ALEX NEVES JUNIOR

**SOBRE A MODELAGEM DE ESTRUTURAS DELGADAS USANDO
ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONAIS**

Dissertação apresentada ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo como parte dos requisitos para obtenção do título de Mestre em Engenharia Civil.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Miguel Luiz Bucalem

São Paulo
2006

“O temor do Senhor é o princípio do conhecimento; mas os insensatos desprezam a sabedoria e a instrução.” Provérbios 1:7

Primeiramente a Deus... E a minha família pelo incentivo e amor sem medidas.

Agradecimentos

Ao meu orientador, Prof. Dr. Miguel Luiz Bucalem, pela orientação prestada e pela paciência sempre demonstrada.

Aos meus amigos Daniel Mariani Guirardi e Urubatan Dias de Souza Junior pela amizade e convívio ao longo desses anos.

Aos professores, funcionários por demonstrarem-se sempre solícitos e pelas instalações do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações, que permitiram o desenvolvimento dessa pesquisa.

Resumo

O propósito principal do presente trabalho é estabelecer diretrizes para o uso de elementos finitos sólidos na modelagem de estruturas delgadas submetidas à flexão. Por meio de um conjunto de problemas estudou-se o travamento de elementos finitos da elasticidade bi e tridimensionais, quando usados para modelar estruturas delgadas submetidas à flexão. Foram usados elementos planos de 4, 8 e 9 nós e elementos tridimensionais de 4, 10, 11, 8, 20 e 27 nós, considerando elementos não distorcidos e distorcidos. A análise dos resultados nesses modelos permitiram entender melhor o comportamento e o uso de elementos sólidos em estruturas delgadas.

Palavras Chaves: Estruturas Delgadas. Travamento. Elementos Finitos Sólidos.

Abstract

The main objective of the present work is to establish guidelines for the use of solid finite elements in the modeling of thin structures submitted to bending. By means of a set of problems the locking of elements three-dimensional and two-dimensional elasticity was studied, when used to model problems thin structures subjected to bending. We use 2-D displacements-based elements of 4, 8 and 9 nodes and 3-D displacement based of 4, 10, 11, 8, 20 and 27 nodes, considering undistorted and distorted elements. The analysis of the results of these models lead to the understanding of the behavior and the use of solid elements in thin structures.

Keywords: Thin Structures. Locking. Solid Finite Elements.

SUMÁRIO

Resumo

Abstract

Lista de figuras

Lista de tabelas

<u>1</u>	<u>INTRODUÇÃO</u>	<u>17</u>
1.1	RELEVÂNCIA DOS MODELOS 3-D NA ANÁLISE DE ESTRUTURAS DELGADAS	17
1.2	OBJETIVO	18
1.3	ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO.....	18
<u>2</u>	<u>O FENÔMENO DO TRAVAMENTO</u>	<u>22</u>
2.1	DESCRIÇÃO DO FENÔMENO.....	22
<u>3</u>	<u>O TRAVAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS PARA A ELASTICIDADE PLANA CONSIDERANDO SITUAÇÃO DE FLEXÃO.....</u>	<u>28</u>
3.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	28
3.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA VIGA ENGASTADA SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES	29
3.3	SOLUÇÃO NUMÉRICA, POR ELEMENTOS FINITOS, DO PROBLEMA DA BARRA RETA ENGASTADA SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES.....	32
3.3.1	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO PROBLEMA DISCRETO A PARTIR DA MINIMIZAÇÃO DA ENERGIA POTENCIAL USANDO ELEMENTO DE 4 NÓS.....	32
3.3.2	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO USANDO A SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ELEMENTOS FINITOS PARA O ELEMENTO DE 4 NÓS	35
3.3.3	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO PROBLEMA DISCRETO USANDO ELEMENTOS DE 8 E 9 NÓS	41
3.4	OS EFEITOS DA DISTORÇÃO NA SOLUÇÃO NUMÉRICA DE ELEMENTOS FINITOS ..	45
3.4.1	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO PROBLEMA DISCRETO USANDO ELEMENTOS DE 8 E 9 NÓS SOB DISTORÇÃO RETILÍNEA	45
3.4.1.1	Estudo dos monômios nas funções de interpolação isoparamétricas dos elementos de 8 e 9 nós sob distorção retilínea.....	47
3.4.2	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO PROBLEMA DISCRETO USANDO ELEMENTOS DE 8 E 9 NÓS SOB DISTORÇÃO CURVA.....	51
3.4.2.1	Estudo dos monômios nas funções isoparamétricas dos elementos de 8 e 9 nós sob distorção curva	53
3.5	SOLUÇÃO NUMÉRICA, POR ELEMENTOS FINITOS, DO PROBLEMA DA BARRA CURVA ENGASTADA SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES	54
3.6	CONCLUSÕES DO ESTUDO DE FLEXÃO PURA PARA OS CASOS BIDIMENSIONAIS...	60

4 O TRAVAMENTO DE MODELOS DE ELEMENTOS FINITOS TRIDIMENSIONAIS CONSIDERANDO FLEXÃO SIMPLES..... 68

4.1	DESCRIÇÃO DO PROBLEMA	68
4.2	SOLUÇÃO ANALÍTICA DO PROBLEMA DA VIGA ENGASTADA SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES	69
4.3	SOLUÇÃO NUMÉRICA, POR ELEMENTOS FINITOS, DO PROBLEMA DA BARRA RETA ENGASTADA SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES.....	73
4.3.1	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO USANDO ELEMENTOS HEXAÉDRICOS NÃO DISTORCIDOS DE 8, 20 E 27 NÓS	74
4.3.2	PATCH TEST	79
4.3.3	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO USANDO ELEMENTOS HEXAÉDRICOS DE 8, 20 E 27 NÓS COM DISTORÇÃO RETILÍNEA.....	80
4.4	SOLUÇÃO NUMÉRICA, POR ELEMENTOS FINITOS, DO PROBLEMA DA LAJE RETA ENGASTADA SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES.....	85
4.4.1	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO DO PROBLEMA DA LAJE RETA ENGASTADA USANDO ELEMENTOS HEXAÉDRICOS DE 8, 20 E 27 NÓS NÃO DISTORCIDOS.....	86
4.4.2	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO DO PROBLEMA DA LAJE RETA ENGASTADA USANDO ELEMENTOS HEXAÉDRICOS DE 8, 20 E 27 NÓS COM DISTORÇÃO RETILÍNEA	88
4.4.3	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO DO PROBLEMA DA LAJE RETA ENGASTADA USANDO ELEMENTOS TETRAÉDRICOS DE 4, 10 E 11 NÓS EM MALHAS REGULARES	90
4.4.4	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO DO PROBLEMA DA LAJE RETA ENGASTADA USANDO ELEMENTOS TETRAÉDRICOS DE 4, 10 E 11 NÓS EM MALHAS DISTORCIDAS	93
4.4.5	ESTUDO DOS MONÔMIOS NAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ISOPARAMÉTRICAS DOS ELEMENTOS HEXAÉDRICOS DE 8, 20 E 27 NÓS SOB DISTORÇÃO RETILÍNEA	96
4.4.6	ESTUDO DOS MONÔMIOS NAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ISOPARAMÉTRICAS DOS ELEMENTOS TETRAÉDRICOS DE 4, 10 E 11 NÓS SOB DISTORÇÃO RETILÍNEA.....	101
4.5	ABORDAGEM DO TRAVAMENTO NO MODELO DISCRETO USANDO ELEMENTOS HEXAÉDRICOS DE 20 E 27 NÓS COM DISTORÇÃO DO TIPO CURVA.....	106
4.5.1	ESTUDO DOS MONÔMIOS NAS FUNÇÕES DE INTERPOLAÇÃO ISOPARAMÉTRICAS DOS ELEMENTOS HEXAÉDRICOS DE 20 E 27 NÓS SOB DISTORÇÃO DO TIPO CURVA	108
4.6	SOLUÇÃO NUMÉRICA, POR ELEMENTOS FINITOS, DO PROBLEMA DA BARRA CURVA ENGASTADA 3-D SUBMETIDA À FLEXÃO SIMPLES	109

5 MODELAGEM DE UMA PLACA DOBRADA E DE UM RESERVATÓRIO COM ORIFÍCIO 116

5.1	PLACA DOBRADA (FOLDED PLATE)	116
5.2	RESERVATÓRIO COM FURO	121

6 CONCLUSÕES..... 128

6.1	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	129
-----	---------------------------------------	-----

<u>7</u>	<u>ANEXOS</u>	<u>130</u>
	ANEXO I.....	131
	ANEXO II	134
	ANEXO III.....	138
	<u>REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS</u>	<u>143</u>

LISTA DE FIGURAS

Figura 1 – Viga engastada submetida a um momento fletor	24
Figura 2 – Viga discretizada com um elemento de Timoshenko de 2 nós	25
Figura 3 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a um momento fletor na extremidade livre.....	29
Figura 4 – Barra engastada discretizada com elemento de 4 nós	33
Figura 5 – Análise do travamento – Deslocamento u (MEF) e u (EXATO) – Elemento de 4 nós	36
Figura 6 – Análise do travamento – Deslocamento v (MEF) e v (EXATO) – Elemento de 4 nós	37
Figura 7 – Barra modelada com vários elementos de 4 nós na direção horizontal – refinamento uniforme	37
Figura 8 – Gráfico Deslocamento Normalizado $x h/L$ – Malhas Horizontais – Elemento de 4 nós.....	38
Figura 9 – Barra modelada com vários elementos de 4 nós na direção vertical – Refinamento uniforme.....	39
Figura 10 – Gráfico Deslocamento Normalizado $x h/L$ – Malhas Verticais – elemento de 4 nós.....	40
Figura 11 – Barra modelada com um elemento de 8 nós.....	41
Figura 12 – Barra modelada com um elemento de 9 nós.....	41
Figura 13 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – malhas regulares – elementos de 4, 8 e 9 nós	42
Figura 14 – Barra modelada com um elemento de 8 nós com engaste parcial.....	43
Figura 15 – Barra modelada com um elemento de 9 nós com engaste parcial.....	43
Figura 16 – Barra modelada com dois elementos de 8 nós – distorção retilínea	46
Figura 17 – Barra modelada com dois elementos de 9 nós – distorção retilínea	46
Figura 18 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Distorção retilínea – elementos de 4, 8 e 9 nós	47
Figura 19 – Barra modelada com dois elementos de 8 nós – distorção curva.....	51
Figura 20 – Barra modelada com um elemento de 9 nós – distorção curva	51
Figura 21 – Gráfico Deslocamento Vertical Normalizado $x h/L$ – Distorção Curva – elementos de 8 e 9 nós.....	52
Figura 22 – Viga curva engastada sob flexão simples.....	54
Figura 23 – Viga curva modelada com um elemento de 8 nós com engaste parcial.....	55
Figura 24 – Viga curva modelada com um elemento de 9 nós com engaste parcial.....	55
Figura 25 – Gráfico Deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Viga curva parcialmente engastada – elemento de 8 e 9 nós	56
Figura 26 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 8 nós – Distorção curva – Viga curva parcialmente engastada	57

Figura 27 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 9 nós – Distorção curva – Viga curva parcialmente engastada.....	58
Figura 28 – Viga curva submetida a um carregamento triangular na extremidade livre com engaste parcial	59
Figura 29 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.	60
Figura 30– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.1$	61
Figura 31– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.01$	61
Figura 32– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.001$	62
Figura 33 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Malhas Distorcidas.....	63
Figura 34– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 4 elementos	63
Figura 35– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 8 elementos	63
Figura 36– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 16 elementos	64
Figura 37 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade.	64
Figura 38– Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.1$	65
Figura 39– Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.01$	65
Figura 40– Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.001$	66
Figura 41– Barra engastada, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 4 elementos.....	66
Figura 42– Barra engastada, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 8 elementos.....	67
Figura 43– Barra engastada, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 16 elementos.....	67
Figura 44 – Barra engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre.....	70

Figura 45 – Barra reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre discretizada com um elemento de 8 nós	74
Figura 46 – Barra reta parcialmente engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre discretizada com um elemento de 20 nós.....	74
Figura 47 – Barra reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre discretizada com um elemento de 27 nós	74
Figura 48 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 8, 20 e 27 nós não distorcido – Barra reta parcialmente engastada.....	75
Figura 49 – Barra modelada com vários elementos hexaédricos de 8 nós na direção horizontal – Refinamento Uniforme.....	76
Figura 50 – Barra modelada com vários elementos hexaédricos de 8 nós na direção vertical – Refinamento Uniforme	76
Figura 51 – Gráfico Deslocamento normalizado $\times h/L$ – Refinamento Horizontal – Elemento hexaédrico de 8 nós	77
Figura 52 – Gráfico Deslocamento normalizado $\times h/L$ – Refinamento Vertical – Elemento hexaédrico de 8 nós.....	78
Figura 53 – Malha do Patch test – Barra reta sob flexão simples - elementos hexaédricos sólidos	79
Figura 54 – Barra engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre, com distorção retilínea – 2 elementos	80
Figura 55 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 8 nós – distorção retilínea - 2 elementos	81
Figura 56 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 20 nós – distorção retilínea – 2 elementos.....	81
Figura 57 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 27 nós – distorção retilínea – 2 elementos.....	81
Figura 58 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $\times h/L$ – Distorção retilínea – elementos de 8, 20 e 27 nós – 2 elementos.....	82
Figura 59 – Barra engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre, com distorção retilínea – 3 elementos	83
Figura 60 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 8 nós – distorção retilínea – 3 elementos.....	83
Figura 61 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 20 nós – distorção retilínea – 3 elementos.....	83
Figura 62 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 27 nós – distorção retilínea – 3 elementos.....	84
Figura 63 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $\times h/L$ – Distorção retilínea – elementos de 8, 20 e 27 nós – 3 elementos.....	84
Figura 64 – Laje reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre.....	85
Figura 65 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 8 nós não distorcidos.....	86
Figura 66 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 20 nós não distorcidos.....	86
Figura 67 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 27 nós não distorcidos.....	87

Figura 68 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 8, 20 e 27 nós não distorcido	87
Figura 69 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 8 nós distorcidos	88
Figura 70 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 20 nós distorcidos	89
Figura 71 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 27 nós distorcidos	89
Figura 72 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 8, 20 e 27 nós com distorção retilínea	90
Figura 73 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 4 nós em malhas regulares	91
Figura 74 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 10 nós em malhas regulares	91
Figura 75 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 11 nós em malhas regulares	92
Figura 76 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas regulares	93
Figura 77 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 4 nós em malhas distorcidas	93
Figura 78 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 10 nós em malhas distorcidas	94
Figura 79 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 11 nós em malhas distorcidas	94
Figura 80 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas distorcidas	95
Figura 81 – Barra reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre, com distorção do tipo curva	106
Figura 82 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 20 nós – distorção curva	106
Figura 83 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 27 nós – distorção curva	107
Figura 84 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas distorcidas	107
Figura 85 – Barra curva engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre	110
Figura 86 – Viga curva modelada com um elemento de 20 nós com engaste parcial	110
Figura 87 – Viga curva modelada com um elemento de 27 nós com engaste parcial	110
Figura 88 – Gráfico Deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Viga curva 3-D parcialmente engastada – elemento de 20 e 27 nós	111
Figura 89 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 20 nós – Distorção curva – Viga curva 3-D parcialmente engastada	112

Figura 90 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 27 nós – Distorção curva – Viga curva 3-D parcialmente engastada	112
Figura 91 – Laje simplesmente apoiada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.....	113
Figura 92 – Malha distorcida tipo_2.....	114
Figura 93 – Deslocamento no Ponto Central do Plano Médio da Placa – Malhas Não Distorcidas.....	115
Figura 94 – Deslocamento no Ponto Central do Plano Médio da Placa – Malhas Distorcidas	115
Figura 95 – Planta baixa da placa dobrada	116
Figura 96 – Corte transversal da placa dobrada.....	117
Figura 97 – Condição de carregamento na placa dobrada.....	117
Figura 98 – Deformada da placa dobrada – Modelo 3-D.....	117
Figura 99 – Deformada da placa dobrada – Modelo de Casca	118
Figura 100 – Linha de nós para análise – Placa Dobrada.....	118
Figura 101 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Vertical – Linha A.....	119
Figura 102 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Vertical – Linha B.....	119
Figura 103 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha A.....	120
Figura 104 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha B.....	120
Figura 105 – Planta baixa do reservatório.....	121
Figura 106 – Elevação do reservatório.....	122
Figura 107 – Condição de carregamento no reservatório	122
Figura 108 – Deformada do reservatório – Modelo 3-D.....	123
Figura 109 - Deformada do reservatório – Modelo de Casca	123
Figura 110 – Linha de nós para análise – Reservatório.....	124
Figura 111 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Y – Linha A	124
Figura 112 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento X – Linha B	125
Figura 113 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Y – Linha C	125
Figura 114 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha A.....	126
Figura 115 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha B.....	126
Figura 116 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha C.....	127
Figura I.1 – Elemento Isoparamétrico de 9 nós	131
Figura II.1 – Elemento Qualquer.....	134
Figura II.2 – Deslocamento Horizontal do Elemento	134
Figura II.3 – Deslocamento Vertical do Elemento.....	135
Figura II.4 – Rotação	136
Figura III.1 – Elemento Isoparamétrico Sólido de 20 nós	138
Figura III.2 – Elemento Isoparamétrico Sólido de 27 nós	140

LISTA DE TABELAS

Tabela 1 - Valores normalizados para deslocamento e rotação na extremidade livre da barra.....	26
Tabela 2 – Parâmetros de modelagem – Refinamento da direção horizontal – elemento de 4 nós.....	38
Tabela 3 – Parâmetros de modelagem – Refinamento da direção vertical – elemento de 4 nós.....	39
Tabela 4 – Parâmetros de modelagem – elementos regulares de 4, 8 e 9 nós – Barra reta engastada.....	42
Tabela 5 – Deslocamento vertical normalizado na extremidade livre – malhas regulares – Valores detalhados – Elementos de 4, 8 e 9 nós	43
Tabela 6 – Parâmetros de modelagem – elementos regulares de 8 e 9 nós - Barra parcialmente engastada.....	44
Tabela 7 – Deslocamento vertical na extremidade livre – malhas regulares – Barra parcialmente engastada.....	44
Tabela 8– Parâmetros de modelagem – elementos com distorção retilínea de 4, 8 e 9 nós.....	46
Tabela 9 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8 e 9 nós com distorção do tipo curva – Barra parcialmente engastada.....	52
Tabela 10 – Parâmetros de modelagem – Barra curva parcialmente engastada – elementos de 8 e 9 nós com distorção curva.....	56
Tabela 11 – Parâmetros de modelagem – Barra curva parcialmente engastada – elementos de 8 e 9 nós com distorção curva – Malhas refinadas.....	57
Tabela 12 – Deslocamento vertical para um ponto no meio do vão - viga curva sob carregamento triangular com engaste parcial.....	59
Tabela 13 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos – Barra engastada.....	75
Tabela 14 – Parâmetros de modelagem – elemento de 8 nós não distorcido – Refinamento na direção horizontal.....	77
Tabela 15 – Parâmetros de modelagem – elemento de 8 nós não distorcido – Refinamento na direção vertical.....	77
Tabela 16 - Parâmetros geométricos – Malha do Patch Test – Elemento de 27 nós.....	80
Tabela 17– Parâmetros de modelagem – elementos com distorção retilínea de 8,20,27 nós – 2 elementos.....	82
Tabela 18 – Parâmetros de modelagem – elementos com distorção retilínea de 8,20,27 nós – 3 elementos.....	84
Tabela 19 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8,20,27 nós não distorcidos –Laje reta parcialmente engastada.....	87
Tabela 20 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8,20,27 nós com distorção retilínea –Laje reta parcialmente engastada.....	89
Tabela 21– Parâmetros de modelagem – elementos de 4,10,11 nós em malhas regulares –Laje reta engastada.....	92
Tabela 22– Parâmetros de modelagem – elementos de 4,10,11 nós em malhas distorcidas –Laje reta parcialmente engastada.....	94
Tabela 23– Parâmetros de modelagem – elementos de 20 e 27 nós sob distorção curva.....	107

Tabela 24– Parâmetros de modelagem – elementos de 20 e 27 nós – barra curva engastada.....	111
Tabela 25 – Parâmetros de modelagem – Barra curva 3-D parcialmente engastada – elementos de 20 e 27 nós com distorção curva – Malhas refinadas	112
Tabela 26– Parâmetros de modelagem – Placa dobrada.....	118

1 Introdução

1.1 Relevância dos modelos 3-D na análise de estruturas delgadas

Com o crescimento no mercado dos programas de interface gráfica (CAD), a obtenção de modelos em três dimensões tem sido cada vez mais facilitada. Observando a evolução do método dos elementos finitos, seja no crescimento do número de programas disponíveis, seja no ramo da pesquisa científica com os inúmeros trabalhos publicados, o uso da modelagem hierárquica, especificamente dos modelos 3-D, trouxeram crescimento e desenvolvimento do método como ferramenta de análise estrutural. Apesar da indústria aeronáutica utilizar basicamente elementos de casca em suas análises, esse mercado juntamente com a indústria automotiva, utiliza-se também dos modelos 3-D, seja pela complexidade geométrica de algumas estruturas envolvidas, seja pelos efeitos considerados nestes estudos.

O crescimento do uso dos modelos 3-D englobou diversos segmentos da engenharia estrutural entre elas as chamadas estruturas delgadas. No âmbito destas estruturas, no que se refere à modelagem, os elementos de placa e casca são amplamente utilizados, porém, em determinadas circunstâncias a obtenção destes modelos demonstra ser trabalhosa, principalmente quando tratada com geometrias complexas, por exemplo. Tendo-se em vista que o mercado disponibiliza de recursos computacionais para gerar geometrias variadas via modelagem sólida, percebe-se que o uso dessas ferramentas aliada aos programas baseados na geração de malhas permite que a modelagem 3-D seja feita também, via malha de elementos sólidos. Porém, o uso de elementos sólidos em modelagem de estruturas delgadas tem levado a resultados numéricos desfavoráveis em algumas situações. Esses resultados ocorrem devido ao

fenômeno do “travamento” que tem sido alvo de pesquisa crescente nos últimos anos.

Apesar de estudos já apresentarem propostas de formulação mista que contornam de forma satisfatória o problema do travamento, seja para elementos de viga, seja para elementos de placa ou casca; o uso de malhas de elementos sólidos típicos da engenharia em modelos de estruturas delgadas merecem atenção. Uma outra questão importante se refere à qualidade e precisão dos resultados apresentados por esses modelos, pois o uso de elementos sólidos se torna viável, apenas quando empregados de forma correta para os objetivos propostos nos modelos estudados.

1.2 Objetivo

O objeto do trabalho é por meio da experimentação numérica e do estudo da interpolação dos elementos, chegar a diretrizes e parâmetros que permitam utilizarem-se elementos 3-D na modelagem de estruturas delgadas. Consideraremos para tanto três problemas clássicos da resistência dos materiais com relações altura e comprimento variadas e soluções analíticas conhecidas, verificando a eficiência e precisão dos resultados obtidos com modelos de elementos finitos. As malhas a serem estudadas são de elementos sólidos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós e de elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós, nas configurações distorcida e não distorcida, identificando as situações para as quais ocorre o travamento.

1.3 Organização do trabalho

No Capítulo 2 estudaremos o fenômeno do travamento e a sua ocorrência em estruturas delgadas. Abordaremos o problema da viga engastada, em estado plano de tensão, submetida à flexão simples, apresentando os resultados quando

a espessura tende a zero. Usaremos para exemplificar o travamento, o uso do elemento de viga de Timoshenko de dois nós no modelo discreto do problema proposto e os efeitos nos resultados dos deslocamentos quando a espessura tende a zero.

No Capítulo 3 abordaremos novamente o mesmo problema da viga engastada, porém agora sob novo enfoque. Apresentaremos a resposta do modelo matemático de estado plano de tensão e estudaremos a solução numérica do modelo de elementos finitos deste problema e as implicações na previsão quando a espessura tende a valores muito pequenos. Serão analisados o comportamento de modelos discretizados com malhas regulares de elementos de 4 nós na obtenção dos deslocamentos verticais. Abordagem baseada na formulação de energia desses modelos será utilizada para interpretar os resultados quando a espessura tende a zero. Observaremos os efeitos nos resultados do deslocamento vertical quando refinamos o modelo usando elementos de 4 nós nas direções horizontal ou vertical. Serão analisados também, os resultados dos deslocamentos verticais quando usamos malhas regulares de elementos de 8 ou 9 nós e o que ocorre com esses resultados quando a espessura se torna muito pequena. Estudaremos a influência da condição de contorno adotada na modelagem no resultado do deslocamento vertical. Neste capítulo analisaremos ainda o efeito nos resultados do deslocamento vertical quando usamos nos modelos, malhas de elementos distorcidos e fazemos a altura tender a zero. Serão estudados elementos de 8 e 9 nós sob dois tipos de distorção: distorção de lados retilíneos e lados curvos. Explicaremos a influência da representação exata de monômios que constituem a formulação isoparamétrica de tais elementos distorcidos na obtenção dos deslocamentos e aplicaremos esses conceitos para estudar o comportamento dos resultados para o deslocamento vertical, de uma viga curva engastada em estado plano de tensão submetida à flexão pura, discretizada com elementos de 8 e 9 nós, para espessuras pequenas.

No Capítulo 4, abordaremos o objetivo principal do nosso estudo; a modelagem 3-D com elementos sólidos. Faremos um retrospecto dos problemas estudados para o caso bidimensional, agora no âmbito da modelagem tridimensional de estruturas delgadas. Estudaremos o comportamento dos resultados referentes ao deslocamento vertical na extremidade livre quando a relação h/L diminui, do problema da barra reta engastada, modelada com um elemento hexaédrico de 8, 20 e 27 nós nas configurações distorcida e não distorcida, sendo que na situação distorcida, usaremos dois tipos de distorção: 1) distorção retilínea com dois ou três elementos que chamaremos de malhas distorcida 1 e 2 respectivamente e 2) distorção curva com dois elementos. Da mesma forma que foi feito pra o elemento quadrilateral de 4 nós, foram utilizadas também malhas de elementos hexaédricos de 8 nós refinadas nas direções horizontais e verticais, para problema da barra reta engastada, estudando-se também o comportamento do deslocamento vertical na extremidade livre quando a relação h/L diminui. Faremos neste capítulo análises considerando configurações de malha do “*Patch Test*”, proposta por Irons. Neste caso consideraremos o elemento hexaédrico de 27 nós sob distorção retilínea, verificando o comportamento dos resultados obtidos para o deslocamento vertical quando a relação h/L diminui. Continuando o estudo, analisaremos também o comportamento dos resultados referentes ao deslocamento vertical na extremidade livre, quando a relação h/L diminui, do problema de uma laje reta engastada usando além das malhas de elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos e com distorção retilínea, também malhas de elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós na configuração distorcida e não distorcida. Repetindo o estudo para o caso 2-D, abordaremos o problema da barra curva engastada modelada com um elemento hexaédrico de 20 e 27 nós, analisando o deslocamento vertical na extremidade livre quando a relação h/L diminui; e ampliando da mesma forma que no Capítulo 3, refinaremos o modelo, agora com malhas de elementos de 20 e 27 nós, estudando também os resultados para o deslocamento vertical no meio do vão quando a relação h/L diminui. A fim de explicar os resultados numéricos dos deslocamentos verticais, obtidos nessas

modelagens, estudaremos a representação dos monômios que constituem as funções de interpolação isoparamétricas dos elementos sólidos considerados, como realizado nas modelagens bidimensionais.

No Capítulo 5 fecharemos nossos estudos aplicando os conceitos adquiridos em dois problemas práticos da engenharia.

Nas Conclusões, apresentaremos as diretrizes finais da modelagem de estruturas delgadas com os elementos sólidos propostos e as circunstâncias mais favoráveis para uso dos mesmos.

2 O Fenômeno do travamento

2.1 Descrição do fenômeno

O método dos elementos finitos, baseado no método dos deslocamentos é uma formulação simples e de aplicação geral que abrange sólidos 2-D e 3-D, elementos de barra, placas e cascas, as quais sendo aplicadas em conjunto cobrem uma infinidade de problemas da engenharia estrutural. Excetuando o elemento de barra baseado na teoria de Bernoulli-Euler, onde as deformações por cisalhamento são desconsideradas com o eixo da barra permanecendo perpendicular em relação à seção transversal após a deformação, os demais elementos sofrem, em determinadas situações, de uma deficiência numérica. Quando modelos 2-D ou 3-D utilizam em suas modelagens, materiais incompressíveis ou quando elementos estruturais apresentam excessiva rigidez em problemas de flexão, alcançamos nesses casos resultados de deslocamento muito pequenos e em certas ocasiões deformações nulas. A esta deficiência denominamos “travamento”.

Por várias décadas, uma série de pesquisas foram realizadas com o objetivo de solucionar ou contornar a questão do travamento nas modelagens computacionais, entre elas estão as formulações mistas que alcançaram resultados satisfatórios e apresentaram elementos confiáveis e eficientes. É importante salientar que a convergência do método dos elementos finitos para o método dos deslocamentos pode estar garantida matematicamente mesmo que o modelo demonstre tendência ao travamento. Isso pode ser visto pela inequação que se segue abaixo:

$$\|u - u_h^i\|_1 \leq C_1 h^k. \quad (1)$$

Onde u é a solução exata do modelo, u_h^i é a solução de elementos finitos associada ao espaço V_h^i discreto, C_1 é uma constante positiva e h o maior tamanho do elemento da malha. O k é um número inteiro associado à

ordem do polinômio completo, representado pelo elemento utilizado na malha devendo ser no mínimo igual a 1 para garantia de convergência do método. Em Bathe (1996) é demonstrado que qualquer elemento isoparamétrico apresentando ou não distorção representa o polinômio P_1 cujo k vale 1.

Representar o polinômio P_1 equivale a representar exatamente o movimento de corpo rígido e os modos constantes de deformação, sendo essas condições necessárias à convergência, conforme demonstra-se no Anexo II deste trabalho. Se percebe porém, que o fator que leva ao travamento está associado à constante C_1 , relacionada a parâmetros que dependem do modelo abordado; no caso de barras, placas e cascas a espessura e no caso de problemas da elasticidade bi e tri dimensional, além da espessura, o ν , sendo que nos casos onde a espessura se torna muito pequena ou o valor de ν se aproxima de 0,5; a constante C_1 apresenta grandes valores. A dificuldade que surge, referente aos elevados valores da constante C_1 , reside no refinamento exigido para as malhas utilizadas nestes modelos, pois para se alcançar resultados satisfatórios com o valor de C_1 elevado, essas malhas podem ter que apresentar refinamentos bastante exagerados de nenhum interesse prático, mesmo com a convergência assegurada. Assim, uma formulação livre de travamento seria aquela onde a constante C_1 é independente de parâmetros que governam o travamento como pequenas espessuras ou valores de ν próximos a 0,5.

Para explicar o fenômeno do travamento usaremos a formulação da teoria de barra de Timoshenko, para o qual as deformações por cisalhamento transversal não são nulas e as seções não permanecem necessariamente perpendiculares ao eixo da barra após a deformação. Considere uma viga engastada em uma extremidade, submetida a um momento fletor na extremidade livre, conforme Figura 1.

Figura 1 – Viga engastada submetida a um momento fletor

Temos que a energia potencial total desse modelo é dada por:

$$\Pi(w(x), \beta(x)) = \frac{EI}{2} \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{GAk}{2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx - \beta(L)M \quad (2)$$

A solução deste problema é dada pelas funções $w(x)$ (deslocamento) e $\beta(x)$ (rotação), que minimizam a energia potencial total. Ao normalizarmos a energia potencial total dividindo todos os termos por t^3 , simulamos uma sequência de problemas onde o carregamento aplicado é definido por:

$$M = t^3 M_0.$$

Onde M_0 é um valor de momento de referência.

Que permite obter:

$$\tilde{\Pi} = \frac{\Pi}{t^3} = \frac{bE}{24} \int_0^L \left(\frac{d\beta}{dx} \right)^2 dx + \frac{Gbk}{t^2} \int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx - \beta(L)M_0. \quad (3)$$

Percebemos pelo resultado apresentado, que para espessuras muito pequenas, a parcela de energia referente ao cisalhamento tenderia ao infinito pois $Gbk/t^2 \rightarrow \infty$ para $t \rightarrow 0$ com $dw/dx \neq \beta$. Então, considerando o problema de minimização da energia potencial total normalizada, vemos que quando $t \rightarrow 0$, obtemos:

$$\int_0^L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right)^2 dx \rightarrow 0 \quad (4)$$

Assim para o problema limite ($t \rightarrow 0$):

$$\frac{dw}{dx} - \beta = 0 \quad \text{ou seja} \quad \frac{dw}{dx} = \beta \quad (5)$$

Esta solução nos leva a concluir que a teoria de barra de Timoshenko tende a teoria de barra de Bernoulli-Euler, quando a espessura tende a zero.

Considerando agora a solução do problema pelo método dos elementos finitos, temos que:

$$\frac{dw_h(x)}{dx} - \beta_h(x) \cong 0 \quad \text{com } t \text{ muito pequeno.} \quad (6)$$

Onde $w_h(x)$ e $\beta_h(x)$ correspondem às soluções contidas no espaço de elementos finitos, respectivamente W_h e B_h . A relação dada por (6), corresponde a uma restrição na solução de elementos finitos $w_h(x)$ e $\beta_h(x)$. Os espaços W_h e B_h devem ter funções suficientes que permitam aproximar adequadamente as possíveis soluções exatas e satisfazer $dw/dx = \beta_h$. Quando isso não ocorre, o modelo de elementos finitos “trava”.

A fim de ilustrar as características do fenômeno do travamento, retornemos ao problema proposto da viga submetida à flexão pura, agora discretizada com um único elemento de barra de dois nós baseado na teoria de Timoshenko, conforme Figura 2.

Figura 2 – Viga discretizada com um elemento de Timoshenko de 2 nós

Considerando uma interpolação linear para os deslocamentos e rotações nodais dadas por:

$$w_h(x) = \frac{x}{L} w_2 \quad ; \quad \beta_h(x) = \frac{x}{L} \theta_2 .$$

E fixando os graus de liberdade necessários, temos que a deformação por cisalhamento é:

$$\gamma_h(x) = \frac{dw_h}{dx} - \beta_h = \frac{1}{L} (w_2 - x\theta_2) .$$

Sabendo pelas discussões anteriores que para espessuras muito pequenas $\gamma_h \rightarrow 0$, temos então que $w_2 = 0$ e $\theta_2 = 0$.

Verificamos deste modo, para a discretização acima, que a relação (6) é satisfeita apenas para:

$$w_h(x) = 0 \quad ; \quad \beta_h(x) = 0 .$$

Assim, o resultado apresentado pelo modelo discreto tende a divergir do resultado analítico exato apresentado pelo modelo matemático adotado, quando a espessura se torna delgada.

A Tabela 1 resume o comportamento do modelo quando a espessura tende a zero.

Tabela 1 - Valores normalizados para deslocamento e rotação na extremidade livre da barra

t/L	Deslocamento Transversal calculado/exato	Rotação calculada/exata
1/10	2.03×10^{-2}	2.03×10^{-2}
1/100	2.03×10^{-4}	2.03×10^{-4}
1/1000	2.03×10^{-6}	2.03×10^{-4}

Este problema, já bastante estudado, demonstra o fenômeno do travamento para o elemento de viga de Timoshenko de dois nós, onde mesmo para malhas mais refinadas este elemento continua fornecendo resultados bastante rígidos.

Neste trabalho utilizaremos o problema de flexão pura como um modelo indicativo para estudo do travamento em estruturas bi e tridimensionais delgadas. Isso é motivado pelo fato de no problema de flexão pura as deformações de cisalhamento serem nulas e o problema é naturalmente sujeito ao travamento. Ainda a capacidade de o elemento representar adequadamente a flexão é um requisito importante para que ele possa ser usado na modelagem de problemas onde o mecanismo resistente preponderante seja o de flexão.

3 O travamento de modelos de elementos finitos para a elasticidade plana considerando situação de flexão

3.1 Descrição do problema

No Capítulo anterior, explicamos o fenômeno do travamento em modelos de viga de Timoshenko. Neste capítulo examinaremos o travamento para modelos da elasticidade plana para situação de flexão.

Estudaremos a ocorrência deste fenômeno inicialmente em modelos bidimensionais sob estado plano de tensão. Neste capítulo abordaremos dois problemas conhecidos da resistência dos materiais:

1) O problema de uma barra reta engastada em uma extremidade e livre na outra submetida a um momento fletor na extremidade livre, cujos modelos de elementos finitos estudados serão discretizados com malhas de elementos de 4, 8 e 9 nós não distorcidos e de 8 e 9 nós com distorção do tipo retilínea ou curva.

2) E o problema de uma barra curva engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um momento fletor na extremidade livre, cujos modelos de elementos finitos estudados serão discretizados com malhas de elementos de 8 e 9 nós com distorção do tipo curva.

Em ambos os casos, serão avaliados os resultados para o deslocamento vertical na extremidade livre, quando a espessura do modelo se torna pequena.

3.2 Solução analítica do problema da viga engastada submetida à flexão simples

Considere primeiramente a estrutura simples da Figura 3, na configuração indeformada, submetida a um momento fletor M na extremidade livre com espessura $t = 1$, sendo L o comprimento da barra e h a sua altura. Antes de partirmos para as análises numéricas de elementos finitos (MEF) deduziremos a solução exata do problema no âmbito da teoria da elasticidade.

Figura 3 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a um momento fletor na extremidade livre

A solução analítica para os deslocamentos horizontal e vertical respectivamente, do problema 2-D acima, considerando estado plano de tensão, segundo a teoria da elasticidade, é:

$$u = \frac{M}{EI} xy \quad (7)$$

$$v = -\frac{M}{2EI} (x^2 + \nu y^2) \quad (8)$$

Onde M é uma constante positiva e se refere ao momento fletor aplicado na extremidade livre para o problema em análise; E e ν referem-se respectivamente ao módulo de elasticidade de Young e coeficiente de Poisson do material, I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo paralelo a z . Temos que o campo de deformações é:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{M}{EI} y \quad (9)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = -\nu \frac{M}{EI} y \quad (10)$$

$$\gamma_{xy} = 0. \quad (11)$$

Considerando a relação constitutiva do estado plano de tensão, temos o seguinte campo de tensões:

$$\sigma_x = \frac{M}{I(1-\nu^2)} y - \frac{M\nu^2}{I(1-\nu^2)} y = \frac{M}{I} y \quad (12)$$

$$\sigma_y = 0 \quad (13)$$

$$\tau_{xy} = 0. \quad (14)$$

Para caracterizar a solução do problema 2-D, temos que determinar para que campos de forças de volume o equilíbrio do campo de tensões é satisfeito. Considerando a equação de equilíbrio diferencial e introduzindo o campo de tensões temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + f_x^B = 0 \Rightarrow f_x^B = 0 \quad (15)$$

$$\frac{\partial \sigma_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + f_y^B = 0 \Rightarrow f_y^B = 0. \quad (16)$$

Vemos que para o campo de deslocamentos dados em (7) e (8) correspondam à solução, não deve haver forças de volume atuando. A única componente de tensão não nula é σ_x , desta forma as componentes de tensão atendem as condições de contorno para os lados superior e inferior da viga onde não há forças de superfície. Para o lado definido por $x = L$, temos:

$$\mathbf{Tn} = \mathbf{f}^s \Rightarrow \sigma_x \mathbf{e}_x = \mathbf{f}^s \Rightarrow \mathbf{f}^s = -\frac{M}{I} y \mathbf{e}_x \quad (17)$$

O que mostra que o momento deve ser aplicado por meio de f^s dado acima.

Se reduzirmos as forças de superfície do lado $x = L$ para o centro de gravidade, nós obteremos como força resultante:

$$\mathbf{R} = \int_A \mathbf{f}^s dy = \int_A -\frac{M}{I} y \mathbf{e}_x dy = 0 \quad (18)$$

E para o momento resultante referente ao centro da seção representado por b , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b &= \int_z (\mathbf{f}^s y dA) \mathbf{e}_z \\ &= \int_A \left(-\frac{M}{I} z^2 \right) \mathbf{e}_z dA \\ &= -\frac{M}{I} \int_A z^2 dA \mathbf{e}_z = -M \mathbf{e}_z \end{aligned} \quad (19)$$

Onde M é o momento aplicado representado na Figura 3. Da mesma forma, referente ao lado $x = 0$, obtemos $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ e $M_b = M \mathbf{e}_z$, garantindo assim o equilíbrio do sistema de forças.

Finalmente, tomando-se as equações (7) e (8) verificamos que os deslocamentos nos pontos $(0, y)$ e $(0, 0)$, correspondente a extremidade engastada, são nulos, ou seja, $u(0, y) = 0$ e $v(0, 0) = 0$.

Concluimos que devido a atuação exclusiva do momento fletor M , as únicas tensões que surgem são as normais à seção transversal, as quais garantem o equilíbrio do sistema.

3.3 Solução numérica, por elementos finitos, do problema da barra reta engastada submetida à flexão simples

Faremos nesta seção uma abordagem numérica do problema da barra reta engastada, considerando agora modelos de elementos finitos. Usando uma discretização simples, modelaremos o problema da barra com um único elemento de 4 nós não distorcido. Para entender o fenômeno do travamento neste contexto é conveniente utilizarmos a formulação de energia potencial do modelo discreto. Analisaremos os resultados para o deslocamento vertical na extremidade livre quando usamos malhas regulares de elementos de 4, 8 e 9 nós não distorcidos em modelos delgados e os efeitos nos resultados obtidos para o deslocamento vertical quando refinamos o modelo discreto com elementos de 4 nós nas direções horizontal e vertical.

3.3.1 Abordagem do travamento no problema discreto a partir da minimização da energia potencial usando elemento de 4 nós

A energia potencial total para estado plano de tensão do problema da Figura 3 é dada pela expressão:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_A [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}] [C] [\varepsilon_x, \varepsilon_y, \gamma_{xy}]^T dx dy - \frac{M}{h} U_{x1} - \frac{M}{h} U_{x4} \quad (20)$$

Sendo $[C]$ a matriz constitutiva para estado plano de tensão.

Considere a mesma estrutura da Figura 3, agora discretizada com um único elemento de 4 nós, conforme Figura 4.

Figura 4 – Barra engastada discretizada com elemento de 4 nós

O h representa a altura do elemento e L o seu comprimento, como U_{x1} e U_{x4} são iguais entre si, bem como U_{y1} e U_{y4} , eles serão substituídos por u_x e v_y que representam respectivamente os deslocamentos horizontal e vertical na extremidade livre. As forças de intensidade M/h representam o binário que dá origem ao momento fletor aplicado na extremidade livre da barra.

Sabendo-se que a função de interpolação no nó 1 é dado por:

$$h_1 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{L} \right) \left(1 + \frac{2y}{h} \right) \quad (21)$$

E no nó 4 por:

$$h_4 = \frac{1}{4} \left(1 + \frac{2x}{L} \right) \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \quad (21)$$

e que as deformações $\varepsilon_x, \varepsilon_y$ e γ_{xy} , de acordo com a formulação de elementos finitos são dadas por:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial h_1}{\partial x} u_x - \frac{\partial h_4}{\partial x} u_x = \left(1 + \frac{2y}{h} \right) \frac{u_x}{2L} - \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \frac{u_x}{2L} \quad (23)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial h_1}{\partial y} v_y - \frac{\partial h_4}{\partial y} v_y = 0 \quad (24)$$

$$\gamma_{xy} = -\frac{\partial h_1}{\partial x} v_y + \frac{\partial h_4}{\partial x} v_y + \frac{\partial h_1}{\partial y} u_x - \frac{\partial h_4}{\partial y} u_x = \left(1 + \frac{2y}{h} \right) \frac{v_y}{2L} + \left(1 - \frac{2y}{h} \right) \frac{v_y}{2L} + \left(1 + \frac{2x}{L} \right) \frac{u_x}{h} \quad (25)$$

Substituindo esses valores na equação 20 e considerando o binário aplicado nos nós 1 e 4 com suas respectivas componentes de deslocamento horizontal, obtemos para a equação da energia potencial total no problema discreto.

$$\Pi = \frac{h}{L} \frac{u_x^2 E}{3(1-\nu^2)} + \frac{L}{h} \frac{4v_y^2 E}{3(1-\nu^2)} + \frac{h}{L} \frac{v_y^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{L}{h} \frac{4u_x^2 E}{6(\nu+1)} - 2u_x \frac{M}{h} \quad (26)$$

Fazendo $\varepsilon = h/L$ temos:

$$\Pi = \varepsilon \frac{u_x^2 E}{3(1-\nu^2)} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{4v_y^2 E}{3(1-\nu^2)} + \varepsilon \frac{v_y^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{1}{\varepsilon} \frac{4u_x^2 E}{6(\nu+1)} - 2u_x \frac{M}{h} \quad (27)$$

Considerando uma seqüência de problemas dada por $M = ch^2$, sendo c uma constante que pode ser fixada para produzir deslocamentos de ordem de grandeza usuais e dividindo a energia potencial total por h/L , temos a energia potencial total normalizada:

$$\bar{\Pi} = \frac{L}{h} \Pi = \frac{u_x^2 E}{3(1-\nu^2)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{4v_y^2 E}{3(1-\nu^2)} + \frac{v_y^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{4u_x^2 E}{6(\nu+1)} - 2u_x cL \quad (28)$$

Separando os termos e reescrevendo-os obtemos:

$$\bar{\Pi} = \frac{L}{h} \Pi = \frac{u_x^2 E}{3(1-\nu^2)} + \frac{v_y^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{4u_x^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{4v_y^2 E}{3(1-\nu^2)} \right) - 2u_x cL \quad (29)$$

Analisando a energia potencial total normalizada percebemos que o termo $\frac{1}{\varepsilon^2} \left(\frac{4u_x^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{4v_y^2 E}{3(1-\nu^2)} \right)$ tende ao infinito quando h tende a zero e associado à ele estão os graus de liberdade u_x e v_y referentes aos deslocamentos nodais. Ao considerarmos o problema de minimização da energia potencial total normalizada, encontramos que para $h \rightarrow 0$ a relação $1/\varepsilon^2 \rightarrow \infty$; fazendo o termo $\frac{4u_x^2 E}{6(\nu+1)} + \frac{4v_y^2 E}{3(1-\nu^2)} = 0$.

Assim, a única solução compatível do modelo é aquela em que $u_x = 0$ e $v_y = 0$, demonstrando a ocorrência do travamento no modelo de elementos finitos, quando a altura h tende a zero, usando-se um único elemento de 4 nós.

3.3.2 Abordagem do travamento no modelo discreto usando a solução numérica de elementos finitos para o elemento de 4 nós

A fim de demonstrar a ineficiência do elemento de 4 nós na obtenção dos deslocamentos nodais em modelos de elementos finitos submetidos a flexão pura, resolvemos analiticamente, a equação reduzida $KU = R$ do método dos elementos finitos para o modelo da Figura 4, sendo K a matriz de rigidez global e R o vetor carregamento e U a matriz dos deslocamentos nodais dos graus de liberdade locais, que nos forneceu:

$$u_{MEF} = \frac{12M(-1+\nu^2)}{EL\left(-2\left(\frac{h}{L}\right)^2 - 1 + \nu\right)} \quad (30)$$

$$v_{MEF} = -\frac{12M(-1+\nu^2)}{E\left(-2\left(\frac{h}{L}\right)^2 - 1 + \nu\right)} \quad (31)$$

Os quais chamaremos de deslocamentos aproximados u_{MEF} e v_{MEF} . Tomaremos também as equações para os deslocamentos horizontal e vertical na extremidade livre da barra obtida pela teoria da elasticidade (7) e (8); as quais chamaremos de deslocamentos exatos u_{EXATO} e v_{EXATO} , respectivamente. Com o intuito de analisar e comparar o comportamento desses deslocamentos quando a estrutura torna-se delgada, fizemos o momento M variar na relação k_1/l^2 para os deslocamentos u_{MEF} , u_{EXATO} , v_{MEF} e v_{EXATO} , a fim de mantermos constantes os valores dos deslocamentos verticais previstos pela solução

exata, para um aumento progressivo de L , sendo k_1 uma constante qualquer. Substituindo M nas equações 30 e 31 obteremos:

$$u_{MEF} = \frac{12k_1(-1+\nu^2)}{Eh^3\left(2\frac{1}{\varepsilon}-\frac{1}{\varepsilon^3}(\nu-1)\right)} \quad (32)$$

$$v_{MEF} = -\frac{12k_1(-1+\nu^2)}{Eh\left(2-\frac{1}{\varepsilon^2}(\nu-1)\right)} \quad (33)$$

Examinando as equações 32 e 33, concluímos que os deslocamentos u_{MEF} e v_{MEF} , do modelo de elementos finitos trava quando aumentamos o comprimento L mantendo h fixo.

Estes resultados podem ser vistos nos gráficos das Figuras 5 e 6.

Figura 5 – Análise do travamento – Deslocamento u (MEF) e u (EXATO) – Elemento de 4 nós

Figura 6 – Análise do travamento – Deslocamento v (MEF) e v (EXATO) – Elemento de 4 nós

Além do modelo de elementos finitos com um único elemento de 4 nós apresentar travamento, os resultados obtidos para os deslocamentos, em relação a solução analítica, não foram satisfatórios, seja para grandes ou pequenos valores de h .

Considere agora que ao invés de usarmos um único elemento de 4 nós, resolvamos aumentar o número de elementos de 4 nós na direção horizontal, na mesma estrutura conforme Figura 7.

Figura 7 – Barra modelada com vários elementos de 4 nós na direção horizontal – refinamento uniforme

A Tabela 2 mostra os parâmetros geométricos, valores de momento e número de elementos na direção horizontal, que foram utilizados nos modelos da Figura 7 para análise do deslocamento vertical na extremidade livre.

Tabela 2 – Parâmetros de modelagem – Refinamento da direção horizontal – elemento de 4 nós

L	h	M	Número de elementos na direção horizontal
10	1	20	10, 50, 100, 500
	0,1	2	
	0,01	0,2	

O gráfico da Figura 8, a seguir, mostra os resultados para o deslocamento vertical na extremidade livre, com o aumento do número de elementos de 4 nós na direção horizontal e diminuição da relação h/L do modelo.

Figura 8 – Gráfico Deslocamento Normalizado x h/L – Malhas Horizontais – Elemento de 4 nós

Percebe-se que com o refinamento da malha na direção horizontal, preservando-se a altura h dos elementos, obtêm-se uma sensível melhora nos resultados dos deslocamentos verticais. No entanto para relações h/L da

ordem de 0,01 e 0,001 as previsões para os deslocamentos se deterioraram revelando o travamento. Ou seja, para um dado refinamento existe uma relação h/L tal que os deslocamentos verticais tendem a zero. A explicação de porque a subdivisão ao longo do comprimento L , ou seja, na direção x , atenua o travamento está associada a representação do monômio x^2 presente na solução analítica (MACNEAL,1994). Por outro lado, vemos que os refinamentos das malhas utilizadas se mostram bastante exageradas e sem utilização prática. Considere agora, para o mesmo problema, um refinamento na direção vertical conforme Figura 9.

Figura 9 – Barra modelada com vários elementos de 4 nós na direção vertical – Refinamento uniforme

A Tabela 3 mostra os parâmetros geométricos, valores de momento e número de elementos na direção vertical, que foram utilizados nos modelos da Figura 9 para análise do deslocamento vertical na extremidade livre.

Tabela 3 – Parâmetros de modelagem – Refinamento da direção vertical – elemento de 4 nós

L	h	M	Número de elementos na direção vertical
10	1	20	5, 10, 50
	0,1	2	
	0,01	0,2	

A gráfico da Figura 10 mostra os resultados com o aumento do número de elementos de 4 nós na direção vertical e diminuição da relação h/L do modelo.

Figura 10 – Gráfico Deslocamento Normalizado x h/L – Malhas Verticais – elemento de 4 nós

Percebe-se que os resultados obtidos mostram que não há melhora perceptível com o refinamento da malha. Obviamente tal refinamento não colabora para a representação do termo x^2 presente em (8).

Vemos por esses últimos dois casos que o uso do elemento de 4 nós, na modelagem de estruturas delgadas submetidas a flexão pura, fica restrita a uma configuração de malha que foge ao interesse prático; no caso apresentado da barra, apenas quando o número de elementos for exageradamente grande na direção horizontal, é que os resultados apresentam certa melhora.

3.3.3 Abordagem do travamento no problema discreto usando elementos de 8 e 9 nós

Na seção anterior, estudamos modelos bidimensionais usando elementos não distorcidos de 4 nós e verificamos que além de travarem para pequenas alturas (h), também o seu uso não é recomendável em problemas de flexão. Nesta subseção estudaremos o mesmo problema da barra engastada, porém agora discretizada com elementos de 8 e 9 nós.

Considere a mesma barra reta engastada, agora modelada inicialmente com um único elemento de 8 nós e em seguida com um único elemento de 9 nós, conforme Figuras 11 e 12.

Figura 11 – Barra modelada com um elemento de 8 nós

Figura 12 – Barra modelada com um elemento de 9 nós

A Tabela 4 mostra os parâmetros geométricos, valores de momento e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 11 e 12 para análise do deslocamento vertical do nó inferior da extremidade livre.

Tabela 4 – Parâmetros de modelagem – elementos regulares de 4, 8 e 9 nós – Barra reta engastada

L	h	M	Tipo de elemento
10	10	200	4, 8, 9
	2	40	
	1	20	
	0,1	2	
	0,01	0,2	

Ao examinarmos o deslocamento vertical da estrutura, à medida que a mesma se torna delgada, observamos que, usando elementos de 8 e 9 nós nos modelos, os resultados apresentados foram satisfatórios, conforme mostra o gráfico da Figura 13.

Figura 13 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – malhas regulares – elementos de 4, 8 e 9 nós

Como comprovado anteriormente, o gráfico da Figura 13 mostra que o elemento de 4 nós realmente “trava” para espessuras delgadas.

Vemos, porém, que apesar dos resultados para o elemento de 8 e 9 nós, terem sido excelentes se comparados ao elemento de 4 nós, e não travarem para pequenas alturas, verificamos que os mesmos não foram exatos. Isso pode ser acompanhado com detalhes pela Tabela 5.

Tabela 5 – Deslocamento vertical normalizado na extremidade livre – malhas regulares – Valores detalhados – Elementos de 4, 8 e 9 nós

Resumo Geral - Malha Regular					
Deslocamento Vertical na Extremidade Livre					
Elemento	$h/L=1$	$h/L=0,2$	$h/L=0,1$	$h/L=0,01$	$h/L=0,001$
4	0,67	0,09	0,03	0,00	0,00
8	1,03	0,97	0,98	0,98	0,98
9	1,02	0,99	0,99	0,99	0,99

Percebemos que para o elemento de 8 nós, o erro é de 0.02% e para o elemento de 9 nós é de 0.01%. A explicação dessa imprecisão está na restrição associada à condição de contorno adotada. Os modelos de barra analisados até aqui, tanto com elementos de 4, 8 e 9 nós, estavam com os deslocamentos u e v impedidos.

Considere, porém, a seguinte condição de contorno conforme modelos das Figuras 14 e 15.

Figura 14 – Barra modelada com um elemento de 8 nós com engaste parcial

Figura 15 – Barra modelada com um elemento de 9 nós com engaste parcial

A Tabela 6 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 14 e 15 para análise do deslocamento vertical do nó inferior da extremidade livre.

Tabela 6 – Parâmetros de modelagem – elementos regulares de 8 e 9 nós - Barra parcialmente engastada

L	h	M	Tipo de elemento
10	2	40	8, 9

Verificamos que a adoção de um engaste parcial produz resultados exatos para o deslocamento vertical na extremidade livre conforme mostra a Tabela 7.

Tabela 7 – Deslocamento vertical na extremidade livre – malhas regulares – Barra parcialmente engastada

Deslocamento Vertical na Extremidade Livre			
Elemento	MEF	Analítico	Normalizado
8 (nó 5)	0,0006	0,0006	1,000
9 (nó 6)	0,0006	0,0006	1,000
8 (nó 1)	0,0006018	0,0006018	1,000
9 (nó 7)	0,0006018	0,0006018	1,000

A realização de apenas uma análise foi suficiente para percebermos que a nova condição de contorno imposta, onde os nós extremos do engaste estão livres para transladar na direção vertical, elimina a pequena imprecisão nos deslocamentos verticais observados quando o modelo de engaste é perfeito. Obviamente, como para a solução analítica $v(0, y) = 0$, somente para $y = 0$ não se poderia obter a solução exata com os modelos das Figuras 11 e 12.

Verificamos que tanto para engaste perfeito como para o parcial; as estruturas submetidas a flexão pura, modeladas com elementos de 8 e 9 nós, diferentemente da apresentada com um único elemento de 4 nós, não “travam” quando a altura h tende a zero.

3.4 Os efeitos da distorção na solução numérica de elementos finitos

Até aqui, tratamos em nossas análises de modelos de elementos finitos, casos onde as malhas de elementos de 4, 8 e 9 nós utilizadas eram regulares, ou seja, sem distorção. Vimos que o elemento de 4 nós fornece resultados muito ruins e trava para espessuras delgadas, sendo que os resultados satisfatórios foram alcançados apenas com refinamentos exagerados na direção horizontal do modelo. Por outro lado acompanhamos uma boa performance nos modelos discretizados com malhas de elementos finitos de 8 e 9 nós, os quais alcançaram excelentes resultados com o uso de um único elemento apenas. Nesta seção estudaremos os efeitos causados por malhas de elementos de 8 e 9 nós distorcidos, nos resultados para o deslocamento vertical. Serão usadas, no mesmo problema de flexão simples, malhas sob dois tipos de distorção: distorção de lado retilíneo e distorção de lado curvo. Será feita uma abordagem dos monômios que constituem a formulação isoparamétrica de cada tipo de elemento distorcido com o intuito de explicar o comportamento dos resultados obtidos para os deslocamentos. Aplicaremos estes conceitos no problema de uma viga curva engastada, em estado plano de tensão, submetida a um momento fletor na extremidade livre.

3.4.1 Abordagem do travamento no problema discreto usando elementos de 8 e 9 nós sob distorção retilínea

Considerando a mesma barra engastada da Figura 3, adotamos uma malha de elementos de 8 e 9 nós distorcidos respectivamente, conforme Figuras 16 e 17. A essa distorção chamaremos de retilínea.

Figura 16 – Barra modelada com dois elementos de 8 nós – distorção retilínea

Figura 17 – Barra modelada com dois elementos de 9 nós – distorção retilínea

A Tabela 8 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 16 e 17 para análise do deslocamento vertical no nó inferior da extremidade livre.

Tabela 8– Parâmetros de modelagem – elementos com distorção retilínea de 4, 8 e 9 nós

L	h	M	Tipo de elemento
10	10	200	4, 8, 9
	2	40	
	1	20	
	0,1	2	
	0,01	0,2	

Os resultados obtidos foram plotados no gráfico da Figura 18.

Figura 18 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Distorção retilínea – elementos de 4, 8 e 9 nós

Constatamos pelo gráfico, uma piora na eficiência dos resultados quando o elemento de 8 nós foi usado com este tipo de distorção e isto ficou mais nítido para alturas h muito pequenas. Ao contrário do elemento de 8 nós, o elemento de 9 nós manteve a mesma eficiência nos resultados, mesmo para alturas muito pequenas, não sendo influenciado pelos efeitos da distorção.

A explicação do comportamento dos resultados, para o caso de flexão pura, é encontrada nos monômios que formam as funções de interpolação isoparamétricas de cada elemento, como será visto na próxima subseção.

3.4.1.1 Estudo dos monômios nas funções de interpolação isoparamétricas dos elementos de 8 e 9 nós sob distorção retilínea

Considere r e s o sistema de coordenadas locais de um elemento isoparamétrico; seja x e y o sistema de coordenadas globais; $h_i(r, s)$ as

funções de interpolação nodais do elemento e u_i e v_i os graus de liberdade associados a cada nó. Considerando o elemento de q nós, temos:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i(r, s) u_i \quad (34)$$

$$v = \sum_{i=1}^q h_i(r, s) v_i \quad (35)$$

Para o elemento de 9 nós:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 + \alpha_9 r^2 s^2 \quad (36)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 r^2 + \beta_5 rs + \beta_6 s^2 + \beta_7 r^2 s + \beta_8 rs^2 + \beta_9 r^2 s^2 \quad (37)$$

E para o elemento de 8 nós:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 \quad (38)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 r^2 + \beta_5 rs + \beta_6 s^2 + \beta_7 r^2 s + \beta_8 rs^2 \quad (39)$$

Considere o elemento de 8 nós, cuja aplicação isoparamétrica é:

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^8 h_i x_i \quad (40)$$

$$y(r, s) = \sum_{i=1}^8 h_i y_i \quad (41)$$

Expandindo temos:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 \quad (42)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 r^2 + \beta_5 rs + \beta_6 s^2 + \beta_7 r^2 s + \beta_8 rs^2 \quad (43)$$

sendo os $\alpha's$ e $\beta's$ constantes independentes de r e s .

E o elemento de 9 nós cuja aplicação isoparamétrica é:

$$x(r, s) = \sum_{i=1}^9 h_i x_i \quad (44)$$

$$y(r, s) = \sum_{i=1}^9 h_i y_i \quad (45)$$

Cuja expansão é:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 r^2 + \alpha_5 rs + \alpha_6 s^2 + \alpha_7 r^2 s + \alpha_8 rs^2 + \alpha_9 r^2 s^2 \quad (46)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 r^2 + \beta_5 rs + \beta_6 s^2 + \beta_7 r^2 s + \beta_8 rs^2 + \beta_9 r^2 s^2 \quad (47)$$

sendo os $\alpha's$ e $\beta's$ constantes independentes de r e s .

Obviamente considerando que quando o elemento está bem definido $r = r(x, y)$ e $s = s(x, y)$.

Considerando a distorção retilínea conforme Figuras 17 e 18; desde que os lados do elemento sejam retilíneos e os nós 5,6,7 e 8 (sobre os lados do elemento de 8 e 9 nós), estejam em seus respectivos pontos médios, e o nó 9 no elemento de 9 nós esteja no seu baricentro, as funções 42 e 43 para o elemento de 8 nós e as funções 46 e 47 para o elemento de 9 nós, ficam reduzidas a:

$$x = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 rs \quad (48)$$

$$y = \delta_1 + \delta_2 r + \delta_3 s + \delta_4 rs \quad (49)$$

sendo os $\gamma's$ e $\delta's$ constantes independentes de r e s . Isso pode ser comprovado com detalhes, conforme Anexo I.

Observamos que os monômios existentes nas funções que representam a solução exata dos deslocamentos horizontal e vertical do problema da barra reta submetida à flexão pura são xy, x^2, y^2 , conforme equações 7 e 8. Então é de interesse investigar se a solução exata, pode ser representada, por elementos com esse tipo de distorção.

Considerando (48) e (49) temos que:

$$x^2 = \lambda_1 + \lambda_2 r + \lambda_3 s + \lambda_4 r^2 + \lambda_5 rs + \lambda_6 s^2 + \lambda_7 r^2 s + \lambda_8 rs^2 + \lambda_9 r^2 s^2 \quad (50)$$

$$y^2 = \kappa_1 + \kappa_2 r + \kappa_3 s + \kappa_4 r^2 + \kappa_5 rs + \kappa_6 s^2 + \kappa_7 r^2 s + \kappa_8 rs^2 + \kappa_9 r^2 s^2 \quad (51)$$

$$xy = \psi_1 + \psi_2 r + \psi_3 s + \psi_4 r^2 + \psi_5 rs + \psi_6 s^2 + \psi_7 r^2 s + \psi_8 rs^2 + \psi_9 r^2 s^2 \quad (52)$$

sendo os $\lambda's$, $\kappa's$ e $\psi's$, constantes independentes de r e s .

Tomando-se (48), (49), (50), (51), (52) e considerando o elemento de 9 nós, então é possível representar de forma exata qualquer campo de deslocamentos dado por:

$$u(x, y) = \omega_1 + \omega_2 x + \omega_3 y + \omega_4 x^2 + \omega_5 y^2 + \omega_6 xy \quad (53)$$

Ou seja:

$$\begin{aligned} u(x, y) = & \omega_1 + \omega_2(\gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 rs) + \omega_3(\delta_1 + \delta_2 r + \delta_3 s + \delta_4 rs) \\ & + \omega_4(\lambda_1 + \lambda_2 r + \dots + \delta_9 r^2 s^2) + \omega_5(\kappa_1 + \kappa_2 r + \dots + \kappa_9 r^2 s^2) + \omega_6(\psi_1 + \psi_2 r + \dots + \psi_9 r^2 s^2) \end{aligned} \quad (54)$$

sendo os $\omega's$ constantes independentes de r e s .

Considerando (36), podemos determinar as constantes $\alpha_i, i=1, \dots, 9$, De fato,

$$\alpha_1 = \omega_1 + \omega_2 \gamma_1 + \omega_3 \delta_1 + \omega_4 \lambda_1 + \omega_5 \kappa_1 + \omega_6 \psi_1$$

$$\alpha_2 = \omega_2 \gamma_2 + \omega_3 \delta_2 + \omega_4 \lambda_2 + \omega_5 \kappa_2 + \omega_6 \psi_2$$

$$\alpha_3 = \omega_2 \gamma_3 + \omega_3 \delta_3 + \omega_4 \lambda_3 + \omega_5 \kappa_3 + \omega_6 \psi_3$$

$$\alpha_4 = \omega_4 \lambda_4 + \omega_5 \kappa_4 + \omega_6 \psi_4$$

$$\alpha_5 = \omega_2 \gamma_4 + \omega_3 \delta_4 + \omega_4 \lambda_5 + \omega_5 \kappa_5 + \omega_6 \psi_5$$

$$\alpha_6 = \omega_4 \lambda_6 + \omega_5 \kappa_6 + \omega_6 \psi_6$$

$$\alpha_7 = \omega_4 \lambda_7 + \omega_5 \kappa_7 + \omega_6 \psi_7$$

$$\alpha_8 = \omega_4 \lambda_8 + \omega_5 \kappa_8 + \omega_6 \psi_8$$

$$\alpha_9 = \omega_4 \lambda_9 + \omega_5 \kappa_9 + \omega_6 \psi_9$$

Assim:

$$u(x, y) = (\omega_1 + \dots + \omega_6 \psi_1) + (\omega_2 \gamma_2 + \dots + \omega_6 \psi_2)r + \dots + (\omega_4 \lambda_9 + \omega_5 \kappa_9 + \omega_6 \psi_9)r^2 s^2 \quad (55)$$

Procedendo-se de igual forma são determinados também os $\beta's$ que representam $v(x, y) = \eta_1 + \eta_2 x + \eta_3 y + \eta_4 x^2 + \eta_5 y^2 + \eta_6 xy$.

Note-se que para o elemento de 8 nós não é possível representar xy, x^2, y^2 , devido a ausência do monômio r^2s^2 em sua interpolação (Lee, N.S; Bathe, K.J; 1993), explicando a ineficiência deste elemento na obtenção da solução exata para elementos com distorção retilínea.

Obviamente, no caso de malhas não distorcidas, tanto os elementos de 8 como de 9 nós representam de forma exata xy, x^2, y^2 , isso porque não havendo distorção, esses elementos apresentam os monômios necessários em suas interpolações como mostram (42), (43), (46) e (47).

3.4.2 Abordagem do travamento no problema discreto usando elementos de 8 e 9 nós sob distorção curva

Considere agora a mesma barra da Figura 3 modelada com elementos de 8 e 9 nós sob distorção do tipo curva conforme Figuras 19 e 20.

Figura 19 – Barra modelada com dois elementos de 8 nós – distorção curva

Figura 20 – Barra modelada com um elemento de 9 nós – distorção curva

A Tabela 9 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 19 e 20 para análise do deslocamento vertical no nó inferior da extremidade livre.

Tabela 9 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8 e 9 nós com distorção do tipo curva – Barra parcialmente engastada

L	h	M	Tipo de elementos
10	10	200	8, 9
	1	20	
	0,1	2	

Os resultados obtidos para o deslocamento vertical na extremidade livre foram plotados no gráfico da Figura 21.

Figura 21 – Gráfico Deslocamento Vertical Normalizado x h/L – Distorção Curva – elementos de 8 e 9 nós

Pelos resultados no gráfico, verificamos que os elementos de 8 e 9 nós sob distorção curva travam para alturas pequenas. Percebemos que neste tipo de distorção, para relações $h/L = 0.1$ e $h/L = 0.01$, o elemento de 9 nós perde eficiência comparando-se com os resultados obtidos para distorção retilínea, sendo o seu comportamento fortemente influenciado pela altura da barra. Como realizado no caso da distorção retilínea, a próxima subseção, abordará a

questão dos monômios que constituem a formulação isoparamétrica dos elementos de 8 e 9 nós sob distorção do tipo curva, a fim de explicar o comportamento dos resultados referentes aos deslocamentos verticais.

3.4.2.1 Estudo dos monômios nas funções isoparamétricas dos elementos de 8 e 9 nós sob distorção curva

Considere a aplicação isoparamétrica abaixo.

$$x = \varsigma_1 + \varsigma_2 r + \varsigma_3 s + \varsigma_4 r^2 + \varsigma_5 rs + \varsigma_6 s^2 + \varsigma_7 r^2 s + \varsigma_8 rs^2 + \varsigma_9 r^2 s^2 \quad (56)$$

$$y = \rho_1 + \rho_2 r + \rho_3 s + \rho_4 r^2 + \rho_5 rs + \rho_6 s^2 + \rho_7 r^2 s + \rho_8 rs^2 + \rho_9 r^2 s^2 \quad (57)$$

sendo os $\varsigma's$ e $\rho's$, constantes independentes de r e s .

Esta equação é a forma mais geral para representar a aplicação de um elemento isoparamétrico de 8 ou 9 nós de configuração variada, (Lee, N.S., Bathe, K.J; 1993), servindo portanto para a distorção curva representada nas Figuras 20 e 21.

Se tomarmos os monômios em x e y que representam de forma exata o campo de deslocamentos da barra, ou seja x^2, y^2 e xy , e efetuarmos os produtos com (56) e (57), teremos para quaisquer das situações, variando apenas as constantes empregadas, os seguintes monômios:

$$\begin{aligned} & (\eta_1 + \eta_2 r + \eta_3 s + \eta_4 r^2 + \eta_5 rs + \eta_6 s^2 + \eta_7 r^2 s + \eta_8 rs^2 + \eta_9 r^2 s^2 + \eta_{10} r^3 + \eta_{11} s^3 + \eta_{12} r^4 \\ & + \eta_{13} r^3 s + \eta_{14} rs^3 + \eta_{15} s^4 + \eta_{16} r^4 s + \eta_{17} r^3 s^2 + \eta_{18} r^2 s^3 + \eta_{19} rs^4 + \eta_{20} r^4 s^2 + \eta_{21} r^3 s^3 \\ & + \eta_{22} r^2 s^4 + \eta_{23} r^4 s^3 + \eta_{24} r^3 s^4 + \eta_{25} r^4 s^4) \end{aligned} \quad (58)$$

Considerando a idéia abordada na subseção 3.4.1.1, e tomando a equação 53 que representa a solução exata do campo de deslocamentos, substituindo (56), (57) e (58) com suas respectivas constantes nessa equação e comparando os monômios que surgem dessa operação com os monômios da aplicação isoparamétrica dos elementos de 8 e 9 nós, representados

respectivamente por (42), (43), (56) e (57), verificaremos que tanto os elementos de 8 como os de 9 nós, neste tipo de distorção, não conseguem representar de forma exata o campo de deslocamentos, pela ausência em suas formulações de uma série de monômios (Lee, N.S., Bathe, K.J; 1993).

3.5 Solução numérica, por elementos finitos, do problema da barra curva engastada submetida à flexão simples

A fim de aplicarmos os conceitos até aqui estudados sobre elementos com distorção do tipo curva, considere agora a barra curva engastada em uma extremidade e livre na outra, no estado plano de tensão, de largura unitária, comprimento L , altura h , raio de curvatura médio r e ângulo de curvatura α , com um momento M aplicado na extremidade livre, conforme Figura 22.

Figura 22 – Viga curva engastada sob flexão simples

Sendo v a resposta analítica exata para o deslocamento na direção vertical para um ponto inferior localizado na extremidade livre, adotando estado plano de tensão, (Timoshenko, 1951) (Godoy;1995) (Leão;2002) tem-se:

$$v = \frac{4Br\alpha}{E} - K \sin \alpha \quad (59)$$

sendo os parâmetros B e K dados por:

$$B = -2 \frac{M}{N} (b^2 - a^2)$$

$$K = \frac{1}{E} \left(-\frac{(1+\nu)A}{r} + 2(1-\nu)BrLN(r) - B(1+\nu)r + 2C(1-\nu)r \right)$$

e os parâmetros A , C e N dados por:

$$A = -4 \frac{M}{N} a^2 b^2 LN\left(\frac{b}{a}\right)$$

$$C = \frac{M}{N} (b^2 - a^2 + 2(b^2 LN(b) - a^2 LN(a)))$$

$$N = (b^2 - a^2)^2 - 4a^2 b^2 \left(LN\left(\frac{b}{a}\right) \right)^2$$

Usando primeiramente um elemento de 8 nós curvo e posteriormente um elemento de 9 nós curvo, modelamos a estrutura, conforme Figuras 23 e 24.

Figura 23 – Viga curva modelada com um elemento de 8 nós com engaste parcial

Figura 24 – Viga curva modelada com um elemento de 9 nós com engaste parcial

A Tabela 10 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 23 e 24 para análise do deslocamento vertical no nó inferior da extremidade livre.

Tabela 10 – Parâmetros de modelagem – Barra curva parcialmente engastada – elementos de 8 e 9 nós com distorção curva

L	h	M	Tipo de elemento
63	20	20	8, 9
	5		
	0,1		

Observamos o comportamento dos resultados, quando fixamos o momento fletor M , o comprimento L e o ângulo α da barra diminuindo progressivamente a altura h , conforme gráfico da Figura 25.

Figura 25 – Gráfico Deslocamento vertical normalizado x h/L – Viga curva parcialmente engastada – elemento de 8 e 9 nós

Pelos resultados obtidos, verificamos que o elemento de 8 nós e 9 nós, ao apresentar distorção curva, tem resultados análogos e bastante ruins para o deslocamento vertical na extremidade livre da barra, seja para grandes ou pequenas alturas, ocorrendo, como vimos na subseção 3.4.2.1, devido à deficiência de monômios quadráticos em suas formulações.

Considere agora para o problema da viga curva, o aumento no número de elementos de 8 e 9 nós. A Tabela 11 mostra os parâmetros geométricos,

valores de momento, malhas utilizadas e tipos de elementos, que foram utilizadas nesta nova proposta de modelagem para análise do deslocamento vertical no nó inferior da extremidade livre.

Tabela 11 – Parâmetros de modelagem – Barra curva parcialmente engastada – elementos de 8 e 9 nós com distorção curva – Malhas refinadas

L	h	M	Malhas	Tipo de elemento
10	20	20	5x10	8, 9
	5		10x20	
	0,1		20x30	

Os resultados podem ser acompanhados nos gráficos das Figuras 26 e 27.

Figura 26– Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 8 nós – Distorção curva – Viga curva parcialmente engastada

Figura 27 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 9 nós – Distorção curva – Viga curva parcialmente engastada

Observamos que o comportamento dos resultados para o deslocamento vertical na relação $h/L = 0.1$ por exemplo, obteve uma sensível melhora para os dois tipos de elementos distorcidos. Ao diminuirmos a espessura do modelo em análise para relações $h/L = 0.01$ e $h/L = 0.001$, notamos que mesmo refinando a malha, o deslocamento vertical apresenta resultados muito ruins, tanto para o elemento de 8 nós, como para o elemento de 9 nós.

Embora o refinamento dessas malhas garanta, pelo método dos elementos finitos, uma melhora dos resultados para o deslocamento vertical, eles ainda ficaram longe da resposta analítica esperada. Isso porque o ponto na extremidade livre, que escolhemos para plotar os resultados, sofre influência das cargas concentradas utilizadas para gerarem o binário equivalente ao momento fletor ali aplicado. Assim, devido ao efeito de *Saint-Venant*, as respostas para o deslocamento vertical na extremidade livre ficam alterados no ponto de aplicação da carga concentrada. A fim de contornarmos essas imprecisões, modificamos o binário aplicado para um carregamento triangular equivalente conforme Figura 28.

Figura 28 – Viga curva submetida a um carregamento triangular na extremidade livre com engaste parcial

Efetuada a análise do deslocamento vertical, para um ponto localizado no meio do vão, considerando por exemplo, uma malha 20x30 de elementos de 8 e posteriormente de 9 nós sob distorção curva, para relações $h/L = 0.1$, $h/L = 0.01$ e $h/L = 0.001$, listamos os resultados na Tabela 12.

Tabela 12 – Deslocamento vertical para um ponto no meio do vão - viga curva sob carregamento triangular com engaste parcial

h=20 - Elemento de 8 nós - Malha 20x30		h=20 - Elemento de 9 nós - Malha 20x30	
Deslocamento MEF	0,0000155	Deslocamento MEF	0,0000159
Deslocamento EXATO	0,0000159	Deslocamento EXATO	0,0000159
Deslocamento Normalizado	0,98	Deslocamento Normalizado	1,00

h=5 - Elemento de 8 nós - Malha 20x30		h=5 - Elemento de 9 nós - Malha 20x30	
Deslocamento MEF	0,00122	Deslocamento MEF	0,00130
Deslocamento EXATO	0,00137	Deslocamento EXATO	0,00137
Deslocamento Normalizado	0,90	Deslocamento Normalizado	0,95

h=0,1 - Elemento de 8 nós - Malha 20x30		h=0,1 - Elemento de 9 nós - Malha 20x30	
Deslocamento MEF	101,22	Deslocamento MEF	121,22
Deslocamento EXATO	184,51	Deslocamento EXATO	184,51
Deslocamento Normalizado	0,55	Deslocamento Normalizado	0,66

Percebemos que essas medidas adotadas, melhoraram de forma consistente os resultados para o deslocamento vertical, principalmente para a relação $h/L = 0.1$, seja para o elemento de 8 nós como também para o

elemento de 9 nós, porém como se percebe, os rendimentos para esses elementos, caem quando a estrutura se torna delgada.

3.6 Conclusões do estudo de flexão pura para os casos bidimensionais

Analizando os modelos estudados, sob o enfoque da flexão pura, concluímos que:

- O elemento de 4 nós trava.
- O elemento de 8 nós trava para distorção retilínea.
- O elemento de 9 nós trava para distorção curva.

Até aqui, em nossas análises, os modelos que estudamos estavam submetidos exclusivamente à flexão. A opção para tais modelos, como comentado anteriormente, ocorreu em virtude do ajuste natural, que favorece o estudo do travamento, pois nessa situação as deformações por cisalhamento (γ), são nulas.

Porém, considere agora o problema da Figura 29, sendo $L = 10$, $p = 20$, $t = 1$ e h com valores de 1, 0.1 e 0.01.

Figura 29 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

A resposta analítica para $v(x,0)$, via solução de barra pela integração da linha elástica é (Timoshenko;1993):

$$v = \frac{px^2}{24EI} (6L^2 - 4Lx + x^2) \quad (60)$$

Vemos que a barra está submetida a um carregamento uniformemente distribuído, que também gera flexão, porém não sendo “pura”. Considerando a resposta analítica acima e modelando a barra com elementos isoparamétricos de 8 e 9 nós não distorcidos, foram usadas malhas com apenas um elemento, 4 elementos com refinamento na direção horizontal, 8 elementos com refinamento na direção horizontal, uma malha 2x4 e uma malha 4x8, para relações h/L de 0.1, 0.01 e 0.001, obtendo os seguintes resultados, conforme gráficos das Figuras 30, 31 e 32.

Figura 30– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.1$

Figura 31– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.01$

Figura 32– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0.001$

Percebemos que os elementos de 8 e 9 nós não distorcidos, nas relações h/L 0.1 e 0.01, apresentam resultados exatos na medida em que as malhas vão se tornando mais refinadas. No caso da relação $h/L=0.001$, apesar de observarmos uma ligeira perda de eficiência mesmo com o refinamento, os resultados continuam sendo muito bons. A razão pela qual há perda de precisão quando h/L diminui, se deve ao fato de que quando $h/L \rightarrow 0$, as restrições associadas a deformação de cisalhamento transversal ($\gamma_{xy} \rightarrow 0$), diminuem o conjunto de funções disponíveis para a aproximação da resposta.

Se considerarmos novamente o problema da Figura 29, com os mesmos dados geométricos e com o mesmo carregamento, porém usando nos modelos de elementos finitos, elementos de 8 e 9 nós com distorção retilínea, conforme Figura 33, e aplicando um refinamento na direção horizontal com 4, 8 e 16 elementos, obtemos os resultados conforme Figuras 34, 35 e 36.

Figura 33 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Malhas Distorcidas

Figura 34– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 4 elementos

Figura 35– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 8 elementos

Figura 36– Barra engastada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 16 elementos

O refinamento, como vemos, colabora com o aumento da eficiência dos elementos de 8 e 9 nós distorcidos, apresentando, por exemplo, resultados exatos para a relação $h/L = 0.1$. Ao diminuirmos a relação h/L , notamos que o elemento de 8 nós distorcido, mesmo refinando o modelo, tem seu uso inviável, pois ocorre travamento. No caso do elemento de 9 nós distorcido, apesar de um bom refinamento melhorar o resultados, quando a altura é muito pequena a precisão é perdida, pois não se consegue mais mobilizar monômios que satisfazem a restrição $\gamma_{xy} \rightarrow 0$ e ainda ter monômios livres suficientes para uma boa aproximação da solução exata.

Agora considere um outro tipo de carregamento para o problema da barra, conforme Figura 37, sendo $L = 10$, $p = 20$, $t = 1$ e h com valores de 1, 0.1 e 0.01.

Figura 37 – Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade.

A resposta analítica para $v(x,0)$, via solução de barra pela integração da linha elástica é (Timoshenko;1993):

$$v = \frac{px^2}{6EI}(3L - x) \quad (61)$$

Mudando apenas o carregamento, notamos que a carga aplicada na extremidade livre continua a produzir flexão, que, porém não é pura. Considerando a resposta analítica acima e repetindo as malhas usadas no problema anterior para os elementos isoparamétricos de 8 e 9 nós não distorcidos e usando-se relações h/L de 0.1, 0.01 e 0.001, obtemos os resultados, conforme gráficos das Figuras 38, 39 e 40.

Figura 38– Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – h/L=0.1

Figura 39– Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – h/L=0.01

Figura 40– Barra engastada, no estado plano de tensão, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – $h/L=0,001$

O comportamento dos resultados para os elementos de 8 e 9 nós não distorcido, nesse problema, foram os mesmos apresentados para a situação anterior com carga distribuída. Se considerarmos a mesma distorção anteriormente mostrada na Figura 33, tomando o mesmo refinamento anterior que considera 4, 8 e 16 elementos na horizontal, verificaremos que os resultados apresentados são também análogos aos das Figuras 41, 42 e 43.

Figura 41– Barra engastada, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 4 elementos

Figura 42– Barra engastada, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 8 elementos

Figura 43– Barra engastada, submetida a uma carga concentrada na extremidade livre – Deslocamento Vertical Extremidade Livre – Malhas Distorcidas – 16 elementos

Os experimentos acima mostram que em modelos 2-D de estruturas delgadas o elemento de 9 nós não distorcido se mostra superior ao de 8 nós mesmo em outras situações de flexão e que sendo usado em malhas devidamente refinadas, este elemento pode ser usado com distorção retilínea mesmo em modelos de estruturas delgadas.

4 O travamento de modelos de elementos finitos tridimensionais considerando flexão simples

No capítulo anterior, estudamos o comportamento de modelos bidimensionais sob flexão simples, usando elementos de 4, 8 e 9 nós distorcidos e não distorcidos. Verificamos os efeitos nos resultados para o deslocamento vertical quando a altura h da estrutura tendia a valores muito pequenos. Fizemos uma abordagem, em termos da formulação de energia, a fim de explicar o fenômeno do travamento e estudamos, por meio dos monômios das funções de interpolação, os efeitos nos resultados dos deslocamentos, quando usamos elementos distorcidos. Percebemos, no caso 2-D, que a análise dos monômios das funções de interpolação isoparamétricas foram suficientes para explicar o travamento do elemento de 4 nós não distorcido, do elemento de 8 nós sob distorção retilínea e do elemento de 9 nós sob distorção curva. Os capítulos anteriores foram de bastante valia, pois permitiram que introduzíssemos os conceitos que utilizaríamos nas análises de modelos 3-D, as quais compõe o verdadeiro objeto de estudo desse trabalho. Repetindo então o processo, faremos no capítulo que se segue, a análise do travamento, porém agora em estruturas delgadas, usando elementos sólidos em modelos tridimensionais. Explicaremos os resultados numéricos alcançados por esses modelos, para os deslocamentos verticais, por meio apenas dos monômios que constituem a formulação dos elementos sólidos empregados.

4.1 Descrição do problema

Da mesma maneira que fizemos para os modelos bidimensionais, analisaremos novamente, no âmbito da modelagem tridimensional, os dois

problemas discutidos da resistência dos materiais e um terceiro problema, referente a uma placa engastada em uma extremidade. Serão eles:

1) O problema de uma barra reta engastada em uma extremidade e livre na outra submetida a um momento fletor na extremidade livre, cujos modelos de elementos finitos estudados foram discretizados com malhas de elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos e hexaédricos de 20 e 27 nós com distorção do tipo retilínea ou curva.

2) O problema de uma placa reta engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um momento fletor na extremidade livre, cujos modelos de elementos finitos estudados foram discretizados com malhas de elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos ou com distorção do tipo retilínea e malhas regulares ou distorcidas de elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós.

3) E o problema de uma barra curva engastada em uma extremidade e livre na outra, submetida a um momento fletor na extremidade livre, cujos modelos de elementos finitos estudados foram discretizados com malhas de elementos hexaédricos de 20 e 27 nós com distorção do tipo curva.

Nos três casos, avaliaremos o comportamento dos resultados para o deslocamento vertical na extremidade livre, quando a altura h do modelo se torna pequena.

4.2 Solução analítica do problema da viga engastada submetida à flexão simples

Considere primeiramente a estrutura simples da Figura 44, na configuração indeformada, submetida a um momento fletor M na extremidade livre com espessura t , sendo L o comprimento da barra e h a sua altura. Como feito no caso 2-D, antes de partirmos para as análises numéricas de

elementos finitos (MEF), faremos uma abordagem analítica do problema no âmbito da teoria da elasticidade.

Figura 44 – Barra engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre

A solução analítica do problema 3-D acima, segundo a teoria da elasticidade, é:

$$u = -\frac{M}{EI} xz \quad (62)$$

$$v = \nu \frac{M}{EI} yz \quad (63)$$

$$w = \frac{M}{2EI} [x^2 + \nu(z^2 - y^2)] \quad (64)$$

Onde M é uma constante positiva e se refere ao momento fletor aplicado na extremidade livre para o problema em análise; E e ν referem-se respectivamente ao módulo de elasticidade de Young e o coeficiente de Poisson do material, I é o momento de inércia da seção transversal em relação ao eixo y no plano yz . As deformações então são:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{M}{EI} z \quad (65)$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = \nu \frac{M}{EI} z \quad (66)$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = \nu \frac{M}{EI} z \quad (67)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) = 0 \quad (68)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) = -\frac{M}{EI} x + \frac{M}{EI} x = 0 \quad (69)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \nu \frac{M}{EI} y - \nu \frac{M}{EI} y = 0. \quad (70)$$

Considerando a relação constitutiva geral da lei de Hooke, temos o seguinte campo de tensões:

$$\sigma_x = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_x + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_y + \varepsilon_z) \right] \quad (71)$$

Mas para o nosso problema:

$$\varepsilon_y = \varepsilon_z = -\nu \varepsilon_x \quad (72)$$

Obteremos:

$$\sigma_x = E \varepsilon_x = -\frac{M}{I} z \quad (73)$$

Temos então para σ_y e σ_z :

$$\sigma_y = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_y + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_z) \right] \quad (74)$$

$$\sigma_z = \frac{E(1-\nu)}{(1+\nu)(1-2\nu)} \left[\varepsilon_z + \frac{\nu}{1-\nu} (\varepsilon_x + \varepsilon_y) \right] \quad (75)$$

E considerando (66), obtemos:

$$\sigma_y = \sigma_z = 0 \quad (76)$$

Assim, é claro que sendo $\gamma_{xy} = \gamma_{xz} = \gamma_{yz} = 0$, temos:

$$\tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0 \quad (77)$$

Para caracterizar a solução do problema 3-D, temos que determinar para que campos de forças de volume o equilíbrio do campo de tensões é garantido. Considerando a equação de equilíbrio diferencial e introduzindo o campo de tensões temos:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} + f_x^B = 0 \Rightarrow f_x^B = 0 \quad (78)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_y}{\partial y} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial z} + f_y^B = 0 \Rightarrow f_y^B = 0 \quad (79)$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \tau_z}{\partial z} + f_z^B = 0 \Rightarrow f_z^B = 0 \quad (80)$$

Vemos que no equilíbrio não deve haver forças de volume atuando. A única componente de tensão não nula é σ_x . Dessa forma, a condição de contorno de que as forças de superfície são nulas nas faces superior e inferior da viga são implicitamente satisfeitas. Para a face definida por $x=L$, temos:

$$\mathbf{Tn} = \mathbf{f}^s \Rightarrow \sigma_x \mathbf{e}_x = \mathbf{f}^s \Rightarrow \mathbf{f}^s = -\frac{M}{I} z \mathbf{e}_x \quad (81)$$

E para $x=0$

$$\mathbf{Tn} = \mathbf{f}^s \Rightarrow -\sigma_x \mathbf{e}_x = \mathbf{f}^s \Rightarrow \mathbf{f}^s = \frac{M}{I} z \mathbf{e}_x \quad (82)$$

Se reduzirmos as forças de superfície da face cujo $x=L$ para o centro de gravidade, nós obteremos como força resultante:

$$\mathbf{R} = \int_A \mathbf{f}^s dy = \int_A -\frac{M}{I} y \mathbf{e}_x dy = 0 \quad (83)$$

E para o momento resultante referente ao centro da seção representado por b , temos:

$$\begin{aligned} \mathbf{M}_b &= \int_A (y \mathbf{e}_y + z \mathbf{e}_z) \times f^s \mathbf{e}_x dA \\ &= \int_A (-f^s y \mathbf{e}_y + f^s z \mathbf{e}_z) dA \\ &= \int_A \left(\frac{M}{I} y z \mathbf{e}_z - \frac{M}{I} z^2 \mathbf{e}_y \right) dA \\ &= -\frac{M}{I} \int_A z^2 dA \mathbf{e}_y = -M \mathbf{e}_y \end{aligned} \quad (84)$$

Onde M é o momento aplicado representado na Figura 28. Da mesma forma, referente a face $x=0$, obtemos $\mathbf{R}=\mathbf{0}$ e Me_y , garantindo assim o equilíbrio do sistema de forças.

Finalmente, tomando-se as equações (62), (63) e (64), verificamos os deslocamentos nulos nos pontos da extremidade fixa, ou seja, $u(0,0,z)=0$, $v(0,0,0)=0$ e $w(0,0,0)=0$. Percebemos que devido a atuação exclusiva do momento fletor M , as únicas tensões que surgem são as normais à seção transversal, as quais continuam a equilibrar o sistema também para o caso 3-D.

4.3 Solução numérica, por elementos finitos, do problema da barra reta engastada submetida à flexão simples

Na seção anterior analisamos a solução analítica do problema 3-D da barra reta engastada, conforme teoria da elasticidade. Nesta seção faremos uma abordagem numérica pelo método dos elementos finitos. No caso do problema 2-D foram usadas malhas de elementos distorcidos e não distorcidos de 4, 8 e 9 nós e constatou-se, pela formulação de energia que o elemento de 4 nós travava quando o modelo tornava-se delgado. No caso dos elementos de 8 e 9 nós, a análise dos monômios que constituem a formulação isoparamétrica, foi suficiente para provar a eficiência desses elementos em relação ao elemento de 4 nós, usando malhas regulares, além de explicar o prejuízo causado pela distorção retilínea do elemento de 8 nós e da distorção curva do elemento de 9 nós. No relativo problema tridimensional, faremos uma abordagem parecida, porém simplificaremos o estudo por meio apenas da análise dos monômios.

4.3.1 Abordagem do travamento no modelo discreto usando elementos hexaédricos não distorcidos de 8, 20 e 27 nós

Considere o problema da barra reta engastada da Figura 44 agora modelada com um elemento de 8, 20 e 27 nós conforme Figuras 45,46 e 47.

Figura 45 – Barra reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre discretizada com um elemento de 8 nós

Figura 46 – Barra reta parcialmente engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre discretizada com um elemento de 20 nós

Figura 47 – Barra reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre discretizada com um elemento de 27 nós

A Tabela 13 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, número de elementos e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 45, 46 e 47.

Tabela 13 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos – Barra engastada

L	h	t	M	Número de Elementos	Tipo de Elemento
10	1	1	20	1	8, 20 e 27 nós
	0,1		2		
	0,01		0,2		

Observamos o comportamento dos resultados referentes ao deslocamento vertical dos nós inferiores da extremidade livre, quando diminuimos progressivamente a relação h/L tornando a barra delgada. Os resultados estão plotados conforme gráfico da Figura 48.

Figura 48 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 8, 20 e 27 nós não distorcido – Barra reta parcialmente engastada

Percebemos, pelos resultados apresentados, que o elemento hexaédrico de 8 nós trava quando o modelo se torna delgado, sendo o comportamento, equivalente ao apresentado pelo elemento quadrilateral de 4 nós no caso bidimensional. Os elementos de 20 e 27 nós, da mesma forma que os

elementos quadrilaterais de 8 e 9 nós, apresentaram resultados exatos, não travando para espessuras delgadas.

Como o resultado para o deslocamento vertical, usando-se elementos de 4 nós, melhoraram apenas quando foram usadas malhas devidamente refinadas, repetimos para o elemento hexaédrico de 8 nós, o mesmo procedimento de refinamento de malha, no qual foram aumentados o número de elementos nas direções horizontal e vertical separadamente; conforme Figuras 49 e 50 respectivamente.

Figura 49 – Barra modelada com vários elementos hexaédricos de 8 nós na direção horizontal – Refinamento Uniforme

Figura 50 – Barra modelada com vários elementos hexaédricos de 8 nós na direção vertical – Refinamento Uniforme

As Tabelas 14 e 15 mostram os parâmetros geométricos, valor de momento, número de elementos e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 49 e 50 respectivamente, para análise do deslocamento vertical na extremidade livre.

**Tabela 14 – Parâmetros de modelagem – elemento de 8 nós não distorcido –
Refinamento na direção horizontal**

L	h	t	M	N. de Elementos na Horizontal	Tipo de Elemento
10	1	1	20	10,50,100,500 e 1000	8 nós
	0,1		2		
	0,01		0,2		

**Tabela 15 – Parâmetros de modelagem – elemento de 8 nós não distorcido –
Refinamento na direção vertical**

L	h	t	M	N. de Elementos na Vertical	Tipo de Elemento
10	1	1	20	5,10 e 50	8 nós
	0,1		2		
	0,01		0,2		

Os gráficos das Figuras 51 e 52 mostram respectivamente para refinamentos nas direções horizontal e vertical, os resultados para o deslocamento vertical em nós da extremidade livre, quando a relação h/L diminui.

**Figura 51 – Gráfico Deslocamento normalizado x h/L – Refinamento Horizontal –
Elemento hexaédrico de 8 nós**

Figura 52 – Gráfico Deslocamento normalizado x h/L – Refinamento Vertical – Elemento hexaédrico de 8 nós

Ao observarmos os gráficos das Figuras 51 e 52 em relação aos gráficos Figuras 8 e 10 do elemento de 4 nós, notaremos que o elemento hexaédrico de 8 nós apresenta um comportamento análogo ao quadrilateral de 4 nós em termos dos deslocamentos verticais, ou seja, a sua eficiência aumenta quando aumentamos o número de elementos na direção horizontal, em virtude desse refinamento colaborar para a representação do monômio x^2 presente em (64). Em contrapartida, pelo mesmo motivo apresentado na seção 3.3.2 para o elemento de 4 nós, o refinamento na direção vertical não contribui para a representação do monômio x^2 .

Até aqui, fizemos uma análise dos elementos de 8, 20 e 27 nós utilizados em malhas regulares (não distorcidas); porém, como realizado no caso bidimensional, analisaremos também modelos cujos elementos são distorcidos. Usaremos em nossas análises além dos tipos de distorções que foram apresentados para o caso 2D, também o tipo de distorção proposta por Irons no *Patch Test*.

4.3.2 Patch Test

O *Patch test* é um teste, proposto por (Irons, 1972); que visa investigar se determinado elemento não conforme (distorcido) é convergente. No *Patch test*, devemos considerar em um dado domínio analisado, as mínimas condições de contorno de deslocamentos, para eliminar os movimentos de corpo rígido, e de forças aplicadas, que resultam em condições de tensão constantes. Se neste teste o elemento conseguir representar os estados constantes de tensão, apresentando também deslocamentos nodais exatos, consideramos que o elemento “passou” no *Patch test*.

Como os elementos sólidos estudados neste trabalho são todos conformes, o intuito aqui é aproveitar a configuração de malha distorcida do *Patch Test*, nos casos dos modelos de estruturas delgadas que estão sendo analisados. Frente ao bom rendimento apresentado pelo elemento hexaédrico de 20 e 27 nós nos experimentos numéricos anteriores, resolvemos adotar o elemento hexaédrico de 27 nós por ser superior ao de 20 nós. Então considere o modelo da Figura 53.

Figura 53 – Malha do Patch test – Barra reta sob flexão simples - elementos hexaédricos sólidos

Aplicando a malha distorcida do *Patch Test*, no problema proposto da barra sobre flexão pura, com elementos hexaédricos de 27 nós; conhecendo a resposta analítica, adotando engaste parcial em uma extremidade e considerando um momento $M = 20$, a Tabela 16, mostra além dos parâmetros

geométricos, os resultados alcançados para o deslocamento vertical no nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 16 - Parâmetros geométricos – Malha do Patch Test – Elemento de 27 nós

Deslocamento na Extremidade Livre - Patch Test - Elemento de 27 nós					
L	h	t	MEF	Analítico	Normalizado
10	1	1	0,001200	0,001200	1,00
100			0,120000	0,120000	1,00

Vemos que usando elementos de 27 nós na forma distorcida, os resultados permanecem exatos mesmo quando o modelo considerado se torna delgado. Nas seções a seguir, usando agora outros tipos de distorção, ainda estudaremos a obtenção dos deslocamentos verticais no problema da barra reta engastada usando malhas de elementos sólidos em estruturas delgadas.

4.3.3 Abordagem do travamento no modelo discreto usando elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós com distorção retilínea.

Adotando o mesmo tipo de distorção retilínea, conforme seção 3.4.1, analisamos o comportamento dos deslocamentos verticais para a viga engastada considerada na Figura 54 abaixo; à esta malha chamaremos de malha distorcida 1.

Figura 54 – Barra engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre, com distorção retilínea – 2 elementos

Usamos elementos de 8, 20 e 27 nós com esse tipo de distorção, conforme Figuras 55, 56 e 57.

Figura 55 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 8 nós – distorção retilínea - 2 elementos

Figura 56 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 20 nós – distorção retilínea – 2 elementos

Figura 57 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 27 nós – distorção retilínea – 2 elementos

A Tabela 17 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, número de elementos e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 55, 56 e 57 para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 17– Parâmetros de modelagem – elementos com distorção retilínea de 8,20,27 nós – 2 elementos

L	h	t	M	Número de Elementos	Tipo de Elemento
10	1	1	20	2	8, 20 e 27 nós
	0,1		2		
	0,01		0,2		

O gráfico da Figura 58 mostra os resultados para o deslocamento vertical na extremidade livre quando diminuimos a relação h/L desses modelos.

Figura 58 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Distorção retilínea – elementos de 8, 20 e 27 nós – 2 elementos

Observamos pelos resultados que o elemento de 20 nós perde eficiência quando distorcido e trava para pequenas alturas. Já o elemento de 27 nós consegue manter resultados satisfatórios para os deslocamentos, mesmo para alturas muito pequenas. Esse comportamento é análogo ao apresentado pelo elemento quadrilateral de 8 nós em relação ao elemento de 9 nós, sob distorção retilínea no caso 2-D, conforme mostrou o gráfico da Figura 19.

Agora, considere a distorção retilínea da Figura 59, a esta malha chamaremos de malha distorcida 2.

Figura 59 – Barra engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre, com distorção retilínea – 3 elementos

Utilizamos também, elementos de 8, 20 e 27 nós, conforme Figuras 60, 61 e 62.

Figura 60 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 8 nós – distorção retilínea – 3 elementos

Figura 61 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 20 nós – distorção retilínea – 3 elementos

Figura 62 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 27 nós – distorção retilínea – 3 elementos

A Tabela 18 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, número de elementos e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 60, 61 e 62 para análise do deslocamento vertical no nó inferior da extremidade livre.

Tabela 18 – Parâmetros de modelagem – elementos com distorção retilínea de 8,20,27 nós – 3 elementos

L	h	t	M	Número de Elementos	Tipo de Elemento
10	1	1	20	3	8, 20 e 27 nós
	0,1		2		
	0,01		0,2		

O gráfico da Figura 63 mostra os resultados, quando diminuimos a relação h/L desses modelos.

Figura 63 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Distorção retilínea – elementos de 8, 20 e 27 nós – 3 elementos

Observamos que o comportamento do gráfico da Figura 63 é análogo ao do gráfico da Figura 58 quanto ao uso de elementos de 8, 20 e 27 nós sob distorção retilínea, ou seja, os elementos de 8 e 20 nós perdem eficiência e travam para alturas delgadas, sendo porém que o elemento de 27 nós, além de apresentar resultados exatos não trava.

4.4 Solução numérica, por elementos finitos, do problema da laje reta engastada submetida à flexão simples

Ampliando a análise do uso de elementos sólidos em modelagem 3-D, escolhemos o problema da laje plana engastada, conforme Figura 64, que representa o mesmo problema da barra reta engastada; considerando a mesma resposta analítica da teoria da teoria da elasticidade, apresentada na seção 4.2.

Figura 64 – Laje reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre

Além de utilizarmos em nossos estudos, elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós distorcidos e não distorcidos, introduziremos nesta seção também os elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós em malhas regulares e não regulares,

abordando o resultados referentes ao deslocamento vertical na extremidade livre quando a relação h/L diminui.

4.4.1 Abordagem do travamento no modelo discreto do problema da laje reta engastada usando elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos

Considere o modelo de elementos finitos, conforme Figuras 65, 66 e 67 nos quais foram usados respectivamente, elementos de 8, 20 e 27 nós não distorcidos.

Figura 65 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 8 nós não distorcidos

Figura 66 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 20 nós não distorcidos

Figura 67 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 27 nós não distorcidos

A Tabela 19 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, malhas utilizadas e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 65, 66 e 67, para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 19 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8,20,27 nós não distorcidos –Laje reta parcialmente engastada

L	h	t	M	Malhas	Tipo de Elementos
1	0,1	1	10	10x10x2	Hexaédricos de 8, 20 e 27 nós
	0,01				

O gráfico da Figura 68 mostra os resultados quando a altura h da laje diminui.

Figura 68 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 8, 20 e 27 nós não distorcido

Percebemos pelos resultados apresentados que o comportamento apresentado pelos elementos de 20 e 27 nós em relação ao de 8 nós é o mesmo observado no gráfico da Figura 48, ou seja, os elementos de 20 e 27 nós não travam apresentando resultados exatos e o elemento de 8 nós, trava para pequenos valores de h .

4.4.2 Abordagem do travamento no modelo discreto do problema da laje reta engastada usando elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós com distorção retilínea

Estudando a influência da distorção dos elementos, considere o modelo de elementos finitos, conforme Figuras 69, 70 e 71, nos quais foram usados respectivamente, elementos de 8, 20 e 27 nós com distorção retilínea.

Figura 69 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 8 nós distorcidos

Figura 70 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 20 nós distorcidos

Figura 71 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos hexaédricos de 27 nós distorcidos

A Tabela 20 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, malhas utilizadas e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 69, 70 e 71, para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 20 – Parâmetros de modelagem – elementos de 8,20,27 nós com distorção retilínea –Laje reta parcialmente engastada

L	h	t	M	Malhas	Tipo de Elementos
1	0,1	1	10	10x10x2	Hexaédricos de 8, 20 e 27 nós
	0,01				

O gráfico da Figura 72 mostra os resultados, quando a altura h da laje diminui.

Figura 72 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 8, 20 e 27 nós com distorção retilínea

Percebemos pelos resultados apresentados que o comportamento do elemento de 20 nós em relação ao de 27 nós é o mesmo observado no gráfico das Figuras 58 e 63, ou seja, o elemento de 20 nós perde eficiência quando apresenta distorção retilínea e trava para pequenos valores de h .

4.4.3 Abordagem do travamento no modelo discreto do problema da laje reta engastada usando elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós em malhas regulares

Nas duas próximas subseções, abordaremos três novos elementos sólidos a disposição de modelagens 3-D. Aplicaremos esses elementos no problema da laje reta engastada e faremos também estudos sobre o travamento numérico dos mesmos.

Considere o modelo de elementos finitos, conforme Figuras 73, 74 e 75 nos quais foram usados respectivamente, elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós em malhas regulares.

Figura 73 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 4 nós em malhas regulares

Figura 74 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 10 nós em malhas regulares

Figura 75 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 11 nós em malhas regulares

A Tabela 21 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, malhas utilizadas e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 73, 74 e 75, para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 21– Parâmetros de modelagem – elementos de 4,10,11 nós em malhas regulares –Laje reta engastada

L	h	t	M	Malhas	Tipo de Elementos
1	0,1	1	10	10x10x2	Tetraédricos de 4, 10 e 11 nós
	0,01				

O gráfico da Figura 76 mostra os resultados quando a altura h da laje diminui.

Figura 76 – Gráfico deslocamento vertical normalizado $x h/L$ – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas regulares

Percebemos pelos resultados apresentados que o comportamento apresentado pelos elementos de 10 e 11 nós em relação ao de 4 nós é o mesmo observado no gráfico da Figura 48 para os elementos de 20 e 27 nós, em relação ao elemento hexaédrico de 8 nós, ou seja, os elementos de 10 e 11 nós não travam e fornecem resultados exatos e o elemento tetraédrico de 4 nós trava para pequenos valores de h .

4.4.4 Abordagem do travamento no modelo discreto do problema da laje reta engastada usando elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós em malhas distorcidas

Seguindo o mesmo raciocínio anterior, considere o modelo de elementos finitos, conforme Figuras 77, 78 e 79, nos quais foram usados respectivamente, elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas distorcidas.

Figura 77 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 4 nós em malhas distorcidas

Figura 78 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 10 nós em malhas distorcidas

Figura 79 – Laje reta parcialmente engastada 3-D, discretizada com elementos tetraédricos de 11 nós em malhas distorcidas

A Tabela 22 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, malhas utilizadas e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 77, 78 e 79 para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 22– Parâmetros de modelagem – elementos de 4,10,11 nós em malhas distorcidas –Laje reta parcialmente engastada

L	h	t	M	Malhas	Tipo de Elementos
1	0,1	1	10	10x10x2	Tetraédricos de 4, 10 e 11 nós
	0,01				

O gráfico da Figura 80 mostra os resultados quando a altura h da laje diminui.

Figura 80 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas distorcidas

Percebemos pelos resultados apresentados que o comportamento dos elementos de 10 e 11 nós em relação ao tetraédrico de 4 nós é o mesmo observado no gráfico da Figura 76 quando os resultados eram para malhas regulares, ou seja, os elementos de 10 e 11 nós, além de não travarem, fornecem resultados exatos, sendo que o elemento tetraédrico de 4 nós, usando malhas distorcidas, trava para pequenos valores de h .

Nas seções e subseções anteriores do capítulo 4, nos preocupamos apenas com as análises numéricas dos resultados obtidos dos modelos de elementos finitos. Nas subseções que se seguem, analisaremos matematicamente a formulação dos elementos sólidos até aqui empregados, a partir dos monômios que constituem as funções isoparamétricas de tais elementos, a fim de explicar com consistência os resultados numéricos obtidos para os modelos submetidos à flexão pura. A sistemática que empregaremos será a mesma que foi adotada nas subseções 3.4.1.1 e 3.4.2.1 para o caso 2-D.

4.4.5 Estudo dos monômios nas funções de interpolação isoparamétricas dos elementos hexaédricos de 8, 20 e 27 nós sob distorção retilínea

Considere r , s e t , o sistema de coordenadas locais de um elemento isoparamétrico; seja x , y e z , o sistema de coordenadas globais; $h_i(r,s,t)$ as funções de interpolação nodais do elemento e u_i , v_i e w_i os graus de liberdade associados a cada nó. Considerando um elemento de q nós, temos:

$$u = \sum_{i=1}^q h_i(r,s,t)u_i \quad (85)$$

$$v = \sum_{i=1}^q h_i(r,s,t)v_i \quad (86)$$

$$w = \sum_{i=1}^q h_i(r,s,t)w_i \quad (87)$$

Para o elemento hexaédrico de 8 nós:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 rst \quad (88)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 rst \quad (89)$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 rst \quad (90)$$

sendo os α 's, β 's e γ 's constantes independentes de r , s e t .

Para o elemento hexaédrico de 20 nós:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 + \alpha_{11} rst + \alpha_{12} r^2 t + \alpha_{13} r^2 s + \alpha_{14} s^2 t + \alpha_{15} s^2 r + \alpha_{16} t^2 r + \alpha_{17} t^2 s + \alpha_{18} r^2 st + \alpha_{19} s^2 rt + \alpha_{20} t^2 rs \quad (91)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 + \beta_{11} rst + \beta_{12} r^2 t + \beta_{13} r^2 s + \beta_{14} s^2 t + \beta_{15} s^2 r + \beta_{16} t^2 r + \beta_{17} t^2 s + \beta_{18} r^2 st + \beta_{19} s^2 rt + \beta_{20} t^2 rs \quad (92)$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 + \gamma_{11} rst + \gamma_{12} r^2 t + \gamma_{13} r^2 s + \gamma_{14} s^2 t + \gamma_{15} s^2 r + \gamma_{16} t^2 r + \gamma_{17} t^2 s + \gamma_{18} r^2 st + \gamma_{19} s^2 rt + \gamma_{20} t^2 rs \quad (93)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Para o elemento hexaédrico de 27 nós:

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 + \alpha_{11} rst + \alpha_{12} r^2 t + \alpha_{13} r^2 s + \alpha_{14} s^2 t + \alpha_{15} s^2 r + \alpha_{16} t^2 r + \alpha_{17} t^2 s + \alpha_{18} r^2 st + \alpha_{19} s^2 rt + \alpha_{20} t^2 rs + \alpha_{21} s^2 t^2 + \alpha_{22} r^2 s^2 + \alpha_{23} r^2 t^2 + \alpha_{24} r^2 t^2 s + \alpha_{25} s^2 t^2 r + \alpha_{26} s^2 r^2 t + \alpha_{27} r^2 s^2 t^2 \quad (94)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 + \beta_{11} rst + \beta_{12} r^2 t + \beta_{13} r^2 s + \beta_{14} s^2 t + \beta_{15} s^2 r + \beta_{16} t^2 r + \beta_{17} t^2 s + \beta_{18} r^2 st + \beta_{19} s^2 rt + \beta_{20} t^2 rs + \beta_{21} s^2 t^2 + \beta_{22} r^2 s^2 + \beta_{23} r^2 t^2 + \beta_{24} r^2 t^2 s + \beta_{25} s^2 t^2 r + \beta_{26} s^2 r^2 t + \beta_{27} r^2 s^2 t^2 \quad (95)$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 + \gamma_{11} rst + \gamma_{12} r^2 t + \gamma_{13} r^2 s + \gamma_{14} s^2 t + \gamma_{15} s^2 r + \gamma_{16} t^2 r + \gamma_{17} t^2 s + \gamma_{18} r^2 st + \gamma_{19} s^2 rt + \gamma_{20} t^2 rs + \gamma_{21} s^2 t^2 + \gamma_{22} r^2 s^2 + \gamma_{23} r^2 t^2 + \gamma_{24} r^2 t^2 s + \gamma_{25} s^2 t^2 r + \gamma_{26} s^2 r^2 t + \gamma_{27} r^2 s^2 t^2 \quad (96)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Para os casos estudados, considere o elemento hexaédrico de 8 nós, cuja aplicação isoparamétrica é:

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 h_i x_i \quad (97)$$

$$y(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 h_i y_i \quad (98)$$

$$z(r, s, t) = \sum_{i=1}^8 h_i z_i \quad (99)$$

Expandindo temos:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 rst \quad (100)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 rst \quad (101)$$

$$z = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 rst \quad (102)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

E o elemento de 20 nós cuja aplicação isoparamétrica é:

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^{20} h_i x_i \quad (103)$$

$$y(r, s, t) = \sum_{i=1}^{20} h_i y_i \quad (104)$$

$$z(r, s, t) = \sum_{i=1}^{20} h_i z_i \quad (105)$$

E a expansão mostra:

$$\begin{aligned} x = & \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 + \alpha_{11} rst \\ & \alpha_{12} r^2 t + \alpha_{13} r^2 s + \alpha_{14} s^2 t + \alpha_{15} s^2 r + \alpha_{16} t^2 r + \alpha_{17} t^2 s + \alpha_{18} r^2 st + \alpha_{19} s^2 rt + \alpha_{20} t^2 rs \end{aligned} \quad (106)$$

$$\begin{aligned} y = & \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 + \beta_{11} rst \\ & \beta_{12} r^2 t + \beta_{13} r^2 s + \beta_{14} s^2 t + \beta_{15} s^2 r + \beta_{16} t^2 r + \beta_{17} t^2 s + \beta_{18} r^2 st + \beta_{19} s^2 rt + \beta_{20} t^2 rs \end{aligned} \quad (107)$$

$$\begin{aligned} z = & \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 + \gamma_{11} rst \\ & \gamma_{12} r^2 t + \gamma_{13} r^2 s + \gamma_{14} s^2 t + \gamma_{15} s^2 r + \gamma_{16} t^2 r + \gamma_{17} t^2 s + \gamma_{18} r^2 st + \gamma_{19} s^2 rt + \gamma_{20} t^2 rs \end{aligned} \quad (108)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

E o elemento de 27 nós cuja aplicação isoparamétrica é:

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^{27} h_i x_i \quad (109)$$

$$y(r, s, t) = \sum_{i=1}^{27} h_i y_i \quad (110)$$

$$z(r, s, t) = \sum_{i=1}^{27} h_i z_i \quad (111)$$

Que expandindo temos:

$$\begin{aligned}
 x = & \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 + \alpha_{11} rst \\
 & \alpha_{12} r^2 t + \alpha_{13} r^2 s + \alpha_{14} s^2 t + \alpha_{15} s^2 r + \alpha_{16} t^2 r + \alpha_{17} t^2 s + \alpha_{18} r^2 st + \alpha_{19} s^2 rt + \alpha_{20} t^2 rs \\
 & + \alpha_{21} s^2 t^2 + \alpha_{22} r^2 s^2 + \alpha_{23} r^2 t^2 + \alpha_{24} r^2 t^2 s + \alpha_{25} s^2 t^2 r + \alpha_{26} s^2 r^2 t + \alpha_{27} r^2 s^2 t^2
 \end{aligned} \quad (112)$$

$$\begin{aligned}
 y = & \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 + \beta_{11} rst \\
 & \beta_{12} r^2 t + \beta_{13} r^2 s + \beta_{14} s^2 t + \beta_{15} s^2 r + \beta_{16} t^2 r + \beta_{17} t^2 s + \beta_{18} r^2 st + \beta_{19} s^2 rt + \beta_{20} t^2 rs \\
 & + \beta_{21} s^2 t^2 + \beta_{22} r^2 s^2 + \beta_{23} r^2 t^2 + \beta_{24} r^2 t^2 s + \beta_{25} s^2 t^2 r + \beta_{26} s^2 r^2 t + \beta_{27} r^2 s^2 t^2
 \end{aligned} \quad (113)$$

$$\begin{aligned}
 z = & \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 + \gamma_{11} rst \\
 & \gamma_{12} r^2 t + \gamma_{13} r^2 s + \gamma_{14} s^2 t + \gamma_{15} s^2 r + \gamma_{16} t^2 r + \gamma_{17} t^2 s + \gamma_{18} r^2 st + \gamma_{19} s^2 rt + \gamma_{20} t^2 rs \\
 & + \gamma_{21} s^2 t^2 + \gamma_{22} r^2 s^2 + \gamma_{23} r^2 t^2 + \gamma_{24} r^2 t^2 s + \gamma_{25} s^2 t^2 r + \gamma_{26} s^2 r^2 t + \gamma_{27} r^2 s^2 t^2
 \end{aligned} \quad (114)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Considerando a distorção mostrada nas Figuras 55 e 59; desde que as arestas do elemento sejam retilíneas e os nós sobre as arestas do elemento de 20 e 27 nós, estejam em seus respectivos pontos médios, e o nó central no elemento de 27 nós esteja no seu baricentro, as funções 106, 107 e 108 para o elemento de 20 nós e as funções 112, 113 e 114 para o elemento de 27 nós, ficam reduzidas a:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rs + \alpha_6 rt + \alpha_7 st + \alpha_8 rst \quad (115)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rs + \beta_6 rt + \beta_7 st + \beta_8 rst \quad (116)$$

$$z = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rs + \gamma_6 rt + \gamma_7 st + \gamma_8 rst \quad (117)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t . Isto pode ser comprovado com detalhes, no Anexo III deste trabalho.

Observando que os monômios existentes nas funções que representam a solução exata dos deslocamentos do problema da barra reta submetida à flexão pura são de ordem quadrática, conforme equações 62, 63 e 64, temos

então, que discutir a representação da forma exata dos monômios associados a x^2, y^2, z^2, xz, yz .

Assim, considerando (115), (116), (117) e efetuando os produtos x^2, y^2, z^2, xz e yz , temos os seguintes conjuntos de monômios quadráticos:

$$\begin{aligned} &(\chi_1 + \chi_2 r + \chi_3 s + \chi_4 t + \chi_5 rt + \chi_6 st + \chi_7 rs + \chi_8 r^2 + \chi_9 s^2 + \chi_{10} t^2 + \chi_{11} rst \\ &\chi_{12} r^2 t + \chi_{13} r^2 s + \chi_{14} s^2 t + \chi_{15} s^2 r + \chi_{16} t^2 r + \chi_{17} t^2 s + \chi_{18} r^2 st + \chi_{19} s^2 rt + \chi_{20} t^2 rs \\ &+ \chi_{21} s^2 t^2 + \chi_{22} r^2 s^2 + \chi_{23} r^2 t^2 + \chi_{24} r^2 t^2 s + \chi_{25} s^2 t^2 r + \chi_{26} s^2 r^2 t + \chi_{27} r^2 s^2 t^2) \end{aligned} \quad (118)$$

sendo os χ 's constantes independentes de r, s e t .

Tomando-se (115), (116), (117) e considerando o elemento de 27 nós, é possível representar de forma exata qualquer campo de deslocamentos dado por:

$$u(x, y, z) = \omega_1 + \omega_2 x + \omega_3 y + \omega_4 z + \omega_5 x^2 + \omega_6 y^2 + \omega_7 z^2 + \omega_8 xz + \omega_9 yz \quad (119)$$

De fato:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = &\omega_1 + \omega_2(\gamma_1 + \gamma_2 r + \dots + \gamma_8 rst) + \omega_3(\delta_1 + \delta_2 r + \dots + \delta_8 rst) + \omega_4(\lambda_1 + \lambda_2 r + \dots + \lambda_8 rst) \\ &+ \omega_5(\kappa_1 + \kappa_2 r + \dots + \kappa_{27} r^2 s^2 t^2) + \omega_6(\psi_1 + \psi_2 r + \dots + \psi_{27} r^2 s^2 t^2) + \omega_7(\theta_1 + \theta_2 r + \dots + \theta_{27} r^2 s^2 t^2) \\ &+ \omega_8(\tau_1 + \tau_2 r + \dots + \tau_{27} r^2 s^2 t^2) + \omega_9(\rho_1 + \rho_2 r + \dots + \rho_{27} r^2 s^2 t^2) \end{aligned} \quad (120)$$

sendo os ω 's constantes independentes de r, s e t .

Considerando (94), podemos determinar os α 's:

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \omega_1 + \omega_2 \gamma_1 + \omega_3 \delta_1 + \omega_4 \lambda_1 + \omega_5 \kappa_1 + \omega_6 \psi_1 + \omega_7 \theta_1 + \omega_8 \tau_1 + \omega_9 \rho_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{27} &= \omega_5 \kappa_{27} + \omega_6 \psi_{27} + \omega_7 \theta_{27} + \omega_8 \tau_{27} + \omega_9 \rho_{27} \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = &\omega_1 + \omega_2 \gamma_1 + \omega_3 \delta_1 + \omega_4 \lambda_1 + \omega_5 \kappa_1 + \omega_6 \psi_1 + \omega_7 \theta_1 + \omega_8 \tau_1 + \omega_9 \rho_1 + \dots \\ &\dots + (\omega_5 \kappa_{27} + \omega_6 \psi_{27} + \omega_7 \theta_{27} + \omega_8 \tau_{27} + \omega_9 \rho_{27}) r^2 s^2 t^2 \end{aligned} \quad (121)$$

Analogamente podemos mostrar que expressões do tipo de (119) para as componentes $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$, podem ser exatamente representadas pelo elemento de 27 nós.

Resumindo, comparando-se (119) com (94), constatamos que o elemento de 27 nós, apresenta todos os monômios necessários para representar de forma exata o campo de deslocamentos. Porém, para o elemento de 8 nós e para o elemento de 20 nós não é possível representar x^2, y^2, z^2, xz e yz , pois para ambos os elementos:

No caso do elemento de 8 nós, faltam os monômios:

$$(r^2, s^2, t^2, rt^2, st^2, ts^2, rs^2, r^2t, r^2s, r^2s^2, r^2t^2, s^2t^2, r^2s^2t^2, r^2st, r^2s^2t, r^2st^2, rs^2t, rs^2t^2, rst^2)$$

E para o elemento de 20 nós faltam os monômios:

$$(s^2t^2, r^2s^2, r^2t^2, r^2t^2s, s^2t^2r, s^2r^2t, r^2s^2t^2)$$

Um ponto importante a ressaltar é que mesmo quando a estrutura se torna delgada, o elemento de 20 nós quando não distorcido consegue representar bem o campo exato de deslocamentos, pois nessas condições apresenta os monômios. De igual forma, isso explica os péssimos resultados para o elemento hexaédrico de 8 nós que mesmo não distorcido não tem os monômios necessários.

4.4.6 Estudo dos monômios nas funções de interpolação isoparamétricas dos elementos Tetraédricos de 4, 10 e 11 nós sob distorção retilínea

Para entendermos os resultados alcançados na subseção 4.4.4, usando malhas de elementos tetraédricos de 4, 10 e 11 nós, também faremos um estudo do ponto de vista dos monômios que constituem a formulação isoparamétrica desses elementos. Então considerando a mesma idéia apresentada na subseção 4.4.5, temos:

Para o elemento tetraédrico de 4 nós

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t \quad (122)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t \quad (123)$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t \quad (124)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Para o elemento tetraédrico de 10 nós

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 \quad (125)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 \quad (126)$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 \quad (127)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Para o elemento tetraédrico de 11 nós

$$u = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 + \alpha_{11} rst \quad (128)$$

$$v = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 + \beta_{11} rst \quad (129)$$

$$w = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 + \gamma_{11} rst \quad (130)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Considerando a aplicação isoparamétrica para o elemento de 11 nós temos:

Para o elemento tetraédrico de 4 nós

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 h_i x_i \quad (131)$$

$$y(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 h_i y_i \quad (132)$$

$$z(r, s, t) = \sum_{i=1}^4 h_i z_i \quad (133)$$

Expandindo temos:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t \quad (134)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t \quad (135)$$

$$z = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t \quad (136)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Para o elemento tetraédrico de 10 nós

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^{10} h_i x_i \quad (137)$$

$$y(r, s, t) = \sum_{i=1}^{10} h_i y_i \quad (138)$$

$$z(r, s, t) = \sum_{i=1}^{10} h_i z_i \quad (139)$$

Que expandindo temos:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 \quad (140)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 \quad (141)$$

$$z = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 \quad (142)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Para o elemento tetraédrico de 11 nós:

$$x(r, s, t) = \sum_{i=1}^{11} h_i x_i \quad (143)$$

$$y(r, s, t) = \sum_{i=1}^{11} h_i y_i \quad (144)$$

$$z(r, s, t) = \sum_{i=1}^{11} h_i z_i \quad (145)$$

Cuja expansão nos fornece:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t + \alpha_5 rt + \alpha_6 st + \alpha_7 rs + \alpha_8 r^2 + \alpha_9 s^2 + \alpha_{10} t^2 + \alpha_{11} rst \quad (146)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t + \beta_5 rt + \beta_6 st + \beta_7 rs + \beta_8 r^2 + \beta_9 s^2 + \beta_{10} t^2 + \beta_{11} rst \quad (147)$$

$$z = \gamma_1 + \gamma_2 r + \gamma_3 s + \gamma_4 t + \gamma_5 rt + \gamma_6 st + \gamma_7 rs + \gamma_8 r^2 + \gamma_9 s^2 + \gamma_{10} t^2 + \gamma_{11} rst \quad (148)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\gamma's$ constantes independentes de r , s e t .

Considerando que os elementos tetraédricos isoparamétricos de 4, 10 e 11 nós mantenham seus lados retilíneos, com os nós presentes nas arestas dos elementos de 10 e 11 nós nos seus respectivos pontos médios e o nó central do elemento de 11 no baricentro, então as aplicações 134, 135, 136, 140, 141, 142, 146, 147 e 148 se reduzem, na forma do elemento tetraédrico de 4 nós; como ocorre no caso dos elementos hexaédricos de 20 e 27 nós em relação ao elemento hexaédrico de 8 nós. Assim:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2 r + \alpha_3 s + \alpha_4 t \quad (149)$$

$$y = \beta_1 + \beta_2 r + \beta_3 s + \beta_4 t \quad (150)$$

$$z = \delta_1 + \delta_2 r + \delta_3 s + \delta_4 t \quad (151)$$

sendo os $\alpha's$, $\beta's$ e $\delta's$ constantes independentes de r , s e t .

Efetuando, os produtos $x.x$, $y.y$, $z.z$, $x.z$ e $y.z$, com as funções 149, 150 e 151, obteremos então os seguintes monômios, com as constantes para cada um dos casos:

$$(\chi_1 + \chi_2 r + \chi_3 s + \chi_4 t + \chi_5 rs + \chi_6 rt + \chi_7 st + \chi_8 r^2 + \chi_9 s^2 + \chi_{10} t^2) \quad (152)$$

sendo os $\chi's$ constantes independentes de r , s e t .

Considerando o campo de deslocamentos da equação 119:

$$u(x, y, z) = \omega_1 + \omega_2 x + \omega_3 y + \omega_4 z + \omega_5 x^2 + \omega_6 y^2 + \omega_7 z^2 + \omega_8 xz + \omega_9 yz$$

Então:

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \omega_1 + \omega_2 (\gamma_1 + \gamma_2 r + \dots + \gamma_4 t) + \omega_3 (\delta_1 + \delta_2 r + \dots + \delta_4 t) + \omega_4 (\lambda_1 + \lambda_2 r + \dots + \lambda_4 t) \\ & + \omega_5 (\kappa_1 + \kappa_2 r + \dots + \kappa_{10} t^2) + \omega_6 (\psi_1 + \psi_2 r + \dots + \psi_{10} t^2) + \omega_7 (\theta_1 + \theta_2 r + \dots + \theta_{10} t^2) \\ & + \omega_8 (\tau_1 + \tau_2 r + \dots + \tau_{10} t^2) + \omega_9 (\rho_1 + \rho_2 r + \dots + \rho_{10} t^2) \end{aligned} \quad (153)$$

sendo os $\omega's$ constantes independentes de r , s e t .

Para os elementos de 10 e 11 nós, considerando (125) ou (128) respectivamente pode-se determinar os α'_s para ambos; temos:

$$\begin{aligned}\alpha_1 &= \omega_1 + \omega_2\gamma_1 + \omega_3\delta_1 + \omega_4\lambda_1 + \omega_5\kappa_1 + \omega_6\psi_1 + \omega_7\theta_1 + \omega_8\tau + \omega_9\rho_1 \\ &\vdots \\ \alpha_{10} &= \omega_5\kappa_{10} + \omega_6\psi_{10} + \omega_7\theta_{10} + \omega_8\tau_{10} + \omega_9\rho_{10}\end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned}u(x, y, z) &= \omega_1 + \omega_2\gamma_1 + \omega_3\delta_1 + \omega_4\lambda_1 + \omega_5\kappa_1 + \omega_6\psi_1 + \omega_7\theta_1 + \omega_8\tau + \omega_9\rho_1 + \dots \\ &\dots + (\omega_5\kappa_{10} + \omega_6\psi_{10} + \omega_7\theta_{10} + \omega_8\tau_{10} + \omega_9\rho_{10})t^2\end{aligned}\quad (154)$$

sendo os ω'_s constantes independentes de r , s e t .

Analogamente podemos mostrar que expressões do tipo de (117) para as componentes $v(x, y, z)$ e $w(x, y, z)$, podem ser exatamente representadas pelo elemento de 10 e 11 nós.

Resumindo, comparando-se (154) com (125) e (128), constatamos que os elementos tetraédricos de 10 e 11 nós, apresentam todos os monômios necessários para representar de forma exata o campo de deslocamentos. No caso do elemento de 11 nós percebemos que além dos dez monômios idênticos ao elemento de 10 nós, apresenta também o monômio rst . É fácil identificar que a ausência de monômios quadráticos inviabiliza o uso do elemento tetraédrico de 4 nós.

Estudamos até aqui, para modelagens 3D, elementos sólidos submetidos à distorção retilínea. Como realizado para o caso bidimensional, faremos na próxima seção análises também para elementos sólidos sob distorção do tipo curva.

4.5 Abordagem do travamento no modelo discreto usando elementos hexaédricos de 20 e 27 nós com distorção do tipo curva.

Voltando ao exemplo da barra reta engastada, de mesma forma que foi realizado no caso bidimensional (Subseção 3.4.2), considere agora a Figura 81.

Figura 81 – Barra reta engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre, com distorção do tipo curva

Nesta seção, retomaremos a análise dos elementos de 20 e 27 nós, e a influência da distorção curva em seus rendimentos.

Considere então os modelos das Figuras 82 e 83.

Figura 82 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 20 nós – distorção curva

Figura 83 – Barra modelada com dois elementos hexaédricos de 27 nós – distorção curva

A Tabela 23 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, número de elementos e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 82 e 83 para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 23– Parâmetros de modelagem – elementos de 20 e 27 nós sob distorção curva

L	h	t	M	Número de Elementos	Tipo de Elemento
10	1	10	2000	2	20 e 27 nós
	0,1		20		
	0,01		0,2		

O gráfico da Figura 84 mostra os resultados, quando a altura h da barra diminui.

Figura 84 – Gráfico deslocamento vertical normalizado x h/L – Laje parcialmente engastada 3D – elementos de 4, 10 e 11 nós em malhas distorcidas

Percebemos pelos resultados apresentados que o comportamento é análogo ao do caso bidimensional quando foram usados elementos quadriláteros de 8 e 9 nós, conforme mostra gráfico da Figura 25. Percebemos mais uma vez que a altura também neste caso, influencia de forma direta nos resultados obtidos. Explicaremos esse comportamento, na próxima subseção, também em termos dos monômios.

4.5.1 Estudo dos monômios nas funções de interpolação isoparamétricas dos elementos hexaédricos de 20 e 27 nós sob distorção do tipo curva

Seguindo o mesmo raciocínio exposto na subseção 3.4.2.1, temos que a forma mais geral para representar a aplicação de um elemento isoparamétrico de 20 ou 27 nós é:

$$x = \varsigma_1 + \varsigma_2 r + \varsigma_3 s + \varsigma_4 t + \varsigma_5 r^2 + \varsigma_6 s^2 + \varsigma_7 t^2 + \varsigma_8 rst + \varsigma_9 r^2 ts + \varsigma_{10} rts^2 + \varsigma_{11} t^2 rs + \varsigma_{12} r^2 s^2 t^2 \quad (155)$$

$$y = \rho_1 + \rho_2 r + \rho_3 s + \rho_4 t + \rho_5 r^2 + \rho_6 s^2 + \rho_7 t^2 + \rho_8 rst + \rho_9 r^2 ts + \rho_{10} rts^2 + \rho_{11} t^2 rs + \rho_{12} r^2 s^2 t^2 \quad (156)$$

$$z = \kappa_1 + \kappa_2 r + \kappa_3 s + \kappa_4 t + \kappa_5 r^2 + \kappa_6 s^2 + \kappa_7 t^2 + \kappa_8 rst + \kappa_9 r^2 ts + \kappa_{10} rts^2 + \kappa_{11} t^2 rs + \kappa_{12} r^2 s^2 t^2 \quad (157)$$

sendo os $\varsigma's$, $\rho's$ e $\kappa's$, constantes independentes de r , s e t .

Tomando os monômios em x , y e z , que representam de forma exata o campo de deslocamentos da barra, ou seja x^2 , y^2 , z^2 , xz e yz , e efetuarmos os produtos com (155), (156) e (157), teremos para quaisquer das situações, variando apenas as constantes empregadas, os seguintes monômios:

$$\begin{aligned} & (\eta_1 + \eta_2 r + \eta_3 s + \eta_4 t + \eta_5 r^2 + \eta_6 s^2 + \eta_7 t^2 + \eta_8 r^3 + \eta_9 s^3 + \eta_{10} t^3 + \eta_{11} r^4 + \eta_{12} s^4 + \eta_{13} t^4 \\ & + \eta_{14} r^2 ts + \eta_{15} s^2 tr + \eta_{16} t^2 rs + \eta_{17} r^3 s^2 t^2 + \eta_{18} s^3 r^2 t^2 + \eta_{19} t^3 r^2 s^2 + \eta_{20} r^3 ts + \eta_{21} s^3 tr + \eta_{22} t^3 rs + \eta_{23} r^3 t^2 s \\ & + \eta_{24} r^3 t^2 s + \eta_{25} s^3 t^2 r + \eta_{26} t^3 r^2 s + \eta_{27} r^3 s^2 t + \eta_{28} s^3 r^2 t + \eta_{29} t^3 s^2 r + \eta_{30} r^3 t^2 s^3 + \eta_{31} s^3 t^2 r^3 + \eta_{32} t^3 r^2 s^3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \eta_{33} r^3 t^3 s^2 + \eta_{34} s^3 t^3 r^2 + \eta_{35} t^3 r^3 s^2 + \eta_{36} r^3 s^3 t^3 + \eta_{37} r^4 ts + \eta_{38} s^4 rt + \eta_{39} t^4 rs + \eta_{40} r^4 s^2 t^2 + \eta_{41} s^4 r^2 t^2 \\
& + \eta_{42} t^4 r^2 s^2 + \eta_{43} r^4 t^3 s^3 + \eta_{44} s^4 r^3 t^3 + \eta_{45} t^4 r^3 s^3)
\end{aligned} \tag{158}$$

sendo os η 's constantes independentes de r , s e t .

Tomando a equação 117 que representa a solução exata do campo de deslocamentos, substituindo (155), (156), (157) e (158) com suas respectivas constantes nessa equação e comparando os monômios que surgem dessa operação com os monômios da aplicação isoparamétrica dos elementos de 20 e 27 nós, ou seja, (125), (126), (127), (128), (129) e (130); verificaremos que tanto os elementos de 20 como os de 27 nós sob distorção curva, mostram as mesmas deficiências que os elementos de 8 e 9 nós apresentaram sob este tipo distorção, não conseguindo representar assim, de forma exata, o campo de deslocamentos, pela ausência em suas formulações de uma série de monômios.

Na seção a seguir, aplicaremos esses conceitos para o problema da barra curva engastada, ilustrada também no caso bidimensional.

4.6 Solução numérica, por elementos finitos, do problema da barra curva engastada 3-D submetida à flexão simples

Como realizado na seção 3.5, consideramos aqui também o mesmo problema da barra curva engastada, agora em 3-D conforme Figura 85, sendo, porém, analisada com elementos sólidos tridimensionais. A resposta analítica do problema é a mesma considerada na seção 3.5.

Figura 85 – Barra curva engastada 3-D, submetida a um momento fletor na extremidade livre

A fim de aplicarmos as considerações da seção 4.5, modelamos essa barra com um elemento de 20 e 27 conforme Figuras 86 e 87.

Figura 86 – Viga curva modelada com um elemento de 20 nós com engaste parcial

Figura 87 – Viga curva modelada com um elemento de 27 nós com engaste parcial

A Tabela 24 mostra os parâmetros geométricos, valor de momento, e tipos de elementos, que foram utilizados nos modelos das Figuras 86 e 87 para análise do deslocamento vertical nos nós inferiores da extremidade livre.

Tabela 24– Parâmetros de modelagem – elementos de 20 e 27 nós – barra curva engastada

L	h	t	M	Tipo
63	20	20	20	20 e 27 nós
	5			
	1			

O gráfico da Figura 88 mostra os resultados quando a altura h da barra diminui.

Figura 88 – Gráfico Deslocamento vertical normalizado x h/L – Viga curva 3-D parcialmente engastada – elemento de 20 e 27 nós

Estes resultados comprovam os efeitos esperados por esses modelos, quando empregamos elementos de 20 e 27 nós sob distorção curva, como demonstrado na Subseção 4.5.1, ou seja, os elementos de 20 e 27 são impróprios para serem utilizados quando apresentam distorção curva e perdem considerável rendimento quando a estrutura se torna delgada.

Considere agora o aumento do número de elementos de 20 e 27 nós, empregando a mesma idéia do caso bidimensional para os elementos de 8 e 9 nós, conforme seção 3.5. A Tabela 25 mostra os parâmetros geométricos, valor

de momento, malhas empregadas e tipos de elementos, que foram utilizados para análise do deslocamento vertical em um ponto localizado no meio do vão, quando a relação h/L da barra diminui.

Tabela 25 – Parâmetros de modelagem – Barra curva 3-D parcialmente engastada – elementos de 20 e 27 nós com distorção curva – Malhas refinadas

L	h	t	M	Malhas	Tipo
63	20	20	20	5x5x10	20 e 27 nós
	5			10x10x20	
	1			20x20x30	

Os resultados podem ser verificados nos gráficos das Figuras 89 e 90.

Figura 89 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 20 nós – Distorção curva – Viga curva 3-D parcialmente engastada

Figura 90 – Deslocamento vertical na extremidade livre – elemento de 27 nós – Distorção curva – Viga curva 3-D parcialmente engastada

Percebemos que na relação $h/L=0.1$, os modelos com malhas de elementos de 20 e 27 nós convergem para a resposta exata, a medida em que os refinamos. Porém quando a relação h/L diminui o rendimento fica comprometido, mesmo refinando os modelos, o que mostra que ambos os elementos não conseguem representar a restrição $\gamma \rightarrow 0$.

Na subseção 3.6, discutimos a influência que uma flexão, diferente da flexão pura em estruturas delgadas, que é objeto do nosso estudo, ocasiona nos resultados dos deslocamentos quando usamos malhas de elementos de 8 ou 9 nós, sendo ou não sendo distorcidos.

Aproveitando esse raciocínio, considere o problema de uma laje plana quadrada simplesmente apoiada nos quatro lados, submetida a um carregamento uniformemente distribuído, que produz flexão nas duas direções, conforme Figura 91.

Figura 91 – Laje simplesmente apoiada, submetida a um carregamento uniformemente distribuído.

A resposta analítica para o deslocamento em um ponto localizado no plano médio da laje submetida a um carregamento distribuído, via solução de placa de Kirchhoff é (Zagottis;1973):

$$w = 0.00406 \frac{qa^4}{D} \quad (159)$$

sendo $D = Eh^3/12(1 - \nu^2)$

Conhecendo a resposta analítica do deslocamento vertical para um ponto localizado na região central do plano médio da laje, resolvemos essa estrutura por elementos finitos considerando, elementos de 20 e 27 nós, nas configurações distorcida e não distorcida. Foram usadas malhas 10x10 e 20x20 com 1, 2 e 4 elementos na altura.

Sabendo que o elemento de casca fornece a resposta exata desse problema e considerando primeiramente uma malha de elementos de 20 e 27 nós não distorcidos, notamos que a resposta exata é alcançada facilmente. Considerando agora as respostas usando-se malhas distorcidas, foram experimentados neste problema dois tipos diferentes de distorção: a distorção tipo_1 conforme Figuras 78, 79 e 80 e a distorção Tipo_2 (Bucalem, Bathe; 1993) conforme Figura 92.

Figura 92 – Malha distorcida tipo_2

No caso da distorção, percebemos que a eficiência dos elementos de 20 e 27 nós, aumenta com um refinamento adequado da malha, conduzindo a respostas excelentes. No caso do elemento de 20 nós, para a distorção do tipo_1, a precisão aumenta com um refinamento na direção da altura, em virtude da face distorcida estar em relação a vertical. No caso da distorção do tipo_2, como a distorção do elemento é no plano, o rendimento não é prejudicado mesmo com um único elemento na altura.

Os resultados estão nos gráficos das Figuras 93 e 94.

Figura 93 – Deslocamento no Ponto Central do Plano Médio da Placa – Malhas Não Distorcidas.

Figura 94 – Deslocamento no Ponto Central do Plano Médio da Placa – Malhas Distorcidas

Esse problema mostra que o elemento sólido de 27 nós é superior ao de 20 nós e é recomendável em estruturas delgadas, também sob diferentes situações de flexão.

5 Modelagem de uma placa dobrada e de um reservatório com orifício

As estruturas que analisamos, apesar de serem usuais da engenharia civil são muito simples para o intuito deste trabalho. Neste capítulo abordaremos dois problemas da engenharia de estruturas, a fim de investigar o comportamento dos elementos quando utilizados na modelagem de estruturas delgadas mais complexas. Analisaremos primeiro uma placa dobrada (Folded Plate), submetida a um carregamento distribuído e finalizaremos estudando o problema de um reservatório com orifício, também submetido a um carregamento distribuído. Em ambos os casos, usaremos nos modelos de elementos finitos, as malhas de elementos sólidos tratados nesse trabalho e balizaremos os resultados utilizando para os mesmos problemas, modelos de casca com elementos desprovidos de travamento, comparando a eficiência entre os elementos.

5.1 Placa Dobrada (Folded Plate)

As Figuras 95 e 96 mostram as dimensões (em metros) da placa dobrada e as propriedades do material utilizado no problema.

Figura 95 – Planta baixa da placa dobrada

Figura 96 – Corte transversal da placa dobrada

A estrutura é submetida a um carregamento distribuído conforme Figura 97:

Figura 97 – Condição de carregamento na placa dobrada

Figura 98 – Deformada da placa dobrada – Modelo 3-D

Figura 99 – Deformada da placa dobrada – Modelo de Casca

Serão analisados os deslocamentos verticais (em metros) ($X=Y$) e as componentes de tensão ZZ (N/m^2), para as linhas A e B, conforme Figura 100.

Figura 100 – Linha de nós para análise – Placa Dobrada

A Tabela 26 mostra os modelos e as malhas adotadas na análise do problema da placa dobrada.

Tabela 26– Parâmetros de modelagem – Placa dobrada

Modelos	Elementos	Malhas
3D	Hexa 8, 20 e 27 nós e Tetra 4, 10 e 11 nós	10 x 10 (Regulares)
Shell	MITC 9 e MITC 16 (Bucalem,Bathe;1993)	

Os gráficos das Figuras 101 a 104 ilustram os resultados obtidos.

Figura 101 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Vertical – Linha A

Figura 102 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Vertical – Linha B

Figura 103 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha A

Figura 104 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha B

Pelos resultados apresentados, percebemos que o uso das malhas de elementos sólidos hexaédricos de 20 e 27 nós, bem como dos elementos tetraédricos de 10 e 11 nós, representaram de forma satisfatória os resultados, tanto para os deslocamentos quanto para as tensões, quando comparados com

os resultados apresentados pelos modelos de casca, cujos elementos utilizados não travam. Como as malhas utilizadas não apresentaram distorção, percebemos que o elemento de 20 nós não travou e apresentou desta forma boa performance quanto ao seu uso. Verificamos que as malhas de elementos hexaédricos de 8 nós e tetraédricos de 4 nós não são realmente recomendáveis, pois os resultados por ele apresentados, seja para deslocamentos, seja para tensões, se distanciaram da resposta alcançada pelo modelo de casca. Nos gráficos referentes à análise das tensões, verificamos uma certa perturbação, na região próxima da “quina”, que ocorre em virtude da concentração de tensões nessa região.

5.2 Reservatório com Furo

As Figuras 105 e 106 mostram as dimensões do reservatório (em metros) e as propriedades do material utilizado no problema.

Figura 105 – Planta baixa do reservatório

Figura 106 – Elevação do reservatório

A estrutura estará submetida a um carregamento distribuído conforme Figura 107.

Figura 107 – Condição de carregamento no reservatório

Figura 108 – Deformada do reservatório – Modelo 3-D

Figura 109 - Deformada do reservatório – Modelo de Casca

Serão analisados os deslocamentos (em metros) nas direções X e Y e a componente de tensão ZZ (N/m^2), nas regiões ilustradas pelas linhas A, B e C conforme Figura 110.

Figura 110 – Linha de nós para análise – Reservatório

Utilizando-se dos mesmos parâmetros de modelagem que foram adotados para o problema anterior, conforme Tabela 26, os gráficos das Figuras 111 a 116, mostram os resultados alcançados para o problema do reservatório com orifício.

Figura 111 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Y – Linha A

Figura 112 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento X – Linha B

Figura 113 – Gráfico Comparativo – Distância x Deslocamento Y – Linha C

Figura 114 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha A

Figura 115 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha B

Figura 116 – Gráfico Comparativo – Distância x Stress ZZ – Linha C

Verificamos pelos resultados apresentados que as malhas dos elementos sólidos hexaédricos de 27 nós, bem como dos elementos tetraédricos de 10 e 11 nós, representaram bem os resultados, tanto para os deslocamentos quanto para as tensões, ao serem comparados com os resultados obtidos pelos modelos de casca, cujos elementos utilizados, como já comentado anteriormente, não travam. Em função do orifício, as malhas construídas, principalmente nessa região, apresentaram certa distorção, o que comprometeu o rendimento dos resultados alcançados pelo elemento de 20 nós, como esperado. Em função da concentração de tensões, os gráficos referentes à Linha C apresentaram certa perturbação na região da “quina”, como verificado também para o problema anterior.

6 Conclusões

Levando em consideração os resultados obtidos pelas análises dos modelos 3D de estruturas delgadas, percebemos que:

- O elemento hexaédrico de 8 nós é pouco eficiente, tanto na configuração não distorcida como na configuração distorcida não sendo recomendável em modelagens 3-D, especialmente de estruturas delgadas pois leva rapidamente ao travamento para pequenas alturas. Apenas usando refinamentos antieconômicos é que este elemento leva a resultados aceitáveis.
- O elemento hexaédrico de 20 nós é mais eficiente que o elemento hexaédrico de 8 nós na configuração não distorcida, mesmo quando usado em estruturas delgadas, porém não é recomendável, quando apresenta distorção retilínea.
- O elemento hexaédrico de 27 nós tem um excelente comportamento em modelagens 3-D de estruturas delgadas, quando usado na configuração não distorcida, não perdendo também eficiência quando apresenta distorção retilínea, ao contrário do que ocorre com o elemento de 20 nós. O seu uso em estruturas delgadas, não é recomendável quando o tipo de distorção é curva.
- O elemento tetraédrico de 4 nós fornece resultados muito ruins da mesma forma que o elemento hexaédrico de 8 nós, tanto nas formas distorcida como não distorcida, não sendo recomendado em estruturas delgadas.
- Os elementos tetraédricos de 10 e 11 nós são eficientes e recomendáveis em modelagens 3-D de estruturas delgadas, tanto nas configurações distorcida como não distorcida.

Vimos que em estruturas delgadas quando a espessura $t \rightarrow 0$, o anulamento da parcela referente a energia de deformação de cisalhamento transversal leva a restrições associadas a $\gamma \rightarrow 0$, que diminuem a capacidade de aproximação dos elementos prejudicando os resultados. Os elementos sólidos de 10, 11 e 27 nós são menos afetados que os elementos de 4, 8 e 20 nós. Assim, quando a opção de modelagem de estruturas delgadas for por elementos sólidos, os resultados deste trabalho sugerem que sejam utilizados os elementos de 10, 11 e 27 nós, limitando a distorção ao tipo “retilínea”.

6.1 Sugestões para trabalhos futuros

Este trabalho teve um enfoque baseado na experimentação numérica e no estudo da interpolação dos elementos para o estudo do travamento dos elementos sólidos quando utilizadas na modelagem de estruturas delgadas. Um trabalho abordando o mesmo tema, mas sob a perspectiva da análise matemática seria de grande valia.

7 ANEXOS

Anexo I

Considere a Figura I.1

Figura I.1 – Elemento Isoparamétrico de 9 nós

Ela representa a “imagem” dos elementos isoparamétricos de 4 a 9 nós, cujos nós presentes nos lados, se encontram em seus respectivos pontos médios e o nó central, referente ao elemento de 9 nós, se encontra no baricentro do mesmo.

Desta forma, matematicamente temos que:

$$x_5 = \frac{x_1 + x_2}{2}, x_6 = \frac{x_2 + x_3}{2}, x_7 = \frac{x_3 + x_4}{2}, x_8 = \frac{x_1 + x_4}{2} \text{ e } x_9 = \frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4} \quad (\text{I.100})$$

Considerando as funções de interpolação para o elemento de 8 nós:

$$h_1 = \frac{1}{4}(1+r)(1+s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r)$$

$$h_2 = \frac{1}{4}(1-r)(1+s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1+s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)$$

$$h_3 = \frac{1}{4}(1-r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1-r)$$

$$\begin{aligned}
h_4 &= \frac{1}{4}(1+r)(1-s) - \frac{1}{4}(1-r^2)(1-s) - \frac{1}{4}(1-s^2)(1+r) \\
h_5 &= \frac{1}{2}(1-r^2)(1+s) \quad h_6 = \frac{1}{2}(1-r^2)(1-s) \quad h_7 = \frac{1}{2}(1-r)(1-s^2) \quad h_8 = \frac{1}{2}(1+r)(1-s^2)
\end{aligned} \tag{I.101}$$

E para o elemento de 9 nós:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 \right) \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 \right) \quad h_2 = \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 \right) \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 \right) \\
h_3 &= \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 \right) \left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 \right) \quad h_4 = \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 \right) \left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 \right) \\
h_5 &= (1-r^2) \left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 \right) \quad h_6 = (1-s^2) \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 \right) \\
h_7 &= (1-s^2) \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2 \right) \quad h_8 = (1-r^2) \left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2 \right) \\
h_9 &= (1-r^2)(1-s^2)
\end{aligned} \tag{I.102}$$

Fazendo para o elemento de 8 nós, a soma dos produtos das funções de interpolação nodais por suas respectivas coordenadas, temos:

$$x_{8tot} = x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 + x_4h_4 + x_5h_5 + x_6h_6 + x_7h_7 + x_8h_8 \tag{I.103}$$

Assim obtemos

$$\begin{aligned}
x_{8tot} &= \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_1s + \frac{1}{4}x_1r + \frac{1}{4}x_1rs + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_2s + \frac{1}{4}x_2r + \frac{1}{4}x_2rs \\
&+ \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_3s + \frac{1}{4}x_3r + \frac{1}{4}x_3rs + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_4s + \frac{1}{4}x_4r + \frac{1}{4}x_4rs \tag{I.104}
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$x_{8tot} = \alpha_1 + \alpha_2s + \alpha_3r + \alpha_4rs \tag{I.105}$$

Considerando também as funções de interpolação nodais e as coordenadas dos nós do elemento de 9 nós; temos o produto:

$$x_{9tot} = x_1h_1 + x_2h_2 + x_3h_3 + x_4h_4 + x_5h_5 + x_6h_6 + x_7h_7 + x_8h_8 + x_9h_9 \tag{I.106}$$

Do qual obtemos

$$\begin{aligned}
x_{9tot} = & \frac{1}{4}x_1 + \frac{1}{4}x_1s + \frac{1}{4}x_1r + \frac{1}{4}x_1rs + \frac{1}{4}x_2 + \frac{1}{4}x_2s + \frac{1}{4}x_2r + \frac{1}{4}x_2rs \\
& + \frac{1}{4}x_3 + \frac{1}{4}x_3s + \frac{1}{4}x_3r + \frac{1}{4}x_3rs + \frac{1}{4}x_4 + \frac{1}{4}x_4s + \frac{1}{4}x_4r + \frac{1}{4}x_4rs \quad (I.107)
\end{aligned}$$

Ou seja,

$$x_{9tot} = \alpha_1 + \alpha_2s + \alpha_3r + \alpha_4rs \quad (I.108)$$

Pelas equações I.105 e I.108, concluímos que para ambos os elementos; a base de suas funções de interpolação, se encontram na forma dos monômios $1, s, r, rs$, os quais permitem representar, para qualquer elemento isoparamétrico de 8 ou 9 nós, o polinômio P_1 e a relação entre as coordenadas globais desses elementos e as coordenadas locais de suas respectivas imagens, conforme mostram as funções I.109 e I.110:

$$x = \gamma_1 + \gamma_2r + \gamma_3s + \gamma_4rs \quad (I.109)$$

$$y = \delta_1 + \delta_2r + \delta_3s + \delta_4rs \quad (I.110)$$

É necessário ressaltar que as funções I.109 e I.110 são válidas apenas para os elementos isoparamétricos, cujos lados são retos e com os nós intermediários localizados no ponto médio desses lados, sendo que a localização do nó central, no elemento de 9 nós, deve ser no seu baricentro.

Anexo II

Considere a Figura II.1

Figura II.1 – Elemento Qualquer

O campo de deslocamentos é definido por:

$$u(x, y) = \gamma_1 + \gamma_2 x + \gamma_3 y + \gamma_4 xy \quad (\text{II.111})$$

$$v(x, y) = \delta_1 + \delta_2 x + \delta_3 y + \delta_4 xy \quad (\text{II.112})$$

Considerando movimento de corpo rígido e chamando de C o deslocamento horizontal e de D o deslocamento vertical; conforme Figuras II.2 e II.3 temos:

Figura II.2 – Deslocamento Horizontal do Elemento

Figura II.3 – Deslocamento Vertical do Elemento

No deslocamento horizontal, os pontos da figura se deslocam em C, então se escolhermos os pontos do vértice para representar esse deslocamento, temos:

$$P_1 = (0,0); P_2 = (0,1); P_3 = (1,1); P_4 = (1,0) \quad (\text{II.113})$$

Então

$$u(0,0) = \gamma_1 = C \quad \therefore \gamma_1 = C \quad (\text{II.114})$$

$$u(0,1) = C + \gamma_3 = C \quad \therefore \gamma_3 = 0 \quad (\text{II.115})$$

$$u(1,1) = C + \gamma_2 + \gamma_4 = C \quad \therefore \gamma_2 + \gamma_4 = 0 \quad (\text{II.116})$$

$$u(1,0) = C + \gamma_2 = C \quad \therefore \gamma_2 = 0 \quad (\text{II.117})$$

Logo

$$\therefore \gamma_4 = 0 \quad (\text{II.118})$$

No deslocamento vertical, os pontos da figura se deslocam em D, então se escolhermos os pontos do vértice para representar esse deslocamento, temos:

$$P_1 = (0,0); P_2 = (0,1); P_3 = (1,1); P_4 = (1,0) \quad (\text{II.119})$$

Então

$$v(0,0) = \delta_1 = D \quad \therefore \delta_1 = D \quad (\text{II.120})$$

$$v(0,1) = D + \delta_3 = D \quad \therefore \delta_3 = 0 \quad (\text{II.121})$$

$$v(1,1) = D + \delta_2 + \delta_4 = D \quad \therefore \delta_2 + \delta_4 = 0 \quad (\text{II.122})$$

$$v(1,0) = D + \delta_2 = D \quad \therefore \delta_2 = 0 \quad (\text{II.123})$$

Logo

$$\therefore \delta_4 = 0$$

Considere a rotação infinitesimal conforme Figura II.4

Figura II.4 – Rotação

Então

$$\begin{aligned} A &= \theta \\ F &= 1 \end{aligned} \quad (\text{II.124})$$

Os pontos do vértice são

$$P_1 = (0,0); P_2 = (0,1); P_3 = (1,1); P_4 = (1,0) \quad (\text{II.125})$$

Então

$$u(0,0) = \gamma_1 = 0 \quad \therefore \gamma_1 = 0 \quad (\text{II.126})$$

$$v(0,0) = \delta_1 = 0 \quad \therefore \delta_1 = 0 \quad (\text{II.127})$$

$$u(1,0) = 0 + \gamma_2 = 1 \quad \therefore \gamma_2 = 1 \quad (\text{II.128})$$

$$v(1,0) = 0 + \delta_2 = \theta \quad \therefore \delta_2 = \theta \quad (\text{II.129})$$

$$u(0,1) = 0 + \gamma_3 = -\text{sen}\theta \quad \therefore \gamma_3 = -\theta \quad (\text{II.130})$$

$$v(0,1) = 0 + \delta_3 = -\text{cos}\theta \quad \therefore \delta_3 = -1 \quad (\text{II.131})$$

Deste modo, o movimento de corpo rígido é representado quando γ_1 e δ_1 são diferentes de zero e $\gamma_2, \delta_2, \gamma_3$ e δ_3 são diferentes de zero na relação $\gamma_3 = -\delta_2$ e $\delta_3 = -\gamma_2$. Assim, $1, x$ e y diferentes de zero em $u(x, y)$ e $v(x, y)$ são suficientes para representar o movimento de corpo rígido, aos quais correspondem ao polinômio de ordem P_1 .

Anexo III

Considere a Figura III.1

Figura III.1 – Elemento Isoparamétrico Sólido de 20 nós

Ela representa a “imagem” do elemento isoparamétricos de 20 nós, cujo nós presentes nas arestas, se encontram em seus respectivos pontos médios.

1) Pontos dos vértices

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \quad (\text{III.132})$$

2) Pontos médios das arestas

$$\begin{aligned} x_9 &= \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad x_{10} = \frac{(x_2 + x_3)}{2} \quad x_{11} = \frac{(x_3 + x_4)}{2} \quad x_{12} = \frac{(x_1 + x_4)}{2} \quad x_{13} = \frac{(x_5 + x_6)}{2} \quad x_{14} = \frac{(x_6 + x_7)}{2} \\ x_{15} &= \frac{(x_7 + x_8)}{2} \quad x_{16} = \frac{(x_5 + x_8)}{2} \quad x_{17} = \frac{(x_1 + x_5)}{2} \quad x_{18} = \frac{(x_2 + x_6)}{2} \quad x_{19} = \frac{(x_3 + x_7)}{2} \quad x_{20} = \frac{(x_4 + x_8)}{2} \end{aligned} \quad (\text{III.133})$$

Considerando as funções de interpolação para o elemento de 20 nós:

$$\begin{aligned}
h_1 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1+t) - \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1+t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t^2) \\
h_2 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1+t) - \frac{1}{8}(1+s)(1+t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1+t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t^2) \\
h_3 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1+t) - \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1+t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t^2) \\
h_4 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1+t) - \frac{1}{8}(1-s)(1+t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1+t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t^2) \\
h_5 &= \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t) - \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1-t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1+s)(1-t^2) \\
h_6 &= \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t) - \frac{1}{8}(1+s)(1-t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1-t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1+s)(1-t^2) \\
h_7 &= \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t) - \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1-t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1-r)(1-s)(1-t^2) \\
h_8 &= \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t) - \frac{1}{8}(1-s)(1-t)(1-r^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1-t)(1-s^2) - \frac{1}{8}(1+r)(1-s)(1-t^2) \\
h_9 &= \frac{1}{4}(1+s)(1+t)(1-r^2) \quad h_{11} = \frac{1}{4}(1-s)(1+t)(1-r^2) \quad h_{13} = \frac{1}{4}(1+s)(1-t)(1-r^2) \\
h_{15} &= \frac{1}{4}(1-s)(1-t)(1-r^2) \quad h_{10} = \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t)(1-r) \quad h_{12} = \frac{1}{4}(1-s^2)(1+t)(1+r) \\
h_{14} &= \frac{1}{4}(1-s^2)(1-t)(1-r) \quad h_{16} = \frac{1}{4}(1-s^2)(1-t)(1+r) \quad h_{17} = \frac{1}{4}(1+s)(1-t^2)(1+r) \\
h_{18} &= \frac{1}{4}(1+s)(1-t^2)(1-r) \quad h_{19} = \frac{1}{4}(1-s)(1-t^2)(1-r) \quad h_{20} = \frac{1}{4}(1-s)(1-t^2)(1+r) \quad (163)
\end{aligned}$$

Fazendo para o elemento de 20 nós, a soma dos produtos das funções de interpolação nodais por suas respectivas coordenadas, temos:

$$\begin{aligned}
x_{20tot} &= h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4 + h_5x_5 + h_6x_6 + h_7x_7 + h_8x_8 + h_9x_9 + h_{10}x_{10} + h_{11}x_{11} + h_{12}x_{12} + h_{13}x_{13} \\
&\quad + h_{14}x_{14} + h_{15}x_{15} + h_{16}x_{16} + h_{17}x_{17} + h_{18}x_{18} + h_{19}x_{19} + h_{20}x_{20} \quad (III.134)
\end{aligned}$$

Que resulta em:

$$x_{20tot} = \alpha_1 + \alpha_2r + \alpha_3s + \alpha_4t + \alpha_5rs + \alpha_6rt + \alpha_7st + \alpha_8rst \quad (III.135)$$

Considere agora a Figura III.2

Figura III.2 – Elemento Isoparamétrico Sólido de 27 nós

Ela representa a “imagem” do elemento isoparamétrico de 27 nós, cujo nós presentes nas arestas, se encontram em seus respectivos pontos médios e o nó central, se encontra no baricentro do mesmo.

3) Pontos dos vértices

$$x_1 \ x_2 \ x_3 \ x_4 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_8 \quad (\text{III.136})$$

4) Pontos médios das arestas

$$\begin{aligned} x_9 &= \frac{(x_1 + x_2)}{2} \quad x_{10} = \frac{(x_2 + x_3)}{2} \quad x_{11} = \frac{(x_3 + x_4)}{2} \quad x_{12} = \frac{(x_1 + x_4)}{2} \quad x_{13} = \frac{(x_5 + x_6)}{2} \quad x_{14} = \frac{(x_6 + x_7)}{2} \\ x_{15} &= \frac{(x_7 + x_8)}{2} \quad x_{16} = \frac{(x_5 + x_8)}{2} \quad x_{17} = \frac{(x_1 + x_5)}{2} \quad x_{18} = \frac{(x_2 + x_6)}{2} \quad x_{20} = \frac{(x_4 + x_8)}{2} \end{aligned} \quad (\text{III.137})$$

5) Baricentro das faces

$$\begin{aligned} x_{21} &= \frac{(x_9 + x_{13})}{2} \quad x_{22} = \frac{(x_{11} + x_{15})}{2} \quad x_{23} = \frac{(x_9 + x_{11})}{2} \quad x_{24} = \frac{(x_{13} + x_{15})}{2} \quad x_{25} = \frac{(x_{18} + x_{19})}{2} \\ x_{26} &= \frac{(x_{17} + x_{20})}{2} \end{aligned} \quad (\text{III.138})$$

6) Baricentro do elemento

$$x_{27} = \frac{(x_{23} + x_{24})}{2} \quad (\text{III.139})$$

E considerando as funções de interpolação para o elemento de 27 nós:

$$\begin{aligned}
 h_1 &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_2 &= \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_3 &= \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_4 &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_5 &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_6 &= \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_7 &= \left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_8 &= \left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_9 &= (1-r^2)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_{11} &= (1-r^2)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_{13} &= (1-r^2)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_{15} &= (1-r^2)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_{10} &= (1-s^2)\left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_{12} &= (1-s^2)\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_{14} &= (1-s^2)\left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_{16} &= (1-s^2)\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_{17} &= (1-t^2)\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) \\
 h_{18} &= (1-t^2)\left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) & h_{19} &= (1-t^2)\left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) \\
 h_{20} &= (1-t^2)\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) & h_{21} &= (1-r^2)(1-t^2)\left(\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) \\
 h_{22} &= (1-r^2)(1-t^2)\left(-\frac{1}{2}s + \frac{1}{2}s^2\right) & h_{23} &= (1-r^2)(1-s^2)\left(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) \\
 h_{24} &= (1-r^2)(1-s^2)\left(-\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t^2\right) & h_{25} &= (1-s^2)(1-t^2)\left(\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right) \\
 h_{26} &= (1-s^2)(1-t^2)\left(-\frac{1}{2}r + \frac{1}{2}r^2\right) & h_{27} &= (1-r^2)(1-s^2)(1-t^2)
 \end{aligned} \quad (\text{III.140})$$

Fazendo para o elemento de 27 nós, a soma dos produtos das funções de interpolação nodais por suas respectivas coordenadas, temos:

$$\begin{aligned}
x_{27tot} = & h_1x_1 + h_2x_2 + h_3x_3 + h_4x_4 + h_5x_5 + h_6x_6 + h_7x_7 + h_8x_8 + h_9x_9 + h_{10}x_{10} + h_{11}x_{11} + h_{12}x_{12} + h_{13}x_{13} \\
& + h_{14}x_{14} + h_{15}x_{15} + h_{16}x_{16} + h_{17}x_{17} + h_{18}x_{18} + h_{19}x_{19} + h_{20}x_{20} + h_{21}x_{21} + h_{22}x_{22} + h_{23}x_{23} + h_{24}x_{24} + h_{25}x_{25} \\
& + h_{26}x_{26} + h_{27}x_{27}
\end{aligned} \tag{III.141}$$

Que resulta em:

$$x_{27tot} = \alpha_1 + \alpha_2r + \alpha_3s + \alpha_4t + \alpha_5rs + \alpha_6rt + \alpha_7st + \alpha_8rst \tag{III.142}$$

Pelas equações III.135 e III.142, concluímos que para ambos os elementos; a base de suas funções de interpolação, se encontram na forma dos monômios $1, s, r, t, rs, st, rt, rst$, os quais permitem representar, para qualquer elemento isoparamétrico de 20 ou 27 nós, o polinômio P_1 e a relação entre as coordenadas globais desses elementos e as coordenadas locais de suas respectivas imagens, conforme mostram as funções III.143, III.144, III.145:

$$x = \alpha_1 + \alpha_2r + \alpha_3s + \alpha_4t + \alpha_5rs + \alpha_6rt + \alpha_7st + \alpha_8rst \tag{III.143}$$

$$y = \beta_1 + \beta_2r + \beta_3s + \beta_4t + \beta_5rs + \beta_6rt + \beta_7st + \beta_8rst \tag{III.144}$$

$$z = \delta_1 + \delta_2r + \delta_3s + \delta_4t + \delta_5rs + \delta_6rt + \delta_7st + \delta_8rst \tag{III.145}$$

É necessário ressaltar que as funções III.143, III.144 e III.145 são válidas apenas para os elementos isoparamétricos, cujos lados são retos e com os nós intermediários localizados no ponto médio desses lados, sendo que a localização do nó central, no elemento de 27 nós, deve se encontrar no seu baricentro.

Referências Bibliográficas

1.0 - MACNEAL RICHARD H. **Finite elements: Their Design and Performance**. Los Angeles: Califórnia, 1994. Vol 89.

2.0 - BATHE, KLAUS-JÜRGEN. **Finite element procedures in engineering analysis**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, 1982.

3.0 - LEE,N.S., BATHE, K.J. Effects Of Elements Distortions on the Performance of Isoparametric Elements. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, Vol 36, pág 3553-3576, 1993.

4.0 - TIMOSHENKO S.P;GOODIER, J.N. **Theory of Elasticity**. Kogakusha. Mac Graw Hill Company, 1951. Third Edition.

5.0 - LEÃO, K.M. **Modelagem hierárquica com elementos finitos: uma abordagem didática**. 2002. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo – Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações – São Paulo 2002.

6.0 - ZAGOTTIS, DÉCIO LEAL. **Introdução à teoria das placas e das cascas**. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 1973.

7.0 - TIMOSHENKO S.P. **Mecânica dos Sólidos** – Rio de Janeiro, Livros Técnicos e Científicos, 1993.

8.0 – GODOY LA, SR IDELSOHN. Applied Mechanics Reviews – **Selected and extended papers from the 4th Pan-American Congress of Applied Mechanics**, Buenos Aires: Argentina, January — 1995.

9.0 – BUCALEM, M.L; BATHE K.J. Higher-Order MITC General Shell Elements. **International Journal For Numerical Methods in Engineering**,

Department of Mechanical Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge: USA, Vol 36, 3729-3754, 1993.