GIANLUCA MARCHIORI

Análise isogeométrica aplicada a elementos de vigas planas

São Paulo

2019

GIANLUCA MARCHIORI

Análise isogeométrica aplicada a elementos de vigas planas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

São Paulo

2019

GIANLUCA MARCHIORI

Análise isogeométrica aplicada a elementos de vigas planas

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Ciências

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Livre-Docente
Alfredo Gay Neto

São Paulo
2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Marchiori, Gianluca

Análise isogeométrica aplicada a elementos de vigas planas / G.

Marchiori -- versão corr. -- São Paulo, 2019.

89 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Análise isogeométrica 2.Método dos elementos finitos 3.Método de Lagrange 4.Método de penalidade 5.Viga I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de trilhar pela senda do conhecimento e desenvolvimento intelectual.

Agradeço ao Professor Alfredo por me orientar neste trabalho e muito contribuir para minha formação acadêmica.

Agradeço a meus pais, Darci e Sueli, e irmão, Renan, por serem meus apoios morais e afetivos por toda a minha vida.

Agradeço a Cláudia pela compreensão e companheirismo.

Agradeço a todos aqueles que contribuíram direta e indiretamente para meu avanço moral e intelectual, docentes e colegas de escola.

“... Buscai e achareis ...”

Jesus

(Lucas 11:9)

RESUMO

A análise isogeométrica (AIG) de estruturas consiste em construir a geometria exata ou aproximada de um modelo computacional a partir de funções criadas por meio de tecnologias de *Computer Aided Design* (CAD), tais como *B-Splines*, NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) e *T-splines*, e aplicar o conceito de análise isoparamétrica, ou seja, representar o espaço de solução para as variáveis independentes em termos das mesmas funções que representam a geometria. O presente trabalho visa o estudo da análise isogeométrica aplicada a vigas planas, com a utilização de *B-Splines* e NURBS para aproximação de deslocamentos. São desenvolvidos modelos isogeométricos de vigas planas baseados nas hipóteses de Bernoulli-Euler e Timoshenko, e alguns exemplos de aplicação são realizados a fim de comparar os resultados numéricos com soluções analíticas, mostrando boa concordância. Uma questão pertinente à AIG corresponde à imposição de vínculos em pontos do domínio em que as funções básicas não sejam interpolatórias ou os vínculos desejados não forem diretamente relacionados aos graus de liberdade do elemento, que é o caso do elemento de viga de Bernoulli-Euler, já que as rotações geralmente não são tidas como graus de liberdade mas há a necessidade de se prescrever condições de contorno/conexão nas mesmas para descrever problemas físicos. Essa questão é tratada no presente trabalho através dos Métodos de Lagrange e de penalidade. São realizados exemplos de aplicação construídos com elementos de viga de Bernoulli-Euler utilizando os métodos de Lagrange e de penalidade na imposição de vínculos e na conexão entre pontos de regiões de domínio.

Palavras-chave: Análise isogeométrica. *Splines*. Viga. Método dos elementos finitos. Método de Lagrange. Método de penalidade. Multirregiões.

ABSTRACT

Isogeometric analysis (IGA) consists on building the geometry of the computational model with functions created by Computer Aided Design (CAD) technologies, such as B-Splines, NURBS (Non-Uniform Rational B-Splines) and T-Splines. Then, isoparametric concept is employed, that is, the solution space is represented by means of the same functions used to describe the geometry. The aim of the present contribution is the study of isogeometric analysis applied to 2D beams with interpolation via B-splines and NURBS. Two-dimensional isogeometric beam formulations based on Bernoulli-Euler and Timoshenko assumptions are presented. Some examples of application are given and results are compared to analytical solutions, showing good agreement. An important issue about IGA corresponds to the imposition of constraints at points of domain in which the shape functions are not interpolatory, or the desired constraints are not directly related to the degrees of freedom. This may occur for Bernoulli-Euler beams since rotations are not usually defined as degrees of freedom, but they need to be assessed for prescription of some boundary/connection conditions. This is done in present contribution by employing both Lagrange and penalty methods. Some examples of structures composed by 2D isogeometric Bernoulli-Euler beam elements are solved by using Lagrange and Penalty methods to impose constraints and to make the connection between domain regions.

Keywords: Isogeometric analysis. Splines. Beam. Finite element method. Lagrange method. Penalty method. Multi-region.

SUMÁRIO

1	Introdução	1
2	<i>B-Splines</i>	5
2.1	Vetor nodal (<i>Knot vector</i>)	5
2.2	Funções básicas de <i>B-splines</i>	5
2.3	Curva <i>B-spline</i>	7
2.4	Refinamentos	8
2.4.1	Refinamento h: inserção de nós	8
2.4.2	Refinamento p: elevação de ordem	10
2.4.3	Refinamento k	11
2.5	NURBS	14
3	Modelos de vigas retas	16
3.1	Viga de Bernoulli-Euler	16
3.1.1	Modelo matemático	16
3.1.2	Formulação do elemento isogeométrico	20
3.1.3	Exemplo de aplicação 1	24
3.2	Viga de Timoshenko	26
3.2.1	Modelo matemático	26
3.2.2	Formulação do elemento isogeométrico	29
3.2.3	Exemplo de aplicação 2	35
4	Modelos de vigas curvas	37
4.1	Viga de Bernoulli-Euler	37
4.1.1	Modelo matemático	37
4.1.2	Formulação do elemento isogeométrico	41
4.1.3	Exemplo de aplicação 3	47
4.2	Viga de Timoshenko	49
4.2.1	Modelo matemático	49

4.2.2	Formulação do elemento isogeométrico.....	50
4.2.3	Exemplo de aplicação 4.....	58
5	Vínculos.....	60
5.1	Método de Lagrange	62
5.2	Método de Penalidade.....	66
5.3	Exemplo de aplicação 5	71
5.4	Exemplo de aplicação 6	75
6	Conclusão	79
7	Referências bibliográficas	80
Apêndice A – Implementação de elementos isogeométricos no Mathematica™		84
A.1.	Elemento de viga de Bernoulli-Euler	84
A.2.	Elemento de viga de Timoshenko.....	86

1 Introdução

A análise isogeométrica (AIG) consiste em utilizar as mesmas funções empregadas na modelagem geométrica, por meio de tecnologias de *Computer Aided Design* (CAD), na aproximação das variáveis independentes de problemas regidos por equações diferenciais parciais, presentes em áreas como mecânica dos sólidos e fluidos. Essas funções usualmente correspondem a *B-Splines*, NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) e *T-splines*. O conceito isogeométrico foi proposto por Hughes *et al.* (2005)[1] com a motivação de integrar a modelagem geométrica e a análise estrutural, reduzindo custos computacionais na geração e refinamento de malhas do Método dos Elementos Finitos (MEF) com a adoção da geometria exata da modelagem geométrica na análise estrutural.

A análise isogeométrica possui muito em comum com o método dos elementos finitos, a principal diferença reside no fato de empregar funções usuais de tecnologias CAD como funções de forma. Entretanto, é mais fundamentada na geometria e favorece a representação de problemas que envolvam estruturas e superfícies curvas. Uma característica importante da análise isogeométrica com utilização de *B-Splines* e NURBS reside na garantia de continuidade C^{p-1} , sendo p o grau da *spline*, ao contrário da continuidade C^0 obtida através do método dos elementos finitos tradicional, por meio de interpolação com polinômios de Lagrange. Apesar das diferenças entre as funções de forma da AIG e MEF, pode-se criar estruturas de dados de elementos isogeométricos, baseadas em extração de Bézier de NURBS e *T-splines* ([2] e [3]), e incorporá-las em códigos de elementos finitos já existentes, somente com alterações nas sub-rotinas de funções de forma.

Devido à facilidade em gerar a geometria de um modelo computacional através das tecnologias CAD, uma série de trabalhos está sendo feita sobre análise isogeométrica. A primeira publicação no assunto corresponde a [1], no qual o conceito de análise isogeométrica foi introduzido. Em [1], bases de funções NURBS são empregadas na construção de modelos geometricamente exatos. Apresentam-se os tipos de refinamento de solução que podem ser aplicados na análise isogeométrica, tais como os refinamentos h e p , análogos aos do método dos elementos finitos, e o refinamento k , eleito o mais eficiente [1] e exclusivo da análise isogeométrica. Através dessas técnicas, as bases de funções NURBS são sistematicamente enriquecidas sem alterar a geometria ou sua parametrização. Isso significa que as técnicas de refinamento adaptativo podem ser utilizadas sem conexão com a base de dados CAD, em contraste com o método dos elementos finitos. Enfim, são apresentados exemplos de aplicação

em estruturas e fluidos, e argumenta-se que a análise isogeométrica corresponde a uma alternativa viável ao método dos elementos finitos tradicional.

A eficiência da análise isogeométrica é afetada pela quadratura durante a integração numérica, e Hughes *et al.* (2008)[4] apresentam um estudo sobre o assunto. Os autores chegam a uma regra denominada *half-point rule*, que indica que o número ótimo de pontos de integração seja aproximadamente igual à metade dos graus de liberdade do problema, ou seja, metade do número de funções básicas do espaço em questão. Ademais, são apresentadas diversas regras práticas de quadratura além de um procedimento numérico para se determinar regras eficientes. Recentemente, a análise isogeométrica está presente em diversos campos de estudo. Estudos sobre turbulência e interação fluido-estrutura são apresentados em [5]-[9]. Em [10]-[11], a análise isogeométrica é aplicada a formulações de contato. Estudos sobre otimização estrutural e vibrações são apresentados em [12] e [13], respectivamente. Trabalhos envolvendo análise isogeométrica aplicada a elementos de cascas são apresentados em [14]-[16].

As vigas, que correspondem ao objeto de estudo do presente trabalho, são de grande importância para a engenharia, pois possibilitam a análise de uma série de estruturas de interesse, tais como, edifícios, pontes, passarelas de pedestres, arcos, trilhos de ferrovia, *risers* para exploração de petróleo *offshore*, etc. Assim sendo, há uma vasta quantidade de estudos envolvendo vigas sendo realizados. Gay Neto *et al.* (2013)[17] e Gay Neto (2015)[18] apresentaram modelos de viga não lineares geometricamente exatos para análise estática e dinâmica de *risers* para exploração de petróleo *offshore*, respectivamente. Em [19] e [20], são desenvolvidos elementos finitos com continuidade C^1 baseados em funções de forma Hermitianas para os casos 2D e 3D, respectivamente.

A análise isogeométrica também está presente em diversos tipos de aplicações envolvendo vigas. Em [21] a [25], estudos sobre o combate a efeitos de travamento, tais como *shear* e *membrane locking*, são realizados através da AIG. Outra aplicação da análise isogeométrica corresponde ao estudo de vibrações em vigas planas, presentes em [26] e [27]. Um estudo sobre otimização da forma de vigas isogeométricas é realizado em [28], e análises isogeométricas de vigas 2D e 3D são apresentadas em [29] a [32] e [22] e [33], respectivamente.

Curvas e superfícies *B-splines* e NURBS são obtidas através de combinações lineares entre pontos de controle e funções básicas, que são geradas por um conjunto de coordenadas (nós ou *knots*) de um espaço paramétrico chamado de vetor nodal (*knot vector*). Assim, pode-se dizer que uma estrutura descrita por apenas uma curva ou superfície é composta de apenas uma região (*single-patch*). Uma questão relevante à AIG consiste em como conectar ou aplicar vínculos na

conexão de estruturas descritas por diferentes funções básicas e vetores nodais, ou seja, como lidar com estruturas composta de multirregiões (*multi-patch structures*).

Particularmente, no contexto da AIG, quando se deseja aplicar vínculos relacionados aos graus de liberdade diretamente, é possível a obtenção de funções básicas (ou de forma) interpolatórias em pontos de interesse. Entretanto, quando isso não for conveniente ou os vínculos não forem diretamente relacionados aos graus de liberdade, a imposição dos vínculos entre as multirregiões não é tão direta. Esse é o caso, por exemplo, dos elementos de placa de Kirchhoff-Love e vigas de Bernoulli-Euler, já que as rotações geralmente não são tidas como graus de liberdade, mas há a necessidade de se impor vínculos nas mesmas para descrever modelos físicos. Em [34], é desenvolvida uma formulação isogeométrica baseada na teoria de cascas de Kirchhoff-Love para análise de estruturas de cascas finas composta por multirregiões. Faixas de material fictício com rigidez à flexão unidirecional são adicionadas entre as diferentes cascas a fim de estabelecer a conexão entre as mesmas. Em [35], uma formulação G^1 implícita para o tratamento de multirregiões de vigas espaciais de Kirchhoff-Love é elaborada. A formulação, denominada G^1 , se vale de propriedade geométrica de *clamped B-splines*, utilizadas na descrição da geometria da viga, para impor continuidade de rotação nas extremidades dos elementos interligados. *Clamped B-splines* possuem a propriedade de serem tangentes ao primeiro e último segmentos do polígono de controle nos extremos da curva e, assim sendo, a continuidade da rotação entre elementos conectados por suas extremidades pode ser feita impondo o alinhamento do último segmento do polígono de controle da curva *B-spline* de um elemento com o primeiro segmento do polígono de controle da curva do outro elemento. Através dessa formulação, as rotações dos extremos das vigas são introduzidas a partir de uma reparametrização do primeiro e do último segmento do polígono de controle como uma composição de uma rotação de corpo rígido e um alongamento. Então, adotando uma descrição espacial para os movimentos de corpo rígido dos extremos das vigas, um arranjo G^1 é gerado automaticamente para a matriz de rigidez global da estrutura.

Nesse contexto, o presente trabalho visa o estudo da análise isogeométrica aplicada a vigas planas, com a utilização de *B-Splines* e NURBS para interpolação de deslocamentos. Alguns exemplos de aplicação são realizados a fim de comparar os resultados numéricos com soluções analíticas, mostrando boa concordância. Baseando-se ao feito para o método *Meshless* em [36], a imposição de vínculos entre multirregiões é desenvolvida através dos Métodos de Lagrange e de penalidade, levando-se em consideração o elemento de viga de Bernoulli-Euler, cuja rotação não corresponde diretamente a um grau de liberdade.

O trabalho se inicia com uma introdução sobre *B-Splines* e NURBS. Em seguida, são desenvolvidos modelos isogeométricos de vigas planas baseados nas hipóteses de Bernoulli-Euler e Timoshenko. Alguns exemplos de aplicação são realizados a fim de se comparar os resultados numéricos com soluções analíticas, mostrando boa concordância. Por fim, apresenta-se o desenvolvimento dos Métodos de Lagrange e de penalidade para imposição de restrições vinculares. A aplicabilidade dos métodos é verificada por meio de exemplos numéricos.

2 *B-Splines*

Nesta seção, apresenta-se uma introdução a *B-splines* e NURBS, que correspondem às tecnologias CAD utilizadas na descrição da geometria e na aproximação dos campos de deslocamento do presente trabalho.

2.1 Vetor nodal (*Knot vector*)

Um vetor nodal, ou *knot vector*, corresponde a um conjunto de ordenadas não decrescentes do espaço paramétrico a partir do qual são geradas as *B-splines*. O vetor nodal é dado por $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_i, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, em que $\xi_i \in \mathbb{R}$ corresponde à coordenada do i -ésimo nó, i é o índice do nó, p é a ordem da *B-spline*, e n é o número de funções básicas da *B-spline*.

Um vetor nodal é dito uniforme quando as coordenadas dos nós são igualmente espaçadas. Quando isso não ocorre, o vetor nodal é chamado de não uniforme. Também pode ocorrer de nós possuírem as mesmas coordenadas, e um vetor nodal é dito aberto quando o primeiro e o último nó aparecem $p+1$ vezes. Vetores nodais abertos possuem uma característica interessante, que corresponde a gerar funções básicas de *B-splines* interpolatórias nos extremos do intervalo do espaço paramétrico $[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, ou seja, $N_{1,p}$ e $N_{n,p}$ são unitárias em ξ_1 e ξ_{n+p+1} , respectivamente, enquanto as demais funções da base são nulas (ver Figura 2.2).

2.2 Funções básicas de *B-splines*

As funções básicas de *B-splines* são geradas recursivamente a partir de funções constantes ($p=0$) definidas por trechos (suporte compacto):

$$N_{i,0} = \begin{cases} 1 & \text{se } \xi_i \leq \xi < \xi_{i+1}, \\ 0 & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.2.1)$$

Então, as funções básicas de ordem $p \geq 1$ são geradas a partir das funções básicas de ordem imediatamente inferior, segundo a seguinte expressão:

$$N_{i,p}(\xi) = \frac{\xi - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i} N_{i,p-1}(\xi) + \frac{\xi_{i+p+1} - \xi}{\xi_{i+p+1} - \xi_{i+1}} N_{i+1,p-1}(\xi) \quad (2.2.2)$$

Quando não há nós repetidos no vetor nodal, funções básicas de ordem p possuem $p-1$ derivadas contínuas. Se um valor de nó interno aparece k vezes, o número de derivadas contínuas corresponde a $p-k$. Quando a multiplicidade do nó interno coincide com p , as funções básicas são interpolatórias na ordenada desse nó.

A Figura 2.1 ilustra um exemplo de funções básicas de ordem 2 geradas a partir do vetor nodal uniforme $\Xi_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$. Como não há nós repetidos, as funções básicas possuem a primeira derivada contínua ($2-1=1$). Enquanto a Figura 2.2 ilustra o caso de funções básicas de ordem 2 obtidas a partir de um vetor aberto não uniforme, que corresponde a $\Xi_2 = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5\}$. Nesse caso, as funções básicas ($N_{1,2}$ e $N_{8,2}$) são interpolatórias nas extremidades do intervalo do espaço paramétrico e as derivadas de algumas das funções, $N_{4,2}$, $N_{5,2}$ e $N_{6,2}$, são descontínuas ($2-2=0$) na coordenada do espaço paramétrico correspondente ao nó interno repetido (3).

Figura 2.1: Funções básicas quadráticas obtidas a partir de $\Xi_1 = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

Figura 2.2: Funções básicas quadráticas obtidas a partir de $\Xi_2 = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5\}$

A seguir, estão descritas características importantes das funções básicas de *B-splines* (adaptado de [1]):

- (1) Constituem partições da unidade, ou seja, $\forall \xi$ (para vetores nodais abertos)

$$\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) = 1.$$

- (2) O suporte de cada $N_{i,p}$ é compacto e contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$.

- (3) Cada função básica é não negativa, ou seja, $N_{i,p} \geq 0, \forall \xi$. Consequentemente, todos os coeficientes de uma matriz de massa calculadas com funções básicas de *B-splines* são não negativos.

2.3 Curva *B-spline*

Curvas são geradas a partir da combinação linear entre as funções básicas de *B-splines* e os coeficientes chamados de *control points* (ou pontos de controle), conforme equação a seguir:

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) C_i \quad (2.3.1)$$

Fazendo a combinação linear das funções básicas da Figura 2.2 com o conjunto de pontos de controle $C = \{(0,0), (0,2), (1.5,-1), (2.5,-1), (3,-1), (3.5,0), (4,0)\}$ contido em $\mathbb{R}^2$, obtém-se a *B-spline* representada na Figura 2.3. É interessante observar a descontinuidade da primeira derivada da curva, evidenciada pela mudança brusca de orientação tangente à curva no ponto de controle C_5 . Esse fato é devido à repetição do nó 3 do vetor nodal, que promove a construção de funções básicas com a primeira derivada descontínua. Os segmentos de reta verdes indicados na Figura 2.3 são chamados de polígono de controle e correspondem à interpolação linear entre os pontos de controle. Os pontos de controle estão representados na cor vermelha.

Propriedades importantes de curvas *B-splines* são (adaptadas de [37]):

- (1) Possuem derivadas contínuas de ordem $p-1$, se não houver nós ou pontos de controle repetidos.
- (2) Se um nó ou ponto de controle aparece k vezes, o número de derivadas contínuas no ponto correspondente da curva corresponde a $p-k$.

Figura 2.3: Curva B-spline obtida com $\Xi_2 = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5, 5, 5\}$

2.4 Refinamentos

O princípio da análise isogeométrica corresponde ao emprego das mesmas funções utilizadas na descrição da geometria, *B-splines* e NURBS (no presente trabalho), na aproximação dos deslocamentos do elemento. Em alguns casos, mesmo que as funções básicas de *B-splines* e NURBS sejam capazes de descrever exatamente a geometria desejada, elas podem promover aproximações de deslocamentos que produzam resultados insatisfatórios na análise estrutural. Assim sendo, a fim de se aprimorar as soluções da estrutura, a base de funções de aproximação pode ser enriquecida através dos refinamentos h , p e k .

2.4.1 Refinamento h : inserção de nós

O refinamento h , análogo ao feito no método dos elementos finitos, consiste em elevar a quantidade de nós no vetor nodal. A cada nó inserido no vetor nodal, é gerada uma função básica de *B-splines* a mais para a aproximação do campo de solução para uma dada ordem polinomial p .

Conforme mencionado na Seção 2.2, a repetição de nós reduz a continuidade das funções básicas. Quando se aplica o refinamento h para uma curva *B-spline*, para que a mesma não se torne descontínua, cada nó interno não pode ter a multiplicidade maior que p . As características

geométricas e paramétricas da curva são preservadas escolhendo os novos pontos de controle conforme equações (2.4.1) e (2.4.2).

Seja $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_{n+p+1}\}$ um vetor nodal, e $\bar{\xi} \in [\xi_k, \xi_{k+1})$ um nó a ser inserido no vetor. O novo vetor nodal corresponde a $\Xi = \{\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_k, \bar{\xi}, \xi_{k+1}, \dots, \xi_{n+p+1}\}$, e as $n+1$ funções básicas são geradas a partir de (2.2.1) e (2.2.2). Os novos pontos de controle $\{\bar{C}_1, \bar{C}_2, \dots, \bar{C}_{n+1}\}$ são calculados a partir dos pontos de controle originais $\{C_1, C_2, \dots, C_n\}$ como:

$$\bar{C}_i = \alpha_i C_i + (1 - \alpha_i) C_{i-1} \quad (2.4.1)$$

Onde:

$$\alpha_i = \begin{cases} 1, & 1 \leq i \leq k-p, \\ \frac{\bar{\xi} - \xi_i}{\xi_{i+p} - \xi_i}, & k-p+1 \leq i \leq k, \\ 0, & k+1 \leq i \leq n+p+2. \end{cases} \quad (2.4.2)$$

A seguir, na Figura 2.4, há um exemplo de refinamento h: uma curva B-spline gerada com $\Xi = \{0, 0, 0, 1, 1, 1\}$ e a curva refinada obtida com $\Xi = \{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1\}$ são apresentadas com suas respectivas funções básicas.

Funções originais com $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$ Novas funções com $\Xi = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$ Curva original com $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$ Nova curva com $\Xi = \{0,0,0,0.5,1,1,1\}$

Figura 2.4: Exemplo de refinamento h

2.4.2 Refinamento p: elevação de ordem

O refinamento p, também análogo ao feito no método dos elementos finitos, consiste em refinar a curva *B-spline* por meio da elevação de ordem polinomial das funções da base. Para que a continuidade das derivadas da curva seja preservada, deve ser acrescida uma repetição de cada nó no vetor nodal.

Como o espaço de solução gerado pelas funções de ordem elevada pelo refinamento p contém o espaço de solução original, é possível elevar a ordem das funções básicas sem alterar a geometria da curva *B-spline*. Informações detalhadas sobre o procedimento do refinamento p para que não haja alterações na parametrização da curva são encontradas em [37]. A Figura 2.5 ilustra um exemplo de refinamento p.

Funções originais com $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$

Novas funções com $\Xi = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$

Curva original com $\Xi = \{0,0,0,1,1,1\}$

Curva refinada com $\Xi = \{0,0,0,0,1,1,1,1\}$

Figura 2.5: Exemplo de refinamento p

2.4.3 Refinamento k

O refinamento k consiste em elevar a ordem das funções da base (refinamento p) e, em seguida, inserir nós ao vetor nodal (refinamento h). Esse refinamento não possui analogia com o método dos elementos finitos convencional e se vale da propriedade de não comutatividade da elevação de ordem e inserção de nós para obter uma base de funções com maior continuidade.

Dada a ordem polinomial p e um nó $\bar{\xi}$ a ser inserido em um intervalo entre dois nós do vetor nodal, realizando inicialmente o refinamento h, as funções básicas teriam $(p-1)$ derivadas contínuas em $\bar{\xi}$. Fazendo, em seguida, a elevação de ordem para um valor $(p+1)$, resultariam funções básicas com $(p+1-2 = p-1)$ derivadas contínuas em $\bar{\xi}$, já que no refinamento p as

condições de continuidade das derivadas da curva *B-splines* são mantidas inserindo, a cada ordem elevada, uma repetição de cada nó do vetor nodal. Enquanto que, no refinamento k , primeiramente é feita a elevação de ordem a $(p+1)$. Então, realiza-se o refinamento h , inserindo $\bar{\xi}$ ao vetor nodal, resultando funções básicas com $(p+1-1=p)$ derivadas contínuas em $\bar{\xi}$. Dessa maneira, é possível obter uma base com maior continuidade de suas derivadas.

A Figura 2.6, a seguir, ilustra a não comutatividade da elevação de ordem e inserção de nós e a maior continuidade da base obtida com o refinamento k .

Figura 2.6: a) Exemplo de refinamento h seguido de refinamento p; b) exemplo de refinamento k.

2.5 NURBS

Uma curva NURBS (*Non-Uniform Rational B-Splines*) é definida como:

$$S(\xi) = \frac{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i C_i}{\sum_{i=1}^n N_{i,p}(\xi) w_i} \quad (2.5.1)$$

Onde C_i são os pontos de controle (*control points*), os valores w_i são chamados de pesos, e $N_{i,p}$ são funções básicas definidas por vetores nodais abertos (*open knot vectors*).

As funções racionais básicas são dadas pela equação:

$$R_{i,p}(\xi) = \frac{N_{i,p}(\xi) w_i}{\sum_{j=1}^n N_{j,p}(\xi) w_j} \quad (2.5.2)$$

Assim sendo, a equação (2.5.1) pode ser reescrita da seguinte maneira:

$$S(\xi) = \sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) C_i \quad (2.5.3)$$

A seguir, estão descritas características importantes de NURBS, adaptadas de [37]:

- (1) As funções racionais básicas são partições da unidade, ou seja, $\forall \xi$

$$\sum_{i=1}^n R_{i,p}(\xi) = 1.$$

- (2) O suporte de cada $R_{i,p}$ é compacto e contido no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1}]$.

- (3) Cada função básica é não negativa, ou seja, $R_{i,p} \geq 0, \forall \xi$. Consequentemente, todos os coeficientes de uma matriz de massa calculadas com funções básicas racionais são não negativos.

- (3) Todas as derivadas de $R_{i,p}$ existem nos intervalos entre os pontos do vetor nodal, onde consiste em uma função racional com denominador não nulo. Em um nó, $R_{i,p}$ possui $p-k$ derivadas contínuas, sendo k a multiplicidade do nó.

- (4) Se $w_i=1$ para todo i , então $R_{i,p} = N_{i,p}$. Portanto, as funções básicas de B-splines são um caso particular de NURBS.
- (5) Alterando-se as coordenadas do ponto de controle C_i ou o valor do peso w_i , a curva somente é modificada no intervalo correspondente a $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$.

Uma propriedade relevante das curvas NURBS, em detrimento das curvas B-splines, reside na melhor flexibilidade no controle localizado da forma da curva devido à presença dos pesos (w_i), ou seja, além do controle da forma da curva ser realizado pelas coordenadas dos pontos de controle, algo comum em ambas as tecnologias, a forma das curvas NURBS também pode ser alterada localmente devido à mudança do peso. Assim sendo, movendo-se C_i ou alterando-se w_i , modifica-se apenas a parte da curva NURBS compreendida no intervalo $[\xi_i, \xi_{i+p+1})$. A Figura 2.7 ilustra um exemplo do efeito da alteração do peso w_2 da curva B-spline da Figura 2.3, que corresponde a um caso particular de NURBS ($w_i = 1, 1 \leq i \leq n$). As curvas tracejadas em vermelho e azul correspondem, respectivamente, às curvas com $w_2 = 1.1$ e $w_2 = 0.9$. É possível observar que a elevação do peso w_2 faz com que a curva se aproxime do ponto de controle associado ao mesmo, C_2 , e vice-versa.

Figura 2.7: Exemplo de alteração de um dos pesos de uma curva NURBS.

3 Modelos de vigas retas

3.1 Viga de Bernoulli-Euler

3.1.1 Modelo matemático

O primeiro modelo de viga plana reta abordado neste trabalho corresponde ao modelo de Bernoulli-Euler, cujas hipóteses são as seguintes:

Figura 3.1: Modelo de viga prismática com carregamento transversal

- Geometria: barra prismática (seção transversal constante e eixo reto) cujo plano xz corresponde a um plano de simetria.
- Cinemática: as seções transversais permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado da viga, e o eixo da viga passa pelo centroide das mesmas.
- Carregamentos externos: o carregamento externo é transversal à viga e modelado como força de volume: $\mathbf{f}^B = f_z^B(x)\mathbf{e}_z$
- Condições de contorno: o modelo permite a prescrição de forças de superfície e deslocamentos nas seções extremas da viga. Na superfície lateral, as forças de superfície são nulas.
- Esforços internos: as tensões normal e transversal, τ_{xx} e τ_{xz} , respectivamente, são as únicas tensões não nulas do modelo.

A partir dessas hipóteses, é possível construir o equacionamento apresentado a seguir. Informações e detalhes adicionais sobre a formulação do modelo de Bernoulli-Euler podem ser encontradas em [38].

a) Equilíbrio diferencial segundo os eixos x e z:

$$\frac{\partial \tau_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xz}}{\partial z} = 0 \quad (3.1.1)$$

$$\frac{\partial \tau_{xz}}{\partial x} + f_z^B(x) = 0 \quad (3.1.2)$$

b) Equações constitutivas: lei de Hooke generalizada:

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\tau_{xx}}{E}, \quad \varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \tau_{xx}, \quad \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \tau_{xx} \quad (3.1.3)$$

$$\gamma_{xy} = 0, \quad \gamma_{yz} = 0, \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3.1.4)$$

c) Relações de deformações e deslocamentos:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\tau_{xx}}{E} \quad (3.1.5)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\nu}{E} \tau_{xx} \quad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial w}{\partial z} = -\frac{\nu}{E} \tau_{xx} \quad (3.1.7)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = 0 \quad (3.1.8)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0 \quad (3.1.9)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3.1.10)$$

d) Hipótese cinemática (Figura 3.2)

$$\alpha \approx \tan \alpha \approx \frac{dw}{dx} \quad (3.1.11)$$

$$u(x) = -z \frac{dw}{dx} \quad (3.1.12)$$

$$w(x) = w_G(x) - (z - z \cos \alpha) = w_G(x) \quad (3.1.13)$$

$$v(x) = 0 \quad (3.1.14)$$

Figura 3.2: Hipótese cinemática da viga de Bernoulli-Euler

Substituindo (3.1.12) e (3.1.13) em (3.1.10):

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\frac{dw}{dx} + \frac{dw}{dx} = 0 \quad (3.1.15)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \quad (3.1.16)$$

O resultado da equação (3.1.16) corresponde a uma inconsistência do modelo de Bernoulli-Euler, já que a tensão de cisalhamento provocada pela força cortante não pode ser nula para que haja equilíbrio.

e) Linha elástica

A partir do equilíbrio de forças em um comprimento diferencial da viga, chega-se a:

Figura 3.3: Equilíbrio de um comprimento diferencial da viga de Bernoulli-Euler

$$f_z = f_z^B A \quad (3.1.17)$$

$$\tau_{xx} = E \frac{\partial u}{\partial x} = -z E \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.1.18)$$

$$M = -\int_A \tau_{xx} z dA = E \frac{d^2 w}{dx^2} \int_A z^2 dA = EI \frac{d^2 w}{dx^2} \quad (3.1.19)$$

$$\sum M = 0 \Rightarrow dM - V dx = 0 \Rightarrow V = \frac{dM}{dx} \quad (3.1.20)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow f_z dx - dV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = f_z \quad (3.1.21)$$

A partir de (3.1.19) e (3.1.20):

$$\frac{dV}{dx} = \frac{d^2 M}{dx^2} = EI \frac{d^4 w}{dx^4} \quad (3.1.22)$$

Substituindo (3.1.21) em (3.1.22), obtém-se a equação da linha elástica da viga de Bernoulli-Euler:

$$\frac{d^4 w}{dx^4} = \frac{f_z}{EI} \quad (3.1.23)$$

3.1.2 Formulação do elemento isogeométrico

A formulação do elemento de viga isogeométrico parte do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (3.1.24)$$

Onde:

δW_i : trabalho virtual interno do elemento;

δW_e : trabalho virtual externo do elemento;

$\delta( )$: refere-se a uma quantidade virtual.

O trabalho interno do elemento é calculado como segue:

$$\delta W_i = \int_V (\tau_{xx} \delta \epsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV = \int_V (\tau_{xx} \delta \epsilon_{xx}) dV \quad (3.1.25)$$

$$\tau_{xx} = -z E \frac{d^2 w}{dx^2}, \quad \delta \epsilon_{xx} = -z \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \Rightarrow \delta W_i = \int_L \left(\int_A E \frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} z^2 dA \right) dx \quad (3.1.26)$$

$$\delta W_i = EI \int_L \left(\frac{d^2 w}{dx^2} \frac{d^2 \delta w}{dx^2} \right) dx \quad (3.1.27)$$

Onde:

V: volume do elemento;

L: comprimento do elemento;

A: área da seção transversal do elemento.

O trabalho externo do elemento é dado pela equação (3.1.28):

$$\delta W_e = \int_L f_z \delta w dx + F_0 \delta w_0 + F_L \delta w_L + M_0 \frac{d\delta w_0}{dx} + M_L \frac{d\delta w_L}{dx} \quad (3.1.28)$$

Onde:

f_z : força transversal distribuída ao longo do elemento;

F_0 : força transversal aplicada na extremidade inicial do elemento;

F_L : força transversal aplicada na extremidade final do elemento;

M_0 : momento aplicado na extremidade inicial do elemento;

M_L : momento aplicado na extremidade final do elemento;

Então, faz-se uma aproximação para o deslocamento transversal do elemento a partir de funções básicas de *B-splines* ou NURBS e utiliza-se o teorema de Galerkin, que consiste em definir os deslocamentos virtuais utilizando as mesmas funções que interpolam os deslocamentos reais (Bathe, 1996) [39].

Deslocamento transversal:

$$w(\xi) = \mathbf{N} \mathbf{w} \quad (3.1.29)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (3.1.30)$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_n]^T \quad (3.1.31)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = x(\xi) \\ \frac{dx}{d\xi} = J \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{dx} = \frac{1}{J} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{dx} \frac{dx}{d\xi} \end{array} \right. \quad (3.1.32)$$

$$\frac{d^2 w(x)}{dx^2} = \frac{1}{J^2} \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} = J^{-2} \frac{d\mathbf{N}^2}{d\xi^2} \mathbf{w} = J^{-2} \mathbf{N}'' \mathbf{w} \quad (3.1.33)$$

Onde:

ξ : coordenada do espaço paramétrico do vetor nodal (*knot vector*);

N_i : funções básicas de *B-splines* ou NURBS definidas no espaço paramétrico

$[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, $i=1, 2, \dots, n$;

w_i : coeficientes das funções básicas, $w_i \in \mathbb{R}$;

J : jacobiano das coordenadas x e ξ ;

$( )''$: derivada de segunda ordem em relação a ξ .

Deslocamento transversal virtual:

$$\delta w(\xi) = \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \quad (3.1.34)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (3.1.35)$$

$$\delta \mathbf{w} = [\delta w_1 \ \delta w_2 \ \dots \ \delta w_i \ \dots \ \delta w_n]^T \quad (3.1.36)$$

$$\frac{d\delta w(x)}{dx} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} \quad (3.1.37)$$

$$\frac{d^2 \delta w(x)}{dx^2} = \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}'' \delta \mathbf{w} \quad (3.1.38)$$

Onde:

δw_i : coeficientes das funções básicas, $\delta w_i \in \mathbb{R}$;

$( )'$: derivada de primeira ordem em relação a ξ ;

$( )''$: derivada de segunda ordem em relação a ξ .

Substituindo (3.1.32), (3.1.33) e (3.1.38) em (3.1.27), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \left(\mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}''^T \mathbf{w} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}'' \delta \mathbf{w} \right) J d\xi \\ \delta W_i &= EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{J}^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' \mathbf{w} \right) d\xi \\ \delta W_i &= \delta \mathbf{w}^T \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi \right) \mathbf{w} \end{aligned} \quad (3.1.39)$$

Substituindo (3.1.29), (3.1.34) e (3.1.37) em (3.1.28), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{N} \delta \mathbf{w} J d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{w} + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{w} \\ &+ M_0 \mathbf{N}'(\xi_l) \delta \mathbf{w} + M_L \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{w} \\ \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{J} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ &+ M_0 \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}'(\xi_l)^T + M_L \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \delta \mathbf{w}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right) \\ & + \delta \mathbf{w}^T \left(M_0 \mathbf{N}'(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T \right) \end{aligned} \quad (3.1.40)$$

Substituindo (3.1.39) e (3.1.40) em (3.1.24), tem-se:

$$\begin{aligned} & \delta \mathbf{w}^T \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} J^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi \right) \mathbf{w} = \\ & \delta \mathbf{w}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right. \\ & \quad \left. + M_0 \mathbf{N}'(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T \right) \\ & \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} J^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi \right) \mathbf{w} = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ & \quad + M_0 \mathbf{N}'(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T \\ & \mathbf{K} \mathbf{w} = \mathbf{F} \end{aligned} \quad (3.1.41)$$

Onde:

$\mathbf{K} = \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} J^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi \right)$: matriz de rigidez do elemento;

$\mathbf{w}$: vetor dos coeficientes de aproximação dos deslocamentos;

$\mathbf{F} = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T + M_0 \mathbf{N}'(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T$: vetor das forças externas aplicadas no elemento.

3.1.3 Exemplo de aplicação 1

O primeiro exemplo de aplicação da análise isogeométrica corresponde a uma viga retilínea em balanço, cujo carregamento externo corresponde a uma força transversal na extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 3.4. A seguir estão apresentados os dados do exemplo:

$$L = 1,00 \text{ m}$$

$$EI = 10^5 \text{ Nm}^2$$

$$F_L = 10^3 \text{ N}$$

Figura 3.4: Exemplos de aplicação 1 e 2

A solução analítica para o deslocamento transversal da extremidade segundo a teoria de Bernoulli-Euler corresponde a:

$$f = \frac{F_L L^3}{3EI} = \frac{10^3 \times 1,00^3}{3 \times 10^5} = 3,333 \times 10^{-3} \text{ m} \quad (3.1.42)$$

O resultado de (3.1.42) é utilizado para comparação dos valores obtidos através da análise isogeométrica.

Na primeira parte do exemplo, utiliza-se o espaço paramétrico $\xi \in [0,1]$ para a geração das funções básicas de *B-splines* de ordem 2 utilizadas na interpolação dos deslocamentos. Faz-se $x = \xi$ e, assim sendo, $J = 1$. Nessa parte, estuda-se o refinamento da solução através da divisão do espaço paramétrico, representado pelo vetor nodal. O estudo vai de 2 até 5 divisões do intervalo $[0,1]$.

Na segunda parte, faz-se a resolução do problema, só que utilizando funções básicas cúbicas com 2 divisões do espaço paramétrico.

O *software* utilizado para a resolução do problema corresponde ao *Mathematica 10.1*, e os resultados estão apresentados na Tabela 1.

Tabela 1: Resultados da análise isogeométrica

Solução	Vetor nodal	Ordem <i>B-Spline</i>	f (mm)	Erro (%)
A	{0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1}	2	3,125	6,2
B	{0, 0, 0, 1/3, 2/3, 1, 1, 1}	2	3,240	2,8
C	{0, 0, 0, 0.25, 0.5, 0.75, 1, 1, 1}	2	3,280	1,6
D	{0, 0, 0, 0.2, 0.4, 0.6, 0.8, 1, 1, 1}	2	3,300	1,0
E	{0, 0, 0, 0, 0.5, 1, 1, 1, 1}	3	3,333	0,0

Observando os dados da Tabela 1, verifica-se boa precisão nas soluções D e E, com erros de 1,0 e 0,0%, respectivamente. Nota-se que elevação de ordem das funções básicas reduz a necessidade de divisões do espaço paramétrico.

3.2 Viga de Timoshenko

3.2.1 Modelo matemático

O modelo de viga de Timoshenko apresenta as mesmas condições geométricas e de carregamento do modelo de Bernoulli-Euler, sendo que a principal diferença reside na hipótese cinemática. No modelo de Timoshenko, as seções transversais da configuração deformada permanecem planas, mas não necessariamente ortogonais ao eixo da viga. Assim sendo, o modelo de Timoshenko contabiliza a deformação por cisalhamento. Esse fato corresponde a uma vantagem do modelo de Timoshenko sobre o de Bernoulli-Euler para vigas cuja maior dimensão da seção transversal (h) seja maior que $1/10$ do vão (L), já que as deformações cisalhantes passam a não ser negligenciáveis para $L/h < 10$.

Figura 3.5: Hipótese cinemática da viga de Timoshenko

O modelo parte da hipótese cinemática a seguir:

$$u(x) = -z \beta(x) \quad (3.2.1)$$

Lei de Hooke nas fibras longitudinais:

$$\tau_{xx} = E \varepsilon_{xx} = -E z \frac{d\beta(x)}{dx} \quad (3.2.2)$$

Deformação por cisalhamento:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{dx} - \beta \quad (3.2.3)$$

Tensão cisalhante:

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \quad (3.2.4)$$

De acordo com a equação acima, a tensão cisalhante é constante na seção transversal. Isso corresponde a uma inconsistência do modelo, já que a tensão deve ser nula nas extremidades da seção transversal devido à reciprocidade da tensão de cisalhamento (equilíbrio local de momento). Assim sendo, utiliza-se um fator k_s para correção no cálculo da força cortante, dado por:

$$k_s = \frac{A_s}{A} \quad (3.2.5)$$

Onde:

A_s : área equivalente para integração da tensão de cisalhamento constante;

Assim:

$$V = \int_{A_s} -\tau_{xz} dA_s = -k_s GA \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \quad (3.2.6)$$

$$M = \int_A \tau_{xx} (-z) dA = \int_A -Ez \frac{d\beta}{dx} (-z) dA = E \frac{d\beta}{dx} \int_A z^2 dA = EI \frac{d\beta}{dx} \quad (3.2.7)$$

A partir do equilíbrio de forças em um comprimento diferencial da viga, chega-se a:

Figura 3.6: Equilíbrio de um comprimento diferencial da viga de Timoshenko

$$\sum M = 0 \Rightarrow dM - V dx = 0 \Rightarrow V = \frac{dM}{dx} \quad (3.2.8)$$

$$\sum F_z = 0 \Rightarrow f_z dx - dV = 0 \Rightarrow \frac{dV}{dx} = f_z \quad (3.2.9)$$

A partir de (3.2.6), (3.2.7) e (3.2.8):

$$EI \frac{d^2 \beta}{dx^2} = -k_s GA \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \quad (3.2.10)$$

Substituindo (3.2.6) em (3.2.9), obtém-se:

$$-k_s GA \frac{d}{dx} \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) = f_z \quad (3.2.11)$$

Logo, (3.2.10) e (3.2.11) correspondem às equações diferenciais da viga de Timoshenko.

3.2.2 Formulação do elemento isogeométrico

A formulação do elemento de viga isogeométrico parte do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (3.2.12)$$

Onde:

δW_i : trabalho virtual interno do elemento;

δW_e : trabalho virtual externo do elemento;

$\delta( )$: refere-se a uma quantidade virtual.

O trabalho interno é calculado como segue:

$$\delta W_i = \int_V (\tau_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \quad (3.2.13)$$

Primeiro termo do lado direito da equação (3.2.13):

$$\tau_{xx} = -z E \frac{d\beta}{dx}, \quad \delta \varepsilon_{xx} = -z \frac{d^2 \delta \beta}{dx^2} \Rightarrow \delta W_{i,b} = \int_L \left(\int_A E \frac{d\beta}{dx} \frac{d\delta \beta}{dx} z^2 dA \right) dx \quad (3.2.14)$$

$$\delta W_{i,b} = EI \int_L \left(\frac{d\beta}{dx} \frac{d\delta \beta}{dx} \right) dx \quad (3.2.15)$$

Segundo termo do lado direito da equação (3.2.13):

$$\tau_{xz} = G \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right), \quad \delta \gamma_{xz} = \frac{d\delta w}{dx} - \delta \beta \Rightarrow \delta W_{i,s} = \int_L \left(\int_A G \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \left(\frac{d\delta w}{dx} - \delta \beta \right) \right) dx$$

$$\delta W_{i,s} = K_s GA \int_L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \left(\frac{d\delta w}{dx} - \delta \beta \right) dx \quad (3.2.16)$$

A partir de (3.2.13), (3.2.15) e (3.2.16):

$$\delta W_i = EI \int_L \left(\frac{d\beta}{dx} \frac{d\delta\beta}{dx} \right) dx + K_s GA \int_L \left(\frac{dw}{dx} - \beta \right) \left(\frac{d\delta w}{dx} - \delta\beta \right) dx \quad (3.2.17)$$

O trabalho externo é dado pela equação (3.2.18):

$$\delta W_e = \int_L f_z \delta w dx + F_0 \delta w_0 + F_L \delta w_L + M_0 \delta \beta_0 + M_L \delta \beta_L \quad (3.2.18)$$

Onde:

f_z : força transversal distribuída ao longo do elemento;

F_0 : força transversal aplicada na extremidade inicial do elemento;

F_L : força transversal aplicada na extremidade final do elemento;

M_0 : momento aplicado na extremidade inicial do elemento;

M_L : momento aplicado na extremidade final do elemento;

Então, fazem-se aproximações para o deslocamento transversal e rotação das seções transversais do elemento a partir de funções básicas de *B-splines* ou NURBS e utiliza-se o teorema de Galerkin, que consiste em aproximar os deslocamentos virtuais utilizando as mesmas funções que interpolam os deslocamentos reais (Bathe, 1996) [39].

Deslocamento transversal:

$$w(\xi) = \mathbf{N} \mathbf{w} \quad (3.2.19)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (3.2.20)$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_n]^T \quad (3.2.21)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \mathbf{J}^{-1} \frac{dw(\xi)}{d\xi} = \mathbf{J}^{-1} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \mathbf{w} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} \quad (3.2.22)$$

Onde:

ξ : coordenada do espaço paramétrico do vetor nodal (*knot vector*);

N_i : funções básicas de *B-splines* ou NURBS definidas no espaço paramétrico

$[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, $i=1, 2, \dots, n$;

w_i : coeficientes das funções básicas, $w_i \in \mathbb{R}$;

J : jacobiano das coordenadas x e ξ ;

$(\ )'$: derivada de primeira ordem em relação a ξ .

Deslocamento transversal virtual:

$$\delta w(x) = \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \quad (3.2.23)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (3.2.24)$$

$$\delta \mathbf{w} = [\delta w_1 \ \delta w_2 \ \dots \ \delta w_i \ \dots \ \delta w_n]^T \quad (3.2.25)$$

$$\frac{d\delta w(x)}{dx} = J^{-1} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \delta \mathbf{w} = J^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} \quad (3.2.26)$$

Onde:

δw_i : coeficientes das funções básicas, $\delta w_i \in \mathbb{R}$;

Rotação:

$$\beta(x) = \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \quad (3.2.27)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (3.2.28)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_i \ \dots \ \beta_n]^T \quad (3.2.29)$$

$$\frac{d\beta(x)}{dx} = J^{-1} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \boldsymbol{\beta} = J^{-1} \mathbf{N}' \boldsymbol{\beta} \quad (3.2.30)$$

Onde:

β_i : coeficientes das funções básicas, $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Rotação virtual:

$$\delta \beta(x) = \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\beta} \quad (3.2.31)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (3.2.32)$$

$$\delta\boldsymbol{\beta} = [\delta\beta_1 \delta\beta_2 \dots \delta\beta_i \dots \delta\beta_n]^T \quad (3.2.33)$$

$$\frac{d\delta\boldsymbol{\beta}(x)}{dx} = \mathbf{J}^{-1} \frac{d\mathbf{N}}{d\xi} \delta\boldsymbol{\beta} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta\boldsymbol{\beta} \quad (3.2.34)$$

Onde:

$\delta\beta_i$: coeficientes das funções básicas, $\delta\beta_i \in \mathbb{R}$;

Substituindo (3.2.30) e (3.2.34) em (3.2.15), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{i,b} &= EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \boldsymbol{\beta} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta\boldsymbol{\beta}) J d\xi \\ \delta W_{i,b} &= EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} (\delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \boldsymbol{\beta}) d\xi \\ \delta W_{i,b} &= \delta\boldsymbol{\beta}^T \left[EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}') d\xi \right] \boldsymbol{\beta} \end{aligned} \quad (3.2.35)$$

Substituindo (3.2.22), (3.2.26), (3.2.27) e (3.2.31) em (3.2.16), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{i,s} &= K_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} - \mathbf{N} \boldsymbol{\beta}) (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta\mathbf{w} - \mathbf{N} \delta\boldsymbol{\beta}) J d\xi \\ \delta W_{i,s} &= K_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} (\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} \mathbf{N}' \delta\mathbf{w} - \mathbf{N}' \mathbf{w} \mathbf{N} \delta\boldsymbol{\beta} - \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{N}' \delta\mathbf{w} + \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{N} \delta\boldsymbol{\beta}) d\xi \\ \delta W_{i,s} &= K_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} (\delta\mathbf{w}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{w} - \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}' \mathbf{w} - \delta\mathbf{w}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} + \delta\boldsymbol{\beta}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \boldsymbol{\beta}) d\xi \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

Definindo:

$$\mathbf{a} = [\mathbf{w} \ \boldsymbol{\beta}]^T \quad (3.2.37)$$

$$\delta\mathbf{a} = [\delta\mathbf{w} \ \delta\boldsymbol{\beta}]^T \quad (3.2.38)$$

De (3.2.35), (3.2.37) e (3.2.38):

$$\delta W_{i,b} = \delta\mathbf{a}^T \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (3.2.39)$$

De (3.2.36), (3.2.37) e (3.2.38):

$$\delta W_{i,s} = \delta \mathbf{a}^T \left(k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (3.2.40)$$

De (3.2.39) e (3.2.40), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \delta \mathbf{a}^T \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \\ &+ \delta \mathbf{a}^T \left(k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \end{aligned} \quad (3.2.41)$$

Substituindo (3.2.23) e (3.2.31) em (3.2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_z \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \mathbf{J} d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{w} + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{w} + M_0 \mathbf{N}(\xi_l) \delta \boldsymbol{\beta} \\ &+ M_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \boldsymbol{\beta} \\ \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_z \mathbf{J} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T + M_0 \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T \\ &+ M_L \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \end{aligned} \quad (3.2.42)$$

Introduzindo (3.2.38) em (3.2.42):

$$\delta W_e = \delta \mathbf{a}^T \left[\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_z \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right] \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \left[M_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right] \mathbf{a} \quad (3.2.43)$$

Substituindo (3.2.41) e (3.2.43) em (3.2.12), tem-se:

$$\begin{aligned} &\delta \mathbf{a}^T \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \left(k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} = \\ &\delta \mathbf{a}^T \left[\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_z \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right] \mathbf{a} + \delta \mathbf{a}^T \left[M_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right] \mathbf{a} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left(EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi + k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} = \\
& \begin{bmatrix} \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ M_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \end{bmatrix} \\
& \mathbf{K} \mathbf{a} = \mathbf{F} \tag{3.2.44}
\end{aligned}$$

Onde:

$$\mathbf{K} = EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi + k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi : \text{matriz de rigidez}$$

do elemento;

$\mathbf{a}$: vetor dos coeficientes de aproximação dos deslocamentos;

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} f_z \mathbf{N}^T d\xi + F_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ M_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + M_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \end{bmatrix} : \text{vetor das forças externas do elemento.}$$

3.2.3 Exemplo de aplicação 2

O exemplo de aplicação da análise isogeométrica da viga de Timoshenko corresponde a uma viga retilínea em balanço de seção transversal retangular, cujo carregamento externo corresponde a uma força transversal na extremidade livre, conforme ilustrado na Figura 3.4. A seguir, estão apresentados os dados do exemplo:

$$b = 0,10\text{m}$$

$$h = 0,20\text{m}$$

$$k = 5/6$$

$$A = b h = 2 \times 10^{-2} \text{ m}^2$$

$$I = \frac{bh^3}{12} = 6,667 \times 10^{-5} \text{ m}^4$$

$$E = 2,4 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$\nu = 0,2$$

$$G = \frac{E}{2(1+\nu)} = 1 \times 10^{10} \text{ Pa}$$

$$L = 5,00\text{m}$$

$$F_L = 1000 \text{ N}$$

A solução analítica para o deslocamento transversal e rotação na extremidade livre da viga está apresentada a seguir. Seja g uma variável auxiliar dada por:

$$g = \frac{6EI}{kGAL^2} = 2,304 \times 10^{-3},$$

Então:

$$\mathbf{u} = [w_1 \quad \beta_1 \quad w_2 \quad \beta_2]^T$$

$$\mathbf{F} = [0 \quad 0 \quad F_L \quad 0]^T = [0 \quad 0 \quad 1000 \quad 0]^T$$

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+2g)} & \frac{6EI}{L^2(1+2g)} & -\frac{12EI}{L^3(1+2g)} & \frac{6EI}{L^2(1+2g)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+2g)} & \frac{2EI(2+g)}{L(1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2g)} & \frac{2EI(1-g)}{L(1+2g)} \\ -\frac{12EI}{L^3(1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2g)} & \frac{12EI}{L^3(1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2g)} \\ \frac{6EI}{L^2(1+2g)} & \frac{2EI(1-g)}{L(1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2g)} & \frac{2EI(2+g)}{L(1+2g)} \end{bmatrix}$$

Onde:

K: matriz de rigidez segundo a teoria de Timoshenko [38];

u: vetor dos deslocamentos segundo a teoria de Timoshenko;

F: vetor de forças externas.

Então, obtém-se a solução do sistema:

$$\begin{bmatrix} \frac{12EI}{L^3(1+2g)} & -\frac{6EI}{L^2(1+2g)} \\ -\frac{6EI}{L^2(1+2g)} & \frac{2EI(2+g)}{L(1+2g)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_L \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 152895 & -382239 \\ -382239 & 1275600 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1000 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} w_2 \\ \beta_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,0261\text{m} \\ 0,0078\text{rad} \end{bmatrix} \quad (3.2.45)$$

Para a análise isogeométrica, utiliza-se o vetor nodal $\Xi = \{0,0,0,0,0.5,1,1,1,1\}$ para a geração das funções básicas de *B-splines* de ordem 3 para interpolação das variáveis independentes. Assim, o problema é resolvido através do *software Mathematica*, e os resultados para o deslocamento transversal e rotação na extremidade livre da viga coincidem com os valores apresentados na Eq. (3.2.45). Portanto, a aproximação adotada se mostra eficaz para resolução do problema.

4 Modelos de vigas curvas

4.1 Viga de Bernoulli-Euler

4.1.1 Modelo matemático

O primeiro modelo de viga plana curva abordado neste trabalho corresponde ao modelo de Bernoulli-Euler, cujas hipóteses são as seguintes:

- Geometria: seção transversal constante e eixo curvo, cujo plano xz corresponde a um plano de simetria. A coordenada s corresponde ao comprimento do eixo da viga, que passa pelo centroide das seções transversais. O eixo local x é tangencial ao eixo da viga e z , perpendicular ao mesmo. Os eixos globais correspondem a x_1 e x_2 (vide Figura 4.1).
- Cinemática: as seções transversais permanecem planas e ortogonais ao eixo deformado da viga.
- Carregamentos externos: dois tipos de carregamentos externos, sendo um transversal e outro tangencial.
- Condições de contorno: o modelo permite a prescrição de forças de superfície e deslocamentos nas seções extremas da barra. Na superfície lateral, as forças de superfície são nulas.
- Esforços internos: as tensões normal e transversal, τ_{xx} e τ_{xz} , respectivamente, são as únicas tensões não nulas do modelo.

Figura 4.1: Modelo de viga curva com carregamentos transversal e longitudinal

A partir dessas hipóteses, é possível construir o equacionamento apresentado nesta seção. Informações e detalhes adicionais sobre a formulação do modelo curvo de Bernoulli-Euler podem ser encontradas em [38].

Deformação longitudinal do eixo da viga:

Figura 4.2: Deformação longitudinal do eixo da viga

$$\epsilon_{xx0} = \frac{ds^d - ds}{ds} \quad (4.1.1)$$

$$ds^d = (r + w) d\theta + du \quad (4.1.2)$$

$$\epsilon_{xx0} = \frac{(r + w) d\theta + du - ds}{ds} \quad (4.1.3)$$

$$\epsilon_{xx0} = \frac{r d\theta + w d\theta + du - ds}{ds} \quad (4.1.4)$$

$$\epsilon_{xx0} = \frac{du}{ds} + \frac{w}{r} \quad (4.1.5)$$

Deformação longitudinal de um ponto situado à distância z do eixo da viga:

$$\epsilon_{xx} = \epsilon_{xx0} - z\chi \quad (4.1.6)$$

A curvatura da viga χ , por se tratar de um modelo inicialmente curvo, é função do deslocamento axial. A Figura 4.3 ilustra o fenômeno e a curvatura é dada pela equação (4.1.7), a seguir:

Figura 4.3: Efeito do deslocamento axial na curvatura da viga

$$\chi = \frac{d\varphi(s)}{ds} = \frac{d}{ds} \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{r} \right), \quad (4.1.7)$$

Onde φ corresponde à rotação da seção transversal.

A partir do equilíbrio de um comprimento diferencial ds da viga, representado na Figura 4.4, chegam-se às seguintes relações entre forças externas e esforços internos:

$$\sum M = 0 \Rightarrow dM - V ds = 0 \Rightarrow V = \frac{dM}{ds} \quad (4.1.8)$$

$$\begin{aligned} \sum F_t = 0 &\Rightarrow dN - V d\theta + f_t ds = 0 \\ \frac{dN}{ds} - \frac{V}{r} &= -f_t \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

$$\begin{aligned} \sum F_r = 0 &\Rightarrow dV + N d\theta - f_r ds = 0 \\ \frac{dV}{ds} + \frac{N}{r} &= f_r \end{aligned} \quad (4.1.10)$$

Figura 4.4: Equilíbrio de forças em um segmento diferencial ds

Enfim, definem-se a força normal e momento fletor a partir da tensão normal τ_{xx} da viga:

$$\tau_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(\varepsilon_{xx0} - z\chi) \quad (4.1.11)$$

$$N = \int_A \tau_{xx} dA = \int_A E(\varepsilon_{xx0} - z\chi) dA = EA\varepsilon_{xx0} \quad (4.1.12)$$

$$M = -\int_A \tau_{xx} z dA = -\int_A E(\varepsilon_{xx0} - z\chi) z dA = EI\chi \quad (4.1.13)$$

Assim como no modelo de viga reta de Bernoulli-Euler, a distorção no plano xz é nula, e a tensão de cisalhamento é desprezada no cálculo do trabalho virtual interno:

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = -\left(\frac{dw}{dx} - \frac{u}{r}\right) + \left(\frac{dw}{dx} - \frac{u}{r}\right) = 0 \quad (4.1.14)$$

$$\gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \Rightarrow \tau_{xz} = 0 \quad (4.1.15)$$

4.1.2 Formulação do elemento isogeométrico

A formulação do elemento de viga isogeométrico parte do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (4.1.16)$$

Onde:

δW_i : trabalho virtual interno;

δW_e : trabalho virtual externo;

$\delta( )$: refere-se a uma quantidade virtual.

O trabalho interno é calculado como segue:

$$\begin{aligned} \delta W_i &= \int_V (\tau_{xx} \delta \varepsilon_{xx}) dV = \int_V (E(\varepsilon_{xx0} - z\chi)(\delta \varepsilon_{xx0} - z\delta \chi)) dV \\ \delta W_i &= \int_L \left(\int_A E(\varepsilon_{xx0} \delta \varepsilon_{xx0} - \varepsilon_{xx0} z \delta \chi - z\chi \delta \varepsilon_{xx0} + z^2 \chi \delta \chi) dA \right) ds \end{aligned} \quad (4.1.17)$$

Como o eixo passa pelo baricentro da seção transversal:

$$\int_A z dA = 0$$

$$\int_A z^2 dA = I$$

Logo:

$$\delta W_i = \int_L (EA\varepsilon_{xx0} \delta \varepsilon_{xx0} + EI\chi \delta \chi) ds \quad (4.1.18)$$

$$\delta W_{i,N} = \int_L EA\varepsilon_{xx0} \delta \varepsilon_{xx0} ds \quad (4.1.19)$$

$$\delta W_{i,M} = \int_L EI\chi \delta \chi ds \quad (4.1.20)$$

O trabalho externo é dado pela equação (4.1.21):

$$\begin{aligned} \delta W_e = & \int_L f_r \delta w ds + \int_L f_t \delta u ds + F_{r0} \delta w_0 + F_{rL} \delta w_L + F_{t0} \delta u_0 + F_{tL} \delta u_L \\ & + M_0 \delta \beta_0 + M_L \delta \beta_L \end{aligned} \quad (4.1.21)$$

Onde:

f_r : força transversal distribuída ao longo do elemento;

f_t : força tangencial distribuída ao longo do elemento;

F_{r0} : força transversal aplicada na extremidade inicial do elemento;

F_{rL} : força transversal aplicada na extremidade final do elemento;

F_{t0} : força tangencial aplicada na extremidade inicial do elemento;

F_{tL} : força tangencial aplicada na extremidade final do elemento;

M_0 : momento aplicado na extremidade inicial do elemento;

M_L : momento aplicado na extremidade final do elemento;

Então, são feitas aproximações para os deslocamentos transversal e axial do elemento a partir de funções básicas de *B-splines* ou NURBS e utiliza-se o teorema de Galerkin, que consiste em aproximar os deslocamentos virtuais utilizando as mesmas funções que interpolam os deslocamentos reais (Bathe, 1996) [39].

Deslocamento transversal:

$$w(\xi) = \mathbf{N} \mathbf{w} \quad (4.1.22)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.1.23)$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_n]^T \quad (4.1.24)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s = s(\xi) \\ \frac{ds}{d\xi} = J \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{ds} = \frac{1}{J} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{ds} \frac{ds}{d\xi} \end{array} \right. \quad (4.1.25)$$

$$\frac{d^2 w(s)}{ds^2} = \frac{1}{J^2} \frac{d^2 w(\xi)}{d\xi^2} = J^{-2} \frac{d\mathbf{N}^2}{d\xi^2} \mathbf{w} = J^{-2} \mathbf{N}'' \mathbf{w} \quad (4.1.26)$$

Onde:

ξ : coordenada do espaço paramétrico do vetor nodal (*knot vector*);

N_i : funções básicas de *B-splines* ou NURBS definidas no espaço paramétrico

$[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, $i=1, 2, \dots, n$;

w_i : coeficientes das funções básicas, $w_i \in \mathbb{R}$;

J : jacobiano das coordenadas s e ξ ;

$( )''$: derivada de segunda ordem em relação a ξ .

Deslocamento transversal virtual:

$$\delta w(\xi) = \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \quad (4.1.27)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.1.28)$$

$$\delta \mathbf{w} = [\delta w_1 \ \delta w_2 \ \dots \ \delta w_i \ \dots \ \delta w_n]^T \quad (4.1.29)$$

$$\frac{d\delta w(s)}{ds} = J^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} \quad (4.1.30)$$

$$\frac{d^2 \delta w(s)}{ds^2} = J^{-2} \mathbf{N}'' \delta \mathbf{w} \quad (4.1.31)$$

Onde:

δw_i : coeficientes das funções básicas, $\delta w_i \in \mathbb{R}$.

Deslocamento axial:

$$u(\xi) = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (4.1.32)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.1.33)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_i \ \dots \ u_n]^T \quad (4.1.34)$$

$$\frac{du(s)}{ds} = J^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \quad (4.1.35)$$

Onde:

u_i : coeficientes das funções básicas, $u_i \in \mathbb{R}$.

Deslocamento axial virtual:

$$\delta u(\xi) = \mathbf{N} \delta \mathbf{u} \quad (4.1.36)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.1.37)$$

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u_1 \ \delta u_2 \ \dots \ \delta u_i \ \dots \ \delta u_n]^T \quad (4.1.38)$$

$$\frac{d\delta u(s)}{ds} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \quad (4.1.39)$$

Onde:

δu_i : coeficientes das funções básicas, $\delta u_i \in \mathbb{R}$;

Substituindo (4.1.35), (4.1.39), (4.1.22) e (4.1.27) em (4.1.19), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{i,N} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{w} \right) \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \right) J d\xi \\ \delta W_{i,N} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \mathbf{N} \delta \mathbf{w} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{w} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{N} \mathbf{w} \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \right) d\xi \\ \delta W_{i,N} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(\mathbf{J}^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}' \mathbf{u} \right) d\xi \\ &+ \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(\mathbf{r}^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \mathbf{w} + \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{w} \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.1.40)$$

Substituindo (4.1.26), (4.1.31), (4.1.35) e (4.1.39) em (4.1.20):

$$\begin{aligned} \delta W_{i,M} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \left(\mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}'' \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \right) \left(\mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}'' \delta \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} \right) J d\xi \\ \delta W_{i,M} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \left(\mathbf{J}^{-3} \mathbf{N}'' \mathbf{w} \mathbf{N}'' \delta \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}'' \mathbf{w} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}' \mathbf{u} \mathbf{N}'' \delta \mathbf{w} + \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} \right) d\xi \\ \delta W_{i,M} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \left(\mathbf{J}^{-3} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}'' \mathbf{w} \right) d\xi \\ &+ \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \left(-\mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}''^T \mathbf{N}' \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J}^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{u} \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.1.41)$$

Definindo:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.1.42)$$

$$\delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{w} \end{bmatrix} \quad (4.1.43)$$

Substituindo (4.1.42) e (4.1.43) em (4.1.40) e (4.1.41), tem-se:

$$\delta W_{i,N} = \delta \mathbf{a}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \\ \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (4.1.44)$$

$$\delta W_{i,M} = \delta \mathbf{a}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}^T \mathbf{N}'' \\ -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-3} \mathbf{N}^T \mathbf{N}'' \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (4.1.45)$$

Substituindo (4.1.27), (4.1.30) e (4.1.36) em (4.1.21), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{N} \delta \mathbf{w} J d\xi + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{N} \delta \mathbf{u} J d\xi \\ &+ F_{r0} \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{w} + F_{rL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{w} + F_{t0} \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{u} + F_{tL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{u} \\ &+ M_0 \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_l) \delta \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{u} \right) + M_L \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{u} \right) \\ \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{J} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T d\xi + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{J} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T d\xi + F_{r0} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T \\ &+ F_{rL} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T + F_{t0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_{tL} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ &+ M_0 \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_l)^T - \mathbf{r}^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T \right) \\ &+ M_L \left(\delta \mathbf{w}^T \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T - \mathbf{r}^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \right) \end{aligned} \quad (4.1.46)$$

Substituindo (4.1.43) em (4.1.46), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \delta \mathbf{a}^T \left[\begin{aligned} &\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + F_{t0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_{tL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ &\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + F_{r0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + F_{rL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \end{aligned} \right] \\ &+ \delta \mathbf{a}^T \left[\begin{aligned} &-M_0 \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(\xi_l)^T - M_L \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ &M_0 \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_l)^T + M_L \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T \end{aligned} \right] \end{aligned} \quad (4.1.47)$$

A partir das equações (4.1.44), (4.1.45) e (4.1.47), observa-se que o vetor $\mathbf{a}$ corresponde ao vetor dos coeficientes de aproximação dos deslocamentos, e a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ e o vetor das forças externas $\mathbf{F}$ do elemento correspondem às equações (4.1.48) e (4.1.49), respectivamente:

$$\mathbf{K} = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi$$

$$+ \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \begin{bmatrix} \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}'' & -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}''' \\ -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{J}^{-2} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}''' \end{bmatrix} d\xi \quad (4.1.48)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{t0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{tL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{r0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{rL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \end{bmatrix} \quad (4.1.49)$$

$$\begin{bmatrix} -\mathbf{M}_0 \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(\xi_l)^T - \mathbf{M}_L \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_l)^T + \mathbf{M}_L \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T \end{bmatrix}$$

De acordo com [29], o jacobiano de transformação entre s e ξ pode ser determinado pela equação (4.1.50), e o raio de curvatura da viga, por (4.1.51):

$$\mathbf{J} = \frac{ds}{d\xi} = \sqrt{\left(\frac{ds_1}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{ds_2}{d\xi}\right)^2} \quad (4.1.50)$$

$$\mathbf{R} = \frac{\mathbf{J}^3}{\left| \frac{ds_1}{d\xi} \frac{d^2 s_2}{d\xi^2} - \frac{d^2 s_1}{d\xi^2} \frac{ds_2}{d\xi} \right|} \quad (4.1.51)$$

Onde:

s_1 e s_2 : correspondem às projeções de s em x_1 e x_2 , respectivamente ($s = s(s_1, s_2)$).

4.1.3 Exemplo de aplicação 3

O exemplo de aplicação do modelo isogeométrico de viga curva de Bernoulli-Euler corresponde a um arco de um quarto de circunferência engastado em uma das extremidades e livre na outra, sob a ação de força transversal na extremidade livre. A Figura 4.5 ilustra o exemplo de aplicação, e os dados do problema estão relacionados na Tabela 2.

Figura 4.5: Exemplo de aplicação dos modelos de vigas curvas

Tabela 2: Dados do exemplo de aplicação 3

Seção transversal da viga (retangular)	0,2 m x 0,5 m
Raio de curvatura inicial da viga (r)	5,00 m
Módulo de Young (E)	24 GPa
Força vertical (F)	10 kN
Momento de Inércia (I)	$2,083 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
Área da seção transversal (A)	$0,10 \text{ m}^2$

A solução analítica para o deslocamento transversal na extremidade livre da viga do problema pode ser encontrada em [38] e está apresentada a seguir:

$$w = \frac{FR}{2E} \left(\frac{R^2}{I} + \frac{1}{A} \right) \cos \psi \left(\frac{\pi}{2} - \psi \right)$$

$$w = -\frac{10000 \times 5,00}{2 \times 2,4 \times 10^{10}} \left(\frac{5,00^2}{2,083 \times 10^{-3}} + \frac{1}{0,01} \right) \times 1 \times \left(\frac{\pi}{2} \right) = -0,0198 \text{ m} \quad (4.1.52)$$

Para a análise isogeométrica, adotou-se uma curva NURBS de ordem 4 para a descrição da geometria, cujo vetor nodal corresponde ao vetor aberto $\{0,0,0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,1,1,1,1,1\}$, e os pesos e pontos de controle estão apresentados na Tabela 3.

Tabela 3: Pontos de controle e pesos utilizados na curva NURBS do exemplo 3

P.C.	x_1	x_2	Peso
C_1	0,00000	0,00000	1,00000
C_2	0,00000	0,36422	0,97071
C_3	0,07247	1,12295	0,91994
C_4	0,42281	2,27098	0,86722
C_5	1,38265	3,61735	0,84379
C_6	2,72902	4,57719	0,86722
C_7	3,87705	4,92753	0,91994
C_8	4,63578	5,00000	0,97071
C_9	5,00000	5,00000	1,00000

Então, utilizando a curva NURBS supracitada para a descrição da geometria e suas funções básicas racionais para interpolação das variáveis independentes, chega-se ao seguinte valor para o deslocamento transversal na extremidade livre da viga através do *Mathematica*:

$$w = -0,0199 \text{ m} \quad (4.1.53)$$

$$e = \left| \frac{-0,0199 + 0,0198}{0,0198} \right| = 0,0051 \quad (4.1.54)$$

Comparando os resultados de (4.1.52) e (4.1.53), verifica-se erro de 0,51% entre a solução numérica da análise isogeométrica e a solução analítica. Portanto, conclui-se que o elemento isogeométrico de viga curva de Bernoulli-Euler é capaz de representar o problema, trazendo resultado de precisão satisfatória para a curva NURBS e aproximações de deslocamentos adotadas.

4.2 Viga de Timoshenko

4.2.1 Modelo matemático

O modelo de viga plana curva de Timoshenko desenvolvido nesta seção apresenta as mesmas premissas da viga de Bernoulli-Euler descritas na seção 4.1.1, com exceção para a hipótese cinemática, já que no modelo de Timoshenko as seções transversais permanecem planas, mas não necessariamente ortogonais ao eixo deformado da barra. Assim, a ilustração dos eixos globais e locais e carregamentos da viga de Timoshenko também correspondem à Figura 4.1.

A partir dessas hipóteses, é possível construir o equacionamento apresentado a seguir.

Deformação longitudinal do eixo da viga (Figura 4.2):

$$\varepsilon_{xx0} = \frac{du}{ds} + \frac{w}{r} \quad (4.2.1)$$

Deformação longitudinal de um ponto situado à distância z do eixo da viga:

$$\varepsilon_{xx} = \varepsilon_{xx0} - z\chi \quad (4.2.2)$$

A curvatura é função do giro da seção transversal β , de acordo com a equação (4.2.3) a seguir:

$$\chi = \frac{d\beta(s)}{ds} \quad (4.2.3)$$

Deformação por cisalhamento com influência do deslocamento axial (Figura 4.3):

$$\gamma_{xz} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} = \frac{dw}{ds} - \frac{u}{r} - \beta \quad (4.2.4)$$

Tensão cisalhante:

$$\tau_{xz} = G \gamma_{xz} = G \left(\frac{dw}{ds} - \frac{u}{r} - \beta \right) \quad (4.2.5)$$

A partir do equilíbrio de um comprimento diferencial ds da viga, representado na Figura 4.4, chegam-se às seguintes relações entre forças externas e esforços internos:

$$\sum M = 0 \Rightarrow dM - V ds = 0 \Rightarrow V = \frac{dM}{ds} \quad (4.2.6)$$

$$\begin{aligned} \sum F_t = 0 &\Rightarrow dN - V d\theta + f_t ds = 0 \\ \frac{dN}{ds} - \frac{V}{r} &= -f_t \end{aligned} \quad (4.2.7)$$

$$\begin{aligned} \sum F_r = 0 &\Rightarrow dV + N d\theta - q_r ds = 0 \\ \frac{dV}{ds} + \frac{N}{r} &= q_r \end{aligned} \quad (4.2.8)$$

Enfim, definem-se a força normal e momento fletor a partir da tensão normal τ_{xx} da viga:

$$\tau_{xx} = E\varepsilon_{xx} = E(\varepsilon_{xx0} - z\chi) \quad (4.2.9)$$

$$N = \int_A \tau_{xx} dA = \int_A E(\varepsilon_{xx0} - z\chi) dA = EA\varepsilon_{xx0} \quad (4.2.10)$$

$$M = -\int_A \tau_{xx} z dA = -\int_A E(\varepsilon_{xx0} - z\chi) z dA = EI\chi \quad (4.2.11)$$

4.2.2 Formulação do elemento isogeométrico

A formulação do elemento de viga isogeométrico parte do Princípio dos Trabalhos Virtuais (PTV):

$$\delta W_i = \delta W_e \quad (4.2.12)$$

Onde:

δW_i : trabalho virtual interno;

δW_e : trabalho virtual externo;

$\delta(\ )$: refere-se a uma quantidade virtual.

O trabalho interno é calculado como segue:

$$\begin{aligned}\delta W_i &= \int_V (\tau_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \tau_{xz} \delta \gamma_{xz}) dV \\ \delta W_i &= \int_L \left(\int_A \left(E (\varepsilon_{xx0} \delta \varepsilon_{xx0} - \varepsilon_{xx0} z \delta \chi - z \delta \chi \varepsilon_{xx0} + z^2 \delta \chi) + G \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz} \right) dA \right) ds\end{aligned}\quad (4.2.13)$$

Como o eixo passa pelo baricentro da seção transversal:

$$\begin{aligned}\int_A z dA &= 0 \\ \int_A z^2 dA &= I\end{aligned}$$

Logo:

$$\delta W_i = \int_L (EA \varepsilon_{xx0} \delta \varepsilon_{xx0} + EI \chi \delta \chi + K_s GA \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz}) ds \quad (4.2.14)$$

$$\delta W_{i,N} = \int_L EA \varepsilon_{xx0} \delta \varepsilon_{xx0} ds \quad (4.2.15)$$

$$\delta W_{i,M} = \int_L EI \chi \delta \chi ds \quad (4.2.16)$$

$$\delta W_{i,s} = \int_L K_s GA \gamma_{xz} \delta \gamma_{xz} ds \quad (4.2.17)$$

O trabalho externo é dado pela equação (4.2.18):

$$\begin{aligned}\delta W_e &= \int_L f_r \delta w ds + \int_L f_t \delta u ds + F_{r0} \delta w_0 + F_{tL} \delta w_L \\ &+ F_{t0} \delta u_0 + F_{tL} \delta u_L + M_0 \delta \beta_0 + M_L \delta \beta_L\end{aligned}\quad (4.2.18)$$

Onde:

f_r : força transversal distribuída ao longo do elemento;

f_t : força tangencial distribuída ao longo do elemento;

F_{r0} : força transversal aplicada na extremidade inicial do elemento;

F_{tL} : força transversal aplicada na extremidade final do elemento;

F_{t0} : força tangencial aplicada na extremidade inicial do elemento;

F_{tL} : força tangencial aplicada na extremidade final do elemento;

M_0 : momento aplicado na extremidade inicial do elemento;

M_L : momento aplicado na extremidade final do elemento;

Então, são feitas aproximações para a rotação das seções transversais e os deslocamentos transversal e tangencial do elemento a partir de funções básicas de *B-splines* ou NURBS e utiliza-se o teorema de Galerkin, que consiste em aproximar os deslocamentos virtuais utilizando as mesmas funções que interpolam os deslocamentos reais (Bathe, 1996) [39].

Deslocamento transversal:

$$w(\xi) = \mathbf{N} \mathbf{w} \quad (4.2.19)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.2.20)$$

$$\mathbf{w} = [w_1 \ w_2 \ \dots \ w_i \ \dots \ w_n]^T \quad (4.2.21)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} s = s(\xi) \\ \frac{ds}{d\xi} = J \quad \Rightarrow \quad \frac{dw}{ds} = \frac{1}{J} \frac{dw}{d\xi} \\ \frac{dw}{d\xi} = \frac{dw}{ds} \frac{ds}{d\xi} \end{array} \right. \quad (4.2.22)$$

$$\frac{dw(x)}{dx} = \frac{1}{J} \frac{dw(\xi)}{d\xi} = J^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} \quad (4.2.23)$$

Onde:

ξ : coordenada do espaço paramétrico do vetor nodal (*knot vector*);

N_i : funções básicas de *B-splines* ou NURBS definidas no espaço paramétrico

$[\xi_1, \xi_{n+p+1}]$, $i=1, 2, \dots, n$;

w_i : coeficientes das funções básicas, $w_i \in \mathbb{R}$;

J : jacobiano das coordenadas s e ξ ;

$( )''$: derivada de segunda ordem em relação a ξ .

Deslocamento transversal virtual:

$$\delta w(\xi) = \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \quad (4.2.24)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.2.25)$$

$$\delta \mathbf{w} = [\delta w_1 \ \delta w_2 \ \dots \ \delta w_i \ \dots \ \delta w_n]^T \quad (4.2.26)$$

$$\frac{d\delta w(s)}{ds} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} \quad (4.2.27)$$

Onde:

δw_i : coeficientes das funções básicas, $\delta w_i \in \mathbb{R}$;

$(\ )'$: derivada de primeira ordem em relação a ξ ;

$(\ )''$: derivada de segunda ordem em relação a ξ .

Deslocamento axial:

$$u(\xi) = \mathbf{N} \mathbf{u} \quad (4.2.28)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.2.29)$$

$$\mathbf{u} = [u_1 \ u_2 \ \dots \ u_i \ \dots \ u_n]^T \quad (4.2.30)$$

$$\frac{du(s)}{ds} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \quad (4.2.31)$$

Onde:

u_i : coeficientes das funções básicas, $u_i \in \mathbb{R}$.

Deslocamento axial virtual:

$$\delta u(\xi) = \mathbf{N} \delta \mathbf{u} \quad (4.2.32)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.2.33)$$

$$\delta \mathbf{u} = [\delta u_1 \ \delta u_2 \ \dots \ \delta u_i \ \dots \ \delta u_n]^T \quad (4.2.34)$$

$$\frac{d\delta u(s)}{ds} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} \quad (4.2.35)$$

Onde:

δu_i : coeficientes das funções básicas, $\delta u_i \in \mathbb{R}$;

Rotação:

$$\beta(\xi) = \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \quad (4.2.36)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.2.37)$$

$$\boldsymbol{\beta} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \dots \ \beta_i \ \dots \ \beta_n]^T \quad (4.2.38)$$

$$\frac{d\beta(s)}{ds} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \boldsymbol{\beta} \quad (4.2.39)$$

Onde:

β_i : coeficientes das funções básicas, $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Rotação virtual:

$$\delta \beta(\xi) = \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\beta} \quad (4.2.40)$$

$$\mathbf{N} = [N_1 \ N_2 \ \dots \ N_i \ \dots \ N_n] \quad (4.2.41)$$

$$\delta \boldsymbol{\beta} = [\delta \beta_1 \ \delta \beta_2 \ \dots \ \delta \beta_i \ \dots \ \delta \beta_n]^T \quad (4.2.42)$$

$$\frac{d\delta \beta(s)}{ds} = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \boldsymbol{\beta} \quad (4.2.43)$$

Onde:

$\delta \beta_i$: coeficientes das funções básicas, $\delta \beta_i \in \mathbb{R}$.

Substituindo (4.2.19), (4.2.24), (4.2.31) e (4.2.35) em (4.2.15), tem-se:

$$\delta W_{i,N} = \int_{\xi_1}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{w} \right) \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \right) J d\xi$$

$$\delta W_{i,N} = \int_{\xi_1}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(\mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{u} \mathbf{N} \delta \mathbf{w} + \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N} \mathbf{w} \mathbf{N}' \delta \mathbf{u} + \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{N} \mathbf{w} \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \right) d\xi$$

$$\begin{aligned}\delta W_{i,N} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(J^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{u} + r^{-1} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}' \mathbf{u} \right) d\xi \\ &\quad \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \left(r^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \mathbf{w} + r^{-2} J \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{w} \right) d\xi\end{aligned}\quad (4.2.44)$$

Substituindo (4.2.39), (4.2.43) em (4.2.16), tem-se:

$$\begin{aligned}\delta W_{i,M} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI J^{-1} \mathbf{N}' \boldsymbol{\beta} \mathbf{N}' \delta \boldsymbol{\beta} d\xi \\ \delta W_{i,M} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI J^{-1} \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \boldsymbol{\beta} d\xi\end{aligned}\quad (4.2.45)$$

Substituindo (4.2.23), (4.2.27), (4.2.28), (4.2.32), (4.2.36) e (4.2.40) em (4.2.16), tem-se:

$$\begin{aligned}\delta W_{i,s} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(J^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} - r^{-1} \mathbf{N} \mathbf{u} - \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \right) \left(J^{-1} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} - r^{-1} \mathbf{N} \delta \mathbf{u} - \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\beta} \right) J d\xi \\ \delta W_{i,s} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(J^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} - r^{-1} \mathbf{N}' \mathbf{w} \mathbf{N} \delta \mathbf{u} - \mathbf{N}' \mathbf{w} \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\beta} \right) d\xi \\ &\quad \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(-r^{-1} \mathbf{N} \mathbf{u} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} + J r^{-2} \mathbf{N} \mathbf{u} \mathbf{N} \delta \mathbf{u} + J r^{-1} \mathbf{N} \mathbf{u} \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\beta} \right) d\xi \\ &\quad + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(-\mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{N}' \delta \mathbf{w} + J r^{-1} \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{N} \delta \mathbf{u} + J \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \mathbf{N} \delta \boldsymbol{\beta} \right) d\xi \\ \delta W_{i,s} &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(J^{-1} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \mathbf{w} - r^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}' \mathbf{w} - \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N}' \mathbf{w} \right) d\xi \\ &\quad + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(-r^{-1} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \mathbf{u} + J r^{-2} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{u} + J r^{-1} \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \mathbf{u} \right) d\xi \\ &\quad + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \left(-\delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} + J r^{-1} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} + J \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T \mathbf{N} \boldsymbol{\beta} \right) d\xi\end{aligned}\quad (4.2.46)$$

Definindo:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \mathbf{w} \\ \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \quad (4.2.47)$$

$$\delta \mathbf{a} = \begin{bmatrix} \delta \mathbf{u} \\ \delta \mathbf{w} \\ \delta \boldsymbol{\beta} \end{bmatrix} \quad (4.2.48)$$

Substituindo (4.2.47) e (4.2.48) em (4.2.44), (4.2.45) e (4.2.46), tem-se:

$$\delta W_{i,N} = \delta \mathbf{a}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-2} \mathbf{J} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (4.2.49)$$

$$\delta W_{i,M} = \delta \mathbf{a}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (4.2.50)$$

$$\delta W_{i,s} = \delta \mathbf{a}^T \left(\int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{K}_s \mathbf{G} \mathbf{A} \begin{bmatrix} \mathbf{J} \mathbf{r}^{-2} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & \mathbf{J} \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ \mathbf{J} \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & \mathbf{J} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \right) \mathbf{a} \quad (4.2.51)$$

Substituindo (4.2.24), (4.2.32) e (4.2.40) em (4.2.18), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{N} \delta \mathbf{w} \mathbf{J} d\xi + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{N} \delta \mathbf{u} \mathbf{J} d\xi + \mathbf{F}_{r0} \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{w} + \mathbf{F}_{rL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{w} \\ &+ \mathbf{F}_{t0} \mathbf{N}(\xi_l) \delta \mathbf{u} + \mathbf{F}_{tL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \mathbf{u} + \mathbf{M}_0 \mathbf{N}(\xi_l) \delta \boldsymbol{\beta} + \mathbf{M}_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1}) \delta \boldsymbol{\beta} \\ \delta W_e &= \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{J} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}^T d\xi + \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{J} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{r0} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T \\ &+ \mathbf{F}_{rL} \delta \mathbf{w}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T + \mathbf{F}_{t0} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{tL} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ &+ \mathbf{M}_0 \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{M}_L \delta \boldsymbol{\beta}^T \mathbf{N}^T(\xi_{n+p+1}) \end{aligned} \quad (4.2.52)$$

Substituindo (4.2.48) em (4.2.52), tem-se:

$$\delta W_e = \delta \mathbf{a}^T \left[\begin{array}{c} \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{t0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{tL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{r0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{rL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{M}_L \mathbf{N}^T(\xi_{n+p+1}) \end{array} \right] \quad (4.2.53)$$

A partir das equações (4.2.49), (4.2.50), (4.2.51) e (4.2.53), observa-se que o vetor $\mathbf{a}$ corresponde ao vetor dos coeficientes de aproximação dos deslocamentos, e a matriz de rigidez $\mathbf{K}$ e o vetor das forças externas $\mathbf{F}$ do elemento correspondem às equações (4.2.54) e (4.2.58), respectivamente:

$$\mathbf{K} = \mathbf{K}_N + \mathbf{K}_M + \mathbf{K}_s \quad (4.2.54)$$

$$\mathbf{K}_N = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EA \begin{bmatrix} J^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{r}^{-2} J \mathbf{N}^T \mathbf{N} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix} d\xi \quad (4.2.55)$$

$$\mathbf{K}_M = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} EI \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & J^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi \quad (4.2.56)$$

$$\mathbf{K}_s = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} K_s GA \begin{bmatrix} J \mathbf{r}^{-2} \mathbf{N}^T \mathbf{N} & -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N}' & J \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N} & J^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ J \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} & -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & J \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi \quad (4.2.57)$$

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_t J \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{t0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{tL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_r J \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_{r0} \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_{rL} \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{M}_L \mathbf{N}^T(\xi_{n+p+1}) \end{bmatrix} \quad (4.2.58)$$

4.2.3 Exemplo de aplicação 4

O exemplo de aplicação do modelo isogeométrico de viga curva de Timoshenko corresponde a um arco de um quarto de circunferência engastado em uma das extremidades e livre na outra, sob a ação de força transversal na extremidade livre. A Figura 4.6 ilustra o exemplo de aplicação, e os dados do problema estão relacionados na Tabela 4.

Figura 4.6: Exemplo de aplicação dos modelos de vigas curvas

Tabela 4: Dados do exemplo de aplicação 4

Seção transversal da viga (retangular)	0,2 m x 0,5 m
Raio de curvatura inicial da viga (r)	5,00 m
Módulo de Young (E)	24 GPa
Coeficiente de Poisson (ν)	0,2
Coeficiente de correção da força cortante (K _s)	5/6
Força vertical (F)	10 kN
Momento de Inércia (I)	2,083x10 ⁻³ m ⁴
Área da seção transversal (A)	0,10 m ²

A solução analítica para o deslocamento transversal na extremidade livre da viga do problema pode ser encontrada em [30] e está apresentada a seguir:

$$c_1 = \frac{1}{2} \left(\frac{R}{EA} + \frac{R}{K_s GA} + \frac{R^3}{EI} \right) = 1,2540 \times 10^{-6}$$

$$w = Fc_1 \psi \sin \psi = 0,01970 \text{ m} \quad (4.2.59)$$

Para a análise isogeométrica, adotou-se uma curva NURBS de ordem 4 para a descrição da geometria, cujo vetor nodal corresponde ao vetor aberto $\{0,0,0,0,0,1/5,2/5,3/5,4/5,1,1,1,1\}$, e os pesos e pontos de controle estão apresentados na Tabela 5.

Tabela 5: Pontos de controle e pesos utilizados na curva NURBS do exemplo 4

P.C.	x ₁	x ₂	Peso
C ₁	0,00000	0,00000	1,00000
C ₂	0,00000	0,364221	0,97071
C ₃	0,07247	1,12295	0,91994
C ₄	0,42281	2,27098	0,86722
C ₅	1,38265	3,61735	0,84379
C ₆	2,72902	4,57719	0,86722
C ₇	3,87705	4,92753	0,91994
C ₈	4,63578	5,00000	0,97071
C ₉	5,00000	5,00000	1,00000

Então, utilizando a curva NURBS supracitada para a descrição da geometria e suas funções básicas racionais para interpolação das variáveis independentes, chega-se ao seguinte valor para o deslocamento transversal na extremidade livre da viga através do *Mathematica*:

$$w = -0,01970 \text{ m} \quad (4.2.60)$$

$$e = \left| \frac{-0,0197 + 0,0197}{-0,0197} \right| = 0,0000 \quad (4.2.61)$$

Comparando os resultados de (4.2.59) e (4.2.61), verifica-se erro de 0,00% entre a solução numérica da análise isogeométrica e a solução analítica. Portanto, conclui-se que o elemento isogeométrico de viga curva de Timoshenko é capaz de representar o problema, trazendo resultado de precisão satisfatória para a curva NURBS e aproximações de deslocamentos adotadas.

5 Vínculos

Para a construção de modelos computacionais de estruturas complexas e de interesse em engenharia, pode-se haver a necessidade de se empregar mais de um elemento para descrever a estrutura, além de se impor coerentemente as condições de apoio e conexões entre elementos a fim de fazer com que o modelo reflita adequadamente o comportamento da estrutura a ser projetada. Assim, a questão da imposição de restrições de deslocamentos e conexões entre elementos é de suma relevância para a análise estrutural.

As formulações de elementos isogeométricos do presente trabalho foram desenvolvidas a partir da geometria originada de apenas um vetor nodal, que também é responsável pela geração das funções utilizadas na aproximação dos deslocamentos. Esta seção trata da construção de modelos computacionais empregando mais de um elemento isogeométrico, em especial o de Bernoulli-Euler, além da imposição das condições de apoio da estrutura.

A principal diferença entre os modelos de Bernoulli-Euler e Timoshenko, em se tratando da imposição de restrições vinculares, jaz no fato de que, no primeiro, a rotação das seções transversais não é variável independente, sendo função da derivada do deslocamento transversal w em relação ao eixo que descreve o comprimento da viga. Assim sendo, a imposição de restrições de rotação no elemento de Bernoulli-Euler é menos imediata que no elemento de Timoshenko.

Quando são empregados vetores nodais abertos, as funções básicas são interpolatórias nas extremidades no elemento, analogamente às funções de forma utilizadas no Método dos Elementos Finitos tradicional, e vínculos nas variáveis independentes podem ser estabelecidos de forma simplificada.

Para casos semelhantes aos apresentados nos itens 3.1.3 e 4.1.3, em que os vetores nodais são abertos e deseja-se impor restrições de rotação e de deslocamentos transversal e axial na extremidade do elemento, é possível fazer o seguinte procedimento, explorando as propriedades das funções básicas geradas por vetor nodal aberto:

$$\mathbf{w}(0) = \mathbf{N}(0) \mathbf{w} = 0, \quad (5.1.1)$$

$$\mathbf{u}(0) = \mathbf{N}(0) \mathbf{u} = 0, \quad (5.1.2)$$

$$\varphi(0) = \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'(0) \mathbf{w} - \mathbf{r}^{-1} \mathbf{N}(0) \mathbf{u} = 0, \quad (5.1.3)$$

Como as funções são interpolatórias nas extremidades do elemento, as Eq. (5.1.1) e (5.1.2) levam a:

$$N_1(0)w_1 = 0 \Rightarrow w_1 = 0, \quad (5.1.4)$$

$$N_1(0)u_1 = 0 \Rightarrow u_1 = 0, \quad (5.1.5)$$

Outra propriedade que o vetor nodal aberto confere às funções básicas corresponde ao fato de que N'_1 e N'_2 são as únicas derivadas não nulas em $\xi = 0$. Então, a Eq. (5.1.3) leva a:

$$J^{-1} \left(N'_1(0)w_1 + N'_2(0)w_2 \right) - r^{-1} N'_1(0)u_1 = 0, \quad (5.1.6)$$

$$N'_2(0)w_2 = 0 \Rightarrow w_2 = 0. \quad (5.1.7)$$

Portanto, para casos semelhantes aos Exemplos 1 e 3, as condições de apoio podem ser impostas anulando os coeficientes w_1 , w_2 e u_1 . Entretanto, esses são casos restritos e não são capazes de descrever uma variedade de problemas estruturais.

Assim sendo, o presente trabalho desenvolve duas maneiras generalizadas de estabelecer vínculos de rotação em elementos isogeométricos de Bernoulli-Euler, que correspondem aos Métodos de Lagrange e de penalidade. Os métodos também são válidos para os deslocamentos axial e transversal dos elementos de viga de Bernoulli-Euler.

A imposição de restrições de deslocamentos pode ser feita, através dos Métodos de Lagrange e de Penalidade, adicionando-se as contribuições energéticas dos vínculos à equação do P.T.V.:

$$\delta W_i - \delta W_e + \delta W_c = 0 \quad (5.1.8)$$

Onde δW_c corresponde ao trabalho virtual das restrições vinculares, que é calculado diferentemente a depender do método empregado: $\delta W_c = -\delta W_{\text{Lag}}$ para o método de Lagrange, e $\delta W_c = \delta W_{\text{Pen}}$ para o método de penalidade.

Então, nas seções seguintes, são apresentados os equacionamentos dos Métodos de Lagrange e de Penalidade para imposição de vínculos no elemento de viga isogeométrico curvo de Bernoulli-Euler.

Para a simplificação das deduções, foi idealizada uma situação em que haja dois elementos isogeométricos conectados entre si, elementos 1 e 2, e os vínculos externos todos estabelecidos no elemento 1. Qualquer outro caso pode ser desenvolvido por procedimento análogo.

5.1 Método de Lagrange

Segundo o Método de Lagrange, o potencial (Π_{Lag}^e) para impor um vínculo externo dado por $(d_1^e - d_p) = 0$ pode ser escrito como segue:

$$\Pi_{\text{Lag}}^e = \lambda^e (d_1^e - d_p), \quad (5.1.9)$$

Onde λ^e corresponde ao parâmetro escalar de Lagrange (ou multiplicador de Lagrange), $d_1^e = d_p$ é o vínculo que se deseja impor, d_1^e corresponde a uma componente de deslocamento do elemento 1, e d_p é o deslocamento prescrito.

Então, o trabalho virtual do esforço do vínculo externo por ser obtido através da variação da equação (5.1.9):

$$\delta W_{\text{Lag}}^e = \delta \lambda^e (d_1^e - d_p) + \lambda^e \delta d_1^e. \quad (5.1.10)$$

O potencial (Π_{Lag}^i) para impor um vínculo interno dado por $(d_1^i - d_2^i) = 0$ pode ser escrito como segue:

$$\Pi_{\text{Lag}}^i = \lambda^i (d_1^i - d_2^i), \quad (5.1.11)$$

Onde λ^i corresponde ao parâmetro escalar de Lagrange (ou multiplicador de Lagrange), $d_1^i = d_2^i$ é o vínculo que se deseja impor, d_1^e corresponde a uma componente de deslocamento do elemento 1, e d_2^i corresponde a uma componente de deslocamento do elemento 2.

O trabalho virtual do esforço do vínculo interno pode ser obtido através da variação da equação (5.1.11):

$$\delta W_{\text{Lag}}^i = \delta \lambda^i (d_1^i - d_2^i) + \lambda^i (\delta d_1^i - \delta d_2^i). \quad (5.1.12)$$

O parâmetro de Lagrange pode ser interpretado, fisicamente, como o esforço necessário na manutenção do vínculo. Por exemplo, na restrição da rotação de um elemento, o parâmetro de Lagrange corresponde ao momento fletor necessário para a imposição do vínculo. Os parâmetros de Lagrange são incógnitas adicionadas ao problema.

Então, os deslocamentos externos restritos podem ser escritos em termos de suas aproximações pelas funções básicas de B-Splines ou NURBS, como segue:

$$\mathbf{w}_1^e = \mathbf{N}_1(\xi_{\mathbf{w}_1^e}) \mathbf{w}_1, \quad (5.1.13)$$

$$\mathbf{u}_1^e = \mathbf{N}_1(\xi_{\mathbf{u}_1^e}) \mathbf{u}_1, \quad (5.1.14)$$

$$\varphi_1^e = \frac{1}{J_1} \frac{d\mathbf{w}_1}{d\xi} \bigg|_{\xi=\xi_{\varphi_1^e}} - \frac{\mathbf{u}_1(\xi_{\varphi_1^e})}{r_1} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^e}) \mathbf{w}_1 - r_1^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^e}) \mathbf{u}_1, \quad (5.1.15)$$

Onde $\xi_{\mathbf{w}_1^e}$, $\xi_{\mathbf{u}_1^e}$ e $\xi_{\varphi_1^e}$, correspondem às coordenadas do espaço paramétrico do elemento 1 nas quais são impostas restrições vinculares nos deslocamentos $\mathbf{w}_1$, $\mathbf{u}_1$ e φ_1 , respectivamente.

Analogamente, os deslocamentos cujos vínculos internos são impostos podem ser escritos em termos de suas aproximações pelas funções básicas de B-Splines ou NURBS, como segue:

$$\mathbf{w}_1^i = \mathbf{N}_1(\xi_{\mathbf{w}_1^i}) \mathbf{w}_1, \quad (5.1.16)$$

$$\mathbf{u}_1^i = \mathbf{N}_1(\xi_{\mathbf{u}_1^i}) \mathbf{u}_1, \quad (5.1.17)$$

$$\varphi_1^i = \frac{1}{J_1} \frac{d\mathbf{w}_1}{d\xi} \bigg|_{\xi=\xi_{\varphi_1^i}} - \frac{\mathbf{u}_1(\xi_{\varphi_1^i})}{r_1} = \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i}) \mathbf{w}_1 - r_1^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i}) \mathbf{u}_1, \quad (5.1.18)$$

$$\mathbf{w}_2^i = \mathbf{N}_2(\xi_{\mathbf{w}_2^i}) \mathbf{w}_2, \quad (5.1.19)$$

$$\mathbf{u}_2^i = \mathbf{N}_2(\xi_{\mathbf{u}_2^i}) \mathbf{u}_2, \quad (5.1.20)$$

$$\varphi_2^i = \frac{1}{J_2} \frac{d\mathbf{w}_2}{d\xi} \bigg|_{\xi=\xi_{\varphi_2^i}} - \frac{\mathbf{u}_2(\xi_{\varphi_2^i})}{r_2} = \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i}) \mathbf{w}_2 - r_2^{-1} \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i}) \mathbf{u}_2, \quad (5.1.21)$$

Onde $\xi_{w_1^i}, \xi_{u_1^i}$ e $\xi_{\phi_1^i}$, correspondem às coordenadas do espaço paramétrico do elemento 1 nas quais são impostas restrições vinculares internas nos deslocamentos w_1, u_1 e ϕ_1 , respectivamente; e $\xi_{w_2^i}, \xi_{u_2^i}$ e $\xi_{\phi_2^i}$, correspondem às coordenadas do espaço paramétrico do elemento 2 nas quais são impostas restrições vinculares internas nos deslocamentos w_2, u_2 e ϕ_2 , respectivamente.

Substituindo as equações (5.1.13) a (5.1.15) em (5.1.10), tem-se:

$$\delta W_{Lag, w_1}^e = \delta \lambda_{w_1}^e \left(\mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^e} \right) \mathbf{w}_1 - \mathbf{w}_{1,p} \right) + \lambda_{w_1}^e \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^e} \right)^T, \quad (5.1.22)$$

$$\delta W_{Lag, u_1}^e = \delta \lambda_{u_1}^e \left(\mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^e} \right) \mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_{1,p} \right) + \lambda_{u_1}^e \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^e} \right)^T, \quad (5.1.23)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{Lag, \phi_1}^e &= \delta \lambda_{\phi_1}^e \left(\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{N}'_1 \left(\xi_{\phi_1^e} \right) \mathbf{w}_1 - \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{N}_1 \left(\xi_{\phi_1^e} \right) \mathbf{u}_1 - \phi_{1,p} \right) \\ &+ \lambda_{\phi_1}^e \left(\mathbf{J}_1^{-1} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}'_1 \left(\xi_{\phi_1^e} \right)^T - \mathbf{r}_1^{-1} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{\phi_1^e} \right)^T \right). \end{aligned} \quad (5.1.24)$$

Substituindo as equações (5.1.16) a (5.1.21) em (5.1.12), tem-se:

$$\begin{aligned} \delta W_{Lag, w_{12}}^i &= \delta \lambda_{w_{12}}^i \left(\mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^i} \right) \mathbf{w}_1 - \mathbf{N}_2 \left(\xi_{w_2^i} \right) \mathbf{w}_2 \right) \\ &+ \lambda_{w_{12}}^i \left(\delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^e} \right)^T - \delta \mathbf{w}_2^T \mathbf{N}_2 \left(\xi_{w_2^e} \right)^T \right), \end{aligned} \quad (5.1.25)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{Lag, u_{12}}^i &= \delta \lambda_{u_{12}}^i \left(\mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^i} \right) \mathbf{u}_1 - \mathbf{N}_2 \left(\xi_{u_2^i} \right) \mathbf{u}_2 \right) \\ &+ \lambda_{u_{12}}^i \left(\delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^e} \right)^T - \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{N}_2 \left(\xi_{u_2^e} \right)^T \right), \end{aligned} \quad (5.1.26)$$

$$\begin{aligned} \delta W_{Lag, \phi_{12}}^i &= \delta \lambda_{\phi_{12}}^i \left(\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{N}'_1 \left(\xi_{\phi_1^i} \right) \mathbf{w}_1 - \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{N}_1 \left(\xi_{\phi_1^i} \right) \mathbf{u}_1 \right) \\ &- \delta \lambda_{\phi_{12}}^i \left(\mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{N}'_2 \left(\xi_{\phi_2^i} \right) \mathbf{w}_2 - \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}_2 \left(\xi_{\phi_2^i} \right) \mathbf{u}_2 \right) \\ &+ \lambda_{\phi_{12}}^i \left(\mathbf{J}_1^{-1} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}'_1 \left(\xi_{\phi_1^i} \right)^T - \mathbf{r}_1^{-1} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{\phi_1^i} \right)^T \right) \\ &- \lambda_{\phi_{12}}^i \left(\mathbf{J}_2^{-1} \delta \mathbf{w}_2^T \mathbf{N}'_2 \left(\xi_{\phi_2^i} \right)^T - \mathbf{r}_2^{-1} \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{N}_2 \left(\xi_{\phi_2^i} \right)^T \right), \end{aligned} \quad (5.1.27)$$

Relembrando as equações (4.1.48) e (4.1.49), as equações (5.1.22) a (5.1.27) podem ser organizadas em forma de matriz, como se segue:

$$\begin{bmatrix}
\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{u_1^e})^T & \mathbf{0} & \mathbf{r}_1^{-1}\mathbf{N}_1(\xi_{\phi_1^e})^T & -\mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i})^T & \mathbf{0} & \mathbf{r}_1^{-1}\mathbf{N}_1(\xi_{\phi_1^i})^T \\
\mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{w_1^e})^T & -\mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{N}_1'(\xi_{\phi_1^e})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i})^T & -\mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{N}_1'(\xi_{\phi_1^i})^T \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i})^T & \mathbf{0} & -\mathbf{r}_2^{-1}\mathbf{N}_2(\xi_{\phi_2^i})^T \\
\mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i})^T & \mathbf{J}_2^{-1}\mathbf{N}_2'(\xi_{\phi_2^i})^T \\
-\mathbf{N}_1(\xi_{u_1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{w_1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{r}_1^{-1}\mathbf{N}_1(\xi_{\phi_1^e}) & -\mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{N}_1'(\xi_{\phi_1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
-\mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\
\mathbf{r}_1^{-1}\mathbf{N}_1(\xi_{\phi_1^i}) & -\mathbf{J}_1^{-1}\mathbf{N}_1'(\xi_{\phi_1^i}) & -\mathbf{r}_2^{-1}\mathbf{N}_2(\xi_{\phi_2^i}) & \mathbf{J}_2^{-1}\mathbf{N}_2'(\xi_{\phi_2^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0}
\end{bmatrix}
\begin{bmatrix}
\mathbf{u}_1 \\
\mathbf{w}_1 \\
\mathbf{u}_2 \\
\mathbf{w}_2 \\
\lambda_{u_1^e} \\
\lambda_{w_1^e} \\
\lambda_{\phi_1^e} \\
\lambda_{u_1^i} \\
\lambda_{w_1^i} \\
\lambda_{\phi_1^i}
\end{bmatrix} =
\begin{bmatrix}
\mathbf{F}_1 \\
\mathbf{F}_1 \\
\mathbf{F}_2 \\
\mathbf{F}_2 \\
-u_{1,p} \\
-w_{1,p} \\
-\phi_{1,p} \\
0 \\
0 \\
0
\end{bmatrix}
\quad (5.1.28)$$

Portanto, de acordo com a equação (5.1.28), as contribuições dos vínculos externos e internos calculadas através do Método de Lagrange são adicionadas à matriz de rigidez da estrutura construída com elementos de viga isogeométricos de Bernoulli-Euler, caracterizando a imposição dos vínculos para que a análise estrutural possa ser realizada.

Os parâmetros de Lagrange dos vínculos externos (λ^e) podem ser interpretados como as reações de apoio da estrutura, enquanto os parâmetros dos vínculos internos (λ^i) podem ser interpretados como o esforço envolvido na conexão entre os elementos.

5.2 Método de Penalidade

A abordagem do Método de penalidade começa da mesma maneira ao feito para o Método de Lagrange, ou seja, pelo potencial dos vínculos externos e internos:

$$\Pi_{\text{Pen}}^e = \frac{1}{2} \beta^e (d_1^e - d_p)^2, \quad (5.2.1)$$

$$\Pi_{\text{Pen}}^i = \frac{1}{2} \beta^i (d_1^i - d_2^i)^2, \quad (5.2.2)$$

Onde Π_{Pen}^e corresponde ao potencial do vínculo externo, Π_{Pen}^i é o potencial do vínculo interno, β^e e β^i são as constantes de Penalidade, que correspondem a valores reais arbitrários e que devem ser calibrados a fim de garantir que a restrição desejada seja atendida com o nível de precisão requerido.

O trabalho virtual dos vínculos são obtidos pela variação das equações (5.2.1) e (5.2.2):

$$\delta W_{\text{Pen}}^e = \beta^e \delta d_1 (d_1^e - d_p), \quad (5.2.3)$$

$$\delta W_{\text{Pen}}^i = \beta^i (\delta d_1^i - \delta d_2^i) (\delta d_1^i - \delta d_2^i), \quad (5.2.4)$$

Onde δW_{Pen}^e e δW_{Pen}^i correspondem aos trabalhos dos vínculos externos e internos, respectivamente.

Substituindo as equações dos deslocamentos restritos por vinculação externa, (5.1.13) a (5.1.15) em (5.2.3), tem-se:

$$\delta W_{\text{Pen}, w_1}^e = \beta^e \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^e} \right)^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^e} \right) \mathbf{w}_1 - \beta^e w_{1,p} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{w_1^e} \right)^T, \quad (5.2.5)$$

$$\delta W_{\text{Pen}, u_1}^e = \beta^e \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^e} \right)^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^e} \right) \mathbf{u}_1 - \beta^e u_{1,p} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1 \left(\xi_{u_1^e} \right)^T, \quad (5.2.6)$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{Pen}, \varphi_1}^e &= \beta^e J_1^{-2} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^e})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^e}) \mathbf{w}_1 \\
&\quad - \beta^e J_1^{-1} \mathbf{r}_1^{-1} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^e})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^e}) \mathbf{u}_1 \\
&\quad - \beta^e J_1^{-1} \mathbf{r}_1^{-1} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^e})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^e}) \mathbf{w}_1 \\
&\quad + \beta^e \mathbf{r}_1^{-2} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^e})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^e}) \mathbf{u}_1 \\
&\quad - \beta^e \varphi_{1,p} \left(J_1^{-1} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^e})^T - \mathbf{r}_1^{-1} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^e})^T \right)
\end{aligned} \tag{5.2.7}$$

Analogamente, substituindo as equações dos deslocamentos com imposição de vinculação interna, (5.1.16) a (5.1.21), em (5.2.4), tem-se:

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{Pen}, w_{12}}^i &= \beta^i \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i}) \mathbf{w}_1 - \beta^i \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i}) \mathbf{w}_2 \\
&\quad - \beta^i \delta \mathbf{w}_2^T \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i}) \mathbf{w}_1 + \beta^i \delta \mathbf{w}_2^T \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i}) \mathbf{w}_2
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{Pen}, u_{12}}^i &= \beta^i \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i}) \mathbf{u}_1 - \beta^i \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i}) \mathbf{u}_2 \\
&\quad - \beta^i \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i}) \mathbf{u}_1 + \beta^i \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i}) \mathbf{u}_2
\end{aligned} \tag{5.2.9}$$

$$\begin{aligned}
\delta W_{\text{Pen}, \varphi_{12}}^i &= \beta^i \left(J_1^{-1} \delta \mathbf{w}_1^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i})^T - \mathbf{r}_1^{-1} \delta \mathbf{u}_1^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i})^T - J_2^{-1} \delta \mathbf{w}_2^T \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{r}_2^{-1} \delta \mathbf{u}_2^T \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \right) \left(J_1^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i}) \mathbf{w}_1 - \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i}) \mathbf{u}_1 - J_2^{-1} \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i}) \mathbf{w}_2 \right. \\
&\quad \left. + \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i}) \mathbf{u}_2 \right)
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Os trabalhos dos vínculos externos, Eq. (5.2.5) a (5.2.7), podem ser reescritos em forma de matrizes, como segue:

$$\delta W_{\text{Pen}, w_1}^e = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{Pen}, w_1}^e \mathbf{a} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{q}_{\text{Pen}, w_1}^e \mathbf{a}, \tag{5.2.11}$$

$$\delta W_{\text{Pen}, u_1}^e = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{Pen}, u_1}^e \mathbf{a} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{q}_{\text{Pen}, u_1}^e \mathbf{a}, \tag{5.2.12}$$

$$\delta W_{\text{Pen}, \varphi_1}^e = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{Pen}, \varphi_1}^e \mathbf{a} - \delta \mathbf{a}^T \mathbf{q}_{\text{Pen}, \varphi_1}^e \mathbf{a}, \tag{5.2.13}$$

Onde:

$$\mathbf{K}_{\text{Pen},w1}^e = \beta^e \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1(\xi_{w1^e})^T \mathbf{N}_1(\xi_{w1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.2.14)$$

$$\mathbf{K}_{\text{Pen},u1}^e = \beta^e \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(\xi_{w1^e})^T \mathbf{N}_1(\xi_{w1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.2.15)$$

$$\mathbf{K}_{\text{Pen},\phi1}^e = \beta^e \begin{bmatrix} r_1^{-2} \mathbf{N}_1(\xi_{\phi1^e})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\phi1^e}) & -\mathbf{J}_1^{-1} r_1^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\phi1^e})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\phi1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{J}_1^{-1} r_1^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\phi1^e})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\phi1^e}) & \mathbf{J}_1^{-2} \mathbf{N}'_1(\xi_{\phi1^e})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\phi1^e}) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.2.16)$$

$$\mathbf{q}_{\text{Pen},w1}^e = \beta^e \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ w_{1,p} \mathbf{N}_1(\xi_{w1^e})^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.2.17)$$

$$\mathbf{q}_{\text{Pen},u1}^e = \beta^e \begin{bmatrix} u_{1,p} \mathbf{N}_1(\xi_{u1^e})^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.2.18)$$

$$\mathbf{q}_{\text{Pen},\phi1}^e = \beta^e \phi_{1,p} \begin{bmatrix} -r_1^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\phi1^e})^T \\ \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\phi1^e})^T \\ \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}. \quad (5.2.19)$$

Os trabalhos dos vínculos externos, por sua vez, Eq. (5.2.8) a (5.2.10), podem ser reescritos em forma de matrizes, como segue:

$$\delta W_{\text{Pen},w12}^i = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{Pen},w12}^i \mathbf{a}, \quad (5.2.20)$$

$$\delta W_{\text{Pen},u12}^i = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{Pen},u12}^i \mathbf{a}, \quad (5.2.21)$$

$$\delta W_{\text{Pen},\varphi_{12}}^i = \delta \mathbf{a}^T \mathbf{K}_{\text{Pen},\varphi_{12}}^i \mathbf{a}, \quad (5.2.22)$$

Onde:

$$\mathbf{K}_{\text{Pen},w_{12}}^i = \beta^i \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i}) & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i}) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{w_1^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{w_2^i}) \end{bmatrix}, \quad (5.2.23)$$

$$\mathbf{K}_{\text{Pen},u_{12}}^i = \beta^i \begin{bmatrix} \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i}) & \mathbf{0} & -\mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -\mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{u_1^i}) & \mathbf{0} & \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{u_2^i}) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad (5.2.24)$$

$$\mathbf{K}_{\text{Pen},\varphi_{12}}^i = \beta^i \begin{bmatrix} \mathbf{r}_1^{-2} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i}) & -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i}) & -\mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i}) & \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i}) \\ -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i}) & \mathbf{J}_1^{-2} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i}) & \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i}) & -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i})^T \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i}) \\ -\mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i}) & \mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i}) & \mathbf{r}_2^{-2} \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i}) & -\mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i}) \\ \mathbf{r}_1^{-1} \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}_1(\xi_{\varphi_1^i}) & -\mathbf{J}_1^{-1} \mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}'_1(\xi_{\varphi_1^i}) & -\mathbf{J}_2^{-1} \mathbf{r}_2^{-1} \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}_2(\xi_{\varphi_2^i}) & \mathbf{J}_2^{-2} \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i})^T \mathbf{N}'_2(\xi_{\varphi_2^i}) \end{bmatrix} \quad (5.2.25)$$

Relembrando a Eq. (5.1.1), as Eq. (5.2.11) a (5.2.25) podem ser organizadas para compor o seguinte sistema global:

$$(\mathbf{K}_{12} + \mathbf{K}_{\text{Pen}}) \mathbf{a} = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{q}_{\text{pen}}, \quad (5.2.26)$$

Onde:

$$\mathbf{K}_{\text{Pen}} = \mathbf{K}_{\text{Pen},w_1^e} + \mathbf{K}_{\text{Pen},u_1^e} + \mathbf{K}_{\text{Pen},\varphi_1^e} + \mathbf{K}_{\text{Pen},w_{12}^i} + \mathbf{K}_{\text{Pen},u_{12}^i} + \mathbf{K}_{\text{Pen},\varphi_{12}^i}, \quad (5.2.27)$$

$$\mathbf{q}_{\text{Pen}} = \mathbf{q}_{\text{Pen},w_1^e} + \mathbf{q}_{\text{Pen},u_1^e} + \mathbf{q}_{\text{Pen},\varphi_1^e}, \quad (5.2.28)$$

$$\mathbf{K}_{12} = \begin{bmatrix} \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{K}_1 & \mathbf{K}_1 & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{K}_2 & \mathbf{K}_2 \end{bmatrix}, \quad (5.2.29)$$

$$\mathbf{F}_{12} = [\mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_1 \quad \mathbf{F}_2 \quad \mathbf{F}_2]^T, \quad (5.2.30)$$

$$\mathbf{a}_{12} = [\mathbf{u}_1 \quad \mathbf{w}_1 \quad \mathbf{u}_2 \quad \mathbf{w}_2]^T. \quad (5.2.31)$$

Então, a partir dos métodos de Lagrange e de penalidade apresentados neste capítulo, vínculos podem ser impostos aos elementos de vigas isogeométricos a fim de compor diversos tipos de estruturas que envolvam vigas curvas e retas.

5.3 Exemplo de aplicação 5

O primeiro exemplo de aplicação dos métodos de Lagrange e de penalidade corresponde a uma estrutura denominada Arco Tudor, que é composta, geometricamente, por dois arcos circulares e 2 segmentos de retas. A Figura 5.1 ilustra a geometria e os carregamentos aplicados na estrutura, e os dados do problema estão listados na Tabela 6.

Figura 5.1: Geometria da estrutura e carregamentos idealizados (a) Dimensões da estrutura (b) Carregamentos transversais aplicados na estrutura.

Tabela 6: Dados do exemplo de aplicação 5

Seção transversal (retangular)	0,2 m x 0,5 m
Módulo de Young (E)	24 GPa
Carregamento transversal (p)	100 kN/m
Momento de inércia (I)	$2,083 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
Área da seção transversal (A)	0,10 m ²

O modelo computacional da estrutura é composto por 4 elementos isogeométricos de Bernoulli-Euler, dois arcos circulares e duas barras retas, e foi implementado no *Mathematica*^{TM}. Nos extremos de cada arco, existem dois vínculos externos, um em u e outro em w . Os arcos são conectados às barras retas através de 3 vínculos internos, ou seja, em u , w e ϕ . Por fim, as barras retas são conectadas entre si através de vínculos internos nos deslocamentos translacionais, não havendo vínculos em ϕ .

A geometria dos arcos é dada por curvas NURBS de quarta ordem, cujo vetor nodal é aberto e corresponde a $\{0,0,0,0,0,0,2,0,4,0,6,0,8,1,1,1,1,1\}$, e os pontos de controle e os pesos constam na Tabela 7. Para a aproximação dos deslocamentos das vigas retas, foram utilizadas funções básicas de B-splines de quarta ordem geradas pelo vetor nodal aberto $\{0,0,0,0,0,0,5,1,1,1,1,1\}$.

Tabela 7: Pontos de controle e pesos utilizados na construção dos arcos

P.C.	x ₁	x ₂	Pesos
C ₁	0,00000	0,00000	1,00000
C ₂	0,00000	0,05704	0,98281
C ₃	0,00879	0,17378	0,95300
C ₄	0,04999	0,34947	0,92205
C ₅	0,16148	0,56769	0,90830
C ₆	0,32269	0,75226	0,92205
C ₇	0,47051	0,85578	0,95300
C ₈	0,57564	0,90731	0,98281
C ₉	0,62860	0,92850	1,00000
C ₁ '	3,37140	0,92850	1,00000
C ₂ '	3,42436	0,90731	0,98281
C ₃ '	3,52949	0,85578	0,95300
C ₄ '	3,67731	0,75226	0,92205
C ₅ '	3,83852	0,56769	0,90830
C ₆ '	3,95001	0,34947	0,92205
C ₇ '	3,99121	0,17378	0,95300
C ₈ '	4,00000	0,05704	0,98281
C ₉ '	4,00000	0,00000	1,00000

Primeiramente, o problema foi resolvido através do método de Lagrange, e os valores dos multiplicadores de Lagrange obtidos constam na Tabela 8. Então, os resultados dos deslocamentos foram utilizados para calibrar os parâmetros de penalidade. A Tabela 9 mostra uma comparação entre o deslocamento resultante no topo da estrutura $\left(d = \sqrt{d_{x_1}^2 + d_{x_2}^2}\right)$ obtido através do método de Lagrange $\left(d = 4,1372 \times 10^{-4} \text{ m}\right)$ e através do método de penalidade, variando os parâmetros de penalidade em uma faixa de valores compreendida entre 10^{12} e 10^{16} . Nota-se que, para $10^{15} \leq \beta \leq 10^{16}$, a solução obtida através do método de Penalidade é praticamente a mesma que a obtido pelo método de Lagrange, considerando 4 dígitos de precisão.

Tabela 8: Multiplicadores de Lagrange do exemplo 5

$\lambda_{u,1}^e$	160724,74850
$\lambda_{w,1}^e$	-7407,38617
$\lambda_{u,12}^i$	-131261,15452
$\lambda_{w,12}^i$	-53899,71335
$\lambda_{\phi,12}^i$	29466,57338
$\lambda_{u,23}^i$	-131261,15452
$\lambda_{w,23}^i$	93800,28665
$\lambda_{u,34}^i$	-159741,09597
$\lambda_{w,34}^i$	51249,85131
$\lambda_{\phi,34}^i$	-21157,80539
$\lambda_{u,4}^e$	-138585,42987
$\lambda_{w,4}^e$	-84630,58198

Tabela 9: Comparação entre os deslocamentos no topo da estrutura obtidos através dos métodos de Lagrange e de penalidade, variando os valores da constante de penalidade

β	d_{pen} (m)	d_{pen}/d_{lag}
1×10^{12}	$4,1326 \times 10^{-4}$	$9,9891 \times 10^{-1}$
1×10^{13}	$4,1367 \times 10^{-4}$	$9,9989 \times 10^{-1}$
1×10^{14}	$4,1371 \times 10^{-4}$	$9,9999 \times 10^{-1}$
1×10^{15}	$4,1372 \times 10^{-4}$	1,0000
1×10^{16}	$4,1372 \times 10^{-4}$	1,0000

Os multiplicadores de Lagrange podem ser utilizados para definir a magnitude do parâmetro de penalidade a ser empregado. Por exemplo, $\lambda_{u,1}^e$ é o multiplicador de Lagrange associado ao vínculo externo no deslocamento axial u do arco à esquerda, além de corresponder à força normal na extremidade do mesmo. A partir do multiplicador de Lagrange e de uma violação de restrição adotada Δd , uma estimativa do valor da constante de penalidade pode ser obtida como:

$$\beta = \frac{\lambda}{\Delta d}. \quad (5.2.32)$$

De fato, a violação da restrição supracitada obtida utilizando a constante de penalidade de $1,0 \times 10^{12}$ é aproximadamente $1,6 \times 10^{-7}$, e o multiplicador de Lagrange é aproximadamente $1,6 \times 10^5$, então tem-se:

$$\beta = \frac{1,6 \times 10^5}{1,6 \times 10^{-7}} = 1,0 \times 10^{12}. \quad (5.2.33)$$

Com base nas soluções obtidas através dos métodos de Lagrange e de penalidade para $10^{15} \leq \beta \leq 10^{16}$, apresentam-se a configuração deformada da estrutura e os diagramas de momentos fletores e forças normais na Figura 5.2.

Figura 5.2: Soluções do Exemplo 5 (a) Diagrama de momento fletor (b) Diagrama de força normal (c) Configuração deformada da estrutura

Os multiplicadores de Lagrange podem ser entendidos como o esforço necessário para a imposição do vínculo, e, comparando-se os multiplicadores da Tabela 8 e os diagramas da Figura 5.2, esse fato é verificado. Por exemplo, $\lambda_{u,1}^e$ e $\lambda_{u,4}^e$ correspondem às forças normais nas extremidades dos arcos (170,7 kN e 138,6 kN, respectivamente), e $\lambda_{\phi,12}^i$ e $\lambda_{\phi,34}^i$ são os momentos fletores na ligação dos arcos com as vigas retas (29,5 kNm e 21,2 kNm, respectivamente), e assim por diante.

5.4 Exemplo de aplicação 6

O segundo exemplo de aplicação dos métodos de Lagrange e de penalidade corresponde a uma estrutura inspirada em uma ponte em arco, que é composta, geometricamente, por um arco circular e um segmentos de reta. A Figura 5.1 ilustra a geometria e os carregamentos aplicados na estrutura, e os dados do problema estão listados na Tabela 10.

Figura 5.3: Geometria da estrutura e carregamentos idealizados (a) Dimensões da estrutura (b) Carregamentos transversais aplicados na estrutura.

Tabela 10: Dados do exemplo de aplicação 6

Seção transversal (retangular)	0,2 m x 0,5 m
Módulo de Young (E)	24 GPa
Carregamento transversal (p)	100 kN/m
Momento de inércia (I)	$2.083 \times 10^{-3} \text{ m}^4$
Área da seção transversal (A)	0,10 m ²

O modelo computacional da estrutura é composto por 4 elementos isogeométricos de Bernoulli-Euler, dois arcos circulares e duas barras retas, e foi implementado no *Mathematica*^{TM}. Nos extremos de cada arco, existem três vínculos externos, em u , w e φ . Nos extremos das vigas retas, existem dois vínculos externos, um em u e outro em w . Os arcos são conectados entre si através de 3 vínculos internos, em u , w e φ . As barras retas também são conectadas entre si através de 3 vínculos internos, em u , w e φ . Por fim, as barras retas são conectadas aos arcos através de vínculos internos nos deslocamentos translacionais u e w , não havendo vínculos em φ .

A geometria dos arcos é dada por curvas NURBS de quarta ordem, cujo vetor nodal é aberto e corresponde a $\{0,0,0,0,0,0,2,0,4,0,6,0,8,1,1,1,1,1\}$, e os pontos de controle e os pesos constam

Tabela 12: Multiplicadores de Lagrange do exemplo 6

$\lambda_{u,1}^e$	-89341,306
$\lambda_{w,1}^e$	25074,220
$\lambda_{\phi,1}^e$	2792,629
$\lambda_{u,2}^e$	8934,306
$\lambda_{w,2}^e$	25074,220
$\lambda_{\phi,2}^e$	-2792,629
$\lambda_{u,3}^e$	0,000
$\lambda_{w,3}^e$	-56523,562
$\lambda_{u,4}^e$	0,000
$\lambda_{w,4}^e$	-6523,562
$\lambda_{u,12}^i$	82173,146
$\lambda_{w,12}^i$	-43480,975
$\lambda_{\phi,12}^i$	-28893,944
$\lambda_{u,34}^i$	0,000
$\lambda_{w,34}^i$	18476,438
$\lambda_{\phi,34}^i$	14941,096
$\lambda_{u,1234}^i$	0,000
$\lambda_{w,1234}^i$	86952,877

Tabela 13: Comparação entre os deslocamentos no topo do arco obtidos através dos métodos de Lagrange e de penalidade, variando os valores da constante de penalidade

β	$d_{pen} \text{ (m)}$	d_{pen}/d_{lag}
1×10^{11}	$3,5014 \times 10^{-4}$	$9,9891 \times 10^{-1}$
1×10^{12}	$3,5363 \times 10^{-4}$	$9,9890 \times 10^{-1}$
1×10^{13}	$3,5397 \times 10^{-4}$	$9,9986 \times 10^{-1}$
1×10^{14}	$3,5401 \times 10^{-4}$	$9,9997 \times 10^{-1}$
1×10^{15}	$3,5402 \times 10^{-4}$	1,0000
1×10^{16}	$3,5402 \times 10^{-4}$	1,0000

Com base nas soluções obtidas através dos métodos de Lagrange e de penalidade para $10^{15} \leq \beta \leq 10^{16}$, apresentam-se a configuração deformada da estrutura e os diagramas de momentos fletores e forças normais na Figura 5.4.

Figura 5.4: Soluções do Exemplo 6 (a) Diagrama de momento fletor (b) Diagrama de força normal (c) Configuração deformada da estrutura

Os multiplicadores de Lagrange podem ser entendidos como o esforço necessário para a imposição do vínculo, e, comparando-se os multiplicadores da Tabela 12 e os diagramas da Figura 5.4, esse fato é verificado. Por exemplo, $\lambda_{u,1}^e$ e $\lambda_{u,4}^e$ correspondem às forças normais nas extremidades dos arcos (89,3 kN), e $\lambda_{\varphi,12}^i$ e $\lambda_{\varphi,34}^i$ são os momentos fletores na ligação entre os arcos e as vigas retas (28,9 kNm e 14,9 kNm, respectivamente), e assim por diante.

6 Conclusão

Nesse trabalho, foram desenvolvidos elementos isogeométricos de vigas planas retilíneas e curvas sob as hipóteses de Bernoulli-Euler e Timoshenko. Os elementos foram testados em exemplos de aplicação, mostrando boa concordância com soluções analíticas.

As formulações isogeométricas de vigas foram desenvolvidas a partir do Princípio dos Trabalhos Virtuais analogamente ao método dos elementos finitos tradicional, a principal diferença corresponde ao emprego de funções básicas de *B-splines* ou NURBS na aproximação das variáveis independentes. Assim sendo, as matrizes de rigidez e vetores de esforços externos são definidas por essas funções básicas.

A estrutura dos modelos isogeométricos é bem semelhante à de um elemento finito tradicional, uma vez que matrizes de rigidez e vetores de forças externas podem ser definidas. Portanto, os modelos isogeométricos podem ser implementados em códigos de elementos finitos existentes, alterando-se as funções de aproximação.

Um estudo sobre a imposição de restrições vinculares em elementos de viga isogeométricos, seja para estabelecer condições de apoio ou conexões entre multirregiões, foi desenvolvido baseado nos Métodos de Lagrange e de penalidade, levando-se em consideração o elemento de viga de Bernoulli-Euler, cuja rotação não corresponde diretamente a um grau de liberdade. Foram feitos exemplos de aplicação a fim de ilustrar o emprego dos métodos de Lagrange e de penalidade.

Como perspectiva de trabalhos futuros, os Métodos de Lagrange e de penalidade poderiam ser utilizados para impor vínculos em elementos isogeométricos de maior complexidade, tais como vigas 3D, placas e cascas.

7 Referências bibliográficas

- [1] Hughes TJR, Cottrell JA, Bazilevs Y. Isogeometric analysis: CAD, finite elements, NURBS, exact geometry, and mesh refinement. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; **194**:4135–4195.
- [2] Borden MJ, Scott MA, Evans JA, Hughes TJR. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of NURBS. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2011; **87**:15-47.
- [3] Scott MA, Borden MJ, Verhoosel CV, Sederberg TW, Hughes TJR. Isogeometric finite element data structures based on Bézier extraction of T-Splines. *International Journal for Numerical Methods in Engineering* 2011; **88**:126-156.
- [4] Hughes TJR, Reali A, Sangalli G. Efficient quadrature for NURBS-based isogeometric analysis. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008; **199**:301–313.
- [5] Basilevs Y, Michler C, Calo VM, Hughes TJR. Weak Dirichlet boundary conditions for wall-bounded turbulent flows. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2007; **196**: 4853-4862.
- [6] Basilevs Y, Hughes TJR. NURBS-based isogeometric analysis for the computation of flows about rotating components. *Computational Mechanics* 2008; **43**: 143-150.
- [7] Basilevs Y, Calo VM, Zhang Y, Hughes TJR. Isogeometric fluid-structure interaction analysis with applications to arterial blood flow. *Computational Mechanics* 2006; **38**: 310-322.
- [8] Basilevs Y, Calo VM, Hughes TJR, Zhang Y. Isogeometric fluid-structure interaction: theory, algorithms, and computations. *Computational Mechanics* 2008; **43**: 3-37.
- [9] Basilevs Y, Akkerman I. Large eddy simulation of turbulent Taylor-Couette flow using isogeometric analysis and the residual-base variational multiscale method. *Journal of Computational Physics* 2010; **229**: 3402-3414.
- [10] Farah P, Gitterle M, Wall WA, Popp A. Computational wear and contact modelling for fretting analysis with isogeometric dual mortar methods. *Key Engineering Materials* 2016; **681**: 1-18.
- [11] Seitz A, Farah P, Kremheller J, Wohlmuth BI, Wall WA, Popp A. Isogeometric dual mortar methods for computational contact mechanics.

- [12] Wall WA, Frenzel MA, Cyron C. Isogeometric structural shape optimization. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2008; **197**: 2976-2988.
- [13] Cottrell JA, Reali A, Basilevs Y, Hughes TJR. Isogeometric analysis of structural vibrations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2006; **195**: 5257-5296.
- [14] Benson D, Basilevs Y, Hsu M, Hughes TJR. A large deformation, rotation-free, isogeometric shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2011; **200**: 1367-1378.
- [15] Benson D, Basilevs Y, Hsu M, Hughes TJR. Isogeometric shell analysis: The reissner-mindlin shell. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010; **199**: 276-289.
- [16] Kiendl J, Bletzinger KU, Linhard J, Wuchner R. Isogeometric shell analysis with Kirchhoff-Love elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2009; **189**: 3902-3914.
- [17] Gay Neto A, Martins CA, Pimenta PM. Static analysis of offshore risers with a geometrically-exact 3D beam model subjected to unilateral contact. *Computational Mechanics* 2014; **53**: 125-145.
- [18] Gay Neto A. Dynamics of offshore risers using a geometrically-exact beam model with hydrodynamic loads and contact with the seabed. *Engineering Structures* 2016; **125**: 438-454.
- [19] Armero F, Valverde J. Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff-Love rods. I: the linear plane case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2012; **213-216**: 427-457.
- [20] Armero F, Valverde J. Invariant Hermitian finite elements for thin Kirchhoff-Love rods. II: the linear three-dimensional case. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2012; **213-216**: 458-485.
- [21] Beirão da Veiga L, Lovadina C, Reali A. Avoiding shear locking for the Timoshenko beam problem via isogeometric collocation methods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2012; **241-244**: 38-51.
- [22] Auricchio F, Beirão da Veiga L, Keindl J, Lovadina C, Reali A. Locking-free isogeometric collocation methods for spatial Timoshenko rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2013; **263**: 113-126.

- [23] Bouclier R, Elguedj T, Combescure A. Locking-free isogeometric formulations of curved thick beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2012; **245-246**: 144-162.
- [24] Greco L, Cuomo M, Contrafatto L, Gazzo S. An efficient blended mixed B-spline formulation for removing membrane locking in plane curved Kirchhoff rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2017; **324**: 478-511.
- [25] Marino E. Locking-free isogeometric collocation formulation for three-dimensional geometrically exact shear-deformable beams with arbitrary initial curvature. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2017; **324**: 546-572.
- [26] Weeger O, Wever U, Simeon B. Isogeometric analysis of nonlinear Euler–Bernoulli beam vibrations. *Nonlinear Dynamics* 2013. **72**: 813-835. DOI:10.1007/s11071-013-0755-5.
- [27] Lee SJ, Park KS. Vibrations of Timoshenko beams with isogeometric approach. *Applied Mathematical Modelling* 2013; **37**: 9174-9190.
- [28] Nagy AP, Abdalla MM, Gürdal Z. Isogeometric sizing and shape optimization of beam structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010; **199**: 1216-1230.
- [29] Cazzani A, Malagù M, Turco E. Isogeometric analysis of plane-curved beams. *Mathematics and Mechanics of Solids* 2016; **21**: I.5, 1-16.
- [30] Cazzani A, Malagù M, Turco E. Constitutive models for strongly curved beams in the frame of isogeometric analysis. *Mathematics and Mechanics of Solids* 2016; **21**: I.2, 1-28.
- [31] Reali A, Gomez H. An isogeometric collocation approach for Bernoulli-Euler beams and Kirchhoff plates. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2015; **284**: 623-636.
- [32] Kiendl J, Auricchio F, Hughes TJR, Reali A. Single-variable formulations and isogeometric discretizations for shear deformable beams. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2015; **284**: 988-1004.
- [33] Greco L, Cuomo M. B-spline interpolation of Kirchhoff-Love space rods. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2013; **256**: 251-269.
- [34] Kiendl J, Basilevs Y, Hsu MC, Wüchner R, Bletzinger KU. The bending strip method of isogeometric analysis of Kirchhoff-Love shell structures. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2010; **199**: 2043-2416.

- [35] Greco L, Cuomo M. An implicit G^1 multi-patch B-spline interpolation for Kirchhoff-Love space rod. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2014; **269**: 173-197.
- [36] Costa J, Pimenta P, Wriggers P. Meshless analysis of shear deformable shells: boundary and interface constraints. *Computational Mechanics* 2016; **57**: 679-700.
- [37] Piegl L, Tiller W. The NURBS Book (Monographs in Visual Communication), Second ed., Springer-Verlag, New York, 1997.
- [38] Bucalem ML, Bathe KJ. The Mechanics of Solids and Structures – Hierarchical Modeling and the Finite Element Solution, First ed., Springer-Verlag, New York, 2011.
- [39] Bathe KJ. Finite element procedures, First ed., Prentice Hall, 1996.

Apêndice A – Implementação de elementos isogeométricos no Mathematica™

Neste apêndice, são apresentadas as implementações comentadas dos Exemplos das seções 3.1.3 (Solução E) e 3.2.3 no software Mathematica™.

A.1. Elemento de viga de Bernoulli-Euler

Primeiramente, atribuem-se as coordenadas do vetor nodal à variável Knots e o produto de inércia à EI:

```
Knots={0,0,0,0,0.5,1,1,1,1}
EI=100000
```

A matriz de rigidez do elemento de Bernoulli-Euler, dada pela equação:

$$\mathbf{K} = EI \int_{\xi_1}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{J}^{-3} \mathbf{N}''^T \mathbf{N}'' d\xi,$$

Pode ser construída através dos comandos apresentados a seguir:

```
K=EI*Table[Integrate[D[D[BSplineBasis[{3,Knots},i-1,x],x],x]*
D[D[BSplineBasis[{3,Knots},j-
1,x],x],x],{x,0,1}],{i,1,5},{j,1,5}]
```

Onde:

BSplineBasis[{ordem B-spline, vetor nodal}, índice da função básica, nome da coordenada paramétrica]: função que gera funções básicas de B-splines;

Table[expressão, {i, i_{mín}, i_{máx}}, {j, j_{mín}, j_{máx}}]: gera uma tabela com os índices i e j variando de i_{mín} a i_{máx} e j_{mín} a j_{máx}, respectivamente;

Integrate[expressão, {x, x_{mín}, x_{máx}}]: integral definida em relação a uma variável x entre x_{mín} e x_{máx};

D[expressão,x]: derivada de uma expressão em relação à variável x.

O vetor das forças externas, por sua vez, é dado pela equação:

$$\mathbf{F} = \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_z \mathbf{J} \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T + \mathbf{M}_0 \mathbf{N}'(\xi_l)^T + \mathbf{M}_L \mathbf{N}'(\xi_{n+p+1})^T = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \end{bmatrix},$$

E atribuído à variável $\mathbf{F}$:

```
F={ 0, 0, 0, 0, 1000 }
```

Então, as condições de apoio podem ser impostas fazendo w_1 e w_2 iguais a zero, ou seja, eliminam-se as primeiras e segundas linhas e colunas da matriz de rigidez e as duas primeiras linhas do vetor das forças externas do elemento, atribuindo a matriz reduzida à variável $\mathbf{K}_{red}$ e o vetor de forças reduzido à $\mathbf{F}_{red}$:

```
Kred=K[ [ 3 ; ; 5, 3 ; ; 5 ] ]  
Fred=F[ [ 3 ; ; 5 ] ]
```

Por fim, o vetor dos coeficientes de aproximação do deslocamento transversal é obtido pela resolução de sistema linear e atribuído à variável $\mathbf{w}$:

```
w=LinearSolve[Kred,Fred]
```

O valor presente na última linha do vetor $\mathbf{w}$ corresponde ao deslocamento transversal na extremidade livre da viga, que é utilizado na comparação com a solução analítica do problema.

A.2. Elemento de viga de Timoshenko

Primeiramente, atribuem-se os valores dos dados do problema a variáveis, conforme descrito a seguir:

```

knots={0,0,0,0,0.5,1,1,1,1}
b=0.1
h=0.2
Ib=b*h^3/12
A=b*h
k=5/6
El=24*10^9
n=0.2
G=El/(2*(1+n))
L=5
J=L

```

Onde:

- knots: vetor nodal;
- b: base da seção transversal retangular;
- h: altura da seção transversal retangular;
- Ib: momento de inércia;
- A: área da seção transversal;
- k: coeficiente de cisalhamento;
- L: comprimento da viga;
- J: jacobiano de transformação entre x e ξ .

A matriz de rigidez do elemento de Timoshenko é dada pela equação:

$$\mathbf{K} = EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' \end{bmatrix} d\xi + k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \begin{bmatrix} \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' & -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} \\ -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' & \mathbf{J}^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} \end{bmatrix} d\xi,$$

Cujas submatrizes podem ser calculadas conforme os comandos apresentados a seguir:


```

kb = EI*Ib/J*Table[Integrate[D[BSplineBasis[{3, knots}, i - 1,
x], x]*D[BSplineBasis[{3, knots}, j-1, x], x], {x, 0, 1}], {i,
1, 5}, {j, 1, 5}]
ks11 = k*A*G/J*Table[Integrate[D[BSplineBasis[{3, knots}, i -
1, x], x]*D[BSplineBasis[{3, knots}, j-1, x], x], {x, 0, 1}],
{i, 1, 5}, {j, 1, 5}]
ks21 = (-1)*k*G*A*Table[Integrate[BSplineBasis[{3, knots}, i -
1, x]*D[BSplineBasis[{3, knots}, j-1, x], x], {x, 0, 1}], {i,
1, 5}, {j, 1, 5}]
ks12 = (-1)*k*G*A*Table[Integrate[D[BSplineBasis[{3, knots}, i
- 1, x], x]*BSplineBasis[{3, knots}, j - 1, x], {x, 0, 1}],
{i, 1, 5}, {j, 1, 5}]
ks22 = k*A*G*J*Table[Integrate[BSplineBasis[{3, knots}, i - 1,
x]*BSplineBasis[{3, knots}, j - 1, x], {x, 0, 1}], {i, 1, 5},
{j, 1, 5}]

```

Onde:

kb corresponde a $EI \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} J^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi$;

ks11 corresponde a $k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} J^{-1} \mathbf{N}'^T \mathbf{N}' d\xi$;

ks12 corresponde a $k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} -\mathbf{N}'^T \mathbf{N} d\xi$;

ks21 corresponde a $k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} -\mathbf{N}^T \mathbf{N}' d\xi$;

ks22 corresponde a $k_s GA \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} J^{-1} \mathbf{N}^T \mathbf{N} d\xi$.

Então, as submatrizes são organizadas a fim de compor a matriz de rigidez K do elemento de Timoshenko, conforme procedimento descrito a seguir:

```

K=ConstantArray[0,{10,10}]
K[[1;;5,1;;5]]=ks11
K[[6;;10,1;;5]]=ks21
K[[1;;5,6;;10]]=ks12

```

$$K[[6;;10,6;;10]]=ks22+kb$$

O vetor das forças externas, por sua vez, é dado pela equação:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} \int_{\xi_l}^{\xi_{n+p+1}} \mathbf{f}_z \mathbf{N}^T d\xi + \mathbf{F}_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{F}_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \\ \mathbf{M}_0 \mathbf{N}(\xi_l)^T + \mathbf{M}_L \mathbf{N}(\xi_{n+p+1})^T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1000 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},$$

E atribuído à variável F:

$$F = \{0, 0, 0, 0, 1000, 0, 0, 0, 0, 0\}$$

As condições de apoio do problema podem ser impostas fazendo w_1 e β_1 iguais a zero. Isso pode ser feito a partir da eliminação das linhas e colunas 1 e 6 da matriz de rigidez K e linhas 1 e 6 do vetor de forças externas, como se segue:

```
Kred=ConstantArray[0,{8,8}]
Kred[[1;;4,1;;4]]=K[[2;;5,2;;5]]
Kred[[1;;4,5;;8]]=K[[2;;5,7;;10]]
Kred[[5;;8,1;;4]]=K[[7;;10,2;;5]]
Kred[[5;;8,5;;8]]=K[[7;;10,7;;10]]
Fred={0,0,0,1000,0,0,0,0}
```

Onde Kred e Fred são a matriz de rigidez e o vetor de forças externas reduzidos, respectivamente.

Então, o vetor dos coeficientes de aproximação dos deslocamentos são calculados a partir da resolução do sistema linear envolvendo Kred e Fred, conforme descrito a seguir:

```
a=LinearSolve[Kred,Fred]
```

Onde a é vetor dos coeficientes de aproximação dos deslocamentos.

Uma vez que a base de funções utilizada na aproximação dos deslocamentos é interpolatória nas extremidades do elemento, os coeficientes w_5 e β_5 , que correspondem às posições 4 e 8 do vetor a , são iguais aos valores dos deslocamentos na extremidade do elemento.