DIOGO CARLOS BERNARDES DE SOUZA

**SOBRE A BUSCA DE SUPERFÍCIES MINIMAIS E SEU EMPREGO
NAS ESTRUTURAS DE MEMBRANA**

**São Paulo
2008**

DIOGO CARLOS BERNARDES DE SOUZA

**SOBRE A BUSCA DE SUPERFÍCIES MINIMAIS E SEU EMPREGO
NAS ESTRUTURAS DE MEMBRANA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em
Engenharia de Estruturas

Ed. Revisada

**São Paulo
2008**

DIOGO CARLOS BERNARDES DE SOUZA

**SOBRE A BUSCA DE SUPERFÍCIES MINIMAIS E SEU EMPREGO
NAS ESTRUTURAS DE MEMBRANA**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
como parte dos requisitos para a
obtenção do título de Mestre em
Engenharia de Estruturas

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Livre-Docente Ruy Marcelo de
Oliveira Pauletti

**São Paulo
2008**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 26 de setembro de 2008.

Autor: Diogo Carlos Bernardes de Souza

Orientador: Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti

FICHA CATALOGRÁFICA

Souza, Diogo Carlos Bernardes de
Sobre a busca de superfícies mínimas e seu emprego nas
estruturas de membrana / D.C.B. de Souza. -- São Paulo, 2008.
116p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Geotécnica.

1.Estruturas de membranas 2.Superfícies mínimas 3.Otimi-
zação não linear I.Universidade de São Paulo. Escola Politéc-
nica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica
II.t.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho a minha irmã Talissa
e a meus pais Mariclene e Antônio,
amada família.

AGRADECIMENTOS

A Deus pelo dom da vida, por Seu amor incondicional e por me abençoar com as inúmeras oportunidades que tive em minha vida.

Aos meus pais por sua compreensão e apoio durante toda esta longa e difícil jornada de vida acadêmica e, acima de tudo, por seu amor e dedicação durante toda a minha vida.

À minha irmã por sua presença insubstituível, ainda que centenas de quilômetros nos separem fisicamente, por suas palavras, sempre tão eloqüentes, e pelo brilho dos seus olhos, capaz de despertar as pessoas à vida.

Ao meu orientador, Prof. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti, por sua amizade, atenção, compreensão e paciência durante o desenvolvimento desta pesquisa. Muito obrigado por me ensinar a lidar com os métodos numéricos e também por tudo o que sei sobre as estruturas de membrana. Jamais me esquecerei do seu zelo por mim, das longas horas de conversa na universidade e dos trabalhos que realizamos juntos.

Ao Prof. Edgard Sant'Anna de Almeida Neto por também me guiar através dos caminhos da otimização estrutural, pela oportunidade de auxiliá-lo na disciplina de pós-graduação, por seus conselhos mais que pertinentes e pela paciência e dedicação para com a minha pessoa. Apesar da burocracia não permitir, aqui o considero meu co-orientador.

Aos meus amigos por estarem ao meu lado durante os mais de dois anos e meio que dediquei ao mestrado em Engenharia de Estruturas. Muito obrigado por sua amizade, companheirismo, compreensão, dedicação e paciência. A minha gratidão é por tudo aquilo que passei com vocês, seja pela longa viagem até Belém e pelos dias maravilhosos que lá passei, seja por uma piada e boas gargalhadas a caminho do bandeirão. Não vou citar nomes, pois não me perdoaria caso me esquecesse de

alguém. Tenho a mais absoluta certeza que cada amigo meu sabe de sua importância na minha história. Obrigado por dividirem comigo parte de sua vida, todos vocês foram minha família durante este tempo que jamais me esquecerei.

Aos professores por transmitirem a mim parte de seu extraordinário conhecimento, por suas contribuições ao meu trabalho, pelas conversas e oportunidades que me proporcionaram.

À Universidade de São Paulo e ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica pelos mais de dois anos e meio do curso de mestrado.

Ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico – CNPq, por me fornecer uma bolsa de pesquisa durante o curso de mestrado.

“Since the fabric of the universe is most perfect and the work of a most wise Creator, nothing at all takes place in the universe in which some rule of maximum or minimum does not appear.”

(LEONHARD EULER, citado por Kline (1980, p.66))

RESUMO

Esta dissertação apresenta uma revisão histórica dos trabalhos acerca de superfícies minimais, ressaltando a pertinência da analogia entre a busca de superfícies de mínima área e a busca de formas de membranas estruturais sujeitas a um estado de tensões superficiais, homogêneo e isótropo. São colocados alguns conceitos geométricos das superfícies parametrizáveis, com base na geometria diferencial, a fim de realizar o equilíbrio diferencial de membranas e determinar as suas equações de equilíbrio. Além disso, é apresentada uma metodologia puramente geométrica para a determinação de superfícies minimais, baseada na minimização do funcional da área, dado pela soma das áreas das facetas triangulares nas quais a superfície é discretizada. O trabalho discute a formulação matemática do problema e apresenta resultados obtidos tanto por meio das rotinas implementadas no software MATLAB quanto por meio daquelas da biblioteca de otimização deste mesmo software. Finalmente, são realizados alguns exemplos e um teste de convergência, comparando as superfícies resultantes dos métodos numéricos com suas respectivas respostas analíticas. A geometria final de um dos exemplos é verificada por meio da analogia dos filmes de sabão, realizando-se uma análise não-linear de equilíbrio através do software Ansys. As soluções foram bastante satisfatórias, resultando em formas muito próximas das analíticas e com pequenos erros relativos das áreas. O teste de convergência também comprovou que o refinamento da discretização leva a uma solução mais próxima da desejada. Portanto, os procedimentos apresentados podem ser empregados no processo de busca da forma de membranas estruturais.

Palavras-chave: Membranas. Teoria de membranas. Busca da forma. Superfícies minimais. Métodos numéricos.

ABSTRACT

This dissertation presents a historical review on the theoretical developments on minimal surfaces, highlighting the important analogy between the problems of finding minimal area surfaces and finding membrane surfaces with homogeneous and isotropic stress fields. Some geometric concepts of the parametric surfaces are placed, on the basis of differential geometry, in order to do the differential equilibrium of membranes and to achieve its equilibrium equations. Moreover, a purely geometric methodology for the determination of minimal surfaces is presented, based on the minimization of the area functional, which is computed by the simple addition of a finite number of triangular facet areas in which the surface is divided. It discusses the mathematical formulation of the problem as well as some results obtained with the algorithms implemented in MATLAB and others obtained with the aid of MATLAB optimization routines. Finally, some examples and a convergence test are produced, comparing their analytical and numerical results. The final geometry of one of examples is verified by means of the soap film analogy, with a nonlinear equilibrium analysis through Ansys. The solutions have been sufficiently satisfactory, resulting forms very close to the analytical ones and with small areas relative errors. Convergence test also confirm that the method lead to numerical solutions as close to the analytical one as required, as long as the triangular facets mesh is refined. Therefore, the presented procedures can be used in structural membranes form finding.

Keywords: Membranes. Theory of membranes. Form finding. Minimal surfaces. Numerical methods.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

1 Introdução

Figura 1.1 - Estruturas retesadas	15
Figura 1.2 - Exemplo de motivação	20
Figura 1.3 - Possíveis soluções para o exemplo de motivação	21
Figura 1.4 - Catenóide em filme de sabão	21

3 Interação entre Geometria e Equilíbrio em Membranas Estruturais

Figura 3.1 - Curva parametrizada, $\Psi = \mathbf{r}(\theta)$, no espaço	32
Figura 3.2 - Vetor tangente e vetor secante de uma curva espacial parametrizada	33
Figura 3.3 - Curva parametrizada pelo comprimento de arco s e o triedro de Frenet-Serret	36
Figura 3.4 - Superfície espacial parametrizada por θ_1 e θ_2	37
Figura 3.5 - Sólido parametrizado por θ_1 , θ_2 e z	37
Figura 3.6 - Elemento diferencial de área	38
Figura 3.7 - Vetor entre dois pontos infinitamente próximos	38
Figura 3.8 - Relação entre raio de curvatura e a diferencial do vetor unitário normal à superfície	44
Figura 3.9 - Parâmetros de uma curva qualquer Ψ sobre uma superfície espacial	46
Figura 3.10 - O raio de curvatura ρ de uma curva Ψ qualquer sobre S	46
Figura 3.11 - Direções principais de uma superfície espacial	47
Figura 3.12 - Curvas que sofrem torção (a) e que não sofrem torção (b)	48
Figura 3.13 - Membrana estrutural, seus carregamentos e direções principais	49
Figura 3.14 - Tensões atuantes nas seções transversais do elemento membrana	49
Figura 3.15 - Tensões atuantes ao longo da espessura do elemento membrana	50
Figura 3.16 - Vetores tensão superficial na superfície média do elemento de membrana	50
Figura 3.17 - Superfície toroidal circular	54
Figura 3.18 - Transformações da membrana	57

4 Formulação, Equacionamento e Implementação do Problema de Minimização da Área

Figura 4.1 - Superfície suave parametrizada por θ_1 e θ_2 inscrita num contorno C	61
Figura 4.2 - Faceta triangular utilizada no problema discreto	63

5 Análises e Resultados

Figura 5.1 - Superfície axissimétrica entre dois anéis coaxiais e perpendiculares ao mesmo eixo.....	89
Figura 5.2 - Curva geratriz da catenóide.....	95
Figura 5.3 - Resultados da busca da forma da Catenóide	96
Figura 5.4 - Comparação entre os resultados analítico e numérico da Catenóide.....	99
Figura 5.5 - Malhas das tentativas iniciais para o teste de convergência.....	100
Figura 5.6 - Soluções numéricas.....	101
Figura 5.7 - Forma contínua do parabolóide hiperbólico de contorno fixo	103
Figura 5.8 - Resultados da busca da forma do parabolóide hiperbólico de contorno fixo.....	105
Figura 5.9 - Resultados das tensões no parabolóide hiperbólico fornecidos pelo Ansys.....	107
Figura 5.10 - Solução numérica para o parabolóide hiperbólico de bordas fixas.....	108

LISTA DE TABELAS

5 Análises e Resultados

Tabela 5.1 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação PQ+MN na Catenóide	97
Tabela 5.2 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação MN puro na Catenóide ...	97
Tabela 5.3 - Comparação entre os resultados analítico e numérico da Catenóide.....	98
Tabela 5.4 - Dados das malhas utilizadas no teste de convergência.....	100
Tabela 5.5 - Resultados do teste de convergência.....	101
Tabela 5.6 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação PQ+MN no Parabolóide Hiperbólico de contorno fixo	106
Tabela 5.7 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação MN puro no Parabolóide Hiperbólico de contorno fixo	106
Tabela 5.8 - Resultados do parabolóide hiperbólico de contorno fixo	108

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO.....	14
1.1	OBJETIVOS	19
1.2	MOTIVAÇÃO	20
2	REVISÃO BIBLIOGRÁFICA.....	22
2.1	ALGUMAS ESTRATÉGIAS PARA A MINIMIZAÇÃO DA ÁREA BASEADAS NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	27
3	INTERAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E EQUILÍBRIO EM MEMBRANAS ESTRUTURAIS.....	32
3.1	CURVAS NO ESPAÇO E O TRIEDRO DE FRENET-SERRET	32
3.2	SUPERFÍCIES NO ESPAÇO	36
3.3	O EQUILÍBRIO DIFERENCIAL DAS MEMBRANAS	48
3.4	ANALOGIA DOS FILMES DE SABÃO	55
3.4.1	MINIMIZAÇÃO DA ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE ESPACIAL.....	56
3.4.2	TRABALHO VIRTUAL DE UM CAMPO DE TENSÕES SUPERFICIAIS HOMOGÊNEAS E ISÓTROPAS.....	58
3.4.3	EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PROCEDIMENTOS GEOMÉTRICO E MECÂNICO PARA A DETERMINAÇÃO DA FORMA DA SUPERFÍCIE MINIMAL	59
4	FORMULAÇÃO, EQUACIONAMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DA ÁREA	61
4.1	PROBLEMA DISCRETO COM UM GRAU DE LIBERDADE (1GL) POR NÓ	65
4.1.1	O VETOR RESIDUAL DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ	69
4.1.2	A MATRIZ HESSIANA DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ.....	71
4.1.3	UM PROBLEMA QUADRÁTICO (PQ) SEMELHANTE	72
4.1.4	COMPARAÇÃO ENTRE OS VETORES RESIDUAIS E ENTRE AS MATRIZES HESSIANA	77

4.2	PROBLEMA DISCRETO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE (3GL) POR NÓ	78
4.2.1	O VETOR RESIDUAL DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ	83
4.2.2	A MATRIZ HESSIANA DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ.....	85
5	ANÁLISES E RESULTADOS	88
5.1	A CATENÓIDE	88
5.1.1	A SOLUÇÃO ANALÍTICA.....	88
5.1.2	VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ.....	94
5.1.3	VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ E O TESTE DE CONVERGÊNCIA	99
5.2	O PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO DE CONTORNO FIXO	102
5.2.1	FORMA GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO ANALÍTICA	102
5.2.2	VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ.....	103
5.2.3	VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ.....	107
6	CONCLUSÕES	109
6.1	TRABALHOS FUTUROS	111
	REFERÊNCIAS.....	113

1 INTRODUÇÃO

Existe na engenharia civil um seleto grupo de estruturas, denominadas *retesadas*, as quais são caracterizadas por apresentarem, como seus elementos estruturais principais, *cabos* e/ou *membranas*. Embora estes não sejam os únicos elementos estruturais do sistema como um todo, são eles que definem a disposição dos demais elementos. Além disso, em geral, eles evidenciam a importância arquitetônica das estruturas retesadas.

Segundo Pauletti (2003), o termo *estruturas retesadas* é uma alusão ao estado em que se encontram as cordas dos arcos ou as cordas dos instrumentos musicais que, para funcionarem a contento, precisam estar *retesadas*¹, e não *frouxas*². Portanto, um *estado de retesamento* em cabos e membranas é essencial para que as estruturas retesadas trabalhem adequadamente.

Alguns exemplos de estruturas retesadas são apresentados na Figura 1.1 e correspondem, respectivamente, a: ponte pênsil (a), ponte estaiada (b), estrutura *tensegrity* (c), estrutura pneumática (d), rede de cabos (e) e, finalmente, estrutura de membrana (f).³

Outra característica importante destes sistemas retesados é que a forma de alguns de seus elementos estruturais, especificamente os cabos e as membranas, passam por uma drástica mudança quando há uma alteração no padrão de carregamento a que eles estão submetidos. Frente a esse comportamento diz-se que estas são *flexíveis*, e suas equações de equilíbrio devem ser escritas na configuração deformada.

¹ Retesado: “que se retesou, que se esticou; esticado, teso, tenso, hirtso, reteso” (HOUAISS, 2001).

² Frouxo: “que não está retesado” (HOUAISS, 2001).

³ Pauletti (2003, p.3) deixa claro que, a rigor, todas as estruturas retesadas, com exceção das infladas, são mistas, uma vez que os esforços internos de tração desenvolvidos por alguns elementos estruturais devem ser equilibrados, de alguma forma, através de outros elementos fletidos ou comprimidos. O fato é que, para estas estruturas, a rigidez geométrica se sobressai em relação aos demais fatores de rigidez. Vale ressaltar que o intuito deste trabalho não é discutir a classificação das estruturas retesadas nem suas razões. Para maiores detalhes sobre este assunto remete-se a Pauletti (2003). A Figura 1.1 tem apenas caráter ilustrativo e não explicativo.

Outros sistemas estruturais compostos por vigas, pilares, lajes e cascas, por exemplo, não sofrem mudanças significativas de forma quando da alteração do carregamento externo, portanto são ditos *rígidos*.

Figura 1.1 - Estruturas retesadas

- (a) Ponte Akashi Kaykio, Kobe, Japão⁴
- (b) Ponte Vasco da Gama, Lisboa, Portugal⁵
- (c) Georgia Dome, Atlanta, Estados Unidos⁶
- (d) Tokyo Big Egg Dome, Tóquio, Japão⁷
- (e) Pavilhão Alemão da Expo67, Montreal, Canadá⁸
- (f) Aeroporto Internacional de Denver, Denver, Estados Unidos⁹

⁴ fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/f/f1/akashi_bridge.jpg, acessado em: 22/01/2008

⁵ fonte: <http://k43.pbase.com/u39/andreantunes/large/34974362.pontedia.jpg>, acessado em: 17/01/2008

⁶ fonte: <http://urbanproductions.com/ncaa2002/atlanta/full/dome01.jpg>, acessado em: 22/01/2008

⁷ fonte: http://www.takenaka.co.jp/takenaka_e/majorworks_e/expert/entertain/gif_b/7a31.jpg, acessado em: 22/01/2008

⁸ fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/e/e7/Germany_Pavilion_Expo_67_-_Montreal_Quebec.jpg, acessado em: 26/02/2008

⁹ fonte: <http://www.denverairporttransportation.com/images/dia.jpg>, acessado em: 17/01/2008

Enunciadas as classificações quanto ao *estado característico* (estruturas retesadas) e quanto ao *comportamento estrutural* (estruturas flexíveis), é possível afirmar que elas são equivalentes, pois:

Uma grande flexibilidade restringe a natureza dos esforços internos que as estruturas podem desenvolver, pois estas se tornam instáveis para esforços internos de compressão (assim, por exemplo, embora haja uma solução para o problema do equilíbrio do cabo retilíneo sujeito a forças de compressão nas extremidades, esta solução é instável; na prática, tudo se passa como se o material do cabo não tivesse rigidez à compressão), de modo que em estruturas flexíveis, os carregamentos externos devem ser equilibrados basicamente por meio de esforços de tração (PAULETTI, 2003, p. 2).

Quanto ao peso próprio, os sistemas retesados são, geralmente, *estruturas leves*. Isto se deve ao fato de que, numa comparação genérica, seu peso específico é cerca de duas ordens de grandeza menor do que aqueles de concreto armado. E ao compará-los com estruturas convencionais de aço seu peso específico é uma ordem de grandeza menor.

Os elementos estruturais que caracterizam uma estrutura retesada são basicamente dois: os *cabos*, que são elementos lineares e resistem aos carregamentos externos desenvolvendo exclusivamente tensões normais de tração; e as *membranas*, que são elementos superficiais e resistem aos carregamentos externos desenvolvendo tensões normais de tração e tensões de cisalhamento, as quais atuam nos planos tangentes à sua superfície em cada ponto de seu domínio.

Serão denominadas de *estruturas de membrana* aquelas estruturas retesadas em que a membrana constitui, dos pontos de vista arquitetônico e estrutural, a parte principal do sistema. Obviamente uma estrutura de membrana não será composta exclusivamente de elementos de membrana, todavia, os demais elementos estruturais, como mastros, masteletes, estais e cabos, estarão dispostos no sistema a fim de que a membrana:

- ✓ tenha uma configuração geométrica próxima àquela definida numa intenção arquitetônica;
- ✓ desempenhe a função para a qual foi concebida (em geral, cobrir grandes áreas livres);
- ✓ seja estável;

- ✓ resista aos carregamentos externos, sejam eles estáticos ou dinâmicos.

Uma vez que as membranas não resistem à compressão e, por conseguinte, à flexão, sua configuração geométrica, seus carregamentos externos e seu estado de solicitações devem interagir de modo a atender ao equilíbrio sem o surgimento de esforços de flexão. Resulta que a geometria deste tipo de estrutura não pode, em geral, ser especificada *a priori*, sendo sua determinação parte integrante do processo de projeto.

O projeto de uma estrutura de membrana, de acordo com Tabarrok (1992) e Pauletti (2003), envolve então três etapas fundamentais:

- ✓ *Busca da forma*: é a determinação de uma forma geométrica inicial que equilibra o estado de solicitações devido às forças de retesamento, de modo a satisfazer os requisitos arquitetônicos;
- ✓ *Padrões de corte*: é a determinação aproximada de um conjunto de peças planas feitas de tecido e que, no espaço, serão unidas para formar a superfície determinada no processo de busca da forma, ou seja, a membrana.
- ✓ *Resposta aos carregamentos*: é análise do comportamento da estrutura (já definida no processo de busca da forma) devido aos vários carregamentos de serviço possíveis, como aqueles devidos ao vento, por exemplo, de modo a garantir a segurança do sistema;

O foco deste trabalho está na primeira fase do projeto de uma estrutura de membrana, ou seja, na busca da forma. É importante deixar claro que, nesta etapa, existem inúmeras configurações geométricas possíveis tais que o equilíbrio seja verificado, e é o projetista quem deverá optar por aquela que melhor se adapte às condições do projeto arquitetônico, considerando também fatores econômicos.

A busca da forma pode ser feita mediante modelos físicos ou numéricos. Os modelos físicos são aqueles em que estrutura é construída em escala, fazendo uso desde filmes de sabão até membranas de PVC. Já os modelos numéricos tomam partido de métodos numéricos e da computação gráfica para gerar a estrutura virtualmente.

Em se tratando de modelagem numérica, existem alguns procedimentos para a busca da forma como, por exemplo, aqueles baseados:

- ✓ nas superfícies minimais;
- ✓ nas tensões não-uniformes;
- ✓ nos deslocamentos incrementais;
- ✓ nas densidade de forças;
- ✓ na relaxação dinâmica.

Entende-se que dentre as muitas famílias de formas viáveis, uma das mais relevantes é a representada pelas *superfícies minimais*, que se caracterizam, do ponto de vista matemático, por apresentarem a menor área para um dado contorno (TABARROK, 1992). Por esta razão, dos procedimentos citados anteriormente, será neste texto abordado com maior intensidade aquele baseado nestas superfícies.

As formas das superfícies minimais continuam sendo alternativas de projeto relevantes, uma vez que propiciam economia de material. Dada a constância da espessura da membrana, exceto em determinadas regiões¹⁰ onde é necessário o reforço, as superfícies minimais também proporcionam economia financeira.

Do ponto de vista mecânico, elas também apresentam a menor energia de deformação, para o contorno especificado, bem como campos uniformes e isotrópicos de tensões, características que podem ser tomadas como base para definições alternativas do conceito de superfícies minimais.

As características descritas acima são as mesmas existentes em filmes de sabão e, por este motivo e conforme já mencionado, modelos físicos de tais filmes eram utilizados como técnica para a determinação da forma das estruturas de membrana. Com o avanço da ciência e dos métodos computacionais esta técnica caiu em desuso.

¹⁰ Como, por exemplo, as regiões: onde se unem as faixas dos padrões de corte; do contorno, onde há cabos de borda que retesam a membrana; próximas de mastros de masteletes, onde os cabos de borda são ancorados. A grande concentração de tensões nestes locais torna necessário o reforço da membrana.

Há uma equivalência entre a superfície espacial de mínima área, para um dado contorno, e a superfície espacial que fornece campos uniformes e isotrópicos de tensões, para este mesmo contorno. Tomando partido de tal equivalência optou-se, nesta dissertação, por fazer uso da minimização da área superficial como técnica de busca da forma para membranas estruturais.

1.1 OBJETIVOS

Os objetivos gerais deste trabalho são descrever sucintamente algumas alternativas para a busca da forma de estruturas de membrana, apresentar as superfícies minimais e determinar numericamente superfícies espaciais, ajustadas a um determinado contorno, tal que sua área tenha um valor mínimo.

Fazem parte dos objetivos específicos:

- ✓ Definir claramente as superfícies minimais em seus vários aspectos;
- ✓ Realizar o equilíbrio diferencial de uma membrana estrutural;
- ✓ Demonstrar a analogia dos filmes de sabão;
- ✓ Formular o problema da minimização da área superficial, ajustada a um contorno fixo, sob uma perspectiva exclusivamente geométrica;
- ✓ Particularizar o problema para superfícies descritas por $z = \hat{z}(x, y)$;
- ✓ Propor uma solução linear, baseada em um problema quadrático semelhante;
- ✓ Implementar o equacionamento em MATLAB;
- ✓ Verificar as respostas encontradas com soluções:
 - analíticas, quando existentes;
 - numéricas, através de análise não-linear do equilíbrio, por meio do programa Ansys¹¹.
- ✓ Generalizar o problema para outras superfícies;
- ✓ Implementar o equacionamento utilizando a biblioteca do MATLAB;
- ✓ Verificar as respostas encontradas com soluções analíticas.

¹¹ Neste caso se faz necessária a analogia dos filmes de sabão.

1.2 MOTIVAÇÃO

Sejam dois anéis coaxiais cujos raios são respectivamente R_1 e R_2 . Os anéis estão distantes entre si de uma altura h e são perpendiculares ao eixo de axissimetria, conforme mostra a Figura 1.2. Imaginando que esses anéis deverão ser unidos por uma membrana, cuja espessura é suposta constante ao longo de toda a superfície, e que deseja-se a menor quantidade de material possível para conseguir este resultado, então a questão é:

Como determinar a superfície de menor área que une esses dois anéis?

Figura 1.2 - Exemplo de motivação

Em alguns casos particulares, onde o contorno é bem definido e bem comportado do ponto de vista matemático, é possível lançar mão do cálculo variacional para determinar uma solução analítica. O exemplo em questão é um problema clássico dessa natureza.

Contudo, existe uma infinidade de formas superficiais minimais, que satisfazem as mais diversas condições de projeto de estruturas de membrana, mas não podem ser determinadas analiticamente. Este trabalho trata de formulações baseadas na discretização destas superfícies a fim de determinar formas minimais numericamente.

No decorrer do texto será apresentada ainda uma analogia entre a minimização da área superficial baseada exclusivamente na geometria (sendo esta o alvo principal desta dissertação) e aquela baseada na mecânica dos meios contínuos. Tal equivalência é denominada de *analogia dos filmes de sabão*, uma vez que as formas

desses filmes correspondem à superfícies minimais e podem ser determinadas por ambos os processos (ISENBERG, 1992).

Analisando intuitivamente cada uma das três ilustrações mostradas na Figura 1.3, pergunta-se:

Qual das superfícies apresenta a menor área?

Figura 1.3 - Possíveis soluções para o exemplo de motivação

A resposta certamente não é trivial a todos. Então, de posse da informação que os filmes de sabão são superfícies de mínima área e observando a Figura 1.4 é possível chegar à resposta desejada.

Figura 1.4 - Catenóide em filme de sabão¹²

Conforme Houaiss (2001), catenóide é uma superfície de revolução gerada pela rotação de uma catenária em torno de um eixo. A catenária, por sua vez, é definida como uma curva plana que se obtém da suspensão de uma cadeia uniforme por seus dois extremos e pode ser expressa por uma função do co-seno hiperbólico.

Mais adiante este exemplo de motivação será retomado e serão apresentadas as soluções analítica, com base no cálculo variacional, e numérica, por meio do algoritmo implementado.

¹² fonte: http://upload.wikimedia.org/wikipedia/commons/thumb/f/f2/Bulle_caténoïde.png/728px-Bulle_caténoïde.png,
acessado em: 22/01/2008

2 REVISÃO BIBLIOGRÁFICA

A primeira idéia de minimização foi introduzida no século XVII, por Pierre de Fermat, quando enunciou o *princípio do tempo mínimo*. Neste preceito o matemático afirma, ainda com uma base de evidências bastante restrita, que a luz viajando entre dois pontos sempre percorre um caminho utilizando o tempo mínimo possível. Esse fato indicava não apenas que a luz obedecia a leis matemáticas, mas também que se deslocava da maneira mais eficiente (KLINE, 1980).

Décadas mais tarde, em 1744, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis, enquanto trabalhava com a teoria de Fermat, abandonou o princípio do tempo mínimo e o substitui pelo conceito de *ação*. Para ele, a *ação* nada mais era do que a integral do produto da massa, velocidade e distância transversal à velocidade. Afirmando que tudo o que acontecia na natureza era como minimizar a *ação*, definiu o seu *princípio da ação mínima*.

Maupertuis defendeu tal idéia também por questões religiosas, uma vez que as leis do comportamento da matéria deveriam possuir a perfeição digna da criação de Deus e que seu princípio parecia satisfazer esse quesito, pois mostrava que a natureza era econômica. Ainda na década de 1740, conforme explica Kline (1980), o matemático Leonhard Euler, concordando com o contemporâneo Maupertuis, expressa sua convicção nas seguintes palavras: “Já que o tecido do universo é o mais perfeito e é trabalho do mais sábio Criador, nada ocorre no universo em que alguma regra de máximo ou mínimo não apareça.”

Para Kline (1980), Euler foi mais longe que Maupertuis, uma vez que sua idéia abrangia todos os fenômenos naturais, e não apenas a *ação*, ou seja, todos os princípios básicos da física deveriam conter funções passíveis de uma minimização ou de uma maximização. É neste contexto de envolver todas as áreas que, segundo Isenberg (1992), Euler e seu mestre John Bernoulli começaram a aplicar os métodos de cálculo para a solução do problema de minimização de áreas.

Numa publicação de sua autoria em 1744, Euler lança as fundações para o que viria a ser o *cálculo das variações*, derivando a equação para a minimização de funcionais unidimensionais, isto é, aqueles descritos por $f = f(x, y, y_x)$, em que $y = y(x)$ e $y_x = dy/dx$. Baseado em um método geométrico-analítico, Euler chegou ao seguinte resultado (ISENBERG, 1992):

$$\frac{d}{dx} \left(\frac{\partial f}{\partial y_x} \right) - \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad (2.1)$$

O exemplo de motivação colocado no Subcapítulo 1.2, cujo problema é determinar a área superficial mínima contida entre dois anéis coaxiais, paralelos entre si, e colocados perpendicularmente ao eixo comum, foi resolvido com sucesso por Euler aplicando a equação (2.1). A solução encontrada foi uma catenária de revolução, mais conhecida como catenóide.

Anos depois o matemático Joseph-Louis Lagrange esclareceu o *princípio da mínima ação*, fazendo com que o conceito de *ação* passasse a ser essencialmente *energia*. De acordo com Kline (1980), a generalização deste princípio, feita por Lagrange, proporcionou a dedução de soluções para um número muito maior de problemas mecânicos do que aqueles alcançados pelos estudos de Euler.

Para Kline (1980), “o princípio da mínima ação está no coração do assunto do cálculo variacional, um novo ramo da matemática que Lagrange, utilizando os trabalhos preliminares de Euler, fundou”.

Eisenhart (1960) acrescenta que, em 1760, Lagrange estendeu para integrais duplas os teoremas de Euler sobre integrais simples no cálculo das variações. Enquanto isso Isenberg (1992) ressalta a importância da reformulação feita por Lagrange, uma vez que ele se baseou em métodos puramente analíticos. A partir da generalização, (2.1) ficou conhecida como *equação de Euler-Lagrange*.

A extensão da equação de Euler-Lagrange para a minimização de funcionais bidimensionais, denotados por $f(x, y, u, u_x, u_y)$, em que $u = u(x, y)$, $u_x = (\partial u / \partial x)$ e $u_y = (\partial u / \partial y)$, é descrita por:

$$\frac{\partial f}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial u_x} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial u_y} \right) = 0 \quad (2.2)$$

De acordo com Eisenhart (1960), Lagrange propôs como exemplo, o problema de determinar a área mínima de uma superfície inscrita em uma curva fechada e fixada a esta em seu contorno. Supondo uma superfície definida pela equação $z = \hat{z}(x, y)$, então o problema requer a determinação de $\hat{z}(x, y)$ tal que o funcional

$$A = \iint \sqrt{1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2} dx dy = \iint f(x, y, z, z_x, z_y) dx dy \quad (2.3)$$

sobre a porção da superfície delimitada pelo contorno prescrito seja minimizado.

Desta forma, o estudo mais geral das superfícies minimais começa com Lagrange abordando o problema sob um ponto de vista essencialmente analítico, fazendo uso do cálculo das variações para minimizar o funcional que representa a área de uma superfície espacial. O resultado da aplicação de (2.2) em (2.3) foi mostrado por Lagrange, e é escrito como:

$$\left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial x} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial z}{\partial x} \frac{\partial z}{\partial y} \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} + \left(1 + \left(\frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 \right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \quad (2.4)$$

Por outro lado, o mesmo Eisenhart (1960) relata que, dezesseis anos mais tarde, Jean Baptiste Marie Charles Meusnier provou que a solução encontrada por Lagrange correspondia a anular a curvatura Gaussiana média da superfície. A partir de então, tal propriedade geométrica passou a ser uma das definições de superfícies minimais.

O resultado de Meusnier, conforme Isenberg (1992), pode ser escrito em termos dos raios de curvatura principais da superfície:

$$\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} = 0 \quad (2.5)$$

onde ρ_1 e ρ_2 são, respectivamente, os raios de curvatura máximo e mínimo.

A idéia de *tensão superficial* foi introduzida, em 1751, por Johann Andreas von Segner, porém ainda no contexto dos fluidos e de seu comportamento com interfaces sólidas e gasosas. Seguindo esta linha de pesquisa, Thomas Young, em uma publicação de 1805, inclui o conceito de *ângulo de contato*, e seus resultados seriam alcançados mais tarde com a ajuda das técnicas matemáticas desenvolvidas por Laplace (ISENBERG, 1992).

Pierre-Simon Laplace estabeleceu a relação entre a tensão superficial na interface fluida, σ , o acréscimo de pressão sobre a superfície do fluido, p , e os raios de curvatura principais da referida superfície, ρ_1 e ρ_2 , escrevendo-a do seguinte modo:

$$p = \sigma \left(\frac{1}{\rho_1} + \frac{1}{\rho_2} \right) \quad (2.6)$$

Segundo Isenberg (1992), Laplace publicou (2.6) em 1806, que posteriormente ficaria conhecida como a *equação de Laplace-Young*. Apesar de ter sido idealizada para fluidos, será mostrado no decorrer deste texto que tal equação também é válida para expressar o equilíbrio das membranas.

No caso do caténóide em filme de sabão, como aquele mostrado na Figura 1.4, o acréscimo de pressão sobre a superfície fluida é nulo, uma vez que ela fica imersa no ar. Portanto, (2.6) se reduz à (2.5), evidenciando sua característica geométrica de superfície minimal.

Foi em meados do século XIX que o físico Joseph Antoine Ferdinand Plateau mostrou que existem respostas análogas entre os resultados encontrados pela minimização da área superficial e as formas geométricas obtidas a partir da imersão e da emersão de uma estrutura de arame, representando o contorno rígido da superfície, em um recipiente contendo uma solução de sabão. Esta se tornou conhecida como a *analogia dos filmes de sabão* (ISENBERG, 1992).

Impulsionados pelos resultados de Plateu os matemáticos procuravam agora novos métodos analíticos aptos a provar a existência de propriedades geométricas associadas às superfícies minimais e capazes de resolver o problema da determinação destas formas. Para Isenberg (1992), a primeira pesquisa relevante nesse tema foi a de Jesse Douglas.

Na introdução de seu trabalho, Douglas (1931) coloca que “o problema de Plateu é provar a existência de uma superfície minimal atrelada a um dado contorno” e que seu texto traz “a primeira solução para este problema com o tipo de contorno mais geral: uma curva de Jordan no espaço euclidiano n -dimensional”.

Durante o século XX houve uma expansão da analogia dos filmes de sabão para outras áreas do conhecimento, inclusive para a engenharia civil, mais especificamente para as membranas. Vários conceitos fundem-se devido à analogia, fazendo com que as superfícies minimais, que correspondem a uma família de formas viáveis para membranas, sejam entendidas, neste contexto, como superfícies:

- ✓ de mínima área e, por consequência, de menor peso;
- ✓ cuja curvatura Gaussiana média é nula;
- ✓ que apresentam a menor energia de deformação;
- ✓ que apresentam campos isotrópicos e uniformes de tensão.

Estas idéias promoveram a importância da referida analogia para o avanço na concepção moderna das redes de cabos e das membranas. Antes da introdução dos métodos computacionais, a produção de modelos de filmes de sabão constituía uma das principais técnicas para a determinação da forma das redes de cabos e das membranas.

Com o advento dos computadores, este tipo de modelo caiu em desuso. Contudo, as superfícies minimais continuam sendo importantes alternativas de projeto, uma vez que propiciam economia de material e uniformidade no estado de solicitação dos elementos estruturais.

2.1 ALGUMAS ESTRATÉGIAS PARA A MINIMIZAÇÃO DA ÁREA BASEADAS NO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Gründig (1988) propõe uma estratégia para a busca da forma a partir do cálculo da área mínima, através de um problema quadrático. Para isto, é utilizada uma malha de elementos finitos triangulares de modo que a área total da superfície, S , seja escrita como:

$$S = \sum A_p \quad (2.7)$$

onde A_p é o valor da área do triângulo p , e é função das coordenadas dos nós deste mesmo triângulo.

Uma forma quadrática para (2.7) pode ser escrita tomando $f_p = \sqrt{A_p}$, organizando f_p no vetor $\mathbf{f}$ e aplicando o produto escalar:

$$S = \mathbf{f}^T \mathbf{f} \quad (2.8)$$

Sabendo que $\mathbf{f} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ e que $\mathbf{x}^T = [x, y, z, \dots, x, y, z]$ é o vetor que coleciona as coordenadas nodais dos triângulos, a condição necessária de primeira ordem para que a área total, S , seja mínima é:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) \mathbf{f} = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

Conforme explica Gründig (1988), existem casos para os quais (2.9) não pode ser resolvida de uma forma usual, fixando $\partial \mathbf{f} / \partial \mathbf{x}$ e utilizando a expansão de Taylor apenas para $\mathbf{f}$. Assim sendo, o sistema de equações resultante pode se tornar singular:

$$\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right) d\mathbf{x} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}_0 \quad (2.10)$$

A fim de contornar este problema, aplica-se o método de Newton, de uma maneira restrita, no sistema de equações lineares (2.9), utilizando a regra da cadeia para diferenciação. Deste procedimento, resulta o seguinte sistema de equações:

$$\underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f} \right) \Big|_{\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} = \text{cte}}}_{\mathbf{N}_{11}} d\mathbf{x} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f} \right) \Big|_{f = \text{cte}}}_{\mathbf{N}_{22}} d\mathbf{x} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}_0 \quad (2.11)$$

Com as matrizes $\mathbf{N}_{11}$ e $\mathbf{N}_{22}$ chega-se ao seguinte sistema de equações de recorrência, que é o procedimento proposto por Gründig (1988), para a determinação de superfícies minimais:

$$(\mathbf{N}_{11} + \mathbf{N}_{22}) d\mathbf{x} = - \left(\frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}} \right)^T \mathbf{f}_0 \quad (2.12)$$

onde $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + d\mathbf{x}$, e partindo de um vetor inicial das coordenadas nodais, $\mathbf{x}_0$, a solução de (2.9) é determinada iterativamente, dada uma certa tolerância predeterminada.

Bletzinger et al. (2005), por sua vez, supõem uma membrana, descrita por um campo vetorial $\mathbf{X}$, na configuração de referência, e por um campo vetorial $\mathbf{x}$, na configuração atual, submetida a um campo auto-equilibrado de tensões tangenciais à sua superfície média.

Nestas condições, seja $\boldsymbol{\sigma}$ o campo de tensões de Cauchy prescritas que atua sobre a superfície, $\delta \mathbf{u}$ o campo de deslocamentos virtuais, $\mathbf{x}$ o campo vetorial que descreve a superfície em equilíbrio e t a espessura da membrana, então, pelo Princípio dos Trabalhos Virtuais:

$$\delta w = t \int_a \boldsymbol{\sigma} : \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\delta \mathbf{u}) da = 0 \quad (2.13)$$

Bletzinger et al. (2005) escreve a derivada dos deslocamentos virtuais, $\delta \mathbf{u}$, em relação ao campo vetorial $\mathbf{x}$ utilizando o gradiente dos deslocamentos virtuais, $\delta \mathbf{F}$, e reais, $\mathbf{F}$, conforme a seguir:

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} (\delta \mathbf{u}) = \delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \quad (2.14)$$

O referido autor coloca ainda a diferencial da área de referência, da , em termos do jacobiano da transformação, J , e da diferencial da área atual, dA :

$$da = J dA \quad (2.15)$$

Substituindo (2.14) e (2.15) em (2.13):

$$\delta w = t \int_A \boldsymbol{\sigma} : (\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1}) J dA = t \int_A J (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (2.16)$$

O segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}$, pode ser escrito em termos do tensor das tensões de Cauchy conforme segue:

$$\mathbf{S} = J \mathbf{F}^{-1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T} \quad (2.17)$$

Aplicando (2.17) em (2.16):

$$\delta w = t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (2.18)$$

Ou seja, (2.16) e (2.18) são iguais:

$$\delta w = t \int_A J(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA = t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad (2.19)$$

Em se tratando de uma superfície discretizada por elementos finitos, os graus de liberdade referentes aos deslocamentos tangenciais à superfície são irrelevantes, tornando o sistema (2.13) singular. Com o intuito de estabilizar o sistema, Bletzinger et al. (2005) propõe uma regularização introduzindo um fator de continuidade λ :

$$\delta w = \lambda t \int_A J(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{F}^{-T}) : \delta \mathbf{F} dA + (1 - \lambda) t \int_A (\mathbf{F} \cdot \mathbf{S}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (2.20)$$

Observa-se que nada mudou de (2.19) para (2.20). Levando em conta que uma superfície minimal é aquela que apresenta campos uniformes e isotrópicos de tensões superficiais, assume-se o segundo tensor de Piola-Kirchhoff, $\mathbf{S}$, igual ao tensor das tensões de Cauchy, $\boldsymbol{\sigma}$, e igual ao produto de um escalar, s , pelo tensor identidade, $\mathbf{I}$:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{S} = s\mathbf{I} \quad (2.21)$$

Assim sendo, (2.21) fica:

$$\delta w = st \int_A (\lambda J \mathbf{F}^{-T} + (1 - \lambda) \mathbf{F}) : \delta \mathbf{F} dA = 0 \quad 0 \leq \lambda < 1 \quad (2.22)$$

Este sistema de equações é não-linear em termos da geometria final, descrita pelo vetor $\mathbf{x}$ das coordenadas globais, e pode ser resolvido iterativamente aplicando o método de Newton-Raphson, por exemplo. O resultado pode ser diferente da superfície minimal dependendo da escolha de λ . Logo, este procedimento deve ser repetido com uma nova escolha para λ , agora mais próximo da unidade do que a escolha anterior, a fim de determinar um resultado mais próximo da solução desejada.

Conforme explica Bletzinger et al. (2005), λ pode ser tomado como um número fixo e a geometria resultante do sistema estabilizado (2.22), descrita pelo vetor $\tilde{\mathbf{x}}$ das coordenadas globais, pode ser utilizada para atualizar a geometria de referência, descrita pelo vetor $\mathbf{X}$ das coordenadas globais, das próximas

iterações. Pela aplicação sucessiva desta atualização da geometria de referência o procedimento converge para a superfície minimal rapidamente.

Estas são apenas duas estratégias de busca de superfícies minimais, contudo existem muitas outras como, por exemplo, aquelas encontradas em Ohmori; Hagiwara e Matsui (1989) e em Suzuki e Hangai (1991).

Existem também outros procedimentos de busca da forma de membranas estruturais, citados no Capítulo 1, que não são baseados no conceito da mínima área. Neste âmbito destacam-se alguns trabalhos como Barnes (1988), Maurin e Motro (1998), Caner e Hsu (1999), Linkwitz (1999) e Pauletti (2006).

3 INTERAÇÃO ENTRE GEOMETRIA E EQUILÍBRIO EM MEMBRANAS ESTRUTURAIS

O objetivo principal deste capítulo é fornecer uma introdução à geometria diferencial de superfícies espaciais, apresentando algumas entidades matemáticas importantes e necessárias para a realização do equilíbrio diferencial de membranas estruturais. Também é apresentada a analogia dos filmes de sabão, que faz o elo entre as superfícies minimais e um caso particular da teoria das membranas.

Vale deixar claro que todas as figuras apresentadas neste capítulo foram digitalizadas a partir das notas de aula tomadas da disciplina PEF-5750 “Sistemas Estruturais Leves para Cobertura de Grandes Vãos”, ministrada pelo professor Pauletti (PAULETTI; SOUZA, 2007).

3.1 CURVAS NO ESPAÇO E O TRIEDRO DE FRENET-SERRET

Denomina-se de *curva parametrizável* Ψ no espaço aquela em que, dada uma base do espaço R^3 , o vetor posição $\mathbf{r}$ de qualquer ponto P pertencente ao seu domínio é dependente de um único parâmetro arbitrário, θ , o qual é contínuo e monótono. Deste modo, $\Psi = \mathbf{r}(\theta)$, como mostrado na Figura 3.1.

Figura 3.1 - Curva parametrizada, $\Psi = \mathbf{r}(\theta)$, no espaço

Dada a posição, $\mathbf{r}(\theta)$, de um ponto qualquer P pertencente à Ψ e aplicando-se uma variação $\Delta\theta$ ao parâmetro arbitrário, fica estabelecido um novo ponto P' de Ψ , cuja posição é $\mathbf{r}(\theta + \Delta\theta)$.

A partir desses dois pontos definem-se: um vetor secante à curva e, fazendo o incremento $\Delta\theta$ tender a zero, um vetor tangente à Ψ no ponto P , conforme a Figura 3.2.

Figura 3.2 - Vetor tangente e vetor secante de uma curva espacial parametrizada

O vetor secante é definido como a razão entre o incremento de posição, $\Delta\mathbf{r}$, pelo incremento do parâmetro, $\Delta\theta$. O vetor tangente, $\boldsymbol{\tau}$, fica sendo:

$$\boldsymbol{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r}(\theta + \Delta\theta) - \mathbf{r}(\theta)}{\Delta\theta} = \lim_{\Delta\theta \rightarrow 0} \frac{\Delta\mathbf{r}}{\Delta\theta} \quad (3.1)$$

Cuja norma pode ser expressa por:

$$\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{\boldsymbol{\tau} \cdot \boldsymbol{\tau}} \quad (3.2)$$

Sendo $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ a base ortonormal do R^3 considerada, e escrevendo o campo vetorial $\mathbf{r}$ como função do parâmetro θ nesta base, $\mathbf{r}(\theta) = x(\theta)\mathbf{e}_1 + y(\theta)\mathbf{e}_2 + z(\theta)\mathbf{e}_3$, então (3.2) pode ser expressa por:

$$\|\tau\| = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta} \right)^2 + \left(\frac{dz}{d\theta} \right)^2} \quad (3.3)$$

Assumindo $\theta = s$, onde s é o comprimento da curva Ψ medido a partir de um ponto fixo de seu domínio, tem-se que $\Psi = \mathbf{r}(s)$ e a norma do vetor tangente fica:

$$\|\tau\| = \left\| \frac{d\mathbf{r}}{ds} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dy}{ds} \right)^2 + \left(\frac{dz}{ds} \right)^2} = \sqrt{\frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{ds^2}} = \sqrt{\frac{ds^2}{ds^2}} = 1 \quad \therefore \quad \|\tau\| = 1 \quad (3.4)$$

Logo, τ é o *vetor unitário tangente* à Ψ no ponto s .

Adota-se a seguinte notação para derivações:

$$(\quad)' = \frac{d(\quad)}{ds} \quad \therefore \quad \tau = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \mathbf{r}' \quad (3.5)$$

De (3.4) sabe-se que a norma de τ é um escalar unitário. Por conta disso, ao se derivar tal norma em relação ao parâmetro s obter-se-á um escalar nulo:

$$(\|\tau\|^2)' = (\tau \cdot \tau)' = \tau' \cdot \tau + \tau \cdot \tau' = 2\tau' \cdot \tau = 0 \quad \Rightarrow \quad \tau' \cdot \tau = 0 \quad \therefore \quad \tau' \perp \tau, \forall s \quad (3.6)$$

Portanto τ' é ortogonal à τ para qualquer valor de s . É importante lembrar que em (3.6) deriva-se a norma do vetor tangente, e não o vetor em si. Haja vista que nem sempre $\|\tau'\| = 1$, define-se então:

$$\nu = \frac{\tau'}{\|\tau'\|} = \frac{\mathbf{r}''}{\|\mathbf{r}''\|} \quad \Rightarrow \quad \|\nu\| = 1 \quad (3.7)$$

Logo, ν é o *vetor unitário normal* à curva Ψ no ponto s . No caso geral, isto é, para qualquer valor de $\|\tau'\|$, tem-se que:

$$\tau' = \kappa \nu \quad \therefore \quad \kappa = \|\tau'\|, \forall s$$

$$\rho = \pm \frac{1}{\kappa} \quad (3.8)$$

Onde o número positivo κ é denominado de *curvatura da curva* Ψ no ponto s e, segundo Carmo (1971), ele mede o quão rapidamente a curva Ψ se afasta de sua tangente τ numa vizinhança do ponto s . Por definição, o *raio de curvatura*, ρ , é o inverso da curvatura, κ , da curva Ψ no ponto s , e pode ser positivo ou negativo.

O plano que contém os vetores unitários τ e ν é denominado de *plano osculador da curva* Ψ no ponto s , e perpendicular a ele está o seguinte vetor:

$$\begin{aligned}\beta &= \tau \times \nu \\ \|\tau\| = \|\nu\| = 1 \quad \therefore \quad \|\beta\| &= 1\end{aligned}\tag{3.9}$$

β é o *vetor unitário binormal* da curva Ψ no ponto s . A seguir é mostrado o comportamento deste vetor em relação à variação do parâmetro s .

$$\beta' = (\tau' \times \nu) + (\tau \times \nu') = (\kappa \nu \times \nu) + (\tau \times \nu') = \tau \times \nu'\tag{3.10}$$

Observando (3.10) conclui-se que β' é normal a τ . Decorre então que β' é paralelo a ν , o que leva a:

$$\beta' = \varphi \nu \quad \therefore \quad \varphi = \|\beta'\|, \forall s\tag{3.11}$$

Onde o número φ é denominado de *torção da curva* Ψ no ponto s , e indica o quão rapidamente a curva Ψ se afasta de seu plano osculador (τ, ν) numa vizinhança do ponto s , (CARMO, 1971). Apesar de poder ser positiva ou negativa, a torção é uma invariante por mudança de orientação uma vez que, alterada a orientação de Ψ , o vetor unitário binormal também muda de sinal.

Concluindo, a cada valor do parâmetro s estão associados três vetores unitários ortogonais entre si τ , ν e β que, quando tomados como uma base ortonormal do espaço R^3 , formam o *Triedro de Frenet-Serret* no ponto s da curva espacial Ψ , conforme mostrado na Figura 3.3.

Figura 3.3 - Curva parametrizada pelo comprimento de arco s e o triedro de Frenet-Serret

Derivando-se respectivamente os vetores unitários τ e β , são obtidos $\tau' = \kappa\nu$ e $\beta' = \varphi\nu$ que fornecem as entidades geométricas curvatura, κ , raio de curvatura, ρ , e torção, φ , as quais informam sobre o comportamento da curva $\Psi = \mathbf{r}(s)$ em uma vizinhança do ponto s de seu domínio.

3.2 SUPERFÍCIES NO ESPAÇO

Denomina-se *superfície parametrizável* S no espaço aquela em que, dada uma base do espaço R^3 , o vetor posição $\mathbf{r}$ de qualquer ponto P pertencente ao seu domínio é dependente de dois únicos parâmetros, θ_1 e θ_2 , os quais são contínuos e monótonos, ou seja, $S = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$, conforme a Figura 3.4.

Definindo-se a espessura h como função dos parâmetros θ_1 e θ_2 , $h = \hat{h}(\theta_1, \theta_2)$, é possível descrever alguns sólidos, de modo que o vetor posição $\mathbf{r}_P$ de qualquer ponto P pertencente ao domínio deste sólido seja dado por (3.12). Nas membranas tem-se que $h \ll 1$.

$$\mathbf{r}_P = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) + z\mathbf{e}_3(\theta_1, \theta_2) \quad (3.12)$$

$z \in \left[-\frac{h}{2}, \frac{h}{2}\right]$, $h = \hat{h}(\theta_1, \theta_2)$ e $\mathbf{e}_3(\theta_1, \theta_2)$ é o vetor unitário ortogonal à superfície em P

Figura 3.4 - Superfície espacial parametrizada por θ_1 e θ_2 Figura 3.5 - Sólido parametrizado por θ_1 , θ_2 e z

Cada parâmetro descreve, de modo individual, uma curva sobre a superfície S . Ou seja, fixando um θ_2 constante define-se a curva espacial $\Psi_1 = \mathbf{r}(\theta_1)$, e fixando um θ_1 constante define-se a curva espacial $\Psi_2 = \mathbf{r}(\theta_2)$, como na Figura 3.4. Os vetores tangentes a estas curvas são dados por:

$$\mathbf{g}_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} \quad \mathbf{g}_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} \quad \text{ou} \quad \mathbf{g}_\alpha = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_\alpha} \quad \alpha = 1, 2 \quad (3.13)$$

Note-se que, em geral, $\|\mathbf{g}_\alpha\| \neq 1$. A partir dos dois vetores tangentes é possível definir um vetor unitário normal à superfície num dado ponto, P , de seu domínio.

$$\mathbf{g}_3 = \frac{\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2}{\|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\|} \quad \text{e} \quad \|\mathbf{g}_3\| = 1 \quad (3.14)$$

Um elemento diferencial de área está representado na Figura 3.6 e pode ser determinado conforme (3.15).

$$dA = \|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| d\theta_1 d\theta_2 = (\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2) \cdot \mathbf{g}_3 d\theta_1 d\theta_2 \quad (3.15)$$

Figura 3.6 - Elemento diferencial de área

O vetor $d\mathbf{r}$ entre dois pontos infinitamente próximos, pertencentes à superfície, é descrito por (3.16) e mostrado na Figura 3.7.

$$d\mathbf{r} = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} d\theta_1 + \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} d\theta_2 \quad \text{ou} \quad d\mathbf{r} = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{g}_\alpha d\theta_\alpha \quad (3.16)$$

Figura 3.7 - Vetor entre dois pontos infinitamente próximos

O comprimento, ds , do vetor infinitesimal, $d\mathbf{r}$, é determinado por:

$$\begin{aligned}
 (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta d\theta_\alpha d\theta_\beta \quad \text{ou} \\
 (ds)^2 &= \sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta \quad | \quad a_{\alpha\beta} = \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_\beta
 \end{aligned}
 \tag{3.17}$$

Segundo Møllmann (1981), a expressão quadrática do lado direito de (3.17) é denominada de *primeira forma fundamental da superfície* ou, simplesmente, 1ªFFS.

Uma situação importante da parametrização de superfícies é aquela em que se tomam os parâmetros θ_1 e θ_2 como sendo os comprimentos de arco, ou seja, $\theta_1 = s_1$ e $\theta_2 = s_2$. Levando em conta que s_1 e s_2 descrevem, individualmente, as curvas $\Psi_1 = \mathbf{r}(s_1)$ e $\Psi_2 = \mathbf{r}(s_2)$ no espaço e, conforme já demonstrado na Subseção 3.1, os vetores tangentes à Ψ_1 e Ψ_2 são unitários, é possível escrevê-los como:

$$\mathbf{e}_1 = \frac{d\mathbf{r}}{ds_1} \Rightarrow \|\mathbf{e}_1\| = 1 \quad \text{e} \quad \mathbf{e}_2 = \frac{d\mathbf{r}}{ds_2} \Rightarrow \|\mathbf{e}_2\| = 1
 \tag{3.18}$$

Suponha o ponto P de S cuja posição é $\mathbf{r}(s_1, s_2)$. O vetor unitário ortogonal à S no ponto P vale:

$$\mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_1 \times \mathbf{e}_2 \Rightarrow \|\mathbf{e}_3\| = 1
 \tag{3.19}$$

Vale lembrar que $\mathbf{g}_3 = \mathbf{e}_3$, no ponto P pertencente à S . De (3.18) e (3.19), sabe-se que $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$ e $\mathbf{e}_3$ são vetores unitários. De (3.19) sabe-se que $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_3$ e $\mathbf{e}_2 \perp \mathbf{e}_3$. Supondo agora que os vetores tangente $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$, que determinam as direções de Ψ_1 e Ψ_2 respectivamente, sejam ortogonais, então $\mathbf{e}_1 \perp \mathbf{e}_2$. Nestas condições, $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ também é uma base ortonormal do R^3 . Logo, ficam definidas as seguintes equações, que valem para todo ponto P pertencente à S :

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1 = 1 \quad (a) \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_2 = 1 \quad (b) \quad \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = 1 \quad (c)
 \tag{3.20}$$

$$\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (a) \quad \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad (b) \quad \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \quad (c)
 \tag{3.21}$$

Para o entendimento das propriedades geométricas da superfície parametrizada S é necessário conhecer o comportamento dos vetores da base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ em relação à variação dos parâmetros s_1 e s_2 . Estes resultados serão também de fundamental importância para a realização do equilíbrio diferencial das membranas. Será utilizada a seguinte notação para as derivações:

$$\frac{d\mathbf{e}_\alpha}{ds_\beta} = \mathbf{e}_{\alpha,\beta} \quad \forall \alpha = 1,2,3 \quad \text{e} \quad \forall \beta = 1,2 \quad (3.22)$$

Derivando (3.20)a em relação à s_1 :

$$\frac{d}{ds_1}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{1,1} = 0 \Rightarrow 2\mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (3.23)$$

Ou seja, a componente do vetor $\mathbf{e}_{1,1}$ na direção $\mathbf{e}_1$, da base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, é nula. O mesmo procedimento e a mesma conclusão são válidos para as derivações de (3.20)b e (3.20)c em relação à s_1 e de (3.20)a, (3.20)b e (3.20)c em relação à s_2 , o que leva, respectivamente à:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \mathbf{e}_{2,1} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \text{(b)} \quad & \mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \\ \text{(c)} \quad & \mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \\ \text{(d)} \quad & \mathbf{e}_{2,2} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \text{(e)} \quad & \mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_3 = 0 \end{aligned} \quad (3.24)$$

Pode-se dizer que $\mathbf{e}_{1,2} = \mathbf{e}_{2,1}$, pois:

$$\mathbf{e}_{1,2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds_1 ds_2} = \frac{d^2 \mathbf{r}}{ds_2 ds_1} = \mathbf{e}_{2,1} \quad (3.25)$$

Aplicando (3.25) em (3.24)a e (3.24)c chega-se, respectivamente, a:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad & \mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \\ \text{(b)} \quad & \mathbf{e}_{2,1} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \end{aligned} \quad (3.26)$$

Derivando (3.21)a em relação à s_1 :

$$\frac{d}{ds_1}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{2,1} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_{2,1} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (3.27)$$

Aplicando (3.26)b em (3.27) segue que:

$$\mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_2 = 0 \quad (3.28)$$

Similarmente, derivando (3.21)a em relação à s_2 e aplicando (3.26)a no resultado da derivação:

$$\mathbf{e}_{2,2} \cdot \mathbf{e}_1 = 0 \quad (3.29)$$

Derivando (3.21)b em relação à s_1 :

$$\frac{d}{ds_1}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{3,1} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{1,1} \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (3.30)$$

Derivando (3.21)b em relação à s_2 :

$$\frac{d}{ds_2}(\mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_1 \cdot \mathbf{e}_{3,2} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (3.31)$$

Derivando (3.21)c em relação à s_1 :

$$\frac{d}{ds_1}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{2,1} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{3,1} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{2,1} \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_2 \quad (3.32)$$

Derivando (3.21)c em relação à s_2 :

$$\frac{d}{ds_2}(\mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_3) = \mathbf{e}_{2,2} \cdot \mathbf{e}_3 + \mathbf{e}_2 \cdot \mathbf{e}_{3,2} = 0 \Rightarrow \mathbf{e}_{2,2} \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_2 \quad (3.33)$$

Aplicando (3.25) em (3.31) e (3.32):

$$\mathbf{e}_{1,2} \cdot \mathbf{e}_3 = \mathbf{e}_{2,1} \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (3.34)$$

Sabe-se que nem sempre $\|\mathbf{e}_{1,1}\| = 1$ e que as parcelas do vetor $\mathbf{e}_{1,1}$ nas direções $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são nulas, conforme em (3.23) e (3.28) respectivamente. Portanto, este vetor pode ser escrito, na base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, como:

$$\mathbf{e}_{1,1} = \|\mathbf{e}_{1,1}\| \mathbf{e}_3 \quad (3.35)$$

Da mesma forma que na Subseção 3.1, define-se aqui $\kappa_1 = \|\mathbf{e}_{1,1}\|$ onde κ_1 é a *curvatura da curva* Ψ_1 , que mede o quão rapidamente esta curva se afasta de sua tangente $\mathbf{e}_1$ numa vizinhança de P . Logo:

$$\mathbf{e}_{1,1} = \kappa_1 \mathbf{e}_3 \quad (3.36)$$

Define-se o *raio de curvatura* ρ_1 da curva Ψ_1 no ponto P como sendo o inverso da curvatura κ_1 , ou seja:

$$\rho_1 = \frac{1}{\kappa_1} \quad (3.37)$$

Substituindo (3.37) em (3.36):

$$\mathbf{e}_{1,1} = \frac{1}{\rho_1} \mathbf{e}_3 \quad (3.38)$$

O mesmo raciocínio vale para o vetor $\mathbf{e}_{2,2}$. Recordando de (3.24)d e (3.29), fazendo $\kappa_2 = \|\mathbf{e}_{2,2}\|$ e definido $\rho_2 = 1/\kappa_2$ para a curva Ψ_2 chega-se a:

$$\mathbf{e}_{2,2} = \frac{1}{\rho_2} \mathbf{e}_3 \quad (3.39)$$

onde ρ_2 é o *raio de curvatura da curva* Ψ_2 no ponto P .

Apesar de $\mathbf{e}_{1,2} = \mathbf{e}_{2,1}$ e, portanto, $\|\mathbf{e}_{1,2}\| = \|\mathbf{e}_{2,1}\|$, sabe-se que nem sempre $\|\mathbf{e}_{1,2}\| = 1$. As parcelas do vetor $\mathbf{e}_{1,2}$ nas direções $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são nulas, conforme em (3.24)c e (3.26)a respectivamente. Portanto, este vetor pode ser escrito, na base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, como:

$$\mathbf{e}_{1,2} = \|\mathbf{e}_{1,2}\| \mathbf{e}_3 \quad (3.40)$$

Conforme a Subseção 3.1, tomando como referência a curva Ψ_1 , sabe-se seu plano osculador é aquele que contém os vetores $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_3$. Deste modo, define-se $\varphi = \|\mathbf{e}_{1,2}\|$ onde φ é a *torção da curva* Ψ_1 , que mede o quão rapidamente ela se afasta do seu plano osculador $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_3)$, em uma vizinhança de P . Logo:

$$\mathbf{e}_{1,2} = \varphi \mathbf{e}_3 \quad (3.41)$$

Em decorrência de (3.25):

$$\mathbf{e}_{2,1} = \varphi \mathbf{e}_3 \quad (3.42)$$

De (3.41) e (3.42) chega-se à conclusão que a torção φ também mede o quão rapidamente a curva Ψ_2 se afasta do seu plano osculador $(\mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, em uma vizinhança de P .

Aplicando (3.38) em (3.30):

$$\frac{1}{\rho_1} \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_1 \Rightarrow \frac{1}{\rho_1} = -\mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_1 \quad (3.43)$$

O raio de curvatura ρ_1 pode ser positivo ou negativo, e uma interpretação geométrica para seu sinal é mostrada na Figura 3.9. Lembrando que $\mathbf{e}_{3,1} = d\mathbf{e}_3 / ds_1$ e que estas dimensões são infinitesimais, a porção da curva Ψ_1 é aproximadamente

um arco circunferência de centro C_1 , o qual é denominado de *centro de curvatura* da curva Ψ_1 no ponto P .

Por simples inspeção percebe-se que o raio de curvatura será positivo caso o produto escalar do lado direito de (3.43) resulte negativo, o que equivale à Figura 3.9a. O sinal será negativo na situação inversa, como na Figura 3.9b.

Figura 3.8 - Relação entre raio de curvatura e a diferencial do vetor unitário normal à superfície

Também se conclui que o raio de curvatura será positivo quando o vetor normal $\mathbf{e}_3$ apontar para o centro de curvatura C_1 . Caso contrário, ele será negativo.

Este mesmo raciocínio vale para a curva Ψ_2 , donde vem que:

$$\frac{1}{\rho_2} = -\mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_2 \quad (3.44)$$

Aplicando agora (3.41) e (3.42) em (3.34):

$$\varphi \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = \varphi \mathbf{e}_3 \cdot \mathbf{e}_3 = -\mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_2 = -\mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_1 \quad \Rightarrow \quad \mathbf{e}_{3,1} \cdot \mathbf{e}_2 = \mathbf{e}_{3,2} \cdot \mathbf{e}_1 = -\varphi \quad (3.45)$$

A parcela do vetor $\mathbf{e}_{3,1}$ na direção $\mathbf{e}_3$ é nula, conforme em (3.24)b. As componentes deste vetor nas direções $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são dadas por (3.43) e (3.45), respectivamente. Portanto, o referido vetor pode ser escrito, na base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, como:

$$\mathbf{e}_{3,1} = -\frac{1}{\rho_1}\mathbf{e}_1 - \varphi\mathbf{e}_2 \quad (3.46)$$

O mesmo raciocínio vale para o vetor $\mathbf{e}_{3,2}$, recordando as equações (3.24)e, (3.44) e (3.45):

$$\mathbf{e}_{3,2} = -\varphi\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\rho_2}\mathbf{e}_2 \quad (3.47)$$

Coletando as equações (3.38), (3.39), (3.41), (3.42), (3.46) e (3.47), segue:

$$\begin{array}{llll} \mathbf{e}_{1,1} = \frac{1}{\rho_1}\mathbf{e}_3 & \text{(a)} & \mathbf{e}_{2,1} = \varphi\mathbf{e}_3 & \text{(b)} & \mathbf{e}_{3,1} = -\frac{1}{\rho_1}\mathbf{e}_1 - \varphi\mathbf{e}_2 & \text{(c)} \\ \mathbf{e}_{1,2} = \varphi\mathbf{e}_3 & \text{(d)} & \mathbf{e}_{2,2} = \frac{1}{\rho_2}\mathbf{e}_3 & \text{(e)} & \mathbf{e}_{3,2} = -\varphi\mathbf{e}_1 - \frac{1}{\rho_2}\mathbf{e}_2 & \text{(f)} \end{array} \quad (3.48)$$

Supõe-se agora um ponto P_0 de uma curva Ψ qualquer cujo parâmetro é $\theta = s$ e que está contida na superfície S . O ponto P_0 está a uma distância ds do ponto P , que também pertence à Ψ , conforme mostra a Figura 3.9.

É possível definir, no ponto P_0 , um vetor $\boldsymbol{\tau}$ unitário e tangente à curva Ψ e um vetor $\mathbf{g}_3$, também unitário, ortogonal à superfície S . Desta forma, existem uma curvatura normal κ e um raio de curvatura ρ associados ao vetor $\boldsymbol{\tau}$, conforme a Figura 3.9.

Analogamente à (3.43) é possível escrever:

$$\frac{1}{\rho} = -\frac{d\mathbf{g}_3}{ds} \cdot \boldsymbol{\tau} \quad (3.49)$$

Figura 3.9 - Parâmetros de uma curva qualquer Ψ sobre uma superfície espacial Figura 3.10 - O raio de curvatura ρ de uma curva Ψ qualquer sobre S

Por outro lado tem-se:

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{g}_3}{ds} &= \sum_{\beta=1}^2 \frac{\partial \mathbf{g}_3}{\partial \theta_\beta} \frac{d\theta_\beta}{ds} = \sum_{\beta=1}^2 \mathbf{g}_{3,\beta} \frac{d\theta_\beta}{ds} \\ \boldsymbol{\tau} &= \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \sum_{\alpha=1}^2 \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_\alpha} \frac{d\theta_\alpha}{ds} = \sum_{\alpha=1}^2 \mathbf{g}_\alpha \frac{d\theta_\alpha}{ds} \end{aligned} \quad (3.50)$$

Substituindo (3.50) em (3.49):

$$\frac{1}{\rho} = - \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} \frac{d\theta_\alpha}{ds} \frac{d\theta_\beta}{ds} = - \frac{1}{(ds)^2} \sum_{\alpha, \beta=1}^2 \mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta \quad (3.51)$$

Lembrando que $(ds)^2$ corresponde à 1ªFFS, conforme (3.17), e definindo o escalar

$b_{\alpha\beta} = -\mathbf{g}_\alpha \cdot \mathbf{g}_{3,\beta} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_{\alpha,\beta} = \mathbf{g}_3 \cdot \mathbf{g}_{\beta,\alpha} = b_{\alpha\beta}$, então:

$$\frac{1}{\rho} = \frac{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 b_{\alpha\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta}{\sum_{\alpha, \beta=1}^2 a_{\alpha,\beta} d\theta_\alpha d\theta_\beta} \quad (3.52)$$

O numerador do lado direito de (3.52) é chamado de *segunda forma fundamental da superfície* ou, simplesmente, 2ªFFS (MØLLMANN, 1981). Note que (3.52) vale para θ_1 e θ_2 quaisquer.

É possível demonstrar que existem duas curvas Ψ_1 e Ψ_2 , pertencentes à S e que se interceptam em P , descritas respectivamente pelos parâmetros θ_1 e θ_2 cujas direções são mutuamente ortogonais ($\tau_1 \perp \tau_2$), para as quais os raios de curvatura normais à superfície S são extremos, ou seja, $\rho_1 = \rho_{\max}$ e $\rho_2 = \rho_{\min}$. As direções estabelecidas pelos vetores τ_1 e τ_2 são denominadas de *direções principais*.

Neste caso, as curvas Ψ_1 e Ψ_2 são chamadas de *linhas de curvatura*, e estão denotadas por Ψ_1^P e Ψ_2^P na Figura 3.11. Em geral, a determinação dessas direções é complicada.

Figura 3.11 - Direções principais de uma superfície espacial

Admitindo, porém, que essas direções sejam conhecidas, as linhas de curvatura podem ser tomadas como eixos coordenados, resultando em expressões relativamente simples para representar o equilíbrio das membranas, como será visto na Subseção 3.3.

Outro resultado relevante da geometria diferencial das superfícies parametrizáveis é que as linhas de curvatura não sofrem torção, ou seja, $\varphi = 0$ para Ψ_1^P e Ψ_2^P . A Figura 3.12a retrata duas curvas ortogonais entre si, pertencentes à superfície S do parabolóide hiperbólico, e que sofrem torção, enquanto que a Figura 3.12b mostra as linhas de curvatura da referida superfície, as quais não sofrem torção.

Figura 3.12 - Curvas que sofrem torção (a) e que não sofrem torção (b)

3.3 O EQUILÍBRIO DIFERENCIAL DAS MEMBRANAS

Considere-se o sistema apresentado na Figura 3.13, onde uma membrana estrutural é representada por sua *superfície média* S , na configuração deformada. O carregamento p é uniformemente distribuído por toda a área de membrana, e também é perpendicular à S . As tensões σ na borda são necessárias para garantir o retesamento da membrana e são tangenciais à S . A área em laranja representa um elemento infinitesimal de membrana, que aparece também na Figura 3.14 e na Figura 3.16 mais adiante.

Figura 3.13 - Membrana estrutural, seus carregamentos e direções principais

Os parâmetros θ_1 e θ_2 descrevem *duas curvas quaisquer*, $\Psi_1 = \mathbf{r}(\theta_1)$ e $\Psi_2 = \mathbf{r}(\theta_2)$, sobre a superfície $S = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2)$ de modo que suas direções sejam mutuamente ortogonais. Consideram-se os parâmetros como sendo os respectivos comprimentos de arco, ou seja, $\theta_1 = s_1$ e $\theta_2 = s_2$, de modo que $\Psi_1 = \mathbf{r}(s_1)$, $\Psi_2 = \mathbf{r}(s_2)$ e $S = \mathbf{r}(s_1, s_2)$. Nestas condições, é possível considerar (3.48) para o elemento de membrana.

A Figura 3.14 mostra as tensões atuantes no elemento infinitesimal. Uma das hipóteses da *teoria de membranas* é que as tensões sejam constantes ao longo da espessura.

Figura 3.14 - Tensões atuantes nas seções transversais do elemento membrana

Logo, é possível definir *tensões superficiais generalizadas* da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} N_{\alpha\alpha} &= \sigma_{\alpha\alpha} h & [N/m] \\ N_{\alpha\beta} &= \tau_{\alpha\beta} h = N_{\beta\alpha} & [N/m] \end{aligned} \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.53)$$

Através do equilíbrio de momentos em torno de um dos vértices do elemento, por exemplo, chega-se a $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$ presente em (3.53). O *vetor tensão superficial* $\mathbf{N}_\alpha$ pode ser escrito, em cada direção, como:

$$\mathbf{N}_\alpha = N_{\alpha\alpha} \mathbf{e}_\alpha + N_{\alpha\beta} \mathbf{e}_\beta \quad \forall \alpha, \beta = 1, 2 \quad (3.54)$$

Outra hipótese da *teoria de membranas* é que as tensões na direção da espessura são desprezíveis.

Figura 3.15 - Tensões atuantes ao longo da espessura do elemento membrana

Figura 3.16 - Vetores tensão superficial na superfície média do elemento de membrana

Do equilíbrio de forças:

$$d\mathbf{N}_1 ds_2 + d\mathbf{N}_2 ds_1 + \mathbf{b} ds_1 ds_2 = \mathbf{0} \quad | \quad \mathbf{b} = b_1 \mathbf{e}_1 + b_2 \mathbf{e}_2 + p \mathbf{e}_3 \quad (3.55)$$

Dividindo (3.55) por $ds_1 ds_2$:

$$\frac{d\mathbf{N}_1}{ds_1} + \frac{d\mathbf{N}_2}{ds_2} + \mathbf{b} = \mathbf{0} \quad (3.56)$$

Derivando o vetor de tensão $\mathbf{N}_1$ em relação à ds_1 :

$$\frac{d\mathbf{N}_1}{ds_1} = \frac{d}{ds_1}(N_{11}\mathbf{e}_1 + N_{12}\mathbf{e}_2) = \frac{dN_{11}}{ds_1}\mathbf{e}_1 + N_{11}\mathbf{e}_{1,1} + \frac{dN_{12}}{ds_1}\mathbf{e}_2 + N_{12}\mathbf{e}_{2,1} \quad (3.57)$$

Aplicando (3.48)a e (3.48)b em (3.57):

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{N}_1}{ds_1} &= \frac{dN_{11}}{ds_1}\mathbf{e}_1 + N_{11}\left(\frac{1}{\rho_1}\mathbf{e}_3\right) + \frac{dN_{12}}{ds_1}\mathbf{e}_2 + N_{12}(\varphi\mathbf{e}_3) \\ \frac{d\mathbf{N}_1}{ds_1} &= \frac{dN_{11}}{ds_1}\mathbf{e}_1 + \frac{dN_{12}}{ds_1}\mathbf{e}_2 + \left(\frac{N_{11}}{\rho_1} + \varphi N_{12}\right)\mathbf{e}_3 \end{aligned} \quad (3.58)$$

Analogamente para $\mathbf{N}_2$ e recordando (3.48)d e (3.48)e:

$$\frac{d\mathbf{N}_2}{ds_2} = \frac{dN_{21}}{ds_2}\mathbf{e}_1 + \frac{dN_{22}}{ds_2}\mathbf{e}_2 + \left(\frac{N_{22}}{\rho_2} + \varphi N_{21}\right)\mathbf{e}_3 \quad (3.59)$$

Observando superfície média S da membrana mostrada na Figura 3.13 e observando a Figura 3.8b, conclui-se que os raios de curvatura ρ_1 e ρ_2 , desta membrana, são negativos, uma vez que o vetor $\mathbf{e}_3$, normal à S , aponta para o lado contrário aos dos centros de curvatura C_1 e C_2 das suas respectivas curvas Ψ_1 e Ψ_2 , no ponto P que representa a posição do elemento de membrana. Tendo em vista este fato, (3.58) e (3.59) ficam:

$$\frac{d\mathbf{N}_1}{ds_1} = \frac{dN_{11}}{ds_1}\mathbf{e}_1 + \frac{dN_{12}}{ds_1}\mathbf{e}_2 + \left(-\frac{N_{11}}{\rho_1} + \varphi N_{12}\right)\mathbf{e}_3 \quad (3.60)$$

$$\frac{d\mathbf{N}_2}{ds_2} = \frac{dN_{21}}{ds_2}\mathbf{e}_1 + \frac{dN_{22}}{ds_2}\mathbf{e}_2 + \left(-\frac{N_{22}}{\rho_2} + \varphi N_{21}\right)\mathbf{e}_3 \quad (3.61)$$

Substituindo (3.60) e (3.61) em (3.56), recordando que $N_{\alpha\beta} = N_{\beta\alpha}$, como em (3.53), e sabendo que $\mathbf{b} = b_1\mathbf{e}_1 + b_2\mathbf{e}_2 + p\mathbf{e}_3$, então, o equilíbrio em cada uma das três direções da base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$, de cada P ponto da superfície média S da membrana, pode ser escrito como:

<p>Equações de Equilíbrio de Membranas Estruturais</p> <p>→ considerando duas direções quaisquer e ortogonais entre si</p> $\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Estado Plano de Tensão} \quad \forall P \in S$ <p>$\frac{N_{11}}{\rho_1} + \frac{N_{22}}{\rho_2} - 2\varphi N_{12} = p \rightarrow \text{Equação Geral das Membranas}$</p>		(3.62)
---	--	--------

Um caso particular importante é aquele em que as curvas Ψ_1 e Ψ_2 são as *linhas de curvatura da superfície S* , ou seja, seus raios de curvatura são máximo e mínimo, respectivamente. Outra propriedade geométrica relevante é que as linhas de curvatura não sofrem torção, ou seja, $\varphi = 0$ para qualquer ponto P de seu domínio. Estas curvas fornecem as *direções principais da superfície*.

<p>Equações de Equilíbrio de Membranas Estruturais</p> <p>→ considerando as direções principais da superfície</p> $\left. \begin{aligned} \frac{\partial N_{11}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{12}}{\partial s_2} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial N_{12}}{\partial s_1} + \frac{\partial N_{22}}{\partial s_2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ Estado Plano de Tensão} \quad \forall P \in S$ <p>$\frac{N_{11}}{\rho_1} + \frac{N_{22}}{\rho_2} = p \rightarrow \text{Equação Particular das Membranas}$</p>		(3.63)
---	--	--------

Um caso mais particular que o anterior é quando se constata um estado de tensões homogêneo e isótropo na membrana. Isso equivale a dizer que $N_{11} = N_{22} = N$. Com base no Círculo de Mohr é possível dizer que as tensões de cisalhamento são nulas neste caso o que significa que $N_{12} = N_{21} = 0$. Esta situação faz (3.63) se reduzir à:

Equações de Equilíbrio de Membranas Estruturais → considerando as direções principais da superfície → considerando um estado homogêneo e isótropo de tensões	
$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s_1} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial s_2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$	Estado Plano de Tensão
$\forall P \in S$	
$N \left(\frac{1}{\rho_{m\acute{a}x}} + \frac{1}{\rho_{m\acute{i}n}} \right) = p \rightarrow \text{Equação de Laplace-Young}$	

(3.64)

Outro caso, ainda mais particular, mas não menos importante, é quando o estado de tensões é homogêneo e isótropo e não existe uma componente do carregamento externo $\mathbf{b}$ que seja ortogonal à superfície, isto é, $p = 0$. Nestas condições a superfície é denominada de *superfície minimal* e sua área tem um valor mínimo possível para uma determinada situação de contorno. Logo:

Equações de Equilíbrio de Membranas Estruturais → considerando as direções principais da superfície → considerando um estado homogêneo e isótropo de tensões → considerando o carregamento transversal à superfície nulo	
$\left. \begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial s_1} + b_1 &= 0 \\ \frac{\partial N}{\partial s_2} + b_2 &= 0 \end{aligned} \right\}$	Estado Plano de Tensão
$\forall P \in S$	
$\frac{1}{\rho_{m\acute{a}x}} + \frac{1}{\rho_{m\acute{i}n}} = 0 \rightarrow \text{Equação das Superfícies Minimais}$	

(3.65)

Existem basicamente, quanto à geometria espacial, três grandes grupos de superfícies: as *planas*, as *desenvolvíveis* e as *não-desenvolvíveis*. As superfícies *planas* são aquelas em que ambos os raios de curvatura principais são nulos, em todos os pontos do seu domínio.

As *desenvolvíveis* são aquelas cujos pontos de seu domínio possuem um dos raios de curvatura principais nulo e o outro não. Exemplos deste tipo são os cilindros e os cones.

Já as superfícies *não-desenvolvíveis* apresentam ambos os raios de curvatura principais não-nulos. Como os raios de curvatura podem ser positivos ou

negativos, este grupo é subdividido em dois outros: o das superfícies *anticlásticas* e o das superfícies *sinclásticas*.

Uma superfície é dita *anticlástica* se, em qualquer ponto de seu domínio, os raios de curvatura máximo e mínimo possuírem sinais contrários, como o parabolóide hiperbólico, por exemplo. Já as superfícies esféricas e elipsoidais, por exemplo, apresentam o mesmo sinal para os raios de curvatura máximo e mínimo, em qualquer ponto de seu domínio, e, portanto, são ditas *sinclásticas*.

Por outro lado, algumas superfícies também podem não se enquadrar em nenhuma das classificações definidas anteriormente. O toróide, por exemplo, apresenta regiões anticlásticas, sinclásticas e desenvolvíveis em seu domínio. A Figura 3.17 mostra um ponto anticlástico (P_a), um ponto sinclástico (P_s) e um ponto desenvolvível (P_d) de um toróide circular.

Figura 3.17 - Superfície toroidal circular

A entidade geométrica denominada *curvatura Gaussiana* K , num ponto de uma superfície, é definida por:

$$K = \kappa_{\max} \kappa_{\min} = \frac{1}{\rho_{\max} \rho_{\min}} \quad (3.66)$$

De onde se conclui que em superfícies:

- ✓ desenvolvíveis e planas $K = 0 \quad \forall P \in S$;
- ✓ não-desenvolvíveis $K \neq 0 \quad \forall P \in S$;
 - anticlásticas $K < 0 \quad \forall P \in S$;
 - sinclásticas $K > 0 \quad \forall P \in S$.

Observa-se que a última das equações de (3.65) só pode ser satisfeita caso a superfície da membrana seja anticlástica ou plana, de onde se conclui que toda superfície minimal é anticlástica ou plana.

Vale lembrar que, na teoria de membranas, $N_{11} \geq 0$ e $N_{22} \geq 0$ obrigatoriamente. Deste modo, se uma superfície é sinclástica, a única maneira da equação particular das membranas, em (3.63), ser verificada é quando $p \neq 0$. Portanto, toda membrana sinclástica é inflada. Um destes exemplos é aquele mostrado na Figura 3.13, considerando $p \neq 0$.

Todavia, nem toda membrana inflada é sinclástica. Prova disso é o toróide inflado, que possui regiões anticlásticas, sinclásticas e desenvolvíveis e apresenta $p \neq 0$. Uma superfície toroidal circular é apresentada na Figura 3.17 para exemplificar esta situação. Note-se a posição dos centros de curvatura de cada um dos pontos considerados em relação à superfície S .

3.4 ANALOGIA DOS FILMES DE SABÃO

No final da Subseção 2.1 foram apresentadas de modo bastante sucinto as estratégias de Gründig (1988) e de Bletzinger et al. (2005) para a determinação de superfícies minimais respectivamente baseadas em seu conceito geométrico e mecânico. Agora será mostrada a equivalência entre estes conceitos.

3.4.1 MINIMIZAÇÃO DA ÁREA DE UMA SUPERFÍCIE ESPACIAL

Considere-se a superfície média S de uma membrana descrita por uma equação paramétrica do tipo $\mathbf{r}^r = \hat{\mathbf{r}}^r(\theta_1, \theta_2)$ numa configuração de referência, onde θ_1 e θ_2 são parâmetros reais. Considere-se também a hipótese da teoria de membranas de que a espessura permaneça constante após as deformações. A área da superfície vale:

$$S = \int_S dS \quad (3.67)$$

A geometria descrita pelo campo vetorial $\mathbf{r}^* = \hat{\mathbf{r}}^*(\theta_1, \theta_2)$ que minimiza o funcional S , para um dado contorno fixo, deve ser tal que, para qualquer perturbação $\delta\mathbf{u}$ em torno de $\mathbf{r}^*$, compatível com o contorno C dado, a variação δS seja nula, isto é:

$$\delta S = \int_S (\delta J) dS = 0 \quad \forall \delta\mathbf{u} \quad (3.68)$$

onde δJ é a variação do Jacobiano correspondente ao gradiente da transformação, $\delta\mathbf{F}$, de $\mathbf{r}^*$ até $\mathbf{r}^* + \delta\mathbf{u}$. A Figura 3.18 mostra as transformações da membrana.

Lembrando que o Jacobiano J é o determinante do tensor $\mathbf{F}$, então δJ pode ser considerado uma linearização deste determinante. Segundo demonstrado em Bonet e Wood (1997), a linearização do Jacobiano em relação ao incremento $\delta\mathbf{F}$ do tensor $\mathbf{F}$, considerando a transformação de $\mathbf{r}^r$ até $\mathbf{r}^* + \delta\mathbf{u}$, pode ser escrita como:

$$\delta J = J\mathbf{F}^{-T} : \delta\mathbf{F} \quad (3.69)$$

onde $\mathbf{F}$ é o gradiente da transformação de $\mathbf{r}^r$ até $\mathbf{r}^*$, como na Figura 3.18. Em particular, tomando-se $\mathbf{r}^r = \mathbf{r}^*$, tem-se que $J = 1$ e $\mathbf{F} = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é o tensor identidade. Logo, (3.69) se resume a:

$$\delta J = \mathbf{I} : \delta\mathbf{F} = \text{tr}(\delta\mathbf{F}) \quad (3.70)$$

Figura 3.18 - Transformações da membrana

Substituindo (3.70) em (3.68):

$$\delta S = \int_S \text{tr}(\delta \mathbf{F}) dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.71)$$

A configuração $\mathbf{r}^*$ que minimiza o funcional S atende (3.71), $\forall \delta \mathbf{u}$ compatível com o contorno C dado.

Uma vez que o $\text{tr}(\delta \mathbf{F})$ é um invariante escalar, ele pode ser estimado em cada ponto P da superfície média S da membrana na base mais conveniente. Para isto toma-se a base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ de modo que $\mathbf{e}_3$ é o vetor unitário normal à S em P , e que $\mathbf{e}_1$ e $\mathbf{e}_2$ são vetores unitários, ortogonais entre si, e pertencentes ao plano tangente à superfície no mesmo ponto P considerado, conforme apresentado na Subseção 3.2.

Uma vez que se supõe não existirem deformações transversais à superfície e expressando-se $\delta \mathbf{F}$ na base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ ajustada a cada ponto P , tem-se que $\delta F_{33} = 0$. Logo, $\text{tr}(\delta \mathbf{F}) = \delta F_{11} + \delta F_{22}$ em cada ponto P , e pode-se escrever:

$$\delta S = \int_S (\delta F_{11} + \delta F_{22}) dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.72)$$

onde se subentende que o traço é sempre avaliado na base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$.

3.4.2 *TRABALHO VIRTUAL DE UM CAMPO DE TENSÕES SUPERFICIAIS HOMOGÊNEAS E ISÓTROPAS*

Considere-se agora o problema de encontrar a geometria descrita pelo campo vetorial $\mathbf{r}^*$ compatível com um campo auto-equilibrado de tensões superficiais, ou seja, correspondentes, em cada ponto, a um estado plano de tensões, uniforme ao longo da espessura da membrana, e esforços externos apenas ao longo do contorno fixo. Note-se a diferença de notação entre $\mathbf{r}^*$, aqui apresentado, e $\mathbf{r}^*$, apresentado na Subseção 3.4.1.

Independentemente de como este campo de tensões seja gerado, o equilíbrio requer o atendimento do teorema dos trabalhos virtuais:

$$\delta W_{\text{int}} = \delta W_{\text{ext}} \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.73)$$

onde $\delta \mathbf{u}$ é o campo de deslocamentos virtuais. Uma vez que se supõe que os únicos esforços externos não-nulos atuem sobre o contorno fixo da superfície, o trabalho virtual dos esforços externos é nulo, e logo se pode escrever, para o trabalho virtual dos esforços internos:

$$\delta W_{\text{int}} = h \int_S \mathbf{S}^* : \delta \mathbf{E}^* dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.74)$$

onde h é a espessura da membrana, suposta constante em todos os pontos, $\mathbf{S}^*$ é o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff compatível com a configuração geométrica $\mathbf{r}^*$ e $\delta \mathbf{E}^*$ é a variação do tensor das deformações de Green associadas ao campo de deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$.

Um resultado conhecido, e também demonstrado em Bonet e Wood (1997), estabelece que a variação do tensor das deformações de Green $\delta \mathbf{E}^*$ de uma transformação pode ser tomado como a linearização do tensor $\mathbf{E}^*$, considerando a transformação de $\mathbf{r}^r$ até $\mathbf{r}^* + \delta \mathbf{u}$, donde vem que:

$$\delta \mathbf{E}^* = \text{Sym}(\mathbf{F}^{*T} \delta \mathbf{F}) \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.75)$$

Em particular, tomando-se $\mathbf{r}^r = \mathbf{r}^*$, tem-se que $\mathbf{F}^* = \mathbf{I}$, $\mathbf{S}^* = \mathbf{T}^*$ e, logo, neste caso $\delta \mathbf{E}^* = \text{Sym}(\delta \mathbf{F})$, e a equação (3.74) pode ser reescrita como:

$$\delta W_{\text{int}} = h \int_S \mathbf{T}^* : \text{Sym}(\delta \mathbf{F}) dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.76)$$

Finalmente, considerando que $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \text{Sym}(\mathbf{A}) : \text{Sym}(\mathbf{B}) + \text{Skew}(\mathbf{A}) : \text{Skew}(\mathbf{B})$ e tomando partido da simetria de $\mathbf{T}^*$, pode-se escrever:

$$\delta W_{\text{int}} = h \int_S \mathbf{T}^* : \delta \mathbf{F} dS = 0 \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.77)$$

A configuração $\mathbf{r}^*$ que minimiza o trabalho virtual dos esforços internos atende a equação (3.77), $\forall \delta \mathbf{u}$ compatível com o contorno fixo.

3.4.3 EQUIVALÊNCIA ENTRE OS PROCEDIMENTOS GEOMÉTRICO E MECÂNICO PARA A DETERMINAÇÃO DA FORMA DA SUPERFÍCIE MINIMAL

Considere-se agora uma membrana sujeita a um campo de tensões superficiais homogêneas e isotrópicas, de modo que o tensor das tensões de Cauchy, na base ortonormal $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ associada a cada ponto da membrana, seja dado por:

$$\mathbf{T}^* = \sigma \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \sigma \tilde{\mathbf{I}} \quad | \quad \tilde{\mathbf{I}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.78)$$

O tensor $\mathbf{T}^*$ representa um estado semi-hidrostático e o trabalho virtual realizado por ele assim definido é dado por:

$$\delta W_{\text{int}} = \sigma h \int_S \tilde{\mathbf{I}} : \delta \mathbf{F} dS = \sigma h \int_S (\delta F_{11} + \delta F_{22}) dS \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.79)$$

Comparando (3.79) com (3.72) tem-se que:

$$\delta W_{\text{int}} = \sigma h (\delta S) \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad (3.80)$$

Donde se conclui que a geometria $\mathbf{r}^*$ que equilibra o campo de tensões homogêneas e isotrópicas, definido por (3.78), também atende à condição de área minimal, ou seja, $\mathbf{r}^* = \mathbf{r}^*$.

A equivalência aqui demonstrada, que resulta (3.80), é aquela denominada de *analogia dos filmes de sabão*.

4 FORMULAÇÃO, EQUACIONAMENTO E IMPLEMENTAÇÃO DO PROBLEMA DE MINIMIZAÇÃO DA ÁREA

Seja uma curva fechada pertencente ao espaço Euclidiano tridimensional R^3 , denotada por C . O problema consiste em determinar a superfície S delimitada pela curva C , tal que sua área seja a mínima possível.

Admite-se que o campo vetorial $\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\theta_1, \theta_2)$ descreva os pontos P pertencentes à S , onde θ_1 e θ_2 são parâmetros contínuos e monótonos, conforme a Figura 4.1.

Figura 4.1 - Superfície suave parametrizada por θ_1 e θ_2 inscrita num contorno C

Portanto são válidas as equações (3.13), (3.14) e (3.15) da Subseção 3.2, de modo que a área A da superfície S pode ser escrita como:

$$A = \int_S dA = \int_S \|\mathbf{g}_1 \times \mathbf{g}_2\| d\theta_1 d\theta_2 = \int_S \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_1} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta_2} \right\| d\theta_1 d\theta_2 \quad (4.1)$$

Para que a área $A(\mathbf{r})$ seja mínima, então:

$$\delta A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} \delta \mathbf{r} = 0 \quad \forall \delta \mathbf{r} \text{ compatível com } C \quad (4.2)$$

Portanto, fica definida a condição necessária de primeira ordem para a *área minimal*:

$$\left. \frac{\partial A}{\partial \mathbf{r}} \right|_{\mathbf{r}^*} = 0 \quad (4.3)$$

Contudo, determinar a configuração $\mathbf{r}^*$ de forma analítica pode ser impraticável em algumas situações de contorno. Por tal motivo neste trabalho será adotado um procedimento numérico baseado na discretização da superfície em facetas triangulares.

Embora superfícies facetadas não sejam globalmente diferenciáveis, as estimativas de suas áreas podem ser obtidas de forma algébrica, oferecendo uma alternativa conveniente para o tratamento numérico aproximado de superfícies suaves, uma vez que a área de uma aproximação facetada converge para o valor exato da área da superfície suave, à medida que se refina o grau de discretização.

Ao introduzir certa discretização, o campo vetorial $\mathbf{r}$ pode ser aproximadamente definido a partir de um vetor $\mathbf{x}$ que coleciona a posição de cada um dos nós das facetas triangulares, ou seja:

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_n^T]^T = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad \dots \quad x_i \quad y_i \quad z_i \quad \dots \quad x_n \quad y_n \quad z_n]^T \quad (4.4)$$

onde i é o i -ésimo nó da malha de facetas e n é o número de nós da malha. Note-se que $\mathbf{x}_i$ é o vetor posição do i -ésimo nó, e corresponde a um ponto P_i da superfície suave, cuja posição é dada pelo vetor $\mathbf{r}_i = \hat{\mathbf{r}}_i(\theta_1^i, \theta_2^i)$.

A Figura 4.2 mostra as grandezas geométricas básicas para a definição de uma faceta genérica de índice f . Os nós 1, 2 e 3 são posicionados localmente no sentido anti-horário de modo que todas as facetas da malha apresentem a mesma orientação do vetor área.

Figura 4.2 - Faceta triangular utilizada no problema discreto

O vetor área desta faceta é definido como:

$$\mathbf{a}^f = \frac{1}{2}(\ell_1 \times \ell_2) \quad (4.5)$$

Logo, a área da faceta é dada por:

$$A^f = \|\mathbf{a}^f\| = \sqrt{\mathbf{a}^f \cdot \mathbf{a}^f} \quad (4.6)$$

Finalmente, a área total da superfície descrita por uma malha de nf facetas triangulares é:

$$A = \sum_{f=1}^{nf} A^f \quad (4.7)$$

Seja então a área $A = \hat{A}(\mathbf{x})$ um funcional a ser minimizado, de modo que a posição da fronteira não se altere, fica estabelecido o problema de otimização com restrição de igualdade:

$$\begin{cases} \text{minimizar: } A = \hat{A}(\mathbf{x}) \\ \text{sujeito a: } \mathbf{x}^{(P)} = \bar{\mathbf{x}}^{(P)} \quad \forall P \in C \end{cases} \quad (4.8)$$

onde $\hat{A}(\mathbf{x})$ é a função objetivo, escalar e não-linear em termos das coordenadas nodais representadas pelo vetor $\mathbf{x}$, mostrado em (4.4), $\mathbf{x}^{(P)}$ é o vetor de

coordenadas do P-ésimo nó, e $\bar{\mathbf{x}}^{(P)}$ é o vetor das coordenadas prescritas do P-ésimo nó.

Considere uma membrana estrutural deformável representada por sua superfície média, que se supõe ser suave e delimitada por um contorno fixo. É fácil constatar que a área desta membrana é indiferente às deformações envolvendo deslocamentos exclusivamente tangenciais à sua superfície média.

Retornando ao problema geométrico, e já considerando a superfície facetada, a propriedade apresentada no parágrafo anterior é aproximadamente verdadeira, e será tanto mais válida quanto maior for o grau de refinamento da discretização. De todo modo, a menos de erros decorrentes da descontinuidade, existe uma multiplicidade de configurações nodais correspondentes a uma mesma superfície. Portanto, há uma labilidade no problema (4.8).

A seguir são apresentadas algumas alternativas para contornar tal labilidade, de modo a encontrar apenas uma das infinitas soluções possíveis.

Na Subseção 4.1 é discutido o problema (4.8) considerando apenas um grau de liberdade nodal, mais especificamente a liberdade das coordenadas z de todos os nós cujas posições não são prescritas, o que torna (4.8) estável e passível de uma única solução.

Já na Subseção 4.2, a fim de manter os três graus de liberdade nodais de (4.8), optou-se por utilizar uma rotina da biblioteca de otimização do programa MATLAB, o que permite encontrar apenas uma das múltiplas soluções possíveis, sem maiores dificuldades de convergência.

4.1 PROBLEMA DISCRETO COM UM GRAU DE LIBERDADE (1GL) POR NÓ

Será considerado aqui um problema discreto e restrito, no qual a superfície estudada seja mapeada univocamente no plano xy . Isto equivale, do ponto de vista contínuo, a uma superfície do tipo $z = \hat{z}(x, y)$, ou seja, a coordenada z de um ponto qualquer da superfície é função de suas respectivas coordenadas x e y .

No problema da superfície discreta, esta condição implica em manter constantes as projeções de todos os nós sobre o plano xy , o que resulta em apenas um grau de liberdade por nó, na direção da coordenada z . Deste modo, o vetor de incógnitas se resume à:

$$\mathbf{z} = [z_1 \quad \dots \quad z_i \quad \dots \quad z_n]^T \quad (4.9)$$

onde $\mathbf{z}$ é o vetor que coleciona as coordenadas z dos nós das facetas triangulares e z_i é a coordenada z do i -ésimo nó da malha de facetas. Recordando da Figura 4.2, é possível definir um vetor $\mathbf{z}^f$ de coordenadas z locais:

$$\mathbf{z}^f = [z_1 \quad z_2 \quad z_3]^T \quad (4.10)$$

Assim sendo, a área A da superfície deixa de ser uma função do vetor $\mathbf{x}$ e passa a ser função do vetor $\mathbf{z}$:

$$A = \hat{A}(\mathbf{z}) = \sum_{f=1}^{nf} A^f = \sum_{f=1}^{nf} \hat{A}^f(\mathbf{z}^f) \quad (4.11)$$

Seja então a área $A = \hat{A}(\mathbf{z})$ um funcional a ser minimizado, de modo que a posição da fronteira não se altere, fica estabelecido o seguinte problema de otimização com restrição de igualdade:

$$\begin{cases} \text{minimizar: } A = \hat{A}(\mathbf{z}) \\ \text{sujeito a: } \mathbf{z}^{(P)} = \bar{\mathbf{z}}^{(P)} \quad \forall P \in C \end{cases} \quad (4.12)$$

onde $\hat{A}(\mathbf{z})$ é a função objetivo, escalar e não-linear em termos das coordenadas nodais $\mathbf{z}$ representadas pelo vetor $\mathbf{z}$, mostrado em (4.9), $\mathbf{z}^{(P)}$ é a coordenada $\mathbf{z}$ do P-ésimo nó, e $\bar{\mathbf{z}}^{(P)}$ é a coordenada $\mathbf{z}$ prescrita do P-ésimo nó.

A condição necessária de primeira ordem para que $A = \hat{A}(\mathbf{z})$ seja mínima é que:

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{z}} = \mathbf{0} \quad (4.13)$$

Logo, um sistema de equações não lineares fica estabelecido em (4.13). Define-se o *vetor residual* $\mathbf{r}$ como:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{z}) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{z}} \quad (4.14)$$

Considere-se $\mathbf{z}^*$ a solução ótima do problema (4.12). Admitindo uma estimativa inicial $\mathbf{z}_0$, tal que $\mathbf{z}^* = \mathbf{z}_0 + \mathbf{s}^*$ e expandindo o vetor residual em série de Taylor, em torno de $\mathbf{z}_0$, tem-se que:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{z}^*) = \mathbf{r}|_{\mathbf{z}_0} + \left[\nabla \mathbf{r}|_{\mathbf{z}_0} \right] \mathbf{s}^* + \frac{1}{2} \mathbf{s}^{*T} \left[\nabla^2 \mathbf{r}|_{\mathbf{z}_0} \right] \mathbf{s}^* + \dots = \mathbf{0} \quad (4.15)$$

Truncando a série no segundo termo, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\mathbf{r}|_{\mathbf{z}_0} + \left[\nabla \mathbf{r}|_{\mathbf{z}_0} \right] \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (4.16)$$

Resolvendo (4.16) para o incremento $\mathbf{s}$, obtém-se um novo vetor $\mathbf{z}_1 = \mathbf{z}_0 + \mathbf{s}$, o qual, com alguma sorte, fornece uma aproximação de $\mathbf{z}^*$ melhor que a inicial $\mathbf{z}_0$. Este é o método de Newton, que resulta no seguinte algoritmo iterativo para aproximar a solução $\mathbf{z}^*$ do sistema de equações não lineares (4.13):

$$\mathbf{H}^k \mathbf{s}^{k+1} = -\mathbf{r}^k \quad (4.17)$$

onde se define a *matriz Hessiana* $\mathbf{H}$ deste problema como:

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{r} = \nabla (\nabla A) = \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{z} \partial \mathbf{z}} \quad (4.18)$$

A resposta é atualizada a cada vez que (4.17) é resolvida:

$$\mathbf{z}^{k+1} = \mathbf{z}^k + \mathbf{s}^{k+1} \quad (4.19)$$

O vetor $\mathbf{r}$ e a matriz $\mathbf{H}$ podem ser reescritos em termos das cotas nodais da faceta, fazendo uso de (4.10) e de uma matriz Booleana de conectividade $\mathbf{C}^f$, tal que:

$$\mathbf{z}^f = \mathbf{C}^f \mathbf{z} \quad (4.20)$$

Então, substituindo (4.11) em (4.14), fazendo uso de (4.20) e aplicando a regra da cadeia:

$$\mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{z}} \left(\sum_{f=1}^{nf} A^f \right) = \sum_{f=1}^{nf} \nabla_{\mathbf{z}} A^f = \sum_{f=1}^{nf} \nabla_{\mathbf{z}^f} A^f \nabla_{\mathbf{z}} \mathbf{z}^f = \sum_{f=1}^{nf} \nabla_{\mathbf{z}^f} A^f \nabla_{\mathbf{z}} (\mathbf{C}^f \mathbf{z}) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \nabla_{\mathbf{z}^f} A^f \quad (4.21)$$

Agora, substituindo (4.21) em (4.18), fazendo uso de (4.20) e aplicando a regra da cadeia:

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{z}} \left(\sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \nabla_{\mathbf{z}^f} A^f \right) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \nabla_{\mathbf{z}} (\nabla_{\mathbf{z}^f} A^f) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \nabla_{\mathbf{z}^f}^2 A^f \nabla_{\mathbf{z}} (\mathbf{C}^f \mathbf{z}) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \nabla_{\mathbf{z}^f}^2 A^f \mathbf{C}^f \quad (4.22)$$

Definem-se então o vetor $\mathbf{r}^f$ e a matriz $\mathbf{H}^f$ de uma faceta para o problema de um grau de liberdade nodal:

$$\mathbf{r}^f = \nabla_{\mathbf{z}^f} A^f = \frac{\partial A^f}{\partial \mathbf{z}^f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \mathbf{r}^f \quad (4.23)$$

$$\mathbf{H}^f = \nabla_{\mathbf{z}^f}^2 A^f = \frac{\partial^2 A^f}{\partial \mathbf{z}^f \partial \mathbf{z}^f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H} = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \mathbf{H}^f \mathbf{C}^f \quad (4.24)$$

As Subseções 4.1.1 e 4.1.2 visam colocar $\mathbf{r}^f$ e $\mathbf{H}^f$ explicitamente em termos das coordenadas nodais da faceta. O processo iterativo fica bem definido substituindo (4.23) e (4.24) em (4.17):

$$\left[\sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \mathbf{H}^f \mathbf{C}^f \right]^k \mathbf{s}^{k+1} = - \left[\sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \mathbf{r}^f \right]^k \quad (4.25)$$

onde $\mathbf{C}^f$ é a matriz Booleana que relaciona as posições global e local dos nós da malha, como em (4.20), $\mathbf{r}^f$ é o vetor residual da faceta, conforme a Subseção 4.1.1, $\mathbf{H}^f$ é a matriz Hessiana da faceta, conforme a Subseção 4.1.2 e $\mathbf{s}^{k+1}$ é o vetor dos incrementos de posição nodal decorrentes da k-ésima iteração.

Portanto, dadas uma configuração geométrica inicial das cotas $\mathbf{z}_0$ e uma tolerância ξ para a norma de $\mathbf{r}$ ou para a variação da área total da superfície A , é possível, com alguma sorte, determinar a superfície minimal descrita pelas cotas $\mathbf{z}^*$, em um certo número de iterações, com a aplicação de (4.25).

Para a imposição das condições de contorno, é conveniente adotar uma partição entre os graus de liberdade livres e fixos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{LL} & \mathbf{H}_{LF} \\ \mathbf{H}_{FL} & \mathbf{H}_{FF} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{s}_L \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{r}_L \\ \mathbf{r}_F \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_{LL} \mathbf{s}_L = -\mathbf{r}_L \quad (4.26)$$

Todo o procedimento aqui apresentado foi implementado com o auxílio do software MATLAB 7.0.

4.1.1 O VETOR RESIDUAL DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ

Para escrever o vetor residual da faceta $\mathbf{r}^f$, para o problema discreto de um grau de liberdade nodal, em termos das coordenadas nodais e da área da faceta (4.5) será expressa como segue:

$$\mathbf{a}^f = \frac{1}{2}(\ell_1 \times \ell_1) = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x_{32} & y_{32} & z_{32} \\ x_{13} & y_{13} & z_{13} \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(y_{32}z_{13} - z_{32}y_{13}) \\ \frac{1}{2}(z_{32}x_{13} - x_{32}z_{13}) \\ \frac{1}{2}(x_{32}y_{13} - y_{32}x_{13}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 = \hat{a}_1(\mathbf{z}^e) \\ a_2 = \hat{a}_2(\mathbf{z}^e) \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.27)$$

onde se introduziu a notação $x_{mn} = x_m - x_n$, $y_{mn} = y_m - y_n$ e $z_{mn} = z_m - z_n$. Note-se que a_1 , a_2 e a_3 são as componentes do vetor área $\mathbf{a}^f$, sendo que a_1 e a_2 são dependentes do vetor $\mathbf{z}^f$ e a_3 é constante em relação a este vetor $\mathbf{z}^f$.

E a área elementar é dada por:

$$A^f = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \quad (4.28)$$

Aplicando (4.28) em (4.23), obtém-se:

$$\mathbf{r}^f = \nabla_{\mathbf{z}^f} A^f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^f} \left(\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2} \right) = \frac{1}{A^f} \left(a_1 \frac{\partial a_1}{\partial \mathbf{z}^f} + a_2 \frac{\partial a_2}{\partial \mathbf{z}^f} + a_3 \frac{\partial a_3}{\partial \mathbf{z}^f} \right) \quad (4.29)$$

Como a_3 não depende de $\mathbf{z}^f$, então:

$$\mathbf{r}^f = \frac{1}{A^f} \left(a_1 \frac{\partial a_1}{\partial \mathbf{z}^f} + a_2 \frac{\partial a_2}{\partial \mathbf{z}^f} \right) \quad (4.30)$$

Efetuada as derivações e recordando a notação de (4.27):

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial \mathbf{z}^f} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial z_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{2} (y_{32} z_{13} - z_{32} y_{13}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{1}{2} (y_{32} z_{13} - z_{32} y_{13}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{1}{2} (y_{32} z_{13} - z_{32} y_{13}) \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} y_{32} \\ \frac{1}{2} y_{13} \\ \frac{1}{2} (-y_{32} - y_{13}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{1}{2} y_{32} \\ \frac{1}{2} y_{13} \\ \frac{1}{2} y_{21} \end{Bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{Bmatrix} y_{23} \\ y_{31} \\ y_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.31)$$

Utilizando uma notação indicial e admitindo $p, q, r = 1, 2, 3$, permutando ciclicamente:

$$\frac{\partial \mathbf{a}_1}{\partial z_p} = \mathbf{a}_{1,p} = -\frac{1}{2} y_{qr} \quad (4.32)$$

Para a outra derivada de (4.30):

$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial \mathbf{z}^f} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial z_1} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial z_2} \\ \frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial z_3} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial}{\partial z_1} \left(\frac{1}{2} (z_{32} x_{13} - x_{32} z_{13}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z_2} \left(\frac{1}{2} (z_{32} x_{13} - x_{32} z_{13}) \right) \\ \frac{\partial}{\partial z_3} \left(\frac{1}{2} (z_{32} x_{13} - x_{32} z_{13}) \right) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} x_{32} \\ -\frac{1}{2} x_{13} \\ \frac{1}{2} (x_{32} + x_{13}) \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -\frac{1}{2} x_{32} \\ -\frac{1}{2} x_{13} \\ \frac{1}{2} x_{12} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{Bmatrix} x_{23} \\ x_{31} \\ x_{12} \end{Bmatrix} \quad (4.33)$$

Utilizando uma notação indicial e admitindo $p, q, r = 1, 2, 3$, permutando ciclicamente:

$$\frac{\partial \mathbf{a}_2}{\partial z_p} = \mathbf{a}_{2,p} = \frac{1}{2} x_{qr} \quad (4.34)$$

Assim sendo, o vetor residual $\mathbf{r}^f$ da f-ésima faceta para o problema discreto com um grau de liberdade, definido por (4.30), fica sendo:

$$\boxed{\mathbf{r}^f = \mathbf{r}_p^f = \frac{\partial A^f}{\partial z_p} = \frac{1}{2A^f} (a_2 x_{qr} - a_1 y_{qr})} \quad (4.35)$$

onde $\mathbf{a}_1$ e $\mathbf{a}_2$ são componentes do vetor área $\mathbf{a}^f$, conforme (4.27), A^f a área da faceta, conforme (4.28), e admite-se a permutação cíclica $p, q, r = 1, 2, 3$ dos índices. Para certa tentativa, cuja configuração é $\mathbf{z}_0$ ou $\mathbf{z}^k$, o vetor residual fica determinado numericamente e pode ser aplicado em (4.25).

4.1.2 A MATRIZ HESSIANA DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ

A partir de (4.24) é possível escrever a matriz Hessiana $\mathbf{H}^f$ como:

$$\mathbf{H}^f = \nabla_{\mathbf{z}^f}^2 A^f = \nabla_{\mathbf{z}^f} \mathbf{r}^f = \frac{\partial \mathbf{r}^f}{\partial \mathbf{z}^f} \quad (4.36)$$

Utilizando uma notação indicial e admitindo $p, q, r = 1, 2, 3$ e $s, t, u = 1, 2, 3$ permutando ciclicamente então:

$$\mathbf{H}^f = H_{ps}^f = \frac{\partial r_p^f}{\partial z_s} = \frac{\partial A^f}{\partial z_p \partial z_s} \quad (4.37)$$

Relembrando r_p^f em (4.35):

$$\mathbf{H}^f = \frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{2A^f} (a_2 x_{qr} - a_1 y_{qr}) \right) = \underbrace{\frac{1}{2} \left((a_2 x_{qr} - a_1 y_{qr}) \left(\frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{A^f} \right) \right) \right)}_{\mathbf{H}_a^f} + \underbrace{\frac{1}{2A^f} \left(\frac{\partial}{\partial z_s} (a_2 x_{qr} - a_1 y_{qr}) \right)}_{\mathbf{H}_b^f} \quad (4.38)$$

Desenvolvendo a primeira parcela da matriz Hessiana da faceta, $\mathbf{H}_a^f$:

$$\mathbf{H}_a^f = \frac{1}{2} \left((a_2 x_{qr} - a_1 y_{qr}) \left(\frac{\partial}{\partial z_s} \left(\frac{1}{A^f} \right) \right) \right) = \frac{1}{2} (a_2 x_{qr} - a_1 y_{qr}) \left(-\frac{1}{(A^f)^2} \frac{\partial A^f}{\partial z_s} \right) \quad (4.39)$$

Aplicando (4.35) com os índices s , t e u e rearranjando os termos, chega-se a:

$$\mathbf{H}_a^f = \frac{1}{4A^{f^3}} \left(-a_2^2 x_{qr} x_{tu} + a_1 a_2 (x_{qr} y_{tu} + x_{tu} y_{qr}) - a_1^2 y_{qr} y_{tu} \right) \quad (4.40)$$

Desenvolvendo a segunda parcela da matriz Hessiana da faceta, $\mathbf{H}_b^f$:

$$\mathbf{H}_b^f = \frac{1}{2A^f} \left[-y_{qr} \frac{\partial a_1}{\partial z_s} + x_{qr} \frac{\partial a_2}{\partial z_s} \right] \quad (4.41)$$

Obviamente os termos x_{qr} e y_{qr} não dependem de z_s , diferentemente de a_1 e a_2 . Substituindo (4.32) e (4.34), com os índices s , t e u , em (4.41):

$$\mathbf{H}_b^f = \frac{1}{4A^f} (x_{qr}x_{tu} + y_{qr}y_{tu}) \quad (4.42)$$

Substituindo (4.40) e (4.42) em (4.38):

$$\mathbf{H}^f = \frac{1}{4A^{f^3}} \left((A^{f^2} - a_2^2) x_{qr}x_{tu} + a_1a_2 (x_{qr}y_{tu} + x_{tu}y_{qr}) + (A^{f^2} - a_1^2) y_{qr}y_{tu} \right) \quad (4.43)$$

Fazendo uso de (4.28), a matriz Hessiana $\mathbf{H}^f$ da f -ésima faceta para o problema discreto com um grau de liberdade, mostrada em (4.43), fica sendo:

$$\boxed{\mathbf{H}^f = H_{ps}^f = \frac{\partial^2 A^f}{\partial z_p \partial z_s} = \frac{1}{4A^{f^3}} \left((a_1^2 + a_3^2) x_{qr}x_{tu} + a_1a_2 (x_{qr}y_{tu} + x_{tu}y_{qr}) + (a_2^2 + a_3^2) y_{qr}y_{tu} \right)} \quad (4.44)$$

onde a_1 , a_2 e a_3 são componentes do vetor área $\mathbf{a}^f$, conforme (4.27), A^f é a área da faceta, conforme (4.28), e admite-se a permutação cíclica $p, q, r = 1, 2, 3$ e $s, t, u = 1, 2, 3$ dos índices. Para certa tentativa, cuja configuração é $\mathbf{z}_0$ ou $\mathbf{z}^k$, a matriz Hessiana fica determinada numericamente e pode ser aplicada em (4.25).

4.1.3 UM PROBLEMA QUADRÁTICO (PQ) SEMELHANTE

Em decorrência da área de uma superfície de contorno fixo ser estritamente positiva, é possível substituir (4.12) por um problema de mesma solução:

$$\begin{cases} \text{minimizar: } A^2 \\ \text{sujeito a: } \mathbf{z}^{(P)} = \bar{\mathbf{z}}^{(P)} \quad \forall P \in C \end{cases} \quad (4.45)$$

Porém, surgem termos cruzados na nova função objetivo, como pode ser visto em (4.46), fazendo com que esta também seja não-linear em termos das coordenadas $\mathbf{z}$ globais.

$$A^2 = \left(\sum_{f=1}^{nf} A^f \right)^2 = \sum_{g=1}^{nf} (A^g)^2 + 2 \sum_{g=1}^{nf} \sum_{h=g+1}^{nf} A^g A^h \quad \forall h \neq g \quad (4.46)$$

Um problema semelhante, mas não de todo equivalente, é:

$$\begin{cases} \text{minimizar: } Q = \sum_{f=1}^{nf} (A^f)^2 = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{a}^f \cdot \mathbf{a}^f \\ \text{sujeito a: } \mathbf{z}^{(P)} = \bar{\mathbf{z}}^{(P)} \quad \forall P \in C \end{cases} \quad (4.47)$$

Note que a função objetivo de (4.47) é quadrática, e corresponde apenas à primeira parcela de (4.46), donde vem que $Q \leq A^2$. Contudo, não há garantia de que as coordenadas $\mathbf{z}$ que minimizam Q sejam também as mesmas que minimizam A e A^2 .

Seja α o vetor que coleciona o valor da área de cada faceta triangular:

$$\alpha = [A^1 \quad \dots \quad A^f \quad \dots \quad A^{nf}]^T \quad \alpha \in R^{nf} \quad (4.48)$$

onde R^{nf} é o espaço vetorial de dimensão nf , e nf é o número de facetas. As normas 1 e 2 do vetor α valem, respectivamente:

$$\begin{aligned} \|\alpha\|_1 &= \sum_{f=1}^{nf} A^f \\ \|\alpha\|_2 &= \sqrt{\sum_{f=1}^{nf} (A^f)^2} \end{aligned} \quad (4.49)$$

Note que $A = \|\alpha\|_1$ e $\sqrt{Q} = \|\alpha\|_2$. Sejam $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ constantes positivas e sabendo que A^f é sempre positiva, pode-se escrever:

$$\mathbb{C}_1 A \leq \sqrt{Q} \leq \mathbb{C}_2 A \quad (4.50)$$

Portanto, conforme Hönl (1976), A e $\sqrt{Q}$ são *normas equivalentes* ou *métricas equivalentes* de α e induzem a uma mesma topologia. Todavia isso não garante a equivalência entre A e Q e tampouco sua indução a uma mesma topologia.

A seguir será inspecionada a busca do mínimo de Q , na esperança de que a solução deste problema de minimização forneça uma boa estimativa para determinar o mínimo de (4.12).

A condição necessária de primeira ordem para que Q tenha um valor mínimo é:

$$\nabla Q = \mathbf{0} \quad (4.51)$$

Como o problema é quadrático conclui-se que (4.51) é um sistema de equações lineares.

Considerando a matriz de Booleana de conectividade $\mathbf{C}^f$, como em (4.20):

$$\nabla Q = \frac{\partial Q}{\partial \mathbf{z}} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}} \left(\sum_{f=1}^{nf} (A^f)^2 \right) = \sum_{f=1}^{nf} \frac{\partial (A^f)^2}{\partial \mathbf{z}} = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \frac{\partial (A^f)^2}{\partial \mathbf{z}^f} = \mathbf{0} \quad (4.52)$$

Para resolver a derivação que surge em (4.52) será utilizada (4.28), de modo que:

$$\frac{\partial (A^f)^2}{\partial \mathbf{z}^f} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{z}^f} (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2) = 2a_1 \frac{\partial a_1}{\partial \mathbf{z}^f} + 2a_2 \frac{\partial a_2}{\partial \mathbf{z}^f} + 2a_3 \frac{\partial a_3}{\partial \mathbf{z}^f} \quad (4.53)$$

Recordando (4.31) e (4.33) e sabendo que a_3 é independente do vetor $\mathbf{z}^f$, conforme (4.27), então:

$$\frac{\partial (A^f)^2}{\partial \mathbf{z}^f} = 2a_1 \left(-\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} y_{23} \\ y_{31} \\ y_{12} \end{bmatrix} + 2a_2 \left(\frac{1}{2} \right) \begin{bmatrix} x_{23} \\ x_{31} \\ x_{12} \end{bmatrix} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} a_2 x_{23} - a_1 y_{23} \\ a_2 x_{31} - a_1 y_{31} \\ a_2 x_{12} - a_1 y_{12} \end{bmatrix} \quad (4.54)$$

Substituindo a_1 e a_2 , dados em (4.27), procedendo aos cálculos, simplificando os resultados e colocando as variáveis z_1 , z_2 e z_3 em evidência:

$$\frac{\partial (A^f)^2}{\partial \mathbf{z}^f} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_{23}^2 + y_{23}^2)z_1 + (x_{23}x_{31} + y_{23}y_{31})z_2 + (x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23})z_3 \\ (x_{23}x_{31} + y_{23}y_{31})z_1 + (x_{31}^2 + y_{31}^2)z_2 + (x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31})z_3 \\ (x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23})z_1 + (x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31})z_2 + (x_{12}^2 + y_{12}^2)z_3 \end{bmatrix} \quad (4.55)$$

É possível separar (4.55) na forma de um produto entre matriz e vetor:

$$\frac{\partial (A^f)^2}{\partial \mathbf{z}^f} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_{23}^2 + y_{23}^2) & (x_{23}x_{31} + y_{23}y_{31}) & (x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}) \\ (x_{23}x_{31} + y_{23}y_{31}) & (x_{31}^2 + y_{31}^2) & (x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31}) \\ (x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}) & (x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31}) & (x_{12}^2 + y_{12}^2) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Note-se a presença do vetor $\mathbf{z}^f$ em evidência. Este fato indica que o problema é linear em termos das cotas $\mathbf{z}$ globais. Dessa forma, não é necessário um algoritmo iterativo e a solução para o mínimo de Q é alcançada imediatamente após a aplicação de (4.51).

Define-se então a *matriz Hessiana da faceta do problema quadrático* $\mathbf{H}^{Qf}$:

$$\mathbf{H}^{Qf} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} (x_{23}^2 + y_{23}^2) & (x_{23}x_{31} + y_{23}y_{31}) & (x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}) \\ (x_{23}x_{31} + y_{23}y_{31}) & (x_{31}^2 + y_{31}^2) & (x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31}) \\ (x_{12}x_{23} + y_{12}y_{23}) & (x_{12}x_{31} + y_{12}y_{31}) & (x_{12}^2 + y_{12}^2) \end{bmatrix} \quad (4.57)$$

Na forma indicial, adotada para (4.44):

$$\boxed{\mathbf{H}^{Qf} = H_{ps}^{Qf} = \frac{1}{2} (x_{qr}x_{tu} + y_{qr}y_{tu})} \quad (4.58)$$

onde $p, q, r = 1, 2, 3$ e $s, t, u = 1, 2, 3$, permutando ciclicamente.

O espalhamento da matriz $\mathbf{H}^{Qf}$, local, para a matriz $\mathbf{H}^Q$, global, é feito utilizando-se a matriz Booleana $\mathbf{C}^f$, conforme (4.20) e (4.24), trocando-se $\mathbf{H}^f$ por $\mathbf{H}^{Qf}$. Logo:

$$\mathbf{H}^Q = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \mathbf{H}^{Qf} \mathbf{C}^f \quad (4.59)$$

Ou seja, (4.51) pode ser escrita como:

$$\nabla Q = \mathbf{H}^Q \mathbf{z} = \mathbf{0} \quad (4.60)$$

Note-se que (4.60) é um sistema de equações lineares e sua vantagem reside no fato de não haver necessidade de uma preocupação tão intensa com a malha inicial como no método de Newton, o qual necessita de uma tentativa inicial suficientemente próxima da solução para que haja convergência.

Neste problema quadrático, qualquer configuração de partida definida no espaço xyz , desde que as condições de contorno $\bar{\mathbf{z}}^{(P)}$ estejam bem definidas de forma a não colapsar as facetas sobre um ponto ou sobre uma reta, fornecerá uma solução para o mínimo de Q diretamente.

É possível, por exemplo, definir toda a malha de facetas triangulares no plano xy , ou seja, todas as coordenadas $\mathbf{z}$, que não pertencem ao contorno, são iguais a zero. Porém é necessário ditar os valores das coordenadas do contorno $\bar{\mathbf{z}}^{(P)}$, uma vez que estes permanecerão imutáveis quando da aplicação do procedimento numérico.

Para a imposição das cotas $\mathbf{z}$ do contorno mais uma vez é conveniente repartir o sistema entre parcelas livres e fixas, o que resulta em:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}_{LL}^Q & \mathbf{H}_{LF}^Q \\ \mathbf{H}_{FL}^Q & \mathbf{H}_{FF}^Q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{z}_L \\ \mathbf{z}_F \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{H}_{LL}^Q \mathbf{z}_L = -\mathbf{H}_{LF}^Q \mathbf{z}_F \quad (4.61)$$

onde $\mathbf{z}_F = \bar{\mathbf{z}} = \bar{\mathbf{z}}^{(P)} \quad \forall P \in C$, são as coordenadas fixadas no contorno.

Este problema quadrático também foi implementado com o auxílio do software MATLAB 7.0.

4.1.4 COMPARAÇÃO ENTRE OS VETORES RESIDUAIS E ENTRE AS MATRIZES HESSIANA

Ao observar (4.44) e (4.58) nota-se que a matriz Hessiana da faceta relativa ao problema discreto com um grau de liberdade por nó pode ser escrita como função da matriz Hessiana da faceta relativa ao problema quadrático da seguinte forma:

$$H_{ps}^f = \frac{\partial^2 A^f}{\partial z_p \partial z_s} = \frac{1}{4A^{f3}} \left((a_1^2 + a_3^2) x_{qr} x_{tu} + 2a_1 a_2 H_{ps}^{Qf} + (a_2^2 + a_3^2) y_{qr} y_{yu} \right) \quad (4.62)$$

Uma outra comparação entre essas duas matrizes e também entre os vetores residuais pode ser feita considerando-se apenas os nós livres da malha, ou seja, apenas os nós do interior da malha. Para que seja possível é necessário proceder a linearização do vetor residual $\mathbf{r}$ em torno da configuração $\mathbf{z}_0$. Faz-se então $z_i = 0$ em (4.27), o que resulta:

$$\mathbf{a}^f = \begin{bmatrix} a_1 = \hat{a}_1(\mathbf{z}^e) \\ a_2 = \hat{a}_2(\mathbf{z}^e) \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (4.63)$$

Aplicando estes valores em (4.35), tem-se o vetor residual da faceta linearizado:

$$\mathbf{r}^{lf} = \mathbf{r}_p^{lf} = 0 \quad (4.64)$$

Isto é, o vetor residual linearizado do problema (4.12) é nulo e é igual ao vetor residual do problema quadrático, que também é nulo por definição e conforme mostrado em (4.60).

Aplicando (4.63) em (4.44) tem-se a matriz Hessiana linearizada de uma faceta do problema (4.12):

$$\mathbf{H}^{ef} = H_{ps}^{ef} = \frac{1}{4A_{f^3}} a_3^2 (x_{qr} x_{tu} + y_{qr} y_{yu}) \quad (4.65)$$

Recordando (4.28) e aplicando (4.63), a área da faceta se reduz à $A^f = a_3$, o que leva (4.65) a:

$$\mathbf{H}^{ef} = H_{ps}^{ef} = \frac{1}{4a_3} (x_{qr} x_{tu} + y_{qr} y_{yu}) \quad (4.66)$$

Ao se comparar (4.66) com (4.58) chega-se a:

$$\mathbf{H}^{ef} = \frac{1}{2a_3} \mathbf{H}^{Qf} \quad (4.67)$$

Note-se que esta relação é válida apenas para os nós internos da malha. Não há como estabelecer uma comparação global entre estas matrizes, uma vez que a_3 pode assumir valores diferentes para cada faceta.

4.2 PROBLEMA DISCRETO COM TRÊS GRAUS DE LIBERDADE (3GL) POR NÓ

Nesta Subseção retornar-se-á ao problema (4.8), que será aqui reapresentado de modo a facilitar a leitura do texto:

$$\begin{cases} \text{minimizar: } A = \hat{A}(\mathbf{x}) = \sum_{f=1}^{nf} A^f \\ \text{sujeito a: } \mathbf{x}^{(P)} = \bar{\mathbf{x}}^{(P)} \quad \forall P \in C \end{cases} \quad (4.68)$$

$$\mathbf{x} = [\mathbf{x}_1^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_i^T \quad \dots \quad \mathbf{x}_n^T]^T = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad \dots \quad x_i \quad y_i \quad z_i \quad \dots \quad x_n \quad y_n \quad z_n]^T$$

onde $\hat{A}(\mathbf{x})$ é a função objetivo, escalar e não-linear em termos das coordenadas nodais representadas pelo vetor $\mathbf{x}$, nf é o número de facetas em que a superfície é discretizada, $\mathbf{x}^{(P)}$ é o vetor de coordenadas do P-ésimo nó, $\bar{\mathbf{x}}^{(P)}$ é o vetor das coordenadas prescritas do P-ésimo nó, n é o número de nós da malha.

Conforme constata-se, por simples inspeção, cada uma das três coordenadas nodais está livre para a busca da superfície minimal discretizada por facetas, exceto aquelas do contorno, pois têm suas coordenadas prescritas.

A condição necessária de primeira ordem para que $A = \hat{A}(\mathbf{x})$ seja mínima é que:

$$\nabla A = \mathbf{0} \quad (4.69)$$

Logo, um sistema de equações não lineares fica estabelecido em (4.69). Define-se o *vetor residual* $\mathbf{r}$ como:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{x}) = \nabla A = \frac{\partial A}{\partial \mathbf{x}} \quad (4.70)$$

Considere-se $\mathbf{x}^*$ a solução do problema (4.68). Admitindo uma estimativa inicial $\mathbf{x}_0$, tal que $\mathbf{x}^* = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}^*$ e expandindo o vetor residual em série de Taylor, em torno de $\mathbf{x}_0$, tem-se que:

$$\mathbf{r} = \hat{\mathbf{r}}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{r}|_{\mathbf{x}_0} + \left[\nabla \mathbf{r}|_{\mathbf{x}_0} \right] \mathbf{s}^* + \frac{1}{2} \mathbf{s}^{*T} \left[\nabla^2 \mathbf{r}|_{\mathbf{x}_0} \right] \mathbf{s}^* + \dots = \mathbf{0} \quad (4.71)$$

Truncando a série no segundo termo e igualando ao vetor nulo, obtém-se o sistema de equações lineares:

$$\mathbf{r}|_{\mathbf{x}_0} + \left[\nabla \mathbf{r}|_{\mathbf{x}_0} \right] \mathbf{s} = \mathbf{0} \quad (4.72)$$

Resolvendo (4.72) para o incremento $\mathbf{s}$, obtém-se um novo vetor $\mathbf{x}_1 = \mathbf{x}_0 + \mathbf{s}$, o qual, com alguma sorte, fornece uma aproximação de $\mathbf{x}^*$ melhor que a inicial $\mathbf{x}_0$. Este é o método de Newton, que resulta no seguinte algoritmo iterativo para aproximar a solução $\mathbf{x}^*$ do sistema de equações não lineares (4.69):

$$\mathbf{H}^k \mathbf{s}^{k+1} = -\mathbf{r}^k \quad (4.73)$$

onde se define a *matriz Hessiana* $\mathbf{H}$ deste problema como:

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{r} = \nabla (\nabla A) = \nabla^2 A = \frac{\partial^2 A}{\partial \mathbf{x} \partial \mathbf{x}} \quad (4.74)$$

A resposta é atualizada a cada vez que (4.73) é resolvida:

$$\mathbf{x}^{k+1} = \mathbf{x}^k + \mathbf{s}^{k+1} \quad (4.75)$$

O vetor $\mathbf{r}$ e a matriz $\mathbf{H}$ podem ser reescritos em termos das coordenadas nodais da faceta, fazendo uso de uma matriz Booleana de conectividade $\mathbf{C}^f$, tal que:

$$\mathbf{x}^f = \mathbf{C}^f \mathbf{x} \quad (4.76)$$

De modo que:

$$\mathbf{x}^f = [\mathbf{x}_1^T \quad \mathbf{x}_2^T \quad \mathbf{x}_3^T]^T = [x_1 \quad y_1 \quad z_1 \quad x_2 \quad y_2 \quad z_2 \quad x_3 \quad y_3 \quad z_3]^T \quad (4.77)$$

Ou seja, $\mathbf{x}^f$ é o vetor que coleciona as coordenadas nodais da faceta, que são mostradas na Figura 4.2. Então, recordando de (4.68), substituindo A^f em (4.70), fazendo uso de (4.76) e aplicando a regra da cadeia:

$$\mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{x}} \left(\sum_{f=1}^{nf} A^f \right) = \sum_{f=1}^{nf} \nabla_{\mathbf{x}} A^f = \sum_{f=1}^{nf} \nabla_{\mathbf{x}^f} A^f \nabla_{\mathbf{x}} \mathbf{x}^f = \sum_{f=1}^{nf} \nabla_{\mathbf{x}^f} A^f \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{C}^f \mathbf{x}) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \nabla_{\mathbf{x}^f} A^f \quad (4.78)$$

Agora, recordando de (4.68), substituindo A^f em (4.74), fazendo uso de (4.76) e aplicando a regra da cadeia:

$$\mathbf{H} = \nabla \mathbf{r} = \nabla_{\mathbf{x}} \left(\sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \nabla_{\mathbf{x}^f} A^f \right) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \nabla_{\mathbf{x}} (\nabla_{\mathbf{x}^f} A^f) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \nabla_{\mathbf{x}^f}^2 A^f \nabla_{\mathbf{x}} (\mathbf{C}^f \mathbf{x}) = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \nabla_{\mathbf{x}^f}^2 A^f \mathbf{C}^f \quad (4.79)$$

Definem-se então o vetor $\mathbf{r}^f$ e a matriz $\mathbf{H}^f$ de uma faceta para o problema de três graus de liberdade nodais:

$$\mathbf{r}^f = \nabla_{\mathbf{x}^f} A^f = \frac{\partial A^f}{\partial \mathbf{x}^f} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{r} = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{fT} \mathbf{r}^f \quad (4.80)$$

$$\mathbf{H}^f = \nabla_{\mathbf{x}^f}^2 A^f = \frac{\partial^2 A^f}{\partial \mathbf{x}^f \partial \mathbf{x}^f} \Rightarrow \mathbf{H} = \sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \mathbf{H}^f \mathbf{C}^f \quad (4.81)$$

As Subseções 4.2.1 e 4.2.2 visam colocar $\mathbf{r}^f$ e $\mathbf{H}^f$ explicitamente em termos das coordenadas nodais da faceta. O processo iterativo fica bem definido substituindo (4.80) e (4.81) em (4.73):

$$\left[\sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \mathbf{H}^f \mathbf{C}^f \right] \mathbf{s}^{k+1} = - \left[\sum_{f=1}^{nf} \mathbf{C}^{f^T} \mathbf{r}^f \right] \quad (4.82)$$

onde $\mathbf{C}^f$ é a matriz Booleana que relaciona as posições global e local dos nós da malha, como em (4.76), $\mathbf{r}^f$ é o vetor residual da faceta, conforme a Subseção 4.2.1, $\mathbf{H}^f$ é a matriz Hessiana da faceta, conforme a Subseção 4.2.2 e $\mathbf{s}^{k+1}$ é o vetor dos incrementos de posição nodal decorrentes da k-ésima iteração.

Portanto, dadas uma configuração geométrica inicial de coordenadas $\mathbf{x}_0$ e uma tolerância ξ para a norma de $\mathbf{r}$ ou para a variação da área total da superfície A , é possível, com alguma sorte, determinar a superfície minimal descrita pelas cotas $\mathbf{x}^*$, em um certo número de iterações, com a aplicação de (4.82).

Conforme já dito no início deste Capítulo, existem múltiplas soluções que satisfazem o problema (4.68). Isto se reflete no fado da matriz Hessiana, dada por (4.74), ser não-positivo definida, impossibilitando a solução de (4.82).

Considere uma membrana estrutural deformável representada por sua superfície média, que se supõe ser suave e delimitada por um contorno fixo. Deformações envolvendo deslocamentos transversais a ela são, em geral, capazes de alterar a área da superfície média. Regressando à superfície discreta, para eliminar a indeterminação de $\mathbf{H}$ basta impor como restrição ao problema (4.68) que os incrementos nodais $\mathbf{s}_i$, a partir de certa configuração, tenham uma componente transversal à mesma. Ou seja, para cada nó i deve existir uma restrição do tipo $\mathbf{g}_3^i \cdot \mathbf{s}_i \neq 0$, onde $\mathbf{g}_3^i$ é uma aproximação da normal à superfície no nó i . Um caso

particular é quando se fixa a direção $\mathbf{z}$ para os graus de liberdade, como foi feito na Subseção 4.1, o que elimina a labilidade do problema proposto.

Afora a dificuldade de se definir adequadamente as normais $\mathbf{g}_3^i$, em correspondência a uma superfície facetada, uma possibilidade para se eliminar a indeterminação de $\mathbf{H}$ seria a imposição dos incrementos $\mathbf{s}_i$ inteiramente ortogonais à superfície, de modo que, a cada iteração, $\mathbf{g}_3^i \times \mathbf{s}_i = \mathbf{0}$. Infelizmente, à medida que o algoritmo se aproxima da solução, os incrementos $\mathbf{s}_i$ se aproximam de zero, tornando gradativamente trivial esta situação, e degradando o condicionamento da matriz $\mathbf{H}$, o que por sua vez leva a uma divergência do tipo oscilatório.

Uma vez que as dificuldades decorrem da multiplicidade da solução, é possível empregar algoritmos que evitem a inversão da matriz Hessiana, como, por exemplo, os métodos do tipo gradientes conjugados. Neste caso, o algoritmo em geral converge para uma das múltiplas soluções possíveis, sem maiores dificuldades. Para a implementação tomou-se partido da rotina *fmincon* disponível na biblioteca de otimização do software MATLAB 7.0, a qual emprega o método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionados para a busca de um mínimo de uma função escalar não-linear de várias variáveis, sujeita a restrições de igualdade, e partindo de uma estimativa inicial. A rotina recebe como argumentos a função objetivo $A = \hat{A}(\mathbf{x})$, dada por (4.68), o gradiente ∇A , mostrado em (4.80) e na Subseção 4.2.1, e as restrições de igualdade, conforme (4.68). A matriz Hessiana $\mathbf{H}$, apresentada em (4.81) e na Subseção 4.2.2, também foi introduzida na rotina a fim de empregar o método de Newton quando possível. Este trabalho evita a discussão dos métodos empregados na rotina *fmincon*, remetendo-se à Press et al. (1992) e Coleman e Li (1994 e 1996).

4.2.1 O VETOR RESIDUAL DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ

Conforme (4.80), o vetor residual é:

$$\mathbf{r}^f = \nabla_{\mathbf{x}^f} A^f = \frac{\partial A^f}{\partial \mathbf{x}^f} \quad (4.83)$$

Aplicando (4.6) em (4.83):

$$\mathbf{r}^f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} (\sqrt{\mathbf{a}^f \cdot \mathbf{a}^f}) = \frac{1}{2\sqrt{\mathbf{a}^f \cdot \mathbf{a}^f}} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} (\mathbf{a}^f \cdot \mathbf{a}^f) = \frac{1}{2A^f} 2\mathbf{a}^f \cdot \frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{1}{A^f} \mathbf{a}^f \cdot \frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{1}{A^f} \left(\frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} \right)^T \mathbf{a}^f \quad (4.84)$$

O gradiente do vetor área da faceta em relação às coordenada locais que aparece em (4.84) pode ser resolvido aplicando (4.5), donde vem que:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \left(\frac{1}{2} \ell_1 \times \ell_2 \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} (\ell_1 \times \ell_2) \quad (4.85)$$

Definem-se aqui as matrizes anti-simétricas cujos vetores axiais são ℓ_1 , ℓ_2 e ℓ_3 :

$$\Lambda_i = \text{Skew}(\ell_i) = \begin{bmatrix} 0 & -(\ell_i)_z & (\ell_i)_y \\ (\ell_i)_z & 0 & -(\ell_i)_x \\ -(\ell_i)_y & (\ell_i)_x & 0 \end{bmatrix} \quad \forall i = 1, 2, 3 \quad (4.86)$$

Dessa forma, é possível escrever (4.85) na forma de uma multiplicação de uma matriz anti-simétrica por um vetor:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} (\Lambda_1 \ell_2) = \frac{1}{2} \left(\ell_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{x}^f} + \Lambda_1 \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{x}^f} \right) \quad (4.87)$$

Lembrando que $\ell_1 \times \ell_2 = -\ell_2 \times \ell_1$, então:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} (-\Lambda_2 \ell_1) = \frac{1}{2} \left(-\ell_1^T \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \mathbf{x}^f} - \Lambda_2 \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{x}^f} \right) \quad (4.88)$$

Igualando (4.87) a (4.88) segue que:

$$\ell_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{x}^f} + \Lambda_1 \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{x}^f} = -\ell_1^T \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \mathbf{x}^f} - \Lambda_2 \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{x}^f} \quad (4.89)$$

Sabendo que $\ell_i = \mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j$, com $i, j, k = 1, 2, 3$, permutando ciclicamente, tem-se:

$$\frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{x}^e} = [\mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3] \quad \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{x}^e} = [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{I}_3] \quad \frac{\partial \ell_3}{\partial \mathbf{x}^e} = [-\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3 \quad \mathbf{O}_3] \quad (4.90)$$

onde $\mathbf{I}_3$ e $\mathbf{O}_3$ são, respectivamente, a matriz identidade e nula, ambas de ordem 3.

Aplicando (4.90) em (4.89):

$$\begin{aligned} \ell_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{x}^f} + \Lambda_1 [\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{I}_3] &= -\ell_1^T \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \mathbf{x}^f} - \Lambda_2 [\mathbf{O}_3 \quad -\mathbf{I}_3 \quad \mathbf{I}_3] \\ \ell_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{x}^f} + [\Lambda_1 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_1] &= -\ell_1^T \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \mathbf{x}^f} - [\mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_2 \quad \Lambda_2] \end{aligned} \quad (4.91)$$

Obviamente $[\Lambda_1 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_1] \neq [\mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_2 \quad \Lambda_2]$, de modo que a igualdade em (4.91) só pode ser verificada se, e somente se:

$$\begin{aligned} \ell_2^T \frac{\partial \Lambda_1}{\partial \mathbf{x}^f} &= -[\mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_2 \quad \Lambda_2] = -\Lambda_2 \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{x}^f} \\ \ell_1^T \frac{\partial \Lambda_2}{\partial \mathbf{x}^f} &= -[\Lambda_1 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_1] = -\Lambda_1 \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{x}^f} \end{aligned} \quad (4.92)$$

Logo, (4.87) pode ser escrita como:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{1}{2} ([\Lambda_1 \quad \mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_1] - [\mathbf{O}_3 \quad -\Lambda_2 \quad \Lambda_2]) = \frac{1}{2} [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad -\Lambda_1 - \Lambda_2] \quad (4.93)$$

Mas, $-\ell_1 - \ell_2 = -(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) - (\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_3) = (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) = \ell_3$, então $-\Lambda_1 - \Lambda_2 = \Lambda_3$, logo:

$$\frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} = \frac{1}{2} [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] \quad (4.94)$$

Aplicando (4.94) em (4.84), fica definido o vetor residual da faceta do problema discreto com três graus de liberdade nodais:

$$\mathbf{r}^f = \frac{1}{2A^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \quad (4.95)$$

onde A^f é dado por (4.6), $\mathbf{a}^f$ é dado por (4.5) e Λ_i é dado por (4.86).

4.2.2 A MATRIZ HESSIANA DA FACETA PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ

Conforme (4.81), a matriz Hessiana é:

$$\mathbf{H}^f = \nabla_{\mathbf{x}^f}^2 A^f = \frac{\partial^2 A^f}{\partial \mathbf{x}^f \partial \mathbf{x}^f} = \frac{\partial \mathbf{r}^f}{\partial \mathbf{x}^f} \quad (4.96)$$

Aplicando (4.95) em (4.96) tem-se:

$$\mathbf{H}^f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \left(\frac{1}{2A^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \right) = \frac{1}{2} \left(\underbrace{\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \left(\frac{1}{A^f} \right)}_{\mathbf{H}_a^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f + \underbrace{\left(\frac{1}{A^f} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f}_{\mathbf{H}_b^f} \right) \quad (4.97)$$

A parcela $\mathbf{H}_a^f$ de (4.97) fica:

$$\mathbf{H}_a^f = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \left(\frac{1}{A^f} \right) \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f = -\frac{1}{(A^f)^2} \left(\frac{\partial A^f}{\partial \mathbf{x}^f} \right) \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f = -\frac{1}{(A^f)^2} (\mathbf{r}^f) \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \quad (4.98)$$

Aplicando (4.95) em (4.98) chega-se a:

$$\mathbf{H}_a^f = -\frac{1}{(A^f)^2} \left(\frac{1}{2A^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \right) \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \right) = -\frac{1}{2(A^f)^3} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \mathbf{a}^{f^T} [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] \quad (4.99)$$

Seja o $\mathbf{n}^f$ vetor unitário normal à f-ésima faceta da superfície discreta, de modo que:

$$\mathbf{n}^f = \frac{\mathbf{a}^f}{\|\mathbf{a}^f\|} = \frac{\mathbf{a}^f}{\sqrt{\mathbf{a}^f \cdot \mathbf{a}^f}} = \frac{\mathbf{a}^f}{A^f} \quad (4.100)$$

Então (4.99) fica:

$$\mathbf{H}_a^f = -\frac{1}{2A^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{n}^f \mathbf{n}^{f^T} [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] \quad (4.101)$$

Sabendo que $(-\ell_i) \times \mathbf{a}^f = -\mathbf{a}^f \times (-\ell_i)$, a parcela $\mathbf{H}_b^f$ de (4.97) pode ser escrita como:

$$\mathbf{H}_b^f = \left(\frac{1}{A^f} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{a}^f \right) = \left(\frac{1}{A^f} \right) \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \left(- \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \Omega & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \Omega \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ -\ell_3 \end{bmatrix} \right) \quad (4.102)$$

onde:

$$\Omega = \text{Skew}(\mathbf{a}^f) = \begin{bmatrix} 0 & -(\mathbf{a}^f)_z & (\mathbf{a}^f)_y \\ (\mathbf{a}^f)_z & 0 & -(\mathbf{a}^f)_x \\ -(\mathbf{a}^f)_y & (\mathbf{a}^f)_x & 0 \end{bmatrix} \quad (4.103)$$

De modo que (4.102) fica:

$$\mathbf{H}_b^f = \left(\frac{1}{A^f} \right) \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{a}^f}{\partial \mathbf{x}^f} - \begin{bmatrix} \Omega & \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \Omega & \mathbf{O}_3 \\ \mathbf{O}_3 & \mathbf{O}_3 & \Omega \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}^f} \begin{bmatrix} -\ell_1 \\ -\ell_2 \\ -\ell_3 \end{bmatrix} \right) \quad (4.104)$$

Aplicando (4.90) e (4.94) em (4.104):

$$\mathbf{H}_b^f = \frac{1}{2A^f} \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] + 2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & -\Omega & \Omega \\ \Omega & \mathbf{O}_3 & -\Omega \\ -\Omega & \Omega & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \right) \quad (4.105)$$

Substituindo (4.101) e (4.105) em (4.97):

$$\mathbf{H}^f = \frac{1}{4A^f} \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} [\mathbf{I}_3 - \mathbf{n}^f \mathbf{n}^{fT}] [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] + 2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & -\Omega & \Omega \\ \Omega & \mathbf{O}_3 & -\Omega \\ -\Omega & \Omega & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \right) \quad (4.106)$$

Seja a matriz $\mathbf{N}$ definida por:

$$\mathbf{N} = \mathbf{I}_3 - \mathbf{n}^f \mathbf{n}^{fT} \quad (4.107)$$

Ao comparar (4.107) com Pauletti (2003, p. 115, eq. 3.121), conclui-se que $\mathbf{N}$ também está presente nos elementos da parcela geométrica da matriz de rigidez de um elemento de treliça geometricamente exato. Substituindo (4.107) em (4.106):

$$\mathbf{H}^f = \frac{1}{4A^f} \left(\begin{bmatrix} \Lambda_1^T \\ \Lambda_2^T \\ \Lambda_3^T \end{bmatrix} \mathbf{N} [\Lambda_1 \quad \Lambda_2 \quad \Lambda_3] + 2 \begin{bmatrix} \mathbf{O}_3 & -\Omega & \Omega \\ \Omega & \mathbf{O}_3 & -\Omega \\ -\Omega & \Omega & \mathbf{O}_3 \end{bmatrix} \right) \quad (4.108)$$

Procedendo as multiplicações e somas matriciais, a matriz Hessiana da faceta do problema discreto com três graus de liberdade nodais fica:

$$\mathbf{H}^f = \frac{1}{4A^f} \begin{bmatrix} \Lambda_1^T \mathbf{N} \Lambda_1 & \Lambda_1^T \mathbf{N} \Lambda_2 - 2\Omega & \Lambda_1^T \mathbf{N} \Lambda_3 + 2\Omega \\ \Lambda_2^T \mathbf{N} \Lambda_1 + 2\Omega & \Lambda_2^T \mathbf{N} \Lambda_2 & \Lambda_2^T \mathbf{N} \Lambda_3 - 2\Omega \\ \Lambda_3^T \mathbf{N} \Lambda_1 - 2\Omega & \Lambda_3^T \mathbf{N} \Lambda_2 + 2\Omega & \Lambda_3^T \mathbf{N} \Lambda_3 \end{bmatrix} \quad (4.109)$$

onde A^f é dado por (4.6), $\mathbf{N}$ é dado por (4.107), $\mathbf{n}^f$ é dado por (4.100), $\mathbf{a}^f$ é dado por (4.5), Λ_i é dado por (4.86) e Ω é dado por (4.103).

5 ANÁLISES E RESULTADOS

Neste capítulo será apresentada a solução analítica para o exemplo de motivação da Subseção 1.2. Além disso, serão mostrados alguns exemplos elaborados para a verificação dos algoritmos descritos no Capítulo 4.

5.1 A CATENÓIDE

O objetivo nesta Subseção é determinar a forma geométrica da superfície minimal situada entre dois anéis coaxiais de raios R_1 e R_2 , perpendiculares ao eixo de axissimetria e distantes entre si de uma altura h . Este é o exemplo de motivação apresentado na Subseção 1.2, mostrado na Figura 1.2.

Trata-se de um problema clássico do cálculo variacional, cuja solução analítica será examinada na Subseção 5.1.1, a seguir.

5.1.1 A SOLUÇÃO ANALÍTICA

A área mínima de uma superfície compreendida entre dois anéis coaxiais distantes entre si e perpendiculares ao mesmo eixo será, intuitivamente, axissimétrica. Logo, é possível considerar as várias superfícies axissimétricas e que passem pelos anéis do contorno, como aquela apresentada na Figura 5.1, a fim de determinar um funcional de minimização.

Constatada a axissimetria e supondo o eixo z aquele de revolução, este problema se reduz a uma variável independente, aqui denominada de radial r . A relação entre a coordenada radial e as coordenadas cartesianas x e y pode ser escrita como:

$$r^2 = x^2 + y^2 \quad (5.1)$$

Considere-se um elemento ds de comprimento da curva resultante da intersecção da superfície S sobre o plano rz . Deste modo, a área da superfície contida entre dois planos perpendiculares ao eixo axissimétrico, denotados por z e $z + dz$, vale:

$$dA = 2\pi r ds \quad (5.2)$$

Figura 5.1 - Superfície axissimétrica entre dois anéis coaxiais e perpendiculares ao mesmo eixo

Expressando agora ds nas coordenadas r e z :

$$ds = \sqrt{1 + (r_z)^2} dz \quad (5.3)$$

onde:

$$r_z = \frac{dr}{dz} \quad (5.4)$$

Então, (5.2) fica:

$$dA = 2\pi r \sqrt{1 + (r_z)^2} dz \quad (5.5)$$

Se os anéis estão nas posições z_1 e z_2 , a área total da superfície vale:

$$A = \int_{z_1}^{z_2} 2\pi r \sqrt{1 + (r_z)^2} dz \quad | \quad f = \hat{f}(z, r, r_z) = 2\pi r \sqrt{1 + (r_z)^2} \quad (5.6)$$

Desta forma, a área A é um funcional unidimensional, ou seja, $f = \hat{f}(z, r, r_z)$, e para determinar seu valor mínimo é possível aplicar a equação de Euler-Lagrange, mostrada em (2.1):

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r_z} \right) - \frac{\partial f}{\partial r} = 0 \quad (5.7)$$

Note-se que a função f não depende explicitamente de z . Logo, é conveniente utilizar uma forma alternativa da equação de Euler-Lagrange. Para isso, multiplica-se (5.7) por r_z :

$$r_z \left(\frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r_z} \right) - \frac{\partial f}{\partial r} \right) = 0 \quad (5.8)$$

Agora, derivando a função $f = \hat{f}(z, r, r_z)$ em relação à z :

$$\frac{df}{dz} = \frac{\partial f}{\partial r} r_z + \frac{\partial f}{\partial r_z} r_{zz} + \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.9)$$

onde:

$$r_{zz} = \frac{d^2 r}{dz^2} \quad (5.10)$$

Reorganizando os termos de (5.9)

$$r_z \frac{\partial f}{\partial r} = \frac{df}{dz} - \frac{\partial f}{\partial r_z} r_{zz} - \frac{\partial f}{\partial z} \quad (5.11)$$

Substituindo (5.11) em (5.8):

$$r_z \frac{d}{dz} \left(\frac{\partial f}{\partial r_z} \right) - \frac{df}{dz} + \frac{\partial f}{\partial r_z} r_{zz} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (5.12)$$

Recordando da notação em (5.10), observa-se que o primeiro termo e o terceiro termo de (5.12) se originam da derivada de um produto, de modo que é possível simplificar esta equação da seguinte maneira:

$$\frac{d}{dz} \left(r_z \frac{\partial f}{\partial r_z} \right) - \frac{df}{dz} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (5.13)$$

Evidenciando a derivada em relação à z :

$$\frac{d}{dz} \left(r_z \frac{\partial f}{\partial r_z} - f \right) + \frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (5.14)$$

Esta é a forma alternativa para a equação de Euler-Lagrange, e sua aplicação é interessante quando o funcional não apresenta explicitamente a variável independente, o que leva a:

$$\frac{\partial f}{\partial z} = 0 \quad (5.15)$$

Portanto, (5.14) fica:

$$\frac{d}{dz} \left(r_z \frac{\partial f}{\partial r_z} - f \right) = 0 \quad (5.16)$$

Separando as variáveis:

$$d \left(r_z \frac{\partial f}{\partial r_z} - f \right) = 0 dz = 0 \quad (5.17)$$

Integrando (5.17):

$$r_z \frac{\partial f}{\partial r_z} - f = \mathbb{C} \quad (5.18)$$

onde $\mathbb{C}$ é uma constante.

Substituindo f , de (5.6), em (5.18):

$$r_z \frac{\partial}{\partial r_z} \left(2\pi r \sqrt{1+(r_z)^2} \right) - 2\pi r \sqrt{1+(r_z)^2} = \mathbb{C} \quad (5.19)$$

Derivando f em relação à r_z :

$$\frac{\partial}{\partial r_z} \left(2\pi r \sqrt{1+(r_z)^2} \right) = 2\pi r \frac{r_z}{\sqrt{1+(r_z)^2}} \quad (5.20)$$

Aplicando (5.20) em (5.19):

$$r_z 2\pi r \frac{r_z}{\sqrt{1+(r_z)^2}} - 2\pi r \sqrt{1+(r_z)^2} = \frac{2\pi r}{\sqrt{1+(r_z)^2}} \left((r_z)^2 - 1 - (r_z)^2 \right) = -\frac{2\pi r}{\sqrt{1+(r_z)^2}} = \mathbb{C} \quad (5.21)$$

Seja:

$$\mathbb{C}_1 = -\frac{\mathbb{C}}{2\pi} \quad (5.22)$$

Aplicando (5.22) em (5.21), isolando r_z e recordando da notação em (5.4):

$$\frac{r}{\sqrt{1+(r_z)^2}} = \mathbb{C}_1 \quad \Rightarrow \quad r_z = \frac{1}{\mathbb{C}_1} \sqrt{r^2 - \mathbb{C}_1^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{dz}{dr} = \mathbb{C}_1 \frac{1}{\sqrt{r^2 - \mathbb{C}_1^2}} \quad (5.23)$$

Separando as variáveis dz e dr de (5.23) e integrando:

$$\boxed{z = \mathbb{C}_1 \operatorname{arccosh} \left(\frac{r}{\mathbb{C}_1} \right) + \mathbb{C}_2} \quad (5.24)$$

onde $\mathbb{C}_2$ é a constante de integração. Isolando r de (5.24) tem-se:

$$r = \mathbb{C}_1 \cosh\left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1}\right) \quad (5.25)$$

Constata-se que $r = \hat{r}(z)$ é uma função do co-seno hiperbólico, ou seja, é a equação de uma *catenária*. Ao revolver a catenária, dada em (5.25), em torno do eixo z obtém-se a superfície de mínima área entre dois anéis coaxiais e perpendiculares ao eixo comum, a qual recebe o nome de *catenóide*.

Recordando da relação entre a coordenada radial r e as coordenadas cartesianas x e y , conforme (5.1), e de (5.26) chega-se a:

$$x^2 + y^2 = \mathbb{C}_1^2 \cosh^2\left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1}\right) \quad \text{ou} \quad z = \mathbb{C}_1 \operatorname{arccosh}\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{\mathbb{C}_1^2}}\right) + \mathbb{C}_2 \quad (5.26)$$

Segundo Berzin e Hagiwara (2002), seja $\mathbb{C}_2 = 0$, então uma equação paramétrica para a catenóide, em termos de θ_1 e θ_2 , pode ser escrita como:

$$S = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) = (x(\theta_1, \theta_2), y(\theta_1, \theta_2), z(\theta_1, \theta_2)) = (\mathbb{C}_1 \cosh \theta_2 \cos \theta_1, \mathbb{C}_1 \cosh \theta_2 \sin \theta_1, \mathbb{C}_1 \theta_2) \quad (5.27)$$

Para calcular a área da catenóide é conveniente utilizar a fórmula para superfícies de revolução apresentada em (5.6) e também por Carmo (1976). É necessário conhecer r_z :

$$r_z = \frac{dr}{dz} = \frac{d}{dz}\left(\mathbb{C}_1 \cosh\left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1}\right)\right) = \sinh\left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1}\right) \quad (5.28)$$

Aplicando (5.25) e (5.28) em (5.6):

$$A = \int_{z_1}^{z_2} 2\pi \mathbb{C}_1 \cosh\left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1}\right) \sqrt{1 + \sinh^2\left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1}\right)} dz \quad (5.29)$$

A solução analítica de (5.29) é:

$$A = \pi \mathbb{C}_1^2 \left(\sinh \left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1} \right) \sqrt{1 + \sinh^2 \left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1} \right)} + \left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1} \right) \right) \Bigg|_{z_1}^{z_2} \quad (5.30)$$

Mas, $\cosh^2 x - \sinh^2 x = 1$ e, logo, $\cosh x = \sqrt{1 + \sinh^2 x}$. Então, (5.30) fica:

$$A = \pi \mathbb{C}_1^2 \left(\sinh \left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1} \right) \cosh \left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1} \right) + \left(\frac{z - \mathbb{C}_2}{\mathbb{C}_1} \right) \right) \Bigg|_{z_1}^{z_2} \quad (5.31)$$

onde $(\cdot) \Big|_a^b = (\cdot)(b) - (\cdot)(a)$.

5.1.2 VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ

As verificações contidas nesta Subseção são feitas tanto para o algoritmo iterativo, cuja equação de recorrência é (4.25), quanto para o problema quadrático, dado pelo sistema de equações lineares (4.60). As soluções numéricas obtidas a partir destas equações serão comparadas com a solução analítica da catenóide, como na Subseção 5.1.1.

Seja z a variável independente, correspondente ao eixo das abscissas, e $r = \hat{r}(z)$ é a variável radial, dependente de z e que corresponde ao eixo das ordenadas, a equação da curva geratriz da solução analítica é dada por (5.25), onde $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ são constantes reais.

Para o exemplo de aplicação serão adotadas aqui as seguintes referências geométricas:

- ✓ raio do anel superior: $r_1 = 1$ m;
- ✓ cota do anel superior: $z_1 = 1,7$ m
- ✓ raio do anel inferior: $r_2 = 4$ m;
- ✓ cota do anel inferior: $z_1 = 0$ m.

Aplicando as condições $r_1 = \hat{r}(z_1) = \hat{r}(1,7) = 1$ e $r_2 = \hat{r}(z_2) = \hat{r}(0) = 4$ em (5.25) e sabendo que $\cosh(x) = \cosh(-x)$, tem-se $\mathbb{C}_1 \approx 0,949082708$ e $\mathbb{C}_2 \approx 2,009511561$. Substituindo estas constantes em (5.25):

$$r = \hat{r}(z) = 0,949082708 \cosh\left(\frac{z - 2,009511561}{0,949082708}\right) \quad (5.32)$$

Ou ainda, considerando os intervalos $0 \text{ m} \leq z \leq 1,7 \text{ m}$ e $1 \text{ m} \leq r \leq 4 \text{ m}$:

$$z = \hat{z}(r) = -0,949082708 \operatorname{arccosh}\left(\frac{r}{0,949082708}\right) + 2,009511561 \quad (5.33)$$

Aplicando as constantes $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$, assim como os valores extremos $z_1 = 1,7 \text{ m}$ e $z_2 = 0 \text{ m}$ em (5.31) tem-se o valor analítico da área da catenóide em questão, $A \approx 52,909166919 \text{ m}^2$. A Figura 5.2 mostra a curva $z = \hat{z}(r)$ que gera a catenóide, no intervalo considerado, e z é o eixo de revolução.

Figura 5.2 - Curva geratriz da catenóide

A solução numérica considerou apenas uma faixa com abertura angular de 30 graus, discretizada por 60 elementos triangulares, como se mostra na Figura 5.3a. Adotou-se propositalmente uma geometria inicial distante da solução minimal. Foram fixadas

as coordenadas dos nós correspondentes aos dois anéis, ressaltados em vermelho na Figura 5.3a, enquanto que os demais nós tiveram suas coordenadas z livres no processo de busca da superfície minimal.

Figura 5.3 - Resultados da busca da forma da Catenóide

A norma do vetor residual correspondente aos nós livres, para a malha inicial, vale $\|r_{LL}\|_0 = 3,02 \cdot 10^{-1} \text{ m}$. A área correspondente à superfície da malha inicial vale $A_0 = 4,7763 \text{ m}^2$. A tolerância adotada é $\xi = 10^{-5} \cdot \|r_{LL}\|_0 = 3,02 \cdot 10^{-6} \text{ m}$. Pelo fato de ter-se modelado apenas uma faixa angular de 30 dos 360 graus da superfície total, a

área analítica $\bar{A}$ da superfície estudada vale 1/12 da área analítica total, ou seja, $\bar{A} = 4,409097243 \text{ m}^2$.

A aplicação do sistema de equações lineares (4.60), resultante do Problema Quadrático (PQ), fornece a configuração mostrada na Figura 5.3b. Por outro lado, quando da aplicação do Método de Newton (MN), com a equação recorrência (4.25), e adotando como critério de parada a tolerância ξ , a solução foi atingida em quatro iterações a partir da malha inicial (Figura 5.3a) e em três iterações a partir do resultado do problema quadrático (Figura 5.3b). A Tabela 5.1 e a Tabela 5.2 mostram o valor da norma do vetor residual, o valor da área e o erro relativo da área correspondentes a cada iteração apresentada na Figura 5.3.

Tabela 5.1 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação PQ+MN na Catenóide

Figura 5.3	PQ ou Iteração do MN	$\ r_{LL}\ _k$	$\xi - \ r_{LL}\ _k$	A_k	e_{A_k}
	k	(m)	(m)	(m ²)	(%)
(b)	PQ	$8,09 \cdot 10^{-2}$	< 0	4,4295	0,46
(c)	1	$1,72 \cdot 10^{-2}$	< 0	4,3920	0,39
(d)	3	$2,04 \cdot 10^{-6}$	> 0	4,3920	0,39

Tabela 5.2 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação MN puro na Catenóide

Figura 5.3	Iteração do MN	$\ r_{LL}\ _k$	$\xi - \ r_{LL}\ _k$	A_k	e_{A_k}
	k	(m)	(m)	(m ²)	(%)
(e)	1	$4,67 \cdot 10^{-2}$	< 0	4,3950	0,32
(f)	2	$5,70 \cdot 10^{-3}$	< 0	4,3920	0,39
(g)	4	$4,28 \cdot 10^{-8}$	> 0	4,3920	0,39

Quando $\xi - \|r_{LL}\|_k > 0$ então houve convergência. O erro relativo do valor da área da k-ésima iteração é calculado como:

$$e_{A_k} = 100 \left| \frac{\bar{A} - A_k}{\bar{A}} \right| \quad (5.34)$$

A Figura 5.3e mostra a primeira iteração do MN, que utiliza a forma linearizada da matriz Hessiana $\mathbf{H}^l$, cuja matriz da faceta $\mathbf{H}^{lf}$ é mostrada em (4.66), uma vez que todas as cotas livres $\mathbf{z}_{LL}$ são nulas na malha inicial.

Considerando o resultado do PQ como um passo iterativo, então não se percebe vantagem, por este exemplo, em tomá-lo como geometria inicial para a busca da forma. Contudo, ao se comparar o número de iterações do MN, fica comprovada a sua relevância.

Ao comparar a Figura 5.3a com a Figura 5.3b fica evidente que esta última mostra uma configuração geométrica mais próxima do resultado final, apresentados na Figura 5.3d e na Figura 5.3g, do que a primeira, ou seja, o PQ cumpriu seu objetivo neste exemplo de verificação.

Tabela 5.3 - Comparação entre os resultados analítico e numérico da Catenóide

Nó	Posição Radial	Resultado Analítico	Resultado Numérico	Erro Relativo
i	$r_i = x_i$	$z(r_i)$	$z(x_i)$	$\left \frac{z(r_i) - z(x_i)}{z(r_i)} \right $
1	1,000000	1,700000	1,700000	0,0000
2	1,207030	1,324729	1,335596	0,0082
3	1,430634	1,089850	1,098922	0,0083
4	1,672140	0,901914	0,909286	0,0082
5	1,932981	0,739750	0,745691	0,0080
6	2,214705	0,594348	0,599055	0,0079
7	2,518984	0,460875	0,464485	0,0078
8	2,847623	0,336386	0,338998	0,0078
9	3,202573	0,218930	0,220618	0,0077
10	3,585941	0,107136	0,107958	0,0077
11	4,000000	0,000000	0,000000	0,0000

A Tabela 5.3 compara os valores analíticos fornecidos por (5.33), com os valores obtidos numericamente, representados pela Figura 5.3d e Figura 5.3g. Observa-se que existe um erro intrínseco ao se estimar a área de uma superfície de dupla curvatura por meio de facetas planas. Mesmo assim, obteve-se um erro relativo menor que 1%, em termos das coordenadas nodais, valor razoável, considerando

a discretização grosseira adotada. A Figura 5.4, a seguir, mostra graficamente os valores da Tabela 5.3. Vale lembrar que o eixo z é aquele de revolução.

Figura 5.4 - Comparação entre os resultados analítico e numérico da Catenóide

5.1.3 VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ E O TESTE DE CONVERGÊNCIA

As verificações contidas nesta Subseção são feitas para o algoritmo iterativo, cuja equação de recorrência é (4.82). As soluções numéricas obtidas a partir destas equações serão comparadas com a solução analítica da catenóide, como na Subseção 5.1.1.

Toma-se uma catenóide limitada entre dois anéis coaxiais de raio igual a 5 m e distantes entre si de uma altura igual a 6 m. Assim sendo, é possível definir os pontos $(r_1; z_1) = (-3; -2.5)$ e $(r_2; z_2) = (3; 2.5)$. Considerando a constante $\mathbb{C}_2 = 0$, chega-se à $\mathbb{C}_1 \approx 3,725355449$, de modo que as equações da catenóide, segundo (5.24), (5.25), ficam:

$$z = 3,725355449 \operatorname{arccosh}\left(\frac{r}{3,725355449}\right) \quad (5.35)$$

$$r = 3,725355449 \cosh\left(\frac{z}{3,725355449}\right) \quad (5.36)$$

Aplicando as constantes $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ em (5.31) o valor analítico da área da catenóide fica $\bar{A} \approx 174,991064047 \text{ m}^2$.

O teste de convergência do algoritmo foi realizado refinando-se a malha de facetas triangulares que discretiza a superfície. Utilizou-se um cilindro de raio igual a 5 m e altura igual a 6 m como tentativa inicial para o procedimento numérico. A fim de analisar o comportamento do algoritmo apenas em relação ao grau de refinamento da malha, a tentativa inicial foi considerada a mesma em todos os casos.

A Tabela 5.4 informa o número de facetas nf , o número de restrições de igualdade nri , e o número de graus de liberdade ngl de cada malha estudada.

Tabela 5.4 - Dados das malhas utilizadas no teste de convergência

Figura 5.5	Caso	nf	nri	ngl
(a)	1º	80	60	150
(b)	2º	192	96	336
(c)	3º	320	120	540
(d)	4º	640	192	1056

Figura 5.5 - Malhas das tentativas iniciais para o teste de convergência

Aplicando as constantes $\mathbb{C}_1$ e $\mathbb{C}_2$ em (5.26):

$$z = 3,725355449 \operatorname{arccosh} \left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{3,725355449^2}} \right) \quad (5.37)$$

Sejam: A o valor da área discretizada; $\Delta z_i = |z_i - \bar{z}_i|$ o desvio da cota z do i -ésimo nó para seu respectivo par xy , onde $\bar{z}_i$ é calculado com (5.37); $\Delta z_{\max}$ é a máxima diferença entre os valores analítico e numérico da cota z ; $\bar{\Delta z}$ é o valor médio das diferenças entre os valores analítico e numérico da cota z ; e e_A é o erro relativo da área, como em (5.34); então:

Tabela 5.5 - Resultados do teste de convergência

Figura 5.6	Caso	A	$\Delta z_{\max}$	$\bar{\Delta z}$	e_A
		(m ²)	(m)	(m)	%
(a)	1°	171,3316	0,481299	0,191822	2,091
(b)	2°	173,6216	0,287710	0,104537	0,783
(c)	3°	174,0812	0,273231	0,087557	0,520
(d)	4°	174,6962	0,110167	0,032468	0,169

Figura 5.6 - Soluções numéricas

5.2 O PARABOLÓIDE HIPERBÓLICO DE CONTORNO FIXO

O objetivo nesta Subseção é determinar a superfície contida entre quatro retas, reversas duas a duas, cujo valor da área é o mínimo possível. Este é outro problema clássico do estudo das formas minimais, cuja solução analítica é a forma do *parabolóide hiperbólico*.

5.2.1 FORMA GEOMÉTRICA DA SOLUÇÃO ANALÍTICA

Como exemplo de aplicação tomou-se um parabolóide hiperbólico cuja projeção no plano xy é um quadrado de lado igual a 10m e cuja diferença entre as cotas máxima e mínima é igual a 5m.¹³

A equação da superfície que corresponde à solução analítica do problema considerado, em coordenadas cartesianas (x, y, z) , é:

$$z = 0,1(xy) \quad (5.38)$$

onde $-5 \text{ m} \leq x \leq 5 \text{ m}$, $-5 \text{ m} \leq y \leq 5 \text{ m}$ e $-2,5 \text{ m} \leq z \leq 2,5 \text{ m}$. A Figura 5.7 mostra a forma suave da superfície. Uma equação paramétrica pode ser escrita como:

$$S = \mathbf{r}(\theta_1, \theta_2) = (x(\theta_1, \theta_2); y(\theta_1, \theta_2); z(\theta_1, \theta_2)) = (\theta_1; \theta_2; 0,1\theta_1\theta_2) \quad (5.39)$$

Ou seja, as próprias coordenadas cartesianas x e y podem ser tomadas como parâmetros da superfície.

¹³ Não será feita a demonstração da solução analítica a fim de não tornar o texto exaustivo.

Figura 5.7 - Forma contínua do parabolóide hiperbólico de contorno fixo

Como este é um caso onde $z = \hat{z}(x, y)$, então a área da superfície pode ser calculada analiticamente, com qualquer precisão necessária, aplicando-se (2.3):

$$\bar{A} = \int_{-5}^5 \int_{-5}^5 \sqrt{1 + (0,1 y)^2 + (0,1 x)^2} dx dy \quad (5.40)$$

A integral em (5.40) é difícil de ser resolvida analiticamente, de modo que o resultado $\bar{A} = 107,903702 \text{ m}^2$ corresponde a uma integração numérica.

De posse de (5.38) e (5.40) é possível averiguar o resultado do modelo numérico.

5.2.2 VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 1GL POR NÓ

As verificações contidas nesta Subseção são feitas tanto para o algoritmo iterativo, cuja equação de recorrência é (4.25), quanto para o problema quadrático, dado pelo sistema de equações lineares (4.60).

As soluções numéricas obtidas a partir destas equações serão comparadas com a solução analítica apresentada na Subseção 5.2.1. Serão verificadas ainda por meio da analogia dos filmes de sabão, tomando como referência a solução numérica de uma análise não-linear de equilíbrio, realizada com o auxílio do software Ansys,

Para o estudo numérico, considerou-se um parabolóide de base quadrada, de lado 10 m, com uma diferença de cota de 5 m entre os vértices baixos e altos. Adotou-se uma malha inicial disposta no plano xy , com exceção dos nós das bordas, já constritos a assumirem suas coordenadas finais, conforme pode ser visto na Figura 5.8a.

A norma do vetor residual correspondente aos nós livres, para a malha inicial, vale $\|r_{LL}\|_0 = 4,19 \text{ m}$. A área correspondente à superfície da malha inicial vale $A_0 = 179,4018 \text{ m}^2$. A tolerância adotada é $\xi = 10^{-5} \cdot \|r_{LL}\|_0 = 4,19 \cdot 10^{-5} \text{ m}$. A área analítica da superfície vale $\bar{A} = 107,903702 \text{ m}^2$, como na Subseção 5.2.1.

A Figura 5.8b mostra o resultado obtido considerando o Problema Quadrático (PQ). A Figura 5.8d, por sua vez, apresenta o resultado da aplicação do Método de Newton (MN), tomando-se o resultado do PQ como geometria inicial do processo iterativo. Percebe-se, ao comparar a Figura 5.8b com a Figura 5.8d, que os resultados do PQ e do MN são praticamente coincidentes. Por esta razão, a solução final foi obtida em apenas duas iterações, necessárias tão somente para a verificação de ξ .

Contudo, ao se tomar a geometria mostrada na Figura 5.8a como estimativa inicial para o MN, ocorreu divergência do processo iterativo, com a matriz Hessiana tornando-se próxima da singularidade após quatro iterações. A Figura 5.8e, a Figura 5.8f e a Figura 5.8g mostram a geometria obtida em cada passo de iteração do MN, a partir da geometria inicial dada na Figura 5.8a (note-se a diferença de escala do eixo vertical!).

Figura 5.8 - Resultados da busca da forma do parabolóide hiperbólico de contorno fixo

Tabela 5.6 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação PQ+MN no Parabolóide Hiperbólico de contorno fixo

Figura 5.8	PQ ou Iteração do MN	$\ r_{LL}\ _k$	$\xi - \ r_{LL}\ _k$	A_k	e_{A_k}
	k	(m)	(m)	(m ²)	(%)
(b)	PQ	$5,04 \cdot 10^{-2}$	< 0	107,9398	0,033
(c)	1	$3,62 \cdot 10^{-4}$	< 0	107,9344	0,028
(d)	1	$1,95 \cdot 10^{-8}$	> 0	107,9344	0,028

Tabela 5.7 - Resultados dos parâmetros de convergência para a situação MN puro no Parabolóide Hiperbólico de contorno fixo

Figura 5.8	Iteração do MN	$\ r_{LL}\ _k$	$\xi - \ r_{LL}\ _k$	A_k	e_{A_k}
	k	(m)	(m)	(m ²)	
(e)	1	5,4400	< 0	$6,54 \cdot 10^{-2}$	5,06
(f)	2	5,9285	< 0	$4,65 \cdot 10^4$	429,56
(g)	3	6,2040	< 0	$7,15 \cdot 10^9$	$6,62 \cdot 10^7$

Neste caso, o resultado do PQ apresentou clara vantagem sobre a aplicação pura do MN, não apenas impedindo a divergência do processo iterativo, mas fornecendo diretamente a solução do problema.

Finalmente, a geometria determinada pela Figura 5.8d foi empregada em uma análise estática não-linear, realizada por meio do programa Ansys. Ao se impor ao modelo um campo de tensões isotrópicas e uniformes de 10^6 N/m², e aplicando um modelo constitutivo linearmente elástico na membrana, a configuração de equilíbrio foi atingida em apenas duas iterações, considerando os critérios de *default* do referido programa.

Figura 5.9 - Resultados das tensões no parabolóide hiperbólico fornecidos pelo Ansys

Observa-se que não ocorreram deformações consideráveis, uma vez que as variações das tensões se mostraram muito pequenas, conforme a Figura 5.9a, que mostra o campo das máximas tensões principais, praticamente iguais às tensões iniciais adotadas, confirmado a característica minimal da geometria adotada. Além disso, o máximo deslocamento foi de 0,068 mm, bastante pequeno se compara às dimensões da membrana.

5.2.3 VERIFICAÇÕES PARA O PROBLEMA DISCRETO COM 3GL POR NÓ

As verificações contidas nesta Subseção são feitas para o algoritmo iterativo, cuja equação de recorrência é (4.82). A solução numérica obtida a partir desta equação será comparada com a solução analítica do parabolóide hiperbólico, como na Subseção 5.2.1.

O parabolóide hiperbólico de contorno fixo é discretizado em 256 facetas triangulares, o número de restrições de igualdade é 96 e o número de graus de liberdade do sistema é 435. A superfície resultante está mostrada na Figura 5.10.

Figura 5.10 - Solução numérica para o parabolóide hiperbólico de bordas fixas
(a) malha da tentativa inicial
(b) malha da solução numérica
(c) solução em facetas triangulares planas

Tabela 5.8 - Resultados do parabolóide hiperbólico de contorno fixo

Figura 5.10	A	$\Delta z_{m\acute{a}x}$	$\overline{\Delta z}$	e_A
	(m ²)	(m)	(m)	%
(c)	107,9558	0,024239	0,008643	0,048

6 CONCLUSÕES

O trabalho iniciou-se com uma revisão histórica dos trabalhos acerca de superfícies minimais contínuas e suaves. No âmbito das superfícies discretas por elementos ou facetas planas, aplicadas a estruturas de membrana, foram apresentadas duas alternativas de diferentes autores para a busca de formas geométricas de mínima área, onde a primeira se baseava no conceito geométrico e a outra no conceito mecânico.

Posteriormente introduziu-se um estudo das superfícies espaciais contínuas e suaves baseado na geometria diferencial, onde foram definidas importantes entidades geométricas como a curvatura e a torção. Tais definições foram aplicadas no equilíbrio diferencial de membranas estruturais tornando possível a determinação das equações de equilíbrio. Demonstrou-se ainda a equivalência entre a busca por superfícies de mínima área e a busca de formas de membranas estruturais sujeitas a um estado de tensões superficiais, homogêneo e isotrópico.

Formulou-se o problema da busca da forma de superfícies minimais utilizando-se de uma metodologia puramente geométrica, baseada na minimização do funcional da área, dado pela soma das áreas das facetas triangulares nas quais a superfície é discretizada. A partir de uma analogia com a superfície contínua, foi constatada uma multiplicidade de soluções para este problema e, a partir de então, algumas alternativas foram propostas a fim de encontrar apenas uma das possíveis soluções.

A primeira alternativa foi considerar uma superfície mapeada univocamente no plano xy , ou seja, cada coordenada z associa-se uma única vez a um determinado par de coordenadas x e y . Neste caso o problema se reduz a um grau de liberdade (1GL) por nó e é passível de uma única solução. Em decorrência da não-linearidade do funcional em relação às coordenadas z , a configuração geométrica desejada é obtida por meio de um processo iterativo. Desta forma, também se propôs um

problema quadrático (PQ) semelhante, mas não de todo equivalente, cuja solução é determinada por meio de um sistema de equações lineares.

A segunda alternativa considerou o mesmo problema com as múltiplas soluções, ou seja, aquele com os três graus de liberdade (3GL) nodais. Para resolvê-lo utilizou-se de uma rotina da biblioteca de otimização do software MATLAB, a qual emprega o método dos Gradientes Conjugados Pré-condicionados para a busca de um mínimo de uma função não-linear de várias variáveis, sujeita a restrições de igualdade, e partindo de uma estimativa inicial.

Os resultados apresentados para o problema com 1GL nodal sugerem que a solução do problema quadrático pode ser tomada como uma boa estimativa inicial para o processo iterativo, que está sujeito à divergência em algumas circunstâncias.

Poderia se pensar em aplicar seqüencialmente o PQ de modo a aproximar ainda mais a solução do problema com 1GL nodal, contudo isso não aconteceria uma vez que a matriz Hessiana deste problema, conforme (4.58), depende única e exclusivamente das coordenadas x e y da malha, que são fixas por definição desta alternativa de solução.

As experiências numéricas realizadas com o PQ e com o problema de 1 GL nodal sugerem que não haja mesmo uma equivalência entre minimizar a função objetivo A , mostrada em (4.12), e minimizar a função objetivo Q , apresentada em (4.47).

Um dos resultados numéricos encontrados por meio do algoritmo geométrico com 1GL foi validado através de sua solução analítica exata, enquanto que o outro foi validado por meio de uma análise não-linear de equilíbrio, tomando partido da analogia dos filmes de sabão, cuja dedução também é apresentada. Portanto, dentro das limitações de considerar um contorno fixo e apenas as coordenadas z como variáveis do problema, esta alternativa mostrou-se bastante satisfatória para ser utilizada no processo de busca da forma de membranas estruturais.

Os resultados numéricos apresentados para o problema com 3GL foram validados por meio de suas respectivas soluções analíticas, onde foram constatados pequenos erros relativos a área, que decorrem da aproximação da superfície suave por facetas planas triangulares.

Notou-se que os desvios das cotas z para um dado par de coordenadas x e y foram bastante pequenos se comparados às dimensões dos modelos considerados e, além disso, a forma geométrica resultante é bastante próxima daquela desejada.

Outro fato relevante foi observado nos resultados do teste de convergência realizado para a catenóide, onde constatou-se a aproximação da solução para a superfície suave na medida em que é aumentado o grau de refinamento da malha. Portanto, o equacionamento aqui mostrado aliado à rotina de otimização do MATLAB, mostrou-se bastante razoável no processo de busca da forma aplicado às membranas estruturais.

6.1 TRABALHOS FUTUROS

Ao longo da elaboração deste trabalho foram observadas algumas possibilidades de continuidade para esta linha de pesquisa as quais estão relacionadas com os métodos numéricos empregados, a fim de tornar os algoritmos mais eficazes:

- ✓ prescrever as coordenadas fixas ao invés de partir o sistema como em (4.26) e em (4.61);
- ✓ escrever a função objetivo na forma de um Lagrangiano aumentado.

Outras possibilidades, também relacionadas aos métodos numéricos, têm como intuito de remover a labilidade do problema com 3GL:

- ✓ utilizar o método de Newton aliado a um procedimento de busca unidimensional;
- ✓ modificar a decomposição de Cholesky da matriz Hessiana tornando-a inversível;

- ✓ utilizar métodos Quase Newton que aproximam a inversa da matriz Hessiana, como o método BFGS.

E outra continuidade da pesquisa está relacionada com a aproximação deste procedimento de busca da forma à realidade das estruturas de membrana:

- ✓ possibilitar a flexibilidade dos bordos através de restrições isoperimétricas aplicadas.

REFERÊNCIAS

AGUIAR, E. O. **Contribuição ao Estudo de Estruturas de Cabos para Cobertura de Grandes Áreas Livres, Considerando as Não Linearidades Física e Geométrica**. 1999. 284 p. Tese (Doutorado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, SP, 1999.

BARNES, M. R. Form-Finding and Analysis of Prestressed Nets and Membranes. *Computers & Structures*, v. 30, n. 3, p. 685-695, 1988.

BERZIN, D.; HAGIWARA, I. Minimal Area for Surface Reconstruction from Cross Sections. *The Visual Computer*, v. 7, n. 18, p. 437-444, 2002.

BLETZINGER, K-U. **Form Finding and Optimization of Membranes and Minimal Surfaces**. Lyngby, Denmark: Technical University of Denmark, 1998. 22 p. Lecture notes prepared for the Ph.D. course on Advanced Topics in Structural Optimization.

BLETZINGER, K-U.; WÜCHNER, R.; DAOUD, F.; CAMPRUBÍ, N. Computational Methods for Form Finding and Optimization of Shells and Membranes. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, v. 194, n. 30-33, p. 3438-3452, 2005.

BONET, J.; WOOD, R. D., **Nonlinear Continuum Mechanics for Finite Element Analysis**. New York, NY: Cambridge University Press, 1997.

CANER, A.; HSU, R. Tensioned Fabric Shape-Finding. *Journal of Structural Engineering*, v. 125, n. 9, p. 1065-1071, 1999.

CARMO, M. P. **Differential Geometry of Curves and Surfaces**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1976.

CARMO, M. P. **Elementos da Geometria Diferencial**. Rio de Janeiro, RJ: Ao Livro Técnico, 1971.

COLEMAN, T. F.; LI, Y. An Interior, Trust Region Approach for Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *SIAM Journal on Optimization*, v. 6, n. 2, pp. 418-445, 1996.

COLEMAN, T. F.; LI, Y. On the Convergence of Reflective Newton Methods for Large-Scale Nonlinear Minimization Subject to Bounds. *Mathematical Programming*, v. 67, n. 2, p. 189-224, 1994.

DOUGLAS, J. Solition of the Problem of Plateau. *Transactions of the American Mathematical Society*, v. 33, n. 1, p. 263-321, 1931.

EISENHART, L. P. **A Treatise on the Differential Geometry of Curves and Surfaces**. New York, NY: Dover Publications, 1960.

FİRT, V. **Statics, formfinding and dynamics of air-supported membrane structures**. The Hague, The Netherlands: Martinus Nijhoff Publishers, 1983.

FUJIKAKE, M.; KOJIMA, O.; FUKUSHIMA, S. Analysis of Fabric Tension Structures. *Computers & Structures*, v. 32, n. 3-4, p. 537-547, 1989.

GRÜNDIG, L. Minimal Surfaces for Finding Forms of Structural Membranes. *Computers & Structures*, v. 30, n. 3, p. 679-683, 1988.

GRÜNDIG, L.; BAHNDORF, J. The Design of Wide-Span Roof Structures Using Micro-Computers. *Computers & Structures*, v. 30, n. 3, p. 495-501, 1988.

HÖNIG, C. S. **Aplicações da Topologia à Análise**. Rio de Janeiro, RJ: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, CNPq, 1976.

HOUAISS, A. **Dicionário Houaiss da Língua Portuguesa**. Rio de Janeiro, RJ: Objetiva, 2001.

ISENBERG, C. **The Science of Soap Films and Soap Bubbles**. New York, NY: Dover Publications, 1992.

KLINE, M. **Mathematics: The Loss of Certainty**. New York, NY: Oxford University Press, 1980.

KNUDSON, W. C. Recent Advances in the Field of Long Span Tension Structures. *Engineering Structures*, v. 13, n. 2, p. 164-177, 1991.

LINKWITZ, K. About Formfinding of Double-Curved Structures. *Engineering Structures*, v. 21, n. 8, p. 709-718, 1999.

MAURIN, B.; MOTRO, R. The Surface Stress Density Method as a Form-Finding Tool for Tensile Membranes. *Engineering Structures*, v. 20, n. 8, p. 712-719, 1998.

MØLLMANN, H. **Introduction to the Theory of Thin Shells**. New York, NY: Wiley, 1981.

OHMORI, H.; HAGIWARA, N.; MATSUI, T.; MATSUOKA, O. Numerical Analysis of Minimum Surface by Finite Element Method. In: IASS - INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL AND SPATIAL STRUCTURES SYMPOSIUM - 10 Years of Progress in Shell and Spatial Structures, 1., 1989, Madrid, Spain. **Proceedings of IASS 1989 Symposium**.

PAULETTI, R. M. O. An Extension of the Force Density Procedure to Membrane Structures. In: IASS - INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL AND SPATIAL STRUCTURES SYMPOSIUM - New Olympics, New Shell and Spatial Structures, 18., 2006, Beijing, China. **Proceedings of IASS 2006 Symposium**.

PAULETTI, R. M. O. **História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas**. 2003. 257 p. Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2003.

PAULETTI, R. M. O.; SOUZA, D. C. B. **Análise de Estruturas Retesadas**. São Paulo, SP: Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2007. 29 p. Notas de aula da disciplina de pós-graduação PEF5750 - Sistemas Estruturais Leves para Cobertura de Grandes Vãos.

PIMENTA, P. M. **Fundamentos da Mecânica dos Sólidos e das Estruturas**. São Paulo, SP: Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2006. 388 p. Notas de aula da disciplina de pós-graduação PEF5742 - Fundamentos da Mecânica das Estruturas II.

PRESS, W. H.; TEUKOLSKY, S. A.; VETTERLING, W. T.; FLANNERY, B. P. **Numerical Recipes in Fortran: The Art of Scientific Computing**. 2nd Edition. New York, NY: Cambridge University Press, 1992.

SOUZA, D. C. B.; PAULETTI, R. M. O.; ALMEIDA N., E. S. Finding Minimal Surfaces by Direct Area Minimization. IN: INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL AND SPATIAL STRUCTURES SYMPOSIUM - New Material and Technologies - New Designs and Innovations, 20., Acapulco, Mexico. **Proceedings of IASS 2008 Symposium**. No prelo.

SOUZA, D. C. B.; PAULETTI, R. M. O.; ALMEIDA N., E. S. Sobre a Busca de Superfícies Minimais Aplicada às Tensoestruturas. IN: CILAMCE - CONGRESSO IBERO LATINO-AMERICANO SOBRE MÉTODOS COMPUTACIONAIS EM ENGENHARIA, 28., 2007, Porto, Portugal. **Atas do CILAMCE 2007**.

SUZUKI, T.; HANGAI, Y. Shape Analysis of Minimal Surface by the Finite Element Method. In: INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR SHELL AND SPATIAL STRUCTURES SYMPOSIUM - Spatial Structures at the Turn of the Millenium, 3., Copenhagen, Denmark, 1991. **Proceedings of IASS 1991 Symposium**.

TABARROK, B.; QIN Z. Dynamic Analysis of Tension Structures. Computers & Structures, v. 62, n. 3, p. 467-474, 1997.

TABARROK, B.; QIN Z. Nonlinear Analysis of Tension Structures. Computers & Structures, v. 45, n. 5-6, p. 973-984, 1992.