LUIS ARTURO BUTRON VARGAS

**COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE PONTES ESTAIADAS
EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM**

**São Paulo
2007**

LUIS ARTURO BUTRON VARGAS

COMPORTAMENTO ESTRUTURAL DE PONTES ESTAIADAS
EFEITOS DE SEGUNDA ORDEM

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para obtenção do Título de Mestre em
Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Fernando Rebouças Stucchi

São Paulo

2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência do seu orientador.

São Paulo 8 de agosto de 2007.

Assinatura do Autor

Assinatura do Orientador

Vargas, Luis Arturo Butron

Comportamento estrutural de pontes estaiadas : efeitos de segunda ordem / L.A.B. Vargas. -- ed. Rev. -- São Paulo, 2007. 153 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1.Pontes estaiadas (Comportamento estrutural) 2.Análise não linear de estruturas 3.Estruturas de concreto armado I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.

À Maria Luisa, José Antonio, Telby, Luis e Claudia.

AGRADECIMENTOS

Aos meus avôs e aos meus pais, pela formação, proteção, apoio e carinho brindados em cada etapa da vida.

A minha família, pelos contínuos aportes de lições de vida desde diferentes perspectivas.

Ao Professor Fernando Rebouças Stucchi, pela orientação deste trabalho, pela confiança, paciência, compreensão, amizade e motivação.

À Escola Politécnica e aos professores do departamento de Estruturas e Fundações, pela dedicação, sem medir esforços, à sua nobre tarefa. Em especial aos Professores Nelson Achar, João Cyro, Bucalem, Mazzilli, Pimenta, Mario, Ricardo França, Della Bella, Rui, Lindenberg e Túlio.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica computacional, por compartilhar tanto experiências acadêmicas quanto dos aspectos culturais complementares.

Aos colegas do Laboratório de Estruturas e Materiais, e da Sala-25 pela sua confiança e disponibilidade.

Aos amigos de Aracajú, Luiz, Renoir, Rezende por compartilhar esta etapa da vida, em especial ao Igor pela confiança e modo motivador de procurar respostas.

Aos amigos e colegas de Puno, Alexei, Raúl e Marco pela confiança, amizade e apoio permanentes.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES), pelo apoio financeiro.

“ Uma viagem de mil milhas começa com um único passo. ”

Lao Tsé

RESUMO

A evolução das pontes estaiadas modernas mostra a procura da engenharia de pontes por sistemas estruturais cada vez mais leves e esbeltos. No intuito de dar contexto ao problema de análise de estruturas esbeltas, de maneira geral e desde a perspectiva da concepção, se discutem os vários arranjos estruturais que podem se obter ao combinar o pilão, o sistema de suspensão por estais e o tabuleiro, elementos que compõem qualquer sistema estrutural de ponte estaiada.

Este trabalho apresenta um método de análise estrutural estático não linear que considera os efeitos decorrentes da mudança da geometria da estrutura sob carregamentos (não linearidade geométrica) e os efeitos da resposta não linear da seção de concreto estrutural quando solicitada por flexão oblíqua composta (comportamento não linear do material).

O programa ANLST foi elaborado para obter as relações momento-normal-curvatura e as rigidezes secantes na flexão oblíqua composta para uma seção de concreto de geometria arbitrária, esses resultados são integrados com uma análise elástica de segunda ordem, que é executada no programa SAP2000 para análise estrutural por elementos finitos.

Mostra-se a formulação do método de análise elástica de segunda ordem pelo princípio dos deslocamentos virtuais, que leva em consideração os efeitos dos deslocamentos finitos dos nós do modelo para a resposta da estrutura, por meio da matriz de rigidez geométrica do elemento barra no espaço.

Finalmente são apresentados dois exemplos de estruturas planas para validar o método e um exemplo de uma estrutura espacial para a aplicação do método. Todos esses exemplos mostram que os esforços e deslocamentos de segunda ordem, em este tipo de estruturas, não podem ser desprezados.

ABSTRACT

Modern cable stayed bridges evolution shows the bridge engineering searching for lightweight and slender structural systems. Trying to give context for the problem of analysis of slender structures, of a general mode and from the conception perspective, is discussed the several structural layouts that can be obtained from the combination of pylon, cable stayed suspension system and girder, elements that compose any structural system of cable stayed bridges.

This work presents a method of non-linear static structural analysis that consider the resulting effects of geometry change under loading (geometric non linearity), and the effects of non-linear response of the structural concrete section when it is loading for biaxial bending and axial force interaction (material non linearity).

The ANLST program was developed to obtain the moment-axial-curvature relationships and the secant stiffness for biaxial bending and axial force interaction for a concrete section of arbitrary geometry. These results are integrated with the second order elastic static analysis, which is executed in the finite element program SAP2000 for structural analysis.

A formulation of method for second order elastic analysis is shown by the virtual displacement principle, which leads in consideration the effects of finite displacement of the model's nodes for the structural behavior, by means of geometric stiffness matrix for space frame element.

Finally are shown two examples of plane structures for the validation of the method and one example of space structure for the application of the method. All of these examples showed that second order forces and displacements can't be despised in this type of structures.

INDICE

1	INTRODUÇÃO	1
1.1.	Breve resumo histórico	1
1.2.	Comportamento não linear da estrutura	4
1.2.1.	Fontes de não linearidade	5
1.2.2.	Fontes de não linearidade consideradas na análise das pontes estaiadas	6
1.3.	Níveis de análise estrutural	7
1.4.	Objetivos	9
2	CONCEPÇÃO GERAL DE PONTE ESTAIADA	10
2.1.	Sistema de suspensão por estais.....	11
2.2.	Número de planos	12
2.2.1.	Sistemas de suspensão central	12
2.2.2.	Sistemas com suspensão lateral	14
2.3.	Configuração longitudinal	18
2.3.1.	Sistema em harpa.....	18
2.3.2.	Sistema em leque	19
2.3.3.	Sistema semi-harpa.....	20
2.3.4.	Sistemas Assimétricos	21
2.3.5.	Múltiplos vãos	22
2.4.	Espaçamento dos estais	23
2.5.	Tabuleiro	26
2.5.1.	Tabuleiros de aço.....	27
2.5.2.	Tabuleiros de Concreto.....	28
2.5.3.	Tabuleiros Compostos	33
2.6.	Pilões	33
2.6.1.	Configuração Longitudinal	34
2.6.2.	Resistência da parte inferior dos pilões.	35
2.6.3.	Configuração transversal.	36
2.6.4.	Estética e economia.	39

3	RELAÇÕES MOMENTO-NORMAL-CURVATURA NA SEÇÃO TRANSVERSAL.....	42
3.1.	Relações tensão-deformação dos materiais	42
3.1.1.	Concreto	42
3.1.2.	Aço de armadura passiva	45
3.1.3.	Aço de armadura ativa	46
3.1.4.	Lâmina de fibra de carbono	47
3.2.	Esforços resistentes na seção transversal.....	48
3.3.	Método de cálculo dos esforços resistentes	51
3.3.1.	Contribuição do concreto.....	53
3.3.2.	Contribuição do aço de armadura passiva	57
3.3.3.	Contribuição do aço ativo.....	58
3.3.4.	Contribuição da fibra de carbono.....	59
3.3.5.	Esforços totais	60
3.4.	Superfície de interação no ELU.....	61
3.4.1.	Método de cálculo da superfície de interação no ELU	63
3.5.	Relações momento-curvatura	67
3.5.1.	Flexão composta	67
3.6.	Procedimento de cálculo das rigidezes secantes.....	68
4	CABOS ESTAIADOS.....	73
4.1.	Módulo de Rigidez Equivalente.....	73
4.2.	Matriz de rigidez dos cabos.....	76
4.3.	Efeitos estabilizadores dos estais no pilão.....	76
4.3.1.	Estabilidade Transversal.....	77
4.3.2.	Estabilidade Longitudinal	79
5	ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO LINEAR.....	81
5.1.	Análise Elástica de Segunda Ordem	81
5.2.	Princípio dos deslocamentos virtuais na análise de estruturas de barras.....	82
5.2.1.	Descrição da configuração deformada do elemento	82
5.2.2.	Formulação das Funções de forma	83
5.2.3.	Os deslocamentos Virtuais na formulação da equação de rigidez do elemento.....	87
5.2.4.	Fórmula da matriz de rigidez de um elemento.....	90
5.2.5.	Montagem da matriz de rigidez Elástica e Geométrica	91
5.3.	Análise Estrutural não Linear	101

6	EXEMPLOS.....	103
6.1.	Exemplos para validação do método.....	103
6.1.1.	Exemplo 1 – Coluna engastada.....	103
6.1.2.	Exemplo 2 – Pórtico	107
6.2.	Exemplo de aplicação do método.....	112
6.1.3.	Exemplo 3 – Passarela	112
7	CONCLUSÕES.....	124
	REFERÊNCIAS	127

Lista de Tabelas

Tabela 3.1– Definição dos domínios de deformação para ELU, segundo a profundidade da linha neutra.	62
Tabela 3.2 – Definição dos domínios de deformação para ELU, em função da curvatura e da deformação no centro de gravidade.	63
Tabela 6.1- Comparação dos valores de momento para curvatura dada, entre Kaefer e esta Dissertação.	104
Tabela 6.2 – Resultados do exemplo Coluna Kaefer.	106
Tabela 6.3 – Resultados do exemplo Coluna Kaefer (continuação).	103
Tabela 6.4- Comparação dos valores de momento para curvatura dada, entre Kaefer e esta Dissertação. Viga do pórtico.	103
Tabela 6.5 – Resultados da análise do pórtico.	103
Tabela 6.6 – Resultados da análise do pórtico. (continuação).	103
Tabela 6.7– Intensidade dos carregamentos na passarela	103
Tabela 6.8– Valores dos deslocamentos.	123

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Conceito de Ponte Estaiada – Caminho das cargas.....	1
Figura 1.3 - Evolução do recorde de vão das pontes estaiadas	2
Figura 1.4 – Diferentes níveis de análise estrutural.....	8
Figura 2.1 – Configurações limite de ponte estaiada.....	10
Figura 2.2 – Configuração transversal dos estais	12
Figura 2.3 – Sistema de suspensão central. Pilar em meio do tabuleiro. Ponte Brotonne (1997). França.....	13
Figura 2.4 – Sistema de suspensão central. Pilão Aberto na base. Ponte Dusseldorf – Fleche (1979). Alemanha.	13
Figura 2.5 – Deformações da estrutura segundo o sistema de suspensão adotado.....	15
Figura 2.6 – Tabuleiro com suspensão lateral. Pilão pórtico em forma de A. Ponte de Normandia (1995). França.	16
Figura 2.7 – Tabuleiro com suspensão lateral com pilão pórtico em forma de A. Ponte Tatara (1999). Japão.	16
Figura 2.8 – Suspensão lateral: distribuição de esforços transversais	17
Figura 2.9 – Configuração longitudinal dos estais	18
Figura 2.10 - Sistema de estais em harpa. Ponte Higashi-Kobe (1992). Japão.....	18
Figura 2.11 - Sistema de estais em leque. Ponte Pasço-Kennewick (1978), Estados Unidos..	19
Figura 2.12 - Sistema de estais em semi-harpa. Ponte sobre o rio Paranaíba (2003). Brasil...	20
Figura 2.13 - Sistema de estais em semi-harpa. Ponte da Ilha de Annacis (1990). Canadá. ...	21
Figura 2.14 – Sistema de suspensão assimétrico. Ponte Speyer (1975). Alemanha.....	22

Figura 2.15 – Sistema de suspensão para múltiplos vãos. Ponte Rion-Antirion (2004). Grécia.	22
Figura 2.16 – Sistema de suspensão para múltiplos vãos. Viaduto Millau (2004). França.	23
Figura 2.17 - Ponte Knie. Alemanha	24
Figura 2.18 - Ponte Friedrich Ebert (1967). Alemanha	25
Figura 2.19 – Ponte sobre o rio Ebro (1980). Espanha. O espaçamento pequeno dos estais não tira a transparência da estrutura.	26
Figura 2.20 - Exemplos de tabuleiro de aço.....	27
Figura 2.21 – Ponte Maracaibo (1962). Venezuela. Projeto do Eng. Arq. Ricardo Morandi. .	28
Figura 2.22 – Ponte Hoechst (1972). Alemanha. Ponte estaiada com tabuleiro de concreto.	29
Figura 2.23 – Seção transversal do tabuleiro da Ponte Brotonne.....	29
Figura 2.24 - Seção transversal do tabuleiro da Ponte Pasco Kennewick.	30
Figura 2.25 - Seção transversal do tabuleiro da Ponte sobre o Rio Ebro.....	30
Figura 2.26 - Ponte Barrios de Luna (1984). Espanha.....	31
Figura 2.27- Seção transversal do tabuleiro da Ponte Barrios de Luna.	31
Figura 2.28 – Junta de expansão do tabuleiro da Ponte Barrios de Luna.	32
Figura 2.29 - Ponte Diepoldsau (1985). Suíça. Tabuleiro esbelto.....	33
Figura 2.30 - Influência do nível do tabuleiro na forma da parte inferior do pilão.	36
Figura 2.31 - Suspensão Lateral e condições de gabarito	37
Figura 2.32 - Influência do tamanho da estrutura no comportamento estático transversal dos pilões.	37
Figura 2.33 - Concepção de pilões com um plano único de estais.....	39

Figura 2.34 - Pilão inclinado. Ponte Alamillo (1992). Espanha.....	40
Figura 2.35 - Pilão inclinado. Ponte Erasmus (1996). Espanha.	41
Figura 2.36 - Pilão intermediário de 343 m de altura. Viaduto de Millau (2004). França	41
Figura 3.1 – Relação tensão-deformação para o concreto comprimido.....	42
Figura 3.2 – Relação tensão-deformação para o concreto tracionado.	44
Figura 3.3 – Relação tensão-deformação para a armadura passiva.	45
Figura 3.4 - Relação tensão-deformação para armadura ativa tracionada.	46
Figura 3.5 – Relação tensão deformação para a fibra de carbono.	48
Figura 3.6 – Seção arbitrária de concreto estrutural submetida a esforços solicitantes.....	48
Figura 3.7 – Parâmetros que definem o campo de deformações na seção transversal.	49
Figura 3.8 – Relações entre coordenadas de um ponto nos sistemas XY e xy	50
Figura 3.9 – Compatibilidade entre curvaturas.	50
Figura 3.10 – Definição da seção transversal por seus vértices.	52
Figura 3.11 – Campo de deformações na seção transversal.....	52
Figura 3.12 – Sentidos de Integração no Contorno da Região Comprimida.....	56
Figura 3.13 – Deformações e tensões no aço passivo e no aço ativo.	58
Figura 3.14 – Deformação na fibra de carbono.....	42
Figura 3.15 – Domínios de deformação para o ELU. NBR 6118 (2003)	42
Figura 3.16 – Fluxograma para montagem da superfície de interação.	64
Figura 3.17 –Superfície de Interação para a seção mostrada na parte superior.	65
Figura 3.18 – Diagramas de Interação $M_x - M_y$ para a seção L.....	66

Figura 3.19 – Diagrama de Interação Momento-Normal e relações Momento-Normal para varias curvaturas.	67
Figura 3.20 - Relações momento curvatura para força normal dada.	68
Figura 3.21 – Método da falsa posição	69
Figura 3.22- MÓDULO A : Para θ e $1/r_\theta$ dadas, permite achar a deformação no CG (ϵ_0) que ocasiona um Esforço normal igual à força normal Solicitante.....	70
Figura 3.23 - MÓDULO B : Para θ dado, permite achar ($1/r_\theta$, ϵ_0) que ocasionam Esforços resistentes (M_y , N) iguais às força Solicitantes (M_{ys} , N_s).....	71
Figura 3.24 - MÓDULO C : Permite achar (θ , $1/r_\theta$, ϵ_0) que ocasionam esforços resistentes (M_x , M_y , N) iguais às força Solicitantes (M_{xs} , M_{ys} , N_s).....	10
Figura 4.1 - Comportamento geométrico do cabo com módulo de elasticidade $E = \infty$	74
Figura 4.2 – Resultante R_T das forças T_A e T_C nos estais, atuante no topo da pilão (GIMSING, 1983)	77
Figura 4.3 – Modelo simplificado para estudo da estabilidade do pilão, submetida a deslocamentos laterais no seu topo (GIMSING, 1983).	78
Figura 4.4 – Direção da força resultante R_T , quando o tabuleiro está submetido a deslocamentos laterais, (GIMSING, 1983).....	78
Figura 4.5 – Modelo simplificado para o pilão submetido à flexão e tabuleiro deslocado lateralmente. (GIMSING, 1983).....	79
Figura 4.6 – Direção da força horizontal ΔH aplicada pelo sistema de cabos, em função da relação força normal atuante (N_{pt}) e força critica de flambagem (N_{cr}).....	79
Figura 5.1 – Elemento solicitado por carga axial	83
Figura 5.2 - Elemento solicitado por torção.	84
Figura 5.3 – Elemento solicitado por flexão.	85
Figura 5.4 – Forças aplicadas no nós do elemento	90

Figura 5.5 – Deformação Axial da barra e rotações do eixo como corpo rígido no espaço. ...	92
Figura 5.6 – Flexão do elemento no espaço em torno ao eixo 3(z).	97
Figura 5.7 – Método de Análise considerando o comportamento não linear da rigidez à flexão de barras de concreto estrutural e deslocamentos finitos do sistema estrutural.	102
Figura 6.1 – Coluna engastada.	103
Figura 6.2 – Relações M-N para varias curvaturas da seção transversal e Diagrama de Interação M-N.....	104
Figura 6.3– Relação Momento curvatura da seção para força normal solicitante de 1280 kN	105
Figura 6.4 - Coluna discretizada em 10 elementos.....	105
Figura 6.5 – Momentos fletores de Primeira e Segunda Ordem, exemplo Garcia.....	107
Figura 6.6 - Pórtico de concreto armado e seções transversais dos pilares e da viga.....	108
Figura 6.7 – Relações momento-Normal e Diagrama de Interação.....	108
Figura 6.8– Relação momento – curvatura para a viga do pórtico.	109
Figura 6.9 – Elementos do modelo do pórtico.	110
Figura 6.10 - Momentos fletores de primeira ordem.....	111
Figura 6.11 - Momentos fletores de segunda ordem	111
Figura 6.12- Passarela.	112
Figura 6.13 – Vista Lateral do sistema estrutural.....	112
Figura 6.14– Vista Frontal do sistema estrutural.....	113
Figura 6.15 - Carga permanente	114
Figura 6.16 – Carga Variável	115
Figura 6.17 – Carga de Vento.....	115

Figura 6.18 - Seção Transversal do Mastro.....	116
Figura 6.19 – Seção Transversal do Tabuleiro.....	117
Figura 6.20 – Seção Transversal das barras tirante.	117
Figura 6.21 - Momentos fletores longitudinais no tabuleiro.....	118
Figura 6.25 - Deformada da passarela.	122

Lista de símbolos

CAPÍTULO 3

σ_c : Tensão no Concreto (Compressão)

ε_c : Deformação no Concreto (Encurtamento)

f_{cd} : Resistência de cálculo à compressão do concreto

f_{ck} : Resistência característica à compressão do concreto

γ_c : Coeficiente de ponderação da resistência

σ_c : Tensão no Concreto (Tração)

ε_c : Deformação do concreto (Alongamento)

E_{ci} : Módulo de Elasticidade inicial do Concreto

f_{ctd} : Resistência de cálculo à tração direta do concreto

f_{ctk} : Resistência característica à tração direta do concreto

σ_s : Tensão no aço passivo

ε_s : Deformação no aço passivo

E_s : Módulo de Elasticidade do aço passivo

f_{yd} : Resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura passiva

f_{yk} : Resistência característica ao escoamento do aço de armadura passiva

γ_s : Coeficiente de ponderação das resistências

σ_p : Tensão do aço de protensão

ε_p : Deformação do aço de protensão

E_p : Módulo de Elasticidade do aço de armadura ativa

f_{pyd} : Resistência de cálculo ao escoamento do aço de armadura ativa

f_{pyk} : Resistência característica ao escoamento do aço de armadura ativa

f_{ptd} : Resistência de cálculo à tração do aço de armadura ativa

f_{ptk} : Resistência característica à tração do aço de armadura ativa

σ_{fc} : Tensão na fibra de Carbono

E_{fc} : Módulo de Elasticidade da fibra de carbono

ε_{fc} : Deformação da fibra de carbono

n : Quantidade de pontos de teste da Quadratura de Gauss (Neste estudo $n = 3$) ;

γ_k : k-ésimo peso ;

y_k : Ponto de teste no qual a função $G_l(y)$ é avaliada ;

ξ_k : Ponto de teste de Gauss .

n_f : Força Normal.

m_{xf} : momento fletor x .

m_{yf} : momento fletor y

N_c, M_{xc} e M_{yc} : Esforços resultantes das tensões no concreto.

N_s, M_{xs} e M_{ys} : Esforços resultantes das tensões no Aço Passivo.

N_p, M_{xp} e M_{yp} : Esforços resultantes das tensões no Aço Ativo.

N_f, M_{xf} e M_{yf} : Esforços resultantes das tensões na fibra de carbono.

N_θ : Esforço normal total

$M_{x\theta}$: Momento fletor total na direção x

$M_{y\theta}$: Momento fletor total na direção y

CAPÍTULO 4

σ : Tensão no cabo

E_e : Módulo de elasticidade do aço

γ : Densidade do cabo

s : Comprimento da corda

L : Vão horizontal

CAPÍTULO 5

$[\mathbf{K}]$: Matriz de rigidez elástica global da estrutura

$\{\Delta\}$: Vetor de deslocamentos nodais

$\{\mathbf{P}\}$: Vetor de forças nodais aplicadas

$[\mathbf{K}_e]$: Matriz de rigidez elástica linear

$[\mathbf{K}_g]$: Matriz de rigidez geométrica

Δ : componente do deslocamento estudado

Δ_i : i-ésimo grau de liberdade do elemento

N_i : Função de forma correspondente a Δ_i

n : O número total de graus de liberdade nos nós do elemento

$\sigma_{x,2}$: Tensão normal na direção 1, devido aos momentos fletores na direção 2.

$\sigma_{x,3}$: Tensão normal na direção 1, devido aos momentos fletores na direção 3.

I_2 : Momento de Inércia em torno do eixo 2.

I_3 : Momento de Inércia em torno do eixo 3.

$[k_G]$: Matriz global de rigidez do elemento

$[R^T]$: Matriz de rotação transposta

$[k]$: Matriz de rigidez local do elemento

1 INTRODUÇÃO

1.1. Breve resumo histórico

A idéia da ponte estaiada surgiu como uma alternativa para substituir os pilares, que serviam de apoios intermediários para o tabuleiro, por cabos inclinados e ancorados em um pilão, conseqüentemente, o vão poderia ser prolongado a distâncias maiores. A forma estrutural básica da ponte estaiada é uma série de triângulos sobrepostos constituídos de pilão, estais e tabuleiro, como mostra a figura 1.1. Todos esses componentes estão solicitados predominantemente por forças axiais, com os cabos em tração e o pilão e o tabuleiro em compressão.

Figura 1.1 – Conceito de Ponte Estaiada – Caminho das cargas.

O sistema estrutural de ponte estaiada tem sido usado pelos engenheiros desde o século XVIII, na mesma época em que eles começaram a desenvolver as pontes pênséis. Porém, com o colapso das pontes sobre os rios Tweed e Saale, no início do século XIX, a idéia foi abandonada. Mais tarde, Roebling e outros engenheiros usaram cabos estaiados em pontes pênséis para reduzir a deformabilidade da estrutura, como na ponte de Brooklyn.

As primeiras pontes estaiadas modernas foram construídas por Eduardo Torroja, em 1920 (Aqueduto Tàmpul), e por Albert Caquot, em 1952 (ponte sobre o canal Donzère), mostrada na figura 1.2. A Alemanha contribuiu substancialmente no desenvolvimento das pontes estaiadas com os artigos publicados por Franz Dischinger e com as séries de pontes executadas sobre o Rio Rhine.

Figura 1.2 - Ponte Donzère. França (1952).
(VIRLOGEUX, M.)

O desenvolvimento internacional deste sistema estrutural começou nos anos 70 e teve um avanço muito significativo nos anos 90, quando estas ingressaram ao domínio dos grandes vãos, que estava reservado apenas às pontes pênséis. O recorde de vão progrediu rapidamente até hoje, passando de 465 m na década do 80 a quase 900 m na atualidade, como mostra a figura 1.3, e existem projetos como a ponte no estreito de Messina com vão de 1200 m.

Figura 1.3 - Evolução do recorde de vão das pontes estaiadas. (VIRLOGEUX, M.)

A evolução da concepção das pontes estaiadas mostram que as superestruturas têm-se tornado mais leves, esbeltas e flexíveis do que as concebidas para as primeiras pontes. Alguns autores dividem o desenvolvimento desse sistema estrutural em três gerações (TORNERI, 2002).

Na primeira geração, observam-se tabuleiros de elevada rigidez, suportados por um pequeno número de estais com longo espaçamento. Nessa configuração estrutural, o tabuleiro resiste a esforços de flexão de grande intensidade, assim como as zonas de ancoragem, que desenvolvem pontos de concentração de tensões exigindo um reforço local do tabuleiro.

Os sistemas estruturais da segunda geração se caracterizam por terem múltiplos estais e curto espaçamento entre eles no tabuleiro. Nessa concepção, o comportamento do tabuleiro é análogo ao de uma viga contínua sobre apoios elásticos, deste modo, esse tabuleiro pode ter baixa rigidez à flexão. Esses sistemas da segunda geração se caracterizam também pela “suspensão parcial”, onde os apoios por estais, são interrompidos a uma certa distância do pilão.

A terceira geração está representada pelas pontes de múltiplos estais em suspensão total. Os estais suportam o tabuleiro em todo seu comprimento, inclusive nas zonas próximas aos pilões, isto é, o tabuleiro não se apóia diretamente no pilão.

O comportamento estrutural dos sistemas da segunda e terceira geração e o de uma treliça espacial são similares, o pilão e o tabuleiro são os elementos em compressão e os estais são as diagonais tracionadas. Deste modo, a altura do tabuleiro agora deve ser definida pela exigência de estabilidade e pela limitação de deformações, e não por necessidade de resistência à flexão.

A primeira geração de pontes estaiadas foi substituída pelas duas últimas devido às suas diversas vantagens (TORNERI, 2002):

- Simplificação na transmissão de esforços entre os estais e o pilão, os estais e o tabuleiro, devido à diminuição das forças concentradas nas ancoragens e da flexão entre pontos de suspensão;
- Possibilidade de substituição dos estais na manutenção da estrutura em caso de deterioração, sem ser necessária a paralisação do uso da estrutura ou a montagem de estruturas provisionais, ocorrendo apenas redistribuição de esforços;

- Facilidade construtiva devido ao fato de que a ponte pode ser construída por balanços sucessivos utilizando os estais;
- Redução do peso próprio devido à maior esbeltez de seção, já que não é necessária uma elevada rigidez à flexão.

Atualmente, os aspectos do projeto de pontes estaiadas que estão em discussão são: o conceito de pontes com protensão no extradorso, considerada uma solução intermediária entre a ponte de tabuleiro celular de concreto com protensão externa e a ponte estaiada; o projeto de ponte estaiada de múltiplos vãos; o comportamento estrutural de pontes estaiadas curvas; e o desenvolvimento de tabuleiros esbeltos, flexíveis e estáveis sob cargas estáticas e dinâmicas.

Adicionalmente, o desenvolvimento de materiais de alta resistência e as considerações dos aspectos estéticos da estrutura levam ao uso de elementos de maior esbeltez, às vezes, com formas não convencionais. Desse modo, a capacidade de carga da ponte estaiada pode estar condicionada ao perigo de instabilidade dos seus elementos, onde os efeitos de segunda ordem e as fontes do comportamento não-linear da estrutura devem ser considerados.

1.2. Comportamento não-linear da estrutura

No projeto preliminar desse tipo de sistemas estruturais, supor um comportamento linear sob cargas de serviço é aceitável. Porém, devido ao fato dessas pontes serem muito esbeltas e estarem sujeitas à fluência e à fissuração, essa suposição não permitirá predizer, com aproximação razoável, a resposta real da estrutura, inclusive sob carga de serviço. Por outro lado, para carregamento último, a resposta fica ainda mais não-linear, pela aproximação dos limites resistentes quando as relações momento-curvatura se encurvam significativamente. Desse modo, a análise não-linear toma relevância.

Na análise não-linear tenta-se melhorar a simulação analítica do comportamento da estrutura. O objetivo principal é melhorar a qualidade do modelo estrutural provendo o engenheiro de uma ferramenta mais confiável para a previsão do desempenho do sistema que está sendo projetado ou pesquisado. A abordagem analítica do problema é importante, mas não seria adequado perder de vista que o objetivo principal é a determinação de alguns aspectos do comportamento das estruturas em estudo.

Na análise linear, o processo criativo de simplificar a estrutura real por um conjunto de barras interligadas, com condições de contorno e propriedades adequadas, produz um modelo de

grande utilidade. Porém, quando esse processo é terminado, o resultado obtido é uma estrutura deformada, onde as equações de equilíbrio não estão satisfeitas porque foram respeitadas apenas na posição indeformada. Quanto maior a flexibilidade da estrutura maior o erro dessa aproximação. Por outro lado, essa análise linear admite também a resposta linear dos materiais. A premissa de comportamento estrutural elástico linear não brinda a possibilidade de revelar qualquer manifestação de não-linearidade, seja geométrica, devido a deslocamentos consideráveis, seja física, devido a materiais não-lineares. Sintetizando, o problema foi resolvido de forma aproximada, mas a solução pode não nos dizer tudo o que deveríamos saber com respeito à estrutura. Na verdade, a informação crucial pode ter sido perdida.

Na análise não-linear, a incerteza relativa ao comportamento real da estrutura pode ser reduzida. No entanto, nesse processo de análise, incrementa-se o aspecto da arte de modelar a estrutura e o tratamento analítico das equações da análise. Na modelagem, o analista deve decidir quais fontes de não-linearidade devem ser consideradas e como representá-las.

1.2.1. Fontes de não linearidade

Na análise elástica linear, assume-se que o material não apresenta escoamento e que suas propriedades não variam. As equações de equilíbrio são formuladas na geometria indeformada, isto é, na configuração de referência inicial da estrutura. Assume-se, também, que as deformações são tão pequenas que seus efeitos sobre o equilíbrio e o modo de resposta do sistema são insignificantes. Uma consequência vantajosa disso é que as equações das respostas sob força axial, momentos fletores e torções são desacopladas, facilitando a montagem do sistema de equações e sua solução.

A análise não-linear oferece várias opções para enfrentar problemas resultantes da desconsideração das suposições mencionadas anteriormente. Pode-se atender somente a não-linearidade geométrica. Isto é, continua-se assumindo um comportamento elástico do material mas incluindo os efeitos de deslocamentos finitos quando se formulam as equações de equilíbrio. Também é possível só considerar a não-linearidade do material, ou seja, os efeitos da mudança das propriedades do material na resposta dos elementos, segundo os esforços solicitantes. E, como uma terceira opção mais geral, pode-se incluir os efeitos de ambas não-linearidades, a geométrica e a do material na análise. Em qualquer um dos casos a possibilidade do acoplamento dos esforços internos deve ser considerada e essa deve ser uma característica dominante na análise.

Dentro das diversas fontes de não-linearidade se mencionam algumas:

A) Efeitos Geométricos

- 1) Imperfeições iniciais como a contraflecha de uma peça e a ereção fora de prumo de um pórtico;
- 2) O efeito **$P-\Delta$** , isto é, o momento desestabilizador é igual à carga axial vezes o deslocamento horizontal. Esse momento adicional aumenta as flechas e reduz a rigidez.

B) Efeitos do Material

- 1) Fissuração das estruturas de concreto armado ou protendido;
- 2) Interação Inelástica de força axial, flexão, cortante e torção.

C) Efeitos Combinados

- 1) Deformação Plástica mais o efeito $P-\Delta$ e/ou o efeito $P-\delta$;
- 2) Deformações das conexões;
- 3) Contribuições de sistemas secundários na resistência e na rigidez.

1.2.2. Fontes de não-linearidade consideradas na análise das pontes estaiadas

Diversos estudos têm mostrado que as relações carga-deslocamento para as pontes estaiadas são não-lineares sob cargas de normais de serviço (NAZMY A. S., ABDEL-GHAFFAR A. M., 1990). Esse comportamento não-linear global da estrutura se origina principalmente em três fontes:

- 1) A relação força axial - alongamento não-linear do cabo para cabos inclinados estaiados devido à catenária causada por seu próprio peso.
- 2) As relações Momento - força normal - curvatura não-lineares para os pilões e o tabuleiro sob a ação da flexão oblíqua composta.
- 3) A mudança na geometria devido aos grandes deslocamentos nesse tipo de sistema estrutural, tanto sob cargas normais quanto cargas ambientais.

Comportamento não-linear dos cabos

Quando um cabo está suspenso dos seus extremos, sob a ação do seu peso próprio e de uma força axial de tração aplicada externamente também nos seus extremos, ele se deforma com uma configuração de catenária. Por isso, a rigidez axial do cabo varia de forma não-linear em função dos deslocamentos dos seus extremos, porque uma parte desses deslocamentos ocorrem pela deformação do material e outra parte pela mudança da flecha do cabo, que se torna cada vez menor conforme a força axial aumenta. Assim, a rigidez axial aparente do cabo cresce conforme a tensão de tração no cabo aumenta.

Mudança na geometria devido aos grandes deslocamentos

Como foi mencionado, nas análises estruturais lineares, assume-se que os deslocamentos dos nós da estrutura sob cargas aplicadas são insignificantes em relação às coordenadas originais desses nós. Portanto, a mudança na geometria da estrutura pode ser ignorada e a rigidez de toda a estrutura na configuração deformada pode se assumir igual à rigidez na configuração indeformada da estrutura. No entanto, nas pontes estaiadas, deslocamentos da ordem de 0,5 m ou mais podem ocorrer sob cargas normais de serviço (NAZMY A. S., ABDEL-GHAFFAR A. M., 1990) e, conseqüentemente, mudanças significativas na geometria da ponte podem acontecer. Nesse caso, a rigidez da ponte na configuração deformada deve ser calculada a partir dessa nova geometria da estrutura.

1.3. Níveis de análise estrutural

Raramente é possível modelar todas as fontes de não-linearidade e calcular o comportamento real de uma estrutura com todo detalhe. Os níveis mais comuns de análise estão representados na figura 1.4 por curvas de resposta para um pórtico com cargas estáticas. O grau no qual essas análises modelam o comportamento real não são iguais, mas cada uma pode fornecer informação valiosa para o engenheiro.

Por definição, a *análise elástica de primeira ordem* (linear) exclui não-linearidades, mas geralmente representa, adequadamente, o comportamento da estrutura durante as condições de serviço.

Em *análises elásticas de segunda ordem*, os efeitos de deslocamentos finitos do sistema são considerados na formulação das equações de equilíbrio. Uma análise elástica de segunda ordem pode produzir uma excelente representação das influências desestabilizadoras como o

efeito $P-\Delta$, mas não tem condições de levar em conta a não-linearidade do material. Alguns dos modos de comportamento elástico não-linear são mostrados na figura 1.4.

Figura 1.4 – Diferentes níveis de análise estrutural. (McGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN)

Nas análises inelásticas de primeira ordem, as equações de equilíbrio são escritas em termos da geometria da estrutura indeformada. Regiões inelásticas podem desenvolver-se gradual ou repentinamente, se o conceito da rótula plástica for adotado para modelar mudanças na resposta da estrutura. Quando os efeitos desestabilizadores de deslocamentos finitos são relativamente insignificantes, esse tipo de análise pode produzir uma excelente representação, por exemplo, do comportamento elasto-plástico de vigas. Esse modelo não tem condições para detectar os efeitos geométricos não-lineares e sua influência na estabilidade de um pórtico, por exemplo.

Nas análises inelásticas de segunda ordem, as equações de equilíbrio são escritas em termos da geometria do sistema deformado. Esse tipo de análise tem o potencial de considerar os fatores geométricos e do material que influenciam na resposta da estrutura. Dessa forma, em princípio e em um sentido determinista, esse tipo de análise permite a preparação de modelos analíticos capazes de simular de maneira confiável o comportamento real da estrutura e calcular o limite de estabilidade inelástica, que é o ponto no qual a capacidade do sistema para resistir carga adicional foi esgotada.

Esta dissertação apresenta um método de análise não-linear que considera tanto os efeitos da mudança da geometria da estrutura sob as solicitações, quanto os efeitos do comportamento não-linear do concreto estrutural. O capítulo 2 pretende descrever os aspectos de concepção das partes da ponte estaiada, o pilão, o sistema de suspensão por estais e o tabuleiro. No Capítulo 3, é mostrada uma formulação que, a partir das relações tensão-deformação dos materiais constituintes da seção transversal de concreto e de sua disposição na seção transversal, mostra como obter as relações Momento-Normal-curvatura não-lineares, que servem para determinar as rigidezes secantes, cujo procedimento também é descrito no mesmo capítulo. A consideração da não-linearidade geométrica é discutida no capítulo 4. A formulação das matrizes de rigidez elástica e geométrica da estrutura, usando o princípio dos deslocamentos virtuais, é exposta detalhadamente no capítulo 5, que fornece elementos para fazer uma análise elástica de segunda ordem. Também, nesse mesmo capítulo, apresenta-se uma integração com o procedimento discutido no capítulo 3 para desenvolver uma análise não-linear completa, isto é, física e geométrica. No capítulo 6, dois exemplos de validação do método em estruturas de barras no plano são apresentadas e um exemplo de uma estrutura de barras no espaço.

1.4. Objetivos

Os objetivos deste trabalho são:

1. Calcular os esforços e deformações de segunda ordem, considerando os efeitos do comportamento não-linear do material, nos elementos do sistema estrutural que estão solicitados por flexão composta e flexão oblíqua composta (pilão e tabuleiro).
2. Identificar as zonas mais sensíveis do sistema estrutural aos efeitos de segunda ordem (esforços e deformações).
3. Montar um programa para análise não linear de uma seção de concreto estrutural arbitrária.

2 CONCEPÇÃO GERAL DE PONTE ESTAIADA

Para facilitar a compreensão dos múltiplos aspectos da ponte estaiada, os seus elementos básicos de suporte de carga (cabos, tabuleiro e pilões) serão abordados separadamente. Mostra-se, na figura 2.1, por meio dos três casos limites, a contribuição decisiva dos três elementos de suporte principais no comportamento do todo.

Figura 2.1 – Configurações limite de ponte estaiada. (WALTHER, R.)

A configuração limite (a), usada no início do desenvolvimento moderno das pontes estaiadas, compõe-se de um tabuleiro muito rígido. Um número reduzido de estais atuam como apoios elásticos intermediários em áreas onde não é possível colocar pilares. Os pilões são esbeltos, porque estão submetidos a momentos fletores baixos. O custo de construção proibiria o uso dessa alternativa nas condições atuais.

A configuração limite (b) caracteriza-se por pilões muito rígidos, que resistem momentos longitudinais devido às cargas variáveis desequilibradas. Entretanto, o tabuleiro está submetido somente a momentos moderados, particularmente se os cabos estiverem pouco

espaçados. O resultado é uma seção transversal muito esbelta, e as dimensões são determinadas pelo momento transversal e pelas forças normais. Essa solução é mais adequada para pontes de múltiplos vãos.

Na configuração limite (c), os próprios estais são elementos estabilizadores da Estrutura. Para que os estais laterais (que têm a maior responsabilidade nesse caso) não se afrouxem completamente ou sofram flutuação de tensão exagerada, quando o tabuleiro esteja submetido a cargas variáveis desequilibradas, o comprimento dos vãos laterais deve ser menor do que a metade do vão central. Essa proporção resultante introduz, sob cargas permanentes, forças de tração maiores nesses cabos. Assim, torna-se fundamental o uso de contrapesos ou membros de tração (pilares ou estacas). Essa configuração leva a pilões e tabuleiros relativamente esbeltos.

Esses casos limite ilustram o amplo campo das possíveis configurações de sistemas de suporte de carga e a grande liberdade de escolha brindada pelas pontes estaiadas. A aplicação de soluções inovadoras capazes de otimizar o comportamento da estrutura depende muito da capacidade de compreensão dos fenômenos físicos envolvidos. Assim, das diversas variáveis que intervêm, pode-se dispor de diferentes configurações de cabos, vinculações, seções transversais do tabuleiro e da torre, materiais e métodos construtivos. No caso de estruturas muito esbeltas, não é suficiente uma análise elástica linear, sendo também fundamental a consideração do comportamento não-linear dos materiais e geométrico, bem como estudar o comportamento dinâmico e a estabilidade aerodinâmica.

2.1. Sistema de suspensão por estais

Esse é um ponto fundamental na concepção de pontes estaiadas, porque tem influência não só no desempenho estrutural da ponte, como também no método construtivo e na economia.

A figura 2.2 ilustra configurações de estais na direção transversal. A maioria das estruturas existentes têm dois planos de cabos, figura 2.2 (b), geralmente nas laterais do tabuleiro. Não obstante, muitas pontes têm sido construídas com apenas um plano central de cabos, figura 2.2 (a). Em princípio, é possível contemplar soluções usando três ou mais planos, procurando reduzir os esforços na seção transversal quando o tabuleiro é muito largo, mas essa possibilidade tem sido muito pouco explorada, (as configurações básicas na direção longitudinal podem ser vistas na figura 2.9). A determinação do espaçamento longitudinal é considerada etapa importante no projeto dos estais e está muito ligada ao método construtivo.

Figura 2.2 – Configuração transversal dos estais. (WALTHER, R.)

2.2. Número de planos

2.2.1. Sistemas de suspensão central

Em primeiro lugar, deve se lembrar que o uso de um plano central de cabos tem vantagens estéticas e desvantagens estruturais. Esteticamente, não existe mais superposição de planos de cabos e, estruturalmente, aparecem momentos de torção no tabuleiro em relação ao uso de múltiplos planos de cabos. Esses momentos torçores solicitantes requerem um tabuleiro rígido e a capacidade à flexão dele não é explorada completamente se o espaçamento dos cabos for pequeno.

Sob a ação de cargas variáveis, a deformabilidade da estrutura depende essencialmente das rigidezes dos pilões e do sistema de suspensão. O tabuleiro está submetido a uma deformada imposta e os momentos fletores longitudinais aumentam com a rigidez. A seleção de uma seção transversal rígida à flexão, em princípio, não é favorável. Essa consideração elementar de resistência não deveria ocultar o fato de que esses sistemas de suspensão oferecem outras vantagens consideráveis. A mais notável, como mencionado, é, de natureza estética: a presença de um plano único de cabos fornece à estrutura uma inegável elegância. Essa impressão de leveza pode ser incrementada mais ainda usando pilões centrais muito esbeltos. Como na ponte Brotonne, mostrada na figura 2.3. Entretanto, colocar os pilões no centro da pista significa inevitavelmente alargar o tabuleiro, que pode ser uma desvantagem preponderante no campo das estruturas de vãos muito longos, que requerem pilões de considerável altura e largura na base. Essa é razão da abertura da parte inferior do pilão central da ponte Dusseldorf – Fleche, figura 2.4, para reduzir a largura requerida do tabuleiro à mínima necessitada pelos cabos e sua proteção. A suspensão central deve ser estudada desde o ponto de vista de integridade da estrutura e do detalhamento construtivo. Um tabuleiro

rígido à torção contribui na redução dos momentos de segunda ordem, como também à estabilidade dinâmica e aerodinâmica do conjunto. Esse sistema de suspensão é também caracterizado por cargas de fadiga baixas nos cabos, devido ao fato de que o tabuleiro que é rígido à torção, tem uma grande capacidade de repartir cargas concentradas. Quando se lida com pontes que são muito largas ou que têm vãos muito grandes, a suspensão central deve ser substituída pela suspensão lateral.

Figura 2.3 – Sistema de suspensão central. Pilar em meio do tabuleiro. Ponte Brotonne (1997). França.

Figura 2.4 – Sistema de suspensão central. Pilão Aberto na base. Ponte Dusseldorf – Fleche (1979). Alemanha.

2.2.2. Sistemas com suspensão lateral

A maioria das pontes estaiadas construídas têm o sistema de suporte lateral. Os planos dos estais podem ser verticais ou inclinados ligeiramente para dentro, se pilões com forma de A foram usados. As características essenciais dos diferentes sistemas de suspensão, mostrados na figura 2.5, são :

a) Pontes pênséis convencionais:

- Esse sistema de suspensão tem baixa rigidez à flexão longitudinal e para evitar deformações excessivas da estrutura sob os efeitos do vento ou cargas excêntricas é necessário provê-la com um tabuleiro de rigidez adequada. Apesar dessa desvantagem, as pontes pênséis ainda são usadas, especialmente em grandes vãos.

b) Pontes estaiadas com suspensão lateral vertical:

- Os estais, que estão tracionados e quase retilíneos, garantem uma conexão mais rígida entre os pilões e o tabuleiro. Suas deformações ocorrem devido somente às variações moderadas das tensões nos cabos e às deformações dos pilões;
- A suspensão vertical não provoca nenhum problema de gabarito sobre o tabuleiro. Sua largura depende da mínima distância requerida entre as colunas do pilão. É possível reduzir essa largura ainda mais colocando essas colunas fora do tabuleiro, por fora dos planos dos estais. Para equilibrar a flexão transversal do pilão, introduzida pela desviação dos cabos, em geral é necessário usar uma viga superior de travamento;
- A construção dos pilões de colunas verticais é simples e econômica.

c) Pontes estaiadas com pilões em forma de A:

- A rigidez e a estabilidade da estrutura podem ser ainda melhoradas pelo uso de pilões em forma de A, com as colunas ligadas no topo. O tabuleiro e os dois planos inclinados dos estais comportam-se como uma seção rígida fechada, em flexão, o que reduz consideravelmente possíveis rotações no tabuleiro e no pilão;

- A suspensão inclinada pode criar certos problemas de gabarito na direção transversal, a solução seria um alargamento da seção transversal do tabuleiro ou o uso de ancoragens em dentes salientes;
- A ereção de pilões com forma de A é geralmente mais complicada que a de pilões verticais.

Figura 2.5 – Deformações da estrutura segundo o sistema de suspensão adotado. (WALTHER, R.)

O sistema de suspensão lateral com pilões em forma de A é particularmente adequado para pontes de vãos muito longos, onde a estabilidade aerodinâmica se torna determinante. Esse conceito tem sido adotado com sucesso para a ponte de Normandia, com vão de 856 m, figura 2.6, e a ponte Tatara, com vão central de 890 m, o maior construído até a data, figura 2.7.

Figura 2.6 – Tabuleiro com suspensão lateral. Pilão pórtico em forma de A. Ponte de Normandia (1995). França.

Figura 2.7 – Tabuleiro com suspensão lateral com pilão pórtico em forma de A. Ponte Tatara (1999). Japão.

A aplicação desse sistema em pontes de vãos pequenos e medianos requer uma inclinação maior dos planos dos cabos e apresenta problemas sérios com o gabarito transversal. O que se pode resolver usando ancoragens em dentes salientes quando se lida com uma ponte de poucos cabos isolados, ou incrementando a largura do tabuleiro onde há cabos múltiplos.

No sistema de suspensão lateral, os momentos fletores transversais máximos estão no centro da seção, enquanto as forças cortantes e de ancoragem máximas atuam nos extremos da superfície da calçada, figura 2.8. Nessa área, o projeto dos detalhes construtivos pode apresentar problemas, especialmente com um tabuleiro de concreto. As ancoragens dos cabos podem entrar em conflito com as ancoragens de alguma protensão transversal.

Figura 2.8 – Suspensão lateral: distribuição de esforços transversais. (WALTHER, R.)

2.3. Configuração longitudinal

A figura 2.9 mostra os sistemas longitudinais básicos que se descrevem a seguir.

Figura 2.9 – Configuração longitudinal dos estais. (WALTHER, R.)

2.3.1. Sistema em harpa

Apesar do sistema em harpa não ser o melhor, do ponto de vista estático ou econômico, é atrativo pelas suas inegáveis vantagens estéticas. O fato dos cabos serem paralelos dá à estrutura uma melhor aparência. Ponte Higashi-Kobe, figura 2.10.

Figura 2.10 - Sistema de estais em harpa. Ponte Higashi-Kobe (1992). Japão.

2.3.2. Sistema em leque

Nesse sistema, todos os cabos estão juntos no topo dos pilões. Essa solução tem sido usada em muitas estruturas recentes, como na ponte Pasço-Kennewick, nos Estados Unidos, figura 2.11, e pode oferecer vantagens proveitosas:

- O peso total dos cabos requerido é substancialmente menor do que para o sistema em harpa, devido à inclinação mais favorável para os estais;
- A Força horizontal introduzida pelos cabos no tabuleiro é menor;
- A flexão longitudinal dos pilões permanece moderada;
- É necessário selecionar vãos laterais que sejam menores do que a metade do vão do vão central. Quando a montagem da estrutura for por balanços sucessivos, é possível tomar vantagem da estabilidade proporcionada pelos pilares ou pelos encontros, muito antes do fechamento do vão central.
- Se a vinculação horizontal entre os pilões e o tabuleiro estiver liberada, os movimentos do tabuleiro, devido às mudanças na temperatura, podem ser absorvidos por juntas de expansão convencionais colocadas nos encontros. Essa vinculação tabuleiro-pilão por meio dos estais é muito flexível, assim os esforços horizontais no tabuleiro são muito pequenos sob a ação da temperatura.
- A flexibilidade da estrutura é favorável para os movimentos horizontais do tabuleiro e incrementa a estabilidade ante as ações sísmicas.
- A grande capacidade dos estais laterais, ancorados nos primeiros pilares ou nos encontros, reduzem as deflexões do pilão e do tabuleiro.

Figura 2.11 - Sistema de estais em leque. Ponte Pasço-Kennewick (1978), Estados Unidos.

Em primeira instância, o sistema em leque parece menos atrativo, do ponto de vista estético, do que o sistema em harpa, pelos efeitos óticos de cruzamento dos cabos, dependendo do ângulo de observação. Porém, esta desvantagem não é evidente em estruturas de grandes vãos.

A maior desvantagem do sistema em leque está no projeto e na construção dos topos dos pilões, direção na qual todos os cabos se dirigem. Uma convergência ideal não pode ser atingida na prática pelo que é necessário estender as ancoragens a uma dimensão adequada, que depende da geometria e do tamanho da obra. As zonas de grandes tensões, geralmente, podem ser construídas só com métodos complexos, custosos e freqüentemente distante da elegância.

2.3.3. Sistema semi-harpa

Uma solução intermediária entre os sistemas de harpa e leque, torna possível combinar, de maneira satisfatória, as vantagens dos dois sistemas, quando se evitam suas desvantagens. O sistema semi-harpa tem se mostrado ideal, e muitas das modernas pontes estaiadas têm sido construídas usando este princípio, figura 2.12 e 2.13.

Figura 2.12 - Sistema de estais em semi-harpa. Ponte sobre o rio Paranaíba (2003). Brasil.

Figura 2.13 - Sistema de estais em semi-harpa. Ponte da Ilha de Annacis (1990). Canadá.

Um bom projeto dos detalhes da ancoragem é possível distribuindo os estais na parte superior do pilão, sem redução apreciável da altura e pelo tanto da eficácia do sistema de estais. Os cabos situados perto do pilão estão muito menos inclinados que os de um sistema em harpa, pelo que é possível reduzir a rigidez do vínculo horizontal entre pilões e tabuleiro, rigidez que por si mesma pode ser desvantajosa. Para facilitar a ancoragem do primeiro estai no pilão, e, por razões estéticas, o primeiro tramo do tabuleiro é geralmente um pouco maior que o espaçamento padrão dos cabos ao longo da ponte.

2.3.4. Sistemas Assimétricos

As condições topográficas e os requerimentos de gabarito longitudinal determinam que o cruzamento de um obstáculo tenha um único vão, sem ter a possibilidade de equilibrar a estrutura com um tramo lateral, figura 2.14. Neste caso, pode ser útil adotar um tipo de suspensão “rédeas”, caracterizado pela concentração de cabos de ancoragem. A escolha da inclinação dos tirantes posteriores depende, principalmente, da topografia do terreno e das condições geológicas e geotécnicas da zona de ancoragem. Do ponto de vista de economia de estais, um ângulo de 45 graus é ótimo. Para reduzir o contrapeso ou a necessidade de ancoragens em rocha, existe uma tendência geral de reduzir a componente vertical da força de ancoragem, reduzindo a inclinação dos estais.

Figura 2.14 – Sistema de suspensão assimétrico. Ponte Speyer (1975). Alemanha

2.3.5. Múltiplos vãos

O princípio de suspender o tabuleiro com estais se aplica igualmente em pontes de vãos múltiplos, sendo que várias estruturas desse tipo têm sido construídas recentemente, conforme mostram as figuras 2.15 e 2.16. O principal problema desse sistema é obter uma adequada estabilidade longitudinal sob a ação de cargas de tráfego assimétricas.

Figura 2.15 – Sistema de suspensão para múltiplos vãos. Ponte Rion-Antirion (2004). Grécia.

Dos três elementos de capacidade de carga de uma ponte estaiada, apenas os pilões podem fornecer suficiente rigidez para estabilizar o sistema na direção horizontal. A esbeltez de um tabuleiro de ponte estaiada, geralmente, não pode cumprir nenhuma função dessa natureza e a ausência de pontos intermediários fixos exclui o uso de cabos de ancoragem.

Outros métodos de estabilização têm sido propostos como, por exemplo, uma conexão entre os topos dos pilões formada por cabos ancorados nos dois encontros. Apesar dessa solução

parecer adequada do ponto de vista da estática, tem pouco mérito estético e sua construção é difícil.

Figura 2.16 – Sistema de suspensão para múltiplos vãos. Viaduto Millau (2004). França.

2.4. Espaçamento dos estais

Na construção das primeiras pontes modernas de cabos estaiados, só um número limitado de estais foi usado para suportar um tabuleiro rígido, sendo que essas concepções atualmente não seriam competitivas, pelo menos não em grandes estruturas, nas quais tabuleiros rígidos requerem grande quantidade de materiais e custoso equipamento de montagem.

Porém, nota-se que as estruturas construídas com essa configuração são elegantes e tecnicamente adequadas. A Ponte Knie, figura 2.17, é um exemplo notável. Com um vão de $L = 320$ m e uma altura de tabuleiro de $h = 3,4$ m dando uma relação h/L de $3,4/320 = 1/95$, a esbeltez dessa estrutura é possível pela ancoragem direta de todos os estais laterais em pilares de tração. Essa concepção incrementa apreciavelmente a estabilidade de todo o sistema estrutural, fazendo possível vencer o tramo entre estais $l = 64$ m com uma profundidade de tabuleiro de $h = 3,4$ m, sendo a relação de esbeltez $h/l = 1/19$.

No caso da ponte Danube, em Metten, com só dois estais em cada lado do pilão central, foi a melhor solução encontrada devido ao método construtivo escolhido: o tabuleiro foi lançado progressivamente desde um extremo, usando pilares intermediários temporais. Na zona central, os pilões temporais foram substituídos pelos estais para permitir o tráfego no rio.

Figura 2.17 - Ponte Knie. Alemanha

Em contraste, as estruturas modernas de pontes estaiadas com um grande número de cabos, com curto espaçamento, como a ponte Friedrich Ebert, figura 2.18, apresentam numerosas vantagens:

- A grande quantidade de apoios elásticos leva a uma flexão moderada no tabuleiro, durante a construção e em operação, requerendo métodos de construção simples e econômicos como, por exemplo, balanços sucessivos;
- Os cabos individuais são menores que os de uma estrutura com estais concentrados, simplificando a instalação das ancoragens;
- Substituir os estais é relativamente simples e é essencial, apesar das medidas adotadas para proteção dos estais, especialmente contra corrosão.

No caso da ponte Friedrich Ebert, apesar do espaçamento dos estais reduzido, uma altura de tabuleiro relativamente grande foi adotada, $h = 4,2$ m (esbeltez $h/L = 1/67$). A escolha de uma seção rígida à torção se deve ao sistema de suspensão central adotado, que introduz grandes momentos torçores, sob a ação do vento e de cargas excêntricas.

Figura 2.18 - Ponte Friedrich Ebert (1967). Alemanha

A concepção de pontes de grandes vãos de algumas centenas de metros forçou os projetistas a adotar rapidamente o sistema de suspensão por múltiplos estais. O espaçamento máximo dos estais depende de vários parâmetros, em particular, da largura e a forma do tabuleiro.

Quando o tabuleiro é de aço, ou composto de aço e concreto, é geralmente possível construir por balanços sucessivos e não existe vantagem apreciável em localizar os estais próximos entre eles. Como uma regra geral, espaçamentos entre 15 m e 25 m são adotados.

Quando o tabuleiro é de concreto, concepções com estais múltiplos espaçados de 5 m a 10 m oferecem vantagens e podem ser essenciais em estruturas com grandes vãos. A escolha do espaçamento dos cabos depende, além do que já foi descrito, do equipamento de montagem. É necessário aplicar protensão durante a montagem para manter as seções juntas, onde o tabuleiro for feito de seções pré-fabricadas. Se fosse concretado in loco seria possível fazer uso direto dos estais para que servissem de suporte e se evitasse essa protensão de montagem.

Os efeitos dos múltiplos estais na transparência e na elegância são insignificantes, como mostra a ponte Ebro, figura 3.19, com espaçamento de 3 m entre estais no vão principal. Esse espaçamento parece muito pequeno para um tabuleiro de concreto, mas essa escolha pode ter se baseado mais em considerações estéticas que em critérios de estáticos ou econômicos.

Figura 2.19 – Ponte sobre o rio Ebro (1980). Espanha. O espaçamento pequeno dos estais não tira a transparência da estrutura.

2.5. Tabuleiro

Como foi mencionado, as primeiras pontes estaiadas modernas tinham poucos estais e a separação entre apoios elásticos assim criados era geralmente longa. Pelo que foi necessário, então, usar tabuleiros relativamente rígidos, geralmente em aço. O peso próprio foi reduzido ao mínimo e a relação de esbeltez do vão principal, h/L , variou entre 1/50 e 1/70, a exceção da ponte Knie, figura 2.17, com uma relação de 1/95.

O aparecimento de pontes de múltiplos estais favoreceu o desenvolvimento dos tabuleiros de concreto, a necessidade de prover à seção transversal com grande rigidez desapareceu. Os momentos longitudinais se incrementam quando a rigidez do tabuleiro cresce. Pelo que seria adequado selecionar um tabuleiro o mais flexível possível. Esse fato levou ao desenvolvimento de pontes estaiadas com seções transversais muito delgadas, onde a relação de esbeltez pode alcançar valores de $h/L = 1/500$. Não obstante, a rigidez ótima não só depende do espaçamento dos estais, o sistema de suspensão transversal e a largura do tabuleiro são fatores de igual importância.

Para pontes com suspensão lateral múltipla, é possível ter tabuleiros esbeltos, dado que a flexão longitudinal é relativamente baixa e que não se requer uma grande rigidez à torção. As dimensões mínimas são governadas pelos momentos transversais e pelas cargas pontuais consideráveis introduzidas nas ancoragens. Esses dois efeitos aumentam conforme a largura do tabuleiro aumenta.

A solução com o sistema de suspensão com três planos de estais parece ser a mais adequada para grandes pontes longas e largas. Esse sistema oferece a vantagem de bom equilíbrio entre as forças das direções longitudinais e transversais, o que causa consideráveis reduções de materiais no tabuleiro.

Além do método construtivo escolhido e das condições econômicas locais, a escolha do material do tabuleiro é um dos principais critérios governantes do custo total da obra. O peso próprio tem influência direta na capacidade requerida pelos estais, pilões e fundações. As seguintes quantidades podem ser usadas como indicadores: tabuleiro de aço de 2,5 a 3,5 kN/m², tabuleiro composto de 6,5 a 8,5 kN/m² e tabuleiro de concreto de 10 a 15 kN/m².

2.5.1. Tabuleiros de aço.

Um tabuleiro de aço provê uma ótima solução à demanda de economia no uso dos materiais. É possível limitar seu peso próprio a um valor que é quase um quinto do peso de um tabuleiro de concreto, figura 2.20.

Figura 2.20 - Exemplos de tabuleiro de aço. (WALTHER, R.)

Por outro lado, pelo uso de métodos mais avançados de racionalização e automatização (em particular em lajes ortotrópicas), o uso de uma seção transversal de aço é ainda mais custoso que seu equivalente em concreto. Porém, o peso próprio reduzido do tabuleiro resulta em reduções apreciáveis na capacidade de carga dos outros elementos (estais, pilões e fundações), em uma ponte estaiada competitiva com tabuleiro de aço.

Para estruturas de pequenos e medianos vãos, os cabos representam só 10 a 20% do custo total. Assim, a economia resultante no custo dos estais é geralmente marginal, especialmente porque o critério de resistência à fadiga é predominante. Mas as condições são totalmente diferentes para pontes de grandes vãos. A redução do seu peso próprio torna-se essencial e só os tabuleiros muito leves podem ser considerados.

Economias apreciáveis podem ser conseguidas, limitando o uso de painéis ortotrópicos às superfícies da calçada, assim como os outros elementos da seção transversal podem ser vigas com almas sólidas ou de treliça.

2.5.2. Tabuleiros de Concreto

A idéia de sistema de suspensão com múltiplos estais, inicialmente desenvolvida para estruturas de aço, rapidamente se dirigiu à construção de tabuleiros de concreto moldados in loco ou pré-fabricados. Isso levou à construção de pontes estaiadas por balanços sucessivos, onde cada nova aduela é diretamente suportada por um par de cabos. Além de que as forças na seção transversal permanecem moderadas durante a construção e o equipamento requerido durante a montagem é reduzido ao mínimo. O grande peso próprio dos tabuleiros de concreto não é um fator determinante no caso de vãos pequenos ou medianos. Essa solução pode também provar ser econômica para obras mais importantes.

As primeiras pontes estaiadas construídas completamente de concreto, foram projetadas por R. Morandi, como a Ponte de Maracaibo, figura 2.21. Esses tipos de estruturas foram concebidas com seções transversais de alta rigidez à flexão longitudinal, conformadas de vigas pré-fabricadas, a suspensão brinda só dois suportes intermediários por vão. No presente, esse tipo de concepções não são consideradas como alternativa viável devido ao custoso equipamento de montagem requerido.

Figura 2.21 – Ponte Maracaibo (1962). Venezuela. Projeto do Eng. Arq. Ricardo Morandi.

A ponte Hoechst, figura 2.22, foi a primeira aplicação do uso de múltiplos estais para suportar um tabuleiro de concreto. Essa relevante estrutura mostra a valiosa influência que um arquiteto pode ter, no caso G. Lohmer, na aparência da ponte.

Figura 2.22 – Ponte Hoechst (1972). Alemanha. Ponte estaiada com tabuleiro de concreto.

A ponte Brotonne, figura 2.3, é um dos mais notáveis exemplos do uso de novas técnicas. Essa elegante estrutura com suspensão central tem um vão central de 320 m. A seção transversal se compõe de uma seção unicelular com bielas inclinadas protendidas, que transmitem as cargas das almas (Pré-fabricadas e protendidas) para os pontos de suspensão, figura 2.23. A montagem foi feita por balanços sucessivos, usando aduelas pré-fabricadas de 4,5 m de comprimento, dimensão correspondente ao espaçamento dos estais no nível do tabuleiro.

Figura 2.23 – Seção transversal do tabuleiro da Ponte Brotonne. (WALTHER, R.)

A ponte Pasco Kennewick, projetada por Fritz Leonhardt e Arvid Grant, tem o tabuleiro pré-fabricado suspenso lateralmente pelo sistema em leque, figura 2.11. A seção transversal é formada por duas células triangulares extremas, conectadas por transversinas, figura 2.24. Sob condições de serviço, o tabuleiro suspenso completamente não tem conexão direta com os pilões. Devido ao sistema de estais, essa solução ajuda a limitar os efeitos de longo prazo e os

efeitos devidos às mudanças de temperatura, enquanto assegura boa resistência às ações sísmicas.

Figura 2.24 - Seção transversal do tabuleiro da Ponte Pasco Kennewick. (WALTHER, R.)

Na Espanha, a Ponte sobre o rio Ebro, figura 2.19, tem só um pilão inclinado e um único vão, com suspensão central. A estabilidade está assegurada por dois planos de estais laterais em sistema de leque ancorados em grandes massas de concreto. O tabuleiro de 28,9 m de largura, figura 2.25, é de seção celular pré-fabricada provida de longos balanços, espaçados 3,0 m como os estais.

Figura 2.25 - Seção transversal do tabuleiro da Ponte sobre o Rio Ebro. (WALTHER, R.)

A ponte Barrios de Luna, figura 2.28, é um outro exemplo da riqueza da concepção espanhola. Seu vão central de 440 m foi o mais longo do mundo quando foi construído em 1984. A seção transversal é de concreto protendido, concretado in loco por balanços sucessivos, consta de uma seção multicelular, figura 2.27, suportando cada 4,5 m. Para reduzir o peso próprio, a laje inferior foi parcialmente omitida na seção meia do vão principal. Os cabos laterais estão moderadamente inclinados, devido à falta de espaço para esses vãos nessa região montanhosa, requerendo grandes contrapesos para prover de estabilidade ao conjunto.

Devido ao fato do tabuleiro ser rigidamente vinculado aos estribos, uma junta de expansão foi localizada no centro do vão principal, figura 2.28.

Figura 2.26 - Ponte Barrios de Luna (1984). Espanha. (WALTHER, R.)

Figura 2.27- Seção transversal do tabuleiro da Ponte Barrios de Luna. (WALTHER, R.)

Figura 2.28 – Junta de expansão do tabuleiro da Ponte Barrios de Luna. (WALTHER, R.)

As vantagens potenciais do sistema de múltiplos cabos podem ser ainda melhor exploradas na concepção de tabuleiros flexíveis. Uma vez que os momentos fletores longitudinais no tabuleiro se reduzem quando a sua rigidez diminui, o tabuleiro pode ser construído como uma simples laje de concreto.

A espessura da laje depende principalmente das cargas perpendiculares a ela e, com menor influência, das forças normais transferidas pelos estais. Pode parecer que o uso dessa seção esbelta é inadequada para membros em compressão, mas a estabilidade do tabuleiro depende de toda a estrutura e não pode ser considerado isolado, negligenciando as interações com os pilões e os estais. Esses efeitos, junto com o peso próprio, aplicam forças estabilizadoras que reduzem consideravelmente a esbeltez da seção. Além, em pontes de vãos pequenos ou meios, a força compressiva no tabuleiro permanece moderada.

Essa idéia, aplicável somente para sistemas de suspensão de dois ou três planos, foi adotada pela primeira vez na construção da ponte Diepoldsau, figura 2.29. É uma ponte rodoviária com vão central de 97 m e dois planos de estais separados 14,10 m transversalmente. O tabuleiro é uma laje simples de concreto com uma espessura média de 0,45 m. Este foi concretado in loco por balanços sucessivos em aduelas em peças de 6 m de comprimento, que também é o espaçamento longitudinal dos cabos. O método de construção adotado provou ser muito simples e econômico. Foi possível usar um cimbramento móvel muito leve, suspenso diretamente pelos estais.

Figura 2.29 - Ponte Diepoldsau (1985). Suíça. Tabuleiro esbelto.

A concepção de lajes delgadas é promissora. Porém, existem dificuldades quando se consideram pontes largas com quatro ou mais faixas de tráfego. Nesses casos, as dimensões requeridas pelos momentos fletores transversais podem ser excessivas.

Esse problema pode ser resolvido pelo uso de lajes com transversinas de concreto ou aço. Também a solução de três planos de cabos é economicamente conveniente. Esses sistemas tornam possível manter a espessura do tabuleiro de concreto dentro de limites razoáveis a fim de beneficiar-se das vantagens potenciais oferecidas deste sistema estrutural.

2.5.3. Tabuleiros Compostos

O uso de sistemas mistos de concreto e aço em estruturas de pontes estaiadas podem mostrar vantagens consideráveis. Tecnicamente pode ser uma alternativa interessante construir a superfície da calçada em concreto, enquanto se faz uso das vantagens das estruturas de aço para os outros elementos da superestrutura. O interesse na construção desses compostos radica na redução apreciável da carga permanente e na facilidade de ereção de partes de aço. O fato de que a carga permanente de um tabuleiro composto é um pouco maior que um tabuleiro de aço é, geralmente, uma desvantagem não crítica, a exceção de pontes com vãos muito grandes.

2.6. Pilões

A concepção geral de uma ponte estaiada é uma tarefa concernente às várias partes da estrutura. O objetivo dessa seção é revelar o rol importante da concepção dos pilões no

processo iterativo do projeto, através de uma descrição qualitativa das condições específicas que esse membro deve reunir.

2.6.1. Configuração Longitudinal

A configuração longitudinal dos pilões e a condição estática associada devem concordar, de maneira apropriada, os requerimentos de adequada estabilidade longitudinal e o bom desempenho sob condições de serviço. O número de peças montadas, a localização proposta dos cabos e as condições locais (terreno de fundação, vento, sismo) são parâmetros relevantes na concepção desse elemento.

A) Estais em sistema harpa.

Com os estais no sistema harpa, as cargas de tráfego não-simétricas podem ser balanceadas somente com uma flexão longitudinal apreciável nos pilões. Além de uma adequada resistência à flexão, o pilão deve ter suficiente rigidez para reduzir a deformabilidade do tabuleiro, particularmente se este é flexível.

Os cabos curtos em sistema de harpa formam um vínculo entre pilões e tabuleiro, o qual resiste rigidamente a qualquer deslocamento horizontal relativo, não sendo possível limitar, de maneira efetiva, as forças introduzidas por retração e fluência ou mudanças de temperatura simplesmente liberando a conexão do tabuleiro com um dos pilões. Para pontes de grandes vãos, o fenômeno de deslocamentos impostos torna-se crítico, pois é necessário liberar a superestrutura externamente na direção longitudinal, provendo juntas de expansão ou apoios deslizantes para o tabuleiro. Se o vão central é mediano ou menor, a parte inferior dos pilões pode estar formada por elementos suficientemente flexíveis para evitar o uso desses apoios.

B) Estais em sistema leque.

O uso do sistema leque para os estais oferece vantagens inegáveis do ponto de vista dos esforços nos pilões, assim é possível criar um apoio horizontal na cabeça do pilão, com os estais laterais concentrados, o que fornece grande rigidez na estrutura completa.

O valor da rigidez longitudinal dos pilões tem uma influência moderada no comportamento estrutural do todo. A flexão correspondente permanece pequena e a seção transversal requerida é determinada principalmente pela necessidade de adequada estabilidade, principalmente durante a ereção.

Os cabos curtos são quase verticais e oferecem somente resistência nominal aos deslocamentos horizontais relativos entre os pilões e o tabuleiro. Além disso é possível fazer reduções efetivas nas tensões induzidas por retração, fluência e mudanças de temperatura liberando a conexão entre, pelo menos, um pilar e o tabuleiro. Os movimentos do tabuleiro podem ser absorvidos por meio de juntas de expansão convencionais localizadas nos encontros.

C) Estais em sistema semi-harpa

Esse sistema (uma solução que compromete os requerimentos estéticos e econômicos) é geralmente adotado para facilitar o projeto das ancoragens dos estais no pilão. As dimensões do pilão dependem muito da escolha do sistema estático e da capacidade de carga ou comportamento adequado ante deslocamentos impostos. Se o tabuleiro é flexível, o valor da rigidez longitudinal dos pilões pode ter uma influência apreciável no comportamento estrutural de todo o sistema.

2.6.2. Resistência da parte inferior dos pilões.

Para qualquer número de vãos ou sistema de estais adotado, a estrutura comporta-se geralmente, como uma ponte suspensa completamente na direção longitudinal. Os pilões de estabilidade devem resistir a forças do vento, freada de veículo, atrito diferencial e ações sísmicas, enquanto garantem a estabilidade global. Essa função essencial se cumpre com a provisão de resistência suficiente na parte dos pilões, sob o tabuleiro. Para grandes estruturas com alturas consideráveis sob o tabuleiro, projetadas para cruzar vias marítimas, existe o perigo de impacto, e a resistência adequada só pode ser assegurada por pilões massivos, figura 2.30 (c) e (d).

Figura 2.30 - Influência do nível do tabuleiro na forma da parte inferior do pilão. (WALTHER, R.)

2.6.3. Configuração transversal.

A escolha entre o sistema de suspensão lateral ou central é o fator crítico que governa a concepção transversal dos pilões.

A) Suspensão lateral.

A concepção do pilão deve ser baseada nas seguintes condições:

- *Gabarito Transversal (Figura 2.31)*

As condições convencionais de gabarito devem ser expostas e definidas claramente quando se lida com pontes estaiadas. A seção transversal da rodovia é de especial importância pela presença de obstáculos laterais, como as colunas dos pilões e os planos dos cabos. A mínima distância requerida entre a rodovia e esses elementos estruturais são, geralmente, determinados pela autoridade contratante.

Figura 2.31 - Suspensão Lateral e condições de gabarito. (WALTHER, R.)

- Desempenho estático transversal dos pilões. (Figura 2.32)

O sistema estático transversal deve permitir um estado de equilíbrio estável e permanente, considerando os efeitos da fluência do concreto sob a ação de cargas permanentes. Se for necessário, a esbeltez transversal das colunas deve ser mantida dentro de limites razoáveis, por meio de vigas transversais.

Figura 2.32 - Influência do tamanho da estrutura no comportamento estático transversal dos pilões. (WALTHER, R.)

Para uma estrutura de dimensões moderadas, o pilão pode ser construído como duas colunas verticais independentes. Localizando os estais no mesmo plano vertical, assim, todas as forças

devidas aos deslocamentos que poderiam atuar neles, são eliminadas. Essa é a solução ideal para as cargas das colunas dos pilões, que implica incrementar a largura do tabuleiro, o qual pode afetar adversamente a economia do conjunto.

Para estais em planos inclinados, fazendo melhor uso das condições transversais de gabarito, as colunas dos pilões estão sujeitas a flexão transversal significativa sob cargas permanentes. Com o intuito de minimizar essas forças e para precaver o estrago causado pela fluência do concreto (deformação dos balanços), é apropriado adotar uma seção transversal simétrica para o pilão.

Quando o vão da ponte e, conseqüentemente, a altura do pilão sobre o tabuleiro torna-se grande, é geralmente necessário fornecer vigas transversais para reduzir a flexão transversal devido à inclinação dos estais. Essa flexão transversal pode ser totalmente eliminada quando se adota um sistema de estais em leque concentrados na área das vigas transversais.

Em estruturas de grandes vãos, a altura do pilão sobre o tabuleiro é suficiente para que seja possível inclinar as colunas e uni-las no topo, sem reduzir o gabarito. O sistema assim produzido oferece a resistência e a estabilidade requeridas para suportar as forças dos estais e as forças transversais de vento. Estas podem transformar-se em um fator governante, devido ao efeito significativo do vento sobre os estais e pilões.

B) Suspensão central

Na figura 2.33, onde a suspensão central é usada, os pilões devem reunir as condições básicas similares às da suspensão lateral. Onde a estrutura é de dimensões moderadas, provida de suspensão central em sistema de harpa, a parte superior do pilão consiste de uma coluna única. Esta solução pode se estender a grandes vãos com suspensão central em sistema de semi-harpa. A esbeltez transversal da coluna central é mantida entre limites razoáveis pela presença de uma força horizontal restauradora introduzida pelos cabos. Se o pilão central é considerado como um ponto de suporte, respeitando a mínima distância requerida pela largura da via, ocasiona-se um incremento na largura do tabuleiro. Se por outro lado, o pilão é projetado para resistir às cargas de impacto do tráfego, é possível localizar as barreiras de seguridade no mesmo pilão, assim evitando o incremento na largura. Essa alternativa pode provar ser um fator determinante na economia total da obra.

Para uma estrutura de grande vão que requer uma altura considerável do pilão sobre o tabuleiro, a estabilidade transversal do pilão deve ser assegurada, dividindo-o embaixo da zona de ancoragem. Enquanto o efeito arquitetônico obtido pode ser interessante, esse tipo de solução tem limitações estéticas e econômicas, pela dificuldade de montagem e pelas dimensões requeridas para o pilão.

Figura 2.33 - Conceção de pilões com um plano único de estais. (WALTHER, R.)

2.6.4. Estética e economia.

Devido a sua função muito importante como elementos de suporte de carga, centralizando as cargas, os pilões têm uma influência governante no efeito arquitetônico de toda a ponte estaiada. Uma breve análise das mais notáveis estruturas mostra que os requerimentos estéticos não entram em conflito com os de um comportamento estrutural adequado, nem com os de bom detalhamento estrutural. Em outras palavras, onde o pilão reúne as condições de 2.6.1 a 2.6.3, só modificações menores são requeridas nele para se tornar satisfatório do ponto de vista estético.

Em obras maiores, onde existe uma altura livre considerável embaixo do tabuleiro, a parte inferior do pilão deve reunir a condição de resistência mencionada em 2.6.1. A aparência estética de um pilão deve se tratada com cuidado, usando modelos em escala se for necessário.

A ereção de colunas inclinadas de pilões é algo mais dificultosa e tem um efeito negativo na economia da estrutura. A escolha de formas curvas pode também levar a um incremento substancial nos custos de construção.

O fato da aparência estética das pontes estaiadas dependerem em grande parte da forma dos pilões tem levado muitos projetistas na busca por novas formas arquitetônicas, algumas vezes, inclusive, em detrimento da estrita lógica estática. Enquanto esses empreendimentos podem certamente ser bastante originais e esteticamente prazenteiros, eles, usualmente, resultam em um incremento substancial do custo.

Como exemplo extremo dessa tendência, está a ponte Alamillo, em Sevilla, que não tem nenhum estai lateral e a estabilidade é parcialmente fornecida pelo contrapeso de concreto do pilão inclinado massivo. Para carga permanente, o contrapeso é útil, mas para carga variável tem pouca utilidade. A concepção estrutural e construtiva são muito prejudicadas por uma beleza discutível e muito caras. Já a ponte Erasmus, em Rotterdam, figura 2.35, apresenta apenas dois estais laterais concentrados no topo de um pilão não-retilíneo. As reações dos estais principais devem ser suportadas pelas colunas encurvadas do pilão torcido, por uma espécie de ação de arco, que reduz os momentos fletores importantes a que ele estaria submetido se fosse reto. Em ambos os casos, e com maior efeito no primeiro, as dificuldades executivas geraram um custo maior, porque foram as mais danificadas pela concepção.

Figura 2.34 - Pilão inclinado. Ponte Alamillo (1992). Espanha.

Figura 2.35 - Pilão inclinado. Ponte Erasmus (1996). Espanha.

O Viaduto de Millau, figura 2.16 e 2.37, que cruza, o vale Tarn, na França, a 250 m sobre o terreno, serve de excelente exemplo de uma frutífera e bem sucedida colaboração entre engenheiros e arquitetos: os pilões altos e de forma muito elegante respeitam o ditado que “a forma segue a função”.

Figura 2.36 - Pilão intermediário de 343 m de altura. Viaduto de Millau (2004). França

3 RELAÇÕES MOMENTO-NORMAL-CURVATURA NA SEÇÃO TRANSVERSAL

O comportamento não linear de uma estrutura devido à não linearidade do material se incorpora na análise estrutural a través das relações tensão-deformação não lineares dos materiais componentes da seção transversal. No caso do concreto estrutural, pesquisas extensivas têm sido desenvolvidas para a obtenção dessas relações, e as associações técnicas com o intuito de uniformizá-las, as fornecem de forma simplificada, porém fundamentais para a análise em questão.

3.1. Relações tensão-deformação dos materiais

3.1.1. Concreto

Para as análises no estado limite último (ELU), a NBR 6118 (2003) apresenta a relação mostrada na figura 3.1 e descrita pela equação (3.1) para o concreto comprimido e a relação da figura 3.2 descrita pela equação (3.3) para o concreto tracionado.

Figura 3.1 – Relação tensão-deformação para o concreto comprimido.

$$\sigma_c = \begin{cases} 0,85 f_{cd} \left[1 - \left(1 - \frac{\epsilon_c}{0,002} \right)^2 \right] & ; 0 \leq \epsilon_c \leq 0,002 \\ 0,85 f_{cd} & ; 0,002 \leq \epsilon_c \leq 0,0035 \end{cases} \quad \text{para } f_{cd} \leq 50 \text{ MPa} \quad (3.1)$$

Onde:

σ_c : Tensão no Concreto (Compressão)

ε_c : Deformação no Concreto (Encurtamento)

f_{cd} : Resistência de calculo à compressão do concreto

O valor de f_{cd} é dado pela equação (3.2)

$$f_{cd} = \frac{f_{ck}}{\gamma_c} \quad (3.2)$$

Sendo:

f_{ck} : Resistência característica à compressão do concreto

γ_c : Coeficiente de ponderação da resistência

A NBR 6118 (2003) define γ_c como :

$\gamma_c = 1,4$ para determinação da resistência no ELU com combinações Normais

$\gamma_c = 1,2$ para determinação da resistência no ELU com combinações especiais ou de construção e combinações especiais

Figura 3.2 – Relação tensão-deformação para o concreto tracionado.

$$\sigma_c = \begin{cases} \left(\epsilon_c - \frac{0,9 f_{ctd}}{E_{ci}} \right) \left(\frac{0,1 f_{ctd}}{-0,0005 - \frac{0,9 f_{ctd}}{E_{ci}}} \right) + 0,9 f_{ctd} & -0,0005 \leq \epsilon_c < \frac{0,9 f_{ctd}}{E_{ci}} \\ E_{ci} \epsilon_c & \frac{0,9 f_{ctd}}{E_{ci}} \leq \epsilon_c < 0 \end{cases} \quad (3.3)$$

Onde :

σ_c : Tensão no Concreto (Tração)

ϵ_c : Deformação do concreto (Alongamento)

E_{ci} : Módulo de Elasticidade inicial do Concreto

Os valores de E_{ci} e f_{ctd} são dados pelas equações (3.4) e (3.5)

$$E_{ci} = 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (3.4)$$

$$f_{ctd} = \frac{f_{ctk}}{\gamma_c} \quad (3.5)$$

Sendo :

f_{ctd} : Resistência de calculo à tração direta do concreto

f_{ctk} : Resistência característica à tração direta do concreto

3.1.2. Aço de armadura passiva

A NBR 6118 apresenta uma relação elasto-plástica para o aço passivo, mostrada na figura 3.3 e que corresponde à equação (3.6)

Figura 3.3 – Relação tensão-deformação para a armadura passiva.

$$\sigma_s = \begin{cases} -f_{yd} & ; \quad -0,010 \leq \epsilon_s < -\epsilon_{sy} \\ E_s \epsilon_s & ; \quad -\epsilon_{sy} \leq \epsilon_s \leq \epsilon_{sy} \\ f_{yd} & ; \quad \epsilon_{sy} < \epsilon_s \leq 0,010 \end{cases} \quad (3.6)$$

Onde:

σ_s : Tensão no aço passivo

ϵ_s : Deformação no aço passivo

E_s : Módulo de Elasticidade do aço passivo

$$f_{yd} = \frac{f_{yk}}{\gamma_s} \quad (3.7)$$

f_{yd} : Resistência de calculo ao escoamento do aço de armadura passiva

f_{yk} : Resistência característica ao escoamento do aço de armadura passiva

γ_s : Coeficiente de ponderação das resistências

$\gamma_s = 1,00$ para determinação da rigidez no ELU

$\gamma_s = 1,15$ para determinação da resistência no ELU com combinações Normais e combinações especiais ou de construção

$\gamma_s = 1,00$ para determinação da resistência no ELU com combinações especiais

3.1.3. Aço de armadura ativa

A relação tensão-deformação fornecida pela NBR 6118 é apresentada na figura 3.4 e descrita pela equação (3.8) e (3.9)

Figura 3.4 - Relação tensão-deformação para armadura ativa tracionada.

$$\sigma_p = \begin{cases} (\epsilon_p + \epsilon_{py})m - f_{pyd} & ; \quad -\epsilon_{pu} \leq \epsilon_p < -\epsilon_{py} \\ E_p \epsilon_p & ; \quad -\epsilon_{py} \leq \epsilon_p \leq \epsilon_{py} \\ (\epsilon_p - \epsilon_{py})m + f_{pyd} & ; \quad \epsilon_{py} < \epsilon_p \leq \epsilon_{pu} \end{cases} \quad (3.8)$$

Onde:

$$m = \left(\frac{f_{ptd} - f_{pyd}}{\varepsilon_{pu} - \varepsilon_{py}} \right) \quad (3.9)$$

σ_p : Tensão do aço de protensão

ε_p : Deformação do aço de protensão

E_p : Módulo de Elasticidade do aço de armadura ativa

$$f_{pyd} = \frac{f_{pyk}}{\gamma_p} \quad (3.10)$$

Onde :

f_{pyd} : Resistência de calculo ao escoamento do aço de armadura ativa

f_{pyk} : Resistência característica ao escoamento do aço de armadura ativa

f_{ptd} : Resistência de calculo à tração do aço de armadura ativa

f_{ptk} : Resistência característica à tração do aço de armadura ativa

$$\varepsilon_{pu} = \begin{cases} 0,050 \text{ a } 0,060 & \text{para fios} \\ 0,035 & \text{para cordoalhas} \end{cases}$$

3.1.4. Lâmina de fibra de carbono

A relação tensão-deformação da fibra de carbono apresenta um comportamento linear descrito na equação (3.11) e mostrada na figura 3.5.

$$\sigma_{fc} = E_{fc} \varepsilon_{fc} \quad (3.11)$$

Onde:

σ_{fc} : Tensão na fibra de Carbono

E_{fc} : Módulo de Elasticidade da fibra de carbono

ε_{fc} : Deformação da fibra de carbono

Figura 3.5 – Relação tensão deformação para a fibra de carbono.

3.2. Esforços resistentes na seção transversal

Dada uma seção transversal geral de concreto estrutural como na figura 3.6, com distribuição arbitrária de armadura passiva, cabos de protensão e lâminas de fibra de carbono, solicitada por uma força axial N_s e por um momento fletor M_s , com componentes M_{xs} e M_{ys} , conforme se mostra na figura 3.6.

Figura 3.6 – Seção arbitrária de concreto estrutural submetida a esforços solicitantes.

Para a análise dos esforços resistentes, assumiram-se as seguintes hipóteses:

- 1) Deformações por cisalhamento e torção não são consideradas
- 2) A seção plana permanece plana após a deformação da barra
- 3) Solidariedade entre os materiais: a deformação do aço de reforço, ou o acréscimo de deformação no cabo de protensão é a mesma do concreto adjacente;
- 4) Relações tensão-deformação para os materiais componentes da seção transversal são dadas
- 5) Resistência à tração do concreto é nula

Estuda-se a compatibilidade das deformações da seção, O plano que define o campo de deformações é determinado pelos parâmetros θ , direção da linha neutra, $1/r_\theta$, curvatura da seção transversal na a direção θ (sempre positiva ou nula), ϵ_o , deformação no centro de Gravidade da Seção, como se mostra na figura 3.7.

Figura 3.7 – Parâmetros que definem o campo de deformações na seção transversal.

Defina-se um sistema de referência XY , com origem no Centro de Gravidade (CG) com o eixo X horizontal, e um outro sistema xy também com origem no CG, mas com eixo x paralelo à linha neutra. Um ponto no sistema (X,Y) representa um ponto no sistema (x,y) como mostra a figura 3.8, segundo a equação (3.12)

Figura 3.8 – Relações entre coordenadas de um ponto nos sistemas XY e xy .

$$\begin{aligned} x &= X \cos \theta + Y \sin \theta \\ y &= -X \sin \theta + Y \cos \theta \end{aligned} \quad (3.12)$$

A figura 3.9 e as equações (3.13) e (3.14) mostram a relação das curvaturas $1/r_x$ e $1/r_y$ referidas aos eixos X e Y com a curvatura $1/r_\theta$

Figura 3.9 – Compatibilidade entre curvaturas.

$$\frac{1}{r_x} = -\frac{1}{r_\theta} \sin \theta \quad (3.13)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{1}{r_\theta} \cos \theta \quad (3.14)$$

O campo de tensões normais se obtém com as relações tensão-deformação dos materiais componentes da seção transversal e os esforços resistentes, resultantes dessas tensões, são calculados em relação ao centro de Gravidade da seção transversal com as equações de equilíbrio:

$$N = \iint_A \sigma(x, y) dA \quad (3.15)$$

$$M_x = \iint_A y \sigma(x, y) dA \quad (3.16)$$

$$M_y = \iint_A x \sigma(x, y) dA \quad (3.17)$$

3.3. Método de cálculo dos esforços resistentes

Os esforços resistentes (N , M_x , M_y) aparecem, devido a um campo de deformações dado na seção transversal (θ , $1/r_\theta$, ϵ_0).

Dada uma seção transversal qualquer, definindo-a no sistema xy (com o eixo x paralelo à direção da linha neutra), e definindo:

- O contorno e os vazios pelas coordenadas dos seus vértices (x_i , y_i)
- O Aço passivo por pontos (x_s , x_s) com área A_s
- O Aço Ativo por pontos (x_p , x_p) com área A_p
- A fibra de carbono pelos seus pontos extremos (x_{if} , y_{if}) inicial e (x_{ff} , y_{ff}) final

Como mostrado na figura 3.10

Figura 3.10 – Definição da seção transversal por seus vértices.

Para uma deformação no centro de esforços ε_0 e uma curvatura dada $1/r_\theta$, a deformação em qualquer ponto de uma linha paralela à linha neutra, conforme figura 3.11, é descrita pela equação (3.18) :

$$\varepsilon(y) = \varepsilon_0 + \frac{1}{r_\theta} y \quad (3.18)$$

Figura 3.11 – Campo de deformações na seção transversal.

Com as relações tensão-deformação no item 3.1 pode se obter o campo de tensões na seção transversal para cada material e suas contribuições parciais para os esforços resistentes.

3.3.1. Contribuição do concreto

A deformação numa fibra de concreto ε_c , paralela à linha neutra está dada pela equação 3.18, se $\varepsilon_c = \varepsilon(y)$. Com a equação 3.1 determina-se o campo de tensões, na equação 3.19.

$$\sigma_c(y) = f(\varepsilon_c) = f(\varepsilon_c(y)) \quad (3.19)$$

Conforme descrito no item 3.2. A contribuição do concreto é determinada com as equações (3.15), (3.16) e (3.17). Para simplificar o problema foi utilizada uma técnica do cálculo elementar, chamada Teorema de Green, que permite transformar as integrais duplas sobre uma área A em uma integral de linha ao longo da linha fechada L , que delimita tal área. A demonstração pode encontrar-se em textos de cálculo (Antonhy Barcelos, 1998). É formalmente estabelecida como segue:

$$\iint_A \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_L P dx + \oint_L Q dy \quad (3.20)$$

$P = P(x,y)$ e $Q = Q(x,y)$

A : Área de Integração

L : Curva fechada que encerra a área A .

Essa técnica é geral e pode ser usada para calcular outras integrais duplas como, por exemplo, integrais que determinam as propriedades geométricas da seção tais como área, momento da estático e momento de inércia.

Adotando L poligonal, caso da maioria das seções de concreto, a integral será calculada pela soma das integrais ao longo dos lados retos do polígono.

O teorema pode ser aplicado ao problema da Flexão Oblíqua Composta (FOC), formulado em (3.15), (3.16) e (3.17), se estabelecer:

$$P = 0 \quad (3.21)$$

$$Q = \frac{1}{r+1} [x^{r+1} y^s \sigma_c(y)] \quad (3.22)$$

Onde r e s são inteiros não negativos.

Substituindo (3.21) e (3.22) na equação (3.20), obtemos:

$$\iint_A x^r y^s \sigma_c(y) dx dy = \frac{1}{r+1} \oint_L x^{r+1} y^s \sigma_c(y) dy \quad (3.23)$$

O esforço resultante R , da região comprimida no concreto (N_c ou M_{xc} ou M_{yc}), se reduz à integral de linha:

$$R = \frac{1}{r+1} \oint_L x^{r+1} y^s \sigma_c(y) dy \quad (3.24)$$

Esta é a equação básica do problema da FOC, neste estudo.

Variando os valores de r e s , a Equação (3.24) representa:

- A força axial N_c para $r = 0$ e $s = 0$;
- O Momento Fletor M_{xc} para $r = 0$ e $s = 1$;
- O Momento Fletor M_{yc} para $r = 1$ e $s = 0$.

Se a função $\sigma_c(y) = 1$, a equação (3.24) fornece:

- A área A , para $r = 0$ e $s = 0$;
- A Momento Estático S_x , para $r = 0$ e $s = 1$;
- A Momento Estático S_y , para $r = 1$ e $s = 0$;
- O Momento de Inércia I_x , para $r = 0$ e $s = 2$;

- O Momento de Inércia I_y , para $r = 2$ e $s = 0$;
- O Produto de Inércia I_{xy} , para $r = 1$ e $s = 1$.

A integral de linha da equação (3.24) ao longo dos lados da região de integração A pode ser descrita como:

$$R = \frac{1}{r+1} \sum_l S_l \quad (3.25)$$

Onde :

$$S_l = \oint_l x^{r+1} y^s \sigma_c(y) dy \quad (3.26)$$

é a integral ao longo do lado l do polígono fechado que encerra a região comprimida da seção.

Para, a integração utilizou-se o método numérico “Quadratura de Gauss” de terceira ordem (M.J. Maron, 1992). Isso simplesmente requer que a função $\sigma_c(y)$ esteja definida no domínio de integração. Para modelos com polinômios de graus maiores ou modelos não polinomiais, uma Quadratura de Terceira ordem fornecerá só uma aproximação da Integral na Equação (3.26). A aproximação pode ser melhorada utilizando Quadraturas de ordem maior.

A integral de linha, da equação (3.26), é avaliada ao longo dos lados (que ficam definidos pelas coordenadas (x, y) dos seus pontos extremos, como mostrado na figura 3.12) da região comprimida, percorrendo-a em sentido anti-horário. No caso de seções vazadas, a influência dos vazios é subtraída ao avaliar a integral de linha sobre os contornos internos, em sentido horário.

A equação do segmento de reta do lado l é:

$$m_l = \left(\frac{x_f - x_i}{y_f - y_i} \right) \quad (3.27)$$

$$a_l = x_i - y_i m_l \quad (3.28)$$

$$x = a_l + m_l y \quad (3.29)$$

Substituindo a equação (3.29) na equação (3.26) obtemos:

$$S_l = \oint_l (a_l + m_l y)^{r+1} y^s \sigma_c(y) dy = \oint_l G_l(y) dy \quad (3.30)$$

$$G_l(y) = (a_l + m_l y)^{r+1} y^s \sigma_c(y) \quad (3.31)$$

Note-se que, se o lado l é vertical, $m = 0$, $x = a_l = x_i = x_f$, o que torna x constante. Se o lado l é horizontal, $y_i = y_f$ e $dy = 0$, então, a contribuição para a integral é nula. Para uma direção θ dada da linha neutra, a seção é rotacionada $-\theta$ e a linha neutra permanece horizontal. A integração é avaliada sobre os segmentos do perímetro da seção, que fica na região comprimida sobre a linha neutra horizontal, figura 3.12.

Figura 3.12 – Sentidos de Integração no Contorno da Região Comprimida.

A avaliação numérica da equação 28 ganha a seguinte forma:

$$S_l = \int_l G_l dy \cong \frac{(y_f - y_i)}{2} \sum_{k=1}^n \gamma_k G_l(y_k) \quad (3.32)$$

$$y_k = y_i + \frac{y_f - y_i}{2} (\xi_k + 1) \quad (3.33)$$

Onde:

n : Quantidade de pontos de teste da Quadratura de Gauss (Neste estudo $n = 3$) ;

γ_k : k-ésimo peso ;

y_k : Ponto de teste no qual a função $G_l(y)$ é avaliada ;

ξ_k : Ponto de teste de Gauss .

Os valores numéricos de ξ_k e γ_k para 3 pontos de teste são:

Tabela 3.1 – Pontos de teste e pesos da Quadratura de Gauss

Ponto de teste	ξ_k	γ_k
1	$-\sqrt{0,6}$	5/9
2	0	8/9
3	$\sqrt{0,6}$	5/9

ξ_k e γ_k para quadraturas maiores podem ser encontrados em textos de análise numérica (M.J. MARON, 1987)

3.3.2. Contribuição do aço de armadura passiva

Os esforços resultantes do aço passivo, representado por pontos discretos de coordenadas (x_{sj}, y_{sj}) com área A_{sj} e tensões σ_{sj} e σ_{pj} , como mostrado na figura 3.13, são:

$$N_s = \sum_{j=1}^{C_s} A_{sj} \sigma_{sj} \quad (3.34)$$

$$M_{xs} = \sum_{j=1}^{C_s} y_{sj} A_{sj} \sigma_{sj} \quad (3.35)$$

$$M_{ys} = \sum_{j=1}^{C_s} x_{sj} A_{sj} \sigma_{sj} \quad (3.36)$$

Onde C_s representa a quantidade de barras.

Figura 3.13 – Deformações e tensões no aço passivo e no aço ativo.

3.3.3. Contribuição do aço ativo

Os pontos de área A_{pj} com coordenadas (x_{pj}, y_{pj}) e tensões σ_{pj} , que representam o aço ativo no modelo, contribuem com os esforços resultantes parciais:

$$N_p = \sum_{j=1}^{C_p} A_{pj} \sigma_{pj} \quad (3.37)$$

$$M_{xp} = \sum_{j=1}^{C_p} y_{pj} A_{pj} \sigma_{pj} \quad (3.38)$$

$$M_{yp} = \sum_{j=1}^{C_p} x_{pj} A_{pj} \sigma_{pj} \quad (3.39)$$

Onde C_p representa a quantidade de barras.

3.3.4. Contribuição da fibra de carbono

A lâmina de fibra de carbono é representada, no modelo, como um segmento de linha por seus pontos inicial e final de coordenadas (x_{if}, y_{if}) e (x_{ff}, y_{ff}) , respectivamente, de espessura e , como mostrado na figura (3.14). A contribuição de cada lamina é calculado partindo das equações (3.15), (3.16) e (3.17), e considerando:

$$dA = e_\theta dy \quad (3.40)$$

$$e_\theta = \frac{e}{\sin \theta} \quad (3.41)$$

Como mostra a figura 3.14

Figura 3.14 – Deformação na fibra de carbono

Pode-se obter a contribuição de cada lâmina:

$$n_f = E_f e_\theta \left[\varepsilon_0 (y_{ff} - y_{if}) - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{r_\theta} \cdot (y_{ff}^2 - y_{if}^2) \right] \quad (3.42)$$

$$m_{xf} = E_f e_\theta \left[\frac{\varepsilon_0}{2} (y_{ff}^2 - y_{if}^2) + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{r_\theta} \cdot (y_{ff}^3 - y_{if}^3) \right] \quad (3.43)$$

$$m_{yf} = E_f e_\theta \left[a \varepsilon_0 (y_{ff} - y_{if}) + \frac{a}{2} \cdot \frac{1}{r_\theta} \cdot (y_{ff}^2 - y_{if}^2) + \frac{m}{3} \cdot \frac{1}{r_\theta} \cdot (y_{ff}^3 - y_{if}^3) \right] \quad (3.44)$$

Onde:

n_f : Força Normal ; m_{xf} : momento fletor x ; m_{yf} : momento fletor y

A contribuição do conjunto de laminas se obtêm com as equações:

$$N_f = \sum_{j=1}^{C_f} n_{f_i} \quad (3.45)$$

$$M_{xf} = \sum_{j=1}^{C_f} m_{xf_i} \quad (3.46)$$

$$M_{yf} = \sum_{j=1}^{C_f} m_{yf_i} \quad (3.47)$$

Onde C_f representa a quantidade de laminas de fibra de carbono.

3.3.5. Esforços totais

Os esforços totais no sistema x, y são:

$$N_\theta = N_c + N_s + N_p + N_f \quad (3.48)$$

$$M_{x\theta} = M_{xc} + M_{xs} + M_{xp} + M_{xf} \quad (3.49)$$

$$M_{y\theta} = M_{yc} + M_{ys} + M_{yp} + M_{yf} \quad (3.50)$$

Onde:

N_c, M_{xc} e M_{yc} : Esforços resultantes das tensões no concreto.

N_s, M_{xs} e M_{ys} : Esforços resultantes das tensões no Aço Passivo.

N_p, M_{xp} e M_{yp} : Esforços resultantes das tensões no Aço Ativo.

N_f, M_{xf} e M_{yf} : Esforços resultantes das tensões na fibra de carbono.

N_θ : Esforço normal total

$M_{x\theta}$: Momento fletor total na direção x

$M_{y\theta}$: Momento fletor total na direção y

E no sistema X, Y são:

$$N = N_\theta \quad (3.51)$$

$$M_x = M_{x\theta} \cos \theta + M_{y\theta} \sin \theta \quad (3.52)$$

$$M_y = -M_{x\theta} \sin \theta + M_{y\theta} \cos \theta \quad (3.53)$$

θ : Ângulo entre a direção positiva do eixo x e a linha neutra, considerando positivo o sentido anti-horário.

3.4. Superfície de interação no ELU

A superfície, num espaço $M_x - M_y - N$, formada pelos pontos que representam as combinações N, M_x e M_y , e que levam à seção transversal ao ELU (deformação plástica excessiva do aço ou esmagamento do concreto) é chamada de superfície de interação. Os pontos no interior dessa superfície reapresentam combinações de esforços que não causam a ruína da seção.

Adotando o critério da NBR 6118 para o ELU, figura 3.15; essa superfície pode ser calculada através do método discutido no item 3.3. Os domínios de deformação podem ser descritos através da variação da profundidade da linha neutra, tabela 3.1.

Figura 3.15 – Domínios de deformação para o ELU. NBR 6118 (2003)

Tabela 3.1– Definição dos domínios de deformação para ELU, segundo a profundidade da linha neutra.

Domínio	d_{LN}	ϵ_{cu}	Campo de Deformações
1	$-\infty \leq d_{LN} \leq 0$	$\frac{0,010}{d/d_{LN} - 1}$	$\epsilon_{cu} \left(\frac{y - y_{\max}}{d_{LN}} + 1 \right)$
2	$0 < d_{LN} \leq \frac{7}{27} d$		
3	$\frac{7}{27} d < d_{LN} \leq \frac{d}{1 + \epsilon_{sy}/0,0035}$	0,0035	
4	$\frac{d}{1 + \epsilon_{sy}/0,0035} < d_{LN} \leq d$		
4a	$d < d_{LN} \leq h$		
5	$h < d_{LN} \leq \infty$	$0,002 / \left(1 - \frac{3}{7} \frac{h}{d_{LN}} \right)$	

3.4.1. Método de calculo da superfície de interação no ELU

Dada a localização da linha neutra e sua direção, d_{LN} e θ respectivamente, se aplica o método do item 3.3, desde que se considere a curvatura e a deformação do centro de gravidade como uma funções da posição da linha neutra, como mostrado na tabela 3.2:

Tabela 3.2 – Definição dos domínios de deformação para ELU, em função da curvatura e da deformação no centro de gravidade.

Domínio	$1/r_{\theta}$	ε_0
1	$\frac{0,010}{h-d_{LN}}$	$\frac{1}{r_{\theta}}(d_{LN}-y_{\max})$
2		
3	$\frac{0,0035}{d_{LN}}$	
4		
4a		
5	ε_{cu}/d_{LN}	

Assim obtém-se um ponto (M_x, M_y, N) . Para obter todos os pontos da superfície, a linha neutra deve variar desde $-\alpha$ até α , para cada θ que varia entre 0° e 360° . O fluxograma para a determinação da superfície de interação é mostrado na figura 3.16.

Figura 3.16 – Fluxograma para montagem da superfície de interação.

A figura 3.17 mostra um exemplo de superfície de interação para uma seção vazada.

Figura 3.17 –Superfície de Interação para a seção mostrada na parte superior.

A partir dessa superfície e para uma força normal dada, pode-se obter o diagrama de Interação M_x - M_y , útil na verificação de seções submetidas à Flexão oblíqua composta. A figura 3.18

apresenta dois diagramas de Interação para uma seção L.

Figura 3.18 – Diagramas de Interação M_x - M_y para a seção L.

3.5. Relações momento-curvatura

Esta relação é útil nas análises de estruturas de concreto quando se pretende estudar a deformabilidade da barra, entender o desenvolvimento de rótulas plásticas e a redistribuição dos momentos fletores do colapso. Estas relações podem ser determinadas usando o método exposto no item 3.3, tanto na flexão composta quanto na FOC, dados os parâmetros (θ , $1/r_\theta$, ε_0) é possível calcular os esforços (N , M_x , M_y) correspondentes.

3.5.1. Flexão composta

Observe-se que na flexão composta, para seções simétricas, $\theta = 0^\circ$, $1/r_\theta = 1/r_y$ e $M_y = 0$. Assim para um campo de deformação ($1/r_y$, ε_0) existem esforços (N , M_x). Uma serie desses pontos se calcula mantendo a curvatura $1/r_y$ constante e fazendo variar ε_0 . A figura 3.19 mostra essas series para varias curvaturas e o diagramas de interação para o ELU.

Figura 3.19 – Diagrama de Interação Momento-Normal e relações Momento-Normal para varias curvaturas.

Na figura 3.19 e 3.20 observa-se que, para cada força normal N_1 , N_2 e N_3 existe uma relação momento-curvatura diferente.

Figura 3.20 - Relações momento curvatura para força normal dada.

3.6. Procedimento de calculo das rigidezes secantes

Para associar os procedimentos apresentados neste capítulo com uma análise elástica que considere não linearidade geométrica, deve se obter os parâmetros EI_x (rigidez á flexão para M_x) no caso de uma análise no plano; e EI_x , EI_y (rigidez á flexão para M_y) para uma análise no espaço.

$$EI_x = \frac{M_x}{1/r_y} \quad (3.54)$$

$$EI_y = \frac{M_y}{1/r_x} \quad (3.55)$$

Dados os esforços solicitantes (N_s , M_{xs} , M_{ys}), o problema é achar o campo de deformações (θ , $1/r_\theta$, ϵ_0) que provoca esforços resistentes (N_s , M_{xs} , M_{ys}) iguais.

Seja:

$$\mathbf{G} = (N(\theta, 1/r_\theta, \epsilon_0), M_x(\theta, 1/r_\theta, \epsilon_0), M_y(\theta, 1/r_\theta, \epsilon_0)) - (N_s, M_{xs}, M_{ys}) \quad (3.56)$$

Uma função $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, o problema é estabelecer a raiz da função, a resolução pode-se realizar pelo método numérico da **falsa posição**. Esse método é explicado a seguir para uma função $y = f(x)$ de $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. (ver figura 3.21)

- 1) Dado o intervalo $[a, b]$, que contem a raiz de $f(x)$.
- 2) Calcular $f(a)$ e $f(b)$
- 3) Calcular $x_{fp} = \frac{b \cdot f(a) - a \cdot f(b)}{f(a) - f(b)}$

x_{fp} é o falso ponto, assumido como raiz em cada iteração

- 4) Calcular $f(x_{fp})$.
- 5) Caso $f(x_{fp}) = 0$ então x_{fp} é a raiz.

Caso $f(x_{fp}) \neq 0$; continuar

- 6) Caso o sinal de $f(x_{fp})$ for igual ao sinal $f(a)$; trocar a por x_{fp} ;

caso o sinal de $f(x_{fp})$ não for igual ao sinal $f(a)$; trocar b por x_{fp}

voltar ao passo 2.

Figura 3.21 – Método da falsa posição

As figuras 3.23, 3.24 e 3.25 mostram os fluxogramas para obter as raízes.

Figura 3.22- **MÓDULO A** : Para θ e $1/r_\theta$ dadas, permite achar a deformação no CG (ε_0) que ocasiona um Esforço normal igual à força normal Solicitante.

Figura 3.23 - **MÓDULO B** : Para θ dado, permite achar $(1/r_\theta, \varepsilon_\theta)$ que ocasionam Esforços resistentes (M_y, N) iguais às força Solicitantes (M_{ys}, N_s) .

Figura 3.24 - **MÓDULO C** : Permite achar $(\theta, 1/r_\theta, \varepsilon_\theta)$ que ocasionam esforços resistentes (M_x, M_y, N) iguais às força Solicitantes (M_{xs}, M_{ys}, N_s)

4 CABOS ESTAIADOS

O comportamento não-linear dos cabos de uma ponte estaiada se deve ao fato de que o cabo suspenso pelos seus extremos, e solicitado por seu peso próprio e por força axial aplicada externamente em seus extremos, assume a posição de equilíbrio com uma configuração deformada na forma de uma catenária, que depende dessa força axial.

Desse modo, a variação da rigidez axial do cabo em função dos seus deslocamentos extremos não é linear, desde que uma parte dos deslocamentos desses nós se deve à deformação do material e a outra parte se deve à mudança da catenária. Quando a tração axial aumenta no estai, a flecha da catenária diminui, a rigidez do cabo aumenta e a influência da catenária decresce até o limite em que a rigidez é definida apenas pela deformação do material. Portanto, a rigidez axial aparente do cabo aumenta quando as tensões de tração crescem.

4.1. Módulo de Rigidez Equivalente

Consideremos um cabo inextensível, ($E = \infty$), apoiado no seu extremo superior sobre uma rótula, e distante s do apoio inferior fixo, como mostrado na figura 4.1. Aumentando a força de tração N até o infinito, a forma do cabo se aproxima a uma linha reta e o ponto B se desloca em direção ao ponto B', por uma distância $\Delta s_{\infty} = s_{\infty} - s$. Se a força aumenta de N para $N_1 = N + \Delta N$, a distância se torna-se $\Delta s_1 = \Delta s_{\infty} - \Delta s$. Esse deslocamento corresponde a uma extensão Δs_1 do cabo sujeito a um incremento de força ΔN . Assim, pode ser definida uma extensão específica aparente $\varepsilon_f = \Delta s_1 / s$ e, para propósitos práticos, um módulo de elasticidade aparente $E_f = \sigma / \varepsilon_f$.

Por outro lado, a relação tensão – deformação de um cabo apoiado numa série de apoios sem atrito é linear e está determinada completamente por seu módulo de elasticidade E_e .

Figura 4.1 - Comportamento geométrico do cabo com módulo de elasticidade $E = \infty$.

É possível calcular um módulo de elasticidade equivalente E_i que abranja simultaneamente os dois fenômenos descritos acima:

$$E_i = \frac{\sigma}{\varepsilon_f + \varepsilon_e} \quad (4.1)$$

Introduzindo na equação 4.1 os módulos E_f e E_e , por meio de $\varepsilon_f = \frac{\sigma}{E_f}$ e $\varepsilon_e = \frac{\sigma}{E_e}$, obtemos :

$$E_i = \frac{E_f E_e}{E_f + E_e} = \frac{E_e}{1 + \frac{E_e}{E_f}} \quad (4.2)$$

Se a relação f/s é suficientemente pequena (menor que 1/12) a catenária pode ser considerada uma parábola (WALTHER R.F. 1999). Usando essa simplificação, H. J. Ernst estabeleceu o módulo de elasticidade:

$$E_f = \frac{12\sigma^3}{(\gamma)^2} \quad (4.3)$$

Substituindo a equação 4.3 na equação 4.2 , obtemos o módulo de elasticidade equivalente para um cabo com vão horizontal L e tensão de tração σ :

$$E_i = \frac{E_e}{1 + \frac{(\gamma L)^2 E_e}{12\sigma^3}} \quad (4.4)$$

Onde :

σ : Tensão no cabo

E_e : Módulo de elasticidade do aço

γ : Densidade do cabo

s : Comprimento da corda

L : Vão horizontal = $s \cos \alpha$ (α é o angulo entre a corda do cabo e o eixo horizontal)

O módulo de Elasticidade E_i , definido na equação 4.4, é somente válido para um único valor de tensão σ . Devido ao fato das tensões normais poderem mudar consideravelmente com as cargas variáveis, é adequado definir um módulo de elasticidade equivalente para um cabo que será solicitado entre dois níveis de tensões σ_1 e σ_2 . H. J. Ernst, conseqüentemente, postula o módulo de elasticidade secante (WALTHER R.F. 1999):

$$E_f = \frac{12\sigma_m^3}{(\gamma L)^2} \frac{16\mu^2}{(1+\mu)^4} \quad (4.5)$$

Onde :

$$\mu = \frac{\sigma_1}{\sigma_2}$$

$$\sigma_m = \frac{\sigma_1 + \sigma_2}{2}$$

Substituindo a equação 4.5 na equação 4.2, obtemos :

$$E_i = \frac{E_e}{1 + \frac{(\gamma L)^2}{12\sigma_m^3} \frac{(1+\mu)^4}{16\mu^2} E_e} \quad (4.6)$$

A equação 4.5 representa o módulo de elasticidade E_f de um cabo solicitado por uma tensão média σ_m . A equação 4.6 fornece um módulo secante para representar o comportamento do cabo, com maior aproximação ao comportamento real, por uma relação linear.

4.2. Matriz de rigidez dos cabos

As matrizes de rigidez elástica e geométrica para uma barra solicitada axialmente são

$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{1i} & u_{2i} & u_{3i} & u_{1j} & u_{2j} & u_{3j} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.7)$$

$$[k_g] = \frac{P}{2} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_{1i} & u_{2i} & u_{3i} & u_{1j} & u_{2j} & u_{3j} \end{matrix} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (4.8)$$

A determinação dessas matrizes apresentam-se, posteriormente, no item 5.2.4.

4.3. Efeitos estabilizadores dos estais no pilão

Com os modelos planos simplificados estudados a seguir, será mostrado o efeito enrijecedor dos estais no comportamento transversal e longitudinal do pilão. (TORNERI P, 2002).

4.3.1. Estabilidade Transversal

Todas as forças atuantes no topo do pilão, resultantes dos estais ancorados no extremo superior, são representadas por R_T , como mostra a Figura 4.2.

Figura 4.2 – Resultante R_T das forças T_A e T_C nos estais, atuante no topo da pilão (GIMSING, 1983)

O plano de cabos pode ser definido pelos pontos A , C e D , representando o topo do pilão e os pontos de ancoragem dos estais no tabuleiro, respectivamente. Como a força R_T é a resultante das forças do plano, ela também estará situada no mesmo plano. Assim, quando existir equilíbrio entre as componentes horizontais das forças T_A e T_C , a força R_T permanecerá direcionada para o ponto de interseção do pilão com o tabuleiro (ponto B), inclusive quando se considerarem efeitos de segunda ordem, mesmo na posição deformada; e o plano de cabos continua sendo definido pelos pontos A , C e D . Conseqüentemente, o modelo mais representativo para o estudo da estabilidade de um pilão estaiado é o modelo de barra biarticulada sujeita a um esforço axial R_T , desde que o comprimento de flambagem seja h e não $2h$, como ocorreria se a força permanecesse vertical, figura 4.3.

Figura 4.3 – Modelo simplificado para estudo da estabilidade do pilão, submetida a deslocamentos laterais no seu topo (GIMSING, 1983).

Quando o tabuleiro apresentar flexão lateral, devido aos carregamentos laterais, o ponto A assume o ponto A', figura 4.4.

Figura 4.4 – Direção da força resultante R_T , quando o tabuleiro está submetido a deslocamentos laterais, (GIMSING, 1983)

Nesse caso, o plano de cabos na configuração deformada fica definido pelos pontos A', C e D. O que faz que a direção da força R_T seja DB' , com o ponto B' localizado na linha AC. A figura 4.5 mostra a consideração simultânea da flexão do pilão, neste caso, o modelo aproximado adequado seria o de uma barra biarticulada submetida a esforço R_T no seu topo e a um momento $R_T \cdot e$ na sua base, sendo e o deslocamento do ponto B para B'.

Figura 4.5 – Modelo simplificado para o pilão submetido à flexão e tabuleiro deslocado lateralmente. (GIMSING, 1983)

4.3.2. Estabilidade Longitudinal

A estabilidade na direção longitudinal está muito influenciada pelas condições de apoios não só do pilão, mas da estrutura como um todo. Na direção longitudinal, os estais, principalmente os estais de ancoragem, causam um efeito estabilizador importante, reduzindo significativamente os problemas de estabilidade nessa direção.

A rigidez longitudinal do topo do pilão depende da magnitude da força normal N_{pt} em relação à força crítica N_{cr} do pilão em balanço, como ilustrado na figura 4.6.

Figura 4.6 – Direção da força horizontal ΔH aplicada pelo sistema de cabos, em função da relação força normal atuante (N_{pt}) e força crítica de flambagem (N_{cr}).

Se a força N_{pt} for menor que a força N_{cr} e o alongamento do cabo impuser, por compatibilidade, um deslocamento u do topo do pilão, ela tenderá a retornar para sua posição vertical e o sistema de cabos introduzirá um esforço ΔH para mantê-la na configuração deformada. Isso também pode ser interpretado contrariamente, ou seja, o pilão resistirá a um deslocamento longitudinal u pela força ΔH .

Se a força N_{pt} é igual à força N_{cr} , o pilão está em equilíbrio na configuração fletida e, conseqüentemente, não fornecerá resistência nenhuma a qualquer deslocamento longitudinal imposto pelo alongamento dos cabos. Em outro caso, se a força N_{pt} é maior do que a força N_{cr} , o pilão tende a aumentar seus deslocamentos até atingir uma nova configuração de equilíbrio e, então, o sistema de cabos impõe um esforço contrário a este deslocamento, figura 4.6. Observe-se que, neste caso, os cabos (representados pela carga ΔH) melhoram a estabilidade do pilão, de modo que N_{cr} para um pilão estaiado é significativamente maior que N_{cr} para um pilão em balanço.

5 ANÁLISE ESTRUTURAL NÃO-LINEAR

5.1. Análise Elástica de Segunda Ordem

Para um sistema estrutural elástico, os deslocamentos estáticos podem ser calculados resolvendo o sistema linear de equações de rigidez, equação 5.1

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}]\{\Delta\} \quad (5.1)$$

Na qual :

$[\mathbf{K}]$: Matriz de rigidez elástica global da estrutura;

$\{\Delta\}$: Vetor de deslocamentos nodais;

$\{\mathbf{P}\}$: Vetor de forças nodais aplicadas.

A matriz de rigidez global $[\mathbf{K}]$ pode ser montada a partir das matrizes de rigidez dos membros individuais da estrutura pelo procedimento de montagem geral (McGUIRE, GALLAGHER, ZIEMIAN, 2000). Para uma análise elástica linear de primeira ordem, os termos em $[\mathbf{K}]$ são constantes, pois não mudam com a deformação da estrutura.

Para uma análise elástica não-linear de segunda ordem, a rigidez da estrutura varia com a deformação desta, inclusive para o caso de material elástico linear, portanto, a matriz de rigidez $[\mathbf{K}]$ na equação 5.1, é uma função dos deslocamentos da estrutura, que ainda são incógnitas. Diversas técnicas numéricas têm sido apresentadas para a resolução de sistemas de equações não-lineares e usadas na análise de pontes estaiadas. Essas técnicas básicas podem ser classificadas em: 1) procedimento incremental, 2) procedimento iterativo ou método de Newton e 3) procedimento misto, e são discutidas por NAZMY A. S. , ABDEL-GHAFFAR A. M., 1990. Nesse tipo de análise, os efeitos das deformações e deslocamentos finitos são levados em conta quando se formulam as equações de equilíbrio na posição deformada, e a equação 5.1 torna-se:

$$\{\mathbf{P}\} = [\mathbf{K}_e + \mathbf{K}_g] \{\Delta\} \quad (5.2)$$

Onde:

$[\mathbf{K}_e]$: Matriz de rigidez elástica linear;

$[\mathbf{K}_g]$: Matriz de rigidez geométrica;

Essa última matriz representa a mudança na rigidez, resultante do efeito dos deslocamentos anteriormente mencionados. Estudando o equilíbrio na posição deformada do elemento e com o uso do princípio dos deslocamentos virtuais, as matrizes $[\mathbf{K}_e]$ e $[\mathbf{K}_g]$ para um elemento barra, podem ser deduzidas.

5.2. Princípio dos deslocamentos virtuais na análise de estruturas de barras.

5.2.1. Descrição da configuração deformada do elemento

As equações de rigidez de um elemento, fazendo uso do princípio dos deslocamentos virtuais, podem ser determinadas quando se conhecem os seguintes parâmetros da estrutura:

- 1) As constantes elásticas que relacionam as tensões e deformações do material;
- 2) As relações diferenciais entre deformação e deslocamento;
- 3) Os campos de deslocamentos reais e virtuais do elemento.

As constantes elásticas E : Módulo de Elasticidade e G : Módulo de Cisalhamento são conhecidas por ensaios de laboratório. As relações diferenciais entre deformação e deslocamento de nosso interesse são as correspondentes à deformação axial, por flexão e por torção. Portanto, definir o campo de deslocamentos é a tarefa restante, para a qual se usará a convenção do método dos deslocamentos virtuais, que considera que o campo de deslocamentos virtuais tem a mesma forma do campo de deslocamentos reais.

Uma vez definidos os campos de deslocamentos, o objetivo é produzir uma expressão algébrica em termos de todos os deslocamentos dos nós do elemento, na forma:

$$\Delta = N_1\Delta_1 + N_2\Delta_2 + \dots + N_i\Delta_i + \dots + N_n\Delta_n \quad (5.3)$$

$$\Delta = \sum_{i=1}^n N_i\Delta_i = [N]\{\Delta\} \quad (5.4)$$

Onde:

Δ : componente do deslocamento estudado;

Δ_i : i-ésimo grau de liberdade do elemento;

N_i : Função de forma correspondente a Δ_i ;

n : O número total de graus de liberdade nos nós do elemento.

5.2.2. Formulação das Funções de forma

A) Elemento solicitado por carga axial

Aqui : $\Delta = u_1(x)$, $\Delta_1 = u_{1i}$ e $\Delta_2 = u_{1j}$, figura 5.1.

Figura 5.1 – Elemento solicitado por carga axial

Portanto, a expressão do deslocamento axial é:

$$u_1(x) = N_1 u_{1i} + N_2 u_{1j} \quad (5.5)$$

Sabe-se que para esse elemento a deformação axial é constante. Desde que $\varepsilon = du_1/dx$, u_1 deve ser uma expressão linear em x ,

$$u_1(x) = a + bx \quad (5.6)$$

Avaliando essa equação nos nós i ($x = 0$) e j ($x = L$), obtemos :

$$a = u_{1i} \quad (5.7)$$

$$b = \left(\frac{u_{1j} - u_{1i}}{L} \right) \quad (5.8)$$

Substituindo estas expressões na equação 5.6 :

$$u_1(x) = \left(1 - \frac{x}{L} \right) u_{1i} + \frac{x}{L} u_{1j} \quad (5.9)$$

e comparando com a equação 5.5, obtemos :

$$N_1 = 1 - \frac{x}{L} \quad (5.10)$$

$$N_2 = \frac{x}{L} \quad (5.11)$$

B) Elemento solicitado por torção

A expressão para o campo de deslocamentos desse elemento se desenvolve de maneira similar. O deslocamento angular é dado em termos dos deslocamentos dos nós extremos, com rotação em torno do eixo 1, como pode-se observar na figura 5.2

$$\theta_1(x) = N_1 \theta_{1i} + N_2 \theta_{1j} \quad (5.12)$$

Figura 5.2 - Elemento solicitado por torção.

Empregando uma variação linear do deslocamento angular para cada ponto do elemento, obtemos:

$$\theta_1(x) = a + bx \quad (5.13)$$

Após obter a e b por meio da avaliação da expressão 5.13 nos nós extremos, e substituindo a e b na mesma equação 5.13, obtemos:

$$\theta_1 = \left(1 - \frac{x}{L}\right)\theta_{1i} + \frac{x}{L}\theta_{1j} \quad (5.14)$$

E comparando a equação 5.14 com a equação 5.12, observa-se que N_1 e N_2 são iguais às funções de forma do membro solicitado axialmente.

C) Elemento solicitado por flexão

O campo de deslocamento para esse elemento é descrito por 4 graus de liberdade, u_{2i} , u_{2j} , θ_{3i} , θ_{3j} , figura 5.3, e, considerando que os deslocamentos angulares são derivadas dos deslocamentos transversais, equação 5.15 e equação 5.16 :

$$\theta_{3i} = \frac{du_2}{dx} \Big|_i \quad (5.15)$$

$$\theta_{3j} = \frac{du_2}{dx} \Big|_j \quad (5.16)$$

Figura 5.3 – Elemento solicitado por flexão.

Adotando uma função polinomial, como nos dois modos de resistência anteriores, obtemos um polinômio cúbico devido aos 4 graus de liberdade:

$$u_2(x) = a + bx + cx^2 + dx^3 \quad (5.17)$$

Avaliando $u_2(x)$ nos nós i ($x = 0$) e j ($x = L$), obtemos :

$$u_{2i} = a \quad (5.18)$$

$$u_{2j} = a + bL + cL^2 + dL^3 \quad (5.19)$$

Avaliando, também, $\theta_3(x)$ nos nós i e j , obtemos:

$$\theta_{3i} = b \quad (5.20)$$

$$\theta_{3j} = b + 2cL + 3dL^2 \quad (5.21)$$

Resolvendo as 4 equações anteriores simultaneamente, obtemos:

$$a = u_{2i} \quad (5.22)$$

$$b = \theta_{3i} \quad (5.23)$$

$$c = \frac{1}{L^2} (-3u_{2i} + 3u_{2j} - 2\theta_{3i}L - \theta_{3j}L) \quad (5.24a)$$

$$d = \frac{1}{L^3} (2u_{2i} - 2u_{2j} + \theta_{3i}L + \theta_{3j}L) \quad (5.24b)$$

Substituindo na equação 5.17, chega-se em:

$$u_2(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] u_{2i} + \left[3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \right] u_{2j} + x \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 \theta_{3i} + x \left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L} \right] \theta_{3j} \quad (5.25)$$

Comparando com a equação 5.3

$$N_1 = 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (5.26)$$

$$N_2 = 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \quad (5.27)$$

$$N_3 = x \left(1 - \frac{x}{L} \right)^2 \quad (5.28)$$

$$N_4 = x \left[\left(\frac{x}{L} \right)^2 - \frac{x}{L} \right] \quad (5.29)$$

O campo de deslocamentos do elemento, para o caso da flexão no plano 1-3, se define de maneira similar ao da flexão no plano 1-2, nesse caso, o deslocamento estudado será $u_3(x)$, que depende dos 4 graus de liberdade u_{3i} , u_{3j} (deslocamentos dos nós extremos do elemento na direção 3), θ_{2i} , θ_{2j} (rotações dos nós extremos do elemento em torno do eixo 2). Portanto, usam-se as mesmas funções de forma para a flexão em ambos planos.

5.2.3. Os deslocamentos virtuais na formulação da equação de rigidez do elemento

Expressões para os deslocamentos reais e virtuais

Será conveniente que a expressão para o trabalho interno seja escrita em termos das deformações e para obtê-las, os campos de deslocamentos devem ser diferenciados de maneira apropriada, segundo o modo de resistência estrutural estudado. Para o membro solicitado por força axial, a deformação é $\varepsilon = du_1/dx$. Para torção, o deslocamento é a rotação em torno do eixo 1, θ_1 , e a deformação β é a taxa de variação desta rotação com relação à coordenada axial x , então, $\beta = d\theta_1/dx$. Para a flexão nos planos 1-2 e 1-3, os deslocamentos de interesse são u_2 e u_3 e as deformações são as curvaturas $\kappa_3 = d^2u_2/dx^2$ e $\kappa_2 = d^2u_3/dx^2$.

Em geral, a deformação e é obtida diferenciando a equação 5.4:

$$e = \Delta' = [N'] \{\Delta\} \quad (5.30)$$

Onde ‘ (linha) indica a diferenciação apropriada segundo o modo de resistência: a primeira derivada para o elemento axial e o elemento em torção, e a segunda derivada para o elemento em flexão.

Com este fim, levando as equações 5.9, 5.14 e 5.25 à notação matricial e derivando-as, resultam os seguintes campos de deslocamentos, respectivamente:

Força axial :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.31)$$

$$\varepsilon_1 = \frac{du_1}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.32)$$

Para Torção :

$$\theta_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.33)$$

$$\beta = \frac{d\theta_1}{dx} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \theta_{1i} \\ \theta_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.34)$$

E no elemento fletido no plano 1-2 :

$$u_2(x) = \begin{bmatrix} 1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 & 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 & x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right] \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2i} \\ \theta_{3i} \\ u_{2j} \\ \theta_{3j} \end{Bmatrix} \quad (5.35)$$

$$\kappa_3 = \frac{d^2 u_2}{dx^2} = \begin{bmatrix} \frac{6}{L^2}\left(1 - \frac{2x}{L}\right) & \frac{2}{L}\left(\frac{3x}{L} - 1\right) & \frac{6}{L^2}\left(\frac{2x}{L} - 1\right) & \frac{2}{L}\left(\frac{3x}{L} - 2\right) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2j} \\ \theta_{3j} \\ u_{2i} \\ \theta_{3i} \end{Bmatrix} \quad (5.36)$$

De maneira semelhante, o deslocamento e a deformação de interesse correspondente à flexão no plano 1-3:

$$u_3(x) = \left[1 - 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 + 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \mid x\left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \mid 3\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right)^3 \mid x\left[\left(\frac{x}{L}\right)^2 - \frac{x}{L}\right] \right] \begin{Bmatrix} u_{3i} \\ \theta_{2i} \\ u_{3j} \\ \theta_{2j} \end{Bmatrix} \quad (5.37a)$$

$$\kappa_2 = \frac{d^2 u_3}{dx^2} = \left[\frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \mid \frac{2}{L} \left(\frac{3x}{L} - 1\right) \mid \frac{6}{L^2} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \mid \frac{2}{L} \left(\frac{3x}{L} - 2\right) \right] \begin{Bmatrix} u_{3j} \\ \theta_{2j} \\ u_{3i} \\ \theta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (5.37b)$$

Para estabelecer o trabalho virtual interno serão necessárias as expressões para as deformações virtuais, estas se determinam usando as mesmas funções de forma adotadas no campo de deslocamentos reais. Portanto:

$$\delta\Delta = [N]\{\delta\Delta\} \quad (5.38)$$

Onde $\{\delta\Delta\}$ são os deslocamentos virtuais dos nós do elemento, conseqüentemente, a deformação virtual δe é:

$$\delta e = [N']\{\delta\Delta\} \quad (5.39)$$

As expressões 5.40, 5.41, 5.42 e 5.43 são as correspondentes às do elemento em comportamento axial, torção e flexão nos planos 1-2 e 1-3 :

$$\delta\epsilon_1 = \frac{d\delta u_1}{dx} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} \delta u_{1i} \\ \delta u_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.40)$$

$$\delta\beta = \frac{d\delta\theta_1}{dx} = \left[-\frac{1}{L} \quad \frac{1}{L} \right] \begin{Bmatrix} \delta\theta_{1i} \\ \delta\theta_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.41)$$

$$\delta\kappa_3 = \frac{d^2\delta u_2}{dx^2} = \left[\frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L}\right) \quad \frac{2}{L} \left(\frac{3x}{L} - 1\right) \quad \frac{6}{L^2} \left(\frac{2x}{L} - 1\right) \quad \frac{2}{L} \left(\frac{3x}{L} - 2\right) \right] \begin{Bmatrix} \delta u_{2j} \\ \delta\theta_{3j} \\ \delta u_{2i} \\ \delta\theta_{3i} \end{Bmatrix} \quad (5.42)$$

$$\delta \kappa_2 = \frac{d^2 \delta u_3}{dx^2} = \left[\frac{6}{L^2} \left(1 - \frac{2x}{L} \right) \quad \frac{2}{L} \left(\frac{3x}{L} - 1 \right) \quad \frac{6}{L^2} \left(\frac{2x}{L} - 1 \right) \quad \frac{2}{L} \left(\frac{3x}{L} - 2 \right) \right] \begin{Bmatrix} \delta u_{3j} \\ \delta \theta_{2j} \\ \delta u_{3i} \\ \delta \theta_{2i} \end{Bmatrix} \quad (5.43)$$

5.2.4. Fórmula da matriz de rigidez de um elemento

O princípio dos deslocamentos virtuais estabelece:

$$\delta W = \delta W_{ext} - \delta W_{int} = 0 \quad (5.44)$$

Onde :

$$\delta W_{int} = \int_V [\delta e] [E] \{e\} dV \quad (5.45)$$

Sendo $[\delta e]$ as deformações virtuais, $[E]$ a matriz de constantes elásticas, e $\{e\}$ as deformações reais. Todos esses termos são características do modo de resistência estudado.

E, considerando que o elemento está sendo solicitado por forças nodais, figura 5.4:

Figura 5.4 – Forças aplicadas no nós do elemento

A expressão para o trabalho virtual externo resulta na equação 5.46 :

$$\delta W_{ext} = \sum_{i=1}^n \delta \Delta_i P_i = [\delta \Delta] \{P\} \quad (5.46)$$

Portanto, o princípio do trabalho virtual se torna:

$$\int_V [\delta e][E]\{e\} dV = [\delta \Delta]\{P\} \quad (5.47)$$

Substituindo as equações 5.30 e 5.39 na equação 5.47, temos a matriz de rigidez para um elemento, descrito por n graus de liberdade;

$$[\delta \Delta] \left[\int_V \{N'\}[E][N'] dV \right] \{\Delta\} = [\delta \Delta] \{P\} \quad (5.48)$$

ou

$$[\delta \Delta][\mathbf{k}]\{\Delta\} = [\delta \Delta]\{P\} \quad (5.49)$$

onde :

$$[\mathbf{k}] = \left[\int_V \{N'\}[E][N'] dV \right] \quad (5.50)$$

E, considerando deslocamentos virtuais arbitrários:

$$[\mathbf{k}]\{\Delta\} = \{P\} \quad (5.51)$$

A expressão 5.50 é a expressão geral para a matriz de rigidez de um elemento e a equação 5.51 a sua correspondente equação de rigidez, ambas deduzidas por meio do princípio dos deslocamentos virtuais.

5.2.5. Montagem da matriz de rigidez Elástica e Geométrica

Considere-se um elemento prismático solicitado por carga axial e momentos fletores em torno do eixo 2 e 3, como mostrado na figura 5.4. Os deslocamentos desse elemento devido às solicitações, em relação à configuração de referência, são uma função:

- 1) Da rotação como corpo rígido, conforme os deslocamentos relativos dos seus extremos;

- 2) Dos alongamentos ou encurtamentos;
- 3) Da flexão.

Todos ocorrem de maneira simultânea e influenciam uns aos outros. Considerando só os efeitos mais significativos, aqui se desconsiderará ou se aproximará alguns acoplamentos menores e se tratará o deslocamento resultante como duas ações sequenciais:

- 1) Deformação axial e rotação de corpo rígido do eixo, figura 5.5, e
- 2) Flexão oblíqua do elemento em relação à corda entre os nós deslocados, figura 5.6

Conseqüentemente, serão desenvolvidas duas matrizes de rigidez. A primeira para o caso em que não exista flexão, desse modo o caso se reduz ao de um membro retilíneo experimentando rotação e deformação axial, como mostra a figura 5.5. E a segunda matriz para um membro submetido à força axial e flexão oblíqua simultaneamente, nesse caso, as deformações da figura 5.6 deverão ser levadas em conta.

A) Elemento solicitado axialmente

Estudando a deformação finita de um elemento diferencial dx da barra da Figura 5.5 e considerando esse elemento retilíneo e livre de deformação axial na configuração de referência.

Figura 5.5 – Deformação Axial da barra e rotações do eixo como corpo rígido no espaço.

As posições dos pontos a e b na configuração deformada a' e b' são :

$$\begin{aligned}a'_1 &= x + u_1 \\a'_2 &= u_2 \\a'_3 &= u_3\end{aligned}\tag{5.52}$$

$$\begin{aligned}b'_1 &= x + u_1 + dx + \frac{du_1}{dx} dx \\b'_2 &= u_2 + \frac{du_2}{dx} dx \\b'_3 &= u_3 + \frac{du_3}{dx} dx\end{aligned}\tag{5.53}$$

O comprimento do segmento dx na configuração de referência é $a'b'$ após a deformação axial e as rotações de corpo rígido:

$$a'b' = \left[1 + 2 \frac{du_1}{dx} + \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right]^{\frac{1}{2}} dx\tag{5.54}$$

Fazendo :

$$d_{ab} = 2 \frac{du_1}{dx} + \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2\tag{5.55}$$

Temos que:

$$\frac{a'b'}{dx} = \left[1 + d_{ab} \right]^{\frac{1}{2}}\tag{5.56}$$

Com a expansão da equação 5.56 pelo teorema Binomial Geral de Newton e desconsiderando os termos de ordem maior, obtemos:

$$\frac{a'b'}{dx} = 1 + \frac{du_1}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right]\tag{5.57}$$

A deformação axial finita, referida à configuração de referência, é:

$$\varepsilon = \frac{a'b' - ab}{dx} = \frac{a'b'}{dx} - 1 \quad (5.58)$$

Substituindo a equação 5.57 na equação 5.58, resulta:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \quad (5.59a)$$

E a correspondente deformação virtual é:

$$\delta\varepsilon = \delta \frac{du}{dx} + \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \quad (5.59b)$$

Conseqüentemente, o trabalho virtual interno do elemento resulta em:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_V \sigma_1 \delta\varepsilon dV \quad (5.60)$$

Substituindo a equação 5.59b na equação 5.60 e usando $\delta \left(\frac{du}{dx} \right) = \frac{d\delta u}{dx}$ no primeiro termo (relação válida para deslocamentos infinitesimais) e integrando ao longo do comprimento do membro, temos que:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \sigma_1 A \left(\frac{d\delta u_1}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_1 A \left[\delta \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (5.61)$$

Usando a relação tensão – deformação linear $\sigma_1 = \frac{du_1}{dx} E$ na primeira integral e fazendo $\sigma_1 A = P$, onde $P = P_{li} = P_{lj}$, na segunda, obtemos:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \frac{du_1}{dx} EA \left(\frac{d\delta u_1}{dx} \right) dx + \frac{1}{2} P \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (5.62)$$

Usando os campos de deslocamentos $u = (u_1, u_2, u_3)$ e as funções de forma correspondentes, temos :

$$u_1 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{1i} \\ u_{1j} \end{Bmatrix} \quad (5.63) \quad N'_{u1} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

$$u_2 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{2i} \\ u_{2j} \end{Bmatrix} \quad (5.65) \quad N'_{u2} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (5.66)$$

$$u_3 = \begin{bmatrix} 1 - \frac{x}{L} & \frac{x}{L} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} u_{3i} \\ u_{3j} \end{Bmatrix} \quad (5.67) \quad N'_{u3} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{bmatrix} \quad (5.68)$$

Estas funções de forma são as mesmas usadas para o campo de deslocamentos virtuais. Da primeira integral resulta a matriz de rigidez elástica e da segunda a matriz de rigidez geométrica:

$$\delta W_{\text{int } e} = \int_0^L \frac{du_1}{dx} EA \left(\frac{d\delta u_1}{dx} \right) dx \quad (5.69)$$

$$[k_e] = EA \int_0^L [N'_{u1}] [N'_{u1}] dx \quad (5.70)$$

Usando a equação 5.64 na equação 5.70:

$$u_{1i} \quad u_{1j}$$

$$[k_e] = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.71)$$

O operador virtual δ pode ser tratado como operador diferencial (BATHE K.J., 1996) referido às variáveis du_1/dx , du_2/dx e du_3/dx , assim o trabalho virtual interno para a segunda integral pode ser escrito como:

$$\delta W_{\text{int } g} = P \int_0^L \left[\frac{d\delta u_1}{dx} \frac{du_1}{dx} + \frac{d\delta u_2}{dx} \frac{du_2}{dx} + \frac{d\delta u_3}{dx} \frac{du_3}{dx} \right] dx \quad (5.72)$$

Usando a equação 5.9 e as funções de forma das equações 5.10 e 5.11 do item 5.2.2, tanto para o deslocamento u_1 quanto para os deslocamentos u_2 e u_3 , temos que:

$$[\mathbf{k}_g] = P \int_0^L \left[\{N'_{u1}\} \{N'_{u1}\} + \{N'_{u2}\} \{N'_{u2}\} + \{N'_{u3}\} \{N'_{u3}\} \right] dx \quad (5.73)$$

Substituindo as equações 5.64, 5.66 e 5.68 na equação 5.73, obtemos:

$$[\mathbf{k}_g] = \frac{P}{2} \begin{matrix} u_{1i} & u_{2i} & u_{3i} & u_{1j} & u_{2j} & u_{3j} \\ \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \end{matrix} \quad (5.74)$$

Assim, observa-se que a matriz de rigidez geométrica é a função da força axial atuante no elemento na configuração de referência.

B) Interação de momento fletor e força Axial

Para incluir os efeitos da flexão nos planos 1-2 e 1-3 nas matrizes de rigidez elástica e geométrica, a deformação, devida à flexão, figura 5.6, deve ser adicionada na equação 5.59a.

Figura 5.6 – Flexão do elemento no espaço em torno ao eixo 3(z).

A deformação total finita e a correspondente deformação virtual, nesse caso, resultam em:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} - y \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) - z \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \quad (5.75a)$$

$$\delta \varepsilon = \delta \frac{du}{dx} - y \left(\delta \frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) - z \left(\delta \frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) + \frac{1}{2} \left[\delta \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] \quad (5.75b)$$

Substituindo a equação 5.75b na equação 5.60 e, notando que :

$$\sigma_{x,3} = -y \frac{M_3}{I_3} \quad (5.76)$$

$$\sigma_{x,2} = -z \frac{M_2}{I_2} \quad (5.77)$$

$$\int_A y^2 dA = I_3 \quad (5.78)$$

$$\int_A z^2 dA = I_2 \quad (5.79)$$

$$\delta \left(\frac{d^2 u_2}{dx^2} \right) = \frac{d^2 \delta u_2}{dx^2} \quad (5.80)$$

$$\delta \left(\frac{d^2 u_3}{dx^2} \right) = \frac{d^2 \delta u_3}{dx^2} \quad (5.81)$$

Onde :

$\sigma_{x,2}$: Tensão normal na direção 1, devido aos momentos fletores na direção 2;

$\sigma_{x,3}$: Tensão normal na direção 1, devido aos momentos fletores na direção 3;

I_2 : Momento de Inércia em torno do eixo 2;

I_3 : Momento de Inércia em torno do eixo 3.

Em lugar da equação 5.61, obtemos:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^L \sigma_1 A \left(\frac{d \delta u_1}{dx} \right) dx + \int_0^L M_3 \left(\frac{d^2 \delta u_2}{dx^2} \right) dx + \int_0^L M_2 \left(\frac{d^2 \delta u_3}{dx^2} \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^L \sigma_1 A \left[\delta \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] dx \quad (5.82)$$

Usando as relações elásticas $\sigma_1 = \frac{du_1}{dx} E$ para deformação axial e $M_3 = EI_3 \frac{d^2 u_2}{dx^2}$,

$M_2 = EI_2 \frac{d^2 u_3}{dx^2}$ para flexão, a equação 5.82 resulta em:

$$\begin{aligned} \delta W_{\text{int}} = & \int_0^L \frac{du_1}{dx} EA \left(\frac{d \delta u_1}{dx} \right) dx + \int_0^L \frac{d^2 u_2}{dx^2} EI_3 \left(\frac{d^2 \delta u_2}{dx^2} \right) dx + \int_0^L \frac{d^2 u_3}{dx^2} EI_2 \left(\frac{d^2 \delta u_3}{dx^2} \right) dx \\ & + \frac{1}{2} P_{1j} \int_0^L \left[\delta \left(\frac{du_1}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_2}{dx} \right)^2 + \delta \left(\frac{du_3}{dx} \right)^2 \right] dx \end{aligned} \quad (5.83)$$

A primeira integral foi resolvida no item anterior, equação 5.71, a segunda e terceira integrais correspondem à matriz de rigidez elástica da flexão oblíqua. Substituindo as equações 5.36, 5.42 na segunda integral e as equações 5.37b e 5.43 na terceira e montando uma matriz só com os termos obtidos, resulta a matriz de rigidez elástica, equação 5.85.

$$\begin{matrix}
 & u_{1i} & u_{2i} & u_{3i} & \theta_{2i} & \theta_{3i} & u_{1j} & u_{2j} & u_{3j} & \theta_{2j} & \theta_{3j} \\
 [k_e] = E & \left[\begin{array}{cccccccccc}
 \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & \frac{12I_3}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6I_3}{L^2} & 0 & -\frac{12I_3}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_3}{L^2} \\
 & & \frac{12I_2}{L^3} & -\frac{6I_2}{L^2} & 0 & 0 & 0 & -\frac{12I_2}{L^3} & -\frac{6I_2}{L^2} & 0 & 0 \\
 & & & \frac{4I_2}{L} & 0 & 0 & 0 & \frac{6I_2}{L^2} & \frac{2I_2}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & \frac{4I_3}{L} & 0 & -\frac{6I_3}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2I_3}{L} \\
 & & & & & \frac{A}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & & & & & & \frac{12I_3}{L^3} & 0 & 0 & -\frac{6I_3}{L^2} & 0 \\
 & & \text{Sim} & & & & & \frac{12I_2}{L^3} & \frac{6I_3}{L^2} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & \frac{4I_2}{L} & 0 & 0 \\
 & & & & & & & & & \frac{4I_3}{L} & 0
 \end{array} \right]
 \end{matrix} \quad (5.84)$$

A reavaliação da terceira integral, usando as derivadas das funções de forma da flexão oblíqua composta para os campos de deslocamento u_1 , u_2 e u_3 das equações 5.31, 5.35 e 5.37a, fornecerá a matriz de rigidez geométrica para o elemento barra no espaço, equação 5.85.

$$\begin{matrix}
u_{1i} & u_{2i} & u_{3i} & \theta_{2i} & \theta_{3i} & u_{1j} & u_{2j} & u_{3j} & \theta_{2j} & \theta_{3j} \\
\left[\mathbf{k}_g \right] = \frac{P_{1j}}{L} \begin{bmatrix}
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& \frac{6}{5} & 0 & 0 & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & 0 & 0 & \frac{L}{10} \\
& & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 \\
& & & \frac{2L^2}{15} & 0 & 0 & 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 \\
& & & & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & 0 & 0 & -\frac{L^2}{30} \\
& & & & & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
& & & & & & \frac{6}{5} & 0 & 0 & -\frac{L}{10} \\
& & & & & & & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 \\
& & & Sim & & & & & \frac{2L^2}{15} & 0 \\
& & & & & & & & & \frac{2L^2}{15}
\end{bmatrix}
\end{matrix} \quad (5.85)$$

$$[R] = \begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 & 0 & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cos\phi & \sin\phi \\ 0 & 0 & 0 & -\sin\phi & \cos\phi \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

A matriz de rigidez do sistema completo está definida pelo equilíbrio das forças nodais, e é montada simplesmente pela superposição de todas as matrizes de rigidez dos diferentes elementos.

5.3. Análise Estrutural não-linear

O método usado para análise não-linear da estrutura integra a análise elástica de segunda ordem e a análise não linear da seção transversal executada pelo programa ANLST. (resposta física não-linear dos materiais).

Para considerar os efeitos do comportamento não-linear do material na resposta do sistema estrutural, consideram-se as rigidezes secantes como equivalentes às rigidezes elásticas usadas na análise elástica de segunda ordem. Essas rigidezes secantes $EI_{x \text{ sec}}$ e $EI_{y \text{ sec}}$ são determinadas pelo procedimento discutido no capítulo 3, com o programa ANLST, lembrando que cada par de rigidezes equivalentes corresponde a um estado de esforços solicitantes (N_s , M_{xs} , M_{ys}) diferente.

O processo inicia-se com a introdução das rigidezes elásticas lineares para cada elemento barra do modelo, EI_x e EI_y . Executa-se uma primeira análise para determinar os esforços solicitantes. Esses resultados são usados no programa ANLST para obter as rigidezes equivalentes, que serão utilizadas na próxima iteração. Desse modo, as novas rigidezes reduzidas dos elementos são introduzidas no modelo, resultando uma estrutura mais flexível, que ante as mesmas solicitações responderá com maiores deslocamentos, o que permitira às solicitações normais incrementar os esforços fletores devido ao efeito $P-\Delta$. Esse processo iterativo continua até que o critério de convergência nas rigidezes, EI_i / EI_{i-1} maior ou igual a 0.999, seja alcançado em todos os elementos para a flexão em torno dos eixos 1 e 2.

Observa-se que nesse procedimento se despreza, como usualmente, o efeito da torção sobre a perda de rigidez da peça de concreto. Esse efeito existe, mas em geral é pequeno.

Esse processo de análise não-linear, que considera os efeitos da mudança da geometria da estrutura e o comportamento não-linear do material, é mostrado na figura 5.6.

Figura 5.7 – Método de Análise considerando o comportamento não linear da rigidez à flexão de barras de concreto estrutural e deslocamentos finitos do sistema estrutural.

6 EXEMPLOS

6.1. Exemplos para validação do método

Nos dois exemplos seguintes de estruturas planas se valida o método apresentado neste trabalho, comparando os resultados obtidos com os exemplos da dissertação de KAEFER.

6.1.1. Exemplo 1 – Coluna engastada

Coluna Engastada na base e livre no topo, de 4 m de altura e de seção transversal constante. A seção transversal é de concreto armado e as propriedades mecânicas mostram-se na figura 6.1.

Figura 6.1 – Coluna engastada.

A análise elástica de segunda ordem desta coluna executou-se no programa SAP2000 discretizando-la em elementos barra de 0,4 metros. O diagrama de interação Momento-normal correspondente à seção transversal se mostra na figura 6.2.

Figura 6.2 – Relações M-N para varias curvaturas da seção transversal e Diagrama de Interação M-N.

A partir dessas relações pode-se montar a relação momento curvatura da seção para a força Normal Solicitante $N = 1280$ kN, os valores das curvas são apresentados na tabela 6.1 e traçados na figura 6.4.

Tabela 6.1- Comparação dos valores de momento para curvatura dada, entre Kaefer e esta Dissertação.

Curvatura	Momento Fletor (kN-m)	
	Kaefer	Dissertação
0,0000	0,00	0,00
0,0025	122,54	102,20
0,0050	195,87	182,60
0,0075	252,71	241,90
0,0100	302,70	293,57
0,0125	343,72	328,47
0,0150	352,55	359,45

Figura 6.3– Relação Momento curvatura da seção para força normal solicitante de 1280 kN

Os resultados do processo iterativo se mostram na tabela 6.2 e 6.3 cujos elementos estão referidos à Figura 6.5

Figura 6.4 - Coluna discretizada em 10 elementos

Tabela 6.2 – Resultados do exemplo Coluna Kaefer.

Iteração	0			1		
Elemento	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_1	Convergência $EI_1 / EI_{elastica}$	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_2	Convergência EI_2 / EI_1
10	13,61	61325,66	0,8944	15,94	56220,06	0,8199
9	40,79	43370,84	0,6325	47,74	42464,53	0,6193
8	67,85	41469,33	0,6048	79,33	41212,72	0,6011
7	94,71	40969,41	0,5975	110,53	40467,94	0,5902
6	121,29	40030,89	0,5838	141,18	39414,85	0,5748
5	147,52	39234,08	0,5722	171,12	37246,44	0,5432
4	173,31	37097,99	0,5410	200,15	35068,72	0,5114
3	198,58	35183,68	0,5131	228,08	33109,05	0,4829
2	223,27	33441,92	0,4877	254,69	31434,17	0,4584
1	247,29	31895,11	0,4652	279,73	30039,50	0,4381
Deslocamento horizontal do topo (cm) :			a = 2,07		a = 4,63	

Tabela 6.3 – Resultados do exemplo Coluna Kaefer (continuação).

Iteração	2			3		
Elemento	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_3	Convergência EI_3 / EI_2	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_4	Convergência EI_4 / EI_3
10	16,24	55719,51	0,9086	16,27	55670,95	0,9991
9	48,64	42368,38	0,9769	48,75	42356,90	0,9997
8	80,81	41185,14	0,9931	80,99	41181,85	0,9999
7	112,58	40377,46	0,9856	112,84	40366,24	0,9997
6	143,78	39348,08	0,9829	144,11	39339,79	0,9998
5	174,24	37036,42	0,9440	174,63	37010,86	0,9993
4	203,74	34815,19	0,9385	204,19	34784,30	0,9991
3	232,04	32850,03	0,9337	232,54	32818,23	0,9990
2	258,91	31188,67	0,9326	259,44	31158,67	0,9990
1	284,09	29814,05	0,9348	284,65	29785,83	0,9991
			a = 4,97			a = 5,01

A comparação dos momentos fletores de primeira ordem e de segunda ordem se mostram na figura 6.6

Figura 6.5 – Momentos fletores de primeira ordem e totais.

O deslocamento horizontal do topo do pilar calculado resulta 5,01 cm e o calculado por Kaefer é 4,50 cm, a diferença se deve à hipótese adotada neste trabalho de resistência de rigidez à tração nula do concreto, o que faz que no modelo as peças se assumam menos rígidas.

6.1.2. Exemplo 2 – Pórtico

O pórtico, as cargas e sua de seção transversal constante para os dois pilares e para a viga são mostrados na figura 6.7. O pórtico foi modelado com 4 elementos barra para cada pilar e 8 elementos para a viga.

As relações Momento Normal para varias curvaturas, o diagrama de Interação e a relação momento curvatura para a força axial solicitante, da seção do pilar, são os mesmos do exemplo anterior, figuras 6.3 e 6.4, e os correspondentes à viga se apresentam na figura 6.7 e 6.8.

Figura 6.6 - Pórtico de concreto armado e seções transversais dos pilares e da viga

Figura 6.7 – Relações momento-Normal e Diagrama de Interação

Figura 6.8– Relação momento – curvatura para a viga do pórtico.

Este gráfico corresponde aos valores na tabela 6.4.

Tabela 6.4- Comparação dos valores de momento para curvatura dada, entre Kaefer e esta Dissertação. Viga do pórtico.

Curvatura	Dissertação	Kaefer
0,00000	0	0
0,00167	---	119,24
0,00161	114,297	---
0,00321	227,166	---
0,00333	---	236,46
0,00500	---	351,54
0,00562	372,1415	---
0,00667	372,1415	360,15
0,00833	372,1415	362,52
0,01000	372,1415	364,36
0,01167	372,1415	365,57
0,01333	372,1415	366,4
0,01500	372,1415	367,15
0,01667	372,1415	367,69
0,01833	372,1415	368,15
0,02000	372,1415	368,47
0,02090	372,1415	368,67
0,02299	372,1415	368,67

Figura 6.9 – Elementos do modelo do pórtico.

Os resultados da análise se apresentam na tabela 6.5 e 6.6. Os valores do momento fletor nestas tabelas correspondem à seção localizada na metade do comprimento de cada elemento a diferença dos resultados apresentados em forma gráfica nas figuras 6.10 e 6.11 onde se mostram os valores dos extremos dos elementos.

Tabela 6.5 – Resultados da análise do pórtico.

Elemento	0			1			2		
	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_1	Convergência $EI_1 / EI_{elastica}$	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_2	Convergência EI_2 / EI_1	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente EI_3	Convergência EI_3 / EI_2
5	212,50	70727,46	0,2593	238,63	70604,92	0,9983	240,24	70595,78	0,9999
6	151,78	70977,82	0,2602	170,46	70931,05	0,9993	171,62	70926,06	0,9999
7	91,06	71050,64	0,2605	102,3	71087,11	1,0000	102,99	71089,10	1,0000
8	30,33	70891,67	0,2599	34,13	70881,61	0,9999	34,37	70881,10	1,0000
9	-30,39	70891,67	0,2599	-34,04	70881,61	0,9999	-34,26	70881,10	1,0000
10	-91,11	71050,64	0,2605	-102,2	71087,11	1,0000	-102,88	71089,10	1,0000
11	-151,83	70977,82	0,2602	-170,37	70931,05	0,9993	-171,5	70926,06	0,9999
12	-212,56	70727,46	0,2593	-238,53	70604,92	0,9983	-240,13	70595,78	0,9999

Tabela 6.6 – Resultados da análise do pórtico. (continuação).

Elemento	0			1			2		
	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente $EI_1 (kN.m^2)$	Convergência $EI_1 / EI_{elastica}$	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente $EI_2 (kN.m^2)$	Convergência EI_2 / EI_1	Momento Fletor kN-m	Rigidez equivalente $EI_3 (kN.m^2)$	Convergência EI_3 / EI_2
1	-213,60	34179,28	0,4230	-241,1	32303,07	0,9451	-242,79	32256,28	0,9986
2	-153,91	38613,76	0,4778	-175,35	36964,06	0,9573	-176,73	36905,75	0,9984
3	-92,91	40993,60	0,5073	-106,44	40660,23	0,9919	-107,31	40617,94	0,9990
4	-31,13	45437,95	0,5623	-35,75	44286,15	0,9747	-36,04	44225,37	0,9986
13	-213,60	34179,28	0,4230	-241,12	32303,07	0,9451	-242,85	32266,28	0,9989
14	-154,09	38613,76	0,4778	-175,88	36964,06	0,9573	-177,28	36895,75	0,9982
15	-93,09	40993,60	0,5073	-106,95	40660,23	0,9919	-107,84	40617,94	0,9990
16	-31,20	45437,95	0,5623	-35,95	44286,15	0,9747	-36,25	44225,37	0,9986
Deslocamento horizontal do topo (cm) : a = 1,22				a = 3,55			a = 3,69		

O deslocamento horizontal calculado por Kaefer é 3.45 cm e no trabalho 3.69 cm, mostrando diferença razoável.

Figura 6.10 - Momentos fletores de primeira ordem.

Figura 6.11 - Momentos fletores totais.

Nos dois exemplos anteriores, os deslocamentos obtidos com o procedimento desta dissertação, resultam maiores o que mostra um comportamento mais flexível dos modelos. Isto deve-se a que no trabalho de Kaefer, a relação tensão-deformação do concreto considera a resistência à tração. Deste modo, as relações momento-curvatura, resultam mais rígidas, como pode observar-se nas figuras 6.3 e 6.8.

Observar que ter estabilidade da estrutura, inclusive para esforços horizontais transversais o tabuleiro é contínuo ao longo de todo o comprimento. Assim, as duas articulações mostradas na figura 6.13 existem apenas no plano vertical. Isso foi possível criando uma articulação Freyssinet, nesses dois pontos, ao longo de toda a largura da laje associada a aparelhos de apoio metálicos deslizantes na longitudinal.

Figura 6.14– Vista Frontal do sistema estrutural

Carregamentos

Usou-se a combinação de cálculo para ELU em situação normal, considerando o vento como ação variável principal:

$$F_d = 1,35 \cdot F_{G,k} + 0,6 \cdot 1,5 \cdot F_{Q1,k} + 1,4 \cdot F_{Q2,k}$$

Onde:

F_d : Valor de cálculo das ações para combinação ultima

F_{gk} : Ação Permanente direta

F_{q1k} : Ação variável direta principal

F_{qk} : Ação Variável direta

Os carregamentos se aplicaram na estrutura conforme a tabela 6.7. e a disposição deles se mostram nas figuras 6.16, 6.17 e 6.18.

Tabela 6.7– Intensidade dos carregamentos na passarela

Elemento	Peso Proprio Direção Z (kN/m)	Variável Direção Z (kN/m)	Vento	
			Direção X (kN/m)	Direção Y (kN/m)
Mastros	-13,00	0,00	0,71	1,94
Estais	-0,60	0,00	0,14	0,14
Transversinas	-54,21	0,00	0,00	0,00
Tabuleiro	-24,31	-11,82	0,00	1,37

Figura 6.15 - Carga permanente

Figura 6.16 – Carga Variável

Figura 6.17 – Carga de Vento.

As seções transversais dos membros estruturais e suas propriedades são apresentadas a seguir.

Mastros

Concreto:

$$f_{ck} = 40 \text{ MPa}$$

$$E = 0,85 \times 5600 \times \sqrt{40} = 30.105 \text{ MPa}$$

$$A = 0,52 \text{ m}^2$$

$$I_{33} = 0,0461 \text{ m}^4$$

$$I_{22} = 0,0103 \text{ m}^4$$

Aço Passivo:

$$26 \phi 8,04 \text{ cm}^2$$

$$f_{yk} = 500 \text{ MPa}$$

$$E = 200\,000 \text{ MPa}$$

Figura 6.18 - Seção Transversal do Mastro

Tabuleiro

<i>Concreto</i>	$: f_{ck} = 25 \text{ MPa}$	$E = 0,85 \times 5600 \times \sqrt{25} = 23.800 \text{ MPa}$
-----------------	-----------------------------	--

<i>Aço Passivo</i>	$: f_{yk} = 500 \text{ MPa}$	$E = 200\,000 \text{ MPa}$	$42 \phi 0,312 \text{ cm}^2$
--------------------	------------------------------	----------------------------	------------------------------

<i>Aço Ativo</i>	$: f_{pyk} = 1900 \text{ MPa}$	$E = 195\,000 \text{ MPa}$	$4 \phi 7,6 \text{ cm}^2$
------------------	--------------------------------	----------------------------	---------------------------

<i>Fibra de Carbono</i>	$: \epsilon_{ut} = -0,02$	$\epsilon_{uc} = 0,02$	$E_{fc} = 223668 \text{ MPa}$
-------------------------	---------------------------	------------------------	-------------------------------

<i>Prop. Geométric.</i>	$: A = 0,7085 \text{ m}^2$	$I_{22} = 0,1777 \text{ m}^4$	$I_{33} = 0,0693 \text{ m}^4$
-------------------------	----------------------------	-------------------------------	-------------------------------

Figura 6.19 – Seção Transversal do Tabuleiro.

Barras Tirante

$$E = 195\,000 \text{ MPa}$$

Figura 6.20 – Seção Transversal das barras tirante.

RESULTADOS

Flexão Longitudinal

Tabuleiro

Figura 6.21 - Momentos fletores longitudinais no tabuleiro

Na seção crítica do tabuleiro (no meio do vão), existe um incremento de 2% do momento fletor total em relação ao momento calculado por análise elástica de primeira ordem. Esta baixa variação entre momentos fletores deve-se à grande rigidez do tabuleiro ocasionada pela protensão e por outro lado porque a força axial solicitante do tabuleiro é pequena, ocasionando momentos de segunda ordem também pequenos.

Pilão – Coluna direita

Análise Elástica de Primeira Ordem

Análise Elástica de Segunda Ordem

Análise de segunda ordem considerando o comportamento não linear do material.

Figura 6.22 - Momentos fletores longitudinais no pilão – Coluna direita.

Pilão – Coluna esquerda

Análise Elástica de Primeira Ordem

Análise Elástica de Segunda Ordem

Análise de segunda ordem considerando o comportamento não linear do material.

Figura 6.23 - Momentos fletores longitudinais no pilão – Coluna esquerda.

Flexão Transversal - Pilão

Análise Elástica de Primeira Ordem

Análise Elástica de Segunda Ordem

Análise de segunda ordem considerando o comportamento não linear do material

Figura 6.24 - Momentos fletores no pilão – flexão transversal.

Tanto na flexão longitudinal quanto na flexão transversal do pilão, observa-se um incremento de momento fletor na base (seção mais solicitada) de 14%. Neste caso, uma análise elástica de primeira ordem não forneceu uma aproximação suficiente para calcular esforços solicitantes. Esse grande incremento de momentos de segunda ordem observado deve-se ao fato das colunas do pilão serem esbeltas; que os grandes momentos fletores solicitantes nas seções do pilão embaixo do tabuleiro ocasionam a diminuição da rigidez equivalente dessas seções; e também contribui nesse incremento a parcela da solicitação axial elevada que produz momentos de segunda ordem maiores.

A seguir apresentam-se os deslocamentos calculados nas 3 análises dos nós A, B, C, D e E, mostrados na figura 6.25. O valores desses deslocamentos são apresentados na tabela 6.8.

Deslocamentos

Figura 6.25 - Deformada da passarela.

Tabela 6.8– Valores dos deslocamentos.

			Análise Elástica		Análise não linear
			1ra Ordem	2da Ordem	
TABULEIRO					
Extremo inicial (A) :	U1	m	0,0003	0,0004	0,0004
	U2	m	0,0725	0,0623	0,0886
	U3	m	0,1687	0,1832	0,3288
Meio do vão (C) :	U1	m	-0,0006	-0,0001	-0,00004
	U2	m	0,0621	0,0555	0,0777
	U3	m	-0,0454	-0,0453	-0,0504
Extremo final (B) :	U1	m	-0,0005	-0,0005	-0,0005
	U2	m	0,0647	0,0734	0,0891
	U3	m	-0,2196	-0,2342	-0,3791
PILÃO					
Extremo superior					
Mastro direito (D) :	U1	m	0,2319	0,2494	0,4245
	U2	m	0,1412	0,1578	0,1922
	U3	m	-0,0021	-0,0021	-0,0021
Mastro esquerdo (E) :	U1	m	0,2317	0,2494	0,4246
	U2	m	0,1412	0,1578	0,1922
	U3	m	-0,0023	-0,0023	-0,0024

U1, *U2* e *U3* são os deslocamentos nas direções x, y, z do sistema de referencia global da estrutura mostrado na figura 6.25.

7 CONCLUSÕES

- O sistema estrutural de ponte estaiada tem evoluído rapidamente nos últimos 47 anos desde vão de 81 m até 890 m. Atualmente, pontes estaiadas de múltiplos vãos, contam com tabuleiros suspensos de 2252 m de comprimento (Ponte Rion Antirion), e 2460 m (Viaduto de Millau), dimensões que se conseguem, em parte, pela leveza das suas peças estruturais, ficando assim esbeltas e sensíveis aos efeitos de segunda ordem.
- Qualquer arranjo estrutural de ponte estaiada consta de 3 elementos: pilão, sistema de suspensão por estais e tabuleiro. Cada elemento isolado apresenta comportamento não-linear: os estais com comportamento não-linear geométrico pelo fenômeno da catenária, os pilões e o tabuleiro por serem peças esbeltas submetidas a grandes forças de compressão apresentam efeitos de segunda ordem consideráveis, nos quais a mudança na rigidez da seção transversal, segundo as solicitações, também deve ser considerada. Desse modo, o sistema estrutural de ponte estaiada é bastante não-linear.
- A resposta não-linear da estrutura como um todo depende também das relações tensão-deformação uniaxiais dos materiais que compõem a seção transversal de concreto, porque elas produzem um efeito direto na rigidez à flexão.
- O programa ANLST, produzido nesta dissertação, permite obter as relações Momento-Normal-curvatura na flexão oblíqua composta para qualquer seção transversal de concreto, porém os resultados são válidos só para os casos que se incluíam nas hipóteses estabelecidas. Deve-se verificar esse aspecto para cada seção transversal em estudo.
- As seis seções transversais colocadas como exemplo nos capítulos 3 e 6, apresentam queda considerável da rigidez à flexão em relação à rigidez da seção bruta entre 1/5 até 1/8. Esses exemplos também confirmaram que quanto maior for o momento fletor solicitante a perda de rigidez aumenta.

- O comportamento geométrico não-linear do estai pode ser considerado nas análises de modo simplificado, sem perder a coerência com o comportamento físico. Com o uso do módulo de elasticidade secante E_f , o estai pode ser analisado como um elemento barra de treliça.
- Quando se consideram deslocamentos finitos, o que acontece em estruturas flexíveis, como as analisadas nos exemplos, é que os esforços solicitantes influem na rigidez do sistema estrutural, mesmo sem considerar o comportamento não-linear do material, o que é mostrado pela matriz de rigidez geométrica do elemento barra, que é função do esforço axial solicitante.
- Podem existir casos em que a rigidez à flexão, (como observado nas regiões próximas aos topos das colunas do pilão da passarela do exemplo onde o esforço de compressão é grande e os momentos fletores pequenos), resulte maior do que a rigidez da seção bruta quando se considera o comportamento não-linear da seção transversal.
- De fato, apesar de ter um índice de esbeltez de 149, o pilão não apresenta efeitos de segunda ordem tão grandes e nem se aproxima da instabilidade devido ao efeito estabilizador dos estais. Os incrementos dos momentos fletores solicitantes de segunda ordem, com respeito aos de primeira ordem de 14% na flexão longitudinal e de 9% na flexão transversal na base das colunas do pilão, mostra que para estruturas esbeltas esses efeitos devem ser considerados na análise, mas que eles são muito menores do que seriam se o pilão estivesse em balanço e não estaiado.

Com respeito a trabalhos futuros:

- A capacidade do programa ANLST pode ser ampliada de maneira que considere um escopo maior de relações-tensão deformação do concreto, como a que considera a contribuição do aço entre fissuras, a do concreto confinado e a fluência do concreto. Expandi-lo, também, para que admita mais um polígono na seção transversal, que serviria para modelar o concreto confinado ou perfis de aço estrutural, que lhe daria a capacidade de obter as relações momento-normal-curvatura na flexão oblíqua composta para seções mistas.

-
- O método de análise estrutural não-linear apresentado considera somente as não-linearidades decorrentes dos efeitos dos esforços quando a estrutura sofre deslocamentos finitos e os efeitos das relações tensão-deformação não-lineares dos materiais da seção transversal. As outras fontes de resposta não-linear, como a fluência do concreto, a consideração de deformações e rotações finitas, podem ser incluídas no método em trabalhos posteriores, porém esses últimos têm importância prática muito menor.

REFERÊNCIAS

AGRAWAL, T. P. Cable-stayed bridges: parametric study. **Journal of bridge Engineering**, New York, v. 2, n. 2, p. 61-67, May 1997.

AL-KHAFAJI, A W; TOOLEY, J. R. **Numerical methods in engineering practice**. New York: John Wiley, 1982. 756 p.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. New York: Prentice Hall, 1996. 460 p.

BUCHAIM, R. **Efeitos de segunda ordem e estado limite último de instabilidade em pilares de concreto**. 1979. 81 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1979.

CHAPRA, S. C.; CANALE, R. P. **Numerical methods for engineers**. New York: McGraw-Hill, 2006. 142 p.

CHEN, W. F.; DUAN, W. L. **Bridge engineering handbook**. New York: CRC Press, 1999. 2 v.

COMPUTERS AND STRUCTURES, INC. **CSI Analysis Reference Manual for SAP 2000, ETABS, and SAFE**. Berkeley, California, USA. 2005 415 p.

DE SÁLES, J. J. et al. **Sistemas estruturais**. São Carlos: EESC/USP, 2005. 266 p.

EGT ENGENHARIA, **Parecer técnico acerca das passarelas nos Km 19+387 e 19+109 da Rodovia dos Bandeirantes**. São Paulo, 2006. 65 p.

FAFITIS, A; FELLOW. Interaction surfaces of reinforced concrete sections in biaxial bending. **Journal of Structural Engineering**, New York, v. 127, n. 7, p. 840-846, Jul. 2001.

FORNI, F. E. Flexão oblíqua composta no concreto armado – Seções quaisquer. 1975. 1 v. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1975.

FRANÇA, R. L. e S. **Relações momento-curvatura em peças de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta.** 1984. 1 v. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

KAEFER, L. F. **Desenvolvimento de uma ferramenta gráfica para análise de pórticos de concreto armado.** 2000. 158 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

MARCOTTI, P. **Instabilidade na flexão composta oblíqua de pilares de concreto armado.** 1984. 133 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1984.

MARON, M. J. **Numerical analysis: a practical approach.** New York: McGraw-Hill, 1989. 584 p.

McGUIRE, W.; GALLAGHER, R. H.; ZIEMIAN, R. D. **Matrix structural analysis.** 2nd ed. New York: Wiley, 2000. xx, 460 p.

NAZMY-GHAFFAR, A. M.; NAZMY, A. S. Three-dimensional nonlinear static analysis of cable-stayed bridges. **Computers & Structures**, New York, v. 34, n. 2, p. 257-271, Fev. 1989.

NILSON, A. H. **Diseño de estructuras de concreto.** Santiago de Chile: McGraw-Hill, 1997. 722 p.

RODRIGUEZ, A; ARISTIZABAL, J. Biaxial interaction diagrams for short RC columns of any cross section. **Journal of Structural Engineering**, New York, v. 125, n. 6, p. 672-683, Jun. 1999.

SANTOS, L. M. **Estado limite último de instabilidade.** São Paulo: EPUSP/PEF, 1987. 110 p. (Relatório técnico. Monografia do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, M-03/87).

_____. **Sub-rotinas básicas do dimensionamento de concreto armado.** São Paulo: Thot, 1993. 450 p.

SEIF, S. P.; DILGER, W. H. Nonlinear analysis and collapse load of P/C cable-stayed bridges. **Journal of Structural Engineering**, New York, v. 116, n. 3, Mar. 1990.

STEIN, S. K.; BARCILLOS, A. **Cálculo y geometría analítica**. Santafé de Bogotá: McGraw-Hill, 1996. v. 2, 846p.

TORNERI, P. **Comportamento estrutural de pontes estaiadas**: comparação de alternativas. 2002. 272 f. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

VIRLOGEUX, M. Recent evolution of cable-stayed bridges. **Engineering Structures**, Oxford, v. 21, n. 8, p. 737-755, Aug. 1999.

WALTHER, R. et al. **Cable stayed bridges**. Lausanne: Presses Polytechniques, 1999. 225 p.

WEI-XIN REN. Ultimate behavior of long-span cable-stayed bridges. **Journal of Bridge Engineering**, New York, v. 4, n.1, p. 30-37, Fev. 1999.