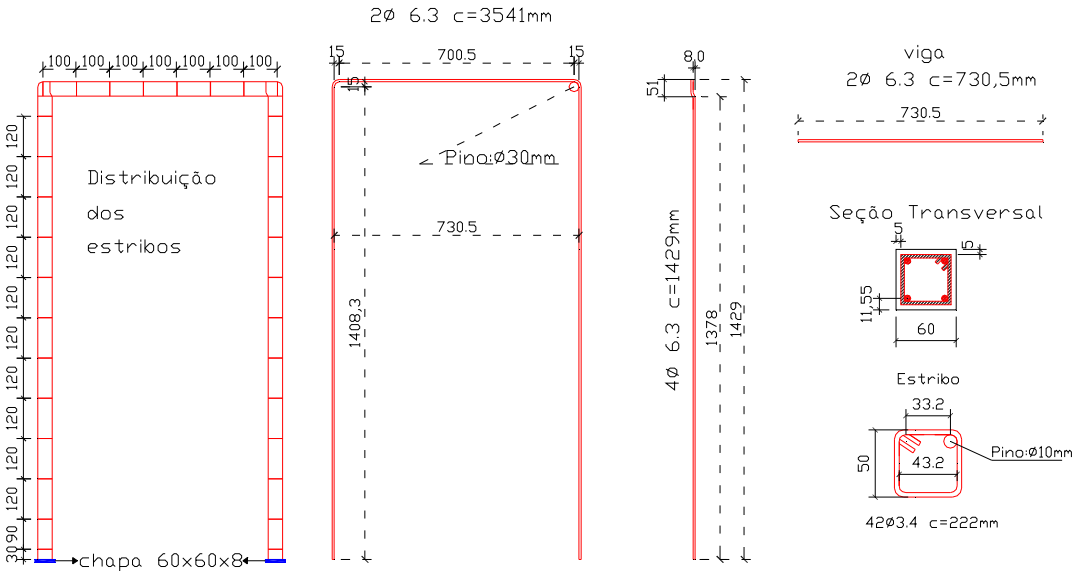


Figura 5.8 - Armação do pórtico (mm)

O mesmo critério de armação, cobrimentos, localização da armadura longitudinal, espaçamento entre estribos e diâmetros das barras foi adotado para os prismas de retração.

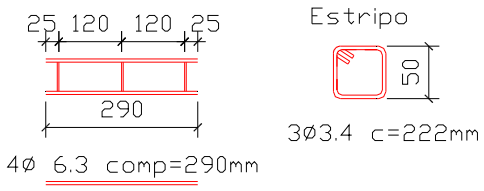
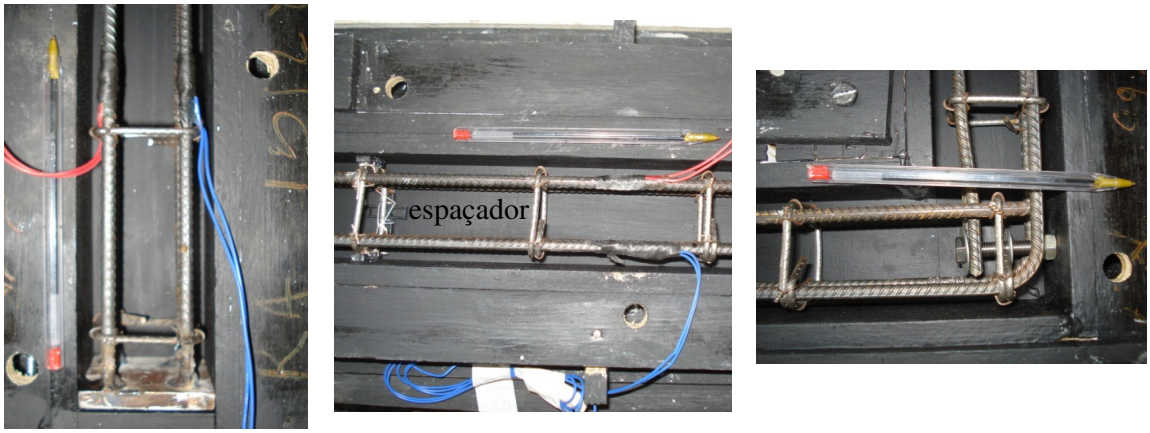


Figura 5.9 - Armação do prisma de retração (mm)

Na figura 5.10 é possível notar alguns detalhes importantes para montagem da armação. A figura 5.10a corresponde à base do pilar, onde está localizada a placa metálica de 60mmx60mmx8mm para fixação do pórtico no aparelho de apoio e pode ser observado o posicionamento das barras longitudinais e dos estribos. Também é possível notar a localização de dois extensômetros elétricos fixados na armadura longitudinal. Na figura 5.10b pode ser vista a parte central da viga. Nesta figura é destacado o espaçador de 5mm usado em todo o pórtico. Na figura 5.10c tem-se o nó do pórtico, onde foi posto um parafuso para aplicação da força horizontal.

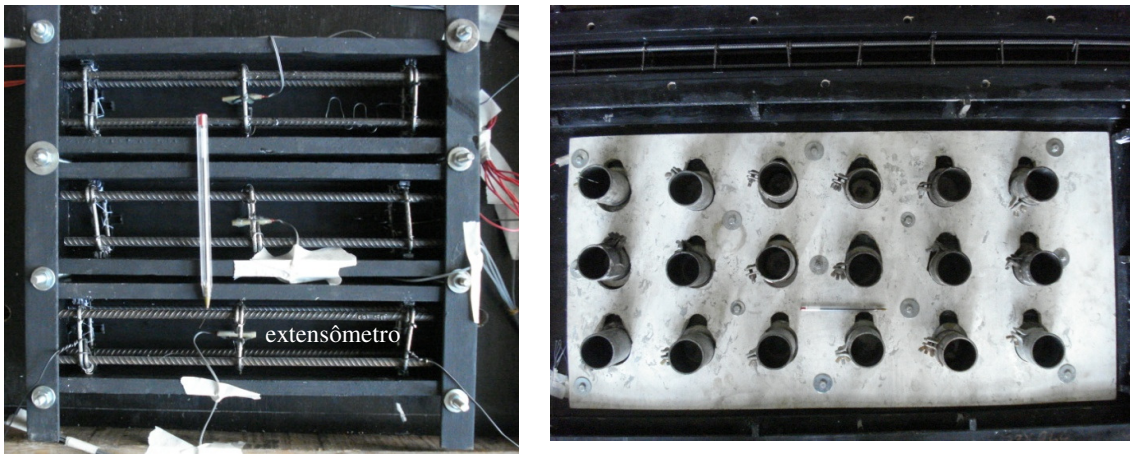


a) base do pilar **b) espaçador** **c) parafuso**

Figura 5.10 - Detalhes da fôrma e armação

Para que os prismas pudessem representar a retração do pórtico, foi adotada, para os prismas, a mesma a armação e a mesma seção transversal do pórtico. No centro de cada prisma foi instalado um extensômetro elétrico da marca Kyowa tipo KM-30-120-H1-11,

para monitorar o seu encurtamento, como pode ser visto na figura 5.11a. A figura 5.11b mostra os corpos-de-provas fixados para serem moldados juntos com o pórtico.



a) prismas para medir a retração **b) corpos-de-prova cilíndricos**

Figura 5.11 - Prismas de retração e corpos-de-prova

5.2.4. INTRUMENTAÇÃO E SISTEMA DE AQUISIÇÃO

O pórtico foi monitorado com sensores elétricos para monitoramento das deformações. Três seções transversais foram instrumentadas com extensômetros instalados nas armaduras e no concreto (figura 5.12), sendo os extensômetros denominados E1, E2, E5, E7 e E8 fixados nas armaduras e os denominados E3, E4, E6, e E9 instalados na superfície do concreto.

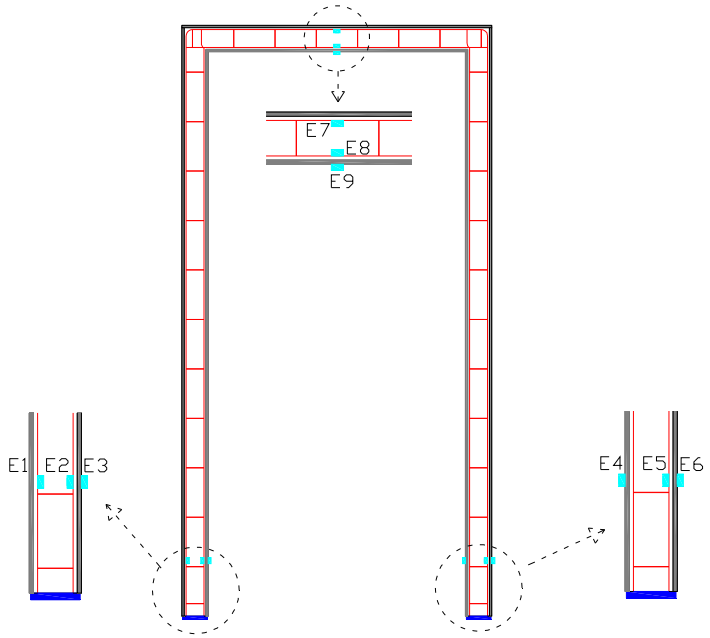


Figura 5.12 - Instrumentação do pórtico

Para monitorar os deslocamentos do pórtico foram instalados quatro transdutores de deslocamentos: três na horizontal (D1, D2 e D4) e um na vertical (D3), mostrados na figura 5.13. Os transdutores D1 e D4 são indutivos, do fabricante HBM, com cursos de 50mm e 20mm respectivamente e D2 e D3 são resistivos, do fabricante GEFRAN, com 50mm de curso.

Figura 5.13 - Transdutores de deslocamentos

Três prismas de retração de 60mmx60mmx300mm foram instrumentados com extensômetro para concreto. Esse extensômetro é encapsulado e apropriado para ser posicionado no interior do elemento estrutural (figura 5.14).

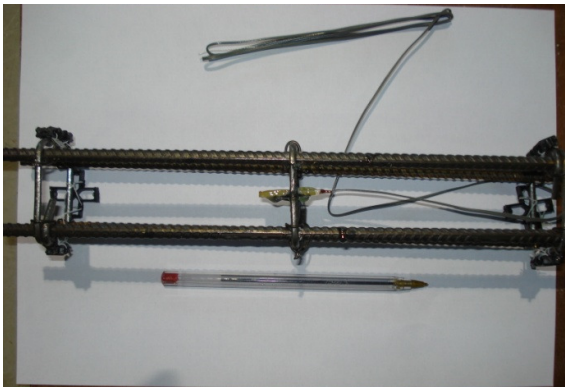


Figura 5.14 - Prismas de retração instrumentado

Dois extensômetros elétricos de resistência, (figura 5.15), foram utilizados na pesquisa: o encapsulado KM-30-120-H1-11 para imersão no concreto com dimensão longitudinal de 30mm e o KFG-10-120-C1-11 de colagem em armadura com dimensão longitudinal de 10mm. Esses dois sensores são fabricados pela empresa Kyowa.

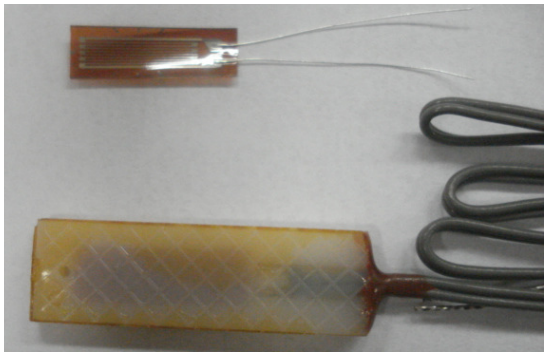


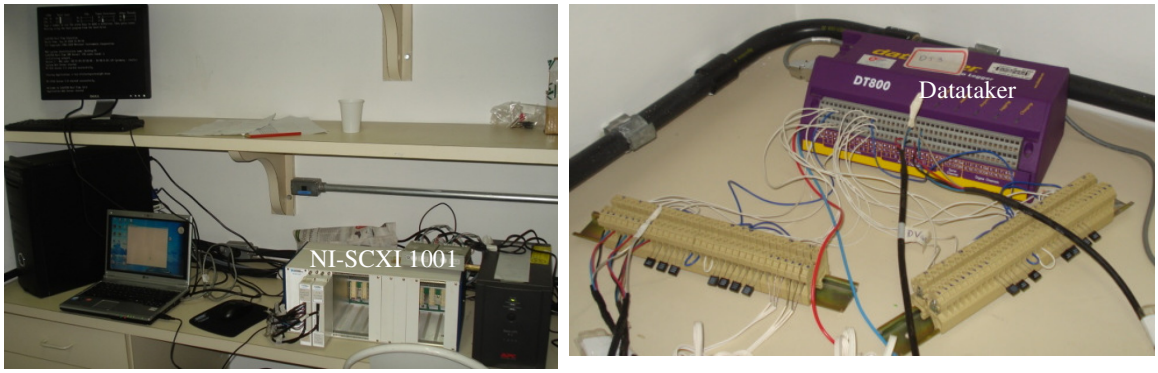
Figura 5.15 - Extensômetros elétricos

O monitoramento foi feito por meio de dois sistemas de aquisição: NI-SCX1 1001 da empresa National Instruments que monitorou sensores E4, E5, E6, E7, E8, E9, D1 e D4 e DT800 da empresa da DataTaker que monitorou os sensores E1, E2, E3, E10, E11, E12, D2 e D3.

O sistema NI-SCX1 1001 requer o desenvolvimento de um aplicativo, na linguagem de programação LabVIEW, que faça a comunicação entre o SCX1 1001 e o computador, assim como o tratamento de sinais em tempo real e a respectiva gravação dos dados em instantes pré-estabelecidos. LABVIEW é uma linguagem de programação gráfica que utiliza ícones, em vez de linhas de texto, para criar aplicações. Ela utiliza uma programação baseada em fluxo de dados que determina sua execução.

O sistema DT800 tem uma linguagem própria com comandos em linhas de texto. As instruções são transferidas para o DT800 a partir de um programa computacional denominado DTransfer 3.27, instalado em um computador. Como o DT800 dispõe de memória interna e bateria, não há a necessidade da comunicação com o computador durante o monitoramento.

Conforme inicialmente planejado, o uso de dois sistemas de aquisição tinha como objetivo garantir a confiabilidade das medições, caso houvesse falha em um dos sistemas. Devido a um defeito na bateria que fornece energia ao sistema DT800, que aconteceu nos primeiros dias de monitoramento, todos os dados referentes aos sensores instalados nesse sistema foram perdidos.



a) sistema de aquisição NI **b) sistema de aquisição DATATAKER**

Figura 5.16 - Sistemas de aquisição

5.2.4.1 Aquisição, tratamento e gravação dos dados

A aquisição, tratamento e gravação dos dados foram feitos de três fôrmas diferentes, cuja finalidade foi representar a resposta da estrutura com quantidade adequada de informações sob boa qualidade metrológica. De acordo com essa premissa foi adotado o seguinte procedimento: desde o instante do carregamento, ocorrido no dia 01/12/2010 às 13h57min, até 16h57min do mesmo dia, a aquisição e gravação foram feitas com taxa de amostragem de 1000Hz (mil amostras por segundo). A partir desse instante e até o dia 04/12/2010 às 11h17min a taxa de amostragem passou a ser de 100Hz, sendo que os dados foram gravados com taxa de 1 dado por minuto. Depois dessa data, até o final do ensaio, a aquisição permaneceu em 100Hz, mas a gravação mudou para 1 dado por hora.

Para as duas taxas de amostragem acima, os sinais obtidos foram filtrados, em tempo real, com filtros digitais Butterworth de 04 polos, do tipo passa-baixa ("low pass") e com frequência de corte de 4Hz. Este procedimento permitiu visualizar corretamente a resposta quase-estática, eliminando-se eventuais perturbações dinâmicas e introduzindo condições favoráveis de relação sinal-ruído.

O cronograma a seguir resume as principais atividades do ensaio e as respectivas datas.

Tabela 5.4 - Cronograma do ensaio

Cronograma do ensaio		
Data	Tempo decorrido	Atividade
29/10/2010	0	moldagem e início da cura
30/10/2010	1	cura na câmara úmida
03/11/2010	5	desfôrma
23/11/2010	25	retirada da câmara úmida
01/12/2010	33	carregamento e início do monitoramento

5.2.5. POSICIONAMENTO E CARREGAMENTO DO PÓRTICO

O pórtico foi mantido na posição vertical com auxilio de dois braços metálicos providos de duas roldanas, as quais impediam a rotação e o tombamento e deixavam livre o deslocamento horizontal. Na base de cada pilar foi colocada uma placa metálica de 60mmx60mmx8mm,

que se fixou ao aparelho de apoio. Duas forças foram aplicadas: uma vertical no centro da viga e outra horizontal no extremo da viga. Esta força horizontal provocou um deslocamento inicial e direcionou o comportamento do pórtico ao longo do ensaio. Para que não houvesse variação de força ao longo do tempo foram adotadas cargas permanentes. A figura 5.17 ilustra alguns detalhes do pórtico.

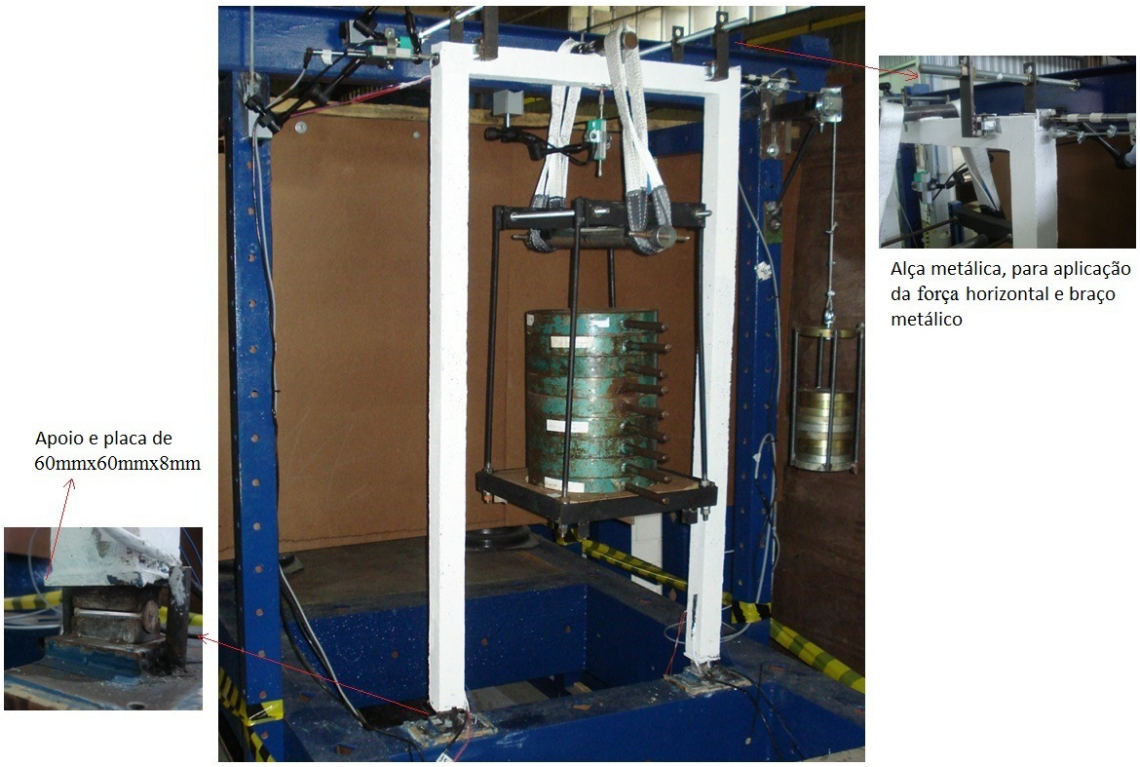


Figura 5.17 - Visão Geral do Pórtico

A figura 5.18 apresenta o aparelho de apoio, que impede a translação no plano do pórtico, deixando livre a rotação. Esse apoio foi fixado na base do pilar.

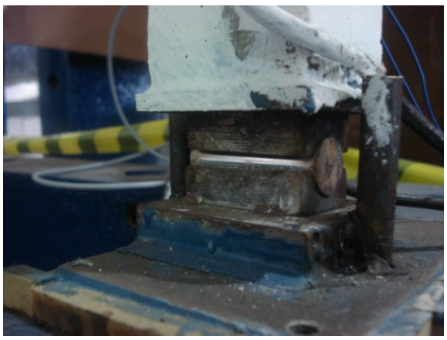


Figura 5. 18 – Aparelho de apoio

Na figura 5.19 é visto o braço metálico necessário para manter o pórtico no plano vertical, a alça metálica fixada no nó do pórtico, onde foi aplicada a força horizontal e o tubo metálico posicionado no vão central da viga para aplicação da força vertical.

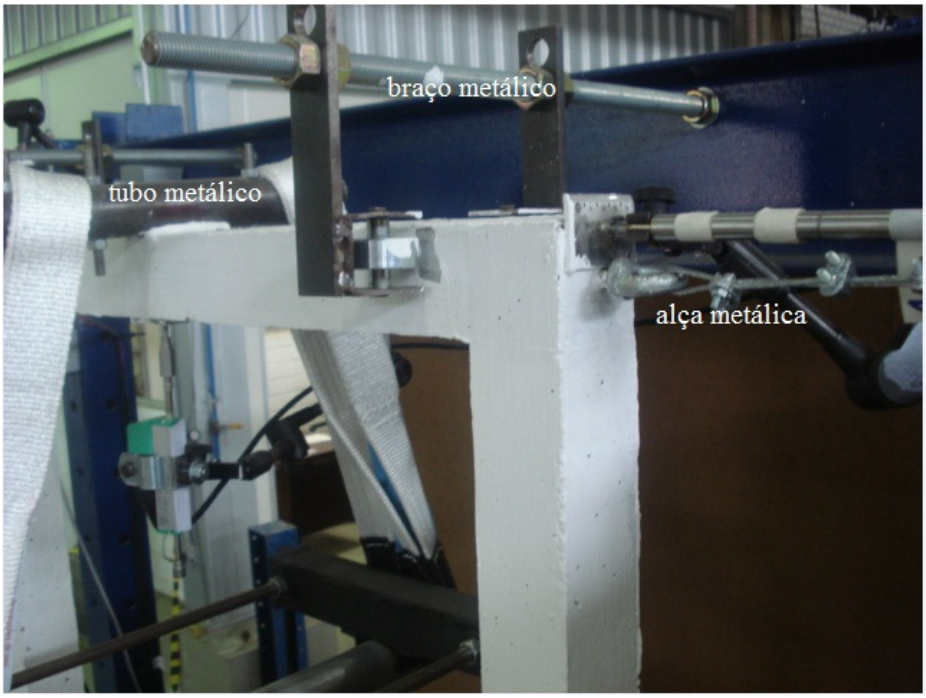


Figura 5. 19 – Detalhes das aplicações das forças e posicionamento vertical

O pórtico foi carregado aos 33 dias após a moldagem. Como o carregamento necessário para ensaio foi pequeno, optou-se por carga permanente. Assim eliminou-se a preocupação comum em ensaios de longa duração, que é a variação do carregamento.

Tanto o carregamento vertical, quanto horizontal foi composto por discos metálicos dispostos em suportes. Estes discos foram colocados sincronizando a aplicação entre carga vertical e horizontal. O carregamento foi aplicado durante aproximadamente um minuto, totalizando 2459,5N e 317,0N para as forças vertical e horizontal, respectivamente. A figura 5.20 ilustra essas duas forças.

Figura 5.20 - Carregamento vertical à esquerda e horizontal à direita

A figura 5.21 ilustra detalhes das dimensões do pórtico em milímetros, assim como e as posições e valores dos carregamentos.

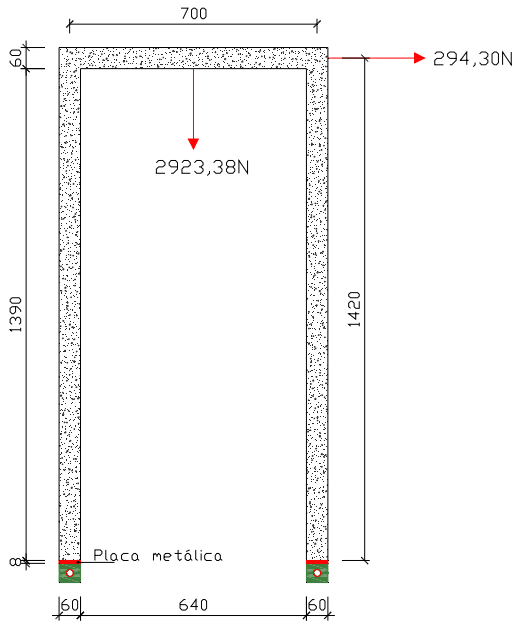


Figura 5. 21 - Vista do pórtico, dimensões em milímetro

6 RESULTADOS E ANÁLISE DO ENSAIO EXPERIMENTAL

Neste capítulo são apresentadas as propriedades do microconcreto no estado endurecido, os dados referentes à medição de umidade e temperatura do ambiente durante o período de ensaio e os resultados do monitoramento das deformações e deslocamento horizontal do topo do pórtico. Esses dados são analisados e comparados com os resultados numéricos obtidos a partir do aplicativo desenvolvido neste trabalho. As deformações analisadas referem-se à seção próxima a base do pilar direito.

Como mencionado no capítulo 5, o pórtico foi carregado aos 33 dias após sua moldagem e os dados apresentados correspondem a 125 dias de ensaio.

6.1 PROPRIEDADES MECÂNICAS DO MICROCONCRETO

As propriedades mecânicas do microconcreto foram obtidas de corpos-de-prova cilíndricos de dimensões 5cmx10cm. Os valores da resistência à compressão, resistência à tração por compressão diametral e módulo de elasticidade definidos na tabela 6.1, correspondem à média de pelo menos três valores e no máximo cinco. A resistência à tração foi determinada segundo a, ABNT NBR 7222:2010.

Tabela 6.1 - Propriedades mecânicas do microconcreto

Propriedades Mecânicas (MPa)	Idade (dias)	
	28	33
Resistência média à compressão	45,46	42,46
Resistência média à tração	-	3,28
Módulo de elasticidade	46020	45890

O módulo de elasticidade apresentado na tabela 6.1 corresponde ao módulo de elasticidade dinâmico, obtido a partir da velocidade de propagação de onda ultrassônica (ultra-som), calculado pela equação 6.1,

$$E = \frac{V^2 \rho (1+\nu)(1-2\nu)}{(1-\nu)} \tag{6-1}$$

sendo que:

- E é o módulo de elasticidade dinâmico (GPa);
- V é a velocidade do pulso ultrassônico (km/s);
- ρ é a densidade aparente (g/cm3);
- ν é o coeficiente de Poisson.

Segundo a ABNT NBR 6118:2007 o coeficiente de Poisson para o concreto pode ser considerado igual a 0,2. Substituindo esse valor na equação 6.1, chega-se a:

$$E = 0{,}9 V^2 \rho \tag{6-2}$$

6.2 UMIDADE E TEMPERATURA

A umidade e a temperatura foram registradas a partir do equipamento, DHT-2270 da Perceptec, mostrado na figura 6.1. Esse equipamento permitiu o armazenamento de dados durante instantes pré-definidos "data logger". Neste trabalho, foi feita a programação do equipamento para armazenar os dados a cada meia hora. O equipamento foi localizado próximo ao pórtico.

Figura 6.1 - Equipamento para medição de umidade e temperatura

Na figura 6.2 é apresentada a variação da temperatura durante o ensaio, notando-se a temperatura oscilando principalmente entre 23 ^{o}C a 27 ^{o}C. A média da temperatura nos 125 dias foi de 24,8 ^{0}C.

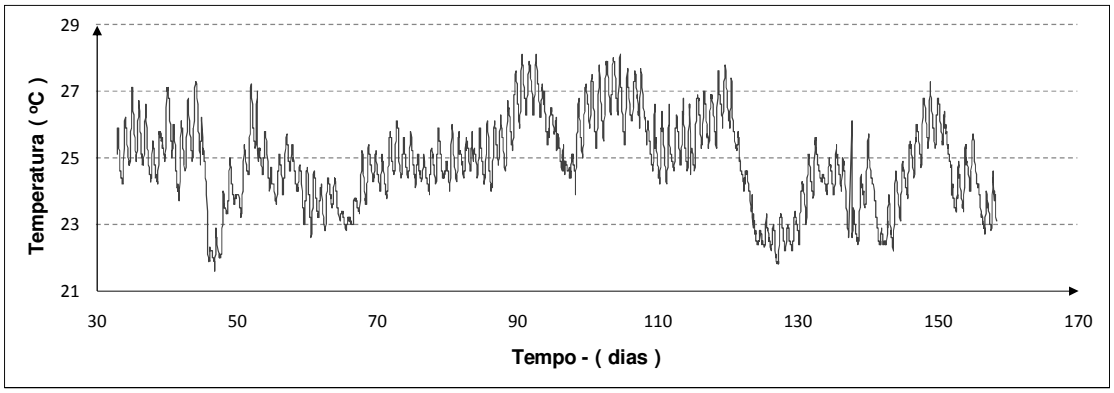


Figura 6.2 - Temperatura durante o ensaio do pórtico

Como eram esperadas, as variações da umidade relativa foram superiores às da temperatura e correspondiam a uma umidade média de 72,8%. A figura 6.3 apresenta essa variação.

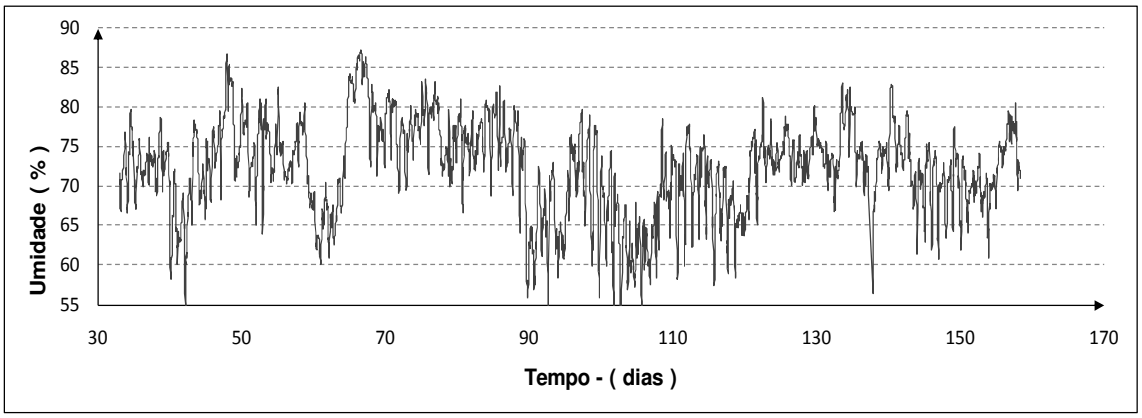


Figura 6.3 - Umidade durante o ensaio do pórtico

6.3 RESULTADOS DO MONITORAMENTO DO PÓRTICO

A figura 6.5 apresenta os resultados do monitoramento das deformações durante 125 dias de ensaio. Essas deformações correspondem aos extensômetros E4, E5 e E6, localizados em uma seção próxima ao apoio do pilar direito, como está indicado na figura 6.4.

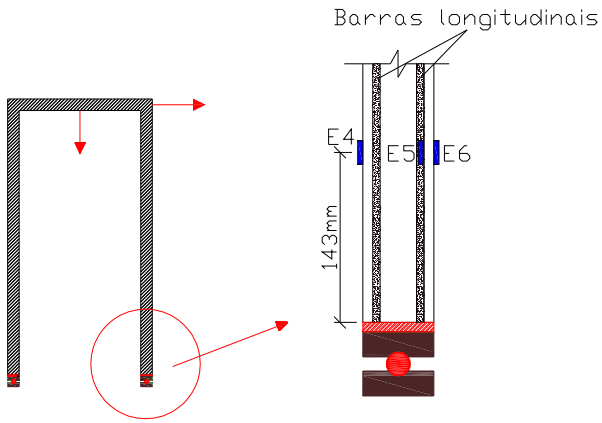


Figura 6.4 - Detalhe da posição dos extensômetros na base do pilar

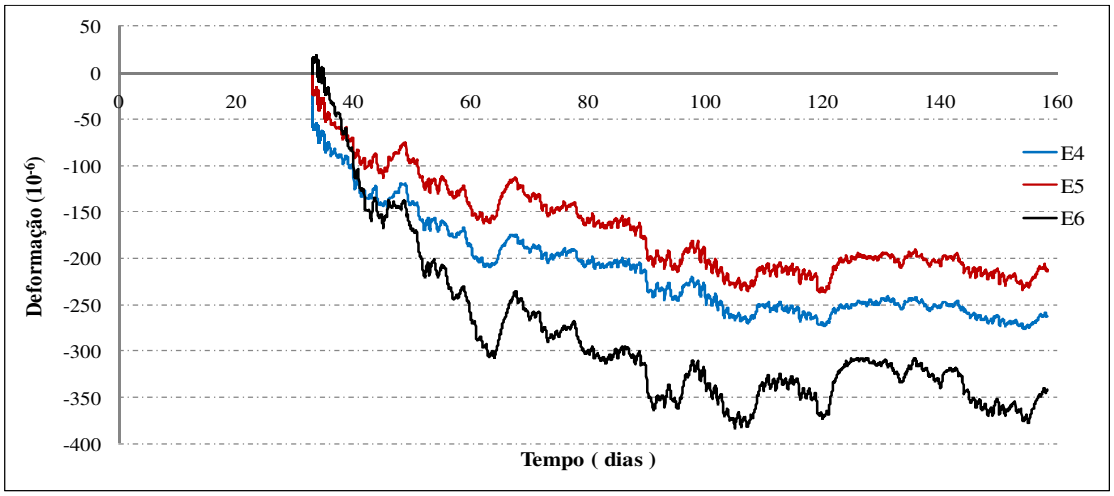


Figura 6.5 - Deformações na base do pilar(Início aos 33 dias e 125 dias de ensaio)

A aplicação do carregamento pode ser identificada a partir das deformações no primeiro minuto do ensaio. Como as forças vertical e horizontal eram compostas por discos metálicos, nota-se que as deformações aumentaram de forma gradativa e aplicadas em aproximadamente 50 segundos, como mostra a figura 6.6.

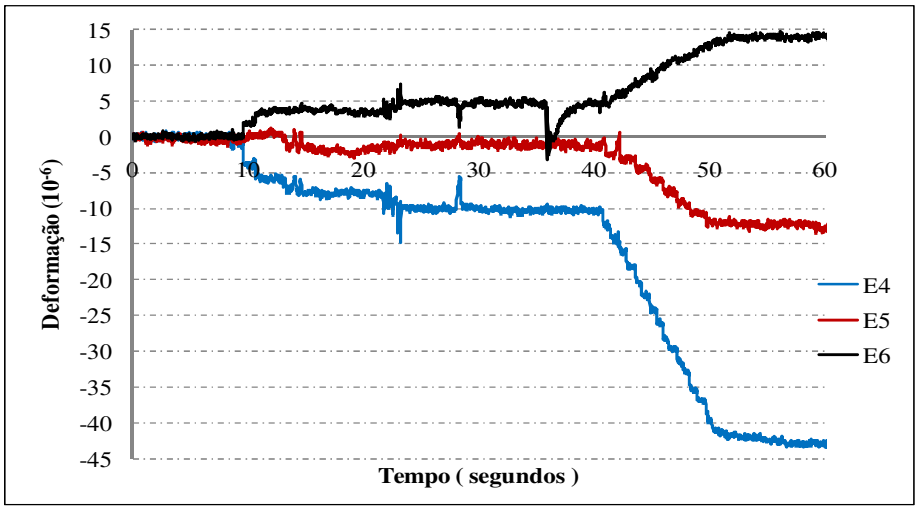


Figura 6.6 - Deformações na base do pilar (no instante do carregamento)

A deformada da figura 6.7 mostra que a face externa do pilar direito, correspondente a posição do extensômetro E6 e está submetida a um menor encurtamento. No entanto esse extensômetro inicia tracionado e passa a ser o mais comprimido da seção, ver figura 6.5.

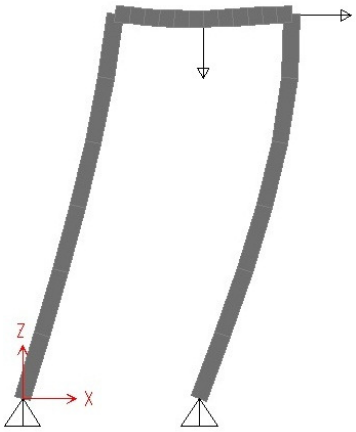


Figura 6.7 - Deformada do pórtico bi-apoiado

Representando o campo de deformação para diversas etapas, a figura 6.8 mostra que a distribuição das deformações na seção transversal não é linear, devido ao valor da deformação no extensômetro E6. Por esse motivo foi decidido desconsiderar os resultados do extensômetro E6, assim o campo de deformações passou a ser definido pelos extensômetros E4 e E5, como está indicado na figura 6.9.

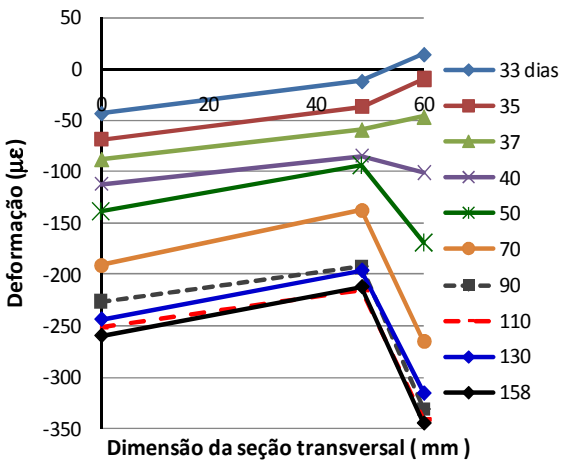


Figura 6.8 – Campo de deformação Experimental

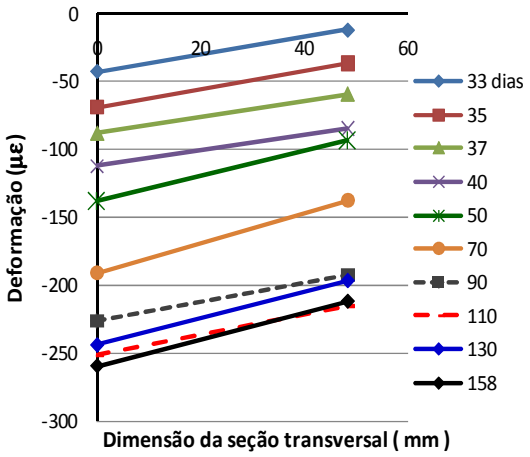


Figura 6.9 – Campo de deformação Experimental

Os campos de deformações da figura 6.9, mostraram que a deformação lenta pouco influenciou na mudança da curvatura ao longo do ensaio, ocorrendo somente uma translação.

De acordo com os campos de deformações em cada instante (figura 6.9), foram calculadas as deformações para o extensômetro E6. Assim as deformações nos três extensômetros ficaram representadas pela figura 6.10. A análise numérica será comparada com essas deformações.

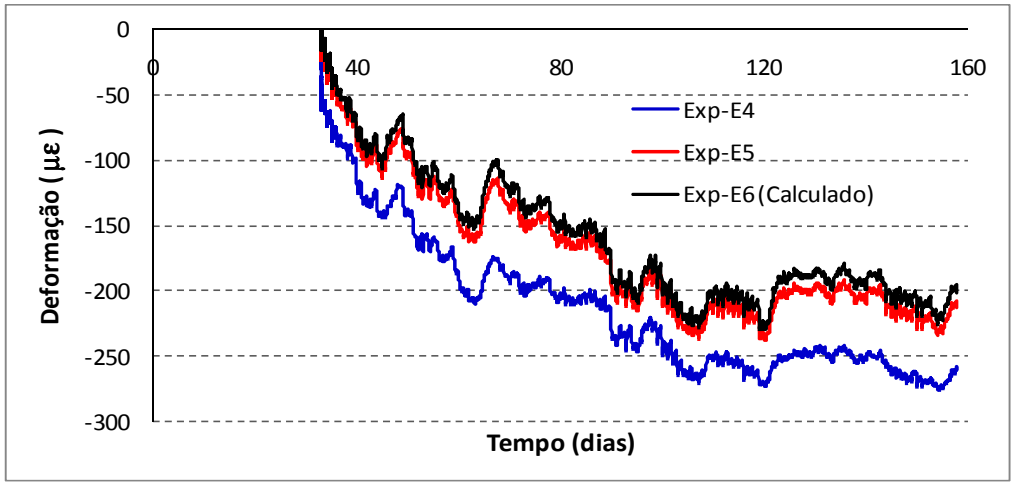


Figura 6.10 - Deformações na base do pilar, E6 calculado. (33 a 125 dias de ensaio)

A figura 6.11 mostra a grande influência da umidade sobre as deformações na base do pilar, essa influência está diretamente relacionada à sua geometria. Nessa figura pode-se verificar, de forma quase imediata, que a diminuição da umidade provoca um aumento no

encurtamento no elemento estrutural detectado pelos três extensômetros, como pode ser visto nas regiões “b” e “c”. O contrário também acontece, pois quando há aumento da umidade, ocorre um alongamento, mostrado nas regiões “a” e “d”.

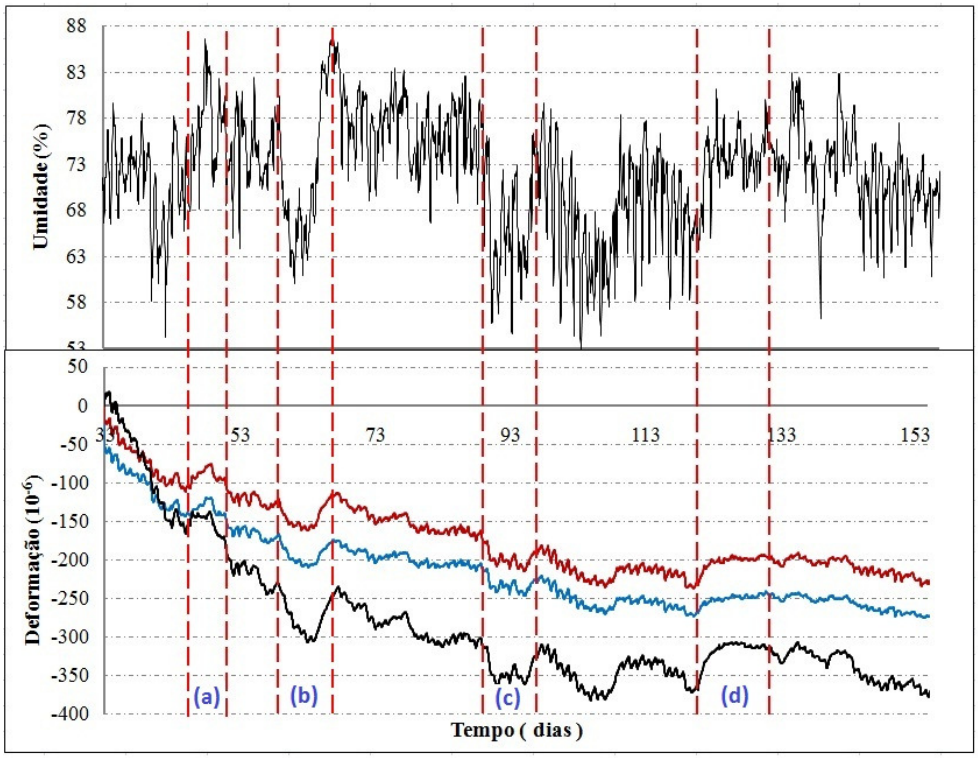


Figura 6.11 - Comparação entre a deformação e a umidade

O deslocamento horizontal na parte superior do pórtico, ao longo do ensaio, foi obtido a partir de dois transdutores de deslocamentos, posicionados em cada extremo da viga. A figura 6.12 apresenta duas curvas de deslocamentos ao longo do tempo, uma para cada transdutor, localizado em cada extremo da viga. Nessas curvas nota-se que os resultados são bem próximos, o que denota que os resultados encontrados são coerentes.

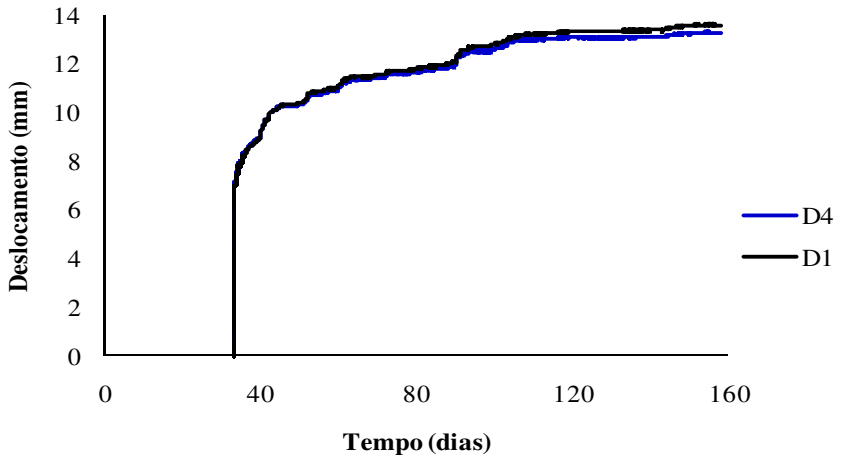


Figura 6.12 - Deslocamento ao longo do ensaio

6.4 ANÁLISE NUMÉRICA E COMPARAÇÃO COM OS RESULTADOS EXPERIMENTAIS

O pórtico foi modelado com 38 elementos finitos de barra, sendo 15 elementos em cada pilar e 8 elementos na viga. Sua seção transversal foi subdividida com 12 lamelas. A análise foi separada em duas etapas, uma imediata referente à aplicação do carregamento e a outra ao longo do tempo. Na primeira foi feita análise não linear física e geométrica, com a consideração do concreto comprimido a partir do diagrama linear, com módulo de elasticidade igual a 45890 MPa. A tração do concreto foi simulada de acordo com o diagrama bilinear da ABNT NBR 6118:2007, com resistência à tração do concreto igual a 3,28 MPa.

Na etapa ao longo do tempo foi feita a previsão da fluência por secagem, a partir de funções de fluências obtidas do MC CEB-FIP 2010. Nessa etapa, o concreto sob compressão também foi adotado forças de comportamento linear e o módulo de elasticidade foi modificado à medida que o concreto envelhecia. Já a tração não é considerada e as lamelas tracionadas foram eliminadas em cada etapa de tempo.

As funções de fluência foram geradas para o concreto com resistência à compressão aos 28 dias igual a 45,46 MPa, temperatura média de 24,8 ^{o}C e umidade relativa do ar igual a 72,8%.

A análise numérica foi desenvolvida segundo o modelo da figura 6.13, um pórtico biapoiado submetido a duas cargas concentradas, uma vertical e outra horizontal.

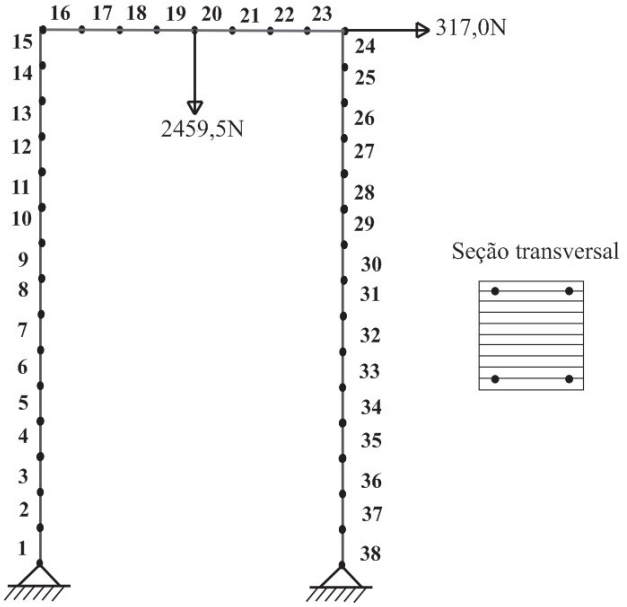


Figura 6.13 - Pórtico discretizado

A tabela 6.2 apresenta um quadro comparativo entre alguns dados experimentais e os calculados a partir do aplicativo desenvolvido nesta pesquisa, no instante da aplicação do carregamento. São comparados o deslocamento no topo do pilar e as deformações, correspondentes às posições dos extensômetros localizados próximos à base do pilar direito. A figura 6.4 mostra a localização dos extensômetros.

Tabela 6.2 - Comparação entre os resultados experimentais e numéricos

Resultados	Experimental	Modelo numérico
Deslocamento no topo do pórtico (mm)	7,0	6,1
Deformação - E4 (10^{-6})	-43,0	-50,0
Deformação – E5 (10^{-6})	-12,0	-16,6
Deformação – E6 (10^{-6})	14,0	- -
Deformação calculada – E6 (10^{-6})	-4,6	-9,9

O modelo numérico, adotado para simular o comportamento do pórtico no instante da aplicação do carregamento, gerou resultados próximos aos experimentais, tanto para o

deslocamento no topo do pórtico quanto às deformações na base do pilar, a menos da deformação no extensômetro E6.

Eliminando o resultado da deformação no extensômetro E6, por não ser compatível com uma distribuição linear e, calculando seu valor de acordo com a reta definida pelos extensômetros E4 e E5, obtém-se o novo campo de deformação experimental. Esse campo é próximo ao campo de deformação numérico, como está indicado na figura 6.14.

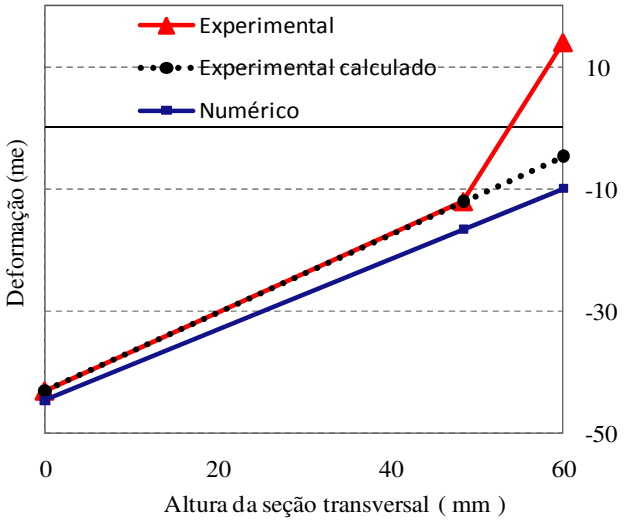


Figura 6.14 – Distribuição das deformações

As deformações calculadas com o modelo numérico, relativa à fluência por secagem ao longo dos 125 dias de ensaio, estão representadas na figura 6.15 e os correspondentes campos de deformações para alguns instantes são mostrados na figura 6.16.

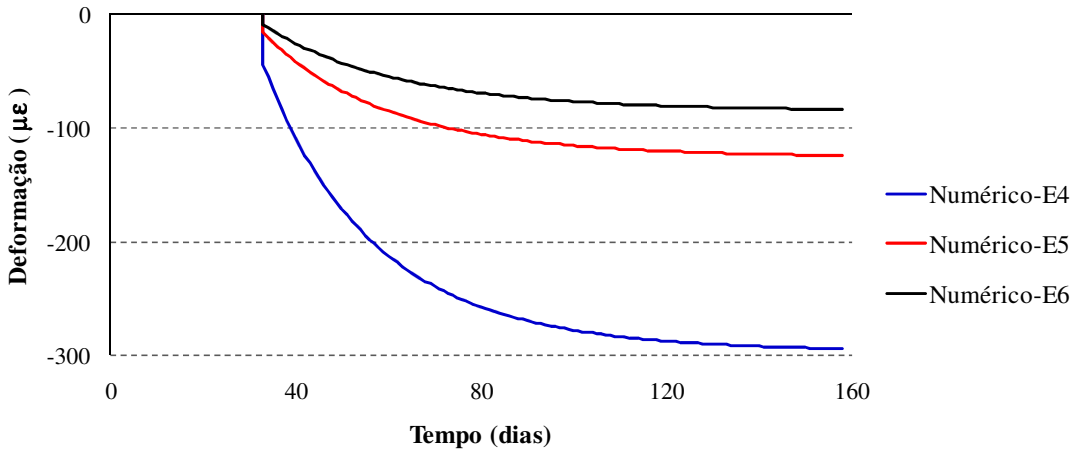


Figura 6.15 – Deformações numérica.ao longo dos 125 dias de ensaio

Comparando os campos de deformações numéricos com os experimentais da figura 6.9, observaram-se que as curvaturas dos campos de deformações experimentais praticamente não mudaram durante o ensaio, ao passo que as curvaturas dos campos de deformações numéricos aumentaram continuamente. Atribuiu-se esse aumento ao procedimento de eliminação das lamelas tracionadas durante a análise de tempo, o que tornou a estrutura menos rígida.

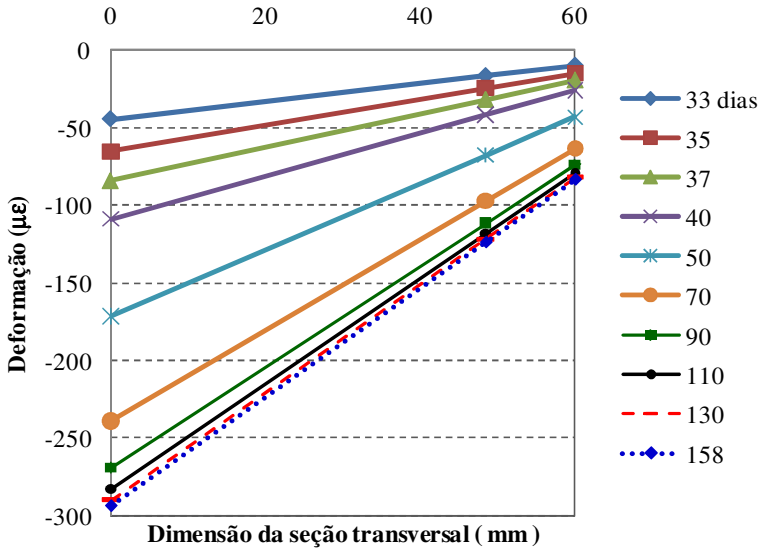


Figura 6.16 – Campos de deformações numéricos ao longo dos 125 dias de ensaio

Na figura 6.17 é feita a comparação entre os resultados experimentais das deformações e os obtidos numericamente. Nota-se nesses resultados que as curvas experimentais são

mais próximas entre si do que as curvas numéricas. Isso aconteceu porque as curvaturas experimentais, figura 6.9, pouco mudaram ao longo do ensaio, apenas ocorreram translações dos campos de deformações. No entanto, as curvaturas numéricas mudaram continuamente e geraram deformações distantes dos resultados experimentais.

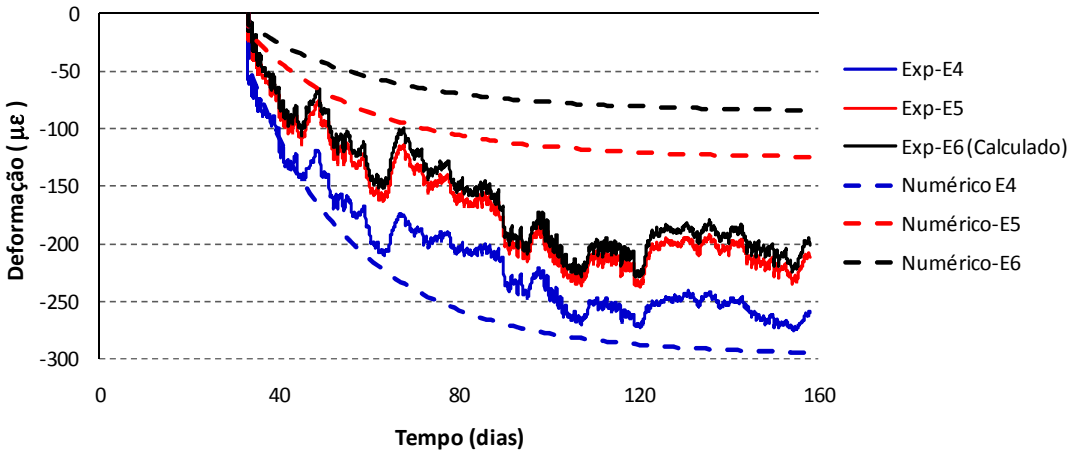


Figura 6.17 – Deformações numérica e experimental ao longo dos 125 dias de ensaio

As médias das deformações dos resultados experimentais e numéricos estão representadas na figura 6.18. Os dados numéricos correspondem à fluência por secagem e os experimentais à deformação total (retração e fluência por secagem). Aplicando a média dos resultados, é possível diminuir o efeito da variação das curvaturas dos resultados numéricos. A partir das respostas da figura 6.18, percebe-se que o aplicativo desenvolvido neste trabalho consegue prever a fluência por secagem em estruturas planas de concreto armado.

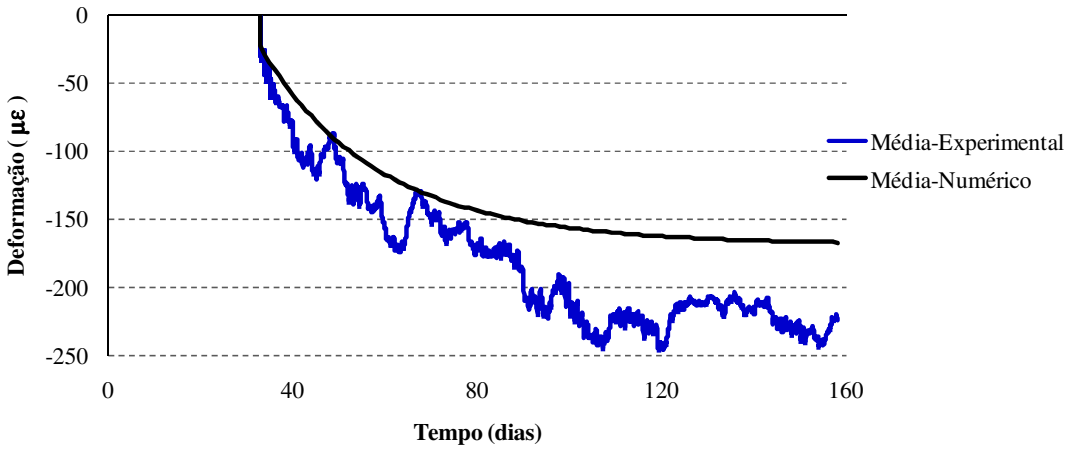


Figura 6.18 – Média das deformações numérica e experimental ao longo dos 125 dias de ensaio

A comparação dos deslocamentos numéricos e experimentais está indicada na figura 6.19. Devido à perda de rigidez durante a etapa de tempo, os deslocamentos numéricos obtidos são maiores do que os experimentais, em aproximadamente 15%.

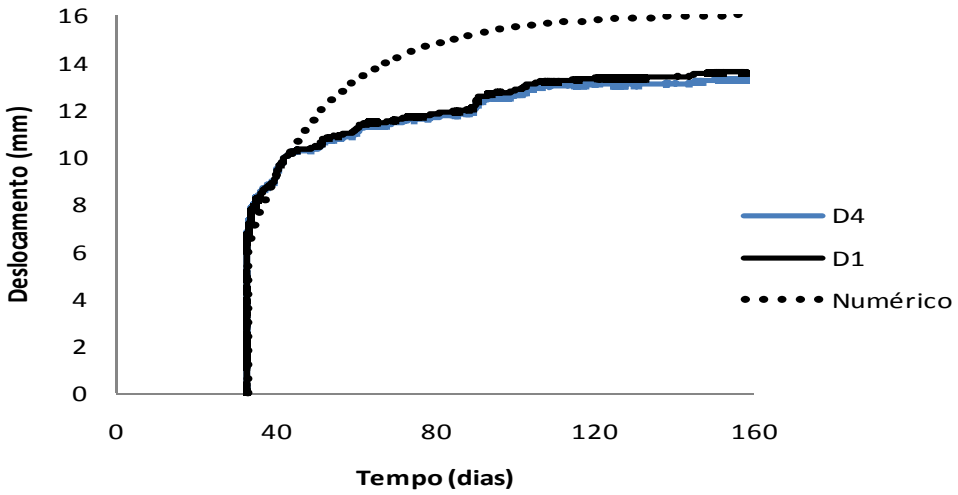


Figura 6.19 – Comparação dos deslocamento experimentais e numéricos

7 CONCLUSÃO

Apesar da fluência no concreto ser uma das causas de patologias em estruturas de concreto armado e protendido, os programas utilizados para o dimensionamento e detalhamento dessas estruturas, não inclui esse fenômeno nos cálculos. Além disso, são escassos os ensaios de fluência em elementos estruturais, submetidos à flexo-compressão.

Nesse sentido, esta pesquisa desenvolveu um aplicativo que usa elemento finito de barra, para analisar estruturas planas em concreto armado, com a consideração do efeito de segunda ordem e da previsão de fluência, com pequeno custo computacional. Esse aplicativo foi validado a partir de exemplos.

- **Validação do aplicativo**

As subrotinas, que fazem análise não linear física, a partir do método das lamelas e a não linearidade geométrica, pela descrição corrotacional, foram validadas pelo exemplo do item 3.6. Nesse exemplo, os resultados obtidos por esta tese tiveram um ajuste perfeito com os resultados fornecidos por Araripe (1998), que usou a descrição lagrangiana total, para representar a não linearidade geométrica e o método das lamelas para representar a não linearidade física.

A previsão de fluência foi validada, a partir do exemplo do item 4.4.2. A deformação calculada, ao longo do tempo, é muito próxima das funções de fluência utilizadas para calibrar o modelo de Maxwell em camadas.

- **Exemplo de aplicação para força imediata**

No aplicativo desenvolvido neste trabalho foram implementados os modelos constitutivos parábola-retângulo e linear para representar a compressão do concreto. A tração foi simulada através do modelo bilinear da ABNT NBR 6118:2007.

Esses modelos constitutivos são insuficientes para simular o comportamento de elementos estruturais submetidos à ruína. No exemplo do item 3.6.2, a linha neutra não muda de posição do início do ensaio até o final, pois a tração no concreto não é considerada. Se fosse considerada a tração do concreto e a contribuição do concreto entre fissuras (efeito "tension-stiffening"), a viga perderia rigidez à medida que fissurasse e, consequentemente, a resposta força-deslocamento seria representada por uma curva e não por uma reta, como mostra a figura 3.20.

- **Exemplo de aplicação para fluência**

A partir da comparação entre os resultados gerados pelo aplicativo e os ensaios de Kataoka (2010), correspondente ao o item 4.4.3, tem-se:

- Em virtude da intensidade de tensão aplicada no ensaio, foi usado o modelo constitutivo linear para o concreto. Isso permitiu adotar o módulo de elasticidade obtido no ensaio, na análise durante a etapa de carregamento;
- A comparação entre os exemplos 02 (pilar curto de concreto simples) e 03 (pilar curto em concreto armado), reforça a tese de que a deformação lenta é afetada pela taxa de armadura;
- Apesar dos exemplos 01 e 02 considerarem corpo-de-prova e elemento estrutural pilar, respectivamente, os resultados analíticos são iguais, pois os dados que alimentam as funções de fluência são os mesmos, inclusive o fator que leva em consideração a variação de geometria entre elementos, ou seja, a espessura equivalente. Uma explicação para isso se deve ao fato de que os modelos de previsão de fluência são calibrados a partir de resultados de corpos-de-prova cilíndricos.

Nos três exemplos analisados, foram aplicadas forças axiais. Desta forma conclui-se que esse aplicativo faz previsão de fluência em elementos de concreto armado submetido a esse tipo de carregamento.

- **Programa experimental**

Os cuidados relacionados a seguir foram de grande importância para viabilizar o ensaio:

- Fabricação precisa da fôrma e armação, garantindo as dimensões dos elementos estruturais do modelo reduzido;
- Estudo de traço para definição do microconcreto;
- Nivelamento do pórtico com auxílio de um teodolito;
- Uso de dois sistemas de aquisição para o monitoramento dos dados. O sistema de aquisição DataTaker falhou no primeiro dia de aquisição.

- **Resultados experimentais**

Não foi possível fazer a comparação entre os resultados obtidos pelos dois sistemas de aquisição de dados, em virtude do problema de funcionamento do DataTaker no início do ensaio.

O sistema de aquisição NI SCXI (1001) e o programa de aquisição desenvolvido na linguagem LabVIEW, possibilitou o registro de pequenos valores de deformações e deslocamentos, o que contribuiu para o entendimento do comportamento do ensaio.

A partir da geração dos campos de deformações mostrados na figura 6.8, foi possível definir que os dados gerados pelo extensômetro E6 eram incorretos.

As deformações na base do pilar sofreram grande influência da umidade, isso está diretamente relacionada à geometria do pilar. Pôde-se verificar, de forma quase imediata, que a diminuição da umidade provocou um aumento no encurtamento dos três extensômetros.

O modelo numérico, adotado para simular o comportamento do pórtico no instante da aplicação do carregamento, gerou resultados próximos aos experimentais, tanto para o

deslocamento no topo do pórtico, quanto às deformações na base do pilar, com exceção da deformação no extensômetro E6.

As deformações experimentais ao longo do tempo nas posições dos extensômetros foram mais próximas entre si do que as deformações numéricas. Isso aconteceu porque as curvaturas experimentais praticamente não mudaram ao longo do ensaio, apenas ocorreram translações dos campos de deformações. No entanto, as curvaturas numéricas mudaram continuamente e geraram deformações distantes dos resultados experimentais.

A análise numérica ao longo do tempo foi feita considerando somente o concreto comprimido. A cada nova interação de tempo as lamelas tracionadas eram eliminadas e a rigidez diminuía. Como consequência as curvaturas aumentaram ao longo do tempo gerando deslocamentos maiores do que os experimentais.

Aplicando a média nos resultados das deformações, foi possível diminuir o efeito da variação das curvaturas nos resultados numéricos. Com isso, os dados numéricos ficaram mais próximos dos experimentais A partir dessas médias, percebe-se que o aplicativo desenvolvido neste trabalho consegue prever a fluência por secagem em estruturas planas de concreto armado.

Os erros que ocorreram no ensaio do pórtico seriam evitados se fosse feito inicialmente um ensaio teste.

7.1 SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Incluir na formulação o efeito da retração, atuando conjuntamente com a fluência.

Estender o estudo para o concreto protendido incluindo a relaxação do aço.

Estudar o processo evolutivo das construções, com a consideração do efeito da fluência e retração em cada etapa construtiva, pois esses fenômenos são mais significativos nos primeiros meses.

Representar matematicamente a reversibilidade da fluência e retração do concreto, quando ocorre o descarregamento das estruturas.

Transformar a formulação de 2D para 3D e modificar a discretização da seção transversal de lamelas para filamentos, estendendo a análise para estruturas submetidas à torção.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE (ACI), ***Building core requiremensts for structural concrete (ACI 318-05) and commentary (ACI 318R-05),*** Detroit, 2004.

ALMEIDA, L. C. ***Identificação de parâmetros estruturais com emprego de análise inversa.*** Tese (Doutorado) – Faculdade de Engenharia Civil, Arquitetura e Urbanismo da Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2006.

ARARIPE, M. A. F.. ***A não linearidade física e geométrica em pórticos planos de concreto armado***. (Dissertação de Mestrado). ITA, São José dos Campos, 1998.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) NBR 7222, ***Concreto e argamassa — Determinação da resistência à tração por compressão diametral de corpos-de-prova cilíndricos***, Rio de Janeiro, 2010.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) ABNT NBR 6118:2007, ***Projeto de estruturas de concreto – Procedimento***, Rio de Janeiro, 2007.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) NBR 12655, ***Concreto - Preparo, controle e recebimento***, Rio de Janeiro, 2006.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (ABNT) NBR 7215 Cimento Portland – Determinação da resistência à compressão, 1996.

ASSIS, W. A., ***Sistemas computacionais de apoio à monitoração de estruturas de engenharia civil.***. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

BAŽANT, Z. P. & WU, S.T. ***Rate-type creep law of aging concrete based on Maxwell chain. Matériaux et Constructions***, v.7, n.34, p. 45-60, 1974.

BAŽANT, Z. P., ***Prediction of concrete creep and shrinkage: past, present and future***. Nuclear Engineering and Design, p. 27-38, 2001.

BAŽANT, Z. P; LI, G.; YU, Q. ***Prediction of creep and shrinkage and their effects in the concrete structures: Critical appraisal***. In: 8TH INTERNATIONAL CONFERENCE ON CREEP, SHRINKAGE AND DURABILITY OF CONCRETE AND CONCRETE STRUCTURES, Japan, v.2, 2008, p. 1275-1289

BRADFORD M. A., GILBERT R. I., ***Time-dependent Analysis of reinforced concrete structures using the layered finite element method***, Structural Engineering and Mechanics, Vol. 8, No. 6, p. 561.-578, 1999.

BRESLER, B., and SCORDELIS, A. C. 1963!. ‘‘***Shear strength of reinforced concrete beams.***’’ J. Am. Concr. Inst., 60 (1), 51–72.

CARREIRA, J. D.; BURG, R. G. ***Testing for Concrete Creep and Shrinkage***. In: THE ADAM NEVILLE SYMPOSIUM: CREEP AND SHRINKAGE OF CONCRETE - STRUCTURAL DESIGN EFFECTS, Michigan, USA: Farmington Hills, 2000, p.381- 420.

CEB, “CEB-FIP Model Code 1974,” Comité Euro-International du Béton”, 1974.

CEB, “CEB-FIP Model Code 1990,” Comité Euro-International du Béton”, 1990.

CEB, “CEB-FIP Model Code 2010,” Comité Euro-International du Béton”, 2010.

CHIMELLO, A. A., ***Análise não linear de vigas de concreto armado reforçadas com laminados de PRFC***. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2003.

COLLINS, M. P.; MITCHELL, D.; MACGREGOR, J. G., ***Structural design considerations for high-strength concrete***, Concrete International, ACI, 27-34 p, may 1993.

COSTA NETO, R. C. F., Estudo ***Experimental da Fluência em Pilares Esbeltosde Concreto Armado,*** Dissertação em Estruturas, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro,2004.

CREUS, G. J. ***Viscoelasticity: basic theory and applications***. Berlin: Springer-Verlag, 1986. 169p.

CRISFIELD, M.A., “**Non-linear finite element analysis of solids and structures**”,Volume 1: Essential, John Wiley & Sons, Chichester, UK, 1991.

EUROCODE 2, ***Design of concrete structures:*** Part 1.1: General rules and rules for buildings, 2003.

EIVIND HOGNESTAD, ***A Study of Combined Bending and Axial Load in Reinforced Concrete Members***, Bulletin 399, University Engineering Experiment Station, Urbana, III., November 1951, 128 pp.

FAIRBAIRN, E. M. R.; LONGO, H. I. & ZHENG, R. **Formulação diferencial do problema da relaxação do concreto - estudo teórico experimental.** In: JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, 24, 1987, Porto Alegre. Anais. Porto Alegre: CPGEC/UFRGS, 1987, v.2, p. 103-117.

FERRAZ, A. C. M., ***Um modelo de análise para o estudo de pontes como estruturas evolutivas***. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil) – Faculdade de Engenharia da Universidade do Porto (FEUP), Portugal, 2001.

FUSCO, P. B., ***Estruturas de Concreto: Fundamentos do Projeto Estrutural***, Editora. McGRAW-HILLdo Brasil, São Paulo, 1976.

GARDNER, N. J.; TSURUTA, H. ***Is superposition of creep strains valid for concretes subjected to drying creep?*** ACI Materials Journal, v.101, n. 5, September-October, 2004.

GLISIC, B. P.; MING, L. J.; TAT, N. C.; INAUDI, D.; YEW, Y, T., ***Large scale lifespan monitoring of high-rise buildings using long-gauge fiber optic sensors***, The 3rd International Conference on Structural Health Monitoring of Intelligent Infrastructure, Vancouver, British Columbia, Canada, November 13-16, 2007.

GORISSE, Francis, ***Étude des Micro-Bétons pour Modèles de Structures***, Annales de L Institut Technique du Batiment et des Travanx Publics, Série: Béton. Béton Armé, n 120 PARIS. 1972.

HOWELLS, R. W.; LARK, R. J.; BARR, B. I. G. ***A sensitivity study of parameters used in shrinkage and creep prediction models.*** Magazine of Concrete Research, v.10, n. 57, p. 589-602, December, 2005.

KATAOKA, L. T., ***Análise da deformabilidade por fluência e retração e sua utilização na monitoração de pilares de concreto***, Tese - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2010

KLEIN, D. L., ***Microconcreto – Método de Dosagem***, Caderno Técnico, Curso de Pós-Graduação em Engenharia Civil – UFRGS**,** Abril 1985.

KIM, J. K & YANG , J. K., ***Buckling behavior of slender high-strength concrete columns***, Engineering Structures**,** Volume 17, Número 1, 1995.

KWAK, HG. & KIM, J. K., ***Time-dependent analysis of RC frame structures considering construction sequences***, Building and Environment 41 (2006) 1423-1434.

MACGREGOR, J.G., ***Reinforced concrete mechanics and design***, 3ª edição, USA, Prentice-Hall, 1997.

MACHADO, M. S., ***Aplicação do método dos elementos finitos para a análise elasto-viscoplástica de peças de concreto armado e protendido, submetidas a estados planos de tensão***,. Dissertação de Mestrado em Engenharia Civil – Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2002

MARTINS, A. R., ***Técnica experimental para aplicação de modelos de microconcreto.*** Tese de Doutorado. Universidade de São Paulo, 1990.

MARU, S.; ASFAW, M.; SHARMA, K. & NAGPAL, A. K., ***Effect of creep and shrinkage on RC frames with high beam stiffness***, JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING, Vol. 129, No. 4, p. 536-543, April 1, 2003

MARU, S.; ASFAW, M.; SHARMA, K. & NAGPAL, A. K., ***Effect of creep and shrinkage on RC frames with high beam stiffness***, JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING, Vol. 129, No. 4, p. 536-543, April 1, 2003

McGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. ***Matrix structural analysis*****.** 2nd ed. New York: Wiley, 2000.

MENIN, R.C.G., ***Aplicação da descrição cinemática corrotacional na análise não linear geométrica de estruturas discretizadas por elementos finitos de treliças, vigas e cascas,*** Tese de Doutorado em Estruturas e Construção Civil, Universidade de Brasília/DF, Brasil., 2006.

NEVILLE, A. M. ***Propriedades do concreto***. São Paulo: Pini, 1997.

NEWMAN, K.; NEWMAN J. B., ***Failure theories and design criteria for plain concrete***, Part 2 in M. Te' eni (ed.), ***Solid mechanics and engineering design***, Wiley-Interscience, New York, p. 83/1-83/33,1972.

OWEN, D. R. J. & HINTON, E, Finite ***element in plasticity: theory and practice***, Swansea, Pineridge Press, 1980.

PANDE, G. N.; OWEN. D. R. J. & ZIENKIEWICZ, O. C. **Overlay models in time-dependent non-linear material analysis**. Computers and Structures, v.7, n.3, p. 435-443, 1977.

PINTO, R. S. ***Análise não linear das estruturas de contraventamento de edifícios em concreto armado,*** Tese em Engenharia de Estruturas, São Carlos, EESC-USP, 2002.

PRATES JÚNIOR, N. P. ***Um modelo elasto-viscoplástico para análise de peças de concreto estrutural, submetidas a estados planos de tensão, através do método dos elementos finitos,*** Dissertação de mestrado em Engenharia Civil, Porto Alegre, CPGEC/UFRGS, 1992.

RAPHAEL, J. M., Tensile Strength of Concrete. ACI Journal, Proceedings, Vol. 81, N^0. 2, March-April 1984, pp. 158-165.

RITERMAYER, M. T., ***Estudo teórico-experimental do comportamento estrutural de uma ponte ferroviária em concreto armado***. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal do Pará, Belém/PA, Brasil, 2009.

RÜSCH, H, ***Researches toward a general flexural therory for structural concrete***, ACI Journal, July, 1960.

RÜSCH, H, CEB – International Course on Structural Concrete, Lisboa, 1973.

SANTOS, L. M., ***Cálculo de concreto armado***: segundo a nova NB-1 e o CEB., vol. 1, 2ª edição, São Paulo, ed. LMS, 1983.

SANTOS, L. M., ***Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado***, vol. 1, 2ª edição, São Paulo, ed. Thot, 1994.

SMITH, B. S., & COULL, A., ***Tall building structures: Analysis and design***, 1nd ed. New York, John Wiley & Sons, INC., 1991.

STRAMANDINOLI, R. S. B., ***Modelos de elementos finitos para análise não linear física e geométrica de vigas e pórticos planos de concreto armado***. Dissertação (Mestrado em Engenharia Civil), Universidade Federal de Santa Catarina, Florianópolis, Brasil, 2007.

TEIXEIRA, R. M., ***Estudo teórico-experimental do comportamento estrutural de uma ponte ferroviária em concreto armado***. (Dissertação de Mestrado).Universidade Federal do Pará, Programa de Pós-Graduação em Engenharia Civil, Belém-PA, 2009.

TQS Informática Ltda

VECCHIO, F. J. & COLLINS, M. P., ***The Modified Compression Field Theory for Reinforced Concrete Elements Subject to Shear***, ACI Journal Vol. 83, No. 2, pp. 219-231., 1986.

VECCHIO, F. J. & WONG, P. S., ***VecTor2 & FormWorks User's Manual***, 2002.

VECCHIO, F. J e SHIM, W., ***Experimental and Analytical Reexamination of Classic Concrete Beam Tests***, JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING, Vol. 130, No. 3, p. 460-469, March 1, 2004

YAMAMOTO, T., & VECCHIO, F. J., ***Analysis of Reinforced Concrete Shells for Transverse Shear and Torsion***, ACI Structural Journal, Vol. 98, No. 2, March-April 2001, pp. 191-200.

YSHII, Y.. ***Formulação corrotacional para pórticos planos***. (Dissertação de Mestrado). ITA, São José dos Campos , 2002.

ANEXO A – DADOS DOS AGREGADOS

Agregado – Brita 0

ENGEMIX

Votorantim | Cimentos

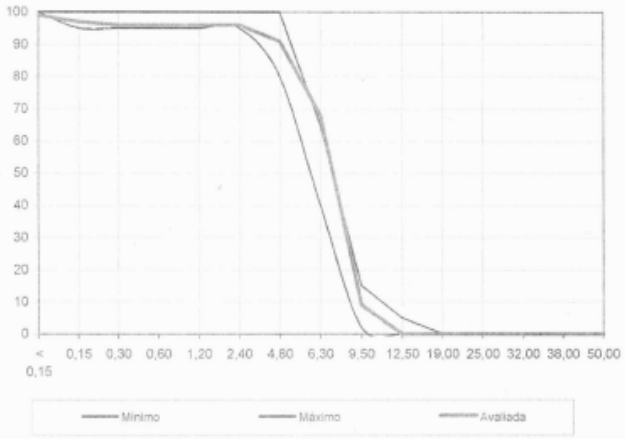
TECNOLOGIA

ENSAIOS FÍSICOS DE AGREGADOS

Relatório Nº.: 802

Interessado:		Ped. Ensaio Nº:	802
Cliente:	Jaguaré	Material:	BRITA O
Obra:		Fornecedor:	VCB - ARAÇARIGUAMA
Filial:	Jaguaré	Data da Coleta:	23/08/2010
		Data da Entrada:	27/08/2010

1 - Granulometria



ABERTURA	PORCENTAGEM	
(m m)	Retida (%)	Acumulada (%)
50,00	0	0
38,00	0	0
32,00	0	0
25,00	0	0
19,00	0	0
12,50	0	0
9,50	9	9
6,30	59	68
4,80	23	91
2,40	5	96
1,20	0	96
0,60	0	96
0,30	0	96
0,15	1	97
< 0,15	2	99
TOTAL	99	581

Características do Material	Unidade	Obtidas	Especificadas	Metodologia de Ensaio
2 - Módulo de finura	(%)	5,83	5,50 - 6,50	NBR - NM 248
3 - Dimensão Máxima	m m	9,50	9,50 - 12,50	NBR - NM 248
4 - Massa Específica	g / cm³	2,81	2,60 - 2,75	NBR - NM 052
5 - Massa Específica Aparente	g / cm³	2,84	-	NBR - NM 052
6 - Massa Esp. Saturada Superf. Seca	g / cm³	2,82	-	NBR - NM 052
7 - Massa Unitária	Kg / dm³	1,57	1,45 - 1,65	NBR - 7251
8 - Material Pulverulento	(%)	2,3	< 1,0 %	NBR NM - 46

OBS:

Agregado – Areia de Brita tipo - II

ENGEMIX

Votorantim | Cimentos

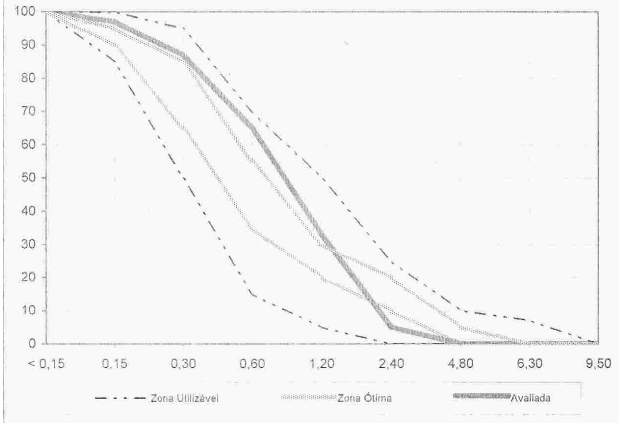
TECNOLOGIA

ENSAIOS FÍSICOS DE AGREGADOS

Relatório Nº.H7: 80

Interessado:		**Ped. Ensaio Nº:**	801
Cliente:	Jaguaré	**Material:**	AREIA DE BRITA TIPO - II
Obra:		**Fornecedor:**	Embú- perús
Filial:	Jaguaré	**Data da Coleta:**	23/08/2010
		Data da Entrada:	27/08/2010

1 - Granulometria



ABERTURA	PORCENTAGEM	
(m m)	Retida (%)	Acumulada (%)
50,00	0	0
38,00	0	0
32,00	0	0
25,00	0	0
19,00	0	0
12,50	0	0
9,50	0	0
6,30	0	0
4,80	0	0
2,40	5	5
1,20	28	33
0,60	32	65
0,30	22	87
0,15	10	97
< 0,15	3	100
FUNDO	100	287

Caracteristicas do Material	Unidade	Obtidas	Especificadas	Metodologia de Ensaio
2 - Módulo de finura	(%)	2,87	2,40 - 2,80	NBR - NM 248
3 - Dimensão Máxima	m m	2,40	1,20 - 4,80	NBR - NM 248
4 - Massa Específica	g / cm³	2,70	2,60 - 2,75	NBR - NM 052
5 - Massa Específica Aparente	g / cm³	2,65	-	NBR - NM 052
6 - Massa Esp. Saturada Superf. Seca	g / cm³	2,67	-	NBR - NM 052
7 - Massa Unitária	Kg / dm³	1,25	1,35 - 1,65	NBR - 7251
8 - Material Pulverulento	(%)	1,6	≤ 3,0	NBR NM - 46

OBS: MASSA UNITÁRIA C/ 6% DE UMIDADE

ANEXO B – MODELOS CONSTITUTIVOS

B.1 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO

Concreto é uma mistura de pasta de cimento e agregado, cada um tem uma relação tensão-deformação frágil e linear na compressão. Embora o concreto seja composto essencialmente por materiais frágeis e elásticos, sua curva tensão-deformação é não linear e aparentemente dúctil. Isto pode ser explicado pelo desenvolvimento de fissuras internas e o resultado da redistribuição de tensões de elemento para elemento, (MACGREGOR, 1997).

B.1.1. CONCRETO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL

O comportamento não linear dos modelos constitutivos do concreto sob compressão uniaxial pode ser explicado a partir da figura B.1.

Existem quatro estágios no desenvolvimento de microfissuras e ruptura no concreto submetido à carga axial de compressão como pode ser verificado na Figura B.1:

1 – A retração da pasta durante a hidratação e a cura do concreto é resistida pelo agregado, provocando microfissuras entre a pasta e o agregado antes mesmo da aplicação de qualquer carregamento. Estas fissuras têm pequeno efeito no concreto quando submetido a cargas baixas, a relação tensão-deformação permanece linear até 30% da tensão última ($f_c^{'}$).

2 – Quando o concreto é submetido a uma tensão entre 30 a 40% da tensão última, as tensões atuantes na superfície do agregado excedem as resistentes de tração e cisalhamento, provocando novas fissuras entre a pasta e o agregado, estas são estáveis e propagam-se somente com aumento da carga. Uma vez a primeira fissura seja formada, qualquer carga adicional que tenha sido transmitida pela interface fissurada é redistribuída para superfícies não fissuradas e para a pasta. Esta redistribuição de carga causa uma gradual curvatura da curva tensão-deformação para tensões acima de 40% da tensão última ($f_c^{'}$).

3 – Com o aumento da força além de 50 ou 60% da tensão última ocorrerão fissuras na pasta, estas se desenvolvem paralelas à carga de compressão devido à deformação de tração transversal. Durante este estágio a propagação de fissuração é estável, novas fissuras só aparecerão com aumento da carga. O início deste estágio de carregamento é chamado de limite de descontinuidade.

4 – Com a carga entre 75 a 80% da tensão última iniciarão várias fissuras na pasta, restando poucos pontos intactos para transferir carga, neste momento a não linearidade da curva aumenta. O início deste estágio de fissuração é chamado de tensão crítica.

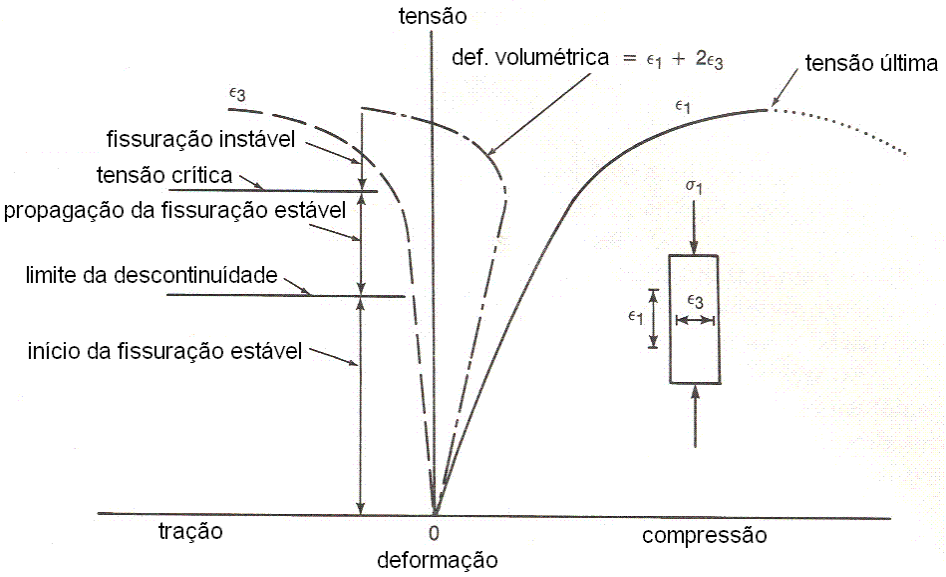


Figura B.1 - Relação tensão-deformação (NEWMAN, 1972)

A partir de ensaios de compressão uniaxial em corpos-de-provas cilíndricos, realizados por Popovics(1975, apud Collins et al. 1993) foi proposta a expressão B.1 que define o comportamento tensão-deformação para concreto de resistência normal, com tensão máxima de compressão $f_c^{'}$ menor de 50MPa.

3

4

[3] Popovics,S., ‘ A Numerical Approach to the Complete Stress-Strain Curve of Concrete, ‘ Cement and Concrete Research. V. 3, No. 5, May 1973, pp. 583-599.

[4]

[5]

$$f_c = \left(f_c^{'} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c^{'}} \cdot \frac{n}{n - 1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_c^{'})^n} \right) \tag{B-1}$$

$$n = \frac{E_c}{E_c - E_{\sec}} \tag{B-2}$$

$$E_{\sec} = -\frac{f_c}{\varepsilon_c^{'}} \tag{B-3}$$

sendo:

f_c = tensão de compressão;

$f_c^{'}$ = tensão última de compressão;

ε_c = deformação de compressão;

$\varepsilon_c^{'}$ = deformação quando ε_c alcança $f_c^{'}$;

n = fator de ajuste da curva, quanto maior mais linear é a curva ascendente;

E_c = módulo de elasticidade tangente inicial;

E_{sec} = módulo de elasticidade secante.

Note que para aplicar a expressão B.1 é necessário conhecer previamente $f_c^{'}, \varepsilon_c^{'}$ e E_c

Thorenfeldt, Tomaszewicz, and Jesen (1987, apud Collins *et al.* 1993) propuseram a inclusão do fator k, para melhor representar o ramo pós-pico, característico em concretos de alta resistência. Assim a expressão B.1 fica:

$$f_c = \left(f_c^{'} \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c^{'}} \cdot \frac{n}{n - 1 + (\varepsilon_c / \varepsilon_c^{'})^{n \cdot k}} \right) \tag{B-4}$$

---

[5] Thorenfeldt, E., Tomaszewicz, A.; and Jenen, J. J., "Mechanical Properties of High-Strenght Concrete and Application in Design, " Proceedings of the Symposium Utilization of High Strength Concrete, Tapir, Trondheim, 1987, pp. 149-159.

Sendo que *k* é igual a 1 para $0 > \varepsilon_c > \varepsilon_c^{'}$, Collins and Porasz(1989, apud Collins et al. 1993) e Collins and Mitchell(1991, apud Collins et al. 1993) sugeriram para $\varepsilon_c / \varepsilon_c^{'} > 1$ o valor de k seja definido pela equação B.5.

$$k = 0{,}67 + \frac{f_c^{'}}{62}(MPa) \tag{B-5}$$

com *n* igual a:

$$n = 0{,}8 + \frac{f_c^{'}}{17}(MPa) \tag{B-6}$$

A equação 3.64 faz a relação entre tensão (f_c) e deformação (ε_c), a partir do conhecimento de das constantes, $f_c^{'}$, $\varepsilon_c^{'}$, *n* e *k*. Collins(1993) sugere que para concreto com baixa resistência o valor de *k* e *n* podem ser estimados pelas equações B.5 e B.6. E o módulo de elasticidade tangente determinado pela equação B.7.

$$\text{Eng}\quad E_c = -\frac{f_c^{'}}{\varepsilon_c^{'}} \cdot \frac{n}{n-1} \tag{B-7}$$

Na figura B.2 vêem-se curvas típicas tensão-deformação do concreto para várias resistências. A tensão máxima ocorre entre uma deformação de 1,5‰ a 3‰, seguida de um ramo descendente. A forma dessa curva é afetada pelas microfissuras internas da estrutura do concreto e as condições do ensaio. À medida que a resistência cresce há um aumento na deformação de pico como também na inclinação da curva que define o módulo e elasticidade tangente inicial.

6

---

[66]Collins, M. P., and Porasz, A., "Shear Desung for High Strength Concrete." CEB Bulletin d' Information, No. 193, Dec. 1989, pp 77-83.

Collins, M. P., and Mitchell. D., Prestressed Concrete Structures, Prentice-Hell Inc., Englewood Cliffs. New Jersey, 1991, 766 pp.

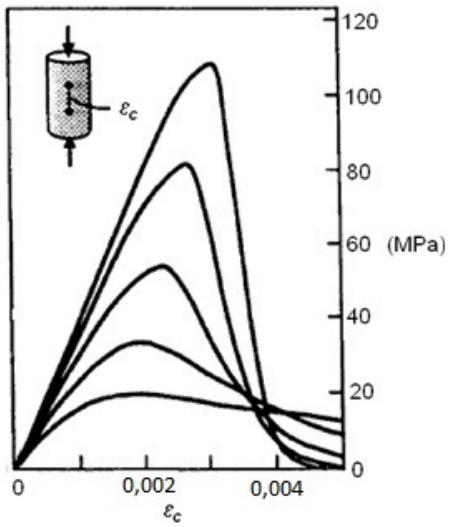


Figura B.2 - Influência da resistência do concreto na forma da relação tensão-deformação (COLLINS, 1993)

– **Modelos Constitutivos**

A distribuição de tensões no concreto é complexa e de difícil representação. O concreto é considerado um material elastoplástico, mas sob ação de cargas de compressão da ordem de até 30% da sua resistência última, apresenta um comportamento aproximadamente elástico-linear. Na tentativa de simplificar a representação do comportamento do concreto na compressão para carregamentos uniaxiais de curta duração, vários diagramas tensão-deformação foram propostos, alguns são apresentados a seguir.

O modelo mais conhecido na literatura é o modelo de Hognestad (1951), que define a relação tensão-deformação por uma parábola de acordo com a equação B.8.

$$f_c = 0{,}85 \cdot f_c^{'} \left(2 \cdot \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c^{'}} - \left(\frac{\varepsilon_c}{\varepsilon_c^{'}} \right)^2 \right) \tag{B-8}$$

com,

$$\varepsilon_c^{'} = \frac{2 \cdot (0{,}85 \cdot f_c^{'})}{E_c} \tag{B-9}$$

Hognestad (1951) também definiu o modelo Hognestad modificado, no qual o ramo descendente é escrito por uma reta (figura B.3-b), assim até a deformação de $\varepsilon_c^{'}$ a curva é definida pela parábola, equação B.8, depois pela reta, equação B.10.

$$f_c = -\frac{0{,}7225 \cdot f_c^{'} \cdot \varepsilon_c}{\varepsilon_c^{'}} + 1{,}5725 \cdot f_c^{'} \tag{B-10}$$

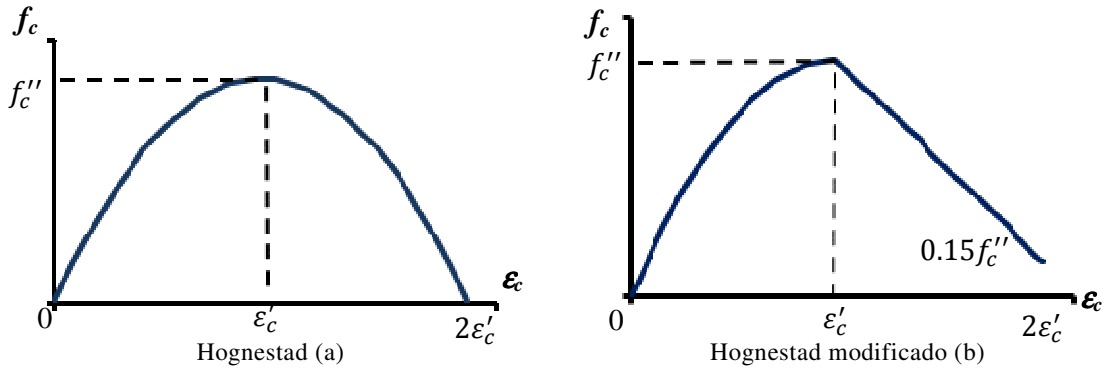


Figura B.3 - Modelo de Hognestad para o concreto sob compressão

sendo:

$$f_c^{''} = 0.85 \cdot f_c^{'}$$

Para dimensionamento de peças de concreto comprimido, as normas definem algumas relações tensão-deformação:

O Eurocode 2(2003) recomenda, para o concreto com resistência característica à compressão (f_{ck}) menor que 90MPa o diagrama parábola-retângulo, o bi-linear e o retangular. Para a análise estrutural não linear, o diagrama definido pela equação B.11 é recomendado,

$$\frac{f_c}{f_{cm}} = \frac{k\eta - \eta^2}{1 + (k-2)\eta} \tag{B-11}$$

sendo:

$$\eta = \varepsilon_c / \varepsilon_{c1}$$

$$\varepsilon_{c1}(‰) = 0,7 f_{cm}^{0,31} < 2,8$$. Deformação para a tensão de pico

$$k = 1,05 E_{cm} x \left| e_{c1} \right| / f_{cm}$$

$$f_{cm} = f_{ck} + 8(MPa)$$

$$E_{cm} = 22[(f_{cm})/10]^{0,3}$$. (f_{cm} em MPa).

$$\varepsilon_{cu1} = 3,5‰ \text{ para } f_{ck} \leq 50MPa$$

$$\varepsilon_{cu1}(‰) = 3,5 = 2,8 + 27[98 - f_{cm})/100]^4 \text{ para } f_{ck} \geq 50MPa$$

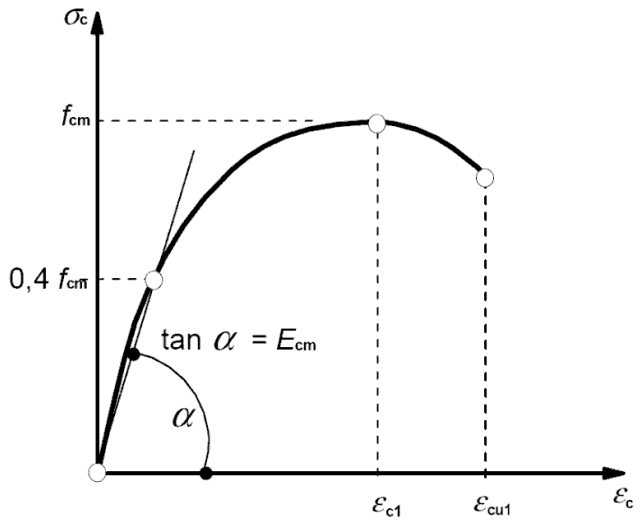


Figura B.4 - Relação tensão-deformação para análise estrutural (EUROCODE 2)

O ACI 318-05 (2004) permite qualquer relação tensão-deformação de compressão para o concreto a ser utilizada em projeto, desde que a predição de força última esteja de acordo com ensaios laboratoriais. As três mais comuns são a parabólica, trapezoidal e retangular. Admite-se que a tensão máxima ocorre para uma deformação entre 1,5‰ e 2,0‰, e a deformação última a 3,0‰.

Para o dimensionamento das peças de concreto, a norma brasileira ABNT NBR 6118:2007 recomenda que a distribuição de tensões na seção, pode ser representada pelo diagrama parábola-retângulo ou retangular. A tensão máxima adotada é de $0,85f_{cd}$, mas para o diagrama retangular, quando a largura da seção, medida paralelamente à linha neutra, diminuir a partir desta para a borda comprimida, o valor muda para $0,80f_{cd}$.

A equação B.12 define a distribuição de tensão para o trecho parabólico do diagrama parábola-retângulo.

$$f_c = 0{,}85 f_{cd}\left[1-\left(1-\frac{\varepsilon_c}{2‰}\right)\right] \; para \; 0 \le \varepsilon_c \le 2‰ \tag{B-12}$$

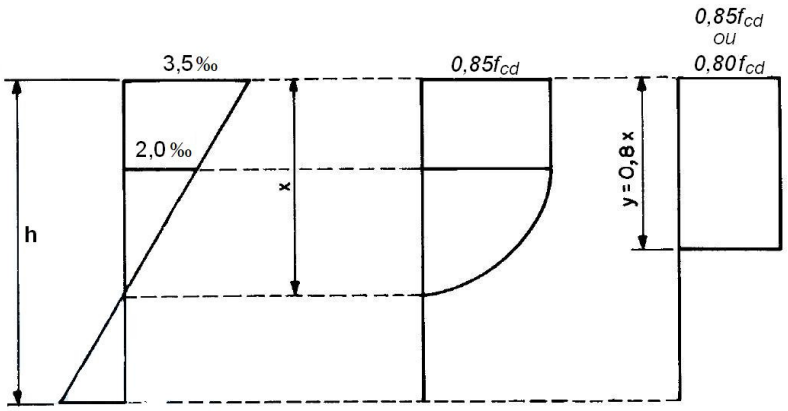


Figura B.5 - Relação tensão-deformação ABNT NBR 6118:2007

B.1.2. CONCRETO SOB TRAÇÃO UNIAXIAL

A resistência à tração do concreto varia entre 8% a 15% da resistência à compressão. O valor é fortemente afetado pelo tipo de ensaio realizado para determinar a resistência à tração, o tipo de agregado, a resistência à compressão do concreto, Raphael(1984).

O concreto é predominantemente frágil quando submetido a tensões de tração, até atingir a resistência, sua resposta é elástica linear, de acordo com a expressão B.13 e a figura B.6, Vecchio (2002).

$$f_{ct} = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{ct} & p/ \quad \varepsilon_{ct} \le \varepsilon_{cr} \\ 0 & p/ \quad \varepsilon_{ct} \ge \varepsilon_{cr} \end{cases} \tag{B-13}$$

sendo:

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{cr}}{E_c} \; ;$$

ε_{cr} é a deformação última de tração;

E_c é o módulo de deformação inicial;

f_{cr} é resistência de tração;

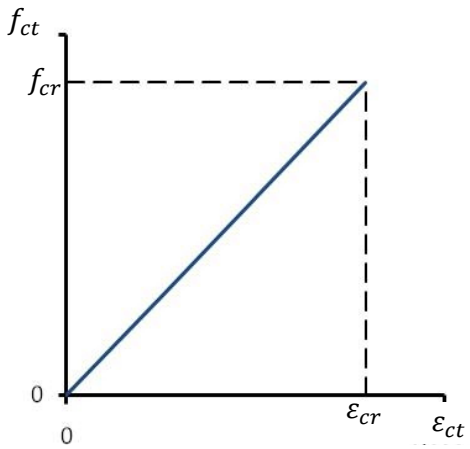


Figura B.6 - Diagrama tensão-deformação linear de tração

Para o concreto não fissurado, a ABNT NBR 6118:2007 recomenda o uso do diagrama tensão-deformação bilinear mostrado na figura B7, definido pela equação B.14

$$f_{ct} = \begin{cases} E_{ci} \cdot \varepsilon_{ct} & p/ \quad 0 \le \varepsilon_{ct} \le \dfrac{0{,}9 \cdot f_{ctk}}{E_{ci}} \\ f_{ctk} \cdot \left[0{,}1 \cdot \left[\dfrac{E_{ci} \cdot \varepsilon_c - 0{,}9 \cdot f_{ctk}}{E_{ci} \cdot 0{,}15‰ - 0{,}9 \cdot f_{ctk}} + 0{,}9 \right] \right] & p/ \quad \dfrac{0{,}9 \cdot f_{ctk}}{E_{ci}} < \varepsilon_{ct} \ge 0{,}15‰ \end{cases} \tag{B-14}$$

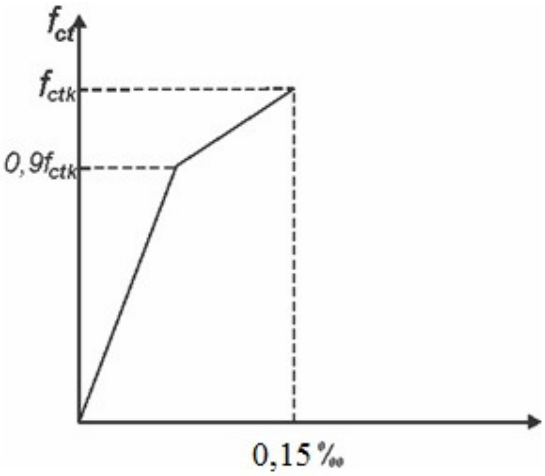


Figura B.7 - Diagrama tensão-deformação bilinear de tração

A resistência característica à tração (***f**$_{ctk}$*) pode ser obtida experimentalmente ou pela expressão B.15 e o módulo de deformação tangente inicial (E_c), expressão B.16.

$$f_{ctk} = 0{,}3 \cdot \sqrt[3]{f_{ck}^{2}} \ (MPa) \tag{B-15}$$

$$E_{ci} = 5600 \cdot \sqrt{f_{ck}} \ (MPa) \tag{B-16}$$

– ***Tension Softening***

Quando a resistência última de tração é atingida no concreto, essa tensão cai a zero a partir de uma curva tensão-deformação, conhecida como comportamento "Tension Softening". Esse fenômeno acontece, pois o concreto não é um material perfeitamente frágil.

No modelo linear a curva "tension softening" desce linearmente da resistência última de tração (f_{cr}) até zero, que corresponde à deformação característica (ε_{ch}), Vecchio(2002). A expressão B-17 define o modelo e a figura B.8 mostra-a graficamente.

$$f_{ct} = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{ct} & p/ \quad 0 \le \varepsilon_{ct} \le \varepsilon_{cr} \\ f_{cr} \cdot \left[1 - \dfrac{\varepsilon_c - \varepsilon_{cr}}{\varepsilon_{ch} - \varepsilon_{cr}} \right] & p/ \quad \varepsilon_{cr} \le \varepsilon_{ct} \ge \varepsilon_{ch} \end{cases} \tag{B-17}$$

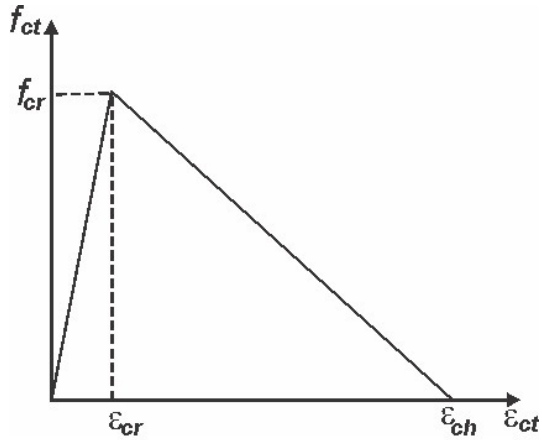


Figura B.8 - "Tension Softtening" linear

[7]

sendo:

$$\varepsilon_{ch} = \frac{2 \cdot G_f}{L_r \cdot f_{cr}}, 1.1 \cdot \varepsilon_{cr} < \varepsilon_{ch} < 10 \cdot \varepsilon_{cr} \text{ (Vecchio, 2001)} \tag{B-18}$$

$$\varepsilon_{cr} = \frac{f_{cr}}{E_c} \tag{B-19}$$

A energia de fratura (G_f) é definida como a energia necessária para formar uma fissura completa. O valor de G_f pode ser estimado pelo método proposto pela norma MC CEB-FIB (1990), que é função do comprimento do elemento da malha de elementos finitos e do tamanho do agregado máximo. O pesquisador Darwin(1999 apud Yamamoto e Vecchio, 2001), informa nesse trabalho que a energia de fratura é relativamente independente do comprimento do elemento e tamanho do agregado. O manual do aplicativo VecTor2 (Vecchio,2001), recomenda o valor de 75N/mm para G_f.

L_r é chamado de comprimento representativo, pode ser estimado pela geometria da peça estrutural e da disposição da armadura.

[8]

O pesquisador Yamamoto(1999, apud Yamamoto e Vecchio, 2001) na sua tese de doutorado propôs o modelo não linear para representar o comportamento "Tension Softening" como mostrado na figura B.9 segundo a expressão B.20.

$$f_{ct} = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{ct} & p/ \quad 0 \le \varepsilon_{ct} \le \varepsilon_{cr} \\ \dfrac{f_{cr}}{1 + \sqrt{c \cdot (\varepsilon_c - \varepsilon_{cr})}} & p/ \quad \varepsilon_{cr} \le \varepsilon_{ct} \ge \varepsilon_{ch} \\ f_{ch} \cdot \dfrac{(\varepsilon_{te} - \varepsilon_c)}{(\varepsilon_{te} - \varepsilon_{ch})} & p/ \quad \varepsilon_{ch} \le \varepsilon_{ct} \ge \varepsilon_{te} \end{cases} \tag{B-20}$$

---

[7] Darwin, D., "Fracture Mechanics," Memorandum, ACI Committee on Shear and Torsion, 1999.

[8] Yamamoto, T., "Nonlinear Finite element Analysis of Transverse Shear and Torsional Problems in Reinforced Concrete Shells," MASc thesis, Departamento f Civil Engineering, University of Toronto, 112pp, 1999.

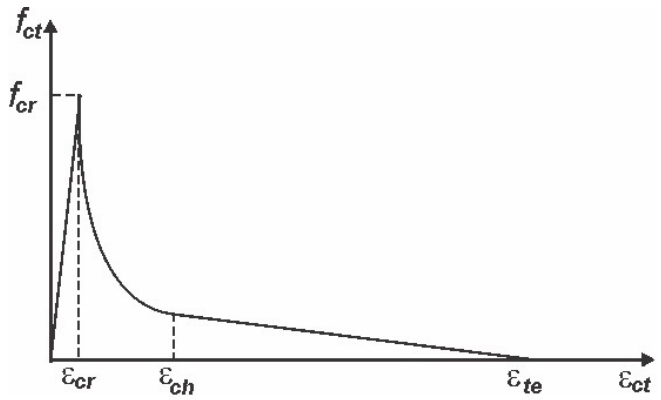


Figura B.9 - Yamamoto 1999, "Tension Softtening" não- linear

A deformação terminal, ε_{te} é a deformação correspondente a tensão igual da curva "tension softening" definida por:

$$\varepsilon_{te} = 5 \cdot \varepsilon_{ch} \quad (Vecchio, 2001) \tag{B-21}$$

O coeficiente "tension softening" (c), é igual a razão da energia de fratura pelo comprimento característico (L_r).

– ***Tension Stiffening***

Depois que o concreto fissura, por causa da tensão aos esforços de tração, a tensão diminui praticamente a zero. Contudo no caso do concreto armado, devido à aderência entre os dois materiais o concreto entre fissuras continua contribuindo com a resistência da seção, esse fenômeno é conhecido como "tension stiffening".

Vecchio e Collins (1986) propuseram um modelo analítico, denominado "Modified Compression Field Theory (MCFT), para estimar o comportamento tensão-deformação do concreto armado pós-fissuração. Esse modelo foi desenvolvido com base em resultados experimentais de painéis, medindo 890mmx890mmx70mm, submetidos a tensões biaxiais

de tração incluindo cisalhamento puro. A expressão B.22 de[9]fine a resposta média do diagrama tensão-deformação, mostrada na figura B.10.

$$f_{ct} = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{ct} & p/ \quad 0 \le \varepsilon_{ct} \le \varepsilon_{cr} \\ \dfrac{f_{cr}}{1+\sqrt{200 \cdot \varepsilon_{ct}}} & p/ \quad \varepsilon_{ct} \ge \varepsilon_{cr} \end{cases} \tag{B-22}$$

O módulo de elasticidade do concreto, E_c, pode ser estimado a partir da equação B.23, de acordo com, Vecchio e Collins (1986).

$$E_c = \frac{2 \cdot f_{cr}}{\varepsilon_{cr}} \tag{B-23}$$

O modelo acima foi modificado por Collins-Mitchell (1987, apud Vecchio 2001), baseado em resultados realizados em painéis de concreto armado medindo 1450mmx1450mmx350mm. Esse modelo resultou em um efeito “tension stiffening” mais brando quando comparado com o modelo Vecchio 1986. A expressão B.24 define a resposta média da curva tensão-deformação, mostrada na figura B.10.

$$f_{ct} = \begin{cases} E_c \cdot \varepsilon_{ct} & p/ \quad 0 \le \varepsilon_{ct} \le \varepsilon_{cr} \\ \dfrac{f_{cr}}{1+\sqrt{500 \cdot \varepsilon_{ct}}} & p/ \quad \varepsilon_{ct} \ge \varepsilon_{cr} \end{cases} \tag{B-24}$$

[9] Collins, M. P. and Mitchell, D., Prestressed Concrete Basics. Canadian Prestressed Concrete Institute. 1987.

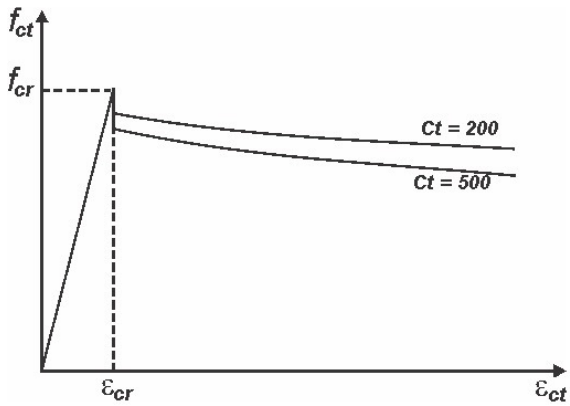


Figura B.10 - Vecchio-Collins 1986 e Collis-Mitchell 1987, "Tension Stiffening"

B.2 MODELOS PARA O AÇO

As barras de aço utilizadas em estruturas de concreto armados são dimensionadas para resistir somente a forças axiais, com isso o conhecimento das propriedades uniaxiais de tensão são suficientes para a modelagem. As principais propriedades do aço são obtidas a partir de ensaios uniaxiais de tração, podendo admitir o mesmo comportamento à compressão. Essas propriedades dependem do processo de fabricação do aço, que pode ser por laminação a quente e com laminação a quente e posterior trefilação a frio, gerando diagrama tensão-deformação com ou sem patamar de escoamento.

O modelo mais simples é o elastoplástico perfeito, cujo diagrama tensão-deformação é bilinear, como está mostrada na figura B.11. Sendo que f_y é a resistência de escoamento, que nesse caso é igual à tensão última (f_u), ε_y é a deformação correspondente a f_y, ε_u é a deformação última e E_s é a módulo de elasticidade. A norma brasileira ABNT NBR 6118:2007 recomenda que, na falta de dados de ensaios, seja admitida o módulo de elasticidade igual a 210*GPa.*

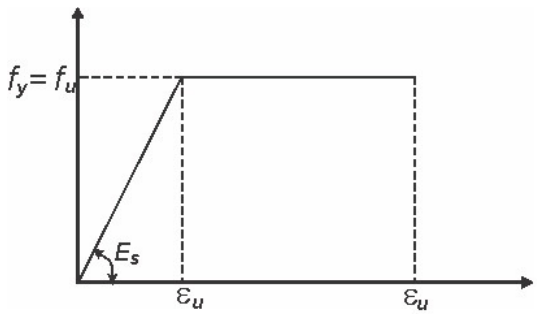


Figura B.11 - Diagrama elastoplástico bilinear do aço

ANEXO C – ENTRADA DE DADOS DO APLICATIVO PARA CARGA IMEDIATA

```
%Programa de elementos fintos 2D - Elemento de barra com 6 graus de Lib.
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
%Viga-2 B2 - Bresler e Scordelis 1963
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
clear
clc
%Graus de Liberdade
gl = 3;
%Número de elementos
ne = 20;
%Número de nós
nn =21;
%Número de apoios
napoio = 2;
node_apoio = [1 21];
% Apoios     y x z. 1 engaste e 0 rotulado
M_apoio = [  1 1 0;
             0 1 0];
% Nó analisado
desV = 32;
xcargaHor = 32;
%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% UNIDADE kN, mm %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%

                                % Carregamento
for r = 1:nn*gl
    F(r,1) = 0.0;
end

F(xcargaHor,1) = -367.0;
                                % Incidência Nodal
for i = 1:nn-1
    IN(i,1) =i;
    IN(i,2) = i+1;
end
                                % Coordenadas
coordX = [0;228.5;457;685.5;914;1142.5;1371;1599.5;1828;2056.5;2285;...
          2513.5;2742;2970.5;3199;3427.5;3656;3884.5;4113;4341.5;4570];
coordY = [0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0];
coordZ = [0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0; 0;0;0];
COORD = [coordX,coordY,coordZ];

%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Seção Transversal - CONCRETO %%%%%%%%%%%%%
f085 = 1; % Parâmetro de 0.85 do diagrama parábola-retângulo
fcd = 25.9e-3; % Resistência à compressão no concreto kN/mm2
h = 552;       % Altura da seção transversal (mm)
b = 229;       % Base da seção (mm)
nc =10;        % Número de camadas da seção transversal

%-----------------------Lamelas----------------------------
yc(1,1) = (h/2)-(h/(2*nc));
yc(1,2) = b*(h/nc);
yant = yc(1,1);
for i = 2:nc
    yc(i,1) = yant - (h/nc);
    yc(i,2) = b*(h/nc);
```

```
    yant = yc(i,1);
end
 %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%%% Dados do Aço %%%%%%%%%%%%%%%%%%%%
% ys = [ posição area   Es     sigmaS;
      %  mm     mm^2   kN/mm^2  kN/mm^2
 ys = [ 226    300.0   200      0.315;
       -148   1000.0   210      0.440;
       -212   1400.0   200      0.436];
 % Cálculo dos comprimentos dos elementos
for i = 1:ne
    X = (coordX(IN(i,2)) - coordX(IN(i,1)) );
    Y = (coordY(IN(i,2)) - coordY(IN(i,1)) );
    L0(i) = ( X^2 + Y^2 )^0.5;
    Calfa(i) = X/L0(i);
    Salfa(i) = Y/L0(i);
end
% ------------------------------------------------------------------------
ninc =367;            % Número de incrementos de Força
Fex = zeros(nn*gl,1); % Carga externa incremental
R = zeros(nn*gl,1);   % Resíduo de carga
TOLER = 0.0001;       % Tolerância de convergência

U = zeros(nn*gl,1);   % Vetor de deslocamentos

%------------------------ Newton Raphson ------------------------%
for ni = 1:ninc
    dF = F/ninc;    % Incremento de carga
    Fex = Fex + dF; % Vetor de forças externas
    inter = 0;
    erro = TOLER;
    while (erro >= TOLER)
  % Monta a matriz de rigidez global
        [K,T] = Matriz_Rigidez_Global(L0,coordX,coordY,IN,ne,nn,...
            U,Calfa,Salfa,nc,f085,fcd,ys,yc,b,h);
        R = T - Fex; %Cálculo do Resíduo

        [U,u] = ResolveSistema(K,U,R,coordX,coordY,napoio,
                              ...node_apoio,M_apoio,nn);
        U = U + u;        % Atualização do vetor dos deslocamentos

        inter = inter + 1;
        erro = abs(R'*u); % Cálculo da energia

        for j = 1:napoio
            for l = 1:3
                j1 = 3*node_apoio(j) - (3-l);
                if M_apoio(j,l) == 1%
                    R(j1)=0.0; %forças residuais
                end
            end
        end
        if inter >= imax , break, end
    end
    respy (ni)=U(desV);
    carga(ni)=Fex(xcargaHor);
end
```