HENRIQUE FURIA SILVA

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS
SOB EXCITAÇÃO DE SUPORTES NÃO-IDEAL

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Doutor em Engenharia

São Paulo
2012

HENRIQUE FURIA SILVA

ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO NÃO-LINEAR DE ESTRUTURAS
SOB EXCITAÇÃO DE SUPORTES NÃO-IDEAL

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do título
de Doutor em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Professor Doutor
Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil

São Paulo
2012

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 13 de janeiro de 2012.

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Henrique Furia

Análise do comportamento dinâmico não-linear de estruturas sob excitação de suportes não-ideal / H.F. Silva. -- ed. rev. – São Paulo, 2012.

213 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Dinâmica das estruturas 2. Osciladores 3. Sistemas não lineares I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t.

A meus pais Marisa e Norberto

A minhas avós Genie (27/01/2006) e Renée

A meus irmãos Fabio, Ricardo e Renato

A meus tios Thomaz (09/04/2008), Arlete e Carla

AGRADECIMENTOS

A meus pais.

Ao Professor Doutor Reyolando Manoel Lopes Rebello da Fonseca Brasil pela orientação desta tese.

Ao Professor Doutor Túlio Nogueira Bittencourt pelas observações no exame de qualificação.

Ao Professor Doutor José Roberto Piqueira pela colaboração com os cálculos de amplitudes e a análise qualitativa do pórtico plano.

Aos meus irmãos Fabio e Ricardo pela ajuda na revisão do texto final.

A todos aqueles que se privaram da minha companhia nestes anos.

RESUMO

Neste trabalho se estuda o comportamento dinâmico não linear de um pórtico plano submetido à excitação não ideal de suportes, sendo isto aplicável a estruturas civis dele derivadas. Neste sentido, um edifício pode ser considerado uma justaposição de pórticos.

Modelos físicos simples aplicáveis a estruturas civis ou mecânicas com grau de dificuldade crescente são resolvidos individualmente com a utilização das equações diferenciais de Lagrange para determinar as equações do movimento do sistema.

A análise qualitativa de cada problema permite determinar os valores que os parâmetros físicos podem assumir. Cada modelo simples fornece um conjunto de parâmetros, que vão sendo utilizados progressivamente nas integrações numéricas.

Em sistemas com fonte de energia limitada, ocorre uma interação entre o movimento da estrutura e da fonte de energia; matematicamente é acrescentada uma equação diferencial acoplada adicional ao correspondente sistema livre de excitações.

No caso de pórticos planos de grande esbelteza, as cargas axiais induzem grandes deslocamentos, sendo importante considerar na estrutura a não-linearidade geométrica. Neste caso, uma discretização da estrutura precisa ser feita para identificar os graus de liberdade do sistema.

Nas análises dos problemas, busca-se o regime permanente de trabalho, no qual as amplitudes da estrutura variam lentamente com o tempo e a fonte de energia trabalha com frequência constante.

ABSTRACT

In this work we study the dynamical nonlinear behavior of plane frame under non ideal support excitation, being this applicable to civil structures derived from it. In this sense, a building can be considered as a contiguous series of frames.

Simple physical models that are applicable to civil or mechanical structures with increasing difficulty degree are solved individually, with the use of differential Lagrange's equations to determine the system's equations of motion.

Qualitative analysis of each problem allows the determination of the values that the physical parameters can take. Each model provides a simple set of parameters, which are being progressively used in numerical integrations.

On systems with limited power supply, there is an interaction between the structure's and the energy source's movement; mathematically an extra equation of motion is coupled to its corresponding excitement's free system.

Because in plane frames of high slenderness the axial loads induce large displacements, it is important to consider the structure's geometric nonlinearity. In this case, in order to identify system's degrees of freedom, the structure must be discretized.

In the problems' analysis, we seek the steady state, in which the structure's amplitudes vary slowly with time and the power supply works with constant frequency.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
1.1	Motivação e Justificativa	2
1.2	Objetivos e Metodologia.....	3
1.3	Estrutura da Tese.....	4
2	Análise de Oscilações Mecânicas.....	7
2.1	Oscilações conservativas.....	7
2.2	Oscilações dissipativas	8
2.3	Oscilações induzidas por carregamento harmônico.....	10
2.4	Oscilações não lineares gerais	11
2.5	Cálculo de amplitudes em oscilações	13
2.5.1	Método de Kryloff – Bogoliuboff	13
2.5.2	Método de Bogoliuboff – Mitropolsky	15
2.5.3	Relação entre os métodos de Kryloff – Bogoliuboff – Mitropolsky	16
2.5.4	Procedimento para sistemas não lineares	17
2.6	Oscilações periódicas	18
2.6.1	Aproximações de primeira ordem em séries trigonométricas	19
2.6.2	Aproximações de primeira ordem em ϵ	22
2.6.3	Formulação para sistemas não conservativos gerais	24
2.7	Estabilidade das oscilações em regime permanente	25
2.8	Sistemas com fonte de energia não ideal	26
2.8.1	Características da fonte não ideal de energia.....	27
2.8.2	Equações do oscilador mecânico não ideal	29
2.8.3	Amplitudes do Movimento.....	32
2.9	Análise do regime permanente	34
2.9.1	Consumo de energia em sistemas harmônicos	36
2.9.2	Aplicação a sistemas não ideais	42
3	Aplicação: Oscilador mecânico não ideal.....	45
3.1	Deslocamentos e Velocidades.....	45
3.2	Funções de Energia	46
3.3	Forças generalizadas não-conservativas.....	46
3.4	Determinação do Sistema Dinâmico.....	47
3.4.1	Equações diferenciais de movimento	49
3.4.2	Sistema algébrico adimensional	50
3.4.3	Parâmetros de Controle.....	51
3.4.4	Inversão do sistema algébrico	52
3.4.5	Equações Diferenciais Ordinárias.....	54
3.5	Análise qualitativa	54
3.5.1	Pontos de equilíbrio	54
3.5.2	Amplitudes do movimento.....	55
3.6	Análise do regime estacionário	56
3.6.1	Amplitude e ângulo de fase	58
3.6.2	Energia do Sistema.....	62
3.7	Escolha de parâmetros para integração numérica.....	64
3.7.1	Aceleração da gravidade	64
3.7.2	Taxas de amortecimento	65
3.7.3	Propriedades do Oscilador Mecânico	65
3.7.4	Propriedades do rotor do motor elétrico.....	66
3.7.5	Característica do motor.....	67
3.8	Integração numérica	74

4	Pórtico plano não linear não ideal.....	81
4.1	Geometria do pórtico	81
4.1.1	Massas concentradas do pórtico plano	82
4.1.2	Deslocamentos na flexão	84
4.1.3	Velocidades generalizadas.....	86
4.2	Funções de Energia	87
4.2.1	Energia Cinética	87
4.2.2	Energia de Deformação	88
4.2.3	Trabalho das forças conservativas.....	88
4.2.4	Energia Potencial	89
4.2.5	Forças generalizadas não-conservativas	89
4.2.6	Lagrangiana	89
4.3	Determinação do Sistema Dinâmico	92
4.3.1	Equações de Lagrange	92
4.3.2	Equações diferenciais de movimento.....	93
4.3.3	Sistema algébrico adimensional.....	94
4.3.4	Parâmetros de Controle	96
4.3.5	Inversão do sistema algébrico.....	97
4.4	Análise do regime estacionário.....	102
4.5	Equações Diferenciais Ordinárias	107
4.5.1	Amplitudes do Movimento	107
4.6	Escolha de Parâmetros	108
4.6.1	Geometria do pórtico.....	108
4.6.2	Propriedades do rotor do motor elétrico	111
4.7	Integrações Numéricas.....	118
5	Considerações Finais	123
5.1	Resultados obtidos e conclusões	123
5.2	Sugestões para trabalhos futuros.....	132
5.2.1	Sobre a taxa de amortecimento em estruturas.....	132
5.2.2	Sobre a fonte de energia em sistemas não ideais.....	132
5.2.3	Sobre estruturas de pórtico	133
5.2.4	Sobre o controle de oscilações	133
5.3	Sobre a análise estocástica de estruturas.....	134
6	Referências Bibliográficas	135
7	Sistemas Dinâmicos	143
7.1	Equações Diferenciais.....	144
7.1.1	O problema de Cauchy.....	144
7.1.2	Existência e Unicidade de Soluções	145
7.1.3	Estabilidade Dinâmica	146
7.1.4	Sistemas Autônomos	147
7.2	Equações Diferenciais Lineares	148
7.3	Equações Lineares com Coeficientes Constantes	149
7.3.1	Atração	152
7.3.2	Repulsão	152
7.3.3	Centro.....	153
7.3.4	Resumo	154
7.4	Estabilidade de Liapunov	154
7.5	Sistemas Bidimensionais Simples.....	156
7.5.1	Autovalores complexos	157
7.5.2	Autovalores iguais	160
7.5.3	Autovalores reais distintos.....	163
7.5.4	Resumo	167

8	Elementos de Mecânica	169
8.1	Trabalho e Energia Cinética.....	172
8.2	Forças Conservativas e Energia Potencial	173
8.3	Coordenadas Generalizadas	176
8.4	Princípio do Trabalho Virtual	178
8.5	Equilíbrio dinâmico.....	179
8.6	Formulação Integral	182
8.6.1	Princípio de Hamilton.....	182
8.6.2	Generalização do princípio de Hamilton	183
8.7	Forças generalizadas não conservativas	183
8.8	Equações de Euler–Lagrange.....	184
8.9	Trabalho e Potência	186
9	Oscilador Mecânico Simples	189
9.1	Análise do Sistema Dinâmico Ideal.....	190
9.1.1	Equação diferencial de movimento	191
9.1.2	Ponto de Equilíbrio.....	191
9.1.3	Estabilidade do ponto de equilíbrio	192
9.2	Integração do Sistema Dinâmico Ideal.....	194
9.3	Análise de Vibrações Livres.....	195
9.3.1	Amortecimento Fraco.....	195
9.3.2	Amortecimento crítico	199
9.3.3	Amortecimento forte ou super crítico	201
9.3.4	Resumo	203
9.4	Vibrações Forçadas com Carregamento Ideal.....	204
9.5	Vibrações devido a Sismos.....	204
9.6	Excitação de Suportes com Carregamento Harmônico	206
9.6.1	Determinação da Solução Particular.....	206
9.6.2	Resposta do Sistema Dinâmico.....	208
9.6.3	Análise do Regime Permanente	210
	Lista de Figuras.....	228
	Lista de Tabelas	230

Lista de Figuras

Figura 1 – Oscilador mecânico amortecido.....	1
Figura 2 – Pórtico plano sob excitação de suportes não-ideal.....	3
Figura 3 – Oscilador mecânico simples	7
Figura 4 – Oscilador ideal	10
Figura 5 – Curva de energia consumida pela estrutura	38
Figura 6 – Curvas de energia consumida pelo sistema	41
Figura 7 – Oscilador Mecânico não ideal.....	45
Figura 8 – Amplitudes em regime estacionário.....	61
Figura 9 – Fases em regime estacionário.....	61
Figura 10 – Energia consumida pela estrutura em regime estacionário	63
Figura 11 – Energia consumida pelo sistema massa-mola-amortecedor em regime estacionário	63
Figura 12 – Curva característica líquida do motor real	69
Figura 13 – Curva característica líquida adimensional	69
Figura 14 – Energia consumida pela estrutura e torque líquido.....	70
Figura 15 – Energia consumida pelo sistema e torque líquido	70
Figura 16 – Escolha do nível de torque – função afim ($\kappa = 1$).....	71
Figura 17 – Escolha do nível de torque – função exponencial ($\kappa = 2$)	72
Figura 18 – Escolha do nível de torque – motor real ($\kappa = 0$)	72
Figura 19 – Níveis de energia.....	73
Figura 20 – variáveis (u, u', ϕ, ϕ') – séries temporais; planos de fases.....	79
Figura 21 – variáveis (A, ϕ, ϕ, ϕ') – séries temporais; planos de fases.....	79
Figura 22 – variáveis (u, u', A, ϕ) – espaços de fases.....	80
Figura 23 – energias ($\hat{E}(\phi'), \hat{S}(\phi')$) – séries temporais; planos de fases.....	80
Figura 24 – Massas concentradas para o pórtico plano	81
Figura 25 – Modelo Matemático.	84
Figura 26 – Escolha do nível de torque – função afim ($\kappa = 1$).....	112
Figura 27 – Escolha do nível de torque – função exponencial ($\kappa = 2$)	112
Figura 28 – Escolha do nível de torque – motor real ($\kappa = 0$)	113
Figura 29 – Níveis de energia.....	113
Figura 30 – variáveis ($u_1, u'_1, u_2, u'_2, \phi, \Omega$) – séries temporais; planos de fases.	119
Figura 31 – variáveis ($A_1, \phi_1, A_2, \phi_2, \phi, \Omega$) – séries temporais; planos de fases.....	120
Figura 32 – variáveis ($u_1, u'_1, u_2, u'_2, \phi, \Omega$) – espaços de fases.....	121

Figura 33 – energias $(\hat{E}(\varphi), \hat{S}(\varphi))$ – séries temporais; planos de fases.	122
Figura 34 – (i) centro; (ii) foco estável; (iii) foco instável	159
Figura 35 – (i) nó próprio atrator; (ii) nó próprio repulsor.....	161
Figura 36 – (i) nó impróprio atrator; (ii) nó impróprio repulsor.	163
Figura 37 – (i) nó atrator; (ii) nó repulsor; (iii) sela.....	166
Figura 38 – Nó degenerado.....	167
Figura 39 – Classificação de sistemas lineares.....	168
Figura 40 – Caminhos de integração	173
Figura 41 — (a) Sistema de suspensão veicular; (b) Modelo físico.	189
Figura 42 — Relação entre os coeficientes (A,B)	196
Figura 43 – Séries temporais para oscilador mecânico pouco amortecido	198
Figura 44 – Retrato de fases para oscilador mecânico pouco amortecido.....	198
Figura 45 – Séries temporais para oscilador mecânico amortecido criticamente....	200
Figura 46 – Retrato de fases para oscilador mecânico amortecido criticamente	200
Figura 47 – Séries temporais para oscilador mecânico fortemente amortecido	202
Figura 48 – Retrato de fases para oscilador mecânico fortemente amortecido	202
Figura 49 – Séries temporais (posição) de osciladores mecânicos ideais	209
Figura 50 – Séries temporais (velocidades) de osciladores mecânicos ideais.....	209
Figura 51 – Retrato de fases para osciladores mecânicos ideais	210
Figura 52 – Fator de amplificação dinâmica para oscilador mecânico	213
Figura 53 – Fator de amplificação dinâmica para amortecimento fraco	213

Lista de Tabelas

Tabela 1 – Cálculo da energia consumida.....	38
Tabela 2 – Otimização da energia consumida pelo sistema.....	39
Tabela 3 – Estabilidade estacionária	40
Tabela 4 – Amplitudes máximas e mínimas	60
Tabela 5 – Taxas de amortecimento para estruturas civis.....	65
Tabela 6 – Parâmetros geométricos do oscilador mecânico	66
Tabela 7 – Propriedades do rotor do motor elétrico.....	67
Tabela 8 – Torque líquido do motor elétrico	68
Tabela 9 – Regressão Polinomial	68
Tabela 10 – Valores do motor.....	71
Tabela 11 – Parâmetros geométricos da estrutura.....	110
Tabela 12 – Propriedades do rotor do motor elétrico.....	111
Tabela 13 – Estabilidade da origem $\vec{0}$ em sistemas bidimensionais simples.....	168
Tabela 14 – Tipos de amortecimento para osciladores mecânicos	193

1 INTRODUÇÃO

Neste trabalho se estuda o comportamento dinâmico não linear de estruturas civis submetidas a vibrações de suportes, provocadas por uma fonte de energia.

A estrutura simples de pórtico plano é um elemento básico para estruturas mais complexas, como a de edifícios. A análise do respectivo modelo permite reduzi-la a um sistema mecânico composto por um corpo de massa m preso a uma mola de constante elástica k e a um amortecedor de constante c , como o apresentado na Figura 1.

Figura 1 – Oscilador mecânico amortecido

A fonte de energia que excita o sistema é ideal quando o seu movimento é regido por uma função puramente temporal (FERREIRA, 2007), não sendo afetada pelo movimento da estrutura (KONONENKO, 1969); esta é uma característica de fontes com fornecimento ilimitado de potência.

Um exemplo típico de solicitação ideal são as ondas mecânicas conhecidas por sismos ou terremotos, que são provocadas pelo contato entre as placas tectônicas que constituem a crosta terrestre e que estão em constante movimento em virtude de forças internas provenientes de camadas médias do magma. Como este movimento ocorre independente dos movimentos externos à crosta terrestre, a fonte de energia geradora das ondas sísmicas é ideal.

Por outro lado, a fonte de energia não ideal possui limitação no fornecimento de potência; neste caso, parte da energia fornecida pela fonte é consumida para vencer as próprias resistências, o que altera seu funcionamento. Ocorre, portanto, uma interação entre o movimento da estrutura e o movimento da fonte de energia, de modo que um altera reciprocamente o outro (KONONENKO, 1969).

Tais situações são típicas de fontes com pequena capacidade de fornecer energia e se tornam mais importantes nas situações de ressonância em que esta energia é usada para movimentos de grande amplitude do sistema. É o caso clássico da captura na ressonância de vibrações de fundações induzidas por máquinas rotativas conhecido por Efeito Sommerfeld.

Estruturas utilizadas como fundações de máquinas são exemplos de sistemas não-ideais, pois somente parte da energia fornecida pelo motor é absorvida pela estrutura; o restante provoca a alteração do movimento do motor.

1.1 Motivação e Justificativa

O comportamento ideal de sistemas vibratórios lineares é bem conhecido na atual literatura, mas há poucos resultados sobre os não lineares ou os não-ideais. Por isto, o estudo de vibrações de sistemas não-ideais tem sido considerado um grande desafio na pesquisa teórica e prática da engenharia.

Geralmente, sistemas vibratórios não-ideais são aqueles para os quais a potência disponível é limitada. O comportamento do sistema vibratório se afasta do caso ideal à medida que a potência suprida torna-se mais limitada. Para sistemas dinâmicos não-ideais, deve-se adicionar uma equação que descreve como a fonte de energia passa essa energia às equações que governam o correspondente sistema dinâmico ideal.

Assim, como uma primeira característica, o sistema vibratório não-ideal tem um grau de liberdade a mais que seu paralelo ideal. O primeiro tipo de problema não-ideal a aparecer na literatura atual é o Efeito Sommerfeld (SOMMERFELD; 1902), comentado por Kononenko (1969).

Várias contribuições ao estudo de problemas não-ideais foram apresentadas em livros (BLEKMAN, 1953; DIMENTBERG, 1988; EVAN-IWANOWSKI, 1976) e trabalhos por Dimentberg e colaboradores (DIMENTBERG *et al*, 1997). Nayfeh e Mook (1979) dão uma revisão completa de diferentes abordagens ao problema. Recentemente, revisões completas das diferentes teorias sobre sistemas vibratórios não-ideais foram discutidas e apresentadas (BALTHAZAR *et al*, 1999; 2001).

Recentemente, Chavarette (2005) em sua tese de doutorado demonstrou a dinâmica não ideal para o modelo de Hodgkin-Huxley (HODGKIN; HUXLEY, 1952), dando uma abordagem de sistemas não ideais para sistemas fisiológicos.

1.2 Objetivos e Metodologia

Neste trabalho estudou-se o movimento de uma estrutura civil representada pelo pórtico plano da Figura 2 composto por dois pilares de altura h e de uma viga de comprimento ℓ .

Neste tipo de estrutura, ocorrem nas barras deslocamentos transversais induzidos pela própria flexão. Este efeito é um exemplo de não linearidade geométrica presente em estruturas.

Figura 2 – Pórtico plano sob excitação de suportes não-ideal

Embora a figura tenha sido desenhada para o caso em que os pilares são engastados na base e a viga simplesmente apoiada, a formulação é desenvolvida de modo a permitir outras condições de apoio.

Este pórtico pode ser considerado como a molécula básica geradora de outras estruturas não lineares do ponto de vista geométrico; um edifício pode ser considerado uma justaposição de pórticos.

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dinâmico não-linear de estruturas civis cuja estrutura atômica é o pórtico quando submetidas à excitação não-ideal de suportes.

Após a determinação dos deslocamentos executados pelos nós da estrutura, foram derivadas as velocidades e as funções de energia para a aplicação das equações diferenciais de Euler-Lagrange a fim de determinar as respectivas equações de movimento.

A evolução das amplitudes do sistema é determinada por uma substituição de variáveis baseada no método de Kryloff, Bogoliuboff (NAYFEH, 2004) e Kononenko. Após a análise da estabilidade do sistema em função dos parâmetros de controles, são efetuadas as respectivas integrações numéricas.

1.3 Estrutura da Tese

Nesta tese, modelos físicos simples aplicáveis a estruturas civis ou mecânicas são apresentados em grau crescente de complexidade, partindo-se de fonte de energia ideal antes de se desenvolver o caso de solicitações não ideais.

No capítulo 2 são apresentados alguns modelos de osciladores mecânicos e sintetizados resultados existentes na literatura para sistemas conservativos e sistemas dissipativos com amortecimento linear. Em seguida, é adicionada uma fonte de energia ideal com carregamento harmônico. A análise destes modelos permitiu estabelecer restrições aos valores de alguns parâmetros para uso nos modelos mais avançados.

As características matemáticas de uma fonte não ideal de energia, que interage mutuamente com o sistema oscilatório, são apresentadas com uma formulação aplicável a sistemas mais gerais.

Os métodos de Kryloff Bogoliuboff e Mitropolsky para determinar a amplitude de oscilações não lineares em regime permanente foram unificados e aprimorados para as oscilações não conservativas de interesse neste trabalho.

A aplicação destas ferramentas permitiu restringir ainda mais os valores de parâmetros do modelo, que, no capítulo 3, é acoplado a um motor de potência limitada que produz uma excitação não ideal de suportes.

Neste caso, o sistema dinâmico contém uma equação diferencial adicional, a qual rege o movimento da fonte de energia não ideal. Com o auxílio das equações de Lagrange obtêm-se as equações de movimento, que são algebricamente acopladas entre si.

O objetivo principal do capítulo 3 é utilizar os mesmos parâmetros obtidos nos capítulo anterior para determinar o nível de energia a ser introduzido no sistema através do torque líquido imposto ao motor, cujo rotor gira com velocidade angular quase constante.

No capítulo 4 os elementos anteriores são reunidos para analisar o movimento dos nós de um pórtico plano submetido a uma excitação de suportes não ideal. Este modelo é um exemplo prático para representar o efeito que a vibração de uma máquina pode gerar na base de uma estrutura civil.

Considerando os resultados obtidos nos capítulos anteriores, foram efetuadas escolhas de parâmetros para realizar integrações numéricas do sistema nas situações de interesse para a Engenharia, seja de Estruturas ou Mecânica.

O capítulo 5 contém os resultados obtidos neste trabalho e sugestões para aprofundar ainda mais este conhecimento.

O final do texto em apêndices contém um conjunto de três capítulos sobre o estado da arte que fornecem um extenso embasamento teórico necessário para a compreensão das aplicações efetuadas nos capítulos iniciais da tese, mais especificamente sobre elementos de matemática, física e engenharia e sobre a conceituação dos tipos de excitação de suportes.

No capítulo 7 é apresentada a conceituação matemática da teoria das equações diferenciais e dos Sistemas Dinâmicos. São fornecidas ferramentas para analisar a estabilidade de um sistema dinâmico e elementos para efetuar uma escolha de parâmetros adequada à realidade física do modelo em estudo.

O capítulo 8 é dedicado à conceituação física da transição da mecânica vetorial para a mecânica analítica, e uma demonstração matemática das equações de Lagrange, necessárias para a obtenção das equações diferenciais de movimento para problemas mais sofisticados apresentados neste trabalho, nos quais a aplicação das Leis de Newton é muito trabalhosa e, eventualmente, inviável.

O modelo físico do oscilador mecânico simples é apresentado no capítulo 9, em que as equações de Lagrange são utilizadas para deduzir as equações

diferenciais de movimento. A teoria qualitativa de equações diferenciais ordinárias é utilizada para estudar a estabilidade dinâmica e estabelecer os parâmetros de controle do problema e os valores que estes podem assumir para que as órbitas do sistema apresentem o comportamento desejado.

2 ANÁLISE DE OSCILAÇÕES MECÂNICAS

Para introduzir os principais elementos da análise dinâmica de estruturas de pórtico, apresentam-se modelos físicos em graus crescentes de complexidade.

2.1 Oscilações conservativas

O modelo primitivo para o estudo de oscilações é o sistema mecânico composto por um corpo de massa m preso apenas a uma mola de constante elástica k , conforme é apresentado na Figura 3:

Figura 3 – Oscilador mecânico simples

O movimento do corpo é determinado pela evolução da coordenada q , que é descrita pela equação diferencial:

$$m \cdot \ddot{q} + k \cdot q = 0 \quad (2.1-1)$$

Este sistema mecânico é conservativo¹, e o corpo de massa m oscila indefinidamente com a frequência natural circular ω definida por:

$$\omega \doteq \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1-2)$$

Nestas condições, o movimento se desenvolve com amplitude $a(t)$ e ângulo de fase $\theta(t)$ constantes; os valores dependem das condições iniciais de posição $q(t_0) = q_0$ e velocidade $\dot{q}(t_0) = \dot{q}_0$ do movimento:

$$a_0 \doteq \sqrt{q_0^2 + \frac{\dot{q}_0^2}{\omega^2}} \quad \tan(-\theta_0) = \frac{\dot{q}_0}{q_0 \cdot \omega} \quad (2.1-3)$$

¹ Ver apêndice com o estado da arte

A evolução temporal da coordenada generalizada $q(t)$ pode ser escrita de duas formas, de acordo com a escolha da função trigonométrica oscilatória:

$$q(t) = a_0 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi_0) \quad (2.1-4)$$

$$q(t) = a_0 \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta_0) \quad (2.1-5)$$

As expressões (2.1-4) e (2.1-5) são equivalentes; as respectivas fases são relacionadas por:

$$\phi_0 - \theta_0 = \frac{\pi}{2} \quad (2.1-6)$$

2.2 Oscilações dissipativas

Ao acoplar ao sistema um amortecedor (Figura 1), este deixa de ser conservativo, pois ocorrem perdas de energia devido à dissipação causada pelo amortecedor.

No caso em que a força de amortecimento, oposta ao movimento, é proporcional à velocidade, o sistema é governado pela equação:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = 0 \quad (2.2-1)$$

Neste caso, sendo ainda linear, o sistema admite solução analítica fechada, cujo comportamento estrutural difere significativamente conforme varia a constante de amortecimento c do sistema.

A taxa de amortecimento ξ é definida² conforme o valor de c que provoca mudança na tipologia da solução:

$$\xi \doteq \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega}$$

Quando $\xi > 1$, o amortecimento é forte a ponto de cessarem as oscilações, e o movimento decair rapidamente até o repouso, sem oscilar. Esta situação é o desejado no projeto de sistemas de suspensão veicular, em que o retorno ao equilíbrio precisa ocorrer rapidamente, sem oscilar (VILLATE, 2006).

² A demonstração que induz a definição da taxa de amortecimento é apresentada no apêndice

Quando $\xi < 1$, o sistema é dito de baixo amortecimento, em que as oscilações decaem lentamente; Do ponto de vista do estudo de controle de oscilações, esta é a situação desejada:

$$a(t) = a_D \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t}$$

A oscilação se desenvolve com uma frequência inferior à natural (2.1-2):

$$\omega_D \doteq \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega$$

O ângulo de fase é uma constante. Os valores deste e da amplitude máxima são determinados pelas condições iniciais do movimento:

$$a_D \doteq \sqrt{q_0^2 + \left(\frac{\dot{q}_0}{\omega_D} + \frac{\xi \cdot \omega}{\omega_D} \cdot q_0 \right)^2} \quad \tan(-\theta_D) = \frac{\dot{q}_0}{\omega_D \cdot q_0} + \frac{\xi \cdot \omega}{\omega_D}$$

Conforme a escolha da função trigonométrica oscilatória, a evolução temporal da coordenada $q(t)$ pode ser escrita de duas maneiras, sendo que as fases permanecem relacionadas por uma expressão análoga à (2.1-6):

$$q(t) = a_D \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t + \phi_D) \quad (2.2-2)$$

$$q(t) = a_D \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t + \theta_D) \quad (2.2-3)$$

As expressões (2.2-2) e (2.2-3) podem ser reescritas em uma forma mais genérica, para mostrar o movimento de sistemas mecânicos que se desenvolvem com ângulo de fase constante e amplitude variável

$$q(t) = a(t) \cdot \sin(\omega_D \cdot t + \phi_D) \quad (2.2-4)$$

$$q(t) = a(t) \cdot \cos(\omega_D \cdot t + \theta_D) \quad (2.2-5)$$

Somente no caso conservativo, em que $\xi = 0$, as amplitudes do sistema permanecem estáveis (constantes e iguais a a_0); no entanto, o que ocorre na prática são os sistemas não conservativos, nos quais as amplitudes decaem em decorrência da perda de energia.

Conclui-se que em sistemas puramente lineares como o (2.2-1) não é possível manter oscilações auto-sustentáveis (BOGOLIUBOFF; MITROPOLSKY, 1961). Alguma fonte de energia precisa ser introduzida no sistema, o que fará com que o sistema deixe de ser linear.

2.3 Oscilações induzidas por carregamento harmônico

Pode-se introduzir no oscilador linear amortecido uma excitação ideal de suportes, que pode ser provocada por uma vibração sísmica, por exemplo, ou por ondulações da pista, sendo representado pelo modelo da Figura 4:

Figura 4 – Oscilador ideal

O deslocamento $s(t)$ produz um carregamento definido por uma função puramente temporal, com amplitude $p_0 \doteq m \cdot \Omega^2 \cdot s_0$ frequência Ω constantes:

$$p(t) \doteq p_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Com isto, o sistema original (2.2-1) deixa de ser linear:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = p(t) \quad (2.3-1)$$

Sendo a força de excitação uma função trigonométrica, o sistema ainda é analiticamente integrável. A relação entre a frequência Ω do carregamento e a frequência natural circular ω do oscilador define o parâmetro β de ressonância externa:

$$\beta \doteq \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.3-2)$$

Em regime permanente, o sistema mecânico se desloca conforme a solução particular³. No caso em que o sistema opera fora da ressonância, esta solução pode ser escrita como uma função semelhante à (2.1-4):

$$q_p(t) = D \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \sin(\Omega \cdot t - \phi_p) \quad (2.3-3)$$

³ No apêndice são mostradas as relações que permitem determinar as equações de movimento

A expressão (2.3-3) mostra um movimento que se desenvolve com amplitude e ângulo de fase constante, definido por:

$$\phi_p \doteq \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{1 - \beta^2} \right)$$

O fator de amplificação dinâmica⁴ mede o efeito do carregamento harmônico na amplitude do movimento do sistema mecânico em regime permanente:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2}} \quad (2.3-4)$$

A análise da variação da função (2.3-4) e o estudo de otimização produziu uma restrição às taxas de amortecimento admissíveis para a existência de regime estacionário:

$$\xi < \bar{\xi}_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071 \quad (2.3-5)$$

2.4 Oscilações não lineares gerais

Soluções aproximadas para movimentos oscilatórios não-lineares podem ser construídas por métodos de variação de parâmetros para sistemas governados pela equação diferencial (2.3-1), que pode ser reescrita na forma adotada por Kryloff e Bogoliuboff (1949) e Bogoliuboff e Mitropolsky (1965):

$$\frac{d^2 q}{dt^2} = \bar{F} \left(q, \frac{dq}{dt}, t \right) \quad (2.4-1)$$

No caso do sistema conservativo (e linear) representado pela equação (2.1-1) esta função reduz-se a:

$$\bar{F}(q, \dot{q}, t) = -\omega^2 \cdot q$$

Neste caso, a solução foi apresentada pelas expressões (2.1-4) ou (2.1-5), em que a amplitude a_0 e os ângulos de fase (θ_0, ϕ_0) são constantes calculadas pelas (2.1-3). As diferenciações de (2.1-4) e (2.1-5) produzem, respectivamente:

$$\dot{q}(t) = -a_0 \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta_0) \quad (2.4-2)$$

$$\dot{q}(t) = a_0 \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi_0) \quad (2.4-3)$$

⁴ A demonstração que induz esta definição é apresentada no apêndice.

A diferenciação de ambas (2.4-2) e (2.4-3) produz igualmente:

$$\ddot{q} = -\omega^2 \cdot q(t)$$

Baseado neste resultado, o sistema (2.4-1) pode ser convenientemente escrito com outra notação, separando a parte conservativa da não conservativa, representada pela função $F(q, \dot{q}, t)$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \omega^2 \cdot q = F\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) \quad (2.4-4)$$

Com esta definição, resulta que:

$$\bar{F}(q, \dot{q}, t) = -\omega^2 \cdot q + F(q, \dot{q}, t) \quad (2.4-5)$$

O sistema (2.4-4) será conservativo se $F(q, \dot{q}, t) = 0$, tornando-se equivalente à equação (2.1-1), de modo que o movimento se desenvolverá com amplitudes constantes.

Pode-se, ainda, separar o sistema (2.1-1) em uma parte linear e outra não linear, representada pela função $P(q, \dot{q}, t)$

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \frac{dq}{dt} + \omega^2 \cdot q = P\left(q, \frac{dq}{dt}, t\right) \quad (2.4-6)$$

A oscilação será linear se $P(q, \dot{q}, t) = 0$, situação estudada no item 2.2. Em qualquer caso, a equação (2.5-22) mantém os elementos de dissipação de energia. No caso de oscilações harmônicas, o sistema já deixa de ser linear, pois:

$$P(q, \dot{q}, t) = P(t) = P_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \neq 0$$

E a força de excitação gerada pela fonte de energia é definida por uma função puramente temporal de frequência Ω e amplitude P_0 . Sendo esta amplitude suficientemente pequena, a equação (2.3-1) pode ser reescrita considerando que existe $\varepsilon > 0$ pequeno de modo que $P(t) = \varepsilon \cdot p(t)$:

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \frac{dq}{dt} + \omega^2 \cdot q = \varepsilon \cdot p\left(q, \frac{dq}{dt}\right) \quad (2.4-7)$$

Uma oscilação é quase linear quando existe um parâmetro ε em sua equação diferencial de modo que a atribuição do valor $\varepsilon = 0$ provoca a degeneração da equação não linear em uma linear com coeficientes constantes (BOGOLIUBOFF; MITROPOLSKY, 1961).

2.5 Cálculo de amplitudes em oscilações

Seja ε um valor pequeno que represente o desvio do sistema (2.4-1) em relação ao seu linear (2.1-1). Escreve-se:

$$F(q, \dot{q}, t) = \varepsilon \cdot f(q, \dot{q}, t) \quad (2.5-1)$$

Com esta notação, a função f contém forças dissipativas e outros elementos não lineares em q , a serem obtidos conforme o específico problema que se for estudar. Assumindo-se a independência do parâmetro temporal t , (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949), a equação diferencial (2.4-4) reduz-se a:

$$\boxed{\frac{d^2 q}{dt^2} + \omega^2 \cdot q = \varepsilon \cdot f\left(q, \frac{dq}{dt}\right)} \quad (2.5-2)$$

A equação (2.5-2) descreve o movimento de osciladores quase lineares, nos quais esta (pequena) não linearidade poderá ser considerada como uma leve perturbação do sistema linear, proporcional ao parâmetro ε (BOGOLIUBOFF; MITROPOLSKY, 1961).

Neste caso, a amplitude e o ângulo de fase são funções que variam lentamente (NAYFEH; MOOK, 2004) com o tempo. Para isto, formas mais gerais em relação às adaptações (2.2-4) e (2.2-5) são adotadas:

$$q(t) = a(t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi(t)) \quad (2.5-3)$$

$$q(t) = a(t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta(t)) \quad (2.5-4)$$

As formas (2.5-3) e (2.5-4) foram utilizadas por Kryloff e Bogoliuboff (1949) e Bogoliuboff e Mitropolsky (1961), respectivamente, para obter a evolução temporal da amplitude $a(t)$ e dos ângulos de fase $\{\phi(t), \theta(t)\}$ variáveis para sistemas não lineares gerais.

2.5.1 Método de Kryloff – Bogoliuboff

Kryloff e Bogoliuboff (1949) desenvolveram uma técnica para determinar a solução da equação (2.5-2) para qualquer aproximação em ε (NAYFEH, 2004). Eles utilizaram para os deslocamentos e velocidades as funções:

$$q(t) = a(t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi(t)) \quad (2.5-3)$$

$$\dot{q}(t) = a(t) \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi(t)) \quad (2.5-5)$$

A diferenciação da expressão (2.5-3) fornece:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{da}{dt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + a \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) + a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

Sendo a evolução temporal das grandezas (a, ϕ) um processo quase estático, pode-se impor a igualdade entre esta expressão e a forma (2.5-5), resultando em:

$$\frac{da}{dt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) + a \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) = 0 \quad (2.5-6)$$

A diferenciação da expressão (2.5-5) produz a aceleração:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = \frac{da}{dt} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) - a \cdot \omega \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) - a \cdot \omega^2 \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \quad (2.5-7)$$

Substituindo-se na equação (2.5-2), resulta:

$$\frac{da}{dt} \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) - a \cdot \omega \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) = \varepsilon \cdot f[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)]$$

Esta e a equação (2.5-6) formam um sistema algébrico nas variáveis $(\dot{a}, \dot{\phi})$ e que pode ser colocado na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \sin(\omega \cdot t + \phi) & \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ \cos(\omega \cdot t + \phi) & -\sin(\omega \cdot t + \phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{da}{dt} \\ a \cdot \frac{d\phi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \end{bmatrix}$$

A matriz tem determinante -1 ; a inversão do sistema algébrico produz:

$$\begin{bmatrix} \frac{da}{dt} \\ a \cdot \frac{d\phi}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin(\omega \cdot t + \phi) & \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ \cos(\omega \cdot t + \phi) & -\sin(\omega \cdot t + \phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \end{bmatrix}$$

Transforma-se a equação diferencial (2.5-2) de segunda ordem na variável $q(t)$ em um sistema de equações diferenciais ordinárias nas variáveis (a, ϕ) :

$$\frac{da}{dt} = \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a \cdot \omega} \cdot f[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi)$$

Estas e a equação (2.5-3) são exatamente equivalentes à equação (2.5-2), pois nenhuma aproximação foi ainda introduzida (NAYFEH; MOOK, 2004). Sendo

assim, elas podem ser reescritas conforme a notação (2.5-14), usando a relação (2.5-1):

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\omega} \cdot F[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \quad (2.5-8)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \quad (2.5-9)$$

2.5.2 Método de Bogoliuboff – Mitropolsky

Bogoliuboff e Mitropolsky (1961) ampliaram esta metodologia, enquanto que Mitropolsky (1965) a estendeu para o caso de vibrações não-estacionárias (NAYFEH, 2004).

Foram utilizadas para os deslocamentos e velocidades as funções:

$$q(t) = a(t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \quad (2.5-4)$$

$$\dot{q}(t) = -a(t) \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \quad (2.5-10)$$

A diferenciação da expressão (2.5-4) fornece as velocidades:

$$\frac{dq}{dt} = \frac{da}{dt} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) - a \cdot \left(\omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

$$\frac{dq}{dt} = -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) + \frac{da}{dt} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) - a \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

Considerando-se que a evolução temporal das grandezas (a, θ) é um processo quase estático, pode-se impor que os respectivos termos são nulos:

$$\frac{da}{dt} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) - a \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) = 0 \quad (2.5-11)$$

A diferenciação da expressão (2.5-10) fornece a aceleração:

$$\frac{d^2q}{dt^2} = -\frac{da}{dt} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) - a \cdot \omega \cdot \left(\omega + \frac{d\theta}{dt} \right) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$$

Substituindo-se na equação (2.5-2), resulta:

$$-\frac{da}{dt} \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) - a \cdot \omega \cdot \frac{d\theta}{dt} \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \varepsilon \cdot f[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)]$$

Esta e a equação (2.5-11) formam um sistema algébrico nas variáveis $(\dot{a}, \dot{\theta})$, que podem ser colocadas na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot t + \theta) & -\sin(\omega \cdot t + \theta) \\ \sin(\omega \cdot t + \theta) & \cos(\omega \cdot t + \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \frac{da}{dt} \\ a \cdot \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \end{bmatrix}$$

A matriz tem determinante unitário; a inversão do sistema algébrico produz:

$$\begin{bmatrix} \frac{da}{dt} \\ a \cdot \frac{d\theta}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\omega \cdot t + \theta) & \sin(\omega \cdot t + \theta) \\ -\sin(\omega \cdot t + \theta) & \cos(\omega \cdot t + \theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ -\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \end{bmatrix}$$

Transforma-se a equação diferencial (2.5-2) de segunda ordem na variável $q(t)$ em um sistema de equações diferenciais ordinárias nas variáveis (a, θ) :

$$\frac{da}{dt} = -\frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{a \cdot \omega} \cdot f[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta)$$

Estas equações podem ser reescritas conforme a notação (2.5-14), usando a relação (2.5-1):

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{\omega} \cdot F[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \quad (2.5-12)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \quad (2.5-13)$$

2.5.3 Relação entre os métodos de Kryloff – Bogoliuboff – Mitropolsky

Os métodos de Kryloff, Bogoliuboff e Mitropolsky foram desenvolvidos para sistemas quase conservativos, ou que diferiam de um conservativo pela função $F(q, \dot{q})$ definida em (2.5-14), ou por uma perturbação ε a ela relacionada por (2.5-1):

$$\ddot{q} + \omega^2 \cdot q = F(q, \dot{q}) \quad F(q, \dot{q}) = \varepsilon \cdot f(q, \dot{q}) \quad (2.5-14)$$

As formulações (2.5-3), (2.5-5) e (2.5-4), (2.5-10) dos métodos de amplitudes indicam as posições e velocidades como funções de uma amplitude e um ângulo de fase que são variáveis com o tempo:

$$q(t) = a(t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi(t)) \quad \dot{q}(t) = a(t) \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi(t))$$

$$q(t) = a(t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta(t)) \quad \dot{q}(t) = -a(t) \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta(t))$$

As fases (ϕ, θ) estão defasadas por uma expressão análoga à (2.1-6):

$$\phi_0 - \theta_0 = \frac{\pi}{2}$$

Por diferenciação, conclui-se que as taxas de variação $(\dot{\phi}, \dot{\theta})$ são iguais:

$$\phi - \theta = \frac{\pi}{2} \quad \frac{d\phi}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \quad (2.5-15)$$

A reunião destas igualdades permite obter:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{1}{\omega} \cdot F[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ &= -\frac{1}{\omega} \cdot F[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \end{aligned} \quad (2.5-16)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \\ &= -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) = \frac{d\theta}{dt} \end{aligned} \quad (2.5-17)$$

Estas relações podem ser reescritas de forma mais compacta, usando as notações para as fases totais:

$$\Phi \doteq \omega \cdot t + \phi \quad \Theta \doteq \omega \cdot t + \theta \quad (2.5-18)$$

As equações (2.5-16) e (2.5-17) permitem que se obtenha a relação entre os métodos de Kryloff, Bogoliuboff e Mitropolsky, de acordo com a notação (2.5-18):

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi = -F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \sin \Theta \quad (2.5-19)$$

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi = F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \quad (2.5-20)$$

2.5.4 Procedimento para sistemas não lineares

Para sistemas não conservativos em que a dissipação de energia é um termo linear, a diferença para um sistema puramente linear é expressa por uma função $P(q, \dot{q})$ definida em (2.4-6). Adaptando-se ao caso independente do tempo t , se obtém:

$$\ddot{q} + \omega^2 \cdot q + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{q} = P(q, \dot{q}) \quad P(t) = \varepsilon \cdot p(t) \quad (2.5-21)$$

A comparação das expressões (2.5-14) e (2.5-21) permite obter:

$$F(q, \dot{q}) = P(q, \dot{q}) - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{q} \quad f(q, \dot{q}) = p(q, \dot{q}) - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{q} \quad (2.5-22)$$

Substituindo-se a expressão (2.5-22) nas equações (2.5-8), (2.5-9) e (2.5-12), (2.5-13), obtêm-se formulações mais adequadas ao problema em estudo:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \frac{1}{\omega} \cdot P[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot a \cdot [\cos(\omega \cdot t + \phi)]^2 \end{aligned} \quad (2.5-23)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot P[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \\ + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \end{aligned} \quad (2.5-24)$$

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = -\frac{1}{\omega} \cdot P[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \\ = -2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot a \cdot [\sin(\omega \cdot t + \theta)]^2 \end{aligned} \quad (2.5-25)$$

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot P[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \\ - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \end{aligned} \quad (2.5-26)$$

As equações (2.5-23), (2.5-24) ou (2.5-25), (2.5-26) são equivalentes às equações (2.5-8), (2.5-9) ou (2.5-12), (2.5-13), tendo em vista a relação existente entre elas.

2.6 Oscilações periódicas

Busca-se examinar a periodicidade das equações (2.5-19) e (2.5-20). Conforme obtido em (2.5-15), as taxas de variação $(\dot{\phi}, \dot{\theta})$ são iguais. Conseqüentemente, as taxas de variação $(\dot{\Phi}, \dot{\Theta})$ das fases totais definidas conforme (2.5-18) são iguais entre si e iguais à frequência natural circular do oscilador:

$$\frac{d\Phi}{dt} = \frac{d\Theta}{dt} = \omega \quad (2.6-1)$$

Ambos os lados das equações (2.5-19) e (2.5-20) contêm funções periódicas com relação ao tempo (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949), admitindo o período:

$$T = \frac{2 \cdot \pi}{\omega} \quad (2.6-2)$$

Além disto, conforme explicitado nas igualdades (2.5-16) e (2.5-17), as grandezas $(\dot{a}, \dot{\phi})$ ou $(\dot{a}, \dot{\theta})$ são diretamente proporcionais às funções (2.5-19) e (2.5-20). Pretende-se analisar a situação em que $F(q, \dot{q})$ for suficientemente pequena, podendo ser considerada como uma leve perturbação:

$$F(q, \dot{q}) = \varepsilon \cdot f(q, \dot{q})$$

Neste caso, as grandezas (a, ϕ) ou (a, θ) serão funções que variam lentamente com o tempo durante o período T .

2.6.1 Aproximações de primeira ordem em séries trigonométricas

Como primeira aproximação, as funções (a, ϕ) são consideradas como constantes durante o período T . A expansão em séries de Fourier das expressões $F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi$ e $F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi$ produz:

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi = \frac{1}{2} \cdot K_0(a) + \sum_{n=1}^{\infty} [K_n(a) \cdot \cos(n \cdot \Phi) + L_n(a) \cdot \sin(n \cdot \Phi)]$$

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi = \frac{1}{2} \cdot P_0(a) + \sum_{n=0}^{\infty} [P_n(a) \cdot \cos(n \cdot \Phi) + Q_n(a) \cdot \sin(n \cdot \Phi)]$$

O primeiro tipo dos coeficientes de Fourier é obtido de acordo com a teoria de séries de funções trigonométricas:

$$K_n(a) = \frac{1}{T/2} \cdot \int_0^T F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot \cos(n \cdot \Phi) \cdot dt$$

Esta expressão pode ser re-escrita substituindo-se o período dado por (2.6-2) e uma mudança de variáveis definida conforme a relação (2.6-1):

$$K_n(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot \cos(n \cdot \Phi) \cdot d\Phi$$

Os outros coeficientes são calculados de maneira análoga.

$$L_n(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot \sin(n \cdot \Phi) \cdot d\Phi$$

$$P_n(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot \cos(n \cdot \Phi) \cdot d\Phi$$

$$Q_n(a) = \frac{1}{\pi} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot \sin(n \cdot \Phi) \cdot d\Phi$$

Em particular, o primeiro dos coeficientes de Fourier para as expressões $F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi$ e $F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi$ são:

$$\bar{K}_0(a) \doteq \frac{1}{2} \cdot K_0(a) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-3)$$

$$\bar{P}_0(a) \doteq \frac{1}{2} \cdot P_0(a) = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-4)$$

As equações (2.5-8) e (2.5-9) podem ser representadas tendo em conta a expansão de Fourier das respectivas funções:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\omega} \cdot \bar{K}_0(a) + \frac{1}{\omega} \cdot \sum_{n=1}^{\infty} \{K_n(a) \cdot \cos[n \cdot (\omega \cdot t + \phi)] + L_n(a) \cdot \sin[n \cdot (\omega \cdot t + \phi)]\}$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\omega \cdot a} \cdot \bar{P}_0(a) - \frac{1}{\omega \cdot a} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \{P_n(a) \cdot \cos[n \cdot (\omega \cdot t + \phi)] + Q_n(a) \cdot \sin[n \cdot (\omega \cdot t + \phi)]\}$$

A integração estas expressões entre o intervalo $[t, t+T]$ é feita considerando-se que a amplitude e a fase são constantes neste intervalo, gerando uma aproximação em senos e cossenos de primeira ordem:

$$\frac{a(t+T) - a(t)}{T} = -\frac{1}{\omega} \cdot \bar{K}_0(a(t)) \quad \frac{\phi(t+T) - \phi(t)}{T} = \frac{1}{\omega \cdot a(t)} \cdot \bar{P}_0(a(t))$$

Sendo pequenos os incrementos $a(t+T) - a(t)$ e $\phi(t+T) - \phi(t)$, (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949), suas variações são substituídas pelas respectivas derivadas:

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{\omega} \cdot \bar{K}_0(a) \quad \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{\omega \cdot a} \cdot \bar{P}_0(a)$$

A substituição dos coeficientes de Fourier (2.6-3) e (2.6-4) nestas últimas relações produz:

$$\boxed{\frac{da}{dt} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi} \quad (2.6-5)$$

$$\boxed{\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi} \quad (2.6-6)$$

As equações diferenciais (2.6-5) e (2.6-6) fornecem as funções amplitude $a(t)$ e fase $\phi(t)$ que compõem uma primeira aproximação para a solução da equação diferencial (2.5-2) (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949).

Relações análogas para o procedimento adotado por Bogoliuboff e Mitropolsky (1961) podem ser obtidas tendo em vista as relações (2.5-19) e (2.5-20) e efetuando-se mudança de variáveis definida conforme a relação (2.6-1):

$$\boxed{\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta} \quad (2.6-7)$$

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta} \quad (2.6-8)$$

Finalmente, as relações (2.6-5), (2.6-6), (2.6-7) e (2.6-8) podem também ser escritas nos termos da função original $\bar{F}(q, \dot{q})$ que define o sistema dinâmico mais geral (2.1-1), em que vale a relação (2.4-5):

$$F(q, \dot{q}) = \bar{F}(q, \dot{q}) + \omega^2 \cdot q$$

Considerando-se a nova função, tem-se que:

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) = \bar{F}(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) + \omega^2 \cdot a \cdot \sin \Phi \quad (2.6-9)$$

$$F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) = \bar{F}(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) + \omega^2 \cdot a \cdot \cos \Theta \quad (2.6-10)$$

As funções seno e cosseno diferem apenas de uma defasagem⁵ de $\frac{\pi}{2}$, de modo que produzem regiões de mesma área no intervalo $\{\Phi, \Theta\} \subset [0, 2 \cdot \pi]$ do ciclo completo. Multiplicadas entre si, produzem áreas simétricas e de sinais opostos, resultando em uma integral nula; elevadas ao quadrado produzem a integral de meio ciclo:

$$\int_0^{2\pi} (\sin \Phi)^2 \cdot d\Phi = \int_0^{2\pi} (\cos \Theta)^2 \cdot d\Theta = \pi \quad \int_0^{2\pi} \sin \Phi \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi = 0 \quad (2.6-11)$$

As relações (2.6-9) e (2.6-10) são substituídas nas expressões anteriores considerando-se as propriedades (2.6-11):

⁵ Esta demonstração está no apêndice

$$\frac{da}{dt} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-12)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-13)$$

$$\frac{da}{dt} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta \quad (2.6-14)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \quad (2.6-15)$$

2.6.2 Aproximações de primeira ordem em ϵ

As relações (2.6-12), (2.6-14) e (2.6-13), (2.6-15) fornecem a velocidade e a frequência da fase como funções (aproximadas) da amplitude do movimento. Tendo como inspiração as notações (2.5-18), definem-se novas variáveis, denominadas por Nayfeh (2004) de fase de rápida rotação⁶:

$$\psi \doteq \omega \cdot t + \phi$$

$$\vartheta \doteq \omega \cdot t + \theta$$

Com estas definições, as equações {(2.6-6); (2.6-8)} para os ângulos de fase podem ser reescritas e agrupadas considerando-se ainda a relação (2.5-20):

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi = F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta$$

Resulta:

$$\frac{d\psi}{dt} = \omega - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi$$

$$\frac{d\vartheta}{dt} = \omega - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$$

Efetuada-se, onde necessário, as permutações de (Φ, Θ) por (ψ, ϑ) , conclui-se que as taxas de variação $(\dot{\psi}, \dot{\vartheta})$ são iguais:

$$\frac{d\psi}{dt} = \frac{d\vartheta}{dt} \doteq \Omega(a)$$

⁶ Rapidly rotating phase

Estas definições permitem obter uma função $\Omega(a)$, que mede a frequência ψ da fase de rápida rotação, igualmente definível por uma das expressões:

$$\Omega(a) = \omega - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi$$

$$\Omega(a) = \omega - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$$

Na situação em que $F(q, \dot{q})$ puder ser considerada como uma leve perturbação do sistema conservativo utiliza-se a relação (2.5-1) para transformar estas equações:

$$\Omega(a) = \omega - \frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} f(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi$$

$$\Omega(a) = \omega - \frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} f(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$$

Uma relação direta entre a amplitude e a frequência $\psi = \Omega(a)$ da fase de rápida rotação pode ser obtida elevando-se à segunda potência os termos da equação (2.6-11):

$$\begin{aligned} [\Omega(a)]^2 &= \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} f(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega)^2} \cdot \left[\int_0^{2\pi} f(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \right]^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} [\Omega(a)]^2 &= \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} f(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \\ &\quad + \frac{\varepsilon^2}{(2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega)^2} \cdot \left[\int_0^{2\pi} f(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \right]^2 \end{aligned}$$

A aproximação de primeira ordem em ε consiste em desprezar os termos de ordem ε^2 , o que permite reduzir as expressões a:

$$[\Omega(a)]^2 = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} f(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi$$

$$[\Omega(a)]^2 = \omega^2 - \frac{\varepsilon}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} f(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$$

Estas relações podem ser reescritas retornando-se aos termos da função $F(q, \dot{q})$ definida no sistema dinâmico quase conservativo (2.4-4):

$$[\Omega(a)]^2 = \omega^2 - \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-16)$$

$$[\Omega(a)]^2 = \omega^2 - \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \quad (2.6-17)$$

Finalmente, as relações (2.6-16) e (2.6-17) podem também ser escritas nos termos da função original $\bar{F}(q, \dot{q})$ que define o sistema dinâmico mais geral (2.1-1), em que vale a relação (2.4-5). Utilizando-se as propriedades (2.6-11), obtêm-se:

$$[\Omega(a)]^2 = -\frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi$$

$$[\Omega(a)]^2 = -\frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta$$

2.6.3 Formulação para sistemas não conservativos gerais

A relação (2.5-22) pode ser utilizada para reescrever as equações das amplitudes e fases para as soluções aproximadas:

$$F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) = P(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) - 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos \Phi$$

$$F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) = P(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) + 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin \Theta$$

No caso das equações (2.6-5), (2.6-6), (2.6-7), (2.6-8) para as aproximações de primeira ordem em séries trigonométricas, resultam:

$$\frac{da}{dt} = -\xi \cdot \omega \cdot a + \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} P(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-18)$$

$$\frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} P(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-19)$$

$$\frac{da}{dt} = -\xi \cdot \omega \cdot a - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} P(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta \quad (2.6-20)$$

$$\frac{d\theta}{dt} = -\frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} P(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \quad (2.6-21)$$

No caso das equações (2.6-16), (2.6-17), para as aproximações de primeira ordem em ε , resultam:

$$[\Omega(a)]^2 = \omega^2 - \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} P(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \quad (2.6-22)$$

$$[\Omega(a)]^2 = \omega^2 - \frac{1}{\pi \cdot a} \cdot \int_0^{2\pi} P(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \quad (2.6-23)$$

As equações (2.6-18), (2.6-19) ou (2.6-20), (2.6-21) podem ser utilizadas para calcular as amplitudes e ângulos de fase para sistemas com amortecimento linear; pelas equações (2.6-22) ou (2.6-23), pode-se avaliar a evolução com a amplitude da distância entre a frequência $\Omega(a)$ do movimento da estrutura com a sua respectiva frequência natural ω .

2.7 Estabilidade das oscilações em regime permanente

As expressões (2.6-12), (2.6-14) permitem obter a taxa de variação temporal da amplitude do movimento como uma função apenas da amplitude:

$$\frac{da}{dt} = v(a) \quad (2.7-1)$$

Esta expressão pode ser diretamente integrada por meio de quadraturas (BOGOLIUBOFF; MITROPOLSKY, 1961). Entretanto, o comportamento da solução $a(t)$ pode ser avaliado antes da integração.

Para um determinado instante $\bar{t} > t_0 > 0$, a amplitude $a(\bar{t}) \doteq \bar{a}$ é estacionária se, para todo $t > \bar{t}$, a amplitude $a(t)$ permanece constante, com $a(t) = \bar{t}$. Isto ocorre quando a taxa de variação é nula:

$$v(a) = 0 \quad (2.7-2)$$

Nos regimes oscilatórios em que existe amortecimento, as amplitudes tendem a decair ou estabilizar na medida em que $t \rightarrow +\infty$. Para que isto aconteça, é necessário que, para qualquer valor $\bar{a} > 0$ de amplitude, se tenha, para $a > \bar{a}$:

$$v(a) \leq 0 \quad (2.7-3)$$

A desigualdade (2.7-3) é necessária para garantir a condição de amplitude limitada. A partir da equação (2.7-1) (BOGOLIUBOFF; MITROPOLSKY, 1961) e do

cálculo de variações, conclui-se que a amplitude cresce quando $v(a) > 0$ e decresce quando $v(a) < 0$.

Seja $a_1 > 0$ uma raiz da equação (2.7-2). Então, dado um incremento infinitesimal $\delta a > 0$, tem-se $a = a_1 + \delta a$, de modo que (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949):

$$\frac{d(\delta a)}{dt} = \left. \frac{dv}{da} \right|_{a_1} \cdot \delta a$$

A integração desta expressão produz (BOGOLIUBOFF; MITROPOLSKY, 1961) uma função exponencial, cuja estabilidade dependerá do sinal de $v'(a_1)$:

$$\delta a = (\delta a)_1 \cdot e^{v'(a_1)t}$$

Assim, a amplitude a_1 será estável se $v'(a_1) < 0$ e instável se $v'(a_1) > 0$. Quando se atinge (ou se parte de) $a_1 = 0$, produz-se o estado de equilíbrio estático, pois $a_1 = 0$ é uma raiz da equação (2.7-2). Então a retomada do movimento ocorrerá somente se a função $v(a)$ for nutrida da seguinte propriedade:

$$v'(0) > 0 \quad (2.7-4)$$

A desigualdade (2.7-4) é a condição de auto-oscilação (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, MITROPOLKI). Em sistemas mecânicos amortecidos, uma fonte de energia seria responsável pela manutenção de um regime estacionário, impedindo o decaimento da amplitude.

2.8 Sistemas com fonte de energia não ideal

Nos itens anteriores, foram estudadas oscilações forçadas por perturbações produzidas por uma fonte de energia ideal (FERREIRA, 2007) ou ilimitada, sendo definidas por uma função puramente temporal, não sendo afetada pelo movimento do oscilador mecânico de parâmetros (m, c, k) KONONENKO (1969):

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = p(t) \quad (2.3-1)$$

Quando a força de excitação que age em um oscilador mecânico é provocada por uma fonte de energia limitada, o sistema é denominado não ideal (FERREIRA, 2007). Neste caso, parte da energia fornecida pela fonte será consumida para movimentar o oscilador.

A outra parte desta energia será consumida para vencer as resistências internas da fonte, alterando seu funcionamento. Ocorre, portanto, uma interação entre o movimento do oscilador mecânico e a força de excitação provocada pela fonte de energia não ideal, de modo que um altera reciprocamente o outro (KONONENKO, 1969).

2.8.1 Características da fonte não ideal de energia

Em sistemas mecânicos é comum utilizar como fontes de energia um motor de momento de inércia J cujo eixo gira de acordo com uma coordenada angular $\varphi(t)$ motivado pelo torque $L(\varphi, \dot{\varphi})$ aplicado, descontada a resistência $H(\varphi, \dot{\varphi})$ interna à rotação.

Estas funções são usualmente determinadas com o auxílio de experimentos e fornecidas graficamente (KONONENKO, 1969), sendo contínuas nos intervalos de interesse para o movimento.

O torque líquido fornecido pela fonte de energia vale:

$$L(\varphi, \dot{\varphi}) - H(\varphi, \dot{\varphi})$$

Nestas condições, o movimento isolado da fonte de energia é governado pela equação diferencial:

$$J_0 \cdot \ddot{\varphi} = L(\varphi, \dot{\varphi}) - H(\varphi, \dot{\varphi}) \quad (2.8-1)$$

A força motriz $L(\varphi, \dot{\varphi})$ associada à fonte de energia é responsável por fornecer energia ao sistema; espera-se de um motor real que ocorra uma queda em relação ao torque inicial. Por isto, adota-se uma função decrescente em relação à frequência $\dot{\varphi}$ do movimento do rotor (KONONENKO, 1969):

$$\frac{dL}{d\dot{\varphi}} < 0 \quad (2.8-2)$$

O conjugado resistente $H(\varphi, \dot{\varphi})$ inclui as perdas de energia que ocorrem no movimento do rotor; a dissipação por atrito interno tende a ser crescente com a velocidade⁷ de rotação $\dot{\varphi}$. Por isto, adota-se uma função crescente:

⁷ De fato, esta hipótese é compatível com a equação (2.2-1), em que a força de amortecimento, oposta ao movimento, é proporcional à velocidade

$$\frac{dH}{d\dot{\phi}} > 0 \quad (2.8-3)$$

No caso de motores, o fabricante fornece graficamente o torque líquido por meio de catálogos (SIMONS, 2008):

$$L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) = \mathcal{T}_m(\dot{\phi})$$

Na ausência destas informações, adotam-se funções, ajustadas de modo a serem compatíveis com as condições (2.8-2) e (2.8-3). Resulta que a energia fornecida ao rotor em um determinado instante t_0 depende dos valores positivos $(L_0, \dot{L}_0)$:

$$L(\dot{\phi}_0) = L_0 \quad \frac{dL}{d\dot{\phi}}(\dot{\phi}_0) = -\dot{L}_0$$

A forma matemática a ser adotada para a função $L(\dot{\phi})$ está intimamente associada à natureza do movimento da fonte não ideal. Podem-se adotar para o torque motriz funções de primeiro grau:

$$L(\dot{\phi}) = L_0 - \dot{L}_0 \cdot (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0)$$

As funções exponenciais são mais realistas fisicamente (FERREIRA, 2007):

$$L(\dot{\phi}) = L_0 \cdot e^{\frac{\dot{L}_0}{L_0}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_0)}$$

Para o conjugado resistente $H(\dot{\phi})$, pode-se considerar uma função linear em relação à velocidade angular $\dot{\phi}$, definida por uma constante $\dot{H}_0$ relacionada com as perdas mecânicas oriundas do rotor do motor (SIMONS, 2008):

$$H(\dot{\phi}) = \dot{H}_0 \cdot \dot{\phi}$$

Pode-se definir um parâmetro $\kappa = 0$ para o caso de existir um catálogo para o motor, $\kappa = 1$ para função afim e $\kappa = 2$ para função exponencial. Com esta notação, o torque líquido imposto ao motor pode ser representado pela função:

$$\begin{aligned} L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) = & \frac{(2 - \kappa) \cdot (1 - \kappa)}{2} \cdot \mathcal{T}_m(\dot{\phi}) \\ & + \kappa \cdot (2 - \kappa) \cdot [L_0 - (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0)] \\ & + \frac{\kappa \cdot (\kappa - 1)}{2} \cdot \left[L_0 \cdot e^{\frac{\dot{L}_0}{L_0}(\dot{\phi} - \dot{\phi}_0)} - \dot{H}_0 \cdot (\dot{\phi} - \dot{\phi}_0) \right] \end{aligned} \quad (2.8-4)$$

Este torque líquido imposto ao motor, que atua no sentido da rotação ϕ é uma grandeza não conservativa, sendo um momento angular generalizado:

$$\mathcal{N}_\phi = L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$$

Ao acoplar esta fonte de energia a um sistema mecânico, deve-se considerar o momento de inércia J total, associado à rotação do eixo do rotor e da estrutura.

Para um oscilador governado por uma coordenada generalizada $q(t)$ associado a uma fonte de energia governada pela coordenada angular $\phi(t)$, a função lagrangiana⁸ assume uma forma definida para $G \in C^2(\mathbb{R})$

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{q}^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 - \frac{1}{2} \cdot k \cdot q^2 + G(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) \quad (2.8-5)$$

Sendo a energia cinética T uma função somente das velocidades $(\dot{q}, \dot{\phi})$ e a energia potencial V uma função somente das posições (q, ϕ) , a função G que é uma parte da lagrangiana, tem uma estrutura semelhante à (8.8-3):

$$G(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) = \bar{T}(\dot{q}, \dot{\phi}) - \bar{V}(q, \phi) \quad (2.8-6)$$

Conforme o capítulo 8, o oposta ao movimento, atua a força dissipativa que o amortecedor produz, sendo diretamente proporcional à velocidade generalizada $\dot{q}$, com constante $c \geq 0$ de amortecimento:

$$\mathcal{N}_q = -c \cdot \dot{q}$$

2.8.2 Equações do oscilador mecânico não ideal

As equações de Lagrange para este sistema se reduzem a:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} - c \cdot \dot{q} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$$

As equações de movimento decorrentes da aplicação destes funcionais são:

$$m \cdot \ddot{q} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{q}}(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) \right] = -k \cdot q + \frac{\partial G}{\partial q}(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) - c \cdot \dot{q}$$

$$J \cdot \ddot{\phi} + \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial G}{\partial \dot{\phi}}(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) \right] = \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) + L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$$

⁸ Ver apêndice

Efetuada-se as derivadas temporais da expressão (2.8-5), resulta:

$$m \cdot \ddot{q} + \left[\frac{\partial^2 G}{\partial q \partial \dot{q}} \cdot \dot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2} \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}} \cdot \dot{\phi} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{q}} \cdot \ddot{\phi} \right] = -k \cdot q - c \cdot \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial q}$$

$$J \cdot \ddot{\phi} + \left[\frac{\partial^2 G}{\partial q \partial \phi} \cdot \dot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi} \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{\phi}} \cdot \dot{\phi} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi}^2} \cdot \ddot{\phi} \right] = \frac{\partial G}{\partial \phi} + L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$$

Devido à relação (2.8-6) que define a função $G(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi})$, suas derivadas cruzadas entre posição e velocidade se anulam o que permite simplificar:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} \right] \quad (2.8-7)$$

$$J \cdot \ddot{\phi} = L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi}^2}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} \right] \quad (2.8-8)$$

Portanto, em virtude da reciprocidade entre os movimentos do oscilador mecânico e o da fonte de energia, a ação por esta produzida não poderá ser expressa como uma função simplesmente temporal (FERREIRA, 2007) $p(t)$, mas como uma função $P(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ que mostra a interação entre as coordenadas generalizadas (q, ϕ) do sistema:

$$P(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \doteq \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} \right]$$

A equação diferencial (2.3-1) é alterada para uma definição implícita:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = P(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \quad (2.8-9)$$

Por outro lado, a influência do oscilador sobre a fonte de energia é expressa pela função $R(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$:

$$R(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \doteq \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi}^2}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} \right]$$

A equação original (2.8-1) que rege o movimento da fonte de energia fica agora acrescida de um termo:

$$J \cdot \ddot{\phi} = L(\phi, \dot{\phi}) - H(\phi, \dot{\phi}) + R(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \quad (2.8-10)$$

Portanto a análise de sistemas não ideais adiciona um grau de liberdade ao sistema ideal precedente, sendo que as funções $P(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ e $R(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ são obtidas pela aplicação da formulação analítica de Lagrange ao problema específico.

Além disto, o sistema dinâmico fica caracterizado por equações diferenciais acopladas (2.8-9) e (2.8-10), e as acelerações $(\ddot{q}, \ddot{\phi})$ precisam ainda ser isoladas do sistema algébrico formado pelas equações:

$$\left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) \right] \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} = -k \cdot q - c \cdot \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi)$$

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \phi}(\dot{q}, \phi) \right] \cdot \ddot{\phi} = L(\phi) - H(\phi) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi)$$

Este sistema pode ser escrito na notação matricial:

$$\begin{bmatrix} m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) & \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \\ \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi) & J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \phi}(\dot{q}, \phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -k \cdot q - c \cdot \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) \\ L(\phi) - H(\phi) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) \end{bmatrix} \quad (2.8-11)$$

Sendo G contínua e diferenciável até a segunda ordem, resulta que a matriz de massas do sistema (2.8-11) é simétrica, pois:

$$\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi} = \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}}$$

O determinante é uma função somente das velocidades $(\dot{q}, \dot{\phi})$:

$$\Delta(\dot{q}, \phi) = \left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) \right] \cdot \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \phi}(\dot{q}, \phi) \right] - \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \cdot \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi)$$

Se o determinante for um número não nulo, o sistema (2.8-11) será inversível:

$$\begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} = \frac{1}{\Delta(\dot{q}, \phi)} \cdot \begin{bmatrix} J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \phi}(\dot{q}, \phi) & -\frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \\ -\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi) & m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k \cdot q - c \cdot \dot{q} + \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) \\ L(\phi) - H(\phi) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) \end{bmatrix}$$

$$\ddot{q} = -\frac{1}{\Delta} \cdot \left\{ \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \phi} \right] \cdot \left[k \cdot q + c \cdot \dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right] + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}} \cdot \left[L(\phi) - H(\phi) + \frac{\partial G}{\partial \phi} \right] \right\} \quad (2.8-12)$$

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{\Delta} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \dot{\phi}} \cdot \left[k \cdot q + c \cdot \dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right] + \left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2} \right] \cdot \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi} \right] \right\} \quad (2.8-13)$$

2.8.3 Amplitudes do Movimento

O método de Kryloff, Bogoliuboff e Mitropolsky, adaptado para sistemas não conservativos, pode ser utilizado para determinar as amplitudes desenvolvidas pelo sistema mecânico.

As expressões (2.5-3) e (2.5-5) são reapresentadas com a notação mais compacta definida por $\Phi = \omega \cdot t + \phi$:

$$q = a \cdot \sin \Phi \quad \dot{q} = \omega \cdot a \cdot \cos \Phi \quad (2.8-14)$$

A equação (2.8-13) descreve as acelerações desenvolvidas pela fonte de energia; como ela possui apenas as variáveis $(\dot{q}, \dot{\phi})$ e (q, ϕ) , as taxas de variação $(\dot{a}, \dot{\phi})$ não aparecem:

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{\Delta(\dot{q}, \dot{\phi})} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \dot{\phi}}(\dot{q}, \dot{\phi}) \cdot \left[k \cdot q + c \cdot \dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) \right] + \left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \dot{\phi}) \right] \cdot \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) \right] \right\}$$

Basta efetuar as substituições de variáveis

$$\ddot{\phi} = \frac{1}{\Delta(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi})} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \dot{\phi}}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \cdot \left[k \cdot a \cdot \sin \Phi + c \cdot \omega \cdot a \cdot \cos \Phi - \frac{\partial G}{\partial q}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] + \left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \right] \cdot \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \right\}$$

De maneira mais compacta, escreve-se:

$$\ddot{\phi} = \bar{F}_2(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi}) = \bar{F}_2(a \cdot \sin \Phi, \omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi}) \quad (2.8-15)$$

$$\bar{F}_2(a \cdot \sin \Phi, \omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi}) = \frac{1}{\Delta(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi})} \cdot \left\{ \begin{aligned} & \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \dot{\phi}}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \\ & \times \left[k \cdot a \cdot \sin \Phi + c \cdot \omega \cdot a \cdot \cos \Phi - \frac{\partial G}{\partial q}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \\ & + \left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \right] \\ & \times \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \end{aligned} \right\}$$

A equação (2.8-12) possui a variável $\ddot{q}$, que implicitamente resgata o resultado obtido em (2.5-7):

$$\ddot{q} = -\omega^2 \cdot a \cdot \sin \Phi + \dot{a} \cdot \omega \cdot \cos \Phi - a \cdot \omega \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \Phi \quad (2.8-16)$$

Substituem-se as variáveis conforme (2.8-14) e (2.8-16):

$$\begin{aligned} \ddot{q} = & -\frac{1}{\Delta(\dot{q}, \dot{\phi})} \cdot \left\{ \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \dot{\phi}}(\dot{q}, \dot{\phi}) \right] \cdot \left[k \cdot q + c \cdot \dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) \right] + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{q}}(\dot{q}, \dot{\phi}) \cdot \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) \right] \right\} \\ & - \Delta(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \cdot [\dot{a} \cdot \omega \cdot \cos \Phi - a \cdot \omega \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \Phi] = -\Delta(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \sin \Phi \\ & + \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \dot{\phi}}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \right] \times \left[k \cdot a \cdot \sin \Phi + c \cdot \omega \cdot a \cdot \cos \Phi - \frac{\partial G}{\partial q}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \\ & + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{q}}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \times \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \end{aligned}$$

Define-se a função:

$$\begin{aligned} F_1(a \cdot \sin \Phi, \omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi}) = \\ = \omega^2 \cdot a \cdot \sin \Phi - \frac{1}{\Delta(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi})} \left\{ \begin{aligned} & \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial^2 \dot{\phi}}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \right] \\ & \times \left[k \cdot a \cdot \sin \Phi + c \cdot \omega \cdot a \cdot \cos \Phi - \frac{\partial G}{\partial q}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \\ & + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi} \partial \dot{q}}(\omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \dot{\phi}) \\ & \times \left[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + \frac{\partial G}{\partial \phi}(a \cdot \sin \Phi, \phi) \right] \end{aligned} \right\} \end{aligned}$$

Esta e a propriedade (2.5-6) formam um sistema algébrico nas variáveis $(\dot{a}, a \cdot \dot{\phi})$, que pode ser escrito na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \sin \Phi & \cos \Phi \\ \cos \Phi & -\sin \Phi \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \dot{a} \\ a \cdot \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\omega} \times \bar{F}_1(a \cdot \sin \Phi, \omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi}) \end{bmatrix} \quad (2.8-17)$$

O sistema (2.8-17) possui a mesma forma que o sistema do método de Kryloff e Bogoliuboff, podendo ser invertido identicamente, obtendo-se fórmulas parecidas com (2.5-8), (2.5-9). Agregando-se a fórmula (2.8-15), obtêm-se finalmente as equações do sistema em espaço de estados $(a, \phi, \phi, \dot{\phi})$:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{1}{\omega} \cdot F_1[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \phi, \dot{\phi}] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F_1[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \phi, \dot{\phi}] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \dot{\phi} \\ \frac{d\dot{\phi}}{dt} &= \bar{F}_2[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \phi, \dot{\phi}]\end{aligned}$$

Funções aproximadas em primeira ordem de séries trigonométricas são obtidas de acordo com (2.6-12) e (2.6-13); define-se outra função, em resultado semelhante à (2.4-5):

$$\bar{F}_1(q, \dot{q}) = F_1(q, \dot{q}) - \omega^2 \cdot q$$

Com estas representações, obtêm-se funções que dependem apenas da amplitude do movimento da estrutura e da rotação ϕ e frequência $\dot{\phi}$ da fonte de energia:

$$\begin{aligned}\frac{da}{dt} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}_1(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi}) \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi \\ \frac{d\phi}{dt} &= -\frac{\omega}{2} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \bar{F}_1(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi}) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \\ \frac{d\phi}{dt} &= \dot{\phi} \\ \frac{d\dot{\phi}}{dt} &= F_2(a \cdot \sin \Phi, \omega \cdot a \cdot \cos \Phi, \phi, \dot{\phi})\end{aligned}$$

2.9 Análise do regime permanente

Um sistema não ideal permanece em estado permanente de funcionamento quando a rotação da fonte de energia é constante (SIMONS, 2008):

$$\dot{\phi} = \Omega$$

O ponto de estabilidade do sistema é definido pela intersecção da curva característica do motor $L(\dot{\phi})$ com a curva da energia total $S(\dot{\phi})$ consumida pelo sistema (FERREIRA, 2007), definida por (SIMONS, 2008):

$$S(\Omega) \doteq E(\Omega) + H(\Omega) \quad (2.9-1)$$

As frequências Ω correspondentes ao movimento estacionário são determinadas pelas raízes da equação (DIMENTBERG, 1996):

$$L(\Omega) = S(\Omega) \quad (2.9-2)$$

Combinando as duas equações (2.9-1) e (2.9-2), resulta:

$$E(\Omega) = L(\Omega) - H(\Omega) \quad (2.9-3)$$

A lei de variação da energia $E(\Omega)$ consumida para movimentar a estrutura é determinada pelo uso da equação⁹ (8.9-7):

$$\frac{d}{dt} [T(\dot{q}, \dot{\varphi}) + V(q, \varphi)] = \mathcal{P}_n(\dot{q}, \dot{\varphi}) = [L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})] \cdot \dot{\varphi} - [c \cdot \dot{q}] \cdot \dot{q}$$

Em regime estacionário de movimento em que a estrutura de massa m permanece com oscilações forçadas e o rotor de inércia J gira com uma velocidade angular constante $\dot{\varphi} = \Omega$, a energia de todo o sistema permanece constante (KONONENKO, 1969):

$$T(\dot{q}, \Omega) + V(q, \varphi) = E_0$$

Sendo assim, a sua derivada temporal se anula, de modo que:

$$[L(\Omega) - H(\Omega)] \cdot \Omega = c \cdot \dot{q}^2 \quad (2.9-4)$$

Nestas condições, as amplitudes de oscilação da estrutura permanecem estáveis. Elevando-se a expressão (2.5-5) à segunda potência, obtém-se:

$$\dot{q}^2 = \omega^2 \cdot a^2 \cdot (\cos \Phi)^2$$

Utilizando-se de propriedades da trigonometria, substitui-se em (2.9-4):

$$[L(\Omega) - H(\Omega)] = \frac{c \cdot \omega^2 \cdot a^2}{\Omega} \cdot \frac{1 + \cos \Phi}{2} \quad (2.9-5)$$

Analogamente, pela expressão (2.5-10) obtém-se:

$$\dot{q}^2 = \omega^2 \cdot a^2 \cdot (\sin \Theta)^2$$

$$[L(\Omega) - H(\Omega)] = \frac{c \cdot \omega^2 \cdot a^2}{\Omega} \cdot \frac{1 - \cos \Theta}{2} \quad (2.9-6)$$

As expressões (2.9-5) e (2.9-6) admitem, como era de se esperar em duas metodologias equivalentes, o mesmo valor médio, que ocorre quando:

$$\cos \Phi = \cos \Theta = 0$$

⁹ Ver apêndice

Agrupando-se estas considerações, e usando a relação (2.9-3), se obtém a energia necessária para movimentar a estrutura em regime estacionário:

$$E(\Omega) = \frac{c \cdot \omega^2}{2 \cdot \Omega} \cdot \bar{a}^2 \quad (2.9-7)$$

2.9.1 Consumo de energia em sistemas harmônicos

A expressão (2.9-7) mostra que a energia consumida para movimentar o oscilador depende da sua amplitude $\bar{a}$ em regime estacionário. Pela comparação das expressões (2.3-3) e (2.1-4), conclui-se que esta amplitude é proporcional ao fator de amplificação dinâmica:

$$a_p = D \cdot \frac{p_0}{k} \quad (2.9-8)$$

Substituindo-se a relação (2.9-8) na expressão (2.9-7), obtém-se que a energia consumida pelo movimento do oscilador é uma função da relação de freqüências β e do fator de amplificação dinâmica $D(\xi, \beta)$:

$$E(\beta, D(\xi, \beta)) = \frac{\xi \cdot D^2}{\beta} \cdot \frac{p_0^2}{k} \Rightarrow E = \frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot \frac{D^2}{\beta}$$

Portanto, é uma função de duas variáveis independentes:

$$E(\xi, \beta) = \frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot \left[\beta \cdot (1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^3 \right]^{-1}$$

$$E(\xi, \beta) = \frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot \left[\beta + \beta^5 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^3 \right]^{-1} \quad (2.9-9)$$

Os valores do parâmetro β correspondentes aos máximo e mínimo consumo de energia para o movimento do oscilador são determinados diferenciando-se a função $E(\xi, \beta)$ em relação à β e igualando a zero:

$$0 = \frac{\partial E}{\partial \beta} = - \frac{\xi \cdot p_0^2}{\beta^2 \cdot k} \cdot \frac{1 + 5\beta^4 - 6 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^2}{[1 + \beta^4 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^2]^2}$$

Os pontos de máximo ou de mínimo são determinados pela solução da equação algébrica:

$$5\beta^4 + 6 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^2 + 1 = 0$$

Esta equação só admite soluções $\beta(\xi)$ reais se uma das situações ocorrer:

$$\xi \leq \bar{\xi}_1 \doteq \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} \approx 0,3568 \quad \xi \geq \bar{\xi}_2 \doteq \sqrt{\frac{3+\sqrt{5}}{6}} \approx 0,9342$$

Somente a primeira das situações atende à restrição (2.3-5) anteriormente obtida para a existência de um valor máximo efetivo de amplificação dinâmica. Portanto, a curva de energia só admitirá pontos críticos se $\xi \leq \bar{\xi}_1$

$$\xi \leq 0,3568 < \bar{\xi}_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} \quad (2.9-10)$$

A restrição (2.9-10) prevalece sobre a anterior (2.3-5), pois $\bar{\xi}_1 < \bar{\xi}_0$:

$$\xi \leq \bar{\xi}_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} < \bar{\xi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Nestas condições, com $\xi < \bar{\xi}_1$, são duas as soluções da equação algébrica, resultando em um ponto $\bar{\beta}_{\text{MIN}}$ de mínima energia e outro $\bar{\beta}_{\text{MAX}}$ de máxima energia:

$$\bar{\beta}_{\text{MIN}}(\xi) = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) - \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1 - 9 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi^2)}}$$

$$\bar{\beta}_{\text{MAX}}(\xi) = \sqrt{\frac{3}{5} \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) + \frac{2}{5} \cdot \sqrt{1 - 9 \cdot \xi^2 \cdot (1 - \xi^2)}}$$

A máxima energia é determinada substituindo $\bar{\beta}_{\text{MAX}}$ na expressão (2.9-9):

$$E(\bar{\beta}_{\text{MAX}}(\xi)) = \frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot [\bar{\beta} \cdot (1 - \bar{\beta}^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \bar{\beta})^3]^{-1}$$

Os pontos de máximo para a relação de frequências $\bar{\beta}$, os respectivos fatores de amplificação dinâmica e os valores máximos de consumo de energia são apresentados na Tabela 1; os gráficos com estes resultados, na Figura 5. Os cálculos foram efetuados com $\xi \leq 0,15$.

Tabela 1 – Cálculo da energia consumida

ξ	$\bar{\beta}_{MAX}$	D_{MAX}	$E(\bar{\beta}_{MAX})$ (J)
0,05	0,9962	10,009	1,2571
0,08	0,9903	6,2649	0,7927
0,11	0,9815	4,5658	0,5841
0,15	0,9650	3,3607	0,4389

Figura 5 – Curva de energia consumida pela estrutura

A relação de freqüências (2.3-2) pode ser substituída na expressão do torque resistivo:

$$H(\Omega) = \dot{H}_0 \cdot \Omega \quad \Rightarrow \quad H(\beta) = \dot{H}_0 \cdot \beta \cdot \omega$$

A energia total $S(\Omega)$ consumida pelo sistema em regime estacionário é determinada pela relação (2.9-1) sendo, neste caso, uma função de três variáveis independentes:

$$S(\xi, \dot{H}_0, \beta) = \frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot [\beta + \beta^5 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^3]^{-1} + \dot{H}_0 \cdot \beta \cdot \omega \quad (2.9-11)$$

Os valores críticos do parâmetro β para a energia consumida pelo sistema são determinados pela solução da equação algébrica:

$$0 = \frac{\partial S}{\partial \beta} = -\frac{\xi \cdot p_0^2}{\beta^2 \cdot k} \cdot \frac{1 + 5\beta^4 - 6 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^2}{[1 + \beta^4 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \beta^2]^2} + \dot{H}_0 \cdot \omega$$

O isolamento dos termos produz uma equação algébrica polinomial completa de quinto grau na variável β^2 , que não é solúvel por meio de radicais (MARTIN, 2010). No caso em que $\beta = 1$, resulta:

$$0 = -\frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot 3 \cdot [1 - (1 - 2 \cdot \xi^2)]^{-1} + \dot{H}_0 \cdot \omega$$

$$3 \cdot \xi \cdot p_0^2 = \dot{H}_0 \cdot \omega \cdot k \cdot 2 \cdot \xi^2$$

O ponto de máximo será $\beta = 1$ somente se $\xi = 0$ ou:

$$\xi = \frac{3}{2} \cdot \frac{p_0^2}{\dot{H}_0 \cdot \omega \cdot k}$$

Ou seja, o ponto de máximo consumo de energia só ocorrerá na ressonância em situações muito especiais.

Adotando-se taxas de amortecimento baixas, e variando-se os parâmetros $(L_0, \dot{H}_0)$, foram calculadas as relações de frequências críticas $\bar{\beta}$ e os respectivos níveis de energia $S(\bar{\beta})$. Os valores são apresentados na Tabela 2, construída com $\dot{L}_0 = 0,2$.

Tabela 2 – Otimização da energia consumida pelo sistema

ξ	L_0 (J)	$\dot{H}_0$ (J · s)	$\bar{\beta}_{MAX}$	$S(\bar{\beta}_{MAX})$ (J)
0,05	1,600	0,500	1,00	1,7500
0,08	1,385	0,400	0,99	1,1886
0,11	1,200	0,300	0,98	0,8779
0,15	0,500	0,200	0,97	0,6324

No caso em que o torque for uma função afim, o torque líquido vale:

$$L(\Omega) - H(\Omega) = L_0 - (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot \Omega \quad \Rightarrow \quad L(\beta) - H(\beta) = L_0 - (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot \beta \cdot \omega$$

A frequência $\bar{\beta}$ do estado estacionário é obtida ao substituir as expressões para a energia (2.9-7) consumida pela estrutura e para o torque líquido:

$$\frac{\xi \cdot p_0^2}{k} \cdot [\bar{\beta} + \bar{\beta}^5 - 2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \bar{\beta}^3]^{-1} = L_0 - (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot \omega \cdot \bar{\beta}$$

Ao isolarem-se os termos, obtém-se uma equação algébrica polinomial completa de sexto grau, que não é solúvel por meio de radicais (MARTIN, 2010):

$$\begin{aligned} \frac{\xi \cdot p_0^2}{k} = & L_0 \cdot \bar{\beta} - (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot \omega \cdot \bar{\beta}^2 - 2 \cdot L_0 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \bar{\beta}^3 \\ & + 2 \cdot (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot \omega \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2) \cdot \bar{\beta}^4 + L_0 \cdot \bar{\beta}^5 - (\dot{L}_0 + \dot{H}_0) \cdot \omega \cdot \bar{\beta}^6 \end{aligned}$$

Porém, soluções podem ser encontradas com o auxílio do computador, aproveitando-se do fato de as funções $L(\Omega)$ e $H(\Omega)$ serem freqüentemente conhecidas por gráficos ou tabelas obtidos a partir de experimentos (KONONENKO, 1969).

Na Figura 6 foram construídas as curvas (2.9-11) para a energia total $S(\beta)$ fornecida pela fonte de energia e consumida pela estrutura, mostrando sua a intersecção com a função afim para o torque $L(\beta)$ aplicado à fonte de energia.

Os pontos de equilíbrio estacionário e os respectivos níveis de energia são apresentados na Tabela 3.

Tabela 3 – Estabilidade estacionária

ξ	L_0 (J)	$\dot{H}_0$ (J · s)	$\bar{\beta}_1$	$S(\bar{\beta}_1)$ (J)	$\bar{\beta}_2$	$S(\bar{\beta}_2)$ (J)	$\bar{\beta}_3$	$S(\bar{\beta}_3)$ (J)
0,05	1,600	0,500	0,96	1,408	1,03	1,394	2,29	1,142
0,08	1,385	0,400	0,99	1,187	—	—	2,31	0,924
0,11	1,200	0,300	—	—	—	—	2,40	0,720
0,15	0,500	0,200	0,74	0,352	—	—	—	—

Figura 6 – Curvas de energia consumida pelo sistema

A análise da figura e da tabela permite verificar que a intersecção das curvas $S(\beta) = L(\beta)$ ocorre próxima à ressonância ($\beta = 1$) nos dois primeiros casos.

No terceiro caso, a energia fornecida $L(\Omega)$ é muito alta, de modo que o equilíbrio ocorre além da ressonância, para níveis de energia longe do ponto de máximo. O sistema consumirá mais energia antes de se estabilizar.

No quarto caso, a energia fornecida $L(\Omega)$ é muito baixa, e o regime estacionário se estabelece antes da ressonância, de modo que a energia fornecida pela fonte é subaproveitada.

Ambos os casos são indesejáveis. Para evitá-los, é necessário impor à estrutura um torque motriz inicial adequado:

$$L(0) = L_0$$

Este parâmetro estabelece o nível de energia no qual a fonte não ideal trabalhará, sendo o objeto de extrema importância na análise dinâmica dos modelos estudados neste trabalho.

2.9.2 Aplicação a sistemas não ideais

Kononenko (1969) utilizou o conceito da teoria das perturbações para avaliar o sistema acoplado pelas equações (2.8-7) e (2.8-8):

$$m \cdot \ddot{q} + k \cdot q = \frac{\partial G}{\partial q}(q, \varphi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{q}}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{\varphi} \right] - c \cdot \dot{q}$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) + \frac{\partial G}{\partial \varphi}(q, \varphi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \dot{\varphi}}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\varphi}^2}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{\varphi} \right]$$

Considera-se que as forças e momentos dos lados direitos dessas equações são pequenos se comparados com as outras forças e momentos atuantes no sistema¹⁰. Nestas condições, define-se o parâmetro ε de proporcionalidade como sendo um número pequeno, de modo a transformar as equações em:

$$m \cdot \ddot{q} + k \cdot q = \varepsilon \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial q}(q, \varphi) - \left[\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \dot{\varphi} \partial \dot{q}}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{\varphi} \right] - \tilde{c} \cdot \dot{q} \right\} \quad (2.9-12)$$

$$\ddot{\varphi} = \varepsilon \cdot \frac{1}{J} \cdot \left\{ \tilde{L}(\dot{\varphi}) - \tilde{H}(\dot{\varphi}) + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \varphi}(q, \varphi) - \left[\frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \dot{q} \partial \dot{\varphi}}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \dot{\varphi}^2}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{\varphi} \right] \right\} \quad (2.9-13)$$

Para $\varepsilon = 0$, o sistema se degenera em um oscilador conservativo. Além disto, restringe-se a análise a condições quase estacionárias nas quais a aceleração $\ddot{\varphi}$ será pequena¹¹. Sendo assim, poderá ser eliminada (KONONENKO, 1969) da equação (2.9-12). Definem-se as funções:

$$f_1(q, \dot{q}, \ddot{q}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{m} \cdot \left\{ \frac{\partial \tilde{G}}{\partial q}(q, \varphi) - \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{q} - \tilde{c} \cdot \dot{q} \right\}$$

$$f_2(q, \dot{q}, \ddot{q}, \varphi, \dot{\varphi}) = \frac{1}{J} \cdot \left\{ \tilde{L}(\dot{\varphi}) - \tilde{H}(\dot{\varphi}) + \frac{\partial \tilde{G}}{\partial \varphi}(q, \varphi) - \frac{\partial^2 \tilde{G}}{\partial \dot{q} \partial \dot{\varphi}}(\dot{q}, \varphi) \cdot \ddot{q} \right\}$$

Introduzem-se as seguintes substituições:

$$q = a \cdot \sin(\varphi + \phi) \quad \dot{q} = a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi) \quad (2.9-14)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega \quad (2.9-15)$$

¹⁰ No caso da força de amortecimento $-c \cdot \dot{q}$, esta hipótese parece razoável, tendo em vista a necessidade de se utilizar taxas de amortecimento baixa, com $\xi \leq 0,7$.

¹¹ Esta condição é razoável, tendo em vista a estrutura matemática da equação (2.9-13).

A aceleração que aparece em (2.9-12) e (2.9-13) depende implicitamente de outras variáveis já definidas nas funções f_1 e f_2 :

$$\ddot{q} = \dot{a} \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi) - a \cdot \omega \cdot (\Omega + \dot{\phi}) \cdot \sin(\varphi + \phi)$$

Tem interesse especial a região de ressonância, na qual a frequência $\Omega = \dot{\phi}$ da oscilação forçada em regime estacionário é próxima à frequência natural ω da estrutura:

$$\omega - \Omega = \varepsilon \cdot \alpha_0$$

Estas substituições, e a inversão do sistema algébrico nas variáveis $(\dot{a}, a \cdot \dot{\phi})$ (KONONENKO, 1969) permitem transformar o sistema de duas equações diferenciais (2.9-12) e (2.9-13) de segunda ordem em um sistema de quatro equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= \frac{\varepsilon}{\omega} \cdot f_1[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot \cos(\varphi + \phi) + O(\varepsilon^2) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \varepsilon \cdot \left\{ \alpha_0 - \frac{1}{a \cdot \omega} \cdot f_1[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot \sin(\varphi + \phi) \right\} + O(\varepsilon^2) \\ \frac{d\varphi}{dt} &= \Omega \\ \frac{d\Omega}{dt} &= \varepsilon \cdot f_2[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \end{aligned}$$

A terceira equação pode ser diretamente integrada:

$$\varphi = \Omega \cdot t + \varepsilon \cdot \tilde{\phi}(t) \quad (2.9-16)$$

A relação (2.9-16) pode ser substituída nas outras equações do sistema. Ao desprezar os termos de ordem superior em ε^2 e efetuar as respectivas integrais com relação a um ciclo completo da variável φ , obtém-se as equações para determinar a amplitude e ângulo de fase do oscilador e a frequência da fonte de energia em regime estacionário:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot f_1[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot \cos(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \\ \frac{d\phi}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon}{\Omega} \cdot \alpha_0 - \frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \Omega} \cdot f_1[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot \sin(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \\ \frac{d\Omega}{d\varphi} &= \frac{\varepsilon}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot f_2[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot d\varphi \end{aligned}$$

Estas equações podem ser re-escritas aproveitando-se da relação (2.5-1):

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\phi} &= \frac{1}{\Omega \cdot \omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_1[a \cdot \sin(\phi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\phi + \phi), \phi, \Omega] \cdot \cos(\phi + \phi) \cdot d\phi \\ \frac{d\phi}{d\phi} &= \frac{\omega - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{a \cdot \Omega \cdot \omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_1[a \cdot \sin(\phi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\phi + \phi), \phi, \Omega] \cdot \sin(\phi + \phi) \cdot d\phi \\ \frac{d\Omega}{d\phi} &= \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_2[a \cdot \sin(\phi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\phi + \phi), \phi, \Omega] \cdot d\phi \end{aligned} \quad (2.9-17)$$

O regime estacionário se estabelece quando as grandezas (a, ϕ, Ω) assumem valores aproximadamente constantes; isto ocorre quando:

$$\frac{da}{d\phi} = 0 \qquad \frac{d\phi}{d\phi} = 0 \qquad \frac{d\Omega}{d\phi} = 0 \qquad (2.9-18)$$

As equações (2.9-18) são a condição para a existência de regime estacionário em sistemas não ideais.

3 APLICAÇÃO: OSCILADOR MECÂNICO NÃO IDEAL

Na Figura 7 é representado um oscilador mecânico de parâmetros (m, c, k) cujo movimento, caracterizado pela evolução da coordenada generalizada $q(t)$, é modificado por um motor de momento de inércia J que gira com ângulo de rotação $\theta \doteq \varphi - \varphi_0$, gerando uma excitação de suportes não ideal.

Figura 7 – Oscilador Mecânico não ideal

3.1 Deslocamentos e Velocidades

A análise da geometria permite verificar que o deslocamento s do suporte está relacionado com o movimento do motor:

$$s = r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

O deslocamento total y do sistema é a soma do deslocamento q do oscilador com o deslocamento s da base:

$$y = q + s \quad \Rightarrow \quad y = q + r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

As velocidades do movimento do sistema e da fonte de energia são:

$$\dot{y} = \dot{q} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \quad \dot{\theta} = \dot{\varphi}$$

3.2 Funções de Energia

A energia cinética do sistema inclui a rotação do motor:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\theta}^2 \quad T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{q} + \dot{s})^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2$$

A energia potencial total V do sistema contempla a energia de deformação U , correspondente ao trabalho da força elástica exercida no sistema, e o trabalho das forças conservativas, provenientes do campo gravitacional, quando existir:

$$V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot q^2 + m \cdot g \cdot y \quad V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot q^2 + m \cdot g \cdot (q + s)$$

Códigos em linguagem matemática simbólica foram escritos para efetuar com segurança as operações algébricas desta tese. Substituindo-se as funções que definem implicitamente os deslocamentos da base, obtêm-se:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot [\dot{q}^2 + 2 \cdot \dot{q} \cdot r \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot (\cos \varphi)^2] + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2$$

$$V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot q^2 + m \cdot g \cdot [q + r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)]$$

A lagrangiana é a diferença entre as energias cinética e potencial:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \cdot m \cdot [\dot{q}^2 + 2 \cdot \dot{q} \cdot r \cdot \dot{\phi} \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot (\cos \varphi)^2] + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 \\ & - \frac{1}{2} k \cdot q^2 - m \cdot g \cdot [q + r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)] \end{aligned} \quad (3.2-1)$$

3.3 Forças generalizadas não-conservativas

No modelo está presente uma força de amortecimento oposta ao movimento e proporcional à velocidade generalizada $\dot{q}$, dissipando energia do sistema:

$$\mathcal{N}_q = -c \cdot \dot{q}$$

No sentido da rotação φ atua o torque líquido que é imposto ao motor, sendo um momento angular generalizado não conservativo.

$$\mathcal{N}_\varphi = L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$$

3.4 Determinação do Sistema Dinâmico

Com as funções de energia e os elementos de dissipação de energia, é possível produzir as equações de movimento nas variáveis $(\ddot{q}, \dot{\phi})$ e transformá-las em equações diferenciais em espaço de estados nas variáveis $(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi})$.

A função “*Lagrange*” (IVANOVICH, 2009) efetua os cálculos de derivação da Lagrangiana, obtendo as equações para sistemas conservativos¹². A parte funcional deste código está reproduzida abaixo¹³.

Lagrange's equations, by Ivanovich, 19 Feb 2009, No BSD License

```
% =====  
% Lagrange is a function that calculate equations of motion (Lagrange's equations)  
% d/dt(dL/d(dq))- dL/dq = 0. It Uses the Lagrangian, that is a function that summarizes  
$ the dynamics of the system. Symbolic Math Toolbox is required.  
% =====
```

```
function [M]=Lagrange(Lag,V)  
syms t;  
Var=length(V)/3;  
Vt=V;  
for cont0=1:1:Var  
    Vt(cont0*3-2)=strcat('f',num2str(cont0),'(t)');  
    Vt(cont0*3-1)=diff(Vt((cont0*3)-2),t);  
    Vt(cont0*3)=diff(Vt((cont0*3)-2),t,2);  
end  
for cont0=1:1:Var  
    L1=simple(diff(Lag,V(cont0*3-1)));  
    L2=simple(diff(Lag,V(cont0*3-2)));  
    Dposx=L1;  
  
    for cont=1:1:Var*3  
        Dposx=subs(Dposx,V(cont),Vt(cont));  
    end  
    L1=diff(Dposx,t);  
  
    for cont=Var*3:-1:1  
        L1=subs(L1,Vt(cont),V(cont));  
    end  
    L1F=L1-L2;  
    L1F=simple(expand(L1F));  
    L1F=collect(L1F,Vt(cont0*3));%*****  
    M(cont0)=L1F;  
end  
end
```

¹² A função “*Lagrange.m*”, escrita por Ivanovich em 19/02/2009 foi obtida da Central do Matlab® em <http://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/23037>, e requer o uso do software “*Symbolic Math Toolbox*”.

¹³ O arquivo com a função completa pode ser diretamente baixado em: http://www.mathworks.com/matlabcentral/fix_files/23037/1/Lagrange.m

A função “*oscilator_lagrange*” foi construída para calcular as funções de energia em função das coordenadas generalizadas e introduzir as forças não conservativas, permitindo a determinação das equações de movimento.

```
% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR OSCILLATOR SUBJECTED TO
% A NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====
% Henrique Furia Silva 10/09/2011 V.4H

function [Lag, Equations]=oscilator_lagrange()

% Definition of the constants
syms m c k J L H r phi0 g c

% Definition of the generalized coordinates and Torque
syms q qt qtt phi phit phitt

% 1) DISPLACEMENTS AND VELOCITIES

% Caused by to the non ideal energy source
s = r * (sin(phi)-sin(phi0));
st = r * phit * cos(phi);

% 2) KINETIC ENERGY
T = (1/2)* m * (qt + st)^2 + (1/2)*J*phit^2;
% T = (1/2)* m * (qt^2 + 2*qt*st + st^2) + (1/2)*J*phit^2;

% 3) POTENTIAL ENERGY

% STRAIN ENERGY
U = (1/2)* k * q^2;

% WORK OF POTENTIAL FORCES (REV.1)
Wc = - g* m *(q + s);

% POTENTIAL ENERGY
V = U - Wc;

% 4) NON POTENTIAL FORCES
N = [-c*qt , L-H];

% 5) LAGRANGIAN
Lag = T - V;

% 6) EQUATIONS OF MOTION
variables = [q qt qtt phi phit phitt];

EQ = Lagrange(Lag,variables);
Equations = EQ - N;

end
```


3.4.1 Equações diferenciais de movimento

As equações de movimento são determinadas pela aplicação das equações de Euler – Lagrange às funções de energia do sistema:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} + \mathcal{N}_q \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} + \mathcal{N}_\varphi$$

As derivações da lagrangiana (2.9-13) relativas à coordenada cartesiana q produzem termos com dimensão de força:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -k \cdot q - m \cdot g \qquad \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \cdot (\dot{q} + r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = m \cdot (\ddot{q} + r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi)$$

As derivações da lagrangiana (2.9-13) relativas à coordenada angular φ produzem termos com dimensão de trabalho, energia ou torque:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -m \cdot r \cdot [\dot{q} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + g \cdot \cos \varphi]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = m \cdot [r \cdot \cos \varphi + r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot (\cos \varphi)^2] + J \cdot \dot{\varphi}$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} \right) = m \cdot r \cdot [\ddot{q} \cdot \cos \varphi - \dot{q} \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi + r \cdot \ddot{\varphi} \cdot (\cos \varphi)^2 - 2 \cdot r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi] + J \cdot \ddot{\varphi}$$

Agrupando-se os termos, obtêm-se um sistema de equações diferenciais não lineares e acopladas nas variáveis $(\ddot{q}, \ddot{\varphi})$:

$$m \cdot \ddot{q} = m \cdot (r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi - r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - g) - k \cdot q - c \cdot \dot{q} \qquad (3.4-1)$$

$$J \cdot \ddot{\varphi} = L(\dot{\varphi}) - H(\varphi) \qquad (3.4-2)$$
$$+ m \cdot r \cdot [r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \ddot{q} \cdot \cos \varphi - g \cdot \cos \varphi] - m \cdot r^2 \cdot (\cos \varphi)^2 \cdot \ddot{\varphi}$$

3.4.2 Sistema algébrico adimensional

Como as variáveis $(\ddot{q}, \ddot{\phi})$ estão mutuamente presentes em ambas as equações, elas ainda não descrevem o sistema em espaço de estados; além disto, (3.4-1) tem dimensão de força, enquanto que (3.4-2) tem dimensão de torque. Isto é resolvido dividindo-se (3.4-2) por r e isolando-se as variáveis $(\ddot{q}, r \cdot \ddot{\phi})$ no mesmo lado das equações:

$$m \cdot \ddot{q} - m \cdot \cos \phi \cdot (r \cdot \ddot{\phi}) = m \cdot (r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi - g) - k \cdot q - c \cdot \dot{q}$$

$$m \cdot \cos \phi \cdot \ddot{q} + \left[\frac{J}{r^2} + m \cdot (\cos \phi)^2 \right] \cdot (r \cdot \ddot{\phi}) = \frac{L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})}{r} + m \cdot [r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - g \cdot \cos \phi]$$

Estas equações formam um sistema algébrico linear nas variáveis $(\ddot{q}, r \cdot \ddot{\phi})$, que pode ser escrito com notação matricial:

m	$m \cdot \cos \phi$	$\cdot \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ r \cdot \ddot{\phi} \end{bmatrix} =$	$-c \cdot \dot{q} - k \cdot q + m \cdot r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi - m \cdot g$
$m \cdot \cos \phi$	$\frac{J}{r^2} + m \cdot (\cos \phi)^2$		$m \cdot r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - m \cdot g \cdot \cos \phi + \frac{L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})}{r}$

Definem-se a frequência natural circular do oscilador mecânico e a taxa de amortecimento conforme visto no capítulo 2:

$$\frac{k}{m} = \omega^2 \qquad \frac{c}{m} = 2 \cdot \xi \cdot \omega$$

Grandezas adimensionais podem ser obtidas com a divisão dos termos de cada uma das equações do sistema pelo fator constante $(m \cdot r)$:

1	$\cos \phi$	$\cdot \begin{bmatrix} \frac{\ddot{q}}{r} \\ \ddot{\phi} \end{bmatrix} =$	$-2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \frac{\dot{q}}{r} - \omega^2 \cdot \frac{q}{r} + \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi - \frac{g}{r}$
$\cos \phi$	$\frac{J}{m \cdot r^2} + (\cos \phi)^2$		$\dot{\phi}^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - \frac{g}{r} \cdot \cos \phi + \frac{L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})}{m \cdot r^2}$

Este sistema pode ser escrito em termos de variáveis adimensionais, conforme sugerem Felix e Balthazar (2009). Basta definir o deslocamento u e o tempo τ adimensionais por:

$$u \doteq \frac{q}{r} \qquad \tau \doteq \omega \cdot t$$

Pelas as regras de diferenciação para funções compostas obtêm-se:

$$\dot{u} = \omega \cdot \frac{du}{d\tau}$$

$$\ddot{u} = \omega^2 \cdot \frac{d^2u}{d\tau^2}$$

$$\dot{\phi} = \omega \cdot \frac{d\phi}{d\tau}$$

$$\ddot{\phi} = \omega^2 \cdot \frac{d^2\phi}{d\tau^2}$$

Utiliza-se da notação de linhas superpostas à direita para indicar a derivada de uma função em relação à variável τ :

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \cos \phi \\ \hline \cos \phi & \frac{J}{m \cdot r^2} + (\cos \phi)^2 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{\omega^2 \cdot u''}{\omega^2 \cdot \phi''} = \frac{-2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot u' - \omega^2 \cdot u + \omega^2 \cdot \phi'^2 \cdot \sin \phi - \frac{g}{r}}{\omega^2 \cdot \phi'^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - \frac{g}{r} \cdot \cos \phi + \frac{L(\phi') - H(\phi')}{m \cdot r^2}}$$

Finalmente, a equação pode ser simplificada pelo fator ω^2 , obtendo-se:

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & \cos \phi \\ \hline \cos \phi & \frac{J}{m \cdot r^2} + (\cos \phi)^2 \\ \hline \end{array} \cdot \frac{u''}{\phi''} = \frac{-2 \cdot \xi \cdot u' - u + \phi'^2 \cdot \sin \phi - \frac{g}{\omega^2 \cdot r}}{\phi'^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - \frac{g}{\omega^2 \cdot r} \cdot \cos \phi + \frac{L(\phi') - H(\phi')}{m \cdot \omega^2 \cdot r^2}}$$

3.4.3 Parâmetros de Controle

Definem-se parâmetros de controle (γ, ψ) relacionados à aceleração da gravidade g e ao momento de inércia J do rotor do motor:

$$\gamma \doteq \frac{g}{\omega^2 \cdot r}$$

$$\zeta \doteq \frac{J}{m \cdot r^2}$$

Definem-se os parâmetros adimensionais (α, σ, ν) :

$$\alpha \doteq \frac{L_0}{m \cdot r^2 \cdot \omega^2}$$

$$\sigma \doteq \frac{\dot{L}_0}{m \cdot r^2 \cdot \omega}$$

$$\nu \doteq \frac{\dot{H}_0}{m \cdot r^2 \cdot \omega}$$

E uma função adimensional $\Gamma(\phi')$ correspondente ao torque líquido:

$$\Gamma(\phi') \doteq \frac{L(\phi') - H(\phi')}{m \cdot \omega^2 \cdot r^2} \quad (3.4-3)$$

Colocada com a representação (2.8-4), a função $\Gamma(\phi')$ assume a forma:

$$\Gamma(\phi') = \frac{(2 - \kappa) \cdot (1 - \kappa)}{2} \cdot \hat{\mathcal{T}}_m(\phi') + \kappa \cdot (2 - \kappa) \cdot [\alpha - (\sigma + \nu) \cdot \phi'] + \frac{\kappa \cdot (\kappa - 1)}{2} \cdot \left[\alpha \cdot e^{-\frac{\sigma}{\alpha} \phi'} - \nu \cdot \phi' \right]$$

3.4.4 Inversão do sistema algébrico

Na notação matricial, escreve-se $[M] \cdot \{U''\} = \{F\}$. O vetor de acelerações $\{U''\}$ e a matriz $[M]$ de massas são definidos por:

$$\{U''\} \doteq \begin{bmatrix} u'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} \quad [M] \doteq \begin{bmatrix} 1 & \cos \varphi \\ \cos \varphi & \zeta + (\cos \varphi)^2 \end{bmatrix}$$

O vetor de forças é definido por:

$$\{F\} = \begin{bmatrix} -2 \cdot \xi \cdot u' - u + \varphi'^2 \cdot \sin \varphi - \gamma \\ \varphi'^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - \gamma \cdot \cos \varphi + \Gamma_{\kappa}(\varphi') \end{bmatrix}$$

A matriz de massas é simétrica em relação à diagonal principal, como se espera de problemas físicos, e tem determinante igual a:

$$\Delta \doteq \det([M]) = \zeta$$

Como o determinante é um número estritamente positivo, existe a matriz inversa $[M]^{-1}$, que vale:

$$[M]^{-1} \doteq \frac{1}{\zeta} \cdot \begin{bmatrix} \zeta + (\cos \varphi)^2 & -\cos \varphi \\ -\cos \varphi & 1 \end{bmatrix}$$

As acelerações são determinadas pela operação:

$$\{U''\} = [M]^{-1} \cdot \{F\}$$

O processo de inversão do sistema algébrico foi feito com o auxílio do software de matemática computacional Matlab 7.11. A matriz de massas e o vetor de forças são definidos na função “*oscillator_matrix*”.

A inversão do sistema dinâmico foi algebricamente efetuada na função “*oscillator_algebraic*”, de modo a se obterem as acelerações:

$$u'' = -\frac{1}{\zeta} \cdot \left\{ \left[\zeta + (\cos \varphi)^2 \right] \cdot (u + 2 \cdot \xi \cdot u') + \zeta \cdot (\gamma - \varphi'^2 \cdot \sin \varphi) + \Gamma_{\kappa}(\varphi') \cdot \cos \varphi \right\} \quad (3.4-4)$$

$$\varphi'' = \frac{1}{\zeta} \cdot \left[(u + 2 \cdot \xi \cdot u') \cdot \cos \varphi + \Gamma_{\kappa}(\varphi') \right] \quad (3.4-5)$$

```
% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR OSCILLATOR SUBJECTED TO A
% NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====
% Henrique Furia Silva 17/09/2010 V.4H (10/09/2011)
```

```
function [MASS, FORCE]=oscilator_matrix()

% PARAMETERS DEFINITION
syms csi gama zetta

% GENERALIZED COORDINATES AND TORQUE
syms u ut phi phit M_phi

% MASS MATRIX
MASS = [ 1      cos(phi); ...
        cos(phi)  zetta+(cos(phi))^2 ];

% FORCES VECTOR
FORCE = [-u-2*csi*ut+phit^2*sin(phi)-gama ; ...
         phit^2*cos(phi)*sin(phi)-gama*cos(phi)+ M_phi ];

end
```

```
function [MASS, DELTA, DELTA_MASS_INV, DELTA_ACCELERATION] =
oscilator_algebric()

% PARAMETERS DEFINITION
syms csi gama zetta

% GENERALIZED COORDINATES AND TORQUE
syms u ut phi phit M_phi

% MASS MATRIX AND FORCES VECTOR
[MASS, FORCE]=oscilator_matrix();

% SYSTEM INVERSION
DELTA = det(MASS);
DELTA_MASS_INV = DELTA*(MASS)^(-1);

DELTA_ACCELERATION = DELTA_MASS_INV * FORCE;

end
```

3.4.5 Equações Diferenciais Ordinárias

Ao criarem-se novas variáveis isoladas para as respectivas velocidades, é possível escrever o sistema (3.4-4) e (3.4-5) por quatro equações diferenciais em espaço de estados:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(u) &= u' \\ \frac{d}{d\tau}(u') &= \bar{F}_1(u, u', \varphi, \varphi') \\ &= -\frac{1}{\zeta} \cdot \left[\left(\zeta + (\cos \varphi)^2 \right) \cdot (u + 2 \cdot \xi \cdot u') + \zeta \cdot (\gamma - \varphi'^2 \cdot \sin \varphi) + \Gamma_{\kappa}(\varphi') \cdot \cos \varphi \right] \\ \frac{d}{d\tau}(\varphi) &= \varphi' \\ \frac{d}{d\tau}(\varphi') &= \bar{F}_2(u, u', \varphi, \varphi') = \frac{1}{\zeta} \cdot \left[(u + 2 \cdot \xi \cdot u') \cdot \cos \varphi + \Gamma_{\kappa}(\varphi') \right]\end{aligned}\tag{3.4-6}$$

3.5 Análise qualitativa

Após determinar as equações diferenciais ordinárias do sistema em espaços de estados, é necessário estudar suas propriedades matemáticas e físicas para poder escolher parâmetros adequados para a integração numérica.

3.5.1 Pontos de equilíbrio

Os pontos de equilíbrio $\vec{p} = (\bar{u}, \bar{u}', \bar{\varphi}, \bar{\varphi}')$ são aqueles que manterão o sistema (3.4-6) em estado estacionário. Decorre imediatamente que $\bar{u}' = 0$ e $\bar{\varphi}' = 0$. Substituindo-se estes valores nas equações, resulta:

$$\begin{aligned}f_4(\vec{p}) &= \frac{1}{\zeta} \cdot [\bar{u} \cdot \cos \bar{\varphi} + \Gamma(0)] = 0 \\ f_2(\vec{p}) &= -\bar{u} + \gamma - \frac{1}{\zeta} \cdot [\bar{u} \cdot \cos \bar{\varphi} + \Gamma(0)] \cdot \cos \bar{\varphi} = 0\end{aligned}$$

Como o termo entre colchetes é nulo, resulta, pela quarta equação, que:

$$\bar{u} = \gamma$$

Substituindo-se na segunda equação, obtém-se:

$$\gamma \cdot \cos \bar{\varphi} = -\Gamma(0)$$

Se o efeito da gravidade não fosse considerado, $\gamma \equiv 0$ e então $\bar{u} = 0$. Mas neste caso a condição $0 \cdot \cos \bar{\varphi} = -\Gamma(0)$ só é satisfeita se $\Gamma(0) = 0$; isto corresponderia a um motor inoperante, que é justamente o que não ocorre neste modelo.

Portanto, pontos de equilíbrio só existem se a gravidade do sistema for considerada, ou seja, para $\gamma \neq 0$. Neste caso, se $\Gamma(0) \leq \gamma$, tem-se:

$$\cos \bar{\varphi} = -\frac{\Gamma(0)}{\gamma}$$

No caso em que $\gamma \neq 0$, os pontos de equilíbrio são, portanto:

$$\vec{p} = \begin{array}{|c|} \hline \gamma \\ \hline 0 \\ \hline \bar{\varphi} \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

A coordenada $\bar{\varphi}$ é determinada pela relação fundamental da trigonometria:

$$\vec{p}_+ : \sin \bar{\varphi} = \sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma(0)}{\gamma}\right)^2} \quad \vec{p}_- : \sin \bar{\varphi} = -\sqrt{1 - \left(\frac{\Gamma(0)}{\gamma}\right)^2}$$

Finalmente, a existência de pontos de equilíbrio está condicionada a restrições com relação ao parâmetro $\Gamma(0) = \alpha$, o que não é aceitável neste trabalho, em que se pretende avaliar justamente a variação (orientada) deste parâmetro.

Conclui-se que o sistema (3.4-6) não admite pontos de equilíbrio de interesse para este trabalho, e não faz sentido estudar a respectiva estabilidade. A avaliação qualitativa do sistema deve ser feita com os métodos de amplitudes e de perturbações apresentados no capítulo 2.

3.5.2 Amplitudes do movimento

São determinadas de acordo com o método de Kryloff, Bogoliuboff e Mitropolsky aplicado a variáveis adimensionais:

$$u = A \cdot \sin(\tau + \phi) \quad u' = A \cdot \cos(\tau + \phi)$$

De acordo com a notação (2.4-4), define-se a função:

$$F_1(u, u', \varphi, \varphi') = u + \bar{F}_1(u, u', \varphi, \varphi')$$

$$F_1[A \cdot \sin(\tau + \phi), A \cdot \cos(\tau + \phi), \phi, \phi'] = A \cdot \sin(\tau + \phi) + \bar{F}_1[A \cdot \sin(\tau + \phi), A \cdot \cos(\tau + \phi), \phi, \phi']$$

$$F_1[] = A \cdot \sin(\tau + \phi) - \frac{1}{\zeta} \cdot \left\{ \left[\zeta + (\cos \phi)^2 \right] \cdot [A \cdot \sin(\tau + \phi) + 2 \cdot \xi \cdot A \cdot \cos(\tau + \phi)] \right. \\ \left. + \zeta \cdot (\gamma - \phi'^2 \cdot \sin \phi) + \Gamma_\kappa(\phi') \cdot \cos \phi \right\} \quad (3.5-1)$$

A outra equação é obtida simplesmente pela substituição de variáveis:

$$\bar{F}_2[] = \frac{1}{\zeta} \cdot \{ [A \cdot \sin(\tau + \phi) + 2 \cdot \xi \cdot A \cdot \cos(\tau + \phi)] \cdot \cos \phi + \Gamma_\kappa(\phi') \} \quad (3.5-2)$$

Substituindo-se as funções (3.5-1) e (3.5-2) nas equações (2.5-8), (2.5-9), o sistema (3.4-6) é transformado nas equações em espaço de estados nas variáveis (A, ϕ, ϕ, ϕ') :

$$\begin{cases} \frac{dA}{d\tau} = F_1[A \cdot \sin(\tau + \phi), A \cdot \cos(\tau + \phi), \phi, \phi'] \cdot \cos(\tau + \phi) \\ \frac{d\phi}{d\tau} = -\frac{1}{A} \cdot F_1[A \cdot \sin(\tau + \phi), A \cdot \cos(\tau + \phi), \phi, \phi'] \cdot \sin(\tau + \phi) \\ \frac{d\phi}{d\tau} = \phi' \\ \frac{d\phi'}{d\tau} = F_2[A \cdot \sin(\tau + \phi), A \cdot \cos(\tau + \phi), \phi, \phi'] \end{cases} \quad (3.5-3)$$

3.6 Análise do regime estacionário

A técnica de perturbação desenvolvida por Kononenko (1969) efetua análises, conforme o item 5.7.2, a partir do sistema original acoplado (3.4-1) e (3.4-2) antes de isolar as acelerações:

$$m \cdot \ddot{q} + k \cdot q = m \cdot (r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi - r \cdot \ddot{\phi} \cdot \cos \phi - g) - c \cdot \dot{q}$$

$$J \cdot \ddot{\phi} = L(\dot{\phi}) - H(\phi) + m \cdot r \cdot [r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - \ddot{q} \cdot \cos \phi - g \cdot \cos \phi] - m \cdot r^2 \cdot (\cos \phi)^2 \cdot \ddot{\phi}$$

Considerando-se que, em situações quase estacionárias, a aceleração $\ddot{\phi}$ será pequena (KONONENKO, 1969), poderá ela ser eliminada nas equações acima. Por sorte, a equação (3.4-1) não possui termos dependentes de $\ddot{q}$ do lado direito, sendo possível o uso direto das fórmulas (2.5-8), (2.5-9), com:

$$F_1(q, \dot{q}, \phi, \phi) = r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi - g - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{q}$$

$$F_2(q, \dot{q}, \phi, \phi) = \frac{1}{J} \cdot \{ L(\dot{\phi}) - H(\phi) + m \cdot r \cdot [r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - \ddot{q} \cdot \cos \phi - g \cdot \cos \phi] \}$$

Efetuem-se as substituições (2.9-14) e (2.9-15):

$$q = a \cdot \sin(\varphi + \phi)$$

$$\dot{q} = a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi)$$

$$\frac{d\varphi}{dt} = \Omega$$

$$\ddot{q} = \dot{a} \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi) - a \cdot \omega \cdot (\Omega + \dot{\phi}) \cdot \sin(\varphi + \phi)$$

Estas relações são substituídas nas funções acima, considerando-se a situação de regime estacionário:

$$\begin{aligned} F_1[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \varphi, \Omega] &= r \cdot \Omega^2 \cdot \sin \varphi - g - 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\varphi + \phi) \\ F_2[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \varphi, \Omega] & \\ = \frac{1}{J} \cdot \left\{ L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + m \cdot r \cdot \left[r \cdot \Omega^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - g \cdot \cos \varphi \right] \right. & \\ \left. + a \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi + \phi) \cdot \cos \varphi \right\} & \end{aligned} \quad (3.6-1)$$

Estas funções devem ser substituídas nas equações (5.7-13) e integradas com relação a um ciclo completo da variável φ , considerando-se que $\varepsilon \cdot f = F$:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\varphi} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot F_1[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot \cos(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \\ \frac{d\phi}{d\varphi} &= \frac{\omega - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \Omega} \cdot F_1[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot \sin(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \\ \frac{d\Omega}{d\varphi} &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot F_2[a \cdot \sin(\varphi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\varphi + \phi), \varphi, \Omega] \cdot d\varphi \end{aligned}$$

As integrações individuais resultam:

$$\begin{aligned} \frac{da}{d\varphi} &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot [r \cdot \Omega^2 \cdot \sin \varphi - g - 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\varphi + \phi)] \cdot \cos(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot \Omega} \cdot \left[r \cdot \Omega^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot \cos(\varphi + \phi) \cdot d\varphi - g \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi) \cdot \cos(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \right] \\ \frac{d\phi}{d\varphi} &= \frac{\omega - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{a \cdot \Omega} \cdot [r \cdot \Omega^2 \cdot \sin \varphi - g - 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \cos(\varphi + \phi)] \cdot \sin(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \\ &= \frac{\omega - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot \Omega} \cdot \frac{1}{a} \cdot \left[r \cdot \Omega^2 \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \phi) \cdot d\varphi - g \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \right. \\ &\quad \left. - 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi) \cdot \sin(\varphi + \phi) \cdot d\varphi \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\frac{d\Omega}{d\phi} &= \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{J} \cdot \left\{ L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + m \cdot r^2 \cdot \Omega^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi - m \cdot r \cdot g \cdot \cos \phi \right. \\ &\quad \left. + m \cdot r \cdot a \cdot \omega \cdot (\Omega + \dot{\phi}) \cdot \sin(\phi + \phi) \cdot \cos \phi \right\} \cdot d\phi \\ &= \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega \cdot \Omega} \cdot \frac{1}{J} \cdot \left\{ \int_0^{2\pi} [L(\Omega) - H(\Omega)] \cdot d\phi \right. \\ &\quad \left. + m \cdot r^2 \cdot \Omega^2 \cdot \int_0^{2\pi} \cos \phi \cdot \sin \phi \cdot d\phi - m \cdot r \cdot g \cdot \int_0^{2\pi} \cos \phi \cdot d\phi \right. \\ &\quad \left. + m \cdot r \cdot a \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\phi + \phi) \cdot \cos \phi \cdot d\phi \right\}\end{aligned}$$

Usando as propriedades das integrais de funções trigonométricas em um ciclo completo, obtêm-se as equações diferenciais em regime quase estacionário:

$$\frac{da}{d\phi} = -\frac{1}{2 \cdot \omega \cdot \Omega} \cdot (r \cdot \Omega^2 \cdot \sin \phi + 2 \cdot \xi \cdot \omega^2 \cdot a)$$

$$\frac{d\phi}{d\phi} = \frac{\omega - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{2 \cdot \omega \cdot \Omega \cdot a} \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \cos \phi$$

$$\frac{d\Omega}{d\phi} = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{J} \cdot \left[L(\Omega) - H(\Omega) + \frac{1}{2} \cdot m \cdot r \cdot a \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \sin \phi \right]$$

As condições de existência de regime estacionário resultam em:

$$\sin \bar{\phi} = -2 \cdot \xi \cdot \frac{\omega^2}{\Omega^2} \cdot \frac{\bar{a}}{r} \quad (3.6-2)$$

$$\cos \bar{\phi} = 2 \cdot \frac{\omega^2 - \Omega \cdot \omega}{\Omega^2} \cdot \frac{\bar{a}}{r} \quad (3.6-3)$$

$$L(\Omega) - H(\Omega) = -\frac{1}{2} \cdot m \cdot r \cdot \bar{a} \cdot \omega \cdot \Omega \cdot \sin \bar{\phi} \quad (3.6-4)$$

3.6.1 Amplitude e ângulo de fase

A divisão das equações (3.6-2) e (3.6-3) permite obter uma expressão para o ângulo de fase $\bar{\phi}$ em regime estacionário:

$$\tan \bar{\phi} = -\xi \cdot \frac{\omega}{\omega - \Omega}$$

Nas variáveis adimensionais, $\phi' = \frac{\phi}{\omega}$. Em regime permanente, $\dot{\phi} = \Omega$, resultando que $\bar{\phi}' = \frac{\Omega}{\omega}$; isto permite reescrever a expressão anterior:

$$\tan \bar{\phi} = -\frac{\xi}{1 - \bar{\phi}'} \quad (3.6-5)$$

A quadratura das equações (3.6-2) e (3.6-3) permite obter expressões para a amplitude $\bar{a}$ em regime estacionário:

$$(\sin \bar{\phi})^2 + (\cos \bar{\phi})^2 = 4 \cdot \xi^2 \cdot \frac{\omega^4}{\Omega^4} \cdot \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^2 + 4 \cdot \frac{(\omega^2 - \Omega \cdot \omega)^2}{\Omega^4} \cdot \left(\frac{\bar{a}}{r}\right)^2$$

Considerando-se que $A = \frac{a}{r}$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned} (\sin \bar{\phi})^2 + (\cos \bar{\phi})^2 &= 4 \cdot \xi^2 \cdot \frac{1}{\bar{\phi}'^4} \cdot (\bar{A})^2 + 4 \cdot \frac{(1 - \bar{\phi}')^2}{\bar{\phi}'^4} \cdot (\bar{A})^2 \\ 1 &= [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2] \cdot 4 \cdot \frac{\bar{A}^2}{\bar{\phi}'^4} \Rightarrow \bar{A}^2 = \frac{\bar{\phi}'^4}{4 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]} \end{aligned}$$

A radiciação fornece:

$$|\bar{A}| = \frac{\bar{\phi}'^2}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2}} \quad (3.6-6)$$

Na ressonância, a amplitude coincide com valor obtido para o oscilador amortecido com carregamento harmônico:

$$|\bar{A}| = \frac{1}{2 \cdot \xi}$$

Igualmente, a amplitude tende ao infinito para o caso de ressonância sem amortecimento.

Os pontos críticos da função (3.6-6) são determinados por diferenciação:

$$\frac{d|\bar{A}|}{d\bar{\phi}'} = \frac{1}{2} \cdot \left\{ 2 \cdot \bar{\phi}' \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \cdot \bar{\phi}'^2 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]^{-\frac{3}{2}} \cdot (-2) \cdot (1 - \bar{\phi}') \right\} = 0$$

$$\frac{1}{2} \cdot \bar{\phi}' \cdot \left\{ 2 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]^{-\frac{1}{2}} + (1 - \bar{\phi}') \cdot \bar{\phi}' \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]^{-\frac{3}{2}} \right\} = 0$$

Esta equação admite uma raiz trivial $\bar{\varphi}'_0 = 0$, correspondente ao ponto de mínimo (global), com valor $\bar{A} = 0$; a outra raiz é determinada por:

$$2 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\varphi}')^2]^{\frac{1}{2}} + (1 - \bar{\varphi}') \cdot \bar{\varphi}' \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\varphi}')^2]^{\frac{3}{2}} = 0$$

$$2 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\varphi}')^2] = -(1 - \bar{\varphi}') \cdot \bar{\varphi}'$$

Resulta em uma equação de segundo grau em $\bar{\varphi}'$:

$$2 \cdot (1 + \xi^2) - 3 \cdot \bar{\varphi}' + \bar{\varphi}'^2 = 0$$

Esta equação só admite soluções reais se:

$$\xi \leq \bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} < 0,3536 \quad (3.6-7)$$

Esta condição é predominante sobre a restrição (2.9-10), pois $\bar{\xi}_2 < \bar{\xi}_1 < \bar{\xi}_0$:

$$\xi \leq \bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} < 0,3536 < 0,3568 < \bar{\xi}_1 = \sqrt{\frac{3 - \sqrt{5}}{6}} < \bar{\xi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} < 0,7072$$

Os pontos de máximo global e mínimo local valem:

$$\bar{\varphi}'_1 = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{1 - 8 \cdot \xi^2}}{2} \quad \bar{\varphi}'_2 = \frac{3}{2} + \frac{\sqrt{1 - 8 \cdot \xi^2}}{2}$$

Tabela 4 – Amplitudes máximas e mínimas

ξ	0,01	0,015	0,02	0,025	0,03	0,035
$\bar{\varphi}'_1$	1,0002	1,00045	1,000801	1,001252	1,001803	1,002456
$\bar{A}_1$	50,01	33,34834	25,02001	20,02502	16,69669	14,32076
$\bar{\varphi}'_2$	1,9998	1,99955	1,999199	1,998748	1,998197	1,997544
$\bar{A}_2$	1,9999	1,999775	1,9996	1,999375	1,999099	1,998773

Os valores apresentados na Tabela 4 mostram que o interesse maior com relação às amplificações das amplitudes está em regiões de trabalho do motor próximas à ressonância com a frequência natural da estrutura, e com taxas de amortecimento mais baixas, como se pode observar na Figura 8.

Figura 8 – Amplitudes em regime estacionário

Figura 9 – Fases em regime estacionário

A diferenciação da função (3.6-5) mostra que não existem pontos críticos:

$$\frac{d\bar{\phi}}{d\bar{\phi}} = -\frac{\xi(1-\bar{\phi}')^{-2}}{1+\frac{\xi^2}{(1-\bar{\phi}')^2}} = \frac{\xi}{(1-\bar{\phi}')^2 + \xi^2}$$

E de fato, os limites para o infinito tendem a zero e os limites laterais para zero tendem para os extremos do infinito, como se pode observar pelo gráfico da Figura 9.

3.6.2 Energia do Sistema

A equação (3.6-4) fornece a freqüência das oscilações forçadas, sendo um resultado equivalente ao obtido anteriormente em (2.9-7):

$$L(\Omega) - H(\Omega) = \xi \cdot m \cdot \frac{\omega^3}{\Omega} \cdot \bar{a}^2 \Rightarrow L(\phi') - H(\phi') = \xi \cdot \frac{\omega^2}{\phi'} \cdot \bar{A}^2 \cdot m \cdot r^2$$

Em regime estacionário, o torque líquido é a energia que movimenta a estrutura, ou seja, $L - H = E$; escrevendo em grandezas adimensionais de energia, se obtém:

$$\frac{E(\bar{\phi}')}{m \cdot \omega^2 \cdot r^2} = \frac{\xi \cdot \bar{A}^2}{\bar{\phi}'} \Rightarrow \left[\frac{E}{m \cdot \omega^2 \cdot r^2} \right](\phi') = \frac{\xi}{\phi'} \cdot \bar{A}^2$$

As funções adimensionais de energia são definidas por:

$$\frac{E}{m \cdot \omega^2 \cdot r^2} = \hat{E} \quad \hat{E}(\phi') = \frac{\xi}{\phi'} \cdot \bar{A}^2 \quad (3.6-8)$$

Substituindo-se a expressão (3.6-6) da amplitude em (3.6-5), obtém-se:

$$\hat{E}(\phi') = \frac{\xi \cdot \bar{\phi}'^3}{4 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]}$$

A energia total para movimentar o sistema vale:

$$\hat{S}(\phi') = \frac{\xi \cdot \bar{\phi}'^3}{4 \cdot [\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2]} + \nu \cdot \bar{\phi}'$$

Os gráficos para a energia $\hat{E}$ para movimentar a estrutura e a energia $\hat{S}$ para movimentar o sistema são apresentados, respectivamente, na Figura 10 e Figura 11.

Figura 10 – Energia consumida pela estrutura em regime estacionário

Figura 11 – Energia consumida pelo sistema massa-mola-amortecedor em regime estacionário

3.7 Escolha de parâmetros para integração numérica

As integrações numéricas foram efetuadas baseando-se em parâmetros compatíveis com estruturas civis. O sistema (3.4-6) é plenamente determinado pelos parâmetros (ξ, γ, ζ) do oscilador e da fonte de energia, definidos por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \gamma = \frac{g}{\omega^2 \cdot r} \qquad \zeta = \frac{J}{m \cdot r^2}$$

Estes parâmetros assumem valores fixos e determinados. A função de torque líquido $\Gamma_k(\alpha, \sigma, \nu)$ depende dos parâmetros variáveis, e que são objeto de estudo deste capítulo, tendo sido definidos por:

$$\alpha = \frac{L_0}{m \cdot r^2 \cdot \omega^2} \qquad \sigma = \frac{\dot{L}_0}{m \cdot r^2 \cdot \omega} \qquad \nu = \frac{\dot{H}_0}{m \cdot r^2 \cdot \omega}$$

3.7.1 Aceleração da gravidade

A aceleração gravitacional na terra assume valores diferentes para cada ponto da superfície, definido conforme a latitude Θ , e a altitude H , medida em relação ao nível do mar.

De acordo com Biscuola, Villas Boas e Doca (2007), a aceleração g em pontos de latitude Θ e altitude H é determinada pela expressão¹⁴:

$$g = 9,780327 \cdot \left\{ 1 + 5,3204 \cdot 10^{-3} \cdot (\sin \Theta)^2 - 5,8 \cdot 10^{-6} \cdot [\sin(2 \cdot \Theta)]^2 \right\} - 3,086 \cdot 10^{-6} \cdot H$$

Para locais em nível do mar à latitude $\theta = 45^\circ$, o valor de referência¹⁵ para a aceleração da gravidade foi utilizado por Ferreira (2007) em suas análises numéricas:

$$g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

¹⁴ Estas informações foram obtidas em: <http://www.infoescola.com/mecanica/aceleracao-da-gravidade>

¹⁵ Valor obtido em: http://pt.wikipedia.org/wiki/Acelera%C3%A7%C3%A3o_da_gravidade

3.7.2 Taxas de amortecimento

Considerando-se o resultado obtido em (3.6-7), convém limitar a taxa ξ de amortecimento ao valor:

$$\xi \leq 0,35$$

De acordo com Simons (2008), a taxa de amortecimento para estruturas de concreto pode ser assumida entre 2% e 5%. A norma brasileira ABNT NBR 6123 (1988, p. 35) estabelece alguns valores para a razão ξ de amortecimento crítico a ser adotada para cada tipo de edificação, conforme apresentado na Tabela 5.

Tabela 5 – Taxas de amortecimento para estruturas civis

<i>Tipo de Edificação</i>	ξ
Edifícios com estrutura aporticada de concreto, sem cortinas	0,020
Edifícios com estrutura de concreto, com cortinas para a absorção de forças horizontais	0,015
Torres e chaminés de concreto com seção variável	0,015
Torres, mastros e chaminés de concreto com seção uniforme	0,010
Edifícios com estrutura de aço soldada	0,010
Torres e chaminés de aço com seção uniforme	0,008
Estruturas de madeira	0,030

As amplificações maiores da amplitude de movimento ocorrem em situações mais próximas à ressonância para taxas de amortecimento baixas, o que ocorre nas estruturas de aço, que são mais esbeltas; neste caso, as integrações numéricas devem ser feitas com:

$$\xi = 0,010$$

3.7.3 Propriedades do Oscilador Mecânico

Brasil (1990) analisou a não linearidade geométrica em estruturas de pórticos. Baseando-se nos valores por ele adotados, foram atribuídos valores para os parâmetros deste sistema.

Considerou-se uma estrutura de massa equivalente definida, baseada na densidade do material, na qual uma carga acidental concentrada é adicionada. A rigidez adotada foi calculada baseando-se, também, no módulo de elasticidade do material. A partir destes valores, foi possível determinar a frequência natural do oscilador, conforme apresentado na Tabela 6.

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Tabela 6 – Parâmetros geométricos do oscilador mecânico

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
g	Aceleração gravitacional	9,80665	$\frac{m}{s^2}$
ρ	Densidade do aço estrutural	7850	$\frac{kg}{m^3}$
E	Módulo de elasticidade do aço	$2,1 \times 10^{11}$	$\frac{N}{m^2}$
$\bar{m}$	Massa generalizada da estrutura	35,2124	kg
m_1	Sobrecarga acidental	900	kg
m	Massa total do oscilador	935,2124	kg
k	Rigidez da estrutura	916.854	$\frac{N}{m}$
ω	Frequência natural da estrutura	31,31086	s^{-1}

3.7.4 Propriedades do rotor do motor elétrico

Garzeri (2001) fez uma análise numérica e experimental em uma estrutura de pórtico excitada por um motor elétrico desbalanceado de corrente contínua. Ele construiu uma estrutura de aço com colunas de altura $h=0,604m$ e vigas de comprimento $\ell=0,890m$, tendo obtido um sistema de massa equivalente total $m=4,096kg$. O rotor do motor, colocado sobre o centro da viga, tinha inércia rotacional $J=1,32 \times 10^{-3}kg \cdot m^2$; o eixo do motor estava distante $r=0,0206m$ do centro da viga, que tem altura $0,0078m$.

Ferreira (2007) estudou um sistema dinâmico com excitação não ideal em duas direções, tendo obtido um sistema de massa equivalente total $m=5,4kg$. O

rotor do motor, colocado no centro do bloco, tinha inércia rotacional $J = 0,01 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Simons (2008) estudou a interação entre uma máquina e a própria fundação, tendo obtido um sistema de massa equivalente total $m = 2150 \text{ kg}$. O rotor do motor, colocado sobre a base de concreto, tinha inércia rotacional $J = 6,34 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Kononenko estudou oscilações não estacionárias de sistemas não ideais durante a passagem pela ressonância, tendo obtido inércia rotacional equivalente $J = 1,00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Tabela 7 – Propriedades do rotor do motor elétrico

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
r	Raio do volante de inércia	0,01	m
J	Inércia rotacional do rotor	6,34	$\text{kg} \cdot \text{m}^2$
γ	Parâmetro de gravidade	1,0003008	—
ζ	Parâmetro de inércia	67,79209	—

A estrutura matemática da equação (3.5-2) ou (3.6-1) exige valores de J não muito pequenos, a fim de evitar situações de quase singularidade no sistema. Como Simons (2008) estudou fundações de máquinas, seu valor de inércia rotacional foi adotado para as integrações numéricas.

3.7.5 Característica do motor

Simons (2008) conseguiu com a empresa WEG Equipamentos Elétricos S/A – Motores informações sobre a evolução do conjugado líquido $L(\phi) - H(\phi)$ com a frequência de rotação do rotor. Os valores são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Torque líquido do motor elétrico

$\dot{\phi}$	0,00	9,42	18,85	28,27	37,70	47,12	56,55
$L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$	2.587,20	2.528,40	2.469,60	2.434,32	2.399,04	2.363,76	2.328,48

$\dot{\phi}$	65,97	75,40	84,82	94,25	103,67	113,10
$L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$	2.293,20	2.257,92	2.222,64	2.199,12	2.187,36	2.175,60

$\dot{\phi}$	122,52	131,95	141,37	150,80	160,22	169,65
$L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$	2.163,84	2.152,08	2.140,32	2.199,12	2.257,92	2.469,60

$\dot{\phi}$	179,07	180,96	182,84	184,73	186,61	188,50
$L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$	2.704,80	2.528,40	2.234,40	1.764,00	1.176,00	0,00

Após regressão polinomial, Simons (2008) verificou-se que o de grau 12 mais se adapta aos dados. Os valores das constantes são apresentados na Tabela 9.

Tabela 9 – Regressão Polinomial

$(L - H)_0$	$(L - H)_1$	$(L - H)_2$	$(L - H)_3$	$(L - H)_4$	$(L - H)_5$
2587,284	2,792263	-2,32044	0,226417	-0,011641	0,000366

$(L - H)_6$	$(L - H)_7$	$(L - H)_8$	$(L - H)_9$	$(L - H)_{10}$	$(L - H)_{11}$	$(L - H)_{12}$
2.587,20	2.528,40	2.469,60	2.434,32	2.399,04	2.363,76	2.328,48

Os valores da Tabela 8, adaptada de Simons (2008), a regressão linear e a regressão polinomial com os coeficientes da Tabela 9 são apresentados no gráfico da Figura 12.

Uma curva deste motor foi criada de acordo com a relação (3.4-3), de modo a obter grandezas sem dimensão. No gráfico da Figura 13, percebe-se que o motor pára de funcionar com o parâmetro de ressonância externa de:

$$\phi' = \frac{\dot{\phi}}{\omega} = 6,020275$$

Figura 12 – Curva característica líquida do motor real

Figura 13 – Curva característica líquida adimensional

Estando em ausência de unidades, a Figura 13 está compatível com a Figura 10 e a Figura 11, podendo ser sobreposta a elas:

Figura 14 – Energia consumida pela estrutura e torque líquido

Figura 15 – Energia consumida pelo sistema e torque líquido

A análise destas últimas figuras evidencia que o motor utilizado por Simons (2008) está num nível de energia muito alto, suprimindo a interação entre a vibração da estrutura em ressonância com a fonte de energia, conhecida como efeito Sommerfeld (1902).

Para evidenciar a interação entre os modos de energia, um fator de redução que varia no intervalo $0,01 \leq f_{\alpha} \leq 0,10$ precisa ser aplicado ao motor da Figura 13 para as integrações numéricas. Os valores básicos do motor, sem efeito de redução, são apresentados na Tabela 10:

Tabela 10 – Valores do motor

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
L_0	Torque inicial	2586,3705	N·m
$\dot{L}_0 + \dot{H}_0$	Perdas mecânicas	3,8399660	N·m·s
α	Coeficiente de torque	28,209179	—
$\sigma + \nu$	Coeficientes de dissipação	1,3112560	—

Figura 16 – Escolha do nível de torque – função afim ($\kappa = 1$)

Figura 17 – Escolha do nível de torque – função exponencial ($\kappa=2$)

Figura 18 – Escolha do nível de torque – motor real ($\kappa=0$)

Foram feitas 20 simulações, variando o coeficiente de redução do torque com o objetivo de obter ressonância entre a frequência $\dot{\phi} = \Omega$ da fonte de energia e ω da estrutura da ordem da unidade:

$$\phi' = \frac{\Omega}{\omega} = 1.$$

Cada integração foi feita duas vezes: uma com o sistema (3.4-6), de modo a obter os espaços de estados (u, u', ϕ, Ω) em regime permanente; a outra foi feita a partir do sistema (3.5-3), de modo a obter os espaços de estados (A, ϕ, ϕ, Ω) .

Na Figura 16, foi utilizado uma função torque afim, baseada na regressão linear do motor real; na Figura 17 foi utilizada a função exponencial equivalente. Por fim, na Figura 18 foi utilizado o motor real. A comparação dos resultados é apresentada na Figura 19.

Figura 19 – Níveis de energia

Observa-se que frequências $0,8 \leq \varphi' \leq 1,0$ são obtidas, para os três tipos de funções motrizes, para reduções de torque com fatores entre $0,04 \leq f_{\alpha} \leq 0,08$, o que corresponde a níveis de energia entre:

$$1,128367 \leq \alpha \leq 2,256734$$

São estes os níveis de energia de trabalho que são desejados para a estrutura; retornando-se às variáveis originais de torque líquido, equivale o trabalho na faixa de:

$$103,45 \text{ J} \leq L_0 \leq 206,91 \text{ J}$$

3.8 Integração numérica

As integrações são efetuadas com o auxílio de um conjunto de funções¹⁶ criadas, entre 2007 e 2008, por Zwinglio Guimarães de Oliveira Filho, Adriane Beatriz Schelin, Franciso Alberto Marcus, pesquisadores do Grupo de Controle de Oscilações do Instituto de Física da USP, sob o comando do professor Iberê Luiz Caldas.

A função “*oscillator_inversion_numeric*” contém o torque líquido para o motor real e a possibilidade de utilização de funções afim ou exponencial. Além disto, efetua a inversão numérica do sistema dinâmico.

As funções “*eq_oscillator_displacements*” e “*eq_oscillator_amplitudes*” contêm o sistema na forma de espaço de estados (u, u', ϕ, ϕ') e (A, ϕ, ϕ, ϕ') respectivamente. A integração numérica do sistema foi feita na função “*oscillator_integration*”, produzindo as séries temporais em espaço de estados.

A busca do nível de energia adotado para o motor e as figuras com o nível de torque foi realizada pela função “*oscillator_variation_of_parameters*”.

¹⁶ As bibliotecas das funções do Grupo de Controle de Oscilações estão disponíveis no endereço: http://web.if.usp.br/controle/sites/web.if.usp.br/controle/files/MATLAB/GCO_Library.zip

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR OSCILLATOR SUBJECTED TO A
% NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====

% Henrique Furia Silva 17/09/2010 V.5 (10/09/2011)

function [ ACCELERATION ] = oscilator_inversion_numeric( csi, gama,
zetta,...
                                kappa, alfa, sigma, upsilon, u, ut,
phi, phit )
% NET TORQUE
motor_coef = [2587.28363999188 ...
              2.79226273142041 -2.32043988850987 0.226417152798865 -
0.0116408711946606 ...
              0.000366491651415408 -7.51597150125723E-06 1.03203639743513E-
07 -9.54805457255448E-10 ...
              5.86755599996755E-12 -2.2936931310257E-14 5.15876849925597E-
17 -5.07920335509582E-20];

grau_var = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12];
motor_var = phit.^grau_var;
motor_torque = motor_var * motor_coef';
reduction = alfa/motor_coef(1);

G_phit = (2-kappa)*(1-kappa)/2 * reduction * motor_torque ...
+ kappa*(2-kappa) * (alfa - (sigma+upsilon)*phit) ...
+ kappa*(kappa-1)/2 * (alfa*exp(-sigma*phit/alfa) - upsilon*phit);

% MASS MATRIX
MASS = [ 1          cos(phi); ...
        cos(phi)   zetta+(cos(phi))^2 ];

% FORCES VECTOR
FORCE = [-u-2*csi*ut+phit^2*sin(phi)-gama ; ...
        phit^2*cos(phi)*sin(phi)-gama*cos(phi)+ G_phit ];

% SYSTEM INVERSION: ACCELERATION = [eta*ultt; lambda*u2tt; phitt];
ACCELERATION = MASS \ FORCE;

end

% Henrique Furia Silva 06/09/2010 V.5 (10/09/2011)

function [ f, v, D ] = eq_oscilator_displacements( t, S, AP )
% [ f ] = gco_eq_oscil_uni( t, S, A )
%
% Equações Diferenciais de Oscilador Mecânico Simples Não Ideal
%
% dx1/dt = x2
% dx2/dt = F(x1, x2, x3, x4)
% dx3/dt = x4
% dx4/dt = G(x1, x2, x3, x4)
%
% Definições
% A = [ csi gama zetta kappa alfa mi ni ] ;
% f = [ dx1/dt ; dx2/dt ; dx3/dt ; dx4/dt ]
% S = [ x1   x2   x3   x4 ]
%
% (c) Henrique Furia Silva (2010)

```

```

% Constants and Parameters
csi = AP(1); gama = AP(2); zetta = AP(3);
kappa = AP(4); alfa = AP(5); sigma = AP(6); upsilon = AP(7);

% Generalized coordinates
u = S(1); ut = S(2); phi = S(3); phit = S(4);

% ACCELERATION VECTOR
[ ACCELERATION ] = oscilator_inversion_numeric( csi, gama, zetta,...
                                                kappa, alfa, sigma, upsilon, u, ut, phi, phit
);

% DYNAMICAL SYSTEM
f = [ut; ...
     ACCELERATION(1); ...
     phit; ...
     ACCELERATION(2)];

end

```

```

% Henrique Furia Silva 05/06/2011 V.5 (10/09/2011)

function [ f ] = eq_oscilator_amplitudes( t, S, AP)

% Constants and Parameters
csi = AP(1); gama = AP(2); zetta = AP(3);
kappa = AP(4); alfa = AP(5); sigma = AP(6); upsilon = AP(7);

% Generalized coordinates
A = S(1); phase = S(2); phi = S(3); phit = S(4);

FI = t + phase;

u = A * sin(FI);
ut = A * cos(FI);

% ACCELERATION VECTOR
[ ACCELERATION ] = oscilator_inversion_numeric( csi, gama, zetta,...
                                                kappa, alfa, sigma, upsilon, u, ut, phi, phit
);

% DYNAMICAL SYSTEM
F1_AMP = u + ACCELERATION(1);
F2_AMP = ACCELERATION(2);

f = [F1_AMP * cos(FI); ...
     -(1/A) * F1_AMP * sin(FI) ; ...
     phit; ...
     F2_AMP ];

end

```

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR OSCILLATOR SUBJECTED TO A
% NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====
% Henrique Furia Silva 11/09/2011 V.5

function [ stationary ] = oscillator_integration ( csi, gama, zetta, ...
                                                kappa, alfa, sigma,
upsilon, X0 , n_iterations )

% Constants and Parameters
AP = [ csi gama zetta kappa alfa sigma upsi ];

% Time definition
% N = [ END START STEP ]
N = [0.01*n_iterations(2) 0 0.01];

[X, T] = GCO_serie_temporal( 'eq_oscilator_displacements.fluxo', AP , N, X0
);

u_stationary = X(end, 1);
ut_stationary = X(end, 2);
phi_stationary1 = X(end, 3);
phit_stationary1 = X(end, 4);

dim_sistema = 4;
XA0 = zeros (1, dim_sistema);
XA0(3) = X0 (3); XA0(4) = X0 (4);

XA0(1) = sqrt ( (X0(1))^2 + (X0(2))^2 );
XA0(2) = atan ( - X0(2) / X0(1) );

[XA, TA] = GCO_serie_temporal( 'eq_oscilator_amplitudes.fluxo', AP , N, XA0
);

A_stationary = XA(end, 1);
phase_stationary = XA(end, 2);
phi_stationary2 = XA(end, 3);
phit_stationary2 = XA(end, 4);

stationary = [u_stationary ut_stationary A_stationary phase_stationary ...
              phi_stationary1 phi_stationary2 ...
              phit_stationary1 phit_stationary2 ];

end

```

```

function [S] = oscilator_variation_of_parameters ( csi, gama, zetta, kappa,
alfa, sigma, upsilon, ...
X0 , n_iterations, a_variations )

% a_variations =[start end pass]
number = (a_variations(2) - a_variations(1)) / (a_variations(3)) + 1;
S = zeros(number , 9);
a_var = a_variations(1);

for j = 1 : number
    alfa1 = a_var*alfa;
    [ stationary ] = oscilator_integration ( csi, gama, zetta, ...
                                            kappa, alfa1, sigma,
upsilon, X0 , n_iterations );
    S(j,9) = a_var;
    S(j,1:8) = stationary;
    a_var = a_var + a_variations(3);

end

figure
plot (S(:, 9) , ...
      S(:, 7) , '-m', 'markersize', 1 )
hold on
plot (S(:, 9) , ...
      S(:, 8) , '-b', 'markersize', 1 )
hold off
xlabel ('\alpha')
ylabel ('\phi')
legend ('u, du/d\tau', 'A, \theta')

end

```

Buscando uma simulação que atravessasse a região de ressonância, foi efetuada uma integração com torque afim, com fator de redução $f_{\alpha} = 0,07$, que corresponde a um fator de torque $\alpha = 1,974642$ ou torque inicial $L_0 = 181,0459 \text{ J}$. As integrações numéricas foram efetuadas para 15000 iterações, partindo da condição inicial:

$$\vec{x}_0 = \begin{bmatrix} -0,1 \\ 0,1 \\ 0,0 \\ 0,4 \end{bmatrix}$$

A frequência em regime permanente obtida da fonte de energia é:

$$\varphi' = 1,0018$$

As séries temporais e espaços de fases são apresentados nas figuras que seguem.

Figura 20 – variáveis (u, u', ϕ, ϕ') – séries temporais; planos de fases.

Figura 21 – variáveis (A, ϕ, ϕ', θ) – séries temporais; planos de fases.

Figura 22 – variáveis (u, u', A, ϕ) – espaços de fases

Figura 23 – energias $(\hat{E}(\phi'), \hat{S}(\phi'))$ – séries temporais; planos de fases.

4 PÓRTICO PLANO NÃO LINEAR NÃO IDEAL

Na Figura 24 é representado um pórtico plano com dois pilares de altura h e rigidez à flexão EI_c e uma viga de comprimento ℓ e rigidez à flexão EI_b .

Figura 24 – Massas concentradas para o pórtico plano

O movimento do pórtico, caracterizado pela evolução das coordenadas generalizadas $\{q_1(t), q_2(t)\}$, é modificado pela rotação de ângulo $\theta \doteq \varphi - \varphi_0$ do eixo de um motor de momento de inércia J acoplado sob a sua base, gerando uma excitação de suportes não ideal na direção vertical.

4.1 Geometria do pórtico

O pórtico tem massa $\bar{m}$ distribuída por unidade de comprimento, de modo que a massa total da estrutura vale:

$$\bar{m} \cdot (2 \cdot h + \ell)$$

Para determinar os campos de deslocamentos dos nós do pórtico, é preciso transformar o sistema contínuo de barras em outro discreto de massa equivalente

com as massas concentradas apenas nos nós. O método de Rayleigh (CLOUGH, PENZIEN; 1993) permite calcular massa, rigidez e amortecimento generalizados para estruturas de barras.

4.1.1 Massas concentradas do pórtico plano

Para determinar a distribuição de massas no pilar, utiliza-se uma função de forma que respeite as condições de contorno essenciais da estrutura. No caso em que a base é engastada, o deslocamento e a rotação devem ser nulos:

$$\psi(0) = 0 \qquad \psi'(0) = 0$$

Uma função de forma que satisfaz a estas condições foi utilizada por Clough e Penzien (1993, página 144) na análise de flambagem de pilares com extremidade livre:

$$\psi(y) = 1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{2 \cdot h}\right)$$

Sendo $\bar{m}$ a massa por unidade de comprimento, a massa concentrada equivalente a ser considerada na extremidade livre do pilar é:

$$m_{\text{topo}} = \bar{m} \cdot \int_0^h [\psi(y)]^2 \cdot dy \qquad m_{\text{topo}} = \bar{m} \cdot \int_0^h \left[1 - \cos\left(\frac{\pi \cdot y}{2 \cdot h}\right)\right]^2 \cdot dy$$

Efetuada-se as integrações da função trigonométrica, obtém-se:

$$m_{\text{topo}} = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \cdot \bar{m} \cdot h$$

O restante da massa do pilar é aplicado na própria base:

$$m_{\text{base}} = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \cdot \bar{m} \cdot h$$

Para a viga biapoiada, os deslocamentos relativos ao eixo são nulos nas extremidades e máximo no meio do vão, onde as rotações são nulas:

$$\psi(0) = 0 \qquad \psi(\ell) = 0 \qquad \psi'\left(\frac{\ell}{2}\right) = 0$$

Uma função de forma que satisfaz a estas condições foi utilizada por Clough e Penzien (1993, página 153) na determinação da frequência natural de vibração de uma viga uniforme:

$$\psi(x) = \sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell}\right)$$

A massa concentrada equivalente a ser considerada no centro da viga é:

$$m_{\text{centro}} = \bar{m} \cdot \int_0^{\ell} [\psi(x)]^2 \cdot dx \qquad m_{\text{centro}} = \bar{m} \cdot \int_0^{\ell} \left[\sin\left(\frac{\pi \cdot x}{\ell}\right) \right]^2 \cdot dx$$

Efetuada-se as integrações da função trigonométrica, obtém-se:

$$m_{\text{centro}} = \frac{1}{2} \cdot \bar{m} \cdot \ell$$

O restante deverá ser considerado igualmente em cada uma das extremidades da viga:

$$m_{\text{extremidade}} = \frac{1}{4} \cdot \bar{m} \cdot \ell$$

Em resumo, a massa $\bar{m}$ do pórtico, distribuída por unidade de comprimento, foi realocada e concentrada nos nós. Nas bases do pórtico, representada pelos nós [4] e [5], a massa resultante é o valor m_{base} de cada um dos pilares:

$$m_4 = m_5 = m_{\text{base}}$$

Representa-se a massa dos nós [4] e [5] pelo símbolo m_0 :

$$m_0 = \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2} \right) \cdot \bar{m} \cdot h \tag{4.1-1}$$

Nos nós [2] e [3], correspondentes aos cantos do pórtico, a massa resultante é a soma das contribuições m_{topo} do topo do pilar com a parcela $m_{\text{extremidade}}$ da extremidade da viga:

$$m_2 = m_3 = m_{\text{topo}} + m_{\text{extremidade}}$$

Representa-se a massa dos nós [2] e [3] pelo símbolo m :

$$m = \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi} \right) \cdot \bar{m} \cdot h + \frac{1}{4} \cdot \bar{m} \cdot \ell \tag{4.1-2}$$

Considera-se ainda a colocação de uma carga accidental M_1 no centro da viga, a qual será somada com a contribuição m_{centro} da carga permanente da viga:

$$m_1 = m_{\text{centro}} + M_1$$

Representa-se a massa total a ser considerada no nó [1] pelo símbolo M:

$$M = \frac{1}{2} \cdot \bar{m} \cdot \ell + M_1 \quad (4.1-3)$$

4.1.2 Deslocamentos na flexão

Os campos de deslocamentos e as coordenadas generalizadas do pórtico plano são apresentados na Figura 25, com destaque para os deslocamentos relativos (q_1, q_2) do ponto central de massa concentrada M e para a rotação φ do eixo do motor:

Figura 25 – Modelo Matemático.

A base do pórtico plano se desloca de acordo com a função:

$$s = r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

A não-linearidade geométrica da estrutura induz deslocamentos longitudinais ao eixo da barra devido à própria flexão. Esses deslocamentos são calculados pela

integração das rotações $\Theta = \frac{dy}{dx}$ correspondentes à linha elástica $y(x)$ ¹⁷ de uma viga simples de comprimento ℓ :

$$\Delta u = \int_0^{\ell} (1 - \cos \Theta) \cdot dx$$

Para rotações $\Theta(x)$ pequenas (LANGENDONCK), pode-se tomar a aproximação por séries de Taylor até grau 2 da função cosseno:

$$\cos \Theta \approx 1 - \frac{\Theta^2}{2!} + \dots$$

O deslocamento horizontal Δu induzido pela flexão de uma barra simples de linha elástica $y(x)$ é obtido pela integração:

$$\Delta u = \frac{1}{2} \cdot \int_0^{\ell} \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 \cdot dx$$

Para o pilar de comprimento h engastado na base sujeito a uma carga horizontal F no topo, a flecha e o deslocamento longitudinal valem:

$$f = \frac{1}{3} \cdot \frac{F \cdot h^3}{EI} \qquad \Delta u = \frac{1}{15} \cdot \frac{F^2 \cdot h^5}{(EI)^2}$$

A combinação destas relações permite obter:

$$\Delta u = \frac{3}{5 \cdot h} \cdot f^2 \tag{4.1-4}$$

Para uma viga de comprimento ℓ apoiada nas extremidades sujeita a uma carga vertical P no meio do vão, a flecha e o deslocamento longitudinal valem:

$$f = \frac{1}{48} \cdot \frac{P \cdot \ell^3}{EI} \qquad \Delta u = \frac{1}{1920} \cdot \frac{P^2 \cdot \ell^5}{(EI)^2}$$

A combinação destas relações permite obter:

$$\Delta u = \frac{6}{5 \cdot \ell} \cdot f^2 \tag{4.1-5}$$

¹⁷ Para integração da linha elástica de barras submetidas à flexão, pode-se recorrer aos livros de Telêmaco Van Langendonck. O livro "Deformações II contém, na página 132, a formulação e, na página 239, aplicações do cálculo de deslocamentos longitudinais.

As relações (4.1-4) e (4.1-5) são utilizadas para determinar os efeitos dos encurtamentos das barras na flexão do pórtico da Figura 25, cujo pilar, de altura h e rigidez à flexão EI_c , é engastado na base e em balanço no topo, de modo que:

$$\Delta h = \frac{3}{5} \cdot \frac{q_1^2}{h}$$

A viga é biapoiada, tendo comprimento ℓ e rigidez à flexão EI_b , de modo que:

$$\Delta \ell = \frac{6}{5} \cdot \frac{q_2^2}{\ell}$$

Deseja-se generalizar as relações acima para outros casos de vinculação para pórticos planos. Genericamente, escreve-se:

$$\Delta h = A \cdot \frac{q_1^2}{h} \qquad \Delta \ell = B \cdot \frac{q_2^2}{\ell} \qquad (4.1-6)$$

Para pórticos com vínculos conforme a Figura 24, as fórmulas (4.1-6) devem ser utilizadas com $A = \frac{3}{5}$ para os pilares e $B = \frac{6}{5}$ para a viga. Assim, os valores dos parâmetros (A,B) serão mantidos nas equações do sistema, para que estas sejam aplicáveis a outros casos.

A seguir são apresentados os deslocamentos totais realizados pelos nós da estrutura durante o movimento do sistema:

$u_1 = q_1$	$v_1 = q_2 + s$
$u_2 = q_1 + \Delta \ell$	$v_2 = s - \Delta h$
$u_3 = q_1 - \Delta \ell$	$v_3 = s - \Delta h$
$u_4 = 0$	$v_4 = s$
$u_5 = 0$	$v_5 = s$

4.1.3 Velocidades generalizadas

As velocidades são determinadas por diferenciação dos deslocamentos no tempo. A fonte de energia não ideal induz as seguintes velocidades:

$$\dot{s} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \qquad \dot{\theta} = \dot{\varphi}$$

A não linearidade geométrica produz velocidades longitudinais atuantes nos eixos das barras:

$$\Delta \dot{h} \doteq \frac{d}{dt}(\Delta h) = 2 \cdot A \cdot \frac{q_1 \cdot \dot{q}_1}{h} \quad \Delta \dot{\ell} \doteq \frac{d}{dt}(\Delta \ell) = 2 \cdot B \cdot \frac{q_2 \cdot \dot{q}_2}{\ell}$$

As velocidades dos nós do pórtico, referenciadas na base do motor, valem:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1 &= \dot{q}_1 & \dot{v}_1 &= \dot{q}_2 + \dot{s} \\ \dot{u}_2 &= \dot{q}_1 + \Delta \dot{\ell} & \dot{v}_2 &= \dot{s} - \Delta \dot{h} \\ \dot{u}_3 &= \dot{q}_1 - \Delta \dot{\ell} & \dot{v}_3 &= \dot{s} - \Delta \dot{h} \\ \dot{u}_4 &= 0 & \dot{v}_4 &= \dot{s} \\ \dot{u}_5 &= 0 & \dot{v}_5 &= \dot{s} \end{aligned}$$

4.2 Funções de Energia

4.2.1 Energia Cinética

A energia cinética total do sistema é a soma dos valores de cada uma das partículas nos nós do pórtico e da fonte de energia

$$T = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^5 m_j \cdot (\dot{u}_j^2 + \dot{v}_j^2) + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\theta}^2$$

O nó [1] do pórtico concentra uma massa M definida em (4.1-3); os nós [2] e [3] concentram massas $m_2 = m$ e $m_3 = m$ definidas em (4.1-2); os nós [4] e [5] da base concentram massas $m_4 = m_5 = m_0$ definidas em **(3.5-3)**. Substituindo-se as expressões das velocidades, resulta:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot M \cdot [\dot{q}_1^2 + (\dot{q}_2 + \dot{s})^2] + \frac{1}{2} \cdot m \cdot [(\dot{q}_1 + \Delta \dot{\ell})^2 + (\dot{q}_1 - \Delta \dot{\ell})^2 + 2 \cdot (\dot{s} - \Delta \dot{h})^2] \\ &\quad + \frac{1}{2} \cdot m_0 \cdot [2 \cdot \dot{s}^2] + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

Expandindo os binômios e simplificando, resulta:

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} \cdot [(M + 2 \cdot m) \cdot \dot{q}_1^2 + M \cdot \dot{q}_2^2 + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot \dot{s}^2] \\ &\quad + m \cdot (\Delta \dot{\ell}^2 + \Delta \dot{h}^2) + \dot{s} \cdot (M \cdot \dot{q}_2 - 2 \cdot m \cdot \Delta \dot{h}) + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

4.2.2 Energia de Deformação

Cada uma das barras do pórtico possui uma rigidez equivalente $k_\alpha > 0$ associado ao deslocamento q_α que ocorre na flexão. A energia de deformação do sistema é o trabalho total realizado pelas forças elásticas que se opõem ao movimento:

$$U = \frac{1}{2} \cdot \sum_{j=1}^5 k_j \cdot q_j^2$$

As constantes de rigidez das barras verticais (colunas) e horizontais (vigas) são determinadas pela integração da linha elástica. Elas valem, respectivamente:

$$K_c = C_c \cdot \frac{EI_c}{h^3}$$

$$K_b = C_b \cdot \frac{EI_b}{\ell^3}$$

Para os pilares engastados na base e em balanço no topo, $C_c = 3$. Para a viga biapoiada, $C_b = 48$. A energia de deformação total do pórtico plano vale:

$$U = \frac{1}{2} \cdot [K_c \cdot (q_1 + \Delta\ell)^2 + K_c \cdot (q_1 - \Delta\ell)^2 + K_b \cdot (v_1 - v_2)^2]$$

Como são valores constantes, os parâmetros (K_c, K_b) são mantidos na equação, evitando o uso excessivo de símbolos. Re-organizando os termos, resulta:

$$U = \frac{1}{2} \cdot [2 \cdot K_c \cdot (q_1^2 + \Delta\ell^2) + K_b \cdot (q_2 + \Delta h)^2]$$

4.2.3 Trabalho das forças conservativas

As forças conservativas presentes no modelo são as provenientes de atração gravitacional, pois o trabalho por elas realizado depende somente da trajetória:

$$W_c = -g \cdot \sum_{j=1}^5 m_j \cdot v_j$$

Substituindo-se as expressões das massas e dos deslocamentos, resulta:

$$-W_c = g \cdot [M \cdot (q_2 + s) + 2 \cdot m \cdot (s - \Delta h) + 2 \cdot m_0 \cdot s]$$

4.2.4 Energia Potencial

A energia potencial do sistema é a diferença entre a energia de deformação e o trabalho realizado pelas forças conservativas:

$$V = U - W_c$$

4.2.5 Forças generalizadas não-conservativas

No modelo estão presentes forças não conservativas provenientes de amortecimento, que são opostas ao movimento e proporcionais às respectivas velocidades generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2)$, dissipando energia do sistema:

$$\mathcal{N}_1 = -c_1 \cdot \dot{q}_1$$

$$\mathcal{N}_2 = -c_2 \cdot \dot{q}_2$$

A fonte de energia é definida pela imposição de um torque líquido ao motor, sendo esta a última força generalizada não conservativa:

$$\mathcal{N}_\phi = \tau(\dot{\phi}) = L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})$$

4.2.6 Lagrangiana

A função lagrangiana é a diferença entre a energia potencial e a energia cinética do sistema:

$$\mathcal{L} = T - V$$

Códigos em linguagem matemática simbólica foram escritos para efetuar com segurança as operações algébricas desta tese. A substituição das expressões anteriores permite determinar a lagrangiana em função dos deslocamentos $(q_1, q_2, \phi, s(\phi), \Delta h(q_1), \Delta \ell(q_2))$ e velocidades do modelo:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \frac{1}{2} \cdot \left[(M + 2 \cdot m) \cdot \dot{q}_1^2 + M \cdot \dot{q}_2^2 + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot \dot{s}^2 \right] \\ & + m \cdot (\Delta \dot{\ell}^2 + \Delta \dot{h}^2) + \dot{s} \cdot (M \cdot \dot{q}_2 - 2 \cdot m \cdot \Delta \dot{h}) + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\phi}^2 \\ & - \frac{1}{2} \cdot \left[2 \cdot K_c \cdot (q_1^2 + \Delta \ell^2) + K_b \cdot (q_2 + \Delta h)^2 \right] - g \cdot [M \cdot (q_2 + s) + 2 \cdot m \cdot (s - \Delta h)] \end{aligned}$$

Organizando-se os termos, escreve-se:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \cdot (M + 2 \cdot m) \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{q}_2^2 + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\varphi}^2 \\ & + \frac{1}{2} \cdot (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot \dot{s}^2 + m \cdot (\Delta \dot{\ell}^2 + \Delta \dot{h}^2 - 2 \cdot \Delta \dot{h} \cdot \dot{s}) + M \cdot \dot{q}_2 \cdot \dot{s} \\ & - K_c \cdot (q_1^2 + \Delta \ell^2) - \frac{1}{2} \cdot K_b \cdot (q_2 + \Delta h)^2 - M \cdot g \cdot q_1 - 2 \cdot m \cdot g \cdot (s - \Delta h)\end{aligned}$$

Os deslocamentos $(s, \Delta h, \Delta \ell)$ e velocidades $(\dot{s}, \Delta \dot{h}, \Delta \dot{\ell})$ foram substituídos nas funções de energia para obter a lagrangiana em função apenas dos graus de liberdade do sistema:

$$s = r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)$$

$$\dot{s} = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$\Delta h = A \cdot \frac{q_1^2}{h}$$

$$\Delta \dot{h} = 2 \cdot A \cdot \frac{q_1 \cdot \dot{q}_1}{h}$$

$$\Delta \ell = B \cdot \frac{q_2^2}{\ell}$$

$$\Delta \dot{\ell} = 2 \cdot B \cdot \frac{q_2 \cdot \dot{q}_2}{\ell}$$

A função “*portic_lagrange*” foi construída a partir do software de matemática computacional Matlab 7.11 para:

- Calcular as funções de energia em função das coordenadas generalizadas;
- Efetuar a expansão dos termos da lagrangiana;
- Introduzir as forças não conservativas;
- Determinar as equações de movimento.

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR GEOMETRIC PORTIC PLANE SUBJECTED TO
% A NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====
% Henrique Furia Silva 08/03/2011 V.5 (11/09/2011)

function [Lag, Equations]=portic_lagrange()

% Definition of the constants
syms M m m0 J L H r phi0 g c1 c2
syms A B
syms Kc Kb

% Definition of the generalized coordinates and Torque
syms q1 qlt qltt q2 q2t q2tt phi phit phitt Tau

% 1) DISPLACEMENTS AND VELOCITIES

% Caused by to the non ideal energy source
s = r * (sin(phi)-sin(phi0));
st = r * phit * cos(phi);

% Considering the geometrical nonlinearity in bending
DH = A*q1^2/H;      DHt = 2*A*q1*qlt/H;
DL = B*q2^2/L;      DLt = 2*B*q2*q2t/L;

% 2) KINETIC ENERGY
T = (1/2)*( (M+2*m)*qlt^2 + M*q2t^2 + (M+2*m+2*m0)*st^2 )...
    + m*(DLt^2 + DHt^2) + st*(M*q2t - 2*m*DHT) +(1/2)*J*phit^2;

% 3) POTENTIAL ENERGY

% STRAIN ENERGY
% Stiffness EIC of the column and Eb of the stud
U = (1/2)*( 2*Kc*(q1^2 + DL^2) + Kb*(q2 + DH)^2 );

% WORK OF POTENTIAL FORCES (REV.5)
Wc = - g*( M*(q2+s) + 2*m*(s-DH) + 2*m0*s );

% POTENTIAL ENERGY
V = U - Wc;

% 4) NON POTENTIAL FORCES
N = [-c1*qlt , -c2*q2t, Tau];

% 5) LAGRANGIAN
Lag = T - V;

% 6) EQUATIONS OF MOTION
variables = [q1 qlt qltt q2 q2t q2tt phi phit phitt];

EQ = Lagrange(Lag,variables);
Equations = EQ - N;

End

```

4.3 Determinação do Sistema Dinâmico

Com as funções de energia e os elementos de dissipação de energia, é possível produzir as equações de movimento nas variáveis $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{\phi})$ e transformá-las em equações diferenciais em espaço de estados nas variáveis $(q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \phi, \dot{\phi})$.

4.3.1 Equações de Lagrange

As equações de Euler-Lagrange devem ser aplicadas para cada uma das coordenadas generalizadas deste problema. A função lagrangiana, que é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial, tem dimensão de trabalho ou energia.

As derivações da lagrangiana relativas às coordenadas cartesianas (q_1, q_2) produzem termos com dimensão de força:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} + \mathcal{N}_1 \qquad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} + \mathcal{N}_2$$

As derivações da lagrangiana relativas à coordenada angular ϕ produzem termos com dimensão de trabalho, energia ou torque:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi} + \mathcal{N}_\phi$$

Na preparação para a análise do sistema é importante efetuar as devidas manipulações algébricas para contornar esta divergência de dimensões.

4.3.2 Equações diferenciais de movimento

A lagrangiana do sistema é uma função nas variáveis $\mathcal{L} = \mathcal{L}(q_1, q_2, \varphi, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{\varphi})$:

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = & \frac{1}{2} \cdot (M + 2 \cdot m) \cdot \dot{q}_1^2 + \frac{1}{2} \cdot M \cdot \dot{q}_2^2 + m \cdot \left(4 \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^2 \cdot \dot{q}_2^2}{\ell^2} + 4 \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2 \cdot \dot{q}_1^2}{h^2} \right) \\ & + \frac{1}{2} \cdot J \cdot \dot{\varphi}^2 + \frac{1}{2} \cdot (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot (\cos \varphi)^2 - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1 \cdot \dot{q}_1}{h} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + M \cdot \dot{q}_2 \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \\ & - K_c \cdot \left(q_1^2 + B^2 \cdot \frac{q_2^4}{\ell^2} \right) - \frac{1}{2} \cdot K_b \cdot \left(q_2 + A \cdot \frac{q_1^2}{h} \right)^2 - g \cdot \left[M \cdot q_2 - 2 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1^2}{h} \right] - (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot g \cdot r \cdot (\sin \varphi - \sin \varphi_0)\end{aligned}$$

A derivação com relação às coordenadas generalizadas (q_1, q_2, φ) resulta em:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_1} = m \cdot \left(8 \cdot A^2 \cdot \frac{q_1 \cdot \dot{q}_1^2}{h^2} - 4 \cdot A \cdot \frac{\dot{q}_1}{h} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi \right) - 2 \cdot K_c \cdot q_1 - K_b \cdot \left(q_2 + A \cdot \frac{q_1^2}{h} \right) \cdot 2 \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} + 4 \cdot m \cdot g \cdot A \cdot \frac{q_1}{h}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_2} = 8 \cdot m \cdot B^2 \cdot \frac{q_2 \cdot \dot{q}_2^2}{\ell^2} - 4 \cdot K_c \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^3}{\ell^2} - K_b \cdot \left(q_2 + A \cdot \frac{q_1^2}{h} \right) - M \cdot g$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \varphi} = -(M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1 \cdot \dot{q}_1}{h} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - M \cdot \dot{q}_2 \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \sin \varphi - (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot g \cdot r \cdot \cos \varphi$$

A derivação com relação às velocidades generalizadas $(\dot{q}_1, \dot{q}_2, \dot{\varphi})$ resulta em:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} = (M + 2 \cdot m) \cdot \dot{q}_1 + 8 \cdot m \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2 \cdot \dot{q}_1}{h^2} - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} = M \cdot \dot{q}_2 + 8 \cdot m \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^2 \cdot \dot{q}_2}{\ell^2} + M \cdot r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\varphi}} = (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r^2 \cdot \dot{\varphi} \cdot (\cos \varphi)^2 + J \cdot \dot{\varphi} - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1 \cdot \dot{q}_1}{h} \cdot r \cdot \cos \varphi + M \cdot \dot{q}_2 \cdot r \cdot \cos \varphi$$

Efetuada-se as variações no tempo das expressões anteriores, obtêm-se:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_1} \right) = (M + 2 \cdot m) \cdot \ddot{q}_1 + 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot (2 \cdot q_1 \cdot \dot{q}_1^2 + q_1^2 \cdot \ddot{q}_1) - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot (\dot{q}_1 \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos \varphi + q_1 \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - q_1 \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_2} \right) = M \cdot \ddot{q}_2 + 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot (2 \cdot q_2^2 \cdot \dot{q}_2 + q_2^2 \cdot \ddot{q}_2) + M \cdot r \cdot (\ddot{\varphi} \cdot \cos \varphi - \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = J \cdot \ddot{\phi} + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r^2 \cdot [\ddot{\phi} \cdot (\cos \varphi)^2 - 2 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi] - 4 \cdot m \cdot \frac{A}{h} \cdot r \cdot (\dot{q}_1^2 \cdot \cos \varphi + q_1 \cdot \ddot{q}_1 \cdot \cos \varphi - q_1 \cdot \dot{q}_1 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi) + M \cdot r \cdot (\ddot{q}_2 \cdot \cos \varphi - \dot{q}_2 \cdot \dot{\phi} \cdot \sin \varphi)$$

Três equações diferenciais não lineares de movimento e acopladas nas variáveis (q_1, q_2, φ) são obtidas agrupando-se os termos nas equações de Lagrange:

$$(M + 2 \cdot m) \cdot \ddot{q}_1 + 2 \cdot \left(K_c - 2 \cdot m \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right) \cdot q_1 = -8 \cdot m \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \cdot \ddot{q}_1 + 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \ddot{\phi} - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot q_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \varphi - 8 \cdot m \cdot A^2 \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h^2} \cdot q_1 - 2 \cdot K_b \cdot \left(A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot q_2 + A^2 \cdot \frac{q_1^3}{h^2} \right) - c_1 \cdot \dot{q}_1 \quad (4.3-1)$$

$$M \cdot \ddot{q}_2 + K_b \cdot q_2 = -8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot q_2^2 \cdot \ddot{q}_2 - M \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \ddot{\phi} + M \cdot r \cdot (\dot{\phi}^2 \cdot \sin \varphi) - 8 \cdot m \cdot B^2 \cdot \frac{\dot{q}_2^2}{\ell^2} \cdot q_2 - 4 \cdot K_c \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^3}{\ell^2} - K_b \cdot A \cdot \frac{q_1^2}{h} - M \cdot g - c_2 \cdot \dot{q}_2 \quad (4.3-2)$$

$$J \cdot \ddot{\phi} = L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) + 4 \cdot m \cdot A \cdot r \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{q}_1 - M \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{q}_2 + 4 \cdot m \cdot r \cdot A \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h} \cdot \cos \varphi - (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r^2 \cdot \ddot{\phi} \cdot (\cos \varphi)^2 + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r^2 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi - (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot g \cdot r \cdot \cos \varphi \quad (4.3-3)$$

4.3.3 Sistema algébrico adimensional

O sistema ainda não está apresentado em espaço de estados, pois as variáveis $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{\phi})$ estão presentes em cada uma das equações. Além disto, (4.3-1) e (4.3-2) têm dimensão de força, enquanto que (4.3-3) tem dimensão de torque. Isto é resolvido dividindo-a por r . Ao isolar as variáveis $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, r \cdot \ddot{\phi})$ no mesmo lado das equações obtêm-se:

$$\left(M + 2 \cdot m + 8 \cdot m \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \right) \cdot \ddot{q}_1 - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \ddot{\phi} = -4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot q_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \varphi - 8 \cdot m \cdot A^2 \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h^2} \cdot q_1 - 2 \cdot \left(K_c - 2 \cdot m \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right) \cdot q_1 - 2 \cdot K_b \cdot \left(A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot q_2 + A^2 \cdot \frac{q_1^3}{h^2} \right) - c_1 \cdot \dot{q}_1 \quad (4.3-4)$$

$$\left(M + 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot q_2^2 \right) \cdot \ddot{q}_2 + M \cdot \cos \varphi \cdot r \cdot \ddot{\phi} = M \cdot r \cdot (\dot{\phi}^2 \cdot \sin \varphi) - 8 \cdot m \cdot B^2 \cdot \frac{\dot{q}_2^2}{\ell^2} \cdot q_2 - 4 \cdot K_c \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^3}{\ell^2} - K_b \cdot \left(q_2 + A \cdot \frac{q_1^2}{h} \right) - M \cdot g - c_2 \cdot \dot{q}_2 \quad (4.3-5)$$

$$-4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{q}_1 + M \cdot \cos \varphi \cdot \ddot{q}_2 + \left[\frac{J}{r^2} + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot (\cos \varphi)^2 \right] \cdot (r \cdot \ddot{\phi}) = \frac{L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})}{r} + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h} \cdot \cos \varphi - (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot g \cdot \cos \varphi \quad (4.3-6)$$

As equações (4.3-4), (4.3-5) e (4.3-6) formam um sistema algébrico linear nas variáveis $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, r \cdot \ddot{\phi})$, que pode ser escrito com notação matricial:

$M + 2 \cdot m \cdot \left(1 + 4 \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \right)$	0	$-4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi$	$\begin{bmatrix} \ddot{q}_1 \\ \ddot{q}_2 \\ r \cdot \ddot{\phi} \end{bmatrix} =$	$-c_1 \cdot \dot{q}_1 - 2 \cdot \left(K_c - 2 \cdot m \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right) \cdot q_1 - \left[2 \cdot K_b \cdot \left(A \cdot \frac{\ell}{h} \cdot \frac{q_2}{\ell} + A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \right) + 4 \cdot m \cdot \left(A \cdot \frac{r}{h} \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \varphi + 2 \cdot A^2 \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h^2} \right) \right] \cdot q_1$
0	$M + 8 \cdot m \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^2}{\ell^2}$	$M \cdot \cos \varphi$		$-c_2 \cdot \dot{q}_2 - K_b \cdot q_2 - 4 \cdot B^2 \cdot \left(K_c \cdot \frac{q_2^2}{\ell^2} + 2 \cdot m \cdot \frac{\dot{q}_2^2}{\ell^2} \right) \cdot q_2 - K_b \cdot A \cdot \frac{q_1^2}{h} + M \cdot r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \varphi - M \cdot g$
$-4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi$	$M \cdot \cos \varphi$	$\frac{J}{r^2} + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot (\cos \varphi)^2$		$\frac{L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})}{r} + (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot r \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h} \cdot \cos \varphi - (M + 2 \cdot m + 2 \cdot m_0) \cdot g \cdot \cos \varphi$

As frequências naturais da estrutura são definidas conforme os termos da parte puramente conservativa do sistema; as respectivas taxas de amortecimento são definidas conforme os termos das forças não conservativas lineares com as velocidades. Observando-se os termos das equações (4.3-1) e (4.3-2) relacionados à massa e rigidez, escreve-se:

$$\omega_1^2 = \frac{2 \cdot \left(K_c - 2 \cdot m \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right)}{M + 2 \cdot m} \quad \omega_2^2 = \frac{K_b}{M} \quad \frac{c_1}{M + 2 \cdot m} = 2 \cdot \xi_1 \cdot \omega_1 \quad \frac{c_2}{M} = 2 \cdot \xi_2 \cdot \omega_2 \quad (4.3-7)$$

A inversão deste sistema algébrico é efetuada com o auxílio de software de matemática computacional; para facilitar o processo de integração numérica, dando consistência dimensional ao equacionamento, é conveniente utilizar grandezas adimensionais, o que pode ser obtido com a divisão dos termos de cada uma das equações do sistema completo pelo fator constante ($M \cdot r$):

$1 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(1 + 4 \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \right)$	0	$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi$	$\cdot \begin{bmatrix} \frac{\ddot{q}_1}{r} \\ \frac{\ddot{q}_2}{r} \\ \ddot{\varphi} \end{bmatrix} =$	$-\frac{c_1}{M} \cdot \frac{\dot{q}_1}{r} - \omega_1^2 \cdot \frac{M + 2 \cdot m}{M} \cdot \frac{q_1}{r} - \left[2 \cdot \frac{K_b}{M} \cdot \left(A \cdot \frac{\ell}{h} \cdot \frac{q_2}{\ell} + A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \right) + 4 \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(A \cdot \frac{r}{h} \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi + 2 \cdot A^2 \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{h^2} \right) \right] \cdot \frac{q_1}{r}$
0	$1 + 8 \cdot \frac{m}{M} \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^2}{\ell^2}$	$\cos \varphi$		$-\frac{c_2}{M} \cdot \frac{\dot{q}_2}{r} - \frac{K_b}{M} \cdot \frac{q_2}{r} - 4 \cdot B^2 \cdot \left(\frac{K_c}{M} \cdot \frac{q_2^2}{\ell^2} + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{\dot{q}_2^2}{\ell^2} \right) \cdot \frac{q_2}{r} - \frac{K_b}{M} \cdot A \cdot \frac{q_1^2}{r \cdot h} + \dot{\varphi}^2 \cdot \sin \varphi - \frac{g}{r}$
$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\frac{J}{M \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot (\cos \varphi)^2$		$\frac{L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})}{M \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{\dot{q}_1^2}{r \cdot h} \cdot \cos \varphi - \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot \frac{g}{r} \cdot \cos \varphi$

As mudanças de variáveis a seguir permitem gerar adimensionais de natureza espacial e temporal:

$$u_1 = \frac{q_1}{h} \quad u_2 = \frac{q_2}{\ell} \quad \tau = \omega_2 \cdot t$$

Pelas regras de diferenciação para funções compostas obtêm-se:

$$\frac{\dot{q}_1}{h} = \dot{u}_1 = \omega_2 \cdot u_1' \quad \frac{\ddot{q}_1}{h} = \ddot{u}_1 = \omega_2^2 \cdot u_1'' \quad \frac{\dot{q}_2}{\ell} = \dot{u}_2 = \omega_2 \cdot u_2' \quad \frac{\ddot{q}_2}{\ell} = \ddot{u}_2 = \omega_2^2 \cdot u_2'' \quad \dot{\varphi} = \omega_2 \cdot \varphi' \quad \ddot{\varphi} = \omega_2^2 \cdot \varphi''$$

Substituindo-se na equação matricial, resulta:

$1 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \right)$	0	$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi$	$\cdot \begin{bmatrix} \frac{h}{r} \cdot \omega_2^2 \cdot u_1'' \\ \frac{\ell}{r} \cdot \omega_2^2 \cdot u_2'' \\ \omega_2^2 \cdot \varphi'' \end{bmatrix} =$
0	$1 + 8 \cdot \frac{m}{M} \cdot B^2 \cdot u_2^2$	$\cos \varphi$	
$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\frac{J}{M \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot (\cos \varphi)^2$	

$-2 \cdot \xi_1 \cdot \omega_1 \cdot \frac{M + 2 \cdot m}{M} \cdot \frac{h}{r} \cdot \omega_2 \cdot u_1' - \omega_1^2 \cdot \frac{M + 2 \cdot m}{M} \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1 - \left[2 \cdot \omega_2^2 \cdot \left(A \cdot \frac{\ell}{h} \cdot u_2 + A^2 \cdot u_1^2 \right) + 4 \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(A \cdot \frac{r}{h} \cdot \omega_2^2 \cdot \varphi'^2 \cdot \sin \varphi + 2 \cdot A^2 \cdot \omega_2^2 \cdot u_1'^2 \right) \right] \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1$
$-2 \cdot \xi_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{\ell}{r} \cdot \omega_2 \cdot u_2' - \omega_2^2 \cdot \frac{\ell}{r} \cdot u_2 - 4 \cdot B^2 \cdot \left[\left(\frac{M + 2 \cdot m}{2 \cdot M} \cdot \omega_1^2 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right) \cdot u_2^2 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \omega_2^2 \cdot u_2'^2 \right] \cdot \frac{\ell}{r} \cdot u_2 - \omega_2^2 \cdot A \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1^2 + \omega_2^2 \cdot \varphi'^2 \cdot \sin \varphi - \frac{g}{r}$
$\frac{L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})}{M \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot \omega_2^2 \cdot \varphi'^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{h}{r} \cdot \omega_2^2 \cdot u_1'^2 \cdot \cos \varphi - \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot \frac{g}{r} \cdot \cos \varphi$

A divisão da equação matricial pelo fator ω_2^2 permite, finalmente, obter um sistema algébrico adimensional:

$1 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2)$	0	$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi$	$\begin{bmatrix} \frac{h}{r} \cdot u_1'' \\ \frac{\ell}{r} \cdot u_2'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} =$
0	$1 + 8 \cdot \frac{m}{M} \cdot B^2 \cdot u_2^2$	$\cos \varphi$	
$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\frac{J}{M \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M}\right) \cdot (\cos \varphi)^2$	

$-2 \cdot \xi_1 \cdot \frac{\omega_1}{\omega_2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M}\right) \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1' - \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M}\right) \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1 - \left[2 \cdot \left(A \cdot \frac{\ell}{h} \cdot u_2 + A^2 \cdot u_1^2\right) + 4 \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(A \cdot \frac{r}{h} \cdot \varphi'^2 \cdot \sin \varphi + 2 \cdot A^2 \cdot u_1'^2\right)\right] \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1$
$-2 \cdot \xi_2 \cdot \frac{\ell}{r} \cdot u_2' - \frac{\ell}{r} \cdot u_2 - 4 \cdot B^2 \cdot \left\{\left[\frac{1}{2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M}\right) \cdot \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \frac{r}{h} \cdot \frac{g}{\omega_2^2 \cdot r} \cdot A\right] \cdot u_2^2 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot u_2'^2\right\} \cdot \frac{\ell}{r} \cdot u_2 - A \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1^2 + \varphi'^2 \cdot \sin \varphi - \frac{g}{\omega_2^2 \cdot r}$
$\frac{L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})}{M \cdot \omega_2^2 \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M}\right) \cdot \varphi'^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{h}{r} \cdot u_1'^2 \cdot \cos \varphi - \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M}\right) \cdot \frac{g}{\omega_2^2 \cdot r} \cdot \cos \varphi$

4.3.4 Parâmetros de Controle

A operação deste sistema em código de programação requer a definição de parâmetros de controle relacionados às massas, dimensões do pórtico, a ressonância entre os modos de vibração, e aceleração da gravidade, de maneira compatível com o capítulo 6:

$$\mu \doteq \frac{m}{M} \quad \mu_0 \doteq \frac{m_0}{M} \quad \lambda \doteq \frac{\ell}{r} \quad \eta \doteq \frac{h}{r} \quad (4.3-8)$$

$$\zeta \doteq \frac{J}{M \cdot r^2} \quad \beta \doteq \frac{\omega_1}{\omega_2} \quad \gamma \doteq \frac{g}{\omega_2^2 \cdot r} \quad (4.3-9)$$

A função adimensional para o torque líquido é definida conforme $\kappa = 1$ para função afim e $\kappa = 0$ para função exponencial:

$$\Gamma(\varphi') \doteq \frac{L(\varphi') - H(\varphi')}{M \cdot \omega_2^2 \cdot r^2} \quad \alpha \doteq \frac{L_0}{M \cdot r^2 \cdot \omega_2^2} \quad \sigma \doteq \frac{\dot{L}_0}{M \cdot r^2 \cdot \omega_2} \quad v \doteq \frac{\dot{H}_0}{M \cdot r^2 \cdot \omega_2} \quad (4.3-10)$$

Com estas definições, obtém-se, finalmente, o sistema algébrico nas variáveis $(u_1'', u_2'', \varphi'')$:

$1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2)$	0	$-4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi$	$\begin{bmatrix} \eta \cdot u_1'' \\ \lambda \cdot u_2'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} =$
0	$1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2$	$\cos \varphi$	
$-4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi$	$\cos \varphi$	$\zeta + (1 + 2 \cdot \mu) \cdot (\cos \varphi)^2$	

$-2 \cdot \xi_1 \cdot \beta \cdot (1 + 2 \cdot \mu) \cdot \eta \cdot u_1' - \beta^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu) \cdot \eta \cdot u_1 - \left[2 \cdot \left(A \cdot \frac{\lambda}{\eta} \cdot u_2 + A^2 \cdot u_1^2\right) + 4 \cdot \mu \cdot \left(A \cdot \frac{1}{\eta} \cdot \varphi'^2 \cdot \sin \varphi + 2 \cdot A^2 \cdot u_1'^2\right)\right] \cdot \eta \cdot u_1$
$-2 \cdot \xi_2 \cdot \lambda \cdot u_2' - \lambda \cdot u_2 - 2 \cdot B^2 \cdot \left\{\left[(1 + 2 \cdot \mu) \cdot \beta^2 + 4 \cdot \frac{\mu}{\eta} \cdot \gamma \cdot A\right] \cdot u_2^2 + 4 \cdot \mu \cdot u_2'^2\right\} \cdot \lambda \cdot u_2 - A \cdot \eta \cdot u_1^2 + \varphi'^2 \cdot \sin \varphi - \gamma$
$\Gamma(\varphi') + (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot \varphi'^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot \mu \cdot A \cdot \eta \cdot u_1'^2 \cdot \cos \varphi - (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot \gamma \cdot \cos \varphi$

4.3.5 Inversão do sistema algébrico

Na notação matricial, escreve-se $[M] \cdot \{U''\} = \{F\}$. O vetor de acelerações $\{U''\}$ e a matriz $[M]$ de massas são definidos por:

$$\{U''\} \doteq \begin{bmatrix} \eta \cdot u_1'' \\ \lambda \cdot u_2'' \\ \varphi'' \end{bmatrix} \quad [M] \doteq \begin{bmatrix} 1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) & 0 & -4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi \\ 0 & 1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 & \cos \varphi \\ -4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot \cos \varphi & \cos \varphi & \zeta + (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot (\cos \varphi)^2 \end{bmatrix}$$

O vetor de forças é definido por:

$$\{F\} \doteq \begin{bmatrix} -2 \cdot \xi_1 \cdot \beta \cdot (1 + 2 \cdot \mu) \cdot \eta \cdot u_1' - \beta^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu) \cdot \eta \cdot u_1 - \left[2 \cdot (A \cdot \lambda \cdot u_2 + \eta \cdot A^2 \cdot u_1^2) + 4 \cdot \mu \cdot (A \cdot \varphi'^2 \cdot \sin \varphi + 2 \cdot \eta \cdot A^2 \cdot u_1'^2) \right] \cdot u_1 \\ -2 \cdot \xi_2 \cdot \lambda \cdot u_2' - \lambda \cdot u_2 - 2 \cdot B^2 \cdot \left\{ \left[(1 + 2 \cdot \mu) \cdot \beta^2 + 4 \cdot \frac{\mu}{\eta} \cdot \gamma \cdot A \right] \cdot u_2^2 + 4 \cdot \mu \cdot u_2'^2 \right\} \cdot \lambda \cdot u_2 - A \cdot \eta \cdot u_1^2 + \varphi'^2 \cdot \sin \varphi - \gamma \\ \Gamma(\varphi') + (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot \varphi'^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi + 4 \cdot \mu \cdot A \cdot \eta \cdot u_1'^2 \cdot \cos \varphi - (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot \gamma \cdot \cos \varphi \end{bmatrix}$$

A matriz de massas é simétrica em relação à diagonal principal, como era de se esperar neste tipo de problema; o determinante $\Delta \doteq \det([M])$ pode ser calculado pela regra de Carros:

$$\Delta = \left[1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \right] \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot \left[\zeta + (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot (\cos \varphi)^2 \right] - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot (\cos \varphi)^2 \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] - \left[1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \right] \cdot (\cos \varphi)^2$$

Expandindo alguns termos, obtém-se:

$$\Delta = \left[1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \right] \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot \zeta + \left\{ \left[1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \right] \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] - \left[1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \right] \cdot (\cos \varphi)^2 \right\}$$

O primeiro termo de Δ é redutível a:

$$\left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot \zeta + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot \zeta$$

$$\zeta + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \mu + 2 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right]$$

$$\zeta + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 2 \cdot \zeta \cdot \mu + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2$$

$$\zeta \cdot (1 + 2 \cdot \mu) + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 64 \cdot \zeta \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2$$

O termo de Δ entre chaves é redutível a:

$$\left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \cdot \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 1 - 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2)$$

$$-1 + \left[1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \right] \cdot \left[(1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \right] + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \cdot \left[(1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2) \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 1 \right]$$

$$2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \cdot \left[(1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \right] + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \cdot \left[-1 + (1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2) \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \right]$$

$$2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 - 16 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2) \cdot [2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0)]$$

$$4 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot B^2 \cdot u_2^2 - 128 \cdot \mu^3 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 8 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot [2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0)]$$

$$4 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 16 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot \mu_0 - 128 \cdot \mu^3 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 64 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0)$$

$$4 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 16 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 64 \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 128 \cdot \mu^2 \cdot \mu_0 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2$$

$$4 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 8 \cdot \mu \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 16 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 64 \cdot \mu^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu_0) \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2$$

O agrupamento conveniente dos termos permite reduzir o determinante a:

$$\Delta = \zeta \cdot (1 + 2 \cdot \mu) + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 8 \cdot \zeta \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 64 \cdot \zeta \cdot \mu^2 \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2 + [4 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0 + 16 \cdot \mu \cdot \mu_0 \cdot A^2 \cdot u_1^2 + 8 \cdot \mu \cdot (1 + 2 \cdot \mu + 2 \cdot \mu_0) \cdot B^2 \cdot u_2^2 + 64 \cdot \mu^2 \cdot (1 + 2 \cdot \mu_0) \cdot A^2 \cdot u_1^2 \cdot B^2 \cdot u_2^2] \cdot (\cos \varphi)^2$$

As constantes $\{\mu, \mu_0, \zeta, A^2, B^2\}$ dependem das propriedades físicas inerciais do pórtico e do motor, sendo números positivos, igualmente às formas quadráticas $\{u_1^2, u_2^2, (\cos \varphi)^2\}$. Portanto, o determinante é uma soma de termos positivos, o que é compatível com uma matriz de massas; escreve-se:

$$\Delta = [\Delta(\mu, \mu_0, \zeta, A^2, B^2)](u_1^2, u_2^2, (\cos \varphi)^2)$$

Como o determinante nunca será nulo, o sistema algébrico é inversível; escreve-se:

$$\{F\} = [M] \cdot \{U''\} \quad \{U''\} = [M]^{-1} \cdot \{F\}$$

A matriz de massas e o vetor de forças são definidos na função “*portic_matrix*”. A inversão algébrica do sistema dinâmico é efetuada na função “*portic_algebric*”:

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR GEOMETRIC PORTIC PLANE SUBJECTED TO A NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====

% Henrique Furia Silva 25/07/2011 REV.5 (11/09/2011)

function [MASS, FORCE]=portic_matrix()

% PARAMETERS DEFINITION
syms A B csil csi2 betta gama mi mi0 lambda eta zetta

% GENERALIZED COORDINATES AND TORQUE
syms u1 ult u2 u2t phi phit G_phi

% MASS MATRIX
MASS = [1 + 2*mi*(1+4*A^2*u1^2) , 0, -4*mi*A*u1*cos(phi);...
        0, 1+8*mi*B^2*u2^2, cos(phi); ...
        -4*mi*A*u1*cos(phi), cos(phi), zetta+(1+2*mi+2*mi0)*(cos(phi))^2];

% FORCES VECTOR
FORCE = [-2*csil*betta*(1+2*mi)*eta*ult-betta^2*(1+2*mi)*eta*u1-(2*(A*lambda*u2 +eta*A^2*u1^2)+4*mi*(A*phit^2*sin(phi)+2*eta*A^2*ult^2))*u1;...
        -2*csi2*lambda*u2t-lambda*u2-A*eta*u1^2+phit^2*sin(phi)-gama-2*B^2*((1+2*mi)*betta^2+4*mi/eta*gama*A)*u2^2+4*mi*u2t^2)*lambda*u2;...
        (1+2*mi+2*mi0)*phit^2*cos(phi)*sin(phi)+4*mi*A*eta*ult^2*cos(phi)-(1+2*mi+2*mi0)*gama*cos(phi)+G_phi];

end

```

```

% Henrique Furia Silva 17/04/2011 REV.5 (11/09/2011)

function [MASS, DELTA, DELTA_MASS_INV, DELTA_ACCELERATION] = portic_algebraic()

% PARAMETERS DEFINITION
syms A B csil csi2 betta gama mi lambda eta zetta

% GENERALIZED COORDINATES AND TORQUE
syms u1 ult u2 u2t phi phit G_phi

% MASS MATRIX AND FORCES VECTOR
[MASS, FORCE]=portic_matrix();

% SYSTEM INVERSION
DELTA = det(MASS);
DELTA_MASS_INV = DELTA*(MASS)^(-1);

DELTA_ACCELERATION = DELTA_MASS_INV * FORCE;

end

```

A matriz inversa $[M]^{-1}$ vale:

$$[M]^{-1} = \frac{1}{\Delta} \cdot \begin{array}{|c|c|c|} \hline \begin{array}{c} 2 \cdot \mu \cdot (\cos \varphi)^2 \cdot [1 + 4 \cdot (1 + 2 \cdot \mu) \cdot B^2 \cdot u_2^2] \\ + 2 \cdot \mu_0 \cdot (\cos \varphi)^2 \cdot [1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2] \\ + \zeta \cdot (1 + 8 \cdot B^2 \cdot \mu \cdot u_2^2) \end{array} & \begin{array}{c} -4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot (\cos \varphi)^2 \end{array} & \begin{array}{c} 4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot (\cos \varphi) \cdot (1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2) \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} -4 \cdot \mu \cdot A \cdot u_1 \cdot (\cos \varphi)^2 \end{array} & \begin{array}{c} + \zeta \cdot [1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2)] \\ + [1 + 4 \cdot \mu + 4 \cdot \mu^2 + 2 \cdot \mu_0 + 2 \cdot \mu_0 \cdot \mu] \cdot (\cos \varphi)^2 \\ + 8 \cdot \mu \cdot A^2 \cdot u_1^2 \end{array} & \begin{array}{c} -\cos \varphi \cdot [1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2)] \end{array} \\ \hline \begin{array}{c} 4 \cdot \mu \cdot (\cos \varphi) \cdot (1 + 8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2) \cdot A \cdot u_1 \end{array} & \begin{array}{c} -\cos \varphi \cdot [1 + 2 \cdot \mu \cdot (1 + 4 \cdot A^2 \cdot u_1^2)] \end{array} & \begin{array}{c} 8 \cdot A^2 \cdot \mu \cdot u_1^2 \cdot (8 \cdot \mu \cdot B^2 \cdot u_2^2) \\ + (1 + 2 \cdot \mu) \cdot [1 + 8 \cdot B^2 \cdot \mu \cdot u_2^2] \end{array} \\ \hline \end{array}$$

As acelerações são determinadas pela inversão do sistema algébrico:

$$u_1'' = \frac{1}{\eta} \cdot \{U''\}_{j_1} = F_1(u_1, u_1', u_2, u_2', \varphi, \varphi')$$

$$u_2'' = \frac{1}{\lambda} \cdot \{U''\}_{j_2} = F_2(u_1, u_1', u_2, u_2', \varphi, \varphi')$$

$$\varphi'' = \{U''\}_{j_3} = F_3(u_1, u_1', u_2, u_2', \varphi, \varphi')$$

Efetuada-se a multiplicação de matrizes definida por $\{U''\} = [M]^{-1} \cdot \{F\}$, obtêm-se as acelerações do sistema.

Nas análises efetuadas neste trabalho, a inversão do sistema e as suas respectivas integrações foram feitas numericamente. A função “*portic_inversion_numeric*” contém a função de torque líquido, a matriz de massas e o vetor de forças, fornecendo como resposta o vetor de acelerações:

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR GEOMETRIC PORTIC PLANE SUBJECTED TO A NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====

% Henrique Furia Silva 25/07/2011 V.5.2 (12/09/2011)

function [ ACCELERATION ] = portic_inversion_numeric( A, B, csil, csi2, betta, gama, mi, mi0, lambda, eta, zetta,...
                                                    kappa, alfa, sigma, upsilon, u1, ult, u2, u2t, phi, phit )

% NET TORQUE
motor_coef = [2587.28363999188 ...
              2.79226273142041 -2.32043988850987 0.226417152798865 -0.0116408711946606 0.000366491651415408 ...
              -7.51597150125723E-06 1.03203639743513E-07 -9.54805457255448E-10 5.86755599996755E-12 -2.2936931310257E-14 5.15876849925597E-17 -5.07920335509582E-20];
grau_var = [0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12];
motor_var = phit.^grau_var; motor_torque = motor_var * motor_coef'; reduction = alfa/motor_coef(1);
G_phit = (2-kappa)*(1-kappa)/2 * reduction * motor_torque + kappa*(2-kappa) * (alfa - (sigma+upsilon)*phit) + kappa*(kappa-1)/2 * (alfa*exp(-sigma*phit/alfa) - upsilon*phit);

% MASS MATRIX
MASS = [1 + 2*mi*(1+4*A^2*u1^2) , 0, -4*mi*A*u1*cos(phi);...
        0, 1+8*mi*B^2*u2^2, cos(phi); ...
        -4*mi*A*u1*cos(phi), cos(phi), zetta+(1+2*mi+2*mi0)*(cos(phi))^2];

% FORCES VECTOR
FORCE = [-2*csil*betta*(1+2*mi)*eta*ult-betta^2*(1+2*mi)*eta*u1-(2*(A*lambda*u2 +eta*A^2*u1^2)+4*mi*(A*phit^2*sin(phi)+2*eta*A^2*ult^2))*u1;...
         -2*csi2*lambda*u2t-lambda*u2-A*eta*u1^2+phit^2*sin(phi)-gama-2*B^2*((1+2*mi)*betta^2+4*mi/eta*gama*A)*u2^2+4*mi*u2t^2)*lambda*u2;...
         (1+2*mi+2*mi0)*phit^2*cos(phi)*sin(phi)+4*mi*A*eta*ult^2*cos(phi)-(1+2*mi+2*mi0)*gama*cos(phi)+G_phit];

% SYSTEM INVERSION: ACCELERATION = [eta*ultt; lambda*u2tt; phitt];
ACCELERATION = MASS \ FORCE;

end

% Henrique Furia Silva 23/05/2011 REV.5 (12/09/2011)

function [ f ] = eq_portic_displacements( t, S, AP)

% Constants and Parameters
A = AP(1); B = AP(2); csil = AP(3); csi2 = AP(4); betta = AP(5); gama = AP(6);
mi = AP(7); mi0 = AP(8); lambda = AP(9); eta = AP(10); zetta = AP(11); kappa = AP(12); alfa = AP(13); sigma = AP(14); upsilon = AP(15);

% Generalized coordinates
u1 = S(1); ult = S(2); u2 = S(3); u2t = S(4); phi = S(5); phit = S(6);

% ACCELERATION VECTOR
[ ACCELERATION ] = portic_inversion_numeric ( A, B, csil, csi2, betta, gama,...
                                              mi, mi0, lambda, eta, zetta, kappa, alfa, sigma, upsilon,...
                                              u1, ult, u2, u2t, phi, phit );

% DYNAMICAL SYSTEM
f = [ult; ...
     (1/eta)*ACCELERATION(1); ...
     u2t; ...
     (1/lambda)*ACCELERATION(2);...
     phit; ...
     ACCELERATION(3)];

end

```

4.4 Análise do regime estacionário

A técnica de perturbação desenvolvida por Kononenko (1969) efetua análises, conforme o item 5.7.2, a partir do sistema original acoplado antes de isolar as acelerações. Considerando-se que, em situações quase estacionárias, a aceleração $\ddot{\phi}$ será pequena (KONONENKO, 1969), poderá ela ser eliminada nas equações (4.3-1), (4.3-2) e (4.3-3):

$$\begin{aligned} (M + 2 \cdot m) \cdot F_1(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, \phi, \dot{\phi}) = & -4 \cdot m \cdot \frac{A}{h} \cdot r \cdot q_1 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi - 2 \cdot K_b \cdot \frac{A}{h} \cdot q_1 \cdot q_2 - c_1 \cdot \dot{q}_1 \\ & - 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot q_1^2 \cdot \ddot{q}_1 - 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot \dot{q}_1^2 \cdot q_1 - 2 \cdot K_b \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot q_1^3 \end{aligned} \quad (4.4-1)$$

$$\begin{aligned} M \cdot F_2(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, \phi, \dot{\phi}) = & M \cdot r \cdot (\dot{\phi}^2 \cdot \sin \phi) - K_b \cdot \frac{A}{h} \cdot q_1^2 - M \cdot g - c_2 \cdot \dot{q}_2 \\ & - 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot q_2^2 \cdot \ddot{q}_2 - 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot \dot{q}_2^2 \cdot q_2 - 4 \cdot K_c \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot q_2^3 \end{aligned} \quad (4.4-2)$$

$$\begin{aligned} J \cdot F_3(q_1, \dot{q}_1, \ddot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \ddot{q}_2, \phi, \dot{\phi}) = & L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi}) \\ & + 4 \cdot m \cdot \frac{A}{h} \cdot r \cdot q_1 \cdot \cos \phi \cdot \ddot{q}_1 - M \cdot r \cdot \cos \phi \cdot \ddot{q}_2 + (M + 2 \cdot m) \cdot r^2 \cdot \dot{\phi}^2 \cdot \cos \phi \cdot \sin \phi + 4 \cdot m \cdot r \cdot \frac{A}{h} \cdot \dot{q}_1^2 \cdot \cos \phi - (M + 2 \cdot m) \cdot g \cdot r \cdot \cos \phi \end{aligned} \quad (4.4-3)$$

Estas funções devem ser substituídas nas equações (5.7-13) e integradas com relação a um ciclo completo da variável ϕ :

$$\begin{aligned} \frac{da_1}{d\phi} = & \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega_1} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot F_1[a_1 \cdot \sin(\phi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1), a_2 \cdot \sin(\phi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2), \phi, \Omega] \cdot \cos(\phi + \phi_1) \cdot d\phi \\ \frac{d\phi_1}{d\phi} = & \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega_1} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{a_1 \cdot \Omega} \cdot F_1[a_1 \cdot \sin(\phi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1), a_2 \cdot \sin(\phi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2), \phi, \Omega] \cdot \sin(\phi + \phi_1) \cdot d\phi \end{aligned} \quad (4.4-4)$$

$$\begin{aligned} \frac{da_2}{d\phi} = & \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega_2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot F_2[a_1 \cdot \sin(\phi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1), a_2 \cdot \sin(\phi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2), \phi, \Omega] \cdot \cos(\phi + \phi_2) \cdot d\phi \\ \frac{d\phi_2}{d\phi} = & \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega_2} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{a_2 \cdot \Omega} \cdot F_2[a_1 \cdot \sin(\phi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1), a_2 \cdot \sin(\phi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2), \phi, \Omega] \cdot \sin(\phi + \phi_2) \cdot d\phi \end{aligned} \quad (4.4-5)$$

$$\frac{d\Omega}{d\phi} = \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \frac{1}{\Omega} \cdot F_3[a_1 \cdot \sin(\phi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1), a_2 \cdot \sin(\phi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2), \phi, \Omega] \cdot d\phi \quad (4.4-6)$$

Efetuem-se substituições similares às (5.7-11) e (5.7-12):

$$\begin{aligned} q_1 &= a_1 \cdot \sin(\phi + \phi_1) & \dot{q}_1 &= a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1) & \ddot{q}_1 &= \dot{a}_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\phi + \phi_1) - a_1 \cdot \omega_1 \cdot (\Omega + \dot{\phi}_1) \cdot \sin(\phi + \phi_1) & \ddot{q}_1 &= -a_1 \cdot \omega_1 \cdot \Omega \cdot \sin(\phi + \phi_1) \\ q_2 &= a_2 \cdot \sin(\phi + \phi_2) & \dot{q}_2 &= a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2) & \ddot{q}_2 &= \dot{a}_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\phi + \phi_2) - a_2 \cdot \omega_2 \cdot (\Omega + \dot{\phi}_2) \cdot \sin(\phi + \phi_2) & \ddot{q}_2 &= -a_2 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot \sin(\phi + \phi_2) \\ \frac{d\phi}{dt} &= \Omega \end{aligned}$$

Com estas substituições, as funções (4.4-1), (4.4-2) e (4.4-3) assumem a forma:

$$(M+2 \cdot m) \cdot F_1 \left[\begin{matrix} a_1 \cdot \sin(\varphi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\varphi + \phi_1), \\ a_2 \cdot \sin(\varphi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\varphi + \phi_2), \varphi, \Omega \end{matrix} \right] = -4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot \Omega^2 \cdot a_1 \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \cdot \sin \varphi - 2 \cdot \frac{K_b}{h} \cdot A \cdot a_1 \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \cdot a_2 \cdot \sin(\varphi + \phi_2) - c_1 \cdot a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\varphi + \phi_1) \\ + 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^3 \cdot \omega_1 \cdot \Omega \cdot [\sin(\varphi + \phi_1)]^3 - 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^3 \cdot \omega_1^2 \cdot [\cos(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot \sin(\varphi + \phi_1) - 2 \cdot K_b \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^3 \cdot [\sin(\varphi + \phi_1)]^3$$

$$M \cdot F_2 \left[\begin{matrix} a_1 \cdot \sin(\varphi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\varphi + \phi_1), \\ a_2 \cdot \sin(\varphi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\varphi + \phi_2), \varphi, \Omega \end{matrix} \right] = M \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \sin \varphi - \frac{K_b}{h} \cdot A \cdot a_1^2 \cdot [\sin(\varphi + \phi_1)]^2 - M \cdot g - c_2 \cdot \dot{q}_2 a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\varphi + \phi_2) \\ + 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^3 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot [\sin(\varphi + \phi_2)]^3 - 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^3 \cdot \omega_2^2 \cdot [\cos(\varphi + \phi_2)]^2 \cdot \sin(\varphi + \phi_2) - 4 \cdot K_c \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^3 \cdot [\sin(\varphi + \phi_2)]^3$$

$$J \cdot F_3 [a_1 \cdot \sin(\varphi + \phi_1), a_1 \cdot \omega_1 \cdot \cos(\varphi + \phi_1), a_2 \cdot \sin(\varphi + \phi_2), a_2 \cdot \omega_2 \cdot \cos(\varphi + \phi_2), \varphi, \Omega] = L(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi}) \\ - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot a_1 \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \cdot \cos \varphi \cdot a_1 \cdot \omega_1 \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \\ + M \cdot r \cdot \cos \varphi \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot \sin(\varphi + \phi_2) + (M+2 \cdot m) \cdot r^2 \cdot \Omega^2 \cdot \cos \varphi \cdot \sin \varphi \\ + 4 \cdot m \cdot \frac{r}{h} \cdot A \cdot a_1^2 \cdot \omega_1^2 \cdot [\cos(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot \cos \varphi - (M+2 \cdot m) \cdot g \cdot r \cdot \cos \varphi$$

Estes elementos são substituídos nas relações integrais (4.4-4), (4.4-5) e (4.4-6):

$$\frac{da_1}{d\varphi} = \frac{1}{(M+2 \cdot m) \cdot \Omega \cdot \omega_1} \cdot \left[-4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot \Omega^2 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \phi_1) \cdot \sin \varphi \cdot \cos(\varphi + \phi_1) \cdot d\varphi - 2 \cdot \frac{K_b}{h} \cdot A \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \phi_1) \cdot \sin(\varphi + \phi_2) \cdot \cos(\varphi + \phi_1) \cdot d\varphi - c_1 \cdot a_1 \cdot \omega_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot d\varphi \right. \\ \left. + \left(8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot \omega_1 \cdot \Omega - 2 \cdot K_b \cdot \frac{A^2}{h^2} \right) \cdot a_1^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\sin(\varphi + \phi_1)]^3 \cdot \cos(\varphi + \phi_1) \cdot d\varphi - 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^3 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + \phi_1)]^3 \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \cdot d\varphi \right]$$

$$\frac{d\phi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{a_1 \cdot (M+2 \cdot m) \cdot \Omega \cdot \omega_1} \cdot \left[-4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot \Omega^2 \cdot a_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot [\sin(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot d\varphi - 2 \cdot \frac{K_b}{h} \cdot A \cdot a_1 \cdot a_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \phi_2) \cdot [\sin(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot d\varphi - c_1 \cdot a_1 \cdot \omega_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi_1) \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \cdot d\varphi \right. \\ \left. + \left(8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot \omega_1 \cdot \Omega - 2 \cdot K_b \cdot \frac{A^2}{h^2} \right) \cdot a_1^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\sin(\varphi + \phi_1)]^4 \cdot d\varphi - 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^3 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot [\sin(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot d\varphi \right]$$

$$\frac{da_2}{d\varphi} = \frac{1}{M \cdot \Omega \cdot \omega_2} \cdot \left[M \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot \cos(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - \frac{K_b}{h} \cdot A \cdot a_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\sin(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot \cos(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - M \cdot g \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - c_2 \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi_2) \cdot \cos(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi \right. \\ \left. + \left(8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot \omega_2 \cdot \Omega - 4 \cdot K_c \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \right) \cdot a_2^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\sin(\varphi + \phi_2)]^3 \cdot \cos(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^3 \cdot \omega_2^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + \phi_2)]^3 \cdot \sin(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi \right]$$

$$\frac{d\phi_2}{d\varphi} = \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{a_2 \cdot M \cdot \Omega \cdot \omega_2} \cdot \left[M \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin \varphi \cdot \sin(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - \frac{K_b}{h} \cdot A \cdot a_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\sin(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot \sin(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - M \cdot g \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi - c_2 \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos(\varphi + \phi_2) \cdot \sin(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi \right. \\ \left. + \left(8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot \omega_2 \cdot \Omega - 4 \cdot K_c \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \right) \cdot a_2^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\sin(\varphi + \phi_2)]^4 \cdot d\varphi - 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^3 \cdot \omega_2^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + \phi_2)]^2 \cdot [\sin(\varphi + \phi_2)]^2 \cdot d\varphi \right]$$

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{1}{J \cdot \Omega} \cdot \left[\begin{aligned} & \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\mathcal{L}(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})] \cdot d\varphi - 4 \cdot m \cdot A \cdot \frac{r}{h} \cdot a_1^2 \cdot \omega_1 \cdot \Omega \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \sin(\varphi + \phi_1) \cdot \cos \varphi \cdot \sin(\varphi + \phi_1) \cdot d\varphi \\ & + M \cdot r \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot \sin(\varphi + \phi_2) \cdot d\varphi + (M + 2 \cdot m) \cdot r^2 \cdot \Omega^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot \sin \varphi \cdot d\varphi \\ & + 4 \cdot m \cdot \frac{r}{h} \cdot A \cdot a_1^2 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} [\cos(\varphi + \phi_1)]^2 \cdot \cos \varphi \cdot d\varphi - (M + 2 \cdot m) \cdot g \cdot r \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} \cos \varphi \cdot d\varphi \end{aligned} \right]$$

Integrando-se no ciclo completo, muitas integrais desaparecem:

$$\frac{da_1}{d\varphi} = \frac{1}{(M + 2 \cdot m) \cdot \Omega \cdot \omega_1} \cdot \left[-c_1 \cdot a_1 \cdot \omega_1 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \right]$$

$$\frac{d\phi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{a_1 \cdot (M + 2 \cdot m) \cdot \Omega \cdot \omega_1} \cdot \left[\left(8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot \omega_1 \cdot \Omega - 2 \cdot K_b \cdot \frac{A^2}{h^2} \right) \cdot a_1^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} - 8 \cdot m \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^3 \cdot \omega_1^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\frac{da_2}{d\varphi} = \frac{1}{M \cdot \Omega \cdot \omega_2} \cdot \left[-M \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot \sin \phi_2 - c_2 \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \right]$$

$$\frac{d\phi_2}{d\varphi} = \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{a_2 \cdot M \cdot \Omega \cdot \omega_2} \cdot \left[M \cdot r \cdot \Omega^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot \cos \phi_2 + \left(8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot \omega_2 \cdot \Omega - 4 \cdot K_c \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \right) \cdot a_2^3 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{3 \cdot \pi}{4} - 8 \cdot m \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^3 \cdot \omega_2^2 \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \frac{\pi}{4} \right]$$

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{1}{J \cdot \Omega} \cdot \left[[\mathcal{L}(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})] + M \cdot r \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot \sin \phi_2 \right]$$

O agrupamento das constantes permite obter:

$$\frac{da_1}{d\varphi} = -\frac{c_1}{2 \cdot (M + 2 \cdot m) \cdot \Omega} \cdot a_1$$

$$\frac{d\phi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega} + \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{K_b}{(M + 2 \cdot m) \cdot \Omega \cdot \omega_1} - \frac{m}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{3 \cdot \Omega - \omega_1}{\Omega} \right] \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^2$$

$$\frac{da_2}{d\varphi} = -\frac{r \cdot \Omega}{2 \cdot \omega_2} \cdot \sin \phi_2 - \frac{c_2}{2 \cdot M \cdot \Omega} \cdot a_2$$

$$\frac{d\phi_2}{d\varphi} = \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega} - \frac{r \cdot \Omega \cdot \cos \phi_2}{2 \cdot a_2 \cdot \omega_2} + \left[\frac{3}{2} \cdot \frac{K_c}{M \cdot \Omega \cdot \omega_2} - \frac{m}{M} \cdot \frac{3 \cdot \Omega - \omega_2}{\Omega} \right] \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^2$$

$$\frac{d\Omega}{d\varphi} = \frac{1}{J \cdot \Omega} \cdot \left\{ [\mathcal{L}(\dot{\varphi}) - H(\dot{\varphi})] + \frac{1}{2} \cdot M \cdot r \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot \sin \phi_2 \right\} \quad (4.4-7)$$

Algumas frequências naturais estão escondidas dentro de expressões que contém rigidez de coluna ou viga. Substituindo-se nas equações, obtêm-se:

$$\frac{da_1}{d\varphi} = -\xi_1 \cdot \frac{\omega_1}{\Omega} \cdot a_1$$

$$\frac{d\phi_1}{d\varphi} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega} + \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{\omega_2^2}{\Omega \cdot \omega_1} - \frac{m}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{3 \cdot \Omega - \omega_1}{\Omega} \right] \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^2 \quad (4.4-8)$$

$$\frac{da_2}{d\varphi} = -r \cdot \frac{\Omega}{2 \cdot \omega_2} \cdot \sin \phi_2 - \xi_2 \cdot \frac{\omega_2}{\Omega} \cdot a_2$$

$$\frac{d\phi_2}{d\varphi} = \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega} - \frac{r}{a_2} \cdot \frac{\Omega}{2 \cdot \omega_2} \cdot \cos \phi_2 + \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{M + 2 \cdot m}{M} \cdot \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega \cdot \omega_2} + \frac{4 \cdot m}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{g}{h \cdot \Omega \cdot \omega_2} \cdot A \right) - \frac{m}{M} \cdot \frac{3 \cdot \Omega - \omega_2}{\Omega} \right] \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^2 \quad (4.4-9)$$

A primeira das equações (4.4-8) mostra que a existência de regime estacionário está condicionada a $\xi_1 = 0$, caso em que a estrutura não está amortecida na direção secundária de vibrações. Não sendo esta a intenção neste trabalho, a análise do regime estacionário mostra que, na verdade, ele não existe de maneira geral. A primeira das equações (4.4-9) permite obter o seno do ângulo de fase principal em função da amplitude:

$$\sin \phi_2 = -2 \cdot \xi_2 \cdot \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \cdot \frac{a_2}{r}$$

Esta relação pode ser substituída na equação (4.4-7) para obter a energia consumida pela estrutura em regime estacionário:

$$[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})] = \xi_2 \cdot M \cdot \frac{\omega_2^3}{\Omega} \cdot a_2^2$$

Este resultado é idêntico ao obtido em (6.6-7), (5.7-7) e (4.6-8), considerando-se a amplitude e frequência (a_2, ω_2) do modo de vibração primário.

As outras equações oferecem maior dificuldade do ponto de vista algébrico, e podem ser simplificadas caso forem desprezados os termos de ordem superior em relação aos deslocamentos longitudinais na flexão. Por serem muito menores comparados aos deslocamentos transversais (q_1, q_2) , eles têm influência ainda mais reduzida em regime estacionário. As relações entre estes deslocamentos são expressas pelas constantes (A, B) , que assumem valores de acordo com as condições de vínculo, tendo sido carregadas ao longo do equacionamento:

$$\begin{aligned} \Delta h &= F_1(A, q_1^2) & \Delta \dot{h} &= F_3(A, q_1, \dot{q}_1) & \Delta \ell &= F_2(B, q_2^2) & \Delta \dot{\ell} &= F_4(B, q_2, \dot{q}_2) \\ \Delta h^2 &= G_1(A^2, q_1^4) & \Delta \dot{h}^2 &= G_3(A^2, q_1^2, \dot{q}_1^2) & \Delta \ell^2 &= G_2(B^2, q_2^4) & \Delta \dot{\ell}^2 &= G_4(B^2, q_2^2, \dot{q}_2^2) \end{aligned}$$

As potências de ordem superior $(q_1^4, q_2^4, \dot{q}_1^2, \dot{q}_2^2)$ têm o grau reduzido no processo de derivação das equações de movimento, mas as constantes $(C, D) \equiv (A^2, B^2)$ permanecem inalteradas, pois são imunes ao processo de derivação. Ou seja, para desprezar os termos de ordem superior, basta reduzir as equações no caso em que $(C, D) = (A^2, B^2) \rightarrow (0, 0)$. Neste caso, a última das equações (4.4-9) permite obter o cosseno do ângulo de fase principal:

$$\sin \phi_2 = -2 \cdot \xi_2 \cdot \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \cdot \frac{a_2}{r} \quad \cos \phi_2 = \frac{2 \cdot \omega_2 (\omega_2 - \Omega)}{\Omega^2} \cdot \frac{a_2}{r} \quad \tan \phi_2 = -\xi_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 - \Omega} \quad (4.4-10)$$

As relações (4.4-10) reproduzem os resultados obtidos em (6.6-2) e (6.6-3). A última das equações (4.4-8) fornece, em regime estacionário, $\omega_1 = \Omega$. Isto significa que o rotor deverá operar com uma velocidade angular ressonante com o modo de vibração secundário, o que faz concluir ser inadequado desprezar os termos de ordem superior com relação aos deslocamentos longitudinais na flexão.

As expressões (4.4-8), (4.4-11) e (4.4-12) podem ser escritas em função dos parâmetros adimensionais. Valem as seguintes relações entre as frequências:

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \beta \quad \frac{\Omega}{\omega_2} = \phi' \quad \frac{\Omega}{\omega_1} = \frac{\phi'}{\beta} \quad \frac{\omega_2}{\Omega} = \frac{1}{\phi'} \quad \frac{\omega_1}{\Omega} = \frac{\beta}{\phi'}$$

Substituindo-se os parâmetros definidos em (4.3-8), (4.3-9) e a função de torque adimensional definida em (4.3-10), obtêm-se:

$$\frac{dA_1}{d\phi} = -\xi_1 \cdot \frac{\beta}{\phi'} \cdot A_1 \quad \frac{d\phi_1}{d\phi} = \frac{\beta}{\phi'} - 1 + \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{1}{1+2 \cdot \mu} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \phi'} - \frac{\mu}{1+2 \cdot \mu} \cdot \left(3 - \frac{\beta}{\phi'} \right) \right] \cdot A^2 \cdot A_1^2 \quad (4.4-13)$$

$$\frac{dA_2}{d\varphi} = -\frac{1}{\lambda} \cdot \frac{\varphi'}{2} \cdot \sin\phi_2 - \xi \cdot \frac{1}{\varphi'} \cdot A_2 \quad \frac{d\phi_2}{d\varphi} = \frac{1}{\varphi'} - 1 - \frac{1}{A_2} \cdot \frac{\varphi'}{2} \cdot \cos\phi_2 + \left[\frac{3}{4} \cdot (1+2 \cdot \mu) \cdot \left(\frac{\beta^2}{\varphi'} + \frac{4 \cdot \mu}{1+2 \cdot \mu} \cdot \frac{\gamma}{\eta} \cdot \frac{1}{\varphi'} \cdot A \right) - \mu \cdot \left(3 - \frac{1}{\varphi'} \right) \right] \cdot B^2 \cdot A_2^2 \quad (4.4-14)$$

$$\frac{d\varphi'}{d\varphi} = \frac{1}{\xi} \cdot \left[\frac{1}{\varphi'} \cdot \Gamma(\varphi') + \frac{1}{2} \cdot A_2 \cdot \sin\phi_2 \right] \quad (4.4-15)$$

Escrevem-se as relações para regime estacionário a partir das equações (4.4-14), (4.4-15)

$$\sin\phi_2 = -\xi \cdot \frac{2 \cdot \lambda}{\varphi'^2} \cdot A_2 \quad \Gamma(\varphi') = \xi \cdot \frac{\lambda}{\varphi'} \cdot A_2^2$$

A amplitude secundária é determinada diretamente pela equação (4.4-13), respeitando os critérios de existência do denominador e da radiciação:

$$\varphi' \neq \frac{3+4 \cdot \mu \cdot \beta^2}{12 \cdot \mu \cdot \beta} \quad \frac{4 \cdot \beta \cdot (\varphi' - \beta)}{3-4 \cdot \mu \cdot \beta \cdot (3 \cdot \varphi' - \beta)} \geq 0 \quad A_1^2 = \frac{1 - \frac{\beta}{\varphi'}}{\left[\frac{3}{4 \cdot (1+2 \cdot \mu)} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \varphi'} - \frac{\mu}{1+2 \cdot \mu} \cdot \left(3 - \frac{\beta}{\varphi'} \right) \right] \cdot A^2}$$

Para encontrar a amplitude principal basta resolver a equação implícita (4.4-14)

$$\left[\frac{3}{4} \cdot (1+2 \cdot \mu) \cdot \left(\frac{\beta^2}{\varphi'} + \frac{4 \cdot \mu}{1+2 \cdot \mu} \cdot \frac{\gamma}{\eta} \cdot \frac{1}{\varphi'} \cdot A \right) - \mu \cdot \left(3 - \frac{1}{\varphi'} \right) \right] \cdot B^2 \cdot A_2^3 + \left(\frac{1}{\varphi'} - 1 \right) \cdot A_2 = \frac{\varphi'}{2} \cdot \sqrt{1 - \xi^2 \cdot \frac{4 \cdot \lambda^2}{\varphi'^4} \cdot A_2^2}$$

Resulta em uma equação de sexto grau na variável A_2 , mas que pode ser escrita como uma equação de terceiro grau na variável A_2^2 :

$$\left[\frac{3}{4} \cdot (1+2 \cdot \mu) \cdot \left(\frac{\beta^2}{\varphi'} + \frac{4 \cdot \mu}{1+2 \cdot \mu} \cdot \frac{\gamma}{\eta} \cdot \frac{1}{\varphi'} \cdot A \right) - \mu \cdot \left(3 - \frac{1}{\varphi'} \right) \right]^2 \cdot B^4 \cdot A_2^6 + \left[\left(\frac{1}{\varphi'} - 1 \right)^2 + \xi^2 \cdot \frac{\lambda^2}{\varphi'^2} \right] \cdot A_2^2 + 2 \cdot \left(\frac{1}{\varphi'} - 1 \right) \cdot \left[\frac{3}{4} \cdot (1+2 \cdot \mu) \cdot \left(\frac{\beta^2}{\varphi'} + \frac{4 \cdot \mu}{1+2 \cdot \mu} \cdot \frac{\gamma}{\eta} \cdot \frac{1}{\varphi'} \cdot A \right) - \mu \cdot \left(3 - \frac{1}{\varphi'} \right) \right] \cdot B^2 \cdot A_2^4 = \frac{\varphi'^2}{4}$$

4.5 Equações Diferenciais Ordinárias

Ao criarem-se novas variáveis isoladas para as respectivas velocidades, o sistema de três equações diferenciais de 2ª ordem é transformado em um sistema de seis equações diferenciais ordinárias em espaço de estados.

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(u_1) &= u'_1 \\ \frac{d}{d\tau}(u'_1) &= F_1(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi') \\ \frac{d}{d\tau}(u_2) &= u'_2 \\ \frac{d}{d\tau}(u'_2) &= F_2(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi') \\ \frac{d}{d\tau}(\varphi) &= \varphi' \\ \frac{d}{d\tau}(\varphi') &= F_3(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi')\end{aligned}$$

4.5.1 Amplitudes do Movimento

São determinadas por substituições de variáveis semelhantes àquelas propostas por Kryloff e Bogoliuboff (1947), considerando-se que as amplitudes $a_1(\tau)$, $a_2(\tau)$ e os respectivos ângulos de fase $\theta_1(\tau)$, $\theta_2(\tau)$ são adimensionais variáveis com o parâmetro temporal τ :

$$\begin{aligned}\Phi_1 &= \tau + \phi_1 & \Phi_2 &= \tau + \phi_2 \\ u_1 &= A_1 \cdot \sin \Phi_1 & u'_1 &= A_1 \cdot \cos \Phi_1 \\ u_2 &= A_2 \cdot \sin \Phi_2 & u'_2 &= A_2 \cdot \cos \Phi_2\end{aligned}$$

Neste contexto, definiram-se as funções:

$$\begin{aligned}\varepsilon \cdot f_1(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi') &\doteq u_1 + F_1(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi') \\ \varepsilon \cdot f_2(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi') &\doteq u_2 + F_2(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \varphi, \varphi')\end{aligned}$$

O sistema é transformado em:

$$\begin{aligned}\frac{d}{d\tau}(A_1) &= F_1[A_1 \cdot \sin \Phi_1, A_1 \cdot \cos \Phi_1, A_2 \cdot \sin \Phi_2, A_2 \cdot \cos \Phi_2, \varphi, \varphi'] \cdot \cos \Phi_1 \\ \frac{d}{d\tau}(\phi_1) &= -\frac{1}{A_1} \cdot F_1[A_1 \cdot \sin \Phi_1, A_1 \cdot \cos \Phi_1, A_2 \cdot \sin \Phi_2, A_2 \cdot \cos \Phi_2, \varphi, \varphi'] \cdot \sin \Phi_1 \\ \frac{d}{d\tau}(A_2) &= F_2[A_1 \cdot \sin \Phi_1, A_1 \cdot \cos \Phi_1, A_2 \cdot \sin \Phi_2, A_2 \cdot \cos \Phi_2, \varphi, \varphi'] \cdot \cos \Phi_1 \\ \frac{d}{d\tau}(\phi_2) &= -\frac{1}{A_2} \cdot F_2[A_1 \cdot \sin \Phi_1, A_1 \cdot \cos \Phi_1, A_2 \cdot \sin \Phi_2, A_2 \cdot \cos \Phi_2, \varphi, \varphi'] \cdot \sin \Phi_1 \\ \frac{d}{d\tau}(\varphi) &= \varphi' \\ \frac{d}{d\tau}(\varphi') &= F_3[A_1 \cdot \sin \Phi_1, A_1 \cdot \cos \Phi_1, A_2 \cdot \sin \Phi_2, A_2 \cdot \cos \Phi_2, \varphi, \varphi']\end{aligned}$$

Este sistema fornece a evolução temporal das amplitudes $A_1(\tau)$, $A_2(\tau)$ e dos ângulos de fase $\phi_1(\tau)$, $\phi_2(\tau)$ do movimento da estrutura e a velocidade angular $\varphi'(\tau)$ da fonte de energia.

4.6 Escolha de Parâmetros

As integrações numéricas foram efetuadas baseando-se nos parâmetros previamente apresentados ao longo da tese, sendo compatíveis com estruturas civis em pórtico plano. São pertinentes os parâmetros de massas generalizadas:

$$\begin{aligned}m_0 &= \left(\frac{4}{\pi} - \frac{1}{2}\right) \cdot \bar{m} \cdot h & m &= \left(\frac{3}{2} - \frac{4}{\pi}\right) \cdot \bar{m} \cdot h + \frac{1}{4} \cdot \bar{m} \cdot \ell \\ M &= \frac{1}{2} \cdot \bar{m} \cdot \ell + M_1\end{aligned}$$

4.6.1 Geometria do pórtico

As constantes de rigidez das barras verticais (colunas) de altura h e barras horizontais (vigas) de comprimento ℓ dependem da rigidez do material (EI_c e EI_b , respectivamente) e das condições de apoio dos elementos estruturais. Para o pórtico em estudo, $C_c = 3$ e $C_b = 48$:

$$K_c = C_c \cdot \frac{EI_c}{h^3} \quad K_b = C_b \cdot \frac{EI_b}{\ell^3}$$

Aproveitaram-se algumas das propriedades do pórtico analisado por Brasil (1990). O material da estrutura é o aço, que possui densidade $7.850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$ e módulo de elasticidade $E = 210 \text{ GPa}$. Para os pilares e a viga são utilizadas barras de seção I de 8 pol, com área $S_c = S_b = 34,84 \text{ cm}^2$. Nestas condições, a densidade linear das barras é:

$$\bar{m} = 27,3494 \frac{\text{kg}}{\text{m}}$$

Utilizou-se para a aceleração gravitacional o valor:

$$g = 9,80665 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Com o objetivo de amplificar os efeitos dinâmicos, as colunas, de altura $h = 2 \text{ m}$ e as vigas, de comprimento $\ell = 2,575 \text{ m}$, foram montadas na direção de menor inércia, iguais a $I_c = I_b = 155,3 \text{ cm}^4$, para diminuir a rigidez do sistema. Nestas condições:

$$K_c = 122.298,75 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

$$K_b = 916.854,2188 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$

Com estas considerações, foi possível aumentar as freqüências naturais de vibração da estrutura, calculadas conforme (7.3-7):

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(K_c - 2 \cdot m \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right)}{M + 2 \cdot m}}$$

$$\omega_2 = \sqrt{\frac{K_b}{M}}$$

Aplicando os valores, obtêm-se:

$$\omega_1 = 15,665712 \text{ s}^{-1}$$

$$\omega_2 = 31,310862 \text{ s}^{-1}$$

As taxas de amortecimento são as mesmas utilizadas no capítulo 6, baseadas nas restrições apresentadas em (4.7-1), mas também em recomendações da norma brasileira (1988, p. 35):

$$\xi_2 = 0,010$$

$$\xi_1 = 0,010$$

Os valores dos parâmetros da estrutura são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 – Parâmetros geométricos da estrutura

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
g	Aceleração gravitacional	9,80665	$\frac{m}{s^2}$
ρ	Densidade do aço estrutural	7850	$\frac{kg}{m^3}$
E	Módulo de elasticidade do aço	$2,1 \times 10^{11}$	$\frac{N}{m^2}$
$S_c = S_b$	Seção transversal	0,003484	m^2
$I_c = I_b$	Inércia à flexão	$1,553 \times 10^{-6}$	m^4
$\bar{m}$	Massa do pórtico por unidade de comprimento	27,3494	$\frac{kg}{m}$
h	Altura dos pilares	2,000	m
ℓ	Comprimento das vigas	2,575	m
K_c	Rigidez dos pilares	122.298	$\frac{N}{m}$
K_b	Rigidez da viga	916.854	$\frac{N}{m}$
m_0	Massas generalizadas nas bases	42,2953	kg
m	Massas generalizadas nos nós	30,0097	kg
M_1	Sobrecarga acidental	900	kg
M	Massa total do oscilador	935,2124	kg
ω_2	Frequência natural principal da estrutura	31,310862	s^{-1}
ω_1	Frequência secundária da estrutura	15,665712	s^{-1}
β	Parâmetro de ressonância interna	0,5003284	—
μ_0	Parâmetro de massa nas bases	0,0452253	—
μ	Parâmetro de massa nos nós	0,0320886	—
ξ_2	Taxa de amortecimento principal	0,010	—
ξ_1	Taxa de amortecimento secundário	0,010	—

4.6.2 Propriedades do rotor do motor elétrico

Para a inércia rotacional do rotor do motor elétrico foi utilizado o mesmo valor de Simons (2008), igualmente ao capítulo 6:

$$J = 6,34 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

A partir destes valores, determinam-se os parâmetros de controle referentes às massas, dimensões do pórtico, a ressonância entre os modos de vibração, e aceleração da gravidade:

$$\mu \doteq \frac{m}{M}$$

$$\mu_0 \doteq \frac{m_0}{M}$$

$$\beta \doteq \frac{\omega_1}{\omega_2}$$

$$\lambda \doteq \frac{\ell}{r}$$

$$\eta \doteq \frac{h}{r}$$

$$\gamma \doteq \frac{g}{\omega_2^2 \cdot r}$$

$$\zeta \doteq \frac{J}{M \cdot r^2}$$

$$\Gamma(\varphi') \doteq \frac{L(\varphi') - H(\varphi')}{M \cdot \omega_2^2 \cdot r^2}$$

Os valores dos parâmetros que dependem das propriedades do rotor do motor elétrico são apresentados na Tabela 12.

Tabela 12 – Propriedades do rotor do motor elétrico

Símbolo	Descrição	Valor	Unidade
r	Raio do volante de inércia	0,01	m
J	Inércia rotacional do rotor	6,34	kg · m ²
γ	Parâmetro de gravidade	1,0003008	—
ζ	Parâmetro de inércia	67,79209	—
η	Parâmetro de altura dos pilares	200	—
λ	Parâmetro de comprimento de viga	257,5	—

Nesta análise, a interação entre os modos de energia, foi aplicado ao torque inicial do motor um fator de redução que varia no intervalo $0,05 \leq f_\alpha \leq 0,10$. Os resultados são apresentados nas figuras seguintes:

Figura 26 – Escolha do nível de torque – função afim ($\kappa = 1$)

Figura 27 – Escolha do nível de torque – função exponencial ($\kappa = 2$)

Figura 28 – Escolha do nível de torque – motor real ($\kappa = 0$)

Figura 29 – Níveis de energia

Foram feitas 20 simulações, variando o coeficiente de redução do torque com na tentativa de obter ressonância entre a frequência $\dot{\phi} = \Omega$ da fonte de energia e ω_2 da estrutura.

Cada integração foi feita com as variáveis de estado $(u_1, u_1', u_2, u_2', \phi, \Omega)$ e depois com $(A_1, \phi_1, A_2, \phi_2, \phi, \Omega)$. Na Figura 26, foi utilizado uma função torque afim; na Figura 27 foi utilizada a função exponencial equivalente e na Figura 28 foi utilizado o motor real. A comparação dos resultados é apresentada na Figura 29.

A análise destas figuras mostra um resultado contrastante com o do capítulo anterior, pois desta vez não foi possível encontrar uma convergência entre os resultados obtidos pela integração direta com os resultados obtidos pela integração com o método de amplitudes.

Esta anomalia era de certa forma esperada, pois a análise qualitativa revelou, na equação (4.4-8), a inexistência de regime estacionário. Na verdade, os resultados pelos dois métodos não conseguem convergir para uma mesma frequência de operação do motor porque o passo temporal das integrações é diferente.

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR GEOMETRIC PORTIC PLANE SUBJECTED TO
% A NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====

% Henrique Furia Silva 05/06/2011 REV.5 (12/09/2011)

function [ f ] = eq_portic_amplitudes( t, S, AP)

% Constants and Parameters
A = AP(1); B = AP(2); ...
csi1 = AP(3); csi2 = AP(4); betta = AP(5); gama = AP(6);
mi = AP(7); mi0 = AP(8);
lambda = AP(9); eta = AP(10); zetta = AP(11);
kappa = AP(12); alfa = AP(13); sigma = AP(14); upsilon = AP(15);

% Generalized coordinates
AMP1 = S(1); phase1 = S(2); AMP2 = S(3); phase2 = S(4);
phi = S(5); phit = S(6);

FI1 = t + phase1; FI2 = t + phase2;

u1 = AMP1 * sin(FI1);
ult = AMP1 * cos(FI1);
u2 = AMP2 * sin(FI2);
u2t = AMP2 * cos(FI2);

% ACCELERATION VECTOR
[ ACCELERATION ] = portic_inversion_numeric ( A, B, csi1, csi2, betta,
gama,...
mi, mi0, lambda, eta, zetta, kappa, alfa,
sigma, upsilon,...
u1, ult, u2, u2t, phi, phit );

% DYNAMICAL SYSTEM
F1_AMP = u1 + (1/eta)*ACCELERATION(1);
F2_AMP = u2 + (1/lambda)*ACCELERATION(2);
F3_AMP = ACCELERATION(3);

f = [cos(FI1) * F1_AMP ; ...
-(1/AMP1) * sin(FI1) * F1_AMP ; ...
cos(FI2) * F2_AMP ; ...
-(1/AMP2) * sin(FI2) * F2_AMP ; ...
phit; ...
F3_AMP ];

end

```

```

% =====
% ANALYSIS OF A NON LINEAR GEOMETRIC PORTIC PLANE SUBJECTED TO
% A NON IDEAL SOURCE OF ENERGY
% =====

% Henrique Furia Silva 14/09/2011 V.5.1

function [ stationary ] = portic_integration ( A, B, ...
                                              csil, csi2, betta, gama, mi, mi0, lambda, eta,
                                              zetta,...
                                              kappa, alfa, sigma, upsilon, ...
                                              X0 , n_iterations)

% Constants and Parameters
AP = [ A B csil csi2 betta gama mi mi0 lambda eta zetta kappa alfa sigma
upsilon ];

% Time definition
% N = [ END START STEP ]
N = [0.01*n_iterations(2)  0  0.01];

[X, T] = GCO_serie_temporal( 'eq_portic_displacements.fluxo', AP , N, X0 );

u1_stationary = X(end, 1); ult_stationary = X(end, 2);
u2_stationary = X(end, 3); u2t_stationary = X(end, 4);
phi_stationary1 = X(end, 5); phit_stationary1 = X(end, 6);

dim_sistema = 6;
XA0 = zeros (1, dim_sistema);
XA0(5) = X0 (5); XA0(6) = X0 (6);

XA0(1) = sqrt ( (X0(1))^2 + (X0(2))^2 );
XA0(2) = atan ( - X0(2) / X0(1) );
XA0(3) = sqrt ( (X0(3))^2 + (X0(4))^2 );
XA0(4) = atan ( - X0(4) / X0(3) );

[XA, TA] = GCO_serie_temporal( 'eq_portic_amplitudes.fluxo', AP , N, XA0 );

A1_stationary = XA(end, 1); phasel_stationary = XA(end, 2);
A2_stationary = XA(end, 3); phase2_stationary = XA(end, 4);
phi_stationary2 = XA(end, 5); phit_stationary2 = XA(end, 6);

stationary = [u1_stationary ult_stationary ...
              u2_stationary u2t_stationary ...
              A1_stationary phasel_stationary ...
              A2_stationary phase2_stationary ...
              phi_stationary1 phi_stationary2 ...
              phit_stationary1 phit_stationary2 ];

end

```

```

% Henrique Furia Silva 14/09/2011 V.5

function [S] = portic_variation_of_parameters ( A, B, ...
        csil, csi2, betta, gama, mi, mi0, lambda, eta,
        zetta,...
        kappa, alfa, sigma, upsilon, ...
        X0 , n_iterations, a_variations )

% a_variations =[start end pass]
number = (a_variations(2) - a_variations(1)) / (a_variations(3)) + 1;
S = zeros(number , 13);
a_var = a_variations(1);

for j = 1 : number
    alfa1 = a_var * alfa;
    [ stationary ] = portic_integration ( A, B, ...
        csil, csi2, betta, gama, mi, mi0, lambda, eta,
        zetta,...
        kappa, alfa1, sigma, upsilon, ...
        X0 , n_iterations);

    S(j,13) = a_var;
    S(j,1:12) = stationary;
    a_var = a_var + a_variations(3);

end

figure
plot (S(:, 13) , ...
        S(:, 11) , '-m', 'markersize', 1 )
hold on
plot (S(:, 13) , ...
        S(:, 12) , '-b', 'markersize', 1 )
hold off
xlabel ('\alpha')
ylabel ('\phi')
legend ('u_{i}, du_{i}/d\tau', 'A_{i}, \theta_{i}')

end

```

4.7 Integrações Numéricas

Foram realizadas de acordo com funções em código de programação. A função “*gco_eq_portic_displacements*” prepara o sistema em espaço de estados para calcular os deslocamentos e velocidades.

A função “*gco_eq_portic_amplitudes*” efetua as operações de substituição de variáveis para o cálculo das amplitudes e fases do movimento.

A integração numérica do sistema foi feita na função “*portic_integration*”, produzindo as séries temporais em espaço de estados. As figuras com o nível de torque foram produzidas pela função “*oscillator_variation_of_parameters*”.

Buscou-se integrar o sistema com um nível de energia que atravessasse uma região de ressonância, pelo menos na integração do sistema com as variáveis de estado $(A_1, \phi_1, A_2, \phi_2, \varphi, \Omega)$.

O resultado da Figura 19 mostra uma condição mais regular do comportamento do sistema para o torque afim; buscou-se então um fator de redução $f_\alpha = 0,042$, que corresponde a um fator de torque $\alpha = 1,1847855$ ou torque inicial $L_0 = 108,62756 \text{ J}$.

As integrações numéricas foram efetuadas para 40000 iterações, partindo da condição inicial:

$$\bar{x}_0 = \begin{array}{|c|} \hline -0,1 \\ \hline 0,1 \\ \hline 0,0 \\ \hline 0,4 \\ \hline \end{array}$$

A frequência média obtida para a fonte de energia é:

$$\varphi' = 1,09135$$

As séries temporais e espaços de fases são apresentados nas figuras que seguem.

Figura 30 – variáveis $(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \phi, \Omega)$ – séries temporais; planos de fases.

Na Figura 30 são mostrados nove gráficos:

- Evoluções temporais das coordenadas (u_1, u_2, ϕ) , evidenciando a tendência de estabilização das oscilações em regime permanente;
- Evoluções temporais das velocidades (u'_1, u'_2, ϕ') , evidenciando a tendência de estabilização das oscilações em regime permanente;
- Planos de fase das velocidades e posições (u_1, u'_1) , (u_2, u'_2) , (ϕ, ϕ') .

Figura 31 – variáveis $(A_1, \phi_1, A_2, \phi_2, \varphi, \Omega)$ – séries temporais; planos de fases.

Na Figura 31 são mostrados nove gráficos:

- Evoluções temporais das amplitudes (a_1, a_2) , evidenciando a tendência de estabilização das oscilações em regime permanente;
- Evoluções temporais dos ângulos de fase (ϕ_1, ϕ_2) , evidenciando a tendência de estabilização das oscilações em regime permanente;
- Planos de fase das amplitudes e ângulos de fases (a_1, ϕ_1) , (a_2, ϕ_2) , (φ, φ') .

Estes gráficos mostram curvas que, aparentemente, se interceptam, o que não seria possível do ponto de vista da teoria das equações diferenciais. Contudo, isto ocorre porque o sistema de equações diferenciais ordinárias tem dimensão 6; torna-se necessário apresentar gráficos com as projeções em espaços de fase tridimensionais, como segue:

Figura 32 – variáveis $(u_1, u'_1, u_2, u'_2, \phi, \Omega)$ – espaços de fases

Na Figura 32, são apresentadas as evoluções temporais dos espaços de fase das coordenadas (u_1, u'_1) , (u_2, u'_2) , (ϕ, ϕ') do sistema.

O mesmo é feito para a Figura 33, com relação às coordenadas (a_1, ϕ_1) , (a_2, ϕ_2) , (φ, φ') , obtidas pela aplicação do método generalizado de Kryloff, Bogoliuboff e Mitropolsky para a determinação de amplitudes em oscilações não lineares não ideais gerais.

Figura 33 – energias $(\hat{E}(\varphi'), \hat{S}(\varphi'))$ – séries temporais; planos de fases.

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho se estudou o comportamento dinâmico não linear de estruturas civis submetidas a vibrações de suportes, em especial aquelas provenientes de fontes de energia limitada, característicos de sistemas não ideais.

5.1 Resultados obtidos e conclusões

Modelos físicos simples aplicáveis a estruturas civis ou mecânicas foram apresentados em grau crescente de complexidade no capítulo 2. Em oscilações conservativas, como o caso do oscilador mecânico simples, o movimento se desenvolve com amplitude e ângulo de fase constantes, com frequência natural circular:

$$\omega \doteq \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Em seguida, foi acoplado ao sistema um amortecedor linear, cuja dissipação de energia por ele causada produz um movimento não conservativo; a taxa de amortecimento é definida por:

$$\xi \doteq \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega}$$

Quando $\xi < 1$, o sistema oscila com amplitude decrescente e ângulo de fase constante. Quando uma fonte ideal de energia é acoplada ao sistema, impõe-se a este um carregamento harmônico de frequência Ω ; na aplicação numérica do modelo, deve-se fugir da ressonância externa, medida pelo parâmetro:

$$\beta \doteq \frac{\Omega}{\omega}$$

Neste caso, em regime permanente, o sistema se desenvolve com amplitude constante, sendo proporcional ao fator de amplificação dinâmica:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2}}$$

O ângulo de fase deste movimento também é constante e, assim como a amplitude, independe das condições iniciais de posição e velocidade:

$$\phi_p \doteq \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{1 - \beta^2} \right)$$

Baseado nestas propriedades, as metodologias de Kryloff, Bogoliuboff e Kononenko para a determinação de amplitudes e ângulos de fase em movimentos oscilatórios não lineares gerais foram unificadas:

$$\ddot{q} + \omega^2 \cdot q = F(q, \dot{q})$$

Neste contexto, supõe-se, de maneira geral, que o movimento do oscilador se desenvolve com amplitude $a(t)$ e ângulo de fase $\phi(t)$ ou $\theta(t)$ variáveis:

$$q(t) = a(t) \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi(t))$$

$$q(t) = a(t) \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta(t))$$

Ao substituir uma destas funções na equação diferencial do problema, são produzidas, para cada grau de liberdade, duas equações diferenciais acopladas para as novas variáveis:

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{1}{\omega} \cdot F[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ \dot{\phi} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{\omega} \cdot F[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta) \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F[a \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta), -a \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \theta)] \cdot \cos(\omega \cdot t + \theta) \end{cases}$$

Em regime estacionário, a variação da amplitude e do ângulo de fase com o tempo é lenta (NAYFEH. MOOK, 2004); nestas condições, as oscilações são muito próximas de periódicas, caso em que a utilização de séries trigonométricas (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949) e aproximações de primeira ordem pode ser vantajosa:

$$\begin{cases} \dot{a} = \frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \cos \Phi \cdot d\Phi \\ \dot{\phi} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \sin \Phi, a \cdot \omega \cdot \cos \Phi) \cdot \sin \Phi \cdot d\Phi \end{cases}$$

$$\begin{cases} \dot{a} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \sin \Theta \cdot d\Theta \\ \dot{\theta} = -\frac{1}{2 \cdot \pi \cdot a \cdot \omega} \cdot \int_0^{2\pi} F(a \cdot \cos \Theta, -a \cdot \omega \cdot \sin \Theta) \cdot \cos \Theta \cdot d\Theta \end{cases}$$

Estas expressões são muito importantes para avaliar o comportamento estrutural em regiões específicas do espaço de fases, ou em regime estacionário, longe das influências da sensibilidade às condições iniciais, pois ajudam a orientar a escolha de parâmetros para a integração numérica, que se torna fundamental diante de problemas cuja integração analítica é impossível.

O mesmo método foi ampliado para o caso não ideal, produzindo uma equação diferencial (acoplada) adicional para descrever o movimento da fonte de energia com potência limitada. Neste caso, esta ação não poderá ser expressa como uma função simplesmente temporal:

$$\begin{cases} m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = P(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \\ J \cdot \ddot{\phi} = L(\phi, \dot{\phi}) - H(\phi, \dot{\phi}) + R(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) \end{cases}$$

A interação entre os dois movimentos é representada pelas funções acopladas a ambas as coordenadas generalizadas:

$$P(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) = \frac{\partial G}{\partial q}(q, \phi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} \right]$$

$$R(q, \dot{q}, \ddot{q}, \phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi}) = \frac{\partial G}{\partial \phi}(q, \phi) - \left[\frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{q} + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}(\dot{q}, \phi) \cdot \ddot{\phi} \right]$$

O isolamento das acelerações $(\ddot{q}, \ddot{\phi})$ para escrever o sistema dinâmico no espaço de estados $(q, \dot{q}, \phi, \dot{\phi})$ requer a inversão do sistema algébrico:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}(q) = \dot{q} \\ \frac{d}{dt}(\dot{q}) = -\frac{1}{\Delta} \cdot \left\{ \left[J + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{\phi}^2} \right] \cdot \left[k \cdot q + c \cdot \dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right] + \frac{\partial^2 G}{\partial \phi \partial \dot{q}} \cdot \left[L(\phi) - H(\phi) + \frac{\partial G}{\partial \phi} \right] \right\} \\ \frac{d}{dt}(\phi) = \dot{\phi} \\ \frac{d}{dt}(\dot{\phi}) = \frac{1}{\Delta} \cdot \left\{ \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q} \partial \phi} \cdot \left[k \cdot q + c \cdot \dot{q} - \frac{\partial G}{\partial q} \right] + \left[m + \frac{\partial^2 G}{\partial \dot{q}^2} \right] \cdot \left[L(\phi) - H(\phi) + \frac{\partial G}{\partial \phi} \right] \right\} \end{cases}$$

Uma transformação de variáveis permite escrever o sistema dinâmico no espaço de estados de amplitudes e fases $(a, \phi, \dot{\phi})$:

$$\begin{cases} \frac{da}{dt} = \frac{1}{\omega} \cdot F_1[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \phi, \dot{\phi}] \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} = -\frac{1}{a \cdot \omega} \cdot F_1[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \phi, \dot{\phi}] \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi) \\ \frac{d\phi}{dt} = \dot{\phi} \\ \frac{d\dot{\phi}}{dt} = \bar{F}_2[a \cdot \sin(\omega \cdot t + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\omega \cdot t + \phi), \phi, \dot{\phi}] \end{cases}$$

Entretanto, a inversão compulsiva do sistema algébrico não é a maneira mais adequada de atacar o problema; é necessária para efetuar a integração numérica, que é o último passo da resolução. Antes, é necessário escolher parâmetros que possuam significado para a aplicação de interesse.

A formulação de Kononenko (1969) permite a utilização de integrais simples de funções trigonométricas para analisar o regime estacionário antes de se fazer a inversão do sistema algébrico para a obtenção das equações em espaço de estados.

As variações dos estados do sistema em regime estacionário são calculadas pelas integrais com relação a um ciclo completo da variável ϕ :

$$\begin{cases} \frac{da}{d\phi} = \frac{1}{\Omega \cdot \omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_1[a \cdot \sin(\phi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\phi + \phi), \phi, \Omega] \cdot \cos(\phi + \phi) \cdot d\phi \\ \frac{d\phi}{d\phi} = \frac{\omega - \Omega}{\Omega} - \frac{1}{a \cdot \Omega \cdot \omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_1[a \cdot \sin(\phi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\phi + \phi), \phi, \Omega] \cdot \sin(\phi + \phi) \cdot d\phi \\ \frac{d\Omega}{d\phi} = \frac{1}{\Omega} \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \int_0^{2\pi} F_2[a \cdot \sin(\phi + \phi), a \cdot \omega \cdot \cos(\phi + \phi), \phi, \Omega] \cdot d\phi \end{cases}$$

Estas equações aqui desenvolvidas foram aplicadas para resolver o oscilador mecânico não ideal do capítulo 3. Para o oscilador mecânico não ideal, a amplitude e a fase em regime permanente valem, aproximadamente:

$$\bar{A} = \frac{\bar{\phi}'^2}{2 \cdot \sqrt{\xi^2 + (1 - \bar{\phi}')^2}} \quad \tan \bar{\phi} = -\frac{\xi}{1 - \bar{\phi}'}$$

A amplitude admite ponto de máximo somente nos casos em que:

$$\xi \leq \bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} < 0,3536$$

A análise qualitativa dos sistemas dinâmicos apresentados nos capítulos 2 e 3 desta tese produziram algumas restrições às taxas de amortecimento admissíveis para a existência de regime estacionário:

$$\xi \leq \xi_0 = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7071 \quad \xi \leq \xi_1 = \sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{6}} \approx 0,35682 \quad \xi \leq \bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} < 0,3536$$

Todas estas condições implicam, indiretamente, em $\xi < 1$, que corresponde ao uso de amortecimento fraco. No entanto, esta não foi uma premissa deste trabalho, mas sim uma consequência da análise qualitativa.

De fato, o sistema só se desenvolve com oscilações se $\xi < 1$, que é o caso de interesse para avaliar os modos e as frequências das vibrações da estrutura. Mas esta condição não é suficiente, pois as relações acima, se unificadas, produzem a condição:

$$\xi \leq \bar{\xi}_2 = \frac{1}{\sqrt{8}} < 0,3536$$

Por esta razão, adotou-se como limite para a taxa de amortecimento o valor:

$$\xi \leq 0,35$$

Naturalmente, as simulações numéricas foram realizadas com taxas de amortecimento compatíveis com as recomendações normativas para estruturas civis:

$$\xi = 0,010$$

A análise qualitativa do modelo do capítulo 3 permitiu a determinação das amplitudes do sistema em regime permanente e mostrou também que o nível de energia que o motor catalogado por Simons (2008) tem capacidade de fornecer é incompatível com as aplicações que se desejavam

Isto foi feito adaptando-se a curva de torque para as variáveis adimensionais da Figura 13 e sobrepondo-a ao gráfico da energia consumida pela movimentação da estrutura da Figura 10.

A Figura 14 deixou evidente a necessidade de diminuir o torque imposto ao motor para que se pudesse provocar o efeito da interação entre o movimento da fonte de energia e da estrutura.

Neste contexto, decidiu-se introduzir um fator de redução, que foi avaliado com algumas simulações numéricas apresentadas na Figura 19.

Figura 19 – Escolha do nível de energia para sistemas não ideais

Buscando situações que se aproximassem da ressonância entre a frequência Ω da fonte de energia em regime estacionário e a frequência natural ω de vibração da estrutura, definiu-se um torque inicial para finalmente efetuar a integração numérica do sistema.

O gráfico do plano de fases apresentado na Figura 20 confirma a oscilação do sistema em torno de uma coordenada de equilíbrio; as evoluções temporais das posições e velocidades mostram o sistema saindo de uma posição de equilíbrio e se movimentando com amplitudes crescentes, com tendência de estabilização.

O pórtico plano da Figura 24 é um exemplo de aplicação do conteúdo desta tese para estruturas civis. O método de Ritz (CLOUGH; PENZIEN, 1993) foi utilizado para transformar o sistema contínuo de barras em um sistema discreto de massas pontuais.

As equações da linha elástica de barras flexionadas (LANGENDONCK) foram utilizadas para determinar as os deslocamentos longitudinais induzidos pelos respectivos deslocamentos transversais que ocorrem no movimento da estrutura.

A aplicação das equações de Euler – Lagrange ao sistema permitiu obter três equações diferenciais não lineares de movimento e acopladas nas variáveis $(\ddot{q}_1, \ddot{q}_2, \ddot{\phi})$. A matriz de massas associada ao sistema é:

$1 + 2 \cdot \frac{m}{M} \cdot \left(1 + 4 \cdot A^2 \cdot \frac{q_1^2}{h^2} \right)$	0	$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \phi$
0	$1 + 8 \cdot \frac{m}{M} \cdot B^2 \cdot \frac{q_2^2}{\ell^2}$	$\cos \phi$
$-4 \cdot \frac{m}{M} \cdot A \cdot \frac{q_1}{h} \cdot \cos \phi$	$\cos \phi$	$\frac{J}{M \cdot r^2} + \left(1 + 2 \cdot \frac{m}{M} + 2 \cdot \frac{m_0}{M} \right) \cdot (\cos \phi)^2$

Separando do sistema a parte puramente conservativa, foi possível calcular as frequências naturais de vibração da estrutura:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot \left(K_c - 2 \cdot m \cdot \frac{g}{h} \cdot A \right)}{M + 2 \cdot m}} \quad \omega_2 = \sqrt{\frac{K_b}{M}}$$

Observa-se que a aceleração da gravidade é responsável pela diminuição da rigidez equivalente da estrutura na direção horizontal. Este resultado é compatível com o que se espera do fenômeno de flambagem de pilares, que está associado à presença de cargas axiais, como é o peso próprio neste caso.

As simulações numéricas foram feitas a partir do sistema original, de modo que a inversão foi feita com o uso de software de matemática simbólica.

Os resultados mais significativos desta parte do trabalho foram obtidos na análise qualitativa do regime permanente, efetuada a partir do sistema original, antes da inversão do sistema algébrico. Foi utilizado o método de Kononenko (1969) para a descrição do regime estacionário por meio de equações diferenciais aproximadas.

$$\frac{da_1}{d\phi} = -\xi_1 \cdot \frac{\omega_1}{\Omega} \cdot a_1$$

$$\frac{d\phi_1}{d\phi} = \frac{\omega_1 - \Omega}{\Omega} + \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{M}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{\omega_2^2}{\Omega \cdot \omega_1} - \frac{m}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{3 \cdot \Omega - \omega_1}{\Omega} \right] \cdot \frac{A^2}{h^2} \cdot a_1^2$$

$$\frac{da_2}{d\phi} = -r \cdot \frac{\Omega}{2 \cdot \omega_2} \cdot \sin \phi_2 - \xi_2 \cdot \frac{\omega_2}{\Omega} \cdot a_2$$

$$\frac{d\phi_2}{d\phi} = \frac{\omega_2 - \Omega}{\Omega} - \frac{r}{a_2} \cdot \frac{\Omega}{2 \cdot \omega_2} \cdot \cos \phi_2$$

$$+ \left[\frac{3}{4} \cdot \frac{M + 2 \cdot m}{M} \cdot \left(\frac{\omega_1^2}{\Omega \cdot \omega_2} + \frac{4 \cdot m}{M + 2 \cdot m} \cdot \frac{g}{h \cdot \Omega \cdot \omega_2} \cdot A \right) - \frac{m}{M} \cdot \frac{3 \cdot \Omega - \omega_2}{\Omega} \right] \cdot \frac{B^2}{\ell^2} \cdot a_2^2$$

$$\frac{d\Omega}{d\phi} = \frac{1}{J \cdot \Omega} \cdot \left[[L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})] + M \cdot r \cdot a_2 \cdot \omega_2 \cdot \Omega \cdot \frac{1}{2 \cdot \pi} \cdot \pi \cdot \sin \phi_2 \right]$$

Não existem soluções para a condição de existência de regime estacionário:

$$\frac{da_1}{d\phi} = 0 \quad \frac{d\phi_1}{d\phi} = 0 \quad \frac{da_2}{d\phi} = 0 \quad \frac{d\phi_2}{d\phi} = 0 \quad \frac{d\Omega}{d\phi} = 0$$

A primeira condição só é satisfeita no caso em que $\xi_1 = 0$. A terceira e a quinta equações reunidas permitem obter a fase da oscilação principal e a energia consumida para movimentar a estrutura em função da respectiva amplitude:

$$\sin \phi_2 = -2 \cdot \xi_2 \cdot \frac{\omega_2^2}{\Omega^2} \cdot \frac{a_2}{r} \quad [L(\dot{\phi}) - H(\dot{\phi})] = \xi_2 \cdot M \cdot \frac{\omega_2^3}{\Omega} \cdot a_2^2$$

As outras duas equações contêm os termos de ordem superior em relação aos deslocamentos longitudinais na flexão. Se estes forem desprezados, obter-se-á:

$$\omega_1 = \Omega \quad \tan \phi_2 = -\xi_2 \cdot \frac{\omega_2}{\omega_2 - \Omega}$$

Isto mostra que os efeitos de segunda ordem não podem ser desprezados, pois são justamente eles os responsáveis por impedir a ressonância entre a velocidade angular Ω do rotor e a frequência natural circular ω_1 do modo de vibração secundário.

Portanto, o efeito da não linearidade geométrica deve ser mantido; neste caso, a amplitude secundária está definida no caso em que:

$$\phi' \neq \frac{3 + 4 \cdot \mu \cdot \beta^2}{12 \cdot \mu \cdot \beta} \quad \frac{4 \cdot \beta \cdot (\phi' - \beta)}{3 - 4 \cdot \mu \cdot \beta \cdot (3 \cdot \phi' - \beta)} \geq 0$$

Para os parâmetros do pórtico do capítulo 4, resulta:

$$\phi' \neq 15,73838379$$

Este nível de frequência não apareceu nas simulações feitas para determinar os níveis de energia do rotor e que foram apresentadas na Figura 29:

Figura 29 – Escolha do nível de energia para pórtico plano

A outra condição requer um cuidado para garantir que $\phi' \geq \beta$:

$$\phi' \geq 0,500328361$$

Respeitadas estas condições, a amplitude secundária vale:

$$A_1 = \frac{1}{A} \cdot \sqrt{\frac{1 - \frac{\beta}{\phi'}}{\left[\frac{3}{4 \cdot (1 + 2 \cdot \mu)} \cdot \frac{1}{\beta \cdot \phi'} - \frac{\mu}{1 + 2 \cdot \mu} \cdot \left(3 - \frac{\beta}{\phi'} \right) \right]}}$$

A amplitude principal é determinada pela solução de uma equação algébrica de 3º grau na variável A_2^2 . Estes resultados mostram a dificuldade, confirmada, de se encontrar um nível de energia do rotor que fosse adequado para a manutenção de um regime permanente.

5.2 Sugestões para trabalhos futuros

Esta tese de doutoramento deixa algumas questões abertas, que podem ser exploradas em trabalhos futuros, principalmente com relação às estruturas de pórtico plano e ao controle da fonte de energia em sistemas não ideais.

5.2.1 Sobre a taxa de amortecimento em estruturas

Primeiramente, foi possível determinar como o nível de amortecimento influencia nas soluções do sistema, tendo sido possível estabelecer um valor adequado, de acordo com recomendações normativas.

Entretanto, a condição de existência de regime permanente para o pórtico plano implica na ausência de amortecimento na direção secundária. Como as equações de regime estacionário são aproximadas, fica esta questão em aberto.

A aproximação foi introduzida por Kononenko (1969) ao se desprezar nas equações de movimento os termos secundários que contém a aceleração angular $\ddot{\varphi}$ da fonte de energia, pelo fato dela ser pequena em regime estacionário.

Ao eliminar esta aproximação, torna-se necessário trabalhar com o sistema completo, o que será possível após a inversão da equação matricial de movimento.

5.2.2 Sobre a fonte de energia em sistemas não ideais

Em virtude do tipo de estrutura envolvida e da curva característica de motor disponível, não foi possível reproduzir nas simulações o salto nas variáveis de amplitude na ressonância induzida por máquinas rotativas, que é um fenômeno conhecido como efeito Sommerfeld (1902)

Um estudo mais aprofundado sobre motores elétricos pode ser realizado para se estabelecer uma metodologia para avaliar curvas características de motores reais; pode ser realizada uma análise experimental na área de engenharia mecânica ou elétrica.

Neste estudo sobre motores é interessante avaliar experimentalmente a ressonância com ambos os modos de vibração da estrutura; pode-se inclusive utilizar outros tipos de estruturas, trabalho que pode ser realizado na área de engenharia civil ou mecânica.

5.2.3 Sobre estruturas de pórtico

O pórtico plano apresentado no capítulo 7 é uma estrutura formada por pilares e viga constituídos de matéria contínua. Pelo método de Ritz, a estrutura foi transformada em um sistema discreto de massas pontuais, sendo que parte delas ficou na base do pórtico.

Mantendo ainda o mesmo tipo de modelo, pode-se verificar o efeito que se obtém ao fazer $\mu_0 = 0$ nas equações, o que significa desprezar a parcela da massa do pilar que é direcionada para a base; resta confirmar se esta massa gera apenas um efeito de escala no sistema.

Como sugestão, pode-se verificar o comportamento dinâmico do sistema ao se efetuar uma discretização por elementos finitos, e comparar os resultados com aqueles obtidos para o sistema discreto.

Pode-se também avaliar o efeito de forças externas de natureza aleatória, como as provenientes do vento, efetuando-se uma análise dinâmica estocástica do sistema.

5.2.4 Sobre o controle de oscilações

A dinâmica do movimento do pórtico plano apresenta equações diferenciais mais elaboradas do ponto de vista matemático. Aproveitando o grau de complexidade do problema, pode-se efetuar uma busca de bifurcações no regime transitório que apontem para mudanças qualitativas no comportamento estrutural (do ponto de vista dinâmico).

Estas mudanças qualitativas podem ser provenientes da perda de estabilidade das soluções de equilíbrio. Podem-se avaliar as perturbações do sistema em torno do regime estacionário para encontrar as faixas de frequência para as quais o sistema mantém a estabilidade.

Neste sentido, o teorema da variedade central pode ser utilizado para buscar instabilidade estrutural, bifurcações e caos, trabalho este que pode ser realizado na área de matemática, física ou engenharia elétrica, ou em conjunto, podendo ser alvo de um pós-doutoramento.

5.3 Sobre a análise estocástica de estruturas

Uma dificuldade deste trabalho foi encontrar um motor real que fornecesse um nível de energia adequado para que o pórtico plano se desenvolvesse de modo a mostrar explicitamente a interação entre os dois modos de vibração.

Garzeri (2001) realizou uma análise experimental de pórtico plano, mas com o motor posicionado no centro da viga; além disto, ele utilizou um motor pequeno, adequado ao modelo reduzido com o qual ele trabalhara.

Não é o caso deste trabalho, que foi modelado com valores de estruturas de tamanho real. Uma vez encontrado um motor adequado, um controle da incerteza dos dados, do ruído e da robustez poderá melhorar significativamente a qualidade dos resultados obtidos.

A incerteza dos dados é um fator significativo para dar força a uma análise estatística, utilizando-se de valores médios e desvios, principalmente com relação às grandezas de natureza aleatória.

Tratam-se, neste caso, de estruturas submetidas a excitações devidas ao vento, ondas do mar ou sismos, que são naturalmente aleatórios no atual nível de desenvolvimento tecnológico e científico (BRASIL; CARRIL Jr, 2001). Além disto, as ondas de projeto podem não fornecer as máximas respostas da estrutura, em função do efeito de amplificação que uma eventual ressonância provoca no sistema.

6 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ALIGOOD, Kathleen T; SAUER, Tim D; YORKE, James A. **CHAOS: An Introduction to Dynamical Systems**. Springer. 1996.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Forças devidas ao vento em edificações** - NBR 6123. Rio de Janeiro, 1988.

_____. **Projeto de estruturas resistentes a sismos** – Procedimento – NBR15421. 2006.

BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; WEBER, H. I.; FENILI, A.; BELATO, D.; de MATTOS, M. C.; WIECZOREK, S. **On vibrating systems with a limited power supply and their applications to engineering sciences**, in: Honig, C.S. (Ed), 490 Brazilian Seminar of Mathematical Analysis, State University of Campinas, Campinas, SP, Brazil, Short Course, March 5-9, 1999, p. 137-277.

BALTHAZAR, J. M.; MOOK, D. T.; BRASIL, R. M. L. R. F.; WEBER, H. I.; FENILI, A.; BELATO, D.; FELIX, J.L.P. **Recent results on vibrating problems with limited power supply**. In: Awrejcewicz, J., Brabski, J., Nowakowski, J. (Eds.), Sixth Conference on Dynamic Systems Theory and Applications, Lodz, Poland, December, 10-12, 27-50, 2001.

_____. **An Overview on Non-Ideal Vibrations**. Meccanica, Italia, v. 38, p. 613-621, 2003.

_____. **An Overview on Non-Ideal Vibrations**, Meccanica, Holanda, 38, 2003, p. 613-621.

BALTHAZAR, J. M.; FELIX, J.L.P.; BRASIL, R. M. L. R. F. **Short comments on self-synchronization of two non-ideal sources supported by a flexible portal frame structure**. Journal of vibration and control, Estados Unidos, 10, 2004, p. 1739 – 1748.

BALTHAZAR, J. M.; DANTAS, M. H. **On Local Analysis of Oscillations of a Non-Ideal and Non-Linear Mechanical Model**. Meccanica, Netherlands, v. 39, p. 313-330, 2004.

BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R. M. L. R. F., GARZERI, F. J. **On Non-Ideal Simple Portal Frame Structure Model**: Experimental Results under a Non-Ideal Excitation. Applied Mechanics and Materials, Suíça, I, 2004, p. 51 – 58.

BARONE Júnior, Mário. **Álgebra Linear**. Instituto de Matemática e Estatística, 1988.

BISCUOLA, Gualter José; VILLAS BÔAS, Newton; DOCA, Ricardo Helou. **Tópicos de Física**, vol. 1 – Mecânica e Hidrodinâmica. 20ª ed.. Saraiva, 2007.

BLEKMAN, I. I., **Self-Synchronization of certain vibratory devices**, English Translation, 16, 1953.

BOGOLIUBOFF, Nikolay Nikolaevich; MITROPOLSKY, Yuri A. **Asymptotic methods in the theory of nonlinear oscillations**. 2nd edition, Gordon & Breach, 1961 (0-677-20050-1, 978-0677200507).

BRASIL, Reyolando M. L. R. F. **Não-linearidade geométrica na dinâmica de estruturas aporticadas planas**: um tratamento pelo método dos elementos finitos. Tese de doutoramento, EPUSP, 1990.

BRASIL, Reyolando M. L. R. F.; CARRIL Jr, Célio F. Noções básicas de dinâmica aleatória, com aplicação ao efeito de ventos sobre estruturas, APLICON, 2001.

BRAUN, Martin. **Equações diferenciais e suas aplicações**. Campus, 1979.

Centro de Física Teórica e Computacional (CFTC). **À luz da Física**. Disponível em: <http://cftc.cii.fc.ul.pt/PRISMA/>. Acesso em 12 set. 2011.

CHAVARETTE, Fabio Roberto. **Dinâmica e controle não lineares de um sistema neural ideal e não-ideal**. Campinas: Unicamp, 2005 (Tese de Doutorado).

CHAVARETTE, F.R., BALTHAZAR, J.M., GANAZZA, M. A. **On Chaotic Dynamics in the Hodgkin-Huxley Model**. In: Workshop on Nonlinear Phenomena: Modeling and Their Applications, Rio Claro: ABCM - Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, v. 7, p. 83-85, 2005.

CHAVARETTE, F.R., BALTHAZAR, J.M., GANAZZA, M. A., HERMINI, H.A. **On Non-Linear Dynamic Behavior of the Hodgkin-Huxley Model**. In 18th International Congress of Mechanical Engineering, Ouro Preto, 2005.

CHAVARETTE, F.R., BALTHAZAR, J.M., GANAZZA, M. A., RAFIKOV, M., **On Non-Linear Dynamics and Control: The Potential of Action Membrane**. Ideal and Non-Ideal Cases of the Hodgkin-Huxley Model. Submitted Chaos, Solitons and Fractals, 2005.

CHAVARETTE, F.R., BALTHAZAR, J.M., GANAZZA, M. A., RAFIKOV, M., HERMINI, H.A. **On an ideal and non-ideal dynamics behavior and optimal control syntheses of the FitzHugh-Nagumo mathematical model**. Submitted International Journal of Bifurcation and Chaos, 2005.

CLOUGH, Ray W; PENZIEN, Joseph. **Dynamics of structures**, 2nd. Edition, McGraw Hill, 1993 (0-07-011394-7).

DIMENTBERG, Mikhail Fedorovich. **Statistical dynamics of nonlinear and time-varying systems**. 1988.

DIMENTBERG, M.F.; MCGOVERN, L.; NORTON, R.L.; CHAPDELAINE, J.; HARRISON, R. **Dynamics of an Unbalanced Shaft Interacting with a Limited Power Supply**, Non-linear Dynamics 13, 171-187, 1997.

DIMENTBERG, M. F. **Statistical Dynamics of Nonlinear and Time Varying Systems**, John Wiley and Sons, 1988.

DOERING, Claus Ivo; LOPES, Artur Oscar. **Equações Diferenciais Ordinárias**. IMPA, 2005.

ELSGOLTS, Lev. **Differential equations and the calculus of variations**. MIR, 3rd edition, 1977.

EVAN-IWANOWSKI, R. M., **Resonance Oscillators in Mechanical Systems**, Elsevier, 1976.

FELIX, J.L.P., BALTHAZAR, J.M., BRASIL, R. M. L. R. F. **On saturation control of a Non-ideal vibrating portal frame foundation type shear-building**. Journal of vibration and control, Estados Unidos, 11, 2005, p. 121 – 136.

_____. **A short note on a nonlinear system vibrations under two non-ideal excitations**. Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering, Brasil, 25, 2003, p. 391 – 395.

_____. **On tuned liquid column dampers mounted on a structural frame under non-ideal excitation.** Journal of Sound and Vibration, Grã-Bretanha, 282, 2005, p. 1285 – 1292.

FERREIRA, Marcela Cristiani. **Análise de um sistema Dinâmico não ideal com excitação vertical e horizontal.** Dissertação de Mestrado, UNESP, 2007.

GARZERI, Flávio José. **Dinâmica não linear de um pórtico plano sob carregamento não ideal: análise numérica e experimental.** Tese de doutoramento, EPUSP, 2001.

GUCKENHEIMER, John; HOLMES, Philip. **Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems and Bifurcation of Vector Fields.** 7th print. 2002.

HALLIDAY, D.; RESNICK, R.; WALKER, J. **Fundamentos de Física**, vol. 1 – Mecânica. 7ª ed., LTC, 2007.

_____. **Fundamentos de Física**, vol. 2 – Gravitação, Ondas e Termodinâmica. 8ª ed., LTC, 2009.

GUIDORIZZI, Hamilton Luiz. **Um curso de cálculo**, volume 1. 5ª edição, LTC, 2001a (85-216-1259-1).

_____. **Um curso de cálculo**, volume 2. 5ª edição, LTC, 2001b (85-216-1280-X)

_____. **Um curso de cálculo**, volume 3. 5ª edição, LTC, 2002a (85-216-1257-5).

_____. **Um curso de cálculo**, volume 4. 5ª edição, LTC, 2002b (85-216-1330-X).

HAMILTON, R. W. **On a General Method in Dynamics.** Philosophical Transactions of the Royal Society, 1834, part II, p. 247-308. Disponível em:

<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Dynamics/GenMeth.pdf>.

Acesso em 12 set. 2011.

_____. **Second Essay on a General Method in Dynamics.** Philosophical Transactions of the Royal Society, 1835, part I, p. 95-144. Disponível em:

<http://www.maths.tcd.ie/pub/HistMath/People/Hamilton/Dynamics/SecEssay.pdf>.

Acesso em 12 set. 2011.

HODGKIN, A. L.; HUXLEY, A. F., **A Quantitative Description of Membrane Current and its Application to Conduction and Excitation in Nerve**, J. Physiol. 117, p.500-544, 1952.

KONONENKO, Viktor Olimpanovich; GLADWELL, G. M. L. **Vibrating systems with a Limited Power Supply**, English translation, Ilife Books, 1969 (0-592-04226-X, 978-0592042268).

KRYLOFF, Nikolai Mitrofanovich; BOGOLIUBOFF, Nikolay Nikolaevich. **Introduction to non-linear mechanics**. Annals of Mathematic Studies, Number 11, Princeton University Press, 1949 (0-691-07985-4).

LAGRANGE, Joseph-Louis. **Mécanique Analytique**. Cambridge University Press, 1811.

LANGENDONCK, Telemaco Van. **Resistência dos Materiais: Deformações II**. Edgard Blucher, sem data.

MARTIN, Paulo Agozzini. **Grupos, corpos e Teoria de Galois**. Instituto De Matemática e Estatística, 2010.

MAZZILLI C. E. N.; SOARES, M. E. S. **Análise de Dinâmica de Estruturas com Comportamento Linear**. Notas de aula. Escola Politécnica da USP. São Paulo. 2007

MEIROVITCH, Leonard. **Analytical methods in vibrations**. Macmillan, 1967.

MEZA, Magno Enrique Mendoza. **Introdução ao controle de sistemas não lineares**. Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2007. Disponível em: <http://arquivo.sevt.Incc.br/pdfs/C14.pdf>. Acesso em: 9 abr. 2008

MONTEIRO, Luiz Henrique Alves. **Sistemas Dinâmicos**. 2006.

NAYFEH, Ali Hasan; MOOK, Dean T. **Non-linear Oscillations**. WILEY-VCH, Weinheim, 2004 (0-471-12142-8).

NAYFEH, Ali Hasan. **Perturbation Methods**. WILEY-VCH, Weinheim, 2004 (0-471-39917-5).

NAYFEH, Ali Hasan; BALACHANDRAN, Balakumar. **Applied Nonlinear Dynamics**. John Wiley & Sons, Inc. New York, 1995.

NEWTON, Isaac. **Principia**: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, Livro I. 2ª ed., 2002.

_____. **Principia**: Princípios Matemáticos de Filosofia Natural, Livros II e III. 2008.

SANTOS, S. H. C.; LIMA, S. S. **Elements for a future Brazilian standard for seismic resistance of concrete structures of building**, Revista IBRACON de Estruturas, Vol. 1, Número 1 (2005).

SILVA, M. A. da; ARORA, J. S.; SWAN, C.; BRASIL, R. M. L. R. F. **Optimization of Elevated Concrete Foundations for Vibrating Machines**. Journal of Structural Engineering-ASCE, Estados Unidos, 128, 2002, p. 1470-1479.

SIMONS, Gregor Konrad. **Uma investigação sobre a aplicabilidade da teoria de sistemas não-ideais a fundações de máquinas reais**. Dissertação de Mestrado, EPUSP, 2002.

SOMMERFELD, A. **Beiträge zum dynamischen Ausbau der Festigkeitslehre**, Physikal Zeitschr 3, 266; 286, 1902.

SOUZA, S. L. T.; CALDAS, I. L.; VIANA, R. L., BALTHAZAR; J. M.; BRASIL, R. M. L. R. F. **Analysis of Regular and Irregular Dynamics of a Non Ideal Gear Rattling Problem**. Revista Brasileira de Ciências Mecânicas, Brasil, 24, 2002, p. 111 – 114.

_____. **Impact dampers for controlling chaos in systems with limited power supply**. Journal of Sound and Vibration, Grã-Bretanha, 279, 2005, p. 955 – 967.

_____. **Basins of attraction changes by amplitude constraining of oscillators with limited power supply**. Chaos, Solitons and Fractals, Grã-Bretanha, 26, 2005, p. 1211 – 1220.

TELLO, Jorge Manuel Sotomayor. **Lições de Equações Diferenciais Ordinárias**. Projeto Euclides, 1979.

THORNTON, Stephen T.; MARION, Jerry B. **Dinâmica clássica de partículas e sistemas**. Tradução da 5ª ed. norte-americana. CENGAGE Learning, 2011.

VILLATE, Jaime E. **Introdução aos sistemas dinâmicos**: uma abordagem prática com Máxima. Universidade do Porto, 2006. Disponível em: <http://tero.fis.uncor.edu/~tamarit/biologia/villate.pdf>. Acesso em 12 set. 2011.

WARMINSKI, J., BALTHAZAR, J. M., BRASIL, R. M. L. R. F. **Vibrations of non-ideal parametrically and self-excited model**. Journal of Sound and Vibration, Inglaterra, 245, 2001, p. 363-374.

APÊNDICE — ESTADO DA ARTE

7 SISTEMAS DINÂMICOS

Segundo Aligood, Sauer e Yorke (1996), um sistema dinâmico consiste de um conjunto de estados e de uma regra, preferencialmente determinística, que determina de maneira única o estado presente em função de estados anteriores.

Em mapas ou sistemas de tempo discreto, esta regra é aplicada em instantes discretos, tendo o estado atual $\vec{x}_t = \vec{x}(t)$ como entrada e o estado seguinte $\vec{x}_{t+1} = \vec{x}(t+1)$ como saída. A evolução do sistema discreto ao longo do tempo é obtida pelas diversas iterações do mapa, em incrementos discretos de tempo.

Em sistemas de tempo contínuo, a regra é expressa como uma taxa de variação do estado atual em função deste estado atual, resultando em uma equação diferencial.

Para resolver problemas de dinâmica para estruturas de pórtico, modelos são construídos partindo de determinadas hipóteses. A evolução desses modelos freqüentemente resulta em um conjunto de equações diferenciais de segunda ordem, que são, em geral, não-lineares.

Segundo Monteiro (2006), uma equação diferencial de ordem $n \geq 1$ pode ser transformada em um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem.

Sistemas não-lineares são analiticamente integráveis somente em casos muito particulares. De modo geral, deve-se verificar se o atendimento às condições necessárias para que o sistema admita uma única solução.

Em seguida, é conveniente efetuar uma análise qualitativa para determinar o comportamento local das soluções na vizinhança de pontos especiais de interesse. Uma análise de caos permite verificar quais parâmetros do problema tornam o sistema sensível às condições iniciais.

Após a escolha adequada dos parâmetros do sistema, integrações numéricas poderão ser efetuadas a fim de determinar a evolução do sistema com o tempo e o respectivo retrato de fase.

7.1 Equações Diferenciais

Sejam $I \subseteq \mathbb{R}$ um intervalo, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um conjunto e $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função.

Sejam $t \in I$ um número real e $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um vetor real.

Uma equação diferencial ordinária é uma expressão do tipo (TELLO, 1979):

$$\frac{d}{dt}[\vec{x}(t)] = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad (7.1-1)$$

A equação diferencial em $\mathbb{R}^n$ pode ser escrita, de maneira equivalente, como um sistema de n equações diferenciais de primeira ordem em $\mathbb{R}$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_j(t) = f_j(t, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n(t) = f_n(t, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

7.1.1 O problema de Cauchy

Uma solução $\varphi: I \rightarrow \mathbb{R}$ do sistema (7.1-1) é uma aplicação tal que:

$$\frac{d}{dt}[\varphi(t)] = \vec{f}(t, \varphi(t))$$

Pode-se impor ao sistema (7.1-1) as seguintes condições iniciais:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7.1-2)$$

Um problema de valor inicial ou problema de Cauchy é constituído da equação diferencial (7.1-1) satisfazendo às condições iniciais (7.1-2):

$$\frac{d}{dt}[\vec{x}(t)] = \vec{f}(t, \vec{x}) \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7.1-3)$$

O problema (7.1-3) é equivalente à equação integral:

$$\varphi(t) = \vec{x}_0 + \int_{t_0}^t \vec{f}(\tau, \vec{x}) \cdot d\tau$$

7.1.2 Existência e Unicidade de Soluções

O teorema de Peano (TELLO, 1979) mostra em que condições o problema de Cauchy (7.1-3) admite solução, enquanto que o teorema de Picard mostra em que condições a solução é única.

Uma aplicação $\vec{f}: I \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ é dita lipschitziana com relação à segunda variável em $I \times \Omega$ se existe uma constante $K > 0$ tal que, para todos $\{\vec{x}, \vec{y}\} \subset \Omega$:

$$\|\vec{f}(t, \vec{x}) - \vec{f}(t, \vec{y})\| \leq K \cdot \|\vec{x} - \vec{y}\|$$

Seja $I(t_0, a) \times \overline{\Omega}(x_0, b) \subset I \times \Omega$ um conjunto fechado definido por:

$$I(t_0, a) \doteq \{t : |t - t_0| \leq a\} \subset I \subset \mathbb{R}$$

$$\overline{\Omega}(\vec{x}_0, \vec{b}) \doteq \{\vec{x} : \|\vec{x} - \vec{x}_0\| \leq \vec{b}\} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^n$$

Supõe-se que $\vec{f}$ seja contínua e limitada no conjunto $I(t_0, a) \times \overline{\Omega}(x_0, b)$

$$\|\vec{f}(t, \vec{x})\| \leq M$$

Neste caso, seja $\alpha \in \mathbb{R}$ definido por:

$$\alpha \doteq \min \left\{ a, \frac{b}{M} \right\}$$

Nestas condições, pelo teorema de Peano, o problema de valor inicial (7.1-3) admite soluções $\varphi(t, \vec{x})$ no intervalo $J \subset I \subset \mathbb{R}$ definido por:

$$J \doteq I(t_0, \alpha) = \{t : |t - t_0| \leq \alpha\}$$

Se, além disso, $\vec{f}$ for lipschitziana com relação à segunda variável em $I(t_0, a) \times \overline{\Omega}(x_0, b)$, o teorema de Picard garante que o problema de valor inicial (7.1-3) admite uma única solução $\varphi: J \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$\varphi(t) = \varphi(t, t_0, \vec{x}_0)$$

7.1.3 Estabilidade Dinâmica

Sistemas não-lineares são integráveis somente em casos muito particulares. Em geral, não possuem solução analítica. Para os casos em que a existência de soluções está garantida, embora não possa ser obtida analiticamente, efetua-se uma análise qualitativa para determinar o comportamento local das soluções na vizinhança de alguns pontos de interesse.

A evolução qualitativa do sistema é representada no espaço $\mathbb{R}^n$. Para cada instante t , o estado é representado como um ponto $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$. Este espaço é denominado espaço de estados ou espaço de fases (MONTEIRO, 2006).

O ponto $\vec{x}^* = (x_1^*, \dots, x_n^*) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ é um ponto de equilíbrio (dinâmico) se:

$$\vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$$

Os pontos de equilíbrio representam as soluções estacionárias, que correspondem aos valores de $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ tais que quando $\vec{x} = \vec{x}^*$, o sistema pára de se mover no espaço de fase.

Neste contexto, uma solução que se inicia em um ponto de equilíbrio ali permanece indefinidamente, pois

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}^*) = \vec{0}$$

Segundo Guckenheimer e Holmes (2002), o ponto de equilíbrio $\vec{x} = \vec{x}^*$ é estável se dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que:

$$\|\vec{x}_0 - \vec{x}^*\| < \delta \Rightarrow \|\varphi(t, \vec{x}) - \varphi(t, \vec{x}^*)\| < \varepsilon$$

O ponto de equilíbrio $\vec{x} = \vec{x}^*$ é assintoticamente estável se for estável e se a solução se aproximar dele para $t \rightarrow \infty$:

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \varphi(t, x_0) = \vec{x}^*$$

Os pontos que não são de equilíbrio são chamados de pontos ordinários ou pontos regulares (MONTEIRO, 2006).

7.1.4 Sistemas Autônomos

Segundo Monteiro (2006), um sistema autônomo é um conjunto de equações diferenciais cujas funções de entrada não dependem explicitamente do tempo t . O sistema de equações (7.1-1) é não-autônomo, pois o tempo t aparece explicitamente:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(t, x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_j(t) = f_j(t, x_1, \dots, x_m) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) = f_m(t, x_1, \dots, x_m) \end{cases}$$

Monteiro (2006) propõe transformar todo sistema não autônomo de m equações de primeira ordem em um sistema autônomo de $m+1$ equações de primeira ordem, definindo $x_{m+1} \doteq t$. Com isto, o sistema (7.1-1) transforma-se em:

$$\begin{cases} \dot{x}_1(t) = f_1(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \\ \vdots \\ \dot{x}_j(t) = f_j(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \\ \vdots \\ \dot{x}_m(t) = f_m(x_1, \dots, x_m, x_{m+1}) \\ \dot{x}_{m+1}(t) = 1 \end{cases}$$

Portanto, pode-se estudar apenas o caso de sistemas autônomos, definindo $n \doteq m+1$. Sejam então $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{f}: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Um sistema de equações diferenciais (autônomas) de primeira ordem é uma expressão do tipo:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) \quad (7.1-4)$$

A equação diferencial (7.1-4) pode ser reescrita como um sistema de equações:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_j = f_j(x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ \dot{x}_n = f_n(x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

7.2 Equações Diferenciais Lineares

Sejam $t \in I \subset \mathbb{R}$, $\vec{x}(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t)) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $[A(t)] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ uma matriz de ordem n de funções reais contínuas em I . Um sistema de equações diferenciais é linear se puder ser escrito na forma:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A(t)] \cdot \vec{x} \quad (7.2-1)$$

O sistema (7.2-1) satisfazendo à condição de contorno inicial (7.1-2) constitui o seguinte problema de Cauchy:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A(t)] \cdot \vec{x} \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7.2-2)$$

Em sistemas lineares do tipo (7.2-1), a origem $\vec{x} = \vec{0}$ é um ponto de equilíbrio, pois, para qualquer $[A(t)] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$:

$$\vec{x} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{0}) = [A(t)] \cdot \vec{0} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{f}(\vec{0}) = \vec{0}$$

Ou seja, sistemas lineares com condições iniciais nulas permanecerão em repouso. Além disto, se $\det[A(t)] \neq 0$, para todo $t \in (\mathbb{R})$, a origem $\vec{x} = \vec{0}$ será o único ponto de equilíbrio, pois:

$$f(\vec{x}^*) = [A(t)] \cdot \vec{x}^* = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^* = [A(t)]^{-1} \cdot \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \vec{x}^* = \vec{0}$$

Por isto, em um sistema linear, a origem $\vec{x} = \vec{0}$ do espaço de fases é o ponto a ser analisado. A sua estabilidade estrutural é determinante para conhecer o comportamento das soluções.

No caso unidimensional, o problema de valor inicial (7.2-2) reduz-se a:

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot x \quad x(t_0) = x_0$$

A equação diferencial pode ser integrada por separação de variáveis. Resulta:

$$\begin{aligned} \frac{dx}{x} = a(t) \cdot dt & \Rightarrow \int_{x_0}^x \frac{dx}{x} = \int_{t_0}^t a(t) \cdot dt \Rightarrow \ln \left| \frac{x}{x_0} \right| = \int_{t_0}^t a(t) \cdot dt \\ x(t) &= x_0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(t) \cdot dt} \end{aligned} \quad (7.2-3)$$

É importante destacar que movimentos descritos por sistemas dinâmicos lineares com condições iniciais nulas permanecem em repouso, como se pode verificar diretamente no caso unidimensional (7.2-3):

$$x_0 = 0 \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0 \cdot e^{\int_{t_0}^t a(t) dt} \quad \Rightarrow \quad x(t) = 0$$

Para que o sistema dinâmico linear entre em movimento, é necessário que a condição inicial seja não nula:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \neq \vec{0}$$

7.3 Equações Lineares com Coeficientes Constantes

Um caso particular de interesse é aquele em que a matriz $[A]$ possui coeficientes que não dependem do tempo t . O problema de valor inicial (7.1-3) reduz-se ao seguinte:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A] \cdot \vec{x} \quad \vec{x}(t_0) = \vec{x}_0 \quad (7.3-1)$$

No caso unidimensional, o sistema (7.3-1) é reduzido a:

$$\frac{dx}{dt} = a \cdot x \quad x(t_0) = x_0$$

Integrando analiticamente, resulta:

$$x(t) = x_0 \cdot e^{a(t-t_0)} \quad \Rightarrow \quad x(t) = x_0 \cdot e^{-a t_0} \cdot e^{a t} \quad \Rightarrow \quad x(t) = c_0 \cdot e^{a t}$$

Este resultado sugere que o sistema autônomo (7.3-1), com coeficientes constantes, seja integrável analiticamente. Busca-se então um par $(\lambda, \vec{v}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$ com $\lambda \cdot \vec{v} \neq \vec{0}$ de modo que uma solução do sistema (7.3-1) seja:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda t} \cdot \vec{v} \quad (7.3-2)$$

Substituindo na equação diferencial (7.3-1), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{\lambda t} \cdot \vec{v}) &= [A] \cdot (e^{\lambda t} \cdot \vec{v}) \quad \Rightarrow \quad \lambda \cdot e^{\lambda t} \cdot \vec{v} = e^{\lambda t} \cdot [A] \cdot \vec{v} \\ e^{\lambda t} \cdot (\lambda \cdot \vec{v}) &= e^{\lambda t} \cdot [A] \cdot \vec{v} \quad \Rightarrow \quad e^{\lambda t} \cdot (\lambda \cdot \vec{v} - [A] \cdot \vec{v}) = \vec{0} \end{aligned}$$

Como $e^{\lambda t} \neq 0$ para todo $t \in \mathbb{R}$, então $\lambda \cdot \vec{v} - [A] \cdot \vec{v} = \vec{0}$; segue que:

$$\lambda \cdot \vec{v} = [A] \cdot \vec{v}$$

Portanto, (7.3-2) é uma solução de (7.3-1) se e somente se $0 \neq \lambda \in \mathbb{R}$ é um valor próprio de $[A] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ e $\vec{0} \neq \vec{v} \in \mathbb{R}^n$ é o vetor próprio de $[A]$ associado a λ . Esta relação pode ser reescrita utilizando a matriz identidade $[I_n] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ de ordem n :

$$(\lambda \cdot [I_n] - [A]) \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Esta equação matricial corresponde a um sistema homogêneo, que sempre admite a solução trivial $\vec{v} = \vec{0}$ que, por definição, não é um vetor próprio. Este sistema admite soluções não triviais se e somente se

$$\det(\lambda \cdot [I_n] - [A]) = 0$$

O polinômio característico da matriz $[A]_{n \times n}$ é definido por:

$$p(\lambda) \doteq \det(\lambda \cdot [I_n] - [A]) \quad (7.3-3)$$

Os autovalores $\{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ da matriz $[A] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ correspondem às n raízes do polinômio (7.3-3).

No caso em que os autovalores são distintos $\{\lambda_k \neq \lambda_j : k \neq j\}$, as soluções do sistema (7.3-1) são uma combinação linear das formas do tipo (7.3-2):

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot e^{\lambda_k \cdot t} \cdot \vec{v}_k \quad (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$$

Podem-se supor, de maneira geral, que os autovalores sejam todos complexos na forma $\lambda_k = \alpha_k + i \cdot \beta_k$:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n c_k \cdot e^{(\alpha_k + i\beta_k)t} \cdot \vec{v}_k \quad \Rightarrow \quad \vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot e^{i(\beta_k \cdot t)} \cdot c_k \cdot \vec{v}_k$$

A fórmula de Euler (GUIDORIZZI, 2001a) permite calcular a exponencial de números complexos:

$$e^{i\theta} = \cos \theta + i \cdot \sin \theta$$

Substituindo na expressão das órbitas com $\theta_k = \beta_k \cdot t$, resultam as órbitas:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot c_k \cdot \vec{v}_k \quad (7.3-4)$$

Entre elas, a solução do problema é aquela que satisfaz à condição inicial estabelecida em (7.3-1). Nestas condições, as constantes c_k ficam implicitamente determinadas por:

$$\vec{x}_0 = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t_0} \cdot [\cos(\beta_k \cdot t_0) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t_0)] \cdot c_k \cdot \vec{v}_k$$

Se $t_0 = 0$, a relação é simplificada:

$$\vec{x}_0 = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t_0} \cdot c_k \cdot \vec{v}_k$$

Os vetores próprios $\vec{v}_k$ são complexos na forma $\vec{v}_k = \vec{a}_k + i \cdot \vec{b}_k$. Substituindo na expressão (7.3-4), resulta:

$$\begin{aligned} \vec{x}(t) &= \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot c_k \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot (\vec{a}_k + i \cdot \vec{b}_k) \\ \vec{x}(t) &= \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot c_k \cdot \{ [\cos(\beta_k \cdot t) \cdot \vec{a}_k - \sin(\beta_k \cdot t) \cdot \vec{b}_k] + i \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) \cdot \vec{b}_k + \sin(\beta_k \cdot t) \cdot \vec{a}_k] \} \end{aligned}$$

No caso particular em que os autovalores λ_k sejam reais, então $\beta_k = 0$ e $\vec{b}_k = \vec{0}$, e a equação das órbitas é simplificada:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot c_k \cdot \vec{a}_k$$

Portanto, no caso mais geral, as soluções são combinações lineares de funções exponenciais e trigonométricas, sendo estas últimas limitadas, ou seja, para todo $t \in \mathbb{R}$, existem $M_k > 0$ tais que:

$$|\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)| \leq M_k$$

Esta propriedade pode ser utilizada para determinar o comportamento local das órbitas:

$$\|\vec{x}(t)\| = \left\| \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot c_k \cdot \vec{v}_k \right\|$$

Aplicando a desigualdade triangular (BARONE, 1988), resulta:

$$\|\vec{x}(t)\| \leq \sum_{k=1}^n \|e^{\alpha_k \cdot t} \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot c_k \cdot \vec{v}_k\| = \sum_{k=1}^n |e^{\alpha_k \cdot t}| \cdot |\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)| \cdot |c_k| \cdot \|\vec{v}_k\|$$

$$\|\vec{x}(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |e^{\alpha_k \cdot t}| \cdot M_k \cdot |c_k| \cdot \|\vec{v}_k\|$$

Definindo-se o parâmetro auxiliar $N_k \doteq M_k \cdot |c_k| \cdot \|\vec{v}_k\|$, resulta que:

$$\|\vec{x}(t)\| \leq \sum_{k=1}^n |e^{\alpha_k \cdot t}| \cdot N_k$$

Qualitativamente, distinguem-se três situações básicas quanto ao comportamento das órbitas: atração, repulsão e centro.

7.3.1 Atração

Se todos os autovalores $\{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ têm parte real negativa, então $\alpha_k < 0$ e, para $t \rightarrow +\infty$, $|e^{\alpha_k \cdot t}| \rightarrow 0$. Havendo autovalores complexos, as órbitas se aproximam assintoticamente da origem $\vec{0}$, oscilando em torno dela:

$$\|\vec{x}(t)\| = \left\| \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot c_k \cdot \vec{v}_k \right\| \rightarrow 0$$

Se todos os autovalores forem reais negativos, então $\beta_k = 0$ e $\vec{b}_k = \vec{0}$; as órbitas de fato tendem à origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$, sem oscilar, pois:

$$\vec{x}(t) = \sum_{k=1}^n e^{\alpha_k \cdot t} \cdot c_k \cdot \vec{a}_k \rightarrow \vec{0}$$

Em todos os casos, as órbitas se aproximam, direta ou assintoticamente, da origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$, sendo esta assintoticamente estável.

7.3.2 Repulsão

Se pelo menos um dos autovalores $\{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ tem parte real positiva, então existe $k \in [1, n]$ de modo que $\alpha_k > 0$. Seja λ_p o autovalor tal que $\alpha_p = \max\{\alpha_k\}$. Necessariamente, $\alpha_p > 0$.

A expressão (7.3-4) pode ser separada em duas partes:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha_p \cdot t} \cdot c_p \cdot [\cos(\beta_p \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_p \cdot t)] \cdot \vec{v}_p + \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq p} e^{\alpha_k \cdot t} \cdot c_k \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot \vec{v}_k$$

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha_p \cdot t} \cdot \left\{ [\cos(\beta_p \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_p \cdot t)] \cdot c_p \cdot \vec{v}_p + \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq p} e^{(\alpha_k - \alpha_p)t} \cdot [\cos(\beta_k \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot c_k \cdot \vec{v}_k \right\}$$

Como $\alpha_p > \alpha_k$ para todo $k \neq p$, então $\alpha_k - \alpha_p < 0$. Resulta que $e^{(\alpha_k - \alpha_p)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto:

$$\vec{x}(t) \rightarrow e^{\alpha_p \cdot t} \cdot [\cos(\beta_p \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_p \cdot t)] \cdot c_p \cdot \vec{v}_p$$

Como $\alpha_p > 0$, resulta que $|e^{\alpha_p \cdot t}| \rightarrow +\infty$ quando $t \rightarrow +\infty$:

$$\|\vec{x}(t)\| \rightarrow |e^{\alpha_p \cdot t}| \cdot |\cos(\beta_p \cdot t) + i \cdot \sin(\beta_p \cdot t)| \cdot c_p \cdot \|\vec{v}_p\| \rightarrow +\infty$$

Resulta que todas as órbitas definidas para $c_p \neq 0$ se afastam da origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$, sendo ela instável.

7.3.3 Centro

Se pelo menos um dos autovalores $\{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ tem parte real nula, então existe $k \in [1, n]$ de modo que $\alpha_k = 0$. Seja λ_p o autovalor tal que $\alpha_p = 0$. A expressão (7.3-4) pode ser separada em duas partes:

$$\vec{x}(t) = [a_p \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + b_p \cdot \sin(\beta_p \cdot t)] \cdot \vec{v}_p + \sum_{1 \leq k \leq n, k \neq p} e^{\alpha_k \cdot t} \cdot [a_k \cdot \cos(\beta_k \cdot t) + b_k \cdot \sin(\beta_k \cdot t)] \cdot \vec{v}_k$$

Se algum dos outros autovalores $\{\lambda_k : k \neq p\}$ tiver parte real positiva, resulta no caso anterior, em que origem $\vec{0}$ é instável. Então suponha que todos os outros $\{\lambda_k : k \neq p\}$ tenham parte real negativa. Resulta que $e^{\alpha_k \cdot t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$. Portanto:

$$\vec{x}(t) \rightarrow [a_p \cdot \cos(\beta_p \cdot t) + b_p \cdot \sin(\beta_p \cdot t)] \cdot \vec{v}_p$$

Como as funções trigonométricas são limitadas, resulta que a trajetória das órbitas é limitada, pois:

$$\|\vec{x}(t)\| \leq M_p \cdot \|\vec{v}_p\| = N_p$$

E neste último caso, a origem $\vec{0}$ é um centro em torno do qual as soluções oscilam, sem aproximarem-se ou afastarem-se dela.

7.3.4 Resumo

Os resultados obtidos podem ser resumidos nos seguintes itens:

- Se todos os autovalores $\{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ da matriz $[A] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ têm parte real negativa, então a origem $\vec{0}$ é assintoticamente estável.
- Se pelo menos um autovalor λ_p tem parte real $\alpha_p > 0$ positiva, então a origem $\vec{0}$ é instável.
- Se pelo menos um autovalor λ_p tem parte real $\alpha_p = 0$ nula, e os outros autovalores $\{\lambda_k : k \neq p\}$ têm parte real negativa, então a origem $\vec{0}$ é um centro.

7.4 Estabilidade de Liapunov

Sejam $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \Omega \subset \mathbb{R}^n$ e $\vec{f} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma função. Para determinar a estabilidade de pontos de equilíbrio, alguns cálculos preliminares são efetuados (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2002). O jacobiano da função $\vec{f}$ é uma matriz $n \times n$ que contém todas as derivadas parciais das funções f_i :

$$[D\vec{f}]_{i,j} = \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \quad (7.4-1)$$

Para estudar a estabilidade de um determinado ponto de equilíbrio $\vec{x} = \vec{x}^*$, aplica-se o jacobiano $[D\vec{f}]$ neste ponto $\vec{x}^*$, definindo, para este ponto, uma matriz de coeficientes $[A]$:

$$[A] \doteq [D\vec{f}]_{\vec{x}=\vec{x}^*} \quad (7.4-2)$$

Pode-se então definir a função $\vec{R}(\vec{x}) = \vec{f}(\vec{x}) - [A] \cdot \vec{x}$ e re-escrever o sistema (7.1-4) separando a parte linear da parte não-linear:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}) = [A] \cdot \vec{x} + \vec{R}(\vec{x}) \quad (7.4-3)$$

No caso unidimensional, o sistema (7.4-3) é reduzido a:

$$\frac{dx}{dt} = a(t) \cdot x + b(t) \quad x(t_0) = x_0$$

Tello (1979) utiliza o método das aproximações sucessivas para integrar analiticamente a equação:

$$\varphi(t, t_0, x_0) = e^{\int_{t_0}^t a(\tau) d\tau} \cdot \left[x_0 + \int_{t_0}^t e^{-\int_{t_0}^{\tau} a(T) dT} \cdot b(\tau) \cdot d\tau \right]$$

Tendo em vista o que foi apresentado no item 7.3, a estabilidade do ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ é determinada pela natureza dos autovalores $\{\lambda_i : 1 \leq i \leq n\}$ da matriz $[A]$ correspondente.

Um ponto de equilíbrio $\vec{x} = \vec{x}^*$ é hiperbólico quando todos os autovalores $\{\lambda_i\}$ da sua matriz $[A]$ possuem parte real não nula. Neste caso, a equação (7.4-3) é a expansão do sistema não linear (7.1-4) em séries de Taylor em torno de $\vec{x} = \vec{x}^*$.

Pelo primeiro Teorema de Liapunov (TELLO, 1979) a função $\vec{R}(\vec{x})$ é o resíduo de primeira ordem do sistema, e satisfaz à condição:

$$\lim_{\|\vec{x}\| \rightarrow 0} \frac{\vec{R}(\vec{x})}{\|\vec{x}\|} = \vec{0}$$

Nestas condições, pelo teorema de Hartman-Großman (MONTEIRO, 2006), existe uma bijeção contínua que leva o espaço de fases do sistema não linear (7.1-4) no espaço de fases do sistema linear (7.3-1), preservando o sentido das órbitas:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = [A] \cdot \vec{x} \quad (7.3-1)$$

Portanto, segundo Guckenheimer e Holmes (2002), o sistema não linear (7.1-4) e o sistema linear (7.3-1) são topologicamente equivalentes e, nas vizinhanças do ponto de equilíbrio hiperbólico $\vec{x}^*$, o sistema não linear se comporta como o linear.

Com este teorema, torna-se possível utilizar o sistema linear (7.3-1) para: determinar o comportamento local das soluções do sistema não linear (7.1-4) nas vizinhanças de pontos de equilíbrio hiperbólicos; esboçar trajetórias e verificar como evolui o sistema dinâmico antes de integrá-lo analiticamente ou numericamente.

Finalmente, a estabilidade de pontos de equilíbrio hiperbólicos pode ser determinada aplicando-se o primeiro Teorema de Liapunov (GUCKENHEIMER; HOLMES, 2002):

- Se todos os autovalores $\{\lambda_k : 1 \leq k \leq n\}$ da matriz $[A] \doteq \left[D\vec{f} \right]_{\vec{x}=\vec{x}^*}$ têm parte real negativa, então o ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ é assintoticamente estável.
- Se pelo menos um autovalor λ_p tem parte real $\alpha_p > 0$ positiva, então o ponto de equilíbrio $\vec{x}^*$ é instável.

Se pelo menos um autovalor λ_p tem parte real α_p nula, e os outros autovalores $\{\lambda_k : k \neq p\}$ têm parte real negativa, então $\vec{x}^*$ é um ponto de equilíbrio não-hiperbólico, e a linearização (7.4-3) não poderá ser aplicada.

7.5 Sistemas Bidimensionais Simples

Tello (1979) desenvolveu as soluções para os sistemas bidimensionais lineares com coeficientes constantes. Neste caso, a matriz $[A] \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ reduz-se a:

$$[A] = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

O sistema (7.3-1) pode ser escrito em duas linhas:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = a \cdot x_1 + b \cdot x_2 \\ \dot{x}_2 = c \cdot x_1 + d \cdot x_2 \end{cases} \quad (7.5-1)$$

Quando $\det[A] \neq 0$, o único ponto de equilíbrio do sistema (7.5-1) é a origem:

$$\vec{x}^* = \vec{0} = (0,0)$$

Os valores próprios (λ_1, λ_2) da matriz $[A]$ e os respectivos vetores próprios $(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ determinam a natureza das soluções e a estabilidade da origem $\vec{x}^* = \vec{0}$ do espaço de fases. O polinômio característico da matriz $[A]$ é determinado por:

$$p(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - a & -b \\ -c & \lambda - d \end{vmatrix} = (\lambda - a) \cdot (\lambda - d) - b \cdot c$$

$$p(\lambda) = \lambda^2 - (a + d) \cdot \lambda + (a \cdot d - b \cdot c)$$

O traço e o determinante da matriz $[A]$ são definidos por:

$$\sigma \doteq \text{tr}[A] = a + d$$

$$\delta \doteq \det[A] = a \cdot d - b \cdot c$$

Com esta notação, o polinômio característico da matriz $[A]$ vale:

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \sigma \cdot \lambda + \delta$$

Os autovalores são as raízes do polinômio característico, obtidas pela equação modular:

$$\left| \lambda - \frac{\sigma}{2} \right| = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 - \delta} \quad (7.5-2)$$

Distinguem-se alguns casos de pares de autovalores, dependentes da relação entre os parâmetros (σ, δ) .

7.5.1 Autovalores complexos

A equação modular (7.5-2) terá raízes complexas se:

$$\left(\frac{\sigma}{2} \right)^2 < \delta$$

Então os valores próprios serão complexos conjugados:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma}{2} + i \cdot \sqrt{\delta - \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2} \quad \lambda_2 = \frac{\sigma}{2} - i \cdot \sqrt{\delta - \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2}$$

Escrevem-se $\lambda_1 = \alpha + i \cdot \beta$ e $\lambda_2 = \alpha - i \cdot \beta$, com a notação:

$$\alpha \doteq \frac{\sigma}{2} \quad \beta \doteq \sqrt{\delta - \left(\frac{\sigma}{2} \right)^2}$$

As soluções do sistema (7.5-1) são determinadas adaptando-se a expressão (7.3-4) ao caso bidimensional, considerando-se que $\beta_1 = \beta$ e $\beta_2 = -\beta$:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot \{ [\cos(\beta \cdot t) + i \cdot \sin(\beta \cdot t)] \cdot c_1 \cdot \vec{v}_1 + [\cos(\beta \cdot t) - i \cdot \sin(\beta \cdot t)] \cdot c_2 \cdot \vec{v}_2 \}$$

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot [\cos(\beta \cdot t) \cdot (c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2) + i \cdot \sin(\beta \cdot t) \cdot (c_1 \cdot \vec{v}_1 - c_2 \cdot \vec{v}_2)]$$

Mas os vetores próprios serão complexos conjugados:

$$\vec{v}_1 = \vec{a} + i \cdot \vec{b}$$

$$\vec{v}_2 = \vec{a} - i \cdot \vec{b}$$

Resulta:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot \left\{ c_1 \cdot [\cos(\beta \cdot t) + i \cdot \sin(\beta \cdot t)] \cdot (\vec{a} + i \cdot \vec{b}) + c_2 \cdot [\cos(\beta \cdot t) - i \cdot \sin(\beta \cdot t)] \cdot (\vec{a} - i \cdot \vec{b}) \right\}$$

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot \left\{ \begin{aligned} &\cos(\beta \cdot t) \cdot [(c_1 + c_2) \cdot \vec{a} + i \cdot (c_1 - c_2) \cdot \vec{b}] + \\ &\sin(\beta \cdot t) \cdot [-(c_1 + c_2) \cdot \vec{b} + i \cdot (c_1 - c_2) \cdot \vec{a}] \end{aligned} \right\}$$

A solução geral é determinada definindo-se os vetores

$$\vec{w}_1 \doteq c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2$$

$$\vec{w}_2 \doteq i \cdot (c_1 \cdot \vec{v}_1 - c_2 \cdot \vec{v}_2)$$

$$\vec{w}_1 = (c_1 + c_2) \cdot \vec{a} + i \cdot (c_1 - c_2) \cdot \vec{b}$$

$$\vec{w}_2 = -(c_1 + c_2) \cdot \vec{b} + i \cdot (c_1 - c_2) \cdot \vec{a}$$

Resulta:

$$\vec{x}(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot [\cos(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_2] \quad (7.5-3)$$

Como as órbitas são funções reais, então os vetores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$ são reais:

$$\vec{w}_1 = \begin{Bmatrix} w_{11} \\ w_{21} \end{Bmatrix}$$

$$\vec{w}_2 = \begin{Bmatrix} w_{12} \\ w_{22} \end{Bmatrix}$$

Então as funções coordenadas podem ser escritas por:

$$x_1(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot [w_{11} \cdot \cos(\beta \cdot t) + w_{12} \cdot \sin(\beta \cdot t)]$$

$$x_2(t) = e^{\alpha \cdot t} \cdot [w_{21} \cdot \cos(\beta \cdot t) + w_{22} \cdot \sin(\beta \cdot t)]$$

Ou ainda:

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = e^{\alpha \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} \cos(\beta \cdot t) \\ \sin(\beta \cdot t) \end{Bmatrix}$$

A matriz $W \doteq \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix}$ define todas as órbitas do sistema (7.5-1) para

valores próprios complexos, sendo que a solução do problema de Cauchy é determinada conforme as condições iniciais.

O comportamento dinâmico do sistema é ainda alterado de acordo com o valor do parâmetro α : se $\alpha = 0$, a origem é um centro; caso contrário, um foco, sendo estável se $\alpha < 0$ e instável se $\alpha > 0$.

7.5.1.1 Centro

Se $\alpha = 0$, os autovalores são números imaginários. Resulta que:

$$\vec{x}(t) = \cos(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_2 \quad (7.5-4)$$

Neste caso, para cada condição inicial escolhida, a trajetória é limitada, pois, para todo $t \in \mathbb{R}$:

$$\|\vec{x}(t)\| = \|\cos(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_2\| \leq M$$

Portanto, a origem $\vec{0}$ é um centro em torno do qual as soluções oscilam, segundo a trajetória de elipses de eixos paralelos aos vetores $\{\vec{w}_1, \vec{w}_2\}$:

7.5.1.2 Focos

Se $\alpha \neq 0$, então as soluções oscilam em torno da origem $\vec{0}$, se aproximando dela para $t \rightarrow \pm\infty$. Neste caso, $\vec{0}$ é um foco. (GUCKENHEIMER; HOLMES, (2002).

Se $\alpha < 0$, as soluções se aproximam da origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$ e o foco é um atrator e, portanto, estável, pois $\lim_{t \rightarrow +\infty} e^{\alpha \cdot t} = 0$:

$$\|\vec{x}(t)\| = |e^{\alpha \cdot t}| \cdot \|\cos(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_1 + \sin(\beta \cdot t) \cdot \vec{w}_2\| \leq |e^{\alpha \cdot t}| \cdot M \rightarrow 0$$

Se $\alpha > 0$, as soluções se afastam da origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$ (ou se aproximam dela para $t \rightarrow -\infty$) e o foco é um repulsor e, portanto, instável, pois:

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} |e^{\alpha \cdot t}| = +\infty$$

Na Figura 34, adaptada de Meza (2007), são apresentados os retratos de fases de sistemas que possuam centros ou focos.

Figura 34 – (i) centro; (ii) foco estável; (iii) foco instável

7.5.2 Autovalores iguais

A equação modular (7.5-2) terá raízes iguais se:

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 = \delta$$

E então a matriz $[A]$ admite um único valor próprio, que vale:

$$\lambda = \frac{\sigma}{2}$$

Existem dois casos a analisar de autovalores iguais, conforme explicado nos itens a seguir.

7.5.2.1 Nós próprios

Se a matriz $[A]$ for diagonal, então qualquer vetor será um vetor próprio (VILLATE; 2006):

$$[A] = \begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$$

Então quaisquer vetores $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ linearmente independentes serão direções principais de alguma órbita, e as soluções de (7.5-1) podem ser escritas por:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot (c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2)$$

Definindo-se $\vec{w} \doteq c_1 \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2$, resulta que $\vec{w} \neq \vec{0}$ e:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot \vec{w}$$

Ou seja, todas as órbitas, exceto a solução nula, são semi-retas que passam pela origem $\vec{0}$, aproximando-se dela se $\lambda < 0$ ou afastando-se dela se $\lambda > 0$, dando origem a um nó próprio (VILLATE; 2006)

Neste caso, qualquer vetor $\vec{w} \neq \vec{0}$ produz uma órbita do sistema. Mas a solução do problema de valor inicial é a determinada pela única órbita que satisfaz a:

$$\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$$

Substituindo na equação das órbitas, resulta que $\vec{w} = \frac{\vec{x}_0}{e^{\lambda \cdot t}}$ e, portanto:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot (t-t_0)} \cdot \vec{x}_0$$

Se $\lambda = 0$, resulta que $e^{\lambda \cdot (t-t_0)} = 1$ e o sistema permanece em repouso ou movimento retilíneo e uniforme:

$$\vec{x}(t) = \vec{x}_0$$

Os retratos de fases das órbitas ao redor de nós próprios são apresentados na Figura 35, adaptada de Tello (1979).

Figura 35 – (i) nó próprio atrator; (ii) nó próprio repulsor.

7.5.2.2 Nós impróprios

Por outro lado, se a matriz $[A]$ não for diagonal, não existem dois vetores próprios linearmente independentes (VILLATE; 2006). Neste caso, obtido o vetor próprio $\vec{v}$, seja $\vec{w}$ um vetor não colinear com $\vec{v}$ (TELLO; 1979) tal que (BRAUN; 1979):

$$(A - \lambda \cdot I_2)^2 \cdot \vec{w} = \vec{0}$$

Então uma solução do sistema (7.5-1) é a função vetorial:

$$e^{\lambda \cdot t} \cdot [\vec{w} + t \cdot (A - \lambda \cdot I_2) \cdot \vec{w}]$$

As soluções do sistema (7.5-1) são na forma:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot (c_1 \cdot \vec{v} + c_2 \cdot [\vec{w} + t \cdot (A - \lambda \cdot I_2) \cdot \vec{w}])$$

Definindo $\vec{u} \doteq (A - \lambda \cdot I_2) \cdot \vec{w}$, resulta:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot [(c_1 \cdot \vec{v} + c_2 \cdot \vec{w}) + t \cdot c_2 \cdot \vec{u}]$$

Mas como $(A - \lambda \cdot I_2)^2 \cdot \vec{w} = \vec{0}$, então $(A - \lambda \cdot I_2) \cdot (A - \lambda \cdot I_2) \cdot \vec{w} = \vec{0}$ e, portanto:

$$(A - \lambda \cdot I_2) \cdot \vec{u} = \vec{0}$$

Portanto, $\vec{u}$ também é um vetor próprio de $[A]$. Mas como $\vec{v}$ é um vetor próprio associado ao autovalor $\lambda \in \mathbb{R}$, as órbitas são determinadas tomando-se $\vec{u} = \eta \cdot \vec{v}$:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot [(c_1 \cdot \vec{v} + c_2 \cdot \vec{w}) + t \cdot c_2 \cdot \eta \cdot \vec{v}] \quad (7.5-5)$$

Definindo-se os vetores $\vec{w}_1 \doteq c_1 \cdot \vec{v} + c_2 \cdot \vec{w}$ e $\vec{w}_2 \doteq c_2 \cdot \eta \cdot \vec{v}$, resulta que as funções coordenadas podem ser escritas por:

$$x_1(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot [w_{11} + w_{12} \cdot t] \quad x_2(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot [w_{21} + w_{22} \cdot t]$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} 1 \\ t \end{Bmatrix}$$

Colocando-se $c_2 = 0$ na equação (7.5-5), obtêm-se as trajetórias paralelas à direção de $\vec{v}$, definidas por $c_2 = 0$, são semi-retas paralelas a $\vec{v}$, pois:

$$\vec{x}(t) = e^{\lambda \cdot t} \cdot c_1 \cdot \vec{v}$$

Para todas as outras trajetórias, quando $c_2 \neq 0$, é conveniente escrever que:

$$\vec{x}(t) = \frac{(c_1 + t \cdot c_2 \cdot \eta) \cdot \vec{v} + c_2 \cdot \vec{w}}{e^{-\lambda \cdot t}}$$

Usando a regra de L'Hôpital para calcular o limite em que $t \rightarrow +\infty$, resulta:

$$\vec{x}(t) \rightarrow \frac{c_2 \cdot \eta}{-\lambda \cdot e^{-\lambda \cdot t}} \cdot \vec{v} \quad \vec{x}(t) \rightarrow -\frac{c_2 \cdot \eta}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \vec{v}$$

Se $\lambda \neq 0$, as órbitas tendem a se aproximar da reta paralela a $\vec{v}$; se $\lambda < 0$, as soluções se aproximam da origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$, pois $e^{\lambda \cdot t} \rightarrow 0$:

$$\vec{x}(t) \rightarrow -\frac{c_2 \cdot \eta}{\lambda} \cdot e^{\lambda \cdot t} \cdot \vec{v} \rightarrow \vec{0}$$

Se $\lambda > 0$, as soluções se afastam da origem $\vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$, pois:

$$\|\vec{x}(t)\| \rightarrow |e^{\lambda \cdot t}| \cdot \left| \frac{c_2 \cdot \eta}{\lambda} \right| \cdot \|\vec{v}\| \rightarrow +\infty$$

Ou seja, em todos estes casos, as órbitas tendem à reta que é paralela ao vetor próprio $\vec{v}$ e passa pela origem $\vec{0}$, aproximando-se dela se $\lambda < 0$ ou afastando-se dela se $\lambda > 0$, dando origem a um nó impróprio (VILLATE; 2006).

Se $\lambda = 0$, escolhe-se para o vetor $\vec{w}$ qualquer vetor não colinear com $\vec{v}$; neste caso, as soluções se afastam da origem para $t \rightarrow +\infty$, pois:

$$\|\vec{x}(t) - c_1 \cdot \vec{v} - c_2 \cdot \vec{w}\| = |t| \cdot |c_2 \cdot \eta| \cdot \|\vec{v}\| \rightarrow +\infty$$

A solução do problema de valor inicial é a determinada pela única órbita que satisfaz a $\vec{x}(t_0) = \vec{x}_0$. As constantes (c_1, c_2) ficam implicitamente determinadas por:

$$\vec{x}_0 = c_1 \cdot \vec{v} + c_2 \cdot (\vec{w} + t_0 \cdot \eta \cdot \vec{v})$$

Os retratos de fases das órbitas ao redor de nós impróprios são apresentados na Figura 36, adaptada de Tello (1979).

Figura 36 – (i) nó impróprio atrator; (ii) nó impróprio repulsor.

7.5.3 Autovalores reais distintos

A equação modular (7.5-2) terá raízes reais distintas se:

$$\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 > \delta$$

Então os valores próprios serão reais:

$$\lambda_1 = \frac{\sigma}{2} + \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \delta} \quad \lambda_2 = \frac{\sigma}{2} - \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \delta}$$

Escrevem-se $\lambda_1 = \alpha + \beta$ e $\lambda_2 = \alpha - \beta$, com a notação:

$$\alpha = \frac{\sigma}{2}$$

$$\beta = \sqrt{\left(\frac{\sigma}{2}\right)^2 - \delta}$$

Resulta que os vetores próprios $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2\}$ são linearmente independentes e as soluções do sistema (7.5-1) são da forma:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \vec{v}_2 \quad (c_1, c_2) \neq (0, 0) \quad (7.5-6)$$

Definindo-se os vetores $\vec{w}_1 \doteq c_1 \cdot \vec{v}_1$ e $\vec{w}_2 \doteq c_2 \cdot \vec{v}_2$, resulta que as funções coordenadas podem ser escritas por:

$$x_1(t) = w_{11} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + w_{12} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \quad x_2(t) = w_{21} \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} + w_{22} \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}$$

$$\begin{Bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{Bmatrix} = e^{\lambda \cdot t} \cdot \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} \\ w_{21} & w_{22} \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} e^{\lambda_1 \cdot t} \\ e^{\lambda_2 \cdot t} \end{Bmatrix}$$

Uma vez que $0 \notin \{e^{\lambda_1 \cdot t}, e^{\lambda_2 \cdot t}\}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, no caso em que $c_1 \neq 0$, pode-se escrever:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \left(\vec{v}_1 + \frac{c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t}}{c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t}} \cdot \vec{v}_2 \right)$$

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \left(\vec{v}_1 + \frac{c_2}{c_1} \cdot e^{(\lambda_2 - \lambda_1)t} \cdot \vec{v}_2 \right)$$

Mas $\lambda_2 - \lambda_1 = -2 \cdot \beta$. Como, por definição, $\beta > 0$, resulta que $\lambda_2 < \lambda_1$; portanto:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \left(\vec{v}_1 + \frac{c_2}{c_1} \cdot e^{-(2\beta)t} \cdot \vec{v}_2 \right)$$

Neste caso, a reta tangente à trajetória tende à reta paralela a $\vec{v}_1$, pois $e^{-(2\beta)t} \rightarrow 0$ quando $t \rightarrow +\infty$; então:

$$\vec{x}(t) \rightarrow c_1 \cdot e^{\lambda_1 \cdot t} \cdot \vec{v}_1 \quad c_1 \neq 0$$

Se $c_1 = 0$, as soluções são semi-retas paralelas a $\vec{v}_2$:

$$\vec{x}(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 \cdot t} \cdot \vec{v}_2 \quad c_2 \neq 0$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio depende dos sinais relativos entre os autovalores.

7.5.3.1 Poço e Fonte

Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$ são reais de mesmo sinal, a origem $\vec{0}$ é um nó, por onde as soluções passam sem oscilar. Se $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ são ambos negativos, $\vec{x}(t) \rightarrow \vec{0}$ para $t \rightarrow +\infty$, pois:

$$\vec{x}(t) \rightarrow c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v}_1 \rightarrow \vec{0} \quad c_1 \neq 0$$

$$\vec{x}(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v}_2 \rightarrow \vec{0} \quad c_2 \neq 0$$

Resulta que, para $t \rightarrow +\infty$, as soluções se aproximam da origem $\vec{0}$, sendo esta um poço ou nó atrator e, portanto, estável.

Se $\lambda_1 > \lambda_2 > 0$ são ambos positivos, $\|\vec{x}(t)\| \rightarrow +\infty$ para $t \rightarrow +\infty$, pois:

$$\|\vec{x}(t)\| \rightarrow |c_1| \cdot |e^{\lambda_1 t}| \cdot \|\vec{v}_1\| \rightarrow +\infty \quad c_1 \neq 0$$

$$\|\vec{x}(t)\| = |c_2| \cdot |e^{\lambda_2 t}| \cdot \|\vec{v}_2\| \rightarrow +\infty \quad c_2 \neq 0$$

Resulta que, para $t \rightarrow +\infty$, as soluções se afastam da origem $\vec{0}$, sendo esta uma fonte ou nó repulsor e, portanto, instável.

7.5.3.2 Ponto de Sela

Se $\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$ são reais de sinais opostos, necessariamente $\lambda_2 < 0 < \lambda_1$, pois $\lambda_2 < \lambda_1$. Neste caso, ocorre uma situação mista dos dois casos anteriores. A solução geral é:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\lambda_1 t} \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v}_2$$

As trajetórias paralelas à direção de $\vec{v}_1$, definidas por $c_2 = 0$, se afastam da origem $\vec{0}$, pois $\lambda_1 > 0$, e então:

$$\|\vec{x}(t)\| = |c_1| \cdot |e^{\lambda_1 t}| \cdot \|\vec{v}_1\| \rightarrow +\infty \quad c_2 = 0$$

As trajetórias paralelas à direção de $\vec{v}_2$, definidas por $c_1 = 0$, se aproximam da origem $\vec{0}$, pois $\lambda_2 < 0$, e então:

$$\vec{x}(t) = c_2 \cdot e^{\lambda_2 t} \cdot \vec{v}_2 \rightarrow \vec{0} \quad c_1 = 0$$

As outras trajetórias se afastam da origem $\vec{0}$, pois quando $0 \notin \{c_1, c_2\}$:

$$\|\vec{x}(t)\| \rightarrow |c_1| \cdot |e^{\lambda_1 t}| \cdot \left\| \vec{v}_1 + \frac{c_2}{c_1} \cdot e^{-(2b)t} \cdot \vec{v}_2 \right\| \rightarrow |c_1| \cdot |e^{\lambda_1 t}| \cdot \|\vec{v}_1\| \rightarrow +\infty$$

Finalmente, as trajetórias paralelas à direção de $\vec{v}_2$ se aproximam da origem $\vec{0}$, enquanto que outras trajetórias dela se afastam, sendo esta um ponto de sela, que é instável no sentido de Liapunov.

Na Figura 37, adaptada de Meza (2007), são apresentados os retratos de fases de sistemas ao redor de nós ou sela.

Figura 37 – (i) nó atrator; (ii) nó repulsor; (iii) sela.

7.5.3.3 Nó degenerado

Um caso particular corresponde a um autovalor nulo, que ocorre quando:

$$\delta = 0$$

Neste caso, o polinômio característico da matriz $[A]$ se reduz a:

$$p(\lambda) = \lambda \cdot (\lambda - \sigma)$$

Os autovalores são $\lambda_1 = \sigma$ e $\lambda_2 = 0$. As soluções do sistema (7.5-1) são:

$$\vec{x}(t) = c_1 \cdot e^{\sigma t} \cdot \vec{v}_1 + c_2 \cdot \vec{v}_2 \quad (c_1, c_2) \neq (0, 0)$$

Se $\sigma < 0$, as soluções se aproximam da origem $\vec{0}$ pela reta paralela ao vetor próprio $\vec{v}_2$ correspondente ao autovalor nulo, pois $e^{\sigma t} \rightarrow 0$ para $t \rightarrow +\infty$:

$$\vec{x}(t) \rightarrow c_2 \cdot \vec{v}_2$$

E então todos os pontos que estão sobre esta reta são pontos de equilíbrio. Um retrato de fase desta situação é apresentado na Figura 39, construída, a partir de Doering e Lopes (2005), para $\lambda_2 < 0$.

Figura 38 – Nó degenerado

7.5.4 Resumo

Sistemas lineares com coeficientes constantes são analiticamente integráveis. Suas órbitas são funções temporais que dependem da relação entre os coeficientes da matriz $[A]$ de coeficientes.

A natureza dos valores próprios desta matriz define se a trajetória no espaço de fases ocorre com ou sem oscilação; os vetores próprios definem as direções segundo as quais as diversas órbitas do sistema se orientam.

Em um sistema planar, a relação entre o traço $\sigma = a + d$ e o determinante $\delta = a \cdot d - b \cdot c$ da matriz definirá o tipo de órbita do sistema, permitindo classificá-lo segundo os parâmetros (σ, δ) . Esta relação é definida pela parábola de equação:

$$f(\sigma, \delta) = \sigma^2 - 4 \cdot \delta$$

Se $\sigma^2 < 4 \cdot \delta$, os autovalores são complexos, e o sistema se desenvolve com oscilação, sendo a origem um foco ou centro. Caso contrário, os autovalores são reais, e o sistema se desenvolve sem oscilação, sendo a origem uma sela ou nó.

Se $\sigma^2 = 4 \cdot \delta$, a matriz $[A]$ admitirá um único autovalor, e o nó será próprio se ela for diagonal (ou conjugada a uma matriz diagonal) ou impróprio caso contrário.

Se $\sigma^2 > 4 \cdot \delta$, os autovalores são reais distintos, e a origem será um ponto de sela se tiverem sinais opostos ou um nó caso contrário. Se um deles for nulo, ocorre uma degeneração; todos os pontos sobre a reta que passa pela origem e é paralela a este vetor próprio serão estacionários.

A Figura 39, adaptada de Villate (2006) contém o gráfico da parábola no sistema de eixos (σ, δ) e mostra o comportamento topológico das órbitas de um sistema planar no retrato de fases. Um resumo qualitativo de todos os resultados é apresentado na Tabela 13.

Tabela 13 – Estabilidade da origem $\vec{0}$ em sistemas bidimensionais simples

Autovalores	Complexos $\sigma^2 < 4 \cdot \delta$	Reais $\sigma^2 \geq 4 \cdot \delta$
Representação matemática	$\lambda_1 = \alpha_0 + i \cdot \beta_0$ $\lambda_2 = \alpha_0 - i \cdot \beta_0$	$\lambda_1 = \alpha_1$ $\lambda_2 = \alpha_2$
$\alpha_i < 0$	foco atrator (estável)	nó atrator ou poço (estável)
$\alpha_i > 0$	foco repulsor (instável)	nó repulsor ou fonte (instável)
$\alpha_0 = 0$	centro	—
$\alpha_1 \cdot \alpha_2 < 0$	—	sela
$\alpha_1 = \alpha_2$	—	nó próprio ou impróprio
$\alpha_2 = 0$	—	nó degenerado

Figura 39 – Classificação de sistemas lineares

8 ELEMENTOS DE MECÂNICA

A teoria de Newton para o movimento de corpos foi desenvolvida em 1643 a partir de oito definições (massa, inércia, força, entre outras) e apenas três axiomas (leis de movimento). A massa foi primitivamente definida por:

A quantidade de matéria de um corpo é a medida da mesma, obtida conjuntamente a partir de sua densidade e volume.
(NEWTON, 2002, p. 39)

Atualmente, a densidade de um corpo é definida a partir de sua massa e volume. Esta aparente circularidade existe porque em 1686, na época em que o livro foi escrito, as unidades fundamentais empregadas eram densidade, comprimento e tempo. Neste contexto, corpos de mesma densidade são “aqueles cujas inércias são proporcionais aos seus volumes” (NEWTON, 2008, p. 203).

Torna-se natural dizer que massa é a “quantidade de matéria de um corpo, determinada pelo produto de volume e densidade” (NEWTON, 2008, p. 311). Para um sólido de densidade superficial $\rho(V)$ e volume V , a massa pode ser matematicamente definida por:

$$m \doteq \iiint_V \rho(V) \cdot dV$$

Segue uma definição primitiva de inércia:

A força inata da matéria é um poder de resistir, através do qual todo o corpo, no que depende, mantém seu estado presente, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em linha reta. (Newton, 2002, p. 40)

A inércia ou força de inatividade de um corpo atua como uma resistência contra outra força imprimida sobre ele a fim de alterar seu estado de movimento.

Segue uma definição primitiva de força:

Uma força imprimida é uma ação exercida sobre um corpo a fim de alterar seu estado, seja ele de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta. (NEWTON, 2002, p. 41)

Utilizando as definições, Newton enunciou os axiomas (leis de movimento) da teoria. O princípio da Inércia estabelece que:

Todo corpo continua em seu estado de repouso ou de movimento uniforme em uma linha reta, a menos que ele seja forçado a mudar aquele estado por forças imprimidas sobre ele. (NEWTON, 2002, p. 53)

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2007), um corpo manterá seu estado de movimento com velocidade constante se nenhuma força agir sobre ele. Segundo Mazzilli e Soares (2007), existem referenciais inerciais em relação aos quais pontos materiais isolados, submetidos a forças resultantes nulas, descrevem movimento retilíneo e uniforme.

O princípio Fundamental estabelece que:

A mudança de movimento é proporcional à força motora imprimida, e é produzida na direção da linha reta na qual aquela força é imprimida. (NEWTON, 2002, p. 54)

A mudança de movimento de um corpo é estabelecida pela aquisição de ou alteração na sua velocidade inicial $\vec{v}_0 \doteq \vec{v}(t_0)$. Esta mudança de velocidade ocorre no sentido de aplicação da força, sendo proporcional à intensidade da força $\vec{F}$ aplicada.

Esta mudança de velocidade é representada pela aceleração, definida em relação a um referencial inercial:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$$

Portanto, a aceleração $\vec{a}$ que anima um ponto material é proporcional à resultante $\vec{F}$ de forças aplicadas neste ponto (MAZZILLI; SOARES, 2007).

A constante de proporcionalidade entre a força aplicada $\vec{F}$ e a aceleração $\vec{a}$ produzida tem relação direta com a massa m do respectivo corpo:

$$\vec{F} = m \cdot \vec{a} \tag{8.1-1}$$

Portanto, a força resultante $\vec{F}$ atuante sobre um corpo é igual ao produto de sua massa m pela respectiva aceleração $\vec{a}$ (HALLIDAY; RESNICK; WALKER, 2007). Substituindo a definição de aceleração na expressão (8.1-1), resulta:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$$

A velocidade vetorial $\vec{v}$, por sua vez, corresponde à variação em relação ao tempo da posição $\vec{r} \doteq (x, y, z)$ que o corpo de massa m ocupa no espaço:

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}$$

Com estas notações, a segunda lei de Newton pode finalmente ser escrita na forma diferencial:

$$\vec{F} = m \cdot \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} \quad (8.1-2)$$

O Princípio da Ação e Reação estabelece que:

À toda ação há sempre oposta uma reação igual; ou as ações mútuas de dois corpos um sobre o outro são sempre iguais e dirigidas a partes opostas. (NEWTON, 2002, p. 54)

De acordo com Halliday, Resnick e Walker (2007), dois corpos interagem quando uma força atua em um devido ao outro. Neste caso, as forças exercidas por um sobre o outro são sempre iguais em módulo e têm sentidos opostos

Portanto, a toda ação de um ponto material sobre outro corresponde uma reação de mesma intensidade e direção, porém de sentido oposto (MAZZILLI; SOARES, 2007).

As leis de Newton foram formuladas para uma única partícula de massa m (MEIROVITCH, 1967). A aplicação da segunda lei produz a equação diferencial (8.1-2) que, mediante integração, permite determinar a lei de movimento daquela partícula, definida pela função:

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = (x(t), y(t), z(t))$$

Para a análise de um sistema de múltiplas partículas, torna-se necessário escrever uma equação diferencial para cada partícula. Em decorrência da possível interação entre corpos, as equações diferenciais são, em geral, acopladas, o que pode representar grandes dificuldades na obtenção de soluções.

Para estudar problemas de múltiplos corpos, torna-se necessário utilizar outra metodologia de análise. A mecânica analítica é desenvolvida a partir da mecânica vetorial utilizando o conceito fundamental de trabalho, que envolve grandezas escalares.

8.1 Trabalho e Energia Cinética

Sejam $I \doteq [t_1, t_2]$ um intervalo real e $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um subconjunto do espaço físico euclidiano tridimensional $\{x_i : 1 \leq i \leq 3\}$. Uma força $\vec{F} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ atua sobre uma partícula de massa m induzindo seu movimento ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow \Omega$, definida por $\gamma(t) \doteq \vec{r}(t)$.

O trabalho realizado pela força $\vec{F}$ entre os pontos $\gamma(t_1) = \vec{r}(t_1) \doteq \vec{r}_1$ e $\gamma(t_2) = \vec{r}(t_2) \doteq \vec{r}_2$ é determinado pela integral do produto escalar:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{\gamma(t_1)}^{\gamma(t_2)} \langle \vec{F} \cdot d\vec{r} \rangle$$

Mas $d\vec{r} = \vec{v} \cdot dt$ e, pela segunda lei de Newton (8.1-2), $\vec{F} = m \cdot \frac{d\vec{v}}{dt}$. Resulta:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right\rangle \cdot dt$$

Mas

$$\frac{d}{dt} \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle = 2 \cdot \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right\rangle \quad \Rightarrow \quad \left\langle \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right\rangle = \frac{1}{2} \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle$$

Portanto:

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \cdot \int_{t_1}^{t_2} m \cdot \frac{d}{dt} \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle \cdot dt = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle_{t_1}^{t_2}$$

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \langle \vec{v}_2 \cdot \vec{v}_2 \rangle - \frac{1}{2} \cdot m \cdot \langle \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 \rangle$$

A energia cinética da partícula de massa m é definida por (MEIROVITCH, 1967):

$$T \doteq \frac{1}{2} \cdot m \cdot \langle \vec{v} \cdot \vec{v} \rangle \quad (8.1-3)$$

Com esta definição, o trabalho W realizado pela força $\vec{F}$ para deslocar a partícula de massa m ao longo de uma curva definida em $I \doteq [t_1, t_2]$ corresponde à variação da energia cinética:

$$W_{1 \rightarrow 2} = T_2 - T_1 \quad (8.1-4)$$

8.2 Forças Conservativas e Energia Potencial

Uma força $\vec{F}_c$ é conservativa quando o trabalho W_c por ela realizado depende apenas dos estados inicial $\vec{r}_1$ e final $\vec{r}_2$, e não da trajetória (BRASIL, 1990) ou do caminho de integração (MEIROVITCH, 1967).

Para uma curva $\Gamma \neq \gamma$, definida em $\Gamma: I \rightarrow \Omega$ de modo a ter coincidentes os valores inicial $\Gamma(t_1) = \gamma(t_1)$ e final $\Gamma(t_2) = \gamma(t_2)$, uma força $\vec{F}_c$ é conservativa quando:

$$W_{c,1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = \int_{\gamma} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = \int_{\Gamma} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle$$

Na Figura 40 são mostrados os movimentos realizados pela partícula α entre os pontos $\vec{r}_1$ e $\vec{r}_2$ pelos caminhos distintos $\Gamma \neq \gamma$.

Figura 40 – Caminhos de integração

A análise da figura permite re-avaliar esta relação considerando o movimento da partícula α a partir de $\vec{r}_1$, chegando a $\vec{r}_2$ por meio da curva γ e voltando a $\vec{r}_1$ por meio da curva $-\Gamma$. Neste caso, $\vec{r}_2 = \vec{r}_1$, e resulta que $W_{c,1 \rightarrow 2} = 0$:

$$\int_{\gamma} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle - \int_{\Gamma} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle + \int_{-\Gamma} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = 0 \quad \Rightarrow \quad \int_{\gamma \cup (-\Gamma)} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = 0$$

Este caminho, definido por $\gamma \cup (-\Gamma)$, é fechado. Resulta que o trabalho W_c realizado por uma força conservativa $\vec{F}_c$ ao longo de um caminho fechado é nulo:

$$\oint \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = 0 \quad (8.2-1)$$

A energia potencial $V(\vec{r})$ é definida (MEIROVITCH, 1967) como o trabalho realizado em um campo de forças conservativas $\vec{F}_c$ ao movimentar uma partícula da posição $\vec{r}$ para uma posição de referência $\vec{r}_0$ qualquer:

$$V(\vec{r}) = \int_{\vec{r}}^{\vec{r}_0} \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle$$

Com esta definição, o trabalho W_c realizado pela força conservativa $\vec{F}_c$ para deslocar a partícula α da posição $\vec{r}_1$ para a posição $\vec{r}_2$ vale:

$$W_{c,1 \rightarrow 2} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} + \int_{\vec{r}_0}^{\vec{r}_2} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_0} \vec{F}_c \cdot d\vec{r}$$

$$W_{c,1 \rightarrow 2} = - \left(\int_{\vec{r}_2}^{\vec{r}_0} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} - \int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_0} \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \right) = -(V(\vec{r}_2) - V(\vec{r}_1))$$

Portanto, o trabalho realizado em um campo de forças conservativas é o oposto da variação da energia potencial:

$$W_{c,1 \rightarrow 2} = -(V_2 - V_1) \quad (8.2-2)$$

As relações (8.1-4) e (8.2-2) induzem separar o trabalho total $W_{1 \rightarrow 2}$ em duas parcelas: uma $W_{c,1 \rightarrow 2}$ correspondente às forças conservativas e outra $W_{n,1 \rightarrow 2}$ às forças não conservativas:

$$W_{1 \rightarrow 2} = W_{c,1 \rightarrow 2} + W_{n,1 \rightarrow 2} \quad \Rightarrow \quad W_{n,1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2} - W_{c,1 \rightarrow 2}$$

Combinando as expressões, resulta:

$$W_{n,1 \rightarrow 2} = (T_2 - T_1) + (V_2 - V_1) = (T_2 + V_2) - (T_1 + V_1)$$

A energia total é definida pela soma da energia cinética com a energia potencial, $E = T + V$. Com esta notação, resulta:

$$W_{n,1 \rightarrow 2} = E_2 - E_1$$

Ou seja, o trabalho $W_{n,1 \rightarrow 2}$ realizado pelas forças não conservativas provoca mudança na energia total da partícula α . Segundo Meirovitch (1967), estas forças são dissipadoras de energia, tais como forças de atrito ou forças externas, que transmitem energia ao sistema.

Em sistemas nos quais somente forças conservativas realizam trabalho, $W_{n,1 \rightarrow 2} = 0$, portanto:

$$E_2 - E_1 = 0 \quad (8.2-3)$$

Resulta que a energia total do sistema não varia. A equação (8.2-3) corresponde ao princípio de conservação da energia mecânica em sistemas conservativos.

Torna-se de grande importância estabelecer critérios para verificar se uma determinada força é conservativa. A relação (8.2-2) pode ser expressa na forma diferencial por:

$$dW_c = \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = -dV$$

Como a função $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função, de classe C^1 , de três variáveis, a sua diferenciação em coordenadas cartesianas $\{x, y, z\}$ é calculada por uma das expressões equivalentes:

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} \cdot dx + \frac{\partial V}{\partial y} \cdot dy + \frac{\partial V}{\partial z} \cdot dz \quad \Rightarrow \quad dV = \left\langle \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right) \cdot (dx, dy, dz) \right\rangle$$

O operador diferencial ∇ é definido em coordenadas cartesianas por:

$$\nabla \doteq \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right)$$

Com esta notação, define-se o vetor ∇V gradiente da função V (GUDORIZZI, 2001b, p.207):

$$\nabla V = \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Como $d\vec{r} = (dx, dy, dz)$, resulta que $dV = \langle \nabla V \cdot d\vec{r} \rangle$. Então:

$$dW_c = \vec{F}_c \cdot d\vec{r} = -\langle \nabla V \cdot d\vec{r} \rangle$$

Resulta uma nova expressão para o trabalho W_c realizado pela força conservativa $\vec{F}_c$ para deslocar a partícula α da posição $\vec{r}_1$ para a posição $\vec{r}_2$:

$$W_c = -\int_{\vec{r}_1}^{\vec{r}_2} \langle \nabla V \cdot d\vec{r} \rangle$$

Além disto:

$$\vec{F}_c = -\nabla V \quad (8.2-4)$$

Portanto, uma força $\vec{F}_c$ é conservativa quando puder ser escrita como o oposto do vetor gradiente ∇V de uma função $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Neste caso, esta função V é a energia potencial associada à força $\vec{F}_c$.

O rotacional da força $\vec{F}_c$ é definido pelo produto vetorial (GUIDORIZZI, 2002a, p.10):

$$\text{rot}(\vec{F}_c) \doteq \nabla \times \vec{F}_c$$

Substituindo na expressão (8.2-4), resulta $\text{rot}(\vec{F}_c) = -\nabla \times \nabla V$. Mas:

$$\nabla \times \nabla V = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \times \left(\frac{\partial V}{\partial x}, \frac{\partial V}{\partial y}, \frac{\partial V}{\partial z} \right)$$

Aplicando a definição de produto vetorial, resulta:

$$\nabla \times \nabla V = \left[\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) - \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) \right] \cdot \vec{e}_x + \left[\frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial z} \right) \right] \cdot \vec{e}_y + \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial V}{\partial y} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right) \right] \cdot \vec{e}_z$$

Sendo $V : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 , resulta que $\nabla \times \nabla V = \vec{0}$. Portanto, uma força $\vec{F}_c$ é conservativa quando seu rotacional é nulo:

$$\text{rot}(\vec{F}_c) = \nabla \times \vec{F}_c = -\nabla \times \nabla V = \vec{0} \quad (8.2-5)$$

Finalmente, uma força $\vec{F}_c$ é conservativa quando o trabalho W_c realizado fechado é nulo (equação integral (8.2-1)) ou quando seu rotacional é nulo (equação diferencial (8.2-5)):

$$\oint \langle \vec{F}_c \cdot d\vec{r} \rangle = 0 \quad \text{rot}(\vec{F}_c) = \vec{0}$$

8.3 Coordenadas Generalizadas

Um sistema de N corpos de massas $\{m_\alpha : 1 \leq \alpha \leq N\}$ ocupa um espaço físico tridimensional $\{x_i : 1 \leq i \leq 3\}$. O movimento, relativo a um referencial inercial, de cada uma das N partes do sistema é descrito pelos respectivos vetores posição $\vec{r}_\alpha$ e coordenadas cartesianas $x_{i,\alpha}(t)$:

$$\vec{r}_\alpha = \begin{pmatrix} x_{1,\alpha} \\ x_{2,\alpha} \\ x_{3,\alpha} \end{pmatrix} \quad 1 \leq i \leq 3 \quad 1 \leq \alpha \leq N$$

A descrição do sistema é caracterizada pelo total de $3N$ coordenadas cartesianas, as quais podem ser reagrupadas em um novo espaço abstrato de dimensão $3N$, denominado espaço de configuração.

Com esta notação, o sistema é então reduzido a um ponto deste espaço, cujas coordenadas $\{q_r : 1 \leq r \leq 3N\}$ são a união de todas as coordenadas (x_1, x_2, x_3) de cada um dos pontos de massa m_α .

Gera-se uma correspondência unívoca entre o espaço físico tridimensional e o espaço de configuração, definida, para cada ponto material α de massa m_α , por:

$$\begin{aligned} x_{1,\alpha}(t) &= f_1(q_1(t), \dots, q_{3N}(t)) \\ x_{2,\alpha}(t) &= f_2(q_1(t), \dots, q_{3N}(t)) \\ x_{3,\alpha}(t) &= f_3(q_1(t), \dots, q_{3N}(t)) \end{aligned}$$

Os vínculos são as condições cinemáticas responsáveis pela restrição de movimento do sistema. As coordenadas q_r são então relacionadas pelas funções que admitem derivadas de primeira ordem:

$$\begin{aligned} a_0 &= a_0(t, q_1, \dots, q_{3N}) \\ a_1 &= a_1(t, q_1, \dots, q_{3N}) \\ &\vdots \\ a_{3N} &= a_{3N}(t, q_1, \dots, q_{3N}) \end{aligned}$$

Em um intervalo infinitesimal de tempo dt podem-se definir, no espaço de configurações, deslocamentos infinitesimais dq_r executados per cada uma das $3N$ coordenadas q_r . Combinando linearmente os elementos infinitesimais (dt, dq_r) com as funções (a_0, a_r) , produz-se a forma diferencial de Pfaff (BRASIL, 1990):

$$a_0(t, q_r) \cdot dt + \sum_{r=1}^{3N} a_r \cdot dq_r = 0$$

A forma de Pfaff corresponde à seguinte equação diferencial:

$$\sum_{r=1}^{3N} a_r \cdot \frac{dq_r}{dt} = -a_0(t, q_r) \quad (8.3-1)$$

Se a equação (8.3-1) for integrável entre os instantes $[t, t + dt]$, então essas restrições serão funções das coordenadas q_r e do tempo t e o sistema é chamado holonômico (MEIROVITCH, 1967).

Por outro lado, se a equação (8.3-1) não for integrável (MEIROVITCH, 1967), ou se as condições cinemáticas não puderem ser colocadas na forma (8.3-1) (BRASIL, 1990), então os vínculos são não chamados não holonômicos.

A integração da equação (8.3-1) produz um sistema de C equações algébricas que relaciona as coordenadas q_r do espaço de configuração (BRASIL, 1990). O sistema dinâmico fica então caracterizado pelas $n \doteq 3N - C$ coordenadas restantes q_j , com $1 \leq j \leq n$.

O grau de liberdade n de um sistema é o menor número de coordenadas independentes necessário para descrever seu movimento (MEIROVITCH, 1967), sendo denominadas coordenadas generalizadas $\{q_j\}$ (THORNTON; MARION, 2011).

8.4 Princípio do Trabalho Virtual

As posições que cada um dos corpos de massa m_α ocupa durante o movimento do sistema são representadas pelas funções vetoriais $\vec{r}_\alpha$ definidas por:

$$\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(q_1, \dots, q_n, t) = \vec{r}_\alpha(q_j, t) \quad 1 \leq j \leq n$$

Durante o intervalo infinitesimal de tempo dt , estes corpos executam os ocorrem os seguintes deslocamentos infinitesimais:

$$d\vec{r}_\alpha = \vec{r}_\alpha(t + dt) - \vec{r}_\alpha(t)$$

Como as condições de vínculo da estrutura variam com o tempo conforme a equação (8.3-1), a análise do sistema deve ser feita a partir de uma foto congelada em um determinado instante t .

Neste instante t , mudanças arbitrárias nas coordenadas generalizadas q_j geram deslocamentos $\delta\vec{r}_\alpha(t)$ arbitrários, mas cinematicamente compatíveis com os vínculos existentes na estrutura. Por não coincidirem necessariamente com a classe de deslocamentos reais, os deslocamentos $\delta\vec{r}_\alpha(t)$ são denominados virtuais.

Neste sentido, o trabalho virtual de uma força $\vec{F}$ atuante em uma partícula α ao longo de um deslocamento virtual $\delta\vec{r}_\alpha$ é definido pelo produto escalar:

$$\delta W = \langle \vec{F} \cdot \delta\vec{r}_\alpha \rangle$$

8.5 Equilíbrio dinâmico

A segunda lei de Newton (8.1-2) permite estabelecer para o movimento de uma partícula isolada de massa m_α submetida a uma resultante de forças $\vec{F}_\alpha$ o seguinte equilíbrio dinâmico:

$$\vec{F}_\alpha - m_\alpha \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = \vec{0}$$

Neste sentido, o princípio de D'Alembert estabelece que a força resultante $\vec{F}_\alpha$ atuante em um corpo de massa m_α está em equilíbrio dinâmico com a respectiva força de inércia. Para um sistema de N partículas de massa m_α , resulta:

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{F}_\alpha - m_\alpha \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \right) = \vec{0}$$

As forças que compõem a resultante $\vec{F}_\alpha$ podem ser divididas em dois grupos: forças aplicadas $\vec{F}_{A,\alpha}$ e forças reativas de vínculo $\vec{F}_{R,\alpha}$. Resulta:

$$\vec{F}_{A,\alpha} + \vec{F}_{R,\alpha} - m_\alpha \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = \vec{0} \quad (8.5-1)$$

Generalizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, cada uma das forças reativas de vínculo $\vec{F}_{R,\alpha}$ pode ser decomposta em duas componentes: uma normal $\vec{F}_{RI,\alpha}$ e outra paralela $\vec{F}_{RN,\alpha}$ a um deslocamento virtual $\delta\vec{r}_\alpha$ compatível com os deslocamentos liberados pelos respectivos vínculos:

$$\vec{F}_{R,\alpha} = \vec{F}_{RI,\alpha} + \vec{F}_{RN,\alpha}$$

Somente as componentes paralelas $\vec{F}_{RN,\alpha}$ realizarão trabalho virtual, pois:

$$\langle \vec{F}_{RI,\alpha} \cdot \delta\vec{r}_\alpha \rangle = 0$$

Os vínculos que produzem reações $\vec{F}_{Rl,\alpha}$ puramente perpendiculares ao deslocamento $\delta\vec{r}_\alpha$ liberado são denominados vínculos ideais (BRASIL, 1990). Nos vínculos não-ideais o deslocamento $\delta\vec{r}_\alpha$ é apenas parcialmente liberado, pois aparece na reação $\vec{F}_{R,\alpha}$ uma componente $\vec{F}_{RN,\alpha}$ paralela a este deslocamento.

Neste contexto, a separação das forças reativas $\vec{F}_{R,\alpha}$ entre reações $\vec{F}_{Rl,\alpha}$ de vínculo ideal e reações $\vec{F}_{RN,\alpha}$ de vínculo não-ideal permite adaptar a equação (8.5-1):

$$\vec{F}_{A,\alpha} + \vec{F}_{RN,\alpha} + \vec{F}_{Rl,\alpha} - m_\alpha \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} = \vec{0}$$

Multiplicando ambos os lados da equação pelo deslocamento virtual $\delta\vec{r}_\alpha$, e considerando que $\vec{F}_{Rl,\alpha} \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$, resulta:

$$\left(\vec{F}_{A,\alpha} + \vec{F}_{RN,\alpha} - m_\alpha \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0$$

Apenas as forças ativas e reativas de vínculos não ideais realizam trabalho virtual em relação ao deslocamento virtual $\delta\vec{r}_\alpha$. Conforme sugeriu Brasil (1990), faz agora sentido definir a força efetiva $\vec{f}_\alpha$ atuante na partícula de massa m_α por:

$$\vec{f}_\alpha = \vec{F}_{A,\alpha} + \vec{F}_{RN,\alpha}$$

Efetuada-se a soma para todas as N partículas de massa m_α do sistema, obtém-se o princípio generalizado de D'Alembert para o trabalho virtual total realizado pelo sistema:

$$\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{f}_\alpha - m_\alpha \cdot \frac{d\vec{v}_\alpha}{dt} \right) \cdot \delta\vec{r}_\alpha = 0 \quad (8.5-2)$$

A primeira parcela da equação (8.5-2) corresponde ao o trabalho virtual total realizado pelas forças efetivas atuantes no sistema de partículas:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_\alpha \cdot \delta\vec{r}_\alpha \quad (8.5-3)$$

Substituindo na equação (8.5-2), resulta:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \cdot \frac{d\vec{v}_{\alpha}}{dt} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} \quad (8.5-4)$$

Utilizando as regras de diferenciação, resulta:

$$\frac{d}{dt}(\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) = \frac{d\vec{v}_{\alpha}}{dt} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} + \vec{v}_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt}(\delta \vec{r}_{\alpha})$$

De acordo com Meirovitch (1967), as operações de diferenciação $\frac{d}{dt}$ e de variação δ são comutativas, o que permite definir a velocidade virtual por:

$$\delta \vec{v}_{\alpha} = \frac{d}{dt}(\delta \vec{r}_{\alpha}) = \delta \left(\frac{d\vec{r}_{\alpha}}{dt} \right) = \delta(\vec{v}_{\alpha})$$

Com esta notação:

$$\frac{d\vec{v}_{\alpha}}{dt} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha} = \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) - \vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{v}$$

Além disto:

$$\delta(\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha}) = 2 \cdot \vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{v}_{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{v} = \frac{1}{2} \cdot \delta(\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha})$$

Substituindo na equação (8.5-4), resulta:

$$\begin{aligned} \delta W &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \cdot \left[\frac{d}{dt}(\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) - \frac{1}{2} \cdot \delta(\vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha}) \right] \\ \delta W &= \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) - \delta \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{1}{2} \cdot m_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \right) \end{aligned}$$

A energia cinética foi definida em (8.1-3):

$$T = \sum_{\alpha=1}^N \left(\frac{1}{2} \cdot m_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \cdot \vec{v}_{\alpha} \right)$$

Com esta representação, o princípio de D'Alembert pode ser generalizado:

$$\delta T + \delta W = \sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt}(\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) \quad (8.5-5)$$

8.6 Formulação Integral

No sistema de corpos, o trabalho virtual δW total realizado pelas forças efetivas $\vec{f}_\alpha$ pode ser separado em duas parcelas: uma devida às forças conservativas $\vec{f}_{c,\alpha}$ e outra devida às demais forças $\vec{f}_{n,\alpha}$, denominadas não conservativas ou dissipativas:

$$\delta W = \sum_{\alpha=1}^N (\vec{f}_{c,\alpha} + \vec{f}_{n,\alpha}) \cdot \delta \vec{r}_\alpha \qquad \delta W = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_{c,\alpha} \cdot \delta \vec{r}_\alpha + \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_{n,\alpha} \cdot \delta \vec{r}_\alpha$$

O trabalho virtual δW_c realizado pelas forças conservativas $\vec{f}_{c,\alpha}$ e δW_n das forças não conservativas $\vec{f}_{n,\alpha}$ são determinados pelas somas:

$$\delta W_c = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_{c,\alpha} \cdot \delta \vec{r}_\alpha \qquad \delta W_n = \sum_{\alpha=1}^N \vec{f}_{n,\alpha} \cdot \delta \vec{r}_\alpha \qquad (8.5-6)$$

Pela expressão (8.2-2), o trabalho realizado pelas forças conservativas $\vec{f}_{c,\alpha}$ é o oposto da variação da energia potencial entre dois instantes; o mesmo resultado vale para as grandezas virtuais:

$$W_{c,1 \rightarrow 2} = -\Delta V_{1 \rightarrow 2} \qquad \delta W_c = -\delta V$$

O trabalho virtual realizado pelas forças efetivas atuantes no sistema vale:

$$\delta W = -\delta V + \delta W_n \qquad (8.5-7)$$

8.6.1 Princípio de Hamilton

Segundo Meirovitch (1967), o princípio de Hamilton estuda o movimento do sistema entre dois instantes t_1 e t_2 , sendo um princípio integral. Em seus artigos sobre métodos gerais em dinâmica (HAMILTON, 1835, 1835) William Rowan Hamilton anunciou o seguinte:

De todos os caminhos possíveis nos quais um sistema dinâmico pode se mover de um ponto a outro em um intervalo de tempo específico, o caminho real é aquele que minimiza a integral de tempo da diferença entre as energias cinéticas e potenciais (THORNTON; MARION, 2011, p. 203).

Esses artigos tratam do estudo do movimento de corpos que se atraem ou repelem, sendo submetidos a forças associadas a uma energia potencial; em termos de cálculo de variações, escreve-se:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) \cdot dt = 0 \quad (8.6-1)$$

De acordo com Thornton e Marion (2011), a equação (8.6-1) indica que a integral precisa ser um extremo, não necessariamente um mínimo. Porém, nas aplicações de interesse para a dinâmica, (8.6-1) implica em minimização.

8.6.2 Generalização do princípio de Hamilton

A integração da equação (8.5-5) entre dois instantes de tempo arbitrários $[t_1, t_2]$ produz:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta T) \cdot dt = \sum_{\alpha=1}^N \int_{t_1}^{t_2} m_{\alpha} \cdot \frac{d}{dt} (\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) \cdot dt = \left[\sum_{\alpha=1}^N m_{\alpha} \cdot (\vec{v}_{\alpha} \cdot \delta \vec{r}_{\alpha}) \right]_{t_1}^{t_2}$$

Mas os deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_{\alpha}(t_1)$ e $\delta \vec{r}_{\alpha}(t_2)$ são nulos quando as configurações em t_1 e t_2 são especificadas. Resulta:

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta W + \delta T) \cdot dt = 0$$

Considerando-se o resultado obtido em (8.5-7), obtém-se uma formulação alternativa ao princípio de Hamilton (8.6-1) para sistemas gerais:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) \cdot dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta W_n \cdot dt = 0 \quad (8.6-2)$$

8.7 Forças generalizadas não conservativas

Em sistemas holonômicos, as posições $\vec{r}_{\alpha}$ que cada um dos corpos de massa m_{α} ocupa durante o movimento podem ser expressas em função das coordenadas generalizadas q_j (MEIROVITCH, 1967). Esta notação pode ser aproveitada para os deslocamentos virtuais $\delta \vec{r}_{\alpha}$ (BRASIL, 1990):

$$\delta \vec{r}_{\alpha} = \delta \vec{r}_{\alpha}(q_j, t) \quad 1 \leq j \leq n$$

Usando o cálculo de variações (ELSGOLTS, 1977) aplicado a grandezas que não dependem explicitamente do tempo, os deslocamentos virtuais podem ser expandidos pela soma:

$$\delta \vec{r}_\alpha = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \cdot \delta q_j$$

Substituindo esta coma na expressão (8.5-6), obtém-se o trabalho virtual δW_n realizado pelas forças não conservativas $\vec{f}_{n,\alpha}$, resultando nas duplas somas:

$$\delta W_n = \sum_{\alpha=1}^N \left[\vec{f}_{n,\alpha} \cdot \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \right) \right] = \sum_{j=1}^n \left[\sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{f}_{n,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \right] \cdot \delta q_j$$

As forças generalizadas não conservativas são definidas por (BRASIL, 1990):

$$\mathcal{N}_j \doteq \sum_{\alpha=1}^N \left(\vec{f}_{n,\alpha} \cdot \frac{\partial \vec{r}_\alpha}{\partial q_j} \right) \quad 1 \leq j \leq n$$

Como $\mathcal{N}_j \cdot \delta q_j$ tem dimensão de trabalho, uma força generalizada $\mathcal{N}_j$ pode representar um momento se o deslocamento virtual $\delta \vec{r}_\alpha$ representar uma rotação (MEIROVITCH, 1967). O trabalho virtual total realizado por elas vale:

$$\delta W_n = \sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j \cdot \delta q_j$$

Com estas notações, a formulação integral (8.7-1) reduz-se a:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - V) \cdot dt + \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{N}_j \cdot \delta q_j \cdot dt \right) = 0 \quad (8.7-2)$$

8.8 Equações de Euler–Lagrange

Os resultados obtidos em (8.6-2) e (8.7-2) sugerem a definição da diferença entre as energias cinética e potencial como uma função denominada lagrangiana ou função de Lagrange:

$$\mathcal{L} \doteq T - V \quad (8.8-1)$$

Com esta definição, a expressão (8.7-2) fica apresentável de uma maneira mais compacta:

$$\int_{t_1}^{t_2} \delta \mathcal{L} \cdot dt + \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{N}_j \cdot \delta q_j \cdot dt \right) = 0 \quad (8.8-2)$$

O cálculo de variações (ELSGOLTS, 1977) pode ser utilizado para determinar a variação da lagrangiana (THORNTON; MARION, 2011):

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \delta q_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta \dot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \cdot \delta t$$

De acordo com Corben e Stehle (1960), é permitido considerar $(q_j, \dot{q}_j)$ como variáveis independentes para efeito de diferenciação, pois o diferencial dq_j que aparece na definição de $\dot{q}_j$ não depende de q_j .

Quando coordenadas retangulares e fixas são utilizadas para representar as posições do sistema, a energia cinética T de uma partícula é uma função somente das velocidades $\dot{q}_j$; se o movimento ocorrer em um campo de forças conservador, a energia potencial V é uma função somente das posições q_j , (THORNTON; MARION, 2011):

$$\mathcal{L}(q_j, \dot{q}_j) = T(\dot{q}_j) - V(q_j) \quad (8.8-3)$$

Resulta que a função lagrangiana não depende explicitamente do tempo:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0$$

Com isto, a variação da lagrangiana reduz-se a:

$$\delta \mathcal{L} = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \delta q_j \right) + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta \dot{q}_j \right) \quad (8.8-4)$$

Para poder efetuar a substituição na equação integral (8.8-2), a expressão (8.8-4) deve ser integrada no intervalo $[t_1, t_2]$; o segundo termo pode ser integrado por partes:

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta \dot{q}_j \cdot dt = \left. \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \delta \dot{q}_j \right|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \delta q_j \cdot dt$$

Como as velocidades virtuais são nulas quando as configurações em t_1 e t_2 são especificadas, o primeiro termo da expressão acima se anula; resta apenas o termo integral. Ao substituir este resultado em (8.8-2) obtém-se:

$$\delta \mathcal{L} \cdot dt = \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \delta q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \delta q_j \right]$$

A substituição deste resultado na equação integral (8.8-2) permite obter:

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \delta q_j - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \delta q_j \right] \right\} \cdot dt + \sum_{j=1}^n \left(\int_{t_1}^{t_2} \mathcal{N}_j \cdot \delta q_j \cdot dt \right) = 0$$

Os termos podem, finalmente, ser agrupados de maneira a isolar a somatória e a integral, produzindo uma soma de integrais:

$$\sum_{j=1}^n \left\{ \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \mathcal{N}_j \right] \cdot \delta q_j \cdot dt \right\} = 0$$

Para que esta soma seja nula, é necessário que cada integral a seja; para que isto valha para quaisquer deslocamentos virtuais δq_j arbitrariamente definidos no intervalo de tempo $[t_1, t_2]$, é necessário que o termo entre colchetes se anule:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) + \mathcal{N}_j = 0$$

Este resultado produz as equações de Lagrange que, sendo aplicadas em cada uma das coordenadas generalizadas q_j do sistema, permitem a determinação das equações diferenciais de movimento.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} + \mathcal{N}_j \quad (8.8-5)$$

8.9 Trabalho e Potência

As equações de Lagrange (8.8-5) devem ser aplicadas para cada uma das coordenadas generalizadas do problema. A função lagrangiana, que é a diferença entre a energia cinética e a energia potencial, tem dimensão de trabalho ou energia.

Sendo ℓ_r as coordenadas associadas a deslocamentos lineares e φ_s as coordenadas associadas com deslocamentos angulares; tem-se que $n=r+s$. Os termos das equações relativas às coordenadas ℓ_r têm dimensão de força, enquanto que os termos das equações relativas às coordenadas φ_s têm dimensão de trabalho, energia ou torque:

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\ell}_k} \right) \right] = \frac{1}{T} \cdot \frac{F \cdot L}{L \cdot T^{-1}} = F \quad \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \ell_k} \right] = \frac{F \cdot L}{L} = F$$

$$\left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}_s} \right) \right] = \frac{1}{T} \cdot \frac{F \cdot L}{T^{-1}} = F \cdot L \quad \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_s} \right] = \frac{F \cdot L}{1} = F \cdot L$$

Sendo assim, ao multiplicar cada uma das equações (8.8-5) pela respectiva velocidade generalizada $\dot{\ell}_r$ ou $\dot{\phi}_s$, produzem-se termos com dimensão de potência:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j - \mathcal{N}_j \cdot \dot{q}_j = 0$$

A nulidade acima representada para cada grau de liberdade $j \in \{1, \dots, n\}$ permanece ao efetuar as somas de todas as equações:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \dot{q}_j - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j - \mathcal{N}_j \cdot \dot{q}_j \right] = 0$$

O último termo é a potência das forças não conservativas:

$$\sum_{j=1}^n \mathcal{N}_j \cdot \dot{q}_j = \frac{dW_n}{dt} = \mathcal{P}_n$$

Com este resultado, escreve-se:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \dot{q}_j \right] - \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j \right] - \mathcal{P}_n = 0 \quad (8.9-1)$$

A diferenciação de funções compostas permite obter:

$$\sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right) \cdot \dot{q}_j \right] = \sum_{j=1}^n \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) \right] - \sum_{j=1}^n \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j \right] \quad (8.9-2)$$

Os outros termos podem ser avaliados usando o cálculo de variações:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}}{dt} &= \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} \cdot \dot{q}_j + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \\ - \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j \right) &= - \frac{d\mathcal{L}}{dt} + \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \ddot{q}_j \right) + \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} \end{aligned}$$

A substituição desta expressão e de (8.9-2) em (8.9-1), aliado ao fato de que a função lagrangiana não depende explicitamente do tempo, permite obter:

$$\frac{d}{dt} \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) - \mathcal{L} \right] - \mathcal{P}_n(\dot{q}_j) = 0 \quad (8.9-3)$$

As definições de energia cinética e de energia potencial são adaptadas à notação de coordenadas generalizadas:

$$T = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot m_j \cdot \dot{q}_j^2 \right) = \sum_r \left(\frac{1}{2} \cdot m_r \cdot \ell_r^2 \right) + \sum_s \left(\frac{1}{2} \cdot J_s \cdot \dot{\phi}_s^2 \right) \quad (8.9-4)$$

$$V = \sum_{j=1}^n \left(\frac{1}{2} \cdot f_{c,j} \cdot q_j \right) \quad (8.9-5)$$

Considerando-se a definição (8.8-1) da lagrangiana, escreve-se:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) - \mathcal{L} = \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) - T \right] - \left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) - V \right] \quad (8.9-6)$$

Aplicando-se as derivações acima às definições (8.9-4) e (8.9-5), se obtém:

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) = 2 \cdot T \quad \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial V}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) = 0$$

Substituindo-se na relação (8.9-6), conclui-se que o termo entre colchetes em (8.9-3) reduz-se simplesmente à soma da energia cinética e da energia potencial:

$$\left[\sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \cdot \dot{q}_j \right) - \mathcal{L} \right] = T + V = E$$

Este resultado é compatível com o obténível pela 2ª equação de Euler (THORNTON; MARION, 2011). A quantidade E é a integral de Jacobi (CORBEN, STEHLE, 1977) do movimento ou, simplesmente a energia mecânica. Substituindo-se em (8.9-3), obtém-se

$$\frac{d}{dt} [E(q_j, \dot{q}_j)] = \mathcal{P}_n(\dot{q}_j) \quad (8.9-7)$$

9 OSCILADOR MECÂNICO SIMPLES

Na Figura 41a, adaptada de Villate (2006), é mostrado o esquema estrutural do sistema de suspensão de um veículo, composto de um amortecedor acoplado a uma mola e colocado entre a estrutura do automóvel e a roda.

Figura 41 — (a) Sistema de suspensão veicular; (b) Modelo físico.

Considerando o piso como sendo referencial, o modelo físico correspondente a este problema consiste em um corpo de massa $m > 0$ no qual são acoplados em paralelo uma mola de constante de elasticidade linear $k > 0$ e um amortecedor, conforme representado na Figura 41b.

Vibrações do piso são representadas pelo deslocamento $s(t)$ imposto ao sistema como, por exemplo, ondulações da pista. No caso de solicitações que geram ondas sísmicas, a evolução da função $s(t)$ é conhecida por meio de tabelas fornecidas pelos institutos de meteorologia.

9.1 Análise do Sistema Dinâmico Ideal

A coordenada generalizada q mede o deslocamento do centro de massa do corpo de massa m . A variável y mede o deslocamento total do sistema:

$$y = q + s$$

A velocidade do sistema é determinada por diferenciação:

$$\dot{y} = \dot{q} + \dot{s}$$

A energia cinética do sistema vale:

$$T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot \dot{y}^2 \quad \Rightarrow \quad T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{q}^2 + 2 \cdot \dot{q} \cdot \dot{s} + \dot{s}^2)$$

A energia de deformação da mola de constante de elasticidade linear $k > 0$ está associada à força elástica $f_s = -k \cdot q$ exercida sobre o corpo de massa $m > 0$:

$$U = \frac{1}{2} \cdot k \cdot q^2$$

O trabalho das forças conservativas é proveniente do efeito do campo gravitacional:

$$W_c = -m \cdot g \cdot y$$

A energia potencial total V do sistema é a diferença entre a energia de deformação U e o trabalho das forças conservativas:

$$V = U - W_c \quad \Rightarrow \quad V = \frac{1}{2} \cdot k \cdot q^2 + m \cdot g \cdot (q + s)$$

A lagrangiana é a diferença entre as energias cinética e potencial:

$$\mathcal{L} = T - V \quad \Rightarrow \quad \mathcal{L} = \frac{1}{2} \cdot m \cdot (\dot{q}^2 + 2 \cdot \dot{q} \cdot \dot{s} + \dot{s}^2) - \frac{1}{2} k \cdot q^2 - m \cdot g \cdot (q + s)$$

Efetuem-se as diferenciações pertinentes para as equações de Lagrange:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} = m \cdot (\dot{q} + \dot{s}) \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}} \right) = m \cdot (\ddot{q} + \ddot{s})$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q} = -k \cdot q - m \cdot g$$

As forças não conservativas atuantes no sistema se resumem àquela que o amortecedor produz oposta ao movimento, diretamente proporcional à velocidade generalizada $\dot{q}$ (VILLATE, 2006), com constante $c \geq 0$ de amortecimento:

$$\mathcal{N} = -c \cdot \dot{q}$$

9.1.1 Equação diferencial de movimento

A equação de movimento do sistema segundo a coordenada generalizada $q(t)$ é determinada pela aplicação da equação de Lagrange correspondente:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = -m \cdot \ddot{s}(t) - m \cdot g \quad (9.1-1)$$

A equação diferencial (9.1-1) de segunda ordem pode ser transformada em um sistema de duas equações diferenciais ordinárias de primeira ordem pelas seguintes substituições de variáveis:

$$x_1 = q \qquad x_2 = \dot{q}$$

Resulta em um sistema não linear quando $\ddot{s}(t) + g \neq 0$:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\frac{k}{m} \cdot x_1 - \frac{c}{m} \cdot x_2 - \ddot{s}(t) - g \end{cases}$$

9.1.2 Ponto de Equilíbrio

Os pontos de equilíbrio $\vec{p} = (\bar{x}_1, \bar{x}_2)$ são aqueles que manterão o sistema (9.1-1) em estado estacionário. Decorre imediatamente que $\bar{x}_2 = 0$. Substituindo-se no sistema, obtém-se que:

$$\bar{x}_1 = -\frac{m}{k} \cdot (\ddot{s}(t) + g)$$

Portanto, o sistema só admite ponto de equilíbrio fixo no caso particular em que o piso vibre com aceleração constante $\ddot{s}(t) = \ddot{s}_0$. Neste caso:

$$\vec{p} = \begin{array}{|c|} \hline -\frac{m}{k} \cdot (\ddot{s}_0 + g) \\ \hline 0 \\ \hline \end{array}$$

9.1.3 Estabilidade do ponto de equilíbrio

O jacobiano da função $\vec{f}$ é uma matriz de coeficientes constantes:

$$[A] \doteq [D\vec{f}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k}{m} & -\frac{c}{m} \end{bmatrix}$$

Os valores próprios da matriz $[A]$ são os seguintes:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} + \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad \lambda_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} - \sqrt{\left(\frac{c}{2 \cdot m}\right)^2 - \frac{k}{m}} \quad (9.1-2)$$

A estabilidade do ponto de equilíbrio $\bar{p}$ e o comportamento qualitativo das órbitas dele ao redor dependem da natureza dos valores próprios, que nunca são nulos, pois $(m \cdot k) \neq 0$.

O caso em que $c = 0$ ocorre quando o amortecedor do veículo deixa de funcionar completamente, reduzindo o sistema de suspensão apenas à mola:

$$m \cdot \ddot{q} + k \cdot q = -m \cdot (\ddot{s} + g)$$

Neste caso, os autovalores (9.1-2) são números imaginários:

$$\lambda_1 = i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = i \cdot \omega \quad \lambda_2 = -i \cdot \sqrt{\frac{k}{m}} = -i \cdot \omega$$

E o ponto de equilíbrio é um centro em torno do qual as soluções oscilam no espaço de fases, com trajetórias elípticas de eixos paralelos aos vetores próprios.

A frequência natural circular do oscilador não amortecido foi definida por:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (2.1-2)$$

Por outro lado, a situação em que o amortecedor do veículo ainda funciona corresponde a $c > 0$. Neste caso, pode-se escrever que:

$$\lambda_1 = -\frac{c}{2 \cdot m} \cdot \left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot m \cdot \omega}{c} \right)^2} \right] \quad \lambda_2 = -\frac{c}{2 \cdot m} \cdot \left[1 + \sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot m \cdot \omega}{c} \right)^2} \right]$$

Se forem complexos, os autovalores terão parte real negativa; se forem reais, serão ambos negativos, com $\lambda_2 < \lambda_1$, pois:

$$\sqrt{1 - \left(\frac{2 \cdot m \cdot \omega}{c}\right)^2} < 1$$

A taxa de amortecimento é definida por:

$$\xi = \frac{c}{2 \cdot m \cdot \omega}$$

Com estas notações, o sistema muda de comportamento quando $\xi = 1$, sendo esta situação denominada de amortecimento crítico; a equação diferencial resulta:

$$\ddot{q} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{q} + \omega^2 \cdot q = -(\ddot{s}(t) + g)$$

Os autovalores da matriz jacobiana têm parte real negativa e o ponto de equilíbrio é assintoticamente estável:

$$\lambda_1 = -\xi \cdot \omega \cdot \left(1 - \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}\right) \quad \lambda_2 = -\xi \cdot \omega \cdot \left(1 + \sqrt{1 - \frac{1}{\xi^2}}\right)$$

Os autovalores podem ser escritos de maneira mais conveniente:

$$\lambda_1 = -\xi \cdot \omega + \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega \quad \lambda_2 = -\xi \cdot \omega - \sqrt{\xi^2 - 1} \cdot \omega$$

Os casos de amortecimento e o comportamento topológico do ponto de equilíbrio são apresentados na Tabela 14.

Tabela 14 – Tipos de amortecimento para osciladores mecânicos

Valores	Nomenclatura	Valores próprios	Topologia
$\xi = 0$	—	Imaginários	Centro
$0 < \xi < 1$	Fraco ou subcrítico	Complexos	Foco atrator
$\xi = 1$	Crítico	Iguais	Nó impróprio atrator
$\xi > 1$	Forte ou supercrítico	Reais distintos	Poço

9.2 Integração do Sistema Dinâmico Ideal

O movimento do sistema segundo a coordenada generalizada $q(t)$ é governado pela equação diferencial (9.1-1), que é um caso particular de:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = p(t) \quad (9.2-1)$$

Por ser ideal, a excitação de suportes é uma função puramente temporal:

$$p(t) \doteq -m \cdot (\ddot{s}(t) + g)$$

A solução da equação (9.2-1) é influenciada pelo tipo de carregamento $p(t)$ a que o sistema está submetido; neste sentido, busca-se uma solução particular $q_p(t)$ conveniente e que satisfaça à equação completa.

Nos casos em que for possível determinar uma solução particular $q_p(t)$, a solução geral da equação (9.1-1) é a soma desta com a solução geral $Q(t)$ da equação homogênea associada (CLOUGH; PENZIEN, 1993):

$$m \cdot \ddot{Q} + c \cdot \dot{Q} + k \cdot Q = 0 \quad (9.2-2)$$

No caso do sistema massa-mola, a equação é reduzida a:

$$m \cdot \ddot{Q} + k \cdot Q = 0 \quad (9.2-3)$$

Quando as solicitações ideais são provenientes de carregamento sísmicos, a lei de variação da função $s(t)$ é fornecida por meio de tabelas. Neste e nos casos em que uma solução particular não puder ser encontrada, a solução do sistema é determinada por integração numérica.

Em todos os casos, a solução do sistema (9.2-1) deve respeitar as condições iniciais de posição $q(0) = q_0$ e velocidade $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$:

$$\bar{x}(0) = \bar{x}_0 = \begin{bmatrix} q_0 \\ \dot{q}_0 \end{bmatrix} \quad (9.2-4)$$

Por isto, o estudo foi efetuado para cada uma das situações apresentadas na Tabela 14, iniciando-se pelo caso das vibrações livres, seguindo-se do caso de excitação ideal com carregamento harmônico.

9.3 Análise de Vibrações Livres

A equação diferencial (9.2-2) governa o movimento do sistema mecânico livre de vibrações de suportes e da ação da gravidade:

$$\ddot{Q} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{Q} + \omega^2 \cdot Q = 0$$

Gera-se um sistema linear de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \cdot x_1 - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot x_2 \end{cases}$$

O sistema (9.2-2) é linear e possui solução analítica fechada; o ponto de equilíbrio é a origem $\vec{0}$ do plano de fases (x_1, x_2) . Os tipos de funções que definem as órbitas do sistema são determinados de acordo com os valores da taxa ξ de amortecimento apresentados na Tabela 14.

9.3.1 Amortecimento Fraco

O amortecimento é denominado fraco ou subcrítico quando os autovalores da matriz jacobiana são complexos conjugados, o que ocorre quando $\xi < 1$. Neste caso, define-se a frequência amortecida do oscilador:

$$\omega_D \doteq \sqrt{1 - \xi^2} \cdot \omega \quad (9.3-1)$$

Resulta que $\omega_D < \omega$. A parte real dos autovalores é negativa e o ponto de equilíbrio é um foco atrator, para o qual as soluções tendem para $t \rightarrow +\infty$, oscilando em torno deste:

$$\lambda_1 = -\xi \cdot \omega + i \cdot \omega_D \quad \lambda_2 = -\xi \cdot \omega - i \cdot \omega_D$$

As órbitas são funções definidas de acordo com a equação (7.5-3):

$$x_1(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [w_{11} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + w_{12} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]$$

$$x_2(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [w_{21} \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + w_{22} \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]$$

Mas $x_2 = \dot{x}_1$; diferenciando e comparando as equações, resulta que:

$$x_2(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [(\omega_D \cdot w_{12} - \xi \cdot \omega \cdot w_{11}) \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - (\omega_D \cdot w_{11} + \xi \cdot \omega \cdot w_{12}) \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]$$

$$w_{21} = \omega_D \cdot w_{12} - \xi \cdot \omega \cdot w_{11} \quad w_{22} = \omega_D \cdot w_{11} + \xi \cdot \omega \cdot w_{12}$$

A variação das constantes $A \doteq w_{11}$ e $B \doteq w_{12}$ produz uma família de funções para o deslocamento do oscilador mecânico do sistema (9.2-2):

$$Q(A,B,t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)] \quad (9.3-2)$$

A velocidade do sistema é determinada por diferenciação:

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(A,B,t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [(\omega_D \cdot B - \xi \cdot \omega \cdot A) \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - (\omega_D \cdot A + \xi \cdot \omega \cdot B) \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]$$

As constantes (A,B) são determinadas em função das condições iniciais (9.2-4), adaptadas para a posição $Q(0) = Q_0$ e velocidade $\dot{Q}(0) = \dot{Q}_0$ referentes ao sistema livre de vibrações:

$$Q(A,B,0) = A \qquad \frac{\partial Q}{\partial t}(A,B,0) = (\omega_D \cdot B - \xi \cdot \omega \cdot A)$$

Substituindo nas equações das órbitas, resulta que:

$$A = Q_0 \qquad B = \frac{\dot{Q}_0}{\omega_D} + \frac{\xi \cdot \omega}{\omega_D} \cdot Q_0.$$

Portanto, em condições iniciais nulas, o sistema permanece em repouso, pois a origem $\vec{0}$ do plano de fases (x_1, x_2) é um ponto de equilíbrio, sendo um foco atrator. Então é necessário que $(Q_0, \dot{Q}_0) \neq (0,0)$. Neste caso, $(A,B) \neq (0,0)$ e $\sqrt{A^2 + B^2} \neq 0$; pode-se re-escrever a expressão (9.3-2):

$$Q(A,B,t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot \left[\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} + \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} \right]$$

Esta expressão pode ser re-escrita introduzindo-se um parâmetro de fase $-\theta$ (CLOUGH; PENZIEN, 1993) ou ϕ (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949), definidos conforme se mostra na Figura 42:

Figura 42 — Relação entre os coeficientes (A,B) .

Na construção da figura, fica evidente que:

$$\phi - \theta = \frac{\pi}{2} \quad (9.3-3)$$

Valem as seguintes relações trigonométricas para os ângulos de fase (θ, ϕ) :

$$\frac{B}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \cos \phi = \sin(-\theta) \quad \frac{A}{\sqrt{A^2 + B^2}} = \sin \phi = \cos(-\theta)$$

Com estas notações, obtêm-se:

$$Q(A, B, t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\xi \cdot \omega t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \sin \phi + \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \cos \phi]$$

$$Q(A, B, t) = \sqrt{A^2 + B^2} \cdot e^{-\xi \cdot \omega t} \cdot [\cos(\omega_D \cdot t) \cdot \cos(-\theta) + \sin(\omega_D \cdot t) \cdot \sin(-\theta)]$$

A solução do problema pode ser escrita de duas formas:

$$Q(t) = a_0 \cdot e^{-\xi \cdot \omega t} \cdot \cos(\omega_D \cdot t + \theta) \quad (9.3-4)$$

$$Q(t) = a_0 \cdot e^{-\xi \cdot \omega t} \cdot \sin(\omega_D \cdot t + \phi) \quad (9.3-5)$$

A amplitude máxima e as fases são determinadas pelas condições iniciais:

$$a_0 \doteq \sqrt{Q_0^2 + \left(\frac{\dot{Q}_0}{\omega_D} + \frac{\xi \cdot \omega}{\omega_D} \cdot Q_0 \right)^2} \quad \tan(-\theta) = \frac{1}{\tan \phi} = \frac{\dot{Q}_0}{\omega_D \cdot Q_0} + \frac{\xi \cdot \omega}{\omega_D} \quad (9.3-6)$$

O movimento de oscilação do sistema mecânico fracamente amortecido ocorre com ângulo de fase constante e amplitude decrescente:

$$a(t) \doteq a_0 \cdot e^{-\xi \cdot \omega t} \quad (9.3-7)$$

O amortecimento faz com que a amplitude seja decrescente e tenda a zero quando $t \rightarrow +\infty$, e o sistema tende ao repouso. No caso do sistema sem amortecimento, $\xi = 0$, e a amplitude do movimento é constante:

$$a(t) = a_0$$

No entanto, as forças dissipativas estão sempre presentes de alguma maneira nos sistemas oscilantes (KRYLOFF; BOGOLIUBOFF, 1949), de modo que, em algum instante, as oscilações vão decair.

Em estádios de futebol sujeitos a vibrações devido à movimentação das torcidas, o amortecimento colabora para estabilizar a estrutura, diminuindo as oscilações a que ela está submetida.

O retrato de fases é apresentado na Figura 44; a série temporal na Figura 43, os gráficos foram produzidos com $\xi = 0,15$, para quatro condições iniciais diferentes.

Figura 43 – Séries temporais para oscilador mecânico pouco amortecido

Figura 44 – Retrato de fases para oscilador mecânico pouco amortecido

9.3.2 Amortecimento crítico

O amortecimento é crítico quando os autovalores são iguais, o que ocorre quando $\xi = 1$. Como a matriz jacobiana não é diagonal, existe somente um autovalor negativo $\lambda = -\omega$.

$$[A] \doteq [D\vec{f}] = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & -2 \cdot \omega \end{bmatrix}$$

Então o ponto de equilíbrio é um nó impróprio atrator, e as trajetórias se aproximam deste sem oscilar. As órbitas são funções definidas de acordo com a equação (7.5-5) com $\eta = 1$:

$$x_1(t) = e^{-\omega t} \cdot [w_{11} + w_{12} \cdot t] \quad x_2(t) = e^{-\omega t} \cdot [w_{21} + w_{22} \cdot t]$$

Considerando-se que $x_2 = \dot{x}_1$, resulta:

$$w_{21} = w_{12} - \omega \cdot w_{11} \quad w_{22} = -\omega \cdot w_{12}$$

Definindo-se as constantes $A \doteq w_{11}$ e $B \doteq \frac{w_{12}}{\omega}$, obtém-se uma família de funções para o deslocamento e a velocidade do oscilador mecânico do sistema (9.2-2):

$$Q(A, B, t) = e^{-\omega t} \cdot [A + B \cdot \omega \cdot t]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(A, B, t) = e^{-\omega t} \cdot [\omega \cdot (B - A) - \omega^2 \cdot B \cdot t]$$

Substituindo-se nas equações das órbitas as condições iniciais para o sistema livre de vibrações, obtêm-se as constantes (A,B):

$$Q(A, B, 0) = A \quad \frac{\partial Q}{\partial t}(A, B, 0) = \omega \cdot (B - A)$$

$$A = Q_0 \quad B = \frac{\dot{Q}_0}{\omega} + Q_0$$

A análise das expressões permite concluir que o movimento ocorre sem oscilação, e o sistema tende ao repouso quando $t \rightarrow +\infty$. Esta é a situação limite à desejada para sistemas de suspensão veicular, pois o fluido dos amortecedores ainda trabalha na contenção da oscilação.

Partindo-se de quatro condições iniciais diferentes, foram produzidos para o sistema a série temporal na Figura 45 e o retrato de fases na Figura 46.

Figura 45 – Séries temporais para oscilador mecânico amortecido criticamente

Figura 46 – Retrato de fases para oscilador mecânico amortecido criticamente

9.3.3 Amortecimento forte ou super crítico

O amortecimento é denominado forte ou supercrítico quando os autovalores são reais distintos, o que ocorre quando $\xi > 1$. Neste caso, define-se a frequência amortecida do oscilador:

$$\hat{\omega} \doteq \omega \cdot \sqrt{\xi^2 - 1}$$

Resulta que $\hat{\omega} > \omega$. Como $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$, o ponto de equilíbrio é um nó atrator, para o qual as órbitas aproximam-se em $t \rightarrow +\infty$, sem oscilar:

$$\lambda_1 = -(\xi \cdot \omega - \hat{\omega}) \qquad \lambda_2 = -(\xi \cdot \omega + \hat{\omega})$$

As órbitas do sistema linear são determinadas pela equação (7.5-6):

$$x_1(t) = w_{11} \cdot e^{-(\xi \cdot \omega - \hat{\omega}) \cdot t} + w_{12} \cdot e^{-(\xi \cdot \omega + \hat{\omega}) \cdot t}$$

$$x_2(t) = w_{21} \cdot e^{-(\xi \cdot \omega - \hat{\omega}) \cdot t} + w_{22} \cdot e^{-(\xi \cdot \omega + \hat{\omega}) \cdot t}$$

A função $x_1(t)$ pode ser re-escrita reorganizando-se os termos e utilizando-se das funções trigonométricas hiperbólicas, com $\theta \doteq \hat{\omega} \cdot t$:

$$x_1(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [w_{11} \cdot e^{\hat{\omega} \cdot t} + w_{12} \cdot e^{-\hat{\omega} \cdot t}]$$

$$\text{sh}\theta = \frac{e^{\theta} - e^{-\theta}}{2}$$

$$\text{ch}\theta = \frac{e^{\theta} + e^{-\theta}}{2}$$

Invertendo-se estas relações, resulta que $e^{\theta} = \text{ch}\theta + \text{sh}\theta$ e $e^{-\theta} = \text{ch}\theta - \text{sh}\theta$. Substituindo-se na função $x_1(t)$, resulta:

$$x_1(t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [(w_{11} + w_{12}) \cdot \text{ch}(\hat{\omega} \cdot t) + (w_{11} - w_{12}) \cdot \text{sh}(\hat{\omega} \cdot t)]$$

Definindo-se as constantes $A \doteq w_{11} + w_{12}$ e $B \doteq w_{11} - w_{12}$, obtém-se a seguinte família de funções:

$$Q(A, B, t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [A \cdot \text{ch}(\hat{\omega} \cdot t) + B \cdot \text{sh}(\hat{\omega} \cdot t)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(A, B, t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [(\hat{\omega} \cdot B - \xi \cdot \omega \cdot A) \cdot \cosh(\hat{\omega} \cdot t) + (\hat{\omega} \cdot A - \xi \cdot \omega \cdot B) \cdot \sinh(\hat{\omega} \cdot t)]$$

Substituindo-se nas equações das órbitas as condições iniciais para o sistema livre de vibrações, obtém-se as constantes (A, B):

$$A = Q_0$$

$$B = \frac{\dot{Q}_0}{\hat{\omega}} + \frac{\xi \cdot \omega}{\hat{\omega}} \cdot Q_0$$

A série temporal da Figura 47 e o retrato de fases da Figura 48 foram produzidos para o sistema com $\xi = 8,0$, partindo-se de quatro condições iniciais diferentes.

Figura 47 – Séries temporais para oscilador mecânico fortemente amortecido

Figura 48 – Retrato de fases para oscilador mecânico fortemente amortecido

Os amortecedores veiculares são projetados para que o amortecimento seja forte, de modo que o movimento da suspensão ocorra sem oscilação, e retorne rapidamente ao equilíbrio. Quando o amortecimento é fraco, o veículo oscila com frequência $\omega_D < \omega$ até atingir o equilíbrio; nesta situação, o óleo do amortecedor já perdeu eficiência devido à perda de pressão do fluido interno; é hora de substituir os amortecedores (VILLATE, 2006).

9.3.4 Resumo

A equação diferencial linear (9.2-2) que governa o movimento do sistema mecânico livre de vibrações possui solução analítica fechada, definida conforme valores da taxa ξ de amortecimento apresentados na Tabela 14.

$$\ddot{Q} + 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \dot{Q} + \omega^2 \cdot Q = 0$$

Quando o amortecimento é fraco, $\xi < 1$ e as órbitas são funções do tipo:

$$Q(A, B, t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [A \cdot \cos(\omega_D \cdot t) + B \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(A, B, t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [(\omega_D \cdot B - \xi \cdot \omega \cdot A) \cdot \cos(\omega_D \cdot t) - (\omega_D \cdot A + \xi \cdot \omega \cdot B) \cdot \sin(\omega_D \cdot t)]$$

Quando o amortecimento é crítico, $\xi = 1$, e:

$$Q(A, B, t) = e^{-\omega \cdot t} \cdot [A + \omega \cdot B \cdot t]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(A, B, t) = e^{-\omega \cdot t} \cdot [\omega \cdot (B - A) - \omega^2 \cdot B \cdot t]$$

Quando o amortecimento é forte, $\xi > 1$, e:

$$Q(A, B, t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [A \cdot \cosh(\hat{\omega} \cdot t) + B \cdot \sinh(\hat{\omega} \cdot t)]$$

$$\frac{\partial Q}{\partial t}(A, B, t) = e^{-\xi \cdot \omega \cdot t} \cdot [(\hat{\omega} \cdot B - \xi \cdot \omega \cdot A) \cdot \cosh(\hat{\omega} \cdot t) + (\hat{\omega} \cdot A - \xi \cdot \omega \cdot B) \cdot \sinh(\hat{\omega} \cdot t)]$$

Em todos os casos, o ponto de equilíbrio é a origem $\vec{0}$ do plano de fases (x_1, x_2) , que é assintoticamente estável, pois os autovalores da matriz jacobiana têm parte real negativa. Portanto, em regime permanente, para $t \rightarrow +\infty$:

$$Q(A, B, t) \rightarrow 0$$

9.4 Vibrações Forçadas com Carregamento Ideal

Obtidas as soluções gerais $Q(t)$ da equação diferencial homogênea (9.2-2), pode-se buscar uma solução particular $q_p(t)$ da equação diferencial completa (9.1-1), definida para um carregamento $p(t)$ ideal.

Tendo sido possível determinar esta solução particular $q_p(t)$, a solução geral da equação diferencial (9.1-1) é a soma desta com a solução geral $Q(A,B,t)$ obtida para cada tipo de amortecimento. Resulta em uma família de funções que descreve a posição e a velocidade do sistema mecânico:

$$q(A,B,t) = Q(A,B,t) + q_p(t) \quad \dot{q}(t) = \frac{\partial Q}{\partial t}(A,B,t) + \dot{q}_p(t)$$

A solução do sistema partido de condições iniciais (9.2-4) de posição $q(0) = q_0$ e velocidade $\dot{q}(0) = \dot{q}_0$ é única. As constantes (A,B) são determinadas aplicando-se as condições iniciais na solução geral para o problema completo:

$$q_0 = Q(A,B,0) + q_p(0) \quad \dot{q}_0 = \frac{\partial Q}{\partial t}(A,B,0) + \dot{q}_p(0)$$

Resulta no sistema algébrico nas variáveis (A,B) :

$$\begin{cases} Q(A,B,0) = q_0 - q_p(0) \\ \frac{\partial Q}{\partial t}(A,B,0) = \dot{q}_0 - \dot{q}_p(0) \end{cases}$$

9.5 Vibrações devido a Sismos

No caso de carregamentos sísmicos, a tabela de dados com $(n+3)$ pares ordenados que fornecesse os deslocamentos $s(t)$ ou as acelerações $\ddot{s}(t)$ da crosta terrestre pode ser utilizada para interpolar uma função polinomial de grau $(n+2)$:

$$s(t) = \sum_{i=0}^{n+2} s_i \cdot t^i = s_{n+2} \cdot t^{n+2} + s_{n+1} \cdot t^{n+1} + \sum_{i=0}^n s_i \cdot t^i$$

$$\dot{s}(t) = \sum_{i=1}^{n+2} i \cdot s_i \cdot t^{i-1} = \sum_{j=0}^{n+1} (j+1) \cdot s_{j+1} \cdot t^j = (n+2) \cdot s_{n+2} \cdot t^{n+1} + \sum_{j=0}^n (j+1) \cdot s_{j+1} \cdot t^j$$

$$\ddot{s}(t) = \sum_{j=1}^{n+1} (j+1) \cdot j \cdot s_{j+1} \cdot t^{j-1} = \sum_{k=0}^n (k+2) \cdot (k+1) \cdot s_{k+2} \cdot t^k$$

Uma função polinomial de grau $(n+2)$ necessita de $(n+3)$ pares ordenados para ser completamente determinada. Neste caso, o uso do método dos mínimos quadrados fornece um resíduo nulo e uma solução exata.

A função de carregamento ideal é definida em concordância com a equação (9.1-1) por $p(t) = -m \cdot \ddot{s}(t)$. Resulta que:

$$p(t) = -m \cdot \sum_{k=0}^n (k+2) \cdot (k+1) \cdot s_{k+2} \cdot t^k = \sum_{k=0}^n p_k \cdot t^k = p_n \cdot t^n + p_{n-1} \cdot t^{n-1} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k \cdot t^k$$

A relação entre os coeficientes vale $p_k = -m \cdot (k+2) \cdot (k+1) \cdot s_{k+2}$. Isto sugere a busca de uma solução particular polinomial:

$$q_p(t) = \sum_{i=0}^n a_i \cdot t^i = a_n \cdot t^n + a_{n-1} \cdot t^{n-1} + \sum_{i=0}^{n-2} a_i \cdot t^i$$

$$\dot{q}_p(t) = \sum_{i=1}^n i \cdot a_i \cdot t^{i-1} = \sum_{j=0}^{n-1} (j+1) \cdot a_{j+1} \cdot t^j = n \cdot a_n \cdot t^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} (j+1) \cdot a_{j+1} \cdot t^j$$

$$\ddot{q}(t) = \sum_{j=1}^{n-1} (j+1) \cdot j \cdot a_{j+1} \cdot t^{j-1} = \sum_{k=0}^{n-2} (k+2) \cdot (k+1) \cdot a_{k+2} \cdot t^k$$

Estes termos são substituídos na equação (9.1-1). Após uma permuta dos índices das somatórias e uma reorganização dos termos, resulta:

$$[k \cdot a_n - p_n] \cdot t^n + \left[k \cdot a_{n-1} + c \cdot n \cdot a_n - p_{n-1} \right] \cdot t^{n-1} + \sum_{j=0}^{n-2} \left[k \cdot a_j + c \cdot (j+1) \cdot a_{j+1} + m \cdot (j+2) \cdot (j+1) \cdot a_{j+2} - p_j \right] \cdot t^j = 0$$

Obtém-se um sistema algébrico nas variáveis $(a_n, a_{n-1}, \dots, a_j, \dots, a_0)$:

$$\begin{cases} k \cdot a_n = p_n \\ k \cdot a_{n-1} + c \cdot n \cdot a_n = p_{n-1} \\ k \cdot a_j + c \cdot (j+1) \cdot a_{j+1} + m \cdot (j+2) \cdot (j+1) \cdot a_{j+2} = p_j \end{cases}$$

A matriz $n \times n$ do sistema algébrico possui coeficientes concentrados em torno da diagonal principal. Como a matriz já está escalonada, então seu determinante é não nulo, e a solução vale:

$$a_n = \frac{p_n}{k}$$

$$a_{n-1} = \frac{p_{n-1}}{k} - n \cdot \frac{c}{k} \cdot \frac{p_n}{k}$$

Utilizando os resultados anteriores, os coeficientes $(a_{n-2}, \dots, a_j, \dots, a_2, a_1, a_0)$ são obtidos pela fórmula de recorrência:

$$a_j = \frac{p_j}{k} - \frac{c}{k} \cdot (j+1) \cdot a_{j+1} - \frac{m}{k} \cdot (j+2) \cdot (j+1) \cdot a_{j+2}$$

Portanto, os osciladores mecânicos simples caracterizados pela equação diferencial (9.1-1) e submetidos a excitações de suportes devido a sismos admitem solução particular polinomial e podem ser integrados analiticamente.

9.6 Excitação de Suportes com Carregamento Harmônico

Supondo-se uma vibração dos suportes governada por uma função trigonométrica, ainda será possível integrar analiticamente o sistema:

$$s(t) = s_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Resulta que $\ddot{s}(t) = -\Omega^2 \cdot s_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$ e equação diferencial (9.1-1) reduz-se a:

$$m \cdot \ddot{q} + c \cdot \dot{q} + k \cdot q = m \cdot \Omega^2 \cdot s_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) - m \cdot g \quad (9.6-1)$$

A amplitude $p_0 \doteq m \cdot \Omega^2 \cdot s_0$ e a frequência Ω da força de excitação harmônica permitem definir uma função puramente temporal para o carregamento:

$$p(t) \doteq p_0 \cdot \sin(\Omega \cdot t) \quad p_0 \cdot \Omega \neq 0$$

Estas notações favorecem o aproveitamento de alguns resultados obtidos por Clough e Penzien (1993). O sistema resultante não admite pontos de equilíbrio:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -\omega^2 \cdot x_1 - 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot x_2 + \frac{p_0}{m} \cdot \sin(\Omega \cdot t) - g \end{cases}$$

9.6.1 Determinação da Solução Particular

Soluções particulares do problema que satisfaçam à equação diferencial são as órbitas de equação:

$$q_p(t) = c_1 \cdot \cos(\Omega \cdot t) + c_2 \cdot \sin(\Omega \cdot t) + c_3$$

A velocidade e a aceleração são determinadas por derivação:

$$\dot{q}_p(t) = -c_1 \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega \cdot t) + c_2 \cdot \Omega \cdot \cos(\Omega \cdot t)$$

$$\ddot{q}_p(t) = -c_1 \cdot \Omega^2 \cdot \cos(\Omega \cdot t) - c_2 \cdot \Omega^2 \cdot \sin(\Omega \cdot t)$$

Substituindo na equação diferencial e isolando os termos pertinentes, resulta em um sistema algébrico nas variáveis (c_1, c_2, c_3) em que $c_3 = -\frac{m \cdot g}{k}$, e:

$$\begin{bmatrix} -2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Omega & \omega^2 - \Omega^2 \\ \omega^2 - \Omega^2 & 2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Omega \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_0/m \\ 0 \end{Bmatrix}$$

O determinante da matriz do sistema algébrico vale:

$$-(2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Omega)^2 - (\omega^2 - \Omega^2)^2 = -\omega^4 - \Omega^4 + 2 \cdot \omega^2 \cdot \Omega^2 \cdot (1 - 2 \cdot \xi^2)$$

Ele será não nulo se o sistema for amortecido ($\xi \neq 0$) ou se $\Omega \neq \omega$, ou seja, estiver fora da ressonância. Neste caso, a solução do sistema algébrico é:

$$c_1 = \frac{2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Omega}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Omega)^2} \cdot \frac{p_0}{m} \quad c_2 = \frac{\omega^2 - \Omega^2}{(\omega^2 - \Omega^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \omega \cdot \Omega)^2} \cdot \frac{p_0}{m}$$

Define-se o parâmetro auxiliar, que corresponde à relação entre a frequência Ω do carregamento e a frequência natural circular ω do oscilador:

$$\beta \doteq \frac{\Omega}{\omega} \quad (2.3-2)$$

Com esta notação, ocorre ressonância quando $\beta = 1$. Quando $\xi \neq 0$ ou $\beta \neq 1$, as constantes (c_1, c_2) valem:

$$c_1 = -\frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2} \cdot \frac{p_0}{k} \quad c_2 = \frac{1 - \beta^2}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2} \cdot \frac{p_0}{k}$$

Finalmente:

$$q_p(t) = \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2} \cdot \frac{p_0}{k} \cdot [-(2 \cdot \xi \cdot \beta) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + (1 - \beta^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t)] - \frac{g}{\omega^2}$$

O fator de amplificação dinâmica é um número adimensional definido por (CLOUGH; PENZIEN, 1993) para $(\xi, \beta) \neq (0, 1)$:

$$D \doteq \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2}}$$

Com esta notação, a solução particular da equação diferencial é:

$$q_p(t) = D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot [-(2 \cdot \xi \cdot \beta) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + (1 - \beta^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t)] - \frac{g}{\omega^2} \quad (9.6-2)$$

A velocidade é determinada por diferenciação:

$$\dot{q}_p(t) = D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \Omega \cdot [(2 \cdot \xi \cdot \beta) \cdot \sin(\Omega \cdot t) + (1 - \beta^2) \cdot \cos(\Omega \cdot t)] \quad (9.6-3)$$

9.6.2 Resposta do Sistema Dinâmico

A solução geral da equação diferencial é a soma da solução particular $q_p(t)$ com solução geral $Q(A,B,t)$ correspondente a cada tipo de amortecimento. No caso da solução particular definida pelas equações (9.6-2) e (9.6-3), obtêm-se:

$$q_p(0) = D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot (-2 \cdot \xi \cdot \beta) - \frac{g}{\omega^2} \quad \dot{q}_p(0) = D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \Omega \cdot (1 - \beta^2)$$

Aplicando as condições iniciais na solução geral, resulta no sistema algébrico nas variáveis (A,B) :

$$\begin{cases} Q(A,B,0) = \left(q_0 + \frac{g}{\omega^2} \right) + D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot (2 \cdot \xi \cdot \beta) \\ \frac{\partial Q}{\partial t}(A,B,0) = \dot{q}_0 - D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \Omega \cdot (1 - \beta^2) \end{cases}$$

Define-se uma frequência generalizada aplicável a todos os casos de amortecimento:

$$\Omega_0 \doteq \begin{cases} \omega_D & \text{if } \xi < 1 \\ \omega & \text{if } \xi = 1 \\ \hat{\omega} & \text{if } \xi > 1 \end{cases}$$

Com esta notação, a solução do sistema algébrico assume a mesma forma matemática para todos os casos de amortecimento:

$$A = \left(q_0 + \frac{g}{\omega^2} \right) + D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot (2 \cdot \xi \cdot \beta)$$

$$B = \frac{\dot{q}_0}{\Omega_0} + \frac{\xi \cdot \omega}{\Omega_0} \cdot \left(q_0 + \frac{g}{\omega^2} \right) - D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \frac{\beta \cdot \omega}{\Omega_0} \cdot (1 - \beta^2 + 2 \cdot \xi^2)$$

Para diferentes taxas de amortecimento, foram produzidas as evoluções temporais dos deslocamentos na Figura 49 e das velocidades na Figura 50, partindo da condição inicial $\bar{x}_0 = (1,1)$, com $\beta = 0,7$. Os respectivos retratos de fases são apresentados na Figura 51.

Figura 49 – Séries temporais (posição) de osciladores mecânicos ideais

Figura 50 – Séries temporais (velocidades) de osciladores mecânicos ideais

Figura 51 – Retrato de fases para osciladores mecânicos ideais

9.6.3 Análise do Regime Permanente

Depois de passado o regime transiente, que é afetado pelas condições iniciais, o movimento atinge o regime permanente, que é matematicamente determinado pelo comportamento das soluções para $t \rightarrow +\infty$.

Para todos os casos de tipos de amortecimento, a órbita transiente $Q(A,B,t) \rightarrow 0$ se aproxima da origem quando $t \rightarrow +\infty$, e o sistema mecânico se desloca conforme a solução particular:

$$q(t) \rightarrow q_p(t) = D^2 \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \left[-(2 \cdot \xi \cdot \beta) \cdot \cos(\Omega \cdot t) + (1 - \beta^2) \cdot \sin(\Omega \cdot t) \right] - \frac{g}{\omega^2}$$

No caso em que o sistema opera fora da ressonância, com $\beta \neq 1$, pode-se definir um ângulo de fase para a solução particular:

$$\phi \doteq \tan^{-1} \left(\frac{2 \cdot \xi \cdot \beta}{1 - \beta^2} \right)$$

De acordo com as propriedades das funções trigonométricas, a solução particular pode ser escrita no caso em que $\phi \neq \frac{\pi}{2}$:

$$q_p(t) = D \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \sin(\Omega \cdot t - \phi) - \frac{g}{\omega^2} \quad (9.6-4)$$

Na ressonância amortecida, quando $\beta = 1$ e $\xi \neq 0$, o ângulo de fase é reto; o fator de amplificação dinâmica e a solução particular (9.6-2) reduzem-se a:

$$D = \frac{1}{2 \cdot \xi} \quad q_p(t) = -\frac{1}{2 \cdot \xi} \cdot \frac{p_0}{k} \cdot \cos(\omega \cdot t) - \frac{g}{\omega^2} \quad (9.6-5)$$

O efeito da força gravitacional sobre o sistema adiciona um termo constante na resposta, que pode ser eliminado com uma translação de coordenadas:

$$\bar{q}_p(t) \doteq q_p(t) + \frac{g}{\omega^2}$$

Descontando o efeito do campo gravitacional, tanto o movimento permanente fora da ressonância representado pela função (9.6-4) quanto o ressonante da função (9.6-5) ocorrem vibrando na frequência Ω do carregamento $p(t)$, com amplitude proporcional ao fator de amplificação dinâmica:

$$|\bar{q}_p(t)| \leq a_p(t) = D \cdot \frac{p_0}{k}$$

O fator de amplificação dinâmica mede o efeito do carregamento harmônico na amplitude do movimento do sistema mecânico em regime permanente:

$$D = \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2}}$$

Fixados os parâmetros (ω, ξ) característicos do sistema estrutural, a frequência Ω do carregamento harmônico ou o parâmetro β que amplifica ao máximo a resposta do sistema é determinado diferenciando-se a função $D(\xi, \beta)$ em relação a β :

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = \left[(1 - \beta^2)^2 + (2 \cdot \xi \cdot \beta)^2 \right]^{-\frac{3}{2}} \cdot (2 \cdot \beta) \cdot (1 - \beta^2 - 2 \cdot \xi^2)$$

Os pontos de máximo ou de mínimo são determinados pelas soluções da equação algébrica:

$$\frac{\partial D}{\partial \beta} = 0$$

$$\bar{\beta}_1 = 0$$

$$\bar{\beta}_2 = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$$

O ponto de mínimo $\beta = 0$ corresponde ao sistema sem carregamento externo variável com o tempo, produzindo o valor $D = 1$, anulando a amplificação dinâmica; este caso já foi estudado nos itens 9.3 e 9.4.

O ponto de máximo $\beta = \sqrt{1 - 2 \cdot \xi^2}$ será estritamente positivo somente se:

$$\xi < \bar{\xi}_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{2}} \quad (9.6-6)$$

Nestas condições, a máxima amplificação dinâmica tem valor:

$$D_{MAX} = \frac{1}{2 \cdot \xi \cdot \sqrt{1 - \xi^2}}$$

Ou seja, o fornecimento de energia ideal de frequência Ω a um sistema mecânico com frequência natural ω e taxa de amortecimento $0 < \xi < \bar{\xi}_0$ provoca amplificação de seu movimento em por um fator $D(\beta(\xi))$ de modo que a amplitude do movimento em regime permanente é proporcional ao fator de amplificação:

$$a_p(t) = D \cdot \frac{p_0}{k} \quad (9.6-7)$$

Portanto, a menos da constante $\frac{p_0}{k}$, gráficos da função $D(\beta(\xi))$ mostram também a amplitude $a_p(t)$. A Figura 52 contém este gráfico para todos os casos típicos de amortecimento, com $0 < \xi < 8$; na Figura 53 somente para:

$$0,15 < \xi \leq 0,7071 < \bar{\xi}_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Naturalmente, a condição **(2.3-5)** limita o escopo do trabalho a sistemas mecânicos com amortecimento fraco, pois $\bar{\xi}_0 < 1$. Observando a Figura 53, conclui-se que, quanto menor for o amortecimento, mais próximo da ressonância será o ponto de máximo da amplificação dinâmica.

Figura 52 – Fator de amplificação dinâmica para oscilador mecânico

Figura 53 – Fator de amplificação dinâmica para amortecimento fraco