LUIZ ALBERTO ARAÚJO DE SEIXAS LEAL

**Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica
em estruturas de aço**

São Paulo
2014

LUIZ ALBERTO ARAÚJO DE SEIXAS LEAL

**Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica
em estruturas de aço**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo como parte dos requisitos para
obtenção do título de Mestre em
Ciências

Orientador: Eduardo de Moraes Barreto
Campello

São Paulo
2014

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo,   de março de 2014.

Assinatura do autor Luiz Alberto Araújo de Seixas Leal

Assinatura do orientador Edson Cayelli

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL
DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU
ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE
CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

Leal, Luiz Alberto Araújo de Seixas

**Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica
em estruturas de aço / L.A.S. Leal. -- versão corr. -- São
Paulo, 2014.**

97 p.

**Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Geotécnica.**

**1.Estruturas de aço 2.Análise não linear de estruturas
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.**

Aos meus pais, Alberto e Graça, e aos meus irmãos, Jurema, Priscila e Maurício por todo o carinho e por serem os grandes responsáveis pelo meu crescimento pessoal e profissional.

Ao Paulo Amarante, por ser um exemplo de pessoa e um grande amigo. Estamos todos na torcida e numa corrente positiva pela sua recuperação. Força, irmão.

AGRADECIMENTOS

Agradeço aos meus pais e irmãos por todo o carinho e companheirismo demonstrado ao longo destes 25 anos. Não tenho dúvidas de que são os grandes responsáveis por todas as minhas vitórias.

Ao Prof. Eduardo de Moraes Barreto Campello, por ter sido fundamental no meu desenvolvimento ao longo do Mestrado e por desempenhar não apenas a função de orientador, mas também por ter se mostrado um grande amigo.

Ao Prof. Alberto Borges Vieira Júnior, por todos os conselhos e pela amizade demonstrada durante a minha carreira profissional.

Aos professores Valdir Pignatta, Júlio Fruchtengarten e Pedro Wellington, por terem contribuído positivamente para o desenvolvimento da minha dissertação.

Aos professores da Universidade Federal da Bahia, especialmente aqueles do Departamento de Construção e Estruturas, por terem participado ativamente do meu desenvolvimento acadêmico.

RESUMO

LEAL, L.A.A.S. **Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica em estruturas de aço**. 2014. 97 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

A análise das estruturas de aço sujeitas a ações verticais e horizontais, em termos de esforços solicitantes, deslocamentos e rotações, muitas vezes requer a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica. Em outras palavras, a interação entre os deslocamentos e os esforços externos pode provocar uma alteração na intensidade dos esforços internos que solicitam a estrutura que, caso não seja adequadamente avaliada, pode conduzir a uma redução significativa dos níveis de segurança. Nesse contexto, destacam-se duas metodologias de avaliação desses efeitos: aquelas baseadas em análises aproximadas e aquelas baseadas em análises geometricamente exatas. As **análises aproximadas** podem ser caracterizadas em sua grande maioria por desenvolver um estudo baseado no equilíbrio da estrutura na configuração inicial ou indeformada (análise sob linearidade geométrica) e, em seguida, estimar os esforços solicitantes atuantes na configuração final ou deformada por meio de coeficientes majoradores. Por outro lado, a característica principal da **análise geometricamente exata** é verificar as condições de equilíbrio estrutural na configuração deformada e sem fazer nenhuma restrição quanto à magnitude dos deslocamentos e rotações ou, em outras palavras, observar o comportamento geometricamente exato (não linear) de maneira direta na configuração final de equilíbrio. Este trabalho propõe realizar um estudo comparativo entre um dos métodos de análise aproximada – aquele baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , que é recomendado pela norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 – e um método baseado em análise geometricamente exata, de maneira a verificar as semelhanças e as diferenças entre os resultados. O aço é admitido como elástico. As ferramentas computacionais utilizadas são os programas FTOOL e PEFSYS, formulados segundo teorias de barras lineares e não lineares, respectivamente.

Palavras-chave: Estruturas de aço, Não linearidade geométrica, Não linearidades locais e globais, Deslocabilidade lateral, Análise geometricamente exata.

ABSTRACT

LEAL, L.A.A.S. **Elastic analysis of the effects of geometrical nonlinearity in steel structures**. 2014. 97 p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2014.

The analysis of steel structures subjected to vertical and horizontal loads, regarding internal forces, displacements and rotations, often requires the consideration of geometrically nonlinear effects. In other words, the interaction between displacements and external loads may cause a changing in the intensity of internal forces acting on the structure which, if not correctly evaluated, lead to significant reducing of structural safety. In this context, there exist two main methodologies to evaluate these effects: one based on approximated analysis and another based on geometrically exact analysis. The approximated analysis can be usually characterized by a study based on the equilibrium of the structure at its initial or undeformed configuration (geometrically linear analysis) and, further, by estimating the internal forces acting at the final or deformed configuration by means of amplifier coefficients. On the other hand, the main characteristic of the geometrically exact analysis is to verify the equilibrium conditions directly at the deformed configuration, without any restrictions regarding the magnitude of displacements and rotations or, in other words, observe the geometrically exact (nonlinear) behaviour directly at the final equilibrium configuration. This work purposes to develop a comparative study between one of the approximated methods – the one based on the so called B_1 and B_2 coefficients, recommended by the Brazilian code ABNT NBR 8800:2008 – and a method based on geometrically exact analysis, to verify the similarities and differences of results. The computational tools employed are the softwares FTOOL and PEFSYS, based on linear and nonlinear rod theories, respectively.

Keywords: Steel structures, Geometrical nonlinearities, Global and local nonlinearities, Lateral displacements, Geometrically exact analysis.

LISTA DE FIGURAS

Figura 1.1 – Ponte de Alcantara / Rio Tagus	17
Figura 1.2 – Ponte Golden Gate	18
Figura 1.3 – Construções de aço.....	19
Figura 1.4 – Esquematização das metodologias abordadas	22
Figura 2.1 – Efeito causado pela não retilineidade das barras	29
Figura 2.2 – Efeito causado pelo deslocamento das extremidades das barras	30
Figura 2.3 – Efeitos da deslocabilidade da estrutura	33
Figura 2.4 – Comportamento geometricamente não linear dos momentos fletores (na seção transversal da base) de um elemento estrutural.....	34
Figura 2.5 – Dimensões, carregamentos e momentos fletores atuantes no pórtico de quatro pavimentos (Cálculo de γ_z).....	37
Figura 2.6 – Dimensões, carregamentos e momentos fletores atuantes no pórtico de quatro pavimentos (Amplificado pelo coeficiente $0,95 \gamma_z$).....	39
Figura 2.7 – Modelos de cálculo idealizados para determinação dos Coeficientes B_1 e B_2	40
Figura 2.8 – Efeito $P\delta$	43
Figura 2.9 – Barra sujeita à flexão composta – momento concentrado.....	44
Figura 2.10 – Conceito do Momento Equivalente.....	46
Figura 2.11 – Influência da não linearidade geométrica global	48
Figura 2.12 – Estrutura real, estrutura nt e estrutura lt (Cálculo de B_2)	51
Figura 2.13 – Diagrama de momentos fletores e esforços normais – Análise sob linearidade geométrica da estrutura nt	52
Figura 2.14 – Diagrama de momentos fletores e esforços normais – Análise sob linearidade geométrica da Estrutura lt	54
Figura 2.15 – Diagrama de momentos fletores e esforços normais - Estrutura original	55
Figura 2.16 – Representação da estrutura equivalente, idealizada para	56
Figura 2.17 – Dimensões, carregamentos atuantes no pórtico e elemento estrutural com rigidez equivalente (exemplo de cálculo do Parâmetro α)	59
Figura 3.1 – Comportamento físico dos materiais.....	62
Figura 3.2 – Teoria de barras de Timoshenko.....	64
Figura 3.3 – Descrição do movimento de elementos de barras.....	68
Figura 4.1 – Caso 1: pórtico de um pavimento e valores do carregamento de referência	75
Figura 4.2 – Resultados do caso 1. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus nível de carregamento.....	76

Figura 4.3 – Caso 2: pórtico de dois pavimento e valores do carregamento de referência.....	77
Figura 4.4 – Resultados do caso 2. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus nível de carregamento.....	78
Figura 4.5 – Representação do pórtico de três pavimentos.....	79
Figura 4.6 – Resultados do caso 3. Curvas dos esforços atuantes.....	80
Figura 4.7 – Representação do pórtico de quatro pavimentos	81
Figura 4.8 – Resultados do caso 4. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus parâmetro de carregamento	82
Figura 4.9 – Representação do pórtico de cinco pavimentos.....	83
Figura 4.10 – Resultados do caso 5. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus parâmetro de carregamento	84
Figura 4.11 – Representação do pórtico de seis pavimentos.....	85
Figura 4.12 – Resultados do caso 6. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus parâmetro de carregamento	86

LISTA DE TABELAS

Tabela 2.1 – Características geométricas, forças externas atuantes, deslocamentos e efeitos da deslocabilidade global (Cálculo de γ_z).....	38
Tabela 2.2 – Características geométricas, esforços internos atuantes e efeitos da não linearidade geométrica local (Cálculo de B_1).....	52
Tabela 2.3 – Características geométricas, forças externas atuantes, deslocamentos e efeitos da deslocabilidade global (Cálculo de B_2)	53
Tabela 2.4 – Características geométricas, forças externas atuantes, deslocamentos e efeitos da não linearidade geométrica global (Cálculo de B_2) considerando a “imperfeição inicial do material”	53
Tabela 4.1 – Estudos de caso.....	73
Tabela 4.2 – Resultados do caso 1. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e os deslocamentos laterais.....	75
Tabela 4.3 – Resultados do caso 1. Esforços internos na seção mais solicitada dos pilares....	76
Tabela 4.4 – Resultados do caso 2. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e os deslocamentos laterais.....	77
Tabela 4.5 – Resultados do caso 2. Esforços internos na seção mais solicitada dos pilares...	78
Tabela 4.6 – Resultados do caso 3. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e os deslocamentos laterais.....	79
Tabela 4.7 – Resultados do caso 3. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares...	80
Tabela 4.8 – Resultados do caso 4. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e deslocamentos laterais.....	81
Tabela 4.9 – Resultados do caso 4. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares...	82
Tabela 4.10 – Resultados do caso 5. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e deslocamentos laterais.....	83
Tabela 4.11 – Resultados do caso 5. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares..	84
Tabela 4.12 – Resultados do caso 6. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e deslocamentos laterais.....	85
Tabela 4.13 – Resultados do caso 6. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares..	86

Tabela 4.14 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de um pavimento .	88
Tabela 4.15 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de dois pavimentos	88
Tabela 4.16 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de três pavimentos	88
Tabela 4.17 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de quatro pavimentos.....	89
Tabela 4.18 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de cinco pavimentos	89
Tabela 4.19 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de seis pavimentos	89
Tabela 5.1 – Esforços solicitantes (análise sob linearidade geométrica vs. análise geometricamente exata).....	92
Tabela 5.2 – Relação entre os deslocamentos Δ_2/Δ_1 vs. Coeficiente B_2	92

LISTA DE SÍMBOLOS

B_1	Coeficiente de amplificação para avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica local, aplicável aos momentos fletores obtidos em análise geometricamente linear.
B_2	Coeficiente de amplificação para avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica global, aplicável aos momentos fletores e esforços normais obtidos em análise geometricamente linear.
γ_z	Coeficiente de amplificação das forças horizontais atuantes para consideração dos efeitos da não linearidade geométrica global.
α	Coeficiente de amplificação para avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica local, aplicável aos momentos fletores obtidos em análise geometricamente linear.
$P\delta$	Representa o efeito da não linearidade geométrica local.
$P\Delta$	Representa a influência da não linearidade geométrica global.
$\Delta M_{d,tot}$	Soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos em análise sob linearidade geométrica.
$M_{1,d,tot}$	Momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura.
P_{gi}	Resultante vertical do carregamento permanente no pavimento i.
γ_f	Coeficiente de majoração dos carregamentos no estado limite último.
ψ_0	Fator de redução de combinação para ELU para ações variáveis secundárias.
P_{q1i}	Resultante vertical da ação variável principal no pavimento i.
P_{q2i}	Resultante vertical da ação variável secundária no pavimento i.
δ_{hi}	Deslocamento horizontal do pavimento i.
f_y	Tensão limite de escoamento do aço estrutural.
H_{vi}	Força horizontal atuante no pavimento i (Determinação do Coeficiente γ_z)
h_i	Distância entre a base do edifício e o ponto de aplicação da força H_{vi} .
P_i	Resultante vertical das forças de cálculo, atuante no pavimento i.

M_{sd}, N_{sd}, V_{sd}	Esforços solicitantes de cálculo.
M_{nt}, N_{nt}, V_{nt}	Esforços solicitantes de cálculo, obtidos a partir do equilíbrio da estrutura <i>nt</i> .
M_{lt}, N_{lt}, V_{lt}	Esforços solicitantes de cálculo, obtidos a partir do equilíbrio da estrutura <i>lt</i> .
C_m	Fator utilizado para determinação do coeficiente amplificador dos momentos fletores (efeito da não linearidade geométrica local).
N_{sd1}	Força normal de solicitante de cálculo (Determinação do Coeficiente B_1). Nomenclatura utilizada pela ABNT NBR 8800:2008.
N_e	Força normal crítica de Euler (Determinação do Coeficiente B_1). Nomenclatura utilizada pela ABNT NBR 8800:2008.
M_{lt1}, M_{lt2}	Momentos fletores na configuração inicial, sob linearidade geométrica, atuantes no topo e na base, respectivamente. Empregados na formulação matemática do Coeficiente B_2 (estrutura <i>lt</i>).
H_{sd}	Força horizontal solicitante de cálculo, utilizada para determinação do Coeficiente B_2 .
N_{sd}	Força normal solicitante de cálculo, utilizada para determinação do Coeficiente B_2 .
H_{equiv}	Força horizontal equivalente solicitante de cálculo, utilizada para determinação do Coeficiente B_2 .
Δ_1	Deslocamento horizontal inicial, utilizado para determinação do Coeficiente B_2 .
Δ_2	Deslocamento horizontal final, utilizado para determinação do Coeficiente B_2 .
φ	Fator de proporcionalidade entre os deslocamentos laterais e o carregamento horizontal de cálculo.
$\sum N_{sd}$	Somatório das forças verticais solicitantes de cálculo, utilizado para determinação do Coeficiente B_2 .
$\sum H_{sd}$	Somatório das forças horizontais solicitantes de cálculo, utilizado para determinação do Coeficiente B_2 .
R_s	Coeficiente de ajuste, dependente das características do sistema estrutural resistente às ações horizontais. Utilizado para determinação do Coeficiente B_2 .
Δ_h	Deslocamento horizontal relativo entre a base e o topo do pavimento. Utilizado para determinação do Coeficiente B_2 .

H_{tot}	Altura total da estrutura, utilizada para determinação do Parâmetro α .
N_k	Somatório de todas as forças verticais atuantes, com valores característicos. Utilizado para determinação do Parâmetro α .
E_{cs}	Módulo de elasticidade secante do concreto. Utilizado para determinação do Parâmetro α .
I_c	Momento de inércia (de segunda ordem) da seção transversal não fissurada do concreto. Utilizado para determinação do Parâmetro α .
α_1	Valor utilizado para classificação das estruturas pelo Parâmetro α .
$\overline{\gamma}, \overline{\gamma}^=$	Coefficiente γ_z obtido indiretamente, através da relação entre o Parâmetro α e o Coeficiente γ_z .
x	Vetor posição de um ponto genérico da seção transversal da barra, na configuração final. Utilizado para caracterização do movimento de um sólido no espaço tridimensional.
z	Vetor que descreve a posição do centro geométrico da seção em relação à origem do sistema de coordenadas.
r	Vetor que descreve a posição relativa de um ponto genérico da seção em relação ao centro geométrico.
ψ	Função do empenamento uniforme de Saint-Venant. Caracteriza a forma do empenamento.
P	Parâmetro que caracteriza a intensidade do empenamento.
F	Gradiente da transformação.
ξ	Vetor posição do ponto na seção transversal.
γ'	Vetor das deformações, utilizado para caracterização do movimento de um sólido no espaço tridimensional.
T	Tensor das tensões de Cauchy.
P	Primeiro tensor de Piola-Kirchoff.
P_{int}, P_{ext}	Potência dos esforços internos e externos, respectivamente.
$\dot{F}$	Gradiente das velocidades, utilizado para caracterização do movimento de um sólido no espaço tridimensional.
$\bar{t}$	Vetor das forças superficiais externas, atuante na configuração final por unidade de área.
$\bar{b}$	Vetor das forças de volume externas, atuante na configuração final por unidade de volume.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	17
1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS	17
1.2 JUSTIFICATIVA	20
1.3 OBJETIVOS E METODOLOGIA	21
1.4 CONCEITOS FUNDAMENTAIS	22
1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	24
2. AVALIAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA – MÉTODOS APROXIMADOS	26
2.1 INTRODUÇÃO	26
2.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS	27
2.3 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS	28
2.4 MÉTODO BASEADO NO COEFICIENTE γ_z	30
2.4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	30
2.4.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS	31
2.4.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA	33
2.4.4 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA LOCAL	36
2.4.5 EXEMPLO: CÁLCULO DE γ_z	37
2.5 MÉTODO BASEADO NOS COEFICIENTES B_1 e B_2	40
2.5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	40
2.5.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS	42
2.5.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA - COEFICIENTE B_1	43
2.5.4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA - COEFICIENTE B_2	47
2.5.5 EXEMPLO: CÁLCULO DOS COEFICIENTES B_1 e B_2	51
2.6 MÉTODO BASEADO NO PARÂMETRO α	55
2.6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	55
2.6.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS	57
2.6.3 EXEMPLO: CÁLCULO DO PARÂMETRO α	59

3. AVALIAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA - MÉTODO BASEADO EM TEORIA GEOMETRICAMENTE EXATA.....	61
3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	61
3.2 TEORIAS CLÁSSICAS DE BARRAS	63
3.3 TEORIAS GEOMETRICAMENTE EXATAS.....	66
3.4 TEORIA DE BARRAS UTILIZADA PELO PEFSYS	67
4. ESTUDO DE CASOS E RESULTADOS.....	72
4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS	72
4.2 METODOLOGIA	73
4.3 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS	74
4.4 CASO 1: PÓRTICO COM UM PAVIMENTO.....	74
4.5 CASO 2: PÓRTICO COM DOIS PAVIMENTOS.....	77
4.6 CASO 3: PÓRTICO COM TRÊS PAVIMENTOS	79
4.7 CASO 4: PÓRTICO COM QUATRO PAVIMENTOS	81
4.8 CASO 5: PÓRTICO COM CINCO PAVIMENTOS.....	83
4.9 CASO 6: PÓRTICO COM SEIS PAVIMENTOS.....	85
4.10 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS.....	87
5. CONCLUSÃO.....	90
5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS	90
5.2 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS.....	93
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	94

1. INTRODUÇÃO

1.1 ASPECTOS HISTÓRICOS

A evolução histórica da Engenharia ao longo dos séculos é acompanhada também por constantes mudanças nas teorias matemáticas que são usadas para simular os problemas. A realidade é que a consolidação dos processos evolutivos é estritamente dependente de um conhecimento maior por parte dos engenheiros no que se refere, por exemplo, ao comportamento físico dos materiais, à viabilidade do emprego de novas técnicas construtivas, dentre outros.

Figura 1.1 – Ponte de Alcantara / Rio Tagus
(Extraída de WELLS, 2010)

A Figura 1.1 retrata uma construção característica da época em que foi concebida, 100 anos depois de Cristo. As dimensões dos elementos estruturais causariam estranheza se a obra fosse construída nos dias de hoje, já que a evolução da Engenharia trouxe consigo o emprego

de materiais mais resistentes e eficientes, assim como processos construtivos mais avançados e, claro, complexas teorias que permitem a avaliação mais realista do comportamento estrutural da ponte. Os três aspectos citados anteriormente viabilizaram, por exemplo, a execução de um grande e ousado projeto de Engenharia, no Século 20 (Figura 1.2).

Figura 1.2 – Ponte Golden Gate
(Extraída de WELLS, 2010)

No livro “Engineers: A history of engineering and structural design”, Wells (2010) cita um dos problemas intrínsecos ao projeto da Ponte Golden Gate e que tem uma relação direta com o conteúdo que será abordado por esta dissertação. O papel dos engenheiros responsáveis era o de considerar o efeito dos grandes deslocamentos e rotações da superestrutura e acompanhá-lo durante os diversos estágios de construção.

O fato é que, pela própria robustez das pontes concebidas na antiguidade, não havia necessidade em se preocupar com problemas hoje vistos como, por exemplo, a influência que os deslocamentos e as rotações da estrutura exercem nos esforços solicitantes.

A lição que fica para o futuro da Engenharia, ao estabelecer um paralelo entre a Ponte de Alcântara e a Ponte Golden Gate, entre o passado e presente, é que de uma maneira ou de outra, haverá desenvolvimento nos fundamentos teóricos, na composição dos materiais estruturais e nas técnicas construtivas. A consequência direta destes fatos é que as soluções estruturais requererão a avaliação de um número mais elevado de variáveis e haverá uma maior exigência da sociedade para com os engenheiros.

Observando, por exemplo, as construções de aço, percebe-se que grande avanço tecnológico e o surgimento de ligas de aço de alta resistência conduzem ao aparecimento de estruturas mais esbeltas e arrojadas. A evolução do aço nas construções foi marcante após a criação de um forno em 1856, pelo inglês Henry Bessemer, permitindo uma produção do material em larga escala e a substituição gradativa do ferro fundido e do ferro forjado, frequentemente empregados nos componentes estruturais da época (PFEIL, 2008).

A partir daí, diversos sistemas estruturais, tais como pontes, treliças de cobertura e edifícios de múltiplos andares, aproveitaram os benefícios trazidos pelo aço estrutural. A ponte Firth of Forth (Figura 1.3a), construída em 1890 na Escócia, por exemplo, utilizou o aço para estabelecer o recorde mundial de vão livre, da ordem de 521m (PFEIL, 2008).

(a)

(b)

Figura 1.3 – Construções de aço
(FONTE: ALLPOSTERS. Disponível em: <www.allposters.com.br>.
Acesso em: 20 Fev. 2014)

O edifício Home Insurance (Figura 1.3b), localizado na cidade de Chicago, é uma outra importante e histórica construção de aço. Na ocasião, houve uma substituição do sistema estrutural de alvenaria por um pórtico tridimensional metálico, buscando a maior eficiência e leveza garantidas pelo novo material. Muitos historiadores destacam a edificação como um marco na evolução de estruturas de aço em construções de múltiplos andares.

Diante do desenvolvimento experimentado pelas estruturas de aço a partir do século XIX, é possível destacar uma série de benefícios característicos e intrínsecos a esse tipo de construção. Entretanto, é importante ressaltar que existem também inúmeros desafios inerentes ao emprego do aço como, por exemplo, a **não linearidade geométrica**.

O emprego de sistemas estruturais mais esbeltos aumenta a deslocabilidade dos elementos e a sensibilidade da estrutura aos efeitos da não linearidade geométrica, principalmente no caso de edifícios de múltiplos andares. Em outras palavras, a garantia dos níveis adequados de segurança e de um dimensionamento consistente com o comportamento

real dos esforços solicitantes está diretamente relacionada a uma análise estrutural que avalie (ou que pelo menos leve em consideração indiretamente) as condições de equilíbrio da estrutura na sua configuração final ou deformada.

1.2 JUSTIFICATIVA

As justificativas gerais, assim como a real motivação para a realização deste trabalho, estão relacionadas diretamente com os fatos expostos no subtópico anterior. O constante progresso experimentado pela Engenharia traz não apenas uma série de benefícios para toda a sociedade, mas também é acompanhado pelo surgimento de novos e complexos desafios para os engenheiros.

Dessa forma, é salutar que o meio técnico esteja preparado e bem informado sobre as novas tendências. Através de publicações elucidativas sobre o escopo teórico e que possuam, ao mesmo tempo, resultados experimentais consistentes, há um enriquecimento muito grande nas discussões e no nível de informação dos profissionais.

Fazendo uma transição, neste instante, de argumentos justificadores em escala mais abrangente para aqueles mais específicos, pode-se dizer que este trabalho busca tratar do campo de estudo referente à avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica em estruturas de aço por dois motivos. Em primeiro lugar, diversos resultados experimentais constatarem a relevância da consideração das não linearidades geométricas nas estruturas formadas por elementos esbeltos. Em segundo lugar, destaca-se o fato de existirem diferentes métodos que fornecem resultados com maior ou com menor confiabilidade e que visam à determinação dos esforços solicitantes "finais" nos elementos. Entende-se por esforços solicitantes "finais", aqui neste texto, os valores dos esforços solicitantes atuantes na configuração final ou deformada da estrutura.

Nesse contexto, destacam-se duas metodologias de análise disponíveis no meio técnico: aquelas baseadas em **análises aproximadas** e aquelas baseadas em **análises geometricamente exatas**. A proposta da primeira consiste, em sua grande maioria, por desenvolver um estudo do equilíbrio da estrutura na configuração inicial ou indeformada e, em seguida, estimar os esforços solicitantes atuantes na configuração final por meio de coeficientes amplificadores.

Por outro lado, a segunda análise é fundamentada em formulações matemáticas geometricamente exatas, caracterizadas por serem válidas e consistentes para situações de grandes deslocamentos e grandes rotações. É válido ressaltar que a influência da não linearidade geométrica é abordada de maneira direta, sem a necessidade do emprego de coeficientes de majoração e, dessa forma, a metodologia permite a criação de modelos estruturais mais precisos e coerentes com o real comportamento da estrutura.

1.3 OBJETIVOS E METODOLOGIA

O objetivo principal desta dissertação é estabelecer uma comparação entre um dos métodos de análise aproximada – aquele baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , recomendado pela norma brasileira ABNT NBR 8800:2008, referente ao projeto de estruturas de aço e mistas de aço/concreto – e um método baseado em análises geometricamente exatas. O comparativo entre eles é fundamental para que os profissionais estejam embasados, em termos teóricos, sobre a relação entre os valores fornecidos por cada uma das análises e, ainda, sobre possíveis limitações do método aproximado sob linearidade geométrica.

O estudo será desenvolvido a partir da avaliação estrutural de pórticos planos, sujeitos a forças verticais e horizontais, e da construção de gráficos e tabelas contendo os resultados obtidos. É importante destacar que os exemplos discutidos estarão submetidos a carregamentos parametricamente crescentes aplicados sobre os elementos estruturais, permitindo a visualização do comportamento geometricamente não linear numa ampla faixa de sensibilidade aos efeitos da deslocabilidade global. Conforme será visto adiante, a estrutura pode ser classificada, pelo método aproximado supracitado, em mais ou menos susceptível à influência da não linearidade geométrica global a partir do chamado Coeficiente B_2 .

Neste trabalho, a análise estrutural dos pórticos planos será feita a partir de ferramentas computacionais, conforme representado pela Figura 1.4. Os estudos aproximados serão desenvolvidos com o software FTOOL (Two-dimensional Frame Analysis Tool), um programa criado inicialmente através de um projeto de pesquisa sob a coordenação do Professor Marcelo Gattass (PUC-Rio). Posteriormente, foi reescrito pelo Professor Luiz Fernando Martha, entre o final de 1997 e início de 1998, e a partir de sucessivas contribuições e atualizações, foi lançada a versão final em agosto de 2012 (Versão 3.00).

Por outro lado, a análise geometricamente exata será desenvolvida pela ferramenta computacional PEFSYS, baseada em formulações consistentes com situações de grandes deslocamentos e grandes rotações. O PEFSYS é um programa de elementos finitos voltado para análise não linear de estruturas e surgiu a partir do projeto temático da FAPESP intitulado “Análise Não-Linear de Estruturas” (Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica, Escola Politécnica da USP, 1995-1998), sob coordenação do Professor Paulo de Mattos Pimenta. Desde então, vem sendo extensivamente desenvolvido e ampliado pelo Professor Eduardo de Moraes Barreto Campello.

Figura 1.4 – Esquematização das metodologias abordadas

1.4 CONCEITOS FUNDAMENTAIS

Este subtópico propõe definir alguns conceitos e terminologias fundamentais para o perfeito entendimento dos capítulos subsequentes. Além disso, são destacados alguns termos frequentemente utilizados no meio técnico que, na visão do autor, podem gerar uma certa confusão ou interpretação inadequada ao seu respeito.

A **análise estrutural sob linearidade geométrica**, também conhecida na literatura técnica pela expressão "análise estrutural de primeira ordem", é aquela que avalia as condições de equilíbrio dos elementos estruturais na sua posição inicial – que geralmente (mas não necessariamente) é a posição indeformada. A hipótese admitida, nesse caso, é que os deslocamentos e rotações são suficientemente pequenos e logo a configuração final pode ser confundida com a configuração inicial, simplificando enormemente as equações decorrentes. Entretanto, nem sempre essa consideração é satisfatória e, em casos de pórticos sensíveis ao deslocamento lateral, pode conduzir a uma avaliação incorreta e incapaz de reproduzir o real comportamento da estrutura.

A **análise estrutural sob não linearidade geométrica** é aquela onde o equilíbrio da estrutura é imposto na sua posição deformada, isto é, levando em consideração (seja de forma

aproximada ou de forma exata) os deslocamentos, rotações e deformações que a estrutura eventualmente experimenta na posição de equilíbrio. Ela é comumente chamada no meio técnico e nas normas técnicas de “análise estrutural de segunda ordem”, mesmo quando se quer fazer referência à análise exata.

Destaca-se, nos dois parágrafos anteriores, o emprego dos termos **primeira ordem** e **segunda ordem**. Na opinião do autor, ambos devem ser evitados e substituídos pela terminologia “sob linearidade geométrica” e “sob não linearidade geométrica”, respectivamente. Deve-se lembrar, por exemplo, que a expressão “momento de segunda ordem” pode trazer ambiguidade, uma vez que pode designar tanto um esforço solicitante decorrente da “análise estrutural de segunda ordem” quanto uma característica geométrica da seção transversal. Além disso, a “análise estrutural de segunda ordem”, a que se refere o meio técnico, nem sempre é uma análise de ordem 2. Na verdade, pode envolver equações de ordem superior, funções trigonométricas ou, até mesmo, ser uma análise exata, evidenciando a inadequação dessa terminologia. O uso do termo “primeira ordem”, por sua vez, deve ser evitado apenas para que não suscite o termo “segunda ordem”. A presente dissertação evitará, sempre que possível, o uso de ambos.

A **análise estrutural geometricamente exata** é a análise sob não linearidade geométrica que verifica, sem nenhuma aproximação de natureza geométrica (isto é, sem nenhuma restrição quanto à magnitude dos deslocamentos e das rotações), o equilíbrio dos elementos estruturais na configuração deformada. As teorias estruturais em que se baseiam este tipo de análise são geometricamente não lineares e, portanto, adequadas para uma avaliação mais realista acerca dos esforços internos, deslocamentos e rotações da estrutura.

A **análise estrutural elástica linear** é caracterizada por estudar estruturas com comportamento elástico e linear, ou seja, aquelas que não apresentam deformações permanentes após a retirada do carregamento e que podem ser caracterizadas por uma proporcionalidade entre as tensões e as deformações observadas. Normalmente, é conhecida no meio técnico como “análise estrutural sob linearidade física”. Aqui, será adotada a terminologia **análise elástica sob linearidade do material**.

Conceituados os aspectos teóricos fundamentais para uma visão global do trabalho, é relevante que o leitor esteja apto a compreender como o meio técnico aplica os conceitos supracitados na análise elástica da não linearidade geométrica em estruturas de aço. As análises sob linearidade geométrica, por exemplo, são bastante utilizadas nas rotinas dos escritórios de cálculo por serem caracterizadas pelo emprego de teorias lineares, geralmente menos complexas se comparadas às formulações não lineares. Segundo LAVALL (1988),

mesmo para as estruturas mais simples, o emprego de ferramentas computacionais se torna indispensável para as teorias não lineares, pois geralmente processos iterativos são necessários.

Por outro lado, as análises geometricamente exatas são menos comuns para a verificação dos esforços internos e deslocamentos finais nas estruturas, na prática das atividades de projeto. De fato, a utilização de programas computacionais formulados segundo teorias não lineares requerem a atuação de profissionais mais experientes e com fundamentos teóricos mais apurados, além de elevar o custo com a aquisição dos próprios softwares.

Sabendo que os efeitos da não linearidade geométrica podem ser importantes para o cálculo das estruturas aporricadas e que, na prática, o emprego de ferramentas computacionais com formulações geometricamente exatas é bastante restrito, as normas técnicas de diversos países permitem a avaliação dos efeitos da deslocabilidade em edifícios através das análises aproximadas.

O ponto de interrogação para o meio técnico é a definição de um limite confiável, onde os resultados aproximados são suficientemente próximos daqueles obtidos pelas formulações geometricamente exatas e conduzem, portanto, a uma análise estrutural adequada em termos quantitativos e qualitativos.

A resposta, para essas e outras várias perguntas possíveis sobre o assunto, é o foco de diversos autores ao longo dos anos. Segundo Silva (2004), importantes trabalhos relacionados à análise do comportamento geometricamente não linear dos pórticos, com características diversas, foram desenvolvidos a partir da década de 90, como Chen & Zou (1994), Chen & Toma (1994), Chen, Goto e Liew (1996), dentre outros.

1.5 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

O trabalho foi elaborado e subdivido em mais quatro capítulos. De maneira geral, os dois capítulos subsequentes apresentam os aspectos teóricos importantes e que estão diretamente relacionados ao assunto, enquanto que os demais estão voltados para apresentação e discussão dos resultados numéricos.

No **Capítulo 2**, são apresentados alguns métodos aproximados para avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica em estruturas de edifícios. Nesse contexto, destacam-se as metodologias recomendadas pelas normas técnicas brasileiras e baseadas no Coeficiente

γ_z , Parâmetro α e coeficientes B_1 e B_2 . Os dois primeiros são recomendados pela ABNT NBR 6118:2007, referente ao projeto de estruturas de concreto. Por outro lado, o método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 é proposto pela ABNT NBR 8800:2008 e pode ser caracterizado como o mais utilizado nas análises das estruturas de aço. São estudadas, neste capítulo, algumas características básicas de cada um dos métodos como, por exemplo, as vantagens e desvantagens, a fundamentação matemática e exemplos de aplicação.

No **Capítulo 3**, são apresentados alguns aspectos da análise baseada em teorias geometricamente exatas como, por exemplo, trabalhos importantes para o desenvolvimento e consolidação das formulações matemáticas que regem o problema das barras no espaço tridimensional. Dessa forma, observa-se, dentre outros aspectos, que o avanço teórico esbarrou, durante muitos anos, numa falta de conhecimento adequado para retratar as rotações em três dimensões. É válido ressaltar que não é intenção do trabalho aprofundar a complexa descrição cinemática das barras sob não linearidade geométrica, mas sim apresentar ao leitor a aplicação da teoria não linear exata para elementos estruturais de barras.

No **Capítulo 4**, apresenta-se o resultados das análises de uma série de pórticos planos, com diferentes características, para verificar, dentre outros aspectos, o grau de proximidade entre um dos métodos aproximados – aquele baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , utilizado na análise de estruturas de aço – e o método geometricamente exato. Os valores de deslocamentos e de esforços solicitantes são dispostos em figuras e tabelas para facilitar a visualização e interpretação por parte do leitor.

Uma observação importante é que a avaliação da capacidade resistente dos elementos estruturais não será abordada nesta dissertação. Aqui, limita-se ao estudo da deslocabilidade em estruturas aporticadas constituídas de material infinitamente elástico, e seus efeitos sobre os esforços solicitantes.

No **Capítulo 5**, são apresentadas as considerações finais da dissertação e uma análise dos resultados observados para os coeficientes B_1 e B_2 e para o método geometricamente exato. Neste capítulo, serão comparados os valores e observadas as discrepâncias entre os esforços solicitantes finais (Momentos fletores e esforços normais) fornecidos por ambas as metodologias avaliadas.

2. AVALIAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA – MÉTODOS APROXIMADOS

2.1 INTRODUÇÃO

A avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica é um aspecto fundamental na análise dos esforços internos atuantes nas estruturas de aço. Basicamente, existem duas classes de metodologias que propõem levá-los em consideração durante as etapas de cálculo: os **Métodos aproximados** e os **Métodos geometricamente exatos**. A proposta da primeira delas consiste, de maneira geral, na estimativa do comportamento real da estrutura através da amplificação dos esforços solicitantes obtidos numa análise baseada na configuração inicial ou indeformada, ou seja, sob linearidade geométrica. Entretanto, existem métodos aproximados que avaliam os elementos estruturais na configuração deformada de forma aproximada, como é o caso da chamada Análise $P\Delta$.

Por outro lado, a segunda proposta pode ser caracterizada pelo emprego de formulações mais complexas, que avaliam o sistema estrutural sob não linearidade geométrica através de teorias geometricamente exatas. O termo “geometricamente exata” é utilizado para expressar que as formulações matemáticas não possuem qualquer tipo de restrição cinemática, ou seja, são consistentes e adequadas para estruturas sujeitas a condições de grandes deslocamentos e grandes rotações.

Neste capítulo, a abordagem será voltada para as características pertinentes ao emprego dos métodos aproximados, tais como as vantagens e desvantagens, formulações matemáticas e os tipos frequentemente utilizados no meio técnico.

2.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS

O emprego dos métodos aproximados de avaliação da não linearidade geométrica em pórticos apresenta algumas vantagens e desvantagens. Dentre as vantagens, é possível destacar a fundamentação teórica simples e ferramentas computacionais.

A **fundamentação teórica simples**, em primeiro lugar, é um aspecto positivo e favorável ao uso das aproximações. A proposta dessas metodologias é baseada na amplificação dos resultados obtidos em teorias sob linearidade geométrica, que, historicamente, foram desenvolvidas sob hipóteses simplificadoras de pequenos deslocamentos e pequenas rotações. Dessa forma, a vantagem está no fato de que os profissionais envolvidos nos processos de cálculo possuem uma maior afinidade com os conceitos matemáticos, estudados nos cursos de engenharia em nível de graduação.

As **ferramentas computacionais** necessárias para a aplicação dos métodos aproximados, em segundo lugar, são menos complexas e com custo menos elevado, se comparadas aos softwares que abordam teorias não lineares. A aceitabilidade de tais métodos no meio técnico, portanto, é grande.

Em relação às desvantagens, destacam-se: **maior número de etapas de cálculo e limitação da metodologia**.

A primeira desvantagem decorre do fato de que, qualquer que seja o método aproximado, é necessária uma avaliação dos dados obtidos nas análises sob linearidade geométrica. De maneira geral, os esforços são avaliados em todos os níveis dos pavimentos e, posteriormente, a interação dos mesmos com os deslocamentos permite a obtenção dos coeficientes amplificadores. Por outro lado, a análise geometricamente exata fornece diretamente os valores finais dos esforços solicitantes, deslocamentos e rotações, a partir do equilíbrio da estrutura na posição deformada.

Outro aspecto desfavorável diz respeito à limitação da metodologia. Alguns autores, como Leal e Campello (2013) e Franco (1995), através de resultados numéricos, têm identificado que a estimativa do comportamento real das estruturas através dos coeficientes majoradores é satisfatória até determinada sensibilidade do pórtico aos efeitos da não linearidade geométrica.

Dessa forma, caso as análises forneçam resultados subestimados, em relação à análise geometricamente exata, o dimensionamento pode estar embasado numa situação desfavorável à segurança. Por outro lado, caso os valores sejam superestimados, o dimensionamento dos

elementos estruturais pode, a depender da discrepância em relação à análise sob não linearidade geométrica, ser caracterizado como antieconômico.

2.3 RECOMENDAÇÕES NORMATIVAS

Os métodos aproximados representam uma importante ferramenta para os processos de cálculo. Reflexo direto dessa importância é a inclusão e recomendação das metodologias numa série de normas técnicas nacionais e internacionais, tais como: ABNT NBR 8800:2008, ABNT NBR 6118:2007 e ANSI/AISC 360:2005.

A ABNT NBR 8800:2008, por exemplo, explicita a possibilidade de emprego de métodos aproximados no item 4.9.2.2: *“A análise não linear deve ser usada sempre que os deslocamentos afetarem de forma significativa os esforços internos. Essa análise pode ter como base teorias geometricamente exatas, teorias aproximadas ou adaptações a resultados da teoria de primeira ordem”*.

Os procedimentos aproximados propostos pelas normas técnicas apresentam semelhanças e particularidades em suas recomendações. Nesse contexto, destacam-se os seguintes aspectos: (1) classificação da estrutura quanto à deslocabilidade, (2) avaliação da não linearidade geométrica e (3) estimativa dos esforços solicitantes finais.

A **classificação da estrutura quanto à deslocabilidade** é fundamental para avaliar a influência causada pela não linearidade geométrica. A caracterização dos elementos segundo esse critério permite que, em determinadas situações, as análises estruturais possam ser simplificadas e desenvolvidas a partir do equilíbrio na configuração inicial.

As recomendações da ABNT NBR 8800:2008, assim como ANSI/AISC 360:2005, permitem, por exemplo, que o dimensionamento dos elementos possa ser feito com base nos esforços solicitantes fornecidos pela análise sob linearidade geométrica em situações de pequena deslocabilidade, desde que os esforços normais atuantes nos elementos estruturais não excedam 50% da força axial que provoca o escoamento da seção transversal e que os efeitos das imperfeições geométricas sejam levados em consideração. Segundo a ABNT NBR 8800:2008, as estruturas podem ser classificadas como de pequena deslocabilidade quando:

“...a relação entre o deslocamento lateral do andar relativo à base obtido na análise de segunda ordem e aquele obtido na análise de primeira ordem, em todas as combinações últimas de ações estipuladas em 4.7.7.2, for igual ou inferior a 1,1”.

A norma brasileira ABNT NBR 6118:2007, referente ao projeto de estruturas de concreto, faz uma abordagem similar, onde estabelece um coeficiente (chamado de γ_z) para avaliar a influência dos efeitos da deslocabilidade global. Estruturas com pequena sensibilidade aos efeitos citados são classificadas como de “nós fixos” e apresentam o Coeficiente γ_z igual ou inferior a 1,1. Uma particularidade existente nas normas ABNT NBR 8800:2008 e ABNT NBR 6118:2007 se refere à classificação das estruturas. A primeira delas prevê situações de pequena, média e grande deslocabilidade, enquanto a segunda define casos de nós fixos e nós móveis.

A **avaliação da não linearidade geométrica** é desenvolvida de maneira similar pelas normas supracitadas. Nas análises estruturais, seus efeitos são divididos em duas parcelas: efeitos locais e efeitos globais. O efeito local, também conhecido como $P\delta$, é originado pela não retilineidade do eixo das barras e é também comumente chamado de “não linearidade geométrica entre nós”, sendo mais acentuado nos pilares (OLIVEIRA, 2002). A Figura 2.1 apresenta a configuração original e deformada de uma barra submetida a forças axiais e transversais. A interação entre os deslocamentos ao longo do eixo y e o esforço solicitante normal produz o efeito $P\delta$.

Figura 2.1 – Efeito causado pela não retilineidade das barras
(Extraída de AVAKIAN, 2007)

O efeito global, também conhecido como $P\Delta$, é gerado a partir da interação entre os deslocamentos nodais do pórtico e as forças que atuam sobre o mesmo. A Figura 2.2 mostra o deslocamento da extremidade de uma barra vertical sujeita a esforços axiais. Desenvolvendo as equações de equilíbrio da estrutura na configuração deformada, é possível notar a influência da não linearidade geométrica, em termos globais, com o surgimento de um esforço solicitante adicional, indicado pelo momento fletor M_Δ (OLIVEIRA; SILVA, 2008).

A **estimativa dos esforços solicitantes finais** é uma característica intrínseca aos métodos aproximados de avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica. É importante enaltecer a expressão "estimativa", uma vez que as metodologias sugeridas pela ABNT NBR 6118:2007 e pela ABNT NBR 8800:2008 propõem a adoção de análises estruturais menos complexas e que buscam aproximar o comportamento real da estrutura a partir da majoração dos esforços internos, obtidos segundo formulações geometricamente lineares.

A particularidade existente entre as normas brasileiras, nessa etapa de cálculo, se refere ao coeficiente majorador para avaliação dos efeitos $P\Delta$. A norma brasileira de concreto sugere o emprego do Coeficiente γ_z , caracterizado por ser um valor único para todo o pórtico e por ser indicado até determinados limites de deslocabilidade. Por outro lado, as normas brasileira e americana de aço recomendam a utilização do Coeficiente B_2 , caracterizado por estabelecer valores individualizados para cada pavimento do pórtico e por não apresentar nenhuma limitação quanto à sensibilidade da estrutura aos efeitos da não linearidade geométrica.

Nos itens a seguir, serão abordadas as características e formulações matemáticas de três métodos de análise aproximada, descritos pela ABNT NBR 6118:2007 e pela ABNT NBR 8800:2008. Ao final de cada um, será disposto um exemplo numérico de caráter elucidativo.

2.4 MÉTODO BASEADO NO COEFICIENTE γ_z

2.4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O método baseado no Coeficiente γ_z é recomendado pela ABNT NBR 6118:2007 e pode ser caracterizado como uma metodologia aproximada de avaliação da não linearidade geométrica global, ou seja, é responsável por tratar dos efeitos causados pela interação entre os deslocamentos nas extremidades das barras e os esforços axiais atuantes (Efeito $P\Delta$). O

Coeficiente γ_z surgiu com o objetivo de estabelecer um método simples para classificar a estrutura quanto à deslocabilidade, bem como estimar os esforços solicitantes, considerando a não linearidade geométrica, a partir de resultados baseados em formulações geometricamente lineares (CARMO, 1995).

Nesse contexto, a metodologia é definida por duas etapas: classificação da estrutura e estimativa dos esforços solicitantes finais. A **classificação da estrutura**, segundo a ABNT NBR 6118:2007, é fundamental para caracterizar os elementos quanto à sensibilidade aos efeitos da não linearidade geométrica e para indicar se, de forma simplificada, a influência dos mesmos pode ser desprezada.

Os processos aproximados, apresentados em 15.2.2 e 15.2.3, podem ser utilizados para verificar a possibilidade de dispensa da consideração dos esforços globais de 2ª ordem, ou seja, para indicar se a estrutura pode ser classificada como de nós fixos, sem a necessidade de cálculo rigoroso.

São definidos dois tipos de estrutura: estrutura de nós fixos e estrutura de nós móveis. A primeira delas apresenta valores do Coeficiente γ_z inferiores ou iguais a 1,1 e não requer a amplificação dos esforços solicitantes obtidos pela verificação do equilíbrio na configuração inicial ou indeformada. Por outro lado, as estruturas de nós móveis apresentam valores superiores a 1,1, tornando imprescindível a avaliação dos efeitos da deslocabilidade global (ABNT NBR 6118:2007).

Em relação à **estimativa dos esforços finais**, a solução aproximada para avaliação dos efeitos globais $P\Delta$ consiste na majoração dos esforços horizontais por $0,95 \gamma_z$. Em outras palavras, a majoração supracitada provoca um aumento em todos os esforços solicitantes, obtidos na configuração inicial ou indeformada. Vale ressaltar que as recomendações são válidas apenas para estruturas com γ_z inferior a 1,3.

2.4.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS

A metodologia de cálculo baseada no Coeficiente γ_z apresenta algumas vantagens e desvantagens que podem ser preponderantes durante a escolha sobre qual método utilizar. Dentre as vantagens, destaca-se que o procedimento é adequado para classificar a estrutura

quanto à sensibilidade aos efeitos da não linearidade geométrica e para majoração dos resultados obtidos a partir do equilíbrio do pórtico na configuração inicial, além de apresentar um coeficiente amplificador constante (único) para todos os pavimentos do pórtico (LIMA, 2001). É importante destacar que o valor único para todos os pavimentos é vantajoso apenas por simplificar a determinação do coeficiente, mas nem sempre conduz a resultados coerentes com o real comportamento da estrutura, conforme pode ser visto a seguir.

Em relação às desvantagens, as principais características são: (1) limitação de valores máximos, (2) majoração dos esforços normais e cortantes, (3) valor constante para todos os pavimentos e (4) aplicabilidade para modelos com ligações flexíveis.

A **limitação de valores máximos** de deslocabilidade dos nós da estrutura é uma desvantagem por restringir a aplicabilidade da metodologia. Em casos de pórticos com sensibilidade superior aos limites recomendados ($\gamma_z \leq 1,3$), sugere-se aumentar a rigidez dos elementos estruturais ou adotar um procedimento alternativo.

Ainda relacionado à restrição da metodologia, é importante ressaltar que não há, no meio técnico, um consenso sobre o valor máximo a ser utilizado nas análises, como destacado por Lima (2001), Carmo (1995), Oliveira et al. (2013). A faixa dos limites recomendados varia entre 1,2 e 1,3.

A **majoração dos esforços normais e cortantes** é um aspecto negativo relacionado ao método baseado no Coeficiente γ_z . Diversos resultados de pesquisa demonstram que os efeitos da deslocabilidade global em estruturas de edifícios influenciam, de maneira mais acentuada, os momentos fletores (OLIVEIRA et al., 2013).

“Constatou-se que o Coeficiente γ_z deve ser utilizado como majorador dos momentos de primeira ordem (e não das ações horizontais) para obtenção dos momentos finais. No caso da força normal nos pilares e da força cortante nas vigas, a majoração pelo Coeficiente γ_z não se faz necessária, uma vez que, para estes esforços, os valores obtidos em primeira ordem e em segunda ordem são praticamente os mesmos”. (OLIVEIRA et al., 2013)

A majoração das ações horizontais, numa análise sob linearidade geométrica, provoca uma elevação não apenas em relação aos momentos fletores, mas também nos esforços normais e cortantes. Desta forma, o dimensionamento dos elementos pode estar embasado numa situação antieconômica e que não reproduz satisfatoriamente o comportamento real da estrutura aporticada.

Em relação ao **valor único para todos os pavimentos**, estudos, como por exemplo, Oliveira (2007), sugerem que a influência da não linearidade geométrica sofre variação ao

longo da altura da edificação. Neste contexto, o dimensionamento estrutural pode ser desenvolvido a partir de resultados inconsistentes com o real comportamento dos esforços solicitantes internos e que são ora subestimados, ora superestimados.

Por fim, é válido ressaltar os resultados das análises de **modelos com ligações flexíveis**, compostos por aço estrutural, desenvolvidas por Avakian (2007). Segundo o autor, o método baseado no Coeficiente γ_z não se mostrou adequado para tais análises. Fato este que pode reduzir ainda mais a aplicação no campo das estruturas de aço e mista de aço-concreto.

2.4.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA

A formulação matemática do método baseado no Coeficiente γ_z foi desenvolvida a partir da analogia, estudada por Franco e Vasconcelos¹ (1991 apud LIMA, 2001), entre o comportamento dos elementos estruturais, sujeitos aos efeitos da deslocabilidade global, e uma progressão geométrica.

A Figura 2.3 apresenta uma barra em balanço (representando um elemento estrutural ou mesmo a estrutura de um pórtico), cuja configuração inicial é representada pela linha tracejada, sujeito a carregamentos verticais e horizontais. A estrutura adquire, numa primeira iteração, uma configuração deformada e passa a estar submetida a um efeito geometricamente não linear, a partir da interação entre o deslocamento u e a força vertical F_V .

Figura 2.3 – Efeitos da deslocabilidade da estrutura
(Extraída de MONCAYO, 2011)

¹ FRANCO, M.; VASCONCELOS, A.C. **Practical assessment of second order effects in tall buildings**. In: Colóquio on the CEB-FIP MC90. Rio de Janeiro, 1991.

Franco e Vasconcelos (1991 apud LIMA, 2001) observaram que submetendo o elemento estrutural a sucessivas iterações, é possível associar o comportamento dos esforços solicitantes internos e deslocamentos nodais com uma progressão geométrica, conforme descrito na Figura 2.4.

Figura 2.4 – Comportamento geométricamente não linear dos momentos fletores (na seção transversal da base) de um elemento estrutural (Extraída de MONCAYO, 2011)

Neste contexto, é importante destacar dois aspectos: aumento do momento fletor e convergência numérica. A Figura 2.4 retrata, conforme esperado, que o momento fletor na seção da base cresce à medida que se aumenta o número de iterações. De fato, o aumento do número de iterações provoca um crescimento na magnitude dos deslocamentos e torna mais significativa a influência da não linearidade geométrica.

Além disso, a geometria da curva evidencia que os resultados das sucessivas iterações alcançam uma convergência para valores próximos ao momento fletor M , o qual constitui, por sua vez, uma aproximação para o momento fletor correspondente ao equilíbrio na configuração final da estrutura.

O momento fletor final, segundo CEB-1978² (apud MONCAYO, 2011), é descrito como a soma entre o valor obtido em análise sob linearidade geométrica na primeira iteração (M_1) e os acréscimos de valores obtidos pelas sucessivas iterações (ΔM_i), isto é:

$$M = M_1 + \Delta M_1 + \Delta M_2 + \dots + \Delta M_i. \quad (2.1)$$

O comportamento dos momentos fletores pode ser comparado ao de uma progressão geométrica decrescente, cuja convergência é alcançada e depende, basicamente, de duas

² COMITÉ EURO-INTERNACIONAL DO BETÓN (1978). CEB-FIP: **Manual of buckling and instability**. Lancaster, England. The Construction Press. (Bulletin D'Information, n.123)

informações: momento fletor da primeira iteração (configuração inicial) e razão da progressão geométrica. Para a razão, escreve-se:

$$r = \frac{\Delta M_1}{M_1} = \frac{\Delta M_2}{\Delta M_1} = \dots = \frac{\Delta M_i}{\Delta M_{i-1}} \rightarrow \Delta M_i = \Delta M_{i-1} \cdot r. \quad (2.2)$$

Diante da expressão exposta, o momento final pode ser descrito por:

$$M = M_1 + M_1 \cdot r + M_1 \cdot r^2 + \dots + M_1 \cdot r^i \quad (2.3)$$

$$M = (1 + r + r^2 + \dots + r^i) \cdot M_1. \quad (2.4)$$

As equações acima são importantes para a formulação do Coeficiente γ_z por relacionarem os esforços finais atuantes na estrutura com resultados obtidos a partir do equilíbrio na configuração inicial ou indeformada. O termo destacado entre parênteses na Equação (2.4) é a soma das parcelas de uma progressão geométrica infinita de razão r , cujo valor é de simples obtenção e bastante conhecido, de modo que pode-se escrever:

$$M = \frac{1}{1 - \Delta M / M_1} \cdot M_1 = \frac{1}{1 - \Delta M_{tot, d} / M_{1, tot, d}} \cdot M_1 \quad (2.5)$$

$$M = \frac{1}{1 - \Delta M_{tot, d} / M_{1, tot, d}} \cdot M_1 = \gamma_z \cdot M_1, \quad (2.6)$$

onde, segundo nomenclatura adotada pela ABNT NBR 6118:2007, tem-se:

- $\Delta M_{d, tot}$ é a soma dos produtos de todas as forças verticais atuantes na estrutura, na combinação considerada, com seus valores de cálculo, pelos deslocamentos horizontais de seus respectivos pontos de aplicação, obtidos em análise sob linearidade geométrica.
- $M_{1, d, tot}$ é o momento de tombamento, ou seja, a soma dos momentos de todas as forças horizontais da combinação considerada, com seus valores de cálculo, em relação à base da estrutura.

O cálculo do momento de tombamento e do momento final deve ser efetuado a partir da consideração do Estado Limite Último (ELU), ou seja, requer a aplicação dos coeficientes de

majoração das ações atuantes. Além disso, os valores dos deslocamentos horizontais devem ser determinados a partir dos valores de cálculo das ações solicitantes do vento. Dessa forma, é possível o termo $\Delta M_{tot,d}$ pela Equação (2.7):

$$\Delta M_{tot,d} = \sum_{i=1}^n \left(\gamma_f \cdot P_{gi} + \gamma_f \cdot P_{qli} + \psi_0 \cdot \gamma_f \cdot P_{q2i} \right) \cdot \delta_{hi}, \quad (2.7)$$

onde:

i – número do pavimento considerado;

n – número total de pavimentos do edifício;

P_{gi} – resultante vertical do carregamento permanente no pavimento i ;

γ_f – coeficiente de majoração dos carregamentos no estado limite último;

ψ_0 – fator de redução de combinação para ELU para ações variáveis secundárias;

P_{qli} – resultante vertical da ação variável principal no pavimento i ;

P_{q2i} – resultante vertical da ação variável secundária no pavimento i ;

δ_{hi} – deslocamento horizontal do pavimento i ;

2.4.4 NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA LOCAL

A metodologia de amplificação de esforços solicitantes embasada no Coeficiente γ_z avalia apenas os efeitos da deslocabilidade global (Efeito $P\Delta$). A não linearidade geométrica local (Efeito $P\delta$), originada pela não retilineidade das barras, não é abordada pelo método.

É importante ressaltar que a norma ABNT NBR 6118:2007 recomenda a verificação dos efeitos locais de duas formas distintas: método geral e método aproximado. O primeiro deles prevê o emprego de uma análise geometricamente não linear sobre as barras sujeitas à flexocompressão normal. Por outro lado, são sugeridos alguns métodos aproximados bastante específicos para as estruturas de concreto como, por exemplo, o "Método do pilar padrão com rigidez κ aproximada" aplicado para pilares de seção retangular constante.

2.4.5 EXEMPLO: CÁLCULO DE γ_z

A Figura 2.5 mostra um pórtico plano com vão único e quatro pavimentos, sujeito à ação concomitante de forças externas verticais, uniformemente distribuídas, e forças externas horizontais. A estrutura é constituída por vigas (perfis W460x52,0) e pilares (perfis W200x46,1) de aço, cujo módulo de elasticidade é igual a 200 GPa. A vinculação dos apoios, idealizada para o exemplo, impõe restrições apenas quanto às translações nas direções vertical e horizontal (base dos pilares P1 e P2).

O programa de cálculo usado para a obtenção dos esforços solicitantes e dos deslocamentos do pórtico sob linearidade geométrica é o FTOOL. Alguns critérios foram determinantes para a idealização do exemplo de cálculo dos esforços solicitantes finais, considerando os efeitos da deslocabilidade global: valor máximo do Coeficiente γ_z , tensão máxima e o número de pavimentos.

O pórtico descrito na Figura 2.5 é classificado como estrutura de nós móveis e atende as recomendações da norma brasileira ABNT NBR 6118:2007 no que se refere ao valor máximo do Coeficiente γ_z ($\gamma_z \leq 1,30$) e ao número mínimo de 4 (quatro) pavimentos para aplicação da metodologia aproximada.

Em relação ao nível de tensões atuantes na seção transversal, percebe-se que todos os elementos estruturais estão em regime elástico, ou seja, as regiões mais solicitadas apresentam tensão normal inferior à tensão limite de escoamento do aço (no caso, $f_y = 345\text{MPa}$).

Figura 2.5 – Dimensões, carregamentos e momentos fletores atuantes no pórtico de quatro pavimentos (Cálculo de γ_z)

Tabela 2.1 – Características geométricas, forças externas atuantes, deslocamentos e efeitos da deslocabilidade global (Cálculo de γ_z)

Pavimento	h_i [cm]	H_{vi} [kN]	P_i [kN]	δ_{hi} [cm]	$M_{1,tot,d}$ [kN.m]	$\Delta M_{tot,d}$ [kN.m]
1	300,00	7,00	672,00	2,16	21,00	14,54
2	600,00	7,00	504,00	2,98	42,00	15,03
3	900,00	7,00	336,00	3,49	63,00	11,71
4	1200,00	7,00	168,00	3,70	84,00	6,21
Σ					210,00	47,49

A Tabela 2.1 resume algumas características referentes ao pórtico estudado. É importante destacar que a notação " P_i " é utilizada para representar a resultante vertical dos carregamentos atuantes no pavimento i . Em outras palavras, o carregamento é igual a soma entre resultante vertical da ação permanente (P_{gi}) e a resultante vertical da ação variável principal e secundária (P_{qli} , P_{q2i}).

O momento $M_{1,d,tot}$, também conhecido por momento de tombamento, é causado pelas forças horizontais (H_{vi}) e pode ser obtido pelo produto descrito na Equação (2.8):

$$M_{1,tot,d} = \Sigma H_{vi} \cdot h_i, \quad (2.8)$$

onde h_i é a distância entre a base do edifício e o ponto de aplicação da força H_{vi} . Note que estas variáveis que determinam o momento de tombamento estão detalhadas na segunda e na terceira coluna da Tabela 2.1.

$$M_{1,tot,d} = H_{v1} \cdot h_1 + H_{v2} \cdot h_2 + H_{v3} \cdot h_3 + H_{v4} \cdot h_4$$

$$M_{1,tot,d} = (7.0) \cdot (3.0) + (7.0) \cdot (6.0) + (7.0) \cdot (9.0) + (7.0) \cdot (12.0) = 210.0 \text{ kN.m}$$

O termo $\Delta M_{d,tot}$, destacado na última coluna da Tabela 2.1, é obtido pelo produto entre a força vertical total de cálculo (P_i) e o deslocamento horizontal (δ_{hi}) determinados para cada pavimento, conforme a Equação (2.9):

$$\Delta M_{tot,d} = P_i \cdot \delta_{hi}. \quad (2.9)$$

$$\Delta M_{\text{tot,d}} = P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + P_3 \cdot \delta_3 + P_4 \cdot \delta_4$$

$$\Delta M_{\text{tot,d}} = P_1 \cdot \delta_1 + P_2 \cdot \delta_2 + P_3 \cdot \delta_3 + P_4 \cdot \delta_4$$

$$\Delta M_{\text{tot,d}} = [(672,00) \cdot (2,16) + (504,00) \cdot (2,98) + (336,00) \cdot (3,49) + (168,00) \cdot (3,70)] \times 10^{-2}$$

$$\Delta M_{\text{tot,d}} \cong 47,48 \text{ kN.m}$$

$$\gamma_z = \frac{1}{1 - (47,48 / 210,00)} \cong 1,29$$

A avaliação do Coeficiente γ_z permite afirmar que a consideração dos efeitos da deslocabilidade global são importantes, uma vez que a estrutura é classificada como de "nós móveis" ($\gamma_z \geq 1,1$). Desta forma, os resultados dos esforços solicitantes finais são determinados pela majoração das forças horizontais H_{vi} por um valor $0,95 \gamma_z$ (Figura).

Figura 2.6 – Dimensões, carregamentos e momentos fletores atuantes no pórtico de quatro pavimentos (Amplificado pelo coeficiente $0,95 \gamma_z$)

2.5 MÉTODO BASEADO NOS COEFICIENTES B_1 e B_2

2.5.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O método baseado nos Coeficientes B_1 e B_2 é recomendado pela ABNT NBR 8800:2008 para a avaliação estrutural da influência causada pela não linearidade geométrica local (Efeito $P\delta$) e global (Efeito $P\Delta$).

A amplificação dos esforços solicitantes obtidos em análise sob linearidade geométrica tem despertado o interesse de diversos pesquisadores desde o início da década de 60 (LeMESSURIER, 1976). Nesse contexto, Chen e Goto (1987) destacam alguns trabalhos, cuja proposta de avaliação do comportamento estrutural geometricamente não linear se assemelha à filosofia adotada pelos coeficientes B_1 e B_2 , conforme pode ser visto no parágrafo seguinte:

There are several other methods (Chen and Zhou 1987; Cheong-Siat-Moy 1972; LeMessurier 1976, 1977; Lu 1983; Nixon, et. al 1975; Stevens 1967; Yura 1971) available for second-order analysis based on approximately the same philosophy as the B_1 and B_2 factor analysis in the LRFD specification. However, these methods do not always give a satisfactory result even for design purposes because they are highly approximate in nature and their application is mostly limited to rectangular frames with rigid connections as well as to those with small displacements.

A metodologia embasada nos coeficientes B_1 e B_2 é caracterizada pela construção e superposição de efeitos de dois modelos estruturais para o estudo dos efeitos da deslocabilidade: **estrutura nt** e **estrutura lt** (Figura 2.7).

Figura 2.7 – Modelos de cálculo idealizados para determinação dos Coeficientes B_1 e B_2

A Figura 2.7 apresenta os modelos de cálculo para a determinação dos Coeficientes B_1 e B_2 . Em (a), a estrutura real é submetida a carregamentos verticais e horizontais. Em (b), a estrutura *nt* é caracterizada por apresentar em todos os pavimentos restrições nodais fictícias à movimentação horizontal, permitindo contudo que os efeitos locais $P\delta$ se manifestem, sendo estimados por meio do Coeficiente B_1 . Em (c), a estrutura *lt* está sujeita unicamente à ação das forças horizontais reativas que aparecem nas restrições fictícias da estrutura *nt* (obtidas a partir do estabelecimento das condições de equilíbrio na Figura 2.7 (b)). A estrutura *lt* permite estudar isoladamente a influência dos efeitos globais $P\Delta$, através do cálculo do Coeficiente B_2 . As designações “*nt*” e “*lt*” têm origem nas terminologias em inglês *no translation* e *lateral translation*, utilizadas no meio técnico internacional.

O método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 consiste no desenvolvimento de duas etapas fundamentais: **classificação da estrutura** e **amplificação dos esforços solicitantes**. Em relação à classificação, a ABNT NBR 8800:2008 indica que a estrutura pode ser caracterizada, através do Coeficiente B_2 , em três categorias: pequena deslocabilidade ($B_2 \leq 1,1$), média deslocabilidade ($1,1 < B_2 \leq 1,4$) e grande deslocabilidade ($B_2 > 1,4$)

Em relação à amplificação dos esforços solicitantes, é importante avaliar o comportamento real de cada um dos esforços internos. Baseada em recomendações e estudos de diversos pesquisadores, a ABNT NBR 8800:2008 sugere que os efeitos globais $P\Delta$ sejam levados em consideração na avaliação dos momentos fletores e dos esforços normais. Além disso, sugere que se considere ainda a influência que o efeito local $P\delta$, causado pela não retilinearidade dos elementos, exerce sobre os momentos fletores. Nesse contexto, é possível escrever os esforços solicitantes finais, fornecidos pela análise sob linearidade geométrica, como:

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} \quad (2.10)$$

$$N_{sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt} \quad (2.11)$$

$$V_{sd} = V_{nt} + V_{lt}, \quad (2.12)$$

onde:

M_{sd} , N_{sd} e V_{sd} : Esforços solicitantes de cálculo;

M_{nt} , N_{nt} e V_{nt} : Esforços solicitantes de cálculo fornecidos pela análise sob linearidade geométrica da estrutura *nt*;

M_{lt} , N_{lt} e V_{lt} : Esforços solicitantes de cálculo fornecidos pela análise sob linearidade geométrica da estrutura lt ;

Note que, conforme explicitado nas equações 2.10, 2.11 e 2.12, o efeito local da não linearidade geométrica local, retratado pelo Coeficiente B_1 , influencia apenas os momentos fletores. Já o efeito da não linearidade geométrica global, reproduzido pelo Coeficiente B_2 , produz uma amplificação dos momentos fletores e esforços normais.

2.5.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS

Assim como diversos outros métodos de avaliação dos efeitos da deslocabilidade, o emprego dos coeficientes B_1 e B_2 oferece algumas vantagens e desvantagens. Nesse contexto, serão enfatizadas os mesmos aspectos abordados para a metodologia baseada no Coeficiente γ_z .

No subtópico 2.4.2, foram abordados aspectos negativos relacionados ao emprego do Coeficiente γ_z , principalmente, no que se refere à limitação de valores máximos, à majoração dos esforços normais e cortantes e ao fato de o mesmo apresentar um valor único para todo o pórtico em consideração.

Observando as recomendações da ABNT NBR 8800:2008, é possível dizer que tais desvantagens não estão presentes no método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 . De fato, o coeficiente B_2 estabelece uma avaliação mais realista dos efeitos da não linearidade geométrica, posto que apresenta valores individualizados para cada pavimento do pórtico em análise.

Em relação à majoração dos esforços cortantes, conforme já dito anteriormente, não seria realista considerar uma elevação em tais esforços internos, uma vez que a não linearidade geométrica não exerce influência significativa sobre os mesmos (OLIVEIRA et al., 2013). A metodologia baseada nos coeficientes B_1 e B_2 recomenda que os esforços cortantes adotados para o dimensionamento dos elementos estruturais sejam aqueles fornecidos pela análise do pórtico na sua configuração inicial ou indeformada (estrutura (a) da Figura 2.7).

A **desvantagem** vista no emprego dos coeficientes B_1 e B_2 refere-se ao fato de a metodologia ser um pouco trabalhosa, uma vez que envolve a análise de duas estruturas

distintas (estruturas nt e lt), e uma vez que o coeficiente amplificador B_2 é calculado para cada um dos pavimentos do pórtico.

A outra desvantagem, evidente mas quase sempre despercebida pela comunidade técnica, é que o método é baseado na superposição de efeitos (vide Figura 2.7 e equações (2.10) a (2.12)), e logo só fornece resultados confiáveis (no caso geral) se os deslocamentos e as rotações da estrutura lt forem pequenos ou suficientemente moderados. Assim, embora não exista na literatura e nem nas recomendações normativas um valor limite (superior) para B_2 , sua utilização como coeficiente majorador deve ser feita com cautela, sobretudo em estruturas de grande deslocabilidade.

2.5.3 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA - COEFICIENTE B_1

O Coeficiente B_1 é responsável pela avaliação da não linearidade geométrica causada pela não retilineidade dos elementos estruturais. Em outras palavras, o coeficiente tem a função de consideração da influência produzida pelo efeito $P\delta$ na amplificação dos momentos fletores.

Nesse sentido, as formulações desenvolvidas para a análise de estruturas aporticadas podem ser compreendidas a partir do trabalho de Chen e Wang (1999). A Figura 2.8 retrata uma viga submetida à ação de momentos e esforços axiais, aplicados nas extremidades da barra. Observa-se que a interação entre os deslocamentos transversais δ ao eixo da barra e os esforços horizontais provoca uma elevação nos valores do diagrama de momentos fletores por um valor $P\delta$.

Figura 2.8 – Efeito $P\delta$
(Extraída de CHEN; WANG, 1999)

A análise dos elementos estruturais inseridos nos pórticos e da influência causada pela não linearidade geométrica local é então desenvolvida sob dois aspectos: identificação das condições de contorno e da forma como o carregamento é aplicado sobre o elementos de barra. Nas estruturas aporticadas, podem ser destacadas 3 (três) situações bastante usuais, envolvendo barras sujeitas à flexão composta: **carregamento uniformemente distribuído, força concentrada ou momento concentrado nas extremidades**.

Aqui nesta dissertação, será apresentada a formulação matemática para barras sujeitas à flexão composta com momentos concentrados aplicados nas extremidades. O desenvolvimento das equações, embora seja trabalhoso, é importante para estabelecer uma comparação com o procedimento proposto pela ABNT NBR 8800:2008. A norma brasileira de aço sugere, simplificada, o emprego de apenas uma equação, caracterizada por contemplar os diferentes tipos de carregamentos que podem atuar sobre os elementos estruturais.

2.5.3.1 BARRAS SUJEITAS À FLEXÃO COMPOSTA – MOMENTO CONCENTRADO NAS EXTREMIDADES

A Figura 2.9 retrata um elemento estrutural sujeito à ação de momentos e esforços axiais de compressão nas extremidades. Em (a), a situação é caracterizada pela aplicação de momentos nas extremidades provocando uma curvatura reversa na barra. Em (b), os momentos solicitam a barra em sentidos opostos e a mesma fica sujeita a uma situação de curvatura simples.

Figura 2.9 – Barra sujeita à flexão composta – momento concentrado
(Adaptada de CHEN; LUI, 1987)

As equações a seguir serão demonstradas para o caso da curvatura reversa, onde o momento M_B apresenta maior valor em módulo. Entretanto, os mesmos conceitos aplicados podem ser utilizados para determinação da amplificação dos momentos fletores para o caso da curvatura simples. Considerando as grandezas apresentadas na Figura 2.9, e sendo EI o produto de rigidez à flexão da barra, pode-se escrever:

$$M = M_A + Py - \frac{M_A + M_B}{L} x \quad (2.13)$$

$$EI y'' + Py = \frac{M_A + M_B}{L} x - M_A \quad \text{para } x \in [0, L] \quad (2.14)$$

$$y'' + k^2 y = \frac{M_A + M_B}{EIL} x - \frac{M_A}{EI} \quad \text{para } x \in [0, L]. \quad (2.15)$$

Sendo $k = \sqrt{P/EI}$, a resolução da equação diferencial (Equação 2.15) permite a obtenção do momento fletor máximo, levando em consideração os efeitos causados pela interação entre o deslocamento e a força axial P , dado por:

$$M_{máx} = -M_B \left[\sqrt{\left(\frac{M_A}{M_B} \right)^2 + 2 \left(\frac{M_A}{M_B} \right) \cos kL + 1} / \sin^2 kL \right]. \quad (2.16)$$

Na convenção adotada, o sinal negativo que antecede o momento externo M_B significa que a região superior do elemento estrutural está tracionada. (CHEN; LUI, 1987)

É importante ressaltar alguns aspectos relacionados à amplificação dos momentos fletores. O termo destacado entre colchetes (Equação 2.16) é o coeficiente de amplificação, aplicável aos esforços solicitantes obtidos na análise sob linearidade geométrica. Dessa forma, fica evidente que o esforço solicitante máximo é dependente de duas variáveis: força normal atuante e razão entre os momentos das extremidades.

A Equação 2.16, demonstrada anteriormente para elementos de barras sujeitos à ação de momentos nas extremidades, pode ser simplificada pelo conceito do momento equivalente. A proposta da adoção do momento equivalente visa a substituir o carregamento original por outro equivalente, caracterizado por submeter o elemento estrutural à ação de momentos de mesma intensidade em ambas as extremidades. (SALMON; JOHNSON, 1997)

Figura 2.10 – Conceito do Momento Equivalente
(Extraída de CHEN; LUI, 1987)

A Figura 2.10 representa graficamente as duas situações, cujos momentos M_A e M_B são substituídos por um momento equivalente M_{eq} . Note que a equivalência entre ambas é determinada pela intensidade do momento fletor máximo, conforme pode ser visto a partir das equações 2.16 a 2.20:

$$M_{m\acute{a}x} = M_B \left[\sqrt{\left[\left(M_A / M_B \right)^2 + 2 \left(M_A / M_B \right) \cos kL + 1 \right] / \sin^2 kL} \right] \quad (2.17)$$

$$M_{m\acute{a}x} = M_{eq} \left[\sqrt{2(1 - \cos kL) / \sin^2 kL} \right] \quad (2.18)$$

$$M_{eq} = M_B \left[\sqrt{\left[\left(M_A / M_B \right)^2 + 2 \left(M_A / M_B \right) \cos kL + 1 \right] / [2(1 - \cos kL)]} \right] \quad (2.19)$$

$$M_{eq} = M_B [C_m], \quad (2.20)$$

onde o termo C_m é o chamado fator de equivalência de momentos e o valor teórico é obtido igualando as equações 2.19 e 2.20, anteriormente descritas para o momento fletor $M_{m\acute{a}x}$.

2.5.3.2 PRESCRIÇÃO DA ABNT NBR 8800:2008

O Coeficiente B_1 é definido pela ABNT NBR 8800:2008 para estimar os efeitos da não linearidade geométrica local e é escrito em função de três variáveis: (a) coeficiente C_m , (b) força normal atuante N_{sd1} e (c) força normal crítica de Euler N_e , conforme descrito a seguir:

$$B_1 = \frac{C_m}{1 - N_{sd1} / N_e} \quad (2.21)$$

$$C_m = 0,6 - 0,4.M_1 / M_2. \quad (2.22)$$

Conforme discutido no item 2.5.1, o Coeficiente B_1 deve ser multiplicado aos momentos fletores obtidos pela estrutura nt , ou seja, aquela que apresenta restrições aos deslocamentos horizontais no nível dos pavimentos. Dessa forma, é possível avaliar o efeito $P\delta$, causado pela não retilineidade dos elementos estruturais na configuração deformada.

O Coeficiente C_m , descrito pela Equação (2.22) é empregado na definição do momento equivalente, conforme discutido no item 2.5.3.1. Se houver carregamentos transversalmente aplicados em relação ao eixo dos elementos estruturais, pode ser adotado, conservadoramente, o valor unitário.

A avaliação do coeficiente é simplificada e desconsidera a influência das forças axiais. De fato, é mostrado na Equação (2.22) que C_m está relacionado apenas à razão entre os momentos atuantes nas extremidades das barras, onde $M_1/M_2 \leq 1$. Alguns trabalhos, como Chen e Wang (1999), demonstram que esta premissa pode gerar um distanciamento entre a solução real e a solução aproximada e ser incapaz de prever o efeito $P\delta$ corretamente, principalmente quando os esforços normais excedem $0,5N_e$.

É válido ressaltar que a proposta da ABNT NBR 8800:2008 não é única. Algumas outras relações foram desenvolvidas, com a intenção de eliminar a dependência do coeficiente C_m com os esforços normais, como, por exemplo, a proposta de Massonet (CHEN; LUI, 1987), dada por:

$$C_m = \sqrt{0,3(M_A / M_B)^2 - 0,4(M_A / M_B) + 0,3}. \quad (2.23)$$

2.5.4 FORMULAÇÃO MATEMÁTICA - COEFICIENTE B_2

O Coeficiente B_2 é caracterizado por avaliar a influência da não linearidade geométrica global, causada pela interação entre os esforços externos e os deslocamentos nodais observados nas extremidades das barras.

A formulação do Coeficiente B_2 pode ser desenvolvida a partir da verificação das condições de equilíbrio em duas situações: configuração inicial e configuração final.

Figura 2.11 – Influência da não linearidade geométrica global
(Extraída de SILVA, 2004)

A Figura 2.11 retrata as forças internas atuantes em ambas as situações. Em 2.11 (a), os esforços solicitantes são obtidos pelo equilíbrio da estrutura na configuração inicial, sob linearidade geométrica. Em 2.11 (b), a estrutura é avaliada na configuração final ou deformada e os momentos fletores solicitantes consideram a não linearidade de forma aproximada pela amplificação, através do Coeficiente B_2 , dos resultados obtidos na configuração inicial. A partir das características descritas na Figura 2.11, é possível determinar escrever:

$$M_{lt1} + M_{lt2} = \sum H_{sd} \times L \quad (2.24)$$

$$B_2 \times (M_{lt1} + M_{lt2}) = \sum H_{sd} \times L + \sum N_{sd} \times \Delta_2, \quad (2.25)$$

onde os momentos M_{lt1} e M_{lt2} são obtidos em análise sob linearidade geométrica. O índice lt significa “lateral translation” ou “deslocável lateralmente”.

As equações acima permitem que seja encontrada um equação similar àquela que é recomendada pela ABNT NBR 8800:2008. Para isto, é preciso isolar o Coeficiente B_2 e substituir a Equação (2.24) em (2.25):

$$B_2 = \frac{\sum H_{sd} \times L + \sum N_{sd} \times \Delta_2}{\sum H_{sd} \times L}. \quad (2.26)$$

Note que a Equação (2.26) ainda relaciona o Coeficiente B_2 com o deslocamento Δ_2 , que, a princípio, só pode ser conhecido por meio de análise sob não linearidade geométrica. A

estratégia adotada por Salmon e Johnson (1997) para evitar tal análise consiste na definição de (a) uma força horizontal equivalente e (b) um fator de proporcionalidade entre os deslocamentos laterais e o carregamento horizontal de cálculo. A força equivalente pode ser descrita pela Equação (2.27), dada por:

$$H_{equiv} = \sum H_{sd} + \frac{\sum N_{sd} \times \Delta_2}{L}. \quad (2.27)$$

Os deslocamentos laterais Δ_1 e Δ_2 , descritos na Figura 2.11, podem ser caracterizados como o deslocamento inicial (obtido em análise sob linearidade geométrica) e o deslocamento final (considerando os efeitos da não linearidade geométrica), respectivamente. É possível reescrevê-los em função de um coeficiente φ , por meio das equações (2.28) e (2.29), como:

$$\Delta_1 = \varphi \sum H_{sd} \quad (2.28)$$

$$\Delta_2 = \varphi \left(\sum H_{sd} + \frac{\sum N_{sd} \times \Delta_2}{L} \right), \quad (2.29)$$

onde o coeficiente φ é um fator de proporcionalidade entre os deslocamentos laterais e o carregamento horizontal de cálculo. Note-se que o mesmo φ é adotado para Δ_1 e Δ_2 , o que só pode ser corretamente justificado em casos de pequenos deslocamentos e pequenas rotações – o que, contudo, está em consonância com a origem da abordagem, que assume que a superposição de efeitos é válida, conforme indicado na Figura 2.7. Essa restrição, embora evidente, é muitas vezes esquecida ou ignorada pelo meio técnico.

Em seguida, pode-se estabelecer uma relação entre os deslocamentos Δ_2 / Δ_1 , por meio da substituição da Equação (2.28) em (2.29), e definir o Coeficiente B_2 (Equação (2.31)), conforme descrito a seguir:

$$\Delta_2 = \Delta_1 + \frac{\Delta_1 \times \sum N_{sd} \times \Delta_2}{\sum H_{sd} \times L} = \frac{\Delta_1}{1 - \frac{\Delta_1}{L} \frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}}} \quad (2.30)$$

$$B_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta_1} = \frac{1}{1 - \frac{\Delta_1}{L} \frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}}}. \quad (2.31)$$

2.5.4.1 PRESCRIÇÃO DA ABNT NBR 8800:2008

O Coeficiente B_2 é utilizado pela ABNT NBR 8800:2008, conforme dito anteriormente, na avaliação dos efeitos exercidos pela deslocabilidade global sobre os elementos estruturais e é escrito para cada pavimento de um pórtico em função de cinco variáveis, descritas pela Equação (2.32):

$$B_2 = \frac{1}{1 - \frac{1}{R_s} \frac{\Delta_h}{h} \frac{\sum N_{sd}}{\sum H_{sd}}}, \quad (2.32)$$

onde:

$\sum N_{sd}$ é a carregamento vertical total que atua no pavimento;

R_s é um coeficiente de ajuste que depende das características do sistema resistente às ações horizontais;

Δ_h é o deslocamento horizontal relativo entre a base e o topo do pavimento;

$\sum H_{sd}$ é o carregamento horizontal total que atua no pavimento (ou, equivalentemente, a força cortante no pavimento);

h é a altura do pavimento considerado;

O coeficiente de ajuste R_s , para estruturas formadas por pórticos onde a estabilidade lateral é garantida pela rigidez à flexão das barras e pela capacidade de momentos das ligações, deve ser considerado com o valor de 0,85. Por outro lado, para os demais sistemas estruturais pode ser tomado como $R_s=1,0$ (ABNT NBR8800:2008).

Quanto ao deslocamento horizontal relativo do pavimento, a ABNT NBR 8800:2008 recomenda que, nos casos em que Δ_h possui valores diferentes ao longo do pavimento, seja adotado o maior deles.

A força cortante no pavimento, retratada pelo termo $\sum H_{sd}$, é produzida pelas forças horizontais atuantes e é aquela utilizada para a determinação dos deslocamentos horizontais na estrutura original ou na estrutura lt . (ABNT NBR 8800:2008).

2.5.5 EXEMPLO: CÁLCULO DOS COEFICIENTES B_1 e B_2

A Figura 2.12 representa uma estrutura aporticada plana com vão único e dois pavimentos, submetida à ação de carregamentos uniformemente distribuídos e forças horizontais. As vigas são compostas por perfis W310x28,3 e os pilares são compostos por perfis W150x22,5. O material é do tipo aço estrutural de baixa liga ASTM A572 Gr.50, cujo módulo de elasticidade é igual a 200 GPa e tensão limite de escoamento é $f_y = 345$ MPa. Os apoios, localizados na base dos pilares P1 e P2, impõem restrições apenas quanto às translações nas direções vertical e horizontal. Os elementos estruturais foram dispostos de forma que o eixo de flexão seja o de maior inércia.

Figura 2.12 – Estrutura real, estrutura *nt* e estrutura *lt* (Cálculo de B_2)

O critério adotado para a definição das características do pórtico foi o de limitar o valor máximo para as tensões normais atuantes nos elementos estruturais, de modo que os mesmos trabalhem sempre no regime elástico do aço. Note que, diferentemente do cálculo do γ_z , não é preciso definir um número mínimo de pavimentos, nem um valor máximo do coeficiente de amplificação.

O Coeficiente B_1 varia em função das características geométricas, dos esforços normais e momentos fletores atuantes em cada uma das barras do pórtico. A determinação das forças internas perpassa pela análise dos diagramas de momentos fletores e esforços normais, referentes à estrutura *nt* e apresentados na Figura 2.13.

Figura 2.13 – Diagrama de momentos fletores e esforços normais – Análise sob linearidade geométrica da estrutura *nt*

Tabela 2.2 – Características geométricas, esforços internos atuantes e efeitos da não linearidade geométrica local (Cálculo de B_1)

Elemento	N_{sdi} [kN]	M_1 [kN.m]	M_2 [kN.m]	C_m	N_z [kN]	B_1 [CALCULADO]	B_1 [ADOTADO]
Pilar P1	80,00	0,00	4,90	0,60	2695,50	0,62	1,00
Pilar P2	80,00	0,00	4,90	0,60	2695,50	0,62	1,00
Pilar P3	40,00	10,80	11,90	0,24	2695,50	0,24	1,00
Pilar P4	40,00	10,90	12,00	0,24	2695,50	0,24	1,00
Viga V1	6,10	-	-	1,00	6785,35	1,00	1,00
Viga V2	19,60	-	-	1,00	6785,35	1,00	1,00

A Tabela 2.2 apresenta os esforços internos atuantes nas vigas e pilares. Os dados contidos nas colunas 2, 3 e 4 foram extraídos da Figura 2.13 (análise da estrutura *nt* sob linearidade geométrica).

Vale destacar que, em decorrência do carregamento transversalmente aplicado, o coeficiente C_m das vigas é igual ao valor unitário. Por fim, vale um último comentário sobre a influência da não linearidade geométrica local para o pórtico deste exemplo. Note que os pequenos valores de esforços normais, se comparados com força crítica de flambagem elástica, resultam em pequenos efeitos $P\delta$.

Em relação ao Coeficiente B_2 , sabe-se que a definição do valor é feita para cada pavimento e depende do deslocamento horizontal relativo do pavimento considerado (Δh_i), da altura do pavimento (h_i), e das forças horizontal (H_{sdi}) e vertical (N_{sdi}) atuantes no pavimento.

Tabela 2.3 – Características geométricas, forças externas atuantes, deslocamentos e efeitos da deslocabilidade global (Cálculo de B_2)

Pavimento	H_i [cm]	H_{sdi} [kN]	N_{sdi} [kN]	δ_{hi} [cm]	Δh_i [cm]	Coeficiente B_2	CLASSIFICAÇÃO
1	300,00	24,00	160,00	5,20	5,20	1,16	Média deslocabilidade
2	300,00	12,00	80,00	6,27	1,06	1,03	Pequena deslocabilidade

A Tabela 2.3 apresenta as características pertinentes para o cálculo do Coeficiente B_2 , referente ao pórtico da Figura 2.12. Vale ressaltar que o deslocamento horizontal observado em cada pavimento, representado por " δ_{hi} ", não aparece diretamente no cálculo, mas é necessário para a obtenção dos deslocamentos relativos Δh_i .

$$B_{2[1PAV]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \frac{(5,20)}{(300,00)} \frac{(160,00)}{(24,00)}} \cong 1,16$$

$$B_{2[2PAV]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \frac{(6,27 - 5,20)}{(300,00)} \frac{(80,00)}{(12,00)}} \cong 1,03$$

Ainda observando a Tabela 2.3, verifica-se que o primeiro pavimento é classificado como de "média deslocabilidade" ($B_2 > 1,10$). Desta forma, a norma brasileira de aço recomenda que a edificação seja recalculada, para considerar o efeito da chamada "imperfeição inicial do material", através da redução de 20% na rigidez de seus elementos.

Tabela 2.4 – Características geométricas, forças externas atuantes, deslocamentos e efeitos da não linearidade geométrica global (Cálculo de B_2) considerando a "imperfeição inicial do material"

Pavimento	H_i [cm]	H_{sdi} [kN]	N_{sdi} [kN]	δ_{hi} [cm]	Δh_i [cm]	Coeficiente B_2	CLASSIFICAÇÃO
1	300,00	24,00	160,00	6,50	6,50	1,20	Média deslocabilidade
2	300,00	12,00	80,00	7,83	1,33	1,04	Pequena deslocabilidade

As únicas mudanças nos dados necessários para a definição de B_2 acima se referem aos deslocamentos δ_{hi} e os deslocamento relativos Δh_i . De fato, a redução de rigidez torna o pórtico mais deslocável e aumenta a influência da não linearidade geométrica global, conforme observado pela elevação dos valores de B_2 .

$$B_{2[1PAV]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \frac{(6,50)}{(300,00)} \frac{(160,00)}{(24,00)}} \cong 1,20$$

$$B_{2[2PAV]} = \frac{1}{1 - \frac{1}{0,85} \frac{(7,83 - 6,50)}{(300,00)} \frac{(80,00)}{(12,00)}} \cong 1,04$$

Os resultados dispostos na Tabela 2.4 permitem afirmar que a influência da não linearidade geométrica global pode ser desprezada no segundo pavimento, porém não no primeiro. Os esforços solicitantes finais nos elementos estruturais do primeiro pavimento podem ser obtidos a partir da amplificação dos resultados da análise sob linearidade geométrica da estrutura lt , por meio do coeficiente $B_{2[1PAV]} = 1,20$. Os resultados referentes a essa análise estão indicados na Figura 2.14.

Figura 2.14 – Diagrama de momentos fletores e esforços normais – Análise sob linearidade geométrica da Estrutura lt

Já os momentos fletores nos pilares e na viga do segundo pavimento, em decorrência da pequena influência causada pela não linearidade geométrica global, não precisam ser amplificados.

A obtenção dos esforços internos finais perpassa pela aplicação das equações 2.10 e 2.11, referentes aos momentos fletores e esforços normais, respectivamente. Desta forma, a seção transversal do topo do pilar P2, por exemplo, está sujeita às seguintes solicitações:

$$M_{sd} = B_1 M_{nt} + B_2 M_{lt} = (1,00)(4,90) + (1,20)(36,00) = 48,10 \text{ kN.m}$$

$$N_{sd} = N_{nt} + B_2 N_{lt} = -80,00 + (1,20)(-27,00) = -112,40 \text{ kN}$$

Figura 2.15 – Diagrama de momentos fletores e esforços normais - Estrutura original

A Figura 2.15 retrata os esforços solicitantes que seriam obtidos na estrutura original caso a amplificação dos esforços não fosse efetuada, ou seja, caso os efeitos da não linearidade geométrica não fossem considerados. Note que o momento fletor no topo do pilar P2 é cerca de 18% menor se comparado ao resultado fornecido pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 . Por outro lado, o esforço normal apresentou uma diferença menor, de cerca de 5%.

2.6 MÉTODO BASEADO NO PARÂMETRO α

2.6.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O Parâmetro α , também conhecido como parâmetro de instabilidade α , foi introduzido a partir do trabalho desenvolvido por Beck e König³ (1967 apud VASCONCELOS, 1997). A analogia feita por eles permitiu associar os pilares de uma estrutura aporticada, rigidamente conectados e responsáveis pela absorção dos carregamentos laterais de vento, ao comportamento de uma única barra com rigidez equivalente. (VASCONCELOS, 1997)

A característica principal da metodologia baseada no Parâmetro α é que ela permite apenas a avaliação da sensibilidade da estrutura aos efeitos da deslocabilidade global. Não permite estimar os esforços internos atuantes na configuração final ou deformada, nem

³ KONIG, G. *Ein Beitrag zur Berechnung aussteifender Bauteile von Skelettbau*. Darmstadt, 1966.
BECK, H. KONIG, G. *Criteria for judging the stiffness of framed structures*. Proceedings IABSE Symposium. London, 1967.

verificar a influência causada pela não linearidade geométrica local (VASCONCELOS; FRANÇA, 1997).

Figura 2.16 – Representação da estrutura equivalente, idealizada para o cálculo do parâmetro α

A Figura 2.16 representa o conceito adotado para a definição do Parâmetro α . É possível observar que o pórtico é composto ainda por elementos contraventados. Entende-se por elementos contraventados aqueles que não colaboram efetivamente para elevar a rigidez do pórtico aos carregamentos laterais. (VASCONCELOS, 1997). Além disso, observa-se a existência de um elemento estrutural rígido, cuja função é absorver as forças horizontais atuantes e que pode ser caracterizado por uma equivalência entre os deslocamentos horizontais, conforme destacado por Vasconcelos (1997):

"O pilar equivalente seria aquele que com um produto de rigidez EJ tal que, sob ação do mesmo carregamento, resultassem flechas iguais".

Nesse contexto, a norma brasileira de concreto ABNT NBR 6118:2007 recomenda o emprego do parâmetro de instabilidade α como um dos possíveis critérios para a eventual dispensa da consideração da não linearidade geométrica global no pórtico. A equação que define o parâmetro é dada por:

$$\alpha = H_{tot} \cdot \sqrt{N_k / (E_{cs} \cdot I_c)}, \quad (2.33)$$

onde:

H_{tot} é a altura total da estrutura;

N_k é o somatório de todas as forças verticais atuantes, com valores característicos;

E_{cs} é o módulo de elasticidade secante do concreto;

I_c é o momento de inércia (de segunda ordem)⁴ da seção transversal não fissurada do concreto;

O valor α encontrado para o pórtico deve ser comparado com o valor limite α_1 , de forma a caracterizar a estrutura em (a) de nós fixos e (b) de nós móveis. O valor limite α_1 é dado por:

$$\alpha_1 = 0,2 + 0,1n \quad \text{se } n \leq 3 \quad (2.34)$$

$$\alpha_1 = 0,6 \quad \text{se } n \geq 4, \quad (2.35)$$

onde n é o número de pavimentos. Se $\alpha \leq \alpha_1$, a influência da deslocabilidade global é desprezável e a edificação pode ser classificada como de "nós fixos". Por outro lado, resultados $\alpha > \alpha_1$ indicam estruturas classificadas como de "nós móveis".

Segundo Franco⁵ (1985 *apud* FRANCO, 1995), o limite $\alpha_1=0,6$, retratado na Equação 2.36, é apropriado para estruturas cujas ações horizontais são absorvidas pela associação de pórticos e pilares parede. Sugere-se ainda a consideração de $\alpha_1=0,7$ e $\alpha_1=0,5$, para edificações cuja rigidez lateral é garantida apenas por pilares parede e apenas por pórticos, respectivamente. Esta recomendação também é seguida pela ABNT NBR 6118:2007.

Note que, já que o Parâmetro α foi idealizado como uma metodologia voltada para as estruturas de concreto, as referências bibliográficas usualmente caracterizam a formulação utilizando as propriedades geométricas (I_c) e de material (E_{cs}) do concreto. É importante destacar que não é objetivo do trabalho avaliar a coerência dos resultados fornecidos pelo Parâmetro α para as estruturas de aço, mas sim apresentar ao leitor algumas metodologias e formulações disponíveis para avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica.

2.6.2 VANTAGENS E DESVANTAGENS

Dentre as vantagens do emprego do método baseado no parâmetro α , é possível destacar a **simplicidade de seu cálculo e de sua fundamentação teórica**. O procedimento, embasado numa analogia entre a edificação e um elemento estrutural em balanço, pode ser encarado

⁴ Note que, conforme citado anteriormente, o termo "momento de segunda ordem" também pode ser empregado para designar uma propriedade geométrica da seção transversal. Por essa, e por outras razões, não é indicado utilizar a expressão "segunda ordem" como sinônimo de não linearidade geométrica.

⁵ FRANCO, M. **O parâmetro de instabilidade dos edifícios altos**. Revista Portuguesa de Engenharia de Estruturas. Lisboa, 1985.

como uma maneira simples e rápida para avaliar a sensibilidade de um pórtico aos deslocamentos laterais. Em atividades de pré dimensionamento, por exemplo, onde é desejável estimar as características geométricas dos pilares, o parâmetro α pode ser uma interessante ferramenta.

Dentre as desvantagens, destacam-se dois aspectos não contemplados pelo procedimento: (a) a não linearidade geométrica local e (b) a estimativa dos esforços solicitantes finais.

O método baseado no parâmetro α permite apenas a avaliação da sensibilidade da estrutura em relação à não linearidade geométrica global (isto é, sensibilidade da estrutura ao Efeito $P\Delta$). Dessa forma, com ele é preciso recorrer a uma metodologia que quantifique os esforços solicitantes caso a estrutura seja classificada como de nós móveis. Essa metodologia, por sua vez, deve considerar as não linearidades geométricas tanto locais quanto globais, podendo ser aproximada ou embasada em teorias geometricamente exatas.

Já os métodos aproximados baseados nos coeficientes γ_z , B_1 e B_2 , como visto, são indicados tanto para avaliar a sensibilidade do pórtico quanto para fornecer uma estimativa dos esforços internos. É importante ressaltar que muitos autores propuseram relações matemáticas entre o Parâmetro α e o Coeficiente γ_z . Desta forma, é possível considerar indiretamente uma amplificação de esforços a partir da metodologia baseada no parâmetro α . Segundo (CARMO, 1995):

A comparação entre os parâmetros α e γ_z gerou uma equação empírica (Eq. 43) que os relaciona, permitindo aos projetistas, que determinam o parâmetro α em suas rotinas de cálculo ou programas, obter o correspondente valor aproximado do Coeficiente γ_z . Enfim, uma vez calculado o Coeficiente γ_z pela Eq. 43.

$$\gamma_z = 0,90 + 0,52\alpha - 0,62\alpha^2 + 0,46\alpha^3. \quad (2.36)$$

A Equação (2.36) se refere à "Equação 43", desenvolvida a partir dos resultados do trabalho de Carmo (1995). Outra correlação que desempenha a mesma função foi proposta por Corrêa e Ramalho⁶ (1995 *apud* MONCAYO, 2011) e é descrita pela Equação (2.37):

$$\gamma_z = 1,10 - 0,33\alpha + 0,50\alpha^2. \quad (2.37)$$

⁶ CORRÊA, M.R.S. RAMALHO, M.A. **Modelos numéricos para análise estrutural de edifícios**. Seminário sobre não linearidade física e geométrica de estruturas de concreto. Workshop IBRACON "A estrutura de concreto do futuro". São Paulo, 1995.

2.6.3 EXEMPLO: CÁLCULO DO PARÂMETRO α

O exemplo de cálculo do Parâmetro α aproveita o pórtico de quatro pavimentos anteriormente descrito na Figura 2.5, cuja influência da não linearidade geométrica global já foi analisada por meio do Coeficiente γ_z no subitem 2.4.5. Aqui, diferentemente, o Coeficiente γ_z será obtido indiretamente a partir do Parâmetro α e, posteriormente, comparado com o resultado obtido no subitem 2.4.5.

Figura 2.17 – Dimensões, carregamentos atuantes no pórtico e elemento estrutural com rigidez equivalente (exemplo de cálculo do Parâmetro α)

A Figura 2.17 apresenta o pórtico a ser estudado e o modelo estrutural do elemento de barra equivalente considerado para o cálculo do Parâmetro α . Inicialmente, os deslocamentos do pórtico original (Figura 2.17a) foram obtidos por meio do programa FTOOL (análise sob linearidade geométrica). Em seguida, o deslocamento da extremidade da barra equivalente (Figura 2.17b), caracterizada por estar engastada na base, livre no topo e sujeito à ação das mesmas forças horizontais da estrutura original, também foi obtido por meio do FTOOL, utilizando uma rigidez à flexão EI com valor unitário.

Por fim, a rigidez equivalente foi obtida a partir da igualdade entre o deslocamento horizontal no topo do pórtico e na extremidade da barra equivalente. Desta forma, o produto entre o módulo de elasticidade e o momento de inércia da barra equivalente resulta em de $2,20 \times 10^5 \text{ kN.m}^2$ (o deslocamento horizontal correspondente é de 3,70 centímetros).

$$N_k = 14 \text{ [kN / m]} \times 12 \text{ [m]} \times 4 = 672 \text{ kN}$$

$$EI = 2,20 \times 10^5 \text{ kNm}^2$$

$$H_{tot} = 12 \text{ m}$$

$$\alpha = H_{tot} \sqrt{N_k / (EI)} = 12 \sqrt{672 / (2,20 \times 10^5)} = 0,663 \geq \alpha_1 = 0,500$$

O Parâmetro α resultante é de 0,663, maior do que o limite $\alpha_1 = 0,5$. Desta forma, a estrutura é classificada como de nós móveis e os efeitos da não linearidade global devem ser avaliados. É importante destacar que, para as edificações cuja absorção das forças horizontais seja garantida apenas por pórticos, o valor α_1 máximo para que a não linearidade geométrica possa ser considerada desprezável é de 0,5 (ABNT NBR 6118:2007).

Uma alternativa para a estimativa dos esforços internos correspondentes à configuração final ou deformada é utilizar como coeficiente majorador o γ_z , obtido através da relação entre α e γ_z (Equações (2.36) e (2.37)).

$$\bar{\gamma} = 0,90 + 0,52(0,663) - 0,62(0,663)^2 + 0,46(0,663)^3$$

$$\bar{\gamma} = 1,106$$

$$\overset{=}{\gamma} = 1,10 - 0,33(0,663) + 0,50(0,663)^2$$

$$\overset{=}{\gamma} = 1,101$$

Onde $\bar{\gamma}$ e $\overset{=}{\gamma}$ representam o valor do Coeficiente γ_z , obtido através das equações (2.36) e (2.37), respectivamente.

Por fim, é importante destacar que os resultados obtidos pelas relações acima são bastante discrepantes em relação àquele obtido no item 2.4.5. Na opinião do autor, um fato que pode ter contribuído para o distanciamento entre os resultados é que as configurações deformadas do pórtico original e do pórtico equivalente não são semelhantes. Enquanto o primeiro apresenta ligações rotuladas entre a base do primeiro lance de pilares e as fundações, o segundo apresenta uma condição de contorno engastada. A única semelhança, em termos de configuração deformada, é o deslocamento no topo da estrutura.

Esse aspecto evidencia a cautela que, no caso geral, se deve ter ao usar o Parâmetro α e as equações (2.36) e (2.37) para avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica.

3. AVALIAÇÃO DA NÃO LINEARIDADE GEOMÉTRICA - MÉTODO BASEADO EM TEORIA GEOMETRICAMENTE EXATA

Neste capítulo, serão apresentados os princípios gerais que governam as teorias de barras geometricamente exatas, com as quais é possível analisar as estruturas aporticadas levando em conta de maneira consistente as não linearidades geométricas. É importante que o leitor esteja apto a compreender os conceitos básicos das teorias que estão inseridas nas ferramentas computacionais disponíveis para a resolução dos problemas envolvendo a não linearidade geométrica das estruturas e, em particular, dos pórticos.

3.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

A avaliação do comportamento real das estruturas quase sempre perpassa pela consideração de formulações matemáticas não lineares. A não linearidade dos elementos estruturais pode se manifestar de duas maneiras distintas: não linearidade do material e não linearidade geométrica (SATHYAMOORTHY, 1997).

A **não linearidade do material** é identificada principalmente em elementos constituídos de material cuja relação entre as tensões e deformações não são lineares. O comportamento físico do material dado pelas equações constitutivas, neste caso, é tipicamente não linear (BONET; WOOD, 1997). A Figura 3.1 mostra relações características de materiais com comportamento linear (a) e com comportamento não linear (b). Observa-se que a diferença entre eles é a proporcionalidade vista no diagrama tensão/deformação (Figura 3.1a).

Figura 3.1 – Comportamento físico dos materiais
(Extraída de MONCAYO, 2011)

A **não linearidade geométrica** é aquela que ocorre pela interação entre os carregamentos externos e a mudança na configuração inicial de uma determinada estrutura. Em outras palavras, o comportamento da estrutura, em termos de esforços internos, deslocamentos e rotações, é influenciado pelos esforços atuantes e pela geometria na configuração deformada (YAO-PENG, 2009).

Segundo Pimenta (2006), a linearidade geométrica é alcançada apenas quando é possível garantir simultaneamente as hipóteses de pequenas deformações, pequenas rotações e pequenos deslocamentos.

A Linearidade Geométrica é razoável para estruturas rígidas, devendo ser abandonada para estruturas flexíveis ou estruturas sujeitas a instabilidades, como, por exemplo, em estruturas de cabos ou suportada por cabos, estruturas em membranas retesadas, estruturas abatidas em cascas e arcos, em pilares esbeltos e em peças de perfil esbelto. Para o estudo destas estruturas, assim como para o estudo da estabilidade das estruturas em geral, é necessário abandonar a Linearidade Geométrica. A única hipótese geral razoável para os materiais estruturais é a de pequenas deformações. Infelizmente esta hipótese isolada não simplifica as equações.

É importante ressaltar que esta dissertação tem como escopo a análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica em pórticos de aço e, portanto, a característica qualitativa do aço estrutural a ser utilizado nos exemplos numéricos é representada pelo diagrama da Figura 3.1a, referente a um material elástico linear. Em alguns estudos de caso do próximo capítulo, para levar em consideração de maneira indireta (e bastante simplificada) a não linearidade do material, as estruturas estarão sujeitas a uma redução de rigidez, conforme recomendado pela ABNT NBR 8800:2008.

Nas estruturas em geral e, em particular, nas estruturas aporticadas, a influência causada pela deslocabilidade dos nós requer a consideração da não linearidade geométrica, ou seja, é

necessária uma abordagem matemática que satisfaça as condições de equilíbrio configuração final ou deformada.

Nesse sentido, será visto, neste capítulo, uma breve descrição histórica das teorias de barras e da formulação geometricamente exata, incluindo os trabalhos mais importantes para a difusão destes conceitos no meio técnico e as dificuldades encontradas pelos autores para alcançar relações matemáticas consistentes. Em seguida, serão apresentadas de forma sucinta as hipóteses cinemáticas, as grandezas vetoriais e tensoriais e as equações de equilíbrio relacionadas à teoria de barras geometricamente exata que será utilizada neste trabalho, a qual se encontra (como já mencionado no Capítulo 1) implementada no programa computacional PEFSYS.

3.2 TEORIAS CLÁSSICAS DE BARRAS

A análise do comportamento das estruturas, em termos de deslocamentos, rotações e esforços internos, pode ser feita a partir da construção e idealização de modelos estruturais. A ideia principal é reproduzir da maneira mais realista possível o que acontece em cada um dos elementos estruturais.

Nos últimos três séculos, diversos autores propuseram teorias e equações matemáticas, cuja função era caracterizar os componentes estruturais sujeitos a carregamentos externos, e que, com o passar dos anos, foram sendo constantemente modificadas. As mudanças ocorreram, dentre outros fatores, pela crescente evolução experimentada pela Engenharia e pelo surgimento de novos tipos de materiais e técnicas construtivas. Tais avanços tornaram as construções mais leves, esbeltas e arrojadas, fazendo com que fosse importante o desenvolvimento de formulações mais complexas que pudessem caracterizar este novo cenário.

Nesse contexto, a teoria das barras, importantíssima para o estudo dos pórticos planos de aço tratados nesta dissertação, despertava o interesse de matemáticos como Jacob Bernoulli e Leonard Euler. No século XVII, o objeto do estudo de Jacob Bernoulli era a configuração deformada de barras elásticas e alguns aspectos do seu trabalho como, por exemplo, a proporcionalidade entre a curvatura do elemento estrutural e o momento fletor num dado ponto, foram usados posteriormente por Euler, no século XVIII (TIMOSHENKO, 1953), servindo de base para a conhecida "**Teoria de barras de Bernoulli-Euler**".

A teoria admite algumas hipóteses cinemáticas que, embora muito úteis até nos dias de hoje, não fornecem resultados realistas para todas as situações encontradas na prática. Foi admitido, por exemplo, que as seções transversais ao longo de um elemento prismático permanecem planas e perpendiculares ao eixo da barra após a deformação. Entretanto, sabe-se que a validade de tal hipótese é verificada apenas em casos onde o empenamento e o cisalhamento transversal são desprezáveis.

Outra formulação clássica bastante difundida no meio técnico é a **Teoria de barras de Timoshenko**. Admite-se que as seções transversais do elemento permaneçam planas na configuração deformada, porém não necessariamente perpendiculares ao eixo da barra. Em outras palavras, a influência da distorção da seção em relação ao eixo, causada pelo esforço cortante, é considerada, ainda que de maneira aproximada.

Figura 3.2 – Teoria de barras de Timoshenko
(FONTE: Desconhecida)

A Figura 3.3 retrata a aproximação proposta pela teoria de barras de Timoshenko para as tensões de cisalhamento na seção transversal da barra. A hipótese adotada consiste numa distribuição uniforme do esforço cortante. Entretanto, sabe-se que a distribuição exata é variável e dependente da coordenada de um determinado ponto da seção transversal.

Outra contribuição importante para o desenvolvimento das teorias de barras foi feita por Vlasov⁷, a partir da década de 1940 (MORI; NETO, 2009). A **teoria de barras de Vlasov** adota algumas hipóteses da **teoria de barras de Bernoulli-Euler** como, por exemplo, desprezar o efeito das distorções causadas pelo esforço cortante. Admite ainda que, durante a

⁷ VLASOV, V.Z. **Thin-walled elastic beams**. Jerusalem, Israel Program for Scientific Translations, 1961.

deformação do elemento de barra, a seção transversal é infinitamente rígida no seu próprio plano, porém deformável na direção normal, podendo assim sofrer empenamento.

A importante contribuição da **teoria de barras de Vlasov** foi justamente a consideração do empenamento não uniforme, o que é de grande importância para elementos estruturais de paredes delgadas (Figura 3.4). O efeito do empenamento é fundamental para a análise de diversos tipos de estruturas constituídas de barras esbeltas como, por exemplo, fuselagens de aeronave e estruturas metálicas de pontes e edificações. (MORI; NETO, 2009).

Figura 3.4 – Seção transversal com paredes delgadas
(Extraída de MORI; NETO, 2009)

Em todos os casos, contudo, as teorias clássicas de barras admitem quase que invariavelmente a hipótese de pequenos deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações, de modo que a configuração deformada possa sempre ser confundida com a configuração inicial, conduzindo à linearidade geométrica. Classicamente, a consideração de efeitos geometricamente não lineares com essas teorias é feita somente no estudo da estabilidade de barras isoladas, e ainda assim de maneira bastante simplificada, onde a determinação de carregamentos críticos é feita considerando uma configuração de equilíbrio fictícia “imediatamente após o ponto crítico”, para a qual os deslocamentos e rotações ainda seriam pequenos. Essa abordagem introduz os chamados “termos de segunda ordem” nas equações e permite estimar o valor dos carregamentos críticos – embora sem exatidão e sem poder descrever o que ocorre após o ponto crítico, já que grandes deslocamentos, grandes rotações e grandes deformações são esperados após o mesmo.

3.3 TEORIAS GEOMETRICAMENTE EXATAS

As teorias geometricamente exatas de barra são aquelas que abordam os efeitos da não linearidade geométrica de forma exata nas formulações matemáticas. Em outras palavras, tais teorias incorporam as rotações e os deslocamentos sem nenhuma restrição geométrica, e impõem o equilíbrio na configuração deformada, diferentemente do que ocorre nas teorias clássicas de Bernoulli-Euler, Timoshenko e Vlasov.

Neste contexto, os primeiros trabalhos que surgiram foram desenvolvidos por Reissner⁸ (1972) e Antman⁹ (1976), caracterizados por abordar teorias de barras que pudessem representar o comportamento da estrutura sem aproximações ou restrições quanto à ocorrência de grandes deslocamentos e rotações (IBRAHIMBEGOVIC; TAYLOR, 2002).

Embora tenham sido importantes por despertar um interesse crescente nos estudos acerca da não linearidade geométrica, as formulações propostas eram consistentes e verdadeiras apenas para a análise de barras no plano. O principal entrave para a generalização da teoria para o espaço tridimensional era o caráter não comutativo das rotações, que torna a caracterização matemática mais trabalhosa e complexa (ARGYRIS, 1982). Nesse contexto, é importante destacar que o movimento de rotação de um sólido pode ser descrito, de maneira exata, através da fórmula de Euler-Rodrigues:

$$\mathbf{Q} = \mathbf{I} + \frac{\sin \theta}{\theta} \mathbf{\Theta} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\sin^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} \mathbf{\Theta}^2, \quad (2.38)$$

onde $\mathbf{Q}$ é o tensor das rotações de Euler-Rodrigues, cuja característica é representar uma rotação de intensidade θ , em torno de um determinado eixo descrito pelo versor $\mathbf{e} = (1/\theta) \cdot \boldsymbol{\theta}$. O tensor $\mathbf{\Theta}$ é antissimétrico, cujo vetor axial é $\boldsymbol{\theta}$, com $\|\boldsymbol{\theta}\| = \theta$. A convenção adotada para representar o sentido positivo das rotações no espaço tridimensional é dada pela regra da mão direita, aplicada ao versor $\mathbf{e}$ (CAMPELLO, 2000).

A generalização das formulações para o espaço tridimensional, de forma consistente com os Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, ocorreu somente a partir do

⁸ REISSNER, E. **On one-dimensional finite strain theory: the plane problem**. J. App. Math. Phys. 23. 1972.

⁹ ANTMAN, S.S. **Ordinary differential equations of one-dimensional elasticity: foundations of the theories of nonlinearly elastic rods and shells**. Arch. Rational Mech. Anal. 61. 1976.

trabalho de Simo¹⁰ (CAMPELLO, 2000). O termo "teoria geometricamente exata" foi introduzido, alguns anos depois, em Simo e Fox (1989). É importante ressaltar, que a hipótese de seção transversal rígida assumida pelas teorias de barras clássicas continuou a ser adotada. Em outras palavras, o empenamento da seção transversal não estava inserido na formulação. A partir daí, diversos outros trabalhos importantes sobre o tema se destacaram como, por exemplo, Pimenta e Yojo (1993), Pimenta e Campello (2003), Gruttman, Sauer e Wagner (1998), dentre outros.

Algumas das diferenças entre as formulações propostas pelos autores supracitados são (1) a forma de representação das variáveis do movimento (podendo ser do tipo Euleriana ou Lagrangeana), (2) a forma de parametrização das rotações, (3) a consideração ou não do empenamento, e ainda (4) a formulação das equações constitutivas (as quais devem atender ao princípio da objetividade e, para tal, diversos pares conjugados de tensões e deformações são possíveis).

3.4 TEORIA DE BARRAS UTILIZADA PELO PEFSYS

A teoria geometricamente exata utilizada pelo PEFSYS será descrita neste item apenas em linhas gerais. Pretende-se aqui apresentar apenas as suas hipóteses cinemáticas e discutir brevemente quais os desenvolvimentos matemáticos necessários ao estabelecimento de suas equações de equilíbrio. O desenvolvimento detalhado de seus conceitos, expressões algébricas e implementação computacional pelo método dos elementos finitos pode ser visto em Campello (2000) e Pimenta e Campello (2001), trabalhos onde a teoria completa foi apresentada pela primeira vez. Deve-se mencionar que a mesma tem origem nos trabalhos de Pimenta e Yojo (1993a e 1993b). Posteriormente, em Tiago (2007) e Moreira (2009), algumas de suas passagens algébricas foram mostradas em maior detalhe.

Em particular, o trabalho de Campello (2000), referente à análise não linear de perfis metálicos conformados a frio, desenvolve detalhadamente os elementos fundamentais da teoria e sua implementação computacional no programa PEFSYS. Observa-se que, a partir da descrição exata do movimento da barra como um sólido tridimensional, é possível solucionar

---

¹⁰ SIMO, J.C. **A finite strain beam formulation. The three-dimensional dynamic problem.** Part I. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49, 55-70, 1985.

os esforços solicitantes, rotações, deslocamentos e deformações atuantes na configuração final ou deformada.

Figura 3.3 – Descrição do movimento de elementos de barras
(Adaptada de CAMPELLO; LAGO, 2013)

A Figura 3.4 representa as configurações inicial e final de uma barra no espaço tridimensional. A hipótese cinemática fundamental adotada na formulação do PEFSYS é que são considerados os efeitos da distorção por esforço cortante e o empenamento não uniforme causado pela torção e/ou pela flexotorção do eixo. Admite-se ainda que a seção transversal é indeformável em seu plano, ou seja, ela pode sofrer empenamento porém sem mudar de forma na projeção em seu próprio plano (CAMPELLO, 2000).

A descrição do movimento é puramente Lagrangeana e consistente com os Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Dessa forma, as grandezas retratadas nas equações estão relacionadas à configuração inicial ou de referência. É importante destacar que a notação utilizada neste capítulo descreve as grandezas vetoriais por letras minúsculas, em itálico e negrito, e os tensores por letras maiúsculas, também em itálico e negrito. Além disso, as grandezas escalares são representadas por letras minúsculas em itálico.

Esclarecidas as hipóteses cinemáticas e a convenção de sinais adotadas, é importante destacar quatro etapas necessárias para a obtenção dos esforços solicitantes, deslocamentos e rotações da barra: (a) caracterização das deformações, (b) caracterização das tensões, (c) definição da potência dos esforços internos e externos e (d) imposição das condições de equilíbrio por meio do teorema dos trabalhos virtuais. A primeira delas está relacionada com as hipóteses cinemáticas adotadas e com as grandezas descritas para o movimento de um sólido no espaço tridimensional.

$$\mathbf{x} = \mathbf{z} + \mathbf{r} + \psi p \mathbf{e}_3 \quad (3.1)$$

A Equação 3.1 descreve o vetor posição $\mathbf{x}$ de um ponto genérico da seção transversal da barra, na configuração final, como a soma vetorial de três parcelas: vetor posição $\mathbf{z}$, que descreve a posição do centro geométrico da seção em relação à origem do sistema de coordenadas; vetor posição $\mathbf{r}$, que descreve a posição relativa de um ponto genérico da seção em relação ao centro geométrico; vetor $\psi p \mathbf{e}_3$, que considera a contribuição do empenamento na posição de um ponto na configuração final.

O termo ψ é a função de empenamento uniforme de Saint-Venant e caracteriza a forma, mas não a intensidade do empenamento. Por outro lado, o termo p é um parâmetro que caracteriza a intensidade do empenamento (CAMPELLO, 2000).

O gradiente da transformação $\mathbf{F}$, grandeza que descreve a mudança na posição e a deformação de um ponto genérico, é dado por:

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \xi} = \mathbf{Q} \left(\mathbf{I} + \psi_{,a} p \mathbf{e}_3^r \otimes \mathbf{e}_a^r + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \mathbf{e}_3^r \right) \quad (3.2)$$

$$\boldsymbol{\gamma}^r = \boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times (\mathbf{r}^r + \psi p \mathbf{e}_3^r) + \psi p' \mathbf{e}_3^r \quad (3.3)$$

onde $\boldsymbol{\xi}$ é o vetor posição do ponto na configuração inicial. A Equação 3.3 caracteriza o vetor das deformações $\boldsymbol{\gamma}^r$, obtido a partir da manipulação matemática das equações 3.1 e 3.2. É válido destacar que as parcelas $\boldsymbol{\eta}^r$ e $\boldsymbol{\kappa}^r$ de $\boldsymbol{\gamma}^r$ representam as deformações de alongamento, cisalhamento e rotações específicas do eixo da barra e, embora não constituam componentes de tensores de deformação da Mecânica dos Sólidos Deformáveis, seu uso apresenta uma grande vantagem por serem invariantes perante a movimentos superpostos de corpo rígido. As expressões de $\boldsymbol{\eta}^r$ e $\boldsymbol{\kappa}^r$ podem ser encontradas em (CAMPELLO, 2000).

As etapas subsequentes apresentam mais uma diferença fundamental entre as teorias sob linearidade e sob não linearidade geométrica: o tensor das tensões adotado. As teorias sob linearidade geométrica podem ser caracterizadas por utilizar o **tensor das tensões de Cauchy** ($\mathbf{T}$), definido como um operador vetorial que relaciona as tensões atuantes $\mathbf{t}$ em um ponto com o vetor normal $\mathbf{n}$ no ponto (em relação ao plano definido por $\mathbf{n}$), onde ambos os vetores se referem à configuração final que, a princípio, não é conhecida. Tal grandeza tem grande aplicabilidade quando a descrição do movimento envolve a hipótese de pequenos

deslocamentos, pequenas rotações e pequenas deformações, pois nesse caso as configurações final e inicial podem ser admitidas como coincidentes.

Por outro lado, quando o problema estiver sujeito a grandes deslocamentos e grandes rotações, existe uma grande dificuldade no emprego do tensor das tensões de Cauchy, uma vez que a configuração final ou deformada não é conhecida. Neste caso, é mais simples (porém igualmente exato) utilizar o **primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchoff ($\mathbf{P}$)**.

$$\mathbf{P} = \mathbf{t}_a \otimes \mathbf{e}_a^r + \boldsymbol{\tau} \otimes \mathbf{e}_3^r \quad (3.4)$$

A Equação 3.4 destaca o primeiro tensor de Piola-Kirchoff ($\mathbf{P}$) numa escrita tensorial. Observa-se que o tensor relaciona as tensões $\mathbf{t}_a$ e $\boldsymbol{\tau}$ atuantes na configuração final (mas por unidade de área da configuração inicial), com os vetores $\mathbf{e}_a^r$ e $\mathbf{e}_3^r$, que são conhecidos e referentes à configuração de referência.

Em seguida, a partir da definição de potência dos esforços internos e dos esforços externos, pode-se escrever:

$$P_{int} = \int_0^l \int_A \mathbf{P} : \dot{\mathbf{F}} dA d\zeta \quad (3.5)$$

$$P_{ext} = \int_0^l \left[\int_C \bar{\mathbf{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dC + \int_A \bar{\mathbf{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dA \right] d\zeta \quad (3.6)$$

A Equação 3.5 define a potência dos esforços internos, onde $\dot{\mathbf{F}}$ é denominado gradiente das velocidades e representa a derivada temporal do gradiente da transformação ($\mathbf{F}$). Observa-se que, sendo $\mathbf{F}$ a medida de deformação adotada, a definição da potência numa teoria sob não linearidade geométrica está relacionada com o primeiro tensor de Piola-Kirchoff ($\mathbf{P}$). A Equação 3.6 define a potência dos esforços externos, onde $\bar{\mathbf{t}}$ representa o vetor das forças superficiais externas atuantes na configuração final da barra por unidade de área da configuração inicial, $\bar{\mathbf{b}}$ representa o vetor das forças externas de volume atuantes na configuração final por unidade de volume da configuração inicial, e $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ é a derivada temporal do vetor dos deslocamentos $\boldsymbol{\delta}$.

Por fim, com (3.5) e (3.6), as expressões dos trabalhos virtuais interno e externo podem ser obtidas, e o equilíbrio da barra pode ser imposto a partir da aplicação do teorema dos trabalhos virtuais (com as devidas condições de contorno essenciais). A partir de manipulações matemáticas nas integrais do teorema dos trabalhos virtuais, é possível definir

as expressões que descrevem os esforços internos resultantes na seção transversal da barra (ou seja, as forças, os momentos, o bicortante e o bimomento, conforme pode ser visto com detalhes em Campello (2000) – os dois últimos esforços internos são resultantes da consideração do empenamento e estão, portanto, relacionados à função de empenamento ψ), e as forças, os momentos e o bimomento externos atuantes ao longo do comprimento inicial da barra. É válido ressaltar que a resolução das equações de equilíbrio que decorrem do teorema dos trabalhos virtuais não pode, no caso geral, ser feita por métodos analíticos, dado seu caráter fortemente não linear. Nesse caso, métodos numéricos como, por exemplo, o Método dos Elementos Finitos (MEF) tornam-se fundamentais. O PEFSYS utiliza elementos finitos de barra Lagrangeanos de dois e três nós (isto é, com funções de interpolação linear e quadrática) para discretizar essas equações, empregando o método de Newton para proceder à solução iterativa.

4. ESTUDO DE CASOS E RESULTADOS

4.1 CONSIDERAÇÕES INICIAIS

O propósito fundamental desta dissertação, relacionada à "Análise elástica dos efeitos da não linearidade geométrica em estruturas de aço", será explorado numericamente neste capítulo. O objetivo principal é avaliar se o método aproximado baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , recomendado pela ABNT NBR 8800:2008, é adequado para estruturas de pequena, média e grande deslocabilidade. Dessa forma, um estudo comparativo será desenvolvido e, a partir de resultados numéricos, será observada a confiabilidade e proximidade (ou eventual discrepância) entre o método supracitado e a análise geometricamente exata.

A diferença básica entre os métodos é que, no primeiro, as condições de equilíbrio são avaliadas em análises sob linearidade geométrica e, posteriormente, os esforços solicitantes são amplificados pelos coeficientes B_1 e B_2 . A função da majoração é tentar aproximar e tornar a avaliação o mais próximo possível do real comportamento dos elementos de barras.

É justamente essa característica intrínseca aos métodos aproximados e, claro, ao método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , que induz questionamentos quanto à sua validade para todas as faixas (pequena, média e grande) de deslocabilidade global. Um aspecto fundamental, pois, é avaliar o alcance ou a **limitação da metodologia**.

A **limitação da metodologia** é um fator importante para o meio técnico e decisivo na escolha de um modelo matemático capaz de computar adequadamente os esforços internos nos elementos e os deslocamentos e rotações observados na estrutura. Os exemplos numéricos abordados neste capítulo buscam identificar possíveis restrições ao emprego do método aproximado mediante um estudo comparativo entre os resultados dos esforços solicitantes e dos deslocamentos obtidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pelo método baseado na teoria geometricamente exata do PEFSYS.

4.2 METODOLOGIA

A metodologia adotada neste capítulo consiste no estudo de pórticos planos simples de aço, sujeitos a carregamentos verticais e horizontais parametrizados e progressivamente aumentados, com o objetivo de observar os deslocamentos laterais e os esforços solicitantes máximos obtidos (1) por meio do método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 (2) por meio da análise geometricamente exata. A ideia é submeter cada pórtico a uma abrangente faixa de efeitos da não linearidade geométrica, ou seja, sujeitá-los a situações de pequena, média e grande deslocabilidade e, em seguida, efetuar uma análise comparativa entre os resultados fornecidos por cada um dos dois métodos.

Tabela 4.1 – Estudos de caso

A Tabela 4.1 resume como os estudos de caso estão organizados. Basicamente, as análises empregadas são: análise sob linearidade geométrica e do material, análise aproximada pelos coeficientes B_1 e B_2 e análise geometricamente exata.

É importante destacar que a não linearidade do material, embora não esteja no escopo deste trabalho, também foi considerada, de maneira indireta, nos exemplos. Isso foi feito porque, ao utilizar o método aproximado, a norma brasileira ABNT NBR 8800:2008, no item 4.9.7.2, recomenda que, para as estruturas de média e grande deslocabilidade ($B_2 \geq 1,10$), a influência causada pela chamada “imperfeição inicial do material” seja considerada (de maneira bastante simplificada) mediante redução das rigidezes dos elementos em 20%. Essa redução também foi introduzida nas análises geometricamente exatas dos casos correspondentes, com vistas a permitir uma comparação mais adequada entre os dois métodos. Dessa forma, os estudos de caso contemplam duas situações: **análise sem redução das rigidezes (SRR)** e **análise com redução das rigidezes (CRR)**.

Um aspecto importante para as análises efetuadas diz respeito ao comportamento do aço estrutural. O modelo constitutivo presentemente adotado nos pórticos é o elástico linear de Hooke (no caso das análises sob linearidade geométrica) e o hiperelástico de Kirchhoff-Saint-Venant (no caso das análises geometricamente exatas). Cabe destacar que o primeiro é um caso particular do segundo, no caso de as deformações serem pequenas – os deslocamentos e as rotações podem ser de qualquer magnitude.

Em todos os casos analisados a seguir, o módulo de elasticidade longitudinal do aço é tomado com o valor de 200 GPa e o módulo de elasticidade transversal com o valor de 77 GPa. O aço é admitido como infinitamente elástico, isto é, sem limite de tensões e nem de deformações, embora se tenha procurado manter as tensões máximas nos elementos estruturais dentro da faixa correspondente ao regime elástico do aço ASTM 572 Gr50, isto é, inferiores a $f_y = 345$ MPa.

Por fim, vale lembrar ao leitor que não é objetivo deste trabalho fazer a verificação da segurança dos elementos estruturais quanto aos Estados Limites Últimos (ELUs), mas sim apenas avaliar a deslocabilidade lateral e os esforços solicitantes decorrentes das não linearidades geométricas segundo os dois diferentes métodos de análise estrutural.

4.3 FERRAMENTAS COMPUTACIONAIS

As ferramentas computacionais utilizadas para as simulações numéricas são os programas FTOOL (TecGraf, PUC-Rio) e PEFSYS (LMC, EPUSP). O primeiro deles foi empregado para efetuar as análises sob linearidade geométrica envolvidas no método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 . O segundo, para efetuar as análises geometricamente exatas por meio do método dos elementos finitos.

4.4 CASO 1: PÓRTICO COM UM PAVIMENTO

O primeiro pórtico a ser analisado é constituído de um pavimento, com ligações rígidas entre as vigas e pilares, e sujeito a um carregamento de referência (designado por P_{ref}) conforme ilustra a Figura 4.1. As vigas têm vão de 5 metros e são perfis W460x46. Os pilares

têm comprimento igual a 4,5 metros e são perfis W150x29,8. A malha de elementos finitos utilizada para a análise geometricamente exata consiste de elementos de dois nós e comprimento uniforme igual a 5 centímetros (tanto nas vigas quanto nos pilares). Malhas com essas mesmas características serão utilizadas em todos os demais casos do presente capítulo.

No que se refere às vinculações na fundação, foi admitido que os pilares estão articulados nas mesmas. As vigas são dotadas de travamento lateral contínuo, ou seja, suas translações nodais na direção perpendicular ao plano da estrutura são nulas. Além disso, restrições ao empenamento são implementadas, em todos os pórticos estudados, apenas no nível das fundações.

Figura 4.1 – Caso 1: pórtico de um pavimento e valores do carregamento de referência

A Tabela 4.2 fornece os valores de deslocamentos laterais no nível do primeiro pavimento obtidos na análise sob linearidade geométrica e na análise geometricamente exata, para diversos níveis de carregamento em relação ao carregamento de referência. Eles são designados respectivamente por Δ_1 e Δ_2 . A tabela apresenta também os valores obtidos para os coeficientes B_1 e B_2 , além da razão Δ_2/Δ_1 (que deve ser comparado a B_2). O nível máximo de tensão normal a que as seções transversais do pórtico estão submetidas em cada nível de carregamento é indicado na penúltima coluna (para evidenciar que as peças estão no regime elástico do aço ASTM 572 Gr50, conforme já dito), e o valor da força normal crítica de Euler para os pilares é indicado na última coluna, a título de referência.

Tabela 4.2 – Resultados do caso 1. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e os deslocamentos laterais

P/P _{ref}	DESLOCAMENTO LATERAL [cm]			COEF B1	COEF B2	CLASSIFICAÇÃO	M [kN.m]	N [kN]	M/W + N/A [kN/cm ²]	$\pi^2 EI/L^2$ [kN]
	Δ_1	Δ_2	Δ_2/Δ_1							
1	0,697	0,721	1,035	1,000	1,031	PEQUENA DESLOCABILIDADE	5,05	13,89	2,64	1.695,14
2	1,393	1,490	1,069	1,000	1,065	PEQUENA DESLOCABILIDADE	10,28	27,85	5,36	1.695,14
4	3,483	4,130	1,186	1,000	1,179	MÉDIA DESLOCABILIDADE	21,77	56,24	11,29	1.356,11
6	5,224	6,819	1,305	1,000	1,295	MÉDIA DESLOCABILIDADE	34,52	85,17	17,80	1.356,11
8	6,965	10,111	1,452	1,000	1,436	GRANDE DESLOCABILIDADE	49,08	114,88	25,14	1.356,11
10	8,707	14,238	1,635	1,000	1,612	GRANDE DESLOCABILIDADE	66,16	145,67	33,65	1.356,11

A Tabela 4.3 fornece os valores dos momentos fletores e esforços normais (na seção mais solicitada dos pilares) encontrados nas análises sob linearidade geométrica (LG&M), na análise por meio dos coeficientes B_1 e B_2 e na análise geometricamente exata (PEFSYS), para os distintos níveis de carregamento. Ressalta-se que a tabela não inclui os valores dos esforços cortantes em razão da pequena sensibilidade desses esforços aos efeitos das deslocabilidades local e global. De fato, a norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 permite a adoção dos esforços cortantes obtidos em análise sob linearidade geométrica. A Figura 4.2 representa graficamente a variação dos momentos fletores e dos esforços normais da seção mais solicitada dos pilares com relação aos níveis de carregamento.

Tabela 4.3 – Resultados do caso 1. Esforços internos na seção mais solicitada dos pilares

P/P _{ref}	MOMENTO FLETOR [kN.m]					ESFORÇO NORMAL [kN]				
	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]
1	5,00	5,11	5,13	5,05	5,07	13,85	13,89	13,90	13,89	13,90
2	10,00	10,45	10,56	10,28	10,37	27,70	27,87	27,92	27,85	27,89
4	20,00	21,85	22,40	21,33	21,77	55,40	56,15	56,37	56,05	56,24
6	30,00	34,48	35,94	33,36	34,52	83,10	84,90	85,49	84,67	85,17
8	40,00	48,64	51,75	46,59	49,08	110,80	114,27	115,51	113,81	114,88
10	50,00	64,74	70,68	61,36	66,16	138,50	144,39	146,76	143,61	145,67

Figura 4.2 – Resultados do caso 1. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus nível de carregamento

A avaliação dos resultados apresentados acima permite afirmar que a correlação entre (1) a razão Δ_2/Δ_1 e o valor de B_2 , e (2) os esforços solicitantes fornecidos pelo método aproximado baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pelo método baseado na análise geometricamente exata é, neste caso, bastante satisfatória. Observando, por exemplo, o nível mais elevado de carregamento ($P/P_{ref} = 10$, Tabela 4.3), percebe-se que a diferença entre

Δ_2/Δ_1 e B_2 é da ordem de apenas 2%. Além disso, os valores do momento fletor e esforço normal obtidos por ambas as metodologias são próximos e que aqueles fornecidos pelo método aproximado são sempre levemente superiores (favoráveis à segurança) àqueles obtidos pelo PEFSYS. A diferença máxima foi da ordem de 7%, no caso dos momentos fletores, e inferior a 1% para os esforços normais.

4.5 CASO 2: PÓRTICO COM DOIS PAVIMENTOS

O segundo pórtico é composto por dois pavimentos, com ligações rígidas entre as vigas e pilares, sujeito a carregamentos concentrados e uniformemente distribuídos (Figura 4.3). As vigas têm vão de 12 metros e são perfis W460x89. Os pilares são perfis W250x89 e têm comprimento igual a 6 metros, entre pavimentos.

Em relação às condições de contorno essenciais, admite-se que os pilares P1 e P2 estão rotulados na base e que as vigas são dotadas de um travamento lateral contínuo, ou seja, o deslocamento dos nós na direção perpendicular ao plano da estrutura é nulo.

Figura 4.3 – Caso 2: pórtico de dois pavimento e valores do carregamento de referência

Tabela 4.4 – Resultados do caso 2. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e os deslocamentos laterais

DESLOCAMENTO LATERAL [cm]						CLASSIFICAÇÃO	M [kN.m]	N [kN]	M/W + N/A [kN/cm ²]	$\pi^2 EI/L^2$ [kN]
P/P _{ref}	Δ_1	Δ_2	Δ_2/Δ_1	COEF.B1	COEF.B2					
1	0,887	0,910	1,027	1,000	1,026	PEQUENA DESLOCABILIDADE	23,02	39,81	5,00	7.806,31
2	1,773	1,864	1,051	1,000	1,053	PEQUENA DESLOCABILIDADE	46,66	79,74	4,96	7.806,31
4	4,433	5,014	1,131	1,000	1,143	MÉDIA DESLOCABILIDADE	97,59	160,36	10,32	6.245,05
6	6,649	8,033	1,208	1,000	1,231	MÉDIA DESLOCABILIDADE	152,47	241,75	16,05	6.245,05
8	8,866	11,489	1,296	1,000	1,334	MÉDIA DESLOCABILIDADE	212,60	324,16	22,26	6.245,05
10	11,082	15,499	1,399	1,000	1,456	GRANDE DESLOCABILIDADE	279,40	407,86	29,09	6.245,05

Tabela 4.5 – Resultados do caso 2. Esforços internos na seção mais solicitada dos pilares

P/P _{ref}	MOMENTO FLETOR [kN.m]					ESFORÇO NORMAL [kN]				
	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]
1	23,30	23,90	24,00	23,02	23,09	39,80	39,90	39,93	39,81	39,83
2	46,60	48,08	48,50	46,66	46,98	79,60	79,99	80,10	79,74	79,82
4	93,20	100,03	101,94	96,14	97,59	159,20	160,77	161,25	160,06	160,36
6	139,80	155,75	160,67	148,77	152,47	238,80	242,56	243,78	241,01	241,75
8	186,40	216,33	226,38	205,10	212,60	318,40	325,59	328,09	322,67	324,16
10	233,00	283,41	301,75	265,92	279,40	398,00	409,95	414,48	405,23	407,86

Figura 4.4 – Resultados do caso 2. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus nível de carregamento

Observa-se nas tabelas 4.4 e 4.5 que a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica torna-se relevante¹¹ na avaliação dos momentos fletores para resultados do Coeficiente B_2 ligeiramente superiores a 1,23. A partir desse nível de deslocabilidade, a diferença entre os resultados da análise geometricamente exata e da análise LG&M começa a superar os 10%, chegando até a valores próximos de 20%. No que se refere ao esforço normal, tal diferença não se mostrou significativa (da ordem de 2%).

Quanto à correlação entre a medida de deslocabilidade lateral, descrita na Tabela 4.4, fornecida pelo método aproximado e pela análise geometricamente exata, os resultados demonstram proximidade entre ambos em todos os níveis de carregamento. E quanto aos esforços solicitantes obtidos por meio de ambos, a Tabela 4.5 e a Figura 4.4 mostram que a diferença nos momentos fletores é, no máximo, da ordem de 8%, enquanto que nos esforços normais é inferior a 2%. É possível destacar ainda que, assim como no caso do pórtico de um pavimento, os resultados dos esforços fornecidos pelo método aproximado são sempre ligeiramente maiores do que aqueles obtidos pela análise geometricamente exata.

¹¹ Neste trabalho, julga-se “relevante” quando as diferenças em relação à análise sob linearidade geométrica e de material (LG&M) é igual ou superior a 10%.

4.6 CASO 3: PÓRTICO COM TRÊS PAVIMENTOS

O terceiro pórtico analisado é constituído por três pavimentos, com ligações rígidas entre as vigas e pilares, sujeito a carregamentos concentrados e uniformemente distribuídos (Figura 4.5). As vigas têm vão de 12 metros e são perfis W460x89. Os pilares têm comprimento, entre pavimentos, de 6 metros e são perfis W250x89.

Quanto às condições de contorno essenciais ao equilíbrio estrutural, o pórtico caracteriza-se por apresentar as mesmas vinculações estabelecidas nos exemplo anteriores, ou seja, a base dos pilares P1 e P2 estão rotuladas e as vigas possuem travamento lateral contínuo.

Figura 4.5 – Representação do pórtico de três pavimentos

Tabela 4.6 – Resultados do caso 3. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e os deslocamentos laterais

P/P _{ref}	DESLOCAMENTO LATERAL [cm]			COEF.B1	COEF.B2	CLASSIFICAÇÃO	M [kN.m]	N [kN]	M/W + N/A [kN/cm ²]	$\pi^2 EI/L^2$ [kN]
	Δ_1	Δ_2	Δ_2/Δ_1							
1	0,816	0,842	1,031	1,000	1,029	PEQUENA DESLOCABILIDADE	20,85	44,17	2,29	7.806,31
2	1,632	1,728	1,058	1,000	1,060	PEQUENA DESLOCABILIDADE	42,36	88,49	4,65	7.806,31
4	4,081	4,687	1,148	1,000	1,164	MÉDIA DESLOCABILIDADE	89,14	177,95	9,70	6.245,05
6	6,121	7,574	1,237	1,000	1,268	MÉDIA DESLOCABILIDADE	140,21	268,33	15,16	6.245,05
8	8,162	10,945	1,341	1,000	1,392	MÉDIA DESLOCABILIDADE	197,11	359,93	21,16	6.245,05
10	10,202	14,933	1,464	1,000	1,543	GRANDE DESLOCABILIDADE	261,44	453,06	27,85	6.245,05

Tabela 4.7 – Resultados do caso 3. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares

P/P _{ref}	MOMENTO FLETOR [kN.m]					ESFORÇO NORMAL [kN]				
	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]
1	20,70	21,09	21,19	20,85	20,93	44,10	44,23	44,26	44,17	44,19
2	41,40	43,01	43,44	42,36	42,70	88,20	88,73	88,88	88,49	88,57
4	82,80	89,65	91,65	87,59	89,14	176,40	178,67	179,34	177,61	177,95
6	124,19	140,67	145,89	136,21	140,21	264,60	270,07	271,80	267,47	268,33
8	165,59	197,02	207,95	188,89	197,11	352,80	363,23	366,86	358,19	359,93
10	206,99	259,94	280,38	246,44	261,44	441,00	458,57	465,36	449,93	453,06

Figura 4.6 – Resultados do caso 3. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus o parâmetro de carregamento

Observa-se nas tabelas 4.6 e 4.7 que, para os níveis de carregamento em que B_2 é igual ou superior a 1,26, as diferenças entre a análise LG&M e a análise geometricamente exata passam a ser relevantes. Além disso, mais uma vez a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica se mostrou mais importante na avaliação dos momentos fletores do que para os esforços normais. As informações contidas na Tabela 4.7 evidenciam que, no nível mais elevado de carregamento, a razão entre os momentos fletores máximos fornecidos pelo PEFSYS e pela análise LG&M é igual a 1,26, enquanto que a razão entre os esforços normais é bem próxima do valor unitário.

Já a diferença entre o método aproximado e a análise geometricamente exata foi sempre inferior a 10%, conforme pode ser inferido a partir da Tabela 4.7. Em situação de grande deslocabilidade, com valores de B_2 próximos a 1,50, a variação de momentos fletores é da ordem de 7%, ao passo que a variação de esforço normal se manteve abaixo de 3%.

Destaca-se ainda o fato de que os resultados obtidos com o método aproximado baseado nos coeficientes B_1 e B_2 se mostraram levemente superiores aos valores fornecidos pelo PEFSYS (Tabela 4.7 e Figura 4.6). A diferença entre ambas as metodologias foi crescendo à medida em que a deslocabilidade da estrutura se tornava maior.

4.7 CASO 4: PÓRTICO COM QUATRO PAVIMENTOS

O quarto pórtico analisado é dotado de quatro pavimentos, ligações rígidas entre as vigas e os pilares, sujeito a carregamentos concentrados e uniformemente distribuídos (Figura 4.7). As vigas têm vão de 12 metros e são perfis W460x89. Os pilares são perfis W250x89 e têm comprimento, entre pavimentos, de 6 metros.

Quanto às condições de contorno essenciais, admite-se que a ligação entre os pilares e as fundações seja articulada. As vigas, por sua vez, possuem um travamento lateral contínuo, ou seja, suas translações nodais na direção perpendicular ao plano da estrutura são nulas.

Figura 4.7 – Representação do pórtico de quatro pavimentos

Tabela 4.8 – Resultados do caso 4. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e deslocamentos laterais

P/P _{ref}	DESLOCAMENTO LATERAL [cm]			COEF.B1	COEF.B2	CLASSIFICAÇÃO	M [kN.m]	N [kN]	M/W + N/A [kN/cm ²]	$\pi^2 EI/L^2$ [kN]
	Δ_1	Δ_2	Δ_2/Δ_1							
1	0,734	0,756	1,029	1,000	1,026	PEQUENA DESLOCABILIDADE	16,89	41,06	1,90	7.806,31
2	1,468	1,548	1,054	1,000	1,054	PEQUENA DESLOCABILIDADE	34,33	82,26	3,86	7.806,31
4	3,671	4,167	1,135	1,000	1,148	MÉDIA DESLOCABILIDADE	72,24	165,38	8,05	6.245,05
6	5,507	6,682	1,213	1,000	1,240	MÉDIA DESLOCABILIDADE	113,54	249,28	12,56	6.245,05
8	7,342	9,572	1,304	1,000	1,348	MÉDIA DESLOCABILIDADE	159,35	334,19	17,49	6.245,05
10	9,178	12,925	1,408	1,000	1,476	GRANDE DESLOCABILIDADE	210,74	420,33	22,93	6.245,05

Tabela 4.9 – Resultados do caso 4. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares

P/P _{ref}	MOMENTO FLETOR [kN.m]					ESFORÇO NORMAL [kN]				
	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]
1	16,76	17,03	17,11	16,89	16,96	41,00	41,10	41,14	41,06	41,08
2	33,53	34,72	35,07	34,33	34,60	82,00	82,49	82,63	82,26	82,33
4	67,05	72,34	73,92	70,99	72,24	164,00	166,18	166,83	165,08	165,38
6	100,58	113,39	117,47	110,37	113,54	246,00	251,29	252,98	248,53	249,28
8	134,10	158,55	166,93	152,93	159,35	328,00	338,11	341,58	332,72	334,19
10	167,63	208,66	224,00	199,24	210,74	410,00	426,98	433,34	417,74	420,33

Figura 4.8 – Resultados do caso 4. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e kN) versus parâmetro de carregamento

A consideração dos efeitos da não linearidade geométrica, neste caso, mostrou-se relevante para valores do coeficiente B_2 iguais ou superiores a 1,24 (inferido a partir das tabelas 4.8 e 4.9). Em termos de momentos fletores, é observado, na Tabela 4.9, que os valores fornecidos pela análise geometricamente exata excedem os resultados da análise sob linearidade geométrica em pelo menos 12% a partir daí, chegando a uma diferença máxima próxima de 26%. Em termos de esforços normais, a influência das não linearidades geométricas não foi preponderante. Observa-se que, dentro da faixa de deslocabilidades estudada, houve um aumento de apenas 3% em relação aos esforços sob linearidade geométrica.

A proximidade entre o método aproximado e análise geometricamente exata se mostrou mais uma vez satisfatória. Os resultados representados na Tabela 4.9 e na Figura 4.8 mostram a pequena diferença entre ambos. Para o nível de carregamento mais elevado, por exemplo, observa-se uma diferença nos de momentos fletores de, aproximadamente, 6%.

4.8 CASO 5: PÓRTICO COM CINCO PAVIMENTOS

O quinto pórtico estudado é composto por cinco pavimentos, com ligações rígidas entre as vigas e pilares, sujeito a carregamentos concentrados e uniformemente distribuídos (Figura 4.9). Os pilares têm comprimento de 6 metros, entre pavimentos, e são perfis W250x89. As vigas são perfis W460x89 e têm vão de 12 metros.

No que se refere às condições de contorno essenciais, os pilares possuem ligações rotuladas na interface com as fundações e as vigas possuem travamento lateral contínuo, sendo, portanto, impedidas de se movimentarem na direção perpendicular ao plano da estrutura.

Figura 4.9 – Representação do pórtico de cinco pavimentos

Tabela 4.10 – Resultados do caso 5. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e deslocamentos laterais

P/P _{ref}	DESLOCAMENTO LATERAL [cm]			COEF.B1	COEF.B2	CLASSIFICAÇÃO	M [kN.m]	N [kN]	M/W + N/A [kN/cm ²]	$\pi^2 EI/L^2$ [kN]
	Δ_1	Δ_2	Δ_2/Δ_1							
1	0,924	0,957	1,036	1,000	1,034	PEQUENA DESLOCABILIDADE	20,00	52,61	2,29	7.806,31
2	1,849	1,973	1,067	1,000	1,070	PEQUENA DESLOCABILIDADE	40,88	105,45	4,66	7.806,31
4	4,622	5,426	1,174	1,000	1,195	MÉDIA DESLOCABILIDADE	87,71	212,42	9,87	6.245,05
6	6,932	8,884	1,281	1,000	1,324	MÉDIA DESLOCABILIDADE	140,52	320,85	15,65	6.245,05
8	9,243	13,038	1,411	1,000	1,484	GRANDE DESLOCABILIDADE	201,69	431,24	22,20	6.245,05
10	11,554	18,119	1,568	1,000	1,689	GRANDE DESLOCABILIDADE	274,03	544,17	29,80	6.245,05

Tabela 4.11 – Resultados do caso 5. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares

P/P _{ref}	MOMENTO FLETOR [kN.m]					ESFORÇO NORMAL [kN]				
	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]
1	19,79	20,30	20,43	20,00	20,11	52,50	52,75	52,82	52,61	52,64
2	39,58	41,67	42,25	40,88	41,34	105,00	106,05	106,33	105,45	105,57
4	79,16	88,17	90,86	85,61	87,71	210,00	214,50	215,84	211,89	212,42
6	118,74	140,66	147,91	134,99	140,52	315,00	325,94	329,56	319,49	320,85
8	158,32	200,73	216,46	190,06	201,69	420,00	441,16	449,01	428,45	431,24
10	197,90	270,58	301,26	252,20	274,03	525,00	561,26	576,57	539,07	544,17

Figura 4.10 – Resultados do caso 5. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e em kN) versus parâmetro de carregamento

Neste pórtico de cinco pavimentos, a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica se mostrou relevante na avaliação dos momentos fletores para valores de B_2 iguais ou superiores a 1,20 (inferido a partir das tabelas 4.10 e 4.11). Percebe-se que, a partir desse nível de deslocabilidade, os valores dos momentos fletores obtidos pela análise geometricamente exata excedem os da análise sob linearidade geométrica e do material em pelo menos 10%, chegando a uma diferença máxima de até 39%. Quanto aos esforços normais, os resultados mostram que a diferença máxima é inferior a 4%.

Quanto à proximidade entre o método aproximado e a análise geometricamente exata, observa-se mais uma vez que foi satisfatória (Tabela 4.11 e Figura 4.10). Mais especificamente, a diferença entre os resultados fornecidos por ambos foi sempre inferior a 10%, independentemente da classificação da estrutura quanto à deslocabilidade lateral.

4.9 CASO 6: PÓRTICO COM SEIS PAVIMENTOS

O último pórtico analisado é constituído por seis pavimentos, ligações rígidas entre as vigas e pilares, sujeito a carregamentos concentrados e uniformemente distribuídos (Figura 4.11). As vigas têm vão de 12 metros e são perfis W460x89. Os pilares têm comprimento de 6 metros, entre pavimentos, e são perfis W250x89.

Quanto às condições de contorno essenciais, o pórtico é caracterizado por apresentar as mesmas vinculações estabelecidas para os demais exemplos, ou seja, a base dos pilares P1 e P2 estão rotuladas e as vigas possuem travamento lateral contínuo.

Figura 4.11 – Representação do pórtico de seis pavimentos

Tabela 4.12 – Resultados do caso 6. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares, valores dos coeficientes B_1 e B_2 e deslocamentos laterais.

DESLOCAMENTO LATERAL [cm]				COEF.B1	COEF.B2	CLASSIFICAÇÃO	M [kN.m]	N [kN]	M/W + N/A [kN/cm ²]	$\pi^2 EI/L^2$ [kN]
P/P _{ref}	Δ_1	Δ_2	Δ_2/Δ_1							
1	1,114	1,162	1,042	1,000	1,041	PEQUENA DESLOCABILIDADE	23,08	64,67	2,68	7.806,31
2	2,229	2,410	1,081	1,000	1,085	PEQUENA DESLOCABILIDADE	47,45	129,71	5,47	7.806,31
4	5,572	6,774	1,216	1,000	1,245	MÉDIA DESLOCABILIDADE	103,93	261,89	11,79	6.245,05
6	8,358	11,345	1,357	1,000	1,418	GRANDE DESLOCABILIDADE	170,10	396,54	19,01	6.245,05
8	11,145	17,117	1,536	1,000	1,648	GRANDE DESLOCABILIDADE	250,69	534,69	27,59	6.245,05
10	13,931	24,628	1,768	1,000	1,966	GRANDE DESLOCABILIDADE	352,13	677,67	38,10	6.245,05

Tabela 4.13 – Resultados do caso 6. Esforços atuantes na seção mais solicitada dos pilares

P/P _{ref}	MOMENTO FLETOR [kN.m]					ESFORÇO NORMAL [kN]				
	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]	LG&M	B1-B2 [SRR]	B1-B2 [CRR]	PEFSYS [SRR]	PEFSYS [CRR]
1	22,78	23,52	23,72	23,08	23,23	64,50	64,93	65,04	64,67	64,72
2	45,57	48,64	49,50	47,45	48,12	129,00	130,79	131,29	129,71	129,90
4	91,14	104,58	108,77	100,69	103,93	258,00	265,83	268,27	261,02	261,89
6	136,71	170,07	181,90	161,24	170,10	387,00	406,43	413,32	394,25	396,54
8	182,28	248,40	275,64	231,20	250,69	516,00	554,51	570,37	529,83	534,69
10	227,85	344,55	401,92	313,48	352,13	645,00	712,96	746,37	668,39	677,67

Figura 4.12 – Resultados do caso 6. Curvas dos esforços atuantes (na seção mais solicitada dos pilares, em kN.m e kN) versus parâmetro de carregamento

Neste caso, a consideração dos efeitos da não linearidade geométrica torna-se relevante para valores do coeficiente B_2 iguais ou superiores a 1,25 (inferido a partir das tabelas 4.12 e 4.13). É observado, na Tabela 4.13, que a partir deste patamar, os valores obtidos pela análise geometricamente exata excedem os momentos fornecidos pela análise sob linearidade geométrica em 14%, chegando a uma diferença máxima próxima de 55%. Os resultados sugerem ainda que os esforços normais fornecidos pela análise LG&M foram praticamente iguais aos valores fornecidos pelo método aproximado baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , bem como àqueles obtidos pela análise geometricamente exata. O esforço normal no nível mais elevado de carregamento (note que o nível do carregamento corresponde a uma situação de enorme deslocabilidade) é apenas 5% maior do que aqueles da análise geometricamente exata.

Já a proximidade entre o método aproximado e a análise geometricamente exata é verificada com ressalvas. Os resultados representados na Tabela 4.13 e na Figura 4.12 mostram uma proximidade satisfatória entre os momentos fletores em praticamente toda a faixa de valores observada, exceto para a situação onde o Coeficiente B_2 é igual a 1,96. Nessa situação, a diferença entre os momentos fletores é da ordem de 14%, enquanto que

entre os esforços normais é de aproximadamente 10%. Apenas neste nível de carregamento ($P/P_{\text{ref}} = 10$) é possível observar, dentre os pórticos avaliados, variações significativas entre o método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e o método baseado em formulações geometricamente exatas.

4.10 DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

A análise dos dados contidos nas tabelas e figuras anteriores mostra que o emprego do método aproximado de avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica baseado nos coeficientes B_1 e B_2 foi satisfatório e bastante confiável para os pórticos estudados. Os resultados obtidos permitem concluir que, nas condições analisadas, a correlação entre o modelo aproximado e a teoria geometricamente exata foi boa e os resultados fornecidos por ambos, em termos quantitativos e qualitativos, são bem próximos em praticamente todos os casos estudados.

As Tabelas 4.14 e 4.15 a seguir resumem as diferenças de resultados entre os métodos para os pórticos de um e de dois pavimentos, respectivamente. Conforme esperado, é possível observar que a diferença entre os valores dos esforços solicitantes fornecidos pela metodologia baseada nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata vai crescendo à medida que a estrutura se torna mais deslocável, ou seja, com o aumento do Coeficiente B_2 . Além disso, os resultados de momentos fletores e esforços normais obtidos pelo método aproximado foram superiores àqueles fornecidos pelo PEFSYS em praticamente todos os parâmetros de carregamentos avaliados. Os comentários destacados para os pórticos de um e de dois pavimentos podem ser estendidos para os demais casos, conforme ilustram as Tabelas 4.16 a 4.19 a seguir.

Tabela 4.14 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de um pavimento

P/P _{ref}	COEF. B1-B2		PEFSYS		ΔM (%)	ΔN (%)	COEF.B2	$\Delta 2/\Delta 1$	Δ (%)
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]					
1	5,00	13,85	5,07	13,90	1,381	0,361	1,031	1,035	0,386
2	10,45	27,87	10,28	27,85	1,620	0,088	1,065	1,069	0,440
4	22,40	56,37	21,77	56,24	2,880	0,225	1,179	1,186	0,570
6	35,94	85,49	34,52	85,17	4,120	0,374	1,295	1,305	0,791
8	51,75	115,51	49,08	114,88	5,449	0,548	1,436	1,436	0,000
10	70,68	146,76	66,16	145,67	6,834	0,749	1,612	1,635	1,433

Tabela 4.15 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de dois pavimentos

P/P _{ref}	COEF. B1-B2		PEFSYS		ΔM (%)	ΔN (%)	COEF.B2	$\Delta 2/\Delta 1$	Δ (%)
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]					
1	24,00	39,93	23,02	39,81	4,27	0,29	1,026	1,027	0,074
2	48,50	80,10	46,66	79,74	3,94	0,45	1,053	1,051	0,135
4	101,94	161,25	97,59	160,36	4,46	0,55	1,143	1,131	1,081
6	160,67	243,78	152,47	241,75	5,38	0,84	1,231	1,208	1,911
8	226,38	328,09	212,60	324,16	6,48	1,21	1,334	1,296	2,942
10	301,75	414,48	279,40	407,86	8,00	1,62	1,456	1,399	4,145

Outro aspecto importante diz respeito à variação dos resultados dos momentos fletores. Observa-se nas tabelas 4.16 e 4.17 que a diferença nos momentos fletores, descrita em termos percentuais pela coluna " ΔM (%)", se mostrou inferior a 10% em todos os níveis de carregamentos avaliados. Apesar disso, como já visto, tal pequena diferença se mostrou mais significativa se comparada com a variação dos resultados dos esforços normais " ΔN (%)", obtidos por ambas as metodologias de avaliação dos efeitos da não linearidade geométrica.

Tabela 4.16 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de três pavimentos

P/P _{ref}	COEF. B1-B2		PEFSYS		ΔM (%)	ΔN (%)	COEF.B2	$\Delta 2/\Delta 1$	Δ (%)
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]					
1	21,19	44,26	20,85	44,17	1,64	0,21	1,029	1,031	0,21
2	43,44	88,88	42,36	88,49	2,56	0,44	1,060	1,058	0,13
4	91,65	179,34	89,14	177,95	2,81	0,78	1,164	1,148	1,34
6	145,89	271,80	140,21	268,33	4,05	1,29	1,268	1,237	2,47
8	207,95	366,86	197,11	359,93	5,50	1,93	1,392	1,341	3,80
10	280,38	465,36	261,44	453,06	7,24	2,71	1,543	1,464	5,44

Tabela 4.17 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de quatro pavimentos

P/P _{ref}	COEF. B1-B2		PEFSYS		ΔM (%)	ΔN (%)	COEF.B2	$\Delta 2/\Delta 1$	Δ (%)
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]					
1	17,11	41,14	16,89	41,06	1,28	0,19	1,026	1,029	0,27
2	35,07	82,63	34,33	82,26	2,16	0,45	1,054	1,054	0,04
4	73,92	166,83	72,24	165,38	2,33	0,88	1,148	1,135	1,16
6	117,47	252,98	113,54	249,28	3,46	1,48	1,240	1,213	2,17
8	166,93	341,58	159,35	334,19	4,76	2,21	1,348	1,304	3,37
10	224,00	433,34	210,74	420,33	6,29	3,10	1,476	1,408	4,80

Por fim, avaliando as tabelas 4.18 e 4.19, é possível verificar que os momentos fletores e esforços normais fornecidos pelo método aproximado baseado nos coeficientes B_1 e B_2 são superiores àqueles obtidos com o uso do PEFSYS. Note que o momento fletor, amplificado pelos coeficientes supracitados, atuante no pórtico de seis pavimentos para o nível de carregamento $P/P_{ref}=10$, resulta em valor razoavelmente mais elevado (aproximadamente 14%) se comparado com o resultado da análise geometricamente exata. O esforço normal também resulta razoavelmente superior (cerca de 10%) neste caso.

Tabela 4.18 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de cinco pavimentos

P/P _{ref}	COEF. B1-B2		PEFSYS		ΔM (%)	ΔN (%)	COEF.B2	$\Delta 2/\Delta 1$	Δ (%)
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]					
1	20,43	52,82	20,00	52,61	2,14	0,40	1,034	1,036	0,20
2	42,25	106,33	40,88	105,45	3,34	0,83	1,070	1,067	0,22
4	90,86	215,84	87,71	212,42	3,59	1,61	1,195	1,174	1,78
6	147,91	329,56	140,52	320,85	5,26	2,71	1,324	1,281	3,31
8	216,46	449,01	201,69	431,24	7,32	4,12	1,484	1,411	5,22
10	301,26	576,57	274,03	544,17	9,94	5,95	1,689	1,568	7,68

Tabela 4.19 – Diferença entre os resultados dos esforços fornecidos pelo método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 e pela análise geometricamente exata para o pórtico de seis pavimentos

P/P _{ref}	COEF. B1-B2		PEFSYS		ΔM (%)	ΔN (%)	COEF.B2	$\Delta 2/\Delta 1$	Δ (%)
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]					
1	23,72	65,04	23,08	64,67	2,75	0,58	1,041	1,042	0,14
2	49,50	131,29	47,45	129,71	4,31	1,22	1,085	1,081	0,39
4	108,77	268,27	103,93	261,89	4,66	2,43	1,245	1,216	2,39
6	181,90	413,32	170,10	396,54	6,94	4,23	1,418	1,357	4,49
8	275,64	570,37	250,69	534,69	9,95	6,67	1,648	1,536	7,29
10	401,92	746,37	352,13	677,67	14,14	10,14	1,966	1,768	11,23

5. CONCLUSÃO

5.1 CONSIDERAÇÕES FINAIS

O objetivo principal desta dissertação é avaliar a influência da não linearidade geométrica na análise de estruturas de aço e verificar, através de ferramentas computacionais, as semelhanças e diferenças entre os resultados fornecidos pelo método recomendado pela ABNT NBR 8800:2008, baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , e o método baseado em teoria de barras geometricamente exatas.

Dessa forma, foram estudados pórticos planos, sujeitos a carregamentos verticais e horizontais parametrizados (utilizando um “carregamento de referência”), caracterizados por induzirem uma ampla faixa de deslocabilidade lateral. Além disso, em praticamente todos os casos, os pórticos estiveram dentro do regime elástico, ou seja, tensão normal máxima atuante inferior à tensão limite de escoamento do aço estrutural ASTM A572 Gr.50.

Os resultados obtidos permitem afirmar que, nos casos analisados, o método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 se mostrou adequado para analisar a influência da não linearidade geométrica para valores de $B_2 \leq 2$. De fato, os resultados dos estudos de caso demonstram que os valores dos esforços solicitantes, atuantes nos pórticos estudados e obtidos pelo método aproximado, apresentam diferenças superiores a 10% em relação à análise geometricamente exata.

Observando os resultados numéricos do Capítulo 4, destacam-se alguns aspectos sobre os quais serão feitos breves comentários: (1) análise sob linearidade geométrica e do material, (2) método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 , (3) momento fletor, (4) esforço normal e (5) relação Δ_2/Δ_1 .

A **análise sob linearidade geométrica e do material** foi avaliada em todos os seis pórticos planos estudados e ficou evidente que, principalmente em estruturas classificadas como de média e grande deslocabilidade, ela não é indicada. Resultados observados para os

pórticos com dois, três, quatro, cinco e seis pavimentos, por exemplo, sugerem que, quando os valores de B_2 atingem a faixa de 1,20 a 1,35, a razão entre os momentos fletores fornecidos pelo PEFSYS e aqueles da análise LG&M ($M_{\text{PEFSYS}[\text{CRR}]} / M_{\text{LG\&M}}$) começa a ultrapassar 1,10 ou, em outras palavras, os esforços solicitantes obtidos pela análise geometricamente exata começam a ser superiores em mais de 10% àqueles obtidos para uma avaliação sob linearidade geométrica. Destaca-se também a diferença máxima de aproximadamente 55% entre os resultados da análise LG&M e da análise baseada no PEFSYS [CRR], correspondente ao caso do pórtico de seis pavimentos, sujeito ao nível mais alto de carregamento.

Em relação ao **método baseado nos Coeficientes B_1 e B_2** , é possível observar que os resultados estiveram, em quase todos os exemplos estudados, próximos dos valores fornecidos pela análise geometricamente exata. Em praticamente todos os níveis de carregamento avaliados e em situações de pequena, média e grande deslocabilidade, percebe-se uma proximidade satisfatória entre o método aproximado e o método exato. Avaliando os dados contidos nas Tabelas 4.14 a 4.19, evidencia-se a boa correlação entre as metodologias, uma vez que as diferenças foram inferiores a 10%, exceto para o pórtico de seis pavimentos em seu maior nível de carregamento, classificado como de grande deslocabilidade e cujo valor de B_2 é excessivamente elevado ($B_2 = 1,966$).

O **momento fletor** pode ser caracterizado como o esforço solicitante que é mais afetado pelos efeitos da não linearidade geométrica (ao menos nos tipos de pórtico estudados neste trabalho, isto é, pórticos planos submetidos a carregamentos verticais e horizontais que têm valores usuais de projeto). Observando os resultados referentes aos seis casos estudados, percebe-se que a diferença entre o método sob linearidade geométrica e o método geometricamente exato é bastante elevada nas estruturas de média e grande deslocabilidade. No pórtico de seis pavimentos, por exemplo, a diferença de valores chega a 55%, conforme pode ser destacado na penúltima coluna da Tabela 5.1.

O **esforço normal** é, conforme já esperado, menos susceptível aos efeitos das não linearidades geométricas (nos tipos de pórtico aqui estudados). A Tabela 5.1 mostra, na última coluna, a razão entre as forças axiais fornecidas pelo PEFSYS [CRR] e pela análise LG&M. Note que as diferenças entre os valores, diferentemente do que ocorre com os momentos fletores, são pequenas e inferiores a 10%. No pórtico com seis pavimentos, mesmo com elevada influência da deslocabilidade global ($B_2 = 1,966$), a diferença dos resultados foi de apenas 5%.

Tabela 5.1 – Esforços solicitantes
(análise sob linearidade geométrica vs. análise geometricamente exata)

	LG&M		PEFSYS [CRR]		r1	r2
	M [kN.m]	N [kN]	M [kN.m]	N [kN]		
um pavimento	50,00	138,50	66,16	145,67	1,32	1,05
dois pavimentos	233,00	398,00	279,40	407,86	1,20	1,02
três pavimentos	206,99	441,00	261,44	453,06	1,26	1,03
quatro pavimentos	167,63	410,00	210,74	420,33	1,26	1,03
cinco pavimentos	197,90	525,00	274,03	544,17	1,38	1,04
seis pavimentos	227,85	645,00	352,13	677,67	1,55	1,05

A **relação** Δ_2/Δ_1 representa, segundo a ABNT NBR 8800:2008, a razão entre os deslocamentos horizontais obtidos na análise geometricamente exata e na análise sob linearidade geométrica, respectivamente:

A relação entre o deslocamento lateral do andar relativo à base obtido na análise de segunda ordem e aquele obtido na análise de primeira ordem, mencionada em 4.9.4.2, 4.9.4.3 e 4.9.4.4, pode ser aproximada de maneira aceitável pelo valor do Coeficiente B_2 , calculado de acordo com o anexo D, sem a consideração das imperfeições iniciais de material indicadas em 4.9.7.

O parágrafo acima retrata a recomendação da norma brasileira de estruturas de aço e permite que a relação Δ_2/Δ_1 possa ser aproximada pelo Coeficiente B_2 . Os resultados numéricos descritos em tabelas do Capítulo 4 confirmam a validade desta recomendação.

Tabela 5.2 – Relação entre os deslocamentos Δ_2/Δ_1 vs. Coeficiente B_2

P/P _{ref}	um pavimento		dois pavimentos		três pavimentos		quatro pavimentos		cinco pavimentos		seis pavimentos	
	COEF.B2	Δ_2/Δ_1	COEF.B2	Δ_2/Δ_1	COEF.B2	Δ_2/Δ_1	COEF.B2	Δ_2/Δ_1	COEF.B2	Δ_2/Δ_1	COEF.B2	Δ_2/Δ_1
1	1,031	1,035	1,026	1,027	1,029	1,031	1,026	1,029	1,034	1,036	1,041	1,042
2	1,065	1,069	1,053	1,051	1,060	1,058	1,054	1,054	1,070	1,067	1,085	1,081
4	1,179	1,186	1,143	1,131	1,164	1,148	1,148	1,135	1,195	1,174	1,245	1,216
6	1,295	1,305	1,231	1,208	1,268	1,237	1,240	1,213	1,324	1,281	1,418	1,357
8	1,436	1,452	1,334	1,296	1,392	1,341	1,348	1,304	1,484	1,411	1,648	1,536
10	1,612	1,635	1,456	1,399	1,543	1,464	1,476	1,408	1,689	1,568	1,966	1,768

A Tabela 5.2 mostra uma comparação entre a razão Δ_2/Δ_1 e o Coeficiente B_2 para todos os casos estudados. A diferença entre os valores obtidos é pequena e sempre inferior a 10%, exceto no nível de carregamento mais elevado do pórtico de seis pavimentos, onde chega a cerca de 11%:

$$\frac{[COEF B_2 - \Delta_2 / \Delta_1]}{\Delta_2 / \Delta_1} = \frac{[1,966 - 1,768]}{1,768} = 0,1119 \text{ ou } 11,19\%$$

É interessante observar que, para os pórticos estudados, o valor de B_2 é quase sempre superior ao valor da razão Δ_2/Δ_1 , indicando que a medida de deslocabilidade fornecida por B_2 está a favor da segurança.

Um aspecto merece ser destacado nesse estudo: o coeficiente de ajuste R_s . Os valores do Coeficiente B_2 , descritos na Tabela 5.2, seguem as recomendações da ABNT NBR 8800:2008 e foram calculados mediante aplicação do valor $R_s=0,85$ (estabilidade lateral das vigas e pilares garantida pela rigidez à flexão e pela capacidade de transmissão de momentos pela ligações). Não foi encontrado na literatura nenhum artigo ou trabalho científico que informasse a origem do coeficiente R_s , mas percebe-se que a proximidade entre os valores de esforços solicitantes e da razão entre os deslocamentos fornecidos pela análise geometricamente exata e a análise aproximada, baseada nos coeficientes B_1 e B_2 , foi verificada apenas sob esta condição.

5.2 SUGESTÃO PARA TRABALHOS FUTUROS

A sugestão para trabalhos futuros é avaliar o efeito da não linearidade geométrica das estruturas de aço em diferentes modelos estruturais como, por exemplo, pórticos que contenham ligações flexíveis entre as vigas e pilares. Diversos autores vêm estudando o assunto, como Avakian (2007), Lavall et al. (2012), evidenciando que a distribuição dos esforços solicitantes e a deslocabilidade da estrutura é significativamente afetada pela adoção de ligações flexíveis.

Outro tema sugerido é a implementação de modelos estruturais mistos de aço e concreto. A relevância pode ser vista por dois aspectos: (a) grande parte dos trabalhos relacionados ao método baseado nos coeficientes B_1 e B_2 aborda apenas as estruturas de aço e (b) tem crescido o número de construções mistas de aço e concreto no país. Inclusive, a norma brasileira ABNT NBR 8800:2008 contempla o dimensionamento de estruturas mistas e, dessa forma, é importante verificar se os efeitos das não linearidades geométricas nas estruturas mistas é adequadamente estimada pelo método aproximado baseado nos coeficientes B_1 e B_2 .

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas – NBR6118 **Projeto de Estruturas de Concreto**. Rio de Janeiro, 2007.

ABNT Associação Brasileira de Normas Técnicas – NBR8800 **Projeto de Estruturas de Aço e de Estruturas Mistas de Aço e Concreto de Edifícios**. Rio de Janeiro, 2008.

AISC American Institute of Steel Construction – **Specifications for structural steel buildings**. United States of America, 2005.

ALLPOSTERS. Disponível em: <www.allposters.com.br>. Acesso em: 20 Fev. 2014.

ARGYRIS, J.H.. **An excursion into large rotations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32, 85-155, 1982.

AVAKIAN, AMÁLIA CAMILLO. **Estruturas aporticadas mistas aço-concreto: avaliação de metodologias de análise**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal do Rio de Janeiro - COPPE. 2007.

BONET, J.; WOOD, R.D. **Nonlinear continuum mechanics for finite element analysis**. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

CAMPELLO, E.M.B. **Análise não-linear de perfis conformados a frio**. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2000.

CAMPELLO, E.M.B.; LAGO, L.B. **Effects of higher order constitutive terms on elastic buckling of thin-walled beams and columns**. Thin-Walled Structures, 2013. (aceito para publicação)

CARMO, R.M.S. **Efeitos de segunda ordem em edifícios usuais de concreto armado**. Dissertação de mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos, 1995.

CARVALHO, ROBERTO CHUST; PINHEIRO, L.M. **Cálculo e detalhamento de estruturas usuais de concreto armado**. São Paulo. Editora Pini, Volume 2, 2009.

- CHEN, SHENG-JIN, WANG, WU-CHYUAN. **Moment amplification factor for P- δ effect of steel beam-column**. Journal of Structural Engineering, Vol.125, No.2, February, 1999.
- CHEN, W.F; GOTO, Y. **Second-Order elastic analysis for frame design**. Journal of Structural Engineering, 1987.
- CHEN, W. F; GOTO, Y; LIEW, J. Y. R. **Stability Design of Semi-Rigid Frames**. New York: John Wiley e Sons, Inc., 1996.
- CHEN, W.F.; LUI, E.M. **Structural Stability**. United States of America, 1987.
- CHEN, W. F.; TOMA, S. **Advanced Analysis of Steel Frames**. Boca Raton: CRC-Press, 1994.
- CHEN, W. F.; ZHOU S. **On Cm Factor in Load and Resistance Factor Design**. ASCE. Journal of Structural Engineering, V.113, Nº 8, p. 1738-1754, 1994.
- FRANCO, M. **Global and local instability of concrete tall buildings**. International Symposium. International Association for Shell and Spatial Structures Proceedings. V.2, p.1327-36, Milão, 1995. (Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios. São Paulo, Instituto de Engenharia/TQS. p.57-69).
- GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. **A geometrical nonlinear eccentric 3D-Beam Element with arbitrary cross sections**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 160, 383-400, 1998.
- IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R.L. **On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 191, 5159-5176, 2002.
- LAVALL, A. C. C. **Análise Elástica em Segunda Ordem de Pórticos Planos Metálicos**. Dissertação de Mestrado. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 1988.
- LAVALL, A.C.C.; SILVA, R.G.L.; FAKURY, R.H. **Comportamento elastoplástico de pórticos de aço considerando as ligações semirrígidas viga-pilar**. CBCA. Revista da Estrutura de Aço. V.01, Nº 3, p. 147-166. Dezembro, 2012.
- LEAL, A.S.; CAMPELLO, E.M.B. **Análise elástica dos efeitos da deslocabilidade global em estruturas de aço**. CBCA. Revista da Estrutura de Aço. V.02, Nº 2, p. 75-94. Agosto, 2013.
- LE MESSURIER, WM. J. **A Practical Method of Second Order Analysis: Part 1 – Pin Joint Systems**. AISC Engineering Journal. 1976.
- LIMA, J.S. **Verificação da punção e da estabilidade global em edifícios de concreto: desenvolvimento e aplicação de recomendações normativas**. Dissertação de mestrado, Universidade de São Paulo, 2001.

LIU, Y.P. **Nonlinear finite element analysis for design of plated structures**. Doctoral thesis, The Hong Kong Polytechnic University, 2009.

MOREIRA, M.L.T. **Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas**. Tese de doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2009.

MORI, Dagoberto Dario; NETO, J.M. **Flexo-torção: Barras com seção aberta e paredes delgadas**. Teoria e exemplos. Escola de Engenharia de São Carlos - Universidade de São Paulo, 2009.

OLIVEIRA, D.M. **Estudo dos processos aproximados utilizados para consideração das não-linearidades física e geométrica na análise global das estruturas de concreto armado**. Tese de doutorado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2007.

OLIVEIRA, D.M. **Parâmetros de instabilidade global das estruturas de concreto armado segundo a nova NBR-6118**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2002.

OLIVEIRA, D.M; SILVA, N.A. **Estudo comparativo dos parâmetros de instabilidade global das estruturas de concreto armado e de aço**. XXIX CILAMCE, 2008.

OLIVEIRA, D.M; SILVA, N.A; BREMER, C.F; INOUE, H. **Considerações sobre a determinação do coeficiente γ_x** . Revista IBRACON de estruturas e materiais. Volume 6, nº 1, p.75-100. 2013.

PFEIL, WALTER. PFEIL, MICHÈLE. **Estruturas de Aço: Dimensionamento prático de acordo com a NBR8800:2008**. Rio de Janeiro. Editora LTC, 2008.

PINTO, R.S., RAMALHO, M.A. **Não linearidade física e geométrica no projeto de edifícios usuais de concreto armado**. São Carlos, Cadernos de Engenharia de Estruturas, 2002.

PIMENTA, P.M. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. Notas de aula, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. 2006.

PIMENTA, P.M.; CAMPELLO, E.M.B. **A fully nonlinear multi-parameter rod model incorporating general cross-section in-plane changes and out-of-plane warping**. Latin American Journal of Solids and Structures, 2003.

PIMENTA, P.M.; YOJO, T. **Geometrically exact analysis of spatial frames**. App. Mech. Reviews, 46(11), Part 2, 1993.

PIMENTA, P.M.; YOJO, T. **Geometrically exact analysis of spatial frames with consideration of torsion warping**. XIV Congresso Ibero Latino Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, IPT, São Paulo, 21-30, 1993.

SALMON, CHARLES G., E.JOHNSON, JOHN. **Steel structures: design and behavior**. 4th Edition. HarperCollinsCollegePublishers, 1997.

SATHYAMOORTHY, M. **Nonlinear analysis of structures**. CRC Press, 2nd Edition, 1997.

SILVA, R.G.L. **Avaliação dos efeitos de 2ª ordem em edifícios de aço utilizando métodos aproximados e análise rigorosa**. Dissertação de mestrado, Universidade Federal de Minas Gerais, 2004.

SIMO, J.C. **The (symmetric) Hessian for geometrically nonlinear models in solid mechanics: Intrinsic definition and geometric interpretation**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 96, 189-200, 1990.

TIAGO, C.M. **Meshless methods: Extending the linear formulation and its generalization to geometrically exact structural analysis**. Tese de doutorado, Universidade Técnica de Lisboa, 2007.

VASCONCELOS, A. C. **CrITÉrios para Dispensa de Consideração do Efeito de 2ª Ordem**. In. REUNIÃO ANUAL DO IBRACON: Colóquio sobre Estabilidade Global das Estruturas de Concreto Armado. São Paulo, 1985.

VASCONCELOS, A.C. **Origem dos parâmetros de estabilidade α e γ_z** . Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios. São Paulo, Instituto de Engenharia/TQS. p.3-13.

VASCONCELOS, A.C.; FRANÇA, R.L.S. **Um método simplificado e muito preciso para avaliação dos momentos de segunda ordem em edifícios altos usuais**. Coletânea de trabalhos sobre estabilidade global e local das estruturas de edifícios. São Paulo, Instituto de Engenharia/TQS. p.79-97.

WELL, MATTHEW. **Engineers: A history of engineering and structural design**. United States of America, Routledge, 2010.

ZUMAETA MONCAYO, WINSTON JUNIOR. **Análise de 2ª ordem global em edifícios com estrutura de concreto armado**. Dissertação de mestrado, Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, 2011.