NICHOLAS CARBONE

**DESENVOLVIMENTO DE UM NOVO ALGORITMO PARA ANÁLISE
VISCOPLÁSTICA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

SÃO PAULO

2007

NICHOLAS CARBONE

**DESENVOLVIMENTO DE UM NOVO ALGORITMO PARA ANÁLISE
VISCOPLÁSTICA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada a Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia

SÃO PAULO
2007

NICHOLAS CARBONE

**DESENVOLVIMENTO DE UM NOVO ALGORITMO PARA ANÁLISE
VISCOPLÁSTICA COM O MÉTODO DOS ELEMENTOS DE CONTORNO**

Dissertação apresentada a Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia

Área de Concentração: Engenharia de
Estruturas

Orientador: Prof. Doutor Marcos Aurélio
Marques Noronha

SÃO PAULO

2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo 27 de agosto de 2007.

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

FICHA CATALOGRÁFICA

Carbone, Nicholas

Desenvolvimento de um novo algoritmo para análise viscoplástica com o método dos elementos de contorno / Nicholas Carbone. -- São Paulo, 2007.

100 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Método dos elementos de contorno 2. Análise não linear 3. Viscoplasticidade I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II. t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a DEUS, meu amado companheiro e Pai, que me cingiu de força e animo nos momentos mais difíceis deste trabalho e colocou em minha vida pessoas tão especiais com minha esposa Nani e minha filha Luiza.

A minha querida esposa Nani pela paciência, compreensão, dedicação e apoio a este trabalho.

A minha linda filha Luiza pela alegria contagiante e pelo estímulo de sempre seguir em frente.

A minha Mãe que me proporcionou, no árduo começo deste trabalho, sua agradável companhia e apoio.

Ao meu Pai pelo incentivo e ensinamentos matemáticos passados ainda no ensino fundamenta.

Ao meu orientador, Prof. Marcos Noronha pela grande atenção, confiança no trabalho, paciência, dedicação e, sobretudo pela grande amizade.

Aos colegas Muller e Calebe pelo companheirismo, amizade e por toda ajuda no desenvolvimento deste trabalho.

A Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e ao departamento de Estruturas e Geotécnica pelo suporte.

“Eu sou a videira verdadeira, e meu Pai é o Agricultor.
Todo ramo que, estando em mim não der fruto, ele o corta; e todo aquele que da fruto limpa, para que produza mais fruto ainda.
Vós já estais limpo pelas palavras que vos tenho falado;
Permanecei em mim, e eu permanecerei em vós. Como o pode o ramo produzir fruto de si mesmo, se não permanecer na videira, assim, nem vós o podeis dar, se não permanecerdes em mim.
Eu sou a videira, vós, os ramos. Quem permanece em mim, e eu, nele, esse dá muito fruto; porque sem mim nada podeis fazer.
Se alguém não permanecer em mim, será lançado fora, à semelhança do ramo, e secará; e o apanham, lançam no fogo e o queimam.
Se permanecerdes em mim, e as minhas palavras permanecerem em vós, pedirdes o que quiserdes, e vos será feito.
Nisto é glorificado meu Pai, em que deis muito fruto; e assim vos tornareis meus discípulos.”

(João 15.1-8)

RESUMO

A busca por novos modelos matemáticos e técnicas inovadoras para análises numéricas tem sido tema de muitas pesquisas. Em análises de modelos que possuem domínios infinitos e semi-infinitos, o Método dos Elementos de Contorno (MEC) sobressai-se como uma das mais eficientes ferramentas numéricas. Por outro lado, em análises não-lineares o MEC requer a avaliação de integrais de domínio, diminuindo as vantagens de uma discretização apenas do contorno do modelo analisado. Neste trabalho apresenta-se uma técnica inovadora que trata as integrais de domínio, não adequadas para uma representação pura do contorno, em análises de modelos com materiais viscoplásticos. Na abordagem proposta, utiliza-se um novo algoritmo de visualização proposto por Noronha & Pereira para detectar as regiões de plastificação automaticamente. Este procedimento de detecção é realizado de forma incremental por meio de predições (gradiente como direção de busca) e iterações (Newton-Raphson). Uma vez que as regiões sejam obtidas, torna-se possível transformar as integrais de domínio em integrais de contorno de forma direta. Obtém-se assim uma abordagem baseada apenas na discretização do contorno dos modelos, mantendo uma das principais vantagens da utilização do MEC. Foram realizados neste trabalho alguns exemplos numéricos que apresentaram excelentes resultados em comparação com o Método dos Elementos Finitos (MEF) e com resultados encontrados na literatura.

ABSTRACT

The search for new mathematical models and innovative techniques for numerical analyses has been subject of many research studies. In analysis of models with infinite and semi-infinite domains, the Boundary Element Method (BEM) has been proved to be one of the most efficient numerical tools. On the other hand, in nonlinear analyses the BEM requires the evaluation of domain integrals, diminishing the advantages of a discretization only of the boundary of the model. This work presents an innovative technique that treats the domain integrals, not suitable for pure boundary representations, in analyses of models with viscoplastic materials. The proposed approach is based on a new post-processing algorithm developed by Noronha & Pereira to detect the plastic regions automatically. The detection procedure herein proposed is an incremental technique that uses prediction (along the gradient direction) and iteration (Newton-Raphson) loops. Once the plastic regions are found, it becomes possible to transform the domain integrals in boundary integrals in a straightforward manner. The proposed approach results in a pure boundary discretization, preserving the main advantage of the BEM. The numerical examples presented in this work are in good agreement with the Finite Element Method (FEM) and with results found in the literature.

LISTA DE FIGURAS

RESUMO	I
ABSTRACT	II
LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE TABELAS	VI
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
SUMÁRIO.....	XI
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Visão Geral	1
1.2 Justificativa	4
1.3 Objetivos	5
1.4 Organização do trabalho.....	6
2. MODELOS CONSTITUTIVOS.....	7
2.1 Modelos constitutivos básicos.....	8
2.2 Modelo Viscoelástico de Kelvin-Voigt	9
2.3 Modelo Viscoelástico de Boltzmann.....	10
2.4 Modelo Elastoplástico de Prandtl-Reuss	12
2.5 Modelo Viscoplastico (sem comportamento instantâneo).....	12
2.6 Modelo Viscoplastico (com comportamento instantâneo).	14

3. TEORIA DA ELASTICIDADE E PLASTICIDADE.....	16
3.1 Teoria Linear da Elasticidade	16
3.2 Teoria da Plasticidade	18
3.2.1 Critério de Rankine	20
3.2.2 Critério de Tresca.....	21
3.2.3 Critério de Von Mises.....	21
3.2.4 Critério de Mohr-Coulomb.....	22
3.2.2 Critério de Drucker-Prager	24
4. FORMULAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR CLÁSSICA DO MEC	25
4.1 Formulação Elastostática do MEC	25
4.2 Formulação viscoelástica do MEC (representação no contorno)	31
4.3 Formulação elastoplástica do MEC (com integrais de domínio).....	34
4.4 Formulação Viscoplastica do MEC (com integrais de domínio - sem comportamento instantâneo)	38
5. NOVOS ALGORITMOS NÃO-LINEARES DO MEC	42
5.1 Formulação elastoplástica do MEC (sem integrais de domínio)	43
5.1.3 Transformação de integrais para o contorno	47
5.2 Formulação viscoplastica do MEC (sem integrais de domínio)	49
5.2.1 Tratamento para o calculo das tensões no Domínio	55
5.3 Tratamento das forças de massa	57
6. EXEMPLOS NUMÉRICOS.....	59
6.1 Exemplo 1.....	59
6.2 Exemplo 2.....	65
6.3 Exemplo 3.....	70
6.4 Exemplo 4.....	74

7. CONCLUSÕES	78
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
ANEXO A: ALGORITMO DE VISUALIZAÇÃO PARA O MEC.....	84

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Resultados numéricos do Exemplo 1	62
Tabela 2 - Resultados numéricos do Exemplo 2	67
Tabela 3 - Resultados numéricos do Exemplo 3	71
Tabela 4 - Resultados numéricos do Exemplo 4	75

LISTA DE SÍMBOLOS

g	Aceleração da gravidade
ϕ	Ângulo de atrito interno
σ_{ij}	Componentes do tensor das tensões
ε_{ij}	Componentes do tensor de deformação
$\varepsilon_{lm}^e, \varepsilon_{lm}^v, \varepsilon_{lm}^p$	Componentes das deformações elásticas, viscosas e plásticas, respectivamente
$\varepsilon_{lm}^{ve}, \varepsilon_{lm}^{vp}$	Componentes de deformações viscoelásticas e viscoplásticas, respectivamente
$\sigma_{ij}^e, \sigma_{ij}^v$	Componentes de tensões elásticas e viscosas, respectivamente
$\sigma_{ij}^{ep}, \sigma_{ij}^{vp}$	Componentes de tensões elastoplásticas e viscoplásticas, respectivamente
$\dot{\sigma}_{ij}$	Componentes da taxa de variação da tensão com o tempo
$\theta_\lambda, \theta_\mu, \gamma$	Coeficientes representativos da viscosidade do material
ν	Coeficiente de <i>Poisson</i>
λ, μ	Coeficientes de <i>Lamé</i>
C	Coesão
σ_c^p	Campo de tensões residuais da célula c
ξ, η	Coordenadas locais da célula interna
$\hat{n}_k^b$	Componente k do vetor normal no nó b
$\bar{u}$	Deslocamentos conhecidos
δ_{ij}	Delta de <i>Kronecker</i>
$\sigma_{ij,m}$	Derivadas do tensor das tensões
$D_{kij,m}$	Derivada da solução fundamental para tensões
$S_{kij,m}$	Derivada da Solução Fundamental para tensões

r	Distância entre o ponto onde a fonte é aplicada e o ponto correspondente a abscissa de <i>Gauss</i> no elemento
ρ	Densidade de massa
ε	Erro
$F()$	Função de plastificação
b	Força de volume
t	Força de superfície
$\bar{t}$	Forças de superfície conhecidas
h	Função que define uma curva plana implícita
$f(x)$	Função escalar
I_i, J_i	Invariantes de tensão
$\Delta \bar{\sigma}_n^p$	Incrementos de tensões plásticas
$\Delta \mathbf{v}$	Incrementos na solução decorrente ao acréscimo devido à influência das tensões de plastificação
σ_{mk}^{k0p}	Matriz de resíduos de tensões plásticas nas direções xx ($k \equiv A$) , xy ($k \equiv B$) e yy ($k \equiv C$)
E	Módulo de elasticidade longitudinal
E_{ve}, E_e	Módulos de elasticidade dos trechos viscoelásticos e instantâneos, respectivamente
C_{ij}^{lm}	Matriz constitutiva elástica
η_{ij}^{lm}	Matriz viscosa
E_1	Módulo de elasticidade correspondente ao acréscimo de resistência do material após o escoamento
ϕ_l	Matriz de funções de interpolação das variáveis nodais dos elementos
$\bar{C}_{ki}$	Matriz de coeficientes que depende da geometria
H	Matriz densa e não-simétrica característica do BEM
G	Matriz densa e não-simétrica característica do BEM
A	Matriz constituída por elementos de H e G

$\sigma_{xx}^p, \sigma_{xy}^p, \sigma_{yy}^p$	Matrizes de resíduos de tensões plásticas nas direções xx , xy e yy , respectivamente
N	Número regiões sujeitas a não-linearidades
S	Número de subdivisões em cada região sujeita a não-linearidade
f_i	Nível de um segmento de isocurva
∇	Operador gradiente
Δt	Passo escalar de comprimento na direção tangencial (Anexo A)
Δt	Passo no tempo
$\bar{x}$	Ponto de um segmento de isocurva
$\bar{x}_i$ e $\bar{x}_f$	Pontos limitantes de um segmento de isocurva
$\bar{x}_n$	Pontos da isocurva
D_{kij}	Solução Fundamental para tensões
S_{kij}	Solução Fundamental para tensões $\bar{x}_p$ Pontos de predição
u_{lk}^*	Solução Fundamental representam os deslocamentos em qualquer ponto na direção k , quando uma carga unitária é aplicada no ponto i na direção l
p_{lk}^*	Solução Fundamental representam as forças em qualquer ponto na direção k , quando uma carga unitária é aplicada no ponto i na direção l
σ_0	Tensão de escoamento
T	Tensor das tensões
D	Tensor das deformações
τ	Tensão de cisalhamento
$\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$	Tensões principais
σ^0	Tensor com as tensões iniciais
ε_{tol}	Tolerância para finalizar o processo da análise não-linear.
n	Vetor normal
u	Vetor deslocamento
x	Vetor de deslocamentos e forças de superfícies desconhecidos
b	Vetor de deslocamentos e forças de superfícies conhecidos

U_i^l, P_i^l	Valores nodais de deslocamento e força de superfícies, respectivamente, referentes ao nó l
n	Vetor unitário normal para um dado ponto de uma isocurva
t	Vetor unitário tangente para um dado ponto de uma isocurva (Anexo A)
F_σ	Vetor com as parcelas devido a influência das tensões iniciais
v	Vetor com as incógnitas em deslocamentos e forças de contorno
v₀	Vetor com os resultados de uma análise elástica e ou viscoelástica

SUMÁRIO

RESUMO	I
ABSTRACT	II
LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE TABELAS	VI
LISTA DE TABELAS	VI
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
LISTA DE SÍMBOLOS	VII
SUMÁRIO	XI
1. INTRODUÇÃO	1
1.1 Visão Geral	1
1.2 Justificativa	4
1.3 Objetivos	5
1.4 Organização do trabalho	6
2. MODELOS CONSTITUTIVOS	7
2.1 Modelos constitutivos básicos	8
2.2 Modelo Viscoelástico de Kelvin-Voigt	9
2.3 Modelo Viscoelástico de Boltzmann	10
2.4 Modelo Elastoplástico de Prandtl-Reuss	12
2.5 Modelo Viscoplastico (sem comportamento instantâneo)	12
2.6 Modelo Viscoplastico (com comportamento instantâneo).	14

<u>3.</u> TEORIA DA ELASTICIDADE E PLASTICIDADE.....	16
3.1 Teoria Linear da Elasticidade	16
3.2 Teoria da Plasticidade	18
3.2.1 Critério de Rankine	20
3.2.2 Critério de Tresca.....	21
3.2.3 Critério de Von Mises.....	21
3.2.4 Critério de Mohr-Coulomb.....	22
3.2.2 Critério de Drucker-Prager	24
<u>4.</u> FORMULAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR CLÁSSICA DO MEC	25
4.1 Formulação Elastostática do MEC	25
4.2 Formulação viscoelástica do MEC (representação no contorno)	31
4.3 Formulação elastoplástica do MEC (com integrais de domínio).....	34
4.4 Formulação Viscoplastica do MEC (com integrais de domínio - sem comportamento instantâneo)	38
<u>5.</u> NOVOS ALGORITMOS NÃO-LINEARES DO MEC	42
5.1 Formulação elastoplástica do MEC (sem integrais de domínio)	43
5.1.1 Algoritmo de retorno.....	45
5.1.3 Transformação de integrais para o contorno	47
5.2 Formulação viscoplastica do MEC (sem integrais de domínio)	49
5.2.1 Tratamento para o calculo das tensões no Domínio	55
5.3 Tratamento das forças de massa	57
<u>6.</u> EXEMPLOS NUMÉRICOS	59
6.1 Exemplo 1.....	59
6.2 Exemplo 2.....	65
6.3 Exemplo 3.....	70
6.4 Exemplo 4.....	74
CONCLUSÕES	78

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	81
ALGORITMO DE VISUALIZAÇÃO PARA O MEC	84

1.

INTRODUÇÃO

Nesta parte introdutória serão feitas apresentações constituídas por visão geral, justificativas, objetivos e organização do trabalho.

1.1 Visão Geral

No campo da engenharia de estruturas a busca por modelos matemáticos que retratem o real comportamento estrutural tem sido tema de diversas pesquisas em todo o mundo.

Há pouco mais de duas décadas, quando os recursos computacionais ainda eram escassos, o estudo numérico do comportamento das estruturas era feito basicamente por meio de modelos lineares. Atualmente, com o grande aumento na capacidade de processamento dos computadores, a representação de materiais através de modelos não-lineares vem sendo cada vez mais explorada, tornando as simulações bem mais precisas e confiáveis (CRISFIELD, 1991; SIMO; HUGHES, 1997).

Apesar da análise de modelos lineares ainda ser muito útil, a modelagem envolvendo efeitos não-lineares torna-se crucial em análises modernas de engenharia. Dentre os efeitos não-lineares, o comportamento viscoplástico exerce um importante papel na análise moderna da engenharia de estruturas.

Todo problema de engenharia é resolvido através da adoção de modelos com os quais se pretende representar as características e comportamentos presentes. Com o crescente desenvolvimento dessas representações, os modelos estão simulando cada vez melhor os problemas reais. Na análise de meios contínuos, tais modelos são expressos na forma de equações diferenciais ou integrais conforme as simplificações adotadas e o problema em questão (MESQUITA, 2002).

Em geral o comportamento físico dos materiais é influenciado por vários parâmetros como: tempo, temperatura, condições ambientais, condições de

carregamento, geometria, etc. Devido à complexidade deste conjunto de parâmetros, não se pode desenvolver uma única lei constitutiva que possa ser aplicada para qualquer material (MULLER, 2004).

Dentre os métodos numéricos usados em análises de engenharia destaca-se o Método dos Elementos de Contorno (MEC), baseado em formulações de equações integrais de problemas de valores de contorno desenvolvida por matemáticos famosos como Fredholm e Volterra (BEER; WATSON, 1995). Os problemas com não-linearidade dos materiais foram introduzidos no MEC na década de 70 e vêm crescendo continuamente, apresentando um rico campo de pesquisa em expansão com vários assuntos e aplicações a serem explorados. É evidente que esses métodos se desenvolvem em paralelo com os avanços computacionais, caso contrário os mesmos não seriam viáveis (BEER, 2001).

O MEC se apresenta mais apropriado para análises de modelos domínios infinitos e semi-infinitos. Além disso, devido à natureza das funções ponderadoras, este método é mais indicado para modelar regiões com concentrações de tensão e fluxo. Contudo, o MEC se mostra desvantajoso em análises de estruturas de cascas e reticuladas (MESQUITA, 2002).

A simulação com o MEC requer a discretização apenas do contorno do modelo e também possibilita o acoplamento com outros métodos numéricos (Figura 1.1), minimizando recursos computacionais e tempo de modelagem.

Figura 1.1 - Discretização do contorno do modelo.

Existe um número relativamente grande de referências bibliográficas para análises de materiais viscoplásticos utilizando-se o Método dos Elementos Finitos

(MEF). Porém, ainda há poucos trabalhos sobre análise viscoplástica com o MEC, tornando o assunto um importante tema de pesquisa (MACKERLE, 2002).

O principal desenvolvimento deste trabalho consiste em um novo algoritmo para análises viscoplásticas com o MEC. Este novo algoritmo trata as integrais de domínios presentes nas formulações até hoje apresentadas, mas inadequadas para uma representação pura do contorno do modelo. Assim, com a abordagem proposta para análises viscoplásticas, o MEC é utilizado em sua forma mais vantajosa, utilizando apenas com integrais de contorno.

O resultado deste trabalho será incorporado a um projeto maior (Figura 1.2) que versa sobre o desenvolvimento de uma plataforma computacional baseada na Programação Orientada a Objeto (POO), utilizando a linguagem de programação Java (NORONHA, 2001). Esta plataforma utiliza as mais novas técnicas de programação como: *Unified Process* (UP), *Design Patterns* (DP), *Unified Modeling Language* (UML) e *Refactoring* (AMMERAAL, 1998), (BOOCH, 1994) e (MARCHIORI, 2001).

Figura 1.2 - Projeto integrado de implementação genérica do MEC com interface gráfica.

1.2 Justificativa

As análises de modelos com materiais viscoplásticos apresentam-se cada vez mais importantes em projetos de engenharia. Neste caso, o MEC apresenta grandes vantagens sobre outros métodos, pois nestes tipos de análises a consideração de meios infinitos ou semi-infinitos é freqüente.

Uma das principais vantagens do MEC é a facilidade de analisar problemas complexos discretizando apenas o contorno do modelo. Porém, para as atuais formulações viscoplásticas esta vantagem é anulada devido à existência de integrais de domínio. Essas integrais de domínio não aumentam o tamanho do sistema a ser resolvido, no entanto, exigem que o domínio seja discretizado por uma malha auxiliar formada por células internas.

Algoritmos mais modernos de análise viscoplástica com o MEC possibilitam a discretização de apenas parte do domínio. Aqui, diferentemente do MEF, a malha de células internas não requer continuidade, ou seja, os elementos não precisam necessariamente ser conectados pelos seus nós.

Neste trabalho é apresentado um novo algoritmo para análise viscoplástica com o MEC que transforma as integrais de domínio em integrais de contorno. Esse algoritmo é fundamentado por uma técnica de visualização proposta por PEREIRA & NORONHA (PEREIRA; NORONHA, 2003) e também pelo algoritmo não-linear proposto por MULLER (MULLER, 2004).

O trabalho em conjunto com outros pesquisadores também é um dos itens que justifica a importância do assunto do projeto. Entre eles, destaca-se a cooperação com o projeto sobre Modelagem de Túneis com o MEC, do Prof. Gernot Beer, Áustria. Esta cooperação tem sido importante para dar ao trabalho uma característica complementar de pesquisa aplicada, além de ter possibilitado ao autor deste trabalho um ganho significativo de experiência e conhecimento sobre os assuntos abordados nesta pesquisa.

1.3 Objetivos

Os principais objetivos deste trabalho são:

- Desenvolvimento de um novo algoritmo para o MEC considerando materiais viscoplásticos sem a necessidade de discretizações de domínio;
- Implementação computacional do algoritmo desenvolvido na plataforma computacional baseada na Programação Orientada a Objeto (POO), utilizando a linguagem de programação Java;
- Comparação dos resultados obtidos com os do MEF e com outros resultados encontrados na literatura;
- Validação do algoritmo proposto e apresentação de resultados de diversos exemplos ilustrando sua precisão;
- Integração com os outros trabalhos de pesquisa coordenados pelo Prof. Marcos Noronha, os quais estão diretamente envolvidos nesta pesquisa;
- Integração com o departamento de estruturas (IFB) da Universidade Tecnológica de Graz (TU-Graz), Áustria, coordenado pelo Prof. Gernot Beer;
- Divulgação dos resultados obtidos em publicação de artigos e apresentação da pesquisa em congressos;
- Avançar na aplicação de conhecimentos modernos na área de simulações numéricas de problemas de engenharia estrutural e geotécnica.
- Avançar os conhecimentos de novos processos de desenvolvimento de programas computacionais, como: UP, *Design Patterns*, UML, XML e *Refactoring*.

1.4 Organização do trabalho

No Capítulo 2, serão apresentados os principais modelos reológicos, desde os modelos básicos até os mais complexos. Para cada modelo deduz-se suas respectivas relações constitutivas, as quais serão utilizadas nas formulações dos Capítulos seguintes.

No Capítulo 3, será revista, sucintamente, a teoria da elasticidade linear, teoria da plasticidade e critérios de resistência.

No Capítulo 4 serão apresentadas as formulações do MEC para análise linear bem como sua extensão para formulações mais abrangentes tais como: formulação viscoelástica e viscoplástica tradicional.

No Capítulo 5 serão apresentados o algoritmo de tratamento não-linear proposto por MULLER, 2004 e o novo algoritmo para tratamento de análises viscoplásticas com o MEC sem a utilização de integrais de domínio.

No Capítulo 6, serão apresentados os resultados das análises viscoplásticas realizadas com o algoritmo proposto neste trabalho, bem como, as comparações com o MEF e com resultados da literatura.

Por fim, o Capítulo 7 apresenta as considerações finais do trabalho.

2.

MODELOS CONSTITUTIVOS

A teoria das Equações Constitutivas engloba o estudo de modelos microscópicos e macroscópicos. Os modelos microscópicos são muito importantes para o entendimento dos processos mecânicos assim como no desenvolvimento de novos materiais, sejam eles homogêneos ou compostos.

Os modelos macroscópicos descrevem o comportamento mecânico dos materiais sem a preocupação de explicar a sua origem físico-química. Este texto baseia-se preponderantemente neste aspecto da teoria (PIMENTA, 2002).

Devido à complexidade do comportamento real da maioria dos materiais utilizados nas estruturas e da necessidade de se obter melhores representações destes materiais, muitos trabalhos de pesquisa avançam na construção de relações constitutivas mais aprimoradas. Entretanto, caracterizar e equacionar os materiais de forma exata é uma tarefa extremamente difícil.

Assim torna-se necessário a adoção de modelos simplificados que representem as principais características e proporcionem soluções suficientemente próximas do comportamento real das estruturas. Em geral o comportamento físico dos materiais é influenciado por uma série de parâmetros como: tempo, temperatura, condições ambientais, carregamentos, etc... Além do mais, não se pode construir uma lei constitutiva que pode ser aplicada em todos os materiais. Então, em geral, são construídas relações constitutivas para cada tipo de material. Para materiais mais complexos, as relações constitutivas geralmente são combinadas com modelos básicos.

As formulações que serão apresentadas têm como base os trabalhos desenvolvidos pelos pesquisadores MESQUITA (MESQUITA, 2002) ,VENTURINI (VENTURINI, 1983) e PIMENTA (PIMENTA, 2002).

2.1 Modelos constitutivos básicos

Os modelos básicos em geral possuem relações matemáticas simples. A combinação destes modelos forma representações mais complexas e interessantes que retratam de forma mais realista o comportamento de um material. A Figura 2.1 mostra os três modelos básicos: elástico, viscoso e plástico.

Figura 2.1 - Modelos básicos unidimensionais: (a) elástico, (b) viscoso, (c) plástico.

O modelo elástico (Figura 2.1a), representado por uma mola, é caracterizado pelo aparecimento de deformações elásticas instantâneas simultâneas à aplicação de uma sollicitação estática. O modelo é adequado para materiais cujo comportamento não varia com o tempo e que em situações de descarregamento não apresentem deformações residuais. Na elasticidade linear a relação constitutiva é expressa pela lei de Hooke.

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} , \quad (2.1)$$

onde σ_{ij} são as tensões, ε_{lm} as deformações e C_{ij}^{lm} é a matriz constitutiva elástica.

O modelo viscoso (Figura 2.1b) é também conhecido por modelo viscoso de Newton, o qual é representado por um amortecedor. Este modelo fica caracterizado pelo comportamento dependente do tempo, ou seja, mesmo que as sollicitações sejam constantes, as deformações dependerão do tempo.

$$\sigma_{ij} = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} , \quad (2.2)$$

onde η_{ij}^{lm} é a matriz viscosa escrita em função de parâmetros do material viscoso os quais são determinados experimentalmente e $\dot{\varepsilon}_{lm}$ representa a velocidade de deformação.

O modelo plástico (Figura 2.1c), também conhecido como modelo plástico de Saint-Venant é representado por um sólido que desliza a partir do instante que a tensão aplicada ultrapassa o valor σ_0 (tensão de plastificação).

2.2 Modelo Viscoelástico de Kelvin-Voigt

O modelo de Kelvin-Voigt (Figura 2.2) foi construído associando dois modelos básicos em paralelo, um modelo elástico e um viscoso. Por ser uma associação em paralelo, entende-se que ambos os modelos estarão submetidos à mesma deformação e que a soma das tensões em cada modelo é igual a tensão total σ_{ij} .

Figura 2.2 - Modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt.

Assim, tem-se que as deformações totais, elásticas e viscosas são iguais. Já as tensões são definidas pela soma das tensões viscosas (no amortecedor) e das tensões elásticas (na mola), então:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e = \varepsilon_{lm}^v \quad \text{e} \quad (2.3)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^e + \sigma_{ij}^v \quad . \quad (2.4)$$

A tensão elástica σ_{ij}^e e a tensão viscosa σ_{ij}^v podem ser definidas como:

$$\sigma_{ij}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} \quad \text{e} \quad (2.5)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad . \quad (2.6)$$

$$\gamma = \theta_\lambda = \theta_\mu \quad (2.9)$$

Vale ressaltar que as tensões viscosas são proporcionais à velocidade de deformação. Para materiais isotrópicos, a matriz constitutiva elástica C_{ij}^{lm} e a matriz viscosa η_{ij}^{lm} podem ser definidas pelas expressões abaixo:

$$C_{ij}^{lm} = \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.7)$$

$$\eta_{ij}^{lm} = \theta_\lambda \lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \theta_\mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl}) \quad (2.8)$$

onde os parâmetros λ , μ , θ_λ e θ_μ são determinados experimentalmente.

Na grande maioria dos problemas práticos a matriz viscosa pode ser apresentada por um único parâmetro viscoso γ . Assim temos que:

$$\eta_{ij}^{lm} = \gamma [\lambda \delta_{ij} \delta_{lm} + \mu (\delta_{il} \delta_{jm} + \delta_{im} \delta_{jl})] = \gamma C_{ij}^{lm} \quad (2.10)$$

Logo,

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad (2.11)$$

2.3 Modelo Viscoelástico de Boltzmann

O modelo viscoelástico de Boltzmann (Figura 2.3) foi criado pela associação em série do modelo viscoelástico de Kelvin-Voigt com uma mola, e por isso, este modelo tem capacidade de simular deformações instantâneas.

Figura 2.3 - Modelo viscoelástico de Boltzmann.

A relação entre as tensões fica expressa por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^e, \quad (2.12)$$

onde σ_{ij} representa as tensões totais, σ_{ij}^{ve} representa as tensões viscoelásticas e σ_{ij}^e representa as tensões elásticas.

Já as deformações ficam expressas por:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^{ve}. \quad (2.13)$$

Para se obter as equações integrais, é adotada a hipótese de que o coeficiente de Poisson é igual em ambos os trechos. Assim, pode-se definir as tensões elásticas e viscosas pelas seguintes expressões:

$$\sigma_{ij}^e = \bar{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e, \quad (2.14)$$

$$\sigma_{ij}^{el} = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad \text{e} \quad (2.15)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}, \quad (2.16)$$

onde σ_{ij}^{el} são as tensões referentes a mola em paralelo com o amortecedor e $\bar{C}_{ij}^{lm}$ e $\hat{C}_{ij}^{lm}$ são as matrizes constitutivas escritas em função do módulo elástico E_e e E_{ve} , respectivamente. Assim, tem-se que:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^{ve} = \sigma_{ij}^{el} + \sigma_{ij}^v = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}. \quad (2.17)$$

A partir da equação 2.13 pode-se definir uma relação entre a velocidade de deformação de ambos os trechos do modelo como:

$$\dot{\varepsilon}_{lm} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve}. \quad (2.18)$$

Logo, usando-se a equação 2.7 e algumas manipulações algébricas tem-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij}, \quad (2.19)$$

sendo $\dot{\sigma}_{ij}$ a taxa de variação da tensão total ou velocidade de tensão total.

2.4 Modelo Elastoplástico de Prandtl-Reuss

Este modelo é obtido pela associação em série de um modelo elástico com um modelo plástico (Figura 2.4), portanto, os dois elementos estão submetidos à mesma tensão.

Figura 2.4 - Modelo elastoplástico perfeito

A deformação total é a soma das deformações dos elementos, logo tem-se:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^p, \quad (2.20)$$

onde ε_{lm} , ε_{lm}^e e ε_{lm}^p são respectivamente deformações totais, elásticas e plásticas.

As tensões ficam expressas por:

$$\sigma_{ij} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^p) = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} - \sigma_{ij}^p. \quad (2.21)$$

Normalmente realiza-se a caracterização do comportamento elastoplástico através de uma função de plastificação F . Quando $F < 0$ diz-se que o material está em um estado elástico. Quando $F = 0$, diz-se que ele está em um estado elastoplástico. O modelo elastoplástico não é viscoso e apresenta deformações permanentes imediatas sempre que as tensões atingirem a resistência σ_0 .

2.5 Modelo Viscoplastico (sem comportamento instantâneo)

Este modelo é representado pelo arranjo em paralelo de um modelo elastoplástico perfeito (modelo de Prandtl-Reuss), com o modelo viscoso simples (amortecedor) conforme a Figura 2.5.

Figura 2.5 - Modelo Viscoplástico (sem comportamento instantâneo)

Assim, as deformações são dadas por:

$$\varepsilon_{lm} = \varepsilon_{lm}^v = \varepsilon_{lm}^e + \varepsilon_{lm}^p \rightarrow \varepsilon_{lm}^e = \varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^p \quad . \quad (2.22)$$

As tensões totais são expressas por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^{ep} \quad . \quad (2.23)$$

onde σ_{ij}^v são as tensões viscosas e σ_{ij}^{ep} são as tensões elastoplásticas, definidas por:

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^v = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} \quad e \quad (2.34)$$

$$\sigma_{ij}^{ep} = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad . \quad (2.25)$$

Substituindo as equações 2.15 e 2.16 na equação 2.14 temos:

$$\sigma_{ij} = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} + C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} - \varepsilon_{lm}^e) = C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \sigma_{ij}^p \quad . \quad (2.26)$$

O termo σ_{ij}^p origina-se dos problemas de tensão inicial expresso por :

$$\sigma_{ij}^p = C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^p \quad . \quad (2.27)$$

Na construção da formulação viscoplástica para o MEC, com o modelo sem comportamento instantâneo, a equação 2.26 será imposta. Neste caso, as equações constitutivas serão utilizadas em sua forma total e não de forma incremental, como geralmente é feito nos modelos elastoplásticos. Portanto, o ponto sobrescrito que

aparece em cima de alguns termos refere-se à derivada no tempo e não a um incremento infinitesimal.

2.6 Modelo Viscoplastico (com comportamento instantâneo).

O modelo viscoplastico com comportamento instantâneo (Figura 2.6), diferencia-se do modelo mostrado anteriormente, pela capacidade de simular deformações elásticas instantâneas. O modelo é representado pelo arranjo em série de um modelo elástico simples com um modelo viscoplastico mostrado no item 2.5.

Figura 2.6 - Modelo viscoplastico com comportamento instantâneo

Para este modelo as deformações são relacionadas da seguinte forma:

$$\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ij}^e + \varepsilon_{ij}^{ve} + \varepsilon_{ij}^{vp} \rightarrow \varepsilon_{ij}^{ve} = \varepsilon_{ij} - \varepsilon_{ij}^e - \varepsilon_{ij}^{vp} \quad , \quad (2.28)$$

onde ε_{ij} , ε_{ij}^e , ε_{ij}^{ve} e ε_{ij}^{vp} são as deformações totais, elásticas (comportamento instantâneo), viscoelásticas e viscoplasticas, respectivamente. Já as tensões ficam expressas por:

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^v + \sigma_{ij}^{ep} \quad , \quad (2.29)$$

onde σ_{ij} , σ_{ij}^v e σ_{ij}^{ep} são as tensões totais, viscosas e elastoplásticas. Considerando que o coeficiente de Poisson é igual em ambos os trechos do modelo, tem-se que:

$$\sigma_{ij}^{ep} = \bar{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} \quad , \quad (2.30)$$

$$\sigma_{ij}^e = \hat{C}_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e = E_e C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^e \quad \text{e} \quad (2.31)$$

$$\sigma_{ij}^v = \eta_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} = \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} . \quad (2.32)$$

Assim, tem-se que:

$$\sigma_{ij} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{ve} + \gamma E_{ve} C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} . \quad (2.33)$$

Pode-se escrever a relação entre as velocidades de deformação de ambos os trechos do modelo pela seguinte expressão:

$$\dot{\varepsilon}_{lm} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{ve} + \dot{\varepsilon}_{lm}^{vp} = \dot{\varepsilon}_{lm}^e + \dot{\varepsilon}_{lm}^{vep} . \quad (2.34)$$

Logo, com algumas manipulações algébricas tem-se:

$$\sigma_{ij} = \frac{E_e E_{ve}}{E_e + E_{ve}} C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} + \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \frac{\gamma E_{ve}}{E_e + E_{ve}} \dot{\sigma}_{ij} - \frac{E_e}{E_e + E_{ve}} \sigma_{ij}^{vp} . \quad (2.35)$$

O termo σ_{ij}^{vp} é oriundo de problemas de tensão inicial, sendo expresso por:

$$\sigma_{ij}^{vp} = E_{ve} C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm}^{vp} . \quad (2.36)$$

Vários outros modelos constitutivos viscoelásticos e viscoplásticos podem ser construídos pela associação dos modelos básicos, porém este não é o objetivo deste trabalho, o qual utilizará apenas os modelos apresentados.

3.

TEORIA DA ELASTICIDADE E PLASTICIDADE

Neste capítulo será feita uma revisão dos conceitos básicos envolvendo a teoria da elasticidade e a teoria da plasticidade. Tais conceitos servirão como base para introduzir conceitos das formulações lineares e não-lineares com o MEC.

3.1 Teoria Linear da Elasticidade

A Teoria Linear da Elasticidade trata da determinação dos campos de tensões, deformações e de deslocamentos em sólidos deformáveis. As principais relações e hipóteses oferecidas pela teoria podem ser expressas pelas equações de equilíbrio, compatibilidade e constitutivas.

Considere um sólido deformável submetido a forças de superfície em S_v , a deslocamentos prescritos em S_u e a forças de volume b (Figura 3.1).

Figura 3.1 - Sólido deformável submetido a forças de superfície, deslocamentos prescritos e forças de volume.

Denomina-se o Tensor das Tensões de Cauchy a grandeza expressa por:

$$[\underline{\sigma}] = \begin{bmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \sigma_{13} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \sigma_{23} \\ \sigma_{31} & \sigma_{32} & \sigma_{33} \end{bmatrix} , \quad (3.1)$$

onde $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ e os índices referem-se a uma base ortonormal $e = (e_1, e_2, e_3)$.

Considerando-se os incrementos infinitesimais nas componentes de tensão entre duas faces opostas de um paralelepípedo infinitesimal, a equação de equilíbrio pode ser expressa por:

$$\sigma_{ij,j} + b_i = 0 . \quad (3.2)$$

Conhecido cada componente de σ_{ij} em um ponto qualquer e aplicando equilíbrio dos momentos em um tetraedro infinitesimal, obtém-se a relação entre as componentes do vetor das forças superficiais t , definido por $t = t_1 e_1 + t_2 e_2 + t_3 e_3$ e os componentes de σ_{ij} . Esta relação é conhecida como fórmula de Cauchy e é dada por:

$$t_i = \sigma_{ij} n_j . \quad (3.3)$$

Por sua vez, as equações de compatibilidade resultam de hipóteses sobre a alteração da geometria de um modelo deformável. Uma das grandezas fundamentais neste estudo é o vetor deslocamento u , para um ponto genérico x , dado por:

$$u = u_1 e_1 + u_2 e_2 + u_3 e_3 . \quad (3.4)$$

Considerando a hipótese de pequenos deslocamentos e analisando a geometria de um elemento infinitesimal antes e depois da deformação, tem-se:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i,j} + u_{j,i}) , \quad (3.5)$$

onde $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$.

Agora, considera-se o parâmetro do material por meio das equações constitutivas. Estas equações relacionam tensões com deformações, tendo como base observações experimentais. Para materiais elásticos lineares, estas equações são expressas por:

$$\sigma_{ij} = \lambda \delta_{ij} \varepsilon_{kk} + 2\mu \varepsilon_{ij} . \quad (3.6)$$

As funções u_i, ε_{ij} e σ_{ij} devem satisfazer as seguintes condições de contorno:

- Naturais $t_i = \bar{t}_i$ em S_v ;
- Essenciais $u = u_i$ em S_u .

Através de algumas manipulações matemáticas, é possível construir um conjunto de equações conhecidas como Equações de *Navier*. Estas equações correspondem às equações de equilíbrio expressas em termos das componentes de deslocamento, sendo dadas por:

$$\left(\frac{1}{1-2\nu} \right) u_{j,jj} + u_{i,jj} + \frac{1}{\mu} b_i = 0 \quad (3.7)$$

3.2 Teoria da Plasticidade

O adjetivo “plástico” vem do verbo grego $\pi\lambda\alpha\sigma\sigma\epsilon\iota\nu$ que significa “moldar”, usado para descrever materiais dúcteis como metais, barro, e betume (LUBLINER, 2006).

Em um ensaio uniaxial de tensões no modelo elastoplástico (Figura 2.4), o comportamento é elástico enquanto a tensão σ for menor, em módulo, que a tensão de escoamento σ_0 . Quando o material é descarregado de um estado de tensão de tração com $\sigma = \sigma_0$ ele apresenta comportamento elástico e deformações residuais ε^p . A Figura 3.2 ilustra este comportamento (PIMENTA, 2002).

Figura 3.2 - Ensaio uniaxial de material elastoplástico perfeito.

Alguns materiais possuem acréscimos de tensões (Figura 3.3) após atingirem a tensão de plastificação σ_0 , este fenômeno é conhecido como “hardening” (LUBLINER, 2006).

Figura 3.3 - Efeito de endurecimento “hardening” em ensaio uniaxial.

Se o acréscimo de tensão for aproximado por uma reta, a relação tensão deformação pode ser definida por:

$$\varepsilon^e = \frac{\sigma}{E} \text{ se } \sigma < \sigma_0 \text{ ou} \quad (3.8)$$

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p = \frac{\sigma_0}{E} + \frac{1}{E_1}(\sigma - \sigma_0) \text{ se } \sigma > \sigma_0 . \quad (3.9)$$

Na teoria da plasticidade, um dos principais conceitos é o de função de plastificação, ou critérios de resistência. O critério de resistência pode ser definido como o limite de deformação elástica, expresso por uma função do estado de tensão. Para um estado unidimensional, o escoamento pode ser facilmente identificado. Porém, para um estado múltiplo de tensão, torna-se complicado determinar a ocorrência do escoamento. Neste caso, expressões matemáticas envolvendo todas as componentes de tensões fazem-se necessárias. Estas expressões matemáticas são conhecidas como critérios de escoamento, sendo normalmente baseadas em observações experimentais.

Assim, em um ensaio de carregamento uniaxial, a tensão de escoamento pode ser facilmente encontrada a partir do gráfico de tensão-deformação. Partindo destes resultados, para determinar o escoamento de um material sujeito a um estado multiaxial de tensões, deve-se adotar um critério de resistência. Os critérios de resistência mais utilizados são:

- Critério de Rankine
- Critério de Tresca
- Critério de von Mises
- Critério de Mohr-Coulomb
- Critério de Drucker-Prager

Os critérios de resistência normalmente são expressos por invariantes do tensor das tensões $[\underline{\sigma}]$. Como segue:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= tr \underline{\sigma} \\
 I_2 &= \frac{1}{2} \left[(tr \underline{\sigma})^2 - tr \underline{\sigma}^2 \right] \\
 I_3 &= \det \underline{\sigma} \\
 J_2 &= \frac{1}{3} I_1^2 - I_2 \\
 J_3 &= \frac{2}{27} I_1^3 - \frac{1}{3} I_1 I_2 + I_3 \\
 \theta &= \frac{1}{3} \arccos \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{\sqrt{J_2^3}}.
 \end{aligned} \tag{3.10}$$

3.2.1 Critério de Rankine

O critério de Rankine foi formulado em 1857 para materiais como solo e concreto. Este critério procura explicar a ruptura frágil por tração que ocorre nestes materiais, afirmando que a máxima tensão de tração no material não pode ultrapassar o valor f_t , conhecido como resistência a tração do material. Desta forma, o critério de

Rankine também é chamado de critério da máxima tensão de tração e pode ser expresso por:

$$\sigma_{\max} \leq f_t . \quad (3.11)$$

Usando-se a definição dos invariantes de tensão, tem-se:

$$\sigma_{\max} = \sigma_1 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2} \cos \theta . \quad (3.12)$$

Por sua vez, o critério de resistência pode ser representado por :

$$F(I_1, J_2, \theta) = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2} \cos \theta - f_t . \quad (3.13)$$

3.2.2 Critério de Tresca

O critério de Tresca foi formulado em 1868 para metais e supõe que a máxima tensão de cisalhamento seja a variável chave. Ele afirma que um metal se plastifica se a máxima tensão tangencial atingir a um valor f_τ . Logo, pode-se escrever:

$$\tau_{\max} \leq f_\tau . \quad (3.14)$$

Usando-se a definição dos invariantes de tensão, tem-se:

$$\sigma_1 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2} \cos \theta \text{ e } \sigma_3 = \frac{1}{3}I_1 + \frac{2}{3}\sqrt{3J_2} \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) . \quad (3.15)$$

Por sua vez, a máxima tensão tangencial pode ser representada por :

$$\tau_{\max} = \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{1}{3}\sqrt{3J_2} \left(\cos \theta - \cos \left(\theta + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \quad (3.16)$$

3.2.3 Critério de Von Mises

Este critério foi formulado em 1913 para metais e a sua definição matemática pode ser associada ao segundo invariante do tensor anti-esférico J_2 . Este critério

afirma que um material metálico sofre plastificação em um ponto se a raiz do termo J_2 , neste ponto, atingir o valor limite σ_0 , ou seja:

$$F(J_2) = \sqrt{J_2} - \sigma_0. \quad (3.17)$$

3.2.4 Critério de Mohr-Coulomb

Este critério foi formulado em 1900 e parte da hipótese de que a tensão de cisalhamento é a grandeza decisiva para a verificação do escoamento do material. Este critério foi formulado para qualquer tipo de material, sendo muito utilizado nos problemas geotécnicos, podendo ser expresso em função dos invariantes I_1 e J_2 como indicado a seguir:

$$F(I_1, J_2, \phi, c) = \tau - f(\sigma). \quad (3.18)$$

onde $f(\sigma)$ é determinada experimentalmente.

A forma mais simples desta função é a reta conhecida como equação de Coulomb (Figura 3.4), expressa por:

$$F(I_1, J_2, \phi, c) = \tau + \sigma \tan \phi - c, \quad (3.19)$$

onde c é a coesão e ϕ o ângulo de atrito.

Figura 3.4 - Equação de Coulomb.

Logo, pode-se escrever que:

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi \\ \sigma &= \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi\end{aligned}\quad (3.20)$$

Introduzindo a equação 3.20 na equação 3.19 tem-se:

$$\begin{aligned}F(I_1, J_2, \phi, c) &= \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \cos \phi + \\ &+ \left(\frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} + \frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} \sin \phi \right) \tan \phi - c\end{aligned}\quad (3.21)$$

Aplicando as equações 3.15 e 3.16 na equação 3.21, o resultado é o seguinte:

$$\begin{aligned}\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} &= \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \\ \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &= \frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} \sqrt{3J_2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right)\end{aligned}\quad (3.22)$$

Portanto, o critério de resistência pode ser representado por:

$$\begin{aligned}F(I_1, J_2, \phi, c) &= \sqrt{J_2} \sin \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) (\cos \phi + \sin \phi \tan \phi) + \\ &\left[\frac{1}{3} I_1 + \frac{1}{3} \sqrt{3J_2} \cos \left(\theta + \frac{\pi}{3} \right) \right] \tan \phi - c\end{aligned}\quad (3.23)$$

Em particular, quando $\phi = 0$, a equação 3.19 reduz-se ao critério de Tresca.

Nesse sentido, o critério de Mohr-Coulomb pode ser considerado como uma generalização do critério de Tresca.

3.2.2 Critério de Drucker-Prager

O critério de Drucker-Prager foi formulado em 1952 como uma simplificação do critério de Mohr-Coulomb. Ele é simplesmente uma modificação do critério de von Mises, sendo expresso por:

$$F(I_1, J_2) = \alpha I_1 + \sqrt{J_2} - \sigma_0 \quad . \quad (3.24)$$

4.

FORMULAÇÃO LINEAR E NÃO-LINEAR CLÁSSICA DO MEC

O Método dos Elementos de Contorno se apresenta como um método alternativo para solução de diversos problemas nos mais variados campos da engenharia, como: mecânica, elétrica, acústica, etc... Uma das principais diferenças do MEC com os tradicionais métodos de discretização de domínio, como Método dos Elementos Finitos (MEF) e Método das Diferenças Finitas (MDF), é a facilidade de modelar certos problemas pela discretização apenas de seu contorno. Para problemas geomecânicos onde o domínio é infinito ou semi-infinito, o MEC se apresenta como uma ferramenta muito mais apropriada em comparação com os demais métodos. Esta vantagem também torna-se evidente em problemas com grande concentração de tensão e fluxo.

Neste capítulo será apresentada uma revisão das formulações convencionais elastostática, viscoelástica, elastoplástica e viscoplástica utilizando o MEC.

As formulações apresentadas neste capítulo foram baseadas nos trabalhos dos autores BREBBIA & DOMINGUES, 1989, BEER, 2001, BEER & WATSON, 1995, BREBBIA, TELLES & WROBEL, 1984, TELLES, 1983, VENTURINI, 1983 e PARTRIDGE & BREBBIA, 1992.

4.1 Formulação Elastostática do MEC

O MEC basicamente efetua a análise de problemas através da discretização do contorno Γ do modelo, através de nós e elementos (Figuras 4.1a e 4.1b). Primeiramente são analisados os valores de forças de superfície e deslocamentos para os nós dos elementos discretizados no contorno. A partir destes valores, obtém-se os resultados em qualquer ponto do contorno através da interpolação em cada um dos elementos.

Figura 4.1 - (a) Modelo, (b) discretização, (c) solução fundamental.

As representações integrais do MEC podem ser obtidas, semelhantemente ao MEF, a partir da equação de equilíbrio 3.1, fazendo o uso da técnica de resíduos ponderados. A grande diferença é que a função ponderadora utilizada é uma solução fundamental (Figura 4.1c). No caso de análise de tensões, para a obtenção desta solução considera-se que uma carga unitária concentrada é aplicada em um ponto P qualquer de um meio elástico infinito e homogêneo. Esta alteração impõe problemas de singularidade nas representações integrais que devem ser resolvidas com técnicas especiais.

Do exposto acima, tem-se que:

$$\int_{\Omega} u_{ki}^* (\sigma_{ij,j} + b_i) d\Omega = 0, \quad (4.1)$$

onde u_{ki}^* é a solução fundamental, sendo definida para problemas da teoria da elasticidade determinada por Kelvin como:

$$2D \rightarrow u_{ki}^*(P, S) = \frac{1}{8\pi\mu(1-\nu)} \left[(3-4\nu) \ln\left(\frac{1}{r}\right) \delta_{ki} + r_{,k} r_{,i} \right], \quad (4.2)$$

no qual o primeiro índice refere-se à direção de aplicação da carga em P e o segundo diz respeito ao deslocamento gerado na direção S . O termo $r \equiv r(P, S)$ é a distância entre os pontos P e S .

A solução fundamental apresentada na Eq. (4.2) para o caso bidimensional refere-se à situação de estado plano de deformação. Para obter a solução para estado

plano de tensão basta substituir o coeficiente de Poisson por $\nu/(1+\nu)$, sem alterar o módulo de elasticidade transversal μ .

Integrando por partes o primeiro termo da equação 4.1, tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* \sigma_{ij} n_j d\Gamma - \int_{\Omega} u_{ki,j}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad , \quad (4.3)$$

onde n_j corresponde ao versor normal ao contorno Γ . Como $\sigma_{ij} n_j = p_i$ e $u_{kij}^* = \varepsilon_{kij}^*$, sendo ε_{kij}^* a solução fundamental em deformação, temos que:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad . \quad (4.4)$$

A equação 4.4 é o ponto de partida para a obtenção das representações integrais pelo MEC. Nela, são impostas as relações constitutivas, conforme definido no Capítulo 2. Para o caso de formulação elastostática é utilizado a equação 2.1. Assim, tem-se que:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad . \quad (4.5)$$

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{hlm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{hlm}^* u_{l,m} = \sigma_{hij}^* u_{i,j} \quad , \quad (4.6)$$

a Eq. (4.5) pode ser re-escrita como:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad . \quad (4.7)$$

Integrando por partes a segunda parcela da Eq. (4.7) tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} \sigma_{kij}^* n_j u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \sigma_{kij,j}^* u_i d\Omega + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega = 0 \quad (4.8)$$

A Eq. (4.8) pode ser re-escrita considerando a equação de equilíbrio definida por:

$$\sigma_{kij,j}^* = -\delta_{(P,S)} \delta_{ki} , \quad (4.9)$$

onde $\delta_{(P,S)}$ é conhecido como função delta de Dirac, S representa uma posição do domínio e P representa a posição do ponto fonte. Levando-se em consideração as propriedades da função delta de Dirac e que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, tem-se:

$$C_{ki} u_i(P) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega , \quad (4.10)$$

onde o termo p_{ki}^* é a solução fundamental para forças de superfície, expressa por:

$$p_{ki}^*(P,S) = \frac{1}{4\alpha\pi(1-\nu)r^\alpha} \left\{ r_{,n} \left[(1-2\nu)\delta_{ki} + \beta r_{,k} r_{,i} \right] - (1-2\nu)(r_{,k} n_i - r_{,i} n_k) \right\} , \quad (4.11)$$

onde $\alpha, \beta = (1,2)$ para 2D e $\alpha, \beta = (2,3)$ para 3D

Uma vez que os deslocamentos u_i e as forças de superfícies t_i são totalmente conhecidas no contorno, pode-se obter resultados de deslocamento em qualquer ponto do domínio por:

$$u_k(P) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} u_{ki}^* b_i d\Omega \quad (4.12)$$

A Eq. (4.12) é também conhecida como identidade de Somigliana.

As equações integrais apresentadas podem ser transformadas em equações algébricas através da discretização do sólido em elementos de contorno (Figura 4.2), este método numérico recebe o nome de Método dos Elementos de Contorno (MEC).

Figura 4.2 - (a) modelo da estrutura , (b) discretização do modelo com elementos de contorno

A discretização do contorno do modelo é feita com n_e elementos de contorno, faz com que as variáveis do problema possam ser aproximadas, parametrizando-as com relações aos seus valores nodais. Fazendo uso de funções interpoladoras, também chamadas de funções de forma, tem-se que:

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{l=1}^m \phi^l P_i^l \\ u_i &= \sum_{l=1}^m \phi^l U_i^l \end{aligned} \quad (4.13)$$

onde m é o número de nós do elemento de contorno e ϕ é a função de forma.

Desprezando-se as forças de volume para facilitar a formulação, a Eq. (4.10) pode ser escrita algebricamente como:

$$C_{ki} U_i(P) = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e P_i^l - \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e U_i^l \quad (4.14)$$

Para consideração das forças de volume é necessário a discretização do domínio do modelo, contudo, será apresentada posteriormente uma técnica proposta

por BANERJEE & PAPE (BANERJEE; PAPE, 1987) que elimina a necessidade de utilização de células internas.

Para a obtenção dos deslocamentos U_i^m e das forças de superfície P_l^m nos n nós do contorno, o MEC utiliza um sistema de n equações expresso por:

$$HU = GP \quad (4.15)$$

onde U e P são os vetores de deslocamento e forças de superfície. As matrizes H e G ficam expressas por:

$$H_{ki} = C_{ki} + \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e \quad (4.16)$$

$$G_{ki} = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e \quad (4.17)$$

Aplicando as condições de contorno no sistema de equações da Eq. (4.15) e passando para o lado esquerdo as incógnitas e para o lado direito os valores conhecidos, chega-se ao seguinte sistema de equações lineares:

$$Av = F, \quad (4.18)$$

onde a matriz A é constituída por elementos das matrizes H e G , v é o vetor de deslocamentos e forças de superfície desconhecidos. O vetor F é obtido dos deslocamentos e forças de superfície conhecidos multiplicados por coeficientes das matrizes H e G .

Com a solução do sistema linear da Eq. (4.18), ficam conhecidos os valores dos deslocamentos e das forças de superfície em todo o contorno do modelo. Para obter-se as componentes de deslocamento em um ponto P_i do domínio do modelo, faz-se uso da Identidade de Somigliana (Eq. 4.12) em sua forma algébrica.

A equação que permite obter as tensões σ_{ij} dos pontos internos de um sólido a partir dos valores de deslocamento e forças de superfície nos nós do contorno, pode ser derivada por meio das equações constitutivas, das equações de compatibilidade e pela Identidade de Somigliana, sendo expressa por:

$$\sigma_{ij}(P) = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Gamma_j} D_{kij} p_k d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma_j , \quad (4.19)$$

onde:

$$D_{kij}(P, S) = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} u_{lk,l}^* + \mu(u_{ik,j}^* + u_{jk,i}^*) \quad e \quad (4.20)$$

$$S_{kij}(P, S) = \frac{2\mu\nu}{1-2\nu} \delta_{ij} p_{lk,l}^* + \mu(p_{ik,j}^* + p_{jk,i}^*) . \quad (4.21)$$

4.2 Formulação viscoelástica do MEC (representação no contorno)

Esta abordagem é representada em função apenas de integrais de contorno, garantindo uma das principais vantagens da utilização do MEC em comparação aos métodos tradicionais. A formulação viscoelástica apresentada neste item é baseada no trabalho de MESQUITA (MESQUITA, 2002) e nos demais citados anteriormente.

Para a determinação das equações integrais apropriadas, deve-se aplicar a relação constitutiva específica para o modelo reológico que se queira considerar. Neste caso, foi aplicado o modelo de Kelvin-Voigt. Assim, aplicando-se a Eq. (2.11) na Eq. (4.4) e desprezando-se as forças de volume, tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* (C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} + \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm}) d\Omega = 0 . \quad (4.22)$$

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad e \quad (4.23)$$

$$\varepsilon_{kij}^* \gamma C_{ij}^{lm} \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{\varepsilon}_{lm} = \gamma \sigma_{klm}^* \dot{u}_{l,m} = \gamma \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} , \quad (4.24)$$

a Eq. (4.22) resulta em:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega = 0 . \quad (4.25)$$

Integrando por partes a segunda e terceira integrais da Eq. (4.25), e aplicando-se a Eq. (4.9), considerando as respectivas propriedades da função delta de Dirac e ainda sabendo-se que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, tem-se:

$$C_{ki} u_i(P) + \gamma C_{ki} \dot{u}_i(P) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma. \quad (4.26)$$

A Eq. (4.26) permite a solução das incógnitas no contorno do modelo. Para obtenção dos resultados em qualquer ponto do domínio aplica-se a identidade de Somigliana para o problema viscoelástico:

$$u_i(P) + \gamma \dot{u}_i(P) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma. \quad (4.27)$$

Para viabilizar a solução das equações integrais apresentadas acima o contorno do modelo é discretizado com n_e elementos de contorno. Portanto, as variáveis do problema podem ser aproximadas, parametrizando-as com relações aos seus valores nodais e fazendo o uso de funções de forma, resultando em:

$$\begin{aligned} p_i &= \sum_{l=1}^m \phi^l P_i^l, \\ u_i &= \sum_{l=1}^m \phi^l U_i^l, \\ \dot{u}_i &= \sum_{l=1}^m \phi^l \dot{U}_i^l. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Onde m é o número de nós do elemento, ϕ é a função de forma e o subscrito l refere-se ao nó do elemento de contorno.

Através da discretização representada pela Eq. (4.28), a Eq. (4.27) pode ser escrita algebricamente como:

$$\begin{aligned} C_{ki} U_i(P) + \gamma C_{ki} \dot{U}_i(P) &= \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e P_i^l - \\ &- \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e U_i^l - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e \dot{U}_i^l \end{aligned} \quad (4.29)$$

Para a obtenção dos deslocamentos U_l^m e das forças de superfície P_l^m nos n nós do contorno da geometria, pode-se escrever o sistema de equação diferencial temporal:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t), \quad (4.30)$$

onde t representa o tempo e as matrizes H e G são obtidas através das Eqs. (4.16) e (4.17).

Para a solução do sistema de equações temporal descrito na equação 4.30 é necessário aplicar uma técnica de integração temporal tal como Wilson- θ , Newmark, ou Houbolt. Porém, segundo MESQUITA, 2002, a aproximação linear dada por:

$$\dot{U}_{s+1} = \frac{U_{s+1} - U_s}{\Delta t}, \quad (4.31)$$

apresenta resultados suficientemente precisos para análises viscosas, sem o termo de aceleração. Logo, tem-se que a Eq. (4.30) pode ser expressa por:

$$\overline{H}U_{s+1} = GP_{s+1} + F_s, \quad (4.32)$$

onde:

$$\overline{H} = \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t}\right)H \quad \text{e} \quad (4.33)$$

$$F_s = \frac{\gamma}{\Delta t}HU_s. \quad (4.34)$$

Aplicando as condições de contorno e passando para o lado esquerdo as incógnitas e para o lado direito os valores conhecidos, chega-se a um sistema de equações lineares semelhante ao da Eq. (4.18).

Análogo ao que foi apresentado para a formação elastostática para a obtenção das tensões σ_{ij} nos pontos internos de um sólido a partir dos valores de deslocamento e forças de superfície nos nós do contorno, tem-se que:

$$\sigma_{ij}(P) = \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} D_{kij} p_k d\Gamma_j - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma_j - \gamma \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} \dot{u}_k d\Gamma_j \quad (4.35)$$

onde D e S são determinados pelas Eqs. (4.20) e (4.21).

4.3 Formulação elastoplástica do MEC (com integrais de domínio)

Nesta formulação apresentada será adotada a hipótese de que o modelo é submetido a tensões iniciais. Esta metodologia é uma das mais usadas nos problemas elastoplásticos e viscoplásticos. Porém, para a obtenção da solução de tais problemas, deve-se realizar a discretização do domínio para a integração das tensões iniciais.

No presente desenvolvimento, foi utilizado o modelo constitutivo elastoplástico de Prandtl-Reuss. Logo, aplicando a Eq. (2.21) na Eq. (4.4) e desprezando-se as forças de volume, tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* (C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} - \sigma_{ij}^p) d\Omega = 0 \quad . \quad (4.36)$$

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{kij}^* C_{ij}^{lm} \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* \varepsilon_{lm} = \sigma_{klm}^* u_{l,m} = \sigma_{kij}^* u_{i,j} \quad , \quad (4.37)$$

a Eq. (4.36) fica:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad . \quad (4.38)$$

Integrando-se por partes a segunda integral da Eq. (4.38) e aplicando a Eq. (4.9), considerando-se ainda as respectivas propriedades da função delta de Dirac e que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, obtém-se:

$$C_{ki} u_i(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad , \quad (4.39)$$

onde a terceira integral representa a parcela plástica do problema, σ_{ij}^p corresponde ao resíduo das componentes de tensão (tratada como tensão inicial) e ε_{kij}^* é a solução fundamental das deformações em um meio elástico infinito.

Para se obter os resultados em qualquer ponto do domínio, faz-se o uso da Identidade de Somigliana para problemas elastoplásticos:

$$u_k(p) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad . \quad (4.40)$$

Discretizando o contorno do modelo com n_e elementos de contorno e o domínio com n_c células internas, pode-se escrever a Eq. (4.39) na forma algébrica como:

$$C_{ki}U_i(P) = \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e P_l^i - \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e U_l^i + \\ + \sum_{c=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_n} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \bar{\phi}^l d\Omega_c \Delta \bar{\sigma}_l^p \quad (4.41)$$

onde $\phi^l, \bar{\phi}^l, m, n_n$ e $\Delta \bar{\sigma}_l^p$ são, respectivamente, a função de forma do elemento de contorno, a função de forma das células internas Ω_c , o número de nós do elemento de contorno, o número de nós da célula interna e os valores nodais dos resíduos de tensões plásticas.

A aplicação do MEC na análise elastoplástica é bastante semelhante ao caso da análise elastoestática, onde os resultados no contorno são obtidos pelo acréscimo do vetor F_σ no sistema, caso a função de plastificação seja violada. Logo o sistema fica expresso por:

$$HU = GP + F_\sigma, \quad (4.42)$$

onde o termo F_σ pode ser interpretado como sendo a parcela proveniente da influência das tensões iniciais. Assim como na formulação elastoestática do MEC, aplicam-se as condições de contorno e, passando para o lado esquerdo as incógnitas e para o lado direito os valores conhecidos, tem-se:

$$Av_o = F + F_\sigma \quad (4.43)$$

Por sua vez, o cálculo das tensões nos pontos internos da geometria do problema pode ser obtido pela seguinte expressão:

$$\sigma_{ij}(P) = \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Gamma_j} D_{kij} p_k d\Gamma_j - \sum_{j=1}^{n_e} \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma_j + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} E_{kmij} \sigma_{km}^o d\Omega_c \quad (4.44)$$

onde o termo E_{kmij} é obtido pela aplicação da equação de compatibilidade e da relação constitutiva sobre a solução fundamental ε_{kij}^* , sendo expressa por:

$$E_{kmij} = \frac{1}{4\pi(1-\nu)r^2} \left\{ \begin{aligned} &(1-2\nu)[\delta_{ik}\delta_{jm} + \delta_{jk}\delta_{im} - \delta_{ij}\delta_{mk} + 2\delta_{ij}r_{,m}r_{,k}] + \\ &+ 2\nu[\delta_{im}r_{,j}r_{,k} + \delta_{jk}r_{,i}r_{,m} + \delta_{ik}r_{,j}r_{,m} + \delta_{jm}r_{,i}r_{,k}] + \\ &+ 2\delta_{mk}r_{,i}r_{,j} - 8r_{,i}r_{,j}r_{,m}r_{,k} \end{aligned} \right\} \quad (4.45)$$

Sabe-se que os problemas regidos pelas equações que governam os problemas de elastoplasticidade e viscoplasticidade são expressos em termos de incrementos nas variáveis. Com isso, o processo numérico para a solução desses tipos de problemas solicita que os carregamentos sejam aplicados de forma incremental (VENTURINI, 1983).

Desta forma, um problema de análise elastoplástica e viscoplástica pode ser resolvido da seguinte forma (BEER, 2001):

1. Faz-se uma análise elastoestática obtendo-se o vetor v_0 por meio da resolução do sistema de equações descrito na Eq. (4.18);
2. As tensões σ^o são computadas em todos os nós pertencentes ao domínio do problema, utilizando a Identidade de Somigliana dada pela Eq. (4.12) do problema elastoestático;
3. O critério de escoamento é checado em todos os nós das células internas. Se $F > 0$ então os resíduos de tensão plástica $\Delta\bar{\sigma}_n^p$ serão computados;
4. O campo de tensões residuais σ_c^p em uma célula interna c qualquer, é obtido por uma simples interpolação dada por:

$$\sigma_c^p = \sum_{l=1}^{n_n} \int_{\Omega} \phi_{(\xi,\eta)}^l \Delta\bar{\sigma}_l^p d\Omega, \quad (4.46)$$

onde n_n é o número de nós em uma determinada célula interna c . O termo $\phi_{(\xi,\eta)}^l$ corresponde às funções de interpolação dos valores nodais da

célula c e $\overline{\Delta\sigma_c^p}$ são os valores nodais dos resíduos de tensões plásticas. As contribuições das células internas são adicionadas no sistema da Eq. (4.43) por meio do vetor F_σ que é dado por:

$$F_\sigma = \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega} \varepsilon^* \sigma_c^p d\Omega, \quad (4.47)$$

onde n_c é o número de células internas. Em seguida, determina-se a norma do vetor de forças residuais $\|F_\sigma\|$ para verificar a convergência das iterações;

5. O incremento na solução decorrente do acréscimo devido à influência das tensões de plastificação é dado pela solução do sistema abaixo:

$$A\Delta v = F, \quad (4.48)$$

onde Δv representa o incremento na resposta dos valores do contorno devido à influência das tensões residuais de plastificação. Portanto, a solução total no contorno pode ser computada por:

$$v = v_0 + \Delta v; \quad (4.49)$$

6. As tensões σ_i são computadas novamente em todos os nós da malha de células internas. Neste momento, o efeito das tensões iniciais deve ser considerado, utilizando-se a Identidade de Somigliana na forma mais geral para se avaliar o valor das tensões;

7. Os passos 3, 4, 5, 6 são repetidos até que a norma do vetor de forças residuais F_σ seja suficientemente pequena tal que:

$$\varepsilon \ll \varepsilon_{tol} = \frac{\|F_\sigma\|_{atual}}{\|F_\sigma\|_{inicial}}. \quad (4.50)$$

4.4 Formulação Viscoplastica do MEC (com integrais de domínio - sem comportamento instantâneo)

Neste item será apresentada uma formulação para materiais viscoplásticos sem comportamento instantâneo, descrito através de integrais de domínio a qual requer a discretização do interior do modelo. Esta abordagem é baseada no trabalho de MESQUITA (MESQUITA, 2002) e nos demais citados anteriormente, onde é adotada a hipótese de que o modelo é submetido a tensões iniciais.

Aplicando-se a Eq. (2.26) do modelo constitutivo viscoplástico sem comportamento instantâneo na Eq. (4.4) e desprezando-se as forças de volume, tem-se:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \left[C_{ij}^{lm} (\varepsilon_{lm} - \gamma \dot{\varepsilon}_{lm}) - \sigma_{ij}^p \right] d\Omega = 0 \quad . \quad (4.51)$$

Utilizando-se as Eqs. (4.23) e (4.24) tem-se que:

$$\int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* u_{i,j} d\Omega - \gamma \int_{\Omega} \sigma_{kij}^* \dot{u}_{i,j} d\Omega + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega = 0 \quad . \quad (4.52)$$

Integrando-se por partes a segunda e a terceira integral da Eq. (4.52) e aplicando a Eq. (4.9) com as respectivas propriedades da função delta de Dirac, e sabendo-se ainda que $\sigma_{kij}^* n_j = p_{ki}^*$, a Eq. (4.52) resulta em:

$$\begin{aligned} C_{ki} u_i(P) + \gamma C_{ki} \dot{u}_i(P) &= \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\ &+ \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \end{aligned} \quad (4.53)$$

A Eq. (4.53) é a representação integral da formulação viscoplástica do MEC, que leva em consideração o modelo reológico descrito no item 2.5. Vale ressaltar que a

única diferença da formulação viscoplástica para a viscoelástica é a presença do último termo da Eq. (4.47), responsável pelo comportamento plástico do material.

Para a determinação dos resultados nos pontos internos do domínio, aplica-se a Identidade de Somigliana para os problemas viscoplásticos:

$$u_i(P) + \gamma \dot{u}_i(P) = \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \int_{\Omega} \varepsilon_{kij}^* \sigma_{ij}^p d\Omega \quad (4.54)$$

Discretizando-se o contorno do modelo com n_e elementos de contorno e o domínio com n_c células internas, pode-se escrever a Eq. (4.53) na forma algébrica, como:

$$\begin{aligned} C_{ki} U_i(P) + \gamma C_{ki} \dot{U}_i(P) &= \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e P_l^i - \\ &- \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e U_l^i - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e \dot{U}_l^i + \\ &+ \sum_{c=1}^{n_c} \sum_{l=1}^{n_n} \int_{\Omega_c} \varepsilon_{kij}^* \bar{\phi}^l d\Omega_c \Delta \bar{\sigma}_l^p \end{aligned} \quad (4.55)$$

A aplicação do MEC na análise viscoplástica pode ser obtida pela solução do sistema de equações temporais:

$$HU(t) + \gamma H\dot{U}(t) = GP(t) + F_{\sigma}(t), \quad (4.56)$$

onde t representa o tempo e as matrizes H e G são obtidas através das Eqs. (4.16) e (4.17). O termo F_{σ} é obtido conforme algoritmo apresentado na formulação elastoplástica.

Para a solução do sistema de equações temporais descrito na Eq. (4.56) pode-se utilizar uma aproximação linear semelhante aos das Eqs. (4.29) a (4.32), sem o termo de aceleração, a qual apresenta resultados suficientemente precisos para análises viscosas (MESQUITA, 2002).

O mesmo algoritmo elastoplástico proposto por BEER (BEER, 2001), pode ser utilizado para análises viscoplásticas, com a exceção de que todo o procedimento deverá ser realizado para cada passo de tempo $(t + \Delta t)$.

Para a aplicação do procedimento apresentado acima, faz-se necessário a determinação do passo no tempo Δt . Para valores de Δt muito pequenos, várias interações se fazem necessárias para representar o comportamento do material, tornando-se computacionalmente inviável. De forma oposta, valores de Δt muito grandes podem acarretar instabilidades no modelo. A escolha mais econômica é aquela que utiliza o maior valor de Δt sem causar instabilidades POTTS, et al., 1999.

Um procedimento usualmente adotado para ajustar e limitar o crescimento do parâmetro Δt é apresentado pela Eqs. (4.57).

$$\Delta t_{s+1} = k \Delta t_s. \quad (4.57)$$

Experimentos sugerem valores para k sendo: $1.0 \leq k \leq 1.5$.

O procedimento apresentado pela Eqs. (4.57) é baseado empiricamente. Um procedimento mais aprimorado, baseado nas características dos materiais e nos critérios de resistência foi apresentado por Cormeau.

Para os critérios de resistência de von Mises, Tresca, Mohr-Coulomb e Drucker-Prager os limite para Δt são dados por:

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{4(1+\nu)}{3\gamma E} F_o, \text{ para von Mises} \quad (4.58)$$

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{1+\nu}{\gamma E} F_o, \text{ para Tresca} \quad (4.59)$$

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{4(1+\nu)(1-2\nu)}{\gamma E(1-2\nu + \sin^2 \phi)} F_o, \text{ para Mohr-Coulomb} \quad (4.60)$$

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{4(1+\nu)\sqrt{J_2}}{E\phi}$$

e

$$\Delta t_{\max} \leq \frac{4(1-\nu)F_o}{\gamma E \left[\beta^2 + \alpha^2 \left(\frac{1+\nu}{1-2\nu} \right) \right]}, \text{ para Drucker-Prager} \quad (4.61)$$

onde, $\alpha = \frac{\sin \phi}{3 + \sin^2 \phi}$ e $\beta = \sqrt{3}$.

Nos exemplos numéricos do capítulo 6 foram adotados valores constantes do parâmetro Δt . Esta metodologia foi também utilizada por MESQUITA, 2002 em seus exemplos viscoplásticos.

Conhecidos os valores de deslocamentos e forças de volume no contorno do modelo para um instante de tempo, pode-se obter as tensões totais σ_{ij} nos pontos internos do modelo pela seguinte expressão:

$$\begin{aligned} \sigma_{ij}(P) = & \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} D_{kij} p_k d\Gamma_j - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma_j - \gamma \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} \dot{u}_k d\Gamma_j + \\ & + \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} E_{kmij} \sigma_{km}^o d\Omega_c \end{aligned} \quad (4.62)$$

5.

NOVOS ALGORITMOS NÃO-LINEARES DO MEC

Em análises não-lineares com o MEC, a abordagem normalmente utilizada considera a discretização do domínio do modelo com células internas. Perde-se assim, uma das principais vantagens e características do MEC.

Ao contrário do que foi apresentado na formulação viscoplástica do MEC no Capítulo 4, o novo algoritmo para análise viscoplástica proposto neste trabalho discretiza somente o contorno do modelo. Assim, um dos principais objetivos deste estudo é o tratamento das integrais de domínio que ocorrem na análise não-linear. Logo, as equações algébricas do Método dos Elementos de Contorno poderão ser obtidas apenas dividindo-se o contorno de um modelo com n_e elementos de contorno. Para que isso seja possível, faz-se necessário a utilização de artifícios para levar as integrais de domínio para o contorno. Neste aspecto do trabalho, o desenvolvimento realizado por PEREIRA & NORONHA, 2003, NORONHA, 2001, NORONHA & DUMONT, 2001, NORONHA, MULLER & PERREIRA, 2004, NORONHA et al., 1996, e MULLER, 2004 foram fundamentais para a evolução do novo algoritmo proposto. Basicamente, o trabalho desenvolvido por PEREIRA, 2004, consiste no desenvolvimento de um algoritmo de visualização precisa com a discretização somente do contorno do modelo. MULLER, 2004 aplicou este novo algoritmo de visualização para solução de problemas elastoplásticos, sem a necessidade de discretização do domínio do modelo.

Neste capítulo será primeiramente apresentado o algoritmo desenvolvido por A. Muller, 2004, que trata do problema elastoplástico descrito através de integrais de contorno. Posteriormente, será apresentado o novo algoritmo para análise viscoplástica utilizando o MEC, sem a discretização do domínio do modelo.

5.1 Formulação elastoplástica do MEC (sem integrais de domínio)

Diferentemente da metodologia convencional, o que se pretende por meio deste algoritmo é a realização de análises elastoplásticas utilizando o MEC sem o uso de malhas de células internas.

Esta formulação foi desenvolvida por MULLER (2004), o qual utilizou o algoritmo de visualização proposto por PEREIRA & NORONHA (2003). Este algoritmo (mostrado no Anexo A) realiza a visualização precisa de resultados no domínio de um modelo a partir de valores somente do contorno, tornando possível a transformação de integrais de domínio para integrais de contorno.

Nesta abordagem de análise elastoplástica com o MEC, a metodologia geral do algoritmo envolve os seguintes procedimentos:

1. Assim como na metodologia convencional, faz-se uma análise linear elástica obtendo-se os valores de v_0 ;
2. Diferente da metodologia convencional, utiliza-se o algoritmo de visualização, apresentado no anexo A, para identificar de forma direta e automática as regiões onde a função de plastificação é igual a zero, $F = 0$ (figura 5.1);

Figura 5.1 - Identificação direta e automática de zonas plásticas.

3. Nas regiões onde o critério de resistência foi violado ($F > 0$), os resíduos de tensões plásticas σ^p devem ser computados. Assim, utilizando o algoritmo de visualização são traçados conjuntos de isocurvas para cada uma das componentes de σ^p . Em problemas bidimensionais, são traçados 3 conjuntos de isocurvas ($\sigma_{xx}^p, \sigma_{xy}^p, \sigma_{yy}^p$). Para a obtenção dos resíduos de tensão plásticas normalmente são empregadas técnicas de interpolação (BEER, 2001) ou algoritmos de retorno (SIMO; TAYLOR, 1986). Nesta abordagem é utilizado um algoritmo de retorno com novas características, baseadas nas técnicas utilizadas pelo algoritmo de visualização. Este algoritmo de retorno será apresentado em detalhes no item 5.1.1 deste trabalho.

4. Neste momento faz-se necessário adicionar a contribuição da parcela plástica ao sistema devido à influência das tensões plásticas. Essa contribuição é computada por:

$$F_\sigma = \sum_{z=1}^N \int_{\Omega_z} \varepsilon^* \sigma_z^p d\Omega_z, \quad (5.1)$$

onde N é o número de regiões plastificadas ($F > 0$). Para a determinação do vetor F_σ o presente algoritmo apresenta um tratamento inovador calculando apenas integrais de contorno. O algoritmo requer a divisão das regiões onde $F > 0$ (figura 5.2), aplicando-se o algoritmo de visualização para obter de forma direta e automática as isocurvas de tensão. Ao longo de cada isobanda, pode-se considerar que os resíduos de tensão plástica são constantes. Após isso, discretiza-se as isobandas nas regiões plastificadas com elementos de contorno curvos, a fim de considerar a influência das zonas de plastificação no sistema por meio do vetor F_σ . Considera-se que os componentes do tensor de resíduo de tensão plástica sejam constantes em cada isobanda. Esta hipótese é fundamental para transformar uma integral de domínio em uma integral de contorno.

Figura 5.2 - Tratamento das isocurvas de resíduos de tensões plásticas.

5. De maneira análoga à da metodologia convencional, o incremento Δv referente à contribuição da parcela plástica é obtido pela Eq. (4.48) e a solução total v é dada pela Eq. (4.49).
6. As tensões σ^i são computadas novamente, identificando as novas regiões plastificadas, porém tais regiões levam em consideração o efeito das tensões iniciais.
7. Os passos 3, 4, 5 e 6 são repetidos até que o critério de convergência seja satisfeito.

5.1.1 Algoritmo de retorno

Considerando que exista um ponto no modelo em que seu estado de tensão seja tal que $F(\sigma) > 0$, a idéia principal deste algoritmo de retorno é de buscar o ponto mais próximo da superfície do critério de resistência, ou seja, retornando a um estado de tensão onde $F(\sigma) = 0$.

Neste algoritmo são utilizadas as seguintes hipóteses de cálculo:

- Direção de caminamento dada pelo gradiente de função $\nabla F(\sigma)$, sendo esta uma analogia ao que foi adotado no algoritmo de visualização apresentado no Anexo A.
- Processo iterativo de Newton-Raphson;

Portanto este algoritmo de retorno fundamenta-se em um processo incremental-iterativo, onde a direção de retorno é a normal à superfície formada para um nível da função de escoamento $F = \text{constante}$. As interações prosseguem de acordo com o algoritmo de Newton-Raphson até que F_i seja muito pequena. Logo, os resíduos de tensão são obtidos por:

$$\sigma_{xx}^{s+1} = \sigma_{xx}^s - \left[\frac{F_i}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xx}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}} \right)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xx}} \right] \quad (5.2)$$

$$\sigma_{xy}^{s+1} = \sigma_{xy}^s - \left[\frac{F_i}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xx}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}} \right)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right] \quad (5.3)$$

$$\sigma_{yy}^{s+1} = \sigma_{yy}^s - \left[\frac{F_i}{\left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xx}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{xy}} \right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}} \right)^2} \cdot \frac{\partial F}{\partial \sigma_{yy}} \right] \quad (5.4)$$

5.1.3 Transformação de integrais para o contorno

A seguir será apresentado em detalhes o tratamento para obtenção do vetor F_σ sem a discretização do domínio do modelo. Este procedimento é muito semelhante ao cálculo dos termos da matriz G do MEC. Assim as integrações necessárias neste algoritmo são mais simples que as integrações da metodologia convencional, pois se baseiam em cálculos já existentes na análise linear. Seja o vetor da contribuição plástica dado por:

$$F_\sigma = F_l^i = \sum_{z=1}^N \int_{\Omega_{0z}} \varepsilon_{lmk}^* \sigma_{mk}^{0z} d\Omega_{0z}, \quad (5.5)$$

onde Ω_{0z} é a região do domínio do modelo onde $F > 0$.

Sabendo-se que:

$$\varepsilon_{lmk}^* = \frac{1}{2} (u_{lm,k}^* + u_{lk,m}^*), \quad (5.6)$$

e pela propriedade de simetria $u_{lm}^* = u_{ml}^*$ e $\sigma_{lm}^{0z} = \sigma_{ml}^{0z}$, a Eq. (5.5) pode ser reescrita como:

$$F_l^i = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Omega_{0zx}} u_{lm,k}^* \sigma_{mk}^{0zx} d\Omega_{0zx}, \quad (5.7)$$

onde S é o número de subdivisões em cada região sujeita a plastificação. A somatória em S surgiu devido à hipótese imposta de que o resíduo de tensões plásticas é considerado constante dentro de cada uma das subdivisões sujeitas a plastificação. Porém, como não é possível realizar esta hipótese com um único mapa de isobandas, o algoritmo de visualização utilizado considera a obtenção de três mapas de isobandas, uma para cada componente do tensor das tensões, superpondo os efeitos para se obter o vetor F_σ . Com isso, o tensor de resíduos de tensões plásticas é decomposto em três partes:

$$\sigma_{mk}^{0z} = \sigma_{mk}^{A0z} + \sigma_{mk}^{B0z} + \sigma_{mk}^{C0z}, \quad (5.8)$$

onde:

$$\sigma_{mk}^{0z} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^p & \sigma_{xy}^p \\ \sigma_{xy}^p & \sigma_{yy}^p \end{bmatrix}, \quad (5.9)$$

$$\sigma_{mk}^{A0z} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx}^p & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \sigma_{mk}^{B0z} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{yy}^p \end{bmatrix}, \sigma_{mk}^{C0z} = \begin{bmatrix} 0 & \sigma_{xy}^p \\ \sigma_{xy}^p & 0 \end{bmatrix}$$

Pelo Teorema do Divergente, ou Teorema de Gauss, tem-se que:

$$\int_{\Omega} w_{i,j} d\Omega = \int_{\Gamma} w_i n_j d\Gamma, \quad (5.10)$$

onde w_i são as componentes de uma função vetorial e n_j são as componentes do vetor unitário normal externo ao contorno.

Como o termo σ_{mk}^{0zx} da Eq. (5.5) é constante, aplicando-se o teorema do Divergente e superpondo-se os efeitos conforme a Eq. (5.7) e (5.8) tem-se:

$$F_l^i = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* n_k \overline{\sigma_{mk}^{A0zx}} d\Gamma_{A0s} + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{B0s}} u_{lm}^* n_k \overline{\sigma_{mk}^{B0zx}} d\Gamma_{B0s} +$$

$$+ \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{C0s}} u_{lm}^* n_k \overline{\sigma_{mk}^{C0zx}} d\Gamma_{C0s} \quad (5.11)$$

onde Γ_{A0s} , Γ_{B0s} e Γ_{C0s} , são os contornos de cada sub-região plastificada S para o campo de tensões σ_{xx}^p , σ_{yy}^p e σ_{xy}^p , respectivamente.

Pode-se notar que o procedimento de calculo apresentado acima é semelhante ao utilizado para o cálculo dos componentes da matriz G , observando-se que a função n_k é interpolada usando as funções de forma definidas para um elemento de contorno. No caso de elemento quadrático no plano, esta interpolação é dada por:

$$n_k = N_b \hat{n}. \quad (5.12)$$

Através de um re-arranjo nos componentes da expressão anterior, pode-se escrever:

$n = N \hat{n}$, onde:

$$N = \begin{bmatrix} N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 & 0 \\ 0 & N_1 & 0 & N_2 & 0 & N_3 \end{bmatrix} \text{ ou} \quad (5.13)$$

$$\hat{n}^T = [\hat{n}_1^1 \quad \hat{n}_2^1 \quad \hat{n}_1^2 \quad \hat{n}_2^2 \quad \hat{n}_1^3 \quad \hat{n}_2^3],$$

onde $\hat{n}_k^b$ refere-se à componente k (1, direção x; 2 direção y) do vetor normal do nó b .

Assim a Eq. (5.11) fica:

$$\begin{aligned} F_l^i = & \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \bar{\sigma}_{mk}^{A0zx} d\Gamma_{A0s} + \\ & + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{B0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \bar{\sigma}_{mk}^{B0zx} d\Gamma_{B0s} + \\ & + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{C0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \bar{\sigma}_{mk}^{C0zx} d\Gamma_{C0s} \end{aligned} \quad (5.14)$$

Uma vez obtido o vetor F_σ na forma apresentada, a atualização da resposta no contorno pode ser obtida de maneira automática por meio das Eqs. (4.48) e (4.49).

5.2 Formulação viscoplástica do MEC (sem integrais de domínio)

Como apresentado anteriormente (Item 4.4), para a realização de análises estruturais com o MEC usando materiais viscoplásticos, é necessário a discretização de células no domínio do modelo. O algoritmo proposto neste trabalho apresenta uma abordagem para análises de problemas viscoplásticos utilizando apenas a discretização do contorno. Para levar as integrais de domínio para o contorno faz-se necessário a utilização de certos artifícios. Analogamente ao que foi realizado por MULLER (2004), o algoritmo de visualização (Anexo A) desenvolvido por PEREIRA & NORONHA (PEREIRA; NORONHA, 2003) é a peça fundamental para a construção do novo algoritmo proposto.

O algoritmo proposto foi formulado considerando a relação constitutiva para materiais viscoplásticos sem comportamento instantâneo, conforme apresentado no item 2.5.

Para a realização das integrações temporais, o algoritmo proposto utiliza uma técnica de aproximação linear, a qual apresenta resultados suficientemente precisos para análises viscosas, sem o termo de aceleração. Esta técnica foi utilizada na formulação viscoelástica, conforme item 4.2.

Nesta abordagem de análise viscoplástica com o MEC representado no contorno, a metodologia geral envolve os seguintes procedimentos:

Discretização do modelo em elementos de contorno;

1. Cálculo de G, H e $\bar{H}$ pelas Eqs. (4.16), (4.17) e (4.33), respectivamente;
2. Para um tempo inicial t_1 considera-se que não haja plastificação no modelo. Logo, realiza-se uma análise viscoelástica pela solução do sistema de equação diferencial temporal descrito na Eq. (4.30).
Assim ficam conhecidos os valores dos deslocamentos, forças de superfície e conseqüentemente, as tensões no contorno do modelo;
3. Aplica-se o algoritmo de visualização, apresentado no anexo A, a fim de identificar de forma automática as regiões do contorno onde o critério de plastificação foi violado. Se não houver plastificação em nenhuma região do modelo ($F < 0$) os resultados obtidos pela análise viscoelástica são definitivos para este instante de tempo. Logo, parte-se para a análise no instante de tempo t_2 . Caso haja plastificação em alguma região do modelo ($F < 0$) a parcela de plastificação F_σ deve ser considerada. Logo, parte-se para o passo seguinte;
4. Análogo ao que foi realizado no algoritmo elastoplástico com representação no contorno, os resíduos de tensões plásticas σ^p devem

ser computados. Assim, utilizando o algoritmo de visualização (anexo A) são traçados os conjuntos de isocurvas para cada uma das componentes de σ_{ij}^P , conforme a Figura 5.1 ilustra. Logo, aplicando o algoritmo de retorno apresentado no item 5.1.2 determina-se os resíduos de tensão plástica.

5. Neste passo parte-se para a determinação do vetor da parcela plástica F_σ que deverá ser adicionada ao sistema. Essa contribuição é computada por:

$$F_\sigma = \sum_{z=1}^N \int_{\Omega_z} \varepsilon^* \sigma_z^P d\Omega_z, \quad (5.15)$$

onde N é o número de regiões plastificadas ($F > 0$). Contudo, ainda assim é necessário a discretização do domínio.

Para a determinação do vetor F_σ este algoritmo faz o mesmo tratamento realizado no algoritmo elastoplástico. Neste algoritmo proposto as integrais de domínio da Eq. (5.13) recebem o mesmo tratamento realizado por MULLER (2004) o qual foi apresentado anteriormente no item 5.1 deste capítulo. Assim, discretiza-se as isobandas nas regiões plastificadas com elementos de contorno curvos, conforme a Figura 5.2 ilustra, afim de considerar a influência das zonas de plastificação no sistema por meio do vetor F_σ .

Considera-se que os componentes do tensor de resíduo de tensão plástica sejam constantes em cada isobanda, pelo procedimento apresentado no item 5.1.2, transforma-se as integrais de domínio em integrais de contorno:

$$\begin{aligned}
F_l^i = & \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \bar{\sigma}_{mk}^{A0zx} d\Gamma_{A0s} + \\
& + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{B0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \bar{\sigma}_{mk}^{B0zx} d\Gamma_{B0s} + \\
& + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{C0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \bar{\sigma}_{mk}^{C0zx} d\Gamma_{C0s}
\end{aligned} \tag{5.16}$$

6. De maneira análoga à da metodologia convencional, o incremento Δv referente à contribuição da parcela plástica é obtido pela Eq. (4.48) e a solução total v é dada pela Eq. (4.49).
7. As tensões σ^i são computadas novamente, identificando-se as novas regiões sujeitas à não-linearidade ainda para o instante de tempo t_1 , porém agora essas regiões são identificadas levando-se em conta o efeito das tensões iniciais.
8. Os passos 3, 4, 5, 6, 7 e 8 são repetidos até que o critério de convergência seja satisfeito. Após isto parte-se para o instante de tempo t_2 .
9. O procedimento acima deve ser realizado até que seja concluído a análise do último instante de tempo t_n .

Assim o campo de deslocamentos fica expresso por:

$$\begin{aligned}
u_i(p) + \dot{n}_i(p) = & \int_{\Gamma} u_{ki}^* p_i d\Gamma - \int_{\Gamma} p_{ki}^* u_i d\Gamma - \gamma \int_{\Gamma} p_{ki}^* \dot{u}_i d\Gamma + \\
& + \sigma_{mk}^0 \int_{\Gamma_s} u_{lm}^* n_k d\Gamma_s
\end{aligned} \tag{5.17}$$

Logo, discretizando o modelo, tem-se:

$$\begin{aligned}
C_{ki}U_i(P) + \gamma C_{ki}\dot{U}_i(P) = & \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} u_{ki}^* \phi^l d\Gamma_e P_l^i - \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma_e} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma \\
& - \gamma \sum_{e=1}^{n_e} \sum_{l=1}^m \int_{\Gamma} p_{ki}^* \phi^l d\Gamma \dot{U}_l^i + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{A0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \overline{\sigma}_{mk}^{A0zx} d\Gamma_{A0s} + \\
& + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{B0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \overline{\sigma}_{mk}^{B0zx} d\Gamma_{B0s} + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_{C0s}} u_{lm}^* N_b \hat{n}_k^b \overline{\sigma}_{mk}^{C0zx} d\Gamma_{C0s}
\end{aligned} \tag{5.18}$$

As Eqs. (5.17) e (5.18) mostram que é possível a realização de análises não-lineares considerando materiais viscoplásticos somente com a discretização do contorno do problema, não necessitando discretizar o domínio com células. De fato, este é o principal objetivo deste trabalho, aproveitar ao máximo as principais vantagens oferecidas pelo MEC também em análises não-lineares para materiais viscoplásticos.

No intuito de apresentar os procedimentos descritos acima de forma mais clara e objetiva, apresenta-se na Figura 5.3 uma visão geral do algoritmo para auxiliar a compreensão da abordagem proposta.

ALGORITMO PARA ANÁLISE VISCOPLÁSTICA COM O MEC (REPRESENTAÇÃO NO CONTORNO)

Figura 5.3 - Visão geral do algoritmo proposto.

5.2.1 Tratamento para o calculo das tensões no Domínio

Analisando a Eq. (4.62), percebe-se a presença de uma integral de domínio corresponde à parcela devido a contribuição das tensões residuais (ou tensões iniciais) que agora são consideradas como sendo aplicadas nas zonas plásticas. Os valores atualizados no contorno, devido à influência do vetor F_σ , já estão sendo considerados nas três primeiras integrais do lado direito da Eq. (4.62). Porém, para que seja possível a realização de análises viscoplásticas sem o uso de malhas adicionais, a parcela referente a integração nas zonas plásticas precisa ser tratada de maneira análoga ao vetor F_σ . A contribuição das tensões residuais será computada em uma parcela chamada de vetor C . Logo, para um ponto pertencente ao domínio temos que:

$$C_l^i = \sum_{c=1}^{n_c} \int_{\Omega_c} E_{kmij} \sigma_{km}^o d\Omega_c \quad (5.19)$$

Como a equação que define as tensões totais nos pontos internos é obtida por meio de transformações (equações de compatibilidade e constitutivas) na equação em deslocamentos nos pontos internos, a relação entre os termos ε^* e u^* é a mesma da que ocorre entre os termos E_{kmij} e D_{kij} (A. MULLER, 2004).

$$E_{kmij} = \frac{1}{2} (D_{kij,m} + D_{kij,k}) \quad (5.20)$$

por simetria temos que $\sigma_{km}^{0z} = \sigma_{mk}^{0z}$, logo C_l^i pode ser escrito como:

$$C_l^i = \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Omega_{0,xz}} D_{kij,m} \sigma_{mk}^{0zx} d\Omega_{0,xz} \quad (5.21)$$

onde S é o número de subdivisões em cada região sujeita a plastificação.

Como, por hipótese, os termos σ_{mk}^{A0zx} , σ_{mk}^{B0zx} e σ_{mk}^{C0zx} são constantes, pode-se utilizar o Teorema do Divergente, ou Teorema de Gauss. Assim tem-se que:

$$\begin{aligned}
C_l^i = & \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_s} D_{kij} n_k \overline{\sigma}_{mk}^{A0zx} d\Gamma_{A0s} + \\
& + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_s} D_{kij} n_k \overline{\sigma}_{mk}^{B0zx} d\Gamma_{B0s} + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_s} D_{kij} n_k \overline{\sigma}_{mk}^{C0zx} d\Gamma_{C0s}
\end{aligned} \tag{5.22}$$

Assim podemos chegar na expressão final para o cálculo das tensões totais descrita apenas com integrais de contorno, dada por:

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij}(P) = & \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} D_{kij} p_k d\Gamma_j - \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} u_k d\Gamma_j - \gamma \sum_{j=1}^n \int_{\Gamma_j} S_{kij} \dot{u}_k d\Gamma_j + \\
& + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_s} D_{kij} n_k \overline{\sigma}_{mk}^{A0zx} d\Gamma_{A0s} + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_s} D_{kij} n_k \overline{\sigma}_{mk}^{B0zx} d\Gamma_{B0s} + \\
& + \sum_{z=1}^N \sum_{x=1}^S \int_{\Gamma_s} D_{kij} n_k \overline{\sigma}_{mk}^{C0zx} d\Gamma_{C0s},
\end{aligned} \tag{5.23}$$

podendo ser também escrita como:

$$\sigma_{ij}(P) = \overline{G}P_{s+1} - \overline{H}U_{s+1} - \gamma \overline{H}\dot{U}_{s+1} + C_{s+1} \tag{5.24}$$

Com algumas manipulações algébricas determina-se a expressão para obter as tensões elastoplásticas σ_{ij}^{ep} :

$$\sigma_{s+1}^{ep} = \left[\sigma_{s+1} + \frac{\gamma}{\Delta t} \sigma_s^{ep} - \gamma \left(\frac{\sigma_{s+1}^p - \sigma_s^p}{\Delta t} \right) \right] / \left(1 + \frac{\gamma}{\Delta t} \right) \tag{5.25}$$

No processo em que o algoritmo de visualização verifica se em algum nó pertencente ao contorno a função de plastificação é violada, esta verificação é realizada pela com base nas tensões elastoplásticas calculadas pela Eq. (5.25). Note que a Eq. (5.25) necessita do valor da tensão total σ_{s+1} .

As tensões viscosas são obtidas de forma mais simples e direta, aplicando-se a Eq. (2.23).

5.3 Tratamento das forças de massa

Como pode ser visto na terceira integral do lado esquerdo da Eq. (4.4), pela formulação clássica, é necessário discretizar o domínio do modelo para considerar o efeito das forças de massa. Entretanto, uma técnica proposta por BANERJEE & PAPE (BANERJEE; PAPE, 1987) elimina a necessidade da discretização do domínio.

A obtenção da solução de uma equação diferencial não-homogênea linear é dada pela soma da solução u^h , referente à equação homogênea $L(u^h) = 0$, e da solução particular u^p que satisfaz a equação $L(u^h) + b_i = 0$, como mostra a Eq. (5.26).

$$u = u^h + u^p. \quad (5.26)$$

Sendo a equação de *Navier*, dada pela Eq. (3.7), uma equação diferencial não-homogênea e desconsiderando o termo referente as forças de domínio b_i , tem-se que a Identidade de *Somigliana* é a solução referente à equação homogênea.

Considerando as forças de domínio b_i como sendo forças gravitacionais, onde:

$$b_1 = 0 \quad , \quad b_2 = -\rho g, \quad (5.27)$$

Sendo g a aceleração da gravidade e ρ a densidade de massa, tem-se as seguintes soluções particulares para a equação de *Navier*:

$$\begin{aligned} u_2^p &= \frac{-\rho g}{4\mu(\lambda + \mu)} \lambda x_1 x_2 \quad e \\ u_2^p &= \frac{\rho g}{8\mu(\lambda + \mu)} [(\lambda + 2\mu)x_2^2 + \lambda x_2^2] \end{aligned} \quad (5.28)$$

onde x_1 e x_2 são as coordenadas do ponto onde as soluções particulares em termos de deslocamentos estão sendo avaliadas.

Já as forças de superfícies associadas às soluções particulares em termos de deslocamentos são dadas por:

$$p_1^p = 0 \quad e \quad p_2^p = \rho g x_2 n_2. \quad (5.29)$$

Assim, para que essa técnica seja introduzida na formulação convencional do MEC parte-se do sistema de equações dado pela Eq. (4.15), obtendo-se:

$$Hu^h = Gp^h, \quad (5.30)$$

onde u^h e p^h são vetores das soluções particulares em deslocamentos e forças de superfícies, respectivamente.

Logo, obtemos:

$$H(u - u^p) = G(p - p^p)., \quad (5.31)$$

Neste momento, aplicar as condições de contorno na Eq. (5.31) obtendo-se:

$$Ax = b + Gp^p - Hu^p. \quad (5.31)$$

6.

EXEMPLOS NUMÉRICOS

Neste capítulo são apresentados alguns exemplos numéricos que visam validar o algoritmo viscoplástico proposto neste trabalho. Para isso, são realizadas comparações de resultados com exemplos encontrados na literatura, com o MEF e também com o algoritmo elastoplástico apresentado no item 5.1.

Este novo algoritmo viscoplástico foi implementado computacionalmente e incorporado em uma plataforma para análise numérica com o MEC em desenvolvimento pelo grupo de pesquisa coordenado pelo Prof. Marcos Noronha. Os resultados dos exemplos apresentados neste capítulo para as análises viscoplásticas, viscoelásticas e elastoplástica com o MEC, foram realizadas com a referida plataforma.

6.1 Exemplo 1

Neste primeiro exemplo é simulada a ação de uma sapata corrida sobre o solo resultando em uma carga $p = 46.0 \text{ kN/m}^2$. Devido à simetria do problema apenas a metade da geometria será discretizada. Considerou-se para este exemplo o critério de Mohr-Coulomb, onde $c = 0.3 \text{ kN/m}^2$ e $\phi = 20^\circ$, e o parâmetro viscoso $\gamma = 9.3/\text{dias}$. O passo de tempo Δt foi considerado constante e igual a 2 e 10 dias. A Figura 6.1 apresenta o modelo e a discretização em elementos de contorno, bem como suas demais características.

Propriedades

$$E = 30000 \text{ kN/m}^2, \nu = 0.3$$

$$\gamma = 9,3/\text{dias}, \Delta t = \begin{cases} 10 \text{ dias} \\ 2 \text{ dias} \end{cases}$$

$$p = 46,0 \text{ kN/m}^2$$

Critério de Mohr Coulomb

$$\phi = 20^\circ, c = 10 \text{ kN/m}^2$$

Figura 6.1 - Características do Exemplo 1.

Os gráficos apresentados nas figuras 6.2 e 6.3 apresentam os deslocamentos verticais para as análises viscoelástica e viscoplástica do ponto A do modelo em função do tempo, considerando o passo no tempo Δt igual a 2 e 10 dias.

Figura 6.2 - Resultados em deslocamentos das análises viscoelásticas e viscoplásticas considerando $\Delta t = 10$.

Figura 6.3 - Resultados em deslocamentos das análises viscoelásticas e viscoplásticas considerando $\Delta t = 2$.

Pode-se notar que para este nível de carregamento a influência da parcela da plasticidade não se manifesta de forma significativa. Verifica-se também que a distribuição dos deslocamentos ao longo do tempo comporta-se de melhor forma considerando $\Delta t = 2$ dias, sendo que tanto a análise viscoelástica quanto a viscoplástica utilizam modelos reológicos sem deformação inicial.

A Tabela 1 apresenta os resultados numéricos das análises viscoelásticas e viscoplásticas para Δt igual a 2 e 10 dias, além dos resultados elastoplásticos obtidos pela análise com o MEC, MEF e também pela literatura.

Tabela 1 - Resultados numéricos do Exemplo 1

Análise	Discretização	Deslocamento Vertical nó A (m)
MEC-Viscoelástico $\Delta t = 10 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,012304036
MEC-Viscoplástico $\Delta t = 10 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,012466285
MEC-Viscoelástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,012301358
MEC-ViscoPlástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,012457382
MEC-Elastoplástico (Muller, 2004)	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,012366565
MEC-Elastoplástico (Telles, 1983)	-	~ -0,0125
MEF-Elastoplástico (ADINA v.8.1)	4.608 elementos isoparamétricos de 9 nós – 18.721 nós	-0,01244470

Analisando a Tabela1 pode-se verificar a grande proximidade dos valores do algoritmo viscoplástico proposto neste trabalho (assumindo $t \rightarrow \infty$) com relação aos valores calculados pelas análises elastoplásticas realizadas com o MEC, MEF e também com relação aos valores apresentados por Telles em 1983.

Considerando $\Delta t = 2 \text{ dias}$ a plastificação do modelo iniciou-se no 22º dia. A convergência de 0,01% em deslocamentos ocorreu no 86º dia. A Figura 6.4 apresenta a evolução dos incrementos plásticos σ_{yy}^i ao longo do tempo.

Figura 6.4 - Evolução no tempo dos incrementos plásticos σ_{yy}^i .

Na Figura 6.5 são apresentadas as deformações plásticas e elásticas com relação à configuração de referência no 86^o dia. Pode-se novamente perceber que neste exemplo os deslocamentos plásticos adicionais não são significativos.

Figura 6.5 - Deformada elástica e plástica do exemplo 1 no 86º dia.

6.2 Exemplo 2

Neste segundo exemplo é simulado o mesmo modelo de sapata corrida analisado no exemplo 1, porém, considerando uma carga maior $p = 60.0 \text{ kN/m}^2$. As demais propriedades são idênticas às do exemplo anterior.

Os gráficos apresentados nas Figuras 6.6 e 6.7 apresentam os deslocamentos verticais para as análises viscoelástica e viscoplástica do ponto A do modelo em função do tempo, considerando o passo no tempo Δt igual a 1, 2 e 10 dias.

Figura 6.6 - Resultados em deslocamentos das análises viscoelásticas e viscoplásticas considerando $\Delta t = 10$.

Figura 6.7 - Resultados em deslocamentos das análises viscoelásticas e viscoplásticas considerando $\Delta t = 1$ e 2 .

Pode-se notar que para este nível de carregamento a influência da parcela da plasticidade se manifesta de forma significativa. Verifica-se também que a distribuição dos deslocamentos ao longo do tempo comporta-se de mesma forma considerando $\Delta t = 1$ e 2 dias .

A Tabela 2 apresenta os resultados numéricos das análises viscoelásticas e viscoplásticas para Δt igual a 2 e 10 dias, além dos resultados elastoplásticos obtidos pela análise com o MEC e MEF.

Tabela 2 - Resultados numéricos do Exemplo 2.

Análise	Discretização	Deslocamento Vertical nó A (m)
MEC-ViscoElastico $\Delta t = 10 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,016048743
MEC-Viscoplástico $\Delta t = 10 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,017243543
MEC-Viscoelástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,016048766
MEC-ViscoPlastico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,017231995
MEC-Elastoplástico (Muller, 2004)	18 elementos quadráticos – 36 nós	-0,017509034
MEF-Elastoplástico (ADINA v.8.1)	4.608 elementos isoparamétricos de 9 nós – 18.721 nós	-0,017011308

Analisando a Tabela 2 pode-se verificar a boa concordância dos valores do algoritmo viscoplástico proposto neste trabalho (assumindo $t \rightarrow \infty$) com relação aos valores calculados pelas análises elastoplásticas realizadas com o MEC e MEF.

Considerando $\Delta t = 2 \text{ dias}$ a plastificação do modelo iniciou-se no 10º dia. A convergência de 0,01% em deslocamentos ocorreu no 88º dia. A Figura 6.8 apresenta a evolução dos incrementos plásticos σ_{yy}^i ao longo do tempo.

Figura 6.8 - Evolução no tempo dos incrementos plásticos σ_{yy}^i .

Na Figura 6.9 são apresentadas as deformações plásticas e elásticas, com relação à configuração de referência no 88^o dia, onde os deslocamentos plásticos se apresentam de forma significativa.

Figura 6.9 - Configuração deformada elástica e plástica do exemplo 2 no 88^o dia.

6.3 Exemplo 3

Este terceiro exemplo, clássico em análises com MEC/MEF, é simulado a ação de um carregamento distribuído tracionando uma chapa metálica em formato de cunha. Considerou-se para este exemplo o critério de von Mises onde $\sigma_0 = 24.3 \text{ kgf/mm}^2$ além disso, foi considerado o parâmetro viscoso $\gamma = 5.5/\text{dias}$. O passo no tempo Δt foi considerado igual a 2 dias. A Figura 6.10 apresenta o modelo e a discretização em elementos de contorno, bem como suas demais características.

Figura 6.10 - Características do Exemplo 6.3

O gráfico mostrado na Figura 6.12 apresenta os deslocamentos verticais para as análises viscoelástica e viscoplástica do ponto A do modelo em função do tempo.

Figura 6.11 - Resultados em deslocamentos das análises viscoelásticas e viscoplásticas

A Tabela 3 apresenta os resultados numéricos das análises viscoelásticas e viscoplásticas, além dos resultados elastoplásticos obtidos pela análise com o MEC, MEF e também pela literatura.

Tabela 3 - Resultados numéricos do Exemplo 3 .

Análise	Discretização	Deslocamento Vertical nó A (mm)
MEC-Viscoelástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	22 elementos quadráticos – 44 nós	0,0487303
MEC-ViscoPlástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	22 elementos quadráticos – 44 nós	0,0521972
MEC-Elastoplástico (Muller, 2004)	22 elementos quadráticos – 44 nós	0,0502100
MEC-Elastoplástico (Telles, 1983)	-	~ 0,0516250
MEF-Elastoplástico (ADINA v.8.1)	2.788 elementos isoparamétricos de 9 nós – 11.337 nós	0,0507067

Analisando a Tabela 3 pode-se verificar a grande paridade dos resultados do algoritmo viscoplástico proposto neste trabalho (assumindo $t \rightarrow \infty$) com relação aos

valores calculados pelas análises elastoplásticas realizadas com o MEC, MEF e também com relação aos valores encontrados na literatura.

Considerando $\Delta t = 2 \text{ dias}$ a plastificação do modelo ocorreu no 4º dia. A convergência de 0,01% em deslocamentos ocorreu no 80º dia. A Figura 6.13 apresenta a evolução dos incrementos plásticos σ_{xx}^i ao longo do tempo.

Figura 6.12 - Evolução no tempo dos incrementos plásticos σ_{xx}^i .

Na Figura 6.14 são apresentadas as deformações plásticas e elásticas com relação à configuração de referência no 80º dia, onde pode-se verificar que a influência da plastificação ocorre de forma significativa.

Figura 6.13 - Deformada elástica e plástica do exemplo 3 no 80^o dia.

6.4 Exemplo 4

O presente exemplo estuda a ação de um carregamento distribuído atuando sobre um talude. Devido à simetria do problema apenas a metade da geometria será discretizada. Considerou-se para este exemplo o critério de Mohr-Coulomb, onde $c = 0.3tf/m^2$ e $\phi = 20^\circ$, e o parâmetro viscoso $\gamma = 5.5/dias$. O passo no tempo Δt foi considerado constante e igual a 2 dias. A Figura 6.4 apresenta o modelo e a discretização em elementos de contorno, bem como suas demais características.

Figura 6.14 - Características do Exemplo 4 .

O gráfico apresentado na Figura 6.16 apresenta os deslocamentos verticais para as análises viscoelástica e viscoplástica do ponto A do modelo em função do tempo, considerando o passo no tempo Δt igual a 2 dias.

Figura 6.15 - Resultados em deslocamentos das análises viscoelásticas e viscoplásticas.

A Tabela 4 apresenta os resultados numéricos das análises viscoelásticas e viscoplásticas, além dos resultados elastoplásticos obtidos pela análise com o MEC e o MEF.

Tabela 4 - Resultados numéricos do Exemplo 4 .

Análise	Discretização	Deslocamento Vertical nó A (mm)
MEC-Viscoelástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	21 elementos quadráticos – 42 nós	-0,00455815
MEC-ViscoPlástico $\Delta t = 2 \quad t \rightarrow \infty$	21 elementos quadráticos – 42 nós	-0,00470185
MEC-Elastoplástico (Muller, 2004)	21 elementos quadráticos – 42 nós	-0,00478180
MEF-Elastoplástico (ADINA v.8.1)	1.467 elementos isoparamétricos de 9 nós – 5.977 nós	-0,00468978

Avaliando a Tabela 4 verifica-se a boa uniformidade dos resultados do algoritmo viscoplástico proposto neste trabalho (assumindo $t \rightarrow \infty$) com relação aos valores calculados pelas análises elastoplásticas realizadas com o MEC e MEF.

Considerando $\Delta t = 2 \text{ dias}$ a plastificação do modelo iniciou-se no 20º dia. A convergência de 0,01% em deslocamentos ocorreu no 92º dia. A Figura 6.17 apresenta a evolução dos incrementos plásticos σ_{xx}^i ao longo do tempo.

Figura 6.16 - Evolução no tempo dos incrementos plásticos σ_{yy}^i .

A Figura 6.18 apresenta as deformações plásticas e elásticas com relação a configuração de referência no 92º dia, onde pode-se verificar que a influência da plastificação ocorre de forma menos expressiva.

Figura 6.17 - Deformada elástica e plástica do exemplo 3 no 92^o dia.

7.

CONCLUSÕES

A proposta inicial deste trabalho foi desenvolver uma metodologia capaz de garantir uma das principais vantagens da utilização do MEC em análises não-lineares: a discretização apenas do contorno do modelo. Muitos trabalhos já foram desenvolvidos nesta área, porém, sem conseguir eliminar totalmente a discretização do domínio. O algoritmo apresentado neste trabalho mostra claramente que é possível a realização de análises viscoplásticas com o MEC sem a discretização do domínio do modelo com malhas de células internas. Vale ressaltar que o algoritmo proposto neste trabalho só foi realizado devido aos trabalhos anteriores dos pesquisadores André Muller, André Brabo, Calebe Paiva e Marcos A. M. Noronha, que desenvolveram e otimizaram mecanismos fundamentais como o algoritmo de visualização, técnicas de tratamento de integrais singulares e o algoritmo de retorno.

Este algoritmo foi implementado e incorporado em uma plataforma computacional em desenvolvimento para análises com MEC. A parte viscoplástica implementada nesta plataforma ainda requer alguns ajustes que irão otimizar ainda mais o algoritmo proposto. Mesmo assim, no geral, a implementação mostrou-se estável e apresentando bons resultados.

As análises numéricas realizadas no capítulo 6 mostram que os resultados obtidos com o algoritmo proposto apresentam grande conformidade com os resultados das análises elastoplásticas realizadas com MEF, MEC e também com os resultados encontrados na literatura, validando o algoritmo abordado neste trabalho.

Não foram encontrados exemplos de análises viscoplásticas formulados conforme o modelo reológico utilizado no algoritmo proposto para que pudessem ser confrontados os resultados durante a evolução no tempo, no entanto, os resultados obtidos apresentaram um comportamento qualitativo de acordo com o esperado.

Foi também observado neste trabalho, que a correta determinação do passo de tempo Δt é fundamental para a obtenção de bons resultados. Neste trabalho, o Δt foi

determinado por meio de sucessivas tentativas, onde os resultados finais dos exemplos realizados no capítulo 6 foram obtidos com o emprego do maior Δt que não gerasse grandes discordâncias nos resultados em comparação aos demais passos de tempo. Nos exemplos 1 e 2 são apresentados os resultados das análises viscoplásticas considerando $\Delta t = 10$, logo, observou-se que para esse Δt , os resultados divergiam muito dos resultados obtidos com o emprego do $\Delta t = 2$. Nestes dois exemplos foram também realizadas análises considerando $\Delta t = 0,25$, $\Delta t = 0,5$ e $\Delta t = 1$ e estes não apresentaram grandes diferenças nos resultados com relação a análise realizada utilizando $\Delta t = 2$. Portanto, para estes dois exemplos o emprego de $\Delta t = 2$ mostrou-se ser mais econômico e seguro. Esta metodologia foi também empregada nos demais exemplos realizados neste trabalho, porém são apresentados os resultados da análise utilizando o Δt escolhido.

Outro interessante resultado deste trabalho foi o desenvolvimento de uma ferramenta computacional capaz de realizar animações da evolução das zonas plásticas e dos incrementos de tensão. Auxiliando ao operador do software a compreender melhor os resultados, melhorando sua interatividade com o processamento.

Este estudo fecha o planejamento de trabalho realizado pelo grupo de pesquisas coordenado pelo Professor Dr. Marcos A. M. Noronha onde grandes avanços tecnológicos da utilização do MEC-2D foram obtidos, destacando-se as novas técnicas de visualização com o MEC, formulações não-lineares, técnicas de tratamento das integrais com qualquer tipo de singularidade, detecção automática de zonas plásticas, entre outras. Por outro lado, o referido grupo de pesquisas avança no desenvolvimento de novas tecnologias aplicadas ao MEC-3D, onde alguns trabalhos já estão sendo desenvolvidos.

Com o desenvolvimento deste trabalho, novas e ricas frentes de pesquisas para o desenvolvimento de novas tecnologias com MEC são abertas. Abaixo seguem algumas sugestões para futuros trabalhos:

- Acoplamento MEC/MEF 2D e 3D não linear, considerando o MEC sem discretização do domínio;

- Análises Viscoplastica 3D, considerando o MEC sem discretização do domínio;
- Aplicação do algoritmo para modelos com domínios infinitos ou semi-infinitos;
- Realização de novos estudos para melhorar a performance do algoritmo proposto e para determinar as suas características de precisão, esforço computacional, convergência e estabilidade;
- Extensão do algoritmo para outras áreas de pesquisa com o MEC como: mecânica da fratura, análise de vibrações e contato.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMMERAAL, L. **Computer graphics for java programmers**. England: John Wiley & Sons, 1998.

BANERJEE, P.K.; PAPE, D.A. **Treatment of body forces in 2d elastostatic BEM using particular integrals**. Winter Annual Meeting, Boston, MA, 1987.

BEER, G. **Programming the boundary element method**. Chichester: Wiley, 2001.

BEER, G.; WATSON, J. **Introduction to finite and boundary element methods for engineers**. Chichester: Wiley, 1995.

BOOCH, G. **Object-oriented analysis and design with applications**. The Benjamin/Cummings Publishing Company Inc., Redwood City, California, 1994.

BREBBIA, C.A.; DOMINGUES, J. **Boundary element method: an introductory course**. Southampton: Comp. Mech. Publications, 1989.

BREBBIA, C.A.; TELLES, J.C.F.; WROBEL, L.C. **Boundary element techniques**. Berlin: Springer-Verlag, 1984.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, Wiley, England, 1991.

LUBLINER J., **Plasticity theory**. Barkeley: Pearson Education, 2006.

MACKERLE, J. **Material and geometrical nonlinearities FEM and BEM analyses: a bibliography (1998-2000)**. Finite Elem. Anal. Design, v.38, p.307-371, 2002.

MALVERN, L.E. **Introduction to the mechanics of a continuous medium**. Prentice-Hall, 1969.

MARCHIORI, R. **Implementação orientada a objetos para análise de tensões através do Método dos Elementos de Contorno**. Projeto de Iniciação Científica, FAPESP, Ref. 01/07648-9, São Paulo, Brasil, 2001.

MESQUITA, A.D. **Novas metodologias e formulações para o tratamento de problemas inelásticos com o acoplamento MEC/MEF progressivo**. 2002. 291p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo. São Carlos, 2002.

MÜLLER, A. **Um novo algoritmo para análises não-lineares utilizando o Método dos Elementos de Contorno**. 2004. 106p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

NORONHA, M. **Desenvolvimento de um sistema computacional para pesquisas com o Método dos Elementos de Contorno**. FAPESP 01/09627-9, São Paulo, 2001.

NORONHA, M.; DUMONT, E. N. **An automatic scheme for the numerical evaluation of general singular and quasi-singular linear integrals**, XXII CILAMCE, Campinas, Brasil, 2001.

NORONHA, M.; MÜLLER, A.; PEREIRA, A. M. B. **A new algorithm for non-linear analyses with Boundary Element Methods**. XXV CILAMCE, Recife, Brasil, 2004.

NORONHA, M.; PEREIRA, A. M. B. **A new algorithm for visualization of domain results in analysis with the Boundary Element Method**. 15th International Conference on Boundary Element Technology - BETECH, Detroit, USA, 2003.

NORONHA, M.; WAGNER, M.; WENZEL, W.; WIRNITZER, J.; DUMONT, E. N., **On a robust, object-oriented code for the implementation of conventional and hybrid Boundary Element Methods**. COTEQ/SIBRAT, Brasil, pp 239-242, 1996.

PARTRIDGE, P.W.; BREBBIA, C.A. **The dual reciprocity boundary element method**. Southampton: Comp. Mech. Publications, 1992.

PEREIRA, A.M.B. **Avanços na visualização, análise não-linear e programação com o método dos elementos de contorno**. 2004. 161p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 2004.

PERZYNA, P. **Fundamental problems in viscoplasticity**. Advances in Applied Mechanics, 9, pp. 243-377, Academic Press, New York, 1966.

PIMENTA, P. M. **Fundamentos da mecânica das estruturas**. Notas de aula, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Universidade de São Paulo, 2002.

SHOOTER, J. **Visualização de resultados de domínio de modelos de Elementos de Contorno**. Projeto de Iniciação Científica, FAPESP, Ref. 01/07639-0, Brasil, 2001.

SIMO, J.C.; HUGHES, T.J.R. **Computational inelasticity**. New York: Springer, 1997. (Interdisciplinary Applied Mathematics)

SIMO, J.C.; TAYLOR, R.L. **A return mapping algorithm for plane stress elastoplasticity**. Int. J. N. Meth. in Eng., v. 22, p. 649-670, 1986.

TELLES, J.C.F. **The boundary element method applied to inelastic problems**. Berlin: Springer-Verlag, 1983. (Lectures Notes in Engineering 1)

VENTURINI, W.S. **Boundary Element Method in geomechanics**. C. A. Brebbia and S. A. Orszag, São Carlos, São Paulo, 1983.

ANEXO A

ALGORITMO DE VISUALIZAÇÃO PARA O MEC

Este algoritmo de visualização fundamenta-se na identificação de isocurvas e isoformas de forma direta e automática (Figura A.1). Obtendo-se as isocurvas de forma incremental por meio de predições (aproximação pela tangente) e iterações (Newton-Raphson) para realizar o retorno à curva que se deseja traçar.

Figura A.1 - Representação esquemática do algoritmo proposto.

O primeiro passo do algoritmo consiste em identificar os valores máximo e mínimo da função a ser visualizada. A partir dos valores extremos da função, pode-se estabelecer uma faixa de valores com uma quantidade padrão de níveis de isocurvas. Em seguida, identifica-se no contorno do modelo os pontos limites das isocurvas, referentes a esses níveis, armazenando-os em uma lista de acordo com sua ocorrência seqüencial, conforme Figura A.2a.

Partindo de um ponto inicial $\bar{x}_i$ da lista dos pontos limites, o algoritmo consiste em descobrir um novo ponto da isocurva, percorrendo o caminho de forma incremental (Figura A.2b). Para esta tarefa, o algoritmo combina dois procedimentos diferentes. O primeiro é uma estimativa de predição, que localiza o novo ponto na direção tangencial, usando um passo escalar de comprimento Δt como se segue:

$$\bar{x}_p = \bar{x}_i + (\Delta t)t, \quad (A.1)$$

onde t é a tangente para um dado ponto da isocurva, expressa por:

$$t = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_2} - \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\}^T \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2} \quad (A.2)$$

O procedimento para a escolha da estimativa de predição será apresentada mais adiante.

O segundo procedimento do algoritmo, consiste em utilizar técnicas iterativas para determinar o novo ponto $\bar{x}_n$ da isocurva. A maioria das técnicas iterativas utiliza o conhecido método de Newton-Raphson (N-R) em associação com condições de restrição, que definem a direção de volta para o ponto $\bar{x}_p$. Nas últimas duas décadas, os métodos de comprimento de arco (CRISFIELD, 1991) têm sido empregados com bastante sucesso em aplicações não-lineares da engenharia.

Uma abordagem alternativa para os métodos de comprimento de arco é o método *normal flow*, o qual vem sendo utilizado neste algoritmo. O método *normal flow* fundamenta-se nos conceitos do fluxo de Davidenko, que representa o conjunto de perturbações de uma trajetória (Figura A.2b). Para a presente aplicação, essas perturbações são representadas pelo conjunto de isocurvas adjacentes a f_i . Este método utiliza a direção normal do fluxo de Davidenko como o caminho de retorno para as iterações N-R. Para o algoritmo proposto, essa é a direção do vetor normal unitário, definido na Equação A.4. Assim, para se obter o novo ponto $\bar{x}_n$, iterações sucessivas são computadas por:

$$\bar{x}_j = x_{j-1} + \frac{|f_i - f(x_{j-1})|}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2}} n_{j-1}, \quad (A.3)$$

onde o primeiro ponto corresponde ao resultado da fase de predição ($\bar{x}_0 = \bar{x}_p$).

$$n = \left\{ \frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} \right\}^T \Bigg/ \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x_1} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial x_2} \right)^2}. \quad (A.4)$$

Figura A.2 - (a) Pontos limites das isocurvas, (b) Fases preditiva e iterativa.

O novo ponto $\bar{x}_p$ é obtido por avaliações recursivas da equação acima, até que o critério de convergência seja satisfeito, que pode ser uma simples norma como:

$$\varepsilon = \frac{|f(x_i) - f_i|}{f_i} \quad (A.5)$$

Este algoritmo considera $\varepsilon = 0,001$. A escolha da direção normal como caminho de retorno, resulta em um valor mínimo da norma, com as iterações N-R. Devido a esta característica, espera-se que um número muito pequeno de iterações (1 ou 2) satisfaça a fase iterativa.

O algoritmo prossegue com novas predições e passos iterativos, usando o ponto $\bar{x}_n$ das iterações N-R como o ponto inicial ($\bar{x}_i = \bar{x}_n$), até encontrar o ponto final $\bar{x}_f$ no contorno. Então, remove-se os pontos $\bar{x}_i$ e $\bar{x}_f$ da lista que contém os pontos limites. Enquanto esta lista não estiver vazia, o algoritmo irá avançar para a próxima isocurva.

Como o algoritmo proposto requer a determinação das derivadas parciais de $f(x)$ em cada passo do processo preditivo/iterativo, então, é possível ajustar a curva utilizando-se *splines* cúbicas, em cada par de pontos sucessivos, já que os vetores

tangentes estão prontamente disponíveis. Em geral, são requeridos apenas poucos segmentos de *splines* para representar as isocurvas com uma boa precisão.

O comprimento do passo Δt utilizado na fase preditiva, depende de diversos fatores tais como a distribuição das isocurvas, a geometria modelo e o grau requerido de precisão. Existe uma grande quantidade de formas de combinar tais fatores, tornando a escolha de um comprimento de passo adequado a uma tarefa relativamente difícil. No presente algoritmo, sugere-se uma abordagem heurística para se determinar o comprimento do passo Δt . Esta abordagem é uma tentativa simples de evitar as interseções de isocurvas, ajustando-se Δt como sendo a metade da distância entre os dois pontos adjacentes ao ponto inicial (figura A.3a). Estes pontos adjacentes são os pontos iniciais de outras isocurvas ou os cantos do modelo.

Durante a determinação dos pontos de uma isocurva, o passo Δt é ajustado automaticamente. A abordagem utilizada para controlar o comprimento do passo de predição, baseia-se em simples ajustes a partir da informação sobre o erro da fase preditiva. Assim, para cada ponto de predição, avalia-se o valor da função e verifica-se o erro obtido. Para cada estimativa de predição, para limitar um desvio do nível f_i da isocurva atual em 20%, pode-se obter o novo comprimento do passo Δt_n , por:

$$\Delta t_n = \frac{0.2 f_i}{f(\bar{x}_p) - f_i} \Delta t \quad . \quad (A.6)$$

Caso o valor atual de $f(\bar{x}_p)$ seja superior a 20% de f_i , o algoritmo executa uma nova predição usando Δt_n , antes da fase iterativa, até o que o erro calculado com a Equação A.5 seja menor que 20%. Para evitar grandes desvios no ajuste do passo, é estabelecida uma faixa de valores permitidos para o novo comprimento do passo, variando entre a metade e o dobro do valor corrente de Δt .

Após a realização de uma fase preditiva/iterativa completa, o comprimento do passo que será utilizado na predição do próximo segmento da isocurva, é determinado em função do número de iterações requeridas na última fase iterativa, fornecendo assim um ajuste automático para o comprimento dos passos de predição (Figura A.3b).

Figura A.3 - Comprimento do passo: (a) Determinação inicial, (b) Ajuste automático.