JOAO CYRO ANDRÉ
ENGENHEIRO CIVIL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP (1969)

CONTRIBUIÇÃO AO ESTUDO DA ESTABILIDADE DE ARCOS,
EM REGIME ELÁSTICO LINEAR,
SUBMETIDOS A CARREGAMENTOS CONSERVATIVOS

Tese apresentada à
Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo
para obtenção do título de
Doutor em Engenharia

SÃO PAULO, 1983

A Elizabeth

Ao Prof. Decio de Zagottis, por seu constante apoio e sua orientação na minha carreira universitária,

aos Professores Henrique Lindenberg Neto, Carlos Eduardo Mazzilli e Dirceu Botelho, companheiros deste grupo de trabalho e sinceros amigos,

aos Professores Jairo Porto e Maurício Gertsenchtein, pelo apoio e amizade sempre recebidos,

ao Prof. Jorge Aragona, pelas sugestões e orientação recebidas sobre cálculo tensorial,

ao Dr. Santiago Valverde e a Elenice Mazzilli, pelo grande apoio recebido no processamento de dados,

a Angela Schneider Loyola, pela amizade, dedicação e extrema paciência com que datilografou este trabalho,

às pessoas que ao longo deste trabalho encontrei e que de muitas formas sempre me ajudaram,

agradeço sinceramente

SUMÁRIO

Este trabalho é dedicado ao estudo da estabilidade de arcos, em regime elástico linear, submetidos a carregamentos conservativos.

No Capítulo 1, desenvolve-se a análise de alguns importantes trabalhos dos últimos 20 anos, sobre estabilidade de arcos, apresentando-se os seus procedimentos e principais resultados.

O Capítulo 2 é dedicado ao estabelecimento de conceitos básicos do cálculo tensorial necessários para o desenvolvimento claro da teoria da elasticidade em coordenadas curvilíneas e sua aplicação na formulação variacional da teoria de barras curvas, apresentadas no Capítulo 3.

O Capítulo 4 é dedicado à confecção de modelo matemático para o estudo da estabilidade de arco com geometria e carregamentos conservativos quaisquer, envolvendo o estabelecimento da trajetória fundamental de equilíbrio, a determinação da carga crítica e o estabelecimento da trajetória pós-crítica na vizinhança da carga crítica. A formulação adotada é a lagrangiana, a discretização do problema é feita pelo método dos elementos finitos, e as equações não-lineares de equilíbrio são resolvidas por uma combinação dos métodos das perturbações e de Newton-Raphson.

ABSTRACT

This paper deals with the stability of arches in a linear-elastic condition under conservative loads.

In Chapter 1, the analysis of some important papers on arch stability written during the last 20 years is developed, together with a presentation of their procedures and main results.

Chapter 2 establishes some basic concepts of tensorial calculus; required for the clear development of the elasticity theory on curvilinear coordinates and its application to the variational formulation of the curved beams theory, which are presented in Chapter 3.

In Chapter 4, a mathematical model for the study of the stability of arches with any geometry and any conservative loading is presented; it involves the establishment of the fundamental equilibrium trajectory, the determination of the critical loading and the establishment of the postcritical trajectory near the critical loading. The Lagrangean formulation is adopted, the problem discretization is made by the finite element method, and the nonlinear equilibrium equations are solved through a combination of the perturbation and the Newton-Raphson methods.

INDICE

	Pág.
1. INTRODUÇÃO	1
1.1. O Grupo de Estudo e Desenvolvimento	1
1.2. O Trabalho de Courbon	1
1.3. Observações Iniciais a respeito do Trabalho de Courbon	5
1.4. Alguns Trabalhos Importantes e suas Principais Contribuições	7
1.5. Observações a respeito dos Trabalhos Apresentados	37
1.6. Objetivos da Tese	39
2. ELEMENTOS DE CÁLCULO TENSORIAL	41
2.1. Notação Indicial	41
2.2. Formas Multilineares	42
2.2.1. Espaço Dual $\bar{W}$ de W	42
2.2.2. Bases Duais	42
2.2.3. Mudança de Bases em W e $\bar{W}$	43
2.2.4. Formas Multilineares	45
2.3. Tensores	47
2.3.1. Definição de Tensor	47
2.3.2. Efeito da Mudança de Base sobre as Componentes de um Tensor	48
2.3.3. Álgebra Tensorial	50
2.4. Tensores sobre Espaços Vetoriais Euclidianos	53
2.4.1. Espaço Dual de um Espaço Vetorial Euclidiano	53
2.4.2. Componentes Contravariantes e Covariantes de um Vetor. Tensores Métricos Fundamentais	53
2.4.3. Sistemas de Coordenadas	55
2.5. Elementos de Análise Tensorial	56
2.5.1. Definição de Aplicação Diferenciável	56
2.5.2. Diferencial em Campo Vetorial	57
2.5.3. Símbolos de Christoffel	61
2.5.4. Diferencial em Campo Tensorial	62
2.5.5. Alguns Teoremas Fundamentais da Análise Tensorial	64
2.6. Produtos no $\mathbb{R}^3$	67
2.6.1. Produto Escalar	67
2.6.2. Os Tensores ϵ^{rst} e ϵ_{rst}	68
2.6.3. Produto Vetorial	68
2.6.4. Produto Misto	70

INDICE (cont.)

	Pág.
2.7. Curvas no $\mathbb{R}^3$	70
2.7.1. Vetor Tangente à Curva	70
2.7.2. Vetor Normal Principal e Curvatura	71
2.7.3. Vetor Binormal e Torção	71
3. TEORIA DA ELASTICIDADE EM COORDENADAS CURVILÍNEAS COM LINEARIDADE FÍSICA E NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA (FORMULAÇÃO LAGRANGIANA). APLICAÇÃO AO CASO DOS ARCOS DE EIXO CIRCULAR	73
3.1. Estado Triplo de Deformações	73
3.2. Estado Triplo de Tensão	75
3.3. Equações de Equilíbrio	78
3.4. Relações Tensões-Deformações	80
3.5. Teorema dos Deslocamentos Virtuais	81
3.6. Teorema da Energia Potencial Total	83
3.7. Teorema de Três Campos	85
3.8. Procedimento Alternativo para o Estabelecimento das Equações e dos Teoremas Variacionais da Teoria da Elasticidade com Não-Linearidade Geométrica	87
3.9. Arcos de Eixo Circular com Não-Linearidade Geométrica	88
3.9.1. Definição da Geometria	88
3.9.2. Relações Deformações-Deslocamentos Gerais para o Arco de Eixo Circular	90
3.9.3. Relações Deformações-Deslocamentos Derivadas para o Arco de Eixo Circular	95
3.9.4. Formulação Variacional para a Análise do Arco de Eixo Circular	98
4. MODELO MATEMÁTICO PARA A ANÁLISE DA ESTABILIDADE DOS ARCOS SUBMETIDOS A CARREGAMENTOS CONSERVATIVOS	101
4.1. Considerações Gerais	101
4.2. Definição da Geometria do Elemento	102
4.3. Definição dos Deslocamentos. Funções Derivadas.	104
4.4. Energia Potencial Total	105
4.5. Trajetória Fundamental de Equilíbrio	110
4.6. Trajetória Pós-Crítica	114
BIBLIOGRAFIA	121

1. INTRODUÇÃO

1.1. O Grupo de Estudo e Desenvolvimento

Em 1977, no Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da EPUSP, reuniu-se um grupo de professores com o objetivo de estudar e desenvolver trabalhos relativos à estabilidade das estruturas. Este grupo teve a orientação do Professor Decio Leal de Zagottis e já apresentou os seus frutos com os trabalhos de Mestrado e Doutorado apresentados pelos professores Botelho (6), Mazzilli (35) (36), Fruchtengarten (19) e Lindenberg Neto (34).

Esta tese que agora se apresenta é mais um resultado do esforço do grupo referido no sentido de desenvolver o entendimento e dar contribuições a campo tão importante da análise estrutural.

1.2. O Trabalho de Courbon

O tema a ser abordado foi sugerido pelo trabalho "*Flambement des Arcs*", de Courbon (9), que suscita algumas questões básicas.

Courbon apresenta dois métodos de cálculo do empuxo crítico para instabilidade no plano do arco de seção qualquer submetido a cargas verticais, e faz aplicação dos mesmos ao arco parabólico de inércia reduzida constante com várias condições de contorno.

O primeiro método apresentado é definido como de aproximações sucessivas, e se baseia no seguinte critério de estabilidade: o empuxo crítico é o menor valor do empuxo para o qual as equações diferenciais que regem o comportamento dos arcos apresentam solução, satisfazendo às condições de contorno, não identicamente nula.

O segundo método apresentado é definido como da energia, e o critério da estabilidade é o da energia, apresentado na seguinte forma: o arco está em equilíbrio na sua configuração indeformada, que será estável se o eixo do arco retornar à sua posição de equilíbrio indeformado após sofrer pequena deformação, ou seja, se o trabalho δT das forças exteriores for inferior à energia δU armazenada pelo arco no curso da deformação e,

portanto, o empuxo crítico $\bar{e}$ obtido da igualdade entre $\delta\tau$ e δU .

Courbon desenvolveu o referido trabalho por considerar que a teoria elementar, Courbon J. (10), não fornecia resultados precisos, a não ser no caso de arcos muito abatidos, e motivado por trabalho apresentado por Dischinger em 1939, no qual se apresentam as expressões consideradas mais precisas, sem demonstração, para os arcos parabólicos de inércia reduzida constante e que evidenciam a influência da relação f/l entre a altura do arco e o seu vão.

As hipóteses básicas do estudo de Courbon estão contidas no seguinte parágrafo aqui reproduzido: "O empuxo crítico de um arco é uma característica do arco. É, pois, permitido supor que as cargas aplicadas ao arco apresentam uma funicular que se confunde com o eixo do arco. Nestas condições, se se negligenciam as deformações devidas ao esforço normal, o arco não-deformado é uma configuração de equilíbrio. Para determinar o empuxo crítico, é suficiente examinar se essa configuração de equilíbrio é estável".

O estudo geométrico das deformações é feito em coordenadas cartesianas retangulares a partir da hipótese de inextensibilidade dos arcos.

Fig. 1.1

A fórmula que fornece o empuxo crítico é obtida pela igualdade entre a energia de deformação:

$$\delta U = \frac{1}{2} \int_0^l D(v'')^2 dx \quad (1.1)$$

onde D é o produto de rigidez à flexão reduzido, e o trabalho das forças externas

$$\delta\tau = - \int_0^l p(x) v(x) dx, \quad (1.2)$$

expressão que, após algumas transformações, em virtude da hipótese de o arco do eixo ser coincidente com a funicular das forças e da inextensibilidade do eixo do arco, toma a forma

$$\delta\tau = \frac{1}{2} Q \int_0^l (1 + y'^2) v'^2 dx \quad (1.3)$$

onde Q é o empuxo no arco. Resulta, pois, de acordo com o critério energético referido, que

$$Q_c = \min_{v(x) \in F} \left[\frac{\int_0^l D v''^2 dx}{\int_0^l (1 + y'^2) v'^2 dx} \right] \quad (1.4)$$

onde F é o conjunto de soluções $v(x)$ compatíveis com os vínculos. É interessante observar que na expressão da energia de deformação Courbon não retêm os termos que contêm derivadas dos deslocamentos de ordem superior a dois. Tal, porém, não ocorre na expressão do trabalho das forças externas, visto que neste caso o denominador se anularia, e, além disso, o termo de ordem superior é responsável pelo aparecimento da relação $\sigma = f/l$.

No caso do arco de eixo parabólico de inércia reduzida constante submetido a carga vertical uniforme, Courbon apresenta a seguinte expressão, derivada de (1.4):

$$Q_c = m \frac{\pi^2 EJ}{a^2} \frac{1}{1 + K \sigma^2} \quad (1.5)$$

para cálculo do empuxo crítico correspondente às várias condições de vínculos. A parcela $m \cdot \pi^2 EJ/a^2$ fornece o valor do empuxo crítico da teoria elementar, e a parcela $1/(1 + K \sigma^2)$ representa a correção proposta por Courbon. A Tabela 1 fornece os valores de m e K , bem como o modo de estabilidade para as várias condições de vínculos.

	m	K	modo de estabilidade
	2,0458	1,352	antissimétrica
	1,1132	1,145	simétrica
	1,0000	6,144	antissimétrica
	0,7527	1,990	simétrica

Tabela 1

É interessante, ainda, observar a Fig. 1.2 para melhor caracterizar a insuficiência referida da teoria elementar (10) quando comparada com a solução melhorada proposta por Courbon, para o arco de eixo parabólico com inércia reduzida constante submetido a carga vertical uniforme.

Fig. 1.2

Alguns aspectos do trabalho de Courbon relativos à aplicação do carregamento e ao método de aproximações sucessivas não serão aqui abordados, por serem irrelevantes no que se segue.

1.3. Observações Iniciais a respeito do Trabalho de Courbon

As observações iniciais que podem ser feitas ao trabalho de Courbon dizem respeito principalmente ao conjunto de hipóteses estabelecidas para o estudo da estabilidade do arco e à expressão do trabalho das forças externas.

Timoshenko, em (54), ao apresentar resultados da análise da estabilidade do equilíbrio de arco circular biarticulado, solicitado por carga radial uniforme, estabelecidos por E. Hurlbrink, indica claramente que se admite que o eixo da barra curva antes da flambagem permanece como o arco de um círculo. Esta condição somente é observada se o arco está apenas comprimido, o que ocorre desde que se permitam deslocamentos radiais nas extremidades do arco; a fixação das extremidades é considerada quando da flambagem. Esta hipótese é admitida nos casos seguintes, apresentados por Timoshenko: arco circular biengastado solicitado por carga radial uniforme, arcos de eixo parabólico, com seção transversal constante e com seção retangular de largura constante e altura variável, submetidos a carga vertical uniforme. Esta hipótese é representada de forma clara na Fig. 1.3, e a sua apresentação permite que não se formem dúvidas a respeito das parcelas de energia envolvidas no fenômeno, conforme possam surgir no trabalho de Courbon.

Fig. 1.3

No caso de não se considerar tal hipótese, ocorrerá flexão antes da instabilidade, conforme mostra a fotografia da Fig. 1.4, que poderá não ser desprezível, dependendo do carregamento.

Fig. 1.4

O estudo da trajetória de equilíbrio antes da estabilidade poderá ser importante, em virtude de ela poder ser acentuadamente geometricamente não-linear e admitir outro tipo de instabilidade, como o de ponto limite, sem que ocorra flambagem, que é a única possibilidade de instabilidade admitida por Courbon. Por exemplo, no caso de arco circular biengastado, com $\lambda = \alpha^2 R/h = 3$ (parâmetros definidos na Fig. 1.5), não ocorrerá instabilidade se o arco for solicitado por carga concentrada no meio do vão, e ocorrerá instabilidade do tipo ponto limite se o arco for solicitado por carga radial uniforme, não havendo, em nenhum dos dois casos, a ocorrência de ponto de bifurcação, que caracteriza a flambagem referida por Courbon. Os exemplos referidos estão apresentados no importante trabalho de Masur e Schreyer (37). Desta forma, há que se estabelecer o campo de aplicação dos resultados apresentados por Courbon para que não se incorra em erro.

Outro aspecto crítico corresponde à afirmação de Courbon de que o empuxo crítico é uma característica do arco, tratando, assim, de estender os resultados obtidos a arcos não-funiculares. Em virtude do exposto, fica evidente que tal procedimento não é correto, devendo, pelo menos do ponto de vista quantitativo, cada estudo da estabilidade de arco ser tratado isoladamente.

O denominador da expressão (1.4) merece algumas observações. Ele é obtido a partir da expressão do trabalho das forças externas

$$\delta\tau = - \int_{\text{arc}} p(x) v(x) dx , \quad (1.6)$$

que se anula para $v(x)$ antissimétrica, que é o modo de flambagem considerado para arcos biarticulado e biengastado. A partir da condição de arco funicular, o autor estabelece a expressão

$$Q y'' = - p , \quad (1.7)$$

que relaciona o empuxo Q do arco funicular com a carga vertical; considerando a condição de inextensibilidade com todos os termos,

$$y'v' + u' + \frac{1}{2} (u'^2 + v'^2) = 0 , \quad (1.8)$$

ou apenas com os termos de primeira ordem,

$$y'v' + u' = 0 , \quad (1.9)$$

Courbon estabelece a seguinte expressão para o trabalho de forças externas:

$$\delta\tau = Q \int_{\text{arc}} (1 + y'^2) v'^2 dx \quad (1.10)$$

que, evidentemente, apresenta valor não-nulo. Não se considera, pois, que as passagens acima sejam claras do ponto de vista físico.

1.4. Alguns Trabalhos Importantes e suas Principais Contribuições

Com os objetivos de chamar a atenção para alguns aspectos do trabalho de Courbon que o simples estudo não permitiu estabelecer, e indicar os principais procedimentos para a análise da estabilidade dos arcos, fornecendo um panorama da sua evolução, faz-se, a seguir, uma apresentação sucinta de aspectos relevantes de alguns trabalhos notáveis no estudo da estabilidade de arcos em regime elástico.

Em 1956, Masur e Schreyer apresentam o trabalho "*Buckling of Shallow Arches*", onde se estuda a estabilidade de arcos abatidos biengastados, de eixo circular, solicitados ou por carga radial uniformemente distribuída ou por carga concentrada no meio do vão.

$$\lambda = \sqrt{\frac{2R}{h}}$$

Fig. 1.5

Considere-se, inicialmente, o aspecto qualitativo do trabalho de Masur, com a finalidade de realçar o fenômeno físico, que é válido mesmo para arcos não-circulares. Indicam-se, na Fig. 1.5, os principais parâmetros geométricos, e nas Fig. 1.6, as respostas de arcos circulares submetidos a carregamento radial uniforme.

Fig. 1.6 - Gráficos carregamento (p) - deslocamento transversal médio ($\bar{w}$) para o arco biengastado submetido a carregamento radial uniforme

Para arcos muito abatidos, $\lambda < 2,85$, não ocorre instabilidade, sendo o deslocamento $\bar{w}$ sempre crescente com p .

No intervalo $2,85 < \lambda < 5,02$, o deslocamento $\bar{w}$ cresce com p até o ponto b, caracterizado por $dp/d\bar{w} = 0$, onde ocorre perda de estabilidade acompanhada de deslocamento violento seguido de oscilação de alta frequência e amplitude decrescente até o repouso em d. Tal fenômeno é denominado "*snap-through*" e corresponde à instabilidade do tipo ponto limite, sendo chamado por vários autores de instabilidade simétrica.

No intervalo $5,02 < \lambda < 5,74$, ocorrem os pontos de bifurcação a e c na trajetória fundamental. Esses pontos surgem, entretanto, após o ponto b, prevalecendo então a instabilidade do tipo ponto limite.

Finalmente, para $\lambda > 5,74$, a resposta física do arco pode ser interpretada (60) como se mostra na Fig. 1.7a e 1.7b. Quando se carrega o arco a partir da origem, ele se desloca simetricamente, com δ_1 , crescendo não-linearmente. No ponto a, ocorre ponto de bifurcação simétrico instável, e o arco sofre um deslocamento brusco através de estados não-simétricos, caracterizados por $\delta_2 \neq 0$. Na presença de amortecimento, o movimento atingirá o repouso em e. É importante observar que o ponto de bifurcação simétrico está associado com o desenvolvimento de deformações que são fisicamente não-simétricas, e que somente assim pode ocorrer a inversão dinâmica mencionada, ou seja, com $\delta_2 \neq 0$. Desta maneira, o modo de instabilidade é assimétrico, e é comum encontrar autores que se referem ao fenômeno como instabilidade assimétrica ou bifurcação assimétrica.

Fig. 1.7a - Arco Circular Biengastado

Fig. 1.7b - Trajetórias de Equilíbrio

Considerem-se, agora, alguns aspectos quantitativos do trabalho de Schreyer e Masur.

Adotaram-se as seguintes expressões para as relações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_y = \frac{dv}{Rd\phi} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{Rd\phi} \right)^2 - z \left(\frac{d^2w}{R^2 d\phi^2} \right) \quad (1.11)$$

onde v e w são as componentes transversal e radial, respectivamente, dos deslocamentos de um ponto do eixo do arco, definido por ϕ , conforme mostra a Fig. 1.5.

A partir de (1.11), obteve-se a expressão da energia potencial total, cujas equações de Euler são as equações não-lineares de equilíbrio. A solução exata dessas equações foi encontrada, e essa é uma característica importante desse trabalho, o que permitiu estabelecer a trajetória fundamental de equilíbrio.

A discussão da estabilidade da trajetória fundamental foi feita verificando-se a ocorrência de deslocamentos adicionais, não-nulos, relativamente aos deslocamentos iniciais da trajetória fundamental. Para isso, analisaram-se as equações de Euler do funcional

$$\Delta T = T(\bar{w} + w; \bar{v} + v) - T(\bar{w}, \bar{v}), \quad (1.12)$$

onde $\bar{w}$ e $\bar{v}$ são as componentes dos deslocamentos iniciais, e w e v são as componentes dos deslocamentos incrementais. A possibilidade de existência do campo adicional de deslocamentos, conforme mostraram os autores, depende do parâmetro geométrico λ .

Para o arco submetido a carregamento radial uniforme, concluíram que com:

$0 < \lambda < 2,85$	não ocorre instabilidade,
$2,85 < \lambda < 5,02$	ocorre apenas ponto limite,
$5,02 < \lambda < 5,74$	ocorre bifurcação após o ponto limite,
$5,74 < \lambda$	ocorre bifurcação antes do ponto limite.

A carga crítica obtida, correspondente à bifurcação, é dada por:

$$P_{cr} \frac{R^3}{EI} = \frac{1}{5} \left(\frac{1,43\pi}{\alpha} \right)^2 \left[3 \pm 2 \sqrt{1 - \frac{5}{4} \left(\frac{1,43\pi}{\lambda} \right)^2} \right], \quad \lambda \geq 5,02 \quad (1.13)$$

e a carga crítica correspondente a ponto limite pode ser obtida a partir de $dp/d\bar{w} = 0$, tanto analítica como graficamente.

Para o arco submetido a carga concentrada, concluíram que com:

$0 < \lambda < 3,20$	não ocorre instabilidade,
$3,20 < \lambda < 11,0$	ocorre apenas ponto limite,
$11 < \lambda$	ocorre bifurcação com região instável da trajetória, sempre após o ponto limite.

A carga crítica correspondente a ponto limite pode ser obtida a partir de $dP/d\delta = 0$, onde P e δ são, respectivamente, a carga concentrada e o deslocamento correspondente. A carga crítica correspondente a bifurcação, de interesse apenas teórico, é dada por:

$$p_{cr} \frac{\alpha}{\pi^2} \frac{R^2}{EI} = 0,51 \left[1 \pm \left(1 - 0,855 \left(1 + \frac{(1,43\pi)^2}{\lambda^2} \right) \right)^{1/2} \right] \quad (1.14)$$

$\lambda \geq 11,0$

É importante observar que, já em 1962, *Gjelsvike Bodner* (23) haviam estudado, de forma muito semelhante, este problema, experimental e analiticamente, utilizando desenvolvimentos em séries para resolver as equações diferenciais. Assumiram, implicitamente, que o ponto de bifurcação ocorria antes do ponto limite, o que não é verdade, como foi observado por Schreyer e Masur. Esse trabalho estabelece, entretanto, com muita lucidez, aspectos básicos do comportamento dos arcos, e é origem de uma série de trabalhos importantes, entre os quais se inclui o de Schreyer e Masur.

Em 1971, *Dickie e Broughton* apresentam o trabalho "*Stability Criteria for Shallow Arches*" (12), onde estudam a estabilidade de arcos abatidos de eixo circular com várias condições de contorno e vários carregamentos radiais.

Esse trabalho tem muito a ver com os trabalhos de Masur e Bodner, podendo ser considerado como uma extensão natural dos mesmos. Os autores obtiveram, inicialmente, solução exata do problema, no mesmo sentido do trabalho de Masur; discutiram, em seguida, de forma acadêmica, a solução por séries, e, finalmente, efetuaram ensaios experimentais. No desenvolvimento analítico, usaram as relações deformações-deslocamentos (1.11).

Dickie e Broughton determinaram experimentalmente a carga crítica e o modo de instabilidade em dois arcos com parâmetros físicos e geométricos indicados na Tabela 2. Apresentam-se, nas Tabelas 3 e 5, uma comparação entre os resultados obtidos experimental e analiticamente, exatos e por séries.

$\lambda = \frac{\alpha^2 R}{h}$	E mōdulo de elasticidade (kN/m ²) (kgf/m ²)		R (cm)	b (cm)	h (cm)
18,3	2.950.000	29.500	254	2,54	0,95
13,7	2.950.000	29.500	254	2,54	1,27

Tabela 2

Sistema	λ	Sol. exata: (N)			Sol. séries (N)			$\bar{W}_{teor.}$	$\bar{W}_{exp.}$	D %
		$\bar{W}_u$	$\bar{W}_t$	$\bar{W}$	$\bar{W}_u$	$\bar{W}_t$	$\bar{W}$	(N)	(N)	
	18,3	41,8	36,5	-	41,8	36,5	-	36,5	38,3	5
	13,7	98,3	85,4	-	98,3	85,4	-	85,4	87,6	3
	18,3	130,3	61,4	-	131,2	61,4	-	61,4	63,6	4
	13,7	302,9	145,5	-	302,9	145,5	-	145,5	143,2	-2
	18,3	-	-	39,1	-	-	39,1	39,1	36,9	-6
	13,7	-	-	93,0	-	-	93,0	93,0	90,7	-2

Tabela 3 - Arco Biarticulado

Sistema	λ	Sol. exata $\bar{W}$ (N)	Sol. séries $\bar{W}$ (N)	Sol. exp. $\bar{W}$ (N)	D(%)
	18,3	39,6	40,0	38,3	- 4
	13,7	93,4	93,9	85,4	- 9
	18,3	82,7	84,5	89,0	5
	13,7	187,7	190,8	186,8	- 2
	18,3	45,8	46,3	44,0	- 5
	13,7	107,6	109,0	101,4	- 7
	18,3	78,7	78,3	64,5	- 18
	13,7	185,9	185,0	155,7	- 16

Tabela 4 - Arco com Extremidades Articulada e Engastada

Sistema	λ	Sol. exata (N)			Sol. séries (N)			$W_{teor.}$ (N)	$\bar{W}_{exp.}$ (N)	D (%)
		$\bar{W}_u$	$\bar{W}_t$	$\bar{W}$	$\bar{W}_u$	$\bar{W}_t$	$\bar{W}$			
	18,3	45,4	41,4	-	36,3	41,4	-	45,4	46,3	- 5
	13,7	106,3	92,1	-	107,2	92,1	-	106,3	96,1	- 10
	18,3	171,7	124,6	-	171,7	125,0	-	124,6	121,0	- 3
	13,7	381,7	291,8	-	381,2	292,2	-	291,8	253,1	- 13
	18,3	-	-	85,9	-	-	86,3	85,9	69,8	- 19
	13,7	-	-	201,9	-	-	202,8	201,9	162,8	- 19

Tabela 5 - Arco Biengastado

Nas tabelas 3 a 5, $\bar{W}$ representa a carga total sobre o arco. No caso de carregamento ou condições de contorno não-simétricos, a solução encontrada estabelece uma única trajetória de equilíbrio e uma carga crítica correspondente $\bar{W}$. Para carregamento e condições de contorno simétricos, pode ocorrer trajetória secundária, e, nestas condições, têm-se duas cargas críticas $\bar{W}_u$ e $\bar{W}_t$, conforme mostra a Fig. 1.8. Se $\delta_u > \delta_t$, então o ponto de bifurcação ocorre em ramo estável, e a instabilidade é do tipo ponto de bifurcação simétrico; em caso contrário, o ponto de bifurcação ocorre em ramo instável, e a instabilidade é do tipo ponto limite.

Fig. 1.8

Apresentam-se, nas Fig. 1.9 a 1.18, os fatores adimensionais de carga crítica $\bar{Q} = \bar{W} R^2 2\alpha/Eh^3b$ em função do parâmetro λ , obtidos através da solução exata, para as várias condições de vínculo e carregamento. Nestas figuras, λ_1 define o menor valor de λ para o qual o arco pode sofrer instabilidade, λ_2 define o menor valor de λ para o qual pode ocorrer ponto de bifurcação, e λ_3 , o menor valor de λ para o qual pode ocorrer ponto de bifurcação no ramo estável da trajetória fundamental.

Fig. 1.9

Fig. 1.10

Fig. 1.11

Fig. 1.12

Fig. 1.13

Fig. 1.14

Fig. 1.17

Fig. 1.18

Ainda dentro da linha de soluções fechadas, é importante considerar o trabalho de Dym, apresentado em 1972 (13), que trata também do efeito da extensibilidade na instabilidade de arcos de eixo circular, abatidos ou não. Esse trabalho restringe-se à análise de arcos biarticulados e bien-gastados submetidos a carregamento radial uniformemente distribuído.

As relações deformações-deslocamentos utilizadas são:

$$\epsilon_y = \frac{dv}{Rd\phi} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{Rd\phi} + \frac{v}{R} \right)^2 - z \left(\frac{d^2 w}{R^2 d\phi^2} + \frac{1}{R^2} \frac{dv}{d\phi} \right) \quad (1.15)$$

É importante observar aqui que a primeira expressão de (1.15) contém um número maior de termos do que (1.11), e corresponde à teoria dos anéis, que é, por sua vez, um subconjunto unidimensional das equações não-lineares de cascas apresentadas por Sanders (49).

A partir de (1.15), Dym escreve a expressão da energia potencial total. Tendo como ponto de partida a decomposição dos deslocamentos em duas parcelas, a primeira, inicial, correspondente a um estado pré-instabilidade, e a segunda, adicional, correspondente a um estado pós-instabilidade, a expressão da energia potencial total pode ser escrita na forma

$$T = T_0 + T_1 + T_2 + T_3 + T_4 \quad (1.16)$$

onde T_0 é a parcela da energia potencial total que envolve apenas deslocamentos e suas derivadas correspondentes a estado pré-instabilidade, enquanto T_i é a parcela da energia potencial total que envolve deslocamentos e suas derivadas correspondentes a estado pós-instabilidade, de ordem i .

A discussão da estabilidade da trajetória fundamental foi feita verificando-se a ocorrência da existência de deslocamentos adicionais através do estudo das equações de Euler de T_2 . A solução das equações de equilíbrio mais as condições de contorno conduzem a duas equações transcendentais, cuja observação garante a existência de deslocamentos adicionais não-nulos e modos de instabilidade simétrico e assimétrico. Deve-se aqui ressaltar que o problema assim posto reduz a determinação da carga crítica à resolução de um problema de autovalores; o modo de instabilidade simétrico, que

corresponde a uma instabilidade do tipo ponto limite, não tem muito sentido neste caso, já que o estado de pré-instabilidade foi considerado linear. A obtenção de soluções com efeito da extensibilidade e da inextensibilidade é imediata, com a consideração ou não da parcela da energia de deformação, em T_2 , correspondente ao alongamento do eixo.

Apresentam-se a seguir os principais resultados e conclusões obtidos por Dym, que podem ser estudados a partir do exame das Fig. 1.19 a 1.22, estabelecidas pelo referido autor.

Fig. 1.19

Fig. 1.20

Fig. 1.21

Fig. 1.22

Dym concluiu que a extensibilidade do arco desempenha um papel fundamental na transição do modo de instabilidade assimétrico para o simétrico quando α , ou f/l , decresce. Além disso, conforme era de se esperar, concluiu que a consideração da inextensibilidade eleva a carga crítica para o modo simétrico.

Finalmente, Dym analisou os ângulos α_1 , que caracterizam transições entre não-ocorrência de instabilidade e ocorrência de ponto limite, e α_2 , ocorrência e não-ocorrência de ponto de bifurcação. A Tabela 6 indica os valores encontrados por Dym e por Masur (37) e Dickie (12).

Arco Biengastado	α_1		α_2	
	Masur, Dickie ($\lambda = 2,85$)	Dym	Masur, Dickie ($\lambda = 5,74$)	Dym
	30,6° 9,7°	0° 0°	43,4° 13,7°	28,0° 7,6°
Arco Biarticulado	α_1		α_2	
	Masur, Dickie ($\lambda = 1,11$)	Dym	Masur, Dickie ($\lambda = 2,65$)	Dym
	19,1° 6,0°	0° 0°	29,5° 9,3°	21,2° 6,5°

Tabela 6 - Comparação entre os Ângulos de Transição

As diferenças encontradas podem ser justificadas pelas diferentes relações deformações-deslocamentos empregadas, que envolvem considerações relativamente ao abatimento do arco, e, principalmente, pelo emprego, por parte de Dym, da hipótese de linearidade geométrica na trajetória pré-crítica. Deve-se ressaltar que Dym considera, nestas condições, reaberta a discussão a respeito dos valores dos ângulos de transição.

Até aqui, os trabalhos mencionados diziam respeito exclusivamente a soluções fechadas das equações diferenciais de equilíbrio. Entretanto, mesmo em trabalhos mais amplos, como o de *Dickie* (12), essas soluções abrangem um número muito limitado de formas de arcos e tipos de carregamento. É com esse aspecto em relevo que alguns pesquisadores se dedicam a métodos mais gerais de análise, que envolvem, necessariamente, técnicas numéricas de discretização. Passa-se, a seguir, à apresentação de alguns trabalhos que buscaram este caminho para a solução do problema de instabilidade de arcos.

Em 1969, *Walker* (62) apresenta o trabalho "*A Non-Linear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches*", em que analisa o arco circular submetido a carga concentrada pelo método dos elementos finitos, cuja aplicação apenas se iniciava.

Utiliza as seguintes expressões para relações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_y = \frac{dv}{Rd\phi} - \frac{w}{R} + \frac{1}{2} \left(\frac{dw}{Rd\phi} + \frac{v}{R} \right)^2 - z \left(\frac{d^2 w}{R^2 d\phi^2} + \frac{w}{R^2} \right) \quad (1.17)$$

Observe-se que a expressão de ϵ_y em (1.17) apresenta o seu último termo diferente do termo correspondente em (1.15). Essa mudança representa uma ligeira modificação na variação da curvatura, e tem sido empregada por outros autores.

A partir de (1.17), o autor estabelece a expressão do funcional energia potencial total, que contém as componentes v e w de deslocamentos, bem como suas derivadas até 1ª. e 2ª. ordem,

Estabelece em seguida a discretização do problema pelo método dos elementos finitos, dividindo o arco em n elementos de arcos, definindo os campos admissíveis de deslocamentos em cada elemento, e estabelecendo a interação entre elementos através de condições reduzidas de compatibilidade. Os campos admissíveis são os campos de deslocamentos definidos como uma combinação linear de funções elementares, de modo a garantir a continuidade de v até sua derivada de 1ª. ordem, e a continuidade de w até suas derivadas de 2ª. ordem. Obtém-se, dessa forma, a energia potencial total em função de um número finito de parâmetros, que são os deslocamentos generalizados.

As equações algébricas, não-lineares, de equilíbrio são obtidas descrevendo-se a função energia potencial total em relação aos deslocamentos generalizados. A sua resolução, que fornece a trajetória fundamental de equilíbrio, é feita através de uma sucessiva combinação de aplicações do método das perturbações e do procedimento de Newton Raphson, extremamente interessante.

A análise da estabilidade é feita estudando-se a segunda variação da energia potencial total. A instabilidade do tipo ponto de bifurcação é discutida, sendo a carga crítica determinada pela resposta a um problema de autovalores. A trajetória secundária é determinada nas imediações do ponto crítico pelo método das perturbações, sugerindo-se que a técnica utilizada na determinação da trajetória fundamental pode ser novamente utilizada na determinação de pontos, da trajetória secundária, afastados do ponto crítico. A instabilidade do tipo ponto limite é caracterizada pelo ponto de máximo do carregamento em função de um deslocamento generalizado.

São poucos os resultados apresentados pelo autor, o que justifica a não-apresentação dos mesmos, visto que o objetivo do trabalho é estabelecer alguns conceitos relativos ao estudo da estabilidade de estruturas usando o método dos elementos finitos, e que a escolha do arco como estrutura exemplo decorre do fato de ser, entre as estruturas simples, a que apresenta respostas mais ricas a este tipo de estudo.

Chama-se ainda a atenção para o fato de Walker considerar em seu estudo apenas os arcos circulares abatidos. Entretanto, esta restrição ao arco

abatido não se faz necessária, em virtude de as relações deformações-deslocamentos adotadas não o exigirem. Outros autores utilizam as expressões (1.17) para arcos não-abatidos.

Em 1973, Dym apresenta os trabalhos "*Bifurcation Analysis for Shallow Arches*" e "*Buckling and Postbuckling Behavior of Stress Compressible Arches*". Trata-se, nestes trabalhos, do estudo da estabilidade dos arcos de eixo circular, abatidos e não-abatidos, com base na teoria assintótica pós-instabilidade de Koiter ou, simplesmente, teoria de Koiter.

Antes de prosseguir, em virtude de a teoria de Koiter ser uma das mais importantes contribuições ao estudo do comportamento pós-instabilidade das estruturas, apresentam-se alguns de seus aspectos importantes.

A teoria de Koiter permite a determinação da tangente e da curvatura da trajetória secundária no ponto de bifurcação. Desta forma, quando há somente um modo de instabilidade associado a um ponto de bifurcação, a teoria permite estabelecer a seguinte expressão aproximada para a trajetória secundária:

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 + a\delta + b\delta^2 + \dots \quad (1.18)$$

onde

p é a carga aplicada,

p_{cr} é a carga crítica, correspondente ao ponto de bifurcação,

a, b , constantes a serem determinadas,

δ , incremento de deslocamento relativo ao deslocamento do ponto crítico.

Relativamente à expressão (1.18), três casos são apresentados na Fig. 1.23, e devem ser destacados. No caso I, para valores de δ suficientemente pequenos, apenas o termo $1 - a\delta$ é relevante, e a trajetória secundária de equilíbrio é aproximadamente linear. Nos casos II e III, as trajetórias secundárias são aproximadamente parabólicas. O caso I corresponde, pois, a um ponto de bifurcação assimétrico, o equilíbrio do ponto crítico é instável; os casos II e III correspondem a pontos de bifurcação simétricos, instável no caso II, com $b < 0$, e estável no caso III, com

$b > 0$. Pode-se, pois, nestas condições, estabelecer que uma condição suficiente para que o ponto de bifurcação seja estável é que $a = 0$ e $b > 0$.

Fig. 1.23 - Trajetórias de Equilíbrio

Koiter demonstrou ainda que, para uma pequena imperfeição, ϵ , na forma da estrutura, a equação (1.18) se transforma em:

$$\left(1 - \frac{P}{P_{cr}}\right) \delta + a\delta^2 + b\delta^3 + \dots = \frac{P}{P_{cr}} \epsilon + \dots, \quad (1.19)$$

o que permite caracterizar o comportamento de uma estrutura geometricamente imperfeita a partir de parâmetros estabelecidos para estrutura geometricamente perfeita.

Para o ponto de bifurcação assimétrico, caso I, as imperfeições podem ter efeito sério na diminuição da capacidade de carga da estrutura. Na Fig. 1.24, mostram-se as trajetórias de equilíbrio da estrutura perfeita, em linha contínua, e da estrutura imperfeita, em linha tracejada, além da curva $p_m/p_{cr} = p_m/p_{cr}(\epsilon)$, denominada curva de sensibilidade a imperfeições onde p_m é o valor da carga crítica para estrutura sujeita a imperfeição ϵ .

Fig. 1.24 - Ponto de Bifurcação Assimétrico. Trajetórias de Equilíbrio e Curva de Sensibilidade a Imperfeições.

Esta curva apresenta a seguinte forma local:

$$\frac{p_m}{p_{cr}} = 1 - 2(-a)^{1/2} \epsilon^{1/2}, \quad (1.20)$$

com tangente vertical em $\epsilon = 0$, o que indica uma sensibilidade a pequenas imperfeições.

Para o ponto de bifurcação simétrico instável, caso II, as imperfeições podem também ter efeito sério, diminuindo a capacidade de carga da estrutura. Na Fig. 1.25, mostram-se as trajetórias de equilíbrio da estrutura perfeita e imperfeita e a curva da sensibilidade a imperfeições. Esta curva apresenta a seguinte forma local:

$$\frac{p_m}{p_{cr}} = 1 - 3\left(-\frac{b}{4}\right)^{1/3} \epsilon^{2/3}, \quad (1.21)$$

com tangente vertical em $\epsilon = 0$, o que indica severa sensibilidade a imperfeições.

Fig. 1.25 - Ponto de Bifurcação Simétrico Instável. Trajetórias de Equilíbrio e Curva de Sensibilidade a Imperfeições.

Para o ponto de bifurcação simétrico estável, caso III, a ocorrência de imperfeições na estrutura corresponde apenas um maior crescimento dos deslocamentos quando a trajetória se aproxima do ponto crítico, conforme se observa na Fig. 1.26.

Fig. 1.26 - Ponto de Bifurcação Simétrico Estável. Trajetórias de Equilíbrio.

Em seu trabalho "*Bifurcation Analysis of Shallow Arches*", Dym se dedica à análise da estabilidade de arcos abatidos circulares, biarticulados e biengastados, submetidos a carregamento radial uniforme através dos procedimentos de Koiter e Budianski, derivados da teoria de Koiter.

- As relações deformações-deslocamentos adotadas são aquelas expressas em (1.11). Na formulação das expressões básicas, Dym introduziu a linearização do estado pré-instabilidade, o que restringiu a análise aos casos de instabilidade do tipo ponto de bifurcação, já que a linearização causaria uma superestimativa da carga crítica correspondente ao ponto limite. Consequentemente, excluem-se desta análise os arcos muito abatidos, para os quais a instabilidade é do tipo ponto limite.

Nos procedimentos de Koiter e de Budianski, o campo de deslocamentos é considerado como a soma entre um campo de deslocamentos inicial, pré-instabilidade, e um campo de deslocamentos incremental. As componentes dos deslocamentos incrementais são postas na forma:

$$\begin{aligned} W &= \epsilon W_1 + \epsilon^2 W_2 + \epsilon^3 W_3 + \dots \\ V &= \epsilon V_1 + \epsilon^2 V_2 + \epsilon^3 V_3 + \dots \end{aligned} \quad (1.22)$$

onde ϵ é um parâmetro tal que, quando ϵ tende a zero, a carga tende à carga crítica.

O procedimento de Koiter caracteriza-se por uma expansão em série de Taylor da energia potencial total em torno do parâmetro carga crítica. A introdução de condições de ortogonalidade adequadas permite eliminar as componentes de deslocamentos incrementais de ordem 3; a relação

$$\frac{P}{P_{cr}} = 1 + a \epsilon + b \epsilon^2 \quad (1.23)$$

é obtida derivando a energia potencial total em relação a ϵ . É importante observar que, para a determinação dos parâmetros a e b , é necessário fazer um desenvolvimento, em ϵ , das equações de equilíbrio.

O procedimento de Budianski tem como ponto de partida a expressão do teorema dos deslocamentos virtuais. A substituição dos deslocamentos pelos deslocamentos iniciais mais os incrementais, dados por (1.22), permite

estabelecer a expressão do teorema dos deslocamentos virtuais como uma série de potências de ϵ . A introdução das mesmas condições de ortogonalidade, mencionadas no procedimento de Budianski, e dos deslocamentos incrementais de ordem 1 como deslocamentos virtuais, leva, após algumas considerações, às expressões (1.29) e dos parâmetros a e b .

Os procedimentos de Koiter e Budianski são equivalentes. Entretanto, o segundo exige menos manipulações, além de apresentar maior simplicidade e consistência na derivação das várias expressões.

Apresentam-se, a seguir, os principais resultados e conclusões estabelecidos por Dym. Na Tabela 7, indica-se a relação entre a carga crítica, obtida pela teoria de Koiter, e a carga crítica correspondente à solução "exata" de Masur em função do parâmetro λ .

Arco Biarticulado		Arco Biengastado	
λ	p_{cr}^{ap}/p_{cr}^{ex}	λ	p_{cr}^{ap}/p_{cr}^{ex}
2,65	1,685	5,47	1,484
5	1,114	10	1,097
10	1,026	15	1,041
15	1,011	20	1,022
20	1,006	30	1,010
30	1,003	40	1,006
40	1,002		

Tabela 7 - Comparação entre as Cargas Críticas Aproximada e "Exata"

Desses resultados, concluiu o autor que, como seria de se esperar, o efeito da linearização do estado pré-instabilidade na determinação da carga crítica correspondente ao ponto de bifurcação não é desprezível para valores baixos de λ .

No caso do arco biarticulado, obteve-se:

$$a = 0 \quad b = \frac{3}{1 - \frac{\lambda^2}{1,90}} \quad (1.24)$$

donde se conclui que ocorrerá ponto de bifurcação simétrico instável para $\lambda > 1,38$, valor próximo do encontrado por Dickie, $\lambda > 1,11$. No caso do arco biengastado, obtêm-se:

$$a = 0 \quad b = \frac{1,61}{1 - \frac{\lambda^2}{5,02}} \quad (1.25)$$

e, portanto, ocorre ponto de bifurcação simétrico instável para $\lambda > 2,24$, valor também próximo do encontrado por Masur, $\lambda > 2,85$. Em ambos os casos, entretanto, sô se consideram as cargas críticas obtidas para $\lambda > 2,65$ e $\lambda > 5,74$, respectivamente, pois sô após estes valores o ponto de bifurcação precede o ponto limite.

Em seu trabalho "*Buckling and Postbuckling of Steep Compressible Arches*", Dym examina o ponto de bifurcação e o comportamento pós-instabilidade de arcos circulares não-abatidos, biarticulados e biengastados, submetidos a carga radial uniforme.

A análise se baseia na teoria de Koiter, e o procedimento adotado é o de Budianski. São empregadas na análise, para efeito de comparação, as relações deformações-deslocamentos (1.15), denominadas, pelo autor, FNR ("*full nonlinear ring equations*"), e as relações (1.17), denominadas MCR ("*modified curvature ring equations*").

Os principais resultados, Tabelas 8 a 14, e conclusões apresentados por Dym são mostrados a seguir.

α	FNR		$\frac{p_{cr} R^3}{EI}$	MCR	
	$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$		$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$
90	3,26923	3,27124		3,27053	3,27125
80	4,51287	4,51449		4,51359	4,51449
70	6,21586	6,21707		6,21752	6,21707
60	8,72629	8,72712		8,73700	8,72712
50	12,78701	12,78214		12,83972	12,78125
40	20,14096	20,14128		20,46900	20,14131

Tabela 8 - Cargas Críticas para o Arco Biarticulado

α	FNR		$\frac{p_{cr} R^3}{EI}$	MCR	
	$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$		$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$
90	9,00000	9,00000		9,03207	9,00000
80	11,33095	11,33135		11,40456	11,33136
70	14,61636	14,61805		14,79662	14,61806
60	19,58254	19,58671		20,07098	19,58676
50	27,73864	27,74726		29,27890	27,74742
40	42,68493	42,70190		48,80510	42,70251

Tabela 9 - Cargas Críticas para o Arco Biengastado

α	biarticulada		biengastada	
	$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$	$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$
90	1,000000	1,000000	0,995620	1,000000
80	0,999927	1,000000	0,992719	0,999999
70	0,999562	1,000000	0,986995	0,999999
60	0,998397	1,000000	0,974852	0,999997
50	0,994872	0,999999	0,946604	0,999994
40	0,093332	0,999998	0,873872	0,999986

Tabela 10 - Parâmetro de Flexão para Sol. Prê-Instabilidade (MCR)

$$M_0 \approx p(1 - \psi)$$

Admitiu-se, nesse trabalho, a hipótese de linearidade geométrica no estado pré-instabilidade. Nestas condições, a flexão do arco no estado pré-instabilidade é nula no caso FNR e aproximadamente nula no caso MCR, em virtude de o momento ser proporcional a $(1 - \psi)$, e dos resultados da Tabela 9. Desta forma, conclui o autor que o efeito da flexão no estado pré-instabilidade é mínimo, e tendo em vista o trabalho (14) de Dym, também é mínimo o efeito da compressibilidade na determinação da carga crítica.

α	FNR		b	MCR	
	$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$		$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$
90	1,019302	1,011415		0,211386	0,211430
80	0,386367	0,381016		- 0,232681	- 0,229784
70	- 0,484773	- 0,484626		- 1,227794	- 1,212972
60	- 2,210659	- 2,184584		- 3,414991	- 3,350614
50	- 6,556133	- 6,370323		- 8,719322	- 8,407426
40	- 20,298221	- 18,804925		- 24,564979	- 22,521435

Tabela 11 - Coeficiente b para Arco Biarticulado

α	FNR		b	MCR	
	$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$		$h/R = 1/10$	$h/R = 1/1000$
90	- 0,575536	- 0,571700		- 0,451288	- 0,446700
80	- 1,204257	- 1,190227		- 1,230642	- 1,211721
70	- 2,446248	- 2,396215		- 2,723509	- 2,657893
60	- 5,194701	- 4,993075		- 5,878286	- 5,629916
50	- 12,307776	- 11,294352		- 13,719296	- 12,546408
40	- 36,999547	- 29,413727		- 40,114950	- 31,784643

Tabela 12 - Coeficiente b para Arco Biengastado

A inspeção visual da Tabela 11 indica claramente que ocorre uma transição de ponto de bifurcação simétrico instável para estável, no caso de arco biarticulado, quando se aproxima de 90° , em contraste com os resultados obtidos com a hipótese de arco abatido. Do ponto de vista qualitativo, os

resultados dos casos FNR e MCR são coincidentes, observando-se que os ângulos de transição são, respectivamente, 75° e 84° .

Para o arco biengastado, os valores de b , obtidos nos casos FNR e MCR, são muito próximos, e o ponto de bifurcação simétrico é sempre instável.

α	$p_{cr} l^3/EI$			
	Biarticulado		Biengastado	
	MCR	abatido	MCR	abatido
90	3,27	4,00	9,00	8,19
80	4,51	5,06	11,33	10,35
70	6,22	6,61	14,62	13,52
60	8,73	9,00	19,59	18,40
50	12,78	12,96	27,75	26,55
40	20,14	20,25	42,70	41,45

Tabela 13 - Comparação com as Cargas Críticas Obtidas com a Hipótese de Arco Abatido

α	$p_{cr} l^3/EI$			
	Biarticulado		Biengastado	
	MCR	abatido	MCR	abatido
90	0,211	- 0,933	- 0,447	- 1,33
80	- 0,230	- 1,50	- 1,212	- 2,14
70	- 1,213	- 2,54	- 2,658	- 3,72
60	- 3,350	- 4,71	- 5,630	- 6,71
50	- 8,407	- 9,80	- 12,546	- 13,92
40	- 22,521	- 24,0	- 31,785	- 34,2

Tabela 14 - Comparação com os Coeficientes b obtidos com a Hipótese de Arco Abatido

Observa-se que os resultados correspondentes de carga crítica e do coeficiente b apresentam-se próximos para $40^\circ < \alpha < 60^\circ$.

1.5. Observações a respeito dos Trabalhos Apresentados

Fazem-se, inicialmente, algumas observações complementares ao trabalho de Courbon.

A interpretação física do fenômeno da instabilidade em arcos, estabelecida a partir dos trabalhos (37), (60) e (62), é extremamente importante, pois ressaltam certos aspectos que não são abordados por Courbon. Destacam-se, principalmente, a possibilidade de não-ocorrência de instabilidade para arcos muito abatidos, a possibilidade de ocorrência do fenômeno de "*snap-through*" para arcos abatidos, e a possibilidade de se terem ponto limite e ponto de bifurcação na trajetória fundamental de equilíbrio, mas com o ponto de bifurcação ocorrendo em ramos instável da trajetória. Todas essas situações estão indicadas nas Fig. 1.6.

Todos os trabalhos apresentados levaram em consideração, na análise do ponto de bifurcação, as deformações que ocorrem antes de se atingir a carga crítica, visto que o ponto de bifurcação tem origem em trajetória de equilíbrio fundamental não-trivial. Considerando-se, pois, que tais deformações sempre têm lugar, deve-se, ao menos, pesar seus efeitos de forma aproximada. O trabalho de Courbon simplesmente não considera a deformação pré-instabilidade.

Outro aspecto a ser destacado no trabalho de Courbon é decorrente da expressão

$$M = D v'' \quad , \quad (1.26)$$

utilizada para o momento fletor e idêntica à da teoria elementar das barras. Assim, pode-se concluir que a utilização das expressões estabelecidas por Courbon para o cálculo do empuxo crítico melhor se aplica aos arcos abatidos. Entretanto, é exatamente para os arcos abatidos que é menor a possibilidade de ocorrência de ponto de bifurcação, realçando-se, pois, a necessidade de se definir claramente o campo de aplicação dos resultados estabelecidos por aquele autor.

Em seguida, estabelecem-se algumas considerações a respeito de alguns aspectos dos trabalhos apresentados.

Inicialmente, chama-se a atenção para o fato de os vários trabalhos apre-

sentarem relações deformações-deslocamentos com graus de aproximação diferentes entre si e sem uma caracterização das simplificações que as mesmas envolvem.

Outro aspecto que deve ser ressaltado é o do efeito da extensibilidade no estudo da estabilidade dos arcos. Mostra-se claramente, em (13), a importância de se considerar a extensibilidade do arco para a ocorrência de modo de instabilidade simétrico. Por outro lado, para o modo de instabilidade assimétrico, no mesmo trabalho o autor conclui ser desprezível aquele efeito. Entretanto, deve-se ressaltar que estes resultados foram obtidos para arcos de eixo circular, biengastados e biarticulados, submetidos a carga radial uniformemente distribuída; desta forma, a generalização da hipótese de desprezar a extensibilidade não é imediata.

Quanto ao efeito de flexão no estado pré-instabilidade, Dym conclui, em (14), que ele é mínimo. Esta conclusão, entretanto, não pode ser generalizada, como sugere o autor, em virtude de a análise se retrair ao caso particular de arco não-abatido de eixo circular, submetido a carga radial uniforme, e da hipótese de linearidade geométrica. Nestas condições, o arco do eixo coincide com a funicular das forças externas, e a distribuição dos momentos fletores deve mesmo ser pequena, pois é devida apenas ao efeito dos vínculos.

A hipótese de linearidade geométrica, aplicada ao estado pré-instabilidade, introduzida nos trabalhos (14) e (15) de Dym, não pode ter seu uso vulgarizado, em virtude de em muitos casos a não-linearidade geométrica ser forte no estado de pré-instabilidade, como é o caso de arco circular biarticulado e não-abatido, submetido a carga concentrada no meio do vão. Por outro lado, nos casos da instabilidade do tipo ponto limite, ou quando ocorre não-simetria do carregamento ou do arco, o estado pré-flambagem é altamente não-linear do ponto de vista geométrico.

A apresentação de alguns aspectos da teoria de Koiter permitem levantar um ponto importante no estudo da instabilidade de arcos, a sensibilidade a imperfeições. Quando ocorre, no arco, instabilidade do tipo ponto de bifurcação simétrico instável, as imperfeições podem conduzir a uma sensível diminuição da carga crítica, com o comprometimento da capacidade de carga da estrutura, conforme se indica na Fig. 1.25.

Finalmente, observa-se que os trabalhos que apresentaram soluções "exatas" são em número muito reduzido e restritos a formas muito particulares de geometria e de carregamento. Por outro lado, os trabalhos que apresentaram soluções aproximadas ou são de utilização nem muito prática, como é o caso daqueles que envolvem a teoria de Koiter, ou então apresentaram poucos resultados, como é o caso do trabalho de *Walker* (62). Deve-se mencionar ainda que outros trabalhos que buscam solução aproximada, como os de *Popov* (46), *Simitzes* (52) e *Lind* (33), ou são de estrutura muito intrínseca ou então são restritos a uma classe limitada de problemas.

1.6. Objetivos da Tese

Desde o início do século, o estudo da instabilidade de arcos tem merecido a atenção de diversos pesquisadores, resultando em trabalho notáveis. A apresentação, neste Capítulo, de uma análise crítica de uma série de resultados e trabalhos mostra o quanto este campo é rico e igualmente polêmico, propiciando, assim, uma série de novos estudos.

É dentro desse quadro, e fiel à experiência de professor universitário, que se apresenta este trabalho, com a intenção de que ele seja uma contribuição ao estudo da estabilidade de arcos em regime elástico, submetidos a carregamentos conservativos fixando os seguintes objetivos básicos:

- a) apresentar, de forma simples e consistente, elementos de análise tensorial que permitam estabelecer em seguida, com clareza, a formulação da teoria da elasticidade em coordenadas curvilíneas com não-linearidade geométrica. A formulação adotada é a Lagrangiana, para a qual o estado inicial de referência é o estado inicial, considerado livre e indeformado, e que permite tratar as questões na análise estrutural da forma física mais adequada. Por outro lado, tal formulação torna necessária uma definição de tensão que, embora matematicamente consistente, é artificial de um ponto de vista físico. Tal restrição, entretanto, é compensada amplamente por tornar fácil a introdução de anisotropia, e principalmente pela simplificação computacional decorrente;

- b) estabelecer elementos teóricos de uma teoria de barras curvas, com aplicação posterior às barras de eixo circular, tratando então de estabelecer uma família de relações deformações-deslocamentos, derivadas da solução "exata" tridimensional, que possibilite a caracterização das aproximações envolvidas nas relações apresentadas. A extensão do procedimento a arcos com eixos não-circulares é imediata;
- c) estabelecer um procedimento geral e simples para o estudo da estabilidade de arcos que apresentem linearidade física e não-linearidade geométrica, de acordo com formulação geral apresentada por *Thompson* em (60). Tal procedimento permitirá que se estabeleçam soluções aproximadas pelo método dos elementos finitos e não conterá as hipóteses restritivas de inextensibilidade, não-flexão e linearidade geométrica nos estados pré-instabilidade, e permitirá o estudo de arcos contendo imperfeições, com geometria qualquer e sob as diversas condições de vinculação e carregamentos conservativos. A apresentação dos resultados de aplicação do modelo é objeto de trabalho a ser desenvolvido posteriormente.

2. ELEMENTOS DE ANÁLISE TENSORIAL

2.1. Notação Indicial

Nos vários capítulos que se desenvolverão, far-se-á uso da notação indicial, cuja importância é clássica nos textos de análise tensorial e de teoria da elasticidade, e que tem sido utilizada, com muito sucesso, em trabalhos que utilizam o método dos elementos finitos.

As coordenadas retangulares de um ponto P, do espaço físico tridimensional, são representadas usualmente por (x, y, z) . Na notação indicial, substitui-se (x, y, z) por (x^1, x^2, x^3) ou (x_1, x_2, x_3) , que se indicam na forma

$$x^r \text{ ou } x_r \quad (a)$$

sendo r um índice, superior ou inferior, que pode tomar os valores 1, 2, 3.

Considere-se a matriz quadrada, de ordem 3, (c_j^i) , resultante do produto entre as matrizes quadradas (a_m^i) e (b_j^m) , onde o índice superior indica a linha e o inferior, a coluna. Os elementos da matriz (c_j^i) são dados por:

$$\begin{aligned} c_1^1 &= a_1^1 b_1^1 + a_2^1 b_1^2 + a_3^1 b_1^3 = \sum_{m=1}^3 a_m^1 b_1^m \\ c_2^1 &= a_1^1 b_2^1 + a_2^1 b_2^2 + a_3^1 b_2^3 = \sum_{m=1}^3 a_m^1 b_2^m \\ \hline c_2^3 &= a_1^3 b_2^1 + a_2^3 b_2^2 + a_3^3 b_2^3 = \sum_{m=1}^3 a_m^3 b_2^m \\ c_3^3 &= a_1^3 b_3^1 + a_2^3 b_3^2 + a_3^3 b_3^3 = \sum_{m=1}^3 a_m^3 b_3^m \end{aligned} \quad (b)$$

Em virtude de (a), é possível colocar a expressão (b) na forma

$$c_j^i = \sum_{m=1}^3 a_m^i b_j^m, \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (c)$$

efetuando uma notável compactação.

Convenciona-se, agora, que a repetição de um índice, superior ou inferior, em uma expressão indica uma somatória no domínio do índice. Assim, a expressão (c) toma a forma

$$c_j^i = a_m^i b_j^m, \quad (i, j, m = 1, 2, 3) \quad (d)$$

com i, j, m tomando valores 1, 2, 3, de maneira independente. A expressão (d) resume as características básicas da notação indicial, sendo usual referir-se ao índice repetido, que caracteriza a somatória, como índice mudo, e aos demais, como índices livres.

2.2. Formas Multilineares

2.2.1. Espaço Dual $\bar{W}$ de W

No que se segue, todos os espaços vetoriais serão considerados reais e de dimensão finita.

Sejam W e V dois espaços vetoriais. A função f definida em W com valores em V é chamada linear se satisfaz a:

$$f(\alpha \vec{x} + \beta \vec{y}) = \alpha \cdot f(\vec{x}) + \beta \cdot f(\vec{y}) \quad (2.1)$$

quaisquer que sejam x e y pertencentes a W e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, conjunto dos números reais. Em particular quando $V = \mathbb{R}$, a função linear é denominada forma linear sobre W .

Define-se adição, $f + g$, entre duas formas lineares f e g sobre W como a função que a cada elemento $\vec{x} \in W$ associa $f(\vec{x}) + g(\vec{x}) \in \mathbb{R}$. Define-se produto, $\alpha \cdot f$, de uma forma linear f sobre W por um escalar α , a função que a cada elemento $\vec{x} \in W$ associa $\alpha \cdot f(\vec{x}) \in \mathbb{R}$. É imediato constatar que $f + g$ e $\alpha \cdot f$ são formas lineares sobre W e, portanto, o conjunto de todas as formas lineares sobre W possui uma estrutura natural de espaço vetorial, chamado espaço dual de W , que é indicado por $\bar{W}$. Pode-se demonstrar, supondo-se que W tenha dimensão finita, que a dimensão de $\bar{W}$ é igual à de W .

Os elementos de W são usualmente mencionados como vetores covariantes, e os de $\bar{W}$ como vetores contravariantes.

2.2.2. Bases Duais

Sejam $B = (\vec{e}_1, \vec{e}_2, \dots, \vec{e}_n)$ uma base de W , e $F = (h^1, h^2, \dots, h^n)$ uma base qualquer de $\bar{W}$. Assim, se $\vec{x}$ é um vetor de W , isto é, um elemento de W , e f é um vetor de $\bar{W}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned}\vec{x} &= x^i \vec{e}_i & (i = 1, 2, \dots, n) \\ \phi &= f_j h^j & (j = 1, 2, \dots, n)\end{aligned}\quad (2.2)$$

As componentes x^i que caracterizam um vetor de W são denominadas contra-variantes, e as componentes f_j que caracterizam um vetor de $\bar{W}$ são denominadas covariantes.

Fixada uma base $B(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de W , para cada i ($i = 1, 2, \dots, n$), define-se uma forma linear $e^i \in \bar{W}$ pelas relações

$$e^i(\vec{e}_j) = \langle e^i, \vec{e}_j \rangle = \delta_j^i \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.3)$$

É imediato verificar que a seqüência $\bar{B} = (e^1, \dots, e^n)$, assim definida, é uma base de $\bar{W}$ chamada dual de B .

Apresentam-se a seguir expressões que permitem obter as componentes de vetores quaisquer pertencentes a W ou $\bar{W}$ nas bases duais $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ e $(e^1, \dots, e^n)$. Então, se $\vec{x} \in W$ e

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i, \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.4)$$

vem

$$\langle e^k, \vec{x} \rangle = \langle e^k, x^i \vec{e}_i \rangle = x^i \langle e^k, \vec{e}_i \rangle = x^i \delta_i^k = x^k \quad (2.5)$$

Assim, as componentes x^k de $\vec{x} \in W$ na base $(\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ podem ser obtidas através de

$$x^k = \langle e^k, \vec{x} \rangle. \quad (2.6)$$

De forma análoga, se $\phi \in \bar{W}$ e

$$\phi = f_i e^i, \quad (2.7)$$

então

$$f_i = \langle \phi, \vec{e}_i \rangle \quad (2.8)$$

2.2.3. Mudanças de Bases em W e $\bar{W}$

Trata-se agora de estabelecer as relações entre as matrizes de mudança de base em W e $\bar{W}$.

Sejam $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ e $B^* = (\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*)$ duas bases de W . Assim sendo, pode-se escrever

$$\vec{e}_\alpha^* = m_\alpha^i \vec{e}_i \quad (*) \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (2.9)$$

onde m_α^i é a matriz de mudança de base de B para B*. Em virtude de o determinante $|m_\alpha^i|$ ser não-nulo, pois B* é base de W, tem-se:

$$\vec{e}_i = \bar{m}_i^\alpha \vec{e}_\alpha^* \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (2.10)$$

onde $\bar{m}_i^\alpha$ é a matriz inversa de mudança de base de B para B*, ou seja, a matriz de mudança de base de B* para B.

Sejam agora $\bar{B} = (e^1, \dots, e^n)$ e $\bar{B}^* = (e^{*1}, \dots, e^{*n})$ as bases duais de B e B*, respectivamente. De forma análoga ao que foi feito anteriormente, vem

$$\begin{aligned} e^{*\alpha} &= u_i^\alpha e^i \\ e^i &= \bar{u}_\alpha^i e^{*\alpha} \end{aligned} \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (2.11)$$

onde u_i^α e $\bar{u}_\alpha^i$ são, respectivamente, as matrizes mudança de base de $\bar{B}$ para $\bar{B}^*$ e de $\bar{B}^*$ para $\bar{B}$.

Observando-se que

$$\left. \begin{aligned} \langle e^j, \vec{e}_\alpha^* \rangle &= \langle e^j, m_\alpha^i \vec{e}_i \rangle = m_\alpha^i \delta_i^j = m_\alpha^j \\ \langle e^j, \vec{e}_\alpha^* \rangle &= \langle \bar{u}_\beta^j e^{*\beta}, \vec{e}_\alpha^* \rangle = \bar{u}_\beta^j \delta_\alpha^\beta = \bar{u}_\alpha^j \end{aligned} \right\} \quad (2.12)$$

decorre imediatamente que

$$\begin{aligned} u_i^\alpha &= \bar{m}_i^\alpha \\ \bar{u}_\alpha^i &= m_\alpha^i \end{aligned} \quad (2.13)$$

ou seja, as matrizes de mudança de base de $\bar{B}$ para $\bar{B}^*$ e de $\bar{B}^*$ para $\bar{B}$ são iguais, respectivamente, às inversas das transpostas das matrizes de mudança de base de B para B* e de B* para B.

Considere-se agora o efeito da mudança de base sobre as componentes de um vetor

---

(*) No que se segue, utilizar-se-ão índices latinos em parâmetros que se referem à base velha B, e índices gregos em parâmetros que se referem à base nova B*.

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i = x^{*\alpha} \vec{e}_\alpha^* \quad (i, \alpha = 1, 2, \dots, n) \quad (2.14)$$

pertencente a W . Tendo em vista (2.5), pode-se escrever:

$$x^{*\alpha} = \langle \vec{e}^{*\alpha}, \vec{x} \rangle = \langle \bar{m}_j^\alpha \vec{e}^j, x^i \vec{e}_i \rangle = \bar{m}_j^\alpha \delta_i^j x^i = \bar{m}_i^\alpha x^i. \quad (2.15)$$

De maneira análoga, considerando-se o vetor

$$\vec{f} = f_i \vec{e}^i = f_\alpha^* \vec{e}^{*\alpha}, \quad (2.16)$$

obtem-se, em virtude de (2.8),

$$f_\alpha^* = m_\alpha^i f_i \quad (2.17)$$

É importante observar que, em uma mudança de base, as componentes de $\vec{x} \in W$ e $\vec{f} \in \bar{W}$ se transformam, de acordo com os vetores das bases duais $\bar{B}$ e B , respectivamente.

2.2.4. Formas Multilineares

Sejam $W_1, W_2, \dots, W_m$ e V espaços vetoriais. A função δ , definida em $W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m$ (*) com valores em V , é chamada m -linear se é linear em cada um dos seus argumentos, ou seja, se

$$\begin{aligned} \delta(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \alpha \vec{x}_i' + \beta \vec{x}_i'', \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_m) &= \\ &= \alpha \delta(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i', \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_m) + \\ &+ \beta \delta(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_{i-1}, \vec{x}_i'', \vec{x}_{i+1}, \dots, \vec{x}_m) \end{aligned} \quad (2.18)$$

qualquer que seja o índice, $1 \leq i \leq m$, e quaisquer que sejam os vetores $\vec{x}_1 \in W_1, \dots, \vec{x}_i', \vec{x}_i'' \in W_i, \dots, \vec{x}_m \in W_m$ e $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

(*) Chama-se produto cartesiano dos espaços vetoriais $W_1, \dots, W_m$, nesta ordem, ao espaço vetorial que se representa por

$$W_1 \times W_2 \times \dots \times W_m \quad \text{ou} \quad \prod_i W_i \quad (i = 1, \dots, m)$$

e cujos elementos são as seqüências ordenadas $(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \dots, \vec{x}_n)$ onde $\vec{x}_i \in W_i$.

Define-se adição, $f + g$, entre duas funções m-lineares como a aplicação que a cada elemento $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in \prod_i W_i$ ($i = 1, \dots, m$) associa $f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) + g(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in V$. Define-se produto, $\alpha \cdot f$, de uma função m-linear por um escalar α como a aplicação que a cada elemento $(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in \prod_i W_i$ ($i = 1, \dots, m$) associa $\alpha \cdot f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) \in V$. É imediato constatar que $f + g$ e $\alpha \cdot f$ são funções m-lineares e, portanto, o conjunto de todas as funções m-lineares, indicado por $\mathcal{L}(W_1, \dots, W_m; V)$, possui uma estrutura natural de espaço vetorial. No caso de $W_1 = \dots = W_p = W$ e $W_{p+1} = \dots = W_m = U$, o espaço vetorial é indicado por $\mathcal{L}(W^p, U^q; V)$, com $p + q = m$.

Quando $V = \mathbb{R}$, a função m-linear é referida como forma m-linear e, portanto, os elementos de $\mathcal{L}(W_1, \dots, W_m; \mathbb{R})$ são todas as formas m-lineares. No caso de $W_1 = \dots = W_m = W$, estes elementos são chamados formas m-lineares sobre W .

Exemplo 2.1

Sejam $W_1 = W_2 = \mathbb{R}^3$ e considerem-se as aplicações:

$$\begin{aligned} e : (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow (\vec{x} \circ \vec{y}) \in \mathbb{R} \\ v : (\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\rightarrow \vec{x} \wedge \vec{y} \in \mathbb{R}^3 \end{aligned} \quad (a)$$

definidas como produtos escalar e vetorial, respectivamente. É imediato verificar que e é uma forma bilinear sobre $\mathbb{R}^3$ e que v é uma função bilinear de $\mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$.

Exemplo 2.2

Sejam $W_1 = W_2 = W_3 = \mathbb{R}^3$ e considere-se a aplicação:

$$m : (\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow (\vec{x} \circ \vec{y} \wedge \vec{z}) \in \mathbb{R} \quad (b)$$

denominada produto mixto. É imediato verificar que m é uma forma trilinear sobre $\mathbb{R}^3$.

Apresenta-se a seguir uma proposição importante das funções m-lineares, de demonstração imediata.

Sejam $W_1, \dots, W_m$ e V espaços vetoriais e $B_v = (\vec{e}_{v_1}, \dots, \vec{e}_{v_{n_v}})$ uma base de W_v , com $v = 1, 2, \dots, m$, e seja f uma aplicação de $W_1 \times \dots \times W_m$ em V . São equivalentes, então, as duas seguintes asserções:

a) $f \in \mathcal{L}(W_1, \dots, W_m; V)$

e

b) existem constantes

$$c_{i_1 \dots i_m} \in V \quad \begin{matrix} (i_v = 1, 2, \dots, n_v) \\ (v = 1, \dots, m) \end{matrix}$$

tais que

$$f(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_m) = x_1^{i_1} \dots x_m^{i_m} c_{i_1 \dots i_m}$$

e quaisquer que sejam

$$\vec{x}_v = x_v^j \vec{e}_{vj} \in W_v \quad (v = 1, \dots, m)$$

Assim, verificadas as duas condições, tem-se:

$$c_{i_1 \dots i_m} = f(\vec{e}_{1i_1}, \dots, \vec{e}_{mi_{i_m}}) \quad (2.18)$$

2.3. Tensores

2.3.1. Definição de Tensor

Sejam W um espaço vetorial e $\bar{W}$ o dual de W . Dados dois inteiros $p, q > 0$, chama-se tensor p -vezes covariante e q -vezes contravariante ou tensor de tipo (p, q) sobre W toda forma $(p + q)$ -linear definida em $\underbrace{W \times \dots \times W}_p \times \underbrace{\bar{W} \times \dots \times \bar{W}}_q (= W^p \times \bar{W}^q)$.

Se $p = 0$ e $q > 0$, chama-se tensor q -vezes contravariante ou de tipo $(0, q)$ sobre W toda forma q -linear definida em $\underbrace{\bar{W} \times \dots \times \bar{W}}_q (= \bar{W}^q)$. Se $p > 0$ e $q = 0$, chama-se tensor p -vezes covariante ou ^{q} de tipo $(p, 0)$ sobre W toda forma p -linear definida em $\underbrace{W \times \dots \times W}_p (= W^p)$.

Completando-se a definição, para $p = q = 0$ convencionou-se chamar tensor de tipo $(0, 0)$ toda aplicação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$. Como toda aplicação linear de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$ é uma homotetia, o espaço $\mathcal{L}(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ se identifica, naturalmente, com $\mathbb{R}$ e, desta forma, um tensor de tipo $(0, 0)$ é um escalar.

Chama-se ordem de um tensor de tipo (p, q) sobre W ao número inteiro $p + q$.

Trata-se agora de estabelecer a expressão de um tensor de tipo (p, q) sobre W :

$$T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) \quad (2.19)$$

em termos das componentes de seus argumentos. Sendo $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ base de W e $\bar{B} = (e^1, \dots, e^n)$ a base dual de $\bar{W}$, pode-se escrever

$$\begin{aligned} \vec{x}_r &= x_r^{i_r} \vec{e}_{i_r} \in W & (r = 1, \dots, p) ; (i_r = 1, \dots, n) \\ u^s &= u_{j_s}^s e^{j_s} \in \bar{W} & (s = 1, \dots, q) ; (j_s = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.20)$$

Substituindo-se (2.20) em (2.19), tem-se:

$$\begin{aligned} T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) &= T(x_1^{i_1} \vec{e}_{i_1}, \dots, x_p^{i_p} \vec{e}_{i_p}, u_{j_1}^1 e^{j_1}, \dots, \\ &u_{j_q}^q e^{j_q}) = x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} u_{j_1}^1 \dots u_{j_q}^q T(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) \end{aligned} \quad (2.21)$$

ou, em virtude de (2.18),

$$T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) = x_1^{i_1} \dots x_p^{i_p} u_{j_1}^1 \dots u_{j_q}^q T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \quad (2.22)$$

Os números reais $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ são denominados componentes (ou coeficientes, ou coordenadas) do tensor (p, q) , relativamente à base $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$, sobre W . É importante observar que a proposição definida no parágrafo 2.2.4 mostra que a família de números $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ associados à base $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ de W caracteriza o tensor (p, q) , o que justificará, nos próximos capítulos, a referência às componentes de um tensor como "tensor".

2.3.2. Efeito da Mudança de Base sobre as Componentes de um Tensor

Considerem-se em W duas bases, a velha, $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ e a nova, $B^* = (\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*)$, e sejam $\bar{B} = (e^1, \dots, e^n)$ e $\bar{B}^* = (e^{*1}, \dots, e^{*n})$ as respectivas bases duais de $\bar{W}$. Sabe-se, do parágrafo 2.1.3, que os vetores das bases se relacionam através de:

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha^* &= m_\alpha^i \vec{e}_i & e^{*\beta} &= \bar{m}_j^\beta e^j \\ \vec{e}_i &= \bar{m}_i^\alpha \vec{e}_\alpha^* & e^j &= m_\beta^j e^{*\beta} \end{aligned} \quad (i, j, \alpha, \beta = 1, \dots, n) \quad (2.23)$$

As componentes do tensor (p, q) relativas à nova B^* são dadas por

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{*\beta_1 \dots \beta_q} = T(\vec{e}_{\alpha_1}^*, \dots, \vec{e}_{\alpha_p}^*, e^{*\beta_1}, \dots, e^{*\beta_q}) \quad (2.24)$$

que podem ser relacionadas com as componentes do tensor relativas à base velha, introduzindo-se (2.23) em (2.24). Assim, considerando-se que

$$\begin{aligned} T(\vec{e}_{\alpha_1}^*, \dots, \vec{e}_{\alpha_p}^*, e^{*\beta_1}, \dots, e^{*\beta_q}) &= \\ &= T(m_{\alpha_1}^{i_1} \vec{e}_{i_1}, \dots, m_{\alpha_p}^{i_p} \vec{e}_{i_p}, \bar{m}_{j_1}^{\beta_1} e^{j_1}, \dots, \bar{m}_{j_q}^{\beta_q} e^{j_q}) = \\ &= m_{\alpha_1}^{i_1} \dots m_{\alpha_p}^{i_p} \bar{m}_{j_1}^{\beta_1} \dots \bar{m}_{j_q}^{\beta_q} T(\vec{e}_{i_1}, \dots, \vec{e}_{i_p}, e^{j_1}, \dots, e^{j_q}) \end{aligned} \quad (2.25)$$

pode-se estabelecer

$$T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{*\beta_1 \dots \beta_q} = m_{\alpha_1}^{i_1} \dots m_{\alpha_p}^{i_p} \bar{m}_{j_1}^{\beta_1} \dots \bar{m}_{j_q}^{\beta_q} T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \quad (2.26)$$

que é a expressão que permite determinar as componentes $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{*\beta_1 \dots \beta_q}$ relativas à nova base B^* a partir das componentes $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ relativas à base velha B .

A expressão (2.26), que caracteriza, pois, o efeito da mudança de base sobre as componentes de um tensor, tem sido utilizada diretamente como definição, que se pode dizer clássica, de tensor: chama-se tensor p -vezes covariante e q -vezes covariante um "objeto geométrico" do qual não se especifica a natureza "concreta", que, em relação a uma base B de W , apresenta "componentes" $T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q}$ e, em relação a uma outra base B^* de W , apresenta "componentes" $T_{\alpha_1 \dots \alpha_p}^{*\beta_1 \dots \beta_q}$ que se relacionam através de (2.26).

Esta definição, apesar de conter alguns termos vagos, é equivalente à definição adotada, conforme se pode demonstrar utilizando-se a proposição estabelecida no parágrafo 2.2.4.

É importante observar que a expressão (2.22), calculada com a ajuda das componentes de $\vec{x}^i \in W$ e $u^j \in \bar{W}$ relativas a uma certa base, independe da mesma.

Desta forma, os sistemas de coordenadas não são mais que instrumentos para estudar "objetos" que apresentam uma significação intrínseca. Esta idéia fundamental poder ser exemplificada, de um ponto de vista físico, pelo estado de tensão de um ponto, caracterizado por um tensor de componentes σ^{ij} .

2.3.3. Álgebra Tensorial

Adição de tensores e produto de tensor por um número real

Em vista do exposto em 2.2.4, o conjunto $\mathcal{L}(W^p, \bar{W}^q, \mathbb{R})$ de todos os tensores de tipo (p, q) sobre W está munido naturalmente de uma estrutura de espaço vetorial com as operações de adição e produto por escalar definidas, respectivamente, pelas relações

$$(R + T)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) = R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) + T(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) \quad (2.27)$$

$$(\alpha \cdot R)(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) = \alpha \cdot R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) \quad (2.28)$$

quaisquer que sejam os tensores R e T de tipo (p, q) sobre W , $\alpha \in \mathbb{R}$, $\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p$ em W e $u^1, \dots, u^q$ em $\bar{W}$.

Substituindo-se (2.20) em (2.27) e (2.28), e indicando-se $R + T$ e $\alpha \cdot R$, respectivamente, por S e P , obtêm-se, após algumas transformações elementares, as expressões

$$S_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = R_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} + T_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \quad (2.29)$$

$$P_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} = \alpha \cdot R_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \quad (2.30)$$

$$(i_1; \dots; i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n)$$

que caracterizam as componentes do tensor soma e do tensor produto.

Contração de um tensor

Considere-se agora o tensor $T(\vec{x}_1, \vec{x}_2, \vec{x}_3, u^1, u^2)$ e seja

$$R(\vec{x}_2, \vec{x}_3, u^2) = T(\vec{e}_i, \vec{x}_2, \vec{x}_3, e^i, u^2) \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.31)$$

que também é um tensor, visto que cada uma das parcelas da somatória é um

tensor. Em virtude de (2.20), pode-se escrever

$$R_{jk}^{\ell} = T_{ijk}^{i\ell} \quad (i, j, k, \ell = 1, \dots, n) \quad (2.32)$$

que estabelece uma relação entre as componentes dos dois tensores, sendo usual indicar-se R_{jk}^{ℓ} por T_{jk}^{ℓ} .

Se se considerar uma nova base $B^* = (\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*)$, a expressão (2.31) tomará a forma

$$R(\vec{x}_2, \vec{x}_3, u^2) = T(\vec{e}_\alpha^*, \vec{x}_2, \vec{x}_3, e^{*\alpha}, u^2) \quad (\alpha = 1, \dots, n) \quad (2.33)$$

ou, em virtude de (2.23),

$$\begin{aligned} R(\vec{x}_2, \vec{x}_3, u^2) &= T(m_\alpha^i \vec{e}_i, \vec{x}_2, \vec{x}_3, \bar{m}_j^\alpha e^j, u^2) = \\ &= m_\alpha^i \bar{m}_j^\alpha T(\vec{e}_i, \vec{x}_2, \vec{x}_3, e^j, u^2) = \\ &= T(\vec{e}_i, \vec{x}_2, \vec{x}_3, e^i, u^2) \quad (i, j = 1, \dots, n) \end{aligned} \quad (2.34)$$

Pode-se, pois, concluir que, embora cada uma das parcelas das somatórias em (2.31) e (2.33) dependa das bases, a soma das parcelas é independente das mesmas.

Esta operação, que permitiu estabelecer um tensor (2, 1) a partir de um tensor (3, 2), é chamada contração de um tensor e, no caso geral, leva um tensor de tipo (p, q) sobre W a um tensor de tipo (p - 1, q - 1) sobre W, como facilmente se pode demonstrar. Uma propriedade que resulta dessa operação é que todo tensor de tipo (p, q) sobre W com p = q pode ser reduzido a um escalar através de sucessivas contrações.

Produto tensorial

Define-se produto tensorial entre dois tensores de tipo (p, q) e (p', q') sobre W como a aplicação que a cada elemento de $W^{p+p'} \times W^{q+q'}$ associa um elemento de $\mathbb{R}$. Indica-se esta operação através de

$$\begin{aligned} T(\vec{x}_1, \vec{x}_{p+p'}, u^1, \dots, u^{q+q'}) &= R(\vec{x}_1, \dots, \vec{x}_p, u^1, \dots, u^q) \times \\ &\times S(\vec{x}_{p+1}, \dots, \vec{x}_{p+p'}, u^{q+1}, \dots, u^{q+q'}) \end{aligned} \quad (2.35)$$

sendo de imediata verificação que o produto tensorial é um tensor de ordem

$(p + p', q + q')$ sobre W com componentes

$$T_{i_1 \dots i_{p+p'}}^{j_1 \dots j_{q+q'}} = R_{i_1 \dots i_p}^{j_1 \dots j_q} \cdot S_{i_{p+1} \dots i_{p+p'}}^{j_{q+1} \dots j_{q+q'}} \quad (2.36)$$

Levantamento e abaixamento de índices

- Considere-se agora o produto tensorial entre um tensor $(0, 2)$ sobre W e um tensor qualquer, por exemplo $(2, 3)$ sobre W , caracterizado pelas relações das suas componentes

$$S_{lm}^{rsijk} = G^{rs} T_{lm}^{ijk} \quad (2.37)$$

Se se efetuar uma contração com um índice do tensor $(0, 2)$ sobre W , obter-se-á

$$S_m^{rijk} = S_{sm}^{rsijk} = G^{rs} T_{sm}^{ijk} \quad (2.38)$$

Observa-se, assim, que o produto tensorial de um tensor $(0, 2)$ sobre W por um tensor (p, q) sobre W , seguido de uma contração, leva a um tensor $(p - 1, q + 1)$ sobre W de mesma ordem. Essa operação é denominada levantamento de índices.

Analogamente, o produto tensorial de um tensor $(2, 0)$ sobre W por um tensor (p, q) sobre W , seguido de uma contração, leva a um tensor $(p + 1, q - 1)$ sobre W de mesma ordem. Essa operação é denominada abaixamento de índices e, no caso de um tensor $(2, 3)$ sobre W , é caracterizada pelas seguintes relações das suas componentes

$$R_{rlm}^{jk} = G_{rs} T_{lm}^{sjk} \quad (2.39)$$

Lei do quociente de tensores

Considere-se que as componentes de um tensor sejam dadas pela combinação linear das componentes de um outro tensor. Nestas condições, os coeficientes dessa combinação constituem as componentes de um tensor de tipo indicado pelo ajustamento dos índices superiores e inferiores. Por exemplo, para

$$R^{ij} = C(i, j, k, \ell) T_{k\ell} \quad (i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, n) \quad (2.40)$$

tem-se:

$$C(i, j, k, \ell) = C^{ijk\ell} \quad (2.41)$$

A propriedade acima indicada é mencionada como lei do quociente de tensores e será demonstrada para (2.40), sem perda de generalidade. Como (2.40) é válida para qualquer base, pode-se escrever

$$R^{*\alpha\beta} = C^*(\alpha, \beta, \gamma, \delta) T_{\gamma\delta}^* \quad (2.42)$$

ou, em virtude de (2.26),

$$\bar{m}_i^\alpha \bar{m}_j^\beta R^{ij} = C^*(\alpha, \beta, \gamma, \delta) m_\gamma^k m_\delta^\ell T_{k\ell} \quad (2.43)$$

ou

$$R^{ij} = m_\alpha^i m_\beta^j m_\gamma^k m_\delta^\ell C^*(\alpha, \beta, \gamma, \delta) T_{k\ell} \quad (2.44)$$

Comparando-se (2.40) e (2.44), após algumas transformações simples, obtêm-se:

$$C^*(\alpha, \beta, \gamma, \delta) = \bar{m}_i^\alpha \bar{m}_j^\beta \bar{m}_k^\gamma \bar{m}_\ell^\delta C(i, j, k, \ell) \quad (2.45)$$

expressão que permite, em virtude da definição clássica de tensores, concluir que $C(i, j, k, \ell)$ é um tensor de tipo (0, 4).

2.4. Tensores sobre Espaços Vetoriais Euclidianos

2.4.1. Espaço Dual de um Espaço Vetorial Euclidiano

Seja W um espaço vetorial euclidiano de dimensão finita n . Demonstra-se facilmente (22) que a forma linear f em W pode ser expressa por

$$f(\vec{x}) = \langle f, \vec{x} \rangle = (\vec{y} \circ \vec{x}) \quad (2.46)$$

onde $\vec{y}$ é um vetor único pertencente a W e determinado por f . Reciprocamente, cada vetor $\vec{y} \in W$ determina uma única forma linear f que verifica (2.46). Conclui-se, pois, que qualquer que seja o vetor $f \in \bar{W}$ ele pode ser substituído pelo vetor $\vec{y} \in W$.

Em virtude de o estudo simultâneo de um espaço vetorial W e seu dual $\bar{W}$ envolver apenas as operações vetoriais usuais e a operação $\langle f, \vec{x} \rangle$, é possível, no caso de $\bar{W}$ ser euclidiano, substituir f por $\vec{y}$, $\bar{W}$ por W e $\langle f, \vec{x} \rangle$ por $(\vec{y} \circ \vec{x})$.

2.4.2. Componentes Contravariantes e Covariantes de um Vetor. Tensores Métricos Fundamentais

Seja $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}^n)$ uma base de W e $\bar{B} = (e^1, \dots, e^n)$ sua base dual. Se W é euclidiano, pode-se associar a e^i os vetores $\vec{e}^i$, de W , e, nestas

condições, os vetores covariantes $\vec{e}_i$ podem ser substituídos pelos vetores contravariantes $\vec{e}^j$. As bases $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ e $\bar{B} = (\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n)$ são chamadas, respectivamente de bases covariante e contravariante de W .

Considere-se agora um vetor $\vec{x} \in W$. Ele pode ser representado em termos de vetores da base covariante $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ através de

$$\vec{x} = x^i \vec{e}_i \quad (2.47)$$

ou, em termos dos vetores da base contravariante $\bar{B} = (\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n)$, através de

$$\vec{x} = x_j \vec{e}^j \quad (2.48)$$

onde x^i e x_j são, respectivamente, as componentes contravariantes relativas à base covariante e as componentes covariantes relativas à base contravariante.

Trata-se, a seguir, do estabelecimento de algumas relações importantes entre as componentes contravariantes e covariantes de um vetor $\vec{x}$ de W e entre os vetores covariantes e contravariantes das bases duais B e $\bar{B}$.

Em virtude de (2.6), (2.46) e (2.48), decorre que

$$x^i = e^{ij} x_j \quad (2.49)$$

e, em virtude de (2.8), (2.46) e (2.47), decorre que

$$x_j = e_{ji} x^i \quad (2.50)$$

com

$$e^{ij} = e^{ji} = (\vec{e}^i \circ \vec{e}^j) \quad e_{ij} = e_{ji} = (\vec{e}_i \circ \vec{e}_j) \quad (2.51)$$

É de imediata comprovação que x^i , x_j , e^{ij} , e_{ij} são as componentes de tensores de tipo $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(0, 2)$ e $(2, 0)$, respectivamente, sobre W . Os tensores e^{ij} e e_{ij} , por motivos que mais adiante se revelam, são chamados de tensores métricos fundamentais.

A inspeção simples das expressões (2.47), (2.48), (2.49) e (2.50) conduz às relações

$$\vec{e}^j = e^{ji} \vec{e}_i \quad \vec{e}_i = e_{ij} \vec{e}^j \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.52)$$

entre vetores das bases covariantes e contravariantes, que são transformações lineares em W , definidas respectivamente pelos tensores e^{ji} e e_{ij} .

Estes tensores, em virtude de (2.3) e (2.52), se relacionam através de

$$e^{ik} e_{kj} = \delta_j^i \quad (2.53)$$

2.4.3. Sistemas de Coordenadas

Seja E um espaço afim associado ao espaço vetorial W de dimensão finita n e considerem-se dois pontos $X, O \in E$ e uma base $B = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ de W . Pode-se, pois, escrever

$$X = O + x^i \vec{a}_i \quad \text{ou} \quad X - O = x^i \vec{a}_i \quad (2.54)$$

Assim fixados um ponto O de E e uma base de W , todo ponto $X \in E$ fica univocamente determinado, através de (2.54), pela ênupla $(x^1, \dots, x^n)$ de escalares, que se chamam coordenadas retilíneas contravariantes do ponto X . A seqüência $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$, formada por um ponto de E e uma base de W , é chamada de referencial ou sistema de referência no espaço E .

Definido um sistema de referência $(O, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ no espaço E , chama-se sistema de coordenadas a correspondência que associa a cada ponto $X \in E$ a ênupla $(x^1, \dots, x^n) \in \mathbb{R}^n$ que verifica (2.54).

Considerem-se agora as transformações

$$x^i = x^i(\theta^1, \dots, \theta^n) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.55)$$

de classe C^2 , e admita-se que as mesmas sejam inversíveis, isto é,

$$\theta^j = \theta^j(x^1, \dots, x^n) \quad (j = 1, 2, \dots, n) \quad (2.56)$$

A condição analítica para que se verifique a inversão é que

$$J = \det \left| \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \right| \quad J' = \det \left| \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i} \right| \quad (2.57)$$

não se anulem nos domínios de variação de θ^j e x^i , respectivamente. Em vista de (2.54) e (2.55), pode-se, pois, escrever

$$X = O + x^i(\theta^1, \dots, \theta^n) \vec{a}_i \quad (2.58)$$

No caso mais geral de as relações (2.55) não serem lineares, as variáveis θ^i são chamadas coordenadas curvilíneas contravariantes do ponto X , e a correspondência biunívoca estabelecida, que associa a cada ponto $X \in E$ a ênu-

pla $(\theta^1, \dots, \theta^n) \in \mathbb{R}^n$ que verifica (2.58), define um sistema de coordenadas curvilíneas.

A curva obtida quando se faz variar apenas uma variável θ^k chama-se curva coordenada. Se se observar que

$$\frac{\partial(X - 0)}{\partial \theta^k} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^k} \vec{a}_i = \vec{e}_k \quad (2.59)$$

$\vec{e}$ o vetor tangente à curva coordenada de variável θ^k , tem-se, em cada ponto $X \in E$, n vetores $\vec{e}_i$ linearmente independentes, tangentes às curvas coordenadas que definem uma base em W , chamada natural, e um sistema de referência $(X, \vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ chamado sistema de referência natural.

No caso de as relações (2.55) serem lineares, observa-se facilmente que as curvas coordenadas se transformam em retas, o que justifica chamar x^i de coordenadas retilíneas; as bases naturais são as mesmas em todos os pontos.

No caso de espaços vetoriais euclidianos, a base dual $\vec{B} = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ de $B = (\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ pode ser considerada base de W , e, nestas condições, pode-se estabelecer

$$X = 0 + x_i \vec{a}^i, \quad (2.60)$$

que permite definir coordenadas retilíneas e curvilíneas covariantes do ponto X , bem como sistemas de referência no espaço E e sistemas de coordenadas a partir da base contravariante $\vec{B} = (\vec{a}^1, \dots, \vec{a}^n)$.

2.5. Elementos de Análise Tensorial

2.5.1. Definição de Aplicação Diferenciável

Seja $U \subset \mathbb{R}^m$ um conjunto aberto. Diz-se que a aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em um ponto $\underline{x} = (x^1, \dots, x^m) \in U$ quando existe, na vizinhança de $\underline{x}$, uma "boa aproximação linear" para f . Mais precisamente, deve existir uma transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que

$$f(\underline{x} + \underline{h}) = f(\underline{x}) + T_{\underline{x}}(\underline{h}) + R(\underline{h}) \quad (2.61)$$

onde

$$\lim_{\underline{h} \rightarrow 0} \frac{R(\underline{h})}{|\underline{h}|} = 0 \quad (2.62)$$

Nas expressões acima, $\underline{h}$ deve ser tomado suficientemente pequeno para que $\underline{x} + \underline{h} \in U$ e, portanto, $f(\underline{x} + \underline{h})$ tenha sentido. De (2.61) e (2.62), é possível interpretar $R(\underline{h}) \in \mathbb{R}^n$ como "resto", e a diferenciabilidade de f no ponto $\underline{x}$ diz que este resto é um "infinitésimo de ordem superior a $\underline{h}$ ", isto é, $R(\underline{h})/|\underline{h}|$ tende a zero quando $\underline{h}$ tende para zero.

Pode-se demonstrar que a transformação linear $T : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$, que dá a boa aproximação para f perto de $\underline{x}$, é única. Ela é chamada diferencial de f no ponto $\underline{x}$, e indicada por $df(\underline{x})$.

É possível também estabelecer que, se f é diferenciável no ponto $\underline{x}$, então ela é contínua em $\underline{x}$.

Diz-se que a aplicação $f : U \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$ é diferenciável em U quando ela é diferenciável em todos os pontos $\underline{x} \in U$.

Seja $\underline{a}_j$ o j -ésimo vetor da base canônica do $\mathbb{R}^m$. Então

$$df(\underline{x}) \cdot \underline{a}_j = T(\underline{a}_j) = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{f(\underline{x} + t \underline{a}_j) - f(\underline{x})}{t} \in \mathbb{R}^n \quad (2.63)$$

O limite acima é usualmente chamado de j -ésima derivada parcial de f no ponto $\underline{x}$, e indica-se por $\partial f / \partial x^j (\underline{x})$. A partir de (2.63), chega-se à seguinte expressão da diferencial de f no ponto $\underline{x}$:

$$df(\underline{x}) = \frac{\partial f}{\partial x^j}(\underline{x}) dx^j \quad (j = 1, 2, \dots, m) \quad (2.64)$$

As definições e conceitos apresentados neste item encontram-se, com detalhes, em (32).

2.5.2. Diferencial em Campo Vetorial

Seja E um espaço afim associado ao espaço vetorial euclidiano W , de dimensão n .

Define-se campo vetorial como a aplicação que a cada elemento $X \in E' \subset E$ associa um único elemento $\vec{v}(X) \in W$. No que se segue, admite-se que os campos vetoriais sejam diferenciáveis.

Seja $(0, \vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n)$ um sistema de referência no espaço E . Consideran-

do-se que

$$X = 0 + x^i(\theta^1, \dots, \theta^n) \vec{a}_i \quad (i = 1, \dots, n) \quad (2.65)$$

então o campo vetorial $\vec{v}$ é caracterizado por uma das expressões

$$\vec{v}(X) = \vec{v}(\underline{x}) = v^j(x^1, \dots, x^n) \vec{a}_j \quad (j = 1, \dots, n) \quad (2.66)$$

$$\vec{v}(X) = \vec{v}(\underline{\theta}) = v^j(\theta^1, \dots, \theta^n) \vec{e}_j(\theta^1, \dots, \theta^n) \quad (2.67)$$

$$\vec{v}(X) = \vec{v}(\underline{\theta}) = v_j(\theta^1, \dots, \theta^n) \vec{e}^j(\theta^1, \dots, \theta^n) \quad (2.68)$$

com

$$\vec{e}_j = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^j} \vec{a}_i \quad \vec{e}^j = \frac{\partial \theta^j}{\partial x^i} \vec{a}_i \quad (i, j = 1, \dots, n) \quad (2.69)$$

Considere-se inicialmente o campo vetorial caracterizado por (2.66). Como ele é diferenciável, pode-se escrever:

$$\vec{v}(\underline{x} + \underline{h}) = v^i(\underline{x} + \underline{h}) \vec{a}_i = (v^i(\underline{x}) + \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(\underline{x}) dx^j \cdot \underline{h} + R^i(\underline{h})) \vec{a}_i \quad (2.70)$$

e, portanto, o acréscimo de $\vec{v}$ entre $\underline{x} + \underline{h}$ e $\underline{x}$ é dado por

$$\Delta \vec{v}(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \left(\frac{\partial v^i}{\partial x^j}(\underline{x}) dx^j \cdot \underline{h} + R^i(\underline{h}) \right) \vec{a}_i \quad (2.71)$$

com a seguinte parte linear

$$d\vec{v}(\underline{x}) \cdot \underline{h} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j}(\underline{x}) dx^j \cdot \underline{h} \vec{a}_i \quad (2.72)$$

Assim, a expressão da diferencial de $\vec{v}$, caracterizado por (2.66), em $\underline{x}$, é dada por

$$d\vec{v} = \frac{\partial v^i}{\partial x^j} dx^j \vec{a}_i \quad (2.73)$$

Trata-se agora de estabelecer as diferenciais dos campos vetoriais $\vec{e}_k$ e $\vec{e}^p$.

Como o campo vetorial $\vec{e}_k$ é a aplicação

$$\vec{e}_k : (\theta^1, \dots, \theta^n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \vec{e}_k(\underline{\theta}) = \vec{e}_k(\theta^1, \dots, \theta^n) \text{ tal que}$$

$$\vec{e}_k = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^k} \vec{a}_i \quad \vec{a}_i = \frac{\partial \theta^l}{\partial x^i} \vec{e}_l \quad (2.74)$$

então a diferencial de $\vec{e}_k$ em θ , de acordo com (2.73), é dada por

$$d \vec{e}_k = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \theta^j \partial \theta^k} d\theta^j \vec{a}_i = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \frac{\partial \theta^\ell}{\partial x^i} d\theta^j \vec{e}_\ell \quad (2.75)$$

É conveniente colocar (2.75) na seguinte forma:

$$d \vec{e}_k = \Gamma_{jk}^\ell d\theta^j \vec{e}_\ell \quad (2.76)$$

com

$$\Gamma_{jk}^\ell = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \frac{\partial \theta^\ell}{\partial x^i} \quad (2.77)$$

que se define como símbolo de Christoffell de 2a. espécie.

O campo vetorial $\vec{e}^p$ é a aplicação

$$\vec{e}^p : (\theta^1, \dots, \theta^n) \in \mathbb{R}^n \rightarrow \vec{e}^p(\theta) = \vec{e}^p(\theta^1, \dots, \theta^n) \text{ tal que}$$

$$(\vec{e}^p \circ \vec{e}_k) = \delta_k^p \quad (2.78)$$

Diferenciando (2.78), obtêm-se

$$(d \vec{e}^p \circ \vec{e}_k) + (\vec{e}^p \circ d \vec{e}_k) = 0 \quad (2.79)$$

e, após algumas transformações simples, chega-se à expressão da diferencial de $\vec{e}^p$ em θ

$$d \vec{e}^p = - \Gamma_{jq}^p d\theta^j \vec{e}^q \quad (2.80)$$

Considere-se agora o campo vetorial caracterizado por (2.67). A diferencial de $\vec{v}$ em θ é dada por

$$d\vec{v} = d(v^k \vec{e}_k) = d v^k \vec{e}_k + v^k d \vec{e}_k \quad (2.81)$$

que, em vista de (2.73) e (2.76), permite estabelecer

$$d\vec{v} = \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial \theta^j} + v^k \Gamma_{jk}^\ell \right) d\theta^j \vec{e}_\ell \quad (2.82)$$

Com a finalidade de ressaltar o fato de que a transformação linear está associada à base natural em X , indica-se a diferencial de $\vec{v}$, caracterizada por (2.67), em θ , por

$$D\vec{v} = \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial \theta^j} + v^k \Gamma_{jk}^\ell \right) d\theta^j \vec{e}_\ell \quad (2.83)$$

e é denominada diferencial absoluta de $\vec{v}$ em $\underline{\theta}$. Pelos mesmos motivos, chama-se

$$D v^\ell = \left(\frac{\partial v^\ell}{\partial \theta^j} + v^k \Gamma_{jk}^\ell \right) d \theta^j \quad (2.84)$$

diferencial absoluta de v^ℓ em $\underline{\theta}$.

A expressão (2.84) pode ainda ser colocada na forma

$$D v^\ell = v_{;j}^\ell d \theta^j \quad (2.85)$$

com

$$v_{;j}^\ell = \frac{\partial v^\ell}{\partial \theta^j} + v^k \Gamma_{jk}^\ell \quad (2.86)$$

que se denomina derivada covariante de v^ℓ em θ . Esse nome se justifica pelo fato de v^ℓ ser um tensor de tipo (1, 1) com um índice covariante a mais em relação ao tensor de tipo (0, 1) que lhe deu origem.

Considere-se, finalmente, o campo vetorial caracterizado por (2.68). A diferencial de $\vec{v}$ em $\underline{\theta}$ é dada então por

$$d \vec{v} = d(v_p \vec{e}^p) = dv_p \vec{e}^p + v_p d \vec{e}^p \quad (2.87)$$

ou, em virtude de (2.73) e (2.80), por

$$d \vec{v} = \left(\frac{\partial v_q}{\partial \theta^j} - v_p \Gamma_{jq}^p \right) d \theta^j \vec{e}^q \quad (2.88)$$

é, portanto, pelas mesmas razões anteriores, se denominam

$$D \vec{v} = \left(\frac{\partial v_q}{\partial \theta^j} - v_p \Gamma_{jq}^p \right) d \theta^j \vec{e}^q \quad (2.89)$$

diferencial absoluta de $\vec{v}$ em $\underline{\theta}$,

$$D v_q = \left(\frac{\partial v_q}{\partial \theta^j} - v_p \Gamma_{jq}^p \right) d \theta^j \quad (2.90)$$

diferencial absoluta de v_q em $\underline{\theta}$, e

$$v_{q;j} = \frac{\partial v_q}{\partial \theta^j} - v_p \Gamma_{jq}^p \quad (2.91)$$

que é um tensor de tipo (2,0), derivada covariante do tensor v_q de tipo (1,0).

2.5.3. Símbolos de Christoffell

O símbolo de Christoffell de 2a. espécie é caracterizado pela expressão

$$\Gamma_{jk}^{\ell} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \frac{\partial \theta^{\ell}}{\partial x^i} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (2.92)$$

que permite imediatamente constatar a sua simetria em relação aos índices inferiores, ou seja

$$\Gamma_{jk}^{\ell} = \Gamma_{kj}^{\ell} \quad (2.93)$$

Para a determinação da família de números reais Γ_{jk}^{ℓ} , é necessária a utilização das expressões das transformações $\theta^i = \theta^i(x^1, \dots, x^n)$ e $x^j = x^j(\theta^1, \dots, \theta^n)$, o que é razoavelmente incômodo. Para diminuir tal inconveniente, introduz-se o símbolo de Christoffell de 1a. espécie, dado por:

$$\Gamma_{jmk} = e_{m\ell} \Gamma_{jk}^{\ell} = \frac{\partial x^i}{\partial \theta^m} \frac{\partial^2 x^i}{\partial \theta^j \partial \theta^k} \quad (i, j, k, m = 1, \dots, n) \quad (2.94)$$

caracterizado exclusivamente pela transformação $x^i = x^i(\theta^1, \dots, \theta^n)$.

Em virtude de (2.53), pode-se estabelecer

$$\Gamma_{jk}^{\ell} = e^{\ell m} \Gamma_{jmk} \quad (\ell, j, k, m = 1, \dots, n) \quad (2.95)$$

o que permite determinar os símbolos de Christoffell de 2a. espécie a partir dos de 1a. espécie.

Por outro lado, é imediato constatar que

$$\Gamma_{jmk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial e_{jm}}{\partial \theta^k} + \frac{\partial e_{km}}{\partial \theta^j} - \frac{\partial e_{jk}}{\partial \theta^m} \right) \quad (2.96)$$

o que permite concluir que os símbolos de Christoffell de 1a. e 2a. espécie podem ser determinados diretamente a partir dos tensores métricos fundamentais definidos no sistema de coordenadas curvilíneas $(\theta^1, \dots, \theta^n)$.

Chama-se a atenção para o fato de os símbolos de Christoffell não serem tensores, o que justifica que as famílias de números reais Γ_{jk}^{ℓ} e Γ_{jmk} sejam denominadas símbolos.

2.5.4. Diferencial em Campo Tensorial

Seja E um espaço afim associado ao espaço vetorial euclidiano W , de dimensão n .

Define-se campo tensorial, ou campo de tensores de tipo (p, q) sobre W , como a aplicação que a cada ponto $X \in E' \subset E$ associa um único elemento de $\mathcal{L}(W^p \times W^q; \mathbb{R})$.

Com a finalidade de esclarecer fisicamente esta definição, considere-se um corpo, ocupando uma região E' do espaço físico E , submetido a ações externas. Como a cada ponto do corpo estão associados um estado de tensão e um estado de deformação, caracterizados, respectivamente, por tensores de tipo $(0, 2)$ e $(2, 0)$ sobre $\mathbb{R}^3$, ficam então definidos em $E' \subset E$ os campos tensoriais de tensão e de deformação.

Considera-se no que se segue que os campos tensoriais sejam diferenciáveis, e trata-se de estabelecer a expressão da diferencial das componentes de um tensor de tipo (p, q) sobre W . Para clareza do texto, desenvolve-se o caso de $(p, q) = (2, 1)$; como o procedimento é geral, é imediato estender as conclusões para o caso geral.

Seja $B = (\vec{e}_1, \dots, \vec{e}_n)$ a base natural de W em X , e $\bar{B} = (\vec{e}^1, \dots, \vec{e}^n)$, a base dual. As componentes do tensor de tipo $(2, 1)$ serão dadas por

$$T_{ij}^k(\theta^1, \dots, \theta^n) = T_{ij}^k(\underline{\theta}) = T(\vec{e}_i, \vec{e}_j, \vec{e}^k) \quad (2.97)$$

Considere-se agora um ponto X^* na vizinhança de X , e seja $B^* = (\vec{e}_1^*, \dots, \vec{e}_n^*)$ a base natural de W em X^* e $\bar{B}^* = (\vec{e}^{*1}, \dots, \vec{e}^{*n})$, a base dual. As componentes do tensor de tipo $(2, 1)$ sobre W em X^* serão dadas por

$$T_{\alpha\beta}^{*\gamma}(\theta^{*1}, \dots, \theta^{*n}) = T_{\alpha\beta}^{*\gamma}(\underline{\theta}^*) = T^*(\vec{e}_\alpha^*, \vec{e}_\beta^*, \vec{e}^{*\gamma}) \quad (2.98)$$

Na obtenção do acréscimo ΔT_{ij}^k entre $T_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ e T_{ij}^k , deve-se observar que as componentes dos tensores se referem às bases naturais em X e X^* , que são diferentes no caso de coordenadas curvilíneas. Assim, o acréscimo ΔT_{ij}^k deve ser estabelecido levando em consideração o efeito da mudança de base e o acréscimo propriamente dito.

Fixando-se o cálculo do acréscimo ΔT_{ij}^k no ponto X , a primeira etapa consiste em obter as componentes de $T_{\alpha\beta}^{*\gamma}$ na base B , através de

$$T_{ij}^{*k}(\theta^*) = \bar{m}_i^\alpha \bar{m}_j^\beta m_\gamma^k T_{\alpha\beta}^{*\gamma}(\theta^*) \quad (2.99)$$

onde m e $\bar{m}$ são as matrizes de mudança de base de B para B^* e de B^* para B , respectivamente.

A determinação das matrizes de mudança de base $\bar{e}$ é imediata, pois, considerando-se que os campos vetoriais $\vec{e}_i$ e $\vec{e}^j$ em E' sejam diferenciáveis e que a finalidade dessa determinação é o estudo da diferencial das componentes de um tensor, pode-se desprezar termos dos acréscimos de $\vec{e}_i$ e $\vec{e}^j$ que não sejam lineares, e escrever

$$\begin{aligned} \vec{e}_\alpha^* &= \vec{e}_\alpha + d \vec{e}_\alpha = (\delta_\alpha^i + \Gamma_{\alpha\ell}^i d\theta^\ell) \vec{e}_i \\ \vec{e}^{*\gamma} &= \vec{e}^\gamma + d \vec{e}^\gamma = (\delta_j^\gamma - \Gamma_{j\ell}^\gamma d\theta^\ell) \vec{e}^j \end{aligned} \quad (2.100)$$

e, em virtude de (2.23), estabelecer as expressões das matrizes de mudança de base

$$\begin{aligned} m_\alpha^i &= \delta_\alpha^i + \Gamma_{\alpha\ell}^i d\theta^\ell \\ \bar{m}_j^\gamma &= \delta_j^\gamma - \Gamma_{j\ell}^\gamma d\theta^\ell \end{aligned} \quad (2.101)$$

O acréscimo propriamente dito, $\Delta T_{\alpha\beta}^{*\gamma}(\theta)$, entre os pontos $\theta + h$ e θ , é caracterizado pela expressão

$$T_{\alpha\beta}^{*\gamma}(\theta + h) = T_{\alpha\beta}^{*\gamma}(\theta) + \frac{\partial T_{\alpha\beta}^{*\gamma}}{\partial \theta^m} d\theta^m \cdot h + R_{\alpha\beta}^{*\gamma} \quad (2.102)$$

Considerando-se, pois, as expressões (2.99) e (2.102), pode-se estabelecer a expressão do acréscimo ΔT_{ij}^k no ponto X

$$\begin{aligned} \Delta T_{ij}^k &= T_{ij}^{*k}(\theta + h) - T_{ij}^k(\theta) = \\ &= \bar{m}_i^\alpha \bar{m}_j^\beta m_\gamma^k (T_{\alpha\beta}^{*\gamma} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}^{*\gamma}}{\partial \theta^\ell} d\theta^\ell \cdot h + R_{\alpha\beta}^{*\gamma}) - T_{ij}^k(\theta) \end{aligned} \quad (2.103)$$

ou, em virtude de (2.101),

$$\begin{aligned} \Delta T_{ij}^k &= (\delta_i^\alpha - \Gamma_{is}^\alpha d\theta^s) (\delta_j^\beta - \Gamma_{jr}^\beta d\theta^r) (\delta_\gamma^k + \Gamma_{\gamma t}^k d\theta^t) \cdot \\ &\cdot (T_{\alpha\beta}^{*\gamma} + \frac{\partial T_{\alpha\beta}^{*\gamma}}{\partial \theta^\ell} d\theta^\ell \cdot h + R_{\alpha\beta}^{*\gamma}) - T_{ij}^k(\theta) \end{aligned} \quad (2.104)$$

A diferencial das componentes T_{ij}^k do tensor de tipo (2, 1) sobre W é a parte linear do acréscimo ΔT_{ij}^k , que, após algumas transformações, apresenta a seguinte expressão

$$d T_{ij}^k = \left(\frac{\partial T_{ij}^k}{\partial \theta^\ell} - \Gamma_{li}^\alpha T_{\alpha j}^k - \Gamma_{lj}^\beta T_{i\beta}^k + \Gamma_{l\gamma}^k T_{ij}^\gamma \right) d \theta^\ell \quad (2.105)$$

Com a finalidade de ressaltar que a diferencial das componentes T_{ij}^k está associada à base natural em X , ela é indicada por:

$$D T_{ij}^k = \left(\frac{\partial T_{ij}^k}{\partial \theta^\ell} - \Gamma_{li}^\alpha T_{\alpha j}^k - \Gamma_{lj}^\beta T_{i\beta}^k + \Gamma_{l\gamma}^k T_{ij}^\gamma \right) d \theta^\ell \quad (2.106)$$

e se define como diferencial absoluta de T_{ij}^k em θ .

A expressão (2.106) pode ser colocada na forma

$$D T_{ij}^k = T_{ij;l}^k d \theta^\ell \quad (2.107)$$

com

$$T_{ij;l}^k = \frac{\partial T_{ij}^k}{\partial \theta^\ell} - \Gamma_{li}^\alpha T_{\alpha j}^k - \Gamma_{lj}^\beta T_{i\beta}^k + \Gamma_{l\gamma}^k T_{ij}^\gamma \quad (2.108)$$

que se define como derivada covariante de T_{ij}^k em θ , visto que, pela lei do quociente de tensores, $T_{ij;l}^k$ é um tensor de tipo (3, 1), com um índice covariante a mais em relação ao tensor que lhe deu origem, T_{ij}^k .

Uma simples inspeção visual de (2.108) mostra claramente as regras que devem ser seguidas para o estabelecimento da derivada covariante de T_{ij}^k em θ . Essas regras são generalizáveis para um tensor de qualquer tipo.

2.5.5. Alguns Teoremas Fundamentais da Análise Tensorial

Apresentam-se a seguir alguns teoremas fundamentais, com o objeto de estabelecer certas propriedades básicas para a aplicação do cálculo tensorial.

Teorema 1

Se em um sistema de coordenadas curvilíneas é válida uma relação tensorial envolvendo derivadas absolutas e covariantes das componentes de tensores, então esta relação é válida em qualquer sistema de coordenadas curvilíneas.

Demonstração:

A demonstração será feita para um caso particular, mas sem perda de generalidade. Seja, pois, válida a relação tensorial:

$$\frac{DA_j^i}{Dt} = B_{j;k}^i C^k \quad (a)$$

em determinado sistema de coordenadas curvilíneas θ^i .

Considere-se agora um novo sistema de coordenadas curvilíneas θ^{*i} genérico. Como DA_j^i/Dt , $B_{j;k}^i$ e C^k são componentes de tensores, pode-se escrever:

$$\frac{DA_s^{*r}}{Dt} = \bar{m}_i^r m_s^j \frac{DA_j^i}{Dt} \quad (b)$$

$$B_{s;p}^{*r} = \bar{m}_i^r m_s^j m_p^k B_{j;k}^i$$

$$C^{*p} = \bar{m}_k^p C^k$$

Multiplicando-se os membros de (a) por $\bar{m}_i^r m_s^j$, vem

$$\bar{m}_i^r m_s^j \frac{DA_j^i}{Dt} = \bar{m}_i^r m_s^j B_{j;k}^i C^k = \bar{m}_i^r m_s^j m_p^k B_{j;k}^i \bar{m}_k^p C^k \quad (c)$$

e, em virtude de (b),

$$\frac{DA_s^{*r}}{Dt} = B_{s;p}^{*r} C^{*p} \quad (d)$$

o que demonstra o teorema.

Teorema 2

Se em um sistema de coordenadas curvilíneas é válida uma relação tensorial envolvendo derivadas absolutas e covariantes de componentes de tensores, então esta relação é válida em um sistema retilíneo genérico envolvendo derivadas ordinárias e parciais, respectivamente.

Teorema 3

Se em um sistema de coordenadas retilíneas genérico é válida uma relação

tensorial envolvendo derivadas ordinárias e parciais, então esta relação é válida em um sistema curvilíneo genérico envolvendo derivadas absolutas e covariantes, respectivamente.

Considerando que em um sistema de coordenadas retilíneas genérico os tensores métricos fundamentais são iguais a constantes, e, nestas condições, em vista de (2.95) e (2.96), os símbolos de Christoffell são nulos, então a diferencial absoluta e a derivada covariante das componentes de um tensor coincidem, em um sistema de coordenadas retilíneas genérico, com a diferencial ordinária e a derivada parcial, respectivamente.

Com as considerações acima, e tendo em vista o Teorema 1, ficam demonstrados os Teoremas 2 e 3.

Uma primeira propriedade básica, que se justifica pelo Teorema 3, é a que garante serem as regras do cálculo diferencial ordinário para encontrar as derivadas de soma e produto de funções também aplicáveis para encontrar as diferenciais absolutas e as derivadas covariantes da soma e produto de tensores.

Uma outra propriedade, que se justifica imediatamente pelo Teorema 3, é que a derivada covariante do tensor métrico é nula, ou seja

$$e_{rs;t} = 0 \quad (2.109)$$

Essa propriedade é mencionada classicamente como lema de Ricci, e permite considerar, no desenvolvimento de expressões que envolvem diferenciais absolutas e derivadas covariantes, os tensores simétricos como constantes.

Ressalta-se finalmente, como propriedade básica, a possibilidade de se estabelecerem equações diferenciais, que caracterizam determinado fenômeno, em um sistema de coordenadas retilíneo genérico, e generalizá-las em seguida para um sistema de coordenadas curvilíneas qualquer. Tal possibilidade é extremamente conveniente e poderosa, como, por exemplo, no estudo da teoria da elasticidade em coordenadas curvilíneas considerando-se não-linearidade geométrica.

2.6. Produtos no $\mathbb{R}^3$

2.6.1. Produto Escalar

Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Define-se produto escalar entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como a aplicação que a cada par $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ associa $(\vec{x} \circ \vec{y}) \in \mathbb{R}$.

Seja $(\vec{a}_1, \vec{a}_2, \vec{a}_3)$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Então $\vec{x} = x^i \vec{a}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{a}_j$, e, portanto,

$$(\vec{x} \circ \vec{y}) = \delta_{ij} x^i y^j \quad (2.110)$$

Se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base natural covariante de $\mathbb{R}^3$, então $\vec{x} = x^i \vec{e}_i$, $\vec{y} = y^j \vec{e}_j$ e

$$(\vec{x} \circ \vec{y}) = e_{ij} x^i y^j \quad (2.111)$$

e se $(\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3)$ é uma base natural contravariante de $\mathbb{R}^3$, então $\vec{x} = x_i \vec{e}^i$, $\vec{y} = y_j \vec{e}^j$ e

$$(\vec{x} \circ \vec{y}) = e^{ij} x_i y_j \quad (2.112)$$

O módulo de $\vec{x} \in \mathbb{R}^3$ é dado por

$$x = + \sqrt{(\vec{x} \circ \vec{x})} \quad (2.113)$$

e, portanto,

$$x^2 = \delta_{ij} x^i x^j = e_{ij} x^i x^j = e^{ij} x_i x_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (2.114)$$

Lembrando-se que, em um sistema de coordenadas retilíneas,

$$(\vec{x} \circ \vec{y}) = x y \cos \alpha \quad (2.115)$$

onde α é o ângulo entre os vetores $\vec{x}$ e $\vec{y}$, observa-se que, pelo fato de $x y \cos \alpha$ ser um invariante, é possível calcular, em um sistema de coordenadas curvilíneas genérico, o ângulo α através de

$$\cos \alpha = \frac{(\vec{x} \circ \vec{y})}{xy} = \left(\frac{\vec{x}}{x} \circ \frac{\vec{y}}{y} \right) = (\vec{\lambda} \circ \vec{\mu}) = e_{ij} \lambda^i \mu^j = e^{ij} \lambda_i \mu_j \quad (2.116)$$

Se se considerarem dois pontos próximos P e Q de coordenadas $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ e $(\theta^1 + d\theta^1, \theta^2 + d\theta^2, \theta^3 + d\theta^3)$, então o quadrado da distância entre P e Q será dado por

$$ds^2 = (\vec{PQ} \circ \vec{PQ}) = (d\theta^i \vec{e}_i \circ d\theta^j \vec{e}_j) = e_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (2.117)$$

Observe-se que $d\theta^i/ds$ define a direção no espaço da tangente à curva

coordenada θ^i e, portanto,

$$ds_i^2 = (d\vec{s}_i \cdot d\vec{s}_i) = (d\theta^i \vec{e}_i \cdot d\theta^i \vec{e}_i) = e_{ii} d\theta^i d\theta^i \quad (2.118)$$

define o elemento de comprimento sobre a curva coordenada θ^i .

2.6.2. Os Tensores ϵ^{rst} e ϵ_{rst}

Considerem-se os sistemas e^{rst} e e_{rst} , que tomam os seguintes valores

$$\begin{aligned} e^{rst} &= e_{rst} = 0 && \text{se pelo menos dois \u00edndices forem iguais} \\ e^{rst} &= e_{rst} = 1 && \text{se } r, s, t \text{ for permuta\u00e7\u00e3o par de } 1, 2, 3 \\ e^{rst} &= e_{rst} = -1 && \text{se } r, s, t \text{ for permuta\u00e7\u00e3o \u00edmpar de } 1, 2, 3 \end{aligned} \quad (2.119)$$

Esses sistemas s\u00e3o extremamente convenientes no estabelecimento de express\u00f5es compactas para o c\u00e1lculo de um determinante de uma matriz de ordem n .

Assim, para $e = |e_{mn}|$, pode-se escrever

$$e = \frac{1}{3!} e^{mnp} e^{rst} e_{rm} e_{sn} e_{tp} \quad (2.120)$$

Definem-se agora os tensores

$$\begin{aligned} \epsilon_{rst} &= \sqrt{e} e_{rst} \\ \epsilon^{rst} &= \frac{1}{\sqrt{e}} e^{rst} \end{aligned} \quad (2.121)$$

que apresentam interesse no desenvolvimento que se segue.

\u00c9 importante observar que, em virtude do Teorema 3,

$$\epsilon_{rst;m} = \epsilon^{rst}_{;m} = 0 \quad (2.122)$$

e, portanto, os tensores ϵ_{rst} e ϵ^{rst} , a exemplo dos tensores sim\u00e9tricos, podem ser tratados como constantes nas rela\u00e7\u00f5es tensoriais.

2.6.3. Produto Vetorial

Sejam $\vec{x}$ e $\vec{y}$ dois vetores de $\mathbb{R}^3$. Define-se produto vetorial entre $\vec{x}$ e $\vec{y}$ como a aplica\u00e7\u00e3o que a cada par $(\vec{x}, \vec{y}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ associa $\vec{x} \wedge \vec{y} \in \mathbb{R}^3$ tal que

$$z^r = \epsilon^{rnm} x_m y_n = x y \sin\theta v^r \quad (2.123)$$

onde z^r são as componentes contravariantes de $\vec{z} = \vec{x} \wedge \vec{y}$, e v^r são as componentes contravariantes do versor ortogonal a $\vec{x}$ e $\vec{y}$.

Para uma compreensão clara da expressão (2.123), é interessante a interpretação geométrica que se segue. Considere-se um sistema de coordenadas retilíneas tal que $\vec{x} = (x, 0, 0)$ e $\vec{y} = (y \cos \theta, y \sin \theta, 0)$, como mostra a Fig. 2-1.

Fig. 2-1 - Produto Vetorial

Como no sistema de coordenadas retilíneas $\sqrt{e} = 1$ e $\epsilon^{rmn} = e^{rmn}$, então

$$z^r = e^{rmn} x_m y_n = e^{r12} x y \operatorname{sen} \alpha$$

e, portanto, $\vec{z} = (0, 0, x y \operatorname{sen} \alpha)$. Observe-se que $z = xy \operatorname{sen} \alpha$ é um invariante, o que permitiria, a partir da definição mais comum de produto vetorial, concluir (2.123).

Apresentam interesse as relações

$$\begin{aligned} \vec{e}_r \wedge \vec{e}_s &= \epsilon_{rst} \vec{e}^t \\ \vec{e}^r \wedge \vec{e}^s &= \epsilon^{rst} \vec{e}_t \end{aligned} \quad (r, s, t = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2)$$

(2.124)

que são de fácil verificação.

Outra expressão que apresenta interesse é a da área de um elemento da superfície coordenada θ^i , que é obtida a partir de

$$dS_i = | d\theta^j \vec{e}_j \wedge d\theta^k \vec{e}_k | = | d\theta^j \vec{e}_j | | d\theta^k \vec{e}_k | \operatorname{sen} \alpha \quad (2.125)$$

(i, j, k = 1, 2, 3; 2, 3, 1; 3, 1, 2)

e que, após algumas transformações, toma a seguinte forma final

$$dS_i = \sqrt{e e^{ii}} d\theta^j d\theta^k = \sqrt{e_{jj} e_{kk} - e_{jk} e_{kj}} d\theta^j d\theta^k \quad (2.126)$$

2.6.4. Produto Misto

Sejam $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ vetores de $\mathbb{R}^3$. Define-se produto misto como a aplicação que a $(\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3$ associa $(\vec{x} \wedge \vec{y} \wedge \vec{z}) \in \mathbb{R}$.

Uma expressão, derivada da definição acima, que apresenta interesse, é a do volume de um elemento do espaço que é obtida a partir de

$$dV = (d\theta^1 \vec{e}_1 \wedge d\theta^2 \vec{e}_2 \wedge d\theta^3 \vec{e}_3) \quad (2.127)$$

e que, após algumas transformações simples, toma a forma

$$dV = \sqrt{e} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \quad (2.128)$$

2.7. Curvas em $\mathbb{R}^3$

2.7.1. Vetor Tangente à Curva

Uma curva é o lugar geométrico dos pontos do espaço cujas coordenadas são funções de um parâmetro simples.

Sejam $\theta^i = \theta^i(t)$ as coordenadas curvilíneas de um ponto de uma curva C . Assim, o elemento de comprimento da curva é dado por

$$ds^2 = e_{mn} d\theta^m d\theta^n \quad (2.129)$$

ou, dividindo-se por dt^2 ,

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = e_{mn} \frac{d\theta^m}{dt} \frac{d\theta^n}{dt} \quad (2.130)$$

e o comprimento da curva entre t_0 e t_1 pode ser obtido através de

$$s_1 - s_0 = \int_{t_0}^{t_1} \sqrt{e_{mn} \frac{d\theta^m}{dt} \frac{d\theta^n}{dt}} dt \quad (2.131)$$

Considerando-se o arco s como parâmetro, tem-se:

$$1 = e_{mn} \frac{d\theta^m}{ds} \frac{d\theta^n}{ds}$$

o que permite concluir que $\lambda^m = d\theta^m/ds$ são as componentes contravariantes do vetor $\vec{\lambda} = \lambda^m \vec{e}_m$ tangente à curva no ponto considerado.

2.7.2. Vetor Normal Principal e Curvatura

Qualquer vetor normal a $\vec{\lambda}$ é normal à curva C. Assim, a condição para que o vetor $\vec{\mu}$ seja normal à curva é que

$$(\vec{\lambda} \circ \vec{\mu}) = e_{mn} \lambda^m \mu^n = 0 \quad (2.133)$$

Por outro lado, considerando-se a derivada absoluta de (2.132), obtém-se

$$e_{mn} \lambda^m \frac{D\lambda^n}{Ds} = 0 \quad (2.134)$$

o que permite, por comparação com (2.133), estabelecer

$$\mu^n = \frac{1}{\chi} \frac{D\lambda^n}{Ds} \quad (2.135)$$

onde χ é tal que torna $\vec{\mu}$ um vetor unitário. O vetor $\vec{\mu} = \mu_n \vec{e}_n$ e χ são chamados de vetor normal principal e curvatura, respectivamente, no ponto considerado da curva C.

2.7.3. Vetor Binormal e Torção

Considere-se a derivada absoluta de (2.133)

$$e_{mn} \frac{D\lambda^m}{Ds} \mu^n + e_{mn} \lambda^m \frac{D\mu^n}{Ds} = 0 \quad (2.136)$$

que, em vista de (2.135) e após algumas transformações, toma a forma

$$e_{mn} \lambda^m \left(\chi \lambda^n + \frac{D\mu^n}{Ds} \right) = 0 \quad (2.137)$$

Nestas condições, o vetor de componentes $\chi \lambda^n + D\mu^n/Ds$ é ortogonal a $\vec{\lambda}$ e como

$$e_{mn} \mu^m \left(\chi \lambda^n + \frac{D\mu^n}{Ds} \right) = 0 \quad (2.138)$$

ele também é ortogonal a $\vec{\mu}$.

O vetor $\vec{v} = v^r \vec{e}_r$, com

$$v^r = \frac{1}{\tau} \left(\frac{D\mu^r}{Ds} + \epsilon_{\chi} \lambda^r \right) \quad (2.139)$$

é denominado vetor binormal à curva no ponto em questão, e a quantidade τ é denominada torção da curva no ponto com valor tal que

$$\epsilon_{\text{mnr}} \lambda^m \mu^n v^r = +1 \quad (2.140)$$

3. TEORIA DA ELASTICIDADE EM COORDENADAS CURVILÍNEAS COM LINEARIDADE FÍSICA E NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA (FORMULAÇÃO LAGRANGIANA). APLICAÇÃO AO CASO DOS ARCOS DE EIXO CIRCULAR

3.1. Estado Triplo de Deformação

Considere-se um corpo indeformado, ocupando uma região D_0 do espaço físico. Seja P_0 um ponto do corpo definido pelas coordenadas curvilíneas $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$ ou pelo vetor posição $\vec{r}_0 = \vec{r}_0(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$. Ao ponto P_0 está associada uma base natural covariante $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$ tal que

$$\vec{g}_i = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \theta^i} \quad (i = 1, 2, 3) \quad (3.1)$$

Seja agora um ponto Q_0 , na vizinhança de P , definido pelas coordenadas $(\theta^1 + d\theta^1, \theta^2 + d\theta^2, \theta^3 + d\theta^3)$ ou pelo vetor posição $\vec{r}_0 + d\vec{r}_0$.

Solicitado, o corpo se deformará, ocupando uma nova região D do espaço físico, e os pontos P_0 e Q_0 ocuparão novas posições, indicadas por P e Q , e definidas pelos vetores posição $\vec{r}_0 + \vec{u}$ e $\vec{r}_0 + d\vec{r}_0 + \vec{u} + d\vec{u}$, respectivamente. Ao ponto P fica então associada a base natural covariante $(\vec{G}_1, \vec{G}_2, \vec{G}_3)$ com

$$\vec{G}_i = \frac{\partial \vec{r}}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \vec{r}_0}{\partial \theta^i} + \frac{\partial \vec{u}}{\partial \theta^i} \quad (3.2)$$

que, em virtude de (2.83), toma a forma

$$\vec{G}_i = (\delta_i^k + u_{;i}^k) \vec{g}_k \quad (3.3)$$

Fig. 3.1 - Geometria de um Elemento Diferencial

Considerando-se que o quadrado da distância entre os pontos P_0 e Q_0 , antes da deformação, e entre os pontos P e Q , após a deformação, é dado por:

$$ds_0^2 = g_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.4)$$

e

$$ds^2 = G_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.5)$$

então a diferença entre os quadrados dos comprimentos $\overline{P_0Q_0}$ e $\overline{PQ}$, que caracteriza a deformação do corpo, é dada por:

$$ds^2 - ds_0^2 = 2 F_{ij} d\theta^i d\theta^j \quad (3.6)$$

onde

$$F_{ij} = \frac{1}{2} (G_{ij} - g_{ij}) \quad (3.7)$$

Considerando-se (3.3), e após algumas transformações elementares, encontra-se:

$$F_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i;j}^l g_{il} + u_{i;i}^k g_{kj} + u_{i;i}^k u_{j;j}^l g_{kl}) \quad (3.8)$$

ou, em forma mais simples,

$$F_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i;j} + u_{j;i} + u_{i;i}^k u_{k;j}) \quad (3.9)$$

onde u_i e u^j são as componentes covariantes e contravariantes de $\vec{u}$, respec-

tivamente, na base $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$. É importante observar que, de (3.8), conclui-se imediatamente que $F_{ij} = F_{ji}$.

Em virtude da lei do quociente de tensores e da expressão (3.6), conclui-se que F_{ij} são as componentes de um tensor de tipo $(2, 0)$, o qual se denomina tensor das deformações de Green. Nestas condições, se se considerar uma transformação de coordenadas de θ^i para θ^{*i} tal que

$$\theta^{*i} = \theta^{*i}(\theta^1, \theta^2, \theta^3) \quad (3.10)$$

seja contínua em D_0 , e que apresente uma única inversa

$$\theta^i = \theta^i(\theta^{*1}, \theta^{*2}, \theta^{*3}) \quad , \quad (3.11)$$

estabelecer-se-á imediatamente, em vista do parágrafo 2.3.2,

$$F_{\alpha\beta}^* = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{*\alpha}} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^{*\beta}} F_{ij} \quad (3.12)$$

que é a expressão da lei de transformação entre as componentes dos tensores das deformações referidas a sistemas de coordenadas distintos.

3.2. Estado Triplo de Tensão

Considere-se um corpo no espaço e a interação do mesmo com o meio, caracterizada através de:

- a) forças de massa $\vec{X}$, especificadas por unidade de volume do corpo, na configuração inicial;
- b) forças de superfície $\vec{F}$, especificadas por unidade de área no contorno do corpo, na configuração inicial.

Admite-se, nas discussões que se seguem, que as componentes de $\vec{X}$ sejam de classe C^1 , e as componentes de $\vec{F}$ sejam contínuas na vizinhança de $(\theta^1, \theta^2, \theta^3)$.

Fig. 3.2 — Equilíbrio de um Tetraedro Infinitesimal

Considere-se agora o equilíbrio do tetraedro infinitesimal, na configuração deformada, solicitado pelas forças internas:

- $\vec{T}^1 dS_{01} = -\vec{T}^1 \sqrt{g^{11}} \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3/2$, agindo na face PRS,
- $\vec{T}^2 dS_{02} = -\vec{T}^2 \sqrt{g^{22}} \sqrt{g} d\theta^3 d\theta^1/2$, agindo na face PSQ,
- $\vec{T}^3 dS_{03} = -\vec{T}^3 \sqrt{g^{33}} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2/2$, agindo na face PQR,
- $\vec{T} dS_0$, agindo na face RSQ,

que caracterizam a ação do restante do corpo sobre o tetraedro. As equações de equilíbrio do tetraedro são dadas, então, por:

$$\vec{T} dS_0 = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left(\vec{T}^1 \sqrt{g^{11}} d\theta^3 d\theta^2 + \vec{T}^2 \sqrt{g^{22}} d\theta^3 d\theta^1 + \vec{T}^3 \sqrt{g^{33}} d\theta^1 d\theta^2 \right) \quad (3.13)$$

Levando-se em conta que

$$\vec{n}_0 dS_0 = \frac{1}{2} \vec{Q_0 R_0} \wedge \vec{R_0 S_0} = \frac{1}{2} \sqrt{g} \left(d\theta^1 d\theta^2 \vec{g}^3 + d\theta^2 d\theta^3 \vec{g}^1 + d\theta^3 d\theta^1 \vec{g}^2 \right), \quad (3.14)$$

onde $\vec{n}_0$ é a normal externa da face $Q_0 R_0 S_0$, obtêm-se:

$$(\vec{n}_0 \circ \vec{g}_i) dS_0 = \frac{1}{2} \sqrt{g} d\theta^j d\theta^k \quad (3.15)$$

$$(i = 1, 2, 3; j = 2, 3, 1; k = 3, 1, 2)$$

e a equação (3.13) pode ser posta na forma

$$\begin{aligned} \vec{\tau} &= \vec{\tau}^1 \sqrt{g^{11}} (\vec{n}_0 \circ \vec{g}_1) + \vec{\tau}^2 \sqrt{g^{22}} (\vec{n}_0 \circ \vec{g}_2) + \vec{\tau}^3 \sqrt{g^{33}} (\vec{n}_0 \circ \vec{g}_3) = \\ &= \vec{\tau}^i \sqrt{g^{ii}} (\vec{n}_0 \circ \vec{g}_i) \end{aligned} \quad (3.16)$$

$$(i = 1, 2, 3)$$

Como $\vec{\tau}$ é uma entidade física que independe do sistema de referência, pode-se escrever, para transformações definidas por (3.10) e (3.11),

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}^{*k} \sqrt{g^{*kk}} (\vec{n}_0 \circ \vec{g}_k^*) \quad (3.17)$$

Assim, considerando-se que

$$\vec{g}_k^* = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{*k}} \vec{g}_i, \quad (3.18)$$

obtem-se, após algumas transformações,

$$\vec{\tau}^i \sqrt{g^{ii}} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{*k}} \vec{\tau}^{*k} \sqrt{g^{*kk}}. \quad (3.19)$$

A expressão (3.19) evidencia a conveniência de introduzir

$$\vec{\sigma}^i = \vec{\tau}^i \sqrt{g^{ii}}, \quad (3.20)$$

visto que a $\vec{\sigma}^i$ aplicam-se as leis de transformação de um vetor contra-variante.

Definem-se agora as componentes de $\vec{\sigma}^i$ nas direções $\vec{G}_j$, através de

$$\vec{\sigma}^i = \sigma^{ij} \vec{G}_j \quad (3.21)$$

Nestas condições, estabelece-se imediatamente

$$\sigma^{ij} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \theta^{*k}} \frac{\partial \theta^j}{\partial \theta^{*l}} \sigma^{*kl}, \quad (3.22)$$

expressão que mostra serem as quantidades σ^{ij} as componentes de um tensor de tipo (0, 2), que estabelece a lei de transformação entre as componentes do tensor referidas a sistemas de coordenadas distintos e confirma a conveniência de se introduzir (3.20).

O tensor acima define o estado de tensão em um ponto e refere-se à configuração inicial. Tal formulação, matematicamente consistente e artificial de um ponto de vista físico, é necessária para que se possam estabelecer as relações tensões-deformações na configuração inicial. O tensor apresentado é chamado tensor das tensões de Kirchhoff e as suas componentes podem ser relacionadas com as componentes dos tensores das tensões de Lagrange e de Euler, conforme se mostra em (20) e (47).

3.3. Equações de Equilíbrio

Seja o elemento infinitesimal em forma paralelepédica, antes da deformação, limitado pelas seis superfícies $\theta^i = \text{cte}$ e $\theta^i + d\theta^i = \text{cte}$, e considere-se o equilíbrio estático do mesmo, desprezando-se termos de ordem superior, que requer sejam nulas as resultantes de força e momento.

Fig. 3.3 - Forças no Elemento Infinitesimal Paralelepédico

Observando-se a Fig. 3.3, pode-se escrever a equação de equilíbrio de forças:

$$\begin{aligned} & - \vec{\sigma}^1 \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 + (\vec{\sigma}^1 + D\vec{\sigma}^1) \sqrt{g} d\theta^2 d\theta^3 + \\ & - \vec{\sigma}^2 \sqrt{g} d\theta^3 d\theta^1 + (\vec{\sigma}^2 + D\vec{\sigma}^2) \sqrt{g} d\theta^3 d\theta^1 + \\ & - \vec{\sigma}^3 \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 + (\vec{\sigma}^3 + D\vec{\sigma}^3) \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 + \vec{X} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \vec{0}, \end{aligned} \quad (3.23)$$

ou, tendo em vista que

$$D\vec{\sigma}^i = D(\sigma^{ij} \vec{g}_j) = \left(\sigma^{ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k) \right)_{;i} d\theta^i \vec{g}_k, \quad (3.24)$$

estabelece-se a primeira expressão para a equação de equilíbrio, na forma vetorial,

$$\left(\sigma^{ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k) \right)_{;i} \vec{g}_k + \chi^k \vec{g}_k = \vec{0}, \quad (3.25)$$

ou, na forma escalar,

$$\left(\sigma^{ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k) \right)_{;i} + \chi^k = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.26)$$

Uma segunda expressão da equação de equilíbrio de forças decorre imediatamente do desenvolvimento do primeiro termo de (3.26) e é dada por

$$\frac{\partial}{\partial \theta^i} \left(\sigma^{ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k) \right) + \Gamma_{\alpha i}^k \left(\sigma^{ij} (\delta_j^\alpha + u_{;j}^\alpha) \right) + \chi^k = 0 \quad (3.27)$$

Considere-se agora o equilíbrio de momentos em relação ao ponto P_0 , caracterizado por:

$$\begin{aligned} & (0,5 \vec{g}_j d\theta^j + 0,5 \vec{g}_k d\theta^k) \wedge (-\vec{\sigma}^i \sqrt{g} d\theta^j d\theta^k) + \\ & + (0,5 \vec{g}_j d\theta^j + 0,5 \vec{g}_k d\theta^k + \vec{g}_i d\theta^i) \wedge \left((\vec{\sigma}^i + D\vec{\sigma}^i) (\sqrt{g} d\theta^j d\theta^k) \right) + \\ & + (0,5 \vec{g}_1 d\theta^1 + 0,5 \vec{g}_2 d\theta^2 + 0,5 \vec{g}_3 d\theta^3) \wedge \vec{X} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 = \vec{0} \\ & (i = 1, 2, 3); (j = 2, 3, 1); (k = 3, 1, 2) \end{aligned} \quad (3.28)$$

Desprezando-se os termos de ordem superior, obtêm-se, após alguns desenvolvimentos,

$$\sigma^{ij} e_{ijk} = 0 \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (3.29)$$

ou

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ji} \quad , \quad (3.30)$$

o que mostra ser o tensor das tensões de Kirchhoff simétrico.

Uma vez estabelecidas as equações de equilíbrio no interior do corpo, resta obter as equações de equilíbrio na fronteira do corpo, que resulta imediatamente de (3.16), (3.20) e (3.21), e é dada por

$$F^k = \sigma^{ij} n_i (\delta_j^k + u_{;j}^k) \quad , \quad (3.31)$$

onde n_i é a componente covariante de $\vec{n}_0$ na base $(\vec{g}_1, \vec{g}_2, \vec{g}_3)$.

3.4. Relações Tensões-Deformações

No desenvolvimento deste trabalho, serão considerados materiais elásticos. Trata-se pois, a seguir, de estabelecer as relações tensões-deformações.

Um material é dito elástico se possui um estado natural homogêneo (no qual as tensões e as deformações são nulas) e se em uma definida vizinhança deste estado existe uma relação biunívoca entre as componentes dos tensores das tensões e das deformações, expressa através de

$$\sigma^{ij} = \sigma^{ij}(F_{mn}) \quad , \quad (3.32)$$

ou, no caso de serem lineares estas relações,

$$\sigma^{ij} = A^{ijmn} F_{mn} \quad , \quad (3.33)$$

onde A^{ijmn} , em virtude da lei do quociente de tensores, são as componentes de um tensor de tipo (0, 4).

Em coordenadas retilíneas, as relações lineares entre tensões e deformações apresentam-se na forma

$$\tau^{kl} = C^{klpq} e_{pq} \quad (3.34)$$

onde $\tau^{k\ell}$, $C^{k\ell pq}$ e e_{pq} são as componentes dos tensores das tensões, elasticidade e das deformações, referidos a um certo sistema cartesiano retangular.

As importantes relações entre A^{ijmn} e $C^{k\ell pq}$ decorrem diretamente do efeito da mudança de base sobre as componentes do tensor elasticidade e são expressas por

$$C^{k\ell pq} = \frac{\partial x^k}{\partial \theta^i} \frac{\partial x^\ell}{\partial \theta^j} \frac{\partial x^p}{\partial \theta^m} \frac{\partial x^q}{\partial \theta^n} A^{ijmn} \quad (3.35)$$

$$A^{ijmn} = \frac{\partial \theta^i}{\partial x^k} \frac{\partial \theta^j}{\partial x^\ell} \frac{\partial \theta^m}{\partial x^p} \frac{\partial \theta^n}{\partial x^q} C^{k\ell pq} \quad (3.36)$$

Caso se leve em conta, adicionalmente, que para os materiais a serem considerados neste trabalho a deformação limite de elasticidade será de $5 \cdot 10^{-3}$ (no caso do aço, esse valor é da ordem de 10^{-3} a $5 \cdot 10^{-3}$), pode-se admitir que as deformações sejam desprezíveis quando comparadas com a unidade (sem qualquer restrição à grandeza dos deslocamentos lineares e angulares). Nestas condições, as relações tensões-deformações podem ser postas na forma

$$C^{k\ell pq} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \delta^{k\ell} \delta^{pq} + G (\delta^{kp} \delta^{\ell q} + \delta^{\ell p} \delta^{kq}) \quad (3.37)$$

e, portanto,

$$A^{ijmn} = \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} g^{ij} g^{mn} + G (g^{im} g^{jn} + g^{jm} g^{in}) \quad (3.38)$$

com os parâmetros físicos com seus significados usuais, correspondentes à teoria clássica. No desenvolvimento dos teoremas variacionais, será incorporada essa hipótese de modo a se poder introduzir o conceito de energia de deformação, sem a discussão do conceito de hiperelasticidade e hipoelasticidade

3.5. Teorema dos Deslocamentos Virtuais

Seja um corpo em equilíbrio, sujeito à ação de forças de massa $\vec{X}$, definidas em todo o volume V_0 , e de forças de superfície $\vec{F}$, definidas em uma porção

S_1 da fronteira S_0 . Na porção restante S_2 da fronteira S_0 , têm-se especificados os deslocamentos.

Considere-se agora um campo arbitrário de deslocamentos $\vec{u}'$, de classe C_3 , com a seguinte expressão:

$$\vec{u}' = \vec{u} + \delta\vec{u} \quad , \quad (3.39)$$

onde $\vec{u}$ é o campo de deslocamentos real, e onde as variações $\delta\vec{u}$ satisfazem às seguintes equações:

$$\delta F_{ij} = 0,5(\delta u_{i;j} + \delta u_{j;i} + u_{;i}^{\ell} \delta u_{\ell;j} + \delta u_{;i}^{\ell} u_{\ell;j}) \text{ em } V_0 \quad , \quad (3.40)$$

$$\delta u_i \text{ arbitrária em } S_1 \quad , \quad (3.41)$$

$$\delta u_i = 0 \text{ em } S_2 \quad , \quad (3.42)$$

sendo, por essa razão, mencionadas como virtuais.

Seja agora um campo qualquer de tensões equilibrado pelas formas de massa $\vec{X}$, em V_0 , e pelas forças de superfície $\vec{F}$, em S_1 . Tendo em vista (3.23) e (3.31), estabelece-se

$$\begin{aligned} & - \int_{V_0} (D\vec{\sigma}^i \sqrt{g} d\theta^j d\theta^k + \vec{X} \sqrt{g} d\theta^1 d\theta^2 d\theta^3 \circ \delta\vec{u}) - \int_{S_0} (\vec{F} - \\ & - n_i \vec{\sigma}^i \circ \delta\vec{u}) dS = 0 \end{aligned} \quad (3.43)$$

ou

$$- \int_{V_0} \left(\frac{D\vec{\sigma}^i}{D\theta^i} + \vec{X} \circ \delta\vec{u} \right) dV - \int_{V_0} (\vec{F} - n_i \vec{\sigma}^i \circ \delta\vec{u}) dS = 0 \quad (3.44)$$

Após algumas transformações delicadas, obtêm-se que:

$$- \int_{V_0} \left(\frac{D\vec{\sigma}^i}{D\theta^i} \circ \delta\vec{u} \right) dV + \int_{S_0} (n_i \vec{\sigma}^i \circ \delta\vec{u}) dS = \int_{V_0} \sigma^{ij} \delta F_{ij} \quad (3.45)$$

e, sendo $\delta\vec{u} = \vec{0}$ em S_2 , estabelece-se

$$\int_{V_0} \sigma^{ij} \delta F_{ij} dV = \int_{V_0} (\vec{X} \circ \delta\vec{u}) dV + \int_{S_1} (\vec{F} \circ \delta\vec{u}) dS \quad (3.46)$$

ou, em forma escalar,

$$\int_{V_0} \sigma^{ij} \delta F_{ij} dV = \int_{V_0} X^k \delta u_k dV + \int_{S_1} F^k \delta u_k dS \quad (3.47)$$

que exprime a equação do teorema dos deslocamentos virtuais.

É importante observar que o teorema dos deslocamentos virtuais independe das relações tensões-deformações, sendo a expressão (3.47) uma identidade matemática. A sua verificação garante que o campo de tensões σ^{ij} seja equilibrado pelas forças exteriores, de massa em V_0 , e de superfície em S_1 , nada se estabelecendo sobre os pontos de S_2 .

3.6. Teorema da Energia Potencial Total

Trata-se inicialmente de introduzir o conceito de função densidade de energia de deformação. Considere-se, pois, um elemento do corpo que ocupe um volume unitário antes da deformação. Quando o elemento se deforma devido à ação de um carregamento até o estado de deformação F_{ij} , pode-se calcular a integral:

$$\int_0^{F_{ij}} \sigma^{ij} dF_{ij} \quad (3.48)$$

através da trajetória de carregamento, pelo uso das relações (3.32). No caso de o material ser elástico e o corpo se deformar em um processo isotérmico ou adiabático, então o valor da integral não dependerá da trajetória de carregamento, e a quantidade $\sigma^{ij} dF_{ij}$ será uma diferencial exata (63) e existirá uma função de estado $W_3(F_{ij})$, tal que

$$dW_3 = \sigma^{ij} dF_{ij} \quad (3.49)$$

ou, na forma equivalente,

$$W_{3;F_{ij}} = \sigma^{ij} \quad (3.50)$$

A função $W_3(F_{ij})$ é denominada densidade da energia de deformação, e sua existência é usualmente admitida na teoria da elasticidade, embora o processo de deformação não seja propriamente isotérmico ou adiabático (20) e (63).

Considere-se agora a expressão do teorema dos deslocamentos virtuais:

$$\int_{V_0} \sigma^{ij} \delta F_{ij} dV = \int_{V_0} X^k \delta u_k dV + \int_{S_1} F^k \delta u_k dS \quad (3.51)$$

Sendo o corpo elástico, admite-se a existência da função $W_3(F_{ij})$, que, introduzida no termo do membro da esquerda da equação (3.51), conduz a

$$\int_{V_0} \sigma^{ij} \delta F_{ij} dV = \int_{V_0} W_3, F_{ij} \delta F_{ij} dV = \int_{V_0} \delta W_3 dV = \delta \int_{V_0} W_3 dV \quad (3.52)$$

A expressão (3.51) toma, pois, a seguinte forma:

$$\delta \int_{V_0} W_3 dV - \int_{V_0} X^k \delta u_k dV - \int_{S_1} F^k \delta u_k dS = 0 \quad (3.53)$$

que é útil na aplicação a problemas da elasticidade, nos quais as forças externas não são deriváveis de funções potenciais.

No caso de as forças externas de massa e de superfície serem conservativas, elas podem ser consideradas como deriváveis de função potencial, o que permite escrever

$$\text{ou} \quad \delta \int_{V_0} W_3 dV + \delta \left\{ - \int_{V_0} X^k u_k dV - \int_{S_1} F^k u_k dS \right\} = 0 \quad (3.54)$$

$$\delta (U + P) = \delta V = 0 \quad (3.55)$$

onde

$$U = \int_{V_0} W_3 dV \quad (3.56)$$

é a energia potencial de deformação,

$$P = - \int_{V_0} X^k u_k dV - \int_{S_1} F^k u_k dS \quad (3.57)$$

é a energia potencial das forças externas, e

$$V = \int_{V_0} W_3 dV - \int_{V_0} X^k u_k dV - \int_{S_1} F^k u_k dS \quad (3.58)$$

é chamado energia potencial total do sistema.

A expressão (3.55) estabelece que a energia potencial total é estacionária para variações virtuais dos deslocamentos, ou, mais precisamente:

"Entre todas as soluções compatíveis, a que, além de ser compatível, for equilibrada, tornará a energia potencial estacionária".

Observa-se que, no desenvolvimento acima, não se considerou a linearidade das relações entre tensões e deformações, sendo, portanto, válida a conclusão para materiais elásticos lineares ou não.

3.7. Teorema de Três Campos

O funcional energia potencial total foi estabelecido para variações virtuais do campo de deslocamentos e de variações associadas do campo de deformações, apresentando, portanto, variações livres de um único campo. Trata-se agora de apresentar um funcional que tenha variações livres em três campos.

Seja o funcional energia potencial total, dado por (3.58), submetido às condições subsidiárias:

$$\begin{aligned} F_{ij} &= 0,5 (u_{i;j} + u_{j;i} + u_{;\alpha}^{\alpha} u_{\alpha;j}) & \text{em } V_0 \\ u_i &= \bar{u}_i & \text{em } S_2 \end{aligned} \quad (3.59)$$

Aplicando-se a técnica dos multiplicadores de Lagrange, obtêm-se o funcional

$$\begin{aligned} \Pi = & \int_{V_0} W_3(F_{ij}) \, dV - \int_{V_0} X^k u_k \, dV - \int_{S_1} F^k u_k \, dS - \\ & - \int_{V_0} \sigma^{ij} \left(F_{ij} - 0,5(u_{i;j} + u_{j;i} + u_{;\alpha}^{\alpha} u_{\alpha;j}) \right) \, dV - \\ & - \int_{S_2} F'^k (u_k - \bar{u}_k) \, dS \end{aligned} \quad (3.60)$$

sem condições subsidiárias, e onde σ^{ij} e F'^k são os multiplicadores de Lagrange.

Considere-se agora a primeira variação do funcional Π , com variações livres das quantidades independentes $F_{ij} = F_{ji}$, u_k , $\sigma^{ij} = \sigma^{ji}$ e F'^k , que, após algumas transformações, apresenta-se na forma:

$$\begin{aligned}
\delta \Pi = & \int_{V_0} W_{3;F_{ij}} - \sigma^{,ij} \delta F_{ij} dV + \\
& - \int_{V_0} \{ (\sigma^{,ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k))_{;i} + \chi^k \} \delta u_k dV + \\
& - \int_{V_0} (F_{ij} - 0,5(u_{i;j} + u_{j;i} + u_{;i}^\alpha u_{\alpha;j})) \delta \sigma^{,ij} dV + \\
& - \int_{S_0} (F^{,k} - \sigma^{,ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k) n_i) \delta u_k dV + \\
& - \int_{S_2} (u_k - \bar{u}_k) \delta F^{,k} dS + \int_{S_1} (F^{,k} - F^k) \delta u_k dS
\end{aligned} \tag{3.61}$$

Em presença de (3.61), conclui-se que, se se tiver:

$$\begin{aligned}
W_{3;F_{ij}} &= \sigma^{,ij} && \text{em } V_0 \\
(\sigma^{,ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k))_{;i} + \chi^k &= 0 && \text{em } V_0 \\
F_{ij} &= 0,5(u_{i;j} + u_{j;i} + u_{;i}^\alpha u_{\alpha;j}) && \text{em } V_0 \\
F^{,k} &= \sigma^{,ij} (\delta_j^k + u_{;j}^k) n_i && \text{em } S_0 \\
F^{,k} &= F^k && \text{em } S_1 \\
u^k &= \bar{u}^k && \text{em } S_2
\end{aligned} \tag{3.62}$$

o funcional Π será estacionário e, reciprocamente, se Π for estacionário, as equações (3.62) terão forçosamente que se verificar, em vista da independência mútua e da arbitrariedade das variações δF_{ij} , δu_k , $\delta \sigma^{,ij}$ e δF^k .

É importante ressaltar que as condições de estacionariedade do funcional Π são as equações que governam o problema elástico em coordenadas curvilíneas com não-linearidade geométrica, sendo que a primeira e a quarta das equações definem o significado físico de $\sigma^{,ij}$ e $F^{,k}$, respectivamente.

3.8. Procedimento Alternativo para o Estabelecimento das Equações e dos Teoremas Variacionais da Teoria da Elasticidade com Não-Linearidade Geométrica

Em virtude do Teorema 2 do parágrafo 2.5.5, estabelecem-se imediatamente as equações da teoria da elasticidade com deslocamentos finitos em coordenadas retilíneas, a partir de (3.62), ou seja,

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial W_3(e_{ij})}{\partial e_{ij}} &= \tau^{ij} && \text{em } V_0 \\
 (\tau^{ij} (\delta_j^k + u_{,j}^k))_{,i} + X^k &&& \text{em } V_0 \\
 e_{ij} &= 0,5(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^\alpha u_{\alpha,j}) && \text{em } V_0 \\
 F^{,k} &= \tau^{ij} (\delta_j^k + u_{,j}^k) n_i && \text{em } S_0 \\
 F^{,k} &= F^k && \text{em } S_1 \\
 u^k &= \bar{u}^k && \text{em } S_2
 \end{aligned} \tag{3.63}$$

onde e_{ij} , τ^{ij} e u_i são os campos de deformações, de tensões e de deslocamentos, definidos em V_0 , F^i é um campo de forças, definido em S_0 , referidos a um certo sistema de coordenadas retilíneas (x^1, x^2, x^3) , e

$$u_{i,j} = \frac{\partial u_i}{\partial x^j} \tag{3.64}$$

Pelo mesmo motivo, as expressões correspondentes aos teoremas dos deslocamentos virtuais, da energia potencial total e de três campos são dadas, respectivamente, por:

$$\int_{V_0} \tau^{ij} \delta e_{ij} dV = \int_{V_0} X^k \delta u_k dV + \int_{S_1} F^k \delta u_k dS \tag{3.65}$$

$$V = \int_{V_0} W_3(e_{ij}) dV - \int_{V_0} X^k u_k dV - \int_{S_1} F^k u_k dS \tag{3.66}$$

$$\begin{aligned}
\Pi = & \int_{V_0} W_3(e_{ij}) \, dV - \int_{V_0} \chi^k u_k \, dV - \int_{S_1} F^k u_k \, dS + \\
& - \int_{V_0} \tau^{ij} (e_{ij} - 0,5(u_{i,j} + u_{j,i} + u_{,i}^\alpha u_{\alpha,j})) \, dV - \\
& - \int_{S_2} F^{,k} (u_k - \bar{u}_k) \, dS
\end{aligned} \tag{3.67}$$

O retorno destas equações e funcionais para a forma anterior é imediato, em virtude do Teorema 3 do parágrafo 2.5.5. Fica, pois, estabelecido um procedimento alternativo, muito mais simples, para a obtenção das equações da teoria da elasticidade com não-linearidade geométrica e dos teoremas variacionais em coordenadas curvilíneas, procedimento esse que consiste em estabelecer estas equações em coordenadas retilíneas e aplicar em seguida o Teorema 3 do parágrafo 2.5.5. Recomenda-se, entretanto, cuidado na derivação dessas equações, visto que a simplicidade do procedimento pode ser acompanhada da perda de alguma parcela.

3.9. Arcos de Eixo Circular com Não-Linearidade Geométrica

3.9.1. Definição da Geometria

Considere-se inicialmente o eixo do arco genérico, representado na Fig. 3.4, definido ou em relação ao sistema de coordenadas retilíneas (x^1, x^2) ou em relação ao sistema de coordenadas curvilíneas (α_1, α_2) .

Fig. 3.4

Qualquer que seja o sistema de referência, é possível estabelecer uma base ortogonal natural em Q, pertencente ao eixo do arco, definida pelos vetores tangente e normal principal, através das expressões

$$\vec{\lambda} = \lambda^i \vec{e}_i$$

(3.68)

$$\vec{\mu} = \mu^j \vec{e}_j$$

onde

$$\lambda^i = \frac{Dx^i}{Ds}$$

(3.69)

$$\mu^j = \frac{1}{X} \frac{D\lambda^j}{Ds} = \frac{1}{X} \left(\frac{d\lambda^j}{ds} + \Gamma_{mn}^j \lambda^m \lambda^n \right)$$

A posição genérica do ponto P do arco, conforme mostra a Fig. 3.5, pode ser definida pelo vetor posição $\vec{R} = \vec{r} + \vec{d}$.

Fig. 3.5

Para definir a base natural associada ao ponto P, é conveniente adotar as coordenadas curvilíneas $\theta^1 = s$ e $\theta^2 = d$. Assim, considerando-se que

$$\vec{R}(\theta^1, \theta^2) = \vec{r}(\theta^1) + \theta^2 \vec{\mu}, \quad (3.70)$$

a base natural associada a P será definida pelas expressões

$$\begin{aligned} \vec{g}_1 &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^1} = \lambda^j \vec{e}_j + \theta^2 \lambda^i \mu_{;i}^j \vec{e}_j \\ \vec{g}_2 &= \frac{\partial \vec{R}}{\partial \theta^2} = \mu^j \vec{e}_j \end{aligned} \quad (3.71)$$

e se for observado que

$$g_{11} = (\lambda^j \lambda^l + \theta^2 (\lambda^j \lambda^k \mu_{;k}^l + \lambda^i \lambda^l \mu_{;i}^j) + (\theta^2)^2 (\lambda^i \lambda^k \mu_{;i}^j \mu_{;k}^l)) e_{jl}$$

$$g_{12} = 0 \quad (3.72)$$

$$g_{22} = \mu^i \mu^j e_{ij} ,$$

poder-se-ã concluir que a base $\tilde{e}$ é ortogonal e tem sempre a direção da tangente e da normal principal à curva do ponto de mesma ordenada θ^1 . Tal base natural assim definida será extremamente conveniente para o tratamento do arco, pois os vários parâmetros terão suas expressões associadas, em cada ponto, às direções normal e tangencial ao eixo do arco, podendo, pois, ser facilmente simplificadas a partir da observação do comportamento do arco.

A partir das expressões (3.72), podem-se calcular os valores dos símbolos de Christoffel de 1a. e 2a. espécie, através das expressões

$$\Gamma_{mpn} = 0,5 \left(\frac{\partial g_{mp}}{\partial \theta^n} + \frac{\partial g_{pn}}{\partial \theta^m} - \frac{\partial g_{mn}}{\partial \theta^p} \right) \quad (m, n, p = 1, 2)$$

$$\Gamma_{mn}^l = g^{lp} \Gamma_{mpn} \quad (3.73)$$

e, portanto, estabelecer as expressões das derivadas covariantes das componentes radial e tangencial dos deslocamentos e das componentes F_{ij} do tensor das deformações de Green, para arco com eixo qualquer.

3.9.2. Relações Deformações-Deslocamentos Gerais para o Arco de Eixo Circular

---

Considere-se o arco circular, definido em relação ao sistema de coordenadas polares (α^1, α^2) , conforme mostra a Fig. 3.6.

Fig. 3.6

A base natural associada ao ponto \$Q\$ do eixo do arco será dada por

$$\begin{aligned}\vec{e}_1 &= \cos\alpha^2 \vec{a}_1 + \sin\alpha^2 \vec{a}_2 \\ \vec{e}_2 &= -\alpha^1 \sin\alpha^2 \vec{a}_1 + \alpha^1 \cos\alpha^2 \vec{a}_2\end{aligned}\quad (3.74)$$

e assim, em virtude de (3.68) e (3.69), ter-se-á:

$$\begin{aligned}\vec{\chi} &= \frac{1}{\alpha^1} \vec{e}_2 \\ \vec{\mu} &= -\vec{e}_1 \\ \vec{\chi} &= \frac{1}{\alpha^1} = \frac{1}{R}\end{aligned}\quad (3.75)$$

Assim, adotando-se as coordenadas curvilíneas \$\theta^1 = s\$ e \$\theta^2 = d\$, e em vista de (3.71), tem-se a expressão da base ortogonal natural \$(\vec{g}_1, \vec{g}_2)\$ associada a todos os pontos do arco

$$\begin{aligned}\vec{g}_1 &= \left(\frac{1}{\alpha^1} - \frac{\theta^2}{(\alpha^1)^2}\right) \vec{e}_2 = \left(1 - \frac{\theta^2}{\alpha^1}\right) \vec{g}_{10} \\ \vec{g}_2 &= -\vec{e}_1\end{aligned}\quad (3.76)$$

A Fig. 3.7 mostra as bases \$(\vec{g}_1, \vec{g}_2)\$ associadas a pontos do arco contidos numa particular direção radial.

Fig. 3.7

Obtêm-se, em seguida, as expressões dos tensores simétricos g_{ij}

$$g_{11} = \left(\frac{\alpha^1 - \theta^2}{\alpha_1} \right)^2 = \left(\frac{R - \theta^2}{R} \right)^2$$

$$g_{12} = g_{21} = 0$$

$$g_{22} = 1$$
(3.77)

e como $g^{ip} g_{pj} = \delta_j^i$, pode-se estabelecer

$$g^{11} = \left(\frac{\alpha_1}{\alpha^1 - \theta^2} \right)^2 = \left(\frac{R}{R - \theta^2} \right)^2$$

$$g^{12} = g^{22} = 0$$

$$g^{22} = 1$$
(3.78)

A aplicação das expressões (3.73) permite estabelecer as expressões dos símbolos de Christoffel de 1a. e 2a. espécie. Assim,

$$\Gamma_{111} = \Gamma_{122} = \Gamma_{212} = \Gamma_{222} = 0$$

$$\Gamma_{112} = \Gamma_{211} = \frac{1}{\alpha^1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha^1} - 1 \right) = \frac{1}{R} \left(\frac{\theta^2}{R} - 1 \right)$$
(3.79)

$$\Gamma_{121} = -\frac{1}{\alpha^1} \left(\frac{\theta^2}{\alpha^1} - 1 \right) = -\frac{1}{R} \left(\frac{\theta^2}{R} - 1 \right)$$

e

$$\Gamma_{111}^1 = \Gamma_{22}^1 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = -\frac{1}{\alpha^1 - \theta^2} = -\frac{1}{R - \theta^2} \quad (3.80)$$

$$\Gamma_{11}^2 = -\frac{1}{\alpha^1} \frac{\theta^2 - \alpha^1}{\alpha^1} = +\frac{1}{R} \frac{R - \theta^2}{R}$$

Em virtude de (2.86), as derivadas covariantes das componentes contravariantes u^1 e u^2 são dadas por:

$$\begin{aligned} u^1_{;1} &= \frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} + \Gamma_{1m}^1 u^m = \frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{1}{R - \theta^2} u^2 \\ u^1_{;2} &= \frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} + \Gamma_{2m}^1 u^m = \frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{1}{R - \theta^2} u^1 \\ u^2_{;1} &= \frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \Gamma_{1m}^2 u^m = \frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{R - \theta^2}{R^2} u^1 \\ u^2_{;2} &= \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} + \Gamma_{2m}^2 u^m = \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (3.81)$$

e, se for considerada a expressão (3.8) de F_{ij} , dada em função dos tensores métricos e das derivadas covariantes de u^i , estabelecer-se-ão, finalmente, as relações deformações-deslocamentos gerais, sem qualquer hipótese simplificadora, para os arcos de eixo circular, em função das componentes contravariantes das funções deslocamentos u^1 e u^2 , respectivamente nas direções tangencial e radial.

$$F_{11} = \left(\frac{R - \theta^2}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^2}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{R - \theta^2}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^2}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} - \frac{R - \theta^2}{R} u^1 \right)^2$$

$$F_{12} = F_{21} = \frac{1}{2} \left(\frac{R - \theta^2}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{R - \theta^2}{R^2} u^1 \right) +$$

$$+ \frac{1}{2} \left(\frac{R - \theta^2}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{R - \theta^2}{R} u^1 \right) \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2}$$

$$F_{22} = \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{R - \theta^2}{R} \right)^2 \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} \right)^2$$

(3.82)

Fig. 3.8

3.9.3. Relações Deformações-Deslocamentos Derivadas para o Arco de Eixo Circular

Trata-se agora de apresentar uma família de relações deformações-deslocamentos derivadas das relações gerais, estabelecidas no parágrafo anterior, para o arco de eixo circular.

Considere-se inicialmente a condição de barra curva caracterizada pela condição

$$\max \left(\frac{\theta^2}{R} \right) \ll 1 \quad (3.83)$$

Nestas condições, as expressões (3.82) se reduzem a:

$$\begin{aligned} F_{11} &= \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^2}{R} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{u^1}{R} \right)^2 \\ F_{12} = F_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{u^1}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^1}{R} \right) \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{u^1}{R} \right) \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} \\ F_{22} &= \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} \right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial \theta^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right)^2 \end{aligned} \quad (3.84)$$

estabelecendo-se, pois, as relações deformações-deslocamentos com a condição de barra.

Se se considerar agora que para os materiais estruturais usuais o domínio das deformações elásticas é limitado por deformações da ordem de 10^{-5} a $5 \cdot 10^{-5}$, a introdução da hipótese de linearidade física para esses materiais exige que as deformações sejam pequenas quando comparadas com a unidade, sem qualquer restrição à ordem de grandeza dos deslocamentos lineares e angulares (41) (53). Ressalta-se que, nestas condições, as componentes F_{ij} do tensor das deformações têm a interpretação geométrica simples de alongamento para F_{ii} , e de distorção, para $2F_{ij}$ ($i \neq j$). Assim, introduzindo-se a hipótese de linearidade física para os materiais estruturais usuais (ou a hipótese de pequenas deformações), as relações deformações-deslocamentos simplificam-se de forma notável, reduzindo-se a:

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{u^1}{R} \right)^2 \\
F_{12} = F_{21} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^2}{\partial \theta^1} + \frac{u^1}{R} \right) \\
F_{22} &= \frac{\partial u^2}{\partial \theta^2} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u^1}{\partial \theta^2} - \frac{u^1}{R} \right)
\end{aligned} \tag{3.85}$$

Admitindo-se, adicionalmente, que as dimensões da seção transversal do arco não se alteram e que a seção transversal plana antes da deformação permanece plana após a deformação, hipóteses traduzidas, respectivamente, pelas condições

$$u^2 = u^2(\theta^1) \tag{3.86}$$

e

$$u^1 = u_0^1 - \theta^2 \left(\frac{u_0^1}{R} + \frac{du^2}{d\theta^1} \right) \quad u_0^1 = u_0^1(\theta^1) \tag{3.87}$$

estabelecem-se as relações deformações-deslocamentos

$$\begin{aligned}
F_{11} &= \left(\frac{du_0^1}{d\theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_0^1}{R} + \frac{du^2}{d\theta^1} \right)^2 - \theta^2 \left(\frac{1}{R} \frac{du_0^1}{d\theta^1} + \frac{d^2 u^2}{(d\theta^1)^2} \right) \\
F_{12} = F_{21} &= - \frac{1}{2} \frac{u_0^1}{R} \\
F_{22} &= \frac{1}{2} \left(2 \frac{u_0^1}{R} + \frac{du^2}{d\theta^1} \right)^2
\end{aligned} \tag{3.88}$$

ou, considerando-se

$$u^1 = u_0^1 - \theta^2 \frac{du^2}{d\theta^1} \tag{3.89}$$

de forma compatível com a condição da barra, obtêm-se

$$F_{11} = \left(\frac{du_0^1}{d\theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du^2}{d\theta^1} + \frac{u_0^1}{R} \right)^2 - \theta^2 \frac{d^2 u^2}{(d\theta^1)^2}$$

$$F_{12} = F_{21} = 0 \quad (3.90)$$

$$F_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{u_0^1}{R} + \frac{du^2}{d\theta^1} \right)^2$$

As relações deformações-deslocamentos (3.88) e (3.90) são as relações mais gerais que têm sido utilizadas para o estudo dos arcos circulares, apresentando pois intrinsecamente as hipóteses incluídas neste desenvolvimento.

Um último membro desta família de relações deformações-deslocamentos deve ser mostrado; é o que contém a hipótese adicional de arco abatido, caracterizada pela condição

$$\frac{f}{\ell} \ll 1 \quad \text{ou} \quad \alpha^2 \approx \frac{2f}{R} \quad (3.91)$$

onde f é a altura, ℓ , o vão, e 2α o ângulo central do arco. Essa hipótese implica em

$$\frac{u_0^1}{R} \ll \frac{du^2}{d\theta^1} \quad (3.92)$$

e, nestas condições, as relações deformações-deslocamentos para o arco abatido tomam a forma

$$F_{11} = \left(\frac{du^1}{d\theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{du^2}{d\theta^1} \right)^2 - \theta^2 \frac{d^2 u^2}{(d\theta^1)^2}$$

$$F_{12} = F_{21} = 0 \quad (3.93)$$

$$F_{22} = \frac{1}{2} \left(\frac{du^2}{d\theta^1} \right)^2$$

A análise do arco de eixo circular pode, assim, ser desenvolvida a partir das relações deformações-deslocamentos (3.82), mais gerais, ou a partir das relações derivadas (3.84), (3.85), (3.88), (3.90) ou (3.93), conforme as condições específicas de cada problema a ser analisado.

3.9.4. Formulação Variacional para a Análise do Arco de Eixo Circular

Considere-se o arco de eixo circular submetido a carregamento radial uniforme, conforme a Fig. 3.9.

Fig. 3.9

O desenvolvimento que se segue é válido para as relações deformações-deslocamentos (3.88), (3.90) e (3.93), que podem ser colocadas na forma:

$$F_{11}(\theta^1) = F_{11}^0(\theta^1) + \theta^2 F_{11}^1(\theta^1) \quad (3.95)$$

Observa-se que a condição de inextensibilidade do eixo do arco pode ser obtida imediatamente com a condição $F_{11}^0 = 0$.

Considerando-se que no arco a parcela da energia de deformação correspondente a F_{22} é pequena quando comparada com aquela devida a F_{11} , pode-se escrever a seguinte expressão para a energia de deformação do arco:

$$U = \frac{1}{2} \int_{V_0} \sigma^{11} F_{11} dV \quad (3.96)$$

ou, considerando-se a linearidade física,

$$\dot{U} = \frac{1}{2} \int_{V_0} \frac{F_{11}^2}{E} dV = \frac{1}{2} \int_{V_0} (F_{11}^0 + \theta^2 F_{11}^1)^2 dV, \quad (3.97)$$

que, depois de algumas transformações, toma a forma

$$U = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{N^2}{2ES} d\theta^1 + \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{M^2}{2EI} d\theta^1 \quad (3.98)$$

onde

$$\begin{aligned} N &= F_{11}^0 ES \\ M &= F_{11}^1 EI \end{aligned} \quad (3.99)$$

evidenciando os efeitos de sollicitação axial e flexão.

A energia potencial das forças externas, neste caso, é dada por:

$$P = -q \int_{-\alpha R}^{\alpha R} u^2 d\theta^1 \quad (3.100)$$

e assim, a energia potencial total apresenta a expressão

$$V = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{N^2}{2ES} d\theta^1 + \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \frac{M^2}{2EI} d\theta^1 - q \int_{-\alpha R}^{\alpha R} u^2 d\theta^1 \quad (3.101)$$

Para outras sollicitações, basta alterar a expressão da energia potencial das forças externas.

De acordo com o teorema da energia potencial total apresentado, as equações de Euler do funcional T , obtidas a partir de

$$\delta V = \int_{-\alpha R}^{\alpha R} \left(\frac{N \delta N}{EA} + \frac{M \delta M}{EI} - q \delta u^2 \right) d\theta^1 = 0 \quad (3.102)$$

estabelecem as equações não-lineares de equilíbrio do arco. Para a obtenção dessas equações, evidentemente deve-se agora definir quais das relações deformações-deslocamentos serão escolhidas.

Com a finalidade de completar este desenvolvimento, considerem-se as relações deformações-deslocamentos (3.88) e, portanto,

$$N = ES \left(\left(\frac{du_0^1}{d\theta^1} - \frac{u^2}{R} \right) + \frac{1}{2} \left(\frac{u_0^1}{R} + \frac{du^2}{d\theta^1} \right)^2 \right) \quad (3.103)$$

$$M = - EI \left(\frac{1}{2} \frac{du_0^1}{d\theta^1} + \frac{d^2 u^2}{(d\theta^1)^2} \right) \quad (3.104)$$

com variações virtuais definidas por

$$\delta N = ES \left(\left(\frac{d\delta u_0^1}{d\theta^1} - \frac{\delta u^2}{R} \right) + \left(\frac{u_0^1}{R} + \frac{du_2}{d\theta^1} \right) \left(\frac{\delta u_0^1}{R} + \frac{d\delta u^2}{d\theta^1} \right) \right) \quad (3.105)$$

e

$$\delta M = - EI \left(\frac{1}{R} \frac{d\delta u_0^1}{d\theta^1} + \frac{d^2 \delta u^2}{(d\theta^1)^2} \right) \quad (3.106)$$

A substituição de (3.103) a (3.106) em (3.102) conduz, após uma série de transformações, às equações de equilíbrio do arco

$$\begin{aligned} - \frac{dN}{d\theta^1} + \frac{N}{R} \left(\frac{du^2}{d\theta^1} + \frac{u_0^1}{R} \right) + \frac{1}{R} \frac{dM}{d\theta^1} &= 0 \\ - \frac{N}{R} - \frac{d}{d\theta^1} \left(N \left(\frac{du^2}{d\theta^1} + \frac{u_0^1}{R} \right) \right) - \frac{d^2 M}{d\theta^1} - q &= 0 \end{aligned} \quad (3.107)$$

submetidas às seguintes condições subsidiárias

$$\begin{aligned} N \delta u_0^1 \Big|_{-\alpha R}^{\alpha R} &= 0 \\ \frac{M}{R} \delta u_0^1 \Big|_{-\alpha R}^{\alpha R} &= 0 \\ N \left(\frac{du^2}{d\theta^1} + \frac{u_0^1}{R} \right) \delta u^2 \Big|_{-\alpha R}^{\alpha R} &= 0 \\ M \frac{d\delta u^2}{d\theta^1} - \frac{dM}{d\theta^1} \delta u^2 \Big|_{-\alpha R}^{\alpha R} &= 0 \end{aligned} \quad (3.108)$$

que se transformam em identidades no caso do arco biengastado e que se reduzem à condição

$$M \frac{d\delta u^2}{d\theta^1} \Big|_{-\alpha R}^{\alpha R} = 0$$

no caso do arco biarticulado, quando submetidos a campos de deslocamentos virtuais.

4. MODELO MATEMÁTICO PARA A ANÁLISE DA ESTABILIDADE DE ARCOS SUBMETIDOS A CARREGAMENTOS CONSERVATIVOS

4.1. Considerações Gerais

Trata-se, neste capítulo, de estabelecer, adotando-se a formulação lagrangiana, um modelo matemático para a análise da estabilidade de arcos submetidos a carregamentos conservativos. Não se fará qualquer restrição à geometria dos arcos e aos tipos de carregamentos conservativos. Considerar-se-á, entretanto, a hipótese da linearidade física, da qual resulta, para os materiais estruturais usuais, a condição de pequenas deformações, sem qualquer restrição às grandezas dos deslocamentos lineares e angulares.

No modelo matemático adotado, a discretização do arco será efetuada de acordo com o procedimento já clássico do método dos elementos finitos, a partir do funcional energia potencial total. O elemento adotado é o elemento isoparamétrico quadrilátero, que considera funções lineares, em y_2 , e funções quadráticas, em y_1 , conforme mostra a Fig. 4.1. As relações deformações-deslocamentos escolhidas são as da elasticidade plana. Na escolha do elemento, foi fundamental a consideração de que falhas na definição da geometria do arco possam conduzir a erros sérios, em virtude de os arcos serem, em certas condições, estruturas sensíveis a imperfeições. No que se refere às relações deformações-deslocamentos, justifica-se a escolha realizada, não só pela intenção de se estabelecer um modelo geral, mas, principalmente, para que tenham relações consistentes, de modo que os eventuais erros de aproximação sejam devidos exclusivamente à técnica numérica.

A resolução das equações não-lineares de equilíbrio, decorrentes da discretização, será feita através de uma combinação adequada dos métodos de perturbação e de Newton-Raphson. A partir de uma solução equilibrada conhecida, estabelece-se pelo método das perturbações, uma trajetória aproximada de equilíbrio. Para um determinado nível de solicitação, a solução aproximada é melhorada, com o nível de precisão especificado, pela aplicação do método de Newton-Raphson, estabelecendo-se assim nova solução equilibrada conhecida, a partir da qual o procedimento descrito é repetido.

Finalmente, no que diz respeito à análise da estabilidade de uma configura-

ção de equilíbrio, ela será realizada de acordo com a seguinte conceituação, apresentada por Koiter e Hutchinson: "O critério da energia de estabilidade para sistemas elásticos conservativos é quase universalmente aceito pelos pesquisadores no campo da estabilidade estrutural. Uma segunda variação positiva definida da energia potencial total em torno de um estado de equilíbrio é aceita como uma condição suficiente para a estabilidade daquele estado. Várias tentativas para derrubar esses dois pilares da estabilidade estrutural foram realizadas, mas a confiança nos mesmos permaneceu inabalável. Com uma sustentação adequada de certos aspectos desses critérios, eles continuarão, indubitavelmente, a servir como base da teoria da estabilidade elástica".

4.2. Definição da Geometria do Elemento

Considerem-se x_{im} e y_{im} (com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$ e $m = 1, 2$) as coordenadas dos pontos nodais do elemento, e x_m e y_m (com $m = 1, 2$) as coordenadas de um ponto genérico do elemento, nos sistemas global e local, respectivamente.

Fig. 4.1 - Elemento de Arco. Ordenação dos Pontos Nodais.

Estabelece-se a transformação de coordenadas entre x_m e y_m através das relações:

$$x_m = N_i(y_1, y_2) x_{im} \quad (m = 1, 2) \quad (4.1)$$

$$(i = 1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

onde:

$$\begin{aligned}
N_1 &= 0,25(1 + y_2) (-y_1 + y_1^2) \\
N_2 &= 0,25(1 - y_2) (-y_1 + y_1^2) \\
N_3 &= 0,5(1 + y_2) (1 - y_1^2) \\
N_4 &= 0,5(1 - y_2) (1 - y_1^2) \\
N_5 &= 0,25(1 + y_2) (y_1 + y_1^2) \\
N_6 &= 0,25(1 - y_2) (y_1 + y_1^2)
\end{aligned} \tag{4.2}$$

são funções de forma, independentes das dimensões do elemento.

No desenvolvimento que se segue, serão calculadas integrais, no domínio e na fronteira dos elementos, que apresentarão como variáveis de integração as coordenadas locais y_1 e y_2 , exigindo-se pois que se estabeleçam certas relações diferenciais que envolvam dy_i .

A diferencial de x_m pode ser apresentada na forma

$$dx_m = \frac{\partial x_m}{\partial y_n} dy_n = J_{mn} dy_n \quad (m, n = 1, 2) \tag{4.3}$$

onde

$$J_{mn} = \frac{\partial(N_i x_{im})}{\partial y_n} = \frac{\partial N_i}{\partial y_n} x_{im} = B_{in} x_{im} \quad \begin{matrix} (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \\ (m = 1, 2) \end{matrix} \tag{4.4}$$

Decorre imediatamente das expressões anteriores a diferencial de y_n

$$dy_n = \frac{\partial y_n}{\partial x_m} dx_m = YP_{nm} dx_m \tag{4.5}$$

onde

$$YP_{nm} = (-1)^{n+m} \frac{J_{3-m, 3-n}}{DET} \tag{4.6}$$

com

$$DET = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \tag{4.7}$$

A expressão do elemento de volume dV_0 pode ser obtida imediatamente, a partir de (2.126):

$$dV_0 = t \sqrt{J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21}} dy_1 dy_2 \tag{4.8}$$

onde t é a espessura do elemento em (y_1, y_2) . Outra expressão que apresen-

ta interesse é a de um elemento de comprimento ds ao longo da curva ordenada y_1 , cuja expressão, obtida após algumas transformações, é dada por

$$ds = t \sqrt{J_{11}^2 + J_{21}^2} dy_1 \quad (4.9)$$

4.3. Definição dos Deslocamentos. Funções Derivadas

O campo de deslocamentos no interior do elemento será definido através da expressão

$$u_m = N_i u_{im} \quad (m = 1, 2) \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6) \quad (4.10)$$

onde N_i são as funções de forma definidas em (4.2), e onde u_{im} são as componentes segundo x_m dos deslocamentos dos pontos nodais i do elemento de arco mencionados como deslocamentos generalizados.

Considerem-se agora as derivadas parciais de u_m em relação a x_n , que, após algumas transformações, podem ser postas na forma

$$u_{m,n} = A_{in} u_{im} \quad (i = 1, 2, 3, 4, 5, 6), \quad (m = 1, 2) \quad (4.11)$$

onde

$$A_{in} = B_{ip} Y_{pn} \quad (p = 1, 2) \quad (4.12)$$

Trata-se agora de estabelecer as expressões das componentes dos tensores das deformações, e_{pq} , e das tensões, τ^{pq} , em função dos deslocamentos generalizados.

As expressões de e_{pp} e e_{12} são obtidas a partir de (3.63) e de (4.11), e apresentam-se, após algumas transformações, nas formas

$$e_p = e_{pp} = A_{ip} \delta_{pm} u_{im} + 0,5 A_{ip} A_{jp} \delta_{mn} u_{im} u_{jn} \quad (4.13)$$

e

$$e_{12} = 0,5 A_{i, 3-m} u_{im} + 0,5 A_{i1} A_{j2} \delta_{mn} u_{im} u_{jn} \quad (4.14)$$

$$(p = 1, 2); \quad (i, j = 1, \dots, 6); \\ (m, n = 1, 2)$$

As expressões das componentes do tensor das tensões, $\tau^p = \tau^{pp}$ e τ^{12} , são estabelecidas imediatamente, a partir de (3.34), (4.13) e (4.14), e são apresentadas nas seguintes formas compactas:

$$\tau^p = C^{pq} A_{kq} \delta_{qr} u_{kr} + 0,5 C^{pq} A_{kq} A_{\ell q} \delta_{rs} u_{kr} u_{\ell s} \quad (4.15)$$

e

$$\tau^{12} = G A_{k3-r} + G A_{ki} A_{\ell 2} \delta_{rs} u_{kr} u_{\ell s} \quad (4.16)$$

(p, q = 1, 2); (k, \ell = 1, 2, ..., 6);

(r, s = 1, 2)

4.4. Energia Potencial Total

A energia potencial total do arco é dada pela somatória da energia potencial total dos elementos em que o arco está dividido. Trata-se assim de estabelecer inicialmente as expressões da energia potencial de deformação e da energia potencial das forças externas do elemento de arco, em função dos deslocamentos generalizados. Introduzindo-se condições reduzidas de compatibilidade nos nós comuns dos elementos, e somando-se as parcelas de energia dos vários elementos, obtém-se a expressão da energia potencial do arco em função dos deslocamentos generalizados, o que caracteriza a discretização do problema.

A energia potencial de deformação do elemento de arco é dada por:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} (\sigma^p e_p + \tau^{12} e_{12} + \tau^{21} e_{21}) dV \quad (4.17)$$

que, com a introdução de (4.8) e (4.13) a (4.16), apresenta-se na forma

$$\begin{aligned} U^e = & \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_{im} C^{mn} A_{jn} + A_{i,3-m} G A_{j,3-n}) t \text{DET} dy_1 dy_2 u_{im} u_{jn} + \\ & + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_{ip} A_{jp} C^{pr} A_{kr} + 2 A_{k,3-r} G A_{i1} A_{j2}) \delta_{mn} t \text{DET} dy_1 dy_2 \times \\ & u_{im} u_{jn} u_{kr} + \frac{1}{2} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (0,25 A_{ip} A_{jp} C^{pq} A_{kq} A_{\ell q} + \\ & + A_{i1} A_{j2} G A_{k1} A_{\ell 2}) \delta_{mn} \delta_{rs} t \text{DET} dy_1 dy_2 u_{im} u_{jn} u_{kr} u_{\ell s} \end{aligned} \quad (4.18)$$

com três parcelas envolvendo deslocamentos de potência dois, três e quatro, respectivamente. A primeira parcela, com produtos do tipo $S_{imjn} u_{im} u_{jn}$, apresenta os coeficientes S_{imjn} com simetria em relação aos índices im e

j_n . As demais parcelas $T_{im jn kr} u_{im} u_{jn} u_{kr}$ e $Q_{im jn kr ls} u_{im} u_{jn} u_{kr} u_{ls}$ são tais que os coeficientes $T_{im jn kr}$ e $Q_{im jn kr ls}$ não apresentam simetria relativamente à permutação dos índices. Entretanto, por motivos que adiante se evidenciam, é necessário que se realizem mudanças nas expressões das duas últimas parcelas da energia de deformação, de modo a se obter a referida simetria. Após uma série de transformações, a expressão (4.18) pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned}
 U^e = & \frac{1}{2} \int \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_{im} C^{mn} A_{jn} + A_{i, 3-m} G A_{j, 3-n}) t \text{ DET } dy_1 dy_2 u_{im} u_{jn} + \\
 & + \frac{1}{2} \int \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(\frac{1}{3} A_{ip} A_{jp} C^{pr} A_{kr} \delta_{mn} + \frac{1}{3} A_{k, 3-r} G (A_{i1} A_{j2} + A_{j1} A_{i2}) \delta_{mn} + \right. \\
 & + \frac{1}{3} A_{ip} A_{kp} C^{pn} A_{jn} \delta_{mr} + \frac{1}{3} A_{j, 3-n} G (A_{i1} A_{k2} + A_{k1} A_{i2}) \delta_{mr} + \\
 & + \frac{1}{3} A_{jp} A_{kp} C^{pm} A_{im} \delta_{nr} + \left. \frac{1}{3} A_{i, 3-m} G (A_{j1} A_{k2} + A_{k1} A_{j2}) \delta_{ns} \right) t \text{ DET } dy_1 dy_2 \times \\
 & \times u_{im} u_{jn} u_{kr} + \\
 & + \int \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{24} \{ (A_{ip} A_{jp} C^{pq} A_{kq} A_{lq} + (A_{i1} A_{j2} + A_{j1} A_{i2}) G (A_{k1} A_{l2} + \\
 & + A_{l1} A_{k2})) \delta_{mn} \delta_{rs} + \\
 & + (A_{ip} A_{kp} C^{pq} A_{jq} A_{lq} + (A_{i1} A_{k2} + A_{k1} A_{i2}) G (A_{j1} A_{l2} + A_{l1} A_{j2})) \times \\
 & \times \delta_{mr} \delta_{ns} + \\
 & + (A_{ip} A_{lp} C^{pq} A_{jq} A_{kq} + (A_{i1} A_{l2} + A_{i2} A_{l1}) G (A_{k1} A_{j2} + A_{k2} A_{j1})) \\
 & \times \delta_{ms} \delta_{nr} \} t \text{ DET } dy_1 dy_2 u_{im} u_{jn} u_{kr} u_{ls} \quad (4.19)
 \end{aligned}$$

Considerando-se agora que a expressão da energia de deformação seja dada por:

$$\begin{aligned}
 U^e = & \frac{1}{2!} U_{im jn} u_{im} u_{jn} + \frac{1}{3!} U_{im jn kr} u_{im} u_{jn} u_{kr} + \\
 & + \frac{1}{4!} U_{im jn kr ls} u_{im} u_{jn} u_{kr} u_{ls}
 \end{aligned} \quad (4.20)$$

tem-se, por comparação com (4.19), que

$$U_{im jn} = \int \int_{-1}^1 (A_{im} C^{mn} A_{jn} + A_{i \ 3-m} G A_{j \ 3-m}) t \text{ DET } dy_1 dy_2 \quad (4.21)$$

$$\begin{aligned}
 U_{im jn kr} = & \int \int_{-1}^1 \{ (A_{ip} A_{jp} C^{pr} A_{kr} + A_{k \ 3-r} G(A_{i_1} A_{j_2} + A_{j_1} A_{i_2})) \delta_{mn} + \\
 & + (A_{ip} A_{kp} C^{pn} A_{jn} + A_{j \ 3-n} G(A_{i_1} A_{j_2} + A_{j_1} A_{i_2})) \delta_{mr} + \\
 & + (A_{jp} A_{kp} C^{pm} A_{im} + A_{i \ 3-m} G(A_{j_1} A_{k_2} + A_{k_1} A_{j_2})) \delta_{ns} \} \times \\
 & \times t \text{ DET } dy_1 dy_2
 \end{aligned} \quad (4.22)$$

e

$$\begin{aligned}
 U_{im jn kr ls} = & \int \int_{-1}^1 \{ (A_{ip} A_{jp} C^{pq} A_{kq} A_{lq} + (A_{i_1} A_{j_2} + A_{j_1} A_{i_2}) \times \\
 & \times G(A_{k_1} A_{l_2} + A_{k_2} A_{l_1})) \delta_{mn} \delta_{rs} + \\
 & + (A_{ip} A_{kp} C^{pq} A_{jq} A_{lq} + (A_{i_1} A_{k_2} + A_{k_1} A_{i_2}) \times \\
 & \times G(A_{j_1} A_{l_2} + A_{l_1} A_{j_2})) \delta_{mr} \delta_{ns} + \\
 & + (A_{ip} A_{lp} C^{pq} A_{jq} A_{kq} + (A_{i_1} A_{l_2} + A_{l_1} A_{i_2}) \times \\
 & \times G(A_{j_1} A_{k_2} + A_{k_1} A_{j_2})) \delta_{ms} \delta_{nr} \} t \text{ DET } dy_1 dy_2
 \end{aligned} \quad (4.23)$$

expressões que definem as matrizes de rigidez dos elementos $U_{im jn}$, $U_{im jn kr}$ e $U_{im jn kr ls}$, todas elas apresentando agora simetria relativamente a uma permutação dos índices, conforme se pode concluir da inspeção visual de suas expressões.

Apresentam-se agora as expressões da energia potencial das forças externas do elemento correspondentes às ações da gravidade, de carga distribuída sobre $\bar{y}_2$, de carga concentrada em (y_1, y_2) e de carga vertical distribuída sobre x_1 .

Considere-se inicialmente a ação da gravidade. Neste caso, a energia potencial das forças externas é dada por

$$p^e = - \int_{V_0} \chi^m u_m dV = - \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma g^m N_i t \text{DET} dy_1 dy_2 u_{im} \quad (4.24)$$

que pode ser colocada na forma

$$p^e = - F_{im}^e u_{im} \quad (i = 1, \dots, 6); (m = 1, 2) \quad (4.25)$$

com

$$F_{im}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \gamma g^m N_i t \text{DET} dy_1 dy_2 \quad (4.26)$$

No caso da ação carga distribuída sobre $\bar{y}_2$, a energia potencial das forças externas é dada por

$$p^e = - \int_{-1}^1 p^m u_m ds = - \int_{-1}^1 N_j(y_1, \bar{y}_2) p_{jm} N_i (J_{11}^2 + J_{21}^2)^{1/2} dy_1 u_{im} \quad (4.27)$$

que pode ser colocada na forma (4.25) com

$$F_{im}^e = \int_{-1}^1 N_j(y_1, \bar{y}_2) p_{jm} N_i (J_{11}^2 + J_{21}^2)^{1/2} dy_1 \quad (4.28)$$

No caso da ação carga concentrada sobre $(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$, a energia potencial das forças externas pode ser colocada na forma (4.25) com

$$F_{im}^e = P_m N_i(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \quad (4.29)$$

Finalmente, no caso da ação carga vertical distribuída sobre x_1 , a energia potencial das forças externas é dada por

$$p^e = - \int_{-1}^1 p u_2 ds = - \int_{-1}^1 N N_j p_j N_i(y_1, 0) \frac{1}{Y P_{11}(0, y_1)} dy_1 \delta_{m2} u_{im} \quad (4.30)$$

que pode ser colocada na forma (4.25) com

$$F_{im} = p_j \int_{-1}^1 NN_j N_i(y_1, 0) \frac{1}{YP_{11}(0, y_1)} dy_1 \delta_{m2} \quad (4.31)$$

$$(j = 1, 2, 3); (i = 1, \dots, 6); (m = 1, 2)$$

onde

$$\begin{aligned} NN_1 &= 0,5 (-y_1 + y_1^2) \\ NN_2 &= (1 - y_1^2) \\ NN_3 &= (0,5 (y_1 + y_1^2)) \end{aligned} \quad (4.32)$$

A expressão da energia potencial do arco é dada então por

$$\begin{aligned} V = \sum_e V^e &= \sum_e (-F_{im} u_{im} + \frac{1}{2!} U_{imjn} u_{im} u_{jn} + \\ &+ \frac{1}{3!} U_{imjnr} u_{im} u_{jn} u_{kr} + \frac{1}{4!} U_{imjnkr} u_{im} u_{jn} u_{kr} u_{ls}) \end{aligned} \quad (4.33)$$

No desenvolvimento que se segue, será conveniente introduzir as transformações

$$\begin{aligned} im &= 2 \times i + m - 2 & kr &= 2 \times k + r - 2 \\ jn &= 2 \times j + n - 2 & ls &= 2 \times \ell + s - 2 \end{aligned} \quad (4.34)$$

$$\begin{aligned} (im, jn, kr, ls &= 1, 2, \dots, 12) \\ (i, j, k, \ell &= 1, \dots, 6) \\ (m, n, r, s &= 1, 2) \end{aligned}$$

indicar im, jn, kr e ls , respectivamente por i, j, k, ℓ , e apresentar o deslocamento generalizado u_{im} por Q_{im} , ou simplesmente por Q_i . Nestas condições, pode-se escrever a seguinte expressão da energia potencial total do arco

$$\begin{aligned} V = V_i Q_i + \frac{1}{2!} V_{ij} Q_i Q_j + \frac{1}{3!} V_{ijk} Q_i Q_j Q_k + \frac{1}{4!} V_{ijkl} Q_i Q_j Q_k Q_\ell \\ (i, j, k, \ell = 1, \dots, 12) \end{aligned} \quad (4.35)$$

onde V_i é uma função linear do carregamento, podendo ser colocado na forma

$$V_i = P V_i^! \quad (4.36)$$

e calculado através das expressões (4.26), (4.28), (4.29) e (4.30), e onde V_{ij} , V_{ijk} e V_{ijkl} são calculados através das expressões (4.21), (4.22) e (4.23).

4.5. Trajetoria Fundamental de Equilbrio

As equaes de equilbrio do arco, de acordo com o teorema da energia potencial total, so dadas por

$$\frac{\partial V}{\partial Q_i} = V_i^! P + V_{ij} Q_j + \frac{1}{2!} V_{ijk} Q_j Q_k + \frac{1}{3!} V_{ijkl} Q_j Q_k Q_l = 0 \quad (4.37)$$

Conforme se mencionou no incio deste captulo, a resoluo da equao (4.37) ser realizada pela combinao adequada dos mtodos da perturbao e de Newton-Raphson a partir de uma certa soluo equilibrada conhecida, permitindo assim obter uma nova soluo equilibrada com a preciso desejada. A repetio deste procedimento conduz trajetria fundamental de equilbrio.

Sejam Q_i^* e P^* os deslocamentos generalizados e a fora generalizada correspondentes a uma soluo equilibrada conhecida. Trata-se agora de estabelecer a transformao $V \rightarrow V^*$, da qual resultam as equaes de equilbrio que permitiro determinar a soluo equilibrada $\bar{Q}_j$, $\bar{P}$ da trajetria de equilbrio que emerge de Q_i^* e P^* .

A soluo equilibrada procurada pode ser colocada na forma

$$\begin{aligned} \bar{P} &= P^* + \lambda \\ \bar{Q}_i &= Q_i^* + q_i \end{aligned} \quad (4.38)$$

sendo pois λ e q_j os incrementos de carga e de deslocamentos generalizados que conduzem soluo equilibrada $\bar{P}$, $\bar{Q}_j$, devendo pois satisfazer as seguintes equaes de equilbrio

$$\begin{aligned} V_i^!(P^* + \lambda) + V_{ij}(Q_j^* + q_j) + \frac{1}{2!} V_{ijk}(Q_j^* + q_j)(Q_k^* + q_k) + \\ + \frac{1}{3!} V_{ijkl}(Q_j^* + q_j)(Q_k^* + q_k)(Q_l^* + q_l) = 0 \end{aligned} \quad (4.39)$$

que podem ser apresentadas, em srie de potncia de q_i , na forma

$$V_i^* + V_{ij}^* q_j + \frac{1}{2!} V_{ijk}^* q_j q_k + \frac{1}{3!} V_{ijkl}^* q_j q_k q_l = 0 \quad (4.40)$$

onde

$$\begin{aligned} V_i^* &= V_i' \lambda \\ V_{ij}^* &= V_{ij} + V_{ijk} Q_k^* + \frac{1}{2!} V_{ijkl} Q_k^* Q_l^* \\ V_{ijk}^* &= V_{ijk} + V_{ijkl} Q_l^* \end{aligned} \quad (4.41)$$

$$V_{ijkl}^* = V_{ijkl}$$

Considere-se agora o estabelecimento, pelo método das perturbações, de trajetória aproximada de equilíbrio emergindo de P^* e Q_i^* . Seja s um parâmetro de perturbação tal que

$$\lambda = \lambda(s) \quad (4.42)$$

$$q_j = q_j(s)$$

podendo, pois, a equação de equilíbrio (4.40) ser colocada na seguinte forma paramétrica:

$$\begin{aligned} f_i(s) &= \lambda(s) V_i' + V_{ij}^* q_j(s) + \frac{1}{2!} V_{ijk}^* q_j(s) q_k(s) + \\ &+ \frac{1}{3!} V_{ijkl}^* q_j(s) q_k(s) q_l(s) = 0 \end{aligned} \quad (4.43)$$

Como as equações de equilíbrio $f_i(s) = 0$ são válidas para qualquer valor de s , então serão verificadas as equações

$$\frac{df_i(s)}{ds} = 0, \quad \frac{d^2 f_i(s)}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^n f(s)}{ds^n} = 0 \quad (4.44)$$

chamadas equações de perturbação.

Apresentam-se a seguir as equações de perturbação de até 3a. ordem:

$$\lambda_{,1}(s) V_i' + V_{ij}^* q_{j,1}(s) + V_{ijk}^* q_{j,1}(s) q_k(s) + \\ + \frac{1}{2!} V_{ijk\ell}^* q_{j,1}(s) q_k(s) q_\ell(s) = 0$$

$$\lambda_{,2}(s) V_i' + V_{ij}^* q_{j,2}(s) + V_{ijk}^* q_{j,1}(s) q_{k,1}(s) + V_{ijk}^* q_{j,2}(s) q_k(s) + \\ + \frac{1}{2!} V_{ijk\ell}^* q_{j,2}(s) q_k(s) q_\ell(s) + \\ + V_{ijk\ell}^* q_{j,1}(s) q_{k,1}(s) q_\ell(s) = 0$$

(4.45)

$$\lambda_{,3}(s) V_i' + V_{ij}^* q_{j,3}(s) + 2V_{ijk}^* q_{j,2}(s) q_{k,1}(s) + \\ + V_{ijk}^* q_{j,2}(s) q_{k,1}(s) + V_{ijk}^* q_{j,3}(s) q_k(s) + \\ + \frac{1}{2!} V_{ijk\ell}^* q_{j,3}(s) q_k(s) q_\ell(s) + \\ + 3V_{ijk\ell}^* q_{j,2}(s) q_{k,1}(s) q_\ell(s) + \\ + V_{ijk\ell}^* q_{j,1}(s) q_{k,1}(s) q_{\ell,1}(s) = 0$$

que, avaliadas em $\lambda = 0$ e $q_j = 0$ tomam a forma

$$\lambda_{,1} V_i' + V_{ij}^* q_{j,1} = 0$$

$$\lambda_{,2} V_i' + V_{ij}^* q_{j,2} + V_{ijk}^* q_{j,1} q_{k,1} = 0$$

(4.46)

$$\lambda_{,3} V_i' + V_{ij}^* q_{j,3} + 3V_{ijk}^* q_{j,2} q_{k,1} + V_{ijk\ell}^* q_{j,1} q_{k,1} q_{\ell,1} = 0$$

e cuja resolução conduz à seguinte trajetória aproximada de equilíbrio emergindo de P^* e Q_i^* :

$$\bar{p}^a = p^* + \lambda_{,1} s + \frac{1}{2!} \lambda_{,2} s^2 + \frac{1}{3!} \lambda_{,3} s^3 + \dots$$

(4.47)

$$\bar{q}_j^a = q_j^* + q_{j,1} s + \frac{1}{2!} q_{j,2} s^2 + \frac{1}{3!} q_{j,3} s^3 + \dots$$

Neste trabalho, adota-se λ como parâmetro de perturbação e, assim, as equações (4.46) tomam a forma

$$\begin{aligned} V_i' + V_{ij}^* q_{j,1} &= 0 \\ V_{ijk}^* q_{j,1} q_{k,1} + V_{ij}^* q_{j,2} &= 0 \end{aligned} \quad (4.48)$$

$$3V_{ijk}^* q_{j,2} q_{k,1} + V_{ijkl}^* q_{j,1} q_{k,1} q_{l,1} + V_{ij}^* q_{j,3} = 0$$

e a trajetória aproximada será dada por

$$\bar{p}^a = p^* + \lambda \quad (4.49)$$

$$\bar{q}_j^a = q_j^* + q_{j,1} \lambda + \frac{1}{2!} q_{j,2} \lambda^2 + \frac{1}{3!} q_{j,3} \lambda^3 + \dots$$

Trata-se agora de melhorar a aproximação de uma certa solução equilibrada $\bar{p}^a, \bar{q}_j^a$, pertencente à trajetória aproximada de equilíbrio, pela aplicação do método de Newton Raphson, que conduz a:

$$\begin{aligned} \bar{p} &= \bar{p}^a \\ \bar{q}_j &= \bar{q}_j^a + \delta q_j \end{aligned} \quad (4.50)$$

solução que deve, pois, satisfazer as equações

$$\bar{p} V_i' + V_{ij} \bar{q}_j + \frac{1}{2!} V_{ijk} \bar{q}_j \bar{q}_k + \frac{1}{3!} V_{ijkl} \bar{q}_j \bar{q}_k \bar{q}_l = 0 \quad (4.51)$$

Substituindo (4.50) em (4.51) e desenvolvendo esta expressão em série de potências de δq_i , tem-se

$$\begin{aligned} &\bar{p} V_i' + V_{ij} \bar{q}_j^a + \frac{1}{2!} V_{ijk} \bar{q}_j^a \bar{q}_k^a + \frac{1}{3!} V_{ijkl} \bar{q}_j^a \bar{q}_k^a \bar{q}_l^a + \\ &+ (V_{ij} + V_{ijk} \bar{q}_j^a + \frac{1}{2!} V_{ijk} \bar{q}_k^a \bar{q}_l^a) \delta q_j + \\ &+ \text{termos em } (\delta q_j)^r (\delta q_k)^s (\delta q_l)^t = 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

$$1 \leq r + s + t \leq 4$$

Assim, de acordo com o método de Newton-Raphson, estabelece-se o seguinte processo iterativo para a determinação de δQ_j com a precisão desejada

$$\delta Q_j \Big|_n = - \bar{P} \left(V_{ij}^* - V_{ij}^* \right) \Big|_n \quad (4.53)$$

onde

$$V_{ij}^* \Big|_n = V_{ij} + V_{ijk} \bar{Q}_k^a \Big|_n + \frac{1}{2!} V_{ijk\ell} \bar{Q}_k^a \Big|_n \bar{Q}_\ell^a \Big|_n \quad (4.54)$$

corresponde à matriz de rigidez tangente em $\bar{Q}_j^a \Big|_n$ e

$$V_i^* \Big|_n = V_{ij} \bar{Q}_j^a \Big|_n + \frac{1}{2!} V_{ijk} \bar{Q}_j^a \Big|_n \bar{Q}_k^a \Big|_n + \frac{1}{3!} V_{ijk\ell} \bar{Q}_j^a \Big|_n \bar{Q}_k^a \Big|_n \bar{Q}_\ell^a \Big|_n \quad (4.55)$$

corresponde à aproximação de ordem n das forças nodais.

A solução melhorada será dada então por

$$\bar{Q}_j \Big|_{n+1} = \bar{Q}_j \Big|_n + \delta Q_j \Big|_{n+1}, \quad (4.56)$$

observando-se o seguinte critério de aproximação

$$\sum \left(\delta Q_j \Big|_{n+1} / \bar{Q}_j \Big|_{n+1} \right)^2 < \varepsilon. \quad (4.57)$$

4.6. Trajetória Pós-Crítica

Sejam P^c e Q_j^c a força e os deslocamentos generalizados correspondentes à solução equilibrada crítica, determinados pela observação da condição

$$| V_{ij}^e(P^c, Q_j^c) | = 0 \quad (4.58)$$

na trajetória fundamental.

Estabelece-se agora a transformação $V \rightarrow W$, da qual resultam as equações de equilíbrio que permitirão determinar as soluções equilibradas da trajetória pós-crítica, seja de um ponto de bifurcação seja de um ponto limite.

Considere-se um conjunto de coordenadas incrementais

$$Q_i = Q_i^F(P) + q_i \quad (4.59)$$

onde $Q_i^F(P)$ são os deslocamentos generalizados da solução equilibrada da trajetória fundamental correspondente a P . Estabelece-se a transformação

$$W(q_i, P) = V(Q_i^F(P) + q_i, P) \quad (4.60)$$

definindo-se pois nova função energia potencial total, com as seguintes propriedades

$$W_i(0, P) = 0$$

$$W_i'(0, P) = 0 \quad (4.61)$$

$$W_i''(0, P) = 0$$

⋮

onde

$$W_i = \frac{\partial W}{\partial q_i} \quad (4.62)$$

$$W_i' = \frac{\partial W_i}{\partial P}$$

Introduzindo-se (4.59) em (4.35), estabelece-se a expressão de $W(q_i, p)$ em série de potências de q_i

$$W(q_i, P) = W_0 + W_i q_i + \frac{1}{2!} W_{ij} q_i q_j + \frac{1}{3!} W_{ijk} q_i q_j q_k + \frac{1}{4!} W_{ijkl} q_i q_j q_k q_l \quad (4.63)$$

onde

$$W_0 = V_i Q_i^F + \frac{1}{2!} V_{ij} Q_i^F Q_j^F + \frac{1}{3!} V_{ijk} Q_i^F Q_j^F Q_k^F + \frac{1}{4!} V_{ijkl} Q_i^F Q_j^F Q_k^F Q_l^F$$

$$W_i = V_i + V_{ij} Q_j^F + \frac{1}{2!} V_{ijk} Q_j^F Q_k^F + \frac{1}{3!} V_{ijkl} Q_j^F Q_k^F Q_l^F$$

$$W_{ij} = V_{ij} + V_{ijk} Q_k^F + \frac{1}{2!} V_{ijkl} Q_k^F Q_l^F \quad (4.64)$$

$$W_{ijk} = V_{ijk} + V_{ijkl} Q_l^F$$

$$W_{ijkl} = V_{ijkl}$$

são funções do carregamento P .

Admitindo-se a existência de ponto crítico distinto na trajetória fundamental, os determinantes de estabilidade $|V_{ij}(Q_j^c, P^c)|$ e $|W_{ij}(0, P^c)|$ se anulam no ponto crítico, e uma trajetória pós-crítica emergindo desse ponto poderá ser estabelecida, pela aplicação do método das perturbações, em função de um certo parâmetro generalizado s , com a forma

$$\begin{aligned} q_j &= q_j(s) \\ P &= P(s) \end{aligned} \quad (4.65)$$

Considerando-se que as equações de equilíbrio no espaço transformado são dadas por

$$W_i = W_i + W_{ij} q_j + \frac{1}{2!} W_{ijk} q_j q_k + \frac{1}{3!} W_{ijkl} q_j q_k q_l \quad (4.66)$$

e substituindo-se (4.65) em (4.66) estabelecem-se as equações de equilíbrio em função do parâmetro s

$$W_i(q_j(s), P(s)) = 0 \quad (4.67)$$

o que permite então gerar as equações de perturbação

$$\frac{d^r W_i}{ds^r} = 0 \quad (r = 1, 2, \dots) \quad (4.68)$$

que a seguir são apresentadas até a de ordem 3.

$$W_{ij} q_{j,1} + W'_i P_{,1} = 0$$

$$W_{ijk} q_{j,1} q_{k,1} + W_{ij} q_{j,2} + 2W'_{ij} q_{j,1} P_{,1} + W'_i P_{,2} + W''_i (P_{,1})^2 = 0 \quad (4.69)$$

$$\begin{aligned} &W_{ijkl} q_{j,1} q_{k,1} q_{l,1} + 3W_{ijk} q_{j,1} q_{k,2} + W_{ij} q_{j,3} + \\ &+ 3W'_{ijk} q_{j,1} q_{k,1} P_{,1} + 3W'_{ij} q_{j,2} P_{,1} + 3W'_{ij} q_{j,1} P_{,2} + \\ &+ W'_i P_{,3} + 3W''_{ij} q_{j,1} P_{,1}^2 + 3W''_i P_{,1} P_{,2} + W'''_i (P_{,1})^3 = 0 \end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}
 W_i &= W_i + W_{ij} q_j + \frac{1}{2!} W_{ijk} q_j q_k + \frac{1}{3!} W_{ijkl} q_j q_k q_l \\
 W'_i &= W'_i + W'_{ij} q_j + \frac{1}{2!} W'_{ijk} q_j q_k + \frac{1}{3!} W'_{ijkl} q_j q_k q_l \\
 W''_i &= W''_i + W''_{ij} q_j + \frac{1}{2!} W''_{ijk} q_j q_k + \frac{1}{3!} W''_{ijkl} q_j q_k q_l \\
 W_{ij} &= W_{ij} + W_{ijk} q_k + \frac{1}{2!} W_{ijkl} q_k q_l \\
 W'_{ij} &= W'_{ij} + W'_{ijk} q_k + \frac{1}{2!} W'_{ijkl} q_k q_l \\
 W_{ijk} &= W_{ijk} + W_{ijkl} q_k q_l \\
 W'_{ijk} &= W'_{ijk} + W'_{ijkl} q_k q_l
 \end{aligned}
 \tag{4.70}$$

e

$$\begin{aligned}
 W_{ijkl} &= W_{ijkl} & W'_{ijkl} &= W'_{ijkl} \\
 W'_{ij} &= V_{ij} + V_{ijk} Q_k^F + V_{ijkl} Q_k^F Q_l^F \\
 W'_{ijk} &= V_{ijk} + V_{ijkl} Q_l^F \\
 W'_{ijkl} &= 0 \\
 &\vdots
 \end{aligned}
 \tag{4.71}$$

Avaliando-se as equações de perturbações no ponto crítico ($q_j = 0, P = P^c$), observando-se que

$$\begin{aligned}
 W_i(0, P^c) &= 0 \\
 W'_i(0, P^c) &= W''_i(0, P^c) = \dots = 0
 \end{aligned}
 \tag{4.72}$$

e indicando-se

$$\begin{aligned}
 W_{ij} \Big|_c &\text{ por } \bar{W}_{ij} \\
 W_{ijk} \Big|_c &\text{ por } \bar{W}_{ijk}
 \end{aligned}$$

as equações de perturbação tomam a forma

$$\bar{W}_{ij} q_{j,1}^c = 0$$

$$\bar{W}_{ijk} q_{j,1}^c q_{k,1}^c + \bar{W}_{ij} q_{j,2}^c + 2\bar{W}'_{ij} q_{j,1}^c p_{,1}^c = 0$$

(4.73)

$$\begin{aligned} & \bar{W}_{ijkl} q_{j,1}^c q_{k,1}^c q_{l,1}^c + 3\bar{W}_{ijk} q_{j,1}^c q_{k,2}^c + \bar{W}_{ij} q_{j,3}^c + \\ & + 3\bar{W}'_{ijk} q_{j,1}^c q_{k,1}^c p_{,1}^c + 3\bar{W}'_{ij} q_{j,2}^c p_{,1}^c + 3\bar{W}''_{ij} q_{j,1}^c p_{,2}^c + \\ & + 3\bar{W}'''_{ij} q_{j,1}^c (p_{,1}^c)^2 = 0 \end{aligned}$$

onde

$$\bar{W}_{ij} = V_{ij} + V_{ijk} Q_k^{Fc} + \frac{1}{2!} V_{ijkl} Q_k^{Fc} Q_l^{Fc}$$

$$\bar{W}'_{ij} = V_{ijk} Q_k^{Fc} + V_{ijkl} Q_k^{Fc} Q_l^{Fc}$$

$$\bar{W}''_{ij} = V_{ij} Q_k^{Fc} + V_{ijkl} (Q_k^{Fc} Q_l^{Fc} + Q_k^{Fc} Q_l^{Fc})$$

(4.74)

$$\bar{W}_{ijk} = V_{ijk} + V_{ijkl} Q_l^{Fc}$$

$$\bar{W}'_{ijk} = V_{ijkl} Q_l^{Fc}$$

$$\bar{W}_{ijkl} = V_{ijkl}$$

O esquema de soluções e contrações apresentado por Thompson (60) e reproduzido abaixo conduz à determinação de $q_{j,1}^c, q_{j,2}^c, \dots, p_{,1}^c, p_{,2}^c, \dots$

1a. equação $q_{j,1}^c$

2a. equação $P_{,1}^c = - \frac{\tilde{W}_3}{2\tilde{W}'_2}$
 $q_{j,2}^c$

3a. equação $P_{,2}^c = - \frac{\tilde{W}_4}{3\tilde{W}'_2}$
 $q_{j,3}^c$

onde

$$\tilde{W}_3 = \bar{W}_{ijk} q_{i,1}^c q_{j,1}^c q_{k,1}^c$$

$$\tilde{W}'_2 = \bar{W}'_{ij} q_{i,1}^c q_{j,1}^c$$

(4.75)

$$\begin{aligned} \tilde{W}_4 = & \bar{W}_{ijkl} q_{i,1}^c q_{j,1}^c q_{k,1}^c q_{l,1}^c + 3\bar{W}_{ijk} q_{i,1}^c q_{j,1}^c q_{k,2}^c + \\ & + 3\bar{W}_{ijk} q_{j,1}^c q_{i,1}^c q_{k,1}^c P_{,1}^c + 3\bar{W}'_{ij} q_{i,1}^c q_{j,2}^c P_{,1}^c + \\ & + 3\bar{W}''_{ij} q_{i,1}^c q_{j,1}^c (P_{,1}^c)^2 = 0 \end{aligned}$$

Assim, a trajetória pós-crítica na vizinhança do ponto crítico será dada por:

$$q_j = q_{j,1}^c s + \frac{1}{2!} q_{j,2}^c s^2 \quad (4.76)$$

$$P = P^c + P_{,1}^c s + \frac{1}{2!} P_{,2}^c s^2$$

ou, adotando-se q_M como parâmetro de perturbação,

$$q_M = q_M$$

$$q_j = q_{j,1}^c q_M + \frac{1}{2!} q_{j,2}^c q_M^2 \quad j \neq M \quad (4.77)$$

$$P = P^c + P_{,1}^c q_M + \frac{1}{2!} P_{,2}^c q_M^2$$

Caso se desejasse obter a trajetória pós-crítica fora da vizinhança do ponto crítico, não haveria grandes dificuldades adicionais, pois bastaria aplicar os conceitos apresentados no parágrafo anterior.

BIBLIOGRAFIA

1. André, J. C.
"Introdução ao Método dos Elementos Finitos para as Estruturas de Comportamento Linear"
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1975.
2. Ashwell, D. G.; Gallagher, R. H. (ed.)
"Finite Elements for Thin Shells and Curved Members"
John Wiley & Sons, 1976.
3. Austin, W. J.; Ross, T. J.
"Elastic Buckling of Arches under Symmetrical Loading"
ASCE - J. Structural Divison, ST5, 1976.
4. Bajpai, A. C., Calus, I. M.; Fairley, J. A.
"Numerical Methods for Engineers and Scientists"
John Wiley & Sons Ltd., 1977.
5. Bathe, K.-J.
"Finite Element Procedures in Engineering Analysis"
Prentice-Hall, New Jersey, 1982.
6. Botelho, D. L. R.
"Introdução à Teoria Geral da Estabilidade"
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1978.
7. Brush, D. O.; Almroth, B. O.
"Buckling of Bars, Plates and Shells"
McGraw-Hill Inc., 1975.
8. Costa, R. C. F.; Domingues, H. H.; Callioli, C. A.
"Álgebra Linear e Aplicações"
Ed. Atual, 1978.
9. Courbon, J.
"Flambement des Arcs"
Annales de l'Institut Technique du Batiment et des Travaux Publics,
1967.

10. Courbon, J.
"Résistance des Matériaux"
Dunod, 1955.
11. Dickie, J. F.; Broughton, P.
"Shallow Circular Vaults"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM1, 1973.
12. Dickie, J. F.; Broughton, P.
"Stability Criteria for Shallow Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM3, 1971.
13. Dym, C. L.
"On Extensibility and the Buckling of Shallow and Steep Arches"
Proceedings of the 6th Southeastern Conference on Theoretical and Applied Mechanics, Florida, 1972.
14. Dym, C. L.
"Buckling and Postbuckling Behavior of Steep Compressible Arches"
Int. J. Solids Structures, V9, 1973.
15. Dym, C. L.
"Bifurcation Analysis for Shallow Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM2, 1973.
16. Dym, C. L.
"Stability Theory and its Applications to Structural Mechanics"
Noordhoff International Publishing, 1974.
17. Fawzi, S. M.
"Analysis of Large Deflections and Stability of Tied Circular Arches"
76-11, 314, University Microfilms International, 1975.

18. Frøberg, C.-E.
"Introduction to Numerical Analysis"
Addison-Wesley Publishing Company, 1974.
19. Fruchtengarten, J.
"Sobre o Comportamento Pós-Crítico de Chapas Metálicas"
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1979.
20. Fung, Y. C.
"Foundations of Solid Mechanics"
Prentice Hall of India, 1968.
21. Gallagher, R. H.; Yamada, Y.; Oden, J. T.; (ed.)
"Recent Advances in Matrix Methods of Structural Analysis and Design"
The University of Alabama Press, 1971.
22. Gelfand, I. M.
"Lectures on Linear Algebra"
Interscience Publishers, 1967.
23. Gjelsvik, A.; Bodner, S. R.
"The Energy Criterion and Snap Buckling of Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM5, 1962.
24. Godement, R.
"Cours d'Algèbre"
Hermann, 1963.
25. Green, A. E.; Zerna, W.
"Theoretical Elasticity"
Oxford University Press, 1954.
26. Hakam, B.
"Nonlinear Buckling of Circular Arches"
71-7008, University Microfilms International, 1972.

27. Hutchinson, J. W.; Koiter, W. T.
"Postbuckling Theory"
Applied Mechanics Reviews, 23(12), 1970.
28. Koiter, W. T.
"Elastic Stability and Post Buckling Behavior"
Proceedings of a Symposium on Nonlinear Problems, University of Wisconsin, 1963.
29. Lang, T. E.
"Post Buckling Response of Structures using the Finite Element Method"
70-8422, University Microfilms Inc., 1969.
30. Langhaar, H. L.; Boresi A. P.; Carver, O. R.
"Energy Theory of Buckling of Circular Elastic Rings and Arches"
31. Lee, L. H. N.; Murphy, L. M.
"Inelastic Buckling of Shallow Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM1, 1968.
32. Lima, Elon Lages de
"Curso de Análise"
IMPA, 1976.
33. Lind, N. C.
"Numerical Buckling Analysis of Arches and Rings"
The Structural Engineer, vol. 44, 1966.
34. Lindenberg Neto, H.
"Sobre a Formulação Matemática dos Problemas de Estabilidade das Estruturas"
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1981.
35. Mazzilli, C. E. N.
"Sobre a Instabilidade de Estruturas Elásticas Sensíveis a Imperfeições"
Dissertação de Mestrado, EPUSP, 1979.

36. Mazzilli, C. E. N.
"A Class of Non-Linear Vibrations and their Stability"
Tese de Doutorado, University College, Londres, 1982.
37. Masur, E. F.; Schreyer, H. L.
"Buckling of Shallow Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM4, 1966.
38. Masur, E. F.; Schreyer, H. L.
"Dynamic Buckling of Shallow Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division
39. Masur, E. F.; Belytschko, T.; Glaum, L. W.
"Buckling of Structures with Finite Prebuckling Deformations:
A Perturbation, Finite Element Analysis"
Int. J. Solids Structures, Vol. 11, 1975.
40. McConnell, A. J.
"Applications of Tensor Analysis"
Dover Publications, 1957.
41. Novozhilov, V. V.
"Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity"
Graylock Press, 1953.
42. Oran, C.
"Complementary Energy Method for Buckling of Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM2, 1968.
43. Oran, C.; Reagan, R. S.
"Buckling of Uniformly Compressed Circular Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM4, 1969.
44. Pedro, J. O.; André, J. C.
"Elementos Finitos para Estudos de Cascas Derivados de Elementos
Tridimensionais Parabólicos"
Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa, 1974.

45. Pedro, J. O.
"Dimensionamento das Barragens Abóbada pelo Método dos Elementos Finitos"
Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa, Memória nº 479, 1977.
46. Popov, E. P.; Shariף, P.
"Nonlinear Buckling Analysis of Sandwich Arches"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM5, 1971.
47. Prager, W.
"Introduction to Mechanics of Continua"
Dover Publications Inc., 1961.
48. Roikjaer, M.; Nielsen, M. P.; Laursen, M. E.
"Stability Analysis of Beams and Arches by Energy Methods"
Technical University of Denmark
49. Sanders, J. L.
"Nonlinear Theories for Thin Shells"
Quarterly of Applied Mathematics, vol. 21, 1963.
50. Sewell, M. J.
"The Static Perturbation Technique in Buckling Problems"
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 13, 1965.
51. Simitses, G. J.
"An Introduction to the Elastic Stability of Structures"
Prentice Hall, Inc., 1976.
52. Simitses, G. J.
"Snapping of Low Arches with Nonuniform Stiffness"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM1, 1977.
53. Souza Lima, V. M.; Venancio Filho, F.
"Considerações sobre a Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas"
Laboratório de Computação Científica, 1982.

54. Timoshenko, S. P.; Gere, J. M.
"Theory of Elastic Stability"
McGraw Hill Kogakusha, Ltd., 1961.
55. Thompson, J. M. T.
"Basic Principles in the General Theory of Elastic Stability"
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 11, 1963.
56. Thompson, J. M. T.
"The Estimation of Elastic Critical Loads"
J. Mech. Phys. Solids, 1963.
57. Thompson, J. M. T.
"The Branching Analysis of Perfect and Imperfect Discrete Structural Systems"
J. Mech. Phys. Solids, Vol. 17, 1969.
58. Thompson, J. M. T.; Walker, A. C.
"A General Theory for the Branching Analysis of Discrete Structural Systems"
Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 1969.
59. Thompson, J. M. T.
"An Introduction to Elastic Stability"
IPC Science and Technology Press, 1973.
60. Thompson, J. M. T.; Hunt, G. W.
"A General Theory of Elastic Stability"
John Wiley & Sons, 1973.
61. Walker, A. C.; Croll, J. G. A.
"Elementos de Estabilidade Estrutural"
Ed. Reverte, 1975.
62. Walker, A. C.
"A Nonlinear Finite Element Analysis of Shallow Circular Arches"
Int. J. Solids Structures, Vol. 5, 1969.

63. Washizu, K.
"Variational Methods in Elasticity and Plasticity"
Pergamon Press, 1975.
64. Wen, R. K.; Lange, J.
"Curved Beam Element for Arch Buckling Analysis"
ASCE - J. Structural Division, ET11, 1981.
65. Wempner, G. A.; Kesti, N. E.
"On the Buckling of Circular Arches and Rings"
1962.
66. Wempner, G. A.; Ewbank, T.
"Buckling of Circular Arches under Nonuniform Pressure"
ASCE - J. Engineering Mechanics Division, EM4, 1963.
67. Zagottis, D. L.
"Cálculo Tensorial"
Departamento de Eng. de Estruturas e Fundações, EPUSP, 1978.
68. Zagottis, D. L.
"Conceituação do Método dos Elementos Finitos"
Departamento de Eng. de Estruturas e Fundações, EPUSP
69. Ziegler, H.
"Principles of Structural Stability"
Birkhäuser, 1977.
70. Zienkiewicz, O. C.
"The Finite Element Method"
McGraw-Hill, 1977.
71. Zienkiewicz, O. C.; Wood, R. D.
"Geometrically Nonlinear Finite Element Analysis of Beams, Frames, Arches, and Axisymmetric Shells"
Computer & Structures, Vol. 7, 1977.