UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

DEBORA NAOMI HIGA

**Metodologia para quantificação do efeito da pressão de contato em trilhos sujeitos à
passagem de uma família de rodas**

São Paulo
2020

DEBORA NAOMI HIGA

**Metodologia para quantificação do efeito da pressão de contato em trilhos sujeitos à
passagem de uma família de rodas**

Versão Corrigida

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Área de concentração: Engenharia de
estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Alfredo Gay Neto.

São Paulo
2020

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Higa, Debora Naomi

Metodologia para quantificação do efeito da pressão de contato em trilhos sujeitos à passagem de uma família de rodas / D. N. Higa -- versão corr. -- São Paulo, 2020.

126 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Mecânica do contato 2.Contato 3.Roda-trilho 4.Master-master
5.Transportes de carga I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Agradecimentos

Agradeço aos meus pais, Neuza e Nivio, ao meu irmão Victor e ao meu companheiro Bruno, por todo apoio incondicional e paciência.

Agradeço ao professor Alfredo Gay Neto, pelos ensinamentos, dedicação, incentivos, motivação e oportunidades, que me fizeram evoluir imensamente durante a pesquisa.

Agradeço aos meus colegas do Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) pelo apoio, amizade e convivência durante minha jornada no mestrado.

Agradeço a todos os integrantes do projeto Cátedra Roda-Trilho e à Universidade de São Paulo.

Agradeço à Vale S.A. pelo apoio financeiro através do projeto Cátedra Roda-Trilho.

Resumo

A interação de contato entre a roda e o trilho em uma ferrovia tem forte influência no desempenho de todo o sistema ferroviário. Durante a operação, fenômenos indesejáveis podem ocorrer devido aos esforços que ocorrem no contato roda-trilho, como desgaste, fadiga por contato de rolamento, descarrilamento, entre outros. Os esforços no contato roda-trilho variam de acordo com as condições da via e da geometria dos perfis envolvidos. Há diversos modelos disponíveis para identificar a posição, a área de contato e os esforços envolvidos. No âmbito ferroviário, alguns processos de análise da interação roda-trilho foram desenvolvidos, dentre eles, um dos principais é o *pummelling*, que fornece uma medida de acúmulo de efeitos gerados em um par de trilhos devido à atuação de uma população de rodas com diferentes perfis geométricos.

O objetivo do presente trabalho é elaborar uma metodologia para avaliar o acúmulo de dano na estrutura de um par de trilhos baseada na metodologia *pummelling*. A primeira etapa do desenvolvimento do modelo consiste na descrição e parametrização geométrica dos perfis de rodas e trilhos. Em seguida, apresenta-se o desenvolvimento do modelo de contato quase estático, que utiliza a formulação *master-surface to master-surface*, porém com adaptações para o caso bidimensional, possibilitando obter solução analítica para o problema local de contato. Este modelo, utilizado para determinar a posição do contato, também é capaz de lidar com situações em que há mais de uma interação pontual e em que há superfície não convexa no contato. De posse da localização do contato e das características da via e do veículo em operação, as tensões normais advindas do contato podem ser avaliadas com base na teoria de Hertz, dentre outras metodologias disponíveis. Como resultados, são gerados diagramas de pressão acumulada no par de trilhos, causadas pela atuação da população de rodas considerada.

Um dos requisitos do presente projeto é a implementação do modelo em um programa computacional capaz de avaliar a interação roda-trilho de modo rápido – por ser um modelo bidimensional com poucos graus de liberdade – e gerar resultados realísticos – pois utiliza geometria de perfis reais. Os resultados obtidos neste modelo poderão ser utilizados como base para otimização de perfis de trilhos em trabalhos futuros.

Palavras-chave: roda-trilho, contato, mecânica do contato, *master-master*, otimização.

Abstract

The contact interaction between wheel and rail on a railroad has a strong influence on the performance of the entire railway system. During operation, undesirable phenomena may occur due to stresses in the wheel-rail contact, such as wear, rolling contact fatigue, derailment among others. These efforts vary according to the track conditions and the wheel and rail profiles geometry. There are many models to identify the position, the contact patch and the stresses that occur in the interaction between two bodies. In the railway field, some analysis processes of the wheel-rail interaction were developed, among them, *pummelling* is one of the most important, which gives a measure of accumulated effects induced on a pair of rails due to a wheel population performance.

This work aims to elaborate a methodology to evaluate the accumulated damage on a pair of rails structure based on the pummelling methodology. The first step of the model consists of the geometric description and parameterization of the wheel and rail profiles. Next, the development of the quasi-static contact model is presented, based on *master-surface to master-surface* formulation, but with adaptations to two-dimensional case, in which one employs an analytical solution for each local contact problem. This model, used to determine the contact locus, is also able to handle situations where there is more than one contact point and where there is nonconvexity on contact surfaces. Given the location of the contact and the characteristics of the track and the vehicle in operation, the normal stresses are calculated based on Hertz's or others theories. As result, diagrams of accumulated pressure in the pair of rails are generated, caused by the actuation of the considered wheels population.

One requirement of the present project is the implementation of the model in a computational program that will be able to evaluate the wheel-rail interaction quickly – due to the two-dimensional model with few degrees of freedom – and generate realistic results – because it uses geometry of real profiles. The results obtained from this model can be used as basis for optimization of rail profiles in future works.

Keywords: wheel/rail, contact, contact mechanics, *master-master*, optimization.

Lista de Figuras

Figura 3.1 – Contato conforme.	18
Figura 3.2 – Contato não conforme.....	18
Figura 3.3 – Esforços em um contato não conforme no ponto O	19
Figura 3.4 – Forças e momentos atuando na área de contato S	20
Figura 3.5 – Linha do tempo de modelos constitutivos de contato.....	23
Figura 3.6 – Franjas de interferência no contato entre duas lentes cilíndricas iguais com eixos inclinados a 45° : (a) sem carga, (b) sob carregamento.	24
Figura 3.7 – Distribuição da pressão de contato hertziana.	24
Figura 3.8 – Determinação de múltiplas elipses utilizando o métodos multi-hertzianos e as representações por elipses equivalentes.	26
Figura 3.9 – Interface de dois corpos elásticos em contato.	27
Figura 3.10 – Discretização da área de contato por faixas.	28
Figura 3.11 – Áreas de adesão (H) e deslizamento (S) na área de contato, segundo [26].	29
Figura 3.12 – Discretização da área de contato de acordo com o FASTSIM.....	29
Figura 3.13 – Área de contato potencial e a discretização da malha.	30
Figura 3.14 – (a) nó-nó. (b) nó-superfície. (c) superfície-superfície.....	32
Figura 3.15 – Superfícies candidatas ao contato dos corpos A e B e suas parametrizações com coordenadas convectivas.....	35
Figura 3.16 – Contato entre as superfícies Γ_{Ac} e Γ_{Bc}	36
Figura 3.17 – (a) Superfícies candidatas ao contato na configuração “i”; (b) Direção normal... 38	38
Figura 3.18 – Perfil de roda típica.	43
Figura 3.19 – Perfil de trilho típico.	44
Figura 3.20 – <i>Cant</i> e superelevação.	45
Figura 3.21 – Superelevação e esforços do veículo.....	45
Figura 3.22 – Condições de contato roda-trilho.	46
Figura 3.23 – Regiões funcionais de contato roda-trilho.....	47
Figura 3.24 – Condições de contato no trilho alto em curvas acentuadas.	48
Figura 3.25 – Efeitos do contato intenso em dois pontos.....	48
Figura 3.26 – (a) Desgaste excessivo da borda do trilho; (b) Esmerilhamento excessivo da borda do trilho; (c) execução de <i>cant</i> sem esmerilhamento.....	49
Figura 3.27 – Desgaste devido ao contato pontual intenso.	50

Figura 3.28 – Condição ideal de contato no trilho baixo.....	51
Figura 3.29 – Contato na borda do trilho baixo.....	51
Figura 3.30 – Contato na lateral do trilho baixo.....	52
Figura 3.31 – Rodas cavas em contato com a concavidade de trilhos baixos.....	52
Figura 3.32 – Efeito da posição de contato na diferença de raio de rolamento.....	53
Figura 3.33 – Roda cava.....	54
Figura 3.34 – Condições de contato de uma roda nova e uma roda cava.....	54
Figura 3.35 – Perfil trilho S49.....	56
Figura 3.36 – Parametrização de topo de trilho 141 RE com arcos de circunferência.....	56
Figura 3.37 –Parametrização de perfil de roda com arcos de circunferência: modelo AAR 1B wide flange.....	57
Figura 3.38 – (a) Local e área de contato de acordo com diferentes perfis. (b) Resultado do <i>pummelling</i> (PUMMEL): um perfil de trilho novo sujeito a carga de 1000 a 3000 eixos com rodas conhecidas.....	60
Figura 3.39 – Resultado do <i>pummelling</i> (PUMMEL): acumulado de tensões normais de trilho alto em curva de 400m de raio para três trilhos candidatos diferentes – análise com mais de 2000 rodas com geometria conhecida.....	60
Figura 3.40 – Resultado do <i>pummelling</i> (PUMMEL): acumulado de tensões normais em uma roda.....	61
Figura 3.41 – Resultado do <i>pummelling</i> PUMMEL: acumulado de tensões normais em uma roda devido a passagem sobre cinco trilhos diferentes.....	61
Figura 3.42 – Comparação das simulações no PUMMEL™ e no NUCARS™: (a) Tensão normal; (b) Tensão tangencial.....	62
Figura 4.1 – Descrição do arco de circunferência.....	65
Figura 4.2 – Direções das tangentes dos arcos de circunferencia (comum entre arcos consecutivos).....	66
Figura 4.3 – Pontos de um perfil de trilho.....	66
Figura 4.4 – Resultado de <i>Fitting</i> de perfil de trilho com arcos de circunferência.....	66
Figura 4.5 – Resultado do <i>Fitting</i> e pontos do perfil sobrepostos.....	67
Figura 4.6 – Graus de liberdade do sistema.....	68
Figura 4.7 – Aplicação dos esforços externos no modelo.....	70
Figura 4.8 – Combinações de pares curvas candidatas ao contato.....	71
Figura 4.9 – Coordenadas convectivas.....	72
Figura 4.10 – <i>Gap</i>	74

Figura 4.11 – <i>Gap</i>	76
Figura 4.12 – Fluxograma do processo de execução do programa.....	88
Figura 4.13 – Perfil do trilho “linearizado”.....	90
Figura 4.14 – Distribuição de pressão de contato em um trilho sujeito à ação de uma roda com um ponto de contato.....	91
Figura 4.15 – Distribuição de pressão de contato em um trilho sujeito à ação de uma roda com três pontos de contato.....	91
Figura 4.16 – Análise de acúmulo de pressão de contato.....	92
Figura 5.1 – Modelo na posição inicial.....	94
Figura 5.2 – Exemplo de contato não convexo. Posição inicial.....	95
Figura 5.3 – Modelo na posição final de equilíbrio.....	96
Figura 5.4 – Exemplo de contato não convexo. Posição de equilíbrio	96
Figura 5.5 – Ponto de contato em dos pares de contato.	97
Figura 5.6 – Deslocamento lateral no modelo.	98
Figura 5.7 – Truque (vista lateral).....	101
Figura 5.8 – Truque (vista frontal)	101
Figura 5.9 – Truque (vista de topo).....	102
Figura 5.10 – Perfis da roda e trilho esquerdos.	103
Figura 5.11 – Resultados dos deslocamentos laterais.....	105
Figura 5.12 – Exemplo de contato com múltiplos pontos. Posição de inicial.	107
Figura 5.13 – Exemplo de contato com múltiplos pontos. Posição de equilíbrio.....	107
Figura 5.14 – Detalhe no contato com múltiplos pontos (contato esquerdo).	107
Figura 5.15 – Detalhe no contato (contato direito).....	108
Figura 5.16 – Perfis das rodas. Unidades dos eixos em mm.	109
Figura 5.17 – Perfis dos trilhos. Unidades dos eixos em mm.	110
Figura 5.18 – Análise 1.....	112
Figura 5.19 – Análise 2.....	113
Figura 5.20 – Análise 3.....	113
Figura 5.21 – Análise 4.....	114
Figura 5.22 – Perfis das rodas. Unidades dos eixos em mm.	115
Figura 5.23 – Perfis dos trilhos. Unidades dos eixos em mm.	115
Figura 5.24 – Pressão de contato -Caso a 65 km/h.....	116
Figura 5.25 – Pressão de contato - Caso a 20 km/h.....	116
Figura 5.26 – Perfis das rodas – Caso de falso flange. Unidades dos eixos em mm.....	117

Figura 5.27 – Perfis dos trilhos – Caso de falso flange. Unidades dos eixos em mm.....	117
Figura 5.28 – Pressão de contato – Falso flange.....	118
Figura 5.29 – Falso flange.	118
Figura 0.1 – Exemplo de arquivo de entrada .txt.....	126

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Dados dos pontos de interseção entre os arcos para o design da roda.....	57
Tabela 3.2 – Dados dos centros das circunferências.	57
Tabela 5.1 – Dados do cenário para todas as análises.	99
Tabela 5.2 – Dados do cenário para simulação dinâmica.	100
Tabela 5.3 – Dados do truque e vagão para modelo MBD.	100
Tabela 5.4 – Descrição dos caso de simulação dos modelos quase estáticos.....	104
Tabela 5.5 – Posições laterais dos centros dos rodeiros no trecho de curva (6,1 – 17,2 s).	106

Sumário

1	Introdução.....	13
2	Objetivos	16
3	Revisão bibliográfica	17
3.1	<i>Mecânica do contato</i>	<i>17</i>
3.2	<i>Modelos constitutivos de contato.....</i>	<i>22</i>
3.2.1	Contato normal	23
3.2.2	Contato tangencial.....	28
3.3	<i>Modelos numéricos para identificação e tratamento do contato.....</i>	<i>31</i>
3.3.1	Problema geométrico do contato	31
3.3.2	Formulação <i>master-surface to master-surface</i>	31
3.3.3	Métodos para análise do contato roda-trilho	39
3.4	<i>Geometria do contato roda-trilho.....</i>	<i>41</i>
3.4.1	Condições de contato em diferentes cenários.....	46
3.4.2	Métodos de descrição da geometria dos perfis.....	54
3.5	<i>Métodos de avaliação de perfis de roda e trilho e otimização da interação de contato.....</i>	<i>58</i>
4	Desenvolvimento.....	63
4.1	<i>Metodologia de análise do contato roda-trilho.....</i>	<i>63</i>
4.1.1	Descrição dos perfis geométricos de roda e trilho	64
4.1.2	Modelo quase estático para interação de contato roda-trilho.....	67
4.1.3	Formulação de contato - <i>master-master 2D</i>	71
4.2	<i>Implementação do código computacional.....</i>	<i>85</i>
4.3	<i>Comparação com simulação em software comercial.....</i>	<i>89</i>
4.4	<i>Metodologia para análise de acúmulo de pressão de contato.....</i>	<i>89</i>
5	Exemplos numéricos	93
5.1	<i>Análise de contato com superfícies não convexas.....</i>	<i>93</i>
5.2	<i>Análise comparativa entre o modelo quase estático proposto e simulações dinâmicas de multicorpos.....</i>	<i>97</i>
5.2.1	Modelo MBD	99

5.2.2	Modelo quase estático	102
5.3	<i>Análise de acúmulo de pressão de contato roda-trilho</i>	108
5.4	<i>Influência da velocidade de operação na posição do contato</i>	114
5.5	<i>Estudo de falso flange</i>	117
6	Conclusões e sugestões para trabalhos futuros	119
	Referências	121
	Apêndice A – Exemplo de arquivo de entrada para o programa computacional desenvolvido	126

1 Introdução

O transporte ferroviário mostra-se muito eficiente no que diz respeito à quantidade de carga transportada por longas distâncias. Podemos citar como suas principais vantagens a grande capacidade de carga, a adequabilidade para longas distâncias, a elevada eficiência energética, o baixo custo de transporte, o baixo custo de manutenção, maior segurança em relação ao transporte rodoviário - poucos acidentes, furtos e roubos - e a menor emissão de poluentes [1]. Devido a essas características, este modo de transporte apresenta-se muito abrangente em todo o mundo.

Segundo o Ministério dos Transportes, Portos e Aviação Civil [1], a malha ferroviária brasileira possui em torno de 30,6 mil quilômetros de extensão, sendo responsável pela movimentação de 503,8 milhões de toneladas úteis e 25% o transporte de toda a carga no Brasil em 2016.

A alta eficiência energética desse meio de transporte deve-se à baixa perda de energia na interação de metal com metal no contato entre a roda e o trilho, segundo Shevtsov [2]. Assim sendo, o desempenho dos trilhos e rodas é extremamente importante para o sucesso econômico do transporte ferroviário de cargas pesadas e para sua operação com segurança [3].

De acordo com Roney [4], rodas e trilhos são responsáveis pelo maior custo de operação de um mesmo material no sistema ferroviário. Aproximadamente 9700 quilômetros de trilho (equivalente a mais de 1,2 milhões de toneladas) foram substituídos em 2013 nas ferrovias norte americanas, o que correspondeu a um custo superior a US\$ 4,4 bilhões. No caso das rodas, são produzidas aproximadamente 1,4 milhões por ano, custando cada uma em média US\$ 1500 (incluindo a mão de obra).

Apesar dos grandes avanços nos sistemas de transportes ferroviários, alguns problemas associados ao contato roda-trilho ainda persistem, como descarrilamento, desgaste excessivo, fadiga por contato de rolamento (RCF), ruído, entre outros [2].

Os esforços no contato roda-trilho entre o veículo e o trilho são transmitidos através de uma pequena área de contato. Estes produzem tensões na roda e no trilho, podendo gerar algum ou combinações de danos na área do contato e/ou na sua vizinhança [5].

A mecânica do contato é um dos principais e o mais tradicional campo de estudo no que se refere ao contato de rolamento entre roda e trilho. Embora as características dos veículos e vias variem imensamente, as leis da física, que incluem as teorias da mecânica do contato,

permanecem as mesmas, aplicando-se a todas as ferrovias, independentemente do país, carga e curvatura da via [6]. Estudos nessa área vêm trazendo desenvolvimento e aperfeiçoamento de tecnologias proporcionando melhorias tanto nos veículos quanto na via.

O campo da mecânica do contato inclui o estudo da geometria do contato. No contexto ferroviário, a geometria do contato permeia toda faceta da interação roda trilho, apresentando profundos efeitos no desgaste, fadiga, corrugação, estabilidade e potencial de descarrilamento. Portanto, perfis (geométricos) de roda e trilho têm efeitos significantes na vida útil de seus elementos e no desempenho do veículo. As condições de contato são fortemente relacionadas aos formatos dos perfis e à compatibilidade entre eles. Logo, formas dos perfis da roda e do trilho precisam ser combinadas adequadamente para garantir condições de contato vantajosas.

Durante a operação, o contato ocorre em porções específicas da roda e do trilho, e não sobre toda a superfície dos perfis. Consequentemente, o desgaste muda o formato tanto da roda quanto do trilho. Além disso, a posição do contato pode variar dependendo do trecho da via. Em trechos retilíneos ou em curvas muito suaves, geralmente, o contato ocorre entre o topo do trilho e a pista da roda. Já em trechos de curvas acentuadas, a borda do trilho alto contata o flange da roda devido à força centrífuga.

Tendo em vista os problemas citados, os fatores que os influenciam e os estudos desenvolvidos na área, buscam-se maneiras de atenuar e evitar os danos causados na interação roda-trilho. Uma das técnicas para melhorar o desempenho do sistema é o projeto de perfis otimizados. Segundo Magel e Kalousek [6], perfis otimizados de roda e trilho são aqueles que fornecem o melhor desempenho para uma dada aplicação. Esse desempenho é geralmente avaliado por parâmetros como resistência ao desgaste, resistência à fadiga, resistência ao desenvolvimento de corrugação, minimização da razão entre os esforços laterais e verticais na interação roda-trilho, maximização da estabilidade e minimização do ruído.

Frequentemente trilhos desgastados são reperfilados, sendo transformados em perfis diferentes do formato original, otimizados de acordo com a posição específica do trilho na ferrovia (tangente ou curva, trilho alto ou baixo) [5].

Perfis otimizados controlam a distribuição de desgaste e fadiga para restringir desfavoráveis mudanças na geometria do perfil, estendendo, assim, a vida do componente. Uma das técnicas de otimização de perfis é o *pummelling*. Este processo busca reduzir o carregamento concentrado em qualquer ponto na superfície da roda e do trilho, procurando distribuir a ação do contato de maneira a não sobrecarregar uma única região da roda e do trilho.

Os formatos dos perfis da roda e do trilho devem ser combinados adequadamente para garantir condições de contato vantajosas. Portanto, análises sistemáticas que empregam mecânica do contato e dinâmica dos veículos devem ser conduzidas antes de adotar novos perfis.

Nesse campo, desafios como desenvolver modelos teóricos mais confiáveis e eficientes e métodos numéricos para contatos de rolamento ainda persistem. Em vista disso, o presente trabalho apresenta os objetivos a seguir.

2 Objetivos

O presente trabalho busca propor um modelo de análise da interação de contato entre roda e trilho, baseado no cálculo da pressão de contato, para prever regiões propensas a sofrer danos, como fadiga por contato de rolamento e desgaste, no boleto do trilho submetido à passagem de uma população de rodas com diferentes perfis geométricos.

É desenvolvido e implementado um modelo em um programa computacional de rápido processamento capaz de avaliar o contato entre diferentes perfis de rodas e trilhos reais, fornecendo como resultado parâmetros para qualificar o desempenho dos perfis por meio da metodologia de *pummelling*.

3 Revisão bibliográfica

O presente capítulo apresenta definições e conceitos da literatura que fundamentam o trabalho aqui desenvolvido. O item 3.1 apresenta conceitos básicos sobre Mecânica do contato. O item 3.2 apresenta modelos constitutivos de contato desenvolvidos para calcular a área e esforços no contato. No item 3.3 são apresentados modelos para identificação e tratamento do contato, bem como o cálculo para localização da posição de contato. O item 3.4 aborda a importância e a influência da geometria do contato roda trilho. Por fim, o item 3.5 discorre sobre avaliação de perfis de roda e trilho e otimização da interação de contato.

3.1 Mecânica do contato

A análise do contato depende da geometria das superfícies da roda e do trilho. Na dinâmica ferroviária um procedimento padrão é seguido para determinar as forças no contato para uma dada configuração de roda e trilho. Primeiro, a força normal ao plano tangente das superfícies no contato é determinada. Em seguida, usando esta força normal, as propriedades geométricas, as propriedades do material e as velocidades relativas entre a roda e o trilho, pode-se determinar a força de *creep* e o momento de *spin* – conceitos que serão explicados a seguir [7].

De acordo com as superfícies dos corpos, o contato pode ser classificado em conforme e não conforme. O contato é dito conforme se as superfícies dos dois corpos possuem aproximadamente o mesmo raio de curvatura no contato, encaixando-se perfeitamente ou muito próximo (Figura 3.1). O contato é não conforme se o primeiro contato se dá a partir de um ponto ou uma linha [8] (Figura 3.2). Se uma força externa é aplicada em cada corpo, os dois corpos irão se deformar no ponto de contato formando uma área de contato. Em casos de contato conforme, há uma maior distribuição de esforço e como consequência uma menor pressão, devido à maior área de contato, enquanto no contato não conforme há uma maior concentração de tensão.

Figura 3.1 – Contato conforme.

Fonte: Autoria própria.

Figura 3.2 – Contato não conforme.

Fonte: [9] (adaptado).

Há três tipos de movimentos entre as superfícies de contato: o rolamento, o deslizamento e o *spin*, como mostra a Figura 3.3.

O deslizamento é definido como a velocidade linear relativa entre as superfícies no contato.

$$\Delta v = v_1 - v_2 = V_1 - V_2. \quad (3.1)$$

O rolamento é definido como a velocidade angular relativa entre os corpos em relação ao eixo pertencente ao plano tangente às superfícies no contato.

$$\begin{aligned} \Delta \omega_x &= \omega_{x1} - \omega_{x2} = \Omega_{x1} - \Omega_{x2}, \\ \Delta \omega_y &= \omega_{y1} - \omega_{y2} = \Omega_{y1} - \Omega_{y2}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

O *spin* é definido como a velocidade angular relativa em torno do eixo normal ao plano tangente às superfícies no contato.

$$\Delta\omega_z = \omega_{z1} - \omega_{z2} = \Omega_{z1} - \Omega_{z2}. \quad (3.3)$$

Figura 3.3 – Esforços em um contato não conforme no ponto O .

Fonte: [8] (adaptado).

Os esforços transmitidos em uma área de contato são: a força normal, as forças tangenciais (atrito), os momentos de rolamento e o momento de *spin* (Figura 3.4).

A força normal (P) é definida como a integral da pressão normal (p) na área (S) de contato:

$$P = \int_S p \, dS. \quad (3.4)$$

As forças tangenciais (Q_x e Q_y) são definidas como a integral das tensões tangenciais (q_x e q_y) na área de contato (S):

$$\begin{aligned} Q_x &= \int_S q_x \, dS, \\ Q_y &= \int_S q_y \, dS. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Os momentos de rolamento (M_x e M_y) são definidos como as resultantes dos momentos em relação ao plano tangente (py e px) na área de contato (S):

$$\begin{aligned} M_x &= \int_S py \, dS, \\ M_y &= - \int_S px \, dS. \end{aligned} \quad (3.6)$$

O momento de spin (M_z) é definido como a resultante dos momentos em relação ao eixo normal ($-q_x y + q_y x$) na área de contato (S):

$$M_z = \int_S (-q_x y + q_y x) dS. \quad (3.7)$$

Figura 3.4 – Forças e momentos atuando na área de contato S .

Fonte: [8].

Para determinar as tensões nos corpos em contato e os deslocamentos nas superfícies, Johnson [8] fez um extenso estudo assumindo os corpos como semiespaços elásticos, considerando as deformações pequenas o suficiente para a aplicação da teoria da elasticidade e as dimensões do contato muito menores que as dimensões dos corpos.

Primeiramente fez-se a análise em duas dimensões espaciais, para isso, foram utilizadas como ferramentas as equações de equilíbrio e compatibilidade, o estado plano de deformação e a Lei de Hooke. Depois, o estudo foi feito no espaço (3D), utilizando as equações de equilíbrio e compatibilidade, a Lei de Hooke e as funções potenciais de Boussinesq e Cerruti.

Outro conceito na mecânica do contato de grande importância no sistema ferroviário é o *creepage* que será explorado a seguir. Devido à elasticidade dos corpos e à carga normal externa aplicada, alguns pontos da superfície na região do contato podem deslizar ou aderir quando os dois corpos apresentam movimento relativo entre si. A diferença entre as deformações tangenciais dos corpos na área em que há adesão resulta em um deslizamento relativo pequeno. Esse deslizamento é chamado de *creepage* ou *creep* e é definido como a velocidade relativa entre corpos no contato.

Considerando um veículo movendo-se na direção $-Ox$ com velocidade V , e o eixo Oz normal à superfície de contato, temos que o *creepage* longitudinal é dado por:

$$\gamma_1 = \frac{v_x^w - v_x^r}{V}, \quad (3.8)$$

o *creepage* lateral é dado por:

$$\gamma_2 = \frac{v_y^w - v_y^r}{V}, \quad (3.9)$$

o *spin creepage* é dado por:

$$\omega_1 = \frac{\Omega_z^w - \Omega_z^r}{V}, \quad (3.10)$$

com

$$V = \frac{v_x^w + v_x^r}{2}, \quad (3.11)$$

onde V_x^w e V_y^w são, respectivamente, as velocidades de corpos rígido da roda em relação as direções x e y, V_x^r e V_y^r são as velocidades de corpos rígido do ponto de contato do trilho e Ω_z^w e Ω_z^r são as velocidades angulares da roda e do trilho em torno do eixo z [10].

Creepages geram forças de *creep* e momentos chamados de *spin creep*. As forças de *creep* e momentos de *spin creep* são gerados durante a interação roda-trilho quando o movimento da roda relativo ao do trilho é uma combinação de rolamento e deslizamento. Essas forças de *creep* e *spin creep* têm efeito significativo na condução e estabilidade do sistema de veículo ferroviário [7]. Por esta razão, em análises dinâmicas de sistemas ferroviários, é essencial que o fenômeno de *creep* seja considerado. Contudo, no presente trabalho, é proposta uma metodologia de modelagem sem inserção do atrito para análise de um cenário bastante particular: a condição de regime permanente de movimento em reta/curva, em que a posição média lateral do rodéiro e suas condições de contato são avaliadas. Isso é detalhado e discutido no item 4.1.

3.2 Modelos constitutivos de contato

Vários modelos de contato são utilizados em diferentes formulações computacionais para obtenção dos esforços no contato e assim descrever a interação roda-trilho. A presente seção apresentará os modelos mais relevantes para o estudo do contato roda-trilho, bem como seus principais aspectos. A Figura 3.5 apresenta uma linha do tempo com os modelos constitutivos de contato que serão descritos.

Figura 3.5 – Linha do tempo de modelos constitutivos de contato.

Fonte: Autoria própria.

3.2.1 Contato normal

3.2.1.1 Teoria de Hertz

Dadas as configurações da roda e do trilho, existem muitos modelos para representar o problema do contato normal. Os principais são a Teoria de Hertz e os modelos não hertzianos.

A teoria de Hertz é amplamente utilizada para estudar a dinâmica e a mecânica do contato entre roda e trilho e serve de fundamento para muitas teorias para cálculo dos esforços tangenciais no contato, tanto empíricas como analíticas. Ela pode ser utilizada para calcular a área de contato e a pressão normal do contato, baseando-se nas seguintes hipóteses:

- As superfícies são contínuas, lisas e não conformes;
- As deformações são pequenas;
- Cada sólido é considerado como um semiespaço elástico, homogêneo e isotrópico;
- Não há atrito entre as superfícies;
- Após a aplicação dos esforços e deformação, a área de contato é plana e paralela ao plano tangente às superfícies no contato.

A partir de um experimento de contato entre lentes cilíndricas, Hertz determinou que o formato da área do contato não conforme é elíptico (Figura 3.6). E, a partir das hipóteses, concluiu-se que a pressão tem uma distribuição semi-elipsoidal na área de contato (Figura 3.7).

Figura 3.6 – Franjas de interferência no contato entre duas lentes cilíndricas iguais com eixos inclinados a 45°: (a) sem carga, (b) sob carregamento.

Fonte: [8].

Figura 3.7 – Distribuição da pressão de contato hertziana.

Fonte: [5].

As maiores limitações da teoria de contato de Hertz são as hipóteses de que o contato ocorre a partir de um único ponto (formando uma área elíptica de contato após aplicação de esforços), os semieixos da elipse são muito menores que os raios de curvatura das superfícies de contato e que essas curvaturas são constantes na vizinhança do ponto de contato. Como resultado, as dimensões da área de contato dada pela teoria de Hertz só fornecerão resultados coerentes em casos bastante particulares e idealizados. Situações em que as curvaturas envolvidas não são constantes localmente e ainda quando há possibilidade de múltiplas zonas de contato levam à não obediência das hipóteses de Hertz. As curvaturas da roda e do trilho podem variar significativamente através da largura da área de contato, particularmente para o caso de

rodas e trilhos desgastados no contato do flange da roda [11]. Por esse motivo, apesar de modelos hertzianos serem comumente empregados (inclusive no presente trabalho), seus resultados devem ser sempre questionados à luz das hipóteses simplificadoras bastante fortes que idealizam cenários em que o modelo hertziano fornece resultados válidos.

3.2.1.2 Modelos não hertzianos

Muitas teorias de contato normal não hertzianas e semi-hertzianas vêm sendo usadas para descrever melhor o contato normal roda-trilho. Algumas dessas teorias são modificações da teoria de Hertz, e algumas são baseadas em princípios diferentes. De acordo com Meymand et al. [11], as teorias de contato normal podem ser classificadas em três categorias principais:

- Modelo não hertziano de Kalker;
- Modelos multi-hertzianos aproximados;
- Modelos de penetração virtual aproximados.

O modelo não hertziano de maior sucesso para aplicação para geometria roda-trilho é a teoria de contato de rolamento tridimensional exata de Kalker [12] [13], que foi implementada no *software* CONTACT (*software* que resolve numericamente problemas de contato normal e tangencial) [14].

Assim como o modelo hertziano, a teoria exata de Kalker apresenta a roda e o trilho como semiespaços elásticos com o raio de curvatura da superfície muito maior que as dimensões da área de contato. A teoria, no entanto, é capaz de lidar com áreas de contato não elípticas e múltiplas regiões de contato. Esse modelo é considerado muito preciso para contatos não hertzianos, isto é, casos em que a forma do contato deriva do formato hertziano, mas o contato ainda não é conforme. Uma versão modificada da teoria exata de Kalker, conhecida como teoria de contato conforme ou teoria de Li-Kalker [15] [16], permite resolver casos de contato conforme [11].

Segundo Meymand et al. [11], modelos multi-hertzianos são modelos aproximados baseados em representar interfaces entre corpos em contato como uma série de elipses hertzianas e, frequentemente, representar uma superfície equivalente ao invés de elipses múltiplas. Pascal e Sauvage [17] propuseram calcular a interpenetração das superfícies baseado na teoria hertziana. Essa abordagem permite calcular as dimensões de elipses do contato

múltiplo. Pascal e Sauvage [17] também incorporou uma inovação em seu método determinando elipses secundárias em adição à elipse principal. Piotrowski e Chollet [18] propuseram modificar este método para utilizar a deformação de Boussinesq ao invés da deformação hertziana a fim de evitar falsos “contatos secundários” adjacentes à borda do primeiro contato. Isto fez a distância de deformação uma curva em formato de sino ao invés de um semi-elipsoidal (Figura 3.8).

Figura 3.8 – Determinação de múltiplas elipses utilizando o métodos multi-hertzianos e as representações por elipses equivalentes.

Fonte: [5] (adaptado).

O método de Pascal e Sauvage [17] para determinar contatos secundários permaneceu inexplicável até Pascal e Jourdan [19] desenvolverem seu método multi-hertziano rígido. Eles introduziram o conceito de *gutters* como as áreas de contato proibidas. Utilizando informações das bordas do *gutter*, puderam calcular a máxima interpenetração rígida local, e consequentemente determinar as elipses secundárias.

Posteriormente, Pascal e Sauvage [20] utilizaram conhecimentos pré-computados dos parâmetros de contato (ângulo de contato, raio de rolamento, características da elipse, e o ângulo de rotação do rodeiro) para calcular as áreas de contato, obtendo uma elipse equivalente de acordo com resultante dos esforços de contato. Similarmente, Ayasse et al. [21] propuseram tabelas pré-calculadas e uma formulação analítica como uma função da carga normal para simplificar os cálculos de contatos não hertzianos. Apesar de a elipse equivalente poder ser usada para simulações dinâmicas de veículos ferroviários, ela não é utilizável para estudar fenômenos complexos como previsão de desgaste onde análises de tensões nas superfícies são

necessárias. As tabelas pré-calculadas ou formulações analíticas necessárias para esses métodos não são aplicáveis quando perfis variam ao longo do trilho.

Complementando o contato multi-hertziano, um outro método conhecido como método de penetração virtual tem sido utilizado para resolver problemas de contato normal. No conceito de penetração virtual, as deformações elásticas são desprezadas e assume-se que os corpos podem penetrar rigidamente entre si (Figura 3.9). O método assume que a roda e o trilho são dois corpos de revolução e que a distribuição de pressão normal é similar à teoria de Hertz, na direção do rolamento. É por isto que o método é chamado de semi hertziano.

Figura 3.9 – Interface de dois corpos elásticos em contato.

Fonte: [5] (adaptado).

Piotrowski et al. [22] e Linder et al. [23] propuseram métodos para calcular a pressão e a área de contato. Comparações de zonas de contato geradas pelo modelo de penetração virtual de Piotrowski et al. [22] com resultados obtidos do software CONTACT se mostraram diferentes em alguns aspectos. Ayasse e Chollet [24] propuseram um outro modelo não hertziano de contato conhecido como STRIPES. Nele, a região de interpenetração é discretizada com faixas paralelas a direção do rolamento (Figura 3.10). Em cada faixa as condições de Hertz são consideradas localmente e as tensões são calculadas em cada uma. A acurácia do método foi comparada ao programa CONTACT para diferentes condições. Resultados mostram que o método é confiável e rápido para casos não hertzianos e exato para casos hertzianos. Em geral, os métodos de penetração virtual têm a vantagem de contar com a influência da curvatura na área de contato no *spin* local. Sichani et al. [25] modificaram o método de penetração virtual

incluindo o efeito da deformação elástica, baseando-se nas premissas do contato de Hertz. Esse método foi implementado em um algoritmo chamado ANALYN, e os resultados mostram melhora na precisão na previsão da área do contato [11].

Figura 3.10 – Discretização da área de contato por faixas.

Fonte: [5].

3.2.2 Contato tangencial

A maioria dos modelos propostos para descrever e resolver problemas do contato tangencial atualmente em uso baseia-se na geometria da área de contato. A seguir serão descritos os principais estudos no tema.

Em 1979, Kalker [12] propôs uma relação linear entre *creepages* e forças de *creep* para o caso de contato hertziano, aplicável para casos em que o deslizamento é próximo de zero, ou seja, em casos de *creepages* muito pequenos. Essa teoria prevê que quanto maior o *creepage*, maior será a força de *creep*, porém, sabe-se que a medida que o *creepage* aumenta e tende ao infinito a força de *creep* tende a se estabilizar (saturação do esforço tangencial). Portanto, à medida que o *creepage* se torna significativo, a área de deslizamento não pode ser desprezada.

A teoria de Vermuelen e Johnson [26] assume um contato de rolamento com deslizamento finito e desprezando o *spin creepage*, admitindo a área de contato elíptica. Nessa teoria, a área de contato divide-se em duas regiões – a área de adesão e a de deslizamento (Figura 3.11). Contudo, a utilização dessa teoria gera erros de até 25%, fornecendo valores de esforços mais altos do que os resultados obtidos de experimentos.

Figura 3.11 – Áreas de adesão (H) e deslizamento (S) na área de contato, segundo [26].

Fonte: [5].

Depois da teoria linear, Kalker [27] propôs uma teoria simplificada e um código para cálculo de forças de *creep* de *creepages* dados. Em seguida, transformou o problema de integração da sua teoria simplificada em um problema adimensional, transformando o formato de contato elíptico em circular com raio unitário, que resultou no desenvolvimento do algoritmo chamado FASTSIM. Nesse algoritmo, a área do contato é dividida em fatias paralelas na direção do rolamento (com largura Δy), e cada fatia é dividida em seções (com largura Δx) (Figura 3.12). Utilizando métodos numéricos, a tensão tangencial nas direções laterais e longitudinais são calculadas e multiplicadas pelas áreas ($\Delta x \Delta y$). As tensões de cada fatia são integradas na área de contato total gerando o as forças de *creep* totais.

Figura 3.12 – Discretização da área de contato de acordo com o FASTSIM.

Fonte: [5].

Em 1990, Polach propôs um algoritmo rápido e um código computacional para prever as forças de *creep* em [28] e [29]. Esse método leva em conta a geometria do contato, *creepages* e condições de *spin*, além de assumir uma área de contato elíptica e basear-se na distribuição de tensões normais hertziana. O tempo computacional deste método é mais rápido do que os já conhecidos CONTACT e FASTSIM. Esta eficiência computacional deve-se ao fato de que, ao

contrário das teorias exata e simplificada de Kalker, ele resolve o problema analiticamente ao invés de numericamente. O método assume que a área de contato é dividida em áreas de adesão e deslizamento. A solução assume um crescimento linear das tensões tangenciais para a área de adesão, começando do zero na borda. As forças tangenciais de contato são determinadas integrando as tensões na área de contato.

Para levar em conta o efeito de *spin creepage*, Polach [29] calculou as forças laterais causadas por *spin* separadamente. Tanto o momento causado pelo *spin*, quanto o momento causado pelo *creepage* lateral são desprezados.

Em 1986, Kalker desenvolveu sua teoria de rolamento 3D exata utilizando o princípio dos trabalhos virtuais no problema do contato [13] e [30]. Essa teoria é baseada na hipótese do semiespaço, pois a área de contato é muito pequena em relação as dimensões dos corpos. Além disso, Kalker resolveu seu problema de contato 3D exato para corpos homogêneos e materiais elásticos lineares. Para resolver numericamente os problemas normais e tangenciais, assume-se uma “potencial área de contato” retangular. Ela é discretizada em elementos de dimensões Δx e Δy , como indica a Figura 3.13, sendo a pressão em cada elemento admitida uniforme. Para cada elemento, determina-se se ocorre adesão, deslizamento ou se a área é externa ao contato.

O software CONTACT foi desenvolvido baseado na teoria de contato de rolamento 3D exata de Kalker [13], que atualmente é o método preferível para resolução de problemas de contato roda-trilho quando o tempo computacional não é uma preocupação. [11].

Figura 3.13 – Área de contato potencial e a discretização da malha.

Fonte: [5] (adaptado).

3.3 Modelos numéricos para identificação e tratamento do contato

3.3.1 Problema geométrico do contato

A posição do contato entre os corpos não é necessariamente conhecida a priori ou constante ao longo do tempo, evidenciando a complexidade da modelagem de tal fenômeno. Na mecânica dos sólidos, o contato pode ser tratado como um vínculo mecânico, o qual depende dos deslocamentos entre ambos os corpos.

Hoje existem vários métodos para o cálculo do local do contato. O item a seguir exhibe algumas dessas metodologias e detalha a formulação *master surface to master surface*, que terá maior importância neste trabalho.

3.3.2 Formulação *master-surface to master-surface*

Como dito anteriormente, a obtenção do local do contato é um problema complexo. No caso da aplicação do Método dos Elementos Finitos (MEF) – um dos métodos mais utilizados para solucionar problemas de mecânica computacional – no problema de contato, as metodologias usuais podem ser enquadradas nas categorias tipo nó-nó, nó-superfície e superfície-superfície [31].

As formulações nó-nó (Figura 3.14a) apresentam caráter mais simples, mas consideravelmente limitado. Nesse caso, é necessário prescrever os pares de nós candidatos a contato, estabelecendo uma função *gap* para cada par. A função *gap* (indicada como **g** na Figura 3.14) representa a mínima distância entre os pontos das superfícies. Quando houver penetração, a contribuição do contato é incluída no modelo. Naturalmente, para grandes deslocamentos, o par de nós onde ocorre contato pode mudar, comportamento não capturado pelo presente modelo.

As formulações nó-superfície (*master-slave*) definem nós (*slaves*) e uma superfície (*master*). Para cada ponto é definida uma função *gap* em relação à sua distância à superfície. As funções *gap* de cada ponto são avaliadas segundo um problema local de contato, sendo assumido contato pontual, adicionando a contribuição ao modelo, quando houver penetração.

Nesse caso, por um lado, é possível simular a modificação do ponto de contato quando há grandes deslocamentos. Por outro, o custo computacional necessário é maior, especialmente face à necessidade de representar uma das superfícies por diversos pontos, e resolver, para cada um deles, um problema local de contato que envolve um procedimento iterativo (Figura 3.14b).

Os métodos superfície-superfície (*master-master*) não distinguem superfícies *slave* ou *master*, avaliando o *gap* entre as superfícies como um todo. Em uma abordagem pontual, esses métodos permitem avaliar a posição do contato de maneira mais eficiente. Além disso, geralmente apresentam melhor desempenho numérico, mas maior complexidade (Figura 3.14c) [31].

A Figura 3.14 mostra os métodos de contato descritos, as descrições das superfícies candidatas ao contato e a função *gap*.

Figura 3.14 – (a) nó-nó. (b) nó-superfície. (c) superfície-superfície.

Fonte: [32] (adaptado).

Nomeada pelos autores Gay Neto et al. [31] [32] como *master-surface to master-surface*, a metodologia aborda o método superfície-superfície, uma vez que as duas superfícies candidatas ao contato são parametrizadas segundo coordenadas convectivas.

A metodologia assume contato pontual entre as superfícies. Tal hipótese é a principal simplificação do modelo, correspondendo à representação de uma carga distribuída por uma carga pontual. Assim, é importante reconhecer as limitações do modelo na representação de fenômenos onde ocorre contato conforme, como, por exemplo, superfícies paralelas. Os autores colocam que tais problemas podem ser relativizados pela definição de múltiplos pares de superfícies, levando à criação de diversas interações pontuais. No entanto, esse procedimento está longe de ser trivial. Outra hipótese adotada é a convexidade das superfícies candidatas, o que garante a existência de um único par de pontos representando o contato entre as superfícies.

Na presente metodologia, o contato é avaliado segundo uma única função *gap* – que calcula a distância entre pontos – definida entre o par de superfícies. Cada superfície é parametrizada segundo as coordenadas convectivas dos graus de liberdade e seus respectivos valores, e a função *gap* é estipulada a partir de tais parametrizações.

Evidentemente, o problema local de contato a ser resolvido entre duas superfícies é mais complexo que o entre pontos e superfícies, como no caso do método *master-slave*. Entretanto, tal problema é resolvido uma única vez na metodologia *master-master*, ao passo que deve ser avaliado múltiplas vezes na outra metodologia, pelo maior número de testes em diversos pontos *slave* a serem avaliados, a fim de determinar qual seria aquele no qual o contato pontual ocorre.

Adicionalmente, o método *master-surface to master-surface*, ao parametrizar as superfícies em sua totalidade permite modelar uma variação contínua dos pontos de contato entre os corpos. Para modelagens *master-slave*, por outro lado, quando há movimento relativo entre superfícies (por exemplo deslizamento), há mudança de pontos de detecção de contato ao longo da evolução do sistema. A discretização de pontos *slave* pode, adicionalmente, gerar ruídos não físicos nos resultados, advindos das mudanças de posição discretas do contato.

3.3.2.1 Formulação do contato entre superfícies

Essa seção apresenta a formulação *master-master*, desenvolvida por Gay Neto et al. [31], empregada no desenvolvimento da metodologia de análise do contato roda-trilho do presente trabalho.

Sejam os corpos candidatos ao contato B_A e B_B e suas respectivas superfícies candidatas a contato, segundo uma busca de proximidade global, Γ_A e Γ_B . Cada uma das superfícies será

parametrizada segundo um par de coordenadas convectivas ζ_A, θ_A e ζ_B, θ_B respectivamente. Definem-se, então, vetores de coordenadas convectivas:

$$\mathbf{c}_A = [\zeta_A \quad \theta_A]^T, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{c}_B = [\zeta_B \quad \theta_B]^T, \quad (3.13)$$

Assim, pode-se definir um vetor $\mathbf{c}$ do seguinte modo:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_A \\ \mathbf{c}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \zeta_A \\ \theta_A \\ \zeta_B \\ \theta_B \end{bmatrix}. \quad (3.14)$$

A Figura 3.15 ilustra os corpos e superfícies candidatas ao contato, descritas por suas coordenadas convectivas.

Figura 3.15 – Superfícies candidatas ao contato dos corpos A e B e suas parametrizações com coordenadas convectivas.

Fonte: [31]

Em adição às coordenadas convectivas, a descrição das superfícies Γ_A e Γ_B também depende das transformações (deslocamentos e rotações) dos corpos em um dado instante. Nesse sentido, define-se para B_A e B_B os vetores de deslocamentos generalizados $\mathbf{d}_A$ e $\mathbf{d}_B$. De forma compacta:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix}. \quad (3.15)$$

Refletindo a dependência da descrição das superfícies às respectivas coordenadas convectivas e deslocamentos generalizados, pode-se escrever (com acento circunflexo denotando função):

$$\begin{aligned} \Gamma_A &= \hat{\Gamma}_A(\mathbf{c}_A, \mathbf{d}_A), \\ \Gamma_B &= \hat{\Gamma}_B(\mathbf{c}_B, \mathbf{d}_B). \end{aligned} \quad (3.16)$$

Definidas as superfícies, é possível definir uma função gap $\mathbf{g}$ para medir a distância entre pontos genéricos no par de superfícies, definida como:

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\Gamma_A - \Gamma_B). \quad (3.17)$$

Quando há contato entre os corpos estabelecem-se superfícies Γ_{Ac} e Γ_{Bc} contidas em Γ_A e Γ_B respectivamente onde ocorre o contato e penetração, conforme a Figura 3.16. Tais superfícies são representadas por pontos $(\bar{\zeta}_A, \bar{\theta}_A)$ e $(\bar{\zeta}_B, \bar{\theta}_B)$, contidos em Γ_{Ac} e Γ_{Bc} , respectivamente, os quais podem mudar ao longo da evolução do problema. Tal tratamento simplificado da superfície de contato – reduzida a um ponto de contato – reflete a simplificação de contato pontual postulada anteriormente.

Figura 3.16 – Contato entre as superfícies Γ_{Ac} e Γ_{Bc} .

Fonte: [31]

A escolha dos pontos de contato é efetuada segundo a solução do problema local de contato entre as superfícies ou, analogamente, máxima penetração, quando houver. Ou seja, a solução do problema local de contato entre Γ_A e Γ_B retorna um par de pontos, em Γ_{Ac} e Γ_{Bc} , descritos por $\bar{\mathbf{c}}^T = [\bar{\mathbf{c}}_A^T \ \bar{\mathbf{c}}_B^T] = [\bar{\zeta}_A \ \bar{\theta}_A \ \bar{\zeta}_B \ \bar{\theta}_B]$ que representam as superfícies de contato pontualmente.

Sabe-se, de resultados da álgebra linear e de interpretações geométricas que os pontos de mínima distância, ou analogamente, de máxima penetração, têm como condição necessária a chamada condição de ortogonalidade, descrita pela expressão a seguir:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ \Gamma_{A,\theta_A} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\zeta_A} \cdot \mathbf{g} \\ \Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\zeta_B} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_4. \quad (3.18)$$

Onde $\mathbf{0}_n$ denota a matriz coluna nula de dimensão n e símbolos subscritos após a vírgula denotam derivadas parciais segundo a variável representada por tal símbolo.

Da expressão (3.18) observa-se que os pontos buscados na solução definirão um vetor normal a ambas as superfícies candidatas se $\mathbf{g}$ for não nulo.

No contexto da aproximação da solução do problema local de contato, $\mathbf{r}$ é definido como uma função resíduo a ser minimizada em valor absoluto, ou seja, igualada a zero.

Para a solução da equação (3.18), pode-se aplicar o Método de Newton-Raphson. Para lidar com casos em que há proximidade de contato conforme, há a necessidade de métodos mais elaborados, baseados em técnicas de otimização.

Resolvido o problema local de contato entre as superfícies é possível definir a distância escalar entre as superfícies g_n que estará associada a um vetor normal $\mathbf{n}$ de ambas as superfícies, isto é:

$$g_n = \hat{g}_n(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{g}\|, \quad (3.19)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{(\Gamma_A - \Gamma_B)}{\|\mathbf{g}\|}. \quad (3.20)$$

A equação (3.20) torna explícito que o vetor $\mathbf{n}$ se inverterá quando ocorrer penetração. Logo, o sinal do produto escalar de $\mathbf{n}$ com o de um versor normal externo a Γ_B , denotado por $\mathbf{n}_B$, por exemplo, permite aferir se ocorre ou não penetração. Se $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n}_B$ for positivo não há penetração. Se for negativo, a penetração é identificada. De fato, tal versor normal pode ser computado por:

$$\mathbf{n}_B = \frac{\Gamma_{B,\theta_B} \times \Gamma_{B,\zeta_B}}{\|\Gamma_{B,\theta_B} \times \Gamma_{B,\zeta_B}\|}. \quad (3.21)$$

É importante colocar que toda a formulação é empregada apenas a pares de superfícies suaves com contato pontual. Para maior número de superfícies, ou superfícies sem suavidade,

provisões devem ser tomadas para adaptar a metodologia (por exemplo múltiplos pares de subsuperfícies [33]).

Para incluir o comportamento tangencial do contato, utiliza-se a função *gap* tangencial, que mensura o deslizamento entre um par de superfícies de contato [32].

A Figura 3.17 ilustra duas superfícies candidatas ao contato de acordo com uma descrição lagrangiana atualizada, o índice “i+1” na figura refere-se à configuração atual e o índice “i” representa a configuração anterior conhecida.

Figura 3.17 – (a) Superfícies candidatas ao contato na configuração “i”; (b) Direção normal.

Fonte: [32]

Partindo do pressuposto que houve contato na configuração “i+1”, então, os pontos de contato iniciais nas duas superfícies são conhecidos em “i”. A solução para a configuração “i+1” pode ser encontrada efetuando a integração no tempo, quando se trata de um sistema dinâmico, ou simplesmente a evolução do sistema, em casos quase-estáticos.

Os pontos que estavam em contato na configuração “i”, podem ser mapeados na configuração “i+1”. Então, é possível definir vetores, cujas magnitudes são as distâncias entre o ponto material anterior (contato na configuração “i”) e o ponto material atual (na configuração “i+1”), escritos como:

$$\mathbf{d}_A^\Delta = \Gamma_A(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma_A(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1}), \quad (3.22)$$

$$\mathbf{d}_B^\Delta = \Gamma_B(\mathbf{c}^i, \mathbf{d}^{i+1}) - \Gamma_B(\mathbf{c}^{i+1}, \mathbf{d}^{i+1}). \quad (3.23)$$

A normal exterior de uma das superfícies parametrizadas, por exemplo, da superfície Γ_B , é dada por:

$$\mathbf{n}_B^{i+1} = \frac{\Gamma_{B,\theta_B}^{i+1} \times \Gamma_{B,\zeta_B}^{i+1}}{\|\Gamma_{B,\theta_B}^{i+1} \times \Gamma_{B,\zeta_B}^{i+1}\|}. \quad (3.24)$$

Com isso, é possível definir um incremento de gap tangencial $\mathbf{g}_T^\Delta$, que representa a tendência de deslizamento relativo entre as superfícies Γ_A e Γ_B :

$$\mathbf{g}_T^\Delta = (\mathbf{d}_A^\Delta - \mathbf{d}_B^\Delta) - [(\mathbf{d}_A^\Delta - \mathbf{d}_B^\Delta) \cdot \mathbf{n}_B^{i+1}] \mathbf{n}_B^{i+1}. \quad (3.25)$$

A função *gap* tangencial pode ser definida como:

$$\mathbf{g}_T^{i+1} = \mathbf{g}_T^\Delta + \mathbf{Q}^\Delta \mathbf{g}_T^i, \quad (3.26)$$

onde $\mathbf{g}_T^i$ é o *gap* tangencial anterior e $\mathbf{Q}^\Delta$ é o tensor rotação que relaciona $\mathbf{n}_B^i$ e $\mathbf{n}_B^{i+1}$.

De posse das funções *gap* normal e tangencial, pode-se obter a contribuição do contato à forma fraca do modelo.

3.3.3 Métodos para análise do contato roda-trilho

Uma das principais etapas do problema de contato é determinar o local em que o contato ocorre, desconhecido a priori compreendendo um problema complexo, pois depende não apenas da geometria dos perfis considerados de roda e trilho, mas também das condições de esforços, que variam ao longo do tempo durante o movimento do veículo. Diferentes formulações para localizar pontos de contato podem empregar uma abordagem elástica ou rígida. Na abordagem rígida, assume-se que não ocorre penetração entre as superfícies da roda e do trilho, não há deformação no contato e as forças no contato são concentradas. Meymand et al. [11] e Shabana et al. [7] [34] apresentam exemplos de contato com abordagem rígida. Na abordagem elástica, pode haver penetração entre os corpos e as deformações no contato são consideradas, nesse caso, modelos constitutivos para cálculo dos esforços no contato – como, por exemplo, o

modelo de Hertz – são empregados, considerando coeficientes de rigidez e amortecimento, como apresenta Shabana et al. [7] [34] [35].

Modelos com abordagem rígida são apresentados por Elkins [36] e Sugiyama et al. [37]. Elkins [36] apresenta vários modelos desenvolvidos até o momento de sua publicação. Sugiyama et al. [37] desenvolveram um procedimento numérico para prever a localização dos pontos de contato em casos de curvas acentuadas, capaz de lidar com situações com um e dois pontos de contato.

Shabana et al. e outros autores [34, 35, 38 - 45] apresentam modelos empregando abordagem elástica. No trabalho de Shabana et al. [34], uma equação diferencial de primeira ordem expressa em termos de coordenadas generalizadas da roda e da velocidade - para calcular o comprimento do arco percorrido pela roda - é integrada simultaneamente às equações de movimento para determinar a localização dos pontos de contato. Bozzone et al. [38] propõem três métodos diferentes para calcular os pontos de contato do trilho da roda (distância máxima, distância normal máxima e centro de carregamento). Malvezzi et al. [39], Auciello et al. [40] e Falomi et al. [41] apresentam um procedimento semianalítico para a detecção de pontos de contato roda-trilho. Shabana et al. [35] compara quatro formulações diferentes - duas empregando abordagem elástica e duas empregando abordagem rígida. Shabana [42] também desenvolveu uma descrição genérica das superfícies no contato usando funções spline e implementou-a em um modelo multicorpo. Pombo e Ambrosi [43] apresentam um modelo de contato roda-trilho capaz de lidar com situações de dois pontos de contato. No trabalho de Negretti [44], o modelo de contato é baseado em uma aproximação de terceira ordem da superfície da roda, permitindo encontrar vários pontos de contato entre duas superfícies genéricas. Baeza et al. [45] apresenta uma técnica para calcular as áreas de contato em que há interpenetração com base na discretização das superfícies de contato como um conjunto de cones e pontos truncados.

A precisão e a eficiência dos métodos de cálculo da posição do contato são afetadas, entre outros fatores, pelo uso de algoritmos *online* ou *offline* de busca de contatos. Na busca *online* de contato, a localização dos pontos de contato é determinada usando procedimentos iterativos a cada passo da simulação dinâmica [37]. Alguns exemplos do caso *online* são apresentados por Malvezzi et al. [39], Auciello et al. [40], Falomi et al. [41] e Negretti [44]. Por outro lado, na busca *offline* de contato, a localização dos pontos de contato é pré-calculada, as informações são armazenadas em uma tabela e os valores são buscados durante a simulação

dinâmica [37]. Pode-se ver um caso de busca de contato *offline* no trabalho de Bozzone [38]. Além disso, Sugiyama e Suda [46] desenvolveram uma metodologia que inclui o método de busca de contatos *online* e *offline*. Em geral, a busca de contato *online* fornece resultados mais precisos, enquanto a busca *offline* geralmente apresenta um custo computacional mais baixo, pois não requer processos iterativos para encontrar a solução [11] [37].

O uso prático de ambos os métodos *online* e *offline*, no entanto, para dados ferroviários realistas, pode envolver um tempo computacional considerável. Geralmente, esses métodos devem ser empregados em conjunto com um solver de dinâmica de multicorpos, que deve integrar a dinâmica geral do sistema ao longo de um determinado período de interesse. Depois disso, é preciso também interpretar os resultados e solucionar possíveis problemas nas simulações.

Dependendo da finalidade específica, os modelos para análise de contato apresentam características e limitações diferentes. Por exemplo, alguns modelos descrevem as superfícies de contato com nós, enquanto outros descrevem as superfícies de contato com funções geométricas. Alguns modelos lidam com um único ponto de contato, enquanto outros são capazes de lidar com vários pontos de contato simultaneamente. Alguns modelos analisam apenas superfícies convexas, enquanto outros analisam superfícies convexas e não convexas. A maioria dos modelos existentes para análise de contato roda-trilho não realiza uma solução analítica direta capaz de lidar com um grande número de geometrias reais de perfis roda e trilho - incluindo superfícies não convexas e múltiplos pontos de contato - com precisão e baixo custo computacional.

3.4 Geometria do contato roda-trilho

Como dito anteriormente, a geometria do contato é de suma importância para o comportamento dinâmico da interação roda-trilho e, conseqüentemente, para a segurança e qualidade do sistema ferroviário.

As rodas e os trilhos não apenas suportam a carga do veículo até o solo, mas também guiam o veículo ao longo da via. Durante a operação do veículo na ferrovia, as superfícies de contato da roda e do trilho se desgastam. O desgaste das rodas e dos trilhos pode levar a mudanças indesejáveis em seus perfis, e conseqüentemente a mudanças nas propriedades do

contato, seguidas por aumento de taxa de desgaste, instabilidade do veículo em velocidades operacionais e problemas de fadiga por contato de rolamento. Além disso, perfis não reperfilados de rodas e trilhos podem ser geometricamente incompatíveis (cuja combinação leva a um desempenho não vantajoso), gerando os problemas descritos acima. Contudo, a adequada correspondência entre os perfis de roda e trilho podem reduzir a taxa de desgaste, prover estabilidade do veículo em velocidades operacionais, e reduzir ou prevenir problemas de fadiga por contato de rolamento [2].

Segundo Shevtsov [2], cinco fatores principais determinam os requisitos para modelagem das superfícies de contato da roda e do trilho:

- Minimização do desgaste da roda e do trilho;
- Minimização de fadiga por contato de rolamento (RCF);
- Bom desempenho dinâmico do veículo em via reta (maximização da estabilidade – diminuição de hunting);
- Bom desempenho dinâmico do veículo em curva (minimização da razão de esforços laterais sobre esforços verticais);
- Atendimento às condições de segurança.

Condições de segurança consistem em prevenção de descarrilamento, que ocorre quando o flange da roda se desloca para o topo do trilho ou quando há ruptura da roda e/ou do trilho.

O desenvolvimento do RCF nos trilhos depende das tensões de contato e do *creepage* na área do contato, que é função de um grande número de fatores, em particular:

- Raio da curva;
- Configuração do veículo – distância entre eixos, carga no eixo, diâmetro da roda;
- Modelo da suspensão;
- Perfis das rodas – perfil nominal e condição de desgaste;
- Perfis do trilho – perfil nominal e condição de desgaste;
- Atrito entre roda e trilho;
- Forças de tração e frenagem;
- Qualidade da geometria da via;
- Propriedades dos materiais da roda e do trilho.

A interface roda-trilho é influenciada por todos esses parâmetros, e a maioria deles é determinada com o traçado da via, e não pode ser alterada. O projeto do veículo também é dado, e na maioria dos casos não pode ser modificado. O comportamento na curva e a estabilidade de um veículo numa via reta são dependentes do acoplamento roda-trilho, que pode ser alterado, e da configuração do veículo e projeto da suspensão, que são determinados. Mudanças no material da roda e do trilho são mais caras e demandam mais tempo. Gerenciamento do atrito entre roda e trilho (por exemplo, aplicação de lubrificantes ou modificadores de atrito para diminuir o desgaste) é uma ferramenta poderosa, mas não pode otimizar a interação geométrica roda-trilho. Contudo, a geometria da roda e do trilho permanece como uma possível solução para o problema de otimização de roda-trilho. Devido ao fato que a substituição de trilho é muito mais cara que a substituição das rodas, e que as rodas são reperfiladas com mais frequência, pode parecer mais atrativo projetar um novo perfil de roda que se ajuste a um perfil de trilho existente [2].

A Figura 3.18 e a Figura 3.19 mostram perfis de roda e trilho típicos e suas partes de acordo com Tournay [5].

Figura 3.18 – Perfil de roda típica.

Fonte: [5] (adaptado).

Figura 3.19 – Perfil de trilho típico.

Fonte: [5] (adaptado).

Outros fatores geométricos, além dos perfis, que influenciam no local do contato da interação roda trilho são o *cant* e a superelevação.

Em trechos curvos surgem forças de inércia (centrífugas) que, se não equilibradas, podem causar descarrilamento ou tombamento do veículo. Portanto, para equilibrá-las, eleva-se a cota do trilho externo da curva. Essa configuração caracteriza a superelevação, como exhibe a Figura 3.20. A superelevação tem grande influência no comportamento do veículo, auxiliando sua “negociação” em curvas. O trilho elevado pode ser chamado de trilho alto e o outro de trilho baixo. A Figura 3.21 mostra os esforços do veículo gerados na curva e a superelevação representada por “s”.

Esforços laterais gerados durante a passagem de um veículo podem levar ao tombamento dos trilhos. Para contrapor esses esforços, os trilhos são apoiados em calços que possuem certa inclinação. Essa inclinação do apoio chama-se *cant*, que pode ser visto como uma rotação do trilho. A Figura 3.20 exhibe o *cant* em um par de trilhos.

Figura 3.20 – *Cant* e superelevação.

Fonte: Autoria própria.

Figura 3.21 – Superelevação e esforços do veículo.

Fonte: [5].

3.4.1 Condições de contato em diferentes cenários

Durante a operação, o contato ocorre em porções específicas da roda e do trilho, não sobre a superfície inteira. Isso indica que o desgaste deve mudar o formato tanto da roda quanto do trilho [5].

Segundo Tournay [5], o contato entre roda e trilho geralmente ocorre de acordo com três cenários principais:

- A pista da roda entra em contato com o topo do trilho. Esse tipo de contato ocorre geralmente em trechos em tangente ou com grande raio de curvatura (Figura 3.22a).
- Uma roda entra em contato com o topo do trilho alto próximo à borda interna e a outra roda com a parte central do topo do trilho baixo. Esse tipo de contato ocorre geralmente em curvas suaves (Figura 3.22b).
- Uma roda entra em contato com a borda interna do trilho alto e a outra com o topo do trilho baixo próximo à borda externa. Esse tipo de contato ocorre geralmente em curvas de raios pequenos (Figura 3.22c).

Figura 3.22 – Condições de contato roda-trilho.

Fonte: [5]

Adicionalmente, de acordo com Shevtsov [2], os perfis de roda e trilho podem ser divididos de acordo com três regiões funcionais de contato, como mostra a Figura 3.23.

Figura 3.23 – Regiões funcionais de contato roda-trilho

Fonte: [2]

A região A corresponde ao contato entre a região central do trilho e a pista da roda, que ocorre em trechos de tangente ou curvas muito suaves. Nesse caso, as tensões e esforços laterais no contato são baixos.

Os contatos nas regiões B e C geram altas tensões de contato. Na região B, o contato ocorre entre a borda do trilho e o flange da roda. Essa situação geralmente ocorre em curvas acentuadas. Já o contato na região C raramente ocorre, exceto em cenários patológicos como a ocorrência de falso flange, por exemplo.

Assim sendo, há diferentes comportamentos da interação de contato roda-trilho segundo diversos cenários e condições são descritos por Tournay [5]. Os itens a seguir (3.4.1.1, 3.4.1.2, 3.4.1.3 e 3.4.1.4) apresentam os casos mais relevantes para este estudo.

3.4.1.1 Condições do contato roda-trilho em curvas acentuadas

Para atingir a diferença de raio de rolamento e esforço centrípeto necessário para executar uma curva acentuada, o contato ocorre entre o flange da roda e o trilho alto e entre a pista da roda e o topo do trilho baixo.

Dependendo dos perfis da roda e do trilho, quatro tipos de contato podem ocorrer no trilho alto (Figura 3.24):

- Intenso, com contato em dois pontos com uma grande diferença de raio de rolamento entre eles e uma distância entre o flange da roda e a borda do trilho;

- Intenso, com contato em um ponto com pequena área de contato;
- Contato conforme, com grande área de contato;
- Contato quase conforme (dois pontos de contato) com pequena diferença de raio de rolamento entre os dois pontos e uma distância entre o flange da roda e a borda do trilho menor que 0,4 milímetros.

Figura 3.24 – Condições de contato no trilho alto em curvas acentuadas.

Fonte: [5]

As duas primeiras condições (contato intenso) são indesejadas.

O primeiro caso (contato em dois pontos) apresenta um ponto de contato na pista da roda e outro no flange com uma diferença de raio de rolamento elevada (12 mm ou mais) que resulta em forças de *creep* longitudinal atuando em direções opostas (Figura 3.25a) e, conseqüentemente, o momento de direção do rodado é reduzido e o ângulo de ataque e as forças laterais são ampliadas. Além disso, surge um deslizamento relativo entre os dois pontos de contato, que leva a uma elevada taxa de desgaste na borda do flange (Figura 3.25b).

Figura 3.25 – Efeitos do contato intenso em dois pontos.

Fonte: [5]

As causas do contato em dois pontos são geralmente:

- incompatibilidade entre os perfis da roda e do trilho;
- rodas novas em contato com trilhos altos desgastados;
- rodas com flanges altos em contato com trilhos excessivamente desgastados (Figura 3.26a);
- esmerilhamento excessivo da borda do trilho (Figura 3.26b);
- execução de *cant* sem realização subsequente de esmerilhamento adequada (Figura 3.26c).

Figura 3.26 – (a) Desgaste excessivo da borda do trilho; (b) Esmerilhamento excessivo da borda do trilho; (c) execução de *cant* sem esmerilhamento.

Fonte: [5]

O segundo caso (contato em um ponto) geralmente resulta em uma pequena área de contato e forças laterais mais baixas devido à elevada diferença de raio de rolamento entre as rodas. No entanto, elevados valores de *creepage* longitudinal, devido à elevada diferença de raio de rolamento, em conjunto com áreas de elevada tensão de contato, podem causar altas taxas de desgaste ou fraturas na superfície devido à fadiga por contato de rolamento. A Figura 3.27 mostra o resultado do desgaste de um trilho novo sujeito ao intenso contato em um ponto. O perfil de trilho novo é sujeito ao contato pontual intenso resultando em altas tensões e fraturas

na lateral do trilho. Elevados esforços longitudinais causam alta taxa de desgaste no trilho até os perfis da roda e do trilho se estabilizarem em um contato conforme ou quase conforme.

Figura 3.27 – Desgaste devido ao contato pontual intenso.

Fonte: [5]

O terceiro e quarto casos (contato quase conforme e contato conforme) são as situações de contato mais desejáveis, pois produzem menores esforços laterais, menor resistência ao rolamento e menores tensões de contato. Esses casos podem ser alcançados através da implementação de perfis de roda e trilho compatíveis e esmerilhamentos regulares no trilho, bem como desgaste natural entre roda e trilho.

Sob condições de operação de transporte de carga pesada, os perfis de roda e trilho são modelados para um contato quase conforme e desgastam até possuir um contato conforme, resultando em intervalos extensos entre reperfilamentos.

No caso do trilho baixo, idealmente, a pista da roda deve entrar em contato com o trilho na região central do topo no trilho (Figura 3.28).

Figura 3.28 – Condição ideal de contato no trilho baixo.

Fonte: [5]

Esse caso resulta no ótimo valor de diferença de raio de rolamento e evita “contato de borda” do trilho baixo.

A deterioração no contato do trilho baixo geralmente ocorre com desgaste de perfil, tombamento do trilho e aumento da borda (devido à alta taxa de desgaste na lateral do trilho e no flange).

O contato no trilho baixo pode se mover do centro do topo do trilho até a borda ou até a lateral do trilho.

O contato na borda do trilho baixo (Figura 3.29) pode reduzir a diferença de raio de rolamento no rodeiro, resultando no contato de flange e elevadas forças laterais.

Figura 3.29 – Contato na borda do trilho baixo.

Fonte: [5]

O contato na lateral do trilho baixo (Figura 3.30) pode reduzir a diferença de raio de rolamento no rodeiro (dependendo dos perfis das rodas), resultando em altas tensões de contato devido à pequena área de contato, além de poder causar tombamento do trilho.

Figura 3.30 – Contato na lateral do trilho baixo.

Fonte: [5]

O contato nessa região ocorre geralmente quando o topo do trilho baixo encontra-se “achatado” devido ao desgaste e induz contato com uma pista de roda cava (Figura 3.31) ou quando há uma combinação de condições de borda do trilho larga e flange estreito.

Esse problema é exacerbado quando a lateral externa da roda contata o topo do trilho, causando concavidade na cabeça do trilho (Figura 3.31).

Figura 3.31 – Rodas cavas em contato com a concavidade de trilhos baixos.

Fonte: [5]

3.4.1.2 Condições do contato roda-trilho em curvas suaves

Em curvas suaves, o contato de flange quase não ocorre ou ocorre de modo intermitente. A diferença de raio de rolamento necessária depende da inclinação da pista da roda (conicidade) e do raio de rolamento na região próxima ao flange da roda.

A Figura 3.32 mostra, de modo exagerado, as condições de contato no trilho baixo. O contato no ponto B produz uma maior diferença de raio de rolamento que o contato em A devido à conicidade da roda.

Figura 3.32 – Efeito da posição de contato na diferença de raio de rolamento.

Fonte: [5]

3.4.1.3 Influência dos perfis da roda e do trilho no efeito de *hunting*

O efeito de *hunting* pode ocorrer em trechos de curva suave ou reta. O movimento lateral é limitado apenas pelo contato do flange da roda com o trilho. O esforço lateral induzido pelo *hunting* pode causar movimento vertical da roda através do flange, alargamento da borda do trilho, tombamento do trilho, deslocamento da via ou combinações desses efeitos.

A conicidade efetiva do contato roda-trilho tem influência considerável na velocidade de *hunting* do veículo. Quando a conicidade efetiva aumenta, a velocidade crítica inicial diminui. Portanto, a velocidade crítica de *hunting* é altamente dependente dos perfis das rodas e trilhos [5].

3.4.1.4 Rodas desgastadas cavas

Rodas desgastadas cavas (Figura 3.33) podem desenvolver “flange falso” na lateral externa da roda. Quando o contato é feito, a forma convexa desse “flange falso” resulta em alta tensão de contato se ocorrer na parte mais externa do trilho. Cálculos mostram que a tensão máxima de contato pode aumentar de um valor inferior a 1500 kN/mm², no caso de um contato normal na pista, até 6000 kN/mm², no caso de um resultado de um “flange falso”. Isso pode causar fadiga por contato de rolamento na superfície do trilho.

Figura 3.33 – Roda cava.

Fonte: [5]

A Figura 3.34 mostra as situações de contato para uma roda nova e uma roda cava num trecho tangente. Na situação do contato com roda cava, há o contato com a borda do trilho, conseqüentemente, qualquer pequena irregularidade pode levar ao *hunting*.

Figura 3.34 – Condições de contato de uma roda nova e uma roda cava.

Fonte: [5]

3.4.2 Métodos de descrição da geometria dos perfis

Shevtsov [2] detalha os modelos mais utilizados para descrever os perfis de rodas e trilhos, que são:

- Arcos circulares;
- Coordenadas cartesianas;
- Coordenadas curvilíneas;

- B-splines.

Dentre estes, o modelo de arcos circulares (ou arcos de circunferência) será utilizado no presente trabalho, pois, além da sua simplicidade de descrição e de sua ampla utilização em pacotes comerciais para cálculo de contato roda-trilho, possui as seguintes vantagens ([47]):

- Descontinuidades nos perfis são eliminadas;
- Suavidade na forma do perfil (devido a continuidade da primeira derivada dos arcos);
- A distribuição dos pontos de contato ao longo dos perfis pode ser obtida devido ao arqueamento dos contornos dos perfis;
- Utiliza os princípios básicos do projeto de roda e trilho.

A Figura 3.35 e a Figura 3.36 mostram exemplos de perfis de trilhos de normas modelados com arcos de circunferências.

Os dados necessários para descrição dos perfis são as coordenadas cartesianas dos pontos de interseção entre os arcos e as coordenadas cartesianas dos centros das circunferências que contém os arcos. A Figura 3.37 mostra um perfil de roda de norma modelado com arcos de circunferência, cujas coordenadas são dadas na Tabela 3.1 e na Tabela 3.2.

Figura 3.35 – Perfil trilho S49

Fonte: [2]

Figura 3.36 – Parametrização de topo de trilho 141 RE com arcos de circunferência.

Fonte: [48]

Figura 3.37 –Parametrização de perfil de roda com arcos de circunferência: modelo AAR 1B wide flange.

Fonte: [49]

Tabela 3.1 – Dados dos pontos de interseção entre os arcos para o design da roda

Pontos	x (pol)	y (pol)
1	1.3750	-0.6246
2	1.1471	0.0318
3	0.5890	0.3754
4	0.0901	0.1610
5	0.0000	0.0000
6	-0.0370	-0.1381
7	-0.2923	-0.4757
8	-0.6314	-0.6246
9	-0.9854	-0.6853

Fonte: [49]

Tabela 3.2 – Dados dos centros das circunferências.

ID do centro do arco	Raio dos arcos (pol)	x do centro do arco (pol)	y do centro do arco (pol)
A	2.6250	-1.1969	-1.1499
B	0.5875	0.5890	-0.2496
C	0.6250	0.5890	-0.3121
D	0.3750	0.3622	-0.0971
E	0.5625	0.5803	0.0075
F	1.5000	-1.0603	0.8128

Fonte: [49]

3.5 Métodos de avaliação de perfis de roda e trilho e otimização da interação de contato

Perfis otimizados controlam a distribuição de desgaste e fadiga para restringir mudanças desfavoráveis na geometria do perfil, estendendo, assim, a vida do componente [6]. Altas tensões repetidamente no contato de rolamento entre a roda e o trilho podem levar ao desenvolvimento do RCF. Otimizando o contato roda-trilho pode-se reduzir as tensões de contato que são responsáveis pelo RCF. A redução das tensões de contato pode ser atingida por meio do aumento da área de contato entre a roda e o trilho, aumentando os raios transversais dos perfis, ou aumentando a conformidade dos perfis [2].

Segundo Fröhling [50], uma avaliação das tensões de contato é mais eficaz ao analisar os contatos de uma população de rodas passando por uma seção de trilhos ou analisando uma população de trilhos contatando um perfil de roda específico. Consistente com essa ideia, o processo chamado *pummelling* (ou *pummeling*), elaborado por Magel e Kalousek [6], é poderoso para avaliar e otimizar a interação roda-trilho. Além disso, de acordo com Magel e Kalousek [6], a utilização de uma série de perfis de rodas ou trilhos com perfis conhecidos, evita simplificações numéricas e fornece uma imagem mais realística do desempenho do perfil sob um dado carregamento e condições de atrito.

De acordo os autores, *pummelling* é definido como “*the process of controlling the distribution of wheel/rail contacts to maintain a favourable contact geometry.*” [6], assim, o processo busca reduzir carregamento concentrado em qualquer ponto das superfícies da roda e do trilho. Os autores ainda afirmam que há duas maneiras primárias de aplicar o *pummelling* no contato roda-trilho. Uma é variar a bitola intencionalmente nos trilhos em tangente. O segundo é reperfilar (ou esmerilhar, no caso de trilhos) diferentes perfis para as rodas e os trilhos de acordo com os diferentes trechos da ferrovia.

Segundo Magel et al. [51], o *pummelling* é usado para controlar a amplitude e frequência do contato em diferentes pontos das superfícies, minimizando o desgaste instantâneo e assegurando uma distribuição favorável sobre as superfícies. Para a roda, um benefício desse método é a estabilidade mantida na geometria do perfil por um longo período de tempo.

O processo do *pummelling* consiste na análise da interação roda-trilho através da sobreposição de uma coleção de perfis de rodas conhecidas sobre pares de trilhos candidatos a

serem implementados, no caso da avaliação de trilhos, ou da sobreposição de rodas candidatas sobre uma coleção de pares de trilhos conhecidos, no caso da avaliação de rodas.

Desenvolvido pelos mesmos autores do *pummelling*, o PUMMEL™ é um programa que avalia de modo quase estático a interação roda-trilho entre rodeiros e pares de perfis de trilho. Equações de Hertz são utilizadas para avaliar tensões normais e o modelo linear de Kalker é aplicado nos trilhos calculando valores de *creepages*, forças, tensões de contato, tamanho da área de contato, conicidade efetiva e diferença de raios do rolamento. Um pós-processador gera medidas estatísticas de qualidade da interação roda-trilho. PUMMEL™ também pode ser usado para analisar a efetividade e qualidade de uma estratégia de esmerilhamento.

No caso da avaliação dos trilhos no PUMMEL™, cada roda com geometria conhecida é sobreposta no trilho candidato avaliado e parâmetros são tabulados para cada superposição. Os dados de entrada do *software* são nesse caso [6]:

- Perfis da coleção de rodas;
- Bitola;
- Bitola de eixamento dos rodeiros;
- Cant;
- Carga da roda;
- Curvatura da via;
- Ângulo de ataque do rodeiro;
- Coeficientes de atrito dos trilhos.

A Figura 3.38a mostra como diferentes perfis de roda ocasionam posições e áreas de contato distintas em um mesmo trilho. A Figura 3.38b apresenta diversos diagramas de pressão de contato justapostos. Cada seção representa o perfil de um mesmo trilho sujeito à ação de uma roda com geometria diferente. A somatória de todos esses diagramas gera o resultado de uma análise do *pummelling*. A Figura 3.39 exhibe, por exemplo, resultados de um processo do *pummelling* que avaliou diferentes perfis de trilhos candidatos para um trecho em curva com 400 metros de raio. Nessa análise foram utilizados mais de 2000 perfis de rodas com geometria conhecida. A figura indica o acumulado de tensões normais em três trilhos altos analisados.

Figura 3.38 – (a) Local e área de contato de acordo com diferentes perfis. (b) Resultado do *pummelling* (PUMMEL): um perfil de trilho novo sujeito a carga de 1000 a 3000 eixos com rodas conhecidas.

Fonte: [51]

Figura 3.39 – Resultado do *pummelling* (PUMMEL): acumulado de tensões normais de trilho alto em curva de 400m de raio para três trilhos candidatos diferentes – análise com mais de 2000 rodas com geometria conhecida.

Fonte: [6]

A análise do *pummelling* também pode ser aplicada de maneira similar a qualquer perfil de roda, sobrepondo uma população de perfis de trilho a uma bitola dada para uma série de curvaturas praticáveis em um sistema [6]. Para a avaliação de rodas, os dados de entrada do PUMMEL™ são:

- Perfis dos trilhos;
- Coeficientes de atrito;
- Superelevação;
- Curvatura da via;

- Distância entre trilhos;
- Torque em cada rodeiro;
- Esforços da suspensão do veículo.

A Figura 3.40 e a Figura 3.41 mostram resultados do processo do *pummelling* para rodas.

Figura 3.40 – Resultado do *pummelling* (PUMMEL): acumulado de tensões normais em uma roda.

Fonte: [6]

Figura 3.41 – Resultado do *pummelling* PUMMEL: acumulado de tensões normais em uma roda devido a passagem sobre cinco trilhos diferentes.

Fonte: [51]

Outro *software* de avaliação de perfis de roda e trilho é o WRTOL™, que é um acrônimo para *Wheel/Rail Tolerance* [50]. Este *software* permite a avaliação dos parâmetros de contato posicionando cada rodeiro selecionado sobre par de trilhos requerido e então, move o rodeiro lateralmente com pequenos incrementos até que ocorra o contato de flange. Com as cargas verticais e horizontais especificadas pelo usuário, o programa calcula a posição do contato na roda e no trilho, as tensões devidas ao contato, o ângulo de contato, e a diferença de raio de rolamento.

Como validação do processo do *pummelling* através do *software* PUMMEL™, Magel et al. [51] fez estudos comparativos com o *software* NUCARS™. Os resultados mostraram-se compatíveis, como exhibe a Figura 3.42.

Figura 3.42 – Comparação das simulações no PUMMEL™ e no NUCARS™: (a) Tensão normal; (b) Tensão tangencial.

Fonte: [51]

4 Desenvolvimento

O presente capítulo apresenta as etapas desenvolvidas neste trabalho, incluindo a metodologia de análise do contato roda-trilho, a implementação do modelo em código computacional, o método de análises comparativas utilizando *software* comercial e a metodologia para análise de acúmulo de pressão de contato.

4.1 Metodologia de análise do contato roda-trilho

Durante a operação, os rodeiros apresentam um movimento de oscilação lateral em torno de um valor médio. Devido à conicidade das rodas e ao atrito no contato com o trilho, surge uma combinação dos movimentos laterais e de *yaw* do rodeiro. A amplitude desses movimentos depende de condições dinâmicas, como a velocidade de operação do veículo, dados de suspensão e outros parâmetros do veículo. As condições da via, como superelevação, *cant* dos trilhos e perfis geométricos de rodas e trilhos, também desempenham um papel nessas oscilações. Determinar a posição lateral média é uma tarefa importante, pois fornece o local onde as interações de contato são propensas a ocorrer, com um desvio dado pela amplitude dos movimentos laterais. Para determinar essa posição lateral, uma alternativa é realizar uma simulação dinâmica multicorpos do rodeiro ou veículo, obter as séries temporais de deslocamento lateral e interpretar os resultados, obtendo conclusões para um regime de estado estacionário. Contudo, simulações dinâmicas de multicorpos em geral demandam alto tempo de processamento e custo computacional. Nesse contexto, o modelo apresentado nessa seção tem como objetivo calcular as posições médias onde os contatos ocorrem preferencialmente e os esforços normais ao longo da seção transversal dos perfis de trilhos, ou seja, obter diretamente o resultado médio de deslocamento lateral do rodeiro esperado em estado estacionário, sem executar uma simulação dinâmica de multicorpos completa, mas uma simulação mais simples, mais rápida e direta, tanto em procedimentos numéricos quanto na interpretação dos resultados.

O modelo aqui proposto compreende uma abordagem bidimensional quase estática que envolve um procedimento numérico para encontrar a solução de equilíbrio de um rodeiro na via, que calcula os locais de contato e as forças de contato normais para uma dada condição de movimento em estado estacionário em trechos tangentes ou curvos. Para determinar as posições

dos pontos de contato, o modelo baseia-se formulação denominada *master-master* [31] descrita na seção 3.3.2 com adaptação para o caso bidimensional com as superfícies descrita por arcos de circunferência. Essa adaptação permite obtenção de uma solução analítica no problema local de contato. Além disso, essa metodologia permite avaliar condições de interação em que há múltiplos pontos de contato entre um par roda-trilho. Outra vantagem do modelo é a capacidade de lidar com casos em que há superfície não convexa no contato, construída por meio da conexão entre arcos de circunferência.

As rodas são consideradas corpos rígidos, conectados rigidamente (representando um rodeiro também rígido). Os perfis dos trilhos também são rígidos e fixos, considerando os valores de bitola, *cant* e superelevação escolhidos, enquanto a inclinação e a posição do rodeiro são regidas pelos graus de liberdade u_x , u_y e φ como mostra a Figura 4.6.

Obviamente, considerando o cenário tridimensional, o atrito está sempre presente no contato roda-trilho, sendo responsável pelos movimentos de rolamento, laterais e de *yaw* do rodeiro. Na presente abordagem 2D, o objetivo é encontrar a solução média de oscilação lateral do rodeiro esperada ao longo do tempo. Assim, a introdução do atrito não se faz necessária em nosso modelo. Além disso, ao introduzir atrito na presente abordagem 2D simplificada, o deslocamento lateral do rodeiro poderia ser restringido e passaria a não corresponder ao caso real, uma vez que a ação de atrito envolve componentes laterais e longitudinais, acomodando naturalmente movimentos laterais no cenário real tridimensional de rolamento. Portanto, o atrito não deve ser considerado no modelo aqui proposto. O estudo feito na seção 5.2 compara resultados e análises de simulação dinâmica 3D com o modelo 2D quase-estático apresentado.

O método bidimensional desenvolvido – que utiliza cálculo quase estático – propicia um processamento computacional mais rápido que uma análise dinâmica 3D. Além disso, ele promove resultados que possuem uma interpretação e pós-processamento mais simples.

4.1.1 Descrição dos perfis geométricos de roda e trilho

O primeiro passo para determinação do contato entre os corpos consiste na identificação das superfícies candidatas ao contato. Como explorado no item 3.4.2, para o desenvolvimento do modelo de contato no presente trabalho, as parametrizações das superfícies da roda e do trilho foram feitas com conjunto de arcos. A escolha dessa descrição deve-se à simplicidade da

formulação analítica e facilidade de obtenção dos pontos candidatos ao contato, além das vantagens descritas anteriormente. Essa descrição possibilita obter uma solução analítica direta para encontrar os pontos candidatos ao contato, tanto nas geometrias das rodas quanto dos trilhos. Além disso, muitos perfis de norma são descritos por arcos de circunferência como, por exemplos, os perfis de trilho 141 RE [48] e de roda AAR 1B Wide Flange [49].

Os dados necessários para descrição dos arcos dos perfis são as coordenadas cartesianas dos pontos iniciais, finais e dos centros os arcos (Figura 4.1).

Figura 4.1 – Descrição do arco de circunferência.

Fonte: Autoria própria.

Perfis compostos por arcos de circunferência podem ser gerados a partir de medições de perfis reais, descrevendo com precisão os perfis das rodas e trilhos reais, através de um processo chamado *fitting*, que ajusta arcos de circunferência a uma série de pontos dados, de modo que as direções das tangentes entre arcos consecutivos sejam iguais (Figura 4.2), garantindo a continuidade e suavidade das geometrias. Steinstraesser [52] desenvolveu um programa computacional que realiza o procedimento de *fitting*. O que possibilitou a geração de diversos perfis, com geometrias distintas e genéricas, utilizados nesse estudo.

A Figura 4.3 apresenta pontos que representam a geometria de uma seção de um perfil de trilho que pode ser obtido a partir de medições de um trilho real. A Figura 4.4 e a Figura 4.5 apresentam o resultado do *fitting* obtido a partir dos pontos do perfil da Figura 4.3.

Figura 4.2 – Direções das tangentes dos arcos de circunferência (comum entre arcos consecutivos).

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.3 – Pontos de um perfil de trilho.

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.4 – Resultado de *Fitting* de perfil de trilho com arcos de circunferência.

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.5 – Resultado do *Fitting* e pontos do perfil sobrepostos.

Fonte: Autoria própria.

4.1.2 Modelo quase estático para interação de contato roda-trilho

Após a geração dos perfis de roda e trilho descritos por arcos de circunferência, foram feitos os posicionamentos das partes. Os perfis dos trilhos foram fixados com valores de bitola da via, *cant* e superelevação escolhidos. Os perfis das rodas permanecem livres para sofrer rotações e deslocamentos horizontais e verticais através de ajustes nos três graus de liberdade u_x , u_y e φ mostrados na Figura 4.6. Vale ressaltar que os incrementos impostos para o perfil da roda da direita e da esquerda apresentam o mesmo valor, representando assim as vinculações rígidas em um rodeiro.

Figura 4.6 – Graus de liberdade do sistema.

Fonte: Autoria própria.

Para encontrar a posição de equilíbrio quase-estático do problema representado pelos valores dos graus de liberdade u_x , u_y e ϕ , utilizou-se o método de integração dinâmica de Newmark, por uma metodologia denominada “relaxação dinâmica”.

A análise inicia-se com o rodeiro localizado em uma posição arbitrária acima dos perfis dos trilhos, sem contato entre as partes. Os esforços externos são aplicados no rodeiro a uma altura h que representa o centro de massa do veículo, rigidamente conectado ao rodeiro. As cargas externas consideradas no modelo correspondem ao peso próprio do veículo, acrescido do esforço devido à carga equivalente que age no rodeiro. Para trechos em curva, a força centrífuga é considerada. A aplicação dos esforços é ilustrada na Figura 4.7.

Aplicadas as forças, o contato entre as rodas e os trilhos são continuamente monitorados e calculados até atingir a solução de equilíbrio do sistema. Para isso, empregou-se a equação da forma fraca do modelo (Equação (4.1)) obtida a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais. Assim, tem-se:

$$-\delta W_e + \delta W_c + \delta T + \delta W_d = 0, \quad (4.1)$$

em que δW_e é o trabalho virtual dos esforços externos, δW_c é o trabalho virtual das forças de contato, δT é o trabalho virtual das forças inerciais e δW_d é o trabalho virtual devido ao amortecimento no contato.

O trabalho virtual dos esforços externos é dado por:

$$\delta W_e = F_x \delta u_x - F_y \delta u_y, \quad (4.2)$$

O trabalho virtual das forças inerciais é dado por:

$$\delta T = m \ddot{u}_x \delta u_x + m \ddot{u}_y \delta u_y + J \ddot{\varphi} \delta \varphi, \quad (4.3)$$

Onde $\ddot{u}_x$ é a aceleração na direção x, $\ddot{u}_y$ é a aceleração na direção y, $\ddot{\varphi}$ é a aceleração angular, m é a massa do rodeiro e J é o momento de inércia de rotação do rodeiro em relação ao seu centro geométrico.

As contribuições dos esforços de contato e do amortecimento no contato para a forma fraca serão descritas no item 4.1.3.

Figura 4.7 – Aplicação dos esforços externos no modelo.

Fonte: Autoria própria.

Para verificação do contato, analisam-se as combinações entre os arcos que compõem o perfil da roda e do trilho candidatos ao contato (Figura 4.8). Por exemplo, todos os arcos que compõem a roda direita são analisados contra todos os arcos que compõem o trilho direito. Para isso utilizam-se as equações do problema local de contato, que serão descritas no item 4.1.3, levando sempre em consideração os intervalos de cada curva.

Figura 4.8 – Combinações de pares curvas candidatas ao contato.

Fonte: Autoria própria

4.1.3 Formulação de contato - *master-master* 2D

Essa seção descreve o modelo de contato, baseado na formulação *master-surface to master-surface* exibida no item 3.3.2 elaborado por Gay Neto et al. [31]. Entretanto, o presente trabalho emprega o modelo de duas dimensões espaciais, assim, o contato dá-se entre curvas de arcos de circunferência ao invés de superfícies. Tal modelo pode ser visto como uma adaptação da formulação de Gay Neto et al. [31] para o caso bidimensional.

As fronteiras (curvas) dos elementos – chamadas aqui de Γ_A e Γ_B – candidatos ao contato são descritos pelos vetores de coordenadas convectivas ($\mathbf{c}_A$ e $\mathbf{c}_B$) e de deslocamentos ($\mathbf{d}_A$ e $\mathbf{d}_B$). Nesse trabalho, o índice inferior à direita “A” representa a região localizada nas rodas e o índice “B” nos trilhos.

Os vetores de coordenadas convectivas, utilizadas para mapear as curvas, são definidos da seguinte forma (Figura 4.9):

$$\mathbf{c}_A = [\theta_A], \quad (4.4)$$

$$\mathbf{c}_B = [\theta_B], \quad (4.5)$$

Figura 4.9 – Coordenadas convectivas.

Fonte: [32] (adaptado).

Os vetores de deslocamentos são definidos de acordo com os três graus de liberdade de cada elemento (Figura 4.6):

$$\mathbf{d}_A = [u_{xA} \quad u_{yA} \quad \varphi_A]^T, \quad (4.6)$$

$$\mathbf{d}_B = [u_{xB} \quad u_{yB} \quad \varphi_B]^T, \quad (4.7)$$

Podemos escrever os vetores de forma compacta da seguinte maneira:

$$\mathbf{c} = \begin{bmatrix} \mathbf{c}_A \\ \mathbf{c}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_A \\ \theta_B \end{bmatrix}, \quad (4.8)$$

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} \mathbf{d}_A \\ \mathbf{d}_B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ \varphi_A \\ u_{xB} \\ u_{yB} \\ \varphi_B \end{bmatrix}, \quad (4.9)$$

Para a análise do contato roda-trilho, os deslocamentos do elemento que representa o trilho serão nulos pois o trilho é considerado fixo e rígido, portanto, tem-se:

$$\mathbf{d}_B = [u_{xB} \quad u_{yB} \quad \varphi_B]^T = \mathbf{0}, \quad (4.10)$$

$$\mathbf{d} = [\mathbf{d}_A] = \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

Nesse caso, as coordenadas do vetor $\mathbf{d}$ representam os mesmos graus de liberdade descritos no item 4.1.2. portanto, podemos escrever:

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u_{xA} \\ u_{yA} \\ \varphi_A \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_x \\ u_y \\ \varphi \end{bmatrix}, \quad (4.12)$$

As curvas Γ_A e Γ_B são dependentes dos vetores de coordenadas generalizadas e de deslocamentos. Podem-se escrever, com um acento circunflexo que representa função, as seguintes expressões:

$$\Gamma_A = \hat{\Gamma}_A(\mathbf{c}_A, \mathbf{d}_A), \quad (4.13)$$

$$\Gamma_B = \hat{\Gamma}_B(\mathbf{c}_B, \mathbf{d}_B), \quad (4.14)$$

Com

$$\Gamma_A = \begin{bmatrix} (x_{cA} + r_A \cos \theta_A) \\ (y_{cA} + r_A \sin \theta_A) \end{bmatrix}, \quad (4.15)$$

$$\Gamma_B = \begin{bmatrix} (x_{cB} + r_B \cos \theta_B) \\ (y_{cB} + r_B \sin \theta_B) \end{bmatrix}, \quad (4.16)$$

Para verificar a presença do contato entre as curvas, calcula-se a distância entre elas através do vetor *gap* $\mathbf{g}$ definido da seguinte maneira (Figura 4.10):

$$\mathbf{g} = \hat{\mathbf{g}}(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = (\Gamma_A - \Gamma_B), \quad (4.17)$$

Assim, temos:

$$\mathbf{g} = (\Gamma_A - \Gamma_B) = \begin{bmatrix} (x_{cA} + r_A \cos \theta_A) - (x_{cB} + r_B \cos \theta_B) \\ (y_{cA} + r_A \sin \theta_A) - (y_{cB} + r_B \sin \theta_B) \end{bmatrix}, \quad (4.18)$$

Com x_{cA} e y_{cA} sendo funções dependentes das coordenadas generalizadas.

Pode-se definir um valor escalar para a função *gap* g_n e um vetor normal $\mathbf{n}$ relacionado a ele.

$$g_n = \hat{g}_n(\mathbf{c}, \mathbf{d}) = \|\mathbf{g}\| = \|\Gamma_A - \Gamma_B\|, \quad (4.19)$$

$$\mathbf{n} = \frac{\mathbf{g}}{\|\mathbf{g}\|} = \frac{\Gamma_A - \Gamma_B}{g_n}, \quad (4.20)$$

Figura 4.10 – Gap.

Fonte: Autoria própria

O contato ocorrerá entre os pontos onde houver a menor distância entre os elementos (ou máxima penetração), resultado do problema local de contato, que deve obedecer às condições de ortogonalidade da seguinte forma:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\theta_A} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \end{bmatrix} = \mathbf{0}_2, \quad (4.21)$$

Uma vantagem do modelo bidimensional com curvas parametrizadas por arcos, em relação ao modelo *master-surface to master-surface*, consiste no fato de que o problema local de contato possui solução analítica e é dada por:

$$\theta_A = \cos^{-1} \left(\frac{(x_{cB} - x_{cA})}{\sqrt{(x_{cB} - x_{cA})^2 + (y_{cB} - y_{cA})^2}} \right), \quad (4.22)$$

$$\theta_B = \theta_A + \pi, \quad (4.23)$$

Para verificar a existência do contato, foram feitas combinações entre segmentos de arcos da roda e do trilho. Em cada combinação solucionou-se o problema local de contato, sempre verificando o intervalo de cada segmento.

Três situações podem ocorrer no problema local de contato. Caso a solução do cálculo da mínima distância não exista para determinado par de segmentos, significa que o par não é elegível para contato (Figura 4.11a). Por outro lado, caso a solução da mínima distância seja positiva, significa que o par é elegível para contato, porém não há contato (Figura 4.11b). Ainda, se a solução da mínima distância for negativa ou nula, significa que o par é elegível para contato e há contato (Figura 4.11c e Figura 4.11d).

Figura 4.11 – Gap.

Fonte: Autoria própria

4.1.3.1 Potencial do contato e contribuição à forma fraca do modelo

Essa seção descreve a contribuição do contato para a forma fraca. Começamos por um potencial de contato W_c (assumindo ausência de atrito) expressado da seguinte maneira pelo método das penalidades:

$$W_c = \frac{1}{2} \epsilon_n \|\Gamma_A - \Gamma_B\|^2 = \frac{1}{2} \epsilon_n \mathbf{g} \cdot \mathbf{g}, \quad (4.24)$$

onde ϵ_n é o parâmetro de penalidade (rigidez de contato). O parâmetro de penalidade desempenha um papel de uma mola com rigidez linear localizada no contato para evitar a penetração. Quanto maior o parâmetro de penalidade, menor será a penetração. Portanto, esse método pode ser classificado como contato elástico.

A variação do potencial de contato é dada por:

$$\delta W_c = \epsilon_n g_n \delta g_n, \quad (4.25)$$

Calculando o último termo da equação acima, com auxílio das expressões (4.19) e (4.20), temos:

$$\delta g_n = \delta(\|\Gamma_A - \Gamma_B\|) = \delta[(\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^{1/2}] = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{g})^{-1/2} \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{g} = \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{g}, \quad (4.26)$$

Substituindo em (4.28), temos:

$$\delta W_c = \epsilon_n g_n \mathbf{n} \cdot \delta \mathbf{g} = \epsilon_n \mathbf{g} \cdot \delta \mathbf{g}, \quad (4.27)$$

Como $\mathbf{g}$ é função do vetor de coordenadas convectivas $\mathbf{c}$ e do vetor de deslocamentos $\mathbf{d}$, podemos escrever:

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{,d} \delta \mathbf{d}, \quad (4.28)$$

Onde

$$\mathbf{g}_{,c} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B} \end{bmatrix}, \quad (4.29)$$

$$\mathbf{g}_{,d} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,u_x} \\ \mathbf{g}_{,u_y} \\ \mathbf{g}_{,\varphi} \end{bmatrix}, \quad (4.30)$$

Da equação (4.21), pode-se escrever:

$$\delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{r}_{,d} \delta \mathbf{d} = \mathbf{o}_2, \quad (4.31)$$

Então:

$$\delta \mathbf{c} = -(\mathbf{r}_{,c})^{-1} \mathbf{r}_{,d} \delta \mathbf{d} = \mathbf{D} \delta \mathbf{d}, \quad (4.32)$$

Onde

$$\mathbf{D} = -(\mathbf{r}_{,c})^{-1} \mathbf{r}_{,d}, \quad (4.33)$$

4.1.3.1.1 Cálculo de $\mathbf{D}$

Da condição de ortogonalidade (4.21), temos:

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\theta_A} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot (\Gamma_A - \Gamma_B) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g} \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \begin{bmatrix} -r_A \sin \theta_A \\ r_A \cos \theta_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x_{c_A} + r_A \cos \theta_A) - (x_{c_B} + r_B \cos \theta_B) \\ (y_{c_A} + r_A \sin \theta_A) - (y_{c_B} + r_B \sin \theta_B) \end{bmatrix} \\ -\begin{bmatrix} -r_B \sin \theta_B \\ r_B \cos \theta_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x_{c_A} + r_A \cos \theta_A) - (x_{c_B} + r_B \cos \theta_B) \\ (y_{c_A} + r_A \sin \theta_A) - (y_{c_B} + r_B \sin \theta_B) \end{bmatrix} \end{bmatrix}, \quad (4.34)$$

Podemos calcular a derivada do vetor $\mathbf{r}$ em relação às coordenadas convectivas da seguinte forma:

$$\mathbf{r}_{,c} = \begin{bmatrix} (\mathbf{r}_{,c})_{11} & (\mathbf{r}_{,c})_{12} \\ (\mathbf{r}_{,c})_{21} & (\mathbf{r}_{,c})_{22} \end{bmatrix} = [\mathbf{r}_{,\theta_A} \quad \mathbf{r}_{,\theta_B}] = \begin{bmatrix} (\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g})_{,c} \\ (-\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g})_{,c} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} (\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g})_{,\theta_A} & (\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g})_{,\theta_B} \\ (-\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g})_{,\theta_A} & (-\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g})_{,\theta_B} \end{bmatrix} = \quad (4.35)$$

$$\begin{bmatrix} \Gamma_{A,\theta_A\theta_A} \cdot \mathbf{g} + \Gamma_{A,\theta_A} \cdot \Gamma_{A,\theta_A} & \Gamma_{A,\theta_A} \cdot (-\Gamma_{B,\theta_B}) \\ -\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \Gamma_{A,\theta_A} & -\Gamma_{B,\theta_B\theta_B} \cdot \mathbf{g} + \Gamma_{B,\theta_B} \cdot \Gamma_{B,\theta_B} \end{bmatrix},$$

Com

$$\Gamma_{A,\theta_A\theta_A} = \begin{bmatrix} -r_A \cos \theta_A \\ -r_A \sin \theta_A \end{bmatrix}, \quad (4.36)$$

$$\Gamma_{A,\theta_A\theta_A} \cdot \mathbf{g} = \begin{bmatrix} -r_A \cos \theta_A \\ -r_A \sin \theta_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} (x_{c_A} + r_A \cos \theta_A) - (x_{c_B} + r_B \cos \theta_B) \\ (y_{c_A} + r_A \sin \theta_A) - (y_{c_B} + r_B \sin \theta_B) \end{bmatrix} =$$

$$r_A [-\cos \theta_A (x_{c_A} - x_{c_B}) - \sin \theta_A (y_{c_A} - y_{c_B}) + r_B \cos(\theta_A - \theta_B)], \quad (4.37)$$

$$\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \Gamma_{A,\theta_A} = \begin{bmatrix} -r_A \sin \theta_A \\ r_A \cos \theta_A \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r_A \sin \theta_A \\ r_A \cos \theta_A \end{bmatrix} = r_A^2, \quad (4.38)$$

$$\Gamma_{B,\theta_B\theta_B} = \begin{bmatrix} -r_B \cos \theta_B \\ -r_B \sin \theta_B \end{bmatrix}, \quad (4.39)$$

$$-\Gamma_{B,\theta_B\theta_B} \cdot \mathbf{g} = r_B [\cos \theta_B (x_{cA} - x_{cB}) - \sin \theta_B (y_{cA} - y_{cB}) + r_A \cos(\theta_B - \theta_A)], \quad (4.40)$$

$$\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \Gamma_{B,\theta_B} = \begin{bmatrix} -r_B \sin \theta_B \\ r_B \cos \theta_B \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -r_B \sin \theta_B \\ r_B \cos \theta_B \end{bmatrix} = r_B^2, \quad (4.41)$$

$$-\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \Gamma_{A,\theta_A} = -r_A r_B (\sin \theta_A \sin \theta_B + \cos \theta_A \cos \theta_B), \quad (4.42)$$

Portanto, tem-se

$$(\mathbf{r},c)_{11} = r_A^2 - r_A [\cos \theta_A (x_{cA} - x_{cB}) + \sin \theta_A (y_{cA} - y_{cB}) - r_B \cos(\theta_A - \theta_B)], \quad (4.43)$$

$$(\mathbf{r},c)_{12} = (\mathbf{r},c)_{21} = -r_A r_B (\sin \theta_A \sin \theta_B + \cos \theta_A \cos \theta_B), \quad (4.44)$$

$$(\mathbf{r},c)_{22} = r_B^2 + r_B [\cos \theta_B (x_{cA} - x_{cB}) - \sin \theta_B (y_{cA} - y_{cB}) + r_A \cos(\theta_B - \theta_A)], \quad (4.45)$$

Também podemos calcular a derivada do vetor $\mathbf{r}$ em relação aos deslocamentos generalizados da seguinte forma:

$$\mathbf{r},d = \begin{bmatrix} (\mathbf{r},d)_{11} & (\mathbf{r},d)_{12} & (\mathbf{r},d)_{13} \\ (\mathbf{r},d)_{21} & (\mathbf{r},d)_{22} & (\mathbf{r},d)_{23} \end{bmatrix} = [\mathbf{r},u_{xA} \quad \mathbf{r},u_{yA} \quad \mathbf{r},\varphi_A] = \begin{bmatrix} (\Gamma_{A,\theta_A} \cdot \mathbf{g}),d \\ (-\Gamma_{B,\theta_B} \cdot \mathbf{g}),d \end{bmatrix}, \quad (4.46)$$

Com

$$(\mathbf{r},d)_{11} = -r_A \sin \theta_A, \quad (4.47)$$

$$(\mathbf{r}_d)_{11} = -r_A \sin \theta_A, \quad (4.48)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_d)_{13} = & (r_A \sin \theta_A)(x_{c_{ACS}} \sin \varphi_A + y_{c_{ACS}} \cos \varphi_A) + (r_A \cos \theta_A)(x_{c_{ACS}} \cos \varphi_A - \\ & y_{c_{ACS}} \sin \varphi_A), \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$(\mathbf{r}_d)_{21} = r_B \sin \theta_B, \quad (4.50)$$

$$(\mathbf{r}_d)_{22} = -r_B \cos \theta_B, \quad (4.51)$$

$$\begin{aligned} (\mathbf{r}_d)_{23} = & (r_B \sin \theta_B)(-x_{c_{ACS}} \sin \varphi_A - y_{c_{ACS}} \cos \varphi_A) + (r_B \cos \theta_B)(x_{c_{ACS}} \cos \varphi_A - \\ & y_{c_{ACS}} \sin \varphi_A), \end{aligned} \quad (4.52)$$

■

Das equações (4.28) e (4.32), temos:

$$\delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{,c}(\mathbf{D}\delta \mathbf{d}) + \mathbf{g}_{,d}\delta \mathbf{d} = (\mathbf{g}_{,c}\mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d})\delta \mathbf{d}, \quad (4.53)$$

Com isso, pode-se escrever a equação (4.27) da seguinte forma:

$$\delta W_c = \epsilon_n \mathbf{g} \cdot [(\mathbf{g}_{,c}\mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d})\delta \mathbf{d}] = \epsilon_n \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_{,c})^T + (\mathbf{g}_{,d})^T]\mathbf{g}, \quad (4.54)$$

Devido as equações de ortogonalidade, podemos simplificar a equação acima (com $\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_{,c})^T = \mathbf{0}$) obtendo:

$$\delta W_c = \epsilon_n \delta \mathbf{d} \cdot (\mathbf{g}_{,d})^T \mathbf{g}, \quad (4.55)$$

Para resolver o problema não linear com contato, o método de Newton-Raphson é aplicado. Para isso, é necessário desenvolver a linearização da forma fraca para obtenção do operador tangente, que representará a contribuição do contato na matriz de rigidez do sistema.

A linearização da equação (4.27) pode ser obtida da seguinte maneira:

$$\Delta(\delta W_c) = \delta \mathbf{g} \cdot \epsilon_n \Delta \mathbf{g} + \epsilon_n \Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{g}, \quad (4.56)$$

Com

$$\Delta \mathbf{g} = \mathbf{g}_{,c} \Delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{,d} \Delta \mathbf{d} = (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d}, \quad (4.57)$$

$$\Delta(\delta \mathbf{g}) = \Delta(\mathbf{g}_{,c} \delta \mathbf{c} + \mathbf{g}_{,d} \delta \mathbf{d}) = \Delta(\mathbf{g}_{,c}) \delta \mathbf{c} + \Delta(\mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d}, \quad (4.58)$$

A expressão acima pode ser escrita da maneira abaixo, com $\mathbf{v}$ sendo um vetor genérico representando $\mathbf{g}$.

$$\Delta(\delta \mathbf{g}) = \Delta(\mathbf{g}_{,c}) \delta \mathbf{c} \cdot \mathbf{v} + \Delta(\mathbf{g}_{,d}) \delta \mathbf{d} \cdot \mathbf{v} = \Delta[\mathbf{g}_{,c}^T] \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{c} + \Delta[\mathbf{g}_{,d}^T] \mathbf{v} \cdot \delta \mathbf{d}, \quad (4.59)$$

Onde

$$\Delta[\mathbf{g}_{,c}^T] \mathbf{v} = [\mathbf{g}_{,c}^T \mathbf{v}]_{,c} \Delta \mathbf{c} + [\mathbf{g}_{,c}^T \mathbf{v}]_{,d} \Delta \mathbf{d}, \quad (4.60)$$

$$\Delta[\mathbf{g}_{,d}^T] \mathbf{v} = [\mathbf{g}_{,d}^T \mathbf{v}]_{,c} \Delta \mathbf{c} + [\mathbf{g}_{,d}^T \mathbf{v}]_{,d} \Delta \mathbf{d}, \quad (4.61)$$

Com $\mathbf{v}$ constante.

Analogamente à Equação (4.32), podemos fazer $\Delta \mathbf{c} = \mathbf{D} \Delta \mathbf{d}$.

Criando um operador $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{a}, \mathbf{b}; \mathbf{v}) = [\mathbf{g}_{,a}^T \mathbf{v}]_{,b}$, com $\mathbf{v}$ constante, da seguinte forma:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_B} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_A} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_B} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (4.62)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A u_{xA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A u_{yA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_A \varphi_A} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B u_{xA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B u_{yA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\theta_B \varphi_A} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}, \quad (4.63)$$

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,u_{xA} u_{xA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,u_{xA} u_{yA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,u_{xA} \varphi_A} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,u_{yA} u_{xA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,u_{yA} u_{yA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,u_{yA} \varphi_A} \cdot \mathbf{v} \\ \mathbf{g}_{,\varphi_A u_{xA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\varphi_A u_{yA}} \cdot \mathbf{v} & \mathbf{g}_{,\varphi_A \varphi_A} \cdot \mathbf{v} \end{bmatrix}. \quad (4.64)$$

Assim, temos:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta \mathbf{g}) \cdot \mathbf{v} = & [\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{v})(\mathbf{D}\Delta \mathbf{d}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v})\Delta \mathbf{d}]\mathbf{D} \cdot \delta \mathbf{d} + [\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{v})(\mathbf{D}\Delta \mathbf{d}) + \\ & \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})\Delta \mathbf{d}]\delta \mathbf{d} = \\ & \delta \mathbf{d} \cdot [\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{v})\mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{v}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{v})\mathbf{D} + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{v})]\Delta \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (4.65)$$

Utilizando as equações (4.60) e (4.61), obtemos da equação (4.56) a linearização da variação do potencial de contato:

$$\begin{aligned} \Delta(\delta W_c) = \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_{,c}^T) + (\mathbf{g}_{,d}^T) \right) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \cdot \\ \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{g})\mathbf{D} + \mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{g})\mathbf{D} + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) \right) \Delta \mathbf{d}, \end{aligned} \quad (4.66)$$

4.1.3.1.2 Cálculo de $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{g})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{g})$, $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{g})$ e $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{g})$

Da expressão (4.62), temos:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_A} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_B} \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_A} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A \theta_A} \cdot \mathbf{g} & 0 \\ 0 & \mathbf{g}_{,\theta_B \theta_B} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix}, \quad (4.67)$$

com

$$\mathbf{g}_{,\theta_A} = \begin{bmatrix} -r_A \sin \theta_A \\ r_A \cos \theta_A \end{bmatrix}, \quad (4.68)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_A\theta_A} = \begin{bmatrix} -r_A \cos \theta_A \\ -r_A \sin \theta_A \end{bmatrix}, \quad (4.69)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_B} = \begin{bmatrix} r_B \sin \theta_B \\ -r_B \cos \theta_B \end{bmatrix}, \quad (4.70)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_B\theta_B} = \begin{bmatrix} r_B \cos \theta_B \\ r_B \sin \theta_B \end{bmatrix}, \quad (4.71)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_A\theta_B} = \mathbf{g}_{,\theta_B\theta_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Da expressão (4.63), temos:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A u_{x_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_A u_{y_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_A \varphi_A} \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{,\theta_B u_{x_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_B u_{y_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_B \varphi_A} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{2 \times 3}, \quad (4.73)$$

pois,

$$\mathbf{g}_{,\theta_A} = \begin{bmatrix} -r_A \sin \theta_A \\ r_A \cos \theta_A \end{bmatrix}, \quad (4.74)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_A u_{x_A}} = \mathbf{g}_{,\theta_A u_{y_A}} = \mathbf{g}_{,\theta_A \varphi_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (4.75)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_B} = \begin{bmatrix} r_B \sin \theta_B \\ -r_B \cos \theta_B \end{bmatrix}, \quad (4.76)$$

$$\mathbf{g}_{,\theta_B u_{x_A}} = \mathbf{g}_{,\theta_B u_{y_A}} = \mathbf{g}_{,\theta_B \varphi_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (4.77)$$

Analogamente, temos:

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{g}) = \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,\theta_A u_{x_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_B u_{x_A}} \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{,\theta_A u_{y_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_B u_{y_A}} \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{,\theta_A \varphi_A} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\theta_B \varphi_A} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{3 \times 2}, \quad (4.78)$$

Da expressão (4.64), temos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) &= \begin{bmatrix} \mathbf{g}_{,u_{xA}u_{xA}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,u_{xA}u_{y_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,u_{xA}\varphi_A} \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{,u_{y_A}u_{xA}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,u_{y_A}u_{y_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,u_{y_A}\varphi_A} \cdot \mathbf{g} \\ \mathbf{g}_{,\varphi_Au_{xA}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\varphi_Au_{y_A}} \cdot \mathbf{g} & \mathbf{g}_{,\varphi_A\varphi_A} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix} = \\
 &\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{g}_{,\varphi_A\varphi_A} \cdot \mathbf{g} \end{bmatrix},
 \end{aligned} \tag{4.79}$$

pois:

$$\mathbf{g}_{,u_{xA}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.80}$$

$$\mathbf{g}_{,u_{xA}u_{xA}} = \mathbf{g}_{,u_{xA}u_{y_A}} = \mathbf{g}_{,u_{xA}\varphi_A} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \tag{4.81}$$

$$\mathbf{g}_{,u_{y_A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \tag{4.82}$$

$$\mathbf{g}_{,\varphi_Au_{xA}} = \mathbf{g}_{,\varphi_Au_{y_A}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{4.83}$$

■

Portanto, com as matrizes $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{d}; \mathbf{g})$ e $\mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{c}; \mathbf{g})$ nulas, podemos simplificar a Equação (4.66) obtendo:

$$\begin{aligned}
 \Delta(\delta W_c) &= \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T(\mathbf{g}_{,c}^T) + (\mathbf{g}_{,d}^T) \right) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \cdot \\
 &\epsilon_n \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{g}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) \right) \Delta \mathbf{d},
 \end{aligned} \tag{4.84}$$

Onde a parcela $\epsilon_n \left(\mathbf{D}^T (\mathbf{g}_{,c}^T) + (\mathbf{g}_{,d}^T) \right) (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \Delta \mathbf{d} + \delta \mathbf{d} \cdot \epsilon_n \left(\mathbf{D}^T \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{c}, \mathbf{c}; \mathbf{g}) \mathbf{D} + \mathbf{Y}(\mathbf{g}, \mathbf{d}, \mathbf{d}; \mathbf{g}) \right)$ representa a contribuição do contato na matriz de rigidez do sistema.

Analogamente à contribuição dos esforços de contato para a forma fraca, podemos escrever a contribuição do amortecimento no contato da seguinte forma:

$$\delta W_d = c_n \dot{\mathbf{g}} \cdot \delta \mathbf{g}, \quad (4.85)$$

Onde c_n é o coeficiente de amortecimento no contato, $\dot{\mathbf{g}}$ é a derivada do vetor *gap* em relação ao tempo dada por:

$$\dot{\mathbf{g}} = \mathbf{g}_{,c} \dot{\mathbf{c}} + \mathbf{g}_{,d} \dot{\mathbf{d}} = (\mathbf{g}_{,c} \mathbf{D} + \mathbf{g}_{,d}) \dot{\mathbf{d}}, \quad (4.86)$$

A linearização da variação do potencial do amortecimento no contato é:

$$\Delta(\delta W_d) = \delta \mathbf{d} \cdot c_n \left[(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{,c}^T \dot{\mathbf{g}})_{,c} \mathbf{D} + (\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{,c}^T \dot{\mathbf{g}})_{,d} + (\mathbf{g}_{,d}^T \dot{\mathbf{g}})_{,c} \mathbf{D} + (\mathbf{g}_{,d}^T \dot{\mathbf{g}})_{,d} \right] \Delta \mathbf{d}, \quad (4.87)$$

Onde a parcela $c_n \left[(\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{,c}^T \dot{\mathbf{g}})_{,c} \mathbf{D} + (\mathbf{D}^T \mathbf{g}_{,c}^T \dot{\mathbf{g}})_{,d} + (\mathbf{g}_{,d}^T \dot{\mathbf{g}})_{,c} \mathbf{D} + (\mathbf{g}_{,d}^T \dot{\mathbf{g}})_{,d} \right]$ representa a contribuição do amortecimento no contato na matriz de rigidez do sistema. Mais detalhes sobre o amortecimento no contato podem ser vistos em [53].

Observa-se que, apesar de não interferir no resultado final do problema, a introdução da contribuição do amortecimento no contato, nesse caso, tem função de auxiliar a convergência do problema numérico.

4.2 Implementação do código computacional

O modelo apresentado na seção 4.1 foi implementado em um programa computacional capaz de avaliar a interação de contato entre rodeiros e pares de trilhos representados por perfis reais.

A implementação computacional desenvolvida emprega a linguagem de programação C++ e sua estrutura organiza-se em classes, utilizando o recurso orientação a objeto dessa linguagem. Essa linguagem é muito versátil e permite a elaboração de programas robustos, além de proporcionar processamento rápido comparado a outras linguagens.

A utilização dessa linguagem aliada a características como análise quase estática bidimensional e existência de solução analítica do problema local de contato permite a execução rápida, mesmo com uma grande quantidade de dados (rodas e trilhos), do programa computacional. Além disso, tem-se a compatibilidade com o *software* GIRAFFE - *Generic Interface Readily Accessible for Finite Elements* - em desenvolvimento na Universidade de São Paulo [54].

O procedimento para utilização do *software* consiste da seguinte maneira: o usuário cria uma pasta com o nome escolhido para a análise no mesmo local em que se encontra o programa. Esta pasta deve conter o arquivo de texto (.inp) de mesmo nome da pasta (nome escolhido para a análise). O arquivo de texto deve conter todos os seguintes dados de entrada necessários para realização da análise:

- Dados das geometrias dos perfis:
 - Número de arcos que compõe a os perfis da roda e do trilho;
 - Coordenadas cartesianas dos pontos iniciais, finais e do centro dos arcos de circunferência;
 - Definição dos arcos que compõe cada perfil (roda direita, roda esquerda, trilho direito e trilho esquerdo).
- Dados da via e do veículo:
 - Bitola da via;
 - *Cant* dos trilhos direito e esquerdo;
 - Superelevação;
 - Raio da curva;
 - Altura do trilho (opcional);
 - Bitola de eixamento do rodeiro;
 - Raio da roda;
 - Velocidade do veículo;
 - Carga vertical;

- Carga horizontal;
- Altura do centro de massa para aplicação das forças;
- Massa do rodeiro;
- Inercia do rodeiro;
- Posição inicial do centro do rodeiro;
- Amortecimento global do sistema (para evitar problemas numéricos).
- Dados do contato:
 - Parâmetro de penalidade (rigidez no contato);
 - Parâmetro de amortecimento no contato.

Para a execução do programa, basta inserir o nome do arquivo na tela executável do programa. O Apêndice A – traz um exemplo de arquivo de entrada, tipo texto, para o programa desenvolvido.

A execução do programa ocorre de acordo com as seguintes etapas:

1. O rodeiro é posicionado em uma posição inicial escolhida e as cargas são aplicadas;
2. Verifica-se se há contato através do cálculo dos vetores *gap*. Caso haja contato, os esforços e contribuições devido ao contato são calculados;
3. Em seguida, calcula-se a nova posição do contato através do Método de Newmark e do Método de Newton-Raphson. Caso não haja convergência no cálculo desta etapa, diminui-se o passo de tempo e retorna à ultima posição em que houve convergência a partir da etapa 2;
4. Quando houver convergência na etapa 3, o programa avança para o próximo passo de tempo e repete-se o processo a partir da etapa 2 até que o tempo de simulação total requerido seja atingido.
5. Quando o tempo de simulação total for alcançado, a análise é terminada.

A Figura 4.12 ilustra o processo de execução do programa.

Figura 4.12 – Fluxograma do processo de execução do programa.

Fonte: Autoria própria.

Após a execução da análise, os resultados de deslocamento e posição do rodeiro e esforços nos contatos são encontrados na mesma pasta da análise, bem como arquivos de formato .vtk para visualização da renderização da análise no pós-processador Paraview [55].

4.3 Comparação com simulação em *software* comercial

A fim de verificar a validade das hipóteses simplificadoras, principalmente no que tange à solução quase-estática e bidimensionalidade do modelo, os resultados gerados pelo *software* desenvolvido foram comparados com resultados de simulações dinâmicas provenientes do *software* comercial Simpack [56], que possui uma categoria voltada para análise ferroviária chamada Simpack-Rail.

O Simpack é um *software* para simulação dinâmica de multicorpos, que soluciona modelos tridimensionais possibilitando a predição e visualização de movimentos e esforços trocados entre os corpos.

4.4 Metodologia para análise de acúmulo de pressão de contato

O modelo descrito no item 4.1 e implementado no item 4.2 pode ser utilizado em uma metodologia para quantificar o acúmulo de pressão de contato, considerando uma família de rodeiros com rodas distintas e seus efeitos sobre um par de trilhos. Esse procedimento de acúmulo de pressão de contato é baseado na metodologia do *pummelling* [6] descrito no item 3.5. O resultado dessa análise indica regiões do trilho onde o contato ocorre com maior intensidade (pressões de contato elevadas) e com maior frequência e, conseqüentemente, mais propensas a sofrer danos como fadiga por contato por rolamento.

Para determinar a área de contato e a distribuição de pressão nos trilhos, a teoria de Hertz apresentada em [8] é aplicada como um pós-processamento em cada local de contato determinado, considerando as respectivas forças normais calculadas com o modelo de contato descrito no item 4.1. Cada par de contatos resulta em diferentes distribuições de pressão e áreas de contato devido aos raios das rodas, às geometrias dos perfis e, conseqüentemente, às localizações dos contatos.

Ao fixar um par de trilhos e analisá-los com uma família de rodeiros, observa-se o efeito que cada par distinto de rodas causa no par de trilhos estudado. A Figura 4.14 e a Figura 4.15, por exemplo, mostram a distribuição da pressão de contato no mesmo trilho, mas em cada análise o trilho está sujeito à ação de diferentes rodas, representadas por diferentes rodeiros. As magnitudes da pressão de contato são indicadas no eixo das ordenadas. O eixo da abcissa “S”

representa o perfil do trilho na forma “linearizada”, representando os arcos que compõem o perfil do trilho com seus respectivos comprimentos. Os pontos que representam as extremidades dos arcos são indicados ao longo do eixo, como ilustra a Figura 4.13.

Figura 4.13 – Perfil do trilho “linearizado”.

Fonte: Autoria própria.

Observa-se na primeira análise (Figura 4.14) que há um único ponto de contato. Na segunda análise (Figura 4.15), existem três pontos de contato, exemplificando uma das vantagens desse método, que é a capacidade de lidar com múltiplos pontos de contato.

Figura 4.14 – Distribuição de pressão de contato em um trilho sujeito à ação de uma roda com um ponto de contato.

Fonte: Autoria própria.

Figura 4.15 – Distribuição de pressão de contato em um trilho sujeito à ação de uma roda com três pontos de contato.

Fonte: Autoria própria.

Ao somar os resultados de todas as análises, obtemos a pressão acumulada e os locais de contato devido aos diferentes rodeiros que atuam sobre trilhos escolhidos. A Figura 4.16 apresenta o diagrama resultante da somatória das análises mostradas na Figura 4.14 e na Figura

4.15. Esse procedimento pode ser realizado considerando um grande número de diferentes rodeiros/rodas, inclusive para uma frota inteira de rodeiros operando em uma ferrovia. A aplicação prática dessa metodologia requer um modelo eficiente capaz de encontrar o local do contato, como o modelo apresentado no item 4.1.

Resultados do modelo de acúmulo de pressão de contato podem ser utilizados para otimizar perfis geométricos de rodas e trilhos, por exemplo, procurando equilibrar as tensões nas regiões dos perfis dos trilhos, de acordo com ideias de Magel e Kalousek [6].

Figura 4.16 – Análise de acúmulo de pressão de contato.

Fonte: Autoria própria.

5 Exemplos numéricos

Neste capítulo serão exibidos exemplos de aplicações do modelo desenvolvido no presente trabalho.

O primeiro exemplo apresenta o comportamento do modelo em casos em que há contato com superfície não convexa. Demonstrando uma das vantagens importantes do modelo desenvolvido.

O segundo exemplo apresenta análises comparativas entre o modelo quase estático aqui proposto e simulações resolvidas usando um software de dinâmica multicorpos, em que análises de um único rodeiro e um truque ferroviário foram realizadas. Adicionalmente, nesse exemplo observa-se o comportamento do modelo em casos em que há múltiplos pontos de contato em um único par roda-trilho.

O terceiro exemplo apresenta um estudo de pressão acumulada em pares de trilhos, obtidos com a aplicação do modelo quase estático desenvolvido, considerando medições de perfis reais de rodas e trilhos.

Os dois últimos exemplos apresentam casos particulares que mostram a influência da velocidade de operação no local do contato e um contato de flange falso capturado pelo modelo.

5.1 Análise de contato com superfícies não convexas

Esse primeiro exemplo numérico tem como objetivo avaliar o comportamento do modelo de contato desenvolvido em caso de contato com superfície não convexa. Para isso, no lugar dos trilhos, foram consideradas duas superfícies idênticas côncavas compostas por um arco de circunferência cada. No lugar das rodas, foram consideradas superfícies convexas compostas por um arco de circunferência cada. As superfícies das rodas são conectadas rigidamente, de modo a representar um rodeiro rígido.

Nesse caso, não foram considerados *cant* nem superelevação nos trilhos, sendo assim um caso simétrico. Aplicou-se uma carga vertical de 10 N a uma altura de 1 metro em relação ao centro do rodeiro e o parâmetro de penalidade no contato escolhido foi de $1E7$ N/m.

Na configuração inicial temos que os valores de *gap* calculados entre os pares de contato roda-trilho da direita e da esquerda são iguais, devido à simetria do modelo, dados por:

$$\mathbf{g}_{\text{esquerda}} = \mathbf{g}_{\text{direita}} = \begin{bmatrix} 0 \\ 21,94 \text{ cm} \end{bmatrix}, \quad (5.1)$$

Onde $\mathbf{g}_{\text{esquerda}}$ e $\mathbf{g}_{\text{direita}}$ são os vetores $\mathbf{gap}$, respectivamente, do par de contato esquerdo e direito. Ou seja, a distância entre as superfícies que representam a roda e do trilho é 21,94 cm em ambos os lados.

Temos ainda que os valores de esforços referentes ao contato são nulos, já que não há contato na configuração inicial.

$$\mathbf{f}_{\text{c,esquerda}} = \mathbf{f}_{\text{c,direita}} = \mathbf{0}_{3 \times 1}, \quad (5.2)$$

onde $\mathbf{f}_{\text{c,esquerda}}$ e $\mathbf{f}_{\text{c,direita}}$ representam, respectivamente os vetores de esforços normais no contato dos pares de contato esquerdo e direito.

A Figura 5.1 exibe a representação do modelo na posição inicial.

Figura 5.1 – Modelo na posição inicial.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 5.2 mostra a posição inicial das superfícies das rodas e trilhos, candidatas ao contato, gerada pelo pós-processamento do programa.

Figura 5.2 – Exemplo de contato não convexo. Posição inicial.

Fonte: Autoria própria.

Na configuração de equilíbrio final temos como resultado o valor de *gap* de $-5E-6$ cm nos dois pares de contato e um esforço normal de 4,9997 N em cada par de contato.

$$\mathbf{g}_{\text{esquerda}} = \mathbf{g}_{\text{direita}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -5E-6 \text{ cm} \end{bmatrix}, \quad (5.3)$$

$$\mathbf{f}_{\text{c,esquerda}} = \mathbf{f}_{\text{c,direita}} = \begin{bmatrix} 0 \\ -4,9997 \text{ N} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (5.4)$$

A Figura 5.3 exhibe a representação do modelo na posição final.

Figura 5.3 – Modelo na posição final de equilíbrio.

Fonte: Autoria própria.

A Figura 5.4 mostra as superfícies de contato na posição de equilíbrio obtida como resultado de pós-processamento da análise. A Figura 5.5 ilustra com maior detalhe o ponto de contato resultante em um dos pares de contato.

Figura 5.4 – Exemplo de contato não convexo. Posição de equilíbrio .

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.5 – Ponto de contato em dos pares de contato.

Fonte: Autoria própria.

A diferença entre o esforço normal de contato esperado de 5 N e o valor determinado de 4,9997 N se deve a razões de precisão numérica e critério de parada empregado na simulação. O critério de parada pode ser ajustado, se necessário.

5.2 Análise comparativa entre o modelo quase estático proposto e simulações dinâmicas de multicorpos

Este exemplo tem como objetivo comparar o deslocamento lateral obtido de um rodeiro (Figura 5.6), determinado tanto pelo modelo quase estático 2D aqui proposto quanto pela solução resultante de uma simulação dinâmica de multicorpos (MBD), aplicado para trechos tangentes e curvas. Adicionalmente, neste exemplo, observa-se o comportamento do modelo quase estático em casos em que há mais de um ponto de contato entre as superfícies.

Conforme discutido na seção 3.4.1.3, devido à conicidade das rodas, ocorre uma combinação de deslocamento lateral e rotação (*yaw*) durante o movimento do rodeiro ao longo da via, que é observado na análise dinâmica MBD.

Figura 5.6 – Deslocamento lateral no modelo.

Fonte: Autoria própria.

Duas análises dinâmicas distintas, indicadas aqui por modelo MBD, foram realizadas usando o *software* comercial de dinâmica de multicorpos SIMPACK Rail Module. A primeira análise consiste na simulação de um único rodéiro, operando com velocidade constante ao longo da via. A segunda análise consiste na simulação de um truque simples, composto por dois rodéiros idênticos e uma estrutura rígida com suspensões primárias. O truque opera a uma velocidade constante ao longo da via. A via é composta de trechos em tangentes e curvas, com transições (clotóides) entre eles. Para comparar os resultados, também foram executadas análises aplicando o modelo 2D proposto, indicadas aqui por modelo quase estático. Todas as análises foram realizadas para cenários em tangente e curva, considerando os mesmos parâmetros de via, mesma velocidade de operação e os mesmos perfis geométricos de roda e trilho. A velocidade de operação escolhida foi de 65 km/h, representando uma velocidade

operacional típica de um trem de transporte de carga. A Tabela 5.1 mostra características para as análises dos modelos MBD e quase estático.

Tabela 5.1 – Dados do cenário para todas as análises.

Velocidade	65 km/h
Massa do rodeiro	1.554 kg
Geometria do perfil dos trilhos	UIC60
<i>Cant</i>	1/40
Bitola da via	1,435 m
Geometria do perfil das rodas	S1002
Raio nominal da roda	0,46 m
Bitola de eixamento do rodeiro	1,350 m

Fonte: Autoria própria.

5.2.1 Modelo MBD

Nas simulações dinâmicas realizadas no *software* de dinâmica de multicorpos SIMPACK, a via é composta pelos seguintes trechos:

- Primeiro trecho: tangente com 100 m de comprimento;
- Segundo trecho: transição em clotóide com 10 m de comprimento;
- Terceiro trecho: curva circular (com raio de 208,36 m e superelevação de 91 mm) com 200 m de comprimento;
- Quarto trecho: transição em clotóide com 10 m de comprimento;
- Quinto trecho: tangente com 100 m de comprimento.

No modelo MBD de um único rodeiro, considera-se apenas o peso próprio do rodeiro. Algumas características importantes do cenário considerado são mostradas na Tabela 5.2. O coeficiente de amortecimento de contato é usado para calcular uma força de amortecimento adicional que representa a dissipação de energia na direção normal, evitando oscilações indesejáveis e problemas envolvendo impacto no contato roda-trilho.

Tabela 5.2 – Dados do cenário para simulação dinâmica.

Modulo de Young da roda e do trilho	E = 210 GPa
Módulo de Poisson	0,28
Coefficiente de amortecimento no contato	1 E5 Ns/m
Coefficiente de atrito	0,4

Fonte: Autoria própria.

No modelo MBD do truque composto por dois rodeiros, metade da massa total do vagão (55 t) é considerada no local considerado “centro de massa do vagão”, representado por uma massa concentrada rigidamente conectada ao truque (Figura 5.7, Figura 5.8 e Figura 5.9). As características do truque são mostradas na Tabela 5.3.

Tabela 5.3 – Dados do truque e vagão para modelo MBD.

Massa do truque		3.744,05 kg
Altura do centro de massa do vagão (relativa ao centro do rodeiro)		1,2381 m
Distância entre rodeiros		2,0 m
Suspensão primária vertical	Comprimento nominal	0,535 m
	Rigidez	10 kN/mm
	Amortecimento	20 kNs/m
Suspensão primária lateral	Comprimento nominal	0,535 m
	Rigidez	2 kN/mm
	Amortecimento	4 kNs/m
Suspensão primária horizontal	Comprimento nominal	0,6 m
	Rigidez	2 kN/mm
	Amortecimento	4 kNs/m

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.7 – Truque (vista lateral).

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.8 – Truque (vista frontal) .

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.9 – Truque (vista de topo).

Fonte: Autoria própria.

5.2.2 Modelo quase estático

Seis casos de carregamentos distintos foram considerados para as simulações com o modelo quase estático 2D aqui proposto, combinando os cenários de trechos em tangente e curva com as cargas aplicadas no centro de massa do rodeiro (altura zero) e no centro de massa global. Com isso, pode-se comparar os resultados com as séries temporais correspondentes das simulações dinâmicas. Uma análise adicional foi efetuada para avaliar a influência de um ângulo de *yaw* constante no cenário de curva. Para tal, os perfis geométricos das rodas foram projetados considerando-se um ângulo de giro *yaw* fixo, alterando ligeiramente sua forma, de modo que a geometria do rodeiro novo equivalha a projeção do rodeiro em uma situação de *yaw*. Nesse caso, o cenário e os parâmetros são os mesmos do caso de carregamento 4, exceto pelas dimensões do rodeiro adaptadas para corresponder a um ângulo de *yaw* de 0,02 radianos, valor escolhido para representar o máximo ângulo de *yaw* exercido durante a operação. Além disso, um último modelo sem considerar o carregamento do veículo (apenas com peso próprio do rodeiro) foi avaliado, para comparação com o modelo MBD.

Como mostrado na Tabela 5.1, as geometrias dos perfis de trilhos e rodas considerados são, respectivamente, os perfis de norma UIC60 e S1002. Cada perfil de roda foi descrito com 20 arcos de circunferência. Cada perfil de trilho foi descrito com 25 arcos de circunferência (Figura 5.10).

Figura 5.10 – Perfis da roda e trilho esquerdos.

Fonte: Autoria própria.

Para as cinco primeiras simulações do modelo quase estático, o rodeiro é submetido a cargas consistentes com os casos de estado estacionário esperados em tangente e em curva. A carga vertical é $\left(27500 \text{ kg} + 1554 \text{ kg} + \frac{3744,05 \text{ kg}}{2}\right) \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, considerando-se assim $\frac{1}{4}$ da carga do vagão mais o peso de um rodeiro e metade do peso de um truque. A carga lateral (F_x) é zero para o trecho tangente e diferente de zero devido à força centrífuga do trecho curvo, calculada da seguinte forma:

$$F_x = \frac{\text{Massa} \times \text{Velocidade}^2}{\text{Raio da curva}} = \frac{\left(27500 \text{ kg} + 1554 \text{ kg} + \frac{3744,05 \text{ kg}}{2}\right) \times \left(18,0556 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{208,36 \text{ m}} = 48.387,55 \text{ N}, \quad (5.5)$$

No último modelo, considera-se apenas o peso próprio do rodeiro em um trecho em curva. Portanto, a carga vertical (F_y) considerada é $1554 \text{ kg} \cdot 9,81 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, e a carga lateral (F_x) é:

$$F_x = \frac{\text{Massa} \times \text{Velocidade}^2}{\text{Raio da curva}} = \frac{1554 \text{ kg} \times \left(18,0556 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{208,36 \text{ m}} = 2.431,42 \text{ N}, \quad (5.6)$$

A descrição de cada caso de carregamento é mostrada na Tabela 5.4.

Tabela 5.4 – Descrição dos caso de simulação dos modelos quase estáticos.

Casos de carregamento	Descrição
1	Trecho em tangente ($F_x = 0$) com os carregamentos aplicados no centro de massa do rodeiro ($h = 0$).
2	Trecho em tangente ($F_x = 0$) com os carregamentos aplicados no centro de massa global ($h = 1,5484$ m).
3	Trecho em curva ($F_x = 48.387,55$ N) com os carregamentos aplicados no centro de massa do rodeiro ($h = 0$).
4	Trecho em curva ($F_x = 48.387,55$ N) com os carregamentos aplicados no centro de massa global ($h = 1,5484$ m).
5	Trecho em curva ($F_x = 48.387,55$ N) com os carregamentos aplicados no centro de massa global ($h = 1,5484$ m), assumindo um ângulo de <i>yaw</i> de $0,02$ rad.
6	Trecho em curva considerando apenas o peso próprio ($F_y = 15.244,74$ N, $F_x = 2.431,42$ N) com os carregamentos aplicados no centro de massa do rodeiro ($h = 0$).

Fonte: Autoria própria.

A Figura 5.11 mostra os deslocamentos laterais do centro do rodeiro para todas as análises realizadas. Nos modelos MBD, o trecho em curva ocorre aproximadamente entre 6,1 segundos até aproximadamente 17,2 segundos.

Em todos os casos, as oscilações laterais ocorrem em torno de valores médios, conforme o esperado. Os valores máximos, mínimos e médios de posições laterais no trecho em curva são apresentados na Tabela 5.5, bem como as posições de equilíbrio resultantes nos casos 3, 4, 5 e 6 do modelo quase estático.

Como esperado, os modelos quase estáticos de números 1 e 2 resultam em deslocamento lateral igual a zero devido à simetria dos casos.

Mesmo considerando as diferentes cargas aplicadas em diferentes posições, os modelos quase estáticos de carregamento de números 3, 4 e 6 apresentaram resultados coincidentes, pois

o deslocamento lateral é limitado pelo contato de flange nesses casos. Os valores das posições laterais obtidos nesses casos estão muito próximos à posição de máxima amplitude do deslocamento lateral do rodeiro traseiro e de mínima amplitude do rodeiro dianteiro do modelo MBD do truque, e à posição média do modelo MBD de um único rodeiro no trecho de curva, representando a obtenção de um ótimo resultado sem a execução da simulação dinâmica MBD propriamente dita, mas apenas a previsão quase-estática.

O ângulo máximo de *yaw* do rodeiro dianteiro na simulação dinâmica em situação de curva é 0,023 radianos. O efeito do ângulo de *yaw* considerado no caso 5 (próximo ao máximo ângulo de *yaw* da simulação dinâmica) alterou um pouco o deslocamento lateral esperado, mas sem alterações qualitativas importantes quando comparado aos casos 3 e 4, para os quais o ângulo de *yaw* não é considerado.

Figura 5.11 – Resultados dos deslocamentos laterais.

Fonte: Autoria própria.

Tabela 5.5 – Posições laterais dos centros dos rodeiros no trecho de curva (6,1 – 17,2 s).

		Posição de máxima amplitude (mm)	Posição de máxima amplitude (mm)	Posição média (mm)
Modelo MDB: rodeiro isolado		-6,76	-3,95	-5,35
Modelo MBD: truque	Rodeiro dianteiro	-5,96	-5,72	-5,84
	Rodeiro traseiro	-5,85	-4,73	-5,29
Quase-estático: Caso 3		-	-	-5,59
Quase-estático: Caso 4		-	-	-5,59
Quase-estático: Caso 5		-	-	-5,71
Quase-estático: Caso 6		-	-	-5,58

Fonte: Autoria própria.

Adicionalmente, no caso 3 do modelo quase estático, podemos verificar o desempenho do modelo de contato desenvolvido em casos em que há mais de um ponto de contato entre as superfícies.

A Figura 5.12 e a Figura 5.13 mostram, respectivamente, a posição inicial e a posição de equilíbrio obtida como resultado da análise. A Figura 5.14 e a Figura 5.15 ilustram com maior detalhe os contatos resultantes. Verifica-se na Figura 5.14 a ocorrência de três pontos de contato entre as superfícies.

Figura 5.12 – Exemplo de contato com múltiplos pontos. Posição de inicial.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.13 – Exemplo de contato com múltiplos pontos. Posição de equilíbrio.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.14 – Detalhe no contato com múltiplos pontos (contato esquerdo).

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.15 – Detalhe no contato (contato direito).

Fonte: Autoria própria.

5.3 Análise de acúmulo de pressão de contato roda-trilho

Esse exemplo apresenta uma aplicação da metodologia de acúmulo de pressão de contato descrita no item 4.4 com a utilização do modelo de análise de contato desenvolvido no item 4.1, empregando geometrias de perfis reais de roda e trilho. As quatro análises a seguir foram desenvolvidas:

- Análise 1: trecho em tangente com perfis de trilhos novos;
- Análise 2: trecho em tangente com perfis de trilhos desgastados;
- Análise 3: trecho em curva com perfis de trilhos novos;
- Análise 4: trecho em curva com perfis de trilhos severamente desgastados.

Foram considerados dez rodeiros com diferentes perfis de roda para todos os casos (foram realizadas 40 simulações no total). Os perfis foram obtidos a partir da medição de rodas e trilhos reais com um equipamento que fornece um conjunto de pontos que descrevem os perfis geométricos. Os perfis compostos por arcos circunferenciais foram gerados a partir dessas medidas, com um procedimento do *fitting* descrito no item 4.1.1. Cada perfil de roda gerado é composto por 20 arcos, enquanto cada perfil de trilho é composto por 25 arcos. A Figura 5.16 e a Figura 5.17 mostram os perfis de rodas e trilhos utilizados nas análises. Na Figura 5.16, em preto e amarelo, encontramos as rodas esquerda e direita de cada rodeiro, respectivamente. Observa-se que há uma variedade de perfis de rodas de novas a cavas/desgastadas.

Figura 5.16 – Perfis das rodas. Unidades dos eixos em mm.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.17 – Perfis dos trilhos. Unidades dos eixos em mm.

Fonte: Autoria própria.

Para todos os casos, foram adotados os mesmos valores de *cant* do trilho (1:40), coeficiente de penalidade de contato (1E6 N/m) e coeficiente de amortecimento de contato (1E5 Ns/m). Os valores de bitola da via e bitola de eixamento adotados são, respectivamente, 1,00 m e 0,912 m. A velocidade considerada é de 65 km/h. A carga vertical adotada é de 269.500 N (equivalente a 27,5 toneladas), representando uma carga de 110 toneladas por vagão, cada vagão composto por 4 rodeiros. Nas análises 3 e 4, é considerado um trecho em curva com raio de 208,36 m, superelevação de 91 mm e uma carga lateral devido à força centrífuga (F_x) calculada da seguinte forma:

$$F_x = \frac{\text{Massa} \times \text{Velocidade}^2}{\text{Raio da curva}} = \frac{(27500 \text{ kg}) \times (18.0556 \frac{\text{m}}{\text{s}})^2}{208.36 \text{ m}} = 43.026,92 \text{ N.} \quad (5.7)$$

Os resultados do procedimento de acúmulo de pressão de contato são mostrados na Figura 5.18, Figura 5.19, Figura 5.20 e Figura 5.21. Os diagramas plotados ao longo do eixo "S" representam a somatória das pressões de contato devido à passagem dos dez rodeiros sobre o par de trilhos, com as magnitudes indicadas no eixo das ordenadas. O acúmulo de pressões de contato pode ser visto como um indicativo de tensões que cada região ao longo do perfil do trilho experimentará devido à passagem das rodas. Portanto, quanto maior a somatória de pressão, mais propensa é a região a danos como fadiga de contato por rolamento (RCF).

Para os casos de trechos em tangente, na Análise 1 de trilhos novos (Figura 5.18) e na Análise 2 de trilhos desgastados (Figura 5.19), o acúmulo de pressão de contato é mais pronunciado no topo do boleto dos trilhos. No entanto, a diferença entre as duas análises é notável. Isso se deve exclusivamente à diferença na geometria dos perfis dos trilhos, pois os parâmetros adotados e os perfis das rodas são os mesmos nas duas análises. Isso destaca a importância da geometria dos perfis.

Na Análise 3 (Figura 5.20), no trilho baixo, o acúmulo de pressão de contato é mais pronunciado no topo do boleto. No trilho alto, há um acúmulo concentrado de pressão no topo do boleto, próximo à transição interna, uma distribuição de acúmulo de pressão no centro do topo do boleto e uma distribuição de pressão na face interna devido ao contato do flange.

Na Análise 4 (Figura 5.21), é observado um acúmulo de pressão concentrada próximo à transição externa no trilho baixo. No trilho alto, há um acúmulo de pressão concentrada no topo do boleto do trilho, uma distribuição de pressão no topo do boleto próximo à transição interna e

uma distribuição de pressão na face interna devido ao contato do flange. Novamente, a distinção entre os resultados das análises 3 e 4 deve-se apenas às diferenças geométricas dos perfis dos trilhos, uma vez que os mesmos rodeiros foram considerados.

Todos os resultados para as 40 simulações distintas consideradas foram obtidos de maneira direta pelo modelo quase-estático aqui proposto, com um pós-processamento direto que não envolve simulações dinâmicas complexas.

Nota-se a discrepância entre as magnitudes de acúmulo de pressão de contato em casos de trechos em tangente e em curva. Em casos em tangente, o valor máximo do acúmulo de pressão atingido é menor que 10.000 MPa, enquanto no trilho alto na Análise 3 e na Análise 4, o valor máximo de acúmulo de pressão excede 20.000 MPa, indicando um local muito mais propenso a RCF.

Figura 5.18 – Análise 1.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.19 – Análise 2.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.20 – Análise 3.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.21 – Análise 4.

Fonte: Autoria própria.

5.4 Influência da velocidade de operação na posição do contato

Para avaliar a influência da velocidade no contato em situações de curva, foram realizadas duas análises utilizando o rodeiro com as rodas da Figura 5.22 e os trilhos da Figura 5.23. As características da via adotadas são semelhantes ao estudo de caso de curva do exemplo 5.3, bem como a carga vertical aplicada a uma altura $h=1,0884$ m do centro geométrico do rodeiro. A primeira análise representa um cenário com o veículo operando com uma velocidade de 65 km/h e a segunda análise com 20 km/h. A diferença entre as duas análises é a força lateral considerada, regida pela ação da força centrífuga.

Figura 5.22 – Perfis das rodas. Unidades dos eixos em mm.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.23 – Perfis dos trilhos. Unidades dos eixos em mm.

Fonte: Autoria própria.

Os resultados são mostrados na Figura 5.24 e na Figura 5.25. No caso de velocidade de 65 km/h, o contato ocorre no topo do boleto do trilho baixo e no topo do boleto próximo à região de transição interna do trilho alto. No caso de velocidade de 20 km/h, o contato ocorre no topo do boleto no trilho alto. No trilho baixo, aparecem dois locais de contato, no topo do boleto e na região de transição interna do trilho.

Na análise com velocidade de 65 km/h, observa-se que a magnitude da pressão de contato é muito maior no trilho alto do que no trilho baixo. Por outro lado, na análise com velocidade de 20 km/h, a magnitude da pressão de contato é muito maior no trilho baixo do que no trilho alto. Este exemplo demonstra a importância da velocidade do veículo na estimativa das posições de interação do contato roda-trilho.

Figura 5.24 – Pressão de contato -Caso a 65 km/h.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.25 – Pressão de contato - Caso a 20 km/h.

Fonte: Autoria própria.

5.5 Estudo de falso flange

Esse exemplo mostra um caso em que ocorre o fenômeno de falso flange (descrito no item 3.4.1.4), que ocorre quando uma roda com um desgaste muito severo, com uma cava muito pronunciada, opera.

O cenário e os perfis de trilho adotados são os mesmos da Análise 4, caso em curva, do item 5.3, bem como os valores das cargas aplicadas a uma altura $h = 1,0884$ m do centro geométrico do rodeiro. Os perfis de rodas adotados são os mesmos do rodeiro 8 utilizado no exemplo 5.3. A Figura 5.26 e a Figura 5.27 mostram os perfis das rodas e dos trilhos, respectivamente.

Figura 5.26 – Perfis das rodas – Caso de falso flange. Unidades dos eixos em mm.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.27 – Perfis dos trilhos – Caso de falso flange. Unidades dos eixos em mm.

Fonte: Autoria própria.

No caso desse exemplo, não há contato entre o flange da roda e o trilho alto. O contato ocorre entre a pista da roda e o topo do boleto no trilho alto. No trilho baixo, o contato ocorre entre a região de transição externa do trilho e a região cava da pista roda, onde ocorre o flange falso (Figura 5.29). Nesse caso, existe um pico de pressão elevado no contato do trilho baixo, o que pode causar danos localizados pronunciados nas rodas e nos trilhos, como exibem os resultados na Figura 5.28.

Figura 5.28 – Pressão de contato – Falso flange.

Fonte: Autoria própria.

Figura 5.29 – Falso flange.

Fonte: Autoria própria.

6 Conclusões e sugestões para trabalhos futuros

Nesse trabalho, um modelo para análise da pressão de contato roda-trilho com geometrias de perfis reais, considerando cenários de trechos em tangente e em curva, foi desenvolvido.

No modelo, as geometrias dos perfis são descritas com arcos de circunferência, condizente com perfis descritos em norma e utilizados amplamente no mercado, além de permitir análises com geometrias genéricas de perfis reais de rodas e trilhos, inclusive perfis com desgaste severo.

Para o cálculo dos locais e esforços normais no contato, foi proposto um modelo quase estático bidimensional que analisa a condição de contato roda-trilho para um cenário de estado estacionário dinâmico em trecho de via tangente ou em curva. A formulação baseada na metodologia *master-master* foi empregada para resolver o problema de contato. A particularidade do modelo proposto (2D e com geometrias particulares formadas por arcos de circunferência) possibilitou a obtenção de uma solução analítica no problema local de contato, utilizado posteriormente pelo modelo numérico desenvolvido.

No programa computacional desenvolvido foram elaboradas classes responsáveis por leitura de dados de entrada, armazenamento de dados (geometria dos perfis, características da via e do veículo, parâmetros do modelo, etc.), parametrizações e representações dos perfis, combinação de pares de curvas candidatas ao contato, cálculos internos do programa, entre outras.

O primeiro exemplo numérico demonstrou uma das importantes vantagens do modelo desenvolvido que é a capacidade de lidar com casos em que há superfícies não convexas no contato.

O segundo exemplo numérico compara resultados de análises do modelo proposto aqui com resultados de uma simulação dinâmica em um *software* comercial de dinâmica de multicorpos, mostrando bons resultados provenientes da solução do modelo desenvolvido tanto para casos em trecho tangente, como para casos em trechos em curva, comparando as posições laterais dos rodeiros. Além disso, o exemplo mostra o desempenho do modelo de contato desenvolvido em casos em que há mais de um ponto de contato em um mesmo par de contato roda-trilho.

No terceiro exemplo numérico, a metodologia para análise de acúmulo de pressão de contato foi aplicada. Nesse exemplo, utilizou-se geometrias de perfis provenientes de medições de perfis reais. Os resultados dessa metodologia servem como indicativo para prever regiões propensas a sofrer fadiga por contato de rolamento nos trilhos.

Os últimos dois exemplos mostram, respectivamente, a influência da velocidade de operação no comportamento do contato e a ocorrência do fenômeno de falso flange.

Apesar de ser capaz de estimar os locais e área de contato (com base na teoria de Hertz), o modelo apresentado não lida com o contato conforme. Portanto, uma sugestão para sequência deste trabalho é a introdução de um modelo para avaliar casos de contato conforme. Além disso, é interessante incluir o efeito do atrito e o *creepage* na formulação do modelo de análise de contato roda-trilho. Nesse contexto, é desejável a utilização do método *master-master* em um contexto mais geral de simulação multicorpos para obtenção de resultados da dinâmica do veículo, incluindo detalhes do contato roda-trilho.

Outra ideia é a introdução de outros tipos de descrição das geometrias dos perfis, por exemplo com curvas *splines*, que possibilitaria a descrição de cada perfil com apenas uma curva, reduzindo a quantidade de combinações necessárias para avaliação do problema local do contato.

Como contribuição principal desse trabalho, a metodologia para análise do contato roda-trilho permite avaliar o comportamento do contato entre perfis de rodas e trilhos sem a necessidade de executar uma simulação dinâmica de multicorpos. Assim, obtendo uma solução rápida com baixo custo computacional. Além disso, o modelo permite obter resultados realistas devido à utilização de geometria de perfis obtidos a partir de medições de rodas e trilhos reais.

Referências

1. SETOR Ferroviário. **Ministério dos Transportes, Portos e Aviação Civil**. Disponível em: <http://www.transportes.gov.br/component/content/article.html?id=5380>>. Acesso em: 2018.
2. SHEVTSOV, I. Y. **Wheel/Rail Interface Optimization**. Delft University of Technology. Delft. 2008.
3. LEEPER, J.; ALLEN, R. **Guidelines to Best Practices For Heavy Haul Railway Operations: Management of the Wheel and Rail Interface**. Virginia Beach: Simmons-Boardman Books Inc., 2015.
4. RONEY, M. Introduction and Discussion of Guidelines. In: LEEPER, J.; ALLEN, R. **Guidelines to Best Practices for Heavy Haul Railway Operations: Management of the Wheel and Rail Interface**. Virginia Beach: Simmons-Boardman Books, Inc, 2015.
5. TOURNAY, H. The Fundamentals of Vehicle/Track Interaction. In: LEEPER, J.; ALLEN, R. **Guidelines to Best Practices For Heavy Haul Railway Operations: Management of the Wheel and Rail Interface**. [S.l.]: Simmons-Boardman Books, Inc., 2015.
6. MAGEL, E. E.; KALOUSEK, J. The application of contact mechanics to rail profile. **Wear**, Vancouver, n. 253, p. 308-316, 2002.
7. SHABANA, A. A.; ZAAZAA, K. E.; SUGIYAMA, H. **Railroad Vehicle Dynamics: A Computational Approach**. Boca Raton: CRC Press, 2007.
8. JOHNSON, L. K. **Contact Mechanics**. Cambridge: Cambridge University Press, 1985.
9. WIKIPEDIA - Contact mechanics. **Wikipedia**. Disponível em: https://en.wikipedia.org/wiki/Contact_mechanics>. Acesso em: 2018.
10. WICKENS, A. H. **Fundamentals of Rail Vehicle Dynamics: Guidance and Stability**. 1ª. ed. Lisse: Swets & Zeitlinger Publishers, 2003.
11. MEYMAND, S. Z.; KEYLIN, A.; AHMADIAN, M. Vehicle System Dynamics. **International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, v. 54, p. 386-428, Janeiro 2016.
12. KALKER, J. J. Survey of wheel-rail rolling contact theory. **Veh Syst Dyn**, p. 317-358, 1979.
13. KALKER, J. J. **Three Dimensional Bodies in Rolling Contact**. Dordrech: Kluwer

Academic Publishers, 1990.

14. KALKER, J. J. CONTACT. Disponível em: <<https://www.kalkersoftware.org/>>. Acesso em: 2019.
15. LI, L. Z. **Wheel–rail rolling contact and its application to wear simulation**. Delft University. Delft. 2002.
16. LI, L. Z.; KALKER, J. J. **The computation of wheel–rail conformal contact**. Proceedings of the 4th World Conference on Computational Mechanics. Buenos Aires: [s.n.]. 1998.
17. PASCAL, J. P.; SAUVAGE, G. New method for reducing the multicontact wheel/rail problem to one equivalent contact patch. **Veh Syst Dyn**, p. 475-489, 1992.
18. PIOTROWSKI, J.; CHOLLET, H. Wheel–rail contact models for vehicle system dynamics including multi-point contact. **Veh Syst Dyn**, p. 455-483, 2005.
19. PASCAL, J. P.; JOURDAN, F. **The “Rigid-Multi-Hertzian method” as applied to conformal contacts**. ASME 2007 International Design Engineering Technical Conferences. San Diego: [s.n.]. 2007. p. 1811-1825.
20. PASCAL, J. P.; SAUVAGE, G. The available methods to calculate the wheel/rail forces in non Hertzian contact patches and rail damaging. **Veh Syst Dyn**, p. 57-78, 1993.
21. AYASSE, J. B.; CHOLLET, H.; MAUPU, J. L. **Paramètres Caractéristiques du Contact Roue-Rail**. [S.l.]: [s.n.].
22. PIOTROWSKI, J.; KIK, W. A simplified model of wheel/rail contact mechanics for non-Hertzian problems and its application in rail vehicle dynamic simulations. **Veh Syst Dyn**, n. 46, p. 27-48, 2008.
23. LINDER, C. H.; BRAUCHLI, H. **Prediction of wheel wear**. Second Mini Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. Budapeste: [s.n.]. 1996. p. 215-220.
24. AYASSE, J. B.; CHOLLET, H. Determination of the wheel rail contact patch in semi-Hertzian conditions. **Veh Syst Dyn**, n. 43, p. 161-172, 2005.
25. SICHANI, M.; ENBLÖM, R.; BERG, M. A novel method to model wheel–rail normal contact in vehicle dynamics simulation. **Veh Syst Dyn**, v. 52, p. 1752-1764, 2014.
26. VERMUELEN, P. J.; JOHNSON, K. L. Contact of nonspherical elastic bodies transmitting tangential forces. **Appl Mech**, v. 31, p. 338-340, 1964.
27. KALKER, J. J. A fast algorithm for the simplified theory of rolling contact. **Veh Syst Dyn**,

- v. 11, p. 1-13, 1982.
28. POLACH, O. **Solution of wheel–rail contact forces suitable for calculation of rail vehicle dynamics**. Proceedings of the Second International Conference on Railway Bogies. Budapest: [s.n.]. 1992. p. 10-17.
 29. POLACH, O. fast wheel-rail forces calculation computer code. **Veh Syst Dyn**, n. 33, p. 728-739, 1999.
 30. KALKER, J. J. The principle of virtual work and its dual for contact problems. **Ingenieur-Archiv**, v. 56, p. 453-467, 1986.
 31. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A master-surface to master-surface formulation for beam to beam contact. Part I: Frictionless interaction. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 303, p. 400-429, 2016.
 32. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. A master-surface to master-surface formulation for beam to beam contact. Part II: Frictional interaction. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, v. 319, p. 146-174, 2017.
 33. GAY NETO, A.; WRIGGERS, P. Computing pointwise contact between bodies: a class of formulations based on master–master approach. **Computational Mechanics**, v. 64, p. 585-609, 2019.
 34. SHABANA, A. A. et al. Development of elastic force model for wheel/rail contact problems. **Journal of Sound and Vibration**, n. 269, p. 295-325, 2004.
 35. SHABANA, A. A. et al. On the computer formulations of the wheel/rail contact problem. **Nonlinear Dyn.**, n. 40, p. 169-193, 2005.
 36. ELKINS, J. A. PREDICTION OF WHEEL/RAIL INTERACTION: THE STATE-OF-THE-ART. **Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, n. 20, p. 1-27, 1992.
 37. SUGIYAMA, H. et al. Wheel/rail contact geometry on tight radius curved track: simulation and experimental validation. **Multibody Syst Dyn**, v. 25, p. 117-130, 2011.
 38. BOZZONE, M.; PENNESTRÌ, E.; SALVINI, P. **A compliance based method for wheel-rail contact analysis**. International Conference on Contact Mechanics and Wear of Rail/Wheel Systems. Florence: [s.n.]. 2009.
 39. MALVEZZI, M. et al. Determination of wheel-rail contact point with semianalytic methods.

- Multibody Sys Dyn**, n. 20, p. 327-358, 2008.
40. AUCIELLO, J. et al. Dynamic simulation of railway vehicles: wheel/rail contact analysis. **Veh Syst Dyn**, v. 7, n. 47, p. 867-899, 2009.
 41. FALOMI, S.; MALVEZZI, M.; MELI, E. Multibody modeling of railway vehicles: innovative algorithms for the detection of wheel-rail contact points. **Wear**, v. 1, n. 271, p. 453-461, 2011.
 42. SHABANA, A. A. Numerical procedure for the simulation of wheel/rail contact dynamics. **J Dyn Syst Meas Control**, n. 123, p. 168-178, 2001.
 43. POMBO, J.; AMBROSI, J. Application of a wheel-rail contact model to railway dynamics in small radius curved tracks. **Multibody Syst Dyn**, n. 19, p. 91-114, 2008.
 44. NEGRETTE, D. A third-order approximation method for three-dimensional wheel-rail contact. **Vehicle System Dynamics**, v. 50, n. 3, p. 431-448, 2012.
 45. BAEZA, L. et al. Method for obtaining the wheel-rail contact location and its application to the normal problem calculation through 'CONTACT'. **Vehicle System Dynamics**, v. 56, n. 11, p. 1734-1746, 2018.
 46. SUGIYAMA, H.; SUDA, Y. On the Contact Search Algorithms for Wheel/Rail Contact Problems. **Journal of Computational and Nonlinear Dynamics**, v. 4, p. 1-7, 2009.
 47. SMITH, R. E.; KALOUSEK, J. A Design Methodology for Wheel and Rail Profiles for Use on Steered Railway Vehicles, Proceedings of the Third International Conference on Contact Mechanics and Wear of Wheel/Rail System. **Wear**, Cambridge, v. 144, p. 329-342, 1991.
 48. AREMA Manual for Railway Engineering. American Railway Engineering and Maintenance-of-Way Association. [S.l.]. 2014.
 49. Manual of Standards and Recommended Practices Section G-II: Wheel and Axle Manual. The Association of American Railroads. Washington. 2004.
 50. FRÖHLING, R. D. Wheel/rail interface management in heavy haul railway operations — applying science and technology. **Vehicle System Dynamics: International Journal of Vehicle Mechanics and Mobility**, SpoorNet, v. 45, p. 649-677, Junho 2007.
 51. MAGEL, E.; KALOUSEK, J.; CALDWELL, R. A numerical simulation of wheel wear. **Wear**, Ottawa, n. 258, p. 1245-1254, 2005.
 52. STEINSTRÄESSER, J. G. C. **Arcs fitting to a set of points - User Guide**. [S.l.]. 2018.

- 53. GAY NETO, A.; PIMENTA, P. D. M.; WRIGGERS, P. Contact between spheres and general surfaces. **Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.**, n. 328, p. 686-716, 2018.
- 54. GAY NETO, A. GIRAFFE Project, 2016. Disponivel em: <http://sites.poli.usp.br/p/alfredo.gay/giraffe.html>. Acesso em: 2018.
- 55. PARAVIEW , 2018. Disponivel em: <https://www.paraview.org/>.
- 56. SIMPACK SIMULIA. Disponivel em: <http://www.simpack.com/>. Acesso em: 2018.
- 57. LUNDÉN, R.; PAULSSON, R. Introduction to Wheel-Rail Intercafe Research. In: LEWIS, R.; OLOFSSON, U. **Wheel-Rail Interface Handbook**. [S.l.]: CRC Press, 2009. Cap. 1.
- 58. SHABANA, A. A.; ZAAZAA, K. E.; SUGIYAMA, H. **Railroad Vehicle Dynamics: Computational Approach**. Boca Raton: CRC Press, 2007.

Apêndice A – Exemplo de arquivo de entrada para o programa computacional desenvolvido

A seguir, temos um exemplo de arquivo de entrada do programa computacional desenvolvido.

Figura 0.1 – Exemplo de arquivo de entrada .txt.

```

exemplo.txt - Bloco de Notas
Arquivo  Editor  Formatar  Exibir  Ajuda
Arcs 45
Arc 1 InitialPoint 0 11.824275 FinalPoint 9.26162703 26.53891311 CenterPoint 19.05188636 10.10474167
Arc 2 InitialPoint 9.26162703 26.53891311 FinalPoint 17.15955532 27.77752331 CenterPoint 14.75346329 17.32018094
Arc 3 InitialPoint 17.15955532 27.77752331 FinalPoint 22.36299099 25.51070452 CenterPoint 13.69461721 12.71823064
Arc 4 InitialPoint 22.36299099 25.51070452 FinalPoint 27.57618197 20.5084458 CenterPoint 10.32559787 7.75255626
Arc 5 InitialPoint 27.57618197 20.5084458 FinalPoint 30.10913691 15.50985804 CenterPoint 14.08953681 10.53324138
Arc 6 InitialPoint 30.10913691 15.50985804 FinalPoint 32.80740242 9.3882023 CenterPoint 58.20326217 24.23752234
Arc 7 InitialPoint 32.80740242 9.3882023 FinalPoint 36.65581509 5.48203366 CenterPoint 42.41749002 15.00735707
Arc 8 InitialPoint 36.65581509 5.48203366 FinalPoint 40.56084949 3.68088422 CenterPoint 46.62708502 21.96674896
Arc 9 InitialPoint 40.56084949 3.68088422 FinalPoint 44.45942513 2.59944882 CenterPoint 53.37405134 42.30458665
Arc 10 InitialPoint 44.45942513 2.59944882 FinalPoint 49.66014478 1.6291929 CenterPoint 60.37547643 73.48845699
Arc 11 InitialPoint 49.66014478 1.6291929 FinalPoint 56.15994527 0.83706833 CenterPoint 67.71048916 122.6785927
Arc 12 InitialPoint 56.15994527 0.83706833 FinalPoint 65.38950919 0.17436492 CenterPoint 75.28097089 202.5362203
Arc 13 InitialPoint 65.38950919 0.17436492 FinalPoint 77.21994673 -0.1787967 CenterPoint 80.59826113 311.3185978
Arc 14 InitialPoint 77.21994673 -0.1787967 FinalPoint 90.21997801 -0.31956582 CenterPoint 4216.157887 381630.4893
Arc 15 InitialPoint 90.21997801 -0.31956582 FinalPoint 101.9200015 -0.77237563 CenterPoint 87.94089459 -210.3846279
Arc 16 InitialPoint 101.9200015 -0.77237563 FinalPoint 108.2900027 -1.19699842 CenterPoint -27894.87712 -420044.2059
Arc 17 InitialPoint 108.2900027 -1.19699842 FinalPoint 114.6600035 -1.62166922 CenterPoint 2901673.22 4352306.7
Arc 18 InitialPoint 114.6600035 -1.62166922 FinalPoint 119.7300043 -1.95967188 CenterPoint 3184567.083 47766378.56
Arc 19 InitialPoint 119.7300043 -1.95967188 FinalPoint 124.8000042 -2.29767407 CenterPoint 6450701.783 96758060.83
Arc 20 InitialPoint 124.8000042 -2.29767407 FinalPoint 129.870002 -2.6356764 CenterPoint -2119922.972 -3170525
Arc 21 InitialPoint -36.41876998 -22.635192 FinalPoint -35.64447791 -11.95667614 CenterPoint 41.81832824 -22.94079219
Arc 22 InitialPoint -35.64447791 -11.95667614 FinalPoint -34.95604801 -9.70055994 CenterPoint -28.09528749 -13.02713966
Arc 23 InitialPoint -34.95604801 -9.70055994 FinalPoint -33.44142744 -7.15167363 CenterPoint -19.1871168 -17.34644797
Arc 24 InitialPoint -33.44142744 -7.15167363 FinalPoint -31.96006184 -5.47305297 CenterPoint -24.51671935 -13.53468206
Arc 25 InitialPoint -31.96006184 -5.47305297 FinalPoint -30.47266717 -4.26030114 CenterPoint -21.37061463 -16.94212024
Arc 26 InitialPoint -30.47266717 -4.26030114 FinalPoint -27.57092469 -2.74343346 CenterPoint -23.67261472 -13.73476139
Arc 27 InitialPoint -27.57092469 -2.74343346 FinalPoint -24.67792054 -1.94491965 CenterPoint -20.55152135 -22.53471854
Arc 28 InitialPoint -24.67792054 -1.94491965 FinalPoint -21.77604723 -1.38789524 CenterPoint 10.97468505 -179.8433599
Arc 29 InitialPoint -21.77604723 -1.38789524 FinalPoint -18.13539444 -0.81572375 CenterPoint -8.79029671 -72.1495106
Arc 30 InitialPoint -18.13539444 -0.81572375 FinalPoint -14.4929944 -0.4260889 CenterPoint -8.09664602 -77.44051971
Arc 31 InitialPoint -14.4929944 -0.4260889 FinalPoint -9.36495985 -0.1415644 CenterPoint -6.745118 -93.71342339
Arc 32 InitialPoint -9.36495985 -0.1415644 FinalPoint -3.49321488 -0.02151084 CenterPoint 1.52370661 -389.047736
Arc 33 InitialPoint -3.49321488 -0.02151084 FinalPoint 3.86483918 -0.02566784 CenterPoint 0.03140508 -273.3304981
Arc 34 InitialPoint 3.86483918 -0.02566784 FinalPoint 9.73655956 -0.1543642 CenterPoint -1.35563382 -372.2194898
Arc 35 InitialPoint 9.73655956 -0.1543642 FinalPoint 14.86465364 -0.45803948 CenterPoint 7.12790342 -87.6564424
Arc 36 InitialPoint 14.86465364 -0.45803948 FinalPoint 18.50697504 -0.86587387 CenterPoint 7.82621264 -79.78602567
Arc 37 InitialPoint 18.50697504 -0.86587387 FinalPoint 22.14768633 -1.45499793 CenterPoint 8.95949223 -71.41222292
Arc 38 InitialPoint 22.14768633 -1.45499793 FinalPoint 25.04966228 -2.02621729 CenterPoint -12.0027996 -182.6074142
Arc 39 InitialPoint 25.04966228 -2.02621729 FinalPoint 27.94316107 -2.88660791 CenterPoint 21.54415205 -19.1189132
Arc 40 InitialPoint 27.94316107 -2.88660791 FinalPoint 30.84411512 -4.53063663 CenterPoint 23.55679253 -14.00796842
Arc 41 InitialPoint 30.84411512 -4.53063663 FinalPoint 32.25737425 -5.76405748 CenterPoint 21.62499801 -16.52031195
Arc 42 InitialPoint 32.25737425 -5.76405748 FinalPoint 33.66498753 -7.46012175 CenterPoint 24.37641736 -13.7368357
Arc 43 InitialPoint 33.66498753 -7.46012175 FinalPoint 35.10219195 -10.05777912 CenterPoint 19.81409656 -16.81980564
Arc 44 InitialPoint 35.10219195 -10.05777912 FinalPoint 35.71866842 -12.29462275 CenterPoint 27.88364313 -13.25059139
Arc 45 InitialPoint 35.71866842 -12.29462275 FinalPoint 36.41876998 -22.635192 CenterPoint -59.9210072 -23.96382957

ArcSets 2
ArcSet 1 Arcs 20 List 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19
ArcSet 2 Arcs 25 List 21 22 23 24 25 26 27 28 29 30 31 32 33 34 35 36 37 38 39

ArcSetsGlobal 4
ArcSetGlobal 1 ArcSet 1 Part LW /* Assume que LW está em CS 4 */
ArcSetGlobal 2 ArcSet 1 Part RH /* Assume que RH está em CS 3 */
ArcSetGlobal 3 ArcSet 2 Part LR /* Assume que LR está em CS 2 */
ArcSetGlobal 4 ArcSet 2 Part RR /* Assume que RR está em CS 1 */

ContactPairs 2
ContactPair 1 CR1 3 CR2 1
ContactPair 2 CR1 4 CR2 2

ModelParameters
Gauge 1435
RightCant 0.025 LeftCant -0.025
Superelevation -91
CurveRadius 208.36
RailHeight 0
BackToBack 1360.2628
WheelRadius 460
Speed 18.0556
Load 303075.045
LateralLoad -48387.55
Hcg 1548.4
Kx 0 Ky 0 Kphi 0
Damping 500
Epsilon 1000000000
Mass 1.554
Inertia 310378
CN 100
InitialPositionX 0 InitialPositionY 100

PostFiles
WriteVTK 1
WritePosProcessor 1

```

Fonte: Autoria própria.