EDSON LUBAS SILVA

Sobre o dimensionamento de perfis de aço formados a frio

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de
São Paulo para obtenção do Título
de Mestre em Engenharia
Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Professor Doutor
Valdir Pignatta e Silva

São Paulo

2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Edson Lubas

**Sobre o dimensionamento de perfis de aço formados a frio /
E.L. Silva. -- São Paulo, 2006.
126 p.**

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Fundações.**

**1.Flambagem de Chapas 2.Chapa dobrada 3.Largura
efetiva 4.Estrutura de aço I.Universidade de São Paulo. Escola
Politécnica. Departamento de Engenharia de
Estruturas e Fundações II.t.**

DEDICATÓRIA

Aos meus pais Edson e Aodenira, com amor, admiração e gratidão pelo incentivo, apoio, carinho e conselhos sábios que nunca serão esquecidos.

AGRADECIMENTOS

Ao Deus, Todo Poderoso, em quem confio plenamente, por sempre ter cuidado de mim.

Ao Prof. Dr. Valdir Pignatta e Silva, pela amizade, apoio, incentivo e orientação durante toda a realização deste trabalho.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização do curso de mestrado.

À Eliane, minha noiva, que sempre me apoiou e com muita paciência foi compreensiva neste tempo que precisei privá-la do convívio.

E, em especial, aos meus amigos.

RESUMO

SILVA, E. L. Sobre o dimensionamento de perfis de aço formados a frio. 2006. 126 f. Dissertação de mestrado – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

Os perfis de aço formados a frio possuem até 3 modos de *flambagem*: local, distorcional e global. Essa diversificação torna muito complexa a verificação de esforços resistentes nesses perfis. Recorre-se, então a métodos simplificados e interativos, com o intuito de fornecer ao engenheiro civil ferramentas que sejam práticas e apresentem um bom resultado. Métodos numéricos, como o MFF (métodos das faixas finitas), apesar de serem mais precisos, não são ainda, de uso corrente em projetos. O enfoque principal deste trabalho são as normas brasileiras de perfis formados a frio NBR 14762:2001 “*Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio*” e NBR 6355:2003 “*Perfis estruturais de aço formados a frio - Padronização*”. Comparam-se as tabelas D1 e D2 na NBR14762:2001, referentes à flambagem distorcional, a resultados calculados por meio do processo recomendado pela norma. Verificaram-se quais perfis padronizados pela NBR 6355:2003 dispensam a verificação da resistência por distorção da seção transversal. Uma análise geral de perfis de aço formados a frio, a fim de identificar aqueles que possuem melhor eficiência (perfis que resistem esforços mais elevados com menor área da seção transversal) também é feita. Para a realização desta pesquisa foi desenvolvido um programa de computador.

Palavras-chave: 1.Flambagem de chapas 2.Chapa dobrada 3.Largura efetiva 4.Estrutura de aço.

ABSTRACT

SILVA, E. L. Design of cold-formed steel. 2006. 126 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2006.

The cold formed steel members have up to 3 buckling modes: local, distortional and global. This diversification makes very complex the verification of these members' resistance. For this reason it is used simple and interactive methods to provide the Civil Engineers tools that are practical and present a good result. Although numerical methods such as FDM (Finite Strip Methods) are more precise, they are still not currently used in projects. The main focus of this dissertation is the Brazilian rules regarding the cold formed steel members NBR 14762:2001 "*Dimensioning steel structures made of cold formed profiles*" and NBR 6355:2003 "*Cold formed steel members – Standardizing*". It compares the D1 and D2 tables of NBR14762:2001, regarding the distortional buckling, with the calculated results recommended by these rules. In this way it is verified which NBR 6355:2003 standardized profiles do not require the verification of resistance by distortional buckling. It is also made a general analysis of these cold formed steel members. And to make this research it was developed a computer program.

Keywords: 1.Plate buckling 2.Cold formed steel 3.Effective widths 4.Structural steels.

LISTA DE SÍMBOLOS

a	comprimento longitudinal da chapa
b	largura da borda carregada no elemento de chapa
b_{ef}	largura efetiva do elemento de chapa
b_f	largura nominal da mesa
b_w	largura nominal da alma
k	coeficiente de flambagem local
k_x	constante de rigidez à flexão do elemento sujeito à distorção
k_ϕ	constante de rigidez à rotação do elemento sujeito à distorção
m_{0x}	momento fletor, por unidade de comprimento, no plano xz , aplicado na borda da placa
m_{0y}	momento fletor, por unidade de comprimento, no plano yz , aplicado na borda da placa
m_x	momento fletor, por unidade de comprimento, no plano xz agindo na placa
m_{xy}	momento de torção, por unidade de comprimento, no plano xy agindo na placa
m_y	momento fletor, por unidade de comprimento, no plano xz agindo na placa
n_x	esforço normal na direção x , por unidade de comprimento, aplicado na borda da chapa
n_y	esforço normal na direção y , por unidade de comprimento, aplicado na borda da chapa
n_{yx}	esforço de cisalhamento no plano xy , por unidade de comprimento, aplicado na borda da chapa
q	carregamento aplicado na direção normal à placa
q_x	esforço cortante na direção x , por unidade de comprimento, agindo na placa
q_y	esforço cortante na direção y , por unidade de comprimento, agindo na placa
r_e	constante de rigidez à rotação do apoio elasticamente engastado
t	espessura da chapa ou elemento
u	deslocamento na direção x
w	deslocamento da chapa na direção do eixo z
w_0	deslocamento inicial da chapa
A	área bruta da seção transversal
A_{ef}	área da seção transversal efetiva
Cr	perfil tipo Cartorla
C_w	constante de empenamento da seção
D	largura nominal do enrijecedor de borda
D_e	largura nominal enrijecedor de borda adicional
D_p	rigidez à flexão da placa
E	módulo de elasticidade do aço
E_t	módulo tangente do aço
F	função de tenções em chapas com grandes deslocamentos
G	módulo de elasticidade transversal do aço
I_a	momento de inércia de referência para enrijecedor de borda
I_s	momento de inércia do enrijecedor de borda
I_t	momento de inércia de torção
I_x	momento de inércia em relação ao eixo x

I_y	momento de inércia em relação ao eixo y
L	comprimento livre da barra sem travamentos ($L_x=L_y=L_t=L$)
L_d	comprimento da meia onda longitudinal associada a tensão convencional de flambagem elástica por distorção
L_t	comprimento efetivo de flambagem da barra por torção
L_x	comprimento efetivo de flambagem da barra em relação ao eixo x
L_y	comprimento efetivo de flambagem da barra em relação ao eixo y
$M_{x\text{dist}}$	momento fletor resistente de flambagem por distorção, em torno do eixo x
$M_{x\text{esc}}$	momento fletor resistente, em torno do eixo x, por escoamento da fibra mais solicitada na seção efetiva
N_0	esforço resistente, de compressão centrada, por escoamento da seção efetiva calculada com $\rho=1$
N_0	esforço normal, por unidade de comprimento de referência, usado na equação de carregamento em chapas com carregamento variável
N_c	esforço resistente, de compressão centrada, de flambagem por flexão, torção e flexo-torção do pilar
N_{cr}	esforço normal de compressão, por unidade de comprimento, crítico do elemento de chapa
N_{dist}	esforço resistente de compressão de flambagem por distorção da seção transversal
N_{rd}	esforço normal de compressão resistente de cálculo
U	energia de deformação
U	perfil tipo U
U_e	perfil do tipo U com enrijecedor de borda
U_{ee}	perfil do tipo U enrijecido com enrijecedor de borda adicional
W	trabalho das forças externas
Ze	perfil do tipo Z com enrijecedor de borda
α	parâmetro utilizado no calculo de k_ϕ
α	parâmetro utilizado nas equações de deslocamento w da chapa
β	parâmetro utilizado no calculo de k_ϕ
β	parâmetro utilizado nas equações de deslocamento w da chapa
γ_{xy}	deformação específica de cisalhamento na placa
ε_x	deformação específica na direção x na placa
ε_y	deformação específica na direção y na placa
λ_{crit}	índice de esbeltez reduzido referente a flambagem por distorção
σ_{crit}	tensão critica de flambagem elástica da chapa
σ_x	tensão normal na placa na direção paralela ao eixo x
σ_y	tensão normal na placa na direção paralela ao eixo y
τ_{xy}	tensão de cisalhamento na placa
Π	energia potencial total

SUMÁRIO

RESUMO	5
ABSTRACT	6
LISTA DE SÍMBOLOS	7
INTRODUÇÃO	11
1. ESFORÇOS EM PLACAS	12
1.1 – Flexão em placas	13
1.2 – Condições de contorno em placas	18
1.3 – Placa submetida à Flexão Composta	22
1.4 - Cálculo da energia em chapas sujeitas a esforço normal de compressão	24
2. FLAMBAGEM EM CHAPAS – REGIME ELÁSTICO-LINEAR	28
2.1 - Flambagem de chapa retangular simplesmente apoiada sob compressão uniforme	28
2.2 - Flambagem de chapa sob compressão uniforme, sob diversas condições de contornos	32
2.3 - Chapa simplesmente apoiada, sob carregamento uniforme, com vigas (enrijecedores) longitudinais intermediárias	53
2.4 - Flambagem de Placa Simplesmente Apoiada Sob ação de Carregamento Linearmente Distribuído (Momento Fletor combinado com Esforço Normal)	61
3 - COMPORTAMENTOS PÓS-CRÍTICO DE CHAPAS	67
3.1 – Teoria de Placas com Grandes Deslocamentos	67
3.3 – Larguras efetivas	75

4 - DISTORÇÃO EM PERFIS FORMADOS A FRIO	79
5 – PROGRAMA DE COMPUTADOR	85
6 – ANÁLISES PARAMÉTRICAS	93
6.1 - Análises paramétricas sobre distorção da seção transversal	93
6.2 – Comentários gerais sobre a geometria da seção transversal dos perfis	112
6.3 – Análise sobre o processo iterativo no cálculo do esforço resistente de compressão centrada	117
6.4 – Comentários gerais sobre a NBR 14762:2001	120
7 – CONCLUSÕES	123
REFERÊNCIAS	125

INTRODUÇÃO

O interesse do mercado em construções rápidas e econômicas tem sido um dos fatores que fazem o uso dos perfis de aço formados a frio ser muito comum. Eles são muito utilizados, em galpões de pequeno e médio porte, em coberturas e no *Sistema Light Gauge Steel Framing*, que consiste em painéis onde toda estrutura é feita em perfis leves revestidos. Esse tipo de elemento estrutural oferece grande eficiência na utilização do material aço, cuja grande maleabilidade permite confecções de seções transversais das mais variadas possíveis. Como toda estrutura feita em aço, a construção com esses elementos, que são pré-fabricados, possui um tempo reduzido de execução, além do benefício de que os perfis formados a frio são mais leves que os demais perfis de aço: perfis laminados e perfis soldados.

O objetivo deste trabalho foi desenvolver um programa de computador voltado para fins didáticos e realizar análises paramétricas de perfis de aço formados a frio, destacando-se: a influência das dimensões dos elementos constituintes dos perfis no seu esforço resistente, comparação entre o método da NBR 14762:2001 e a interação plena no cálculo dos esforços resistente a compressão, estudo da ocorrência da distorção nos perfis padronizados pela NBR 6355:2003. Realizou-se também, um estudo da teoria das placas a fim de fundamentar as expressões recomendadas em normas para o dimensionamento de perfis de aço formado a frio, em especial as apresentadas na NBR 14762:2001 para a obtenção das larguras efetivas dos elementos de chapa.

Este trabalho está dividido em três partes: introdução teórica, programa de computador para determinação de esforços resistentes e a análise paramétrica. A introdução teórica terá como ênfase a teoria das placas para análise de estabilidade local dos elementos do perfil de aço. O programa de computador para a determinação dos esforços resistentes foi desenvolvido em linguagem Java. A análise paramétrica tem por base os resultados calculados pelo programa.

1. Esforços em Placas

O estudo realizado nos capítulos 1 e 2 deste trabalho refere-se ao comportamento de placas e chapas em regime elástico. Contudo, o estado limite último para dimensionamento das chapas de perfis de aço formadas a frio ocorre em regime elásto-plástico e, para instabilidade local dos elementos, pós-flambagem. O capítulo 3 abordará o comportamento das chapas no regime elásto-plástico e o capítulo 4 o comportamento pós-crítico das chapas de aço em perfis formados a frio.

A teoria das placas em estudo feito pela Teoria da Elasticidade tem por base as seguintes hipóteses fundamentais:

- I – o material que constitui a estrutura é homogêneo, isótropo, e obedece a lei de Hooke;
- II – a espessura t é pequena em relação às demais dimensões e aos raios de curvatura da deformada da superfície média;
- III – as tensões normais à superfície média são muito pequenas em relação às demais tensões, de modo que não são consideradas;
- IV – os pontos pertencentes, antes da deformação, a retas perpendiculares à superfície média encontram-se, após a deformação, sobre retas perpendiculares à superfície média deformada;
- V – os deslocamentos são muito pequenos em relação à espessura t , sendo possível desprezar a influência dos mesmos no estudo das condições de equilíbrio do elemento de superfície.

1.1 – Flexão em placas

Com base na “*Teoria da Estabilidade Elástica*” de Timoshenko (1961), porém de forma mais específica para o estudo de chapas de perfis de aço formadas a frio, destacam-se, a seguir, tópicos da teoria das placas:

Admite-se uma placa retangular sobre carregamento distribuído $q(x,y)$, conforme a figura 1.1.a. O carregamento q pode variar na superfície e é dado em função de x e y .

Figura 1.1 – Placa submetida à flexão pura

Figura 1.2 – Volume infinitesimal na placa

Ao analisar um volume infinitesimal na placa, limitado por pares de planos paralelos aos planos xz e yz , como mostra a figura 1.2, assumem-se que durante a flexão da placa as faces desse volume permanecem planas (figura 1.2b) e as faces formadas por planos paralelos aos planos xz e yz giram em torno de um eixo contido no plano médio do volume.

Denomina-se w o deslocamento da placa na direção vertical z .

O alongamento específico na direção x e y de uma lâmina $abcd$ (figura 1.2a), a uma distância z do plano neutro é calculado em função do deslocamento da placa, w , conforme a expressão 1.1

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.1)$$

Usando a lei de Hooke para o estado plano de tensões, tem-se a expressão 1.2.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \quad \varepsilon_y = \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (1.2)$$

Da equação 1.2, tem-se que as tensões correspondentes sobre as faces de uma lâmina $abcd$ (figura 1.2a), a uma distância z do plano neutro, nas direções x e y , são respectivamente determinadas pela expressão 1.3 (estado plano de tensão).

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.3)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.4)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} = -\frac{Ez}{1+\nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.5)$$

Essas tensões normais distribuídas ao longo de toda a face lateral do elemento da figura 1.2 equivalem aos momentos solicitantes internos na placa (por unidade de comprimento), expressos conforme as expressões 1.5 e 1.6.

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz = m_x \quad (1.5)$$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz = m_y \quad (1.6)$$

$$\int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz = m_{xy} \quad (1.6)$$

O momento m_x da expressão 1.5 é, por definição, momento fletor no plano xz por unidade de comprimento da direção y da placa (ou seja, momento fletor numa faixa de comprimento unitário da placa); de forma análoga, define-se m_y .

Substituindo a expressão 1.3 em 1.5 e a expressão 1.4 em 1.6 obtêm-se as expressões 1.7 e 1.8 respectivamente, que são os esforços na placa em função do deslocamento vertical.

$$m_x = -D_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.7)$$

$$m_y = -D_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.8)$$

$$m_{xy} = -D_p (1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.8)$$

onde

$$D_p = \frac{E}{1 - \nu^2} \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} z^2 dz = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (1.9)$$

D_p é chamada de rigidez à flexão da placa.

Fazendo o equilíbrio dos elementos dx e dy da placa sobre o carregamento q (figura 1.3), obtêm-se nas faces do elemento os esforços de momento fletor, momento de torção e esforço cortante vertical. Os esforços cortantes, por unidade de comprimento, são definidos pelas expressões 1.10.

$$q_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xz} dz \quad q_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yz} dz \quad (1.10)$$

Figura 1.3 – Esforços no volume infinitesimal da placa

Assume-se que a resultante das forças de cisalhamento $q_x dy$ e $q_y dx$ passa pelo centro geométrico dos lados do elemento.

Os momentos fletores e de torção, por unidade de comprimento da placa, são definidos pelas expressões 1.11 e 1.12.

$$m_x = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_x z dz \quad m_y = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \sigma_y z dz \quad (1.11)$$

$$m_{xy} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{xy} z dz \quad m_{yx} = \int_{-\frac{t}{2}}^{\frac{t}{2}} \tau_{yx} z dz \quad (1.12)$$

As forças cortantes (expressão 1.10), os momentos fletores (expressão 1.11) e os momentos de torção (expressão 1.12) são calculados em função das coordenadas x e y .

Considerando-se o equilíbrio do elemento da figura 1.3, observa-se que todas as forças agindo nele são paralelas ao eixo z , devido à ação externa sobre o elemento

ser unicamente força vertical, e sua resultante apóia-se em um vetor paralelo a z. Então têm-se apenas três equações para o equilíbrio estático a serem consideradas: o equilíbrio das forças verticais e o equilíbrio dos momentos fletores em relação aos eixos x e ao eixo y. O equilíbrio das forças verticais resulta na equação 1.31.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} dx dy + \frac{\partial q_y}{\partial y} dy dx + q dx dy = 0 \quad (1.31)$$

A equação 1.31 pode ser simplificada pela equação 1.32.

$$\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} + q = 0 \quad (1.32)$$

O peso próprio da placa pode ser considerado na carga q .

Do equilíbrio dos esforços de momento agindo sobre o elemento da figura 03, no plano yz, resulta a equação 1.33.

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} dx dy - \frac{\partial m_y}{\partial y} dy dx + q_y dx dy = 0 \quad (1.33)$$

O momento devido ao carregamento q e ao acréscimo de força q_y foi desprezado na dedução da equação 1.33, pois é uma quantidade de ordem infinitesimal superior. Simplificando-se a equação 1.33, obtém-se a equação 1.34.

$$\frac{\partial m_{xy}}{\partial x} - \frac{\partial m_y}{\partial y} + q_y = 0 \quad (1.34)$$

Analogamente, obtém-se para os esforços de momento no plano xz a equação 1.35.

$$\frac{\partial m_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial m_x}{\partial x} - q_x = 0 \quad (1.35)$$

Isolando os termos q_x e q_y das equações 1.34 e 1.35 e substituindo-os na equação 1.32, tem-se a equação 1.36.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 m_{xy}}{\partial x \partial y} = -q \quad (1.36)$$

Observado que $m_{yx} = -m_{xy}$ em virtude de $\tau_{xy} = -\tau_{yx}$, obtém-se então a equação 1.37.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = -q \quad (1.37)$$

Substituindo os esforços m_x , m_y e m_{xy} da expressão 1.37 pelos das expressões 1.7, 1.8 e 1.9, que correspondem aos mesmos em função dos deslocamentos da placa, obtém-se a equação 1.40.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{q}{D_p} \quad (1.40)$$

Para a solução de um caso particular da equação 1.40, os momentos fletores e de torção podem ser calculados a partir das equações 1.38 e 1.39. As forças cortantes são obtidas das equações 1.34 e 1.35.

Substituindo na equação 1.35 as equações 1.38 e 1.39 para momentos fletores e de torção, obtém-se as expressões 1.41 e 1.42 para as forças cortantes.

$$q_x = \frac{\partial m_x}{\partial x} + \frac{\partial m_{yx}}{\partial y} = -D_p \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.41)$$

$$q_y = \frac{\partial m_y}{\partial y} - \frac{\partial m_{xy}}{\partial x} = -D_p \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.42)$$

Para determinar o deslocamento da chapa requer-se a solução de cada caso particular de integração da equação diferencial parcial, equação 1.40, para um determinado carregamento distribuído q e condição de contorno da placa.

1.2 – Condições de contorno em placas

Os itens a seguir abordam as condições de contorno em placas retangulares:

1.2.1 - Lado Engastado – Se o lado da placa for engastado, o deslocamento vertical w ao longo deste lado é zero e a tangente no plano do deslocamento coincide com a posição inicial do plano médio da placa. No caso dos eixos de referência x e y , adotado para o plano médio, serem paralelos aos lados da placa, e o lado coincidente com o eixo x ser engastado, as condições de contorno ao longo deste lado são dadas pela expressão 1.43.

$$(w)_{y=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)_{y=0} = 0 \quad (1.43)$$

1.2.2 - Lado simplesmente apoiado – Se o lado $y = 0$ da placa é simplesmente apoiado, o deslocamento w ao longo desse lado é zero. Ele pode girar livremente em relação ao eixo x , isto é, não haverá momento M_y ao longo desse lado. A expressão analítica de condições de contorno neste caso é a expressão 1.44.

$$(w)_{y=0} = 0 \quad \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)_{y=0} = 0 \quad (1.44)$$

1.2.3 - Lado Livre – Se o lado da placa $x = a$ é completamente livre, então ao longo deste lado não há momento fletor, momento de torção e nem esforço cortante vertical, como mostra a expressão 1.45.

$$(m_x)_{x=a} = 0 \quad (m_{xy})_{x=a} = 0 \quad (q_x)_{x=a} = 0 \quad (1.45)$$

Três condições de contorno são excessivas para a determinação do deslocamento vertical w da placa. As condições de contorno referentes ao momento de torção e esforço cortante podem ser substituídas por uma única, mostrada nas expressões 1.46 ou 1.47, que foi provada por Kirchhoff e explicada posteriormente por Thomson e Tait (apud Timoshenko 1961).

$$(q_x')_{x=a} = - \left(\frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} \quad (1.46)$$

$$\left(q_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.47)$$

Assim, reunindo as considerações de momentos de torção e forças cortantes ao longo do lado livre $x = a$, conforme a equação 1.4, e substituindo m_{xy} e q_x pelas equações 1.19 e 1.27, finalmente para o lado livre ($x=0$) tem-se como condição de contorno a ser satisfeita a equação 1.48.

$$\left(\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.48)$$

A condição que o momento fletor ao longo do lado livre seja zero requer a situação expressa na equação 1.49.

$$\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} = 0 \quad (1.49)$$

As equações 1.48 e 1.49 representam as duas condições de contorno necessárias para o lado livre da placa $x=a$.

1.2.4 - *Lado elasticamente engastado* – Se o lado $x=a$ de uma placa retangular está rigidamente ligado a uma viga que o apóia (fig. 1.4), considera-se que os deslocamentos da viga são coincidentes aos deslocamentos da placa no lado que ela está apoiada na viga; pode-se, então, considerar verdadeiras as expressões 1.50 e 1.51,

$$w_{x=a} = v \quad (1.50)$$

$$-\left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{x=a} = \theta \quad (1.51)$$

$$-\left[\frac{\partial^2 w}{\partial y \partial x} \right]_{x=a} = \theta' \quad (1.52)$$

onde, v é o deslocamento vertical da viga, θ é a rotação na viga e θ' é a rotação específica na viga.

O deslocamento da placa ao longo do lado $x=a$ não é zero, e sim igual ao deslocamento da viga. Da mesma forma, a rotação deste lado da placa é igual à rotação longitudinal da viga.

Figura 1.4 – placa com o lado a elasticamente engastado

O esforço transmitido da placa para a viga resulta, da equação 1.47, na expressão 1.53.

$$-\left(q_x - \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}\right)_{x=a} = D_p \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} \quad (1.53)$$

Tomando-se EI como rigidez à flexão da viga, igualando-se o lado direito da expressão 1.53 com o deslocamento da viga, tem-se a equação que representa uma das condições de contorno da placa ao longo do lado $x=a$, a eq. 1.54.

$$EI \left(\frac{\partial^4 w}{\partial y^4} \right)_{x=a} = D_p \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + (2-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right]_{x=a} \quad (1.54)$$

Para obter a segunda condição de contorno, a torção da viga deve ser considerada. A rotação, decorrente do esforço de torção, de uma seção transversal qualquer da viga é a expressão 1.51 e a relação da mudança deste ângulo ao longo do lado paralelo a y é expressão 1.52. O momento de torção da viga, considerando-se a teoria da torção uniforme e GI_t a rigidez à torção da viga, são definidos pela expressão 1.55.

$$m_{xz} = -GI_t \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} \quad (1.55)$$

A placa, rigidamente conectada, transmite o momento de torção, que varia ao longo do comprimento da viga.

O valor do momento na viga, por unidade de comprimento, tem o mesmo valor em módulo e com sinal contrário ao momento fletor m_x na placa. Assim, considerando-se que a viga suporta torção, obtém-se a equação 1.56,

$$-GI_t \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = -(m_x)_{x=a} \quad (1.56)$$

substituindo m_x da placa, a expressão 1.38 pela equação 1.56, tem-se a segunda condição de contorno para o lado $x=a$ da placa, a equação 1.57.

$$-C \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)_{x=a} = D_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)_{x=a} \quad (1.57)$$

1.3 – Placa submetida à Flexão Composta

Figura 1.5 – Esforços num elemento $dx dy$ da placa

Admitir-se-á, agora, a existência de esforços no plano médio da placa, como mostrado no elemento $dx dy$ da figura 1.5. Deve-se considerar o efeito desses esforços, no momento fletor da placa, ou seja, levar em conta a não-linearidade geométrica.

Para obter a correspondente equação diferencial de equilíbrio do deslocamento da placa, considera-se o equilíbrio de um elemento infinitesimal seccionado paralelo aos planos xz e yz e adiciona-se às forças consideradas anteriormente (figura 1.6), forças agindo no plano médio da placa, conforme mostrado na figura 1.9. Projetando-as nos eixos x e y e assumindo que não há forças de volumes agindo nestas direções, obtêm-se as equações 1.58 e 1.59.

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (1.58)$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (1.59)$$

As equações 1.58 e 1.59 são independentes das três equações de equilíbrio consideradas anteriormente (equações 1.32, 1.34 e 1.35) e podem ser tratadas separadamente.

A projeção das forças normais na direção do eixo x , mostradas na figura 1.8, sobre o eixo z , devido ao deslocamento w da placa, é mostrada na expressão 1.60.

$$-n_x dy \frac{\partial w}{\partial x} + \left(n_x + \frac{\partial n_x}{\partial x} dx \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \right) dy \quad (1.60)$$

Desconsiderando-se os termos de ordem superior da expressão 1.60, a projeção das forças normais da direção x sobre a direção z será a equação 1.61.

$$n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx dy + \frac{\partial n_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (1.61)$$

Analogamente às forças na direção y , as projetadas na direção do eixo z correspondem à expressão 1.62.

$$n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx dy + \frac{\partial n_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (1.62)$$

A projeção das forças cortantes N_{xy} sobre o eixo z , devido ao deslocamento vertical w , é dada pela expressão 1.63.

$$-n_{xy} dy \frac{\partial w}{\partial y} + \left(n_{xy} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} dx \right) dy \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx \right) \quad (1.63)$$

Desprezando os termos de ordem superior da expressão 1.63, tem-se a expressão 1.64.

$$n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy \quad (1.64)$$

De forma análoga à expressão 1.64, obtém-se a projeção das forças cortantes $n_{yx} = n_{xy}$ sobre o eixo z , e a expressão final para a projeção de todas as forças cortantes no eixo z é a expressão 1.65.

$$2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dx dy + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx dy + \frac{\partial n_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x} dx dy \quad (1.65)$$

Adicionando as equações 1.61, 1.62 e 1.65 ao carregamento $q dx dy$ atuando no elemento na equação 1.37, e considerando as equações de equilíbrio, expressões 1.58 e 1.59, obtém-se a equação de equilíbrio infinitesimal da placa, a equação 1.66.

$$\frac{\partial^2 m_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 m_{yx}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 m_y}{\partial y^2} = - \left(q + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.66)$$

Substituindo m_x , m_y e m_{xy} de suas expressões 1.19 e 1.27 na equação 1.66, obtém-se a equação diferencial de equilíbrio da placa, a equação 1.67, que pode ser usada para determinar os deslocamentos da placa.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D_p} \left(q + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (1.67)$$

1.4 - Cálculo da energia em chapas sujeitas a esforço normal de compressão

O cálculo da energia potencial total apresentado neste item refere-se à mudança de configuração da placa imediatamente após a flambagem, ou seja, considerando pequenas deformações numa análise elástico-linear.

1.4.1 - Trabalho das forças externas

O trabalho realizado pelas forças externas é determinado por meio da expressão 1.68.

$$W = \iint (N_x dy du + N_y dx dv) \quad (1.68)$$

onde:

N_x – força externa, na direção x , por unidade de comprimento, aplicada no contorno da chapa.

N_y – força externa, na direção y , por unidade de comprimento, aplicada no contorno da chapa.

du – deslocamento da placa no plano horizontal na direção x (fig. 1.6).

dv – deslocamento da placa no plano horizontal na direção y .

Na equação 1.68 consta o trabalho realizado pelas forças normais externas n_x e n_y . Como se trata de um estudo de chapa não é considerada a existência de esforço solicitante perpendicular ao plano da chapa, $q=0$. Como não há momentos externos aplicados na chapa, o trabalho, devido aos momentos fletores, restringe-se apenas ao trabalho interno devido à deformação da chapa numa situação pós-crítica.

Na figura 1.6 tem-se o deslocamento horizontal na direção x , du , que decorre do deslocamento da chapa na situação pós-crítica num estudo imediatamente após a flambagem. De forma análoga ocorre na direção y .

Figura 1.6 – Deslocamento vertical na direção do eixo x de um elemento dx

A figura 1.6 mostra o deslocamento de um elemento dx , esse deslocamento poder ser tomado conforme a expressão 1.69 para análise linear de pequenos deslocamentos.

$$du = \left[1 - \sqrt{1 + \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2} \right] dx \cong \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx \quad (1.69)$$

De forma análoga, o deslocamento na direção y é dado pela expressão 1.70.

$$dv = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 dy \quad (1.70)$$

Os deslocamentos du e dv das expressões 1.69 e 1.70 são devidos ao deslocamento w da placa, não estão sendo consideradas as deformações de compressão da mesma.

Substituindo os valores dos deslocamentos – expressões 1.69 e 1.70 - na expressão do trabalho das forças externas - expressão 1.68 - para as forças no plano xy , tem-se a expressão do trabalho externo da placa, a expressão 1.71.

$$W = \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1.71)$$

1.4.2 – Energia de deformação

A forma geral referente à energia de deformação de uma placa é dada pela expressão 1.72.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \sigma_x \epsilon_x + \sigma_y \epsilon_y + \sigma_z \epsilon_z + \tau_{xy} \gamma_{xy} + \tau_{xz} \gamma_{xz} + \tau_{yz} \gamma_{yz} dV \quad (1.72)$$

Como se trata de um estudo de chapa, muitos dos termos da expressão 1.72 são *nulos*. As tensões σ_x e σ_y podem ser enunciadas a partir da forma genérica (expressão 1.20), conforme as expressões 1.73 e 1.74, e a tensão τ_{xy} a partir da expressão 1.26, ser conforme a expressão 1.75. Os alongamentos específicos ε_x , ε_y a partir das expressões 1.18 e 1.19 respectivamente, e τ_{xy} a partir das expressões 1.22, 1.24 e 1.25, ficam definidos conforme as expressões 1.76, 1.77 e 1.78. Os alongamentos específicos ε_z , γ_{xz} e γ_{yz} são *nulos*.

$$\sigma_x = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (1.73)$$

$$\sigma_y = -\frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (1.74)$$

$$\tau_{xy} = -2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.75)$$

$$\varepsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (1.76)$$

$$\varepsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (1.77)$$

$$\gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (1.78)$$

Substituindo as expressões 1.73 a 1.78 em 1.72, tem-se a energia de deformação da placa pela expressão 1.79.

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{Ez}{1-\nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$+ 2Gz \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \cdot 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} dV$$

$$U = \frac{1}{2} \iiint_V \frac{Ez^2}{1-\nu^2} \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 4Gz^2 \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dV$$

$$U = \frac{1}{2} \iint D_p \left[\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right] + 2D_p (1-\nu) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 dx dy$$

$$U = \frac{1}{2} D_p \iint \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] dx dy \quad (1.79)$$

1.4.3 – Energia potencial total

A energia potencial total pode ser expressa conforme a expressão 1.80.

$$\Pi = U - W \quad (1.80)$$

onde,

U – energia de deformação

W – trabalho dos esforços externos

Então a energia potencial total é definida pela diferença das expressões 1.71 e 1.19, resultando na expressão 1.81.

$$\begin{aligned} \Pi = \frac{1}{2} \iint \left[N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 + N_y \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right] dx dy + \\ \frac{1}{2} D_p \iint \left\{ \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right)^2 - 2(1-\nu) \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 \right] \right\} dx dy \end{aligned} \quad (1.81)$$

2. Flambagem em Chapas – Regime Elástico-Linear

A seção transversal típica de um perfil formado a frio é composta por elementos. Esses elementos podem estar apoiados ao longo de ambos os lados longitudinais, como almas de perfis de seção U, ou podem ser apoiado em um dos lados e livre no outro, como mesas de perfis de seção U. Os elementos da seção transversal, dos perfis formados a frio, podem também, ser enrijecido com enrijecedor de borda ou intermediário. Os elementos não-enrijecidos possuem carga crítica de flambagem inferior aos elementos enrijecidos de mesmas dimensões e propriedades do material. A carga de flambagem dos elementos de chapa é função da relação a/b (relação entre o comprimento da chapa e sua largura). O valor da carga crítica de flambagem, o menor valor de carga de flambagem em um elemento de chapa, pode ser representado por meio do coeficiente de flambagem local, k . O coeficiente k ajusta o valor da carga crítica a uma expressão padrão. O valor do coeficiente de flambagem, k , é função das condições de vínculo do elemento de chapa e do carregamento aplicado no elemento. A expressão-padrão para o cálculo da carga crítica é apresentada na expressão 2.1.

$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D_p}{b^2} \quad (2.1)$$

2.1 - Flambagem de chapa retangular simplesmente apoiada sob compressão uniforme

Figura 2.1- Chapa sob compressão uniforme

Será demonstrado neste item o estudo de chapas para os elementos apoiados em seus dois lados longitudinais, como, por exemplo, a alma de um perfil Ue (perfil U enrijecido).

O texto apresentado neste item (2.1) foi extraído de Timoshenko (1961), adaptado aos objetivos deste trabalho.

Considera-se uma placa retangular comprimida no seu plano médio por forças uniformemente distribuídas ao longo dos lados $x = 0$ e $x = a$, como mostrado na figura 2.1, denominadas de N_x (força por unidade de comprimento), sendo incrementada gradualmente até que a forma reta (elemento plano) de equilíbrio da chapa torna-se instável, ou seja, qualquer perturbação introduzida no sistema (chapa e carregamento) fará com que, de maneira súbita, a chapa busque outra forma (não mais plana) para manter-se em equilíbrio. A partir desse carregamento haverá uma configuração de equilíbrio deformada, porém, estável (não sujeita à mudança brusca de forma sob introdução de pequenas perturbações). À ocorrência desse fenômeno denomina-se flambagem, ao menor valor do carregamento que possibilita ocorrer a flambagem denomina-se carregamento crítico. O valor carregamento crítico, N_{xcrit} , pode ser encontrado integrando a equação diferencial de equilíbrio da placa, equação 1.67, ou minimizando a energia potencial total do sistema, ou seja, resolvendo o funcional expresso pela equação 1.81.

O deslocamento normal da superfície da placa após a flambagem pode ser representado, no caso de chapas retangulares com lados simplesmente apoiados, por dupla série de senos.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.2)$$

A expressão da energia total pode ser definida como a diferença entre a energia potencial dos esforços internos (ou energia de deformação) e a energia potencial dos esforços externos, dada pela expressão 1.81. Substituindo o deslocamento w da expressão da energia de deformação, expressão 1.79, pela equação 2.2, pode-se mostrar que o termo entre colchetes da integral da expressão 1.81 desaparece e obtém-se a expressão 2.3.

$$U = \frac{1}{2} D_p \int_0^a \int_0^b \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \left(\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{n^2 \pi^2}{b^2} \right) \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \right\}^2 dx dy \quad (2.3)$$

Na expressão 2.3, apenas os termos quadráticos da série infinita dão integrais, diferentes de zero. Observando a expressão 2.4, pode-se simplificar a expressão 2.3 para a expressão 2.5.

$$\int_0^a \int_0^b \sin^2 \frac{m\pi x}{a} \sin^2 \frac{n\pi y}{b} dx dy = \frac{ab}{4} \quad (2.4)$$

$$U = \frac{\pi^4 ab}{8} D_p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.5)$$

O trabalho realizado pelas forças de compressão durante a deformação pós-crítica da chapa mostrado na expressão 1.71, é resumido pela expressão 2.6 devendo, neste caso, N_y ser zero.

$$W = \frac{1}{2} \iint N_x \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.6)$$

Inserindo-se o deslocamento w da expressão 2.2 na expressão 2.6, tem-se o trabalho externo da chapa determinado pela expressão 2.7.

$$W = \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2 \quad (2.7)$$

A energia potencial total durante a deformação pós-crítica de uma chapa simplesmente apoiada, sujeita a forças horizontais na direção x aplicadas no seu plano médio, é mostrada na expressão 2.8.

$$\Pi = \frac{\pi^4 ab}{8} D_p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2 \quad (2.8)$$

Minimizando a energia potencial, ou seja, fazendo nula sua primeira variação em relação aos coeficientes a_{mn} da expressão 2.8, resulta a expressão 2.9.

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_{mn}} = \frac{\pi^4 ab}{8} D_p 2a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{8a} N_x 2m^2 a_{mn} = 0 \quad (2.9)$$

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D_p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2}{\sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2} \quad (2.10)$$

O sistema formado pelas equações da expressão 2.9 resulta numa matriz diagonal, na qual cada equação do sistema contém apenas um dos coeficientes a_{mn} . Fazendo nulo o determinante desse sistema, resulta, para a expressão da carga crítica,

a expressão 2.10. Pode-se mostrar que a expressão 2.10 é mínima se todos os coeficientes a_{mn} , exceto um, forem tomados iguais a zero, conforme a expressão 2.11.

$$N_x = \frac{\pi^2 a^2 D_p}{m^2} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 \quad (2.11)$$

O menor valor de N_x é obtido tomando-se n igual a 1, ou seja, é a forma da deformada pós-crítica da chapa, que contém várias meias-ondas na direção da compressão e apenas uma meia-onda na direção perpendicular. Então a expressão para o valor crítico da força de compressão fica definida pela expressão 2.12, onde o valor de k é mostrado na expressão 2.13.

$$(N_x)_{cr} = \frac{\pi^2 D_p}{b^2} k \quad (2.12)$$

$$k = \left(\frac{1}{m} \frac{a}{b} + m \frac{b}{a} \right)^2 \quad (2.13)$$

Pode-se interpretar a expressão 2.12 como sendo o produto de dois fatores. O primeiro fator representa a carga de Euler para uma faixa de largura unitária e comprimento a . O segundo fator (k) indica a influência da condição de “chapa” em relação à estabilidade de uma faixa isolada. O valor desse fator depende do valor da relação a/b e de m , que representa o número de meias-ondas da deformada da chapa.

Mantendo-se a largura da placa constante e mudando gradualmente o comprimento a , o primeiro fator da expressão 2.12 permanece constante e o valor de k (expressão 2.13) altera-se com a mudança da relação a/b e m , como mostra a figura 2.2.

Figura 2.2 – Valores de k e a/b para vários valores de meias-ondas m

A carga crítica sempre encontra um valor mínimo em $k=4$. Neste caso diz-se que a expressão da carga crítica, para uma chapa biapoiada tem o coeficiente de flambagem local $k=4$. E a expressão para a carga crítica fica, então, representada pela expressão 2.14.

$$(N_x)_{cr} = \frac{4\pi^2 D_p}{b^2} \quad (2.14)$$

2.2 - Flambagem de chapa sob compressão uniforme, sob diversas condições de contornos

Considera-se, neste item, chapa retangular, sob carregamento uniforme aplicado em dois lados opostos, na direção denominada longitudinal, e nesses lados a chapa é simplesmente apoiada.

Para resolver este problema, ambos os métodos, o método da energia e o método do equilíbrio, podem ser empregados. Aplicando o método da equação diferencial de equilíbrio, utilizando-se da equação 1.67, admitindo compressão uniforme ao longo do eixo x e considerando o sinal positivo para compressão, a equação 1.67 resulta na equação 2.15.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{n_x}{D_p} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad (2.15)$$

Assume-se que a deformada da chapa, após a ocorrência da flambagem devido à ação das forças de compressão, seja na forma de m meias-ondas senoidais ou cossenoidais, na direção do eixo x (dependendo onde se encontra a origem dos eixos de referência), de modo que a chapa seja simplesmente apoiada nas extremidades onde é aplicado o carregamento N_x . Tem-se a solução geral da equação 2.15 na forma da expressão 2.16.

$$w = f(y) \operatorname{sen}\left(\frac{m\pi x}{a}\right), \text{ ou} \quad (2.16)$$

$$w = f(y) \operatorname{cos}\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.17)$$

A $f(y)$ da expressão 2.16 e 2.17 é uma função a ser determinada. As expressões 2.16 ou 2.17 devem satisfazer as condições de contornos ao longo dos lados simplesmente apoiados $x=0$ e $x=a$ da chapa.

$$w=0 \quad \text{para } x=0 \text{ e } x=a \quad (2.17)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{para } x=0 \text{ e } x=a \quad (2.18)$$

Substituindo as expressões 2.16 ou 2.17 na equação 2.15, obtém-se a equação diferencial ordinária homogênea, equação 2.19, para se determinar a função $f(y)$. Como o carregamento é aplicado apenas no contorno da chapa, tem-se que a força normal em uma faixa unitária ao longo do comprimento longitudinal é constante e igual ao carregamento aplicado: $n_x = N_x$.

$$\frac{d^4 f}{dy^4} - \frac{2m^2\pi^2}{a^2} \frac{d^2 f}{dy^2} + \left(\frac{m^4\pi^4}{a^4} - N_x \frac{m^2\pi^2}{a^2} \right) f = 0 \quad (2.19)$$

Resolvendo a equação diferencial ordinária de quarta ordem, equação 2.19, tem-se como solução geral para a função f a expressão 2.20, onde α e β são definidos nas expressões 2.21 e 2.22.

$$f(y) = C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \operatorname{cos}(\beta y) + C_4 \operatorname{sen}(\beta y) \quad (2.20)$$

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D_p} \frac{m^2\pi^2}{a^2}}} \quad (2.21)$$

$$\beta = \sqrt{-\frac{m^2\pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D_p} \frac{m^2\pi^2}{a^2}}} \quad (2.22)$$

Então a função do deslocamento w da chapa fica conforme a expressão 2.23.

$$w = \left[C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos(\beta y) + C_4 \sin(\beta y) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.23)$$

ou
$$w = \left[C_1 e^{-\alpha y} + C_2 e^{\alpha y} + C_3 \cos(\beta y) + C_4 \sin(\beta y) \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right)$$

As constantes de integração da expressão 2.22 são determinadas a partir das condições de contorno nas outras bordas da chapa.

2.2.1 - lado $y=b/2$ e $y=-b/2$ simplesmente apoiados:

A seguir, resolver-se-á a mesma condição de contorno analisada no item 2.1, os quatros lados da chapa são simplesmente apoiados, utilizando-se da equação diferencial de equilíbrio.

Figura 2.3 – Carregamento e eixos de referência da chapa

A solução deste problema apresentada neste item (2.2.1) tem por base Salmon e Johnson (1996).

Sabendo que o eixo x é de simetria, conforme a figura 2.3, e utilizando-se a mesma condição de contorno ao longo dos dois lados paralelos à direção do carregamento, a expressão 2.23 simplifica-se na forma da expressão 2.24.

$$w = \left[C_1 \cosh(\alpha y) + C_2 \cos(\beta y) \right] \cos\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.24)$$

Considerando os eixos de referência, conforme a figura 2.3, as condições de contorno devem ser respeitadas em $y = \pm b/2$, conforme as expressões 2.25 e 2.26.

$$w = 0 \quad \text{para} \quad y = \pm b/2 \quad (2.25)$$

$$\text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad y = \pm b/2 \quad (2.26)$$

Introduzindo-se as condições de contorno das expressões 2.25 e 2.26 na expressão do deslocamento w da chapa, expressão 2.24, tem-se o sistema da equação 2.27.

$$\begin{aligned} & \left[C_1 \cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right) + C_2 \cos\left(\beta \frac{b}{2}\right) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} = 0 \\ & \left[C_1 \alpha^2 \cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right) - C_2 \beta^2 \cos\left(\beta \frac{b}{2}\right) \right] \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} - \\ & \quad - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \operatorname{sen} \frac{m\pi x}{a} \left[C_1 \cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right) + C_2 \cos\left(\beta \frac{b}{2}\right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.27)$$

Para o sistema da equação 2.27 ter uma solução diferente da trivial ($C_1 = C_2 = 0$) é necessário que o determinante dos coeficientes seja nulo. Dessa forma, resulta a equação 2.28.

$$(\alpha^2 + \beta^2) \cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right) \cos\left(\beta \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (2.28)$$

Como $\alpha^2 \neq -\beta^2$ para $N_x \neq 0$ e como $\cosh\left(\alpha \frac{b}{2}\right) > 1$, então a equação 2.29 deve ser satisfeita.

$$\cos\left(\beta \frac{b}{2}\right) = 0 \quad (2.29)$$

O termo entre parênteses da equação 2.29 deve valer $\beta \frac{b}{2} = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots$

Usando o menor valor de $\beta \frac{b}{2}$ e substituindo-o pela definição de β da expressão 2.22, obtém-se a expressão 2.30.

$$\begin{aligned} \frac{b}{2} \sqrt{-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D_p} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}} &= \frac{\pi}{2} \rightarrow \frac{N_x}{D_p} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} = \left[\frac{\pi^2}{b^2} + \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right]^2 \\ N_x &= \frac{D_p \pi^2}{b^2} \left[\frac{1}{m} \frac{a}{b} + m \frac{b}{a} \right]^2 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Como N_x pode ser escrito na forma da expressão 2.1, temos que o valor de k é o mesmo encontrado no item 2.1, conforme a expressão. 2.13.

2.2.2 - O lado $y = 0$ simplesmente apoiado e o lado $y = b$ livre:

Figura 2.4 – Carregamento e eixos de referência da chapa

As mesas de certos perfis de aço formados a frio são elementos com essa condição de contorno, simplesmente apoiados e livres (por exemplo, perfil U). As almas desses perfis servem de apoio longitudinal em um dos lados, enquanto que o outro lado na direção longitudinal é livre. Este elemento de chapa não é considerado engastado na alma do perfil apesar de estar rigidamente ligado a ele. Isso ocorre porque, quando a mesa perder a forma plana estável, a alma do perfil sofrerá uma flambagem local forçada, como mostra a figura 2.5.

Figura 2.5 – Modo de flambagem local de um perfil U sujeito à compressão

A solução deste problema apresentada neste item (2.2.2) até a obtenção da equação transcendental de equilíbrio, eq. 2.36, tem por base Timoshenko (1961). Das condições de contorno seguem as expressões 2.31 e 3.32.

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \text{ e } \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{para } y = b \quad (2.32)$$

A condição de contorno da expressão 2.31 é satisfeita quando os coeficientes da equação 2.23 são conforme a expressão 2.33.

$$C_1 = -C_2 \quad \text{e} \quad C_3 = 0 \quad (2.33)$$

A função deslocamento w pode ser escrita então na forma da expressão 2.34, na qual A e B são constantes.

$$w = \left[A \cdot \sinh(\alpha y) + B \cdot \sin(\beta y) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.34)$$

Das condições de contorno da expressão 2.32 segue-se a expressão 2.35.

$$\begin{aligned} A \left(\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin(\alpha b) - B \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \sin(\beta b) &= 0 \\ A \alpha \left(\alpha^2 - (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right) \cosh(\alpha b) - B \beta \left[\beta^2 + (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right] \cos(\beta b) &= 0 \end{aligned} \quad (2.35)$$

Para uma forma de equilíbrio da deformada da chapa produzir soluções de A e B diferentes de zero é necessário que o determinante do sistema da expressão 2.35 seja nulo; dessa forma resulta a equação 2.36.

$$\beta \left(\alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{tgh}(\alpha b) - \alpha \left(\beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \right)^2 \operatorname{tg}(\beta b) = 0 \quad (2.36)$$

Como na expressão de α e β (expressões 2.20 e 2.21) são funções de N_x (carga crítica), a equação (2.36) pode ser usada para calcular o valor da carga crítica (N_x) se as dimensões da chapa e as constantes elásticas do material forem conhecidas. Esses cálculos mostram que o menor valor de N_x é obtido com $m=1$, isto é, assumindo que a deformada da chapa tem apenas uma meia-onda. A expressão da carga crítica pode ser representada conforme a expressão 2.37, na qual o fator numérico k depende do valor da relação a/b .

$$N_{cr} = k \frac{\pi^2 D_p}{b^2} \quad (2.37)$$

Alguns valores do fator k (expressão 2.37), calculado resolvendo a equação 2.36, para $\nu=0,3$ são mostrados na fig. 2.6. Para chapas longas, o valor de k pode ser aproximadamente representado conforme a expressão 2.38.

$$k = \left(0,425 + \frac{1}{\left(\frac{a}{b} \right)^2} \right) \quad (2.38)$$

Figura 2.6 – Valores de k para chapa simplesmente apoiada-livre

Em ensaios à compressão de perfis com mesas apoiada e livre, em que ocorre a flambagem local das mesas, observa-se, que em muitas vezes, não apresenta-se apenas uma semi-onda na forma de deslocamento desses elementos, como está implícito no modelo teórico, mas muitas semi-ondas. Isso ocorre por que elementos com grande comprimento longitudinal a carga crítica com uma ou mais de uma semi-onda tem valores muito próximos, podendo ocorrer com uma ou mais semi-ondas.

2.2.3 - O lado $y = 0$ engastado e o lado $y = b$ livre

Com base a Timoshenko (1961), tem-se que as expressões 2.39 e 2.40 definem as condições de contorno a serem satisfeitas para determinar as constantes na solução genérica do deslocamento w .

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad (2.39)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = b \quad (2.40)$$

Das condições de contorno da expressão 2.39 obtém-se a expressão 2.41.

$$C_1 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha} \quad C_2 = -\frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha} \quad (2.41)$$

A função da deformada w da chapa pode ser representada na forma da expressão 2.42.

$$w = \left[A(\cos(\beta y) - \cosh(\alpha y)) + B\left(\sin(\beta y) - \frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha y)\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.42)$$

Substituindo a expressão 2.42 na condição de contorno da expressão 2.40, é obtido um sistema de duas equações homogêneas lineares em A e B . O valor da força crítica de compressão é obtido fazendo o determinante desse sistema de equações ser nulo, resultando-se a equação 2.43, onde t e s são definidos na expressão 2.44.

$$2ts + (s^2 + t^2) \cos(\beta b) \cosh(\alpha b) - \frac{1}{\alpha\beta} (\alpha^2 t^2 - \beta^2 s^2) \sin(\beta b) \sinh(\alpha b) = 0 \quad (2.43)$$

$$t = \beta^2 + \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad s = \alpha^2 - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \quad (2.44)$$

O valor da força crítica de compressão pode ser calculado, resolvendo a equação. 2.43. A força crítica por unidade de comprimento pode ser representada na forma da expressão 2.37 e o coeficiente k passa a ser definido pela expressão 2.45.

$$k = N_{cr} \frac{b^2}{\pi^2 D_p} \quad (2.45)$$

A figura 2.7 mostra os valores do coeficiente k em função da relação a/b , para alguns valores de m , calculados com a expressão 2.45, $\nu = 0,3$ e onde N_{cr} é a solução da equação 2.43. O mínimo valor de k para $m=1$, $m=2$, $m=3$, $m=\dots$ é sempre $k=1,28$.

Figura 2.7 – Valores de k para placa engastada-livre

2.2.4 - O lado $y = 0$ engastado e o lado $y = b$ apoiado

Para a condição de contorno da chapa engastada-apoiada, realizada para este trabalho, fazendo-se uso das expressões 2.18 e 2.22, têm-se as expressões 2.46 e 2.47 que definem as condições de contorno a serem satisfeitas para determinar as constantes na solução genérica do deslocamento w .

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad (2.46)$$

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad \text{para} \quad y = b \quad (2.47)$$

Das condições de contorno da expressão 2.46 obtém-se a expressão 2.48.

$$C_1 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha} \quad C_2 = -\frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha} \quad (2.48)$$

A função da deformada w da chapa pode ser representada na forma da expressão 2.49.

$$w = \left[A \left(\cos(\beta y) - \cosh(\alpha y) \right) + B \left(\sin(\beta y) - \frac{\beta}{\alpha} \sin(\alpha y) \right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.49)$$

Substituindo a expressão 2.49 na condição de contorno da expressão 2.47, é obtido um sistema de duas equações homogêneas lineares em A e B . O valor da força

crítica de compressão é obtido ao fazer o determinante desse sistema de equações ter valor nulo, resultando a equação 2.50.

$$\cosh(\alpha b) \sin(\beta b) (\alpha^2 + \beta^2) - \cos(\beta b) \sinh(\alpha b) \left(\alpha \beta + \frac{\beta^3}{\alpha} \right) = 0 \quad (2.50)$$

O valor da força crítica de compressão pode ser calculado resolvendo a equação 2.50. Obtém-se então o coeficiente k pela expressão 2.45, que é mostrado na figura 2.8, em função da relação a/b , para alguns valores de m . O mínimo valor de k é 5,41.

Figura 2.8 – Valores de k para placa engastada-apoiada

2.2.5 - Os lados $y = 0$ e $y = b$ engastados

Para a condição de contorno da chapa engastada-engastada, fazendo-se uso das expressões 2.18 e 2.22, tem-se as expressões 2.51 e 2.52, que estabelecem as condições de contorno a serem satisfeitas para determinar as constantes na solução genérica do deslocamento w .

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = 0 \quad (2.51)$$

$$w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad \text{para} \quad y = b \quad (2.52)$$

Das condições de contorno da expressão 2.51 obtém-se a expressão 2.53.

$$C_1 = -\frac{\alpha C_3 - \beta C_4}{2\alpha} \quad C_2 = -\frac{\alpha C_3 + \beta C_4}{2\alpha} \quad (2.53)$$

A função da deformada w da chapa pode ser representada na forma da expressão 2.54.

$$w = \left[A(\cos(\beta y) - \cosh(\alpha y)) + B\left(\sin(\beta y) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh(\alpha y)\right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.54)$$

Substituindo a expressão 2.54 na condição de contorno da expressão 2.52, é obtido um sistema de duas equações homogêneas lineares em A e B . O valor da força crítica de compressão é obtido ao fazer o determinante desse sistema ter valor nulo, resultando a equação 2.55.

$$2\beta - 2\beta \cos(\beta b) \cosh(\alpha b) + \sin(\beta b) \sinh(\alpha b) \left(\alpha - \frac{\beta^2}{\alpha} \right) = 0 \quad (2.55)$$

O valor da força crítica de compressão pode ser calculado resolvendo a equação 2.55. O coeficiente k da expressão 2.45, calculado com o N_x da solução da equação 2.55, é mostrado na figura 2.9, em função da relação a/b , para alguns valores de m . O mínimo valor de k é 6,97.

Figura 2.9 – Valores de k para placa bi-engastada

2.2.6 - O lado $y = 0$ elasticamente engastado e o lado $y = b$ apoiado sobre uma viga elástica (enrijecedor de borda)

Figura 2.10 – Chapa com enrijecedor de borda

Uma estratégia econômica para melhorar a capacidade do elemento resistir a esforços de compressão da chapa é adicionando enrijecedores longitudinais em sua borda para que sirvam de apoio. Os elementos não-enrijecidos possuem carga crítica de flambagem inferior aos elementos enrijecidos de mesmas dimensões e propriedades do material. Há uma grande vantagem em adicionar enrijecedor longitudinal no lado livre do elemento não-enrijecido, tornando seu comportamento semelhante ao do elemento apoiado. Tais enrijecedores longitudinais são chamados de *enrijecedores de borda*. É necessária uma adequada rigidez à flexão do enrijecedor de borda para que o comportamento do elemento à compressão seja semelhante ao do elemento apoiado. A análise dos enrijecedores de borda foi desenvolvida por Desmond et. Al. (1981) com base em dados experimentais, levando-os à capacidade última com as dimensões adequadas e inferiores às ideais. Capacidade adequada dos enrijecedores significa que a capacidade última do elemento com enrijecedor de borda seja igual a do elemento bi-apoiado.

Tem-se para a resolução deste item, uma chapa elasticamente engastada no apoio $y = 0$, com uma rigidez à rotação por unidade de comprimento longitudinal igual a r_e e para o lado $y = b$ apoiada sobre uma viga (enrijecedor de borda) com rigidez à flexão EI e área A . Assume-se que o momento fletor na extremidade $y=0$ na chapa é igual a rigidez à flexão do apoio elástico multiplicada pela rotação do apoio

conforme a equação 2.56 e, para o apoio $y=b$, os deslocamentos da viga e da chapa são iguais nos pontos de contato entre elas, ou seja, $w_{viga} = [w_{placa}]_{y=b} = w_{y=b}$, sendo que a viga é simplesmente apoiada nas extremidades, possui o mesmo módulo de elasticidade da chapa e é comprimida juntamente com a mesma, tal que a força de compressão na viga (enrijecedor) é igual a $\sigma_x A$. Desse modo, a equação diferencial de equilíbrio da viga, sujeita à flambagem de Euler, é conforme a equação 2.57, onde q é a intensidade do carregamento transmitida da chapa para a viga.

$$-D_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = r_e \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} \quad (2.56)$$

r_e – constante de rigidez à rotação, por unidade de comprimento, do apoio elasticamente engastado

$$EI \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{y=b} = q - A\sigma_x \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=b} \quad (2.57)$$

Utilizando-se das equações para as forças cortantes na chapa, equação(1.42), o valor da carga q será a expressão 2.58.

$$q = D_p \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} \quad (2.58)$$

Substituindo o valor de q (expressão 2.58) na expressão 2.57 e admitindo que o enrijecedor não tem capacidade de resistir qualquer esforço de torção, ou seja, a ligação entre eles é articulada, tem-se então a condição de contorno da chapa devido à ligação com a viga pela expressão 2.59.

$$EI \left[\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} \right]_{y=b} = D_p \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right]_{y=b} - A\sigma_x \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right]_{y=b} \quad (2.59)$$

As condições de contorno para o deslocamento w , em uma chapa simplesmente apoiada sobre uma viga elástica, serão conforme as expressões 2.60 e 2.61.

$$w=0 \quad \text{e} \quad -D_p \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) = r_e \left[\frac{\partial w}{\partial y} \right]_{y=0} \quad \text{para } y = 0 \quad (2.60)$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{e} \quad EI \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = D_p \left[\frac{\partial^3 w}{\partial y^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial x^2 \partial y} \right] - A\sigma_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \quad \text{para } y=b \quad (2.61)$$

Tomando o deslocamento w na forma da expressão 2.23, a expressão 2.60 é satisfeita com os valores da expressão 2.62.

$$C_1 = \frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 - r\alpha)}{2r\alpha} + \frac{C_4\beta}{2\alpha} \quad C_2 = -\frac{C_3(\alpha^2 + \beta^2 + r\alpha)}{2r\alpha} - \frac{C_4\beta}{2\alpha} \quad (2.62)$$

$$r = \frac{r_e}{D_p} \quad (2.63)$$

Desse modo, a função w pode ser escrita na forma da expressão 2.64, na qual C_3 e C_4 são constantes.

$$w = \left[C_3 \left(\cos(\beta b) - \cosh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r\alpha} \sinh(\alpha b) \right) + \right. \\ \left. C_4 \left(\sin(\beta b) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh(\alpha b) \right) \right] \sin\left(\frac{m\pi x}{a}\right) \quad (2.64)$$

Das condições de contorno impostas pela expressão 2.61 e utilizando-se do deslocamento da expressão 2.64, tem-se o sistema de equações linear e homogêneo cuja solução é obtida anulando do seu determinante, a expressão 2.65.

$$\left[D_p \left(\beta^3 \sin(\beta b) - \alpha^3 \sinh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r} \alpha^2 \cosh(\alpha b) \right) - \right. \\ D_p (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(-\beta \sin(\beta b) - \alpha \sinh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r} \cosh(\alpha b) \right) + \\ \delta b N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\cos(\beta b) - \cosh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r\alpha} \sinh(\alpha b) \right) \\ \left. - \gamma b D_p \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \left(\cos(\beta b) - \cosh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r\alpha} \sinh(\alpha b) \right) \right] * \\ \left[\left(-\beta^2 \sin(\beta b) - \beta \alpha \sinh(\alpha b) \right) - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\sin(\beta b) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh(\alpha b) \right) \right] - \\ \left[D_p \left(-\beta^3 \cos(\beta b) - \beta \alpha^2 \cosh(\alpha b) \right) - D_p (2 - \nu) \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\beta \cos(\beta b) - \beta \cosh(\alpha b) \right) + \right. \\ \delta b N_x \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\sin(\beta b) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh(\alpha b) \right) - \gamma b D_p \frac{m^4 \pi^4}{a^4} \left(\sin(\beta b) - \frac{\beta}{\alpha} \sinh(\alpha b) \right) \left. \right] * \\ \left[\left(-\beta^2 \cos(\beta b) - \alpha \cosh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r} \alpha \sinh(\alpha b) \right) - \right. \\ \left. - \nu \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left(\cos(\beta b) - \frac{\beta}{\alpha} \cosh(\alpha b) - \frac{\alpha^2 + \beta^2}{r\alpha} \sinh(\alpha b) \right) \right] = 0 \quad (2.65)$$

onde,

$$\alpha = \sqrt{\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D_p} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}} \quad \beta = \sqrt{-\frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \sqrt{\frac{N_x}{D_p} \frac{m^2 \pi^2}{a^2}}}$$

$$D_p = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \quad \gamma = \frac{EI}{bD_p} \quad \delta = \frac{A}{bt} \quad k = N_x \frac{b^2}{\pi^2 D_p} \quad r = \frac{r_e}{D_p} \quad (2.66)$$

A – Área do enrijecedor de borda

EI – Rigidez do enrijecedor de borda

Na resolução da expressão 2.65 foi admitida a expressão 2.67, que é equivalente à rigidez à rotação de um perfil onde a mesa tem mesma dimensão que a alma.

$$r_e = \frac{3D_p}{b} \quad (2.67)$$

Figura 2.11 – Modos de flambagem e modelo estrutural do elemento

Figura 2.12 - valores de k para diversos valores de γ e δ

A figura 2.12 mostra a resolução da equação 2.65, para valores de k e a/b com diversos valores de γ e δ . Por meio da figura 2.12 pode-se analisar o comportamento da chapa, submetida a esforços de compressão por dois modos de flambagem. No primeiro, a instabilidade inicia-se pela flambagem local da chapa (fig. 2.11b), caracterizada pelo mínimo local da curva da figura 2.12 na região onde a/b é próximo de 1. O modo de flambagem por distorção da seção transversal (fig. 2.11a), caracterizado na figura 2.12 pelos mínimos locais onde os valores de a/b são superiores a 1.

Observa-se, pela figura 2.12, que o aumento da rigidez do enrijecedor, caracterizado pelo parâmetro γ , faz o modo crítico de instabilidade ser o modo de flambagem local, com o valor do coeficiente k próximo ao da chapa bi-apoiada, $k=4$. Por outro lado, para enrijecedores com pouca rigidez à flexão, o segundo modo de instabilidade, por distorção da seção, é crítico e resulta em valores de k menores que 4.

A figura 2.13, mostra a curva dos valores mínimos de k , para alguns casos específicos de seção transversal, cujos valores foram obtidos experimentalmente por Desmond et. al.(1981), nos quais destacaram-se 3 conclusões sobre a influência da

largura do enrijecedor de borda (D) em relação a largura da mesa (b), de perfis Ue , sobre o modo de flambagem da mesa:

1. Os enrijecedores relativamente pequenos (D/b menor que 0,12, na fig. 2.13), com pouca rigidez à flexão, não são suficientes para servirem de apoio para a chapa; conseqüentemente a instabilidade do elemento ocorrerá pelo segundo modo de flambagem, a distorção da seção transversal, que será responsável pela carga crítica de flambagem.
2. Para valores moderados da relação D/b (D/b entre 0,12 e 0,4), a flambagem do elemento ocorre simultaneamente pela instabilidade local da chapa juntamente com a distorção da seção. Nesse caso, o modo de flambagem pela distorção da seção, é maior ou igual ao da instabilidade local do elemento, como se pode notar pela figura 2.12 (curva 1).
3. Para D/b maiores que 0,4 o carregamento crítico é limitado pela flambagem local do enrijecedor. Nesse caso, devido à elevada esbelteza do enrijecedor (altos valores D/t), a instabilidade local do enrijecedor, como chapa, interage com o elemento enrijecido, provocando a instabilidade deste, com valores baixos de k .

O enrijecedor de borda é classificado como adequado quando possui rigidez maior ou igual àquela suficiente para fazer o elemento enrijecido comportar-se como um elemento bi-apoiado. Para enrijecedores com rigidez menor do que a adequada, o elemento é considerado parcialmente enrijecido.

A partir de análises experimentais, Desmond et. al. (1981) apresentaram, para elementos adequadamente enrijecidos, o valor do coeficiente de flambagem k , dado pela expressão 2.68.

$$\begin{aligned} Se \frac{1}{b} \leq \frac{1}{4} &\Rightarrow k = 4 \\ Se \frac{1}{b} > \frac{1}{4} &\Rightarrow k = 5,25 - 5 \frac{D}{b} \end{aligned} \quad (2.68)$$

Em um elemento parcialmente enrijecido, ou seja, em que o enrijecedor possui rigidez à flexão menor que a adequada, o valor do coeficiente k varia entre dois valores: o do coeficiente de flambagem de um elemento com contorno elasticamente enrijecido e apoiado e o do coeficiente de flambagem de um elemento

elasticamente engastado em uma extremidade e livre na outra. O valor do coeficiente k para o elemento elasticamente engastado e livre pode variar entre 0,425 e 1,27, para a rigidez à rotação nula e para o engaste perfeito, respectivamente. O valor teórico do coeficiente k de um elemento não-enrijecido, com mesa de igual dimensão que a alma, é 0,85.

Figura 2.13 – Mínimos valores de k e a relação D/b - Desmond et. al.(1981)

A expressão do coeficiente k , a partir da análise da carga crítica de flambagem, para elementos parcialmente enrijecidos, é mostrada pela expressão 2.69 e na figura 2.14, apresentadas por Desmond (1981),

$$k = \left(\frac{I_s}{I_a} \right)^{0,5} (k_{el.enrij.adequado} - k_{el.livre}) + k_{el.livre} \quad (2.69)$$

onde, I_s – momento de inércia do enrijecedor em relação ao eixo paralelo a mesa que passa seu centro geométrico

I_a – momento de inércia de um enrijecedor suficientemente rígido para que a flambagem por distorção do enrijecedor ocorra simultânea com a flambagem local do elemento enrijecido, ou seja, momento de inércia do enrijecedor classificado como adequado.

$k_{el.livre}$ – valor do coeficiente k , de um elemento não enrijecido (podendo variar entre 0,425 e 1,27)

$k_{el.enrij.adequado}$ – valor do coeficiente k , de um elemento com enrijecedor adequado, equação 2.68.

Figura 2.14 – Valores de k e a rigidez do enrijecedor (Desmond 1981)

O valor da rigidez normalizada do enrijecedor (I_a/t^4), para que seja classificado como adequado, foi proposto por Desmond et. al. (1977) apud Desmond et. al. (1981), por meio de muitos ensaios, cujos valores são mostrados nas equações 2.70 e 2.71.

$$\text{Para } \left(\frac{b}{t}\right)_\beta < \frac{b}{t} < \left(\frac{b}{t}\right)_\alpha \rightarrow \frac{I_a}{t^4} = 766 \left[\frac{b/t}{\left(\frac{b}{t}\right)_\alpha} - 0,461 \right]^3 \quad (2.70)$$

$$\text{Para } \frac{b}{t} > \left(\frac{b}{t}\right)_\alpha \rightarrow \frac{I_a}{t^4} = \frac{115 b/t}{\left(\frac{b}{t}\right)_\alpha} + 5 \quad (2.71)$$

onde,

$\left(\frac{b}{t}\right)_\alpha$ - limite da relação b/t , na qual um elemento, com enrijecedor de borda adequado, tem largura efetiva igual à largura bruta: $\left(\frac{b}{t}\right)_\alpha = 0,64 \sqrt{\frac{kE}{f_y}} = 36,6$ (para o aço MR-250).

$\left(\frac{b}{t}\right)_\beta$ - limite da relação $\frac{b}{t}$, na qual um elemento, sem enrijecedor de borda, tem largura efetiva igual à largura bruta.

Figura 2.15 – Valores da rigidez normalizada necessária ao enrijecedor

A figura 2.15 compara os valores da rigidez normalizada (I_a/t^4) necessária ao enrijecedor em relação à esbeltez (b/t) do elemento, comparando os valores propostos, nos estudos realizados por Desmond et. al.(1981), os quais constam na atual norma brasileira de dimensionamento de perfis formados a frio (NBR 14762:2001) e que são os mesmos presentes no AISI/2001. Nota-se que a rigidez requerida pela norma brasileira está deslocada em relação ao eixo das abscissas (b/t). Na norma o enrijecedor de borda necessário para apoiar a mesa é maior que os apresentado por Desmond et. al.(1981) por que as barras utilizadas nas obras de engenharia tem imperfeições iniciais, que não podem ser desprezadas.

A norma brasileira NBR 14762:2001 calcula o coeficiente de flambagem, k , de mesas com enrijecedor de borda de três maneiras diferentes, dependendo do valor de referência do índice de esbeltez da mesa (λ_{p0}). Caso o valor de λ_{p0} seja menor que 0,673 não é necessário calcular o valor de k , pois como o elemento tem esbeltez muito pequena e não é necessário reduzir largura dele. Caso o valor de λ_{p0} esteja

entre 0,673 e 2,03, denominando-se “*Caso II*” pela norma, o cálculo de k é feito por meio da expressão 2.69. Nesse caso o valor de $k_{el.enrij.adequado}$ é chamado de k_a pela norma brasileira e sua expressão é idêntica à expressão 2.68 , e o valor de $k_{el.livre}$ utilizado é 0,43. Para elementos muito esbeltos, “*caso III*”, caracterizados pelo valor de λ_{p0} maior que 2,03 é feito um ajuste na expressão 2.68 substituindo o termo raiz quadrada por raiz cúbica. A expressão utilizada para o cálculo de I_a , nos *casos II e III* da norma, são diferentes e podem ser identificadas na figura 2.15 pelo trecho não-linear, para o “*caso I*”, e o trecho linear de (I_a/t^4) , para o “*caso III*”.

2.3 - Chapa simplesmente apoiada, sob carregamento uniforme, com vigas (enrijecedores) longitudinais intermediárias

O uso de enrijecedores longitudinais em elementos comprimidos de perfis de aço formados a frio pode introduzir um aumento na capacidade última de resistência do elemento. Em elementos com este tipo de apoio podem ocorrer dois modos de instabilidade: instabilidade local e de distorção, como mostra a figura 2.16.

Figura 2.16 – Modelos das possíveis deformadas da chapa, na situação pós-crítica

Tendo por base Timoshenko (1961), determina-se o valor da carga crítica pelo método da minimização da energia potencial total, utilizando-se a curva de deslocamento pós-crítico da chapa em forma de dupla série trigonométrica, expressão 2.72.

$$w = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \sin \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{n\pi y}{b} \quad (2.72)$$

A energia potencial da chapa simplesmente apoiada sujeita à força de compressão no seu plano médio da direção x , é definida pela expressão. 2.8, no item 2.1. A energia potencial total, da chapa simplesmente apoiada e enrijecida com vigas longitudinais, corresponde ao valor da expressão 2.8 somado à energia potencial das vigas longitudinais (expressão 2.73), que agora também fazem parte do modelo a ser analisado.

Considera-se que o deslocamento vertical das vigas longitudinais intermediárias coincide com o deslocamento w da chapa nos pontos de ligação entre eles, ou seja, $w_i = [w_{placa}]_{y=c_i}$, onde, w_i é a linha elástica da viga (enrijecedor) i , situada a uma distância c_i do lado $y = 0$. Denominando-se EI_i e A_i a rigidez à flexão e a área do enrijecedor de índice “ i ”, respectivamente..

A energia potencial das vigas intermediárias (2.73) é a diferença do trabalho das forças internas (expressão 2.74) e o trabalho das forças externas (expressão 2.75)

devido ao deslocamento na situação pós-crítica. Então, a energia potencial total da chapa (expressão 2.76) resulta na expressão 2.77.

$$\Pi_{vigas} = \sum U_i - \sum W_i \quad (2.73)$$

$$U_i = \frac{EI_i}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right)^2 dx = \frac{\pi^4 EI_i}{4a^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^4 \left(a_{m1} \text{sen} \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \text{sen} \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2 \quad (2.74)$$

$$W_i = \frac{P_i}{2} \int_0^a \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx = \frac{P_i}{2} \frac{\pi^4}{a^2} \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 \left(a_{m1} \text{sen} \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \text{sen} \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2 \quad (2.75)$$

$$\Pi = U_p - W_p + \sum_i (U_{enr})_i - \sum_i (W_{enr})_i \quad (2.76)$$

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{\pi^4 ab}{8} D_p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{\pi^2 b}{8a} N_x \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} m^2 a_{mn}^2 + \\ & + \frac{\pi^4 EI_i}{4a^3} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^4 \left(a_{m1} \text{sen} \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \text{sen} \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2 - \\ & - \frac{P_i}{2} \frac{\pi^4}{a^2} \frac{a}{2} \sum_{m=1}^{m=\infty} m^2 \left(a_{m1} \text{sen} \frac{\pi c_i}{b} + a_{m2} \text{sen} \frac{2\pi c_i}{b} + \dots \right)^2 \end{aligned} \quad (2.77)$$

Minimizando a expressão da energia potencial total, expressão 2.77, ou seja, derivando-a em função dos coeficientes a_{mn} e igualando o resultado a *zero*, obtém-se o sistema linear homogêneo mostrado na expressão 2.78, que pode ser organizada na forma da expressão 2.79.

$$\frac{\partial U}{\partial a_{mn}} = \frac{\pi^2 D_p}{b^2} \left[a_{mn} (m^2 + n^2 \beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \text{sen} \left(\frac{n\pi c_i}{b} \right) m^4 \sum_{p=1}^{p=\infty} a_{mp} \text{sen} \frac{p\pi c_i}{b} \right] - \quad (2.78)$$

$$- \beta^2 N_{cr} \left(m^2 a_{mn} + 2 \sum_i \delta_i \text{sen} \left(\frac{n\pi c_i}{b} \right) m^2 \sum_{p=1}^{p=\infty} a_{mp} \text{sen} \frac{p\pi c_i}{b} \right) = 0$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_{mn}} = & a_{mn} \left[(m^2 + n^2 \beta^2)^2 - k \beta^2 \right] + \\ & + \sum_i \left[(2\gamma_i - 2k\beta^2 \delta_i m^2) \text{sen} \left(\frac{n\pi c_i}{b} \right) \cdot \sum_p a_{mp} \text{sen} \left(\frac{p\pi c_i}{b} \right) \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.79)$$

$$\text{onde,} \quad \frac{a}{b} = \beta \quad \frac{EI_i}{bD_p} = \gamma_i \quad \frac{P_i}{bN_x} = \frac{A_i}{bh} = \delta_i \quad k = \frac{N_{cr} b^2}{\pi^2 D_p}$$

Fazendo o determinante do sistema na expressão. 2.79 ser nulo, para obter-se a solução não trivial desse problema, obtém-se a equação para se determinar a carga crítica.

Figura 2.17 – chapa com um enrijecedor intermediário

No caso de apenas uma viga longitudinal dividindo a largura da placa no meio, conforme a figura 2.17, tem-se que $c_i = b/2$. Sem limitar a generalidade das conclusões, pode-se assumir que a placa reforçada tem sua deformada pós-crítica em uma meia-onda na direção longitudinal, podendo-se tomar $m=1$. Então o sistema de equações 2.79 pode ser simplificado para a forma da expressão 2.80.

$$\begin{aligned} & \left[a_1 (1 + \beta^2)^2 + 2\gamma(a_1 - a_3 + a_5 - \dots) \right] - k\beta^2 [a_1 + 2\delta(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] = 0 \\ & (1 + 4\beta^2)^2 a_2 - k\beta^2 a_2 = 0 \\ & \left[a_3 (1 + 9\beta^2)^2 - 2\gamma(a_1 - a_3 + a_5 - \dots) \right] - k\beta^2 [a_3 - 2\delta(a_1 - a_3 + a_5 - \dots)] = 0 \\ & (1 + 16\beta^2)^2 a_4 - k\beta^2 a_4 = 0 \\ & \dots \dots \dots \end{aligned} \quad (2.80)$$

As equações de ordem par têm apenas um coeficiente; do valor encontrado da carga crítica (N_{cr}), usando apenas essas equações, resultam valores em que a deformada da chapa tem uma linha nodal coincidente com o enrijecedor, que permanece reto durante a flambagem da chapa (figura 2.16a), ou seja, não são suficientes para prever a flambagem por distorção do enrijecedor. Para estabelecer a relação entre a rigidez à flexão do enrijecedor e o valor da carga crítica de compressão (figura 2.16b), as equações de ordem ímpar devem ser consideradas.

A primeira aproximação da carga crítica é obtida com a primeira equação do sistema e assumindo apenas um coeficiente a_1 diferente de zero, isto é, tomando-se apenas o primeiro termo da dupla série trigonométrica, expressão 2.72, para representar o deslocamento na situação pós-crítica da chapa, resulta a expressão 2.81 para o valor da carga crítica.

$$N_{cr} = \frac{\pi^2 D_p}{b^2} \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2\gamma}{\beta^2 (1 + 2\delta)} \quad (2.81)$$

Derivando a primeira aproximação da carga crítica, equação 2.81, em relação a β e igualando-a a zero, encontra-se o valor de β que minimiza a carga crítica, equação 2.82.

$$\beta^2 = \sqrt{1 + 2\gamma} \quad (2.82)$$

Utilizando-se de três equações do sistema da expressão 2.79, com os três coeficientes a_1 , a_2 e a_3 diferentes de zero e $m=1$, obtém-se a terceira aproximação da carga crítica, expressão 2.83. O determinante do sistema igual a zero é mostrado na equação 2.84.

$$\begin{aligned} & \left[a_1 (1 + \beta^2)^2 + 2\gamma (a_1 - a_3) \right] - k\beta^2 \left[a_1 + 2\delta (a_1 - a_3) \right] = 0 \\ & (1 + 4\beta^2)^2 a_2 - k\beta^2 a_2 = 0 \end{aligned} \quad (2.83)$$

$$\left[a_3 (1 + 9\beta^2)^2 - 2\gamma (a_1 - a_3) \right] - k\beta^2 \left[a_3 - 2\delta (a_1 - a_3) \right] = 0$$

$$\begin{aligned} & \left[(1 + \beta^2)^2 + 2\gamma - k\beta^2 (1 + 2\delta) \right] \cdot \left[(1 + 4\beta^2)^2 - k\beta^2 \right] \cdot \left[(1 + 9\beta^2)^2 + 2\gamma - k\beta^2 (1 + 2\delta) \right] - \\ & \left[2\delta k\beta^2 - 2\gamma \right]^2 \left[(1 + 4\beta^2)^2 - k\beta^2 \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.84)$$

A solução da equação 2.84 resulta na carga crítica da chapa ou no coeficiente de flambagem k . Alguns valores de k são mostrados na figura 2.18. Vê-se que, para cada valor de δ e γ , o fator k varia com a relação a/b e possui um mínimo para um

certo valor dessa relação. Uma placa longa irá flambar em muitas meias-ondas, tais que o comprimento de onda será semelhante ao encontrado para o k mínimo na figura 2.18.

Figura 2.18 – Valores de k e a/b para diversos valores de rigidez da viga intermediária

Utilizando-se de uma expressão modificada de k , expressão 2.85, pode-se analisar o valor desse fator para o trecho de chapa entre duas vigas intermediárias ou entre uma viga intermediária e a borda. Chamam-se esses “trechos” da chapa de subelementos, mostrados na figura 2.19.

$$k' = \frac{N_{cr} \left(\frac{b}{2} \right)}{\pi^2 D_p} \quad (2.85)$$

Figura 2.19 – Exemplo de chapa com viga intermediária

Observa-se na figura 2.20 os valores de k' mínimo (coeficiente de flambagem do sub-elemento) que é solução da equação 2.84 satisfazendo a equação 2.82, para diversos valores de δ e γ . À medida que se aumenta a rigidez (γ) da viga intermediária, o valor de k para os sub-elementos (k') se aproxima de uma chapa simplesmente apoiada nas duas extremidades ($k=4$), isto porque a viga se torna muito rígida e tende a permanecer reta como se fosse um apoio, na situação pós-crítica.

Figura 2.20 – Valores de k' e γ (rigidez do enrijecedor)

2.3.1 – Múltiplos Enrijecedores Intermediários

Resolvendo o sistema de equações da expressão 2.79 para n enrijecedores intermediários e admitindo apenas uma meia onda no sentido longitudinal, ou seja, $m=1$, truncando a expressão 2.72 em $n = 1$, que corresponde à primeira aproximação da solução, o valor de k pode ser resolvido explicitamente, segundo Schafer (1998), pela expressão 2.86. Derivando a expressão 2.86 em relação a β , e igualando o resultado a zero, tem-se o valor de β que minimiza k , resultando a expressão 2.87.

$$k = \frac{(1 + \beta^2)^2 + 2 \sum_i \gamma_i \sin^2(\pi \alpha_i)}{\beta^2 \left(1 + 2 \sum_i \delta_i \sin^2(\pi \alpha_i) \right)} \quad (2.86)$$

$$\beta = \left(2 \sum_i \gamma_i \sin^2(\pi \alpha_i) + 1 \right)^{\frac{1}{4}} \quad (2.87)$$

onde, $\alpha_i = \frac{c_i}{b}$

A tabela 01, apresentada por Schafer (1998), mostra os valores aproximados do coeficiente k com a expressão truncada, expressões 2.86 e 2.87, e valores obtidos com uma solução numérica de ordem sexta. A solução truncada no primeiro termo não permite avaliar o modo de flambagem local da chapa, apenas o modo por distorção, figura 2.16b. Por meio da tabela 01 observa-se que, quando o modo por distorção é o crítico, os resultados obtidos pela solução truncada e pela solução mais refinada são próximos.

Tabela 01 – Influência do truncamento no valor do coeficiente k Schafer (1998)

Número de enrijecedores	α_i	δ_i	γ_i	Solução numérica 6 termos k_{cr}	Solução truncada exp. 2.86 k_{cr}
3	igualmente espaçados	0,05	5	9,32	9,30
3	igualmente espaçados	0,05	25	18,42	18,42
3	igualmente espaçados	0,05	50	25,30	25,30
3	igualmente espaçados	0,05	100	35,88	35,04
2	0,1 0,9	0,05	25	8,10	8,34
2	0,2 0,8	0,05	25	12,90	13,02
2	0,3 0,7	0,05	25	16,18	16,18
2	0,4 0,6	0,05	25	17,90	17,89
4	igualmente espaçados	0,025	10	14,49	14,47
6	igualmente espaçados	0,025	10	16,07	16,04
8	igualmente espaçados	0,025	10	17,23	17,21
10	igualmente espaçados	0,025	10	18,10	18,09

As expressões 2.86 e 2.87 são usadas no cálculo das larguras efetivas de elementos comprimidos com múltiplos enrijecedores intermediário no procedimento do AISI (2001).

2.4 - Flambagem de Placa Simplesmente Apoiada Sob ação de Carregamento Linearmente Distribuído (Momento Fletor combinado com Esforço Normal)

Figura 2.21 – Placa submetida a esforços de momento fletor e esforço normal

A resolução deste item tem por base Timoshenko (1961) até a obtenção da energia potencial total, equação 2.94; posteriormente, com uso dessa equação, encontraram-se para este trabalho os resultados analíticos para chapa sob esforços de flexo-compressão. Considera-se uma placa retangular simplesmente apoiada com os lados $x = 0$ e $x = a$ submetidos a forças distribuídas, agindo no plano médio da placa, de intensidade dada pela equação (expressão 2.88) equivalente, em termos de distribuição de tensões, à ação combinada de momento fletor e esforço normal, conforme a figura 2.21.

$$N_x = N_0 \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \quad (2.88)$$

Na expressão 2.88, N_0 é a intensidade da força de compressão no lado $y = 0$ e α é um fator numérico. Alterando o valor de α , pode-se obter vários casos particulares de momento fletor e esforço normal. Por exemplo, para $\alpha = 0$ tem-se o caso de compressão uniforme e para $\alpha = 2$ o de momento puro. Se $\alpha > 2$, ter-se-á o caso de flexo-tração.

A deformada pós-crítica de uma chapa simplesmente apoiada nos quatro lados pode ser, como anteriormente, na forma de dupla série trigonométrica da expressão 2.67.

Resolvendo o problema pelo método da minimização da energia potencial total, tem-se que a equação da energia do sistema é a diferença dos trabalhos internos (expressão 1.79) e externos (expressão 1.71), conforme a expressão 1.80. Como visto no item 2.1, o segundo termo da energia da expressão 1.80 pode ser representado para o caso da placa simplesmente apoiada pela expressão 2.4 e o primeiro termo da expressão 1.80, referente ao trabalho interno, pela expressão 2.5. Aplicando o carregamento proposto, expressão 2.88, na expressão 2.5, tem-se a expressão 2.89. Inserindo o deslocamento w (expressão 2.67) na expressão 2.89 e observando as expressões 2.90, 2.91 e 2.92, tem-se a expressão do trabalho externo, expressão 2.93.

$$W = \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^b N_x \left(1 - \alpha \frac{y}{b} \right) \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 dx dy \quad (2.89)$$

$$\int_0^b y \cdot \text{sen} \left(\frac{i\pi y}{b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{j\pi y}{b} \right) dy = \frac{b^2}{4} \quad \text{para } i = j \quad (2.90)$$

$$\int_0^b y \cdot \text{sen} \left(\frac{i\pi y}{b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{j\pi y}{b} \right) dy = 0 \quad \text{para } i \neq j, \text{ e } i \pm j \text{ ser um número par} \quad (2.91)$$

$$\int_0^b y \cdot \text{sen} \left(\frac{i\pi y}{b} \right) \cdot \text{sen} \left(\frac{j\pi y}{b} \right) dy = -\frac{4b^2}{\pi^2} \frac{ij}{(i^2 - j^2)^2} \quad (2.92)$$

para $i \neq j$, e $i \pm j$ ser um número ímpar

$$W = -\frac{N_0}{2} \frac{ab}{4} \sum_{m=1}^{m=\infty} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \frac{N_0}{2} \frac{\alpha a}{2b} \sum_{m=1}^{m=\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[\frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^{n=\infty} a_{mn}^2 - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{n=\infty} \sum_i^{\infty} \frac{a_{mn} a_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right] \quad (2.93)$$

onde i são apenas números tais que $n \pm i$ são sempre ímpar.

Utilizando-se da expressão 2.93, referente ao trabalho externo, na energia potencial total, tem-se a expressão 2.94.

$$\begin{aligned} \Pi = & \frac{\pi^4 ab}{8} D_p \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - \frac{N_0 ab}{2} \frac{1}{4} \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \\ & + \frac{N_0 \alpha a}{2} \frac{1}{2b} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[\frac{b^2}{4} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn}^2 - \frac{8b^2}{\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_i \frac{a_{mn} a_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right] \end{aligned} \quad (2.94)$$

Minimizando a expressão da energia potencial total, expressão 2.94, igualando a *zero* suas derivadas em função dos coeficientes a_{mn} , obtém-se um sistema linear na forma da expressão 2.95.

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial a_{mn}} = & \pi^4 D_p a_{mn} \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right)^2 - N_0 a_{mn} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} + \\ & + N_0 \frac{\alpha}{2} \frac{m^2 \pi^2}{a^2} \left[a_{mn} - \frac{16}{\pi^2} a_{mn} \sum_i \frac{a_{mi} ni}{(n^2 - i^2)^2} \right] = 0 \end{aligned} \quad (2.95)$$

Tomando todas as equações do sistema da expressão 2.95, para um certo valor de m , as equações conterão coeficientes $a_{m1}, a_{m2}, a_{m3}, \dots$ o que equivale a usar a equação inicial para a curva de deslocamento pós-crítico da chapa, a expressão 2.96, ou seja, a deformada da chapa é subdividida ao longo do eixo x em m meias-ondas.

$$w = \text{sen} \frac{m\pi x}{a} \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} \text{sen} \frac{n\pi y}{b} \quad (2.96)$$

Tomando o valor $m=1$, o sistema da expressão 2.95 fica na forma da expressão 2.97.

$$a_{1n} \left[\left(1 + n^2 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - N_{cr} \frac{a^2}{\pi^2 D_p} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right) \right] - 8\alpha N_{cr} \frac{a^2}{\pi^2 D_p} \sum_i \frac{a_{1i} ni}{(n^2 - i^2)^2} = 0 \quad (2.97)$$

onde todos os números i são tomados tais que $n \pm i$ sejam ímpares.

O sistema de equações lineares e homogêneas da equação 2.97 em $a_{11}, a_{22}, \dots$ é satisfeito com $a_{11}, a_{22}, \dots$ iguais a zero, que corresponde à forma reta de equilíbrio da chapa. Para encontrar os coeficientes $a_{11}, a_{22}, \dots$ solução não nula, o determinante do sistema deve ser zero. Assim encontra-se o valor crítico de compressão da chapa.

Utilizando-se de três equações do sistema 2.97, obtém-se o sistema da expressão 2.98 e igualando o determinante dessas equações ao valor nulo, tem-se, para calcular a terceira aproximação, a equação 2.99.

$$\begin{aligned}
a_{11} \left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] &+ a_{12} \frac{-2}{9} C_2 + 0 = 0 \\
a_{11} \frac{-2}{9} C_2 &+ a_{12} \left[\left(1 - 4 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] + a_{13} \frac{-6}{25} C_2 = 0 \quad (2.98) \\
0 &+ a_{12} \frac{-6}{25} C_2 + a_{13} \left[\left(1 - 9 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] = 0
\end{aligned}$$

onde $C_1 = N_{cr} \frac{a^2}{\pi^2 D_p} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ e $C_2 = N_{cr} 8\alpha \frac{a^2}{\pi^4 D_p}$

$$\begin{aligned}
&\left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] \left[\left(1 - 4 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] \left[\left(1 - 9 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] - \\
&\quad - \frac{36}{625} C_2^2 \left[\left(1 - \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] - \frac{4}{81} C_2^2 \left[\left(1 - 9 \frac{a^2}{b^2} \right)^2 - C_1 \right] = 0 \quad (2.99)
\end{aligned}$$

Resolvendo a equação 2.99 para $\alpha = 0$, o resultado coincide com a expressão de tensões críticas de compressão uniforme na placa.

Valores do coeficiente k , solução da equação 2.99 são mostrados na figura 2.22 para diferentes valores de α .

Figura 2.22 - Valores de k e a/b para diferentes valores de α

Considerou-se, no desenvolvimento mostrado na figura 2.22, a formação de apenas uma semi-onda na curva da deformada, $m=1$, mas o resultado é igual para chapas longas, onde ter-se-á muitas meias-ondas na direção de compressão da chapa e o mesmo valor de k mínimo será encontrado para outros valores de m , semelhante ao caso da chapa submetida à compressão uniforme, no item 2.1. A figura 2.23 mostra os valores de k para $\alpha = 2$, (momento puro) considerando alguns valores de m , na solução da equação 2.99. O comportamento é análogo ao mostrado na figura 2.2.

A figura 2.24 mostra a curva dos valores mínimos de k para os valores de α variando de 0 a 2, resultante da solução da equação 2.99, e compara-se aos valores do coeficiente de flambagem k , calculados pela NBR 14762:2001-Tabela 04, para elementos AA (bi apoiados) submetidos a tensão gradiente de compressão com variação linear.

Figura 2.23 – Valores de k e a/b para momento puro ($\alpha = 2$)

Figura 2.24 - Valores de k (mínimo) e α

3 - Comportamentos Pós-crítico de Chapas

Um dos principais fatores que faz os perfis de chapas finas serem uma opção interessante, do ponto de vista estrutural, é a capacidade dos elementos de chapa, que compõem o perfil, suportar carregamentos superiores à força normal de flambagem elástica, o carregamento crítico dos elementos de chapa (N_{crit}).

Mostra-se, neste capítulo, como se comportam os elementos de chapas quando solicitadas por carregamentos superiores ao da carga crítica.

3.1 – Teoria de Placas com Grandes Deslocamentos

Para estudar placas com grandes deslocamentos, deve-se introduzir nas equações das deformações específicas o termo correspondente à não-linearidade geométrica. Dessa forma, são acrescentadas às equações das deformações específicas, as também chamadas de deformações de membrana, mostradas nas expressões 3.1 a 3.3. Essas deformações são constantes ao longo da espessura da chapa (observa-se que não depende da coordenada z).

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \quad (3.1)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \quad (3.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.3)$$

Tomando-se as derivadas parciais de segunda ordem dessas expressões e combinando-se convenientemente as mesmas, deduz-se a equação de compatibilidade, expressão 3.4.

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_y}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \gamma_{xy}}{\partial x \partial y} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.4)$$

As expressões de equilíbrio de um elemento são idênticas às já deduzidas na teoria de pequenos deslocamentos, porém os esforços n_x , n_y , n_{xy} são funções das deformações de membrana. Anteriormente (na análise de pequenas deformações)

estes esforços estavam diretamente relacionados ao carregamento aplicado, neste caso, no entanto, dependem da configuração deformada em que a chapa se encontra.

$$\frac{\partial n_x}{\partial x} + \frac{\partial n_{yx}}{\partial y} = 0 \quad (3.5)$$

$$\frac{\partial n_y}{\partial y} + \frac{\partial n_{xy}}{\partial x} = 0 \quad (3.6)$$

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{1}{D_p} \left(q + n_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + n_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2n_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.7)$$

As equações de equilíbrio no plano xy podem ser identicamente satisfeitas introduzindo-se uma função de tensões F conforme as equações 3.8 a 3.10.

$$\frac{n_x}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \quad (3.8)$$

$$\frac{n_y}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \quad (3.9)$$

$$\frac{n_{xy}}{t} = \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.10)$$

Substituindo-se os valores dessas tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} nas expressões resultantes da lei Hooke, tem-se as expressões 3.11 a 3.13.

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) \quad (3.11)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) \quad (3.12)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{2(1-\nu)}{E} \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} \quad (3.13)$$

Substituindo as expressões 3.11 a 3.13 na expressão 3.4, tem-se então a equação de compatibilidade na forma da expressão 3.14.

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 F}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 F}{\partial y^4} = E \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right)^2 - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \quad (3.14)$$

Substituindo os valores de n_x , n_y e n_{xy} , das expressões 3.8 a 3.10, na equação de equilíbrio na direção z , expressão 3.7, tem-se a expressão 3.15.

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{t}{D_p} \left(q + \frac{\partial F^2}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial F^2}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2 \frac{\partial F^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \right) \quad (3.15)$$

As equações de compatibilidade, expressão 3.14, e de equilíbrio, expressão 3.15, juntamente com as condições de contorno, determinam as funções F e w .

Conhecida a função F , as tensões na superfície média ou tensões de membrana podem ser determinadas a partir das expressões 3.8 a 3.10. Conhecida a função w , as tensões σ_x , σ_y e τ_{xy} podem ser determinadas a partir expressões 1.3 a 1.5.

3.1.1 – Distribuição de tensões na situação pós-crítica de chapas comprimidas

Com base em Fruchtingarten (1979), de forma adaptada para os objetivos deste trabalho, é mostrado neste item como se distribuem as tensões em chapa comprimidas na situação pós-crítica.

As expressões de compatibilidade (expressão 3.14) e de equilíbrio (expressão 3.15) devem ser satisfeitas juntamente com as condições de contorno de uma chapa retangular bi-apoiada, mostrada nas expressões 3.19 a 3.26, segundo os eixos de referência mostrados na figura 3.1. A expressão da deformada da chapa é tomada na forma de duplas séries de cossenos, expressão 3.16, que satisfaz automaticamente as condições de contorno.

$$w = \sum_m \sum_n w_{mn} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} \quad (3.16)$$

Substituindo-se as expressões de w na equação de compatibilidade (expressão 1.14) obtém-se a expressão 3.17, na qual tem-se a expressão 3.18 como uma solução particular.

$$\nabla^4 F = \frac{\pi^4 E}{a^2 b^2} \sum_{p=0}^{\infty} \sum_{q=0}^{\infty} c_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad p, q \text{ pares} \quad (3.17)$$

onde c_{pq} são funções quadráticas de w .

$$F_a = \sum_{p=0,2,\dots} \sum_{q=0,2,\dots} b_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad (3.18)$$

Os termos b_{pq} podem ser obtidos substituindo F_a na equação de compatibilidade e igualando-se os termos que multiplicam o mesmo produto de cossenos em ambos os membros da expressão.

Figura 3.1 – Chapa simplesmente apoiada submetida à compressão

Condições de contorno da placa:

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Deslocamento vertical e momento fletor nas bordas nulos:} \\
 w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 \quad (3.19) \\
 \\
 \text{Deslocamento horizontal das bordas na direção } x \text{ constante:} \\
 u = \int_0^{\pm \frac{a}{2}} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial y^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 \right\} dx = \text{constante} \quad (3.20) \\
 \\
 \text{A força total aplicada nas bordas é igual à soma das tensões nele:} \\
 n_x = \frac{t}{b} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} dy \quad (3.21) \\
 \\
 \text{As tensões de cisalhamento nas bordas são nulas:} \\
 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.22)
 \end{array} \right\} x = \pm \frac{a}{2}$$

$$\left. \begin{array}{l}
 \text{Deslocamento vertical e momento fletor nas bordas nulos:} \\
 w = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.23) \\
 \\
 \text{Deslocamento horizontal das bordas na direção } y \text{ constante:} \\
 v = \int_0^{\pm \frac{b}{2}} \left\{ \frac{1}{E} \left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} - \nu \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} \right)^2 \right\} dy = \text{constante} \quad (3.24) \\
 \\
 \text{A força total aplicada nas bordas é igual à soma das tensões nele:} \\
 n_y = \frac{t}{a} \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} dy = 0 \quad (3.25) \\
 \\
 \text{As tensões de cisalhamento nas bordas são nulas:} \\
 \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y} = 0 \quad (3.26)
 \end{array} \right\} y = \pm \frac{b}{2}$$

Toma-se F , expressão 3.27, para a função de tensões, na qual pode-se verificar que satisfaz tanto a equação de compatibilidade quanto as condições de contorno.

$$F = \frac{n_x}{2t} y^2 \sum_{p=0,2,\dots} \sum_{q=0,2,\dots} b_{pq} \cos \frac{p\pi x}{a} \cos \frac{q\pi y}{b} \quad (3.27)$$

Substituindo-se as expressões de w e F na equação de equilíbrio (3.15) e igualando-se os termos que multiplicam o mesmo produto de cossenos em ambos os membros, obtém-se um sistema de equações envolvendo termos cúbicos w_{mn} . A solução desse sistema de equações conduz aos coeficientes w_{mn} , dos quais podem ser calculados os termos b_{pq} da função de tensões F .

Em um exemplo realizado por Fruchtengarten (1979), utilizando-se essas expressões para os casos de chapas quadradas (fig. 3.1 com $b=a$), chegou-se aos resultados apresentados a seguir, os quais incluem o caso da chapa inicialmente reta e o caso da chapa com uma pequena curvatura inicial.

A solução é aproximada, pois consideram-se apenas três termos na função de deslocamento w .

Figura 3.2 – Deslocamentos da chapa em função da relação do carregamento aplicado/carregamento crítico

A figura 3.2 mostra os deslocamentos na chapa em função da intensidade de carregamento (expressa pela relação *carga aplicada/carga crítica*) para dois casos: chapa inicialmente reta ($w_0=0$) e com uma pequena curvatura inicial ($w_0=0,1t$ - deslocamento máximo no centro da chapa). Por meio dessa figura Fruchtengarten (1979) destacou as seguintes observações:

1. Em chapas com imperfeições iniciais, a velocidade de crescimento dos deslocamentos w aumenta até as proximidades da carga crítica. Tanto para chapas inicialmente planas quanto para chapas com imperfeições iniciais, esta velocidade de crescimento diminui para aumentos progressivos do carregamento além do valor crítico.
2. Os deslocamentos da chapa são pouco sensíveis às imperfeições iniciais, e a influência destas se restringe às proximidades da carga crítica. A partir daí, o deslocamento no centro da chapa se aproxima do obtido para chapas planas, tornando-se inclusive menor do que este para valores elevados do carregamento. No entanto ($w+w_0$) é sempre superior ao da chapa plana.

Figura 3.3 – Tensões na superfície média da chapa na situação pós-crítica

Por meio da função de tensões F e utilizando-se da expressão 3.8 encontra-se a distribuição de tensões n_x na chapa. A figura 3.3 mostra a distribuição de tensão na borda onde é aplicado o carregamento e no meio da chapa quadrada. Os resultados analíticos mostram que as tensões n_x no ponto A (σ_{xA}) são maiores que as tensões no ponto B (σ_{xB}). As tensões no ponto C são maiores que as do ponto D .

Na figura 3.4 é mostrada a relação entre $\frac{n_x}{n_{xcrit}}$ e $\frac{\sigma_x}{\sigma_{xcrit}}$, onde n_{xcrit} e σ_{xcrit} são

carga crítica e tensão crítica respectivamente de flambagem elástica, e foram obtidas das expressões da carga crítica para a chapa biapoada em regime elástico (expressão 2.14). Nesse caso, onde as dimensões da chapa e o material adotado (aço) são os mesmos, os valores de n_{xcrit} e σ_{xcrit} são constantes. O valor de n_x representa o carregamento (constante ao longo da largura da chapa) aplicado na borda da chapa. A tensão σ_{xA} é a tensão na superfície média da chapa no ponto A (figura 3.3), ou seja, não inclui as tensões geradas devido ao momento fletor existente na situação pós-crítica da chapa. Observa-se, nessa figura, que a relação entre o carregamento aplicado e a tensão máxima na chapa, σ_{xA} , é linear até o carregamento aplicado igualar-se ao carregamento crítico. A máxima tensão na superfície média da chapa

não aumenta na mesma proporção que o carregamento aplicado na borda da chapa, quando os valores desse carregamento são maiores que o carregamento crítico. É implícito nas figuras 3.3 e 3.4 que a chapa encontra uma configuração de equilíbrio estável para valores de carregamento aplicado maior que a carga crítica.

Figura 3.4 – Carregamento aplicado e tensão na superfície média da chapa, modificados pela carga crítica e tensão crítica respectivamente, Fruchtengarten (1979).

3.3 – Larguras efetivas

Para não necessitar resolver as equações de equilíbrio e a função de tensão das chapas, von Kármán em 1932, apresentou o conceito de larguras efetivas, para calcular de maneira mais simples e com bons resultados o valor da máxima capacidade resistente ao esforço de compressão.

Figura 3.5 – Distribuição de tensão da chapa e a largura efetiva

O conceito de larguras efetivas consiste em substituir a complexa distribuição real das tensões ao longo da borda carregada da chapa, por uma distribuição equivalente mais simples, figura 3.5. Conceitualmente, o valor da largura efetiva pode ser encontrado por meio da expressão 3.28. Admite-se, então, uma tensão constante atuando em determinado trecho da chapa (na largura efetiva). O valor dessa tensão é definido como sendo a máxima tensão real atuando sobre a superfície média da chapa, $\sigma_{xmáx}$. A máxima tensão na superfície média atua no ponto A da figura 3.3.

$$b_{ef} \sigma_{xmáx} t = \int_{-a/2}^{a/2} \sigma_x t dy \quad (3.28)$$

A expressão 3.28 pode ser representada pela expressão 3.29, utilizando o carregamento médio na espessura da chapa (ou carregamento aplicado na chapa). Dividindo-se ambos os membros da expressão 3.29 por n_{xcrit} , encontra-se um valor para o quociente da largura efetiva e a largura ($b=a$) da chapa como mostra a expressão 3.30.

$$b_{ef} \sigma_{xmáx} t = n_x b \quad (3.29)$$

$$\frac{b_{ef} \sigma_{x\max} t}{n_{crit}} = \frac{n_x b}{n_{crit}} \rightarrow \frac{b_{ef} \sigma_{x\max} t}{\sigma_{crit} t} = \frac{n_x b}{n_{crit}} \Rightarrow \frac{b_{ef}}{b} = \frac{\frac{n_x}{\sigma_{crit}}}{\frac{n_{crit}}{\sigma_{crit}}} = \frac{n_x}{n_{crit}} = \frac{n_x}{f_y} \quad (3.30)$$

Utilizando-se os valores de σ_x da figura 3.4, que representam as tensões no ponto *A* (figura 3.3), pode-se traçar curva de $\frac{b_{ef}}{b}$ e $\frac{n_x}{n_{xcrit}}$ como mostra a figura 3.5. A curva cheia representa a chapa inicialmente plana. A curva tracejada representa a chapa com imperfeição inicial. O valor da imperfeição no centro da chapa quadrada é denominado w_0 .

Figura 3.6 – Valor relativo da largura efetiva para carregamento superior ao crítico, Fruchtengarten (1979).

A figura 3.6 mostra que a largura efetiva diminui com o aumento do carregamento n_x aplicado da chapa. Nota-se que, para valores de carregamento superiores cerca de 120% de N_{crit} , ambas as curvas, com e sem imperfeições iniciais, são muito semelhantes. Isso significa que a capacidade resistente do elemento de chapa, sob análise do comportamento local, em chapas bi-apoiadas, não é muito influenciada pelas deformações iniciais.

Os autores pioneiros no estudo experimental de pós-flambagem em chapas comprimidas são T. von Kármán, E. E. Sechler e L. H. Donnell (1932) apud Fruchtengarten (1979). A expressão sugerida por eles revelou-se muito útil nas aplicações à engenharia aeronáutica, onde as chapas são geralmente bastante esbeltas, mas não dão bons resultados para chapas mais espessas, comuns na construção civil. A expressão apresentada por Von Kármán pode ser mostrada pelas expressões 3.31 a 3.37.

$$t\sigma_{x\max} = \frac{N_{crit}}{b_{ef}} \quad (3.31)$$

$$N_{crit} = \frac{4\pi^2 D_p}{b_e^2 t} \quad (3.32)$$

$$t\sigma_{\max} = \frac{\pi^2 Et^3}{3(1-\nu^2)b_e} \quad (3.33)$$

$$b_{ef}^2 = \frac{\pi^2 Et^2}{3(1-\nu^2)\sigma_{\max}} \quad (3.34)$$

$$b_{ef} = \frac{\pi t}{\sqrt{3(1-\nu^2)}} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}} \quad (3.35)$$

$$b_{ef} = C \sqrt{\frac{E}{f_y}} t, \text{ onde } C=1,9 \quad (3.36)$$

Adicionando a expressão 3.36 à 3.33, tem-se para a carga última a expressão 3.37.

$$N_u = C \sqrt{E f_y} t^2 \quad (3.37)$$

Testes realizados com chapa muito esbelta demonstraram que C tem valor próximo de 1,9, porém para chapas mais espessas esse valor decresce.

G. Winter em 1947, apud Fruchtengarten (1979), realizou uma série de testes em perfis de chapa dobrada e apresentou uma expressão (expressão 3.38) para o valor de C e, conseqüentemente, para a largura efetiva do elemento (por meio da expressão 3.36), na qual esse coeficiente dependia do parâmetro $\frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{\max}}}$. Ficando

então a expressão da largura efetiva como mostrado na expressão 3.39.

$$C = 1,9 - 0,9 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \quad (3.38)$$

$$b_{ef} = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \left(1 - 0,475 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \right) \leq b \quad (3.39)$$

Após estudos posteriores encontraram-se coeficientes melhores para o cálculo da largura efetiva. A expressão 3.40 e 3.41 é a usada hoje pelas normas de perfis formados à frio, NBR 14762:2001 e AISI (2001). A expressão 3.40 para o valor do coeficiente de flambagem local k igual a 4,0 (chapa bi-apoiada) é mostrada na expressão 3.41. Nota-se que a expressão sugerida por Winter em 1947 é muito semelhante a que é usada hoje.

$$b_{ef} = 0,95t \sqrt{\frac{kE}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \left(1 - 0,209 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{kE}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \right) \leq b \quad (3.40)$$

$$b_{ef} = 1,9t \sqrt{\frac{E}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \left(1 - 0,418 \frac{t}{b} \sqrt{\frac{E}{\sigma_{m\acute{a}x}}} \right) \leq b, \text{ para } k=4 \quad (3.41)$$

4 - Distorção em Perfis Formados a Frio

A flambagem por distorção é caracterizada pela rotação e possível translação da mesa comprimida, na qual altera a forma inicial da seção transversal. Este fenômeno torna-se o caso crítico principalmente em aços de alta resistência (em geral esse aço tem resistência superior a 540 MPa), em elementos com maior relação *largura da mesa/largura da alma*, ou menor largura do enrijecedor de borda, ou elementos menos esbeltos (menor b/t), segundo Batista et. al. (2000). Exemplos de flambagem por distorção da seção transversal são mostrados na figura 4.1.

Figura 4.1 – Distorção da seção transversal

Figura 4.2 – Modelo simplificado proposto por Hancock & Lau

A NBR 14762:2001 utiliza o método simplificado proposto por Hancock & Lau em 1987 apud Batista et. al. (2000), para calcular a carga de flambagem por distorção dos perfis formados a frio. Essa solução analisa a estabilidade de mesas comprimidas com enrijecedores de borda elasticamente ligadas à alma dos perfis, como mostra a figura 4.2. Este modelo simplificado dispensa a solução numérica modelada em computadores para o cálculo da tensão crítica de flambagem.

O modelo idealizado por Hancock & Lau para o cálculo da carga crítica de flambagem por distorção, consiste num modelo de viga composto apenas da mesa do perfil e do seu enrijecedor. Neste item denomina-se *viga*, a estrutura formada pela mesa juntamente com enrijecedor de borda, submetida à tensão de compressão. A ligação da mesa com a alma pode ser representada pelo modelo proposto na figura 4.2. O modelo considera, de forma aproximada, a influência que a alma exerce sobre a mesa comprimida por meio da ligação entre ambas. A alma oferece uma rigidez à rotação e à translação ao longo de todo o comprimento da viga, podendo ser expressas por k_ϕ e k_x respectivamente. É fácil notar que quanto maior for a relação largura/espessura da alma, menor será a rigidez representada por k_ϕ e k_x .

As expressões para a análise da flambagem por distorção feita por meio da teoria da estabilidade elástica, resulta nas expressões 4.1, que foram apresentadas por Hancock & Lau (1987) apud Batista et. al. (2000).

$$\begin{aligned} & \left[\frac{\pi^2}{\lambda^2} EI_{xy} (x_0 - h_x) + \frac{\lambda^2}{\pi^2} k_x (y_0 - h_y) - Ny_0 \right]^2 + \\ & - \left(\frac{\pi^2}{\lambda^2} EI_y + \frac{\lambda^2}{\pi^2 k_x} - N \right) \left\{ \frac{\pi^2}{\lambda^2} [EC_w + EI_x (x_0 - h_x)^2] + GJ + \right. \\ & \left. - \left(\frac{I_0}{A} - x_0^2 + h^2 \right) N + \frac{\pi^2}{\lambda^2} [k_x (y_0 - h_y)^2 + k_\phi] \right\} = 0 \end{aligned} \quad (4.1)$$

Para se encontrar a carga crítica deve ser determinado o valor de λ , que é o comprimento de meia onda da deformada da barra (comprimento da barra dividido pelo número n de meias ondas formadas), correspondente ao valor mínimo de N , por meio da expressão 4.1.

$$k_\phi = \frac{D_p (\alpha^2 + \beta^2)}{b} \left(\alpha \tanh\left(\frac{\alpha}{2}\right) + \beta \tan\left(\frac{\beta}{2}\right) \right)^{-1} \quad (4.2)$$

$$\text{onde, } \alpha = \pi \sqrt{\frac{b}{\lambda} \sqrt{\frac{b}{\lambda} + \sqrt{k}}}, \quad \beta = \pi \sqrt{\frac{b}{\lambda} \sqrt{-\frac{b}{\lambda} + \sqrt{k}}} \quad \text{e } k = \frac{b^2 t}{\pi^2 D_p} \sigma$$

O uso da expressão 4.2 para a determinação de k_ϕ é permitido para a resolução da expressão 4.1, e como envolve a força de compressão aplicada, necessita um processo iterativo. Esse procedimento iterativo apresentado para a

determinação do valor crítico de λ , que corresponde à força crítica de flambagem por distorção, não é prático para emprego de projetos.

Uma forma direta e aproximada de se obter o valor de λ consiste em encontrar o valor crítico de λ para a expressão da carga crítica de flambagem, expressão 4.3.

Sendo k_ϕ também função de λ e de N , para a obtenção da expressão de λ , k_ϕ passa a ser como mostra a expressão 4.3.

$$N_{cr} = \frac{\frac{\pi^2}{\lambda^2} EI_{wc} + GI_t + \frac{\lambda^2}{\pi^2} k_\phi}{\frac{I_x + I_y}{A} + h_x^2 + h_y^2} \quad (4.3)$$

Onde

$$I_{wc} = C_w + I_x (x_0 - h_x)^2 + I_y (y_0 - h_y)^2 - 2I_{xy} (x_0 - h_x)(h_0 - h_y)$$

$$k_\phi = \frac{2D_p}{b_w} \quad (4.4)$$

Resulta dessa aproximação o valor de λ encontrado de forma aproximada e direta pela expressão 4.5, que será usada para a resolução da expressão 4.1.

$$\lambda_{crit} = \pi \left(\frac{EI_{wc}}{k_\phi} \right)^{0,25} = \pi \left(\frac{EI_{wc} b_w}{2D_p} \right)^{0,25} \quad (4.5)$$

O valor de k_x , para resolver a expressão 4.1, pode ser considerado nula nesta análise simplificada. Em seções com o enrijecedor de borda virado para dentro (seção U enrijecido, por exemplo) tem-se um valor muito pequeno de k_x , segundo CHODRAUI (2003).

O valor da constante de rigidez k_ϕ entre elementos adjacentes de chapa em perfis do tipo U, I e Z para flambagem local foi proposto por BLEICH (1952) e será usado para resolver a expressão 4.1. O valor de k_ϕ é mostrado na expressão 4.6; o fator de redução entre parênteses é utilizado para se levar em conta a força de compressão na alma. Este fator é a relação entre as tensões de flambagem local de elementos de chapa adjacentes.

$$k = \frac{2D_p}{b_w} \left(1 - \frac{\frac{F'}{A}}{\sigma_w} \right) \quad (4.6)$$

Onde σ_w é a tensão à flambagem local da alma do perfil sob compressão, mostrado na expressão 4.4. E F'/A é a tensão crítica de flambagem da mesa, segundo a expressão 4.1, considerando $k_x=0$ e $k_\phi=0$.

$$\sigma_w = \frac{\pi^2 D_p}{t b_w^2} \left(\frac{b_w}{\lambda} + \frac{\lambda}{b_w} \right)^2 \quad (4.7)$$

Segundo Chodraui (2003) a expressão 4.6 é modificada para a expressão 4.8 para se fazer o ajuste com via faixas finitas, o qual inclui o efeito da força cortante e da distorção da mesa. A adição de $0,06\lambda$ ao valor de b_w na expressão 4.8 foi determinada por estudos paramétricos para seções com enrijecedores perpendiculares às mesas.

$$k = \frac{2D_p}{(b_w + 0,06\lambda)} \left(1 - \frac{\frac{F'}{A}}{\sigma_w} \right) \quad (4.8)$$

Utilizando-se as expressões 4.5, 4.8 e $k_x=0$ para resolver a expressão da carga crítica de flambagem em regime elástico, a expressão 4.1, tem-se o procedimento apresentado pela NBR 14762:2001 Anexo D. Este procedimento torna-se prático por ser analítico e não iterativo, porém tem limitações de utilização. A norma brasileira,

NBR14762:2001, limita o uso de suas expressões para o intervalo de $0,4 \leq \frac{b_f}{b_w} \leq 2,0$,

para perfis Ue e $0,6 \leq \frac{b_f}{b_w} \leq 1,3$ para Ue com enrijecedor adicional. Para seções que

não atendem essa relação, as expressões apresentadas serão contra a segurança, pois a translação da conexão alma/mesa será significativa.

Além da solução analítica há também as soluções numéricas, tais como Método dos Elementos Finitos (FEM) e Método das Faixas Finitas (FSM).

O método das faixas finitas é uma interessante alternativa para análise de estabilidade em perfis formados a frio. Ele permite identificar os modos de flambagem e a tensão crítica associadas, nas peças estruturais sujeitos à compressão e ao momento fletor.

As tabelas D.1 e D.2 da norma brasileira (NBR 14762:2001) apresentam valores mínimos da relação D/b_w de seções do tipo U enrijecido, submetidas à compressão centrada e seções do tipo U enrijecido e Z enrijecido submetidas à flexão, para dispensar a verificação da flambagem por distorção.

Chodraui (2006) analisou as tabelas D.1 e D.2 comparando-as à resultados rigorosos obtidos utilizando o programa CUFSM (Cornell University – Finite Strip Method) desenvolvido por Schafer (2001) em uma série de 27 perfis formados a frio do tipo U enrijecido, identificados na tabela 4.1. O resultado encontrado pode ser mostrado na forma das figuras 4.3 e 4.4.

Figura 4.3 Análise comparativa de σ_{dist} para compressão axial pela NBR 14762 e CUFSM (Chodraui, 2006)

As figuras 4.3 e 4.4 comparam o processo da norma brasileira e o método das faixas finitas (CUFSM) para diversas dimensões seções U enrijecidos. Mostra-se claramente que as seções C1 à C9, que não se encontram nos limites estabelecidos pela NBR 14762, têm resultados mais divergentes que os outros, na compressão. Na comparação de resultados, mesmo nas seções que se encontram dentro dos limites

estabelecidos pela norma brasileira, há momentos em que ocorre maior discrepância nos resultados do cálculo da tensão crítica de flambagem.

Figura 4.4 Análise comparativa σ_{dist} para momento pela NBR 14762 e CUFSM
(Chodraui, 2006)

Segundo Chodraui (2006), encontrou-se uma grande convergência nos resultados dos valores obtidos pelos métodos simplificados e método das faixas finitas, particularmente na compressão (relação entre 0,92 e 1,18). Relações entre 0,9 e 1,38 foram obtidas no momento fletor, indicando que o modelo aproximado requer revisão e ajustes.

Tabela 4.1 – Perfis Ue analisados por Chodraui (2006)

C ₁ 200x50x10x1	C ₁₅ 200x100x20x4
C ₂ 200x50x10x2	C ₁₆ 200x100x30x1
C ₃ 200x50x10x4	C ₁₇ 200x100x30x2
C ₄ 200x50x20x1	C ₁₈ 200x100x30x4
C ₅ 200x50x20x2	C ₁₉ 200x200x10x1
C ₆ 200x50x20x4	C ₂₀ 200x200x10x2
C ₇ 200x50x30x1	C ₂₁ 200x200x10x4
C ₈ 200x50x30x2	C ₂₂ 200x200x20x1
C ₉ 200x50x30x4	C ₂₃ 200x200x20x2
C ₁₀ 200x100x10x1	C ₂₄ 200x200x20x4
C ₁₁ 200x100x10x2	C ₂₅ 200x200x30x1
C ₁₂ 200x100x10x4	C ₂₆ 200x200x30x2
C ₁₃ 200x100x20x1	C ₂₇ 200x200x30x4
C ₁₄ 200x100x20x2	

5 – Programa de Computador

Para realizar as análises paramétricas dos perfis de aço formados a frio que são mostrados no capítulo 6 desta dissertação, utilizou-se de um programa de computador feito especificamente para atender as necessidades deste trabalho. O programa foi desenvolvido por meio da tecnologia Java, que consiste em uma linguagem de programação de fácil utilização e de livre distribuição. Pode ser copiado gratuitamente por meio do endereço eletrônico da empresa que o desenvolve, Sun¹.

A principal ferramenta deste programa de computador, *DIMPERFIL – Dimensionamento de Perfis de Aço Formados a Frio*, é fazer cálculos de esforços resistentes, de dezenas de perfis variando uma ou duas dimensões dos mesmos. Os perfis são calculados conforme os procedimentos da norma brasileira, NBR 14762:2001, e americana, AISI (2001). Exibem-se resultados em forma de gráficos, tabelas e relatórios. O relatório é detalhado suficientemente para que o usuário (engenheiro civil) possa entender os cálculos realizados, ao acompanhar as etapas de cálculos com as respectivas normas técnicas.

Outra qualidade importante deste programa é a capacidade que oferece ao usuário de poder acompanhar visualmente as larguras efetivas calculadas, e o detalhe dos enrijecedores de borda com suas propriedades geométricas. Com esse resultado visual da seção efetiva é possível entender com clareza como se comporta o perfil em relação à flambagem local dos elementos.

Para o cálculo das propriedades geométricas da seção transversal, o modelo geométrico do perfil é constituído de algumas aproximações em relação ao perfil real.

O perfil é constituído de segmentos de reta. O trecho das dobras dos perfis é formado por dois segmentos de reta com propriedades geométricas modificadas, para melhor representar o trecho curvo. Esses segmentos possuem a área modificada no valor igual ao arco de circunferência que ele representa, e tem seu centro geométrico na posição do centro geométrico do arco no qual ele representa. A figura 5.1 mostra

¹ O endereço eletrônico da Sun é <http://java.sun.com>

o perfil real (a), o perfil usualmente aproximado (b) utilizado para obter as propriedades geométricas dos perfis, principalmente, no caso das propriedades do enrijecedor de borda na análise da flambagem por distorção da seção transversal, e o perfil aproximado usado nos cálculos das propriedades geométricas no programa *DimPerfil*.

Na figura 5.2 é mostrado o detalhe da dobra do perfil. A dobra é representada graficamente por dois segmentos de reta, mas possui as propriedades geométricas (área e centro geométrico, CG) do arco de curva que representa.

No cálculo da constante de empenamento da seção transversal, C_w , e do centro de torção do perfil, CT (cujas coordenadas são os valores de x_c e y_c), é necessário calcular as propriedades setoriais do perfil. Nesse caso, os trechos das dobras são aproximados para dois segmentos de reta conforme mostra a figura 5.2. A figura 5.3 mostra como essa aproximação nas dobras do perfil é usada no cálculo das

propriedades setoriais da seção. Mostra-se na figura 5.3 o diagrama da área setorial de um perfil Z enrijecido com enrijecedor de borda adicional.

Figura 5.3 – Diagrama da área setorial do perfil, extraído da tela do programa *DimPerfil*.

A força normal resistente à compressão de um pilar é o menor valor calculado entre a força normal resistente de compressão pela flambagem por flexão, torção e flexo-torção e a força normal resistente devido à flambagem por distorção. Quando o valor de λ_{dist} é próximo de 3,6, geralmente, o esforço resistente do pilar é limitado pela flambagem por distorção. A norma brasileira (e também a norma Australiana AS/NZS 4600:1996), contudo, não apresenta uma formulação para o cálculo de N_{cRd} (quando a flambagem por distorção é a crítica) para valores de λ_{dist} maiores que 3,6. As equações para o cálculo de N_{dist} da norma brasileira, conforme o item 7.7.3 da NBR 14763:2001, são mostrados nas expressões 5.1 e 5.2.

$$N_{cRd} = Af_y(1 - 0,25\lambda_{dist}^2)/\gamma \quad \text{para } \lambda_{dist} < 1,414 \quad (5.1)$$

$$N_{cRd} = Af_y \{0,055[\lambda_{dist}-3,6]^2 + 0,237\} / \gamma \quad \text{para } 1,414 \leq \lambda_{dist} \leq 3,6 \quad (5.2)$$

Em razão disso, no programa de computador faz uma extrapolação das equações da norma para o cálculo de N_{cRd} (devido a distorção, N_{dist}). Acrescentou-se a expressão 5.3 para o caso de λ_{dist} ser maior que 3,6. Essa expressão consiste apenas numa equação de continuação da equação 5.2 de forma a ser proporcional a $1/\lambda_{dist}^2$. O resultado dessa extrapolação é mostrado na figura 5.3. Caso ocorra essa situação, essa proposta, SERÁ INFORMADA pelo programa a fim de que o usuário possa melhor avaliar a solução estrutural,

$$N_{cRd} = 3,088 Af_y / \lambda_{dist}^2 \quad (5.3)$$

Figura 5.4 – Fator de redução no cálculo de N_{dist}

Nas análises paramétricas realizadas no capítulo 7, em nenhum caso, foi considerado qualquer resultado que esteja fora dos limites de utilização da norma brasileira NBR 14762:2001. O programa mostra uma tela de aviso quando λ_{dist} é maior que 3,6 e informa ao usuário que o cálculo se encontra fora do previsto em norma, mostrado na figura 5.5.

Figura 5.5 – Tela exibida pelo programa quando ocorrem erros ou em casos especiais

A entrada de dados no programa é muito simples. O usuário escolhe o tipo de perfil que deseja analisar (U, Z, Cr, L, etc.), entra com os comprimentos das dimensões do perfil em centímetros e com os ângulos entre os elementos do perfil em graus (ângulo entre a mesa e a alma, ângulo entre a mesa e o enrijecedor de borda).

A figura 5.6 mostra a tela inicial do programa *DimPerfil*. Nesta tela o usuário pode escolher o tipo de perfil, incluir enrijecedores intermediários na mesa e na alma do perfil, calcular as larguras efetivas para uma determinada tensão de compressão atuando sobre o perfil e obter as propriedades geométricas da seção bruta e da seção efetiva para o cálculo dos deslocamentos da estrutura.

Figura 5.6 – Tela inicial do programa DimPerfil

O usuário pode escolher 10 tipos de perfis para calcular os esforços resistentes e seção efetiva: perfil do tipo L, L com enrijecedor, U, U enrijecido, U enrijecido com enrijecedor adicional, Z, Z enrijecido, Z enrijecido com enrijecedor adicional, Cartola e Cartola com enrijecedor adicional.

Figura 5.7 – Tela para cálculo dos esforços em perfis

A figura 5.7 mostra a tela onde o usuário pode calcular os esforços resistentes do perfil escolhido. Como resultado, o programa exibe um relatório, onde mostra as etapas de cálculos que foram realizados e o valor do esforço resistente que foi escolhido para ser calculado.

A figura 5.8 mostra como são inseridos os dados para construção de gráficos. Os gráficos são gerados a partir dos valores calculados, não necessitando ser o resultado final, mas pode ser algum resultado parcial calculado. Por exemplo, é possível gerar um gráfico com os valores, no eixo das ordenadas, igual à largura efetiva da mesa de um perfil U no cálculo do momento fletor resistente. A figura 5.9 mostra um exemplo de resultado gráfico gerado pelo programa. No exemplo mostrado, realizou-se o cálculo do valor do esforço resistente de compressão centrada de um perfil Ue com dimensões: $b_w = 10$ cm, $b_f = 10$ cm, $D =$ variável entre 1 e 3 centímetros e t calculados com três valores diferentes: 0,1, 0,2 e 0,3 centímetros. Foram calculados pelo procedimento das normas brasileira e americana. Os resultados inseridos nos eixos x e y do gráfico foi o comprimento do enrijecedor D e o valor de N_{rk} respectivamente.

Gráficos & Tabelas

Selecione o item a ser calculado.

- Nrd
- Nt
- Nc
- No
- Ndist
- Larguras efetivas

☒ NBR 14762 ☒ AISI

Dimensões & Equações

$\alpha = 0$
 $\beta = 90$
 $D = 3$
 $b_f = 10$
 $b_w = 10$
 $t = 0.3$
 $p_w = 3753872$
 $R = Nrd/A$

Configure os resultados a serem atribuídos nos eixos X e Y

Resultado no Eixo X: **D** Resultado no Eixo Y: **Nrd**

Variáveis disponíveis:

- Nrd
- Nt
- Nc
- Ma

Calcula uma série de perfis padronizados pela NBR 6355

1. ☐ Calcular série de perfis da NBR 6355:2003 **NBR 6355**

Escolha uma dimensão do perfil para ser variável:

2. ☒ Variar uma dimensão: 3. ☒ Variar duas dimensões

Limites da 1ª dimensão

D de: 1 até 3 número de pontos: 20

Valores da 2ª dimensão

t os valores: 0.1 ; 0.2 ; 0.3 (separados por ";")

☒ Criar Tabela ☒ Criar Gráfico

Insira as variáveis que se deseja que sejam exibidos como resultados nos eixos X e Y. Escolha as opções 1, 2 ou 3. Defina as dimensões e novas variáveis no campo "Dimensões & Equações".

OK

Figura 5.8 – Tela de entrada dos dados para construção de tabelas e gráficos

Figura 5.9 – Tela dos resultados gráficos realizados a partir dos dados de entrada exibido na figura 5.8

Com o resultado gráfico exibido pelo programa no exemplo dado, figura 5.9, pode-se comparar os valores de N_{rk} calculados para os diferentes valores da espessura e pelo procedimento realizado conforme a norma brasileira e americana.

6 – Análises paramétricas

Neste item apresenta-se os resultados das análises paramétricas realizados com a utilização do programa *DimPerfil*.

Na fig. 6.1 é mostrada a nomenclatura dos perfis e de seus respectivos elementos usados neste capítulo.

Figura 6.1 – Nomenclatura adotada para os perfis e suas dimensões

6.1 - Análises paramétricas sobre distorção da seção transversal

A norma brasileira NBR 14762:2001 apresenta no anexo D duas tabelas, D1 e D2, que constam os valores mínimos do enrijecedor de borda (em relação ao comprimento da alma, D/b_w), nos quais os perfis U e Z enrijecidos dispensam a verificação da capacidade resistente devido à flambagem por distorção da seção transversal.

As tabelas D1 e D2 foram construídas por uma análise em regime elástico comparando-se a tensão crítica mínima de flambagem por distorção da seção transversal com a tensão crítica mínima que causa flambagem local nos elementos da seção.

Neste item são mostradas tabelas similares às da norma, que informam os valores de D/b_w mínimos para perfis U e Z enrijecidos, que dispensam a verificação ao esforço resistente à flambagem por distorção. Porém, neste caso, as tabelas foram construídas por meio da comparação entre os esforços resistentes: esforço resistente considerando-se apenas a distorção da seção transversal e esforço resistente

considerando-se apenas o flambagem local nos elementos dos perfis. Os calculados foram realizados utilizando-se as expressões dos itens 7.7.2 – “*Flambagem da barra por flexão, por torção ou por flexo-torção*” e 7.7.3 – “*Flambagem por distorção da seção transversal*” da NBR 14762:2001, para análise de compressão, e dos itens 7.8.1.1 – “Início de escoamento da seção efetiva” e 7.8.1.3 – “*Flambagem por distorção da seção transversal*” para análise ao momento fletor.

Os cálculos foram realizados com os seguintes critérios:

- A capacidade resistente ao esforço de compressão que leva em consideração apenas o efeito local, foi calculada com o valor de ρ igual a 1,0 (N_0).
- Cálculo das larguras efetivas realizado com o valor de σ igual a f_y .
- Resistência de escoamento do aço, $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$.
- Na análise da capacidade resistente ao momento fletor (em torno de “x”), para o momento resistente que leva em consideração apenas a flambagem local, utilizou-se o cálculo do momento resistente que causa escoamento do aço na seção efetiva, M_{xesc} .

A figura 6.2 mostra duas curvas típicas da capacidade resistente de um pilar de chapa dobrada em relação ao comprimento do pilar. A máxima capacidade de esforço resistente de compressão de um pilar é N_0 (desconsiderando o caso de pilares muito curtos); a partir de um determinado comprimento, o pilar pode estar sujeito a flambagem por distorção (apenas se o mínimo local da curva de capacidade resistente, relacionado ao modo de flambagem distorcional, for menor que o mínimo local relacionado ao modo de flambagem local); para pilares mais compridos (esbeltos) a flambagem global é o modo crítico.

O estudo proposto neste item é a comparação das forças N_0 e N_{dist} em relação à largura do enrijecedor de borda (D). É possível encontrar, na maioria dos casos, o valor de uma largura do enrijecedor mínima, no qual, a partir desse valor, N_{dist} será sempre maior que N_0 .

Como é mostrado na figura 6.2, o valor da capacidade resistente N_0 corresponde à capacidade resistente máxima apenas para pilares com pequena esbeltez (comprimentos relativamente pequenos) – pois neste caso o pilar não está sujeito a flambagem global – enquanto que N_{dist} pode ser a carga crítica nos pilares, desde que tenha um comprimento mínimo de, aproximadamente, o valor de L_d .

6.2a – Modo de flambagem global inicia-se em comprimento maior que L_d 6.2b – Modo de flambagem global inicia-se em comprimento menor que L_d

Figura 6.2 – Curvas típicas do modo de flambagem em relação ao comprimento da barra

No entanto, em determinados perfis, o modo de flambagem global torna-se crítico para comprimento do pilar menor que L_d (figura 6.2b), nesse caso o valor calculado da largura mínima do enrijecedor, para dispensar a verificação do modo distorcional pode resultar um valor conservador. Nesses casos, quando N_{dist} é menor que N_0 , interpreta-se neste estudo, que o pilar está sujeito a flambagem por distorção, quando na realidade, a distorção não ocorre, por que a flambagem global é que determina a carga crítica. No entanto, esta análise trata de situações genéricas de

condições de contorno do pilar, como por exemplo, um pilar com um travamento no meio do vão na direção de menor inércia; nesse caso, os resultados encontrados pela comparação entre N_0 e N_{dist} passa a ser correto. Pois um pilar bi-apoiado (nas direções x e y), cuja curva de capacidade resistente assemelha-se ao da figura 6.2b, pode ter a curva de resistência alterada para a que é mostrada na figura 6.2a, se o pilar for travado na direção de menor inércia e/ou travado à torção. Conclui-se, portanto, que para uma condição genérica de vínculo do pilar, é correto comparar N_0 com N_{dist} para determinar o valor mínimo do enrijecedor de borda (implícito no parâmetro D/b_w) para dispensar a verificação à flambagem distorcional.

6.1.1 – Perfis U e Z enrijecidos

Nas figuras 6.3 e 6.4 mostram-se curvas dos valores de N_{dist}/N_0 em relação a D/b_w em seções transversais do tipo U enrijecidos. Em cada curva mostrada, nessas figuras, os valores de b_f/b_w e b_w/t são fixos. Desde que sejam mantidas estas relações entre as dimensões do perfil, os valores de N_{dist}/N_0 são os mesmos para qualquer perfil. Nota-se nessa figura que o aumento do parâmetro D/b_w faz a capacidade resistente da seção, considerando-se apenas a flambagem por distorção (N_{dist}), ser cada vez maior em relação à capacidade de esforço resistente considerando-se apenas a flambagem local, N_0 ($N_{dist}/N_c > 1,0$). Portanto, maiores larguras do enrijecedor de borda, favorece mais a capacidade resistente ao esforço normal devido a flambagem por distorção do que devido a flambagem local. Devido a isso, fixado as relações b_w/t e b_f/b_w , é possível encontrar um valor mínimo de D/b_w no qual a verificação da capacidade resistente ao esforço de compressão, levando-se em consideração apenas flambagem por distorção, não seja necessária. Esses valores, para a seção do tipo U enrijecido, são mostrados na tabela 6.1.

Figura 6.3 – Análise da relação D/b_w em perfis Ue comprimidos para dispensar a verificação à distorção

A figura 6.4 mostra os valores de N_{dist}/N_0 e D/b_w para b_f/b_w igual a 1,0. Nota-se, nas figuras 6.3 e 6.4 que, quando os elementos da seção transversal são muito esbeltos (maiores valores de b_w/t e b_f/t) o modo de flambagem distorcional tende a deixar de ser crítica para a capacidade máxima de resistência ao esforço de compressão da seção.

Figura 6.4 – Análise da relação D/b_w em perfis Ue comprimidos para dispensar a verificação à distorção

Tabela 6.1 – Valores mínimos de D/b_w de seções U submetidas à compressão para dispensar a verificação à distorção - calculados conforme as expressões da NBR 14762:2001, item 6.7.

b_f/b_w	b_w/t				
	250	200	125	100	50
0,4	0,080	0,097	0,079	0,060	-
0,6	0,091	0,107	0,145	0,151	0,414
0,8	0,106	0,124	0,196	0,192	0,405
1,0	0,109	0,138	0,202	0,241	0,383
1,2	0,122*	0,148	0,211	0,268	0,372
1,4	0,160*	0,143	0,221	0,269	0,373
1,6	0,203*	0,156*	0,232	0,274	0,386
1,8	0,253*	0,193*	0,240	0,280	0,404
2,0	0,309*	0,234*	0,248	0,288	0,431

“-” – não tem valor mínimo de D/b_w para dispensar a verificação à distorção

“*” – valores mínimos de D/b_w para que o valor de λ_{dist} seja menor ou igual a 3,6 – a norma não apresenta formulação para o cálculo de N_{dist} para valores de λ_{dist} maiores que 3,6 (item 7.7.3 da NBR 14762:2001).

Tabela 6.2 – (Tab. D1 da NBR 14762) – Valores mínimos da relação D/b_w de seções do tipo U enrijecido submetidas à compressão centrada para dispensar a verificação da flambagem por distorção.

b_f/b_w	b_w/t				
	250	200	125	100	50
0,4	0,02	0,03	0,04	0,04	0,08
0,6	0,03	0,04	0,06	0,06	0,15
0,8	0,05	0,06	0,08	0,10	0,22
1,0	0,06	0,07	0,10	0,12	0,27
1,2	0,06	0,07	0,12	0,15	0,27
1,4	0,06	0,08	0,12	0,15	0,27
1,6	0,07	0,08	0,12	0,15	0,27
1,8	0,07	0,08	0,12	0,15	0,27
2,0	0,07	0,08	0,12	0,15	0,27

A tabela 6.1 foi construída pela análise de curvas, como as que são mostradas nas figuras 6.3 e 6.4, para diversos valores da relação das dimensões b_f/b_w . Nota-se uma diferença significativa entre os valores mínimos de D/b_w encontrados utilizando as expressões da própria norma, em relação aos valores indicados na tabela D1 do anexo D da NBR 14762:2001 (tabela 6.2). O comprimento mínimo, de enrijecedor de borda, necessário para dispensar a verificação a flambagem por distorção, utilizando-se as expressões da própria norma (construída pela comparação de esforço resistente) é sempre maior que o indicado na tabela D1 da norma (construída pela comparação de tensão crítica de flambagem elástica).

A figura 6.5 mostra os valores de N_{dist}/N_0 em relação a b_f/b_w . Essa figura é utilizada para mostrar que, maiores valores de b_f/b_w favorecem para o modo de flambagem distorcional ser crítico no perfil. É importante ressaltar que essa observação é válida no caso de D/b_w ser constante, ou seja, aumenta-se o valor da dimensão da mesa (b_f), mas o valor do enrijecedor de borda (D) permanece constante.

Confirma-se, portanto, a conclusão de BATISTA et. al. (2000) sobre as relações geométricas da seção transversal e suas influências no modo de flambagem crítico, mostrado na tab. 6.3.

Figura 6.5 – Análise de N_{dist}/N_c em função da relação b_f/b_w em perfil Ue

Tabela 6.3 – Influência das relações geométricas de perfil Ue, sobre o modo de flambagem crítico, Batista et. al. (2000)

Se menor	Relação geométrica	Se maior
Modo local	b_f/b_w	Modo distorcional
Modo distorcional	D/b_w	Modo local
Modo distorcional	b_w/t	Modo local

Na análise ao momento fletor, os resultados são análogos ao caso de compressão centrada. A figura 6.6 mostra curvas de $M_{x_{dist}}/M_{x_{esc}}$ de perfis do tipo U com enrijecedor de borda, para valores fixo de b_w/t e b_f/b_w . A tabela 6.4 mostra os valores mínimos de D/b_w de perfis do tipo U enrijecido que podem ser dispensados na verificação à flambagem por distorção construída pela observação de curvas, como as mostradas na figura 6.6, utilizando-se as expressões de cálculo da norma

brasileira. Na tabela 6.5 são mostrados os valores D/b_w mínimos, para dispensar a verificação à distorção, que consta no Anexo D da norma brasileira (tabela D2), construída pela comparação das tensões críticas de flambagem elástica entre os modos distorcional e local.

Da mesma forma que ocorre na análise à compressão, também para momento fletor, os valores da tabela D2 apresentada pela norma brasileira (tabela 6.5) constam valores menores, de D/b_w mínimos para dispensarem a verificação da flambagem por distorção, aos que são encontrados utilizando as expressões de dimensionamento da própria norma (tabela 6.4).

Figura 6.6 - Análise da relação D/b_w em perfis Ue comprimidos para dispensar a verificação à distorção

Tabela 6.4 – Valores mínimos da relação D/b_w de seções Ue e Ze submetidos à flexão para dispensar a verificação à distorção calculados conforme as expressões da NBR 14762:2001

b_f/b_w	b_w/t				
	250	200	125	100	50
0,4	0,074	0,055	0,043	0,195	-
0,6	0,117	0,115	0,082	0,160	-
0,8	0,162	0,160	0,152	0,112	-
1,0	0,205	0,205	0,190	0,187	0,397
1,2	0,255	0,252	0,235	0,220	0,097
1,4	0,305	0,305	0,280	0,260	todos
1,6	0,365	0,360	0,330	0,305	0,140
1,8	0,452	0,430	0,380	0,350	0,175
2,0	-	-	0,437	0,395	0,202

“-” – não tem valor mínimo para D/b_w para que se possa dispensar a verificação ao modo distorcional

Tabela 6.5 – (Tab. D.2 da NBR 14762) – Valores mínimos da relação D/b_w de seções do tipo U enrijecido e Z enrijecido submetidas à flexão para dispensar a verificação da flambagem por distorção

b_f/b_w	b_w/t				
	250	200	125	100	50
0,4	0,05	0,06	0,10	0,12	0,25
0,6	0,05	0,06	0,10	0,12	0,25
0,8	0,05	0,06	0,09	0,12	0,22
1,0	0,05	0,06	0,09	0,11	0,22
1,2	0,05	0,06	0,09	0,11	0,20
1,4	0,05	0,06	0,09	0,10	0,20
1,6	0,05	0,06	0,09	0,10	0,20
1,8	0,05	0,06	0,09	0,10	0,19
2,0	0,05	0,06	0,09	0,10	0,19

6.1.2 – Perfis U enrijecidos com enrijecedor de borda adicional

Neste item mostra-se a análise da necessidade da verificação à distorção em perfis U enrijecido com enrijecedor de borda adicional, U_{ee}.

Na figura 6.7 tem-se o valor de N_{dist}/N_c em função de D/b_w .

Os cálculos foram realizados com os seguintes critérios:

- A capacidade resistente ao esforço de compressão que leva em consideração apenas o efeito local, foi calculada com o valor de ρ igual a 1,0 (N_0).

- Cálculo das larguras efetivas realizado com o valor de σ igual a f_y .

- Resistência de escoamento do aço, $f_y = 25 \text{ kN/cm}^2$.

- O enrijecedor adicional tem largura igual à metade da largura do enrijecedor de borda, $D_e = \frac{D}{2}$.

Uma análise semelhante a que foi realizado com perfis U enrijecidos foi feita com perfis U enrijecidos com enrijecedor de borda adicional (U_{ee}). Os resultados são apresentados na tabela 6.6, onde se mostra os valores mínimos da relação D/b_w para que se possa dispensar verificação ao modo de flambagem à distorção no cálculo da máxima capacidade que o perfil tem de resistir ao esforço normal. Nota-se que em perfis com enrijecedor de borda adicional os valores mínimos de D/b_w para dispensar a verificação à distorção são maiores que em perfis U enrijecidos simples. Em geral, principalmente nos casos de elementos mais esbeltos (valores elevados de b_w/t e b_f/t), o enrijecedor de borda adicional aumenta a capacidade resistente a esforços, da seção transversal. Porém, o perfil com enrijecedor de borda adicional é mais sujeito a flambagem por distorção que o perfil sem enrijecedor adicional. Isso por que o enrijecedor adicional contribui melhor no aumento da capacidade resistente em relação ao modo local do que ao modo distorcional.

Figura 6.7 - Análise de valores da relação D/b_w em perfis U enrijecido com enrijecedor adicional (U_{ee}), submetidos à compressão, para dispensar a verificação à distorção

Tabela 6.6 – Valores mínimos da relação D/b_w de seções U_{ee}^* submetidos à compressão para dispensar a verificação à distorção calculados conforme item 7.7 da NBR 14762:2001

b_f/b_w	b_w/t				
	250	200	125	100	50
0,6	0,105	0,143	-	-	-
0,8	0,137	0,167	-	-	-
1,0	0,155	0,183	0,319	0,275	-
1,2	0,167	0,199	0,328	0,358	-
1,3	0,169	0,205	0,321	0,392	-

“-” – não tem valor mínimo de D/b_w para poder dispensar a verificação à distorção;

* O comprimento do enrijecedor adicional igual à metade do enrijecedor de borda ($D_e = 0,5D$)

6.1.3 – Perfis padronizados pela NBR 6355:2001

6.1.3.1 – Perfis U enrijecidos

Os valores de N_{dist}/N_0 para perfis U_e padronizados pela NBR 6355:2003 resultam, na maioria dos casos em valores maiores que um, utilizando-se a tabela D1 da norma brasileira, verifica-se que são poucos àqueles que se permite dispensar a verificação à flambagem por distorção. Isso ocorre, principalmente, por que a maioria dos perfis possui elementos com pequena esbeltez, b_w/t e b_f/t menores que 50, essas seções são mais propensas a ter sua resistência a esforços limitada pela flambagem por distorção da seção transversal (como mostrou-se nas figuras 6.3 e 6.4). No entanto, ao analisar os perfis padronizados pela NBR 6355:2003, utilizando-se expressões da norma NBR 14762:2001, constata-se que, na maioria dos casos, com poucos centímetros de comprimento longitudinal do pilar o modo de flambagem global é crítico, para a capacidade resistente à compressão centrada – comportamento semelhante ao mostrado na figura 6.2b – portanto não necessita, nesse caso, a verificação a flambagem distorcional.

Tabela 6.7 - da relação de perfis Ue padronizados pela NBR 6355:2003 e valores mínimos do comprimento de pilares comprimidos para dispensar a verificação a flambagem por distorção

(1)-Perfil	(2)-sem trav. (cm)	(3)-com trav. (cm)	(4)- σ_{dist} compressão	(5)- σ_{dist} Mx	(6)- σ_{dist} My
1 Ue 50 x 25 x 10 x 1,20	28	49	80,04	120,08	207,10
2 Ue 50 x 25 x 10 x 1,50	25	43	105,76	157,96	255,45
3 Ue 50 x 25 x 10 x 2,00	21	37	149,99	222,17	335,12
4 Ue 50 x 25 x 10 x 2,25	20	35	171,31	252,54	375,40
5 Ue 50 x 25 x 10 x 2,65	19	33	201,96	295,20	442,18
6 Ue 50 x 25 x 10 x 3,00	18	32	223,40	323,98	504,80
7 Ue 75 x 40 x 15 x 1,20	0	61	46,18	69,20	136,60
8 Ue 75 x 40 x 15 x 1,50	40	70	61,01	91,12	168,96
9 Ue 75 x 40 x 15 x 2,00	41	71	88,08	130,97	221,64
10 Ue 75 x 40 x 15 x 2,25	38	66	102,59	152,23	247,55
11 Ue 75 x 40 x 15 x 2,65	35	60	126,81	187,55	288,68
12 Ue 75 x 40 x 15 x 3,00	32	56	148,61	219,14	324,64
13 Ue 100 x 40 x 17 x 1,20	0	0	38,15	61,14	103,21
14 Ue 100 x 40 x 17 x 1,50	0	0	49,75	79,63	127,77
15 Ue 100 x 40 x 17 x 2,00	39	71	70,30	112,16	167,76
16 Ue 100 x 40 x 17 x 2,25	46	84	81,00	128,94	187,39
17 Ue 100 x 40 x 17 x 2,65	46	83	98,45	155,93	218,41
18 Ue 100 x 40 x 17 x 3,00	43	78	113,76	179,18	245,34
19 Ue 100 x 40 x 17 x 3,35	40	74	128,78	201,46	272,25
20 Ue 100 x 50 x 17 x 1,20	0	0	32,66	50,05	92,86
21 Ue 100 x 50 x 17 x 1,50	0	70	43,02	65,82	114,90
22 Ue 100 x 50 x 17 x 2,00	49	87	62,06	94,75	150,76
23 Ue 100 x 50 x 17 x 2,25	53	94	72,39	110,43	168,34
24 Ue 100 x 50 x 17 x 2,65	51	90	90,02	137,18	196,13
25 Ue 100 x 50 x 17 x 3,00	47	84	106,49	162,16	220,23
26 Ue 100 x 50 x 17 x 3,35	44	78	123,83	188,41	243,78
27 Ue 125 x 50 x 17 x 2,00	0	0	50,57	85,34	112,02
28 Ue 125 x 50 x 17 x 2,25	41	74	58,78	99,44	125,03
29 Ue 125 x 50 x 17 x 2,65	51	95	72,71	123,48	145,55
30 Ue 125 x 50 x 17 x 3,00	58	107	85,68	145,93	163,32
31 Ue 125 x 50 x 17 x 3,35	54	100	99,33	169,53	181,03
32 Ue 125 x 50 x 20 x 3,75	52	95	115,70	186,00	232,65
33 Ue 150 x 60 x 20 x 2,00	0	0	39,84	67,27	92,77
34 Ue 150 x 60 x 20 x 2,25	0	0	46,17	78,14	103,61
35 Ue 150 x 60 x 20 x 2,65	48	86	56,87	96,64	120,70
36 Ue 150 x 60 x 20 x 3,00	57	106	66,82	113,92	135,44
37 Ue 150 x 60 x 20 x 3,35	66	121	77,30	132,20	150,03
38 Ue 150 x 60 x 20 x 3,75	67	125	89,91	154,24	167,19
39 Ue 150 x 60 x 20 x 4,25	62	115	106,55	183,29	187,35
40 Ue 150 x 60 x 20 x 4,75	58	107	124,06	213,58	208,31
41 Ue 200 x 75 x 20 x 2,00	0	0	23,80	44,17	56,42
42 Ue 200 x 75 x 20 x 2,25	0	0	27,50	51,30	62,98
43 Ue 200 x 75 x 25 x 2,65	0	0	39,49	70,08	89,96
44 Ue 200 x 75 x 25 x 3,00	0	0	46,09	82,16	101,02
45 Ue 200 x 75 x 25 x 3,35	0	95	53,00	94,88	111,94
46 Ue 200 x 75 x 25 x 3,75	64	120	61,26	110,20	124,28
47 Ue 200 x 75 x 25 x 4,25	78	147	72,13	130,47	139,56
48 Ue 200 x 75 x 25 x 4,75	89	167	83,58	151,92	154,74
49 Ue 200 x 75 x 30 x 6,30	77	143	123,45	204,78	237,28
50 Ue 200 x 100 x 25 x 2,65	0	0	31,11	48,54	76,94
51 Ue 200 x 100 x 25 x 3,00	0	0	36,49	56,92	86,39

52 Ue 200 x 100 x 25 x 3,35	74	132	42,18	65,79	95,71
---	----	-----	-------	-------	-------

Tabela 6.7 – continuação

(1)-Perfil	(2)-sem trav. (cm)	(3)-com trav. (cm)	(4)- σ_{dist} compressão	(5)- σ_{dist} Mx	(6)- σ_{dist} My
53 Ue 200 x 100 x 25 x 3,75 ■	100	181	49,08	76,56	106,24
54 Ue 200 x 100 x 25 x 4,25	105	191	58,32	91,03	119,26
55 Ue 200 x 100 x 25 x 4,75	109	198	68,28	106,70	132,17
56 Ue 250 x 85 x 25 x 2,00	-	-	-	-	48,21
57 Ue 250 x 85 x 25 x 2,25	-	-	-	-	53,88
58 Ue 250 x 85 x 25 x 2,65	-	-	-	-	62,81
59 Ue 250 x 85 x 25 x 3,00	-	-	-	-	70,50
60 Ue 250 x 85 x 25 x 3,35	-	-	-	-	78,24
61 Ue 250 x 85 x 25 x 3,75	-	-	-	-	86,64
62 Ue 250 x 85 x 25 x 4,25	-	-	-	-	97,22
63 Ue 250 x 85 x 25 x 4,75	-	-	-	-	107,71
64 Ue 250 x 85 x 30 x 6,30	-	-	-	-	165,47
65 Ue 250 x 100 x 25 x 2,65 ■	0	0	24,63	43,57	57,45
66 Ue 250 x 100 x 25 x 3,00 ■	0	0	28,77	51,08	64,47
67 Ue 250 x 100 x 25 x 3,35 ■	0	0	33,11	59,03	71,41
68 Ue 250 x 100 x 25 x 3,75 ■	75	135	38,34	68,68	79,23
69 Ue 250 x 100 x 25 x 4,25 ■	89	167	45,30	81,66	88,89
70 Ue 250 x 100 x 25 x 4,75 ■	99	186	52,73	95,70	98,46
71 Ue 300 x 85 x 25 x 2,00	-	-	-	-	37,87
72 Ue 300 x 85 x 25 x 2,25	-	-	-	-	42,32
73 Ue 300 x 85 x 25 x 2,65	-	-	-	-	49,32
74 Ue 300 x 85 x 25 x 3,00	-	-	-	-	55,34
75 Ue 300 x 85 x 25 x 3,35	-	-	-	-	61,27
76 Ue 300 x 85 x 25 x 3,75	-	-	-	-	67,96
77 Ue 300 x 85 x 25 x 4,25	-	-	-	-	76,22
78 Ue 300 x 85 x 25 x 4,75	-	-	-	-	84,41
79 Ue 300 x 85 x 30 x 6,30	-	-	-	-	129,44
80 Ue 300 x 100 x 25 x 2,65	-	-	-	-	45,19
81 Ue 300 x 100 x 25 x 3,00	-	-	-	-	50,71
82 Ue 300 x 100 x 25 x 3,35	-	-	-	-	56,14
83 Ue 300 x 100 x 25 x 3,75	-	-	-	-	62,27
84 Ue 300 x 100 x 25 x 4,25	-	-	-	-	69,83
85 Ue 300 x 100 x 25 x 4,75	-	-	-	-	77,32

(1) Descrição do Perfil U enrijecido.

(2) Comprimento mínimo, em centímetros, do pilar sem nenhum travamento entre extremidades, dispensar a verificação ao modo de distorção.

(3) Comprimento mínimo, em centímetros, da barra com um travamento na direção de menor inércia no meio do vão e travada à torção no meio do vão.

(4) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido à compressão centrada, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

(5) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido a momento fletor em torno do eixo perpendicular à alma, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

(6) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido a momento fletor em torno do eixo paralelo à alma, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001

“-“ Valores não calculados por que as relações entre as dimensões do perfil extrapolam os limites válidos de utilização das expressões para o cálculo da capacidade resistente devido a flambagem por distorção da NBR 14762:2001.

■ Perfis cuja geometria satisfaz a tabela D1 da norma brasileira, para dispensar a verificação ao modo distorcional.

A tabela 6.7 mostra os valores de comprimento longitudinal mínimos de pilares submetidos à compressão centrada para dispensarem verificação ao modo distorcional. São mostrados os comprimentos dos pilares para dois modelos estruturais de pilar: o primeiro para pilar simplesmente apoiado nas extremidades sem nenhum tipo de travamento ao longo do comprimento, o segundo caso, para pilar simplesmente apoiado com um travamento no meio do vão, na direção de menor inércia e travado à torção no meio do vão. É importante ressaltar que pilares com mais travamentos entre as extremidades devem ser verificados à distorção, exceto aos casos onde o comprimento mínimo mostrado na tabela 6.7 é igual a zero, pois nesses casos, a resistência ao esforço levando consideração o modo distorcional (N_{dist}) é maior que a resistência ao esforço normal considerando apenas a flambagem local (N_0). São mostrados, também, na tabela 6.7 os valores da tensão crítica de flambagem por distorção, calculados conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

Para seções submetidas ao momento fletor, apenas o perfil de número 20¹ (*Ue 100x50x17x1,20*) satisfaz a tab. D2 da NBR 14762 para ser dispensada a verificação à distorção da seção transversal, todos os demais perfis *Ue* devem ser verificados.

6.1.3.2 – Perfis Z enrijecidos

De maneira análoga à análise dos perfis *Ue*, os perfis Z_{90} padronizados pela NBR 6355:2003 são, na maior parte, sujeitos a flambagem distorcional quando se compara o valor de N_0 com N_{dist} desses perfis. No estudo ao momento fletor, pela comparação dos valores de M_{xesc} e M_{xdist} , observa-se que todos os perfis Z_{90} padronizados, necessitam de verificação ao modo de flambagem por distorção.

A tabela 6.8 mostra os valores de comprimento longitudinal mínimos, de pilares submetidos à compressão centrada, para dispensarem verificação ao modo distorcional. Pilares com comprimentos maiores que os indicados na tabela 6.8 terão sua capacidade resistente ao esforço de compressão limitada pela ocorrência da flambagem local e global (desde que a existência ou não de travamentos seja conforme indicado no rodapé da tabela). Nos casos de pilares continuamente

¹ A tabela 6.8 mostra os números e as dimensões dos perfis *Ze* padronizados pela NBR 6355:2003.

restringidos, ou com mais de um travamento, na direção de menor inércia do perfil devem ser verificados ao modo distorcional.

Todos os perfis Z_{45} padronizados devem ser verificados ao modo de flambagem por distorção para cálculo de esforço resistente à compressão e ao momento fletor.

Tabela 6.8 – da relação de perfis Z_{90} padronizados pela NBR 6355:2003 e valores mínimos do comprimento de pilares comprimidos para dispensar a verificação a flambagem por distorção.

(1)-Perfil	(2)-sem trav. (cm)	(3)-com trav. (cm)	(4)- σ_{dist} compressão	(5)- σ_{dist} Mx
1 Z90 50 x 25 x 10 x 1,20	28	55	80,04	120,08
2 Z90 50 x 25 x 10 x 1,50	24	48	105,76	157,96
3 Z90 50 x 25 x 10 x 2,00	21	41	149,99	222,17
4 Z90 50 x 25 x 10 x 2,25	19	38	171,31	252,54
5 Z90 50 x 25 x 10 x 2,65	18	36	201,96	295,20
6 Z90 50 x 25 x 10 x 3,00	17	34	223,40	323,98
7 Z90 75 x 40 x 15 x 1,20	0	71	46,18	69,20
8 Z90 75 x 40 x 15 x 1,50	41	81	61,01	91,12
9 Z90 75 x 40 x 15 x 2,00	41	82	88,08	130,97
10 Z90 75 x 40 x 15 x 2,25	38	76	102,59	152,23
11 Z90 75 x 40 x 15 x 2,65	35	69	126,81	187,55
12 Z90 75 x 40 x 15 x 3,00	32	64	148,61	219,14
13 Z90 100 x 50 x 17 x 1,20	0	0	32,66	50,05
14 Z90 100 x 50 x 17 x 1,50	0	79	43,02	65,82
15 Z90 100 x 50 x 17 x 2,00	49	97	62,06	94,75
16 Z90 100 x 50 x 17 x 2,25	53	105	72,39	110,43
17 Z90 100 x 50 x 17 x 2,65	50	100	90,02	137,18
18 Z90 100 x 50 x 17 x 3,00	46	92	106,49	162,16
19 Z90 100 x 50 x 17 x 3,35	43	86	123,83	188,41
20 Z90 125 x 50 x 17 x 2,00	0	0	50,57	85,34
21 Z90 125 x 50 x 17 x 2,25	38	73	58,78	99,44
22 Z90 125 x 50 x 17 x 2,65	47	93	72,71	123,48
23 Z90 125 x 50 x 17 x 3,00	52	104	85,68	145,93
24 Z90 125 x 50 x 17 x 3,35	48	96	99,33	169,53
25 Z90 125 x 50 x 20 x 3,75	46	92	115,70	186,00
26 Z90 150 x 60 x 20 x 2,00	0	0	39,84	67,27
27 Z90 150 x 60 x 20 x 2,25	0	0	46,17	78,14
28 Z90 150 x 60 x 20 x 2,65	45	85	56,87	96,64
29 Z90 150 x 60 x 20 x 3,00	52	104	66,82	113,92
30 Z90 150 x 60 x 20 x 3,35	59	118	77,30	132,20
31 Z90 150 x 60 x 20 x 3,75	61	121	89,91	154,24
32 Z90 150 x 60 x 20 x 4,25	56	111	106,55	183,29
33 Z90 150 x 60 x 20 x 4,75	52	103	124,06	213,58
34 Z90 200 x 75 x 20 x 2,00	0	0	23,80	44,17
35 Z90 200 x 75 x 20 x 2,25	0	0	27,50	51,30
36 Z90 200 x 75 x 25 x 2,65	0	0	39,49	70,08
37 Z90 200 x 75 x 25 x 3,00	0	0	46,09	82,16
38 Z90 200 x 75 x 25 x 3,35	0	91	53,00	94,88
39 Z90 200 x 75 x 25 x 3,75	59	114	61,26	110,20

Tabela 6.8 - continuação

(1)-Perfil	(2)-sem trav. (cm)	(3)-com trav. (cm)	(4)- σ_{dist} compressão	(5)- σ_{dist} Mx
40 Z90 200 x 75 x 25 x 4,25	69	138	72,13	130,47
41 Z90 200 x 75 x 25 x 4,75	78	156	83,58	151,92
42 Z90 200 x 75 x 30 x 6,30	66	132	123,45	204,78
43 Z90 250 x 85 x 25 x 2,00	-	-	-	-
44 Z90 250 x 85 x 25 x 2,25	-	-	-	-
45 Z90 250 x 85 x 25 x 2,65	-	-	-	-
46 Z90 250 x 85 x 25 x 3,00	-	-	-	-
47 Z90 250 x 85 x 25 x 3,35	-	-	-	-
48 Z90 250 x 85 x 25 x 3,75	-	-	-	-
49 Z90 250 x 85 x 25 x 4,25	-	-	-	-
50 Z90 250 x 85 x 25 x 4,75	-	-	-	-
51 Z90 300 x 85 x 25 x 2,00	-	-	-	-
52 Z90 300 x 85 x 25 x 2,25	-	-	-	-
53 Z90 300 x 85 x 25 x 2,65	-	-	-	-
54 Z90 300 x 85 x 25 x 3,00	-	-	-	-
55 Z90 300 x 85 x 25 x 3,35	-	-	-	-
56 Z90 300 x 85 x 25 x 3,75	-	-	-	-
57 Z90 300 x 85 x 25 x 4,25	-	-	-	-
58 Z90 300 x 85 x 25 x 4,75	-	-	-	-
59 Z90 300 x 85 x 30 x 6,30	-	-	-	-

(1) Descrição do Perfil Z_{90} enrijecido.

(2) Comprimento mínimo, em centímetros, do pilar sem nenhum travamento entre extremidades, dispensar a verificação ao modo de distorção.

(3) Comprimento mínimo, em centímetros, da barra com um travamento na direção de menor inércia no meio do vão e travada à torção no meio do vão.

(4) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido à compressão centrada, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

(5) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido a momento fletor em torno do eixo perpendicular à alma, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

“-“ Valores não calculados por que as relações entre as dimensões do perfil extrapolam os limites válidos de utilização das expressões para o cálculo da capacidade resistente devido a flambagem por distorção da NBR 14762:2001.

■ Perfis cuja geometria satisfaz a tabela D1 da norma brasileira para dispensar a verificação à distorção.

* A nomenclatura Ze não é usada na NBR 6355:2003. É usada a nomenclatura Z_{90} .

6.1.3.3 – Perfis tipo Cartola

A tabela 6.9 mostra os valores de comprimento longitudinal mínimos de pilares submetidos à compressão centrada para dispensarem verificação ao modo distorcional.

Tabela 6.9 - da relação de perfis Cartola padronizados pela NBR 6355:2003 e valores mínimos do comprimento de pilares comprimidos para dispensar a verificação a flambagem por distorção.

(1)-Perfil	(2)-sem trav. (cm)	(3)-com trav. (cm)	(4)- σ_{dist} compressão	(5)- σ_{dist} My	(5)- σ_{dist} Mx
1 Cr 50 x 100 x 20 x 2,00	0	66	63,79	95,97	136,22
2 Cr 50 x 100 x 20 x 2,25	36	72	73,84	110,89	152,56
3 Cr 50 x 100 x 20 x 2,65	36	69	90,59	135,65	178,39
4 Cr 50 x 100 x 20 x 3,00	33	64	105,77	157,97	200,74
5 Cr 50 x 100 x 20 x 3,35	31	60	121,24	180,58	222,92
6 Cr 67 x 134 x 30 x 3,00	0	95	72,09	107,05	160,61
7 Cr 67 x 134 x 30 x 3,75	43	89	93,78	138,53	199,25
8 Cr 67 x 134 x 30 x 4,75	38	78	122,77	180,10	249,92
9 Cr 75 x 75 x 20 x 2,00	0	70	47,23	67,45	154,37
10 Cr 75 x 75 x 20 x 2,25	0	69	55,09	78,43	172,99
11 Cr 75 x 75 x 20 x 2,65	29	67	68,60	97,19	202,54
12 Cr 75 x 75 x 20 x 3,00	27	61	81,40	114,88	228,22
13 Cr 75 x 75 x 20 x 3,35	25	56	95,16	133,82	253,76
14 Cr 75 x 100 x 20 x 2,00	0	88	41,72	60,34	113,36
15 Cr 75 x 100 x 20 x 2,25	51	98	48,63	70,14	126,88
16 Cr 75 x 100 x 20 x 2,65	51	94	60,50	86,90	148,22
17 Cr 75 x 100 x 20 x 3,00	46	86	71,73	102,70	166,75
18 Cr 75 x 100 x 20 x 3,35	43	79	83,80	119,64	185,12
19 Cr 80 x 160 x 30 x 3,00	0	101	58,50	88,60	123,63
20 Cr 80 x 160 x 30 x 3,75	62	119	77,65	117,30	153,02
21 Cr 80 x 160 x 30 x 4,75	54	104	105,32	158,55	191,47
22 Cr 80 x 160 x 30 x 6,30	46	88	151,17	226,13	250,41
23 Cr 100 x 50 x 20 x 2,00	0	0	35,11	50,09	199,27
24 Cr 100 x 50 x 20 x 2,25	0	0	40,84	58,09	223,70
25 Cr 100 x 50 x 20 x 2,65	0	0	50,63	71,68	262,66
26 Cr 100 x 50 x 20 x 3,00	0	0	59,86	84,42	296,68
27 Cr 100 x 50 x 20 x 3,35	0	0	69,74	98,00	330,73

(1) Descrição do Perfil tipo Cartola.

(2) Comprimento mínimo, em centímetros, do pilar sem nenhum travamento entre extremidades, dispensar a verificação ao modo de distorção.

(3) Comprimento mínimo, em centímetros, da barra com um travamento na direção de menor inércia no meio do vão e travada à torção no meio do vão.

(4) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido à compressão centrada, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

(5) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido a momento fletor em torno do eixo perpendicular à alma, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001.

(6) Valor da tensão crítica de flambagem elástica do perfil, submetido a momento fletor em torno do eixo paralelo à alma, calculada conforme o anexo D da NBR 14762:2001

6.2 – Comentários gerais sobre a geometria da seção transversal dos perfis

6.2.1 – Melhor dimensão para o enrijecedor de borda simples

O comprimento do enrijecedor de borda é um fator muito importante para enrijecer adequadamente a mesa comprimida em perfis de chapa dobrada. Ele não pode ser muito curto, pois necessita fornecer uma determinada rigidez mínima à mesa. Não pode ser muito comprido para que não ocorra flambagem local no enrijecedor e seja limitante na capacidade da mesa em suportar o esforço de compressão.

A figura 6.8 mostra um modelo de mesa com enrijecedor de borda simples e a largura efetiva típica que ocorre quando comprimidas. Na figura 6.9 apresenta-se curvas da relação *largura efetiva / largura bruta* dos elementos que compõe o conjunto mesa-enrijecedor e a relação D/b_f .

Figura 6.8 – Elemento com enrijecedor de borda

Onde: $\text{largura bruta} = e_1 + e_2$
 $\text{largura efetiva} = e_{1ef} + e_{2ef}$

Figura 6.9 – Proporção de largura efetiva em função da relação D/bf

As curvas apresentadas na figura 6.9 foram calculadas para perfis em aço totalmente comprimidos submetidos a uma tensão de 25 kN/cm^2 .

Por meio da figura 6.9 pode-se concluir que o comprimento mais eficiente para o enrijecedor de borda está entre 0,12 e 0,30 vezes o comprimento da mesa comprimida. Valores menores do enrijecedor são mais eficientes em elementos muito esbeltos, enquanto que elementos menos esbeltos são melhores enrijecidos com enrijecedores de borda maiores.

6.2.2 – Uso do enrijecedor de borda adicional

O uso do enrijecedor de borda adicional em perfis U enrijecidos não é muito comum em projetos de engenharia. No entanto há casos que se obtém um acréscimo significativo na resistência ao esforço de compressão em pilares com esse tipo de perfil.

Com o objetivo de se fazer uma análise “econômica” (menor consumo de material) de pilares comprimidos de perfis U enrijecidos, com e sem enrijecedores adicionais, analisam-se, neste item, um caso particular de seção transversal.

Figura 6.10 – Perfil Uee

O objetivo é comparar a resistência à compressão centrada de barras sujeitas a flambagem por flexão, flexo-torção ou torção (N_c), conforme o procedimento do item 7.7 da NBR 14762:2001, de perfis Ue e Uee, com as seguintes características:

- Perfis Ue e Uee com perímetro aproximadamente igual (*perímetro* ≈ 40 cm):

$$(b_w + 2b_f + 2D + 2D_e) = 40 \text{ cm para Uee e}$$

$$(b_w + 2b_f + 2D) = 40 \text{ cm para Ue};$$

- espessura $t = 0,1$ cm;

- Área da seção bruta:

$$A = 3,934 \text{ cm}^2 \text{ para perfil Ue};$$

$$A = 3,901 \text{ cm}^2 \text{ para perfil Uee};$$

- Em perfis Uee: $D_e = 0,5D$;

$$- f_y = 25 \text{ kN/cm}^2;$$

Toma-se, nesta primeira análise, valores de pilares com pequena esbeltez ($\rho = 1,0$), no cálculo da resistência ao esforço de compressão, N_0 . Dessa forma, tira-se conclusões relativo às larguras efetivas dos elementos dos perfis, sem interferência da rigidez global (I_x , I_y e I_t).

Na figura 6.11a mostram-se alguns dos perfis Ue, com as dimensões seguindo o critério proposto ($p = 40$ cm), que tiveram a capacidade resistente ao esforço normal

calculados. Na figura 6.11b mostram-se alguns dos perfis U enrijecido com enrijecedor de borda adicional que foram calculados.

6.11a Perfis Ue – perímetro aproximado 40 cm

6.11b Perfis Uee – perímetro aproximado ~ 40 cm

Figura 6.11 – Perfis Ue e Uee

A figura 6.12 mostra os resultados da capacidade resistente ao esforço normal de compressão desses perfis. Para cada perfil calculado, é mostrado na figura 6.12 ao longo do eixo das abscissas o valor da relação b_f/b_w dos perfis Ue e Uee e os valores resistência à compressão (N_c) no eixo das ordenadas. Observa-se que, enrijecedores de borda com rigidez adequada, elevam significativamente a resistência ao esforço de compressão em perfis com enrijecedor de borda adicional em pilares curtos. Nesse exemplo, a diferença entre o maior esforço resistente do perfil Ue e Uee, é de 16%.

No caso de perfis com elementos de pouca esbeltez (valores de b_f/t e b_w/t baixos), tem larguras efetivas iguais às larguras reais, dessa forma o esforço resistente atinge o mesmo valor máximo: $N_c = A_f \bar{f}_y / 1,1$ ($A_{ef} = A$).

Figura 6.12 – Valores de N_0 em perfis Ue e Uee de mesmo perímetro

A figura 6.13 mostra os valores dos esforços resistentes de perfis Ue e Uee para diferentes valores do comprimento do pilar. Nesse caso a rigidez à flexão da barra interfere na capacidade resistente do pilar. A seção escolhida para o cálculo de N_c , com b_f/b_w igual a 0,51 (e perímetro ≈ 40 cm), é a que tem a capacidade de resistir o maior esforço de compressão, para o pilar com 500 cm de comprimento.

Figura 6.13 – Valores de N_c em perfis Ue e Uee com mesmo perímetro e diferente comprimento longitudinal

Nota-se, por meio da figura 6.13, que em barras esbeltas (valores mais elevados do comprimento longitudinal do pilar) o enrijecedor de borda adicional pouco contribui ou não contribui em nada na capacidade de resistente à compressão do pilar. Isso ocorre por que, nesses casos, a tensão atuante na seção transversal, para o cálculo das larguras efetivas, é muito baixa e resulta em $A_{ef} = A$, em ambos os perfis.

6.3 – Análise sobre o processo iterativo no cálculo do esforço resistente de compressão centrada

O item 7.7.2 da NBR 14762:2001 descreve sobre procedimento de cálculo da força normal de compressão resistente de barras sujeita à flambagem por flexão, por torção ou por flexo-torção. O procedimento para o cálculo da força normal de compressão resistente no pilar, segundo a norma brasileira é apresentado a seguir:

Procedimento de cálculo da NBR 14762:2001 – item 7.7.2

Procedimento I:

- 1- Cálculo das propriedades geométricas da seção bruta.
- 2- Cálculo da força normal de compressão elástica (N_e).
- 3- Cálculo de $\lambda_0 = \sqrt{\frac{Af_y}{N_e}}$ (aproximado).
- 4- Cálculo de ρ (usando λ_0 aproximado).
- 5- Cálculo de A_{ef} com $\sigma = \rho \cdot f_y$.
- 6- Cálculo de $\lambda_0 = \sqrt{\frac{A_{ef} f_y}{N_e}}$ (2º cálculo de λ_0).
- 7- Cálculo de ρ usando o segundo cálculo de λ_0 (2º cálculo de ρ).
- 8- Cálculo da força resistente $N_{c,Rd} = \rho f_y A_{ef} / \gamma$.

No entanto, o texto da norma brasileira não é muito claro quanto ao procedimento de cálculo acima mostrado. A leitura permite a interpretação de que depois do item 5, procede-se diretamente conforme o item 8:

Procedimento II:

- 1- Cálculo das propriedades geométricas da seção bruta.
- 2- Cálculo da força normal de compressão elástica (N_e).
- 3- Cálculo de $\lambda_0 = \sqrt{\frac{Af_y}{N_e}}$ (aproximado).
- 4- Cálculo de ρ (usando λ_0 aproximado).
- 5- Cálculo de A_{ef} com $\sigma = \rho \cdot f_y$.
- 6- Cálculo da força resistente $N_{c,Rd} = \rho f_y A_{ef} / \gamma$.

Pelo texto da norma brasileira entende-se, também, que seja permitido calcular o fator de redução associado à flambagem, ρ , de forma iterativa:

Procedimento III (Interação):

- 1- Cálculo das propriedades geométricas da seção bruta.
- 2- Cálculo da força normal de compressão elástica (N_e).
- 3- Cálculo de $\lambda_0 = \sqrt{\frac{Af_y}{N_e}}$ (aproximado).
- 4- Cálculo de ρ (usando λ_0 aproximado).
- 5- Cálculo de A_{ef} com $\sigma = \rho \cdot f_y$.
- 6- Cálculo de $\lambda_0 = \sqrt{\frac{A_{ef} f_y}{N_e}}$ (2º cálculo de λ_0).
- 7- Cálculo de ρ usando o segundo cálculo de λ_0 (2º cálculo de ρ).
- 8- Cálculo de A_{ef} com $\sigma = \rho \cdot f_y$.
- 9- Cálculo de $\lambda_0 = \sqrt{\frac{A_{ef} f_y}{N_e}}$ (3º cálculo de λ_0).
- 10- Cálculo de ρ usando o último cálculo de λ_0 (3º cálculo de ρ).
- 11- Cálculo de A_{ef} com $\sigma = \rho \cdot f_y$.
- .
- .
- .
- 12- Cálculo da força resistente $N_{c,Rd} = \rho f_y A_{ef} / \gamma$.

Na figura 6.14 mostram-se valores do esforço de compressão resistente característico ($\gamma = 1,0$) pelos três procedimentos citados. O perfil calculado na figura 6.14 é Ue 150 x 150 x 30 x 1,5 (mm). Para efeito de comparação mostra-se a curva de esforço de compressão resistente calculado pela AISI (2001). No procedimento do

AISI não existe interação, o processo é direto. Por isso os resultados pelo procedimento do AISI aproxima-se mais do *Procedimento II* descrito neste item.

Nota-se que, utilizando-se do processo de interação (*Procedimento III*), o esforço resistente do pilar é inferior ao do processo simplificado da norma (*Procedimento I*). Em pilares muito curtos ou muito compridos os três procedimentos convergem para o mesmo valor.

Figura 6.14 – Comparação dos valores de N_c , calculado pelos 3 procedimentos.

Observa-se, ao utilizar o procedimento de cálculo de compressão resistente da norma brasileira (*Procedimento I*), que existe uma determinada faixa de comprimento do pilar onde a força de compressão resistente (N_c) é maior que N_0 – força de compressão resistente calculada com $\rho=1,0$. Nesse exemplo, mostrado na figura 6.14, esse comprimento é aproximadamente 60 cm, onde é possível observar um acréscimo na resistência do pilar com o aumento do seu comprimento.

6.4 – Comentários gerais sobre a NBR 14762:2001

Neste item, fazem-se alguns comentários e observações sobre os procedimentos de cálculos para os perfis formados a frio da NBR 14762:2001.

6.4.1 – Diferença entre o valor do coeficiente de flambagem k para elementos com enrijecedores de borda entre NBR 14762:2001 e AISI (2001)

O cálculo do coeficiente de flambagem local (k) em elementos com enrijecedor de borda (mesas enrijecidas) feito conforme a norma brasileira NBR 14762:2001 é idêntico ao procedimento de cálculo da norma americana AISI (1996). Nesse procedimento, existe uma descontinuidade no valor calculado do coeficiente k . Isso ocorre quando, ao se realizar o cálculo da largura efetiva da mesa enrijecida, o valor de λ_{p0} muda de 2,03 para um valor maior, pois nesse caso, mudam-se as expressões para obtenção do coeficiente de flambagem k , passa-se das expressões do “Caso II” para as do “Caso III” da norma. No procedimento de cálculo do AISI (2001) não ocorre essa descontinuidade. Essa diferença entre os valores calculados pela norma brasileira e americana é mostrada na figura 6.15, calculada com o valor de $\sigma = 21 \text{ kN/cm}^2$.

Figura 6.15 – Valores do coeficiente de flambagem k para elementos com enrijecedor de borda comprimido (NBR 14762 -7.2.2.2 e AISI - B4.2)

Em muitos casos, essa descontinuidade do valor do coeficiente k , é perceptível nos cálculos de esforços resistentes dos perfis. Tomando-se, por exemplo, a resistência ao esforço de compressão um pilar constituído pelo perfil $Cr 100 \times 50 \times$

20 x 2,00, padronizado pela NBR 6355:2003, para comprimentos do pilar variando de 0 a 100 cm, como mostra a figura 6.16 percebe-se a descontinuidade da resistência ao esforço de compressão do perfil causado exclusivamente devido o cálculo descontínuo do coeficiente de flambagem local k .

Figura 6.16 - Valores de N_c de pilar constituído de perfil tipo cartola com comprimento variável

6.4.2 – Outras comparações entre NBR 14762:2001 e AISI (2001)

- 1 – No cálculo do coeficiente de flambagem local em elementos não enrijecidos (AL) sujeitos a tensão gradiente:

NBR14762: cálculo de k é definido por meio de algumas expressões.

AISI (2001): $k = 0,43$ (sempre).

- 2 – No cálculo de largura efetiva de elemento com mais de um enrijecedor intermediário:

NBR14762: Adota o modelo de espessura equivalente (modelo usado no AISI(1996) e também adotado pela norma australiana AS/NZS 4600:1996)

AISI (2001): Utiliza-se o modelo de chapa com enrijecedor intermediário, com mesmo conceito mostrado no item 2.3.1 deste trabalho, para o cálculo do coeficiente de flambagem k .

- 3 – No cálculo de resistência à compressão centrada:

NBR 14762: Utiliza múltiplas curvas de redução, da tensão máxima aplicada no perfil, devido a flambagem por flexão, torção ou flexo-torção. Semelhante a norma européia Eurocode (1996).

AISI (2001): Utiliza curva única de redução da tensão máxima devido a flambagem por flexão.

7 – Conclusões

Neste trabalho foram apresentados os fundamentos teóricos para o dimensionamento de perfis metálicos formados a frio, no que se refere à flambagem local. Os valores do clássico coeficiente de flambagem local de chapa, k , foram deduzidos de forma mais elaborada do que as clássicas deduções de Timoshenko. Considerando-se melhores aproximações e verificações no regime elasto-plástico, demonstrou-se que os valores tradicionalmente empregados em projeto, correspondem a uma boa aproximação. A origem das expressões para a determinação de k , para condições menos triviais, recomendados em normas, foi aqui apresentada. Estudando-se o comportamento de chapas em situação pós-crítica, pôde-se notar que as tensões ao longo da borda carregada de uma chapa quadrada comprimida são máximas nas proximidades do apoio e mínimas no centro da borda carregada. Essa característica levou Von Karman a propor o modelo das larguras efetivas para dimensionamento de elementos metálicos de chapas finas.

O fenômeno da flambagem por distorção da seção transversal foi analisado e apresentada a origem da formulação da NBR 14762:2001, o modelo de Hancock, que consiste em um modelo de viga elasticamente apoiada junto ao apoio do elemento enrijecido (mesa) ao longo do comprimento longitudinal.

A fim de melhor compreender o comportamento dos perfis formados a frio, à luz das recomendações das normas brasileira e norte-americana, foram realizadas comparações e análises paramétricas envolvendo a geometria dos elementos desses perfis.

Para facilitar as análises, foi elaborado um programa de computador em linguagem Java que visa o dimensionamento de perfis segundo a NBR 14762:2001. Incluiu-se uma ferramenta que facilita análises paramétricas, o que permite, facilmente, encontrar-se uma geometria otimizada dos perfis formados a frio. Em vista do seu objetivo didático, o programa permite, também, o uso do AISI (2001), para fins de comparações.

A determinação dos coeficientes de flambagem de chapa, considerando-se a geometria dos enrijecedores de borda, segundo a NBR 14762:2001, conduz a uma descontinuidade, diferentemente do que ocorre ao empregar-se o AISI (2001).

Analisaram-se perfis U e Z enrijecidos e U enrijecidos com enrijecedor de borda adicional, nos quais os esforços resistentes não sejam limitados pela ocorrência de flambagem por distorção da seção transversal. Constatou-se que, utilizando as expressões da norma brasileira, o comprimento mínimo necessário do enrijecedor de borda para que se possa dispensar a verificação do esforço resistente devido à distorção da seção, é maior que os valores mínimos recomendados em tabelas da própria norma, conduzindo, pois, a uma diferença que necessita ser mais bem avaliada.

Estudando-se a força normal resistente de perfis U enrijecido e U enrijecido com enrijecedor de borda adicional, concluiu-se que em pilares curtos, na maioria dos casos, existe vantagem utilizar perfil com enrijecedor de borda adicional. Para pilares esbeltos, no entanto, o enrijecedor adicional não melhora significativamente a sua capacidade resistente.

Os perfis padronizados pela NBR 6355:2003, foram analisados principalmente quanto à necessidade de verificação da capacidade resistente devido à flambagem por distorção. Para barras muito curtas a maior parte dos perfis padronizados necessitam essa verificação. Incluiu-se no trabalho uma tabela indicando, para cada perfil padronizado pela norma, o comprimento mínimo da barra para o qual a verificação à distorção pode ser dispensada.

REFERÊNCIAS¹

AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE (2001). *North American specification for the design of cold-formed steel structural members*. Washington, DC.

AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE (1996). *North American specification for the design of cold-formed steel structural members*. Washington, DC.

AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE (1986). *North American specification for the design of cold-formed steel structural members*. Washington, DC.

AMERICAN IRON AND STEEL INSTITUTE (2004). *Commentary on Appendix 1 Design of Cold-Formed Steel Structural Members with the Direct Strength Method* 2004 EDITION

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2001). NBR 14762: *Dimensionamento de estruturas de aço constituídas por perfis formados a frio*. Rio de Janeiro: ABNT

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS (2003). NBR 6355: *Perfis estruturais de aço formados a frio - Padronização*. Rio de Janeiro: ABNT

BATISTA, E. M. et. al. (2000). *Estudo dos Modos de Instabilidade Local de Placa e Distorcional em Perfis de Chapa Dobrada de Aço*. XXIX Jornadas Sudamericanas de Ingenieria Estructural. Punta del Este, Uruguai.

¹ De acordo com:

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS NBR 6023: informações e documentação: referências: elaboração. Rio de Janeiro 2002.

BLEICH, Friedrich (1952). *Buckling Strength of Metal Structures*. 1. ed New York; McGraw-Hill Book Company, Inc.

CHODRAUI, G.M.B. (2003). *Flambagem por distorção da seção transversal em perfis de aço formados a frio submetidos à compressão centrada e à flexão*. 173 p. Dissertação (Mestrado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos.

CHODRAUI, G. M. B.; MUNAIAR Neto, J.; GONÇALVES, R. M.; MALITE, M. (2006). Distortional buckling of cold-formed steel members. *Journal of Structural Engineering-ASCE*, v. 132, n. 4, p. 636-639, 2006.

DESMOND, T. P.; PEKOZ, T.; WINTER, G.(1981a) *Edge stiffeners for thin-walled members*. *Journal of the Structural Division, ASCE*, v. 107, n. 2, p. 329-353. Feb. 1981.

DESMOND, T. P.; PEKOZ, T.; WINTER, G. .(1981b) *Intermediate stiffeners for thin-walled members*. *Journal of the Structural Division*, v. 107, n.ST4, p. 627-649. Apr 1981.

EUROPEAN COMMITTEE FOR STANDARDISATION (1996). *Eurocode 3: Design of steel structures. Part 1.3: General rules. Supplementary rules for cold formed thin gauge members and sheeting*. Brussels: CEN. (ENV 1993-1-3: 1996)

FRUCHTENGARTEN, JULIO (1979). *Sobre o comportamento pós-crítico de chapas metálicas*. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo. (cap. 1.2.5; 3.1; 3.2; 4.3)

SALMON, Charles G. ; Johnson, John E. (1997) *Steel Structures: Design and Behavior, Emphasizing and Resistance Factor Design*. 4.ed 1996 HarperCollins College Publishers

SCHAFER, B. Willian (1997). *Cold-Formed Steel Behavior and Design: Analytical and Numerical Modeling of Elements and Members with longitudinal Stiffeners*.

Dissertation (degree of Doctor of philosophy) - Faculty of the Graduate School of Cornell University

SCHAFER, B. W.; Peköz, T. (1998) *Cold-Formed Steel Members with Multiple Longitudinal Intermediate Stiffeners* - JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING OCTOBER 1998 1175 - 1181

SCHAFER, B. W.; Members ASCE (2002) *Local, Distortional, and Euler Buckling of Thin-Walled Columns*. JOURNAL OF STRUCTURAL ENGINEERING - MARCH - 289 – 299

TIMOSHENKO, S. P. ; Gere, J.M.(1961) *Theory of elastic stability*. 2. ed. New York: McGraw–Hill, 1961.