KARINA BRADASCHIA ROCHA

Avaliação numérica do efeito do acoplamento pressão-volume em estruturas pneumáticas

São Paulo
2020

KARINA BRADASCHIA ROCHA

Avaliação numérica do efeito do acoplamento pressão-volume em estruturas pneumáticas

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti

São Paulo
2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 05 de maio de 2020

Assinatura do autor:

Assinatura do orientador:

Catálogo-na-publicação

Rocha, Karina Bradaschia

Avaliação numérica do efeito do acoplamento pressão-volume em estruturas pneumáticas / K. B. Rocha -- versão corr. -- São Paulo, 2020. 94 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Tensoestruturas 2.Estruturas Pneumáticas 3.Elementos finitos 4.Métodos numéricos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Nome: ROCHA, Karina Bradaschia

Título: Avaliação numérica do efeito do acoplamento pressão-volume em estruturas pneumáticas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Ciências.

Aprovado em: _____

Banca Examinadora

Prof. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

Prof. _____

Instituição: _____

Julgamento: _____

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais, Luiz e Elaine, e aos meus avós, Oclides e Maria Candida, por toda a oportunidade de estudo que me foi dada até hoje, por todo o apoio e incentivo, que fazem com que eu corra atrás dos meus sonhos desde sempre, e por todo o amor, carinho e compreensão, primordiais para a conclusão desse trabalho.

À minha amiga Paula, que há quase 7 anos caminha comigo lado a lado, seja estudando ou trabalhando, e que me incentivou mais do que ninguém a embarcar nessa carreira acadêmica. Obrigada por ser um ombro para eu chorar, por me consolar nos momentos mais difíceis e ir comer hambúrguer comigo para me alegrar.

Às minhas amigas Raquel e Carolina e ao meu amigo Thomas, que aguentam as minhas reclamações e desabafos e sempre dão um jeito de deixar tudo mais engraçado e leve e, em especial, ao meu amigo Bruno, pelos longos textos motivacionais no Whatsapp, por ter paciência de me ouvir e sempre me inspirar a ser uma pessoa melhor e mais calma.

Ao meu orientador, Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti, pelos anos de ensinamento, orientação e parceria.

Aos meus mentores e colegas do Instituto Mauá de Tecnologia, Prof. Dra. Cássia Silveira de Assis, Prof. MSc. Januário Pellegrino Neto, Prof. Me. João Carlos Martins Coelho, Prof. Dra. Eloiza Gomes e Prof. Me. Juliana Martins Philot, por me acompanharem desde a formação até a carreira profissional, sempre me inspirando e sendo exemplos que eu pretendo seguir na vida.

Um agradecimento especial ao técnico do laboratório de ensaios mecânicos do Instituto Mauá de Tecnologia, Carlos Augusto Martins, a todos os técnicos do laboratório de ensaios mecânicos, em especial ao Kenner de Araújo Mendes, Robson Silva dos Santos e João Luis Santana, por me cederem espaço e me ajudarem a concluir com êxito o experimento presente neste trabalho.

A todos meus familiares e amigos não citados aqui diretamente, mas que são tão importantes quanto, obrigada pela presença de vocês na minha vida.

RESUMO

As estruturas pneumáticas, estruturas de membrana compostas e estabilizadas por um sistema de pressão e tensões de tração, são utilizadas devido à sua funcionalidade, custo benefício e diferentes formas que elas podem adquirir. Em se tratando de estruturas que necessitam de análises não lineares, é necessário o emprego de métodos computacionais na realização do projeto e análise estrutural dessas estruturas. Existem alguns programas que podem ser utilizados para essa modelagem, sendo que a grande maioria utiliza como procedimento de solução o Método dos Elementos Finitos (MEF). Dentro desse contexto, o programa SATS (*Structural Analysis of Taut Structures*) foi desenvolvido dentro do *software* Matlab® por Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti e Daniel Mariani Guirardi (2006) para o cálculo e análise de tensoestruturas. Com isso, foi implementado nesse programa o acoplamento pressão-volume, dado pela lei de Boyle-Mariotte, de forma a avaliar qual a relevância de se efetuar essa consideração na análise de estruturas pneumáticas; implementou-se também a formulação referente ao enrijecimento da estrutura devido à pressão interna, ou seja, rigidez volumétrica, de forma a verificar se essa parcela ajudava na convergência desse tipo de problema. Assim, de modo a conferir as implementações e considerações mencionadas anteriormente, foram realizados quatro principais modelos e concluiu-se que, para estruturas pneumáticas de pequeno porte, é muito importante se considerar a lei de Boyle-Mariotte para a análise estrutural, já que foram encontradas diferenças de aproximadamente 50% quando comparando esses resultados com os do caso onde se considera a pressão interna constante; já para estruturas de grande porte, verificou-se que a consideração da pressão interna constante dá boas aproximações dos resultados quando considerando essa variando conforme a lei de Boyle-Mariotte. Quanto à parcela de rigidez volumétrica, constatou-se que essa não melhora o tempo de convergência dos modelos e nem diminui o número de iterações total da análise, mas aumenta a influência da matriz de rigidez externa.

Palavras-chave: Estruturas pneumáticas; acoplamento pressão-volume; lei de Boyle-Mariotte; métodos numéricos; método dos elementos finitos.

ABSTRACT

Pneumatic structures, membrane structures composed and stabilized by a pressure and tensile stress system, are used due to their functionality, cost benefit and the different forms that they can acquire. In the case of a non-linear system, it is necessary to use computational methods in the design and structural analysis of these structures. There are some programs that can be used for this modeling and most of them uses the Finite Element Method (FEM) as a solution procedure. Within this context, SATS (Structural Analysis of Taut Structures) program was developed within Matlab® software by Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti and Daniel Mariani Guirardi (2006) for the calculation and analysis of tensile structures. With this, the pressure-volume coupling, given by Boyle-Mariotte law, was implemented in this program in order to evaluate the relevance of making this consideration in the analysis of pneumatic structures. The formulation related to the stiffening of the structure due to internal pressure was also implemented, in order to verify if this part helped in the convergence of this type of problem. Thus, in order to check the implementations and considerations mentioned above, four main models were made and it was concluded that, for small pneumatic structures, it is very important to consider the Boyle-Mariotte law for structural analysis, since differences of approximately 50% were found when comparing these results with those in the case where constant internal pressure is considered. For large structures, it was found that the consideration of constant internal pressure gives good approximations of the results when considering this varying according to Boyle-Mariotte's law. As for the portion of volumetric stiffness, it was found that it does not improve the convergence time of the models and does not decrease the total number of iterations of the analysis, but increases the influence of the external stiffness matrix.

Keywords: Pneumatic structures; pressure-volume coupling; Boyle-Mariotte's law; numerical methods; finite element method.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Tipos de estruturas pneumáticas: a) insuflada, b) aspirada e c) inflada.....	16
Figura 2 – Primeiro protótipo de um <i>radome</i> (1948)	17
Figura 3 – Primeira estrutura pneumática construída no Brasil (1969).....	18
Figura 4 – <i>Fuji Pavilions</i>	19
Figura 5 – Anfiteatro romano de Nîmes	20
Figura 6 – Detalhe da fachada com almofada ETFE.....	21
Figura 7 – Nova cobertura da estação de trem em Rennes, França.....	22
Figura 8 – Estrutura <i>Tensairity</i> de 8m de comprimento	23
Figura 9 – <i>Bouncing Bridge</i>	23
Figura 10 – Ilustração da construção de uma casca de concreto utilizando o método <i>PFHC</i>	24
Figura 11 – Primeiro protótipo construído utilizando o método <i>PFHC</i> (2012)	25
Figura 12 – Forma pneumática e casca final obtida (2012)	26
Figura 13 – Três possíveis configurações de referência de um elemento <i>CST</i>	31
Figura 14 – Definição do vetor posição $\mathbf{x}_p$	31
Figura 15 – Orientação dos vetores atuantes no elemento	38
Figura 16 – Elementos triangulares que compartilham um nó interno m	39
Figura 17 – Configuração inicial e final de um pneumático genérico.....	40
Figura 18 – Pressão interna final em função da variação do volume interno.....	41
Figura 19 – Janela de navegação do programa SATS	45
Figura 20 – Plotagem dos gráficos de erro	47
Figura 21 – Modelos utilizados para testar a rotina que calcula volume	48
Figura 22 – Destaque dos botões para escolha do método de solução	51
Figura 23 – Membrana circular pneumática.....	52
Figura 24 – Comparação entre os métodos: Hencky, Fichter e Elementos Finitos (SATS)	54
Figura 25 – Modelo de um domo semiesférico de raio 2m	56
Figura 26 – Resultados do domo após busca da forma: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total máximo.....	56
Figura 27 – Resultado dos deslocamentos máximos do domo nas três direções principais.....	57
Figura 28 – Resultados de deslocamento total e tensões no domo.....	58
Figura 29 – Corpos de prova: a) visão geral, b) ensaio à tração, c) ensaio de densidade e d) teste por índice de viscosidade.....	60
Figura 30 – Gráficos de tensão x deformação: a) horizontal e b) vertical.....	61
Figura 31 – Bola de pilates: a) durante o enchimento, b) cheia, c) pressão interna inicial e d) adaptação no pino da bola	63
Figura 32 – Sistema: a) elevação e posicionamento, b) bola estável e c) bola deformada.....	63
Figura 33 – Medições: a) aparato para medição, b) medida do equador da bola, c) medida vertical final e d) área de contato estampada.....	64
Figura 34 – Modelo numérico: a) malha discretizada e b) representação das condições de contorno	65
Figura 35 – Deslocamentos do caso A: a) total, b) direção x , c) direção y e d) direção z	66
Figura 36 – Vista lateral do deslocamento na direção z do caso A	67

Figura 37 – Tensões principais do caso A: a) máxima e b) mínima	67
Figura 38 – Deslocamentos do caso B: a) total, b) direção x , c) direção y e d) direção z	69
Figura 39 – Vista lateral do deslocamento na direção z do caso B	69
Figura 40 – Tensões principais do caso B: a) máxima e b) mínima.....	70
Figura 41 – Domo esférico de raio 10 m: a) modelo em corte e b) visão 3D do modelo	71
Figura 42 – Coeficientes de pressão gerados no Ansys Fluent	72
Figura 43 – Deslocamento total: a) caso 2A e b) caso 2B.....	73
Figura 44 – Tensão principal máxima: a) caso 2A e b) caso 2B	73
Figura 45 – Tensão principal mínima: a) caso 2A e b) caso 2B.....	73
Figura 46 – Deslocamento total: a) caso 3A e b) caso 3B.....	75
Figura 47 – Tensão principal máxima: a) caso 3A e b) caso 3B.....	76
Figura 48 – Tensão principal mínima: a) caso 3A e b) caso 3B.....	76
Figura 49 – Foto da cobertura utilizada para cobrir a usina nuclear	77
Figura 50 – Coeficientes de pressão: a) vento longitudinal e b) vento transversal	78
Figura 51 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	78
Figura 52 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	79
Figura 53 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	80
Figura 54 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	80
Figura 55 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	81
Figura 56 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	81
Figura 57 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	82
Figura 58 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	82
Figura 59 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	83
Figura 60 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	83
Figura 61 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	84
Figura 62 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total.....	84

SUMÁRIO

1 INTRODUÇÃO	12
2 OBJETIVOS	13
3 ESTRUTURA E JUSTIFICATIVA DO TRABALHO	14
4 REVISÃO DA LITERATURA	16
4.1 ESTRUTURAS PNEUMÁTICAS	16
4.2 ESTADO DA ARTE: ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES	17
4.2.1 ETFE (Etileno-tetrafluoroetileno)	20
4.2.2 Pontes infladas	22
4.2.3 Cascas de concreto	23
4.3 ESTUDOS ENVOLVENDO ANÁLISES ESTRUTURAIS POR MÉTODOS NUMÉRICOS	26
4.4 FORMULAÇÕES E EQUACIONAMENTOS APLICÁVEIS PARA ESTRUTURAS PNEUMÁTICAS	29
4.1.1 Simplificação do elemento finito de membrana	29
4.4.2 Rigidez externa	37
4.4.2.1 Pressão independente do deslocamento	38
4.4.2.2 Sistemas pneumáticos	39
5 SATS (<i>Structural Analysis of Taut Structures</i>)	45
5.1 INTERFACE DO PROGRAMA	45
5.2 IMPLEMENTAÇÕES REALIZADAS NESSE TRABALHO	48
5.2.1 Pressão dependente do volume	48
5.2.2 Método das diferenças finitas	50
6 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS	52
6.1 MEMBRANA DE HENCKY – FICHTER – CAMPBELL: PROBLEMA CLÁSSICO ...	52
6.2 DOMO DE RAIO 2 METROS: ANÁLISES PRELIMINARES E VERIFICAÇÕES	55
6.3 BOLA DE PVC INFLADA: AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL E NUMÉRICA	60
6.3.1 Caso A: pressão variando conforme a lei de Boyle-Mariotte	66
6.3.2 Caso B: pressão interna constante	69
6.4 DOMO SEMIESFÉRICO DE RAIO 10 METROS	71
6.4.1 Aplicação de carga de vento: baixa velocidade	72
6.4.2 Aplicação de carga de vento: alta velocidade	74

6.5 DOMO PNEUMÁTICO DE GRANDES DIMENSÕES.....	77
7 CONCLUSÕES.....	86
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	88
ANEXO A – DEDUÇÃO DA PARCELA DE RIGIDEZ VOLUMÉTRICA.....	94

1 INTRODUÇÃO

Em busca de estruturas cada vez mais leves e baratas, intensifica-se a utilização das estruturas de membrana, tanto como forma de construções temporárias quanto para cobertura definitiva de pequenos e grandes espaços, como por exemplo de aeroportos. Essas, além de reduzirem o uso de material quando comparadas com estruturas convencionais da construção civil, garantem segurança e funcionalidade.

Antigamente, devido à falta de tecnologia e materiais adequados, a construção de tais estruturas se dava a partir de utensílios simples e era feita, em partes, pela intuição ou por tentativa e erro (PAULETTI, 2003). Porém, com o passar do tempo, os avanços tecnológicos propiciaram o desenvolvimento de novos materiais e de métodos numéricos de cálculo, os quais, por sua vez, possibilitaram a utilização de modelos matemáticos mais complexos, conduzindo ao real desenvolvimento da área de conhecimento denominada estruturas retesadas ou tensoestruturas.

A concepção das estruturas pneumáticas surgiu no desenvolvimento do campo do balonismo por volta de 1700 e elas recebem esse nome por serem as únicas em que os elementos trabalham todos à tração (CHI; PAULETTI, 2005). No Brasil, é necessário avançar com as pesquisas acerca desse assunto, para assim aumentar a amplitude do conhecimento sobre esse tema, já que os estudos sobre essas estruturas ainda são muito recentes.

Com os avanços nas pesquisas, o processo de projeto dessas estruturas, que antes era facilitado pelo uso de modelos físicos, foi aprimorado e agora a análise estrutural é realizada a partir de uma interface gráfica de modelos computacionais. Para garantir que todas as etapas do projeto, do cálculo e da própria análise das estruturas pneumáticas sejam realizadas com excelência, necessita-se de um contínuo estudo e aperfeiçoamento das técnicas computacionais já existentes.

Dentro desse contexto, esse trabalho contribui para com o desenvolvimento de técnicas de modelagem computacional dessas estruturas pneumáticas, abordando o maior número possível de aspectos necessários para a correta análise, cálculo e possível execução, além de revisar e aprimorar o estado da arte acerca desse assunto.

2 OBJETIVOS

O objetivo desse trabalho é implementar e avaliar tanto os efeitos do acoplamento pressão-volume em estruturas pneumáticas, dado pela lei de Boyle-Mariotte, visto que, como forma de simplificar a modelagem desse tipo de estruturas, muitas vezes é considerada a pressão interna constante, como a parcela de rigidez volumétrica. Essas verificações foram realizadas por meio de três métodos de solução: método de Newton, com a matriz de rigidez tangente analítica e por diferenças finitas (chamado de método das Diferenças Finitas) e método da Relaxação Dinâmica.

3 ESTRUTURA E JUSTIFICATIVA DO TRABALHO

Primeiramente, foi feita uma revisão do estado da arte do projeto e da construção de estruturas pneumáticas, onde foram mostrados alguns exemplos mais recentes de utilização dessas. Além disso, também foram levantados trabalhos relevantes na área de métodos numéricos, os quais consideram a rigidez volumétrica proporcionada pela pressão interna de estruturas infladas. Foram explicadas as diferentes alternativas dadas, por diferentes autores, para lidar com essa rigidez volumétrica, uma componente da rigidez externa que corresponde à relutância da pressão interna em alterar o volume da estrutura.

Em seguida, foi retomada a formulação de estruturas de membrana desenvolvida por Pauletti (2003) e realizado o aperfeiçoamento das capacidades do programa SATS (*Structural Analysis of Taut Structures*), desenvolvido pelo orientador Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti e por Daniel Mariani Guirardi (2006) em pesquisas anteriores, para a modelagem de estruturas pneumáticas. Assim, foi incorporado nesse programa pela autora, a dependência entre pressão e volume dada pela lei de Boyle-Mariotte, de forma a analisar qual a relevância dessa consideração.

Ainda, foi implementado e considerado também o efeito do enrijecimento proporcionado devido à pressão interna da estrutura, avaliando se essa rigidez volumétrica ajuda na convergência desse tipo de problema e qual a sua influência para estruturas pneumáticas. Os modelos numéricos apresentados foram resolvidos pelo Método de Newton, que considera essa parcela de rigidez deduzida analiticamente por Pauletti (2018), pelo Método da Relaxação Dinâmica, que utiliza a lei das forças e também pelo Método das Diferenças Finitas, de maneira a comparar os resultados obtidos e validar a implementação realizada no programa SATS. A Quadro 1 resume os modelos realizados com o objetivo de cada.

Quadro 1 – Modelos realizados e objetivos

Modelos realizados	Objetivos
Exemplo inicial: domo de raio 2 metros	Verificar a implementação da lei de Boyle-Mariotte
Modelo experimental e numérico: bola de pilates	Comparar os resultados experimentais com os numéricos (e, quando aplicável, alguns analíticos), mostrando a relevância da consideração da lei de Boyle-Mariotte
Domo de raio 10 metros: vento de baixa e alta velocidade	Efetuar a análise de uma estrutura que poderia ser utilizada na prática, sujeita à duas pressões de vento: uma muito próxima da pressão interna da estrutura e outra muito maior que essa pressão

Modelos realizados	Objetivos
Domo pneumático de grandes dimensões	Avaliar o efeito do acoplamento pressão-volume em um pneumático efetivamente construído e estudado em trabalhos anteriores

Fonte: Autora.

4 REVISÃO DA LITERATURA

4.1 ESTRUTURAS PNEUMÁTICAS

Para que haja o correto funcionamento das estruturas pneumáticas, é necessário que seus elementos constituintes estejam retesados, ou seja, tracionados. Além disso, as estruturas retesadas funcionam como sistema flexível, o que significa que sua forma se altera de maneira brusca conforme se modifica o carregamento ao qual estão submetidas. Dessa forma, pode-se dizer que devido a essas duas características, mas principalmente à de flexibilidade, é restringida a natureza dos esforços internos que tais estruturas podem desenvolver, pois a ação de esforços de compressão pode deixá-las instáveis.

Estas estruturas são, em sua maioria, estruturas leves e compostas por cabos e membranas, o que faz com que seu peso específico seja reduzido em duas ordens de grandeza quando comparado com uma estrutura em concreto armado ou em uma ordem de grandeza quando comparado ao de uma estrutura metálica. Assim, essas estruturas podem ser divididas em dois principais grupos: as estruturas retesadas por cabos e as estruturas de membrana. Ainda há casos em que ocorre a utilização conjunta de cabos e membranas, classificando as estruturas como retesadas mistas, sendo que essa última aplicação é muito frequente nas estruturas pneumáticas (PAULETTI, 2011).

As estruturas pneumáticas são as únicas estruturas em que os elementos trabalham todos à tração. Dentro delas, há três principais tipos que as distinguem: estrutura insuflada, que consiste em uma membrana que cobre um espaço sob uma pressão um pouco maior que a pressão atmosférica, regime esse sustentado pelo ar que entra, mantido geralmente por grandes ventiladores, e pelas perdas devidas à permeabilidade da membrana; a estrutura aspirada, na qual é empregada uma subpressão interna, e a estrutura inflada, na qual a conservação de massa pode ser assumida e que utiliza balões pressurizados que funcionam como vigas, colunas e arcos para a transferência de cargas (PAULETTI, 2010). A Figura 1 exemplifica cada um desses três tipos.

Figura 1 – Tipos de estruturas pneumáticas: a) insuflada, b) aspirada e c) inflada

Fonte: Autora, adaptado de Pauletti (2010).

4.2 ESTADO DA ARTE: ASPECTOS HISTÓRICOS E APLICAÇÕES

As estruturas pneumáticas são provavelmente um dos sistemas estruturais mais antigos de se encontrar; porém, os primeiros experimentos referentes a esse tipo de estrutura são datados do século 18, com o desenvolvimento dos balões de ar quente. Na verdade, o matemático Arquimedes, quando descobriu o efeito do empuxo, que proporcionou a possibilidade de construção de máquinas voadoras movidas ou impulsionadas por uma força.

No início do século XX o uso de pneumáticos foi introduzido no âmbito da arquitetura. No ano de 1918, o engenheiro inglês F. W. Lanchester apresentou e patenteou um sistema para a construção de hospitais de campanha, o que foi uma das primeiras propostas práticas para a construção de uma grande estrutura usando um balão. Porém, devido à falta de materiais adequados, essa ideia não foi implementada (HERZOG, 1977).

Um pouco adiante, a segunda guerra mundial marcou a aparição de um novo material, o nylon, que foi muito utilizado para a fabricação de abrigos inflados. O aumento das ações aéreas no final da guerra demandou a implementação de maiores e mais sofisticados radares sob o território americano e, para protegê-los de condições climáticas extremas (como no Alaska, por exemplo), o exército americano financiou o desenvolvimento de estruturas insufladas não-metálicas denominadas *radomes* (Figura 2), as quais evitavam também interferência de sinal desses radares (HERZOG, 1977).

Figura 2 – Primeiro protótipo de um *radome* (1948)

Fonte: Topham (2002).

Os anos 60 são marcados pelo início das aplicações comerciais das estruturas pneumáticas pela empresa *Birdair Structures* em armazéns, coberturas de piscinas, quadras esportivas e fábricas. Em 1961, foi construído o maior *radome* por essa mesma empresa no Maine, medindo 65 metros de diâmetro e capaz de resistir a ventos de 45m/s. Foi nesse período também que grupos de arquitetos surgiram por toda a Europa como reação à monotonia das construções modernistas e

muitos desses coletivos adotaram as formas infladas como sendo a ferramenta perfeita para revolucionar as noções tradicionais de arquitetura (TOPHAM, 2002). Essa geração de engenheiros e arquitetos introduzem a população em uma nova era da arquitetura, fundada nas ideias de experimentação e liberdade de criar defendidas por Richard Buckminster Fuller e possibilitadas, por sua vez, pela inovação de materiais e conhecimento adquirido em décadas passadas (WOUTERS, 2009).

No Brasil, o final dos anos 60 foi marcado pelo início da produção de tecidos sintéticos pelas indústrias nacionais, que é adequado para construir armazéns pneumáticos. Dessa forma, a primeira estrutura inflada construída no Brasil, mostrada na Figura 3, foi produzida pela Sansuy Co. em 1969 e utilizou-se um tecido de poliéster/PVC. Dessa forma, pequenas empresas privadas logo começaram a fornecer essas estruturas ao mercado, estendendo também a tecnologia a pequenas tendas (PAULETTI et al., 2013).

Figura 3 – Primeira estrutura pneumática construída no Brasil (1969)

Fonte: Pauletti, et al. (2013).

Quando a questão é o âmbito acadêmico, a primeira pessoa a introduzir as estruturas retesadas e também as pneumáticas nesse meio foi Frei Otto, especialmente acerca da busca pela forma. Como mencionado anteriormente, as estruturas pneumáticas também foram alvo de estudo de Richard Buckminster Fuller, que propôs um domo para cobrir a cidade de Nova York (1962) e é um exemplo utópico de aplicação na arquitetura, afinal a realização desse projeto iria requerer uma brusca transformação ambiental e isolamento sem sujeira, poluição, gases do efeito estufa, entre outros (CHI; PAULETTI, 2005).

A facilidade de transporte e montagem das estruturas pneumáticas logo inspirou sua utilização em exposições temporárias e itinerantes. O uso desse tipo de estrutura atingiu seu auge na EXPO'70 em Osaka, onde foram amplamente utilizadas devido à qualidade ruim do solo e por ser uma região que sofre com abalos sísmicos. Dentre os muitos pneumáticos presentes nessa exposição, o *Fuji*

Pavilions, projetado pelo arquiteto Yutaka Murata e pelo engenheiro Mamoru Kawagushi, impressionou o público pela sua forma singular, composta por 16 arcos inflados, de seção circular de 4 metros de diâmetro. Os dois arcos centrais possuíam um perfil semi-circular e, conforme a distância entre eles se tornava maior em planta, os arcos ficavam mais altos nas extremidades do pavilhão (Figura 4) (SALVADORI, 1980; CHI; PAULETTI, 2005).

Figura 4 – *Fuji Pavilions*

Fonte: Matsuyama (2016).

Entre os anos de 1974 e 1984, David Geiger, motivado e inspirado pelo sucesso da EXPO'70, desenvolveu diversos projetos utilizando reforço com cabos e membranas insufladas como coberturas de estádios nos Estados Unidos e Canadá. Os maiores dos estádios projetados, como o *Pontiac Silverdome* construído em Michigan em 1975, tinham capacidade total para mais de 60000 pessoas e cobriam mais de 40000 m². Se comparados com estádios convencionais, a utilização desse tipo de cobertura reduziu drasticamente o custo dos ingressos vendidos e elas funcionaram satisfatoriamente bem, exceto por alguns problemas operacionais ligados ao acúmulo de neve (FORSTER, 1994; CHI; PAULETTI, 2005).

Outro bom exemplo da aplicação das estruturas pneumáticas é a cobertura temporária do anfiteatro romano de Nîmes (Figura 5). Essa cobertura inflável, cujo formato se assemelha a uma lente de câmera, é fixada a uma viga em formato elíptico e apoiada por 30 postes de aço. É uma estrutura leve, que permite uma boa iluminação natural e que pode facilmente ser desmontada, de forma que no início do verão ela é retirada em poucos dias e no começo do outono é remontada. Já que esse anfiteatro é um monumento histórico, ou seja, qualquer modificação na sua estrutura é proibida, essa cobertura foi uma excelente opção, já que ela não é visível do lado de fora e mantém a integridade da estrutura. (SCHLAICH et al., 1994; LIN, 2012).

Figura 5 – Anfiteatro romano de Nîmes

Fonte: Schlaich et al. (1994).

A utilização das estruturas pneumáticas se dá, na maioria dos casos, para construções menores e temporárias, mas elas também possuem um papel importante como instalação artística e na utilização de técnicas experimentais de construção. Ainda, a tecnologia e outras diversas inovações contribuíram para a melhoria da durabilidade e relação custo benefício desse tipo de estrutura (WOUTERS, 2009). Na área do design sua utilização é ainda mais impactante, pois, com a aparição de modernos programas computacionais e materiais de ponta, não se tem restrição à novas formas (TOPHAM, 2002; CHI; PAULETTI, 2005).

Algumas aplicações mais recentes que as citadas anteriormente são: a cobertura desmontável *Coolhurst Tennis Airwall*, construída em Londres em 2006, um domo de camada única suportado por uma baixa pressão, que é mantida por meio de um ventilador e um conjunto de portas que mantém o ar enclausurado. Ela proporciona a cobertura de duas quadras de tênis durante o inverno, como proteção contra o mau tempo e pode ser montada e desmontada em até dois dias. O *Spacebuster*, cujo desenvolvimento e design foram feitos para explorar o espaço público da cidade de Nova York, em 2009. Uma bolha de polietileno e de camada única era inflada da parte de trás de um caminhão em diversos eventos que ocorriam em Manhattan e no Brooklyn, criando um espaço para mais de 80 pessoas com vista para a cidade (MCLEAN, SILVER, 2015).

4.2.1 ETFE (Etileno-tetrafluoroetileno)

O desenvolvimento da tecnologia de materiais leves possibilitou, no âmbito arquitetônico, a construção de antigos anseios utópicos. Retomando a ideia de Frei Otto e Buckminster Fuller de criar grandes domos para proteger as cidades, ela seria hoje possível graças à tecnologia do

Ethylene Tetrafluoroethylene (ETFE), desenvolvida por Vector Foiltec. Esse material é um fluoropolímero criado pelo homem, cujo componente principal é o fluorita. As chamadas almofadas de ETFE são uma alternativa ao vidro, pois são formadas por duas ou mais camadas de filme ETFE (insufladas por ar) que formam uma superfície a prova d'água, transparente e leve. São utilizadas múltiplas camadas impressas de ETFE, as quais possuem diferentes pressões internas entre as divisões e, usualmente, uma pressão muito baixa (MCLEAN, SILVER, 2015).

Algumas propriedades desse material são: possui boa resistência tanto a temperaturas extremas como química e mecânica, com ótima resistência à tração e capacidade de se deformar, produz pouca chama e fumaça, é inodoro, não é tóxico, apresenta excelente resistência às intempéries e ao envelhecimento, exceto à transmissão UV, entre outras. Além disso, a temperatura de fusão desse material é entre 254 e 279° C, o seu módulo de elasticidade é 827 MPa e sua deformação na ruptura varia entre 150% e 300% (SPECIALCHEM, 2020).

A construção do Media-ICT, em Barcelona, 2011, foi baseada em um projeto sustentável. Foram utilizadas em duas fachadas almofadas de ETFE que funcionam como uma proteção solar, deixando a luz e o calor do sol entrarem no inverno, obtendo ganho térmico, e se tornando opacas nos meses de verão para proteger e fazer sombra no interior do prédio, como pode ser visto na Figura 6. Esse controle da opacidade é feito durante o processo de fabricação e impressão dos filmes, os quais, conforme a variação da pressão interna, podem ser mais unidos ou mais separados para criar essa sombra (MCLEAN, SILVER, 2015).

Figura 6 – Detalhe da fachada com almofada ETFE

Fonte: Adaptado de Media-ICT/ ArchDaily (2010).

Uma aplicação mais recente foi realizada na estação de trem de Rennes, na França, em 2019. A estação original não era apenas uma barreira física entre o norte e o sul da cidade, mas também era

inadequada para o fluxo de visitantes, que deve dobrar nos próximos dois anos devido à construção das novas linhas de trem de alta velocidade e à nova linha de metrô. A ideia do arquiteto era receber viajantes com uma paisagem reconstruída, como um lembrete do nevoeiro e do perfil arbóreo típico da região natal Grã-Bretanha, onde a linha de trem desembarca. Para tanto, foram utilizados 3500 m² de ETFE. (TE, 2020)

Figura 7 – Nova cobertura da estação de trem em Rennes, França

Fonte: SNCF – Audic (2019).

4.2.2 Pontes infladas

As estruturas pneumáticas, por serem leves, de fácil instalação e custo relativamente baixo, estão cada vez mais sendo utilizadas em sistemas estruturais de pontes. Porém, a ideia de vencer um vão utilizando estruturas infladas não é nova. Em 1965, na Inglaterra, foi feito um protótipo militar de uma ponte inflável de 5,5m de comprimento e capaz de suportar até 14000kg. O tecido, feito de maneira hermética, era formado por camadas de borracha e neoprene e possuía um travamento interno, de forma a manter as camadas de cima e de baixo separadas por uma distância fixa. Foram colocados cabos na parte de baixo para resistir às forças de tração e o deck superior, por onde passavam os veículos, era formado por ripas de madeira individuais, as quais, conforme a estrutura de deformava, se uniam para resistir às forças de compressão (MCLEAN, SILVER, 2015).

Uma aplicação recente e similar à explicada e exemplificada acima é uma nova tecnologia, desenvolvida pela firma suíça Airlight, denominada *Tensairity* (Figura 8), que usa uma combinação de vigas pneumáticas de baixa pressão (para estabilizar e evitar que os elementos comprimidos flambem), cabos helicoidais e treliças (ideias inspiradas pelos artistas Buckminster Fuller e Kenneth Snelson). Esse novo tipo estrutural possui todas as vantagens de uma viga pneumática comum: baixo peso, fácil montagem, baixo custo de instalação e tamanho compacto para armazenamento, mas com uma vantagem adicional de suportar cargas como as vigas de aço tradicionais (MCLEAN, SILVER, 2015).

Figura 8 – Estrutura *Tensairity* de 8m de comprimento

Fonte: Tensairity Solutions (Airlight Ltd) (2002).

Outra proposta inovadora é a *Bouncing Bridge*, representada na Figura 9, um projeto realizado na França em 2012. Caso fosse construída, essa ponte seria formada por três módulos infláveis, com 30m de diâmetro cada, estabilizada por meio de cabos e com grandes trampolins no meio de cada. Seu *design* foi feito especificamente com materiais leves, com uma membrana de PVC, a malha do trampolim e ar, onde cada grande arco seria tracionado com 3700m³ de ar. Esse projeto foi feito para ser instalado próximo à ponte *Bir-Hakeim*, cruzando o rio Sena em um ponto específico, mas poderia ser facilmente adaptada para cruzar vãos maiores ou menores (MCLEAN, SILVER, 2015).

Figura 9 – *Bouncing Bridge*

Fonte: Cristea (2012).

4.2.3 Cascas de concreto

A utilização de estruturas pneumáticas como busca da forma (ou até mesmo como moldes) é antiga e uma das primeiras aplicações ocorreu nos anos de 1926 e 1931 por Nose, para a produção de bueiros e tubos de concreto. Ele usava estruturas infláveis tipo tubo, as montava em estruturas externas (como, por exemplo, tábuas de madeira), preenchia o espaço restante com concreto e, por fim, ele esvaziava e removia a membrana. Depois, em 1941, Neff foi o primeiro a inventar uma

tecnologia de maneira a construir casas utilizando formas pneumáticas com um bom custo benefício (KROMOSER; HUBER, 2016).

No seu método, a membrana, com uma forma pré-definida, era produzida primeiro e depois amarrada ao chão nas suas extremidades para evitar que ela se levantasse. Assim, o reforço era montado e o concreto despejado na membrana em múltiplas camadas até que a espessura desejada fosse obtida. Por fim, a membrana era esvaziada e removida e as janelas e portas eram cortadas. Porém, Neff se deparou com o problema de que as forças de tração provocavam rachaduras em toda a circunferência da base de suas cascas e, em 1952, ele melhorou o seu método construtivo adicionando “envoltórios” em toda a borda da estrutura, de forma a absorver as forças de tração (KROMOSER; HUBER, 2016).

Com o passar dos anos foram efetivadas várias patentes e desenvolvidos diversos métodos construtivos utilizando as estruturas pneumáticas como formas, alguns mais inovadores e outros seguindo a linha dos dois métodos citados anteriormente. Em 1969, por exemplo, Bini (1969) inventou um método construtivo alternativo para as casas feitas a partir de cascas. Em oposição aos métodos citados anteriormente, ele antes produzia uma casca de concreto plana e depois a transformava em uma casca de dupla curvatura. Essa membrana era fixada dentro de um encaixe, o qual possuía um tubo pneumático interno que era inflado e proporcionava a direção circunferencial à casca (KROMOSER; HUBER, 2016).

O método construtivo mais novo e mais preciso, proposto por Kromoser e Kollegger, 2014 e descrito também em Kromoser e Huber, 2016, denominado *Pneumatic Forming of Hardened Concrete (PFHC)*, utiliza a técnica proposta por Bini de uma maneira inovadora. Esse método representa uma nova maneira de construir cascas de dupla curvatura de forma econômica e eficiente em termos de recursos. A casca plana de concreto endurecido é levantada e transformada em uma casca curva com a ajuda da forma pneumática e tensionando os cordões (ou tubos) de pós-tração colocados ao redor da borda da estrutura. Essa alteração na forma causa grandes deformações na direção circunferencial, e, dessa forma, é preciso deixar espaços na casca plana, que devem ser previstos quando é realizada a busca da forma dessa estrutura. Uma ilustração desse método construtivo é mostrada na Figura 10.

Figura 10 – Ilustração da construção de uma casca de concreto utilizando o método *PFHC*

Fonte: Kromoser; Kollegger (2014).

A aplicação prática, feita em diferentes etapas de produção, foi realizada em 2012, onde o primeiro protótipo com 10m de diâmetro, 3,5m de altura e 50mm de espessura foi construído na Áustria, para testar a viabilidade do método proposto (Figura 11). Depois, em 2014, um segundo protótipo também construído na Áustria, com dimensões de 17,6x10,8m e altura igual a 2,9m, foi feito para testar a viabilidade deste mesmo método construtivo, só que em uma estrutura maior, que possuísse uma forma geométrica livre mais complicada e maior curvatura dos elementos. (KROMOSER; KOLLEGER, 2015).

Figura 11 – Primeiro protótipo construído utilizando o método *PFHC* (2012)

Fonte: Kromoser; Huber (2016).

Nesse mesmo contexto, outra aplicação das fôrmas pneumáticas se dá na criação de cascas feitas de gelo em regiões frias e com neve. Nos anos de 1980, foi desenvolvido por Kokawa um método construtivo relativamente simples, mecanicamente razoável e econômico para essas grandes cascas. O primeiro passo era gerar uma forma pneumática, inflando uma membrana bidimensional coberta com uma rede de cordas que eram ancoradas na fundação de neve. Em seguida, a membrana era coberta, por meio de ventiladores, com uma camada fina de gelo (espessura menor que 1cm), jatos de água e depois esperava essa congelar naturalmente. Por fim, esse processo era repetido até que se encontrasse a espessura desejada e depois removia-se a membrana e as cordas para reuso. Um exemplo mais recente dessa aplicação, mostrado na Figura 12, foi realizado pelos alunos da universidade de Tokai, no inverno de 2012, por meio da construção de um domo não esférico de 25m, que depois de construído foi iluminado e utilizado para um concerto de jazz (KOKAWA; WATANABE, 2012).

Figura 12 – Forma pneumática e casca final obtida (2012)

Fonte: Kokawa; Watanabe (2012).

4.3 ESTUDOS ENVOLVENDO ANÁLISES ESTRUTURAIS POR MÉTODOS NUMÉRICOS

As cargas de pressão atuantes em uma estrutura são provenientes, geralmente, de um gás, um fluido ou devido à ação do vento e, na maioria dos casos, são consideradas como sendo estáticas e uniformes com relação à deformação a ser considerada em cada caso. Porém, sabe-se que essa consideração pode ser um pouco perigosa quando se trata da segurança de uma estrutura, até mesmo quando apenas pequenas deformações são consideradas. Se a pressão interna for primordial para formar e manter uma estrutura tensionada e que suporte carregamentos externos, como é o caso de pneus e *airbags*, a variação do volume interno com relação a essas cargas tem um efeito maior ainda na pressão local e é o que acontece também com os pneumáticos no geral.

As estruturas pneumáticas são um caso particular, já que a pressão interna também proporciona uma rigidez volumétrica, uma componente da rigidez externa que corresponde à relutância da pressão em alterar o volume da estrutura. Alguns autores apresentam diferentes alternativas para lidar com essa variação de volume:

- Bonet et al. (2000) apresenta uma formulação, a partir de uma configuração de referência, que pode ser utilizada para membranas que possuem grandes deslocamentos, grandes tensões e material hiperelástico ortótropo, o qual possui diferentes propriedades nas direções do urdume e da trama da membrana (que não é o foco de estudo desse trabalho). É realizada a linearização das equações que regem a energia potencial do sistema, apresentadas na forma variacional, e a solução é encontrada utilizando o Método de Newton. Porém, de forma a manter a convergência quadrática associada a esse método, a conservação de massa do gás enclausurado introduz uma contribuição na matriz tangente dada por uma matriz cheia e, ainda, é necessário considerar os termos provenientes da variação de direção da carga de pressão. Dessa maneira, é utilizada uma solução em duas

etapas, similar à realizada no método da corda (ou *arc length method*), que faz com que não seja necessário resolver o sistema de equações com uma matriz cheia. Para validar a formulação apresentada, são apresentados 3 exemplos numéricos, que, além da validação, mostram a necessidade de inclusão dessa parcela adicional, relacionada ao gás interno, na matriz de rigidez tangente, de forma que as características adequadas de convergência sejam atingidas.

- Rumpel e Schweizerhof (2003), por sua vez, descrevem o problema por meio do trabalho virtual externo da força de pressão. A linearização da correspondente expressão, necessária para a análise não linear e solução pelo Método de Newton, gera termos adicionais para a dependência do volume. Analisando esses termos, é possível provar que o sistema é conservativo pela simetria da forma linearizada. Ainda, em conjunto com o método da corda (ou *arc length method*), a forma particular da matriz de rigidez pode ser utilizada para alcançar uma solução eficiente e é concluído e provado que a consideração dessa dependência volumétrica aumenta a rigidez da estrutura que possui um volume fechado.
- Haßler e Schweizerhof (2008) de forma a complementar os estudos dedicados a verificar e mostrar a dependência entre as cargas de um gás ou fluido internos à uma membrana inflada e o deslocamento dessa, realizaram um estudo focado na influência estática de um gás e um fluido incompressível (ou compressível) de alta densidade na modificação do tamanho e formato de uma estrutura pneumática. Assim, foi mostrada uma formulação geral de elementos finitos para os casos onde se têm um sistema de múltiplas câmaras, cheias com gás e um fluido compressível de alta densidade adicional. Ao introduzir dois parâmetros na parcela da rigidez, é possível reduzir a formulação para um pneumático clássico ou com carga hidrostática mencionadas nos trabalhos anteriores.
- Jrusjrunkiat (2009) apresenta em sua tese de Doutorado a influência da pressão de um gás e/ou fluido sob uma estrutura inflada sujeita a grandes deslocamentos e revela com seu estudo que de fato esses parâmetros fornecem uma rigidez adicional à estrutura (principalmente àquelas altamente pressurizadas com gás ou com um fluido de alta densidade) e que a taxa de convergência é significativamente aprimorada ao considerar essa atuação. São mostrados tanto problemas independentes quanto dependentes do tempo e os exemplos numéricos mostram não apenas a eficiência do modelo, mas também a necessidade de considerar a variação pressão/volume conforme a variação do vetor normal à superfície da membrana, parcela essa que é muitas vezes desprezada de modo a simplificar a modelagem. A base para a modelagem matemática a partir do MEF é derivada do Princípio dos Trabalhos Virtuais para as forças de pressão de uma superfície curva no

espaço tridimensional e, posteriormente, é realizada a linearização, de modo a gerar equações de equilíbrio incrementais. Dessa forma, com a discretização, um sistema de equações algébricas para o Método de Newton é gerado, como já descrito nos trabalhos anteriores.

- Coelho (2012), para estudar as estruturas pneumáticas, utiliza e retoma as formulações presentes em Berry e Yang (1996), Bonet et al. (2000), Rumpel e Schweizerhof (2003), Rumpel (2003) e Haßler e Schweizerhof (2008). Como, ao considerar a força dependente da deformação, é adicionada à formulação uma parcela de rigidez constituída por uma matriz cheia e a fatoração triangular dessa, por sua vez, requer muito esforço computacional, é utilizado, para contornar esse problema, a fórmula de Woodbury, onde é obtida a matriz inversa da matriz de rigidez e essa é atualizada conforme os tensores são atualizados, sendo assim não há a necessidade de executar uma nova fatoração da matriz de rigidez. Ainda, para validar a formulação da dependência pressão-volume, soluções analíticas já desenvolvidas para uma membrana circular inflada presa na sua borda são mostradas.

Contudo, no presente trabalho, a consideração da nova parcela da matriz de rigidez da estrutura devida à pressão interna se deu pela nova formulação desenvolvida por Pauletti (2018), baseada em suas formulações prévias para estruturas de membrana e será apresentada na sequência desse trabalho.

4.4 FORMULAÇÕES E EQUACIONAMENTOS APLICÁVEIS PARA ESTRUTURAS PNEUMÁTICAS

4.1.1 Simplificação do elemento finito de membrana

Embora as estruturas pneumáticas, no geral, serem constituídas apenas por cabos e membranas, que são elementos estruturais que por si só podem ser modelados matematicamente com certa facilidade, verifica-se que ao se ter esses elementos trabalhando em conjunto, o problema se torna relativamente complexo devido à não linearidade envolvida. Assim, o problema do equilíbrio de sistemas não lineares pode ser descrito por equações diferenciais, cuja solução necessita, na maioria dos casos, de um processo de discretização, reduzindo a um sistema de equações não lineares.

No caso específico de cabos e membranas, há uma maneira mais direta de se obter essas equações algébricas, já que os cabos podem ser associados a uma série de barras retas conectadas que trabalham apenas sob força axial de tração e as superfícies de membrana, por sua vez, podem ser consideradas como uma série de faces planas e triangulares, também unidas nas suas bordas em comum e, assim, trabalhando sob um campo de tensões plano. Portanto, é feita uma analogia aos problemas naturalmente discretos. É importante ressaltar que toda a formulação descrita nessa seção foi retirada de Pauletti (2003) e também é apresentada em trabalhos subsequentes desse mesmo autor.

O problema de encontrar a configuração de equilíbrio de uma membrana pode ser transformado em encontrar um vetor de deslocamento $\mathbf{u}^*$, assim como descrito na Equação (1).

$$\mathbf{g}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{p}(\mathbf{u}^*) - \mathbf{f}(\mathbf{u}^*) = \mathbf{0} \quad (1)$$

Onde $\mathbf{g}(\mathbf{u})$ é o vetor das forças desbalanceadas ou o vetor erro, $\mathbf{p}(\mathbf{u})$ é o vetor de forças internas e $\mathbf{f}(\mathbf{u})$ é o vetor de forças externas. Geralmente, esse sistema pode ser resolvido utilizando o Método de Newton (Equação (2)).

$$\mathbf{u}_{i+1} = \mathbf{u}_i - \left(\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} \bigg|_{\mathbf{u}_i} \right)^{-1} \Rightarrow \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) = \mathbf{u}_i - (\mathbf{K}_t^i)^{-1} \mathbf{g}(\mathbf{u}_i) \quad (2)$$

A matriz de rigidez tangente $\mathbf{K}$ é definida pela Equação (3).

$$\mathbf{K} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial \mathbf{p}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{K}_{\text{int}} + \mathbf{K}_{\text{ext}} \quad (3)$$

Sendo $\mathbf{K}_{int}$ a matriz de rigidez interna, que engloba as parcelas da matriz de rigidez geométrica e constitutiva, e $\mathbf{K}_{ext}$ é a matriz de rigidez externa.

Existem diversas formulações elaboradas (como as apresentadas em Bonet (1997, 2000) e Pimenta (2002)) para realizar a análise não linear de membranas, mas elementos mais simples também são suficientes para resolver uma grande quantidade de problemas práticos, já que, geralmente, as deformações são limitadas a uma pequena porcentagem. Assim, de forma a apresentar uma abordagem mais simplificada, mas que mantenha as características principais dos sistemas retesados, foi considerado o elemento finito triangular proposto por Argyris, et al. (1974) que é baseado nas deformações naturais medidas ao longo dos lados do elemento.

O elemento, denominado de *CST* (*constant strain triangle*), tem interpolação linear para o campo dos deslocamentos e, como consequência disso, os campos de tensão e deformação no elemento são constantes. Originalmente, o que fora apresentado por Turner et al. (1956), era um elemento onde cada nó possuía dois graus de liberdade, associados à translação no plano. Porém, no caso de membranas, ele assume uma configuração no espaço tridimensional e tem, com relação ao sistema de coordenadas globais, nove graus de liberdade, diferente dos seis graus de liberdade do *CST* original (PAULETTI, 2003).

Para a análise não linear, o elemento de membrana é usualmente indicado em três configurações diferentes: a configuração de referência Ω^r , que corresponde ao elemento no seu estado indeformado, ou seja, sem nenhuma tensão; a configuração inicial Ω^0 , na qual ele já está deformado e sujeito a um campo de tensões; e a configuração corrente Ω^c , que é a trajetória feita por esse elemento a partir da configuração inicial (Figura 13). Tanto os nós do elemento quanto os seus lados são numerados no sentido anti-horário, de forma que esse último tem numeração igual ao nó que é oposto a ele.

Figura 13 – Três possíveis configurações de referência de um elemento CST

Fonte: Autora, adaptado de Pauletti (2003).

As coordenadas nodais seguem um sistema cartesiano global e , por sua vez, o sistema local, que é indicado com um acento circunflexo, é adaptado para cada configuração do elemento, de forma que o eixo $\hat{x}$ fique alinhado com o lado 3, orientado do nó 1 para o nó 2, enquanto o eixo $\hat{z}$ é ortogonal ao plano do elemento. Ainda, de maneira análoga, o sistema de coordenadas globais também pode ser adaptado ao elemento em sua configuração de referência (PAULETTI, 2003). Dessa forma, as coordenadas globais do ponto $P \in \Omega^e$ são dadas por $\mathbf{x}_p = \mathbf{x}_p^0 + \mathbf{u}_p$, onde $\mathbf{x}_p^0$ é o vetor da posição do ponto P na configuração inicial do elemento e $\mathbf{u}_p$ é o vetor dos deslocamentos nodais, que define a posição corrente desse ponto (Figura 14).

Figura 14 – Definição do vetor posição $\mathbf{x}_p$

Fonte: Autora, adaptado de Pauletti (2003).

As coordenadas, no sistema global, dos pontos nodais do elemento na configuração de referência são dadas por $\mathbf{x}_i = \mathbf{x}_i^0 + \mathbf{u}_i$, $i = 1, 2, 3$, onde $\mathbf{u}_i$ são os deslocamentos nodais do elemento, que podem ser coletados em um vetor de deslocamentos nodais, descrito por $\mathbf{u} = [\mathbf{u}_1^T \quad \mathbf{u}_2^T \quad \mathbf{u}_3^T]^T$. Os comprimentos dos lados do elemento podem ser obtidos por $l_i = \|\mathbf{l}_i\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|$, e os versores, paralelos ao lado do elemento, são dados por $\mathbf{v}_i = \mathbf{l}_i / \|\mathbf{l}_i\|$, com os índices $i, j, k = 1, 2, 3$ permutando ciclicamente para ambos.

Como fora descrito na seção anterior, é possível expressar o vetor das forças nodais $\mathbf{P} = \mathbf{P}(\mathbf{u})$, agindo sobre um elemento, como produto entre um operador geométrico $\mathbf{C} = \mathbf{C}(\mathbf{u})$ e um vetor de forças internas $\mathbf{N} = \mathbf{N}(\mathbf{u})$. Assim, são utilizadas as intensidades das “forças de interação” entre os nós do elemento, ou ainda, como definido por Argyris, et al. (1974), vetor de forças naturais, dado pela Equação (4).

$$\mathbf{N} = [N_1 \quad N_2 \quad N_3]^T \quad (4)$$

É possível definir, ainda, um vetor de deslocamentos naturais $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{u})$ que agrupa as variações de comprimento dos lados, conforme a Equação (5). Vale ressaltar que os vetores $\mathbf{N}$ e $\mathbf{a}$ agrupam grandezas escalares, ou seja, suas expressões independem do sistema de coordenadas adotado.

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} l_1 \\ l_2 \\ l_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} l_1^r \\ l_2^r \\ l_3^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta l_1 \\ \Delta l_2 \\ \Delta l_3 \end{bmatrix} \quad (5)$$

Seguindo a Equação (4), encontrada acima, é possível reescrever as forças nodais agindo sobre um elemento pela Equação (6).

$$\mathbf{P} = \mathbf{CN} = \begin{bmatrix} N_2 \vec{v}_2 - N_3 \vec{v}_3 \\ N_3 \vec{v}_3 - N_1 \vec{v}_1 \\ N_1 \vec{v}_1 - N_2 \vec{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 \\ -\mathbf{v}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} \quad (6)$$

Assim, é definido o operador geométrico (Equação (7)).

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{v}_2 & -\mathbf{v}_3 \\ -\mathbf{v}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{v}_3 \\ \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_2 & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (7)$$

Observa-se, no entanto, que definindo o vetor dos deslocamentos naturais conforme a Equação (5), é fácil obter sua derivada com relação ao vetor de deslocamentos cartesianos, obtendo a

Equação (8) e, conseqüentemente, a Equação (9), o que indica que as grandezas $\mathbf{N}$ e $\mathbf{a}$ são energeticamente conjugadas.

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{\partial l_1}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \\ \left(\frac{\partial l_2}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \\ \left(\frac{\partial l_3}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & -\mathbf{v}_1^T & \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T & \mathbf{0} & -\mathbf{v}_2^T \\ -\mathbf{v}_3^T & \mathbf{v}_3^T & \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (8)$$

$$\frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{C}^T \quad (9)$$

É possível também definir o campo de tensões $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$ no domínio de um *CST*, dentro das hipóteses simplificadoras adotadas e em um estado plano de tensões (Equação (10)).

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \hat{\sigma}_x & \hat{\tau}_{xy} & 0 \\ \hat{\tau}_{xy} & \hat{\sigma}_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T \quad (10)$$

As forças naturais N_i podem ser entendidas como as resultantes de três campos de tensões normais impostos σ_i , chamados de tensões naturais, onde cada um age em uma direção paralela ao nó de cada elemento (Equação (11)). Dessa forma, elas equilibram esse campo de tensões naturais, que é constante no interior do elemento. Ainda, o equilíbrio é expresso na configuração de referência, que se confunde com a configuração inicial dentro da aproximação adotada.

$$N_i = \frac{t}{2} h_i \sigma_i = \frac{t}{2} \sigma_i \frac{2A}{l_i} = \sigma_i \frac{V}{l_i} \quad (11)$$

Onde, A é a área do elemento na configuração de referência, t é a espessura do elemento e $V = At$ é o seu volume. As tensões naturais σ_i são coletadas em um vetor de tensões naturais (Equação (12)) e, ainda, define-se uma matriz de comprimentos (Equação (13)). Por fim, é possível escrever as forças naturais de maneira mais simplificada (Equação (14)).

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} \quad (12)$$

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} l_1 & 0 & 0 \\ 0 & l_2 & 0 \\ 0 & 0 & l_3 \end{bmatrix} \quad (13)$$

$$\mathbf{N} = \mathbf{V}\mathbf{L}^{-1}\boldsymbol{\sigma}_n \quad (14)$$

Agora, deseja-se encontrar a relação entre as tensões naturais σ_i , definidas acima, e as componentes cartesianas das tensões de Cauchy $\hat{\boldsymbol{\sigma}}$. Efetuando algumas substituições e realizando um trabalho matemático, a Equação (15) define, de maneira compacta, a relação desejada.

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{T}^{-T}\hat{\boldsymbol{\sigma}} \quad (15)$$

É possível retomar o vetor das tensões de Cauchy $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\sigma_{\hat{x}} \quad \sigma_{\hat{y}} \quad \tau_{\hat{x}\hat{y}}]^T$ e, ainda, definir a matriz de transformação (Equação (16)).

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma & -\sin \gamma \cos \gamma \\ \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (16)$$

Por fim, é possível definir a matriz de rigidez tangente para o elemento de Argyris, dada pela somatória da rigidez geométrica, constitutiva e externa. Para obter essa matriz de rigidez tangente, são utilizadas variáveis naturais de forma a simplificar a derivada dos elementos da matriz. As letras minúsculas representam os vetores de força no elemento e rigidez tangente. Retomando o vetor de forças desbalanceadas $\mathbf{g} = \mathbf{p} - \mathbf{f}$, obtém-se a Equação (17) e, depois de alguns desenvolvimentos matemáticos, a Equação (18).

$$\mathbf{k}_t = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{p} - \mathbf{f}) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{C}\mathbf{N}) - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} + \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} - \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{k}_g + \mathbf{k}_c - \mathbf{k}_{ext} \quad (17)$$

$$\mathbf{k}_g = \mathbf{N}^T \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{u}} = \begin{bmatrix} \left(\frac{N_2}{l_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) + \frac{N_3}{l_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) \right) & -\frac{N_3}{l_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) & -\frac{N_2}{l_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \\ -\frac{N_3}{l_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) & \left(\frac{N_1}{l_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) + \frac{N_3}{l_3} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_3 \mathbf{v}_3^T) \right) & -\frac{N_1}{l_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) \\ -\frac{N_2}{l_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) & -\frac{N_1}{l_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) & \left(\frac{N_1}{l_1} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T) + \frac{N_2}{l_2} (\mathbf{I}_3 - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) \right) \end{bmatrix} \quad (18)$$

Para a matriz de rigidez constitutiva, sabe-se que o vetor das forças naturais é, de forma um tanto complicada, função dos deslocamentos do elemento, mas, apesar disso, a matriz de rigidez constitutiva do elemento pode ser escrita como mostra a Equação (19).

$$\mathbf{k}_c = \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{C} \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{a}} \frac{\partial \mathbf{a}}{\partial \mathbf{u}} = \mathbf{C} \mathbf{k}_n \mathbf{C}^T \quad (19)$$

Onde $\mathbf{k}_n = \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial \mathbf{a}}$ é a matriz de rigidez natural do elemento. Buscando tornar o elemento o mais simples possível, supõe-se que o seu comportamento é elástico linear e, dessa forma, irá existir uma relação linear entre as forças naturais internas e os deslocamentos (Equação (20)), onde $\mathbf{k}_n^r$ é a matriz de rigidez natural.

$$\mathbf{N} = \mathbf{k}_n^r \mathbf{a} \quad (20)$$

Além disso, a elasticidade linear restringe a formulação para deformações infinitesimais e, como consequência, as configurações inicial e de referência se confundem, sendo possível expressar o equilíbrio do elemento em qualquer uma das configurações. Ainda, as tensões iniciais podem ser simplesmente adicionadas às variações de tensão para obter a tensão total. Os materiais elástico lineares isotrópicos, que trabalham sob tensão plana, obedecem a Equação (21).

$$\hat{\boldsymbol{\sigma}} = \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} \quad (21)$$

De onde é possível definir os vetores $\hat{\boldsymbol{\sigma}} = [\hat{\sigma}_x \quad \hat{\sigma}_y \quad \hat{\tau}_{xy}]^T$ e $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = [\hat{\varepsilon}_x \quad \hat{\varepsilon}_y \quad \hat{\gamma}_{xy}]^T$, que são, respectivamente, as tensões nominais e as deformações infinitesimais cartesianas, tomadas de Ω^r para Ω^c e $\hat{\mathbf{D}}$ é uma matriz constitutiva definida a partir da Lei de Hooke Generalizada, em estado plano de tensões (Equação (22)).

$$\hat{\mathbf{D}} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (22)$$

É necessário encontrar uma expressão análoga à Equação (21) e que relacione o vetor de tensões naturais com um vetor de deformações naturais, dado a partir dos deslocamentos naturais e descrito pela Equação (23). Ainda, a Equação (24) mostra como $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ se relaciona com $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$ por meio da transformação $\mathbf{T}_r$.

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T = \begin{bmatrix} \frac{\Delta l_1}{l_1^r} & \frac{\Delta l_2}{l_2^r} & \frac{\Delta l_3}{l_3^r} \end{bmatrix}^T = \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{a} \quad (23)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{T}_r \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma_r & \sin^2 \gamma_r & -\sin \gamma_r \cos \gamma_r \\ \cos^2 \beta_r & \sin^2 \beta_r & \sin \beta_r \cos \beta_r \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{\hat{x}} \\ \varepsilon_{\hat{y}} \\ \gamma_{\hat{x}\hat{y}} \end{bmatrix} \quad (24)$$

Assim, utiliza-se o Teorema dos Deslocamentos Virtuais e retoma-se a Equação (12), que é um vetor energeticamente conjugado com $\boldsymbol{\varepsilon}_n$, de modo que para qualquer campo de deslocamentos $\delta \hat{\mathbf{u}}$ e correspondentes deformações virtuais $\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}$, a Equação (25) seja sempre válida.

$$\delta \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \hat{\boldsymbol{\sigma}} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \hat{\boldsymbol{\sigma}}_n \quad (25)$$

Dessa forma, já que o equilíbrio linear cinemático pode ser descrito na configuração inicial e que essa, por sua vez, se confunde com a configuração de referência, é possível substituir as Equações (24) e (15) na Equação (21), obtendo a Equação (26).

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\mathbf{D}} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}} = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{T}_r^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{D}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n \quad (26)$$

Desprende-se daí a matriz constitutiva natural $\mathbf{D}_n = \mathbf{T}_r^{-T} \hat{\mathbf{D}} \mathbf{T}_r^{-1}$. Ainda, lembrando que as configurações inicial e de referência se confundem, a Equação (14) é retomada e pode ser reescrita, com $\mathbf{L}_r$ no lugar de apenas $\mathbf{L}$ e, também, considerando as Equações (23) e (26), encontrando a Equação (27). Ainda, é possível comparar as Equações (22) e (26), definindo a matriz de rigidez natural (Equação (28)).

$$\mathbf{N} = V^r \mathbf{L}_r^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n = V^r \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{D}_n \boldsymbol{\varepsilon}_n = (V^r \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{D}_n \mathbf{L}_r^{-1}) \mathbf{a} \quad (27)$$

$$\mathbf{k}_n = V^r \mathbf{L}_r^{-1} \mathbf{D}_n \mathbf{L}_r^{-1} \quad (28)$$

Por fim, substituindo a Equação (28) na (19), obtém-se a parcela de rigidez constitutiva $\mathbf{k}_c$. Além disso, as forças naturais descritas pela Equação (20) contribuem para a parcela de rigidez geométrica $\mathbf{k}_g$, dada pela Equação (18).

4.4.2 Rigidez externa

Os elementos de membrana são suscetíveis a grandes deslocamentos e, em geral, não é possível descartar a variação dos carregamentos externos que atuam sobre eles, os quais são decorrentes das mudanças de configuração da estrutura. Dessa forma, além das parcelas de rigidez geométrica e constitutiva, é preciso considerar, para cada elemento de membrana, uma possível parcela de rigidez externa, sendo possível escrever um vetor de forças externas, dado pela Equação (29).

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_p = \frac{m^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} - \frac{\Delta p A^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (29)$$

Os termos podem ser identificados como sendo $\mathbf{f}_g$ as forças devidas ao peso próprio do elemento e $\mathbf{f}_p$ as forças devidas a uma pressão transversal devida ao vento, por exemplo. Ainda, a massa do elemento é $m^e = V_0^e \rho_0$, onde V_0^e e ρ_0 são, respectivamente, o volume do elemento e a massa específica do material na configuração de referência, $\mathbf{g}$ é o vetor da aceleração da gravidade, $A = A^e(\mathbf{u}^e)$ é a área do elemento e $\mathbf{n} = \mathbf{n}^e(\mathbf{u}^e)$ é um versor normal, na configuração corrente.

É considerado que em cada elemento da membrana está atuando uma pressão dada por $\Delta p = p_1 - p$, onde p_1 e p são as pressões que atuam na face externa e interna do elemento, respectivamente. A face externa do pneumático sofre uma pressão transversal dada por $p_1 = p_{atm} + \Delta p_w$, onde Δp_w é a flutuação da pressão com relação à pressão atmosférica, geralmente produzida pela ação do vento, e a face interna uma pressão $p = p_{atm} + \Delta p_i$, sendo Δp_i a pressão interna do pneumático. Dessa forma, os valores de pressão relativos Δp_w e Δp_i podem ser considerados, uma vez que a parcela da pressão atmosférica p_{atm} se cancela. São assumidos valores constantes para esses termos e é considerado que o sentido do versor está orientado saindo do lado 1, assim, o vetor de pressão $\Delta p > 0$ atua no sentido oposto à orientação do elemento, como pode ser visto na Figura 15.

Figura 15 – Orientação dos vetores atuantes no elemento

Fonte: Autora.

O carregamento do peso próprio é constante, ou seja, não contribui para a rigidez. A partir de agora, é possível subdividir o problema em dois principais casos, sendo que a formulação da nova parcela de rigidez volumétrica a ser apresentada na seção 5.2.2 foi desenvolvida por Pauletti (2018).

4.4.2.1 Pressão independente do deslocamento

Assumindo que a intensidade da pressão não varia ao longo do elemento e sabendo-se que $\mathbf{A}\mathbf{n} = \frac{(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2)}{2}$, a rigidez externa pode ser descrita pela Equação (30). Efetuando alguma matemática, essa mesma rigidez pode ser reescrita por meio da Equação (31).

$$\mathbf{k}_{ext} = -\frac{\partial \mathbf{f}_{pv}}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\Delta p}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \quad (30)$$

$$\mathbf{k}_{ext} = \frac{\Delta p}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{\Lambda}_3 \\ \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{\Lambda}_3 \\ \mathbf{\Lambda}_1 & \mathbf{\Lambda}_2 & \mathbf{\Lambda}_3 \end{bmatrix} \quad (31)$$

Onde $\mathbf{\Lambda}_i = \text{skew}(\mathbf{l}_i)$, $i = 1, 2, 3$, são matrizes anti-simétricas, cujos vetores axiais são dados por $\mathbf{l}_i = l_i \mathbf{v}_i$. Dessa forma, $\mathbf{k}_{ext}$ é uma matriz assimétrica, o que ressalta o fato de que as cargas de vento (ou seja, pressão normal) são geralmente não conservativas. No entanto, se a revisão da equação 37 for aprofundada, é possível verificar que uma membrana elástica, com condição de contorno fixa e sob uma pressão constante é um sistema conservativo, como é demonstrado por Sewell (1967).

Figura 16 – Elementos triangulares que compartilham um nó interno m

Fonte: Autora, adaptado de Pauletti (2003).

Na Figura 16, a partir de um nó m são derivados n elementos triangulares, ou seja, esse nó está no interior de um polígono fechado com n lados, cujos vetores externos são $\mathbf{l}_i$, $i = 1, \dots, n$ e os vetores internos são $\mathbf{l}_{n+i} = \mathbf{x}_m - \mathbf{x}_i$, apontando do nó i para o nó m . Dessa forma, para $m = 1, \dots, n$, as matrizes subdiagonais da matriz de rigidez externa $\mathbf{k}_{ext}$ são dadas pela Equação (32).

$$\mathbf{k}_{mm}^{ext} = \frac{p}{6} \sum_{i=1}^n \text{skew}(\mathbf{l}_i) = \frac{p}{6} \text{skew} \left(\sum_{i=1}^n \mathbf{l}_i \right) = \mathbf{0} \quad (32)$$

Os termos cruzados podem ser dados pelas Equações (33) e (34).

$$\mathbf{k}_{mi}^{ext} = \frac{p}{6} (\Lambda_{i-1} - \Lambda_i) \quad (33)$$

$$\mathbf{k}_{im}^{ext} = \frac{p}{6} (\Lambda_{n+i+1} - \Lambda_{n+i-1}) = \frac{p}{6} (-\Lambda_{i-1} - \Lambda_i) = \frac{p}{6} (\Lambda_{i-1}^T + \Lambda_i^T) = (\mathbf{k}_{im}^{ext})^T \quad (34)$$

Assim, nota-se que todos os termos da rigidez externa associados a um nó genérico, interior à malha, são simétricos. Ainda, se os nós da borda forem fixos, não haverá nenhum grau de liberdade associado a eles, o que fará com que matriz global $\mathbf{k}_{ext}$ seja simétrica e o sistema conservativo. Porém, se de algum modo a pressão variar ao longo da superfície, não haverá nenhuma garantia de que a matriz $\mathbf{k}_{ext}$ vai ser simétrica, mesmo que as condições de contorno sejam restritas.

4.4.2.2 Sistemas pneumáticos

Como comentado anteriormente, nas estruturas infladas a pressão interna também proporciona uma rigidez volumétrica, que é uma parcela da matriz de rigidez externa que corresponde à relutância do invólucro de pressão em alterar o volume da estrutura e quando maior for a pressão

interna, mais relevante é esse termo. Seja a membrana pneumática, como mostrada na Figura 17, onde V_0 e $V(u) = V_\Gamma$ são, respectivamente, o volume inicial e o volume atual internos.

Figura 17 – Configuração inicial e final de um pneumático genérico

Fonte: Autora, adaptado de Bonet et al. (2000).

Ainda, é considerada a lei de Boyle-Mariotte para condições adiabáticas, como dado pela Equação (35).

$$p(u) = \frac{p_0 V_0}{V(u)} \quad (35)$$

Os termos p_0 e p correspondem, respectivamente, ao valor absoluto inicial e final da pressão interna do pneumático. O volume atual, que é função do deslocamento, pode ser substituído por $V_\Gamma = V_0 + \Delta V(u)$, ou seja, ele é a somatória do volume inicial com a variação do volume interno (também função do deslocamento). Com isso, é possível gerar um exemplo genérico de um pneumático com pressão interna inicial $p_0 = 1 \text{ atm}$ e volume interno $V_0 = 1 \text{ m}^3$, com variações de pressão negativas e positivas, como pode ser visto na Figura 18. É interessante notar que a mudança da pressão interna final em função da variação do volume inteiro não é linear. Quando a variação do volume é por exemplo $\Delta V = -0,5 \text{ m}^3$, ou seja, o volume interno diminui, a pressão interna final é $p = 2 \text{ atm}$, o dobro da pressão inicial. Já quando o volume aumenta e tem seu valor dobrado, ou seja, $\Delta V = 1 \text{ m}^3$, a pressão interna final é um quarto da encontrada anteriormente. Assim, deseja-se verificar o quão importante essa variação de volume é para a rigidez de uma estrutura inflada.

Figura 18 – Pressão interna final em função da variação do volume interno

Fonte: Autora.

Dessa forma, o volume do gás enclausurado pode ser obtido pela integração de um vetor que dá a direção do elemento e o vetor normal a ele ao longo da superfície da membrana (Equação (36)).

$$V_{\Gamma} = \int_V dV = \frac{1}{3} \int_{\Gamma} \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} dA = \frac{1}{3} \sum_{e=1}^{n_e} \mathbf{x}_c \cdot A^e \mathbf{n} \quad (36)$$

O vetor $\mathbf{x}_c = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{3}$, mas é importante ressaltar que, na prática, poderia ser tomado qualquer um dos vetores de coordenadas dos nós $\mathbf{x}_i$, que partem dos vértices $i = 1, 2$ ou 3 , já que eles são bem definidos. A pressão transversal que atua no elemento da membrana é dada por $\Delta p = p_{\text{atm}} + \Delta p_w - \frac{p_0 V_0}{V(u)}$ e tem valor positivo quando agindo para dentro do pneumático. Assim, a Equação (29) é retomada e a força de pressão no elemento é reescrita por meio da Equação (37), onde também é retomada e substituída a Equação (35).

$$\mathbf{f} = \mathbf{f}_g + \mathbf{f}_p = \frac{m^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} - \left(p_{\text{atm}} + \Delta p_w - \frac{p_0 V_0}{V(u)} \right) \frac{A^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} = \frac{m^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} - \frac{\Delta p A^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Efetuada a derivação da força encontrada acima com relação ao deslocamento, encontra-se a matriz de rigidez externa, que pode ser descrita pela Equação (38). Nota-se que ela é composta por duas parcelas principais $\mathbf{k}_{p_1}$ e $\mathbf{k}_{p_2}$.

$$\begin{aligned}\mathbf{k}_{ext} &= -\frac{\partial \mathbf{f}_p}{\partial \mathbf{u}} = \frac{\Delta p V_0}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{A^e}{V_\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \right) = \frac{\Delta p V_0}{3} \left(\frac{1}{V_\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (A^e \mathbf{n}) + A^e \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{1}{V_\Gamma} \right) \right)^T \right) \Rightarrow \\ \Rightarrow \mathbf{k}_{ext} &= \frac{\Delta p}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (A^e \mathbf{n}) + \frac{p V_\Gamma A^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{1}{V_\Gamma} \right) \right)^T = \mathbf{k}_{p_1} + \mathbf{k}_{p_2}\end{aligned}\quad (38)$$

A derivação do primeiro termo $\mathbf{k}_{p_1}$ já foi realizada nas Equações (30) e (31). Considerando agora que $\Delta p = p_1 - p(\mathbf{u})$, ou seja, não é mais um valor constante, é obtida a Equação (39).

$$\mathbf{k}_{p_1} = \frac{\Delta p}{6} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix} \quad (39)$$

Já para o segundo termo $\mathbf{k}_{p_2}$ é possível melhorar a derivação obtida na Equação (39), encontrando a Equação (40).

$$\mathbf{k}_{p_2} = \frac{p V_\Gamma A^e}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} \left(\frac{1}{V_\Gamma} \right) \right)^T = -\frac{p V_\Gamma A^e}{3 V_\Gamma^2} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (V_\Gamma) \right)^T \quad (40)$$

Agora, deseja-se verificar que a parcela $\frac{\partial V_\Gamma}{\partial \mathbf{u}^e}$ pode ser escrita como $\frac{\partial V_\Gamma}{\partial \mathbf{u}^e} = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \end{bmatrix}$. Dessa

forma, a Equação (36) é retomada e reescrita como mostrado na Equação (41).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{A} \mathbf{n}) = \left(\frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \mathbf{u}} \right)^T \mathbf{A} \mathbf{n} + \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{A} \mathbf{n}) \right)^T \mathbf{x}_c \quad (41)$$

Ainda, é possível escrever a parcela $\frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \mathbf{u}}$ como mostrado na Equação (42).

$$\frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \mathbf{u}} = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{x}_1^0 + \mathbf{u}_1 + \mathbf{x}_2^0 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{x}_3^0 + \mathbf{u}_3) = \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2 + \mathbf{u}_3) = \frac{1}{3} [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3] \quad (42)$$

Dessa forma, a parcela $\left(\frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \mathbf{u}} \right)^T$ pode ser escrita conforme a Equação (43).

$$\left(\frac{\partial \mathbf{x}_c}{\partial \mathbf{u}} \right)^T = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \\ \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (43)$$

Retomando a ideia de que $\mathbf{An} = \frac{(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2)}{2}$ e em posse da Equação (43), é possível reescrever a Equação (41), obtendo a Equação (44).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{An}) = \frac{A}{3} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \right)^T \mathbf{x}_c = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1 \end{bmatrix} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \right)^T \mathbf{x}_c \quad (44)$$

Retomando as Equações (30) e (31), é possível escrever

$$\left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \right)^T = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3]^T = - \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} \quad (\text{para maiores detalhes, é possível ver essa dedução}$$

completa no Anexo A) e, assim, obter a Equação (45).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{An}) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{x}_c = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 \\ \mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_3 \\ \mathbf{l}_3 \times \mathbf{l}_1 \end{bmatrix} - \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{l}_1 \times \mathbf{x}_c \\ \mathbf{l}_2 \times \mathbf{x}_c \\ \mathbf{l}_3 \times \mathbf{x}_c \end{bmatrix} \quad (45)$$

Como $\mathbf{x}_c = \frac{\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3}{3}$, efetuando algum desenvolvimento algébrico a partir da Equação (45),

é possível obter a Equação (46).

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{An}) = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (46)$$

Por fim, a partir da formulação obtida na Equação (46), reescreve-se a parcela $\frac{\partial V_\Gamma}{\partial \mathbf{u}^e}$, obtendo a Equação (47).

$$\frac{\partial V_\Gamma}{\partial \mathbf{u}^e} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial V_\Gamma^i}{\partial \mathbf{u}^e} = \frac{\partial V_\Gamma^e}{\partial \mathbf{u}^e} = V_\Gamma \frac{1}{3} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}} (\mathbf{x}_c^T \mathbf{An}) = \frac{1}{6} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3 \\ \mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} \quad (47)$$

Sendo assim, o termo $\mathbf{k}_{p_2}$ pode ser escrito como mostrado na Equação (48).

$$\mathbf{k}_{p_2} = - \frac{pA^e}{18V_\Gamma} \begin{bmatrix} \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \\ \mathbf{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} (\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3)^T & (\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1)^T & (\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)^T \end{bmatrix} \quad (48)$$

Ainda, é possível definir as matrizes $\Phi_1 = -\mathbf{n}(\mathbf{x}_2 \times \mathbf{x}_3)^T$, $\Phi_2 = -\mathbf{n}(\mathbf{x}_3 \times \mathbf{x}_1)^T$ e $\Phi_3 = -\mathbf{n}(\mathbf{x}_1 \times \mathbf{x}_2)^T$, obtendo a Equação (49). Por fim, a rigidez externa é dada pela Equação (50).

$$\mathbf{k}_{p_2} = \frac{pA^e}{18V_\Gamma} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (49)$$

$$\mathbf{k}_{ext} = \mathbf{k}_{p_1} + \mathbf{k}_{p_2} = \frac{\Delta p}{6} \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \\ \Lambda_1 & \Lambda_2 & \Lambda_3 \end{bmatrix} + \frac{pA^e}{18V_\Gamma} \begin{bmatrix} \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \\ \Phi_1 & \Phi_2 & \Phi_3 \end{bmatrix} \quad (50)$$

5 SATS (*Structural Analysis of Taut Structures*)

O programa SATS (*Structural Analysis of Taut Structures*) foi desenvolvido dentro na linguagem Matlab® por Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti e Daniel Mariani Guirardi (2006) para o cálculo e análise de tensoestruturas.

5.1 INTERFACE DO PROGRAMA

Ao abrir o código existente, basta digitar “sats” na linha de comando do Matlab® e apertar *enter*. A interface gráfica utilizada é o próprio Matlab®, sendo assim, a Figura 19 mostra a janela de navegação que abrirá. É possível visualizar a representação do modelo antes da solução, girar essa visualização e colocar os eixos *x*, *y* e *z*. A entrada do modelo pode ser feita tanto por meio de um arquivo em Matlab® quanto por um arquivo no formato Excel, mas em ambos os casos é necessário dispor dos parâmetros do material a ser utilizado (como módulo de elasticidade e espessura da membrana) e os dados da malha do modelo a ser imputado (como condições de contorno, coordenadas dos nós e conectividade dos elementos).

Figura 19 – Janela de navegação do programa SATS

Fonte: Autora.

Ainda, é preciso definir o número máximo de iterações que se deseja e o erro limite. As matrizes (de coordenadas e conectividade, por exemplo) devem ser definidas em um gerador de malha

(Ansys APDL ou Workbench, Rhinoceros 3D ou outro). É necessário avaliar o modelo que se deseja rodar, pois há casos em que existe mais de um tipo de elemento em um mesmo modelo (como é o caso de um pneumático com cabos, mostrado na Figura 19). Assim, ressalta-se a importância em diferenciar os elementos, ou seja, definir que o cabo é uma treliça e que o resto é elemento de membrana.

Com a definição do problema a ser resolvido e com os parâmetros de entrada ajustados, é possível resolver o modelo. As estruturas de membrana são não lineares e podem ser utilizados diferentes métodos para a resolução desse tipo estrutural. Assim, devido a sua simplicidade e rapidez de convergência, em Guirardi (2006) optou-se por implementar o método de Newton e, posteriormente, em Guirardi (2011) implementou-se o método da relaxação dinâmica, explicados abaixo:

- O *método de Newton* (MN), já introduzido anteriormente, é baseado na ideia de aproximação linear. O propósito é traçar uma linha de equilíbrio que passe por todos os pontos críticos e, o maior problema, é que o caminho é uma solução não linear. Para modelos mais elaborados, onde é necessário considerar o enrugamento da estrutura, por exemplo, a convergência pelo método de Newton fica mais complicada e, dessa forma, é preciso buscar outros métodos de solução. Esse método tem uma variante dentro do programa SATS, explicada no tópico posterior a esse, que não precisa das expressões analíticas para a solução do problema e é calculado por diferenças finitas.
- O *método da relaxação dinâmica* (MRD), segundo Guirardi (2011), é uma alternativa interessante para resolver problemas não lineares complicados de equilíbrio estático e que possam ter divergido pelo método de Newton. Nesse método, o problema do equilíbrio estático é resolvido por meio de uma análise dinâmica, integrando ao longo do tempo. São encontradas duas soluções: a fase transiente, que é fictícia e não possui significado físico, e a fase estacionária, que é a solução do equilíbrio estático propriamente dito.

As variáveis globais são definidas, bem como os parâmetros de controle do MN ou MRD e daí inicia-se a busca do equilíbrio não-linear do modelo matemático. É montada a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ e vetores de forças $\mathbf{G}$, conforme o número de elementos e o tipo do elemento (elemento de treliça, elemento de membrana (tanto tração quanto compressão) e elemento de membrana somente sob o efeito de tração). Ainda, é possível definir o superelemento de cabo e corda geodésica.

Quanto aos erros, é possível escolher entre três critérios de convergência: o erro (do vetor) das forças desbalanceadas global, o erro (do vetor) dos deslocamentos e a convergência nodal (ou seja, o nó que está mais desequilibrado), que será dada pelo nó que possui a maior força desbalanceada

aplicada. Na fase de solução é obtida a análise estrutural, o número de iterações necessárias para chegar nela e o tempo gasto no processamento, dados estes importantes para comparação com outros programas, exemplos e até mesmo para futuras implementações e mudanças a serem realizadas no próprio programa. A Figura 20 mostra um exemplo da janela gerada ao final da solução, que são: a) o gráfico do logaritmo natural do erro conforme iteração e b) o gráfico de convergência do erro.

Figura 20 – Plotagem dos gráficos de erro

Fonte: Autora.

Em nível de pós-processamento, foi criada uma interface gráfica com o auxílio do Matlab®, onde são criados vetores para a plotagem na interface criada. É possível traçar com uma escala de cores o modelo rodado, com os deslocamentos encontrados nas direções x , y e z , obter a norma dos deslocamentos e curvas de nível. Ainda, é possível plotar também as tensões e deformações nas diferentes direções, tanto a média nodal quanto por elemento, e as componentes das tensões principais no sistema de coordenadas local do elemento, sendo que quando a plotagem é feita por elemento, é indicada a direção das tensões principais e também os elementos que se encontram enrugados. Ainda, na parte direita da janela de navegação (Figura 19) há uma área para nova análise (*New Analysis*). As rotinas executadas atualizam a geometria, tensões, módulo de elasticidade e pressão, recalculando o exemplo a partir de sua nova configuração. Por fim, os resultados podem ser exportados para uma planilha do Excel que irá conter as coordenadas finais, deslocamentos, tensões e deformações do modelo.

5.2 IMPLEMENTAÇÕES REALIZADAS NESSE TRABALHO

5.2.1 Pressão dependente do volume

Como já comentado na seção 5.2.2, as estruturas pneumáticas são um caso particular, já que a pressão interna é dependente do volume, além dessa também gerar uma componente da rigidez externa, que corresponde à relutância da pressão em alterar o volume da estrutura.

Assim, o primeiro passo foi implementar uma rotina que calculasse volume interno da estrutura a ser avaliada, independente do posicionamento da origem do sistema de coordenadas. Esse volume pode ser calculado por meio da Equação (36), mas, para isso, é preciso que os vetores $\mathbf{x}$ e $A^e \mathbf{n}$ sejam bem definidos. Uma vez determinados esses, é possível determinar as coordenadas dos vetores dos lados do elemento triangular e, assim, calcular sua área A^e . A somatória das parcelas dadas por $\mathbf{x} \cdot A^e \mathbf{n}$ percorre todos os elementos do modelo, conforme a discretização realizada, e no final encontra-se o volume interno da estrutura.

Para testar a eficiência dessa rotina, foram realizados 4 principais modelos, cujas soluções analíticas para o cálculo do volume são conhecidas: um cubo, uma esfera com malha menos refinada e outra com malha mais refinada e um toroide, mostrados, da esquerda para a direita, na Figura 21. Considerou-se um cubo com aresta a igual a 2, as esferas com raio R igual a 1 e o toroide com raios $R = 3$ e $r = 1$, onde R é a distância do centro do toroide até o centro do tubo circular e r é o raio do tubo circular. Os cálculos e resultados obtidos são mostrados na Tabela 1.

Figura 21 – Modelos utilizados para testar a rotina que calcula volume

Fonte: Autora.

Tabela 1 – Volumes analíticos e numéricos encontrados

	Cubo	Esfera menos refinada	Esfera mais refinada	Toroide
Volume analítico	$V = a^3 = 8$	$V = \frac{4}{3}\pi.R^3 = 4,1888$		$V = 2\pi^2 Rr^2 = 59,2176$
Volume numérico – SATS	8	4,0506	4,1539	58,7710
Diferença com relação ao valor analítico	0,00%	3,30%	0,833%	0,754%

Fonte: Autora.

A partir dos modelos esféricos é comprovado que de fato, para geometrias curvas, quanto mais refinada a malha for mais próximo do valor analítico o resultado será. Quando a malha passa de 348 para 1392 elementos, a diferença do volume numérico com relação ao valor analítico já fica muito próxima de zero. É importante ponderar o refinamento da malha com o tempo de solução do modelo, já que um erro de volume igual a 0% só acontece para um refinamento infinito, que teria um custo computacional inviável de solução.

A rotina também funciona para volumes não convexos, que é o caso do toroide, já que a diferença encontrada também é bem próxima de zero. Uma vez encontrada a matriz de coordenadas dos nós, foi possível dar um deslocamento nas coordenadas em x , y e/ou z e tirar o centro do toroide da origem. Recalculando esse exemplo, notou-se que o resultado encontrado foi o mesmo, mesmo com a origem sendo colocada bem distante do centro do objeto, ou seja, a rotina funciona para qualquer geometria, é eficiente e foi validada por meio de todos os exemplos listados acima e implementada no SATS.

Essa rotina tinha como objetivo final a implementação da lei de Boyle-Mariotte, dada pela Equação (35), dependente do volume. Assim, foi criada pela autora uma função dentro do código já existente que, além de calcular o volume como explicado acima, também calcula a pressão interna relativa (Δp_i) e monta o vetor de pressão p que atua do lado de dentro do elemento. Essa função é chamada dentro do *solver* de cada método de solução (MN, tanto com a matriz de rigidez tangente analítica como por diferenças finitas e MRD), logo após o início dele, e na linha seguinte é montado o escalar $\Delta p = p_1 - p$. Esse processo acontece e é atualizado a cada iteração.

Foi necessário também percorrer as funções utilizadas para montar as matrizes de rigidez, vetores de forças nodais e forças externas do vento e atualizar a variável de pressão de cada um deles, já que agora a pressão atuante no elemento não é mais constante e é dada pelo escalar Δp , que é

armazenado em uma matriz coluna. Esse processo ocorreu para cada método de solução e caso escolhido (elemento de membrana sem ou com enrugamento).

Por fim, foi necessário implementar, dentro das funções mencionadas anteriormente e apenas para o MN e MRD, a nova parcela da matriz de rigidez externa. Como visto na Equação (48), essa parcela depende de cinco principais fatores: dos vetores de coordenadas dos pontos nodais do elemento, do vetor normal desse elemento, sua área, volume final da estrutura e pressão total atuante no elemento. O cálculo do primeiro fator já era efetuado antes dentro da função, então a autora implementou uma linha de cálculo para encontrar o vetor normal do elemento, outra para calcular sua área, outras três para calcular o produto vetorial entre os vetores de coordenadas de cada nó e, depois, mais três para encontrar as parcelas Φ_1 , Φ_2 e Φ_3 . Assim, juntando todos esses fatores conforme a Equação (48), foi possível montar a nova parcela desejada.

5.2.2 Método das diferenças finitas

O MN é a ferramenta mais utilizada e robusta para a solução de sistemas de equações algébricas não lineares, mas requer avaliações sucessivas das matrizes Jacobianas, cujas colunas podem ser vistas como derivadas direcionais do vetor residual do sistema em relação a cada um de seus graus de liberdade. Essas derivadas direcionais podem ser aproximadas por um esquema de diferenças finitas, onde o vetor residual é definido por subdomínios, permitindo a definição do elemento de matrizes jacobianas de ordem muito menor do que a global, cujas colunas são novamente aproximadas por diferenças centrais. Assim procedendo, o vetor residual torna-se localmente suportado e menos operações numéricas são necessárias para a sua avaliação, uma vez que neste caso o número de operações algébricas cresce apenas linearmente com a ordem do sistema.

Devido à generalidade, simplicidade e facilidade de implementação do esquema de diferenças finitas proposto, sua utilização é incentivada sempre que as matrizes Jacobianas não estejam prontamente disponíveis, como por exemplo nos casos em que o vetor residual não está totalmente definido analiticamente ou nos casos em que a sua linearização consistente é considerada demasiado complicada para ser procurada. Além disso, a simplicidade e facilidade de implementação podem ser úteis durante o desenvolvimento de novas famílias de elementos finitos, cujo comportamento pode ser rapidamente testado, antes de se realizar qualquer linearização consistente do vetor residual.

Em trabalhos como Pauletti e Almeida Neto (2011) e Pauletti e Guirardi (2013) foi testada a aproximação de diferenças finitas em problemas de equilíbrio geométrico não linear de estruturas de cabos, membranas e cascas, de comportamento elástico, cujos vetores residuais e matrizes

jacobianas exatas já estavam disponíveis em dois programas acadêmicos de elementos finitos diferentes, permitindo avaliações rápidas de desempenho. Foi descoberto que as matrizes aproximadas propostas produziam a mesma taxa de convergência e precisão que as matrizes exatas, com custos computacionais extras bastante aceitáveis, pois à medida que o tamanho do problema aumenta, o custo extra devido à aproximação proposta torna-se relativamente menor, enquanto que para pequenos problemas, o custo extra é relativamente irrelevante.

Para comparar os exemplos calculados tanto pelo MN (com e sem a parcela de rigidez volumétrica) quanto pelo MRD, a questão da dependência entre a pressão interna e volume dada pela lei de Boyle-Mariotte foi implementada também para o *método das diferenças finitas* (MN/DF). Já existia um *solver* dentro do programa SATS, desenvolvido por Ruy Pauletti em 2015, que resolvia exemplos por esse método e que fora verificado nos trabalhos mencionados anteriormente. Dessa forma, para o problema proposto, a autora implementou a perturbação do volume interno da estrutura e efetuou a consideração dessa na rigidez total, representando de maneira mais fidedigna as estruturas pneumáticas. A autora também criou um botão na janela de visualização do programa, que pode ser visto em destaque, junto com os outros dois botões que já existiam, na Figura 22, para escolher resolver o problema entre o MN, MRD ou MN/DF, pois o que se tinha anteriormente eram funções alternativas que podiam ser substituídas na rotina do método de Newton, ou seja, para resolver o exemplo pelo MN/DF era preciso apertar o botão “Newton” visto abaixo.

Figura 22 – Destaque dos botões para escolha do método de solução

Fonte: Autora.

6 DESENVOLVIMENTO E RESULTADOS

6.1 MEMBRANA DE HENCKY – FICHTER – CAMPBELL: PROBLEMA CLÁSSICO

O problema de uma membrana circular, fixa na sua borda e inflada por uma pressão uniforme (Figura 23), é um problema clássico presente em algumas referências bibliográficas como Hencky, Fichter e Campbell. Hencky (1915), apud Fichter (1997), considera uma membrana que possui grandes deslocamentos e não é pré-tracionada. Campbell (1956), apud Bouzidi et al. (2003), propôs uma solução ao problema de Hencky, levando em consideração uma membrana circular pré-tracionada. Contudo, a formulação a ser retomada aqui foi baseada principalmente em Fichter (1997).

Figura 23 – Membrana circular pneumática

Fonte: Autora, adaptado de Bouzidi et al., 2003

A equação de equilíbrio radial depende das considerações iniciais realizadas para o efeito da pressão interna. Hencky considera que uma carga vertical uniforme de inflação irá atuar, obtendo assim a Equação (51). No entanto, Fichter considera que essa carga de pressão é ortogonal à membrana durante a inflação, obtendo a Equação (52).

$$N_{\theta} = \frac{d}{dr}(rN_r) \quad (51)$$

$$N_{\theta} = \frac{d}{dr}(rN_r) - pr \frac{dw}{dr} \quad (52)$$

Onde N_{θ} é a força circunferencial resultante, N_r é a força radial resultante, p é a pressão de inflação, r é o raio da membrana e w é a deflexão. Tanto para Hencky quanto para Fichter, a Equação (53) representa o equilíbrio lateral.

$$N_r \frac{dw}{dr} = -\frac{pr}{2} \quad (53)$$

Assim, considerando um material elástico-linear isotrópico, são obtidas também as Equações (54) e (55). Os alongamentos em ambas as direções (Equações (56) e (57)), consideram os termos não lineares, onde u é o deslocamento radial e ν é o coeficiente de Poisson. É importante lembrar que apenas grandes deformações são consideradas, ou seja, as configurações deformada e indeformada do meio contínuo são significativamente diferentes, invalidando as hipóteses da teoria das deformações infinitesimais (MASE; MASE; SMELSER, 2010).

$$N_{\theta} - \nu N_r = Eh \varepsilon_{\theta} \quad (54)$$

$$N_r - \nu N_{\theta} = Eh \varepsilon_r \quad (55)$$

$$\varepsilon_r = \frac{du}{dr} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{dr} \right)^2 \quad (56)$$

$$\varepsilon_{\theta} = \frac{u}{r} \quad (57)$$

Considerando as condições de contorno na borda fixa $w(a) = 0$ e $u(a) = 0$, sendo a o raio da membrana e realizando algumas substituições e aproximações, Hencky chegou à solução para a deflexão adimensional $W(\rho) = w/a$ (Equação (58)) e para a força resultante $N(\rho)$ (Equação (59)) na forma de séries de potência, onde ρ é o raio adimensional ($\rho = r/a$).

$$W(\rho) = \left(\frac{pa}{E^*} \right)^{1/3} \sum_0^{\infty} a_{2n} (1 - \rho^{2n+2}) \quad (58)$$

$$N(\rho) = \frac{1}{4} \left(\frac{pa}{E^*} \right)^{2/3} \sum_0^{\infty} b_{2n} \rho^{2n} \quad (59)$$

Para o caso em questão, nota-se que a Equação (58) garante que todos os termos serão atendidos em w e, assim, é possível calcular os coeficientes a_{2n} e b_{2n} expandindo os coeficientes da série de potência. Os dez primeiros coeficientes dessa série (tanto para a quanto para b) podem ser encontrados em Fichter (1997). Nota-se, ainda, que todos os coeficientes estão relacionados à b_0 e considerando a segunda condição de contorno citada, Fichter (1997), encontra que b_0 se relaciona com o coeficiente de Poisson por meio da Equação (60), o que faz com que todos os outros termos também só dependam desse coeficiente.

$$(1 - \nu)b_0 + (3 - \nu)b_2 + (5 - \nu)b_4 + (7 - \nu)b_6 + \dots = 0 \quad (60)$$

Fichter (1997) também encontrou soluções para a deflexão e para a força resultante na forma de séries de potência (Equações (61) e (62)), além dos coeficientes n_{2m} e w_{2m} , determinados por

meio das condições de contorno. Dessa forma, o coeficiente n_0 a ser determinado depende tanto de ν quanto de pa/E^* .

$$W(\rho) = \sum_0^{\infty} w_{2m} (1 - \rho^{2m+2}) \quad (61)$$

$$N(\rho) = \sum_0^{\infty} n_{2m} \rho^{2m} \quad (62)$$

Utilizando a formulação descrita acima para cada um dos métodos analíticos (Hencky e Fichter), foi realizado um exemplo numérico no software Matlab® em conjunto com o Excel, de uma membrana com módulo $E^* = 311488 \text{ Pa.m}$, coeficiente de Poisson $\nu = 0,34$ e raio $a = 0,1425 \text{ m}$ para três níveis de pressão interna: uma inicial de 100 kPa, uma intermediária de 250 kPa e uma final de 400 kPa. Dessa forma, foi obtida a deflexão lateral para cada uma das três medidas em ambos os casos (Figura 24), ressaltando que a diferença entre os dois métodos é a componente radial da pressão, que fora desconsiderada na formulação de Hencky. Bouzidi et al. (2003), antes de analisar problemas de curvatura de membranas pressurizadas assimétricas e cilíndricas, efetuou o mesmo exemplo numérico e chegou nos mesmos resultados.

Figura 24 – Comparação entre os métodos: Hencky, Fichter e Elementos Finitos (SATS)

Fonte: Autora.

Esse mesmo exemplo, para as três pressões consideradas, foi realizado no programa SATS e os resultados obtidos por elementos finitos foram plotados na curva vermelha. Foi modelado um disco todo e, a malha gerada no software Ansys, possuía 486 elementos e 30 divisões na direção

radial. Para a convergência do modelo, foram necessárias 5 iterações e foi considerada uma tensão de retesamento inicial igual a zero. Apesar do programa considerar apenas materiais elástico lineares sob pequenas deformações, é possível notar que os resultados obtidos se assemelham bem às curvas de Hencky e Fichter, com diferenças um pouco maiores (mas ainda pequenas) à medida que a pressão interna e deformação aumentam.

Em Pauletti (2010) realizou-se o mesmo exemplo numérico, também com o auxílio do programa SATS, e considerando os mesmos parâmetros iniciais mencionados acima, mas as curvas numéricas encontradas se distanciaram um pouco das mostradas na Figura 24. Uma consideração por ele abordada foi que, para deformações isotrópicas moderadas, o cálculo dessas é dado por $\varepsilon \cong 2(\delta/r)^2/3$ (BULSON, 1973). Assim, as deformações encontradas para cada uma das três intensidades de pressão, da menor para a maior, foram aproximadamente 3,5%, 7% e 10%, respectivamente.

Com isso, foi possível concluir que o menor dos valores encontrados ultrapassou as deformações admissíveis dos materiais usualmente utilizados em estruturas pneumáticas de relevância civil ou arquitetônica e, assim, a forma esférica deve ser previamente aproximada a uma padronização adequada. Ainda, as deformações obtidas para as pressões de 250 kPa e 400 kPa estão fora do intervalo adequado do material considerado pelo programa SATS.

Para lidar com grandes deformações em estruturas pneumáticas, geralmente o material da membrana é modelado utilizando equações constitutivas hiperelásticas, como apresentado por Bonet et al. (2000). Esse material pode ser de fato necessário para analisar sistemas de alta energia, como balões altamente pressurizados, no qual são gerados grandes deslocamentos e deformações durante a sua pressurização. Porém, é necessária cautela na aplicação arquitetônica desse tipo de sistema, já que eles são propensos ao colapso explosivo, como um balão de festa perfurado por uma agulha (PAULETTI, 2010).

6.2 DOMO DE RAIOS 2 METROS: ANÁLISES PRELIMINARES E VERIFICAÇÕES

Uma vez realizadas as implementações necessárias, foi feito um exemplo inicial de um domo semiesférico de raio 2 metros, para verificar se a estrutura se comportaria de maneira devida e, assim, se a implementação tinha sido realizada de maneira correta. Sendo assim, considerou-se uma condição de contorno fictícia, que possibilitasse a deformação livre da esfera em todas as direções (mas cuidando para que ela não tivesse movimento de corpo rígido, ou seja, fixando os deslocamentos nas direções perpendiculares de cada eixo). Dessa forma, a partir dos resultados

obtidos, foi possível verificar e constatar que a lei de Boyle-Mariotte foi implementada corretamente. O modelo do domo pode ser visto na Figura 25.

Figura 25 – Modelo de um domo semiesférico de raio 2m

Fonte: Autora.

A malha foi gerada com o auxílio do software Ansys (Figura 25) a qual possui 1661 nós e 3206 elementos. O volume analítico dessa geometria é $16,755 \text{ m}^3$ e o calculado pelo SATS foi $16,721 \text{ m}^3$ – ou seja, há uma diferença de 0,20% em relação ao valor analítico. Inicialmente, foi utilizada uma malha menos refinada, que apresentou um erro no cálculo do volume maior e certa concentração de tensão na proximidade dos pontos da base que pertencem aos eixos de simetria da semiesfera. Dessa forma, a malha passou por um refinamento, especialmente nas regiões mencionadas anteriormente. Mesmo a semiesfera já sendo uma geometria de equilíbrio, inicialmente considerou-se a pressão interna de 500 Pa constante, para realizar a busca da forma. Os parâmetros iniciais considerados foram: módulo de elasticidade igual a 109 Pa, espessura de 0,001 m e um retesamento inicial de $5 \cdot 10^5 \text{ Pa}$. Os resultados da geometria final obtida são mostrados na Figura 26.

Figura 26 – Resultados do domo após busca da forma: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total máximo

Fonte: Autora.

Nota-se que existem alguns pontos de tensão não uniforme, mas o deslocamento total encontrado está muito próximo de zero e a faixa de variação das tensões principais máxima e mínima é pequena. Assim, essa geometria foi a forma final considerada para os estudos que serão apresentados posteriormente. Com a busca da forma, o raio aumentou para o valor de 2,00562 m.

Considerando uma pressão interna inicial de 500 Pa, essa geometria foi resolvida considerando a lei de Boyle-Mariotte, para os três métodos de solução disponíveis no programa SATS, a fim de comparar e validar as informações obtidas. Como os resultados encontrados no método de Newton foram idênticos aos do método das diferenças finita, serão indicadas apenas duas linhas de resultado: uma para o método de Newton e diferenças finitas e outra para o método da relaxação dinâmica.

A Figura 27 mostra, da esquerda para a direita, os deslocamentos nas direções x , y e z , respectivamente e a Figura 28 indica, na primeira coluna, o deslocamento total, na segunda a tensão principal máxima e na terceira a tensão principal mínima. A pressão final encontrada, tanto para o método de Newton quanto para a relaxação dinâmica, foi de 499,40 Pa e o volume final foi $16,862 \text{ m}^3$, ou seja, a semiesfera expandiu e os resultados se comportaram conforme o previsto pela lei de Boyle-Mariotte: se o volume final aumenta, a pressão interna final diminui.

Figura 27 – Resultado dos deslocamentos máximos do domo nas três direções principais

Fonte: Autora.

Figura 28 – Resultados de deslocamento total e tensões no domo

Fonte: Autora.

É possível concluir, observando os deslocamentos nas direções x , y e z , que a semiesfera expandiu 0,80 mm de maneira praticamente uniforme nas três direções e, assim, o raio passou a ser 2,00642 m. Dessa forma, o volume analítico passa a ser $16,917 \text{ m}^3$ e o volume final calculado pelo programa, mencionado anteriormente, foi $16,862 \text{ m}^3$ – ou seja, há uma diferença de 0,32% em comparação com o valor analítico. Sabe-se que a tensão em uma semiesfera com raio r e espessura t é dada por:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \frac{pr^2}{2r_m t} \quad (63)$$

O raio médio r_m é dado pela Equação (64) e como $r_m \cong r$, a tensão é dada pela Equação (65).

$$r_m = r + \frac{t}{2} \quad (64)$$

$$\sigma = \frac{pr}{2t} \quad (65)$$

Como a pressão interna final foi 499,40 Pa e o raio igual a 2,00642 m, a tensão fica:

$$\sigma = \frac{499,4 \cdot 2,00642}{2,001} = 5,01 \cdot 10^5 \text{ Pa} \quad (66)$$

A tensão principal média máxima foi de $5,068 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, ou seja, há um erro de 1,15% quando se compara esse valor com o analítico. Já a tensão principal média mínima foi de $4,880 \cdot 10^5 \text{ Pa}$, ou seja, há um erro de 2,59% em comparação com o valor analítico. Devido ao fato de já haver erros (mesmo que pequenos) no início da análise por causa da discretização da malha, a propagação desses faz com que existam diferenças ainda maiores no cálculo da tensão, quando comparando

os valores analíticos com os encontrados computacionalmente e, ainda, é válido ressaltar que existem regiões onde a tensão é maior. Porém, mesmo com essas peculiaridades, o erro encontrado foi pequeno.

Observando agora os deslocamentos obtidos nas direções x , y e z para o método da relaxação dinâmica, nota-se que a semiesfera expandiu 0,83 mm de maneira praticamente uniforme nas três direções e, assim, o raio passou a ser 2,00645 m. O volume analítico passa a ser $16,918 \text{ m}^3$ e o volume final calculado pelo programa, mencionado anteriormente, foi $16,862 \text{ m}^3$ — ou seja, há uma diferença de 0,33% em relação ao valor analítico.

Comparando os resultados obtidos, é possível notar que existem algumas diferenças entre os valores de deslocamento total e tensões máxima e mínima quando comparando o método de Newton/ Diferenças Finitas (cujos resultados foram iguais) com o método da relaxação dinâmica, mas elas são pequenas. A Tabela 2 indica tais diferenças, em valor percentual, quando comparando os dados obtidos pelo método da relaxação dinâmica em relação ao método de Newton/ Diferenças Finitas. Ainda, é importante notar que as diferenças encontradas entre os valores analíticos e numéricos também não são grandes e elas se dão, em sua maioria, devido à propagação de erros.

Tabela 2 – Comparação entre os resultados obtidos para os três métodos de solução

	Deslocamento Total (m)	Tensão nodal máxima (Pa)	Tensão nodal mínima (Pa)
Newton/ Diferenças Finitas	0,00084345	$4,91 - 5,22 \cdot 10^5$	$4,72 - 5,04 \cdot 10^5$
RD	0,0008495	$4,90 - 5,34 \cdot 10^5$	$4,54 - 5,04 \cdot 10^5$
Diferença entre os métodos	0,71%	1,03%	1,86%

Fonte: Autora.

Dessa forma, calculou-se um erro relativo que teve um valor máximo de aproximadamente 2%. Assim, como os valores praticamente não mudam de um método para outro, a comparação e verificação entre tensão analítica e tensão computacional realizada anteriormente é válida também para o método da relaxação dinâmica. Em posse de todos os resultados mencionados, é possível concluir que o modelo do domo semiesférico pneumático se deforma uniformemente em todas as direções quando é considerada a lei de Boyle-Mariotte e, ainda, os resultados obtidos para os três métodos de solução são praticamente iguais, o que valida a implementação realizada.

6.3 BOLA DE PVC INFLADA: AVALIAÇÃO EXPERIMENTAL E NUMÉRICA

Em Liu, Wang e Li (2018) foi realizado um experimento no qual deformou-se uma bola inflada flexível entre duas placas rígidas e foram avaliadas algumas condições de contato, de maneira a comparar os resultados obtidos experimentalmente com os do modelo semianalítico proposto, para um material hiperelástico, e validar esse modelo teórico. Nas comparações realizadas foi encontrado um erro máximo de 7%.

Nesse trabalho, como forma de verificar a importância da utilização da lei de Boyle e a consideração da nova parcela de rigidez volumétrica deduzida em modelos numéricos, foi realizado um experimento mais simples que o mencionado acima, com uma bola de pilates convencional, na qual a pressão interna utilizada era muito maior do que a utilizada em estruturas pneumáticas típicas. Essa bola foi sujeita a uma carga constante que a deformou, provocando uma redistribuição de seu volume interno e consequente variação da pressão interna. Com isso, foi possível avaliar a diferença entre os resultados obtidos utilizando ou não essas formulações nas análises computacionais e comparar e ressaltar a diferença desses com os resultados obtidos experimentalmente.

Para obter as características mecânicas do material constituinte da bola, necessárias para a modelagem computacional, foram feitos os seguintes ensaios: tração, densidade e índice de fluidez e viscosidade, segundo as normas técnicas ASTM D638-14, ASTM D792-13 e ASTM D1238-13, respectivamente. Esses experimentos foram realizados no Laboratório de Ensaios Mecânicos do Instituto Mauá de Tecnologia, com o auxílio dos técnicos. A Figura 29 mostra os corpos de prova utilizados para tais ensaios, cujos formatos e tamanhos seguem as normas mencionadas anteriormente.

Figura 29 – Corpos de prova: a) visão geral, b) ensaio à tração, c) ensaio de densidade e d) teste por índice de viscosidade

Fonte: Autora.

Como a bola possuía algumas linhas paralelas em uma das direções, que funcionavam como reforço, o teste de tração foi realizado nas duas direções: horizontal (na direção do reforço) e vertical (sem reforço). Para tanto, foram extraídos 5 corpos de prova de cada orientação. Ao se obter os resultados, o valor mais discrepante de cada caso foi eliminado e, no final, foi realizada uma média dos 8 valores obtidos. Para o ensaio de densidade também foram extraídos 5 corpos de prova, agora circulares, e foram medidas suas massas, espessuras e diâmetros, sendo que os valores mais discrepantes de cada também foram desconsiderados e, em seguida, realizou-se a média dos valores obtidos para cada parâmetro. A Tabela 3 mostra os valores médios finais de cada um dos ensaios realizados, que posteriormente foram considerados no modelo computacional do programa SATS, bem como o desvio padrão de cada.

Tabela 3 – Resultados dos ensaios mecânicos do material

Módulo de Elasticidade (MPa)	Média dos resultados em ambas as direções	7,23
	Desvio padrão	0,85
Espessura (mm)	Média	1,30
	Desvio padrão	0,00
Densidade (g/mm ³)	Média	0,91
	Desvio padrão	0,09
Índice de viscosidade – PVC Plastificante	Média	0,806
	Desvio padrão	0,098

Fonte: Autora.

Para realizar o ensaio de tração foi utilizada uma máquina da Instron®, que possui um *software* integrado e faz a interpolação dos valores de tensão e deformação encontrados e calcula automaticamente o coeficiente angular da reta obtida, ou seja, o módulo de elasticidade. A Figura 30 mostra, da esquerda para a direita, os gráficos de tensão *versus* deformação para os ensaios de tração na direção horizontal e vertical, respectivamente.

Figura 30 – Gráficos de tensão x deformação: a) horizontal e b) vertical

Fonte: Autora.

É possível notar que os gráficos não partem exatamente do valor zero de tensão, pois é necessário aplicar uma pré-carga nos corpos de prova. Segundo a norma ASTM D638-14, em uma curva tensão-deformação típica é necessário fazer uma compensação da região de "joelho", que aparece no início da curva (região nessa denominada de AC). Esse trecho não representa as propriedades do material e é um fenômeno causado por folga e alinhamento ou assentamento do corpo de prova. Sendo assim, esse fato é compensado automaticamente pela máquina e os valores de pré-carga são desconsiderados dos cálculos.

Primeiramente, é feito um ensaio preliminar para saber aproximadamente qual a tensão de ruptura do material e, nos ensaios posteriores, os corpos de prova são retirados do equipamento antes que possam romper. Essa pausa no ensaio é revelada nas regiões de “quebra” das curvas indicadas na Figura 30. Para a modelagem realizada no programa SATS é considerado que o material é elástico linear e que ele sofre pequenas deformações. Pelos gráficos obtidos, nota-se que na região de deformação entre 0% e 20% os trechos são lineares e, então, a consideração realizada é correta.

Para dar início ao experimento, realizou-se uma adaptação no pino da bola, de forma a conseguir rosquear e empregar um medidor de pressão digital, como os utilizados para verificar a pressão interna de bolas de vôlei ou de futebol. Como o pino estava localizado da direção diametral sem as linhas paralelas e a carga ia ser aplicada na direção perpendicular a essas, para se obter deslocamentos mais uniformes, foi preciso elevar o sistema e fazer um furo na placa inferior de diâmetro igual ao do cano do medidor de pressão, para que a bola não se deformasse pelo furo.

Com a cordialidade de todos os técnicos do Laboratório de Ensaio Mecânicos do Instituto Mauá de Tecnologia foi possível então realizar o experimento. Encheu-se a bola e pressão interna inicial encontrada foi igual a 0,35 psi (ou seja, a resolução do aparelho era aproximadamente 70 N/m², equivalente a uma pressão interna de 2413 N/m²), que podem ser vistos, junto com a adaptação realizada no pino, na Figura 31. As dimensões iniciais foram medidas com uma régua digital, obtendo-se diâmetro $d_1 = 0,555$ m na direção das linhas paralelas e diâmetro $d_2 = 0,560$ m na outra direção. O volume analítico total da bola, se considerando o cálculo do volume de um elipsoide devido à diferença de 5 mm nas dimensões encontradas, é dado por

$$V = \frac{\pi}{6} d_1^2 d_2 = 0,09031765 \text{ m}^3 .$$

Figura 31 – Bola de pilates: a) durante o enchimento, b) cheia, c) pressão interna inicial e d) adaptação no pino da bola

Fonte: Autora.

Depois, a bola foi posicionada embaixo do pistão que iria deformá-la, com o eixo maior na direção vertical, de modo que os reforços ficassem paralelos ao equador da bola, garantindo que os cortes horizontais fossem sempre circulares. Sua parte superior foi pintada com um spray a base d'água e uma placa foi colocada sobre ela. Essa placa continha, na superfície que estava em contato com a bola, folhas de papel grudadas, de maneira a determinar e estimar qual era a área da superfície de contato gerada entre a placa e a bola quando essa fosse deformada. Para estabilizar o sistema, aplicou-se uma força inicial de 50 N e, posteriormente, foi aplicada uma força de 535 N, que provocou a deformação do sistema. Essa força corresponde à somatória da carga aplicada pelo pistão mais o peso da placa de madeira colocada sobre a bola. Ambas as situações, bem como a montagem do sistema, podem ser vistas na Figura 32.

Figura 32 – Sistema: a) elevação e posicionamento, b) bola estável e c) bola deformada

Fonte: Autora.

Como já mencionando anteriormente, tanto as dimensões iniciais quanto as finais foram feitas com uma régua digital. Foram tomadas tanto a medida horizontal (ou seja, no equador da bola) como a vertical (ou seja, a distância entre placas) e foram encontrados os valores respectivos de 0,6361 m

e 0,4014 m. Porém, é necessário descontar o diâmetro da haste de medição da medida horizontal, igual a 0,0101 m, e a espessura das placas de cima e de baixo da medida vertical, que somadas dão uma medida de 0,0304 m. Dessa forma, os valores finais encontrados são 0,626 m e 0,371 m, respectivamente, e as diferenças com relação às medidas iniciais horizontal e vertical encontradas foram iguais a 0,071 m e 0,189 m, respectivamente. Ainda, a pressão final lida no medidor de pressão foi 0,65 psia (correspondente a 4481 N/m²). A Figura 33 mostra o aparato utilizado para a medição digital das dimensões e, logo abaixo, a elevação adaptada para posicionar o sistema, as medidas horizontal e vertical encontradas após a deformação da bola e a superfície de contato encontrada, que é praticamente uma circunferência.

Figura 33 – Medições: a) aparato para medição, b) medida do equador da bola, c) medida vertical final e d) área de contato estampada

Fonte: Autora.

A medida do diâmetro da circunferência de contato foi feita por meio de um paquímetro, realizada no próprio papel estampado, e foi encontrado o valor de 0,39350 m. Para verificar essa medida, pode-se considerar que, desprezando a rigidez à flexão do material da bola, o equilíbrio das forças verticais introduz uma relação entre a área de contato da bola e da placa, a força vertical aplicada na placa (535 N) e a pressão interna final medida com o manômetro digital (4481,59 N/m²), na forma $p = F/A$. Encontra-se que a área da circunferência de contato é $A = 0,11938 \text{ m}^2$, que corresponde a um diâmetro de 0,38987 m. Assim, o erro entre o diâmetro medido diretamente na folha estampada e o estimado pela condição de dependência entre as variáveis experimentais é de 0,932%. Esse erro indica que, embora a resolução do manômetro utilizado não fosse tão precisa, já que poderiam ser encontrados erros de até 2,8%, a pressão mostrada por ele é bem próxima da pressão interna real da bola.

Uma vez que o experimento foi concluído e foram determinados e medidos todos os parâmetros, foi possível efetuar a modelagem numérica. A geometria inicial da bola ensaiada pode ser bem representada por um elipsoide de revolução em torno do eixo polar (vertical). Em princípio, esse elipsoide poderia ser modelado como um segmento do plano $z = 0$ e por outros dois planos verticais

passando pelo eixo de revolução. Contudo, para facilitar a visualização, optou-se por modelar toda a metade superior da bola, com as dimensões iniciais encontradas no experimento, impondo condições de simetria ao longo do perímetro equatorial, bem como nos nós contidos nos planos verticais $x = 0$ e $y = 0$.

O modelo numérico, feito com o auxílio do software Rhinoceros 3D, possui 1782 elementos, 16 divisões paralelas e 48 divisões radiais. O volume numérico encontrado no programa SATS foi igual a $0,090369033 \text{ m}^3$, o que corresponde a uma diferença de 0,394% quando comparado ao valor analítico. O modelo numérico pode ser visto na Figura 34. É importante observar que o gerador de malha automático não preservou exatamente a simetria da malha, mas isso não afetou os resultados que serão mostrados posteriormente.

Figura 34 – Modelo numérico: a) malha discretizada e b) representação das condições de contorno

Fonte: Autora.

As condições de contorno foram impostas de maneira que o modelo pudesse se deformar em todas as direções, ou seja, fixando os deslocamentos nas direções perpendiculares de cada eixo e evitando o movimento de corpo rígido. Observando o sistema de coordenadas e a Figura 34, nota-se que os nós da base estão impedidos de se deslocar na direção z ; os nós que estão na linha de simetria perpendicular ao eixo x estão impedidos de deslocar nessa direção e o mesmo também ocorre com os nós da linha de simetria perpendicular ao eixo y . Os nós que possivelmente estão no encontro de duas linhas são fixados em ambas as direções.

A estimativa da área de contato foi feita, no modelo, a partir de uma calota esférica (que está representada na Figura 34 em uma cor mais escura). A área do papel estampado encontrada foi $0,11938 \text{ m}^2$ e corresponde à área da superfície da calota, calculada por $A = 2\pi r h$, onde r é o raio da esfera e h é a altura da calota esférica. Dessa forma, a altura da calota antes da deformação é igual a $0,06816 \text{ m}$. De maneira a retratar o experimento fidedignamente, gerou-se uma malha no software Rhinoceros 3D com linhas de nós dispostos circunferencialmente (ou seja, que estão na

mesma cota z sobre o elipsoide de revolução) e realizou-se um ensaio de deslocamento controlado. Foram impostos, aos nós da calota de contato, deslocamentos verticais relativos ao encontrado no experimento, de forma que esses nós chegassem à mesma cota de $z = 0,1855$ m.

Assim, a malha foi gerada em cima da calota, de forma a discretizar com razoável precisão a região da superfície da bola que veio a entrar em contato com a placa. Por fim, o nó do topo teve um deslocamento inicial imposto de 0,0945 m e assim sucessivamente, até chegar nos nós externos da borda da calota, que tiveram um deslocamento imposto de 0,02634 m. Essa técnica foi utilizada já que não se dispõe de um algoritmo de contato no programa SATS.

6.3.1 Caso A: pressão variando conforme a lei de Boyle-Mariotte

O modelo numérico foi rodado tanto pelo método de Newton, com a matriz de rigidez tangente analítica e por diferenças finitas, que apresentaram resultados idênticos e mesmo número de iterações, quanto pelo método da relaxação dinâmica, considerando inicialmente a pressão variando conforme a lei de Boyle-Mariotte, que será denominado com “Caso A”. O critério de parada teve o erro limite relativo em cada nó do modelo, calculado por $\max\|\mathbf{g}_k\|/\max\|\mathbf{g}_k^0\| \leq 10^{-3}$, $k = 1 \dots n_{\text{nós}}$. A Figura 35 mostra, da esquerda para a direita, o deslocamento total e nas direções principais x , y e z , respectivamente, a Figura 36 apresenta a vista lateral do modelo deslocado na direção z , obtida para o MN ou MN/DF e MRD e a Figura 37 apresenta as tensões principais máxima e mínima obtidas para cada método.

Figura 35 – Deslocamentos do caso A: a) total, b) direção x , c) direção y e d) direção z

Fonte: Autora.

Figura 36 – Vista lateral do deslocamento na direção z do caso A

Fonte: Autora.

Figura 37 – Tensões principais do caso A: a) máxima e b) mínima

Fonte: Autora.

É possível observar que os deslocamentos nos nós da superfície de contato foram aplicados de maneira correta, pois, como mostra a Figura 37, na geometria final de equilíbrio todos os nós do topo estão na cota de 0,0945 m. Quanto aos deslocamentos nas direções x e y , para o método de Newton, os valores foram iguais a 0,03532 m, isso significa que a medida horizontal é 0,62564 m enquanto a medida experimental encontrada foi 0,6260 m, ou seja, há um erro de 0,51% quando comparando o deslocamento obtido numericamente com o experimental. Já para o método da relaxação dinâmica, os deslocamentos nas direções x e y foram iguais a 0,03553 m, que corresponde a uma medida horizontal igual a 0,62606 m e, comparando esse valor com o valor

obtido experimentalmente, há um erro de 0,084%. Quanto às pressões internas e volumes finais obtidos numericamente, a Tabela 4 resume os resultados.

Tabela 4 – Comparação entre as pressões e volumes finais encontrados para os três diferentes métodos

	MN e MN/DF	RD
Volume final SATS (m^3)	0,04849024	0,04874668
Estimativa do volume final – lei de Boyle-Mariotte (m^3)	0,04863270	
Erro com relação à estimativa do volume experimental a partir a lei de Boyle	0,293%	0,234%
Pressão final SATS (Pa)	4487,0	4491,3
Erro com relação à pressão final medida no manômetro	0,121%	0,217%

Fonte: Autora.

A verificação do problema e comparação entre o modelo experimental e o numérico foi feita de duas maneiras:

- 1) A primeira é a partir das reações de apoio, que o programa SATS retorna de maneira vetorizada e em cada uma das três direções. Sabendo quais eram os nós da base, foi possível filtrar as reações de apoio verticais desses e somá-las, encontrando um valor de 536,85 N para o método de Newton. A força aplicada pelo pistão foi 535 N e, comparando os dois valores, há uma diferença de 0,346% com relação ao valor experimental.

Efetuuou-se o mesmo procedimento para o método da relaxação dinâmica e nesse foi encontrado um valor de reação de apoio total na base igual a 535,93 N, ou seja, há um erro equivalente a 0,174% se comparado com o valor experimental. Dessa forma, conclui-se que os deslocamentos iniciais impostos a cada linha de nó da superfície de contato condizem a uma força de aproximadamente 535 N. Apesar de não ter sido realizada uma modelagem de contato, a aproximação representou bem o fenômeno.

- 2) A segunda maneira de verificação é calcular a tensão superficial de tração na membrana, a partir dos resultados experimentais, e comparar o valor encontrado com a tensão do modelo numérico. Essa tensão pode ser obtida primeiro multiplicando a pressão interna (medida com o manômetro) pela diferença entre a área da seção equatorial da bola deformada e a área da estampa da bola, e depois dividindo a força resultante pelo perímetro do equador da bola deformada. Fazendo os cálculos mencionados, é encontrado o valor de 439,33 N/m e, dividindo esse pela espessura da membrana de 0,0013 m, encontra-se uma tensão igual a $3,38 \times 10^5$ Pa. A

tensão principal máxima do modelo foi igual a $3,39 \times 10^5$ Pa para o método de Newton, ou seja, há uma diferença de 0,296% com relação ao valor experimental.

6.3.2 Caso B: pressão interna constante

Por fim, realizou-se a análise estrutural do modelo no programa SATS, para os três métodos de solução, considerando a pressão interna constante, que será denominado de “Caso B”. O intuito dessa é mostrar a discrepância dos resultados obtidos quando comparados aos do modelo experimental e comprovar assim que a dependência entre pressão e volume é importante para as estruturas pneumáticas. A Figura 38 mostra, da esquerda para a direita, o deslocamento total e nas direções principais x , y e z , respectivamente, a Figura 39 a vista lateral do modelo deslocado na direção z , todas obtidas para os três métodos e a Figura 40 apresenta as tensões principais máxima e mínima.

Figura 38 – Deslocamentos do caso B: a) total, b) direção x , c) direção y e d) direção z

Fonte: Autora.

Figura 39 – Vista lateral do deslocamento na direção z do caso B

Fonte: Autora.

Figura 40 – Tensões principais do caso B: a) máxima e b) mínima

Fonte: Autora.

Nota-se que os deslocamentos nos nós da superfície de contato foram aplicados de maneira correta, pois, como mostra a Figura 40 na geometria final de equilíbrio todos os nós do topo estão na cota de 0,0945 m. Quanto aos deslocamentos nas direções x e y , os valores foram iguais a 0,055259 m, enquanto o obtido na medida experimental foi 0,03550 m, ou seja, há um erro de 55,66% quando comparando o deslocamento obtido numericamente com o experimental. Quanto à comparação entre as pressões e volumes finais obtidos numericamente nos casos A e B, a Tabela 5 resume os resultados.

Tabela 5 – Comparação entre os valores numéricos

	MN e MN/DF	RD
Volume final – caso A (m ³)	0,04849024	0,04874668
Volume final – caso B (m ³)	0,03293554	0,03293554
Diferença do volume final obtido no caso B com relação ao do caso A	32,08%	32,44%
Pressão final – caso A (Pa)	4487,00	4491,33
Pressão final – caso B (Pa)	2413,17	2413,17
Diferença da pressão final obtida no caso B com relação a do caso A	46,22%	46,27%

Fonte: Autora.

Dessa forma, a partir de um experimento relativamente simples e barato e que representa uma estrutura pneumática em pequena escala, demonstrou-se a importância de se considerar a pressão variando com o volume, como enuncia a lei de Boyle-Mariotte. A não consideração dessa dependência pode gerar resultados muito diferentes do que acontece na realidade, o que é mostrado tanto pela diferença de 56% nos deslocamentos da estrutura quanto pelas diferenças de 32% do

volume e 46% da pressão. Quanto à consideração da nova parcela de rigidez volumétrica $\mathbf{k}_{p_2}$, verificou-se que a matriz de rigidez externa da estrutura obtida pelo MN se aproxima mais da mesma matriz obtida pelo MN/DF (que é a matriz exata), mas essa parcela não diminui o número de iterações e nem diminui o tempo total de processamento do modelo, ou seja, a sua consideração não é muito relevante. Os valores de deformação encontrados nas direções x e y seguiram o padrão das tensões e foram de 4,53% e 4,25%, respectivamente, que está dentro da faixa de aplicabilidade do elemento finito considerado.

6.4 DOMO SEMIESFÉRICO DE RAIOS 10 METROS

A semiesfera modelada, que pode ser vista na Figura 41, representa a geometria típica de um domo pneumático e tem raio igual a 10 m. Com o auxílio do *software* Ansys, foi gerada a malha mostrada, que possui 1195 nós, 2313 elementos e o sistema de coordenadas tem origem no centro da circunferência de base. Ainda, foram obtidos os coeficientes de pressão a partir de uma análise *CFD*, efetuada com o auxílio do *software* Ansys Fluent (Figura 42). Para essa modelagem, foi empregado ar com massa específica de $1,225 \text{ kg/m}^3$ e viscosidade dinâmica de $1,795 \cdot 10^{-5} \text{ kg/(m.s)}$, propriedades referentes à temperatura de 15°C , padrão do Fluent.

O volume de controle escolhido foi o paralelepípedo, de modo que as medidas perpendiculares à direção do vento têm valor de quatro vezes a dimensão do corpo em estudo e a dimensão paralela à direção do vento tem valor de seis vezes a dimensão desse corpo. Na face de entrada, aplicou-se um vento de velocidade 13 m/s e 40 m/s atuando na direção do eixo z negativo, na parte da frente do domo, enquanto a face de saída tem pressão nula. Determinou-se a condição de não-deslizamento na face inferior e de simetria nas demais faces do paralelepípedo. Uma descrição mais detalhada desse modelo escapa do escopo desse estudo.

Figura 41 – Domo esférico de raio 10 m: a) modelo em corte e b) visão 3D do modelo

Fonte: Autora.

Figura 42 – Coeficientes de pressão gerados no Ansys Fluent

Fonte: Autora.

Como pode ser visto na Figura 42, o maior valor de coeficiente de pressão na compressão à barlavento é 0,94 e na parte superior da esfera aparece uma sucção, cujo maior valor de coeficiente de pressão foi $-1,26$. É importante observar que os coeficientes de pressão apresentam compressão à sotavento, com um valor em torno de 0,59, o que, em uma análise inicial, se mostra contra intuitivo, uma vez que na maioria das normas e publicações aparece sucção à sotavento. Porém, o problema tem número de Reynolds alto, na ordem de 2×10^7 , e algumas publicações recentes, como Wood, Breue e De Nayer (2018), mostram que a medida que o número de Reynolds cresce, as pressões a sotavento tendem a diminuir (podendo chegar a valores, na escala manométrica, positivos) e, assim, passa a haver compressão, já que há o descolamento da camada limite e aparece uma zona de recirculação de ar.

6.4.1 Aplicação de carga de vento: baixa velocidade

Para essa primeira modelagem no programa SATS foram considerados os seguintes parâmetros iniciais: módulo de elasticidade de $0,5 \cdot 10^9$ Pa, espessura da membrana igual a 0,005 m, retesamento inicial de $2 \cdot 10^5$ Pa e erro limite relativo ao deslocamento total calculado por $\left(\left\| \mathbf{U}^{tot} \right\| - \left\| \mathbf{U}_0^{tot} \right\| \right) / \left\| \mathbf{U}_0^{tot} \right\| \leq 10^{-3}$. Todos os nós da base foram fixados e foi aplicada uma pressão dinâmica correspondente a um vento de velocidade 13 m/s (ou 46,8 km/h), atuando na direção do eixo z negativo. O volume analítico do domo é $2094,40 \text{ m}^3$, a pressão interna considerada foi igual a 200 Pa (correspondente a cerca de 2 cm de coluna d'água) e o método de solução adotado foi o MN, primeiro para a membrana sem enrugamento e depois com, a fim de comparar o tempo de solução de cada caso e discutir o custo computacional envolvido.

Assim, foi feita análise do modelo considerando a pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte (que será denominado de caso 2A) e, depois, essa com valor constante (caso 2B) para a membrana sem enrugamento. A Tabela 6 mostra os resultados encontrados para ambos os casos, sendo $V_{0, SATS}$ o volume inicial do domo e $V_{f, SATS}$ o volume final do mesmo. A Figura 43 o deslocamento total, onde uma seta é indicada para representar a direção e sentido de atuação do vento, a Figura 44 as tensões principais máximas e a Figura 45 as tensões principais mínimas.

Figura 43 – Deslocamento total: a) caso 2A e b) caso 2B

Fonte: Autora.

Figura 44 – Tensão principal máxima: a) caso 2A e b) caso 2B

Fonte: Autora.

Figura 45 – Tensão principal mínima: a) caso 2A e b) caso 2B

Fonte: Autora.

Tabela 6 – Comparação entre os resultados obtidos

Caso 2A – Boyle	Caso 2B – p constante
$p = 199,94 \text{ Pa}$	$p = 200 \text{ Pa}$
$V_{0, SATS} = 2089,20 \text{ m}^3$	$V_{0, SATS} = 2089,20 \text{ m}^3$
$V_{f, SATS} = 2089,83 \text{ m}^3$	$V_{f, SATS} = 2089,83 \text{ m}^3$

Fonte: Autora.

É possível observar que de fato a membrana não enruga, já que o valor mínimo da tensão mínima é igual a aproximadamente $2,6 \times 10^4 \text{ Pa}$. Além disso, a membrana tem deslocamento total da ordem de 5 mm (praticamente zero) e os resultados obtidos para o caso 2B são muito similares aos resultados do caso 2A. Como já se partiu praticamente da solução de equilíbrio, as diferenças encontradas estão relacionadas a uma pequena incompatibilidade do volume analítico com o volume numérico, que é um erro de discretização da superfície e poderia ser reduzido com uma discretização maior. Contudo, a diferença do volume numérico com relação ao volume analítico é de apenas 0,25%. Assim, para esse exemplo, a consideração da pressão interna constante dá uma boa aproximação dos resultados se considerando a lei de Boyle-Mariotte.

Para o caso da membrana sem enrugamento, o modelo convergiu em 3 iterações e teve tempo de processamento total igual a 10,93 s, ou seja, 3,64 s em média por iteração. Já quando se considerou a membrana com enrugamento, o modelo convergiu em 2 iterações (pois partiu praticamente da solução de equilíbrio), teve tempo de processamento total igual a 163,67 s, ou seja, 81,84 s em média por iteração e os resultados obtidos foram iguais aos do caso sem enrugamento, então optou-se por não indicar os resultados desse caso. Dessa forma, é possível concluir que o tempo de solução aumentou praticamente 15 vezes de um caso para o outro e que é muito mais barato computacionalmente considerar, quando a membrana não enruga, o caso sem enrugamento.

6.4.2 Aplicação de carga de vento: alta velocidade

Para essa segunda modelagem no programa SATS foram considerados os mesmos parâmetros iniciais do primeiro caso: módulo de elasticidade de $0,5 \cdot 10^9 \text{ Pa}$, espessura da membrana igual a 0,005 m, retesamento inicial de $2 \cdot 10^5 \text{ Pa}$ e um erro limite relativo ao deslocamento total calculado por $\left(\left\| \mathbf{U}^{tot} \right\| - \left\| \mathbf{U}_0^{tot} \right\| \right) / \left\| \mathbf{U}_0^{tot} \right\| \leq 10^{-1}$. Todos os nós da base foram fixados e, agora, foi aplicada uma pressão dinâmica correspondente a um vento de velocidade 40 m/s (ou 144 km/h), atuando na direção do eixo z negativo. O volume analítico do domo é $2094,40 \text{ m}^3$, a pressão interna considerada foi igual a 200 Pa (correspondente a cerca de 2 cm de coluna d'água) e, para se obter

a convergência pelo Método de Newton, foi necessário utilizar o artifício que considera uma rigidez artificial nos nós da estrutura, deixando essa mais estável, já que grandes áreas de enrugamento surgiram ao longo da membrana.

Foi somada uma rigidez artificial, inicialmente igual a 501 N/m, à matriz de rigidez total da estrutura e essa foi reduzida até chegar ao valor de 1 N/m. Assim, cada nó recebeu, no final da análise, uma força final proporcional aos deslocamentos obtidos. Os nós que têm deslocamento zero não receberam nenhuma força, e os nós que apresentaram deslocamentos próximos de 2 m, receberam uma força de aproximadamente 2 N. Ao comparar o vetor de forças desbalanceadas $\mathbf{g}$ com o vetor de forças externas $\mathbf{f}$, observou-se que os valores do primeiro eram muito maiores que os do segundo, concluindo assim que as forças aplicadas eram relativamente pequenas quando comparadas com a força atuante na estrutura e o tamanho dessa.

Primeiramente, foi feita análise do modelo considerando a pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte (que será denominado de caso 3A) e, depois, essa com valor constante (caso 3B). A Tabela 7 mostra os resultados encontrados para ambos os casos, sendo $V_{0, SATS}$ o volume inicial do domo e $V_{f, SATS}$ o volume final do mesmo. A Figura 46 o deslocamento total, onde uma seta é indicada para representar a direção e sentido de atuação do vento, a Figura 47 as tensões principais máximas e a Figura 48 as tensões principais mínimas.

Tabela 7 – Comparação entre os resultados obtidos

Caso 3A – Boyle	Caso 3B – p constante
$p = 216,0934 \text{ Pa}$	$p = 200 \text{ Pa}$
$V_{0, SATS} = 2089,20 \text{ m}^3$	$V_{0, SATS} = 2089,20 \text{ m}^3$
$V_{f, SATS} = 1798,70 \text{ m}^3$	$V_{f, SATS} = 1933,60 \text{ m}^3$

Fonte: Autora.

Figura 46 – Deslocamento total: a) caso 3A e b) caso 3B

Fonte: Autora.

Figura 47 – Tensão principal máxima: a) caso 3A e b) caso 3B

Fonte: Autora.

Figura 48 – Tensão principal mínima: a) caso 3A e b) caso 3B

Fonte: Autora.

Nesse modelo, é possível notar que a pressão interna variou 16 Pa, o que corresponde a uma diferença de 7,5% quando comparada ao caso 3A e o volume, por sua vez, variou 135 m^3 de um caso para outro, o que corresponde a uma diferença de 7%. Quando se considera a lei de Boyle-Mariotte, o deslocamento total encontrado é aproximadamente 6 cm menor (que corresponde a uma diferença de 2,6%), bem como as tensões principais máxima e mínima, que tiveram seus valores máximos diminuídos em 2,32% e 0,41%, respectivamente. Em comparação ao modelo da bola de pilates, nesse caso é menos relevante a consideração da pressão variando com o volume, mas alguns parâmetros tiveram variações consideráveis, como é o caso da pressão interna e do volume.

Para esse exemplo da membrana com enrugamento, foram efetuados 11 equilíbrios, já que a rigidez artificial nos nós foi reduzida de 50 em 50 N/m até chegar em 1 N/m. O primeiro passo do MN convergiu em 8 iterações, enquanto os equilíbrios subsequentes levaram apenas 1 iteração para convergir, e o modelo teve tempo de processamento total igual a 1h20min. Dessa forma, é possível concluir que o tempo de solução aumentou exponencialmente quando comparado com o modelo em que não ocorre enrugamento e que o custo computacional desse modelo é muito mais alto. Porém, não seria possível considerar o caso sem enrugamento, já que os resultados encontrados têm discrepâncias com relação aos mostrados acima.

6.5 DOMO PNEUMÁTICO DE GRANDES DIMENSÕES

A estrutura pneumática mostrada na Figura 49 foi utilizada durante 6 meses para proteger o processo de preparação do solo durante a construção de uma usina nuclear. O estudo considera a resposta estática da estrutura, que tinha uma planta retangular não simétrica de aproximadamente 110m por 86m e 30m de altura, fixada em todo o seu perímetro a uma parede de concreto. O reforço da estrutura foi feito por meio de sete cabos paralelos à maior direção da membrana e restritos transversalmente por tiras de tecido, mas que possibilitavam o escorregamento desses cabos.

Figura 49 – Foto da cobertura utilizada para cobrir a usina nuclear

Fonte: Pauletti, Guirardi (2013).

Inicialmente, a pressão interna considerada foi de 100 Pa (correspondente a cerca de 1 cm de coluna d'água), um valor relativamente pequeno e, devido ao curto período de uso, a pressão de vento considerada também teve um valor reduzido, estimado em 245 N/m^2 . Devido ao fato de ter sido uma estrutura temporária os ensaios em túnel de vento, por serem muito caros, não se tornaram viáveis e, assim, os estudos feitos em Pauletti e Guirardi (2013) mostram a resposta da estrutura às forças de vento considerando duas condições limites onde os coeficientes de pressão são conhecidos: os domos esférico e cilíndrico. Ainda, foram considerados o enrugamento da membrana e a diferença entre a interação de cabos aderentes e escorregando na estrutura.

Dessa forma, em Pauletti, Rocha e Bolelli (2019), os coeficientes de pressão foram obtidos com mais precisão através da análise *CFD*, feita com o auxílio do *software* Ansys Fluent e podem ser vistos na Figura 50. Uma vez realizada a modelagem, foi possível exportar o vetor com os valores de coeficiente de pressão atuantes em cada nó, bem como os parâmetros da malha utilizada, e adaptar os dados obtidos para a utilização no programa SATS. Para a análise estrutural, todos os nós da borda foram fixados, foi considerada uma tensão inicial de 1 MPa, uma espessura de 1mm e um módulo de elasticidade igual a 1 GPa e o volume interno inicial calculado pelo programa foi de 154638 m^3 . Todas as análises foram feitas considerando o método de Newton, tanto com a

matriz de rigidez tangente analítica como por diferenças finitas, e os resultados obtidos foram iguais.

Figura 50 – Coeficientes de pressão: a) vento longitudinal e b) vento transversal

Fonte: Pauletti, Rocha e Bolelli (2019).

Primeiramente, sem nenhuma força externa aplicada na estrutura, foi considerada a pressão interna constante e, depois, a variação dessa pressão conforme a lei de Boyle-Mariotte. Os resultados obtidos podem ser vistos na Figura 51 e na Figura 52, respectivamente e a Tabela 8 resume os dados de cada um dos casos.

Tabela 8 – Comparação entre os resultados obtidos

Sem força externa – Boyle	Sem força externa – p constante
$p = 99,79 \text{ Pa}$	$p = 100 \text{ Pa}$
$V_{0, \text{SATS}} = 154638 \text{ m}^3$	$V_{0, \text{SATS}} = 154638 \text{ m}^3$
$V_{f, \text{SATS}} = 154965 \text{ m}^3$	$V_{f, \text{SATS}} = 155290 \text{ m}^3$

Fonte: Autora.

Figura 51 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Figura 52 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Ao final da análise, a pressão interna variou 0,21 Pa e o volume interno 325 m^3 , ou seja, a pressão interna diminuiu e o volume aumentou em 0,21% com relação aos valores finais encontrados no caso considerando a lei de Boyle-Mariotte. Comparando os resultados obtidos na Figura 51 e Figura 52, nota-se que a estrutura fica mais rígida quando a pressão é capaz de variar conforme o volume interno varia e isso é comprovado pela diminuição das tensões principais máxima e mínima e do deslocamento total máximo.

Em segundo lugar, foi aplicada uma força de vento na direção longitudinal à estrutura e, com a pressão interna constante, foram obtidos os resultados da Figura 53. Depois, para esse mesmo caso, foi considerada a variação da pressão conforme a lei de Boyle-Mariotte e os resultados são mostrados na Figura 54. A Tabela 9 resume os dados obtidos para cada um dos casos.

Tabela 9 – Comparação entre os resultados obtidos

Vento longitudinal – Boyle	Vento longitudinal – p constante
$p = 99,54 \text{ Pa}$	$p = 100 \text{ Pa}$
$V_{0, \text{SATS}} = 154638 \text{ m}^3$	$V_{0, \text{SATS}} = 154638 \text{ m}^3$
$V_{f, \text{SATS}} = 155346 \text{ m}^3$	$V_{f, \text{SATS}} = 155998 \text{ m}^3$

Fonte: Autora.

Figura 53 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Figura 54 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Ao final da análise, a pressão interna variou 0,46 Pa e o volume interno 652 m^3 , ou seja, a pressão interna diminuiu 0,46% e o volume aumentou em 0,42% com relação aos valores finais encontrados no caso considerando a lei de Boyle-Mariotte. Comparando os resultados obtidos na Figura 53 e Figura 54, nota-se que tanto as tensões principais máxima e mínima quanto o deslocamento total máximo aumentam quando a pressão é capaz de variar conforme o volume interno varia e, no caso do deslocamento, esse aumento se dá na proximidade da região da membrana à sotavento, onde existe compressão.

Por fim, no terceiro caso foi aplicada uma força de vento na direção transversal à estrutura, considerando pressão interna constante e variando conforme a lei de Boyle-Mariotte, e foram obtidos os resultados da Figura 55 e Figura 56, respectivamente. A Tabela 10 resume os dados obtidos para cada um dos casos.

Tabela 10 – Comparação entre os resultados obtidos

Vento transversal – Boyle	Vento transversal – p constante
$p = 100,63 \text{ Pa}$	$p = 100 \text{ Pa}$
$V_{0, \text{SATS}} = 154638 \text{ m}^3$	$V_{0, \text{SATS}} = 154638 \text{ m}^3$
$V_{f, \text{SATS}} = 153971 \text{ m}^3$	$V_{f, \text{SATS}} = 153000 \text{ m}^3$

Fonte: Autora.

Figura 55 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Figura 56 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Ao final da análise, a pressão interna final variou 0,63 Pa e o volume interno 971 m³, ou seja, para esse caso a pressão aumentou e volume diminuiu em 0,63% com relação aos valores finais encontrados. É interessante notar que como a pressão interna é pequena quando comparada com a dimensão da estrutura, nesse caso a estrutura se contrai. Comparando os resultados indicados de ambos os casos, nota-se que as tensões principais máxima e mínima aumentam e o deslocamento total máximo diminuiu quando a pressão é capaz de variar conforme o volume interno varia, ou seja, mesmo retraindo a estrutura apresenta certo enrijecimento.

Como mencionado anteriormente, esse pneumático foi projetado para ter uma pressão interna de 100 Pa, que foi considerada nos modelos indicados acima, mas essa pressão era muito baixa para uma estrutura com essas dimensões e ela apresentou um grande enrugamento. Dessa forma, a pressão interna foi aumentada e, assim, foram gerados resultados para uma pressão 5 vezes maior, ou seja, 500 Pa. Para as análises estruturais, todos os nós da borda foram fixados, foi considerada uma tensão inicial de 5 MPa, uma espessura de 1mm e um módulo de elasticidade igual a 1 GPa e o volume interno inicial calculado pelo programa foi 154638 m^3 . Em cada um dos três casos (sem força de vento, vento longitudinal e vento transversal atuando na estrutura) foi considerada a pressão interna constante e, depois, a mesma variando conforme a lei de Boyle-Mariotte.

Figura 57 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Figura 58 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

A Figura 57 e Figura 58 mostram os resultados do pneumático obtidos pelo MN e sem considerar nenhuma força externa. A pressão interna passou a ser, no final da análise, igual a 494,06 Pa e o volume interno foi 156498 m^3 , ou seja, a pressão diminuiu e volume aumentou em 1,20% com relação aos valores finais encontrados. Nota-se um enrijecimento da estrutura quando a pressão é capaz de variar conforme o volume interno varia e isso é mostrado na diminuição das tensões

principais máxima e mínima e do deslocamento total máximo. Há uma diferença de 1% entre os valores máximos da tensão principal máxima e de 0,54% entre os valores máximos da tensão principal mínima e a diferença entre os deslocamentos encontrados foi de aproximadamente 0,90%, diferenças essas encontradas sempre com relação aos valores obtidos com a lei de Boyle-Mariotte.

Figura 59 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Figura 60 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

A Figura 59 e Figura 60 mostram os resultados do pneumático submetido a uma força de vento atuante na direção longitudinal à estrutura. Ao final da análise, a pressão interna passou a ser 492,15 Pa e o volume interno foi 157105 m³, ou seja, a pressão diminuiu e volume aumentou em aproximadamente 1,60% com relação aos valores finais encontrados. É possível notar que novamente a estrutura fica mais rígida, uma vez que o deslocamento total máximo diminuiu, bem como as tensões principais máxima e mínima. Há uma diferença 1% entre os valores máximos da tensão principal máxima e de 0,54% entre os valores máximos da tensão principal mínima e a diferença entre os deslocamentos encontrados foi de aproximadamente 0,89%.

Figura 61 – Resultados com pressão interna constante: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Figura 62 – Resultados com pressão interna variando conforme a lei de Boyle-Mariotte: a) tensão principal máxima, b) tensão principal mínima e c) deslocamento total

Fonte: Autora.

Por fim, a Figura 61 e Figura 62 mostram os resultados do pneumático submetido a uma força de vento atuante na direção transversal à estrutura. A pressão interna no final da análise passou a ser 492,29 Pa e o volume interno foi 157059 m^3 , ou seja, a pressão diminuiu e volume aumentou em aproximadamente 1,55% com relação aos valores finais encontrados. Mais uma vez o deslocamento total máximo diminuiu quando comparando os dois casos, bem como as tensões principais máxima e mínima, notando certo enrijecimento da estrutura. Há uma diferença de 0,40% entre os valores máximos da tensão principal máxima e de 0,31% entre os valores máximos da tensão principal mínima e a diferença entre os deslocamentos encontrados foi de 0,54%.

No geral, comparando os três casos com pressão interna igual a 100 Pa com os de 500 Pa, é possível concluir que o padrão das imagens é o mesmo e quando é utilizada uma pressão maior, as tensões principais aumentam e a estrutura fica mais rígida. Assim, o deslocamento no caso sem nenhuma força externa aumenta, pois a estrutura está mais inflada, e nos casos com vento longitudinal e transversal esse deslocamento diminuiu, devido ao enrijecimento da estrutura. Por fim, conclui-se

que para grandes pneumáticos insuflados sujeitos a uma baixa pressão interna, a consideração da lei de Boyle-Mariotte na análise estrutural não influencia de forma significativa nos resultados encontrados, podendo se considerar a pressão interna constante.

7 CONCLUSÕES

Essa pesquisa consiste na avaliação do acoplamento pressão-volume em estruturas pneumáticas e na verificação da nova formulação referente à rigidez volumétrica. Inicialmente, foi feita uma revisão do estado da arte das estruturas pneumáticas, juntando os seus diferentes tipos e os exemplos mais relevantes ao longo da história até os dias de hoje. Depois, foram reunidos trabalhos que avaliam tanto a dependência entre pressão e volume quanto a rigidez volumétrica, descrevendo brevemente as teorias e formulações utilizadas em cada um.

A partir do modelo inicial de um domo semiesférico de raio 2 metros, onde foi aplicada uma condição de contorno fictícia que possibilitasse a deformação livre da esfera em todas as direções, foram realizadas comparações entre os resultados analíticos e numéricos. Concluiu-se que esse modelo se deforma uniformemente em todas as direções quando é considerada a lei de Boyle-Mariotte e os resultados obtidos para os três métodos de solução foram praticamente iguais, o que validou a implementação realizada.

Uma análise importante para esse estudo foi a comparação entre o modelo experimental de uma bola de pilates, que representa uma estrutura pneumática em pequena escala, e o seu modelo numérico. Foi possível comparar os resultados experimentais com os numéricos e até mesmo alguns analíticos e ressaltar a diferença de se considerar a pressão interna constante e essa variando conforme a lei de Boyle-Mariotte. A não consideração dessa dependência gerou resultados muito diferentes, o que foi mostrado tanto pela diferença de 56% nos deslocamentos da estrutura quanto pelas diferenças de 32% do volume final e 46% da pressão interna final.

Ainda, foi estudado um domo, cujo raio de 10 m era igual à sua altura, submetido a atuação de uma força de vento primeiro de baixa velocidade e depois de alta. No primeiro caso, já que a força de vento atuante era pequena perto da pressão interna da estrutura, a membrana não enrugou e, assim, a consideração da pressão interna constante deu uma boa aproximação dos resultados se considerando a lei de Boyle-Mariotte. Além disso, o número de iterações e o tempo total de processamento do modelo foram pequenos, tanto para o caso sem enrugamento quanto para o caso com.

Já no segundo caso, como a estrutura enrugou muito e o modelo tinha dificuldade de convergir, foi necessário utilizar o artifício que considera uma rigidez artificial nos nós da estrutura, deixando essa mais estável. A pressão interna aumentou e o volume diminuiu, ambos cerca de 7%, mas, em comparação ao modelo da bola de pilates, nesse caso é menos relevante a consideração da pressão variando com o volume. O modelo convergiu em 11 iterações e teve tempo de processamento total

igual a 1h20min, sendo possível concluir que o tempo de solução aumentou exponencialmente quando comparado com o modelo em que não ocorre enrugamento e que o custo computacional desse modelo é muito mais alto.

Por fim, foi realizada a análise de um domo pneumático de grandes dimensões. Foram analisados três principais casos, para duas pressões internas diferentes: a estrutura sem atuação de vento, atuação de um vento na direção longitudinal e, depois, na direção transversal à estrutura. Em todos os 6 casos a variação da pressão e do volume internos, quando comparando pressão constante e variando conforme a lei de Boyle-Mariotte, não foi tão significativa, sendo que a maior diferença encontrada foi de 1,60%. Comparando esse modelo com os dois mencionados anteriormente, foi a menor variação obtida, concluindo que para grandes pneumáticos insuflados sujeitos a uma baixa pressão interna, a consideração da lei de Boyle-Mariotte na análise estrutural não influencia de forma significativa nos resultados encontrados, podendo se considerar a pressão interna constante.

Quanto à nova parcela de rigidez volumétrica da estrutura, em todos os casos ela aumenta a influência da matriz de rigidez externa e faz com que essa se aproxime mais da matriz obtida por diferenças finitas, mas ela não diminui o número de iterações e nem diminui o tempo total de processamento do modelo, como era esperado no início do trabalho.

Assim, conclui-se que, para estruturas pneumáticas de pequeno e médio porte, o efeito do acoplamento pressão-volume para a análise estrutural é mais relevante quando comparado com estruturas de grandes dimensões. Para essas últimas, como estudado na última seção desse trabalho, a consideração da pressão interna constante dá boas aproximações dos resultados, além de simplificar e melhorar o tempo de processamento.

Sugere-se, para trabalhos futuros, a implementação do algoritmo de contato no programa SATS para se obter uma modelagem mais precisa, e possivelmente comparar o resultado obtido com uma modelagem feita no programa Ansys, por exemplo, visto que ainda existem certas dificuldades para se modelar uma membrana no Workbench. Sugere-se também efetuar a implementação de um algoritmo de otimização para a melhoria no tempo de convergência de alguns modelos, principalmente para os casos nos quais é necessário considerar enrugamento, e também a implementação de material hiperelástico.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- ASTM D638-14. **Standard Test Method for Tensile Properties of Plastics**. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2014. <http://dx.doi.org/10.1520/d0638-14>.
- ASTM D792-13. **Standard Test Methods for Density and Specific Gravity (Relative Density) of Plastics by Displacement**. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2013. <http://dx.doi.org/10.1520/d0792-13>.
- ASTM D1238-13. **Standard Test Method for Melt Flow Rates of Thermoplastics by Extrusion Plastometer**. ASTM International, West Conshohocken, PA, 2013. <http://dx.doi.org/10.1520/d1238-13>.
- ARGYRIS, J. H., et al. **Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 4, pp. 219–278, 1974.
- BERRY, D. T.; YANG, H. T. Y. **Formulation and experimental verification of a pneumatic finite element**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, v. 39, p. 1097–1114, 1996.
- BINI, D. **Method for erecting structures**. US Patent 3,462,521. 1969.
- BONET, J.; WOOD, R. D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.
- BONET, J.; WOOD, R. D.; MAHANEY, J.; HEYWOOD, P. **Finite element analysis of air supported membrane structures**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, vol. 190, no. 5–7, pp. 579–595, 2000.
- BOUZIDI, R.; RAVAUT, Y.; WIELGOSZ, C. **Finite elements for 2D problems of pressurized membranes**. Computers & Structures, v. 81, n. 26-27, p.2479-2490, Oct. 2003. Elsevier BV. [http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7949\(03\)00308-0](http://dx.doi.org/10.1016/s0045-7949(03)00308-0).
- BULSON, P. S. **Design Principles of Pneumatic Structures**. The Structural Engineer, vol. 51, no. 6, 1973.
- CHI, J. Y.; PAULETTI, R. M. O. **An Outline of the Evolution of Pneumatic Structures**. II Simposio Latinoamericano de Tenso-estructuras. Caracas, 11 p. 2005.

- COELHO, M. A. O. **Analysis of pneumatic structures considering nonlinear material models and pressure–volume coupling**. 142 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2012.
- COELHO, M. A. O.; ROEHL, D.; BLETZINGER, K. **Numerical and analytical solutions with finite strains for circular inflated membranes considering pressure–volume coupling**. International Journal of Mechanical Sciences, v. 82, p.122-130, maio 2014. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijmecsci.2014.03.012>.
- CRISTEA, A. Z. **Bouncing Bridge**. 2012. Disponível em: <https://azc.archi/en/postwork/bouncing-bridge/>. Acesso em: 06 dez. 2018.
- FICHTER, W. B. **Some solutions for the large deflections of uniformly loaded circular membranes**. NASA Technical Paper 3658-NASA Langley Research Center, Hampton, VA, 1997.
- FORSTER, B. **Cable and membrane roofs – a historical survey**. Structural Engineering Reviews, v. 6 (3/4), p. 145-174, 1994.
- GUIRARDI, D. M. **Implementação de um elemento finito de membrana baseado na formulação natural de Argyris**. 113 f. Tese (Mestrado) - Curso de Engenharia Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.
- GUIRARDI, D. M. **O método da relaxação dinâmica aplicado à análise de estruturas de cabos e membranas**. 146 f. Tese (Doutorado) - Curso de Engenharia Civil, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2011.
- HÄBLER, M.; SCHWEIZERHOF, K. **On the static interaction of fluid and gas loaded multi-chamber systems in large deformation finite element analysis**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, v. 197, p. 1725–1749, 2008.
- HERZOG, T. **Pneumatic Structures: a handbook for the architect and engineer**. Crosby Lockwood Staples, London, 1977.
- JRUSJRUNGKIAT, A. **Nonlinear Analysis of Pneumatic Membranes: From Subgrid to Interface**. 236 f. Tese (Doutorado) — Technische Universität München, 2009.
- KNUDSON, W.C. **Recent advances in the field of long span tension structures**. Engineering Structures, v. 13, p. 164–177, 1991.

KOKAWA, T.; WATANABE, K.; WATANABE, T. **Ice shell – Contemporary ‘Kamakura’**. 2nd International Conference, Mukogawa Women’s Univ., Nishinomiya, n. 202, p.70-75, Japan. July 14-16, 2012.

KROMOSER, B.; KOLLEGGER, J. **Herstellung von Schalentragwerken aus Beton mit der “Pneumatic Wedge Method”**. Beton und Stahlbetonbau, [s.l.], v. 109, n. 8, p.557-565, ago. 2014. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1002/best.201400014>.

KROMOSER, B.; KOLLEGGER, J. **Pneumatic forming of hardened concrete - building shells in the 21st century**. Structural Concrete, [s.l.], v. 16, n. 2, p.161-171, 16 mar. 2015. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1002/suco.201400057>.

KROMOSER, B.; HUBER, P. **Pneumatic Formwork Systems in Structural Engineering**. Advances in Materials Science and Engineering, [s.l.], v. 2016, p.1-13, 2016. Hindawi Limited. <http://dx.doi.org/10.1155/2016/4724036>.

LIN, O. **Nîmes Arena**. 2012. Disponível em: <https://www.lin-a.com/sites/default/files/NAC-PDF.pdf>. Acesso em: 05 jul. 2017.

LIU, M.X.; WANG, C.G.; LI, X.D. **Rigid-flexible contact analysis of an inflated membrane balloon with various contact conditions**. International Journal of Solids and Structures, [s.l.], v. 144-145, p.218-229, jul. 2018. Elsevier BV. <http://dx.doi.org/10.1016/j.ijsolstr.2018.05.004>.

MASE, G. T.; MASE, G. E.; SMELSER, R. E. **Continuum Mechanics for Engineers**. 3. ed. Boca Raton, Flórida: Taylor & Francis Group, 2010. 370 p.

MATSUYAMA, H. **Expo ’70 Osaka: Futuristic Architecture and Engineering**. 2016. Disponível em: <https://www.patternz.jp/expo-70-osaka/>. Acesso em: 09 dez. 2019.

MCLEAN, W.; SILVER, P. **Air Structures – Form + Technique**. Laurence King Publishing, London, 160 p. 2015.

“Media-ICT / Enric Ruiz Geli”. ArchDaily. 09 Feb 2010. Disponível em: <https://www.archdaily.com/49150/media-tic-enric-ruiz-geli>. Acesso em: 5 out. 2018.

OLIVEIRA, M. B. **Estudo das estruturas de membrana: uma abordagem integrada do sistema construtivo, do processo de projetar e dos métodos de análise**. Tese (Doutorado em Estruturas) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2001.

- PAULETTI, R. M. O. **Análise de estruturas retesadas (tensoestruturas), empregando programas generalistas**. I Simpósio Nacional de Tensoestruturas. São Paulo, p. 1-19, 5-6 mai. 2002.
- PAULETTI, R. M. O. **História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas**. Tese de Livre Docência, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.
- PAULETTI, R. M. O. **Static Analysis of Taut Structures**. Textile Composites and Inflatable Structures II, p.117-139, 2008. Springer Netherlands. http://dx.doi.org/10.1007/978-1-4020-6856-0_8.
- PAULETTI, R. M. O. **Some issues on the design and analysis of pneumatic structures**. International Journal of Structural Engineering, Vol. 1, Nos. 3/4. Inderscience Enterprises Ltd., 2010.
- PAULETTI, R. M. O. **Considerações sobre o projeto e análise de estruturas retesadas**. Técnica, São Paulo, n. 175, p.1-6, out. 2011.
- PAULETTI, R. M. O.; GUIRARDI, D. M. **Implementation of a simple wrinkling model into Argyris' membrane finite element**. VI International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures. K. -U. Bletzinger, B. Kröplin and E. Oñate. Munich, Germany. 2013.
- PAULETTI, R. M. O., et al. **The Latin American Symposia and some Tensile Structures in Latin America**. Proceedings of the IASS Annual Symposium – ‘Beyond the limits of man’, 23 – 27 set., 2013, Wroclaw University of Technology, Poland. J.B. Obrębski and R. Tarczewski (eds.).
- PAULETTI, R. M. O. **Argyris' Natural Membrane Finite Element with Pneumatic Volume Stiffness**. Comunicação privada, EPUSP, 2018.
- PAULETTI, R. M. O.; ROCHA, K. B.; BOLELLI, P. M. **Some improvements on the static analysis of a large pneumatic envelope**. Proceedings of the IASS Annual Symposium – ‘Form and Force’, 07 – 10 out., 2019, Barcelona, Espanha. C. Lázaro, K.-U. Bletzinger, E. Oñate (eds.).
- PIMENTA, P. M.; PAULETTI, R. M. O. **Análise não linear de estruturas compostas de cabos e membranas**. I Simpósio Nacional de Tensoestruturas. São Paulo, 5-6 de maio de 2002. Anais do Simpósio (em CD).
- RUMPEL, T. **Effiziente Diskretisierung von statischen Fluid-StrukturProblemen bei grossen Deformationen**. Tese (Doutorado) — Fakultät für Maschinenbau der Universität Karlsruhe (TH), 2003.

RUMPEL, T.; SCHWEIZERHOF, K. **Volume-dependent pressure loading and its influence on the stability of structures**. International Journal for Numerical Methods in Engineering, [s.l.], v. 56, n. 2, p.211-238, 2003. Wiley. <http://dx.doi.org/10.1002/nme.561>.

RUMPEL, T.; SCHWEIZERHOF, K.; HAßLER, M. **Efficient Finite Element Modelling and Simulation of Gas and Fluid Supported Membrane and Shell Structures**. Computational Methods in Applied Sciences, [s.l.], p.153-172, 2005. Springer-Verlag. http://dx.doi.org/10.1007/1-4020-3317-6_10.

SALVADORI, M. **Why buildings stand up. The strength of architecture**. WW Norton & Co., New York, 1980.

SCHLAICH, J. et al. **The air-inflated roof over the roman amphitheatre at Nîmes**. Structural Engineering Review 6 (3/4) 203–214, 1994.

SEWELL, M. J. **On configuration dependent loading**. Arch. Rat. Mech. Anal. 23, p. 327-351, 1967.

SNCF – Audic, Y. **Take a tour of Rennes Station**. 2019. Disponível em: <https://www.sncf.com/en/network-expertise/take-a-tour-of-rennes-station>. Acesso em: 30 jan. 2020.

SPECIALCHEM. **A Complete Guide on Ethylene Tetrafluoroethylene (ETFE)**. 2020. Disponível em: <https://omnexus.specialchem.com/selection-guide/ethylene-tetrafluoroethylene-etfe-plastic#>. Acesso em: 14 abr. 2020.

TE - Taiyo Europe. **Train Station Rennes**. MaxMak, 2020. Disponível em: <https://www.taiyo-europe.com/en/projects?tx_jcmprojectportfolio_projectportfolio%5Baction%5D=show&tx_jcmprojectportfolio_projectportfolio%5Bcontroller%5D=Project&tx_jcmprojectportfolio_projectportfolio%5Bproject%5D=314&cHash=4fc7425d8bcfc72dff08ea4bfca63fc1>. Acesso em: 30 jan. 2020.

Tensairity Solutions. **Applications: Demonstrator car bridge**. 2002. Disponível em: <<http://www.tensairitysolutions.com/applications/>>. Acesso em: 06 dez. 2018.

TKC – Taiyo Kogyo Corporation. **Corporate Brochures (English)**. MakMax, 2001. Disponível em: <https://www.makmax.com/download.html>. Acesso em: 07 nov. 2017.

TOPHAM, S. **Blow-Up: Inflatable Art, Architecture and Design**. Prestel – Verlag, Munich, 2002.

TURNER, M. J. et al. **Stiffness and deflection analysis of complex structures**. Journal of the Aeronautical Sciences, v. 23, n. 9, p. 805-823, 1956.

WOOD, J. N.; BREUER, M.; DE NAYER, G. **Experimental studies on the instantaneous fluid–structure interaction of an air-inflated flexible membrane in turbulent flow**. Journal of Fluids and Structures, [s.l.], v. 80, p.405-440, jul. 2018. Elsevier BV.
<https://doi.org/10.1016/j.jfluidstructs.2018.02.006>

WOUTERS, N. **Pneumatic Structures - A revival of formal experiments**. Technische Universitat Graz, p. 23. 2009.

ANEXO A – DEDUÇÃO DA PARCELA DE RIGIDEZ VOLUMÉTRICA

Deseja-se verificar que $\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3]$, sendo Λ_1 e Λ_2 as matrizes anti-simétricas cujos vetores axiais são, respectivamente, $\mathbf{l}_1$ e $\mathbf{l}_2$. Levando em conta que $\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2 = \Lambda_1 \mathbf{l}_2 = -\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1 = -\Lambda_2 \mathbf{l}_1$, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\Lambda_1 \mathbf{l}_2) = \mathbf{l}_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{u}} + \Lambda_1 \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \mathbf{u}} = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_2 \times \mathbf{l}_1) = -\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\Lambda_2 \mathbf{l}_1) = -\mathbf{l}_1^T \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \mathbf{u}} - \Lambda_2 \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \mathbf{u}}$$

Comparando o terceiro com o sexto termo da igualdade acima, onde $\forall \mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2$, decorre que

$$\mathbf{l}_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{u}} = -\Lambda_2 \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \mathbf{u}} \text{ e, portanto:}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) &= \Lambda_1 \frac{\partial \mathbf{l}_2}{\partial \mathbf{u}} - \Lambda_2 \frac{\partial \mathbf{l}_1}{\partial \mathbf{u}} = \Lambda_1 [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{0} \quad -\mathbf{I}_3] - \Lambda_2 [\mathbf{0} \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3] \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) &= [\Lambda_1 \quad \mathbf{0} \quad -\Lambda_1] - [\mathbf{0} \quad -\Lambda_2 \quad \Lambda_2] = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad -(\Lambda_1 + \Lambda_2)] \Rightarrow \\ &\Rightarrow \frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] \end{aligned}$$

$$\text{Dessa forma, tem-se que } \left(\frac{\partial}{\partial \mathbf{u}}(\mathbf{l}_1 \times \mathbf{l}_2) \right)^T = [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3]^T = \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \Lambda_1 \\ \Lambda_2 \\ \Lambda_3 \end{bmatrix}.$$