João Cyro André

INTRODUÇÃO AO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA AS
ESTRUTURAS DE COMPORTAMENTO LINEAR

Dissertação de Mestrado apresentada à
Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo para a obtenção do Título
de Mestre em Engenharia

Orientador:

Décio Leal de Zagottis

São Paulo, Novembro de 1975

P R E F Á C I O

Este trabalho tem como objetivos completar os requisitos para obtenção do grau de mestre em engenharia e propiciar um texto para os que se iniciam no estudo do método dos elementos finitos.

Apresentam-se, no primeiro capítulo, conceitos básicos da teoria da elasticidade importantes no desenvolvimento do tema.

No segundo capítulo desenvolvem-se os teoremas variacionais da teoria da elasticidade. Estabelecem-se os teoremas da energia potencial total, da energia potencial complementar total e um conjunto de outros teoremas, com destaque para o de dois campos, devido a Reissner, e o de três campos, devido a Oliveira.

Intróduz-se no terceiro capítulo, o conceito de solução aproximada contínua. Inicialmente apresenta-se um modelo genérico, análogo a todos os modelos contínuos. Em seguida avalia-se o erro global das soluções aproximadas contínuas, no caso de serem compatíveis ou equilibradas, estabelecendo extremos superior e inferior para a energia de deformação da solução exata.

Dedica-se o quarto capítulo ao método dos elementos finitos aplicado às estruturas de comportamento linear. Apresenta-se uma visão panorâmica do estágio atual do método, referindo-se aos vários processos e modelos derivados. Estabelecem-se, relativamente ao processo dos deslocamentos, a técnica de discretização propriamente dita e sua justificativa. Finalmente desenvolve-se a formulação de vários elementos, correspondentes aos possíveis modelos derivados do processo dos deslocamentos.

Ressalta-se a importância das obras de Oliveira |¹³| a |²⁰| no desenvolvimento de todo o trabalho, e as de Fung |⁴| e Sokolnikoff |³²|, no primeiro capítulo, de Washizu |³⁴|, no segundo capítulo, de Prager |³⁰| no terceiro capítulo e Pedro |²²|, no quarto capítulo.

O autor deseja expressar os seus agradecimentos aos professores Decio Leal de Zagottis, Maurício Gertsenchtein e Victor Manuel de Souza Lima, da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, ao professor Jairo Porto, da Escola de Engenharia de Lins, e aos engenheiros José de Oliveira Pedro e Manuel Pinho de Miranda, do Laboratório Nacional de Engenharia Civil de Lisboa, que colaboraram no desenvolvimento deste trabalho.

Novembro-75

JOÃO CYRO ANDRÉ

F O R E W O R D

The purpose of this work is completing the requirements for obtaining the master degree in engineering and providing a text for those who are initiating in the study of the finite-element method.

The first chapter refers to the basic concepts of the theory of elasticity being important to the development of this theme.

In chapter 2 the variational theorems of the theory of elasticity are developed. The total potential energy theorem, the total complementary potential energy theorem, and a group of other theorems, are established, emphasis being placed on the ones of two fields, due to Reissner, and the ones of three fields, due to Oliveira.

It is introduced, in the third chapter, the concept of approximate continuous solution. Initially is presented a general model, analogous to all continuous models. Following, the overall error of the approximate continuous solutions is evaluated, whether compatible or in equilibrium, by establishing upper and lower extremes for the deformation energy of the exact solution.

The fourth chapter is dedicated to the finite-element method as applied to structures of linear behavior. An overall view of the present stage of the method, referring to the various processes and models derived, is presented. It is established, as refers the displacement process, the discretizing technique proper and its justification. Finally, the formulation of various elements corresponding to the possible models derived from the displacement process, is developed.

It must be emphasized the importance of the works published by Oliveira |¹³| to |²⁰| for the development of the entire work, as well as those by Fung |⁴| and Sokolnikoff |³²|, in the first chapter, those by Washizu |³⁴|, in the second chapter, those by Prager |³⁰|, in the third chapter, and Pedro |²²|, in the fourth chapter.

November-75

JOÃO CYRO ANDRÉ

Í N D I C E

Cap. 1 - ASPECTOS BÁSICOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

1.1 - Estado triplo de deformação	1.1
1.2 - Condições de compatibilidade	1.7
1.3 - Estado triplo de tensão	1.12
1.4 - Equações de equilíbrio	1.16
1.5 - Teorema do trabalho	1.20
1.6 - Estado natural	1.22
1.7 - Relações tensões-deformações	1.23
1.8 - Lei de Hooke generalizada	1.27
1.9 - Formulação do problema elástico. Unicidade de solução	1.32

Cap. 2 - TEOREMAS VARIACIONAIS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

2.1 - Teorema dos deslocamentos virtuais.....	2.1
2.2 - Teorema da energia potencial total	2.2
2.3 - Aplicação do teorema da energia potencial total	2.8
2.4 - Teorema das forças virtuais	2.13
2.5 - Teorema da energia potencial complementar total	2.15
2.6 - Aplicação do teorema da energia potencial complementar total	2.22
2.7 - Teorema de três campos (ou da energia poten cial total generalizada)	2.27
2.8 - Aplicação do teorema de 3 campos	2.31
2.9 - Teoremas variacionais derivados	2.36

Cap. 3 - MODELO CONTÍNUO GENÉRICO.

EXTREMOS DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO

3.1 - Introdução	3.1
3.2 - Modelo contínuo genérico	3.2
3.2.1 - Equações de campo e fronteira	3.2
3.2.2 - Teorema do trabalho	3.4
3.2.3 - Relações tensões-deformações	3.5
3.2.4 - Teoremas variacionais	3.7
3.3 - Conceito de distância. Aplicação ao modelo genérico	3.11
3.3.1 - Elementos básicos da análise funcio_ nal	3.11
3.3.2 - Análise funcional aplicada à teoria das estruturas	3.16
3.3.3 - Teoremas de mínimo	3.20
3.3.4 - Hiperesfera das soluções possíveis. Solução aproximada ótima	3.23
3.3.5 - Extremos da energia de deformação. Condições de contorno em tensões...	3.26
3.3.6 - Aplicações do cálculo de extremos da energia de deformação com condi- ções de contorno em tensões	3.28
3.3.7 - Extremos da energia de deformação. Condições de contorno em deslocamen_ tos	3.37
3.3.8 - Aplicação do cálculo de extremos da energia de deformação com condições de contorno em deslocamentos	3.39

CAP. 4 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS.
PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS.

4.1 - Considerações gerais	4.1
4.2 - Processo dos deslocamentos	4.5
4.2.1 - Campos admissíveis nos elementos ..	4.5
4.2.2 - Modelo compatível	4.7
4.2.3 - Modelo híbrido em tensões	4.13
4.2.4 - Interação entre os elementos e análise do sistema	4.17
4.3 - Convergência no processo dos deslocamentos.	4.21
4.3.1 - Conceitos básicos	4.21
4.3.2 - Condições de completude no modelo compatível	4.22
4.3.3 - Condições de completude no modelo híbrido em tensões	4.23
4.3.4 - Teoremas de convergência	4.23
4.4 - Aplicações do processo dos deslocamentos à elasticidade plana	4.26
4.4.1 - Introdução	4.26
4.4.2 - Definição da geometria do elemento quadrilátero	4.26
4.4.3 - Modelo conforme derivado do modelo compatível. Primeira possibilidade.	4.28
4.4.4 - Modelo conforme derivado do modelo compatível. Segunda possibilidade.	4.33
4.4.5 - Modelo não conforme derivado do modelo compatível	4.40
4.4.6 - Modelo conforme derivado do modelo híbrido em tensões	4.46

CAP. 1 - ASPECTOS BÁSICOS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

1.1 - Estado triplo de deformação

No estudo do corpo sólido substitui-se o mesmo por um modelo matemático, o que se faz considerando a correspondência entre partícula do sólido e ponto geométrico.

Sob a ação de certos esforços a posição entre dois pontos do corpo fica alterada, o corpo se deforma. Essa deformação fica perfeitamente determinada pelos deslocamentos dos pontos do corpo.

Torna-se conveniente utilizar uma abstração de corpo não deformável. Entende-se por corpo não deformável aquele em que as distâncias entre os pontos permanecem inalteradas.

Dessa forma, os deslocamentos dos pontos do corpo são caracterizados por: deslocamentos de corpo rígido, rotação e translação, e deformação. Só esta última parcela é objeto de análise.

Considere-se um corpo ocupando uma região V do espaço, na sua posição não deformada, referido a um sistema cartesiano ortogonal, $O x_1 x_2 x_3$, indicado na figura 1.1.

Fig. 1.1 - Deformação de um corpo

No corpo não deformado, o quadrado da distância entre dois pontos $P(x_1; x_2; x_3)$ e $Q(x_1 + dx_1; x_2 + dx_2; x_3 + dx_3)$ é dado pela aplicação do teorema de Pitágoras:

$$ds^2 = dx_1^2 + dx_2^2 + dx_3^2 = \delta_{ij} dx_i dx_j \quad (1.1.1)$$

$$(i=1,2,3) ; (j=1,2,3)$$

Considere-se agora o corpo ocupando uma região V' do espaço, na sua posição deformada, referido a um sistema cartesiano ortogonal, $O x'_1 x'_2 x'_3$, coincidente com $O x_1 x_2 x_3$.

No corpo deformado, o quadrado da distância, entre dois pontos P' ($x'_1; x'_2; x'_3$) e Q' ($x'_1 + dx'_1; x'_2 + dx'_2; x'_3 + dx'_3$), transformados de P e Q , é dado por:

$$dS^2 = \delta_{ij} dx'_i dx'_j \quad (1.1.2)$$

Admitem-se que a transformação de um ponto P da região V em um ponto P' da região V' dada por:

$$x'_i = x'_i(x_1; x_2; x_3) \quad (1.1.3)$$

seja contínua e que (1.1.3) apresente uma única inversa:

$$x_i = x_i(x'_1; x'_2; x'_3) \quad (1.1.4)$$

estabelecendo-se assim uma correspondência biunívoca entre os pontos de V e V' .

Para assegurar a existência de função inversa admite-se que as funções (1.1.3) sejam de classe C_1 em V e que o jacobiano J seja não nulo em toda a região $|V|$.

As expressões (1.1.1) e (1.1.2), tendo em vista (1.1.3) e (1.1.4) podem ser escritas na seguinte forma:

$$ds^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x'_\ell} \frac{\partial x_j}{\partial x'_m} dx'_\ell dx'_m \quad (1.1.5)$$

$$(i, j, \ell, m = 1, 2, 3)$$

$$dS^2 = \delta_{ij} \frac{\partial x'_i}{\partial x_\ell} \frac{\partial x'_j}{\partial x_m} dx_\ell dx_m \quad (1.1.6)$$

A diferença do quadrado dos comprimentos pode ser então escrita por:

$$dS^2 - ds^2 = (\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} - \delta_{ij}) dx_i dx_j \quad (1.1.7)$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, 3)$$

$$dS^2 - ds^2 = (\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_j}) dx'_i dx'_j \quad (1.1.8)$$

Definem-se então os tensores das deformações:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial x'_\beta}{\partial x_j} - \delta_{ij}) \quad (1.1.9)$$

e

$$e_{ij} = \frac{1}{2} (\delta_{ij} - \delta_{\alpha\beta} \frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_i} \frac{\partial x_\beta}{\partial x'_j}) \quad (1.1.10)$$

tal que:

$$dS^2 - ds^2 = 2 E_{ij} dx_i dx_j \quad (1.1.11)$$

$$dS^2 - ds^2 = 2 e_{ij} dx'_i dx'_j \quad (1.1.12)$$

O tensor E_{ij} foi introduzido por Green e Saint-Venant, e é chamado tensor das deformações de Green. Por analogia com a terminologia em hidrodinâmica E_{ij} é referido como tensor das deformações em coordenadas lagrangianas [4].

O tensor e_{ij} foi introduzido por Cauchy, para deformações infinitesimais, e por Almansi e Hamel, para deformações finitas, e é conhecido como tensor das deformações de Almansi. Por analogia com a terminologia em hidrodinâmica, e_{ij} é referido como tensor das deformações em coordenadas eulerianas ^[4].

Introduz-se agora o vetor deslocamento u com componentes

$$u_i = x'_i - x_i \quad (1.1.13)$$

que permite estabelecer:

$$\frac{\partial x'_\alpha}{\partial x_i} = \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i} \quad (1.1.14)$$

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial x'_i} = \frac{-\partial u_\alpha}{\partial x'_i} + \delta_{\alpha i} \quad (1.1.15)$$

Substituindo (1.1.14) e (1.1.15) em (1.1.9) e (1.1.10), respectivamente, os tensores das deformações reduzem-se às formas:

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \{ \delta_{\alpha\beta} \left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} + \delta_{\alpha i} \right) \left(\frac{\partial u_\beta}{\partial x_j} + \delta_{\beta j} \right) - \delta_{ij} \} \quad (1.1.16)$$

$$E_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} + \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i} \frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j} \right\}$$

e

* Por razões que se evidenciam no parágrafo 1.2 admite-se a função $u_i(x_1, x_2, x_3)$ de classe C_3 (ou seja, u_i junto com as primeiras, segundas e terceiras derivadas são contínuas) ^[32].

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \delta_{\alpha i} - \delta_{\alpha\beta} \left(\delta_{\alpha i} - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x'_i} \right) \left(\delta_{\beta j} - \frac{\partial u_{\beta}}{\partial x'_j} \right) \right\} \quad (1.1.17)$$

$$e_{ij} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial x'_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x'_i} - \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x'_i} \frac{\partial u_{\alpha}}{\partial x'_j} \right\}$$

As equações (1.1.16) e (1.1.17) são as relações deformações-deslocamentos na sua forma mais geral, no caso de nenhuma restrição à grandeza dos deslocamentos. Observe-se que as relações não são lineares.

Introduz-se a hipótese de as primeiras derivadas dos deslocamentos serem desprezáveis em relação à unidade, o que implica que o quadrado e o produto das primeiras derivadas parciais de u_i sejam desprezáveis em relação à própria derivada. Tem-se então uma simplificação notável na expressão (1.1.17), reduzindo-se e_{ij} ao tensor ϵ_{ij} das deformações infinitesimais, devido à Cauchy:

$$\epsilon_{ij} = 0,5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (1.1.18)$$

ou em forma desenvolvida:

$$\begin{aligned} \epsilon_{11} &= \frac{\partial u_1}{\partial x'_1} & \epsilon_{12} &= 0,5 \left(\frac{\partial u_1}{\partial x'_2} + \frac{\partial u_2}{\partial x'_1} \right) \\ \epsilon_{22} &= \frac{\partial u_2}{\partial x'_2} & \epsilon_{23} &= 0,5 \left(\frac{\partial u_2}{\partial x'_3} + \frac{\partial u_3}{\partial x'_2} \right) \\ \epsilon_{33} &= \frac{\partial u_3}{\partial x'_3} & \epsilon_{31} &= 0,5 \left(\frac{\partial u_3}{\partial x'_1} + \frac{\partial u_1}{\partial x'_3} \right) \end{aligned} \quad (1.1.19)$$

Portanto no caso dos deslocamentos infinitesimais, a diferença entre tensor das deformações lagrangiano e euleriano desaparece, em virtude de ser indiferente se as derivadas dos deslocamentos são calculadas na posição do ponto antes ou depois da deformação, sendo portanto a fronteira da região V do corpo uma invariante.

A expressão (1.1.18) define uma lei de variação linear entre deslocamentos e deformações que com o fato da invariância de fronteira se refere daqui por diante como hipótese de linearidade geométrica.

As componentes do tensor das deformações com índices iguais têm significado físico de alongamentos, ou seja, mudança de comprimento por unidade de comprimento na direção do eixo de mesmo índice, conforme se mostra na figura 1.2.

Fig. 1.2 - Interpretação física da deformação infinitesimal ϵ_{11}

As componentes do tensor das deformações com índices diferentes têm significado físico de distorções, isto é, variação angular relativa a duas direções ortogonais, conforme se mostra na figura 1.3.

Fig. 1.3 - Interpretação física da deformação infinitesimal ϵ_{12}

1.2 - Condições de compatibilidade

As relações deformações-deslocamentos apresentam-se, em virtude da simetria do tensor das deformações, como um sistema de seis equações diferenciais com três funções, u_i , incógnitas.

Conclui-se portanto que as deformações não podem ser arbitrárias, devendo satisfazer certas condições, para que se garanta a existência das funções u_i .

As condições de integrabilidade das relações deformações-deslocamentos referem-se como condições de compatibilidade e o campo de deformações que observa tais condições diz-se integrável.

Considere-se o caso em que as relações deformações-deslocamentos são lineares, ou seja:

$$\epsilon_{ij} = 0,5 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.1)$$

Derivando, convenientemente, (1.2.1) vem:

$$\epsilon_{ij,kl} = 0,5 (u_{i,jkl} + u_{j,ikl}) \quad (1.2.2)$$

ou, com permutação de índices:

$$\epsilon_{jl,ik} = 0,5 (u_{j,lik} + u_{l,jik}) \quad (1.2.3)$$

$$\epsilon_{ik,jl} = 0,5 (u_{i,kjl} + u_{k,ijl}) \quad (1.2.4)$$

$$\epsilon_{kl,ij} = 0,5 (u_{k,lij} + u_{l,kij}) \quad (1.2.5)$$

e, portanto, combinando as expressões (1.2.2) a (1.2.5), obtêm-se:

$$\epsilon_{ij,kl} + \epsilon_{kl,ij} - \epsilon_{ik,lj} - \epsilon_{jl,ik} = 0 \quad (1.2.6)$$

que são as equações de compatibilidade, obtidas por Saint-Venant, em 1860, envolvendo derivadas de segunda ordem das componentes das deformações.

As equações de compatibilidade (1.2.6) são em número de 81, mas uma observação cuidadosa no que diz respeito à simetria das componentes das deformações e identidade leva somente a 6 equações independentes [4], que se apresentam abaixo em forma desenvolvida:

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial}{\partial x_1} \left(-\frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} \right) \quad (1.2.7)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial}{\partial x_2} \left(-\frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} + \frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} \right)$$

$$\frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_3} \left(-\frac{\partial \epsilon_{12}}{\partial x_3} + \frac{\partial \epsilon_{23}}{\partial x_1} + \frac{\partial \epsilon_{31}}{\partial x_2} \right)$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{12}}{\partial x_1 \partial x_2} = \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_1^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{23}}{\partial x_2 \partial x_3} = \frac{\partial^2 \epsilon_{22}}{\partial x_3^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_2^2}$$

$$2 \frac{\partial^2 \epsilon_{31}}{\partial x_3 \partial x_1} = \frac{\partial^2 \epsilon_{33}}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \epsilon_{11}}{\partial x_3^2}$$

Levanta-se agora a questão de saber se as equações de compatibilidade (1.2.7) são suficientes para assegurarem a existência de uma solução contínua única do sistema de equações diferenciais parciais (1.2.1).

Está claro que a solução de (1.2.1) não é única, pois as componentes das deformações caracterizam a deformação pura, e não se considera o movimento de corpo rígido, a menos que se especifiquem o deslocamento u_i^0 e as rotações ω_{ij}^0 em um certo ponto. Nesse caso a resposta é afirmativa de acordo com demonstração desenvolvida, em 1906, por E. Cesaro [4], que a seguir se apresenta.

Seja $P^0 (x_1^0; x_2^0; x_3^0)$ o ponto do corpo V onde se conhecem as componentes u_i^0 de deslocamento e ω_{ij}^0 de rotação.

Pode-se obter as componentes u_i de deslocamentos em um ponto $\bar{P}$, através de uma integração sobre uma curva contínua que une P^0 a $\bar{P}$. Logo:

$$u_i (\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = u_i^0 + \int_{P^0}^{\bar{P}} du_i \quad (1.2.8)$$

ou,

$$u_i (\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = u_i^0 + \int_{P^0}^{\bar{P}} \frac{\partial u_i}{\partial x_k} dx_k \quad (1.2.9)$$

Desenvolvendo:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = 0,5 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) + 0,5 \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k} - \frac{\partial u_k}{\partial x_i} \right) \quad (1.2.10)$$

obtêm-se:

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_k} = \epsilon_{ik} - \omega_{ik} \quad (1.2.11)$$

onde ϵ_{ij} e ω_{ik} são, respectivamente os tensores das deformações e das rotações.

Introduzindo (1.2.11) em (1.2.9) vem:

$$u_i(\bar{x}_1; \bar{x}_2; \bar{x}_3) = u_i^0 + \int_{p^0}^{\bar{p}} \epsilon_{ik} dx_k - \int_{p^0}^{\bar{p}} \omega_{ik} dx_k \quad (1.2.12)$$

Trata-se agora de obter ω_{ik} em função de ϵ_{ik} , o que se faz integrando a última parcela de (1.2.12) por partes. Assim, vem:

$$\int_{p^0}^{\bar{p}} \omega_{ik} dx_k = \int_{p^0}^{\bar{p}} \omega_{ik} d(x_k - \bar{x}_k) = \quad (1.2.13)$$

$$= \int_{p^0}^{\bar{p}} d((x_k - \bar{x}_k) \omega_{ik}) - \int_{p^0}^{\bar{p}} (x_k - \bar{x}_k) d\omega_{ik} =$$

$$= (\bar{x}_k - x_k^0) \omega_{ik}^0 - \int_{p^0}^{\bar{p}} (x_k - \bar{x}_k) \frac{\partial \omega_{ik}}{\partial x_\ell} dx_\ell =$$

$$= (\bar{x}_k - x_k^0) \omega_{ik}^0 - \int_{p^0}^{\bar{p}} (x_k - \bar{x}_k) \left\{ \frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\ell \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_k} \right\} dx_\ell$$

ou, observando-se que:

$$\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\ell \partial x_i} - \frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_k} = \left(\frac{\partial^2 u_k}{\partial x_\ell \partial x_i} + \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x_k \partial x_i} \right) - \quad (1.2.14)$$

$$- \left(\frac{\partial^2 u_i}{\partial x_\ell \partial x_k} + \frac{\partial^2 u_\ell}{\partial x_k \partial x_i} \right) = \frac{\partial c_{k\ell}}{\partial x_i} - \frac{\partial \epsilon_{i\ell}}{\partial x_k}$$

estabelece-se:

$$\int_{p^0}^{\bar{p}} \omega_{ik} dx_k = (\bar{x}_k - x_k^0) \omega_{ik}^0 - \quad (1.2.15)$$

$$- \int_{p^0}^{\bar{p}} (x_k - \bar{x}_k) \left\{ \frac{\partial \epsilon_{k\ell}}{\partial x_i} - \frac{\partial \epsilon_{i\ell}}{\partial x_k} \right\} dx_\ell$$

Substituindo (1.2.15) em (1.2.12), vem:

$$u_i(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \bar{x}_3) = u_i^0 - (\bar{x}_k - x_k^0) \omega_{ik}^0 + \int_{p_0}^{\bar{p}} u_{i\ell} dx_\ell \quad (1.2.16)$$

onde:

$$u_{i\ell} = \epsilon_{i\ell} + (\bar{x}_k - x_k) \left\{ \frac{\partial \epsilon_{i\ell}}{\partial x_k} - \frac{\partial \epsilon_{k\ell}}{\partial x_i} \right\} \quad (1.2.17)$$

Os primeiro e segundo termos de (1.2.16) correspondem a um movimento de corpo rígido, respectivamente, de translação e de rotação.

Admitindo-se que a função $u_i(\bar{x}_j)$ seja contínua, a integral em (1.2.16), que envolve apenas deformações, deve independar do caminho de integração, ou seja o integrando deve ser uma diferencial exata.

De acordo com Fung [4], a condição para que $u_{i\ell} dx_\ell$ seja uma diferencial exata é que:

$$\frac{\partial u_{i\ell}}{\partial x_m} - \frac{\partial u_{im}}{\partial x_\ell} = 0 \quad (1.2.18)$$

ou, em virtude de (1.2.17):

$$\begin{aligned} & \frac{\partial \epsilon_{i\ell}}{\partial x_m} - \delta_{mk} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{i\ell}}{\partial x_k} - \frac{\partial \epsilon_{k\ell}}{\partial x_i} \right\} + \\ & + (\bar{x}_k - x_k) \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_{i\ell}}{\partial x_m \partial x_k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{k\ell}}{\partial x_m \partial x_i} \right\} - \\ & - \frac{\partial \epsilon_{im}}{\partial x_\ell} + \delta_{\ell k} \left\{ \frac{\partial \epsilon_{im}}{\partial x_k} - \frac{\partial \epsilon_{km}}{\partial x_i} \right\} - \\ & - (\bar{x}_k - x_k) \left\{ \frac{\partial^2 \epsilon_{im}}{\partial x_\ell \partial x_k} - \frac{\partial^2 \epsilon_{km}}{\partial x_\ell \partial x_i} \right\} = 0 \end{aligned} \quad (1.2.19)$$

Como as parcelas, em que não aparece o termo $(\bar{x}_k - x_k)$, se anulam, obtêm-se:

$$\epsilon_{il,mk} + \epsilon_{km,li} - \epsilon_{kl,mi} - \epsilon_{im,lk} = 0 \quad (1.2.20)$$

que são as equações de compatibilidade. Fica portanto demonstrado que as equações de compatibilidade são suficientes para garantirem a unicidade da solução do sistema de equações (1.2.1), desde que especificados os deslocamentos u_i^0 e as rotações ω_{ik}^0 em um ponto qualquer P^0 .

1.3 - Estado triplo de tensão

Considere-se um corpo no espaço e a interação do mesmo com o ambiente. Pode-se representar esta interação através de:

- a) forças de massa, X_j , especificadas por unidade de volume em todo o corpo.
- b) forças de superfícies, F_j , especificadas por unidade de superfície em todo o contorno do corpo.

Admite-se nas discussões seguintes que a função X_j seja contínua de classe C_1 e a função F_j seja contínua na vizinhança de $P(x_1; x_2; x_3)$ [32].

Seja um corpo, ocupando uma região V do espaço referido a um sistema cartesiano ortogonal e considere-se dentro do corpo uma superfície fechada $\bar{A}$, de volume $\bar{V}$, que define uma parte interna a $\bar{A}$ e outra externa a $\bar{A}$.

Fig. 1.4 - Conceito de tensão

Seja um elemento ΔA na superfície de $\bar{A}$, cuja normal externa, dirigida do interior para o exterior, é $\vec{n}$. A parte externa a $\bar{A}$ exerce sobre a parte interna uma força $\Delta \vec{F}$.

Introduz-se a hipótese que para $\Delta A \rightarrow 0$ a relação $\frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A}$ tende para um limite finito $\vec{\sigma}$ e que o momento da força agindo em um ponto qualquer de ΔA se anule. Assim

$$\vec{\sigma} = \lim_{\Delta A \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{F}}{\Delta A} \quad (1.3.1)$$

chamado vetor tensão, define um campo de tensões, na superfície $\bar{A}$, função de ponto, que caracteriza a interação entre as partes internas e externas a $\bar{A}$. É o princípio de tensão de Euler e Cauchy [4].

É importante observar que o vetor de tensão assim definido, no ponto, permanece o mesmo para outra superfície que apresente no ponto a mesma normal. Varia entretanto se em outra superfície não apresentar a mesma normal.

Levanta-se então o problema de determinar o vetor tensão em qualquer plano de normal $\vec{n}$, por um certo ponto P de coordenadas $(x_1; x_2; x_3)$ do corpo. Para resolver o problema estuda-se o equilíbrio de um elemento tetraédrico PABC do corpo de faces paralelas aos planos coordenados e ao plano cuja normal unitária é $\vec{n}$.

Fig. 1.5 - Tensões nas faces do tetraedro

Seja dA a área da superfície de normal $\vec{n}$. Logo, para área das outras superfícies, tem-se:

$$\text{área PBC} = dA_1 = dA \cos(\vec{e}_1; \vec{n}) = dA n_1 \quad (1.3.2)$$

$$\text{área PAC} = dA_2 = dA \cos(\vec{e}_2; \vec{n}) = dA n_2$$

$$\text{área PAB} = dA_3 = dA \cos(\vec{e}_3; \vec{n}) = dA n_3$$

O volume do tetraedro é dado por:

$$dV = \frac{1}{3} h dA \quad (1.3.3)$$

onde h é a altura do vértice P a base de área dA .

Seja o vetor de tensões por P no plano de normal $-\vec{e}_1$.

Tem-se então:

$$\vec{\sigma}_1 = -\sigma_{ij} \vec{e}_j \quad (1.3.4)$$

onde σ_{ij} são as componentes do vetor $\vec{\sigma}_i$ segundo os eixos coordenados x_j . Considera-se σ_{ij} positivo, para a normal externa no sentido positivo do eixo x_i , quando tem o sentido positivo dos eixos coordenados e, para a normal externa oposta ao sentido positivo do eixo x_i , quando tem sentido oposto ao sentido positivo dos eixos coordenados.

Considerem-se agora as componentes de forças que agem no tetraedro na direção de x_j :

a) na face de normal $-\vec{e}_i$

$$(-\sigma_{ij} + \xi_{ij}) dA_i \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \xi_{ij} dA_i = 0$$

b) na face de normal $\vec{n}$

$$(\sigma_j + \xi_j) dA \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \xi_j dA = 0$$

c) forças de volume

$$(F_j + \xi'_j) dA \frac{1}{3} h \quad \text{com} \quad \lim_{h \rightarrow 0} \xi'_j dA = 0$$

onde ξ_{ij} , ξ_j e ξ'_j são quantidades infinitesimais.

Para o equilíbrio do tetraedro deve-se ter:

$$(-\sigma_{ij} + \xi_{ij}) dA_i + (\sigma_j + \xi_j) dA + \quad (1.3.5)$$

$$+ (F_j + \xi'_j) \frac{1}{3} h dA = 0$$

sendo que, no limite com $h \rightarrow 0$, vem:

$$-\sigma_{ij} n_i + \sigma_j = 0 \quad (1.3.6)$$

$$\sigma_j = \sigma_{ij} n_i \quad (1.3.7)$$

A expressão (1.3.7) é devida a Cauchy onde os σ_{ij} são nove quantidades escalares, componentes de um tensor, o tensor das tensões e definem completamente o estado de tensão em P, isto é, qualquer que seja o plano de normal $\vec{n}$, por P a tensão correspondente fica definida pelas grandezas σ_{ij} .

As componentes σ_{11} , σ_{22} , σ_{33} de mesmo índice recebem o nome de tensões normais e as demais de tensões de cisalhamento.

Observa-se ainda que foram admitidas as hipóteses da tensão poder sempre ser definida no corpo e do campo de tensões ser contínuo em V.

1.4 - Equações de equilíbrio

Seja o elemento em forma paralelepipedica com faces paralelas aos planos coordenados da figura 1.6 e considere-se o equilíbrio estático do mesmo.

Fig. 1.6 - Tensões equilibradas em um elemento paralelepipedico

As tensões agindo nas várias faces são mostradas na fig. 1.6, bem como as forças de massa. As expressões das tensões nas faces são baseadas na continuidade das mesmas.

O equilíbrio estático do elemento requer que a resultante de forças e momentos sejam nulos.

Para resultante de forças na direção de x_1 , tem-se:

$$\begin{aligned}
 & \left(\sigma_{11} + \frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 - \sigma_{11} dx_2 dx_3 + \\
 & + \left(\sigma_{21} + \frac{\partial \sigma_{21}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 - \sigma_{21} dx_1 dx_3 + \\
 & + \left(\sigma_{31} + \frac{\partial \sigma_{31}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 - \sigma_{31} dx_1 dx_2 + \\
 & + X_1 dx_1 dx_2 dx_3 = 0
 \end{aligned} \tag{1.4.1}$$

logo:

$$\frac{\partial \sigma_{11}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_3} + X_1 = 0 \tag{1.4.2}$$

analogamente:

$$\frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} + X_2 = 0 \tag{1.4.3}$$

$$\frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} + X_3 = 0$$

ou, em forma reduzida:

$$\sigma_{ij,i} + X_j = 0 \tag{1.4.4}$$

As equações (1.4.4) constituem as equações de equilíbrio.

Para resultante de momento na direção de $O'x'_1$, de acordo com a figura 1,7, tem-se:

Fig. 1.7 - Tensões que contribuem para o equilíbrio de momento na direção Ox_1 .

$$\begin{aligned}
 & \left(\sigma_{13} + \frac{\partial \sigma_{13}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} - & (1.4.5) \\
 & - \sigma_{13} dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} - \left(\sigma_{12} + \frac{\partial \sigma_{12}}{\partial x_1} dx_1 \right) dx_2 dx_3 \frac{dx_3}{2} + \\
 & + \sigma_{12} dx_2 dx_3 \frac{dx_3}{2} + \left(\sigma_{23} + \frac{\partial \sigma_{23}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 dx_2 - \\
 & - \left(\sigma_{22} + \frac{\partial \sigma_{22}}{\partial x_2} dx_2 \right) dx_1 dx_3 \frac{dx_3}{2} + \sigma_{22} dx_3 dx_1 \frac{dx_3}{2} + \\
 & + \left(\sigma_{33} + \frac{\partial \sigma_{33}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_2 dx_1 \frac{dx_2}{2} - \sigma_{33} dx_1 dx_2 \frac{dx_2}{2} -
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \left(\sigma_{32} + \frac{\partial \sigma_{32}}{\partial x_3} dx_3 \right) dx_1 dx_2 dx_3 + \\
& + x_3 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_2}{2} - x_2 dx_1 dx_2 dx_3 \frac{dx_3}{2} = 0
\end{aligned}$$

Dividindo-se todos os termos por $dx_1 dx_2 dx_3$ e passando ao limite com $dx_1 \rightarrow 0$, $dx_2 \rightarrow 0$ e $dx_3 \rightarrow 0$, vem:

$$\sigma_{23} = \sigma_{32} \quad (1.4.6)$$

Analogamente, tomando-se os momentos em relação a $O'x'_2$ e $O'x'_3$ e anulando-os, tem-se:

$$\sigma_{31} = \sigma_{13} \quad (1.4.7)$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21}$$

o que implica ser o tensor das tensões simétrico

É interessante observar que a simetria ocorre desde que não haja momentos externos proporcionais ao volume, como ocorre na magnetoelasticidade [4].

Faz-se observar que a dedução das equações de equilíbrio foram feitas de modo a ressaltar o aspecto físico prejudicando uma apresentação formal mais elegante que é obtida aplicando-se o teorema da divergência (ou de Gauss) e a fórmula de Cauchy.

1.5 - Teorema do trabalho

Considere-se um campo de tensões σ_{ij} , equilibrado por forças de massa X_j e de superfície σ_j , e um campo integrável de deformações ϵ_{ij} , gerado por deslocamentos contínuos u_i , suficientemente pequenos para que se possa considerar a linearidade geométrica.

Seja a integral:

$$+ \zeta_i = \int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV \quad (1.5.1)$$

com dimensão de trabalho, podendo ser interpretado como o trabalho interno do campo de tensões σ_{ij} pelo de deformações ϵ_{ij} .

Observando a condição de integrabilidade de ϵ_{ij} , vem:

$$+ \zeta_i = \int_V \sigma_{ij} 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) dV \quad (1.5.2)$$

e, em virtude da simetria de σ_{ij} :

$$+ \zeta_i = \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV \quad (1.5.3)$$

Integrando (1.5.3) por partes vem:

$$+ \zeta_i = \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV \quad (1.5.4)$$

ou então, pela aplicação do teorema da divergência:

$$+ \zeta_i = \int_\Sigma \sigma_{ij} u_i n_j d\Sigma - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV \quad (1.5.5)$$

Mas:

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_i \text{ em } \Sigma \quad (1.5.6)$$

$$\sigma_{ij,j} = -X_i \text{ em } V$$

pois o campo de tensões $\vec{\sigma}$ é equilibrado pelas forças de superfície σ_i e forças de massa X_i . Logo:

$$+ \zeta_i = \int_{\Sigma} \sigma_i u_i d\Sigma + \int_V X_i u_i dV \quad (1.5.7)$$

ou em forma vetorial:

$$+ \zeta_i = \int_{\Sigma} \vec{\sigma} \cdot \vec{u} d\Sigma + \int_V \vec{X} \cdot \vec{u} dV \quad (1.5.8)$$

onde a primeira parcela representa o trabalho das forças externas de superfície e a segunda parcela o trabalho das forças externas de volume pelo campo de deslocamentos.

Tem-se então:

$$\zeta_i = \zeta_e \quad (1.5.9)$$

expressão do teorema do trabalho, que apresenta o seguinte enunciado:

"O trabalho de um campo de tensões por um campo de deformações integrável é igual ao trabalho das forças externas, que equilibram o campo de tensões, pelo campo de deslocamentos, que gera o campo de deformações, admitida válida a hipótese da linearidade geométrica" [13].

Da mesma forma como se deduziu o teorema do trabalho das condições de integrabilidade e de equilíbrio poder-se-ia obter as condições de integrabilidade ou as condições de equilíbrio a partir do teorema do trabalho mais as condições de equilíbrio ou mais as condições de integrabilidade, respectivamente.

É importante observar que o teorema do trabalho desenvolvido independe das relações tensões-deformações.

1.6 - Estado natural

Estado natural é o estado em que se encontra um corpo quando não sujeito a solicitação. Dessa forma para cada sistema de esforços externos correspondem infinitos estados de tensão que o equilibram, pelo que ao estado natural correspondem também infinitos estados de tensão, entre os quais aquele de componentes nulas. Estado natural é portanto um conceito abstrato de um estado físico de referência ^[1].

Ao corpo isento de esforços intrínsecos, no estado natural, diz-se estado neutro de um corpo.

Ao corpo não isento de esforços intrínsecos, no estado natural, diz-se estado de coação de um corpo.

Ao estado natural pode-se fazer corresponder o estado indeformado, de componentes de deformação todas nulas, de acordo com a hipótese que serviu de base ao estudo das relações deformações deslocamentos. Dessa forma, no caso de haver um estado de coação instalado no corpo as relações tensões-deformações não são homogêneas.

Pode-se também estabelecer uma relação homogênea de tensão-deformação. Nesse caso corresponde ao estado natural um estado de deformação de componentes não nulas, bastando para isso que se tenha o corpo em estado de coação, sem que se garanta a existência de um campo de deslocamentos que o tenha gerado. Consequentemente deixa de ser homogênea a relação deformação-deslocamento.

Neste trabalho não se consideram estados de coação. Dessa forma é simples obter, para as relações tensão-deformação e deformação-deslocamento, homogeneidade, basta considerar que ao estado neutro corresponde o estado indeformado.

1.7 - Relações tensões-deformações

Anteriormente estabeleceu-se que o estado de tensão em um ponto de um corpo fica perfeitamente determinado pelo tensor das tensões e o estado de deformação pelo tensor das deformações. Trata-se agora de estabelecer uma relação entre as componentes de tensão e de deformação para o material elástico.

Um material diz-se elástico se tem a propriedade de recuperar a sua forma primitiva quando deixa de atuar a solicitação que produziu a deformação [37].

Considere-se instalado em um corpo um campo de tensões σ_{ij} , equilibrado por forças de massa, $\bar{X}_i$, definidas em V , e por forças de superfícies, $\bar{\sigma}_i$, definidas em uma parcela Σ_1 da superfície Σ , e um campo de deformações gerado por um campo de deslocamentos u_i , que toma valores fixados na parcela Σ_2 restante da superfície Σ .

Considere-se um incremento das solicitações.

Tem-se então, uma variação do trabalho externo, dada por:

$$\delta \zeta_e = \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \sigma_i \delta \bar{u}_i d\Sigma + \quad (1.7.1)$$

+ termos de 2a. ordem.

Desprezando-se os termos de segunda ordem e reunindo em uma só as duas últimas integrais, vem:

$$\delta \zeta_e = \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma} \sigma_i \delta u_i d\Sigma \quad (1.7.2)$$

ou, considerando-se o teorema do trabalho:

$$\delta \zeta_e = \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (1.7.3)$$

Integrando-se a expressão (1.7.3) do estado indeformado até um certo estado, D , de deformação, vem:

$$\int_0^D \delta \zeta_e = \int_0^D \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \int_0^D \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (1.7.4)$$

Sendo o material elástico $\delta \zeta_e$ é uma diferencial exata e portanto existe uma função U , do estado de deformação, chamada energia potencial de deformação, cujas variações igualam o trabalho necessário para levar o corpo de um estado a outro de deformação. Logo:

$$U = \int_V \int_0^D \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV \quad (1.7.5)$$

fazendo:

$$W_3 = \int_0^D \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} \quad (1.7.6)$$

vem:

$$U = \int_V W_3 dV \quad (1.7.7)$$

onde W_3 é a densidade da energia potencial de deformação.

Em um ciclo fechado de deformação W_3 apresenta valor nulo, logo uma variação δW_3 é uma diferencial exata. Dessa forma tem-se:

$$\delta W_3 = \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} \quad (1.7.8)$$

portanto, comparando-se com a expressão (1.7.6), tem-se que a função W_3 é exclusiva das componentes de deformação e tal que:

$$\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \quad (1.7.9)$$

Conclue-se então que as relações tensões-deformações são univocamente determinadas pela função densidade de energia de deformação.

É importante observar que as relações tensões-deformações obtidas de (1.7.9) não estabelecem uma correspondência biunívoca entre tensões e deformações.

Isso só ocorre quando as relações tensões-deformações são monotonicamente crescentes ^[2]. Neste trabalho só este caso é relevante.

Obtêm-se essa condição através do conceito de material materialmente estável estabelecido pelo postulado de estabilidade de Drucker, enunciado a seguir para o caso de material elástico ^[8], ^[4], ^[1]:

"Considere-se um elemento no qual está instalado um estado de tensão σ_{ij} e de deformação ϵ_{ij} . Suponha-se que uma solicitação adicional altere de $\delta\sigma_{ij}$ o estado de tensão e de $\delta\epsilon_{ij}$ o estado de deformação. Então o material é materialmente estável se se verifica a desigualdade:

$$\delta\sigma_{ij} \delta\epsilon_{ij} > 0."$$

Portanto se o material for elástico e materialmente estável existe uma relação biunívoca entre os tensores de tensão e de deformação.

Paralelamente aos conceitos de trabalho e de energia de deformação pode-se estabelecer conceitos complementares que apresentem grande interesse, na generalização de certos teoremas.

Considere-se então a expressão (1.7.6) e o desenvolvimento da integral por partes. Logo:

$$W_3 = \int_0^D \delta(\sigma_{ij} \epsilon_{ij}) - \int_0^D \epsilon_{ij} \delta\sigma_{ij} \quad (1.7.10)$$

1.26

e fazendo:

$$W_3^* = \int_0^D \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (1.7.11)$$

vem:

$$W_3 + W_3^* = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.7.12)$$

Observando-se que:

$$\frac{\partial W_3^*}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} - \sigma_{ij} = 0 \quad (1.7.13)$$

e:

$$\frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} = \epsilon_{ij} \quad (1.7.14)$$

conclui-se que a função W_3^* é exclusiva das componentes de tensão e tal que (1.7.14) se verifica.

Pode-se então definir o funcional

$$U^* = \int_V W_3^* dV \quad (1.7.15)$$

que recebe o nome de energia potencial complementar de deformação, sendo portanto a função W_3^* denominada densidade de energia potencial complementar de deformação.

Os funcionais U e U^* contêm duas parcelas. A primeira constante, não restituível, correspondente ao estado natural, à qual se atribui o valor zero. A segunda é a energia potencial propriamente dita.

1.8 - Lei de Hooke generalizada

Um material elástico diz-se linear se a função densidade da energia de deformação for uma função quadrática das componentes de deformação.

Para o material elástico linear, tem-se então:

$$W_3 = c_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (1.8.1)$$

e de acordo com (1.7.9) obtêm-se:

$$\sigma_{ij} = (c_{ijkl} + c_{klij}) \epsilon_{kl} \quad (1.8.2)$$

fazendo:

$$c_{ijkl} + c_{klij} = c_{ijkl} \quad (1.8.3)$$

vem:

$$\sigma_{ij} = c_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.8.4)$$

A expressão (1.8.4) estabelece que as componentes de tensão relacionam-se linearmente com as componentes de deformação.

Essa relação foi estabelecida por Cauchy, generalizando a lei de Hooke, daí o nome de lei de Hooke generalizada.

Os coeficientes C_{ijkl} , na forma linear (1.8.4), variam de ponto para ponto. Se, entretanto, os coeficientes C_{ijkl} forem independentes do ponto, o corpo é considerado elasticamente homogêneo.

A simetria de ϵ_{kl} permite agrupar os coeficientes das parcelas ϵ_{kl} e ϵ_{lk} . Formam-se assim novos coeficientes:

$$H_{ijkl} = C_{ijkl} + C_{ijlk} \quad (1.8.5)$$

Em virtude de (1.8.5) vem:

$$H_{ijkl} = H_{ijlk} \quad (1.8.6)$$

e por outro lado a simetria de σ_{ij} determina:

$$H_{ijkl} = H_{jilk} \quad (1.8.7)$$

Verifica-se então que com as condições de simetria dos tensores de tensão e de deformação o número máximo de constantes elásticas independente é 36. Mas, em virtude de (1.8.3), tem-se:

$$H_{ijkl} = H_{klij} \quad (1.8.8)$$

o que reduz a 21 o número de constantes elásticas independentes. Observa-se que a condição (1.8.8) resulta da existência de W_3 observando (1.7.9).

É interessante apresentar em forma expandida as relações entre tensões e deformações. Tem-se então:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} = & H_{1111} \epsilon_{11} + H_{1122} \epsilon_{22} + H_{1133} \epsilon_{33} + \\ & H_{1112} \epsilon_{12} + H_{1123} \epsilon_{23} + H_{1131} \epsilon_{31} \end{aligned} \quad (1.8.9)$$

$$\sigma_{22} = H_{2211} \epsilon_{11} + H_{2222} \epsilon_{22} + H_{2233} \epsilon_{33} + H_{2212} \epsilon_{12} + \\ H_{2223} \epsilon_{23} + H_{2231} \epsilon_{31}$$

$$\sigma_{33} = H_{3311} \epsilon_{11} + H_{3322} \epsilon_{22} + H_{3333} \epsilon_{33} + H_{3312} \epsilon_{12} + \\ H_{3323} \epsilon_{23} + H_{3331} \epsilon_{31}$$

$$\sigma_{12} = H_{1211} \epsilon_{11} + H_{1222} \epsilon_{22} + H_{1233} \epsilon_{33} + H_{1212} \epsilon_{12} + \\ H_{1223} \epsilon_{23} + H_{1231} \epsilon_{31}$$

$$\sigma_{23} = H_{2311} \epsilon_{11} + H_{2322} \epsilon_{22} + H_{2333} \epsilon_{33} + H_{2312} \epsilon_{12} + \\ H_{2323} \epsilon_{23} + H_{2331} \epsilon_{31}$$

$$\sigma_{31} = H_{3111} \epsilon_{11} + H_{3122} \epsilon_{22} + H_{3133} \epsilon_{33} + H_{3112} \epsilon_{12} + \\ H_{3123} \epsilon_{23} + H_{3131} \epsilon_{31}$$

ou, considerando os vetores:

$$\sigma_{ij} = \begin{bmatrix} \sigma_{11} \\ \sigma_{22} \\ \sigma_{33} \\ \sigma_{12} \\ \sigma_{23} \\ \sigma_{31} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \epsilon_{ij} = \begin{bmatrix} \epsilon_{11} \\ \epsilon_{22} \\ \epsilon_{33} \\ \epsilon_{12} \\ \epsilon_{23} \\ \epsilon_{31} \end{bmatrix} \quad (1.8.10)$$

a lei de Hooke pode tomar a forma:

$$\sigma_{ij} = H_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.8.11)$$

onde H_{ijkl} é a matriz simétrica:

$$H_{ijkl} = \begin{bmatrix} H_{1111} & H_{1122} & H_{1133} & H_{1112} & H_{1123} & H_{1131} \\ H_{2211} & H_{2222} & H_{2233} & H_{2212} & H_{2223} & H_{2231} \\ H_{3311} & H_{3322} & H_{3333} & H_{3312} & H_{3323} & H_{3331} \\ H_{1211} & H_{1222} & H_{1233} & H_{1212} & H_{1223} & H_{1231} \\ H_{2311} & H_{2322} & H_{2333} & H_{2312} & H_{2323} & H_{2331} \\ H_{3111} & H_{3122} & H_{3133} & H_{3112} & H_{3123} & H_{3131} \end{bmatrix} \quad (1.8.12)$$

Simetrias nas propriedades do material podem fazer baixar o número de constantes elásticas independentes. No caso de simetria em relação a um plano tem-se 13 constantes elásticas independentes e para simetria em relação a três planos perpendiculares entre si tem-se 9 constantes elásticas independentes [32]. Apresenta particular interesse o caso de corpo elasticamente isótropo, quando o número de constantes elásticas independentes reduz-se a 2, apresentando-se então a lei de Hooke com o seguinte aspecto:

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \epsilon_{ij} + \frac{\nu}{1-2\nu} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33}) \delta_{ij} \right\} \quad (1.8.13)$$

A expressão das deformações em função das tensões é por sua vez:

$$\epsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \left\{ \sigma_{ij} - \frac{\nu}{1+\nu} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33}) \delta_{ij} \right\} \quad (1.8.14)$$

Das expressões (1.8.1), (1.8.2) e (1.7.12) tem-se:

$$W_3 = W_3^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \quad (1.8.15)$$

ou, atendendo a (1.8.11):

$$W_3 = W_3^* = \frac{1}{2} \epsilon_{ij} H_{ijkl} \epsilon_{kl} \quad (1.8.16)$$

Observa-se que pelo fato de as funções W_3 e W_3^* serem positivas definidas, a hipótese de estabilidade material é intrínseca ao material elástico linear.

Apresentam-se agora as expressões de W_3 e W_3^* em forma desenvolvida:

$$W_3 = W_3^* = \frac{1}{2} \sigma_{ij} \epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (\sigma_{11} \epsilon_{11} + \sigma_{22} \epsilon_{22} + \sigma_{33} \epsilon_{33} + 2 \sigma_{12} \epsilon_{12} + 2 \sigma_{23} \epsilon_{23} + 2 \sigma_{31} \epsilon_{31}) \quad (1.8.17)$$

ou, considerando a expressão (1.8.13) e que W_3 é função das deformações, vem:

$$W_3 = \frac{E}{1+\nu} \left\{ \frac{\nu}{2(1-2\nu)} (\epsilon_{11} + \epsilon_{22} + \epsilon_{33})^2 + \frac{1}{2} (\epsilon_{11}^2 + \epsilon_{22}^2 + \epsilon_{33}^2) + \epsilon_{12}^2 + \epsilon_{23}^2 + \epsilon_{31}^2 \right\} \quad (1.8.18)$$

ou, a expressão (1.8.14) e que W_3^* é função das tensões, vem:

$$W_3^* = \frac{1+\nu}{E} \left\{ - \frac{\nu}{2(1+\nu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33})^2 + \frac{1}{2} (\sigma_{11}^2 + \sigma_{22}^2 + \sigma_{33}^2) + \sigma_{12}^2 + \sigma_{23}^2 + \sigma_{31}^2 \right\} \quad (1.8.19)$$

1.9 - Formulação do problema elástico. Unicidade de solução

A teoria da elasticidade propõe resolver o seguinte problema:

"Determinar o estado de tensão e deformação em um corpo, ocupando uma certa região do espaço, verificando:

- a) as relações deformações-deslocamentos (1.1.18)
- b) as equações de equilíbrio (1.4.2) e (1.4.3)
- c) as relações tensões-deformações (1.7.9)
- d) três condições por ponto de fronteira:

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \text{ numa porção } \Sigma_1 \text{ de } \Sigma \quad (1.9.1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ numa porção } \Sigma_2 \text{ de } \Sigma \quad (1.9.2)$$

As grandezas assinaladas com traço superior indicam que as mesmas são fixadas.

A colocação do problema acima envolve um sistema de 15 equações (3 equações de equilíbrio, 6 relações deformações-deslocamentos, 6 relações tensões-deformações) a 15 incógnitas (6 componentes das tensões, 6 componentes das deformações e 3 componentes dos deslocamentos) em cada ponto.

A hipótese de primeiras derivadas dos deslocamentos pequenas conduz a relações deformações-deslocamentos lineares e à invariância da fronteira, portanto à linearidade geométrica. A hipótese da linearidade das relações tensões-deformações implica a linearidade física.

Se as hipóteses de linearidade física e geométrica forem admitidas, as equações de campo são todas lineares e a fronteira é invariante, o que permite verificar o princípio da superposição:

"Uma combinação linear de soluções, das equações de campo, correspondentes a certas forças de massa e de superfície, é uma nova solução das equações de campo, correspondente a mesma combinação linear de condições de fronteira, de forças de massa e de superfície das soluções primitivas".

Não se demonstrará que o problema posto tenha solução, mas que se ela existir é única.

Seja a expressão do teorema do trabalho (1.5.9)

$$\int_V \sigma_{ij} \epsilon_{ij} dV = \int_\Sigma \sigma_i u_i d\Sigma + \int_V X_i u_i dV \quad (1.9.3)$$

e considere-se a partir da hipótese de linearidade física a expressão (1.8.15). Logo:

$$\int_\Sigma \sigma_i u_i d\Sigma + \int_V X_i u_i dV = 2 \int_V W_3 dV \quad (1.9.4)$$

Com a finalidade de se estabelecer a unicidade do problema, admita-se a hipótese da existência de duas soluções:

$$u_i^1 \quad \sigma_{ij}^1 \quad (1.9.5)$$

$$u_i^2 \quad \sigma_{ij}^2 \quad (1.9.6)$$

Considerando o princípio da superposição a solução diferença

$$u_i = u_i^1 - u_i^2 \quad (1.9.7)$$

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^1 - \sigma_{ij}^2$$

também é uma solução, que corresponde a forças de massa nulas, deslocamentos nulos em Σ_2 e tensões aplicadas nulas em Σ_1 .

Para a solução diferença a equação (1.9.4) apresenta-se:

$$2 \int_V W_3 \, dV = 0 \quad (1.9.8)$$

visto que as equações (1.9.1) e (1.9.2) devem ser verificadas. Como a função W_3 é uma forma quadrática definida positiva, a integral em (1.9.8) só se anula quando $W_3 = 0$, isto é, $\epsilon_{ij} = 0$. Mas:

$$\epsilon_{ij} = \epsilon_{ij}^1 - \epsilon_{ij}^2 \quad (1.9.9)$$

consequentemente as componentes do tensor das deformações são idênticas para as soluções (1) e (2) e, de acordo com a lei de Hooke, as componentes do tensor das tensões para as duas soluções também são idênticas. Segue-se então que as duas soluções são idênticas e portanto que a solução é única. Demonstrou-se assim o teorema de Kirchhoff.

A unicidade da solução, significando que a cada solicitação corresponde um único campo de deformações e portanto um único campo de tensões, nem sempre se garante fora da perfeita linearidade, mesmo que o material seja elástico. Para que a unicidade ocorra, deve-se acrescentar as hipóteses de estabilidade material e da não ocorrência de mudanças básicas nas equações de equilíbrio [4].

Se não atuarem forças exteriores, as equações correspondentes à solução do problema elástico são todas homogêneas e portanto verificadas por componentes nulas de tensão, de deformação e de deslocamento. Essa solução é a única correspondente ao estado natural, pelo que não são possíveis estados de coação.

Valores das incógnitas que respeitem as equações de campo de equilíbrio, as relações tensões-deformações e as condições de fronteira em Σ_1 , constituem uma solução equilibrada.

Valores que verifiquem as relações deformações-deslocamentos, as relações tensões-deformações e as condições de fronteira em Σ_2 , constituem uma solução compatível.

O teorema da unicidade pode então ser enunciado nas seguintes formas:

"Das soluções equilibradas só uma é compatível"

ou

"Das soluções compatíveis só uma é equilibrada".

CAP. 2 - TEOREMAS VARIACIONAIS DA TEORIA DA ELASTICIDADE

2.1 - Teorema dos deslocamentos virtuais

Seja um corpo em equilíbrio estático, sujeito à ação de forças de massa $\bar{X}_i$, definidas em todo o volume V , e de forças de superfície $\bar{\sigma}_i$, definidas em uma porção Σ_1 da fronteira Σ . Na porção restante Σ_2 , da fronteira Σ , tem-se especificados os deslocamentos $\bar{u}_i$.

Fig. 2.1 - Notações

Considere-se u_i o campo de deslocamentos correspondentes ao estado de equilíbrio.

Introduz-se um campo arbitrário de deslocamentos u'_i , de classe C_3 , com a seguinte expressão:

$$u'_i = u_i + \delta u_i \quad (2.1.1)$$

com as propriedades:

$$\epsilon'_{ij} = 0.5 (u'_{i,j} + u'_{j,i}) \text{ em } V \quad (2.1.2)$$

$$u'_i \text{ arbitrário em } \Sigma_1 \quad (2.1.3)$$

$$u'_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2 \quad (2.1.4)$$

2.2

Obtêm-se das equações acima que as variações δu_i satisfazem às seguintes equações:

$$\delta \epsilon_{ij} = 0.5 (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) \text{ em } V \quad (2.1.5)$$

$$\delta u_i \text{ arbitrária em } \Sigma_1 \quad (2.1.6)$$

$$\delta u_i = 0 \text{ em } \Sigma_2 \quad (2.1.7)$$

A variação δu_i que satisfaz às condições (2.1.5), (2.1.6) e (2.1.7) diz-se virtual.

Seja um campo qualquer de tensões equilibrado por forças de massa $\bar{X}_i$, em V , e de superfície $\bar{\sigma}_i$ em Σ_1 .

O teorema do trabalho permite então escrever:

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma \quad (2.1.8)$$

que exprime a equação do teorema dos deslocamentos virtuais.

É interessante observar que a expressão (2.1.8) é uma identidade matemática. A sua verificação garante que o campo de tensões σ_{ij} seja equilibrado pelas forças exteriores de massa, em V , e de superfícies, em Σ_1 , nada se estabelecendo sobre os pontos de Σ_2 , onde as tensões exteriores aplicadas não são efetivamente conhecidas.

2.2 - Teorema da Energia potencial total

Considere-se o teorema dos deslocamentos virtuais

$$\int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma \quad (2.2.1)$$

Sendo o corpo elástico, existe W_3 , densidade da energia de deformação, função exclusiva dos componentes de deformação, tal que $\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij}$, que introduzida na primeira integral da equação (2.2.1) fornece:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV &= \int_V \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV = \int_V \delta W_3 dV = \\ &= \delta \int_V W_3 dV = \delta U. \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

A expressão (2.2.1) toma então o seguinte aspeto:

$$\delta \int_V W_3 dV - \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma = 0 \quad (2.2.3)$$

Nova simplificação pode ser obtida, considerando-se que as forças externas de massa e de superfície sejam conservativas, isto é, independem da deformação elástica do corpo. Assim:

$$\begin{aligned} \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV + \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma &= \delta \int_V \bar{X}_i u_i dV + \\ &+ \delta \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma \end{aligned} \quad (2.2.4)$$

Considerando-se (2.2.3) e (2.2.4), vem:

$$\begin{aligned} \delta \int_V W_3 dV - \delta \int_V \bar{X}_i u_i dV - \delta \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma &= \\ = \delta \left\{ \int_V W_3 dV - \int_V \bar{X}_i u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma \right\} &= 0 \end{aligned} \quad (2.2.5)$$

2.4

que pode ser escrito:

$$\delta \{U + P\} = 0 \quad (2.2.6)$$

ou:

$$\delta T = 0 \quad (2.2.7)$$

onde:

$$U = \int_V W_3 \, dV \quad (2.2.8)$$

U é a energia potencial de deformação,

$$P = - \int_V \bar{X}_i u_i \, dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i \, d\Sigma \quad (2.2.9)$$

P é a energia potencial das forças externas, e

$$T = \int_V W_3 \, dV - \int_V \bar{X}_i u_i \, dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i \, d\Sigma \quad (2.2.10)$$

T é chamado energia potencial total do sistema.

A expressão (2.2.7) exprime que a energia potencial total do sistema é estacionária, para variações virtuais das deformações, ou mais precisamente:

"Entre todas as soluções compatíveis, a que além de compatível for equilibrada torna a energia potencial total estacionária".

Observa-se que na dedução acima não se considerou a linearidade das relações tensões-deformações, sendo portanto válida a conclusão para materiais elásticos lineares ou não.

É fácil provar que a energia potencial total não é só estacionária, mas mínima, se o material for materialmente estável. Essa demonstração pode ser feita comparando a energia potencial total T correspondente aos deslocamentos u_i do estado de equilíbrio e a energia potencial total T' correspondente a um campo de deslocamentos $u_i + \delta u_i$, de classe C_3 , arbitrário, mas consistente com os vínculos. Tem-se então:

$$T' (u_i + \delta u_i) - T (u_i) = \int_V \{W_3 (\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}) - W_3 (\epsilon_{ij})\} dV - \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma \quad (2.2.11)$$

e desenvolvendo $W_3 (\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij})$ em série de Taylor, vem:

$$W_3 (\epsilon_{ij} + \delta \epsilon_{ij}) = W_3 (\epsilon_{ij}) + \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} + \dots \quad (2.2.12)$$

que introduzido na expressão (2.2.11) permite obter:

$$\begin{aligned} T' (u_i + \delta u_i) - T (u_i) &= \int_V \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV - \\ &- \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma - \\ &- \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 W_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} dV \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

2.6

As três primeiras parcelas do lado direito da expressão (2.2.13) correspondem ao teorema dos deslocamentos virtuais e de acordo com (2.2.3) somam zero. Logo:

$$T' - T = \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 W_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} dV \quad (2.2.14)$$

ou considerando-se que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 W_3}{\partial \epsilon_{ij} \partial \epsilon_{kl}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} &= \frac{\partial \sigma_{kl}}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} \delta \epsilon_{kl} = \\ &= \delta \sigma_{kl} \delta \epsilon_{kl} \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

vem:

$$T' - T = 0.5 \int_V \delta \sigma_{kl} \delta \epsilon_{kl} dV \quad (2.2.16)$$

e, como, por hipótese, o material é materialmente estável, obtém-se:

$$T' - T > 0 \quad (2.2.17)$$

e o ponto de estacionaridade é efetivamente um mínimo. O enunciado do teorema pode pois transformar-se no seguinte:

"Entre todas as soluções compatíveis, a que além de compatível for equilibrada torna mínima a energia potencial total, desde que se verifiquem as hipóteses de elasticidade, estabilidade material e linearidade geométrica".

De forma inversa, mostra-se que o princípio variacional para o funcional energia potencial total, fornece as equações de equilíbrio. De fato, na expressão (2.2.10) da energia potencial total, considerando-se uma variação virtual δu_i arbitrária dos deslocamentos, tem-se:

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_V \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \\ & - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma \end{aligned} \quad (2.2.18)$$

mas:

$$\begin{aligned} \int_V \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV &= \int_V \sigma_{ij} \delta \epsilon_{ij} dV = \quad (2.2.19) \\ &= \int_V \sigma_{ij} 0.5 (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i}) dV = \int_V \sigma_{ij} \delta u_{i,j} dV = \\ &= - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_V (\sigma_{ij} \delta u_i)_{,j} dV = \\ &= - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_{\Sigma} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Sigma \end{aligned}$$

e substituindo a expressão final de (2.2.20) em (2.2.19), vem:

$$\begin{aligned} \delta T = & - \int_V \sigma_{ij,j} \delta u_i dV + \int_{\Sigma_1} \sigma_{ij} n_j \delta u_i d\Sigma - \quad (2.2.20) \\ & - \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma = 0 \end{aligned}$$

2.8

ou:

$$\begin{aligned} \delta T = & - \int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i) \delta u_i dV + \\ & + \int_{\Sigma_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{\sigma}_i) \delta u_i d\Sigma = 0 \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

expressão que fica satisfeita para δu_i arbitrário, se:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \quad \text{em } V \quad (2.2.22)$$

e

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \quad \text{em } \Sigma_1 \quad (2.2.23)$$

Pode-se enunciar então o seguinte teorema:

"O funcional T assume um valor mínimo quando os deslocamentos u_i são os correspondentes ao estado de equilíbrio, desde que se verifiquem as hipóteses de elasticidade, estabilidade material e linearidade geométrica".

Observa-se que as demonstrações desenvolvidas servem para mostrar que os pontos de estacionaridade correspondem sempre a mínimos mesmo que não se considere a totalidade das soluções compatíveis.

2.3 - Aplicação do teorema da energia potencial total

Considere-se o caso simples da treliça hiperestática formada por n barras prismáticas, com uma das extremidades articulada em O e a outra apoiada fixamente, solicitada pelos esforços externos P_1 e P_2 , aplicados em O , como mostra a figura 2.2.

Trata-se de obter as equações de equilíbrio pela aplicação do teorema da energia potencial total.

Fig. 2.2 - Treliza hiperestática

A barra de ordem i tem comprimento L_i , área da seção transversal S_i , módulo de elasticidade E_i e faz com a horizontal um ângulo α_i .

Serão consideradas válidas as hipóteses da resistência dos materiais.

Seja u_1 e u_2 as componentes de deslocamento no ponto O, correspondentes a P_1 e P_2 . Dessa forma, para a barra de ordem i , o deslocamento longitudinal u_{s_i} , na seção de abscissa s_i , de acordo com a figura 2.3, será dado por:

$$u_{s_i} = \frac{s_i}{L_i} \cos \alpha_i u_1 + \frac{s_i}{L_i} \sin \alpha_i u_2 \quad (2.3.1)$$

Fig. 2.3 - Deslocamentos na barra de ordem i

A expressão (2.3.1) define uma classe arbitrária de deslocamentos consistente com os vínculos. Pode-se obter então as deformações longitudinais, através das relações deformações-deslocamentos:

$$\epsilon_i = \frac{\partial u_{s_i}}{\partial s_i} = \frac{\cos \alpha_i}{L_i} u_1 + \frac{\sin \alpha_i}{L_i} u_2 \quad (2.3.2)$$

e as tensões normais, através das relações tensões-deformações:

$$\sigma_i = E \epsilon_i = \frac{E_i \cos \alpha_i}{L_i} u_1 + \frac{E_i \sin \alpha_i}{L_i} u_2 \quad (2.3.3)$$

associadas ao campo de deslocamentos definido por (2.3.1).

Para a barra de ordem i, a energia de deformação é dada por:

$$U_i = \int_{V_i} \int_0^{\epsilon_i} \sigma_i d\epsilon_i dV = \int_{V_i} \int_0^{\epsilon_i} E_i \epsilon_i d\epsilon_i dV = \quad (2.3.4)$$

$$U_i = \int_{V_i} \frac{E_i \epsilon_i^2}{2} dV = \frac{E_i \epsilon_i^2}{2} V_i = 0.5 E_i \epsilon_i^2 S_i l_i$$

Logo, tem-se para energia de deformação da estrutura:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n 0.5 E_i \epsilon_i^2 S_i l_i \quad (2.3.5)$$

Sendo a energia potencial das forças externas

$$P = -P_1 u_1 - P_2 u_2 \quad (2.3.6)$$

pode-se escrever a expressão do funcional energia potencial total

$$T = \sum_{i=1}^n 0.5 E_i \epsilon_i^2 S_i L_i - P_1 u_1 - P_2 u_2 \quad (2.3.7)$$

ou, considerando-se (2.3.2), vem:

$$T = \sum_{i=1}^n 0.5 \frac{E_i S_i}{L_i} (\cos^2 \alpha_i u_1^2 + \sin^2 \alpha_i u_2^2 + \quad (2.3.8)$$

$$+ 2 \sin \alpha_i \cos \alpha_i u_1 u_2) - P_1 u_1 - P_2 u_2$$

É interessante observar que a cada campo de deslocamentos consistentes com os vínculos, corresponde um valor da energia potencial total.

2.12

Considere-se, agora, a primeira variação do funcional T:

$$\begin{aligned} \delta T = & \sum_{i=1}^n \left\{ 0.5 \frac{E_i S_i}{L_i} \{ 2 \cos^2 \alpha_i u_1 \delta u_1 + \right. \\ & + 2 \sin^2 \alpha_i u_2 \delta u_2 + 2 \sin \alpha_i \cos \alpha_i (u_1 \delta u_2 + u_2 \delta u_1) \} \} - \\ & - P_1 \delta u_1 - P_2 \delta u_2 \end{aligned} \quad (2.3.9)$$

ou:

$$\begin{aligned} \delta T = & - \{ P_1 - \sum_{i=1}^n \frac{E_i S_i}{L_i} (\cos^2 \alpha_i u_1 + \\ & + \sin \alpha_i \cos \alpha_i u_2) \} \delta u_1 - \{ P_2 - \sum_{i=1}^n \frac{E_i S_i}{L_i} (\sin^2 \alpha_i u_2 + \\ & + \sin \alpha_i \cos \alpha_i u_1) \} \delta u_2 \end{aligned} \quad (2.3.10)$$

As condições de equilíbrio correspondem à estacionarização do funcional T. Logo, considerando-se que as variações δu_1 e δu_2 são arbitrárias, vem:

$$P_1 - \sum_{i=1}^n \frac{E_i S_i}{L_i} (\cos^2 \alpha_i u_1 + \sin \alpha_i \cos \alpha_i u_2) = 0 \quad (2.3.11)$$

e

$$P_2 - \sum_{i=1}^n \frac{E_i S_i}{L_i} (\sin \alpha_i \cos \alpha_i u_1 + \sin^2 \alpha_i u_2) = 0 \quad (2.3.12)$$

que são, evidentemente, as equações de equilíbrio.

Obtendo-se u_1 e u_2 , correspondentes à solução equilibrada, pela resolução de (2.3.11) e (2.3.12), pode-se determinar as tensões σ_i e as deformações ϵ_i , através das expressões (2.3.2) e (2.3.3).

É interessante observar, que considerando-se (2.3.1) as equações de equilíbrio (2.3.11) e (2.3.12) podem ser postas na forma:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n \frac{E_i S_i}{L_i} u_{L_i} \cos \alpha_i \quad (2.3.13)$$

e

$$P_2 = \sum_{i=1}^n \frac{E_i S_i}{L_i} u_{L_i} \sen \alpha_i \quad (2.3.14)$$

ou, considerando-se (2.3.2) e (2.3.3), nas formas:

$$P_1 = \sum_{i=1}^n E_i S_i \epsilon_i \cos \alpha_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \cos \alpha_i \quad (2.3.15)$$

e

$$P_2 = \sum_{i=1}^n E_i S_i \epsilon_i \sen \alpha_i = \sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \sen \alpha_i \quad (2.3.16)$$

2.4 - Teorema das forças virtuais

Seja um corpo em equilíbrio estático, sujeito à ação de forças de massa $\bar{X}_i$, definidas em todo o volume V , e de forças de superfície $\bar{\sigma}_i$, definidas em uma porção Σ_1 da fronteira Σ . Na porção restante Σ_2 , da fronteira Σ , tem-se especificado os deslocamentos $\bar{u}_i$.

Considere-se σ_{ij} o campo de tensões equilibrado por forças de massas $\bar{X}_i$, em V , e por forças de superfície $\bar{\sigma}_i$, em Σ_1 , correspondentes às condições de compatibilidade. Dessa forma, tem-se:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V \quad (2.4.1)$$

$$\sigma_{ij} n_j - \bar{\sigma}_i = 0 \text{ em } \Sigma_1 \quad (2.4.2)$$

Introduz-se um conjunto de funções σ'_{ij} , de classe C_2 , em V , com a seguinte expressão:

$$\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij} \quad (2.4.3)$$

com as propriedades:

$$\sigma'_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V \quad (2.4.4)$$

$$\sigma'_{ij} n_j - \bar{\sigma}_i = 0 \text{ em } \Sigma_1 \quad (2.4.5)$$

$$\sigma'_{ij} \text{ arbitrária em } \Sigma_2 \quad (2.4.6)$$

Obtêm-se das equações acima que as variações $\delta\sigma_{ij}$ satisfazem às condições:

$$\delta\sigma_{ij,j} = 0 \text{ em } V \quad (2.4.7)$$

$$\delta\sigma_{ij} n_j = 0 \text{ em } \Sigma_1 \quad (2.4.8)$$

$$\delta\sigma_{ij} n_j = \text{arbitrária em } \Sigma_2 \quad (2.4.9)$$

A variação $\delta\sigma_{ij}$ que satisfaz às condições (2.4.7), (2.4.8) e (2.4.9) diz-se virtual.

Seja um campo qualquer de deformações ϵ_{ij} gerado por um campo de deslocamentos u_i que satisfaz às condições de contorno em Σ_2 .

O teorema do trabalho permite, então, escrever:

$$\int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{\Sigma_2} \delta \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.4.10)$$

que exprime a equação do teorema das forças virtuais.

É interessante observar que a expressão (2.4.10) é uma identidade matemática. A sua verificação garante a integrabilidade de ϵ_{ij} , em V , e as condições de contorno em Σ_2 , por parte do campo de deslocamentos associado, nada se estabelecendo sobre os pontos de Σ_1 onde os deslocamentos não são efetivamente conhecidos.

2.5 - Teorema da Energia potencial complementar total

Considere-se o teorema das forças virtuais

$$\int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV = \int_{\Sigma_2} \delta \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.5.1)$$

Sendo o corpo elástico, existe a função densidade da energia complementar de deformação, W_3^* , função exclusiva das componentes de tensão, tal que $\frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} = \epsilon_{ij}$, que introduzida na primeira integral de (2.5.1) fornece:

$$\begin{aligned} \int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV &= \int_V \frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dV = \int_V \delta W_3^* dV = \quad (2.5.2) \\ &= \delta \int_V W_3^* dV = \delta U^* \end{aligned}$$

A expressão (2.5.1) toma então o seguinte aspecto:

$$\delta \int_V W_3^* dV - \int_{\Sigma_2} \delta \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma = 0 \quad (2.5.3)$$

onde a segunda integral do primeiro membro, em virtude da invariância do domínio, pode ser considerada como a variação de um funcional

$$P^* = - \int_{\Sigma_2} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.5.4)$$

O teorema das forças virtuais apresenta-se, então na forma:

$$\delta \int_V W_3^* dV - \delta \int_{\Sigma_1} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma = \quad (2.5.5)$$

$$= \delta \left\{ \int_V W_3^* dV - \int_{\Sigma_2} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \right\} = 0$$

que pode ser escrito:

$$\delta \{U^* + P^*\} = 0 \quad (2.5.6)$$

ou:

$$\delta T^* = 0 \quad (2.5.7)$$

onde:

$$U^* = \int_V W_3^* dV \quad (2.5.8)$$

é a energia potencial complementar de deformação,

$$P^* = - \int_{\Sigma_2} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.5.9)$$

é a energia potencial complementar das forças externas e

$$T^* = \int_V W_3^* dV - \int_{\Sigma_2} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.5.10)$$

é chamado energia potencial complementar total do sistema.

A expressão (2.5.7) exprime que a energia potencial complementar total do sistema é estacionária para variações virtuais das tensões, ou mais precisamente:

"Entre todas as soluções equilibradas, a que além de equilibrada for compatível, torna a energia potencial complementar total estacionária".

É fácil provar que a energia potencial complementar total não é só estacionária, mas mínima, se o material for materialmente estável. Essa demonstração pode ser feita comparando a energia potencial complementar total T^* correspondente às tensões σ_{ij} referentes à solução compatível e a energia potencial complementar total $T^{*'}$, correspondente a um campo de tensões $\sigma'_{ij} = \sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}$, de classe C_2 , arbitrário, equilibrado por forças de massa $\bar{X}_i$, em V , e de superfície $\bar{\sigma}_i$, em Σ_1 .

Dessa forma, tem-se:

$$\begin{aligned} T^{*'} (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) - T^* (\sigma_{ij}) &= \quad (2.5.11) \\ &= \int_V \{W_3^* (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) - W_3^* (\sigma_{ij})\} dV - \\ &- \int_{\Sigma_2} \{(\sigma_i + \delta\sigma_i) - \sigma_i\} \bar{u}_i d\Sigma \end{aligned}$$

e, desenvolvendo-se $W_3^* (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij})$ em série de Taylor, vem:

$$\begin{aligned} W_3^* (\sigma_{ij} + \delta\sigma_{ij}) &= W_3^* (\sigma_{ij}) + \frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} + \\ &+ \frac{1}{2} \frac{\partial^2 W_3^*}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} + \dots \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

que introduzido na expressão (2.5.11) permite obter:

$$\begin{aligned} T^{*'} - T^* &= \int_V \frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} dV - \int_\Sigma \delta\sigma_i \bar{u}_i d\Sigma + \\ &+ \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 W_3^*}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} dV \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

As duas primeiras parcelas do lado direito da expressão (2.5.13) correspondem ao teorema das forças virtuais e, de acordo com (2.5.1) somam zero. Obtêm-se, então:

$$\begin{aligned} T^{*'} - T^* &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial^2 W_3^*}{\partial \sigma_{ij} \partial \sigma_{kl}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} dV = \\ &= \frac{1}{2} \int_V \frac{\partial \epsilon_{kl}}{\partial \sigma_{ij}} \delta\sigma_{ij} \delta\sigma_{kl} dV = \frac{1}{2} \int_V \delta\epsilon_{kl} \delta\sigma_{kl} dV \end{aligned} \quad (2.5.14)$$

e como, por hipótese, o material é materialmente estável, obtêm-se:

$$T^{*'} - T^* > 0 \quad (2.5.15)$$

portanto, o ponto de estacionaridade é realmente um mínimo. O enunciado do teorema pode pois transformar-se no seguinte:

"Entre todas as soluções equilibradas, a que, além de equilibrada, for compatível torna mínima a energia potencial complementar total, desde que se verifiquem as hipóteses de elasticidade, estabilidade material e linearidade geométrica".

De forma inversa, mostra-se que o princípio variacional para o funcional energia potencial complementar total fornece as equações de compatibilidade. Essa demonstração foi desenvolvida por Richard V. Southwell, em 1936. [4].

Seja a equação variacional:

$$\delta T^* = \int_V \epsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} dV - \int_{\Sigma_2} \bar{u}_i \delta \sigma_i d\Sigma = 0 \quad (2.5.16)$$

onde as variações $\delta \sigma_{ij}$ e $\delta \sigma_i$ estão sujeitas às seguintes restrições:

$$\delta \sigma_{ij,j} = 0 \text{ em } V \quad (2.5.17)$$

$$\delta \sigma_i^t = \delta \sigma_{ij} n_j = 0 \text{ em } \Sigma_1 \quad (2.5.18)$$

Pode-se introduzir as restrições (2.5.17) em (2.5.16) com a utilização de expressões convenientes para $\delta \sigma_{ij}$, que satisfaçam formalmente às equações de equilíbrio (2.5.17). Dessa forma, seja:

$$\delta \sigma_{11} = \phi_{22,33} + \phi_{33,22} - 2 \phi_{23,23} \quad (2.5.19)$$

$$\delta \sigma_{22} = \phi_{33,11} + \phi_{11,33} - 2 \phi_{31,31}$$

$$\delta \sigma_{33} = \phi_{11,22} + \phi_{22,11} - 2 \phi_{12,12}$$

2.20

$$\delta\sigma_{23} = \phi_{31,12} + \phi_{12,13} - \phi_{11,23} - \phi_{23,11}$$

$$\delta\sigma_{31} = \phi_{12,23} + \phi_{23,21} - \phi_{22,31} - \phi_{31,22}$$

$$\delta\sigma_{12} = \phi_{23,31} + \phi_{31,32} - \phi_{33,12} - \phi_{12,33}$$

com $\phi_{ij} = \phi_{ji}$.

Substituindo as expressões (2.5.19) em (2.5.16), vem:

$$\begin{aligned} \delta T^* = & \int_V \{ \epsilon_{11} (\phi_{22,33} + \phi_{33,22} - 2 \phi_{23,23}) + \\ & + \epsilon_{22} (\phi_{33,11} + \phi_{11,33} - 2 \phi_{31,31}) + \\ & + \epsilon_{33} (\phi_{11,22} + \phi_{22,11} - 2 \phi_{12,12}) + \\ & + 2 \epsilon_{23} (\phi_{31,12} + \phi_{12,13} - \phi_{11,23} - \phi_{23,11}) + \\ & + 2 \epsilon_{31} (\phi_{12,23} + \phi_{23,21} - \phi_{22,31} - \phi_{31,22}) + \\ & + 2 \epsilon_{12} (\phi_{23,31} + \phi_{31,32} - \phi_{33,12} - \phi_{12,33}) \} dV + \\ & + \int_{\Sigma_2} \bar{u}_i \delta\sigma_i d\Sigma \end{aligned} \quad (2.5.20)$$

integrando-se duas vezes por partes e, aplicando-se o teorema da divergência, vem:

$$\delta T^* = \int_V \{ \phi_{11} (\epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} - 2 \epsilon_{23,23}) + \quad (2.5.21)$$

$$+ \phi_{22} (\epsilon_{11,33} + \epsilon_{33,11} - 2 \epsilon_{31,31}) +$$

$$+ \phi_{33} (\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2 \epsilon_{12,12}) +$$

$$+ \phi_{12} (-2 \epsilon_{33,12} + 2 \epsilon_{23,13} + 2 \epsilon_{31,23} - 2 \epsilon_{12,33}) +$$

$$+ \phi_{23} (-2 \epsilon_{11,23} - 2 \epsilon_{23,11} + 2 \epsilon_{31,21} + 2 \epsilon_{12,31}) +$$

$$+ \phi_{31} (-2 \epsilon_{22,31} + 2 \epsilon_{23,12} - 2 \epsilon_{31,22} + 2 \epsilon_{12,32}) \} dV +$$

$$+ \text{integral superfície} = 0.$$

Como as funções ϕ_{ij} são arbitrárias, em V , obtêm-se:

$$\epsilon_{22,33} + \epsilon_{33,22} - 2 \epsilon_{23,23} = 0 \quad (2.5.22)$$

$$\epsilon_{11,33} + \epsilon_{33,11} - 2 \epsilon_{31,31} = 0$$

$$\epsilon_{11,22} + \epsilon_{22,11} - 2 \epsilon_{12,12} = 0$$

$$\epsilon_{33,12} + \epsilon_{12,33} - \epsilon_{23,13} - \epsilon_{31,23} = 0$$

$$\epsilon_{11,23} + \epsilon_{23,11} - \epsilon_{31,21} - \epsilon_{12,31} = 0$$

$$\epsilon_{22,31} + \epsilon_{31,22} - \epsilon_{23,12} - \epsilon_{12,32} = 0 \text{ em } V$$

que são as equações de compatibilidade de Saint-Venant.

O tratamento da integral de superfície não será desenvolvido, mas, dele obtêm-se que sobre Σ_2 os valores de u_i são fixados e as tensões são arbitrárias.

Pode-se enunciar, então, o seguinte teorema:

"O funcional T^* assume um valor mínimo quando as tensões σ_{ij} são as correspondentes às condições de compatibilidade, desde que se verifiquem as hipóteses de elasticidade, estabilidade material e linearidade geométrica".

2.6 - Aplicação do teorema da energia potencial complementar total

Considere-se o caso simples da treliça hiperestática, formada por n barras prismáticas, com uma das extremidades articulada em O e a outra apoiada fixamente, solicitada pelos esforços externos P_1 e P_2 , aplicados em O , como mostra a figura (2.2).

Trata-se de obter as equações de compatibilidade pela aplicação do teorema da energia potencial complementar total.

A barra de ordem i tem comprimento L_i , área da seção transversal S_i , módulo de elasticidade E_i e faz com a horizontal um ângulo α_i .

Serão consideradas válidas as hipóteses da resistência dos materiais.

Seja um campo de tensões σ_{ij} que equilibre forças de massa nula, em V , e forças P_1 e P_2 aplicadas em O . Considere-se, σ_i , a tensão normal no plano da seção transversal, da barra de ordem i .

Pode-se então obter as deformações longitudinais através das relações tensões-deformações

$$\epsilon_i = \frac{\sigma_i}{E_i} \quad (2.6.1)$$

e os deslocamentos longitudinais

$$u_{s_i} = \frac{\sigma_i}{E_i} s_i \quad (2.6.2)$$

associados ao campo de tensões equilibrado.

Para a barra de ordem i , a energia potencial complementar de deformação, $\bar{e}$ é dada por:

$$\begin{aligned} U_i^* &= \int_{V_i} \int_0^{\sigma_i} \epsilon_i \delta \sigma_i dV = \int_{V_i} \int_0^{\sigma_i} \frac{\sigma_i}{E_i} \delta \sigma_i dV = \\ &= \int_{V_i} \frac{\sigma_i^2}{2 E_i} dV = \frac{\sigma_i^2}{2 E_i} V_i = \frac{\sigma_i^2 S_i L_i}{2 E_i} \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

Logo, tem-se para a energia potencial complementar de deformação da estrutura:

$$U^* = \sum_{i=1}^n U_i^* = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 S_i L_i}{2 E_i} \quad (2.6.4)$$

Sendo a energia potencial complementar das forças externas

$$P^* = 0 \quad (2.6.5)$$

visto que, os deslocamentos especificados são nulos, pode-se escrever a expressão do funcional energia potencial complementar total:

$$T^* = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i^2 S_i L_i}{2 E_i} \quad (2.6.6)$$

É interessante observar que a cada campo de tensões equilibrado, corresponde um valor da energia potencial complementar total.

Considere-se, agora, a primeira variação do funcional T^* :

$$\delta T^* = \sum_{i=1}^n \frac{\sigma_i S_i L_i}{E_i} \delta \sigma_i \quad (2.6.7)$$

As condições de compatibilidade correspondem à estacionarização do funcional T^* . Observe-se que as variações $\delta \sigma_i$ são arbitrárias, mas, não independentes entre si, visto que equilibram forças de massa nulas, em V , e forças de superfície nulas, em Σ_1 . Logo, deve-se respeitar, de acordo com (2.3.15) e (2.3.16), as seguintes relações entre as variações virtuais $\delta \sigma_i$ das tensões:

$$\sum_{i=1}^n \delta \sigma_i S_i \cos \alpha_i = 0 \quad (2.6.8)$$

e

$$\sum_{i=1}^n \delta \sigma_i S_i \sin \alpha_i = 0 \quad (2.6.9)$$

Substituindo-se (2.6.8) e (2.6.9) em (2.6.7) e considerando-se a arbitrariedade e a independência mútua das variações $\delta \sigma_i$, obtêm-se $(n-2)$ equações que são, evidentemente, as equações de compatibilidade.

Exemplificando, considere-se a treliça hiperestática de três barras prismáticas de mesmo material e de mesma área da seção transversal da figura 2.4.

Fig. 2.4 - Treliza hiperestática de 3 barras

De acordo com a equação (2.6.7), vem:

$$\frac{\sigma_1 S_1 L_1}{E_1} \delta\sigma_1 + \frac{\sigma_2 S_2 L_2}{E_2} \delta\sigma_2 + \frac{\sigma_3 S_3 L_3}{E_3} \delta\sigma_3 = 0 \quad (a)$$

sendo que as variações $\delta\sigma_i$ devem respeitar as restrições (2.6.8) e (2.6.9):

$$\delta\sigma_1 S_1 \sin \alpha_1 + \delta\sigma_2 S_2 \sin \alpha_2 + \delta\sigma_3 S_3 \sin \alpha_3 = 0 \quad (b)$$

e

$$\delta\sigma_1 S_1 \cos \alpha_1 + \delta\sigma_2 S_2 \cos \alpha_2 + \delta\sigma_3 S_3 \cos \alpha_3 = 0 \quad (c)$$

Considerando-se os valores numéricos as expressões (b) e (c) tomam o seguinte aspeto:

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \delta\sigma_1 + \delta\sigma_2 + \frac{\sqrt{2}}{2} \delta\sigma_3 = 0 \quad (d)$$

2.26

e

$$\frac{\sqrt{2}}{2} \delta\sigma_1 - \frac{\sqrt{2}}{2} \delta\sigma_3 = 0 \quad (e)$$

ou

$$\delta\sigma_2 = -\sqrt{2} \delta\sigma_1 \quad (f)$$

e

$$\delta\sigma_3 = \delta\sigma_1 \quad (g)$$

que substituídas em (a) fornecem:

$$\left(\frac{\sigma_1 S_1 L_1}{E_1} - \sqrt{2} \frac{\sigma_2 S_2 L_2}{E_2} + \frac{\sigma_3 S_3 L_3}{E_3} \right) \delta\sigma_1 = 0 \quad (h)$$

e como $\delta\sigma_1$ é arbitrário e independente, vem:

$$\frac{\sigma_1 S_1 L_1}{E_1} - \sqrt{2} \frac{\sigma_2 S_2 L_2}{E_2} + \frac{\sigma_3 S_3 L_3}{E_3} = 0 \quad (i)$$

que é a equação de compatibilidade. Considerando (2.6.2) a expressão (i) pode ser posta na forma:

$$u_{L_1} - \sqrt{2} u_{L_2} + u_{L_3} = 0 \quad (j)$$

que juntamente com as equações de equilíbrio permitem determinar as tensões σ_i e as deformações ϵ_i .

2.7 - Teorema de três campos (ou da energia potencial total generalizada)

Estabeleceu-se anteriormente a partir do teorema dos deslocamentos virtuais o teorema da mínima energia potencial total:

"Entre todas as soluções compatíveis, a que além de compatível for equilibrada torna mínimo o funcional,

$$T = \int_V W_3(\epsilon_{ij}) dV - \int_V \bar{X}_i u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma \quad (2.7.1)$$

energia potencial total, desde que se verifiquem as hipóteses de elasticidade, estabilidade material e linearidade geométrica".

O teorema é estabelecido para variações virtuais do campo de deslocamentos e variações associadas do campo de deformações, apresentando, portanto, variações livres de um único campo. Deseja-se agora enunciar um teorema que apresente variações livres nos três campos.

Seja o funcional, energia potencial total, dado por (2.7.1) a ser estacionarizado, sujeito às condições subsidiárias:

$$\epsilon_{ij} = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V \quad (2.7.2)$$

e

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2 \quad (2.7.3)$$

Pela técnica dos multiplicadores de Lagrange obtém-se o funcional

$$\begin{aligned} F = & \int_V W_3 dV - \int_V \bar{X}_i u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma + \\ & + \int_V \sigma'_{ij} \{0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij}\} dV + \int_{\Sigma_2} \sigma'_i (\bar{u}_i - u_i) d\Sigma \end{aligned} \quad (2.7.4)$$

sem condições subsidiárias, onde σ'_i e σ'_{ij} são os multiplicadores de Lagrange, com dimensão de tensões, mas arbitrários.

Considere-se, sem perda de generalidade, variações simétricas dos campos de tensões e de deformações.

Seja a primeira variação do funcional (2.7.4) com variações livres dos campos tensoriais ϵ_{ij} , σ'_{ij} e u_i e do campo vetorial σ'_i . Obtêm-se então:

$$\begin{aligned} \delta F = & \int_V \frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} \delta \epsilon_{ij} dV - \int_V \bar{X}_i \delta u_i dV - \\ & - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma + \int_V \delta \sigma'_{ij} \{0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij}\} dV + \\ & + \int_V \sigma'_{ij} \{0.5 (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i} - \delta \epsilon_{ij})\} dV + \\ & + \int_{\Sigma_2} \delta \sigma'_i (\bar{u}_i - u_i) d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \sigma'_i \delta u_i d\Sigma \end{aligned} \quad (2.7.5)$$

Mas:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma'_{ij} \{0.5 (\delta u_{i,j} + \delta u_{j,i})\} dV = & \quad (2.7.6) \\ = \int_V \sigma'_{ij} \delta u_{i,j} dV \end{aligned}$$

integrando por partes e aplicando o teorema da divergência, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma'_{ij} \delta u_{i,j} dV = & \int_V (\sigma'_{ij} \delta u_i)_{,j} dV - \\ & - \int_V \sigma'_{ij,j} \delta u_i dV = \int_{\Sigma} \sigma'_{ij} \delta u_i n_j d\Sigma - \int_V \sigma'_{ij,j} \delta u_i dV \end{aligned} \quad (2.7.7)$$

e

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i \delta u_i d\Sigma &= \int_{\Sigma_1} (\bar{\sigma}_i - \sigma'_i) \delta u_i d\Sigma + \\ &+ \int_{\Sigma_1} \sigma'_i \delta u_i d\Sigma \end{aligned} \quad (2.7.8)$$

Assim:

$$\begin{aligned} \delta F &= \int_V \left(\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma'_{ij} \right) \delta \epsilon_{ij} dV - \\ &- \int_V (\sigma'_{ij,j} + \bar{X}_i) \delta u_i dV + \\ &+ \int_V \{ 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij} \} \delta \sigma'_{ij} dV + \\ &+ \int_{\Sigma} (\sigma'_{ij} n_j - \sigma'_i) \delta u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_2} (\bar{u}_i - u_i) \delta \sigma'_i d\Sigma - \\ &- \int_{\Sigma_1} (\bar{\sigma}_i - \sigma'_i) \delta u_i d\Sigma \end{aligned} \quad (2.7.9)$$

Em presença de (2.7.9) conclui-se que se se tiver:

$$\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma'_{ij} \text{ em } V \quad (2.7.10)$$

$$\sigma'_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V$$

$$\epsilon_{ij} = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V$$

$$\sigma'_{ij} n_j = \sigma'_i \text{ em } \Sigma$$

$$\sigma'_i = \bar{\sigma}_i \text{ em } \Sigma_1$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2$$

o funcional F é estacionário. Da mesma forma, se F for estacionário as equações (2.7.10) têm forçosamente de se verificar dada a independência mútua e arbitrariedade das variações $\delta \varepsilon_{ij}$, δu_i , $\delta \sigma'_i$ e $\delta \sigma'_{ij}$.

Observe-se que as condições (2.7.10) de estacionaridade do funcional F são as equações de campo e fronteira do problema elástico. A primeira e a quarta condições de (2.7.10) definem o significado físico dos multiplicadores de Lagrange.

Resumindo:

Seja um corpo elástico submetido a força de massa e de superfície. Suponha-se admissível a hipótese da linearidade geométrica. O teorema variacional de três campos pode ser expresso nos seguintes termos [13]:

"Considerem-se campos contínuos e arbitrários de tensões ($\sigma'_{ij} = \sigma'_{ji}$) e deformações ($\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$) e um campo contínuo arbitrário de deslocamentos (u_i), definidos em todos os pontos do domínio V ocupado pelo corpo. Considere-se também um campo vetorial arbitrário de tensões (σ'_i) definido na fronteira Σ . Seja W_3 a função densidade de energia de deformação, não necessariamente quadrática, mas contínua e de primeiras derivadas contínuas, das componentes de deformação. Então se:

$$a) \varepsilon_{ij} = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V$$

$$b) \sigma'_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V$$

$$\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma'_{ij} \text{ em } V$$

$$\sigma'_i = \sigma'_{ij} n_j \text{ em } \Sigma$$

$$c) \quad u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2$$

$$d) \quad \sigma'_i = \bar{\sigma}_i \text{ em } \Sigma_1$$

o funcional (2.7.4) é estacionário e, reciprocamente, se o funcional (2.7.4) for estacionário, as condições a), b), c) e d) devem verificar-se".

2.8 - Aplicação do teorema de três campos

Considere-se o caso simples da treliça hiperestática, formada por n barras prismáticas, com uma das extremidades articulada em 0 e a outra apoiada fixamente, solicitada pelos esforços externos P_1 e P_2 , aplicados em 0, como mostra a figura 2.5. Trata-se de obter as equações de compatibilidade e equilíbrio pela aplicação do teorema de três campos.

Fig. 2.5 - Treliça hiperestática e reações de apoio

A barra de ordem i tem comprimento L_i , área de seção transversal S_i , módulo de elasticidade E_i e faz com a horizontal um ângulo α_i .

Serão consideradas válidas as hipóteses da resistência dos materiais.

Considere-se uma função linear arbitrária de deslocamentos. Para a barra de ordem i seja u_1 e u_2 as componentes de deslocamentos do ponto O e u_{1i}^0 e u_{2i}^0 as componentes de deslocamentos do ponto A_i , referidas ao sistema Ox_1x_2 .

Fig. 2.6 - Deslocamentos na barra de ordem i

Desta forma, de acordo com a figura 2.6, o deslocamento longitudinal, u_{s_i} , de um ponto da seção de abscissa s_i , será dado por:

$$u_{s_i} = \left\{ u_{1i}^0 + \frac{s_i}{L_i} (u_1 - u_{1i}^0) \right\} \cos \alpha_i + \quad (2.8.1)$$

$$+ \left\{ u_{2i}^0 + \frac{s_i}{L_i} (u_2 - u_{2i}^0) \right\} \sin \alpha_i$$

e:

$$\frac{\partial u_{s_i}}{\partial s_i} = \frac{u_1 - u_{1i}^0}{L_i} \cos \alpha_i + \frac{u_2 - u_{2i}^0}{L_i} \sin \alpha_i \quad (2.8.2)$$

onde u_1 , u_2 , u_{1i}^0 e u_{2i}^0 são valores arbitrários.

Para a barra de ordem i , seja σ_i , uma função constante arbitrária, a tensão normal num ponto do plano da seção transversal e ϵ_i , uma outra função constante arbitrária, a deformação longitudinal de um ponto qualquer.

A energia de deformação da estrutura, de acordo com (2.3.5) será dada por:

$$U = \sum_{i=1}^n U_i = \sum_{i=1}^n 0.5 E_i \epsilon_i^2 S_i L_i \quad (2.8.3)$$

Pode-se então escrever a expressão do funcional F :

$$\begin{aligned} F = & \sum_{i=1}^n 0.5 E_i \epsilon_i^2 S_i L_i - P_1 u_1 - P_2 u_2 + \\ & + \sum_{i=1}^n \sigma_i \left\{ \left(\frac{u_1 - u_{1i}^0}{L_i} \right) \cos \alpha_i + \left(\frac{u_2 - u_{2i}^0}{L_i} \right) \sin \alpha_i \right\} S_i L_i - \\ & - \sum_{i=1}^n \sigma_i \epsilon_i S_i L_i - \sum_{i=1}^n (F_{1i}^0 u_{1i}^0 + F_{2i}^0 u_{2i}^0) \end{aligned} \quad (2.8.4)$$

onde F_{1i}^0 e F_{2i}^0 são as componentes de força nos pontos A_i , referidas ao sistema Ox_1x_2 .

É interessante observar que as quantidades independentes sujeitas a variações no funcional F são: as tensões normais σ_i , as deformações longitudinais ϵ_i , os deslocamentos longitudinais u_{s_i} e as forças F_{1i}^0 e F_{2i}^0 .

Considere-se agora a primeira variação do funcional F:

$$\begin{aligned}
 \delta F = & \sum_{i=1}^n E_i \epsilon_i S_i L_i \delta \epsilon_i - P_1 \delta u_1 - P_2 \delta u_2 + \quad (2.8.5) \\
 & + \sum_{i=1}^n \delta \sigma_i \left\{ \left(\frac{u_1 - u_{1i}^0}{L_i} \right) \cos \alpha_i + \left(\frac{u_2 - u_{2i}^0}{L_i} \right) \sin \alpha_i \right\} S_i L_i + \\
 & + \sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \{ (\delta u_1 - \delta u_{1i}^0) \cos \alpha_i + (\delta u_2 - \delta u_{2i}^0) \sin \alpha_i \} - \\
 & - \sum_{i=1}^n \delta \sigma_i \epsilon_i S_i L_i - \sum_{i=1}^n \sigma_i \delta \epsilon_i S_i L_i - \\
 & - \sum_{i=1}^n (\delta F_{1i}^0 u_{1i}^0 + \delta F_{2i}^0 u_{2i}^0) - \sum_{i=1}^n (F_{1i}^0 \delta u_{1i}^0 + F_{2i}^0 \delta u_{2i}^0)
 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}
 \delta F = & \sum_{i=1}^n (\epsilon_i E_i - \sigma_i) S_i L_i \delta \epsilon_i + \quad (2.8.6) \\
 & + \sum_{i=1}^n \left\{ \left(\frac{u_1 - u_{1i}^0}{L_i} \right) \cos \alpha_i + \right. \\
 & + \left. \left(\frac{u_2 - u_{2i}^0}{L_i} \right) \sin \alpha_i \right\} - \epsilon_i \} S_i L_i \delta \sigma_i + \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \cos \alpha_i - P_1 \right) \delta u_1 + \\
 & + \left(\sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \sin \alpha_i - P_2 \right) \delta u_2 - \\
 & - \sum_{i=1}^n (\sigma_i S_i \cos \alpha_i + F_{1i}^0) \delta u_{1i}^0 - \\
 & - \sum_{i=1}^n (\sigma_i S_i \sin \alpha_i + F_{2i}^0) \delta u_{2i}^0 -
 \end{aligned}$$

$$- \sum_{i=1}^n u_{1i}^0 \delta F_{1i}^0 - \sum_{i=1}^n u_{2i}^0 \delta F_{2i}^0$$

A estacionarização do funcional F correspondem as equações de campo e fronteira do problema elástico. Logo, considerando-se que as variações $\delta \epsilon_i$, $\delta \sigma_i$, δu_1 , δu_2 , δu_{1i}^0 , δu_{2i}^0 , δF_{1i}^0 e δF_{2i}^0 são arbitrárias e mutuamente independentes, vem:

$$\sigma_i = E_i \epsilon_i \quad (2.8.7)$$

$$\epsilon_i = \left(\frac{u_1 - u_{1i}^0}{L_i} \right) \cos \alpha_i + \left(\frac{u_2 - u_{2i}^0}{L_i} \right) \sin \alpha_i$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \cos \alpha_i = P_1$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \sin \alpha_i = P_2$$

$$\sigma_i S_i \cos \alpha_i + F_{1i}^0 = 0$$

$$\sigma_i S_i \sin \alpha_i + F_{2i}^0 = 0$$

$$u_{1i}^0 = 0$$

$$u_{2i}^0 = 0$$

ou, observando as duas últimas equações de (2.8.7), vem:

$$\sigma_i = E_i \epsilon_i \quad (2.8.8)$$

$$\epsilon_i = \frac{1}{L_i} (u_1 \cos \alpha_i + u_2 \sin \alpha_i)$$

2.36

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \cos \alpha_i = P_1$$

$$\sum_{i=1}^n \sigma_i S_i \sin \alpha_i = P_2$$

$$\sigma_i S_i \cos \alpha_i = -F_{1i}^0$$

$$\sigma_i S_i \sin \alpha_i = -F_{2i}^0$$

Obtendo-se u_1 e u_2 das equações de (2.8.8) pode-se determinar as tensões normais σ_i , as deformações longitudinais ϵ_i , os deslocamentos longitudinais u_{s_i} e as forças F_{1i}^0 e F_{2i}^0 , o que resolve completamente o problema.

2.9 - Teoremas variacionais derivados

Foram apresentados até aqui dois teoremas de um campo, o da energia potencial total e o da energia potencial complementar total e um teorema de três campos, também chamado de teorema generalizado da energia potencial total.

A partir do teorema de três campos pode-se obter vários outros teoremas variacionais, incluídos os teoremas de um único campo, introduzindo equações convenientes na expressão do funcional (2.7.4).

Introduzindo as equações subsidiárias:

$$\epsilon_{ij} = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V \quad (2.9.1)$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2 \quad (2.9.2)$$

o funcional do teorema de três campos

$$F = \int_V W_3 (\epsilon_{ij}) dV - \int_V \bar{X}_i u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma + \quad (2.9.3)$$

$$+ \int_V \sigma'_{ij} \{0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij}\} dV + \int_{\Sigma_2} \sigma'_i (\bar{u}_i - u_i) d\Sigma$$

reduz-se ao funcional T do teorema da mínima energia potencial total ,

$$T = \int_V W_3 (\epsilon_{ij}) dV - \int_V \bar{X}_i u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma \quad (2.9.4)$$

com as condições subsidiárias (2.9.1) e (2.9.2).

Considere-se agora a introdução da equação

$$\sigma'_{ij} n_j = \sigma'_i \text{ em } \Sigma \quad (2.9.5)$$

no funcional F do teorema de três campos, que se reduz a:

$$F_1 = \int_V W_3 (\epsilon_{ij}) dV - \int_V \bar{X}_i u_i dV - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i d\Sigma + \quad (2.9.6)$$

$$+ \int_V \sigma_{ij} \{0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij}\} dV +$$

$$+ \int_{\Sigma_2} \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) d\Sigma$$

Desta forma o número de quantidades independentes sujeitas a variações no funcional F_1 passa a ser 15 (σ_{ij} , ϵ_{ij} , u_i).

Observa-se que o teorema variacional pode ser obtido pela esta-
cionarização de F_1 apresentando variações arbitrárias e mutuamen-
te independentes dos campos de tensões ($\delta\sigma_{ij}$), de deformações
($\delta\epsilon_{ij}$) e de deslocamentos (δu_i).

Seja, portanto, a primeira variação de F_1 :

$$\begin{aligned} \delta F_1 = & \int_V \left(\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} - \sigma_{ij} \right) \delta \epsilon_{ij} dV - \\ & - \int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i) \delta u_i dV + \\ & + \int_V \{ 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) - \epsilon_{ij} \} \delta \sigma_{ij} dV + \\ & + \int_{\Sigma_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{\sigma}_i) \delta u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \delta \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) d\Sigma \end{aligned} \quad (2.9.7)$$

obtida de acordo com a técnica utilizada até agora.

O teorema variacional apresenta-se então da seguinte forma:

*Em presença de (2.9.7), se se tiver:

$$\frac{\partial W_3}{\partial \epsilon_{ij}} = \sigma_{ij} \text{ em } V \quad (2.9.8)$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V$$

$$\epsilon_{ij} = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \text{ em } \Sigma_1$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2$$

o funcional F_1 é estacionário. De forma inversa, se o funcional F_1 for estacionário, ocorrem as expressões (2.9.8)".

É interessante observar que as condições de estacionaridade de F_1 são as equações de campo e condições de fronteira do problema elástico.

Outro teorema variacional que pode ser obtido é o devido a Reissner, com o estabelecimento do funcional F_R , obtido pela introdução da função densidade da energia complementar de deformação, $W_3^*(\sigma_{ij})$, em lugar da função densidade da energia de deformação, $W_3(\epsilon_{ij})$, no funcional F_1 . Assim com a equação:

$$W_3(\epsilon_{ij}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - W_3^*(\sigma_{ij}) \text{ em } V \quad (2.9.9)$$

no funcional F_1 , obtêm-se:

$$\begin{aligned} F_R = & - \int_V W_3^*(\sigma_{ij}) \, dV - \int_V \bar{x}_i u_i \, dV + \\ & + \int_V \sigma_{ij} 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \, dV + \int_{\Sigma_2} \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) \, d\Sigma - \\ & - \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i \, d\Sigma \end{aligned} \quad (2.9.10)$$

Desta forma o número de quantidades independentes sujeitas a variações no funcional F_R passam a ser nove (σ_{ij} e u_i). O teorema variacional pode ser obtido pela estacionarização do funcional F_R apresentando variações arbitrárias e mutuamente independentes dos campos de tensões ($\delta\sigma_{ij}$) e de deslocamentos (δu_i).

Seja portanto a primeira variação de F_R :

$$\begin{aligned}
\delta F_R = & - \int_V \left\{ \frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} - 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \right\} \delta \sigma_{ij} dV - (2.9.11) \\
& - \int_V (\bar{X}_i + \sigma_{ij,j}) \delta u_i dV + \int_{\Sigma_2} \delta \sigma_{ij} n_j (\bar{u}_i - u_i) d\Sigma + \\
& + \int_{\Sigma_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{\sigma}_i) \delta u_i d\Sigma
\end{aligned}$$

obtida de acordo com a técnica utilizada até agora.

O teorema variacional apresenta-se então da seguinte forma:

"Em presença de (2.9.11), se se tiver:

$$\frac{\partial W_3^*}{\partial \sigma_{ij}} = 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) \text{ em } V \quad (2.9.12)$$

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V$$

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \text{ em } \Sigma_1$$

$$u_i = \bar{u}_i \text{ em } \Sigma_2$$

o funcional F_R é estacionário. De forma inversa, se o funcional F_R for estacionário ocorrem as expressões (2.9.12)".

O teorema de Reissner, por permitir variações livres dos campos de tensões e de deslocamentos, apresenta-se como um teorema de dois campos. É interessante observar que o teorema de Reissner foi o primeiro teorema de dois campos, apresentado em 1950.

Outro funcional pode ser obtido, integrando-se por partes, no funcional F_R , a parcela que contém $u_{i,j}$. Assim, observando-se que:

$$\begin{aligned} \int_V \sigma_{ij} \cdot 0.5 (u_{i,j} + u_{j,i}) dV &= \int_V \sigma_{ij} u_{i,j} dV = \quad (2.9.13) \\ &= \int_V (\sigma_{ij} u_i)_{,j} dV - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV = \\ &= \int_\Sigma \sigma_{ij} n_j u_i d\Sigma - \int_V \sigma_{ij,j} u_i dV \end{aligned}$$

vem:

$$\begin{aligned} F'_R &= - \int_V W_3^* (\sigma_{ij}) dV - \int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i) u_i dV + \quad (2.9.14) \\ &+ \int_{\Sigma_1} (\sigma_{ij} n_j - \bar{\sigma}_i) u_i d\Sigma + \int_{\Sigma_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i d\Sigma \end{aligned}$$

Novas restrições estabelecidas através das equações:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V \quad (2.9.15)$$

e

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \text{ em } \Sigma_1 \quad (2.9.16)$$

levam ao funcional

$$\bar{I}^* = - \int_V W_3^* (\sigma_{ij}) dV + \int_{\Sigma_2} \sigma_{ij} n_j \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.9.17)$$

Desta forma o número de quantidades independentes sujeitas a variações no funcional $\bar{T}^*$ passam a ser seis (σ_{ij}), envolvendo variações livres de um único campo.

Observando-se que $\bar{T}^* = -T^*$ pode-se enunciar o seguinte teorema variacional:

"Entre todas as soluções equilibradas, a que além de equilibrada for compatível, torna máximo o funcional $\bar{T}^*$, desde que se verifiquem as hipóteses de elasticidade, estabilidade material e linearidade geométrica".

É interessante a sequência dos teoremas variacionais, partindo do teorema das deformações virtuais, estabelecendo os teoremas da energia potencial total mínima, de três campos, de Reissner e o relativo ao funcional $\bar{T}^* = -T^*$.

Essa transformação de T em $\bar{T}^*$ é conhecida como transformação de Friedrich. A solução do problema elástico caracterizada por um mínimo do funcional T , também o é por um máximo do funcional $\bar{T}^*$.

Seja o funcional energia potencial complementar total

$$T^* = \int_V W_3^* (\sigma_{ij}) dV - \int_{\Sigma_2} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma \quad (2.9.18)$$

sujeito às condições subsidiárias:

$$\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i = 0 \text{ em } V \quad (2.9.19)$$

e

$$\sigma_{ij} n_j = \bar{\sigma}_i \text{ em } \Sigma_1 \quad (2.9.20)$$

Então, de acordo com a técnica dos multiplicadores de Lagrange, pode-se estabelecer um novo funcional:

$$F^* = \int_V W_3^* (\sigma_{ij}) dV - \int_{\Sigma_2} \sigma_i \bar{u}_i d\Sigma + \quad (2.9.21)$$

$$+ \int_V (\sigma_{ij,j} + \bar{X}_i) u_i^! dV + \int_{\Sigma_1} (\bar{\sigma}_i - \sigma_{ij} n_j) u_i^! d\Sigma$$

e observando-se que:

$$W_3^* (\sigma_{ij}) = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} - W_3 (\epsilon_{ij}) \text{ em } V \quad (2.9.22)$$

$$\int_V \sigma_{ij,j} u_i^! dV = \quad (2.9.23)$$

$$= \int_V (\sigma_{ij} u_i^!),_j dV - \int_V \sigma_{ij} u_{i,j}^! dV =$$

$$= \int_{\Sigma} \sigma_{ij} u_i^! n_j d\Sigma - \int_V \sigma_{ij} 0.5 (u_{i,j}^! + u_{j,i}^!) dV$$

$$\sigma_{ij} n_j = \sigma_i \text{ em } \Sigma \quad (2.9.24)$$

a expressão de F^* pode ser transformada em:

$$F^* = - \int_V W_3 (\epsilon_{ij}) dV + \int_V \bar{X}_i u_i dV - \quad (2.9.25)$$

$$- \int_V \sigma_{ij} \{0.5 (u_{i,j}^! + u_{j,i}^!) - \epsilon_{ij}\} dV +$$

$$+ \int_{\Sigma_1} \bar{\sigma}_i u_i^! d\Sigma - \int_{\Sigma_2} \sigma_i (\bar{u}_i - u_i^!) d\Sigma$$

Comparando-se (2.9.25) com (2.9.3) e observando-se que a substituição de σ_i' , σ_{ij}' e u_i por σ_i , σ_{ij} e u_i' não afeta senão a notação, vem:

$$F^* = -F \quad (2.9.26)$$

Considerando-se (2.9.26), observa-se que de forma totalmente análoga poder-se-ia partir do teorema das forças virtuais e estabelecer entre outros os teoremas variacionais da energia potencial complementar total, de Reissner, de três campos e o relativo a um funcional $\bar{T} = -T$.

A expressão (2.9.26) permite ainda observar que mesmo sendo os teoremas de um campo, teoremas de mínimo, o funcional F é mínimo para as condições do teorema da energia potencial total, mas máximo para as condições do teorema da energia potencial complementar total. O teorema geral não pode, portanto, ser mais que um teorema de estacionaridade.

Um resumo interessante do que foi exposto é apresentado em forma esquemática no quadro I.

QUADRO I - TEOREMAS VARIACIONAIS

CAP. 3 - MODELO CONTÍNUO GENÉRICO. EXTREMOS DA ENERGIA DE DEFORMAÇÃO.

3.1 - Introdução

Estabeleceu-se anteriormente um modelo tridimensional que permite determinar a solução exata do problema elástico. Há certos tipos de estrutura, entretanto, cujo comportamento permite simplificações notáveis na sua análise. Essas simplificações obtem-se pela introdução de campos de grandezas generalizadas, regidas por equações de tratamento mais fácil que as gerais, e ainda distribuídas continuamente em um domínio, que conforme o tipo da estrutura terá uma, duas ou três dimensões ^[13].

Tem-se então um conjunto de modelos para a análise estrutural. Esses modelos, que nada mais são do que aproximações do modelo tridimensional, por serem análogos entre si e análogos ao tridimensional permitem constituir um modelo genérico do qual todos os outros são gerados ^[17]. Daqui para a frente faz-se constante referência ao modelo genérico.

A aproximação das soluções obtidas pelos modelos contínuos pode ser avaliada pelo erro global cometido. Recorre-se para isso a dois métodos: o da determinação de limites superior e inferior de certas grandezas e o estudo da convergência para a solução exata de uma sucessão de soluções aproximadas.

O primeiro método só pode ser utilizado no caso das soluções serem compatíveis ou equilibradas. Desenvolve-se o mesmo pela aplicação à teoria das estruturas de conceitos de análise funcional, cujos elementos básicos são enunciados.

O segundo método é geral. Aplica-se também ao caso de violação simultânea das condições de equilíbrio e compatibilidade. Ele será apresentado quando se tratar do método dos elementos finitos.

3.2

É interessante observar que a convergência pode aparecer na teoria das estruturas em outra situação ^[17].

É o caso de uma sequência de soluções exatas convergindo para uma aproximada, como ocorre, por exemplo, na teoria das cascas quando a solução exata do modelo tridimensional converge para a solução exata da teoria das cascas com a espessura tendendo para zero. O tratamento desse assunto encontra-se nas referências ^[17] e ^[18].

3.2 - Modelo contínuo genérico

3.2.1 - Equações de campo e fronteira

O modelo genérico será caracterizado por três tipos de grandezas generalizadas: as tensões, as deformações e os deslocamentos. Formam-se com essas grandezas os respectivos vetores σ_i , ϵ_j , u_m .

Essas grandezas relacionam-se entre si através das equações:

$$E_{mi} \sigma_i + \bar{X}_m = 0 \quad \text{de equilíbrio} \quad (3.2.1)$$

$$\epsilon_j = D_{jm} u_m \quad \text{deformações-deslocamentos} \quad (3.2.2)$$

$$\sigma_i = \sigma_i(\epsilon_j) \quad \text{tensões-deformações} \quad (3.2.3)$$

definidas e contínuas em um domínio D limitado por uma fronteira F onde as equações de equilíbrio tomam a forma

$$p_m = N_{mi} \sigma_i \quad (3.2.4)$$

e onde são fixadas as condições de contorno

$$N_{mi} \sigma_i = \bar{p}_m \text{ em } F_1 \text{ (parte da fronteira onde se fixam as tensões)} \quad (3.2.5)$$

$$u_m = \bar{u}_m \text{ em } F_2 \text{ (parte da fronteira onde se fixam os deslocamentos).} \quad (3.2.6)$$

Nas expressões acima tem-se: $\bar{X}_m$ e $\bar{P}_m$ vetores de força, respectivamente, por unidade de volume e por unidade de superfície; D_{jm} e ϵ_{mi} operadores diferenciais e N_{mi} matriz que define a orientação da normal em cada ponto da fronteira.

Desta forma a análise estrutural, pelo modelo genérico, limita-se à resolução do sistema de equações (3.2.1) a (3.2.4) observando às condições de contorno (3.2.5) e (3.2.6).

Um campo de tensões diz-se equilibrado se observa às equações (3.2.1). Um campo de deformações diz-se integrável se observa às equações (3.2.2).

Um conjunto de campos verificando (3.2.1), (3.2.3), (3.2.4) e (3.2.5) constitui uma solução equilibrada. Um conjunto de campos verificando (3.2.2), (3.2.3) e (3.2.6) constitui uma solução compatível. Uma solução que seja compatível e equilibrada é a solução exata correspondente ao modelo genérico.

Qualquer tentativa de resolução do sistema (3.2.1) a (3.2.6) será prejudicada pela sua heterogeneidade. Deve-se portanto procurar formular o problema, por eliminação, em termos de incógnitas de mesma natureza. Duas possibilidades básicas se apresentam: a formulação em tensões e em deslocamentos que conduzem, respectivamente, ao processo das tensões e ao processo dos deslocamentos.

3.4

3.2.2 - Teorema do trabalho

Seja um campo de tensões σ_i equilibrado qualquer e um campo de deformações ϵ_i integrável qualquer.

Considere-se a integral:

$$\int_D \sigma_i \epsilon_i dD \quad (3.2.7)$$

admitindo-se válida a transformação:

$$\int_D \sigma_i D_{im} u_m dD = \int_F u_m N_{mi} \sigma_i dF - \int_D u_m E_{mi} \sigma_i dD \quad (3.2.8)$$

e, de acordo com (3.2.1), (3.2.2) e (3.2.4), vem:

$$\int_D \sigma_i \epsilon_i dD = \int_D \bar{X}_m u_m dD + \int_F p_m u_m dF \quad (3.2.9)$$

que é a expressão do teorema do trabalho para o modelo genérico.

As equações de equilíbrio e as relações deformações-deslocamentos determinam a expressão do teorema do trabalho. Com procedimento análogo, a expressão do teorema do trabalho mais as equações de equilíbrio (ou relações deformações-deslocamentos) determinam as relações deformações-deslocamentos (ou equações de equilíbrio).

Considere-se agora uma solução equilibrada e uma variação virtual do campo de deslocamentos. Decorre pela aplicação do teorema do trabalho:

$$\int_D \sigma_i \delta \epsilon_i dD = \int_D \bar{X}_m \delta u_m dD + \int_{F_1} \bar{p}_m \delta u_m dF \quad (3.2.10)$$

que é a expressão dos deslocamentos virtuais para o modelo genérico.

De maneira análoga, considerando-se uma solução compatível e uma variação virtual do campo de tensões, decorre pela aplicação do teorema do trabalho:

$$\int_D \epsilon_i \delta \sigma_i dD = \int_{F_2} \bar{u}_m \delta p_m dF \quad (3.2.11)$$

que é a expressão do teorema das forças virtuais.

3.2.3 - Relações tensões-deformações

Sendo a estrutura elástica, estabelecem-se as relações-tensões-deformações (3.2.3), de forma única, através de:

$$\sigma_i = \frac{\partial W(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_i} \quad (3.2.12)$$

onde W é função exclusiva das deformações, definida em todo o domínio D .

Admite-se no que se segue a estabilidade material, ou seja, na vizinhança de um dado estado de deformação, se, uma solicitação adicional altera de $\delta \sigma$ o estado de tensão e de $\delta \epsilon$ o estado de deformação verifica-se a desigualdade:

$$\delta \sigma_i \delta \epsilon_i > 0 \quad (3.2.13)$$

Consequentemente fica estabelecida uma relação biunívoca entre tensões e deformações.

A energia de deformação e a energia complementar de deformação são dadas, respectivamente, por:

$$U = \int_D W(\epsilon_j) dD \quad (3.2.14)$$

3.6

e

$$U^* = \int_D W^* dD \quad (3.2.15)$$

onde:

$$W^* = \sigma_i \varepsilon_i - W \quad (3.2.16)$$

é função exclusiva das tensões, visto que:

$$\frac{\partial W^*}{\partial \varepsilon_j} = 0 \quad (3.2.17)$$

e, com a propriedade:

$$\frac{\partial W^*(\sigma_j)}{\partial \sigma_i} = \varepsilon_i \quad (3.2.18)$$

Obtêm-se linearidade nas relações tensões-deformações se a função W for quadrática, isto é, se:

$$W = 0.5 \varepsilon_i H_{ij} \varepsilon_j \quad (3.2.19)$$

onde H_{ij} é uma matriz simétrica não singular.

Substituindo (3.2.19) em (3.2.12) e (3.2.16) obtêm-se, respectivamente: as relações lineares tensões-deformações (lei de Hooke)

$$\sigma_i = H_{ij} \varepsilon_j \quad (3.2.20)$$

e a função W^*

$$W^* = \frac{1}{2} \sigma_i H_{ij}^{-1} \sigma_j \quad (3.2.21)$$

e portanto:

$$W = W^* \quad (3.2.22)$$

$$U = U^* \quad (3.2.23)$$

3.2.4 - Teoremas variacionais

Seja o funcional

$$\begin{aligned} R = & \int_D W \, dD - \int_O \bar{X}_m u_m \, dD - \int_{F_1} \bar{p}_m u_m \, dF + \\ & + \int_D \sigma_i (D_{im} u_m - \epsilon_i) \, dD + \int_{F_2} p_m (\bar{u}_m - u_m) \, dF \end{aligned} \quad (3.2.24)$$

e considere-se a primeira variação de R com variações independentes de σ_i , ϵ_i , u_m e p_m :

$$\begin{aligned} \delta R = & \int_D \frac{\partial W(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_i} \delta \epsilon_i \, dD - \int_D \bar{X}_m \delta u_m \, dD - \\ & - \int_{F_1} \bar{p}_m \delta u_m \, dF + \int_D \delta \sigma_i (D_{im} u_m - \epsilon_i) \, dD + \\ & + \int_D \sigma_i (D_{im} \delta u_m - \delta \epsilon_i) \, dD + \int_{F_2} \delta p_m (\bar{u}_m - u_m) \, dF - \\ & - \int_{F_2} p_m \delta u_m \, dF \end{aligned} \quad (3.2.25)$$

Admitindo-se válida a transformação (3.2.8), obtêm-se:

$$\begin{aligned}
 \delta R = & \int_D \left(\frac{\partial W(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_i} - \sigma_i \right) \delta \epsilon_i \, dD + & (3.2.26) \\
 & + \int_D \delta \sigma_i (D_{im} u_m - \epsilon_i) \, dD - \int_D \bar{X}_m \delta u_m \, dD - \int_{F_1} \bar{p}_m \delta u_m \, dF + \\
 & + \int_F (N_{mi} \sigma_i) \delta u_m \, dF - \int_D (E_{mi} \sigma_i) \delta u_m \, dD + \\
 & + \int_{F_2} \delta p_m (\bar{u}_m - u_m) \, dF - \int_{F_2} p_m \delta u_m \, dF
 \end{aligned}$$

ou:

$$\begin{aligned}
 \delta R = & \int_D \left(\frac{\partial W(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_i} - \sigma_i \right) \delta \epsilon_i \, dD + & (3.2.27) \\
 & + \int_D \delta \sigma_i (D_{im} u_m - \epsilon_i) \, dD - \int_D (\bar{X}_m + E_{mi} \sigma_i) \delta u_m \, dD + \\
 & + \int_F (N_{mi} \sigma_i - p_m) \delta u_m \, dF + \int_{F_1} (p_m - \bar{p}_m) \delta u_m \, dF + \\
 & + \int_{F_2} \delta p_m (\bar{u}_m - u_m) \, dF
 \end{aligned}$$

A expressão (3.2.27) permite enunciar o seguinte teorema:

"Considerem-se campos contínuos e arbitrários de tensões σ_i , de deformações ϵ_i e de deslocamentos u_m , definidos e contínuos no domínio D. Considere-se também um campo arbitrário de tensões p_m , definido na fronteira F, e seja $W(\epsilon_j)$ definida, contínua e de derivadas primeiras contínuas em todo o domínio. Então se:

$$\epsilon_i = D_{im} u_m \text{ em } D \quad (3.2.28)$$

$$E_{mi} \sigma_i + \bar{X}_m = 0 \text{ em } D \quad (3.2.29)$$

$$\frac{\partial W(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_i} = \sigma_i \text{ em } D \quad (3.2.30)$$

$$p_m = N_{mi} \sigma_i \text{ em } F \quad (3.2.31)$$

$$p_m = \bar{p}_m \text{ em } F_1 \quad (3.2.32)$$

$$u_m = \bar{u}_m \text{ em } F_2 \quad (3.2.33)$$

o funcional R é estacionário, e reciprocamente, se o funcional R é estacionário as condições (3.2.28) a (3.2.33) devem se verificar¹⁷.

Decorre do teorema, acima enunciado, dois outros teoremas:

a) "entre todas as soluções compatíveis a que além de compatível for equilibrada estacionariza o funcional energia potencial total

$$T = \int_D W(\epsilon_j) dD - \int_0 \bar{X}_m u_m dD - \int_{F_1} \bar{p}_m u_m dF = U + P^*, \quad (3.2.34)$$

b) "entre todas as soluções equilibradas a que além de equilibrada for compatível estacionariza o funcional energia potencial complementar total

$$T^* = \int_D W^*(\sigma_j) dD - \int_{F_2} p_m \bar{u}_m dF = U^* + P^*. \quad (3.2.35)$$

Os funcionais T e T^* não são sô estacionários, mas mínimos, para a solução exata, desde que se admita válida a hipótese de estabilidade material. De fato, analisando-se o funcional T obtêm-se para a sua primeira variação:

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_D \frac{\partial W(\epsilon_j)}{\partial \epsilon_i} \delta \epsilon_i dD - \int_D \bar{X}_m \delta u_m dD - \\ & - \int_F \bar{p}_m \delta u_m dF \end{aligned} \quad (3.2.36)$$

ou, de acordo com (3.2.8):

$$\begin{aligned} \delta T = & \int_D (-E_{mi} \sigma_i - \bar{X}_m) \delta u_m dD + \\ & + \int_F (N_{mi} \sigma_i - \bar{p}_m) \delta u_m dF \end{aligned} \quad (3.2.37)$$

e para a segunda variação:

$$\begin{aligned} \delta^2 T = & \int_D (-E_{mi} \sigma_i - \bar{X}_m) \delta^2 u_m dD + \\ & + \int_F (N_{mi} \sigma_i - \bar{p}_m) \delta^2 u_m dF - \int_D (E_{mi} \delta \sigma_i) \delta u_m dD + \\ & + \int_F (N_{mi} \delta \sigma_i) \delta u_m dF \end{aligned} \quad (3.2.38)$$

ou, considerando-se (3.2.8), tem-se:

$$\delta^2 T = \int_D \delta \sigma_i \delta \epsilon_i dD \quad (3.2.39)$$

expressão sempre positiva, que justifica a afirmativa anterior para o funcional T . Desenvolvimento análogo com o funcional T^* leva a idêntica conclusão.

3.3 - Conceito de distância. Aplicação ao modelo genérico

3.3.1 - Elementos básicos da análise funcional

Um conjunto V de elementos $x, y, \dots$, chamados vetores, é um espaço vetorial ou linear sobre um campo de números F , se:

- a) a quaisquer dois elementos x e y pertencentes a V está associado um terceiro elemento z , também pertencente a V , chamado soma daqueles dois e que se indica por $x + y$,
- b) a qualquer elemento x pertencente a V e a qualquer número γ de F está associado o elemento γx , pertencente a V , chamado produto de γ por x .

As operações acima devem ainda satisfazer os seguintes postulados:

a.1) $x + y = y + x$

a.2) $x + (y + z) = (x + y) + z$

a.3) existe um elemento 0 tal que $x + 0 = x$. O elemento 0 é chamado elemento zero.

a.4) a cada elemento x corresponde um elemento $-x$, tal que $x + (-x) = 0$

3.12

$$b.1) 1x = x$$

$$b.2) \alpha (\beta x) = (\alpha\beta)x$$

$$b.3) (\alpha + \beta) x = \alpha x + \beta x$$

$$b.4) \alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad |^5|.$$

Os vetores $x, y, z, \dots, v$, de um espaço vetorial V são linearmente dependentes se existem números $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$, tal que:

$$\alpha x + \beta y + \gamma z + \dots + \theta v = 0 \quad (3.3.1)$$

se verifique com $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$ não todos nulos. Se $\alpha, \beta, \gamma, \dots, \theta$ forem todos nulos, então os vetores $x, y, z, \dots, v$ dizem-se linearmente independentes.

Diz-se que um espaço V é n -dimensional se contém n vetores linearmente independentes e quaisquer $n + 1$ vetores são linearmente dependentes. Qualquer conjunto de n vetores linearmente independentes, em um espaço n -dimensional recebe o nome de base. Seja $e_1, e_2, \dots, e_n$ uma base de V e

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \dots + \xi_n e_n \quad (3.3.2)$$

um vetor de V . Os números $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ são chamados coordenadas de x relativamente à base $e_1, e_2, \dots, e_n$.

Dado um subconjunto S de V , o conjunto de todas as combinações lineares dos elementos de S é um subespaço vetorial ou linear de V . Diz-se completo se o subconjunto S contém uma base de V .

Um conjunto de elementos chama-se espaço métrico, se a cada par de elementos x e y corresponde um número real $d(x,y)$, chamado distância entre x e y , satisfazendo os postulados:

$$c.1) d(x,y) = d(y,x)$$

$$c.2) d(x,y) = 0 \text{ se e somente se } x = y$$

$$c.3) d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

A expressão c.3) designa-se desigualdade triangular.

Um espaço vetorial diz-se normalizado se a cada elemento x , pertencente a V está associado um número real, chamado norma de x e indicado por $||x||$, satisfazendo aos postulados:

$$d.1) ||x|| \geq 0$$

$$d.2) ||x|| = 0 \text{ se e somente se } x = 0$$

$$d.3) ||x + y|| \leq ||x|| + ||y||$$

$$d.4) ||\alpha x|| = |\alpha| ||x|| \quad \alpha - \text{número real}$$

Se a cada par de vetores x e y , em um espaço vetorial V sobre um campo de números reais R , está associado um número real (x,y) , tal que:

$$e.1) (x,y) = (y,x)$$

$$e.2) (\lambda x, y) = \lambda (x,y) \quad \lambda - \text{real}$$

$$e.3) (x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$$

$$e.4) (x,x) \geq 0 \text{ e } (x,x)=0 \text{ se e somente se } x = 0$$

então um produto interno está definido em V |⁵ |.

Um espaço vetorial no qual um produto interno está definido diz-se um espaço de Hilbert. *

Do postulado e.4) decorre imediatamente:

$$(x - \lambda y, x - \lambda y) \geq 0 \quad (3.3.3)$$

ou :

$$\lambda^2 (y,y) - 2\lambda (x,y) + (x,x) \geq 0 \quad (3.3.4)$$

qualquer que seja o número real λ . Consequentemente o discriminante deve ser negativo ou nulo, ou seja:

$$(x,y)^2 \leq (x,x) (y,y) \quad (3.3.5)$$

expressão designada por desigualdade de Schwarz.

É sempre possível definir norma e distância em um espaço de Hilbert, estabelecendo:

$$||x|| = + \sqrt{(x,x)} \quad (3.3.6)$$

$$d(x,y) = ||x-y|| = + \sqrt{(x-y, x-y)} \quad (3.3.7)$$

Realmente, os postulados d.1), d.2) e d.4) decorrem imediatamente de (3.3.6) e o d.3) pode-se verificar com o auxílio da desigualdade de Schwarz. Considere-se:

$$||x+y||^2 = (x+y, x+y) = (x,x) + 2(x,y) + (y,y) \quad (3.3.8)$$

* alguns autores chamam espaço de Hilbert somente ao espaço vetorial, com produto interno definido, de dimensão infinita. Caso contrário, chamam-no de espaço euclidiano $|^5|$, $|^{18}|$.

e, de acordo com (3.3.5):

$$\begin{aligned} ||x+y||^2 &\leq ||x||^2 + ||y||^2 + 2||x|| ||y|| = \\ & (||x|| + ||y||)^2 \end{aligned} \quad (3.3.9)$$

e, portanto:

$$||x+y|| \leq ||x|| + ||y|| \quad (3.3.10)$$

Os postulados c.1) e c.2) decorrem imediatamente de (3.3.7) e a desigualdade triangular pode-se verificar com o auxílio da desigualdade de Schwarz. Considere-se:

$$d^2(x,z) = (x-z, x-z) = (x-y+y-z, x-y+y-z) \quad (3.3.11)$$

ou:

$$d^2(x,z) = (x-y, x-y) + (y-z, y-z) + 2(x-y, y-z) \quad (3.3.12)$$

ou, ainda:

$$d^2(x,z) = d^2(x,y) + d^2(y,z) + 2(x-y, y-z) \quad (3.3.13)$$

e, de acordo com (3.3.5):

$$d^2(x,z) \leq d^2(x,y) + d^2(y,z) + 2d(x,y) d(y,z) \quad (3.3.14)$$

e, portanto:

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z) \quad (3.3.15)$$

Dois vetores x e y de um espaço de Hilbert dizem-se ortogonais se:

$$(x, y) = 0 \quad (3.3.16)$$

Considerem-se os elementos x , y e z de um espaço de Hilbert. Se os vetores $(x-y)$ e $(y-z)$ são ortogonais, decorre imediatamente de (3.3.12):

$$d^2(x, z) = d^2(x, y) + d^2(y, z) \quad (3.3.17)$$

que é a expressão do teorema de Pitágoras.

3.3.2 - Análise funcional aplicada à teoria das estruturas

Algumas das grandezas definidas de (3.2.1) a (3.2.6) podem ser convenientemente agrupadas de modo a definir dois conjuntos: o dos possíveis estados de tensão e correspondentes estados de deformação, chamado das respostas, em que a cada elemento r estão associados os vetores σ_i e ϵ_i , relacionados pela expressão (3.2.3); e o das possíveis solicitações, chamado das solicitações, em que a cada elemento s estão associados os vetores $\bar{X}_m$, $\bar{p}_m$ e $\bar{u}_m$.

Seja r_1 e r_2 dois elementos do conjunto das respostas, caracterizados pelos pares de vetores σ_i^1, ϵ_i^1 e σ_i^2, ϵ_i^2 . A soma dos vetores correspondentes $\sigma_i^1 + \sigma_i^2$ e $\epsilon_i^1 + \epsilon_i^2$ e o produto de qualquer dos pares por um número real α , por exemplo $\alpha \sigma_i^1$, $\alpha \epsilon_i^1$, definem os novos elementos $r_1 + r_2$ e αr_1 , também pertencentes ao conjunto.

O elemento nulo $\bar{e}$ é o associado aos estados de tensão e de deformação nulos, cujo par de vetores correspondentes é 0,0. É imediato constatar que as operações acima, de soma e produto por um número real observam os postulados a.1) a b.4) e portanto o conjunto das respostas $\bar{e}$ é um espaço vetorial sobre o campo dos números reais e se indicam por V_r .

Define-se produto interno de dois vetores r_1 e r_2 , do espaço V_r , pela expressão:

$$(r_1, r_2) = \frac{1}{2} \int_D \sigma_i^1 \varepsilon_i^2 dD \quad (3.3.18)$$

Estabelecido (3.3.18) observa-se que o espaço V_r é um espaço de Hilbert somente se

$$(r_1, r_2) = (r_2, r_1) \quad (3.3.19)$$

expressão essa que traduz o teorema de Betti-Maxwell na sua forma interna, e que só ocorre dentro da linearidade tanto física como geométrica. Os restantes postulados verificam-se facilmente e em particular o e.4) conduz a:

$$(r, r) = \frac{1}{2} \int_D \sigma_i \varepsilon_i dD = U_r \quad (3.3.20)$$

ou seja, (r, r) é igual a energia de deformação associada ao vetor R , não negativa e somente nula se $r = 0$.

Define-se norma de um vetor r e distância entre dois vetores r_1 e r_2 , no espaço V_r de Hilbert, estabelecendo:

$$||r|| = + \sqrt{(r, r)} \quad (3.3.21)$$

$$d(r_1, r_2) = + \sqrt{(r_1 - r_2, r_1 - r_2)} = ||r_1 - r_2|| \quad (3.3.22)$$

Em virtude de (3.3.22) e observando-se (3.3.20), vem:

$$d^2(r_1, r_2) = (r_1 - r_2, r_1 - r_2) = U r_1 - r_2 = U^* r_1 - r_2 \quad (3.3.23)$$

ou seja, o quadrado da distância entre dois elementos r_1 e r_2 , de V_r , é igual a energia de deformação associada ao elemento $r_1 - r_2$.

Considere-se agora o conjunto das sollicitações. A soma dos parâmetros de duas sollicitações e o produto de um número real pelos parâmetros de uma sollicitação conduz a novos parâmetros de novas sollicitações ainda pertencentes ao conjunto. O elemento zero é o de parâmetros todos nulos e os postulados a.1) a b.4) são facilmente verificados. Portanto o conjunto das sollicitações é um espaço vetorial sobre o campo dos números reais e se indica por V_s .

Define-se produto interno de dois vetores s_1 e s_2 , de V_s , pela expressão:

$$(s_1, s_2) = \frac{1}{2} \int_D \bar{X}_m^1 u_m^2 dD + \frac{1}{2} \int_F p_m^1 u_m^2 dF \quad (3.3.24)$$

onde u_m^2 é o vetor que caracteriza o campo de deslocamentos, em V , gerado pelo vetor sollicitação s_2 .

Estabelecido (3.3.24), observa-se que o espaço V_s é um espaço de Hilbert somente se

$$(s_1, s_2) = (s_2, s_1) \quad (3.3.25)$$

expressão essa que traduz o teorema de Betti-Maxwell, na sua forma externa, e que só ocorre dentro da linearidade tanto física como geométrica. Os restantes postulados se verificam facilmente.

Define-se norma de um vetor s e distância entre dois vetores s_1 e s_2 , no espaço V_s de Hilbert, estabelecendo:

$$||s|| = + \sqrt{(s, s)} \quad (3.3.26)$$

$$d(s_1, s_2) = + \sqrt{(s_1 - s_2, s_1 - s_2)} = ||s_1 - s_2|| \quad (3.3.27)$$

Sendo V_r e V_s espaços de Hilbert, então a cada elemento de V_s corresponde um único de V_r e a cada elemento de V_r corresponde um único de V_s . Não sendo V_r e V_s espaços de Hilbert, então se o material for elástico a cada elemento de V_s corresponde um único de V_r e sendo também materialmente estável então igualmente a cada elemento de V_r corresponde um único de V_s . *

Considere-se os elementos s_1 e s_2 de V_s , e os correspondentes elementos r_1 e r_2 , de V_r . De (3.2.9), (3.3.18) e (3.3.24) decorre:

$$(r_1, r_2) = (s_1, s_2) \quad (3.3.28)$$

que é uma nova expressão do teorema do trabalho.

Apresentam-se, como consequência direta de V_r e V_s serem espaços de Hilbert, os seguintes teoremas:

a) "o trabalho interno realizado pelas tensões desde o estado de deformação nulo até o estado de deformação associado ao elemento r , de V_r , é dado pela expressão:

$$\zeta_i = (r, r)^*; \quad (3.3.29)$$

* não se faz referência à linearidade geométrica por que ela foi admitida no que se seguia ao primeiro capítulo.

b) "o trabalho externo correspondente a uma solicitação s , de V_s , é dado pela expressão:

$$\zeta_e = (s, s)^n; \quad (3.3.30)$$

que são, respectivamente, as formas interna e externa do teorema de Clapeyron [35].

3.3.3 - Teoremas de mínimo

Apresentaram-se no parágrafo 3.2.4 os teoremas da energia potencial total, para um conjunto de soluções compatíveis, e o da energia potencial complementar total, para um conjunto de soluções equilibradas. Admitia-se que os dois conjuntos continham a solução exata. Trata-se agora de estabelecer teoremas similares àqueles, dentro da linearidade física, mas que não contenham necessariamente a solução exata.

Considere-se um conjunto C qualquer de soluções compatíveis do espaço V_r , e considere-se a expressão do funcional T associado a um elemento c desse conjunto:

$$T_c = (c, c) - \int_D \bar{\chi}_m u_m^c dD - \int_{F_1} \bar{p}_m u_m^c dF \quad (3.3.31)$$

onde u_m^c é o campo de deslocamentos correspondente àquele elemento. A solução exata s é compatível, logo:

$$T_s = (s, s) - \int_D \bar{\chi}_m u_m^s dD - \int_{F_1} \bar{p}_m u_m^s dF \quad (3.3.32)$$

Observando-se (3.3.31) e (3.3.32) é possível escrever:

$$T_c - T_s = (c, c) - (s, s) - \int_D \bar{\chi}_m (u_m^c - u_m^s) - \quad (3.3.33)$$

$$- \int_{F_1} \bar{p}_m (u_m^c - u_m^s) dF$$

e como o vetor $(u_m^c - u_m^s)$ é nulo em F_2 , então de acordo com as expressões (3.3.24) a (3.3.28), vem:

$$T_c - T_s = (c, c) - (s, s) - 2(s, c-s) = \quad (3.3.34)$$

$$= (c, c) + (s, s) - 2(s, c)$$

ou, observando-se (3.3.23):

$$T_c - T_s = d^2(c, s) \quad (3.3.35)$$

expressão que permite estabelecer o seguinte teorema:

"Em um conjunto de soluções compatíveis aquela que minimiza o funcional T , minimiza a distância à solução exata" ^[17].

Considere-se agora um conjunto E qualquer de soluções equilibradas, do espaço V_r , e considere-se a expressão do funcional T^* associada a um elemento e desse conjunto:

$$T_e^* = (e, e) - \int_{F_2} p_m^e \bar{u}_m dF \quad (3.3.36)$$

onde p_m^e é o campo de tensões na fronteira F_2 correspondente àquele elemento. A solução exata s é equilibrada, logo:

$$T_s^* = (s, s) - \int_{F_2} p_m^s \bar{u}_m dF \quad (3.3.37)$$

Observando-se (3.3.36) e (3.3.37) é possível escrever:

$$T_e^* - T_s^* = (e, e) - (s, s) - \int_{F_2} (p_m^e - p_m^s) \bar{u}_m dF \quad (3.3.38)$$

e, como os vetores $(\bar{x}_m^e - \bar{x}_m^s)$ e $(\bar{p}_m^e - \bar{p}_m^s)$ são nulos, respectivamente, em D e em F_1 , então de acordo com as expressões (3.3.24) e (3.3.28), vem:

$$\begin{aligned} T_e^* - T_s^* &= (e, e) - (s, s) - 2(e-s, s) = \\ &= (e, e) + (s, s) - 2(e, s) \end{aligned} \quad (3.3.39)$$

ou, observando-se (3.3.23):

$$T_e^* - T_s^* = d^2(e, s) \quad (3.3.40)$$

expressão que permite estabelecer o seguinte teorema:

"Em um conjunto de soluções equilibradas, aquela que minimiza o funcional T^* , minimiza a distância à solução exata" [17].

Seja w a solução compatível e v a solução equilibrada que minimizam a distância à solução exata s , respectivamente, nos conjuntos C e E . Como a solução exata é equilibrada e compatível pode-se escrever:

$$(w-s, s-v) = 0 \quad (3.3.41)$$

pois $w-s$ compatibiliza deslocamentos fixados nulos e $s-v$ equilibra forças de massa e de superfície especificadas nulas. Em virtude de (3.3.17), vem:

$$d^2(w, s) + d^2(s, v) = d^2(w, v) \quad (3.3.42)$$

o que permite concluir:

"A distância entre os elementos w e v é a mínima distância entre um elemento do conjunto C e outro do elemento " E ".

3.3.4 - Hiperesfera das soluções possíveis. Solução aproximada ótima

Um conjunto C_0 de soluções compatíveis com deslocamentos fixados nulos e suas possíveis combinações lineares é um subespaço vetorial de V_r . Seja $(I_1, I_2, \dots, I_n)$ uma base ortonormal de C_0 . Pode-se estabelecer um conjunto C de soluções que compatibilizam deslocamentos fixados não nulos através da expressão:

$$c = c^* + \alpha_i I_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3.3.43)$$

onde c^* é o elemento de V_r associado a uma particular solução compatível com os deslocamentos fixados não nulos e c é o elemento genérico do conjunto C . Diz-se que o conjunto C é paralelo ao conjunto C_0 .

Da mesma forma um conjunto E_0 de soluções equilibradas por forças de massa e superfície fixadas nulas e suas possíveis combinações lineares é um subespaço vetorial de V_r . Seja $(J_1, J_2, \dots, J_n)$ uma base ortonormal de E_0 . Pode-se estabelecer um conjunto E de soluções que equilibram forças de massa e de superfície fixadas não nulas através da expressão:

$$e = e^* + \beta_j J_j \quad (3.3.44)$$

onde e^* é o elemento de V_r associado a uma particular solução equilibrada por forças de massa e superfície fixadas não nulas e e é o elemento genérico do conjunto E . Diz-se que o conjunto E é paralelo ao conjunto E_0 .

Admita-se que se disponha de um conjunto de soluções compatíveis, definido por (3.3.43), e um conjunto de soluções equilibradas, definido por (3.3.44). Considere-se o problema de determinar a melhor solução aproximada, ou seja, aquela cujo erro global seja mínimo. Para medida do erro global toma-se o quadrado da distância à solução exata.

Com base nos teoremas de mínimo duas soluções possíveis se realçam: a compatível

$$w = c^* + \{(e^*, I_i) - (c^*, I_i)\} I_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.3.45)$$

e a equilibrada

$$v = e^* + \{(c^*, J_j) - (e^*, J_j)\} J_j \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.46)$$

que minimizam a distância à solução exata s , respectivamente, nos conjuntos C e E . As expressões (3.3.45) e (3.3.46) são facilmente obtidas determinando-se os valores de α_i e β_j que minimizam o quadrado da distância entre dois elementos quaisquer, da queles conjuntos.

Conhecidas as soluções v e w considere-se agora a expressão do quadrado da distância entre a solução $\frac{v+w}{2}$ e a solução exata s :

$$\begin{aligned} d^2\left(\frac{v+w}{2}, s\right) &= \left(\frac{v+w}{2} - s, \frac{v+w}{2} - s\right) = \\ &= \left(\frac{v-s}{2} + \frac{w-s}{2}, \frac{v-s}{2} + \frac{w-s}{2}\right) \end{aligned} \quad (3.3.47)$$

Em virtude de (3.3.41) e do teorema de Pitágoras vem:

$$d^2\left(\frac{v+w}{2}, s\right) = \frac{1}{4} (v-s, v-s) + \frac{1}{4} (w-s, w-s) + \quad (3.3.48)$$

$$+ \frac{1}{2} (v-s, w-s) = \frac{1}{4} d^2(v, s) + \frac{1}{4} d^2(w, s) = \frac{1}{4} d^2(v, w)$$

expressão que permite concluir que a solução exata está localizada no lugar geométrico dos pontos a uma distância constante e igual a $\frac{d(v, w)}{2}$ do ponto $\frac{v+w}{2}$. A esse lugar geométrico dá-se o nome de hiperesfera H (extensão do conceito de esfera) de centro $\frac{v+w}{2}$ e raio igual a $\frac{d(v, w)}{2}$, que passa por w e v.

Pode-se agora responder ao problema proposto. Se se tomar para solução aproximada o ponto correspondente a v (ou w) o erro global poderá ser nulo, se a solução exata coincidir com v (ou w), mas será máximo e igual a $d^2(v, w)$, se a solução exata coincidir com w (ou v). Portanto qualquer ponto na hiperesfera apresentará um erro global entre zero e $d^2(v, w)$. Por outro lado se se tomar para solução aproximada o centro da hiperesfera o erro global será exatamente $\frac{d^2(v, w)}{4}$. Conclui-se pois que a solução

aproximada ótima é aquela, não compatível e não equilibrada, correspondente a

$$\frac{v+w}{2} = \frac{e^* + c^*}{2} + \frac{1}{2} \{(e^*, I_i) - (c^*, I_i)\} I_i + (3.3.49)$$

$$+ \frac{1}{2} \{(c^*, J_j) - (e^*, J_j)\} J_j$$

centro da hiperesfera H.

Trata-se agora de estabelecer extremos para a energia de de formação. Analisar-se-ã um primeiro problema com condições de contorno em tensões, ou seja, com deslocamentos fixados nulos e um segundo com condições de contorno em deslocamentos, ou seja, com forças de massa e de superfície fixadas nulas. O problema geral poderá sempre ser analisado pela superposição destes dois problemas.

3.3.5 - Extremos da energia de deformação. Condições de contorno em tensões.

A energia potencial total associada a qualquer solução c compatível e a energia potencial complementar total associada a qualquer solução equilibrada e são dadas, respectivamente, por:

$$T_c = (c, c) - \int_D \bar{\chi}_m u_m^c dD - \int_{F_1} \bar{p}_m u_m^c dF \quad (3.3.50)$$

$$T_e^* = (e, e) - \int_{F_2} p_m^e \bar{u}_m dF \quad (3.3.51)$$

ou, considerando-se (3.3.24) e que os deslocamentos fixados em F_2 são nulos, vem:

$$T_c = (c, c) - 2(s, c) = -(c, c) + 2(c-s, c) \quad (3.3.52)$$

$$T_e^* = (e, e) \quad (3.3.53)$$

Observando-se as expressões (3.3.35) e (3.3.40), que permitem estabelecer os teoremas de mínimo, e sendo a solução exata compatível e equilibrada pode-se escrever as seguintes desigualdades:

$$-(c,c) + 2(c-s, c) + (s,s) \geq 0 \quad (3.3.54)$$

$$(e,e) - (s,s) \geq 0 \quad (3.3.55)$$

Desta maneira pode-se concluir que dispondo-se de uma solução compatível com deslocamentos fixados nulos e outra equilibrada é possível estabelecerem-se limites inferior e superior para a energia de deformação da solução exata, ou seja:

$$(c,c) - 2(c-s,c) = -Tc \leq (s,s) \leq (e,e) \quad (3.3.56)$$

Considere-se agora que se disponha do conjunto C_0 das soluções compatíveis com deslocamentos fixados nulos

$$c = \alpha_i I_i \quad (i=1, 2, 3, \dots, n) \quad (3.3.57)$$

e do conjunto E das soluções equilibradas

$$e = e^* + \beta_j J_j \quad (j=1, 2, 3, \dots, m) \quad (3.3.58)$$

definidos no parágrafo 3.3.4.

Obtêm-se uma notável diminuição naquele intervalo de variação de (s,s) considerando-se para solução compatível, w e para solução equilibrada, v , que minimizam a distância à solução exata, respectivamente, nos conjuntos C_0 e E . Além disto, como $w-s$ está no subespaço da hiperesfera ele é ortogonal a w , que é uma combinação linear das soluções I_i , dado por (3.3.45) com c^* igual a zero. Desta maneira a desigualdade (3.3.56) toma a forma:

$$(w,w) \leq (s,s) \leq (v,v) \quad (3.3.59)$$

ou, de acordo com (3.3.45) e (3.3.46):

$$(e^*, I_i)^2 \leq (s, s) \leq (e^*, e^*) - (e^*, J_j)^2 \quad (3.3.60)$$

Em consequência de (3.3.59) fica estabelecido que a energia de deformação da solução compatível w é limite inferior e a energia complementar de deformação da solução equilibrada v é limite superior da energia de deformação da solução exata.

É interessante observar que o intervalo de variação de (s, s) se reduz novamente na medida em que as dimensões das bases I_i e J_j vão aumentando, desde que os novos vetores das bases não sejam ortogonais a e^* , pois nesse caso o intervalo permaneceria o mesmo.

3.3.6 - Aplicações do cálculo de extremos da energia de deformação com condições de contorno em tensões.

Exemplo 1

Considere-se o caso simples da treliça hiperestática formada por 3 barras, de mesma seção transversal e mesmo material, com uma das extremidades articuladas fixamente em A_1 , A_2 e A_3 e as outras articuladas em O onde atuam os esforços externos P_1 e P_2 , como mostra a figura 3.1.

Figura 3.1

Admitem-se válidas as hipóteses da resistência dos materiais.

Seja o espaço euclidiano tridimensional referido ao sistema de eixos $Ox_1 x_2 x_3$ e o ponto P genérico de coordenadas (f_1, f_2, f_3) com:

$$f_i = F_i \sqrt{c_i/2} \quad (i=1,2,3) \quad (a)$$

onde F_i é a força normal e c_i o deslocamento longitudinal por unidade de força na barra de ordem i . A cada ponto P fica associada uma possível solução da treliça, com energia de deformação igual ao quadrado da distância entre P e O , ou seja:

$$d^2(P, O) = f_1^2 + f_2^2 + f_3^2 = \frac{F_i \delta_i}{2} \quad (b)$$

Trata-se portanto do espaço V_r de todas as soluções possíveis.

Figura 3.2

Estabelecendo-se o equilíbrio das forças em O obtêm-se as equações de equilíbrio:

$$F_1 \sqrt{2}/2 + F_2 + F_3 \sqrt{2}/2 = P_2 \quad (c)$$

$$F_1 \sqrt{2}/2 - F_3 \sqrt{2}/2 = P_1 \quad (d)$$

o que permite caracterizar o conjunto E_0 das soluções equilibradas por forças nulas e o conjunto E das soluções equilibradas por P_1 e P_2 . Como as equações (c) e (d) representam uma reta, verifica-se que o conjunto E_0 é representado pela reta que passa pela origem e o conjunto E pela paralela $\tilde{a}$ anterior e que contém um ponto e^* de uma particular solução equilibrada.

Arbitrando-se um par de deslocamentos u_1 e v_1 , obtêm-se as equações de compatibilidade:

$$F_1 = c_1 (u_1 \sqrt{2}/2 + u_2 \sqrt{2}/2) \quad (e)$$

$$F_2 = c_2 u_2 \quad (f)$$

$$F_3 = c_3 (-u_1 \sqrt{2}/2 + u_2 \sqrt{2}/2) \quad (g)$$

que são as equações de um plano contendo a origem.

Figura 3.3

Uma simples inspeção visual da figura 3.3 permite observar geometricamente as desigualdades (3.3.59). De fato:

- 1) a energia complementar de deformação da solução exata é a mínima entre todas as soluções equilibradas;
- 2) a energia de deformação da solução exata é a máxima entre todas as soluções compatíveis e ortogonais a c-s.

Estabelecem-se agora os extremos da energia de deformação da solução exata. Observa-se entretanto que obtidas a solução J_1 , equilibrada por $P_1 = P_2 = 0$, e as soluções compatíveis I_1 e I_2 , o conjunto das soluções (3.3.57) e (3.3.58) contém a solução exata. Consequentemente a desigualdade (3.3.60) transforma-se na igualdade:

$$(e^*, I_1)^2 + (e^*, I_2)^2 = (s, s) = (e^*, e^*) - (e^*, J_1)^2 \quad (h)$$

e limita-se neste exemplo ao cálculo da solução exata.

Utilizando-se os resultados do quadro I pode-se escrever:

$$e^* = k \sqrt{2} \sqrt{2}/2 (P_1 + P_2; 0; -P_1 + P_2) \quad (i)$$

$$J_1 = (2 + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} (1 - \sqrt{2}/2) (1; -\sqrt{2}; 1) \quad (j)$$

$$I_1 = \frac{\sqrt{2}}{2} (1; 0; -1) \quad (k)$$

$$I_2 = (2 + \sqrt{2})^{\frac{1}{2}} (\sqrt{2} - 1) \left(\frac{\sqrt{2}}{2}; 1; \frac{\sqrt{2}}{2} \right) \quad (l)$$

o que permite obter as ordenadas f_i do ponto correspondente à solução exata

3.32

$$s = k \sqrt{2} (P_1 \sqrt{2}/2 + (1 - \sqrt{2}/2) P_2; \quad (m)$$

$$(\sqrt{2} - 1) \sqrt{2} P_2; -P_1 \sqrt{2}/2 + (1 - \sqrt{2}/2) P_2)$$

e à qual correspondem as forças normais

$$F_1 = P_1 \sqrt{2}/2 + P_2 (1 - \sqrt{2}/2) \quad (n)$$

$$F_2 = P_2 (2 - \sqrt{2}) \quad (o)$$

$$F_3 = -P_1 \sqrt{2}/2 + P_2 (1 - \sqrt{2}/2) \quad (p)$$

	$k = \sqrt{2}/2ES$	sol.equil. p/ P_1 e P_2		sol.equil. p/ $P_1 = P_2 = 0$	
i	$\sqrt{c_i/2}$	F_i	f_i	F_i	f_i
1	$k \sqrt{2}$	$(P_1 + P_2) \sqrt{2}/2$	$(P_1 + P_2) \sqrt{2} \sqrt{2} k/2$	1	$k \sqrt{2}$
2	k	0	0	$-\sqrt{2}$	$-k \sqrt{2} \sqrt{2}$
3	$k \sqrt{2}$	$(-P_1 + P_2) \sqrt{2}/2$	$k \sqrt{2} \sqrt{2} (-P_1 + P_2)/2$	1	$k \sqrt{2}$
	$k = \sqrt{2}/2ES$	sol.comp. $u_1 = 1$ $u_2 = 0$		sol.comp. $u_1 = 0$ $u_2 = 1$	
i	$\sqrt{c_i/2}$	F_i	f_i	F_i	f_i
1	$k \sqrt{2}$	$1/4 k^2$	$\sqrt{2}/4 k$	$1/4 k^2$	$\sqrt{2}/4 k$
2	k	0	0	$1/2 k^2$	$1/2 k$
3	$k \sqrt{2}$	$-1/4 k^2$	$-\sqrt{2}/4 k$	$1/4 k^2$	$\sqrt{2}/4 k$

QUADRO I

Exemplo 2 | 30 |

Seja o tubo de parede espessa com raio interno a e externo $4a$ sujeito a uma pressão interna p . Os pontos da superfície exterior são fixos e as extremidades do tubo têm os deslocamentos longitudinais livres.

Tem-se desta forma um estado plano de tensão. O material do tubo é elástico com coeficiente de Poisson 0.5. Deseja-se determinar os deslocamentos radiais $u(a)$ da superfície interna do tubo.

É possível obter uma solução aproximada para os deslocamentos radiais $u(a)$ calculando-se, através de (3.3.60), os extremos da energia de deformação da solução exata dada por:

$$(s,s) = \pi p a u(a) \quad (a)$$

Em vista da simetria em torno do eixo longitudinal é conveniente utilizar coordenadas polares r, θ, z , onde z coincide com o eixo longitudinal. Como as tensões e as deformações independem de z analisa-se uma faixa de comprimento unitário.

Desta forma os campos de tensões e de deformações são definidos em cada ponto, respectivamente, pelas tensões principais σ_r e σ_θ e pelas deformações principais ϵ_r e ϵ_θ e o campo de deslocamentos pelos deslocamentos radiais u .

As tensões σ_r e σ_θ , correspondentes a uma solução equilibrada, devem satisfazer às equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \text{ em } D \quad (b)$$

e

$$\sigma_r = -p \text{ em } F_1 \text{ (} r=a \text{)} \quad (c)$$

As deformações ϵ_r e ϵ_θ , correspondentes a uma solução compatível, devem se relacionar com os deslocamentos u , através de:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} \quad (d)$$

sendo que os deslocamentos u em F_2 ($r=4a$) assumem os valores fixados nulos.

As relações tensões-deformações apresentam-se na forma:

$$\sigma_r = 2G (\epsilon_r + \epsilon_\theta) \quad \sigma_\theta = 2G (2\epsilon_\theta + \epsilon_r) \quad (e)$$

ou, inversamente:

$$\epsilon_r = \frac{1}{6G} (2\sigma_r - \sigma_\theta) \quad \epsilon_\theta = \frac{1}{6G} (2\sigma_\theta - \sigma_r) \quad (f)$$

Considere-se a solução equilibrada e^* , sugerida pela solução do problema bloco infinito com cavidade cilíndrica, de campo de tensões definido por:

$$\sigma_r^* = -p \frac{a^2}{r^2} \quad \sigma_\theta^* = p \frac{a^2}{r^2} \quad (g)$$

ao qual corresponde, pela aplicação de (f) o campo de deformações

$$\epsilon_r^* = -\frac{p}{2G} \frac{a^2}{r^2} \quad \epsilon_\theta^* = \frac{p}{2G} \frac{a^2}{r^2} \quad (h)$$

A energia complementar de deformação associada à solução equilibrada e^* é dada por:

$$\begin{aligned} (e^*, e^*) &= \frac{1}{2} \int_D (\sigma_r^* \epsilon_r^* + \sigma_\theta^* \epsilon_\theta^*) dD = \\ &= \frac{1}{2} \int_a^{4a} (\sigma_r^* \epsilon_r^* + \sigma_\theta^* \epsilon_\theta^*) 2\pi r dr = \\ &= \int_a^{4a} \frac{p^2 a^4}{2G} \frac{1}{r^4} 2\pi r dr = .469 \frac{\pi p^2 a^2}{G} \end{aligned} \quad (i)$$

e, portanto, de acordo com (3.3.60) e (a), vem:

$$u(a) \leq .469 \frac{pa}{G} \quad (j)$$

Considere-se agora uma solução compatível s' com campo de deslocamentos dada por:

$$u' = \frac{a}{r} - \frac{1}{4} \quad (k)$$

Aplicando-se (d) à expressão de u' obtêm-se o campo de deformações

$$\epsilon_r' = -\frac{a}{r^2} \quad \epsilon_\theta' = \frac{a}{r^2} - \frac{1}{4r} \quad (l)$$

ao qual corresponde, em virtude (e), o campo de tensões

$$\sigma_r' = -2G \left(\frac{a}{r^2} + \frac{1}{4r} \right) \quad \sigma_\theta' = 2G \left(\frac{a}{r^2} - \frac{1}{2r} \right) \quad (m)$$

Tendo em vista (3.3.18), calcula-se:

$$(e^*, s') = \frac{1}{2} \int_D (\sigma_r^* \varepsilon_r' + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta') dD = .75 \pi p a \quad (n)$$

$$(s', s') = \frac{1}{2} \int_D (\sigma_r' \varepsilon_r' + \sigma_\theta' \varepsilon_\theta') dD = 1.4716 \pi G \quad (o)$$

o que permite obter extremo inferior da energia de deformação:

$$(s, s) \geq (e^*, I_1)^2 = \frac{(e^*, s')^2}{(s', s')} = .382 \frac{\pi p^2 a^2}{G} \quad (p)$$

donde se conclui que:

$$.382 \frac{pa}{G} \leq u(a) \leq .469 \frac{pa}{G} \quad (q)$$

Uma redução no intervalo de variação de $u(a)$ pode ser obtida considerando-se uma solução equilibrada por forças de superfície fixadas nulas. Seja pois a solução s'' de campo de tensões dado por:

$$\sigma_r'' = 1 - \frac{a}{r} \quad \sigma_\theta'' = 1 \quad (r)$$

ao qual corresponde, pela aplicação de (f), o campo de deformações

$$\varepsilon_r'' = \frac{1}{6G} \left(1 - 2\frac{a}{r}\right) \quad \varepsilon_\theta'' = \frac{1}{6G} \left(1 + \frac{a}{r}\right) \quad (s)$$

Pela aplicação de (3.3.18), calcula-se:

$$(e^*, s'') = \frac{1}{2} \int_D (\sigma_r^* \varepsilon_r'' + \sigma_\theta^* \varepsilon_\theta'') dD = .375 \frac{\pi p a^2}{G} \quad (t)$$

$$\begin{aligned}
 (s'', s'') &= \frac{1}{2} \int_D (\sigma_r'' \epsilon_r'' + \sigma_\theta'' \epsilon_\theta'') dD = \\
 &= 1.962 \frac{\pi a^2}{G}
 \end{aligned} \tag{u}$$

o que permite obter:

$$(e^*, I_2)^2 = \frac{(e^*, s'')^2}{(s'', s'')} = .072 \frac{\pi p^2 a^2}{G} \tag{v}$$

e, de acordo com (3.3.60):

$$.382 \frac{pa}{G} \leq u(a) \leq .397 \frac{pa}{G} \tag{x}$$

Conclui-se pois que a solução aproximada ótima será

$$u(a) = .390 \frac{pa}{G} \tag{y}$$

bem próxima da solução exata

$$u(a) = .395 \frac{pa}{G} \tag{z}$$

dada pela teoria da elasticidade.

3.3.7 - Extremos da energia de deformação. Condições de contorno em deslocamentos

De acordo com (3.3.50), (3.3.51) e (3.3.24) a energia potencial total associada a qualquer solução compatível c e a energia potencial complementar total associada a qualquer solução equilibrada e por forças de massa e de superfície fixadas nas são dadas, respectivamente, por:

$$T_c = (c, c) \quad (3.3.61)$$

$$T_e^* = (e, e) - 2(s, e) = -(e, e) + 2(e-s, e) \quad (3.3.62)$$

Observando-se as expressões (3.3.35) e (3.3.40), que permitem estabelecer os teoremas de mínimo, e sendo a solução exata compatível e equilibrada pode-se escrever as seguintes desigualdades:

$$(c, c) - (s, s) \geq 0 \quad (3.3.63)$$

$$-(e, e) + 2(e-s, s) + (s, s) \geq 0 \quad (3.3.64)$$

Desta maneira pode-se concluir que dispondo-se de uma solução compatível qualquer e outra equilibrada por forças de massa e de superfície fixadas nulas é sempre possível estabelecerem-se limites inferior e superior para a energia de deformação da solução exata, ou seja:

$$(e, e) - 2(e-s, e) = -T_e^* \leq (s, s) \leq (c, c) \quad (3.3.65)$$

Considere-se agora que se disponha do conjunto E_0 das soluções equilibradas por forças de massa e de superfície fixadas nulas

$$e = \beta_j J_j \quad (j=1, 2, \dots, m) \quad (3.3.66)$$

e do conjunto C das soluções compatíveis

$$c = c^* + \alpha_i I_i \quad (i=1, 2, \dots, n) \quad (3.3.67)$$

definidos no parágrafo 3.3.4.

Obtêm-se uma notável diminuição naquele intervalo de variação de (s,s) considerando-se para solução compatível w e para solução equilibrada v , que minimizam a distância à solução exata, respectivamente, nos conjuntos C e E_0 . Além disso, como $v-s$ está no subespaço da hiperesfera ele é ortogonal a v , que é uma combinação linear das soluções J_j , dado por (3.3.46) com e^* igual a zero. Desta maneira a desigualdade (3.3.65) toma a forma:

$$(v,v) \leq (s,s) \leq (w,w) \quad (3.3.68)$$

ou, de acordo com (3.3.45) e (3.3.46):

$$(c^*, J_j)^2 \leq (s,s) \leq (c^*, c^*) - (c^*, I_i)^2 \quad (3.3.69)$$

Em consequência de (3.3.68) fica estabelecido que a energia de deformação da solução compatível w é limite superior e a energia complementar de deformação da solução equilibrada v é limite inferior da energia de deformação da solução exata.

É interessante observar que o intervalo de variação de (s,s) se reduz novamente na medida em que as dimensões das bases I_i e J_j vão aumentando, desde que os novos vetores da base não sejam ortogonais a c^* , pois nesse caso o intervalo permaneceria o mesmo.

3.3.8 - Aplicação do cálculo de extremos da energia de deformação com condições de contorno em deslocamentos.

Seja o tubo de parede espessa com raio interno a e externo $4a$. Os pontos da superfície externa têm deslocamentos especificados

$$\bar{u} = \bar{v} = 0 \quad \bar{w} = a \cos \theta \quad (a)$$

Os pontos da superfície interna são livres. Deseja-se estudar extremos da energia de deformação da solução exata.

Utiliza-se sistema de coordenadas polares r, θ, z onde o eixo z coincide com o eixo longitudinal.

Trata-se de um problema tridimensional. O campo de deslocamentos $\bar{e}$ é definido, em cada ponto, pelos deslocamentos u, v, w (radiais, transversais e longitudinais, respectivamente) e os campos de tensões e de deformações são definidos, em cada ponto, pelas tensões $\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{\theta z}, \tau_{zr}$ e pelas deformações $\epsilon_r, \epsilon_\theta, \epsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{\theta z}, \gamma_{zr}$.

As tensões, correspondentes a uma solução equilibrada, de acordo com Timoshenko [33], devem satisfazer às equações de equilíbrio:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z} + \frac{\sigma_r - \sigma_\theta}{r} = 0 \quad (b)$$

$$\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta} + \frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{rz}}{r} = 0 \quad \text{em } D$$

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + 2 \frac{\tau_{r\theta}}{r} = 0$$

e

$$\sigma_r = \tau_{rz} = \tau_{r\theta} = 0 \quad \text{em } F_1 \quad (r=a) \quad (c)$$

As deformações, correspondentes a uma solução compatível, devem se relacionar com os deslocamentos através de:

$$\epsilon_r = \frac{\partial u}{\partial r} \quad \epsilon_\theta = \frac{u}{r} + \frac{\partial v}{r \partial \theta} \quad \epsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (d)$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial u}{r \partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}$$

$$\gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{r \partial \theta}$$

$$\gamma_{zr} = \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}$$

sendo que os deslocamentos em F_2 ($r=4a$) assumem os valores fixados em (a).

O material do tubo é elástico e portanto as tensões se relacionam com as deformações pela lei de Hooke.

Tendo em vista que o tubo tem infinitos planos de simetria, que os deslocamentos especificados independem de r e que os pontos da superfície externa após se deslocarem continuam contidos em um plano, admite-se, para as soluções aproximadas, que os deslocamentos radiais e tangenciais sejam nulos e os longitudinais independentem de r .*

Em virtude do exposto, observa-se facilmente que os campos de tensões e de deformações ficam caracterizados exclusivamente pelas tensões tangenciais $\tau_{\theta z}$ e τ_{zr} e pelas distorções $\gamma_{\theta z}$ e γ_{zr} , independentes de z e relacionados por:

$$\tau_{\theta z} = G \gamma_{\theta z} \quad \tau_{zr} = G \gamma_{zr} \quad (e)$$

* Essas mesmas observações e a solução exata do exemplo anteriormente discutido permitiram obter, por tentativas, a solução exata do problema, cujo campo de deslocamentos é dado por:

$$u = v = 0 \quad w = \frac{a^2}{a^2+b^2} \left(r + \frac{b^2}{r} \right) \cos \theta$$

Esta solução encontra-se publicada na referência [26].

reduzindo-se as equações de equilíbrio à segunda equação de (b) e as relações deformações-deslocamentos às duas últimas relações de (d). Analisa-se, portanto, apenas uma faixa do tubo de comprimento unitário.

Considere-se a solução c^* , compatível com deslocamentos fixados, de campo de deslocamentos definido por:

$$w^* = \frac{1}{a} (r^2 - 2ar + 2a^2) \cos \theta \quad u^* = v^* = 0 \quad (f)$$

ao qual correspondem as deformações e as tensões

$$\gamma_{\theta z}^* = - \frac{1}{a} (r - 2a + \frac{2a^2}{r}) \sin \theta = \frac{\tau_{\theta z}^*}{G} \quad (g)$$

$$\gamma_{zr}^* = \frac{1}{a} (2r - 2a) \cos \theta = \frac{\tau_{zr}^*}{G} \quad (h)$$

A energia de deformação associada a solução c^* é dada por:

$$(c^*, c^*) = \frac{1}{2} \int_D (\tau_{\theta z}^* \gamma_{\theta z}^* + \tau_{zr}^* \gamma_{zr}^*) dD = \quad (i)$$

$$= \frac{G}{2a^2} \int_a^{4a} \int_0^{2\pi} \{ 4(r-a)^2 \cos^2 \theta +$$

$$+ (r - 2a + 2a^2/r)^2 \sin^2 \theta \} r d\theta dr = 1.239 \pi G a^2$$

e, portanto, de acordo com (3.3.69), vem:

$$(s, s) \leq 1.239 \pi G a^2 \quad (j)$$

Considere-se agora uma solução equilibrada s' , por forças de massa e de superfície fixadas nulas à qual correspondem as tensões e as deformações

$$\tau'_{\theta z} = -G \sin \theta = G \gamma'_{\theta z} \quad (k)$$

$$\tau'_{zr} = G \left(1 - \frac{a}{r}\right) = G \gamma'_{zr} \quad (l)$$

Tendo em vista (3.3.18), calcula-se:

$$(c^*, s') = \frac{1}{2} \int_D (\tau^*_{\theta z} \gamma'_{\theta z} + \tau^*_{zr} \gamma'_{zr}) dD = .375 \pi G a^2 \quad (m)$$

$$(s', s') = \frac{1}{2} \int_D (\tau'_{\theta z} \gamma'_{\theta z} + \tau'_{zr} \gamma'_{zr}) dD = .325 \pi G a^2 \quad (n)$$

o que permite obter extremo inferior da energia de deformação:

$$(s, s) \geq (c^*, J)^2 = \frac{(c^*, s')^2}{(s', s')} = .433 \pi G a^2 \quad (o)$$

Obtém-se redução no intervalo de variação de (s, s) considerando-se uma solução compatível com deslocamentos fixados nulos. Seja pois a solução s'' , de campo de deslocamentos definido por:

$$w'' = \frac{1}{a} (r^2 - 2ar + a^2) \cos \theta \quad u'' = v'' = 0 \quad (p)$$

ao qual correspondem as deformações e as tensões

$$\gamma'_{\theta z} = -\frac{1}{a} \left(r - 2a + \frac{a^2}{r}\right) \sin \theta = \frac{\tau'_{\theta z}}{G} \quad (q)$$

3.44

$$\gamma_{zr}^{'''} = \frac{1}{a} (2r - 2a) \cos \theta = \frac{\tau_{zr}^{'''}}{G} \quad (r)$$

Pela aplicação de (3.3.18) calcula-se:

$$(c^*, s^{''}) = \frac{1}{2} \int_D (\tau_{\theta z}^* \gamma_{\theta z}^{'''} + \tau_{zr}^* \gamma_{zr}^{'''}) dD = .368 \pi Ga^2 \quad (s)$$

$$(s^{''}, s^{''}) = \frac{1}{2} \int_D (\tau_{\theta z}^{'''} \gamma_{\theta z}^{'''} + \tau_{zr}^{'''} \gamma_{zr}^{'''}) dD = .191 \pi Ga^2 \quad (t)$$

o que permite obter:

$$(c^*, I)^2 = \frac{(c^*, s^{''})^2}{(s^{''}, s^{''})} = .711 \pi Ga^2 \quad (u)$$

e, de acordo com (3.3.69):

$$.433 \pi Ga^2 \leq (s, s) \leq .528 \pi Ga^2 \quad (v)$$

A energia de deformação da solução aproximada ótima será então

$$(s^0, s^0) = .481 \pi Ga^2 \quad (x)$$

enquanto que o cálculo da energia de deformação da solução exata fornece

$$(s, s) = .441 \pi Ga^2 \quad (y)$$

CAP. 4 - O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS. PROCESSO DOS DESLOCAMENTOS

4.1 - Considerações Gerais

A análise das estruturas consiste em determinar para cada elemento solicitação $s \in V_s$, o elemento resposta $r \in V_r$.

Os métodos da teoria das estruturas resolvem esse problema por discretização, ou seja, consideram as solicitações no subconjunto, n -dimensional, $V_s^0 \subset V_s$ e as respostas no subconjunto, n -dimensional, $V_r^0 \subset V_r$. Dessa forma a obtenção das equações

$$r_i = r_i(\bar{s}_j) \quad (i, j = 1, 2, \dots, n) \quad (4.1.1)$$

na forma explícita e sua resolução determina uma solução aproximada do problema. Os elementos r_i e $\bar{s}_j$ recebem o nome de variáveis generalizadas. Apresenta-se na referência [13] teorização das variáveis generalizadas.

Desenvolve-se neste capítulo a técnica de discretização pelo método dos elementos finitos, bem como sua justificativa.

A discretização pelo método dos elementos finitos consiste essencialmente de três etapas:

- 1) divisão do domínio D em subdomínios D^e , correspondentes aos elementos
- 2) definição dos campos admissíveis em cada elemento. Entende-se por campos admissíveis os campos obtidos pela combinação linear de campos elementares contínuos cujos coeficientes são os parâmetros generalizados.

3) definição do modo de interação entre os elementos. Trata-se de exigir que em determinados pontos dos elementos sejam satisfeitas determinadas condições, referidas como condições reduzidas.

É comum interpretar a estrutura, assim discretizada, como um conjunto de elementos que se ligam em determinados pontos, chamados nós ou pontos nodais.

As várias possibilidades no que diz respeito à definição dos campos admissíveis nos elementos e do modo de interação entre os mesmos, que caracteriza as incógnitas a serem determinadas para a solução do problema, sugerem vários modelos no método dos elementos finitos.

Considere-se a interação entre os elementos estabelecidos através de condições reduzidas de compatibilidade. Nesse caso as incógnitas são os deslocamentos generalizados, e tem-se o processo dos deslocamentos. Os campos admissíveis são os campos de deslocamentos e de deformações, definidos nos elementos pela combinação linear de campos elementares contínuos cujos coeficientes são, respectivamente, os deslocamentos generalizados e as deformações generalizadas. Se os campos de deformações são integrais, isto é, observam-se as equações (3.2.2) tem-se o modelo compatível, caso contrário tem-se o modelo híbrido em tensões.

Considere-se agora a interação entre os elementos estabelecidos através de condições reduzidas de equilíbrio. Nesse caso as incógnitas são as forças generalizadas e tem-se o processo das forças. Os campos admissíveis são os campos de forças no contorno dos elementos e o de tensões no interior dos mesmos, definidos pela combinação linear de campos elementares contínuos cujos coeficientes são, respectivamente, as forças generalizadas e as tensões generalizadas. Se os campos de tensões são equilibrados por forças de massa prescritas, satisfazendo as equações (3.2.4) no contorno do elemento, tem-se o modelo equilibrado, caso contrário tem-se o modelo híbrido em deslocamentos.

Finalmente, considere-se a interação entre os elementos através de condições reduzidas de equilíbrio e de compatibilidade. Tem-se então o processo misto, não aplicável na discretização de qualquer tipo de estrutura, mas somente àquelas que oferecem a particularidade de poderem se considerar como resultante de duas estruturas distintas, de comportamento não independentes entre si, uma das quais se analisa pelo processo dos deslocamentos e a outra pelo processo das forças [19]. O modelo correspondente a tal processo é referido como modelo misto.

Um resumo dos vários processos e modelos correspondentes é apresentado de forma esquemática no quadro II.

QUADRO II

Métodos dos Elementos Finitos
Os vários processos e correspondentes modelos

Caracterizada a técnica de discretização pelo método dos elementos finitos e apresentados os vários modelos, considere-se agora uma sequência de soluções aproximadas obtida por sucessivas subdivisões do domínio (sucessivo aumento do número de elementos).

A justificativa do método proposto consiste em garantir que essa sequência de soluções aproximadas convirja para a solução exata, isto é, que a sequência das distâncias entre cada um dos seus termos e o referido limite tenda para zero. Essa garantia é obtida obedecendo-se certos critérios na definição dos campos admissíveis, nos elementos.

Falta ainda caracterizar o tipo de convergência pela definição de distância entre dois campos.

Definindo-se distância entre dois campos como o máximo módulo da diferença entre os valores dos campos, em cada ponto do domínio a convergência diz-se uniforme. Este é o tipo de convergência utilizado para justificar o método das diferenças finitas e determina no limite a coincidência dos campos ^[16].

Definindo-se distância entre dois campos como a energia de deformação de sua diferença, a convergência diz-se em energia. Em virtude do método dos elementos finitos estar fundamentado em conceitos energéticos, este é o tipo de convergência utilizado para justificá-lo, embora não determine no limite a coincidência dos campos ^[16].

Nos parágrafos que se seguem apresentam-se desenvolvimentos mais detalhados, restrito ao processo dos deslocamentos. Desenvolvem-se estudo e discussão gerais da técnica de discretização. Apresentam-se teoremas de convergência estabelecidos por Arantes e Oliveira, que podem ser encontrados nas referências ^[15], ^[16], ^[17] e ^[18].

E, finalmente, com aplicações à elasticidade plana, procura-se ilustrar conceitos estabelecidos.

Convém observar que um desenvolvimento dual em relação ao processo dos deslocamentos, conduz ao estudo do processo das forças. Quanto ao processo misto, seu desenvolvimento e discussão encontram-se na referência [16].

4.2 - Processo dos deslocamentos

4.2.1 - Campos admissíveis nos elementos

Considerem-se no elemento e os campos de deslocamentos, u_m , expresso através de

$$u_m^e = \phi_{mi}^e q_i^e \quad (4.2.1)$$

e os campos de deformações, ϵ_n , expresso através de

$$\epsilon_n^e = \chi_{nk}^e e_k^e \quad (4.2.2)$$

onde q_i^e e e_k^e são, respectivamente, os deslocamentos e as deformações generalizados, cada vetor com elementos independentes entre si, e onde as colunas de ϕ_{mi}^e e χ_{nk}^e são os modos elementares contínuos. Adotam-se como deslocamentos generalizados os valores assumidos nos pontos nodais por deslocamentos e, eventualmente, por derivadas dos deslocamentos.

Admitindo-se a linearidade entre tensões e deformações a densidade da energia de deformação do elemento é dada por

$$W^e = 0.5 \epsilon_m H_{mn} \epsilon_n \quad (4.2.3)$$

4.6

ou, em virtude de (4.2.2), por

$$W^e = 0.5 \, e_l^e \, x_{ml}^e \, H_{mn} \, x_{nk}^e \, e_k^e \quad (4.2.4)$$

Obtêm-se a energia de deformação através de

$$U^e = 0.5 \, e_l^e \, K_{lk}^e \, e_k^e \quad (4.2.5)$$

onde

$$K_{lk}^e = \int_D e \, x_{ml}^e \, H_{mn} \, x_{nk}^e \, dD \quad (4.2.6)$$

é uma matriz do elemento, dependente dos modos elementares contínuos de deformações.

A energia potencial total do elemento é dada por

$$T^e = U^e - \int_D e \, \bar{x}_m^e \, u_m^e \, dD - \int_{F_1} e \, \bar{p}_m^e \, u_m^e \, dF \quad (4.2.7)$$

ou, de acordo com (4.2.1), por

$$T^e = U^e - f_i^e \, q_i^e \quad (4.2.8)$$

onde

$$f_i^e = \int_D e \, \bar{x}_m^e \, \phi_{mi}^e \, dD + \int_{F_1} e \, \bar{p}_m^e \, \phi_{mi}^e \, dF \quad (4.2.9)$$

é o vetor das forças generalizadas do elemento.

É importante observar que não se fez até aqui qualquer referência a respeito das relações entre os campos admissíveis de deslocamentos e de deformações.

Pode-se portanto violar a compatibilidade dentro dos elementos independente da violação ou não da compatibilidade na fronteira dos mesmos.

4.2.2 - Modelo compatível

Estabelece-se o modelo compatível considerando-se que os campos admissíveis de deformações e de deslocamentos relacionam-se através de (3.2.2), no subdomínio D^e .

O procedimento clássico é o de definir os campos de deslocamentos em função das deformações generalizadas

$$u_m^e = \alpha_{mk}^e e_k^e \quad (4.2.10)$$

e obter os campos de deformações através de (3.2.2)

$$\epsilon_n^e = D_{nm}^e u_m^e = D_{nm}^e \alpha_{mk}^e e_k^e \quad (4.2.11)$$

onde D_{nm}^e é um operador diferencial e, em virtude de (4.2.2),

$$D_{nm}^e \alpha_{mk}^e = \chi_{nk}^e \quad (4.2.12)$$

Particularizando (4.2.10) obtém-se facilmente a expressão dos deslocamentos generalizados em função das deformações generalizadas.

$$q_i^e = L_{ik}^e e_k^e \quad (i=1,2,\dots, N_q); (k=1,2,\dots, N_e) \quad (4.2.13)$$

onde, N_q e N_e definem, respectivamente, o número de deslocamentos generalizados e o número de deformações generalizadas.

Trata-se agora de obter a expressão das deformações generalizadas em função dos deslocamentos generalizados, diretamente, no caso de $N_q = N_e$, ou, pela aplicação do teorema da mínima energia potencial, no caso de $N_q < N_e$, o que permitirá estabelecer no elemento o campo de deslocamentos, função exclusiva dos deslocamentos generalizados, e as equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas.

Considere-se inicialmente que o número de deformações generalizadas seja igual ao número de deslocamentos generalizados. Em virtude da não singularidade de L_{ik}^e pode-se escrever

$$e_k^e = N_{ki}^e q_i^e \quad (i, k = 1, 2, \dots, N_q = N_e) \quad (4.2.14)$$

onde

$$N_{ki}^e = L_{ik}^{e-1} \quad (4.2.15)$$

Dessa forma, introduzindo (4.2.14) em (4.2.10), vem

$$u_m^e = \alpha_{mk}^e N_{ki}^e q_i^e \quad (4.2.16)$$

que é a expressão do campo de deslocamentos em função dos deslocamentos generalizados, idêntica à expressão (4.2.1) fazendo

$$\phi_{mi}^e = \alpha_{mk}^e N_{ki}^e \quad (4.2.17)$$

Substituindo (4.2.14) em (4.2.5) e esta em (4.2.8) obtêm-se a expressão da energia potencial total, T^e , em termos dos deslocamentos generalizados

$$T^e = \frac{1}{2} q_i^e K K_{ij}^e q_j^e - f_i^e q_i^e \quad (4.2.18)$$

onde

$$KK_{ij}^e = N_{ki}^e K_{k\ell}^e N_{\ell j}^e \quad (i, j, k, \ell = 1, 2, \dots, N_q = N_e) \quad (4.2.19)$$

sendo f_i^e calculado pela expressão (4.2.9).

Os elementos q_i^e devem ser tais que T^e seja mínimo.

Derivando T^e em relação aos q_i^e e igualando a zero vem

$$KK_{ij}^e q_j^e = f_i^e \quad (4.2.20)$$

que é a expressão das equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas. O elemento KK_{ij}^e tem significado físico bem claro: é a componente de força em um determinado ponto nodal, caracterizados pelo índice i , devida exclusivamente à componente unitária de deslocamentos em outro determinado ponto nodal, caracterizados pelo índice j . Trata-se portanto o elemento KK_{ij}^e de um coeficiente de rigidez, o que justifica plenamente referir-se à matriz correspondente como matriz de rigidez.

Considere-se agora que o número de deformações generalizadas seja maior que o número de deslocamentos generalizados. Como as linhas de L_{ik}^e são linearmente independentes é possível estabelecer-se a seguinte partição:

$$q_i^e = L_{ip}^e e_p^e + L_{ir}^e e_r^e \quad (4.2.21)$$

$$(i, p = 1, 2, \dots, N_q); (r = N_q + 1, \dots, N_e)$$

e, em virtude da não singularidade de L_{ip}^e , vem

$$e_p^e = M_{pi}^e q_i^e + M_{pa}^e e_a^e \quad (4.2.22)$$

$$(i, p = 1, 2, \dots, N_q); (a = N_q + 1, \dots, N_e)$$

4.10

onde

$$M_{pi}^e = L_{ip}^{e-1} \quad (4.2.23)$$

$$M_{pa}^e = -(L_{ip}^e)^{-1} L_{ia} \quad (4.2.24)$$

e, portanto obtêm-se

$$e_k^e = \begin{bmatrix} e_p^e \\ e_r^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{pi}^e & M_{pa}^e \\ 0 & \delta_{ra} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_i^e \\ e_a^e \end{bmatrix} \quad (4.2.25)$$

$$(k = 1, 2, \dots, N_e)$$

$$(i, p = 1, 2, \dots, N_q)$$

$$(r, a = N_q + 1, \dots, N_e)$$

Conclui-se imediatamente pela observação das expressões (4.2.25), (4.2.1) e (4.2.2) que a cada campo de deslocamentos corresponde uma certa classe de campos de deformações. Nessas condições o teorema da mínima energia potencial total permitirá escolher entre os campos de deformações integráveis o mais próximo do equilibrado. Compreende-se assim a vantagem de tal procedimento pois conduz a menores erros de aproximação.

A energia de deformação do elemento $\tilde{e}$ dada por (4.2.5) ou, partindo as matrizes em conformidade com (4.2.21), vem

$$U^e = \frac{1}{2} \{ e_p^e \ e_r^e \} \begin{bmatrix} k_{ps}^e & k_{pt}^e \\ k_{rs}^e & k_{rt}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_s^e \\ e_t^e \end{bmatrix} \quad (4.2.26)$$

$$(p, s = 1, 2, \dots, N_q)$$

$$(r, t = N_q + 1, \dots, N_e)$$

Substituindo (4.2.25) em (4.2.26) vem

$$U^e = \frac{1}{2} \{ q_i^e \quad e_a^e \} \begin{bmatrix} KJ_{ij}^e & KJ_{ib}^e \\ KJ_{aj}^e & KJ_{ab}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j^e \\ e_b^e \end{bmatrix} \quad (4.2.27)$$

$$(i, j = 1, 2, \dots, N_q)$$

$$(a, b = N_q + 1, \dots, N_e)$$

onde

$$\begin{bmatrix} KJ_{ij}^e & KJ_{ib}^e \\ KJ_{aj}^e & KJ_{ab}^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{pi}^e & K_{ps}^e & M_{sj}^e \\ M_{pa}^e & K_{ps}^e & M_{sj}^e + K_{as}^e M_{sj}^e \end{bmatrix} \quad (4.2.28)$$

$$\begin{bmatrix} M_{pi}^e K_{ps}^e M_{sb}^e + M_{pi}^e K_{pb}^e \\ M_{pa}^e K_{ps}^e M_{sb}^e + K_{as}^e M_{sb}^e + M_{pa}^e K_{pb}^e + K_{ab}^e \end{bmatrix}$$

Introduzindo-se (4.2.27) em (4.2.8), obtêm-se a expressão da energia potencial total, T^e , em termos dos deslocamentos generalizados e das deformações generalizadas

$$T^e = \frac{1}{2} \{ q_i^e \quad e_a^e \} \begin{bmatrix} KJ_{ij}^e & KJ_{ib}^e \\ KJ_{aj}^e & KJ_{ab}^e \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_j^e \\ e_b^e \end{bmatrix} - f_i^e q_i^e \quad (4.2.29)$$

onde f_i^e é calculado pela expressão (4.2.9).

Os elementos q_i^e e e_a^e devem ser tais que T^e seja mínimo.

4.12

Derivando T^e em relação aos q_i^e e e_a^e e igualando a zero

vem:

$$KJ_{ij}^e q_j^e + KJ_{ib}^e e_b^e = f_i^e \quad (4.2.30)$$

$$KJ_{aj}^e q_j^e + KJ_{ab}^e e_b^e = 0 \quad (4.2.31)$$

A equação (4.2.31) permite estabelecer

$$e_b^e = - FJ_{ba}^e KJ_{aj}^e q_j^e \quad (4.2.32)$$

onde

$$FJ_{ba}^e = (KJ_{ab}^e)^{-1} \quad (4.2.33)$$

e portanto, substituindo (4.2.32) em (4.2.25) obtêm-se

$$e_k^e = \begin{bmatrix} M_{pi}^e - M_{pr}^e FJ_{ra}^e KJ_{ai}^e \\ -FJ_{ra}^e KJ_{ai}^e \end{bmatrix} q_i^e \quad (4.2.34)$$

que é a expressão das deformações generalizadas em termos dos deslocamentos generalizados.

Dessa forma introduzindo (4.2.34) em (4.2.10), vem

$$u_m^e = (\alpha_{mp}^e M_{pi}^e - \alpha_{mp}^e M_{pa}^e FJ_{ab}^e KJ_{bi}^e - \alpha_{ma}^e FJ_{ab}^e KJ_{bi}^e) q_i^e \quad (4.2.35)$$

que é a expressão dos campos de deslocamentos em função dos deslocamentos generalizados, idêntica à expressão (4.2.1) fazendo

$$\begin{aligned} \phi_{mi}^e &= \alpha_{mp}^e M_{pi}^e - \alpha_{mp}^e M_{pa}^e F_{ab}^e K_{bi}^e - \\ &- \alpha_{ma}^e F_{ab}^e K_{bi}^e \end{aligned} \quad (4.2.36)$$

Finalmente, substituindo (4.2.32) em (4.2.30), obtêm-se

$$(K_{ij}^e - K_{ib}^e F_{ba}^e K_{aj}^e) q_j^e = f_i^e \quad (4.2.37)$$

ou, estabelecendo

$$KK_{ij}^e = K_{ij}^e - K_{ib}^e F_{ba}^e K_{aj}^e \quad (4.2.38)$$

vem

$$KK_{ij}^e q_j^e = f_i^e \quad (4.2.39)$$

que é a expressão das equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas.

4.2.3 - Modelo híbrido em tensões

No modelo híbrido em tensões os campos admissíveis de deslocamentos e de deformações não se relacionam através de (3.2.2).

O procedimento usual é o de definir campos de deslocamentos através de (4.2.1) e campos de tensões que equilibram forças de massa especificadas nulas

$$\sigma_m^e = p_{mk}^e e_k^e \quad (k=1,2,\dots, N_e) \quad (4.2.40)$$

No caso de forças de massa especificadas não nulas, basta somar ao segundo membro de (4.2.40) uma particular solução.

É importante observar que é irrelevante definir campos em tensões ou deformações, visto que se relacionam através de (3.2.20). Dessa forma, vem:

$$\epsilon_n^e = (H_{nm})^{-1} p_{mk}^e e_k^e \quad (4.2.41)$$

expressão idêntica a (4.2.2) com

$$\chi_{nk}^e = (H_{nm})^{-1} p_{mk}^e \quad (4.2.42)$$

Os campos admissíveis assim definidos sugerem o seguinte problema: em um subdomínio D^e onde se define certa classe de campos de tensões equilibradas por forças de massa fixadas nulas e com deslocamentos fixados na fronteira F^e do subdomínio, determinar o campo de tensões equilibrado que minimiza a distância ao campo compatível que resolve o problema.

A solução do problema será obtida pela aplicação do teorema da mínima energia complementar total e caracterizada pela expressão que relaciona as deformações generalizadas e os deslocamentos generalizados, conforme se mostra a seguir.

A energia complementar de deformação, em virtude de (3.2.23), é calculada através de:

$$U^{*e} = \frac{1}{2} e_k^e K_{k\ell}^e e_\ell^e \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, N_e) \quad (4.2.43)$$

onde

$$K_{k\ell}^e = \int_D p_{nk}^e H_{nm}^{-1} p_{m\ell}^e dD \quad (4.2.44)$$

Introduzindo-se (4.2.40) em (3.2.31), vem

$$p_m^e = N_{mn}^e p_{n\ell}^e e_\ell^e = S_{m\ell}^e e_\ell^e \quad (4.2.45)$$

que, juntamente com (4.2.1) permite obter

$$p^{*e} = e_\ell^e T_{\ell i}^e q_i^e \quad (\ell=1,2,\dots, N_e); \quad (i=1,2,\dots, N_q) \quad (4.2.46)$$

expressão da energia potencial complementar das forças externas e onde

$$T_{\ell i}^e = \int_F e S_{m\ell}^e \phi_{mi}^e dF \quad (4.2.47)$$

Substituindo-se (4.2.43) e (4.2.46) em (3.2.35), obtêm-se a expressão da energia potencial complementar total, T^{*e} , em termos dos deslocamentos generalizados e das deformações generalizadas

$$T^{*e} = \frac{1}{2} e_k^e K_{k\ell}^e e_\ell^e - e_\ell^e T_{\ell i}^e q_i^e \quad (4.2.48)$$

$$(k, \ell=1,2,\dots, N_e); \quad (i=1,2,\dots, N_q)$$

Em virtude do teorema da mínima energia complementar total os elementos e_ℓ^e devem ser tais que T^{*e} seja mínimo.

Derivando T^{*e} em relação aos elementos e_ℓ^e e igualando a zero vem

$$K_{\ell k}^e e_k^e - T_{\ell i}^e q_i^e = 0 \quad (4.2.49)$$

Como a matriz $K_{\ell k}^e$ é não-singular, obtêm-se a expressão que relaciona, as deformações generalizadas com os deslocamentos generalizados

$$e_k^e = F_{k\ell}^e T_{\ell i}^e q_i^e \quad (k, \ell = 1, 2, \dots, N_e); \quad (i = 1, 2, \dots, N_q) \quad (4.2.50)$$

onde

$$F_{k\ell}^e = (K_{\ell k}^e)^{-1} \quad (4.2.51)$$

Em virtude de (4.2.50) estabelecem-se agora facilmente as equações de equilíbrio envolvendo forças e deslocamentos generalizados.

Introduzindo (4.2.5) e (4.2.50) em (4.2.8) obtêm-se a expressão da energia potencial total do elemento em termos dos deslocamentos generalizados

$$T^e = \frac{1}{2} q_i^e K K_{ij}^e q_j^e - f_i^e q_i^e \quad (i, j = 1, 2, \dots, N_q) \quad (4.2.52)$$

onde

$$K K_{ij}^e = F_{kp}^e T_{pi}^e K_{pr}^e F_{\ell r}^e T_{rj}^e \quad (k, \ell, p, r = 1, 2, \dots, N_e) \quad (4.2.53)$$

Os elementos q_i^e devem ser tais que T^e seja estacionário. Derivando T^e em relação aos q_i^e e igualando a zero vem:

$$K K_{ij}^e q_j^e = f_i^e \quad (4.2.54)$$

que é a expressão das equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas.

4.2.4 - Interação entre os elementos e análise do sistema

Estabelece-se a interação entre os elementos através de condições reduzidas de compatibilidade que exigem a igualdade dos deslocamentos generalizados nos pontos nodais coincidentes de elementos vizinhos.

É importante lembrar que os elementos se deformam segundo modos fixados, e portanto não há um aumento extraordinário da flexibilidade como poderia sugerir a compatibilidade preservada apenas nos pontos nodais.

Pode ocorrer inclusive que as condições reduzidas de compatibilidade sejam suficientes para garantirem a continuidade dos deslocamentos em todo o domínio da estrutura. É o que ocorre com o elemento quadrilátero de 4 pontos nodais nos vértices e lei linear de variação dos deslocamentos no seu contorno, pois basta impor que os deslocamentos sejam iguais nos vértices para se obter a continuidade dos deslocamentos em todo o contorno do elemento. Diz-se então que o elemento é conforme.

Não sendo, as condições reduzidas de compatibilidade, suficientes para garantirem a continuidade dos deslocamentos em todo o domínio da estrutura diz-se que o elemento é não-conforme. Cita-se como exemplo o elemento quadrilátero de 4 pontos nodais nos vértices e lei parabólica de variação de deslocamentos no seu contorno.

Estabelecem-se, analiticamente, as condições reduzidas de compatibilidade através da expressão

$$q_i^e = A_{ik}^e U_k \quad (4.2.55)$$

onde U_k são os deslocamentos nodais da estrutura. Decorre imediatamente de (4.2.55) que os vários campos definidos pelos deslocamentos q_i^e também o são pelos deslocamentos U_k dos pontos nodais da estrutura.

Seja F_k as forças generalizadas correspondentes aos deslocamentos generalizados U_k . A invariância do trabalho permite escrever

$$\sum_e q_i^e f_i^e = F_k U_k \quad (4.2.56)$$

ou, em virtude de (4.2.55),

$$(\sum_e f_i^e A_{ik}^e) U_k = F_k U_k \quad (4.2.57)$$

e, como os deslocamentos generalizados U_k são independentes entre si, vem

$$\sum_e f_i^e A_{ik}^e = F_k \quad (4.2.58)$$

expressão das condições reduzidas de equilíbrio, que correspondem a afirmar que em cada nó as forças de interação devem se autoequilibrar.

Considere-se agora a energia potencial total da estrutura obtida pela soma da energia potencial total dos elementos

$$T = \sum_e T^e = \sum_e \left(\frac{1}{2} q_i^e K K_{ij}^e q_j^e - f_i^e q_i^e \right) \quad (4.2.59)$$

ou, substituindo (4.2.55) em (4.2.59),

$$T = \frac{1}{2} U_k (\sum_e A_{ik}^e K K_{ij}^e A_{jl}^e) U_l - (\sum_e f_i^e A_{ik}^e) U_k \quad (4.2.60)$$

ou ainda, em virtude de (4.2.58),

$$T = \frac{1}{2} U_k K G_{kl} U_l - F_k U_k \quad (4.2.61)$$

onde

$$KG_{k\ell} = \sum_e A_{ik}^e K K_{ij}^e A_{j\ell}^e \quad (4.2.62)$$

é a matriz de rigidez da estrutura.

É conveniente obter a matriz de rigidez da estrutura, não através das operações indicadas em (4.2.62), mas sim, através de processo mais direto que não envolva um número tão grande de elementos nulos.

Derivando a energia potencial total T da estrutura em relação aos deslocamentos U_k , obtêm-se

$$KG_{k\ell} U_{\ell} = F_k \quad (4.2.63)$$

como condição de estacionaridade. Ressalta-se que as equações (4.2.63) não garantem mais que a estacionaridade do funcional T , visto que não se garante a continuidade dos deslocamentos no contorno dos elementos e a integrabilidade dos campos de deformações no interior dos elementos, exceto no caso do modelo compatível em que o elemento seja conforme.

A determinação dos deslocamentos permite obter em todo o domínio da estrutura, os campos de deslocamentos, de deformações e de tensões, que correspondem a certa solução aproximada.

Justifica-se tal procedimento pois o fato de não se ter continuidade dos deslocamentos e integrabilidade das deformações em todo o domínio não permite afirmar a priori que a solução assim obtida seja menos próxima da solução exata do que aquela que se obteria dentro de um subconjunto do conjunto das soluções compatíveis, conforme se pode observar nas aplicações adiante apresentadas.

Quanto à determinação dos deslocamentos U_{ℓ} deve-se observar inicialmente que a matriz $KG_{k\ell}$ é singular, visto que nenhum deslocamento generalizado foi fixado.

Trata-se portanto de introduzir, no sistema (4.2.63), as equações correspondentes aos deslocamentos fixados

$$U_i = \bar{U}_i \quad (4.2.64)$$

Introduz-se (4.2.64) anulando todos os elementos da linha i da matriz de rigidez exceto o elemento da diagonal principal que se faz igual à unidade. No segundo membro substitui-se F_i por $\bar{U}_i$.

A operação indicada destrói a simetria de KG_{kl} , o que é extremamente inconveniente, visto que aumenta sensivelmente a área de memorização, o número de operações e o tempo de cálculo na resolução do sistema de equações.

Para recuperar a simetria basta anular todos os elementos da coluna i da matriz exceto o elemento da diagonal principal. Aqueles elementos depois de multiplicados por $\bar{U}_i$ são subtraídos dos segundos membros respectivos.

A expressão

$$\begin{aligned} \{ KG_{kl} (1 - \delta_{ik} - \delta_{il}) (1 - \delta_{ik} \delta_{il}) + \delta_{ik} \delta_{il} \} U_l = \quad (4.2.65) \\ = (F_k - KG_{ki} \bar{U}_i) (1 - \delta_{ki}) + \bar{U}_i \delta_{ik} \end{aligned}$$

resume todo o procedimento acima descrito.

4.3 - Convergência no processo dos deslocamentos

4.3.1 - Conceitos básicos

Uma sequência de famílias de campos F'_n , obtida por sucessivas subdivisões do domínio (sucessivo aumento do número de elementos), diz-se completa em energia relativamente a um conjunto F^0 se, para qualquer $\varepsilon > 0$, arbitrário e pequeno, e qualquer campo f pertencente a F^0 , for possível determinar um número inteiro $N > 0$, tal que em qualquer família de ordem $n > N$ existe um campo admissível f_n correspondente a f verificando a desigualdade

$$d(f, f_n) < \varepsilon \quad |^{13}| \quad (4.3.1)$$

O campo f_n é definido através de (4.2.1) e (4.2.2), onde as deformações generalizadas podem sempre ser expressas em termos dos deslocamentos generalizados. Ele é definido como admissível correspondente a f se apresentar nos pontos nodais mesmos deslocamentos e derivadas de deslocamentos, correspondentes aos deslocamentos generalizados.

É importante observar que a primeira definição contém mais que simples completitude, pois o campo f_n que verifica a desigualdade (4.3.1) é o campo admissível correspondente a f .

No que se segue admite-se que a energia de deformação associada a um campo f_n admissível correspondente a f , com energia de deformação limitada, também seja limitada. Nesse caso o modelo discreto será chamado admissível.

As condições em que uma família diz-se completa em energia relativamente a um conjunto F^0 referem-se como condições de completitude e desempenham papel fundamental no estudo da convergência para a solução exata.

Apresentam-se a seguir condições de completitude nos modelos compatível e híbrido em tensões.

4.3.2 - Condições de completitude no modelo compatível

Seja F^0 o conjunto dos campos elásticos compatíveis cujos deslocamentos apresentam derivadas de segunda ordem contínuas e limitadas em cada subdomínio D^e .

Completitude em relação a F^0 será obtida sempre que as expressões dos deslocamentos forem tais que qualquer deslocamento arbitrário de corpo rígido seja permitido para o elemento livre no espaço $|^1|$.

Assim no caso da elasticidade, plana ou tridimensional, e no caso das placas em que não se despreza a deformação transversal, obtém-se completitude em relação a F^0 , se a expressão de cada componente do deslocamento contiver termo constante completamente arbitrário e todos os termos lineares com coeficientes também completamente arbitrários, e os eventuais termos restantes possam se anular independentemente dos termos constante e lineares.

No caso da teoria das placas em que se despreza a deformação transversal (validade da hipótese de Kirchhoff) as rotações se relacionam com os deslocamentos transversais através de

$$\theta_i = -u_{3,i} \quad (4.3.2)$$

e, obtém-se completitude em relação a um subconjunto $F'_0 \subset F^0$ se a expressão de cada componente do deslocamento transversal contiver termo constante completamente arbitrário, todos os termos lineares e quadráticos com coeficientes também completamente arbitrários, e os eventuais termos restantes puderem se anular independentemente dos termos constante, lineares e quadráticos.

4.3.3 - Condições de completitude no modelo híbrido em tensões

Seja F^0 o conjunto dos campos elásticos cujas tensões apresentam derivadas de primeira ordem contínuas e limitadas em cada subdomínio D^e .

Completitude em relação a F^0 será obtida sempre que a expressão de cada componente de tensão contiver termo constante completamente arbitrário e os eventuais termos restantes possam se anular independentemente do termo constante ^[16].

4.3.4 - Teoremas de convergência

Encontram-se demonstrados nas referências ^[16] e ^[18] os seguintes teoremas:

1º teorema de convergência * - "uma sequência de soluções aproximadas converge para a solução exata se:

- a) verificarem-se as condições de completitude relativamente a F^0
- b) a solução exata pertencer a F^0
- c) verificar-se conformidade entre os elementos".

2º teorema de convergência * - "uma sequência de soluções aproximadas converge para solução exata se:

- a) verificarem-se as condições de completitude relativamente a F^0
- b) a solução exata pertencer a F^0
- c) o campo compatível que equilibre as mesmas forças externas da solução aproximada pertencer a F^0 ".

Dessa forma uma vez obtida a conformidade entre os elementos as condições de completitude, anteriormente estabelecidas, tornam-se condições suficientes de convergência.

* A admissibilidade do modelo discreto é admitida.

Entretanto, nem sempre, obter conformidade é fácil ou conveniente, em virtude da lenta convergência para a solução exata que pode ser observada. As condições de completude deixam de ser suficientes para a convergência e torna-se necessário estabelecer condições em que o campo compatível que equilibra as mesmas forças externas da solução aproximada pertence a F^0 , é o que se discute a seguir.

Considerem-se inicialmente as teorias em que não se despreza a deformação transversal. Nesse caso as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos envolvem derivadas dos deslocamentos de segunda ordem do tipo:

$$E_{ij} H_{jk} D_{km} u_m = X_i \quad (4.3.3)$$

onde E_{ij} e D_{km} são operadores diferenciais de primeira ordem.

A pertinência ao conjunto F^0 do campo compatível que equilibra as mesmas forças externas da solução aproximada é então verificada, se as densidades das forças de massa X_i , ou, as segundas derivadas dos deslocamentos permanecem contínuas e limitadas nos elementos, com suas dimensões decrescendo indefinidamente ^[16].

O segundo teorema de convergência passa a ter o seguinte enunciado:

"uma sequência de soluções aproximadas converge para a solução exata se:

- a) verificarem-se as condições de completude relativamente a F^0
- b) a solução exata pertencer a F^0
- c) os campos admissíveis de tensões equilibrarem densidades de forças de massa contínuas e limitadas em cada elemento (condição aplicada ao modelo híbrido em tensões), ou, os campos admissíveis de deslocamentos apresentarem derivadas de segunda ordem contínuas e limitadas em cada elemento (condição aplicada ao modelo compatível).

É interessante observar que a condição "c" do teorema decorre imediatamente, para o modelo híbrido em tensões, no caso dos campos admissíveis de tensões equilibrarem forças de massa nulas.

Considerem-se agora as teorias em que se despreza a deformação transversal. nesse caso as equações de equilíbrio em termos dos deslocamentos sofrem alterações, pois os operadores diferenciais deixam de ser de primeira ordem e além das forças de massa devem ser considerados os momentos de massa ^[18].

A pertinência ao conjunto $F'_0 \subset F^0$ do campo compatível que equilibra as mesmas forças externas da solução aproximada é então verificada, se as densidades das forças e momentos de massa permanecerem contínuos e limitadas nos elementos, com suas dimensões decrescendo indefinidamente ^[16].

A condição "c" do 2º teorema de convergência é então verificada, para o modelo híbrido em tensões, se os campos admissíveis de tensões equilibrarem densidades de forças e momentos de massa contínuas e limitadas em cada elemento. Observa-se que a condição "c" decorre imediatamente caso os campos admissíveis de tensões equilibrem densidades de forças e momentos de massa nulas.

No caso do modelo compatível a condição "c" do 2º teorema de convergência é difícil de ser obtida genericamente. Tem-se conhecimento, através de ^[16] apenas da obtida para a teoria das placas e que é verificada se os campos admissíveis do deslocamento transversal apresentam derivadas de terceira ordem contínuas e limitadas em cada elemento.

4.4 - Aplicações do processo dos deslocamentos à elasticidade plana

4.4.1 - Introdução

Com a finalidade de permitir uma compreensão mais fácil do processo dos deslocamentos, apresenta-se, para vários modelos derivados dos modelos compatível e híbrido em tensões, a formulação dos elementos para a elasticidade plana.

Utiliza-se no desenvolvimento a seguir um elemento quadrilátero. Adotam-se, para todos os modelos derivados uma única definição para a geometria dos elementos e como deslocamentos generalizados os deslocamentos dos vértices do quadrilátero.

Nas várias definições dos campos admissíveis, que se apresentam, pode-se constatar a observância das condições de convergência para a solução exata.

4.4.2 - Definição da geometria do elemento quadrilátero

Considerem-se x_{im} e y_{im} (com $i=1,2,3,4$ e $m = 1,2$) as coordenadas dos pontos nodais do elemento e x_m e y_m (com $m=1,2$) as coordenadas de um ponto genérico do elemento, respectivamente, nos sistemas global e local, conforme se indica na figura 4.1.

Fig. 4.1 - Coordenadas globais e locais

Estabelece-se a transformação de coordenadas entre os sistemas global e local, através de

$$x_m = N_i(y_1; y_2) x_{im} \quad (m=1,2); (i=1,2,3,4) \quad (4.4.1)$$

onde

$$N_i(y_1, y_2) = .25 (1 + y_{i1} y_1)(1 + y_{i2} y_2) \quad (4.4.2)$$

$$(i=1,2,3,4)$$

são funções de forma lineares, independentes das dimensões dos elementos.

Para que a correspondência entre x_m e y_m seja biunívoca os ângulos internos do elemento devem ser menores ou iguais a 180°.

No desenvolvimento que se segue serão calculadas integrais no domínio e na fronteira dos elementos. Ora, a transformação de coordenadas estabelecida sugere a conveniência de utilizar como variáveis de integração as coordenadas locais y_n , o que, por sua vez, permitirá a utilização do processo de quadratura de Gauss-Legendre. Portanto, torna-se necessário estabelecer algumas transformações que permitam o cálculo das várias integrais.

A diferencial total dx_m pode ser escrita na forma

$$dx_m = \frac{\partial x_m}{\partial y_n} dy_n = J_{mn} dy_n \quad (m=1,2); (n=1,2) \quad (4.4.3)$$

onde, em virtude de (4.4.1),

$$J_{mn} = \frac{\partial N_i}{\partial y_n} x_{im} \quad (m=1,2); (n=1,2); (i=1,2,3,4) \quad (4.4.4)$$

4.28

com

$$\frac{\partial N_i}{\partial y_n} = .25 y_{in} (1 + y_{i,3-n} y_{3-n}) \quad (4.4.5)$$

Decorre de (4.4.3) a diferencial total dy_n

$$dy_n = (J_{mn})^{-1} dx_m = Y_{nm} dx_m \quad (n=1,2); \quad (m=1,2) \quad (4.4.6)$$

onde

$$Y_{nm} = (-1)^{n+m} \frac{J_{3-m, 3-n}}{\Delta} \quad (4.4.7)$$

com

$$\Delta = J_{11} J_{22} - J_{12} J_{21} \quad (4.4.8)$$

Finalmente, pode-se demonstrar facilmente que

$$dD = e dx_1 dx_2 = e \Delta dy_1 dy_2 \quad (4.4.9)$$

e

$$dF = e ds = e \sqrt{(J_{1p}^2 + J_{2p}^2)} dy_p \quad (p=1,2) \quad (4.4.10)$$

no lado $y_{3-p} = \pm 1$, onde e é a espessura do elemento.

4.4.3 - Modelo conforme derivado do modelo compatível. Primeira possibilidade

Considerem-se os campos admissíveis de deslocamentos definidos por:

$$u_m = N_i(y_1, y_2) q_{im} \quad (m=1,2); \quad (i=1,2,3,4); \quad (4.4.11)$$

$$(im = 1 + 4m - 4)$$

onde

$$N_i(y_1, y_2) = .25 (1 + y_{i1} y_1)(1 + y_{i2} y_2) \quad (4.4.12)$$

são funções de forma lineares, correspondentes aos modos elementares contínuos, e q_{im} são os deslocamentos generalizados. Apresentam-se na figura 4.2 os deslocamentos generalizados e a função de forma N_1 . As funções de forma N_2 , N_3 e N_4 apresentam representação gráfica semelhante.

Fig. 4.2 - Deslocamentos generalizados. Função de forma N_1

O elemento assim definido é isoparamétrico, ou seja, o número de parâmetros que definem a geometria é igual ao número de parâmetros que definem os campos admissíveis. A variação dos deslocamentos no contorno é linear, o que garante a conformidade entre os elementos.

Considerem-se agora as derivadas parciais dos deslocamentos u_m em relação a x_p

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_p} = \frac{\partial u_m}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_p} \quad (m=1,2); \quad (p=1,2); \quad (k=1,2) \quad (4.4.13)$$

ou, em virtude de (4.4.11) e (4.4.6),

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_p} = \frac{\partial N_i}{\partial y_k} \gamma_{kp} q_{im} = A_{ip} q_{im} \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.4.14)$$

onde

$$\frac{\partial N_i}{\partial y_k} = .25 y_{ik} (1 + y_{i,3-k} y_{3-k}) \quad (4.4.15)$$

$$(i=1,2,3,4); \quad (k=1,2)$$

Por intermédio de (4.4.14) obtêm-se facilmente a expressão das deformações em termos dos deslocamentos generalizados

$$\begin{bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_m}{\partial x_p} \delta_{pm} \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \delta_{m2} + \frac{\partial u_m}{\partial x_2} \delta_{m1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ip} \delta_{pm} \\ A_{i,3-m} \end{bmatrix} q_{im} \quad (4.4.16)$$

Como se admitiu linear a relação entre tensões e deformações, torna-se imediato escrever a expressão das tensões em termos dos deslocamentos generalizados

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{pr} A_{jr} \delta_{rn} + H_{p3} A_{j,3-n} \\ H_{3r} A_{jr} \delta_{rn} + H_{33} A_{j,3-n} \end{bmatrix} q_{jn} \quad (4.4.17)$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pjn} \\ S_{3jn} \end{bmatrix} q_{jn} \quad \begin{matrix} (p=1,2); (r=1,2); (n=1,2) \\ (j=1,2,3,4); (jn=j+4n-4) \end{matrix} \quad (4.4.18)$$

sendo que os valores $H_{k\ell}$ (com $k=1,2,3$ e $\ell=1,2,3$) são funções das características elásticas e podem ser encontradas, nos vários casos, na referência [11].

A energia de deformação do elemento é dada então por

$$U = \frac{1}{2} q_{im} K K_{imjn} q_{jn} \quad (4.4.19)$$

$$(i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4)$$

$$(j=1,2,3,4); (n=1,2); (jn=j+4n-4)$$

onde

$$K K_{imjn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_{im} S_{mjn} + A_{i,3-m} S_{3jn}) e \Delta dy_1 dy_2 \quad (4.4.20)$$

4.32

Admitindo-se apenas a existência de forças de massa, a energia potencial das forças externas é dada por:

$$P = f_{im} q_{im} \quad (i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4) \quad (4.4.21)$$

onde

$$f_{im} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{X}_m N_i e \Delta dy_1 dy_2 \quad (4.4.22)$$

Substituindo (4.4.19) e (4.4.21) em (4.2.8) obtêm-se a energia potencial total em termos dos deslocamentos generalizados

$$T = \frac{1}{2} q_{im} KK_{imjn} q_{jn} - f_{im} q_{im} \quad (4.4.23)$$

Os elementos q_{im} devem ser tais que T seja mínimo. Desta forma, derivando T em relação aos q_{im} , obtêm-se

$$KK_{imjn} q_{jn} = f_{im} \quad (4.4.24)$$

que é a expressão das equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas. A matriz KK_{imjn} é a matriz de rigidez do elemento e é importante ressaltar o significado físico do termo genérico: KK_{imjn} é a componente m de força no ponto nodal i devida à componente unitária n de deslocamento no ponto nodal j .

Como exemplo, apresenta-se a matriz de rigidez calculada para o elemento quadrado de lado unitário com espessura $e=1$, módulo de elasticidade $E=1$ e coeficiente de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$, que coincide com a apresentada por Pian [27]

$$\begin{bmatrix}
 .50000 & -.31250 & -.25000 & .06250 & .18750 & .00000 & -.18750 & .00000 \\
 & .50000 & .06250 & -.25000 & .00000 & -.18750 & .00000 & .18750 \\
 & & .50000 & -.31250 & -.18750 & .00000 & .18750 & .00000 \\
 & & & .50000 & .00000 & .18750 & .00000 & -.18750 \\
 & & & & .50000 & .06250 & -.25000 & -.31250 \\
 \text{simétrica} & & & & & .50000 & -.31250 & -.25000 \\
 & & & & & & .50000 & .06250 \\
 & & & & & & & .50000
 \end{bmatrix}$$

4.4.4 - Modelo conforme derivado do modelo compatível. Segunda possibilidade

Considerem-se os campos admissíveis de deslocamentos definidos por:

$$u_m = N_i q_{im} + N_5 g_{5m} \quad (4.4.25)$$

$$(m=1,2); (i=1,2,3,4); (im=i+4m-4) \quad (5m=8+m)$$

onde

$$N_i = .25 (1+y_{i1} y_1)(1+y_{i2} y_2) \quad (4.4.26)$$

e

$$N_5 = (1+y_1)(1+y_2)(1-y_1)(1-y_2) \quad (4.4.27)$$

são funções de forma, correspondentes aos modos elementares contínuos, q_{im} são os deslocamentos generalizados e g_{5m} são parâmetros generalizados, podendo ser interpretados como as componentes do deslocamento do ponto ($y_1=0, y_2=0$). Apresentam-se, na figura 4.3, os deslocamentos e parâmetros generalizados e a função de forma N_5 . As funções de forma N_i (com $i=1,2,3,4$) estão representadas na figura 4.2.

Fig. 4.3 - Deslocamentos e parâmetros generalizados. Função de forma N_5 .

O elemento assim definido é subparamétrico, ou seja, o número de parâmetros que definem a geometria é menor que o número de parâmetros que definem os campos admissíveis. Entretanto a variação dos deslocamentos no contorno continua linear, o que garante a conformidade entre os elementos.

Considerem-se agora as derivadas parciais dos deslocamentos u_m em relação a x_p

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_p} = \frac{\partial u_m}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_p} \quad (m=1,2); (k=1,2); (p=1,2) \quad (4.4.28)$$

ou, em virtude de (4.4.25) e (4.4.6),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial x_p} &= \frac{\partial N_i}{\partial y_k} y_{kp} q_{im} + \frac{\partial N_5}{\partial y_k} y_{kp} g_{5m} = \\ &= A_{ip} q_{im} + A_{5p} g_{5m} \end{aligned} \quad (4.4.29)$$

onde

$$\frac{\partial N_i}{\partial y_k} = .25 (1 + y_{i,3-k} y_{3-k}) y_{ik} \quad (4.4.30)$$

$$(i=1,2,3,4); (k=1,2)$$

$$\frac{\partial N_5}{\partial y_k} = -2 y_k (1 - y_{3-k}^2) \quad (4.4.31)$$

$$(k=1,2)$$

Por intermédio de (4.4.29), obtêm-se facilmente a expressão das deformações em termos dos deslocamentos e parâmetros generalizados

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial u_m}{\partial x_p} \delta_{pm} \\ \frac{\partial u_m}{\partial x_2} \delta_{m1} + \frac{\partial u_m}{\partial x_1} \delta_{m2} \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} A_{ip} \delta_{pm} & A_{5p} \delta_{pm} \\ A_{i,3-m} & A_{5,3-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{im} \\ g_{5m} \end{bmatrix} \quad \begin{matrix} (p=1,2); (m=1,2); (i=1,2,3,4) \\ (im=i+4m-4); (5m=8+m) \end{matrix} \end{aligned} \quad (4.4.32)$$

Como se admitiu linear a relação entre tensões a deformações torna-se imediato escrever a expressão das tensões em termos dos deslocamentos a parâmetros generalizados

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{pr} A_{jr} \delta_{rn} + H_{p3} A_{j,3-n} \\ H_{3r} A_{jr} \delta_{rn} + H_{33} A_{j,3-n} \end{bmatrix} \quad (4.4.33)$$

$$\begin{bmatrix} H_{pr} A_{5r} \delta_{rn} + H_{p3} A_{5,3-n} \\ H_{3r} A_{5r} \delta_{rn} + H_{33} A_{5,3-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{5n} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pjn} & S_{p5n} \\ S_{3jn} & S_{35n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{5n} \end{bmatrix} \quad (4.4.34)$$

$$\begin{aligned} (p=1,2); (n=1,2); (r=1,2) \\ (j=1,2,3,4); (jn=j+4n-4) \\ (5n=8+n) \end{aligned}$$

A energia de deformação do elemento $\bar{e}$ dada então por

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_{im} \\ g_{5m} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} K_{imjn} & K_{im5n} \\ K_{5mjn} & K_{5m5n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{5n} \end{bmatrix} \quad (4.4.35)$$

$$(i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4); (5m=8+m)$$

$$(j=1,2,3,4); (m=1,2); (jn=j+4n-4); (8n=8+n)$$

onde

$$K_{km\ell n} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_{km} S_{m\ell n} + A_{k,3-m} S_{3\ell n}) e^{\Delta} dy_1 dy_2 \quad (4.4.36)$$

$$(k=1,2,3,4,5); (m=1,2)$$

$$(km=k+4m-4 \text{ para } k=1,2,3,4 \text{ e } km=8+m \text{ para } k=5)$$

$$(\ell=1,2,3,4,5); (n=1,2)$$

$$(\ell n=\ell-4n-4 \text{ para } \ell=1,2,3,4 \text{ e } \ell n=8+n \text{ para } \ell=5)$$

Admitindo-se apenas a existência de forças de massa, a energia potencial das forças externas é dada por

$$P = f_{im} q_{im} \quad (i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4) \quad (4.4.37)$$

onde

$$f_{im} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{x}_n \alpha_{nim} (y_1, y_2) e^{\Delta} dy_1 dy_2 \quad (4.4.38)$$

Substituindo (4.4.35) e (4.4.37) em (4.2.8) obtêm-se a energia potencial total em termos dos deslocamentos e parâmetros generalizados

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_{im} \\ g_{5m} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} K_{imjn} & K_{im5n} \\ K_{5mjn} & K_{5m5n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{5n} \end{bmatrix} - f_{im} q_{im} \quad (4.4.39)$$

Os elementos q_{im} e g_{5m} devem ser tais que T seja mínimo. Dessa forma derivando T em relação aos q_{im} e g_{5m} , obtêm-se, respectivamente

$$K_{imjn} q_{jn} + K_{im5n} g_{5n} = f_{im} \quad (4.4.40)$$

$$K_{5mjn} q_{jn} + K_{5m5n} g_{5n} = 0 \quad (4.4.41)$$

Decorre imediatamente de (4.4.41) a expressão dos parâmetros generalizados em termos dos deslocamentos generalizados

$$g_{5n} = -F_{5n5m} K_{5mip} q_{ip} \quad (4.4.42)$$

$$(n=1,2); (5n=8+n)$$

$$(m=1,2); (5m=8+m)$$

$$(p=1,2); (i=1,2,3,4); (ip=i+4p-4)$$

onde

$$F_{5n5m} = (K_{5m5n})^{-1} \quad (4.4.43)$$

Substituindo (4.4.42) em (4.4.25) e (4.4.40) estabelecem-se, respectivamente, os campos admissíveis de deslocamentos, função exclusiva dos deslocamentos generalizados

$$u_m = (N_i \delta_{mn} - N_5 F_{5m5p} K_{5pin}) q_{in} = \alpha_{min} q_{in} \quad (4.4.44)$$

$$(m=1,2); (n=1,2); (i=1,2,3,4); (in=i+4n-4)$$

$$(p=1,2); (5p=8+p)$$

e a expressão das equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas

$$KK_{imjn} q_{jn} = q_{im} \quad (4.4.45)$$

onde

$$KK_{imjn} = K_{imjn} - K_{im5p} F_{5p5r} K_{5rjn} \quad (4.4.46)$$

$$(i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4)$$

$$(j=1,2,3,4); (n=1,2); (jn=j+4n-4)$$

$$(p=1,2); (5p=8+p)$$

$$(r=1,2); (5r=8+r)$$

Como exemplo, apresenta-se a matriz de rigidez calculada para o elemento quadrado de lado unitário com espessura $e=1$, módulo de elasticidade $E=1$ e coeficiente de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$, que também coincide com a apresentada por Pian [27]

$$\begin{bmatrix} .47396 & -.28646 & -.27604 & .08854 & .18750 & .00000 & -.18750 & .00000 \\ & .47396 & .08854 & -.27604 & .00000 & -.18750 & .00000 & .18750 \\ & & .47396 & -.28646 & -.18750 & .00000 & .18750 & .00000 \\ & & & .47396 & .00000 & .18750 & .00000 & -.18750 \\ & & & & .47396 & .08854 & -.27604 & -.28646 \\ & \text{simétrica} & & & & .47396 & -.28646 & -.27604 \\ & & & & & & .47396 & .08854 \\ & & & & & & & .47396 \end{bmatrix}$$

4.40

4.4.5 - Modelo não conforme derivado do modelo compatível

Considerem-se os campos admissíveis de deslocamentos definidos por

$$u_m = N_i q_{im} + N_k g_{km} \quad (4.4.47)$$

$$(m=1,2); (i=1,2,3,4); (im=i+4m-4)$$

$$(k=5,6,7,8); (km=k+4m)$$

onde

$$N_i = .25(1+y_{i1} y_1)(1+y_{i2} y_2)(y_{i1}y_1+y_{i2} y_2-1) \quad (4.4.48)$$

$$N_k = .5(1-y_{3-p}^2)(1+y_{kp} y_p) y_{kp}^2 \quad (p=1,2) \quad (4.4.49)$$

são funções de forma, correspondentes aos modos elementares contínuos, q_{im} são os deslocamentos generalizados e g_{km} são parâmetros generalizados, podendo ser interpretados como as componentes dos deslocamentos dos pontos médios dos lados. Apresentam-se na figura 4.4, os deslocamentos e parâmetros generalizados e a função de forma N_7 . As funções de forma N_i (com $i=1,2,3,4$) estão representadas na figura 4.2 e as funções de N_k (com $k=5,6,8$) apresentam representação gráfica semelhante à de N_7 .

Fig. 4.4 - Deslocamentos e parâmetros generalizados. Função de forma N_7 .

O elemento assim definido é subparamétrico. A variação dos deslocamentos no contorno é quadrática e dessa forma não se garante mais a conformidade entre elementos.

Considerem-se agora as derivadas parciais dos deslocamentos u_m em relação a x_p

$$\frac{\partial u_m}{\partial x_p} = \frac{\partial u_m}{\partial y_s} \frac{\partial y_s}{\partial x_p} \quad (m=1,2); \quad (s=1,2); \quad (p=1,2) \quad (4.4.50)$$

ou, em virtude de (4.4.47),

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_m}{\partial x_p} &= Y_{sp} \left(\frac{\partial N_i}{\partial y_s} q_{im} + \frac{\partial N_k}{\partial y_s} g_{km} \right) = \\ &= A_{ip} q_{im} + A_{kp} g_{km} \end{aligned} \quad (4.4.51)$$

onde

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_i}{\partial y_s} &= .25 (1 + y_{i,3-s} y_{3-s}) y_{is} (2 y_{is} y_s + \\ &+ y_{i,3-s} y_{3-s}) \end{aligned} \quad (4.4.52)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_k}{\partial y_s} &= .5 y^3_{ks} (1 - y^2_{3-s}) - \\ &- y^2_{k,3-s} (y_s + y_{k,3-s} y_1 y_2) \end{aligned} \quad (4.4.53)$$

$$(i=1,2,3,4); \quad (k=5,6,7,8); \quad (s=1,2)$$

Por intermédio de (4.4.51), obtêm-se facilmente a expressão das deformações em termos dos deslocamentos e parâmetros generalizados

$$\begin{bmatrix} \epsilon_p \\ \gamma_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{ip} \delta_{pm} & A_{kp} \delta_{pm} \\ A_{i,3-m} & A_{k,3-m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{im} \\ g_{km} \end{bmatrix} \quad (4.4.54)$$

$$\begin{aligned} (p=1,2), \\ (i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4) \\ (k=5,6,7,8); (m=1,2); (km=k+4m) \end{aligned}$$

Como se admitiu, linear a relação entre tensões e deformações, torna-se imediato escrever a expressão das tensões em termos dos deslocamentos e parâmetros generalizados

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{pr} A_{jr} \delta_{rn} + H_{p3} A_{j,3-n} \\ H_{3r} A_{jr} \delta_{rn} + H_{33} A_{j,3-n} \end{bmatrix} \quad (4.4.55)$$

$$\begin{bmatrix} H_{pr} A_{\ell r} \delta_{rn} + H_{p3} A_{\ell,3-n} \\ H_{3r} A_{\ell r} \delta_{rn} + H_{33} A_{\ell,3-n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{\ell n} \end{bmatrix}$$

ou

$$\begin{bmatrix} \sigma_p \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{pjn} & S_{p\ell n} \\ S_{3jn} & S_{3\ell n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{\ell n} \end{bmatrix} \quad (4.4.56)$$

$$(p=1,2)$$

$$(j=1,2,3,4); (n=1,2); (jn=j+4n-4)$$

$$(\ell=5,6,7,8); (n=1,2); (\ell n=\ell+4n)$$

A energia de deformação do elemento é dada então por

$$U = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_{im} \\ g_{km} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} K_{imjn} & K_{im\ell n} \\ K_{kmjn} & K_{km\ell n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{\ell n} \end{bmatrix} \quad (4.4.57)$$

onde

$$K_{pmrn} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 (A_{pm} S_{mrn} + \quad (4.4.58)$$

$$+ A_{p,3-m} S_{3rn}) e \Delta dy_1 dy_2$$

$$(m=1,2); (n=1,2,\dots,8); (n=1,2); (r=1,2,\dots,8)$$

$$(pm=p+4m-4 \text{ para } p=1,2,3,4 \text{ e } pm=p+4m \text{ para } p=5,6,7,8)$$

$$(rn=r+4n-4 \text{ para } r=1,2,3,4 \text{ e } rn=r+4n \text{ para } r=5,6,7,8)$$

Admitindo-se apenas a existência de forças de massa, a energia potencial das forças externas é dada por

$$P = f_{im} q_{im} \quad (i=1,2,3,4); (m=1,2) \quad (4.4.59)$$

$$(im=i+4m-4)$$

onde

$$f_{im} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \bar{x}_n \alpha_{nim} (y_1, y_2) e \Delta dy_1 dy_2 \quad (4.4.60)$$

Substituindo (4.4.57) e (4.4.59) em (4.2.8) obtêm-se a energia potencial total em termos dos deslocamentos e parâmetros generalizados

$$T = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} q_{im} \\ g_{km} \end{bmatrix}^t \begin{bmatrix} K_{imjn} & K_{im\ell n} \\ K_{kmjn} & K_{km\ell n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} q_{jn} \\ g_{\ell n} \end{bmatrix} - f_{im} q_{im} \quad (4.4.61)$$

Os elementos q_{im} e g_{km} devem ser tais que T seja mínimo. Dessa forma, derivando T em relação aos q_{im} e g_{km} , obtêm-se, respectivamente

$$K_{imjn} q_{jn} + K_{im\ell n} g_{\ell n} = f_{im} \quad (4.4.62)$$

$$K_{kmjn} q_{jn} + K_{km\ell n} g_{\ell n} = 0 \quad (4.4.63)$$

Decorre imediatamente de (4.4.63) a expressão dos parâmetros generalizados em termos dos deslocamentos generalizados

$$g_{\ell n} = -F_{\ell nkm} K_{kmip} q_{ip} \quad (4.4.64)$$

$$(k=5,6,7,8); (m=1,2); (km=k+4m)$$

$$(\ell=5,6,7,8); (n=1,2); (\ell m=\ell+4n)$$

$$(i=1,2,3,4); (p=1,2); (ip=i+4p-4)$$

onde

$$F_{\ell nkm} = (K_{km\ell n})^{-1} \quad (4.4.65)$$

Substituindo (4.4.64) em (4.4.47) e (4.4.62) estabelecem-se, respectivamente, os campos admissíveis de deslocamentos função exclusiva dos deslocamentos generalizados

$$u_m = (N_i \delta_{pm} - N_k F_{km\ell n} K_{\ell n ip}) q_{ip} = \alpha_{mip} q_{ip} \quad (4.4.66)$$

$$(i=1,2,3,4); (p=1,2); (ip=i+4p-4)$$

$$(k=5,6,7,8); (m=1,2); (km=k+4m)$$

$$(\ell=5,6,7,8); (n=1,2); (\ell n=\ell+4n)$$

e a expressão das equações de equilíbrio envolvendo deslocamentos e forças generalizadas

$$KK_{imjn} q_{jn} = f_{im} \quad (4.4.67)$$

onde

$$KK_{imjn} = K_{imjn} - K_{im\ell r} F_{\ell r kp} K_{kpjn} \quad (4.4.68)$$

$$(i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4)$$

$$(j=1,2,3,4); (n=1,2); (jn=j+4n-4)$$

$$(\ell=5,6,7,8); (r=1,2); (\ell r=\ell+4r)$$

$$(k=5,6,7,8); (p=1,2); (kp=k+4p)$$

Como exemplo, apresenta-se a matriz de rigidez calculada para o elemento quadrado de lado unitário com espessura $e=1$, módulo de elasticidade $E=1$ e coeficiente de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$

$$\begin{bmatrix}
 .24234 & -.11532 & -.07567 & -.05134 & .11574 & -.01128 & -.11574 & .01128 \\
 & .24234 & -.05134 & -.07567 & .01128 & -.11574 & -.01128 & .11574 \\
 & & .24234 & -.11532 & -.11574 & .01128 & .11574 & -.01128 \\
 & & & .24234 & -.01128 & .11574 & .01128 & -.11574 \\
 & & & & .24234 & -.05134 & -.07567 & -.11532 \\
 & \text{simétrica} & & & & .24234 & -.11532 & -.07567 \\
 & & & & & & .24234 & -.05134 \\
 & & & & & & & .24234
 \end{bmatrix}$$

4.4.6 - Modelo conforme derivado do modelo híbrido em tensões

Considerem-se os campos admissíveis de tensões, que equilibram forças de massa nulas, definidos por

$$\begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \tau_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & N_i x_{i2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & N_i x_{i1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \beta_3 \\ \beta_4 \\ \beta_5 \end{bmatrix} \quad (4.4.69)$$

onde β_i são as tensões generalizadas e

$$N_i = .25(1+y_{i1} y_1) (1+y_{i2} y_2) \quad (i=1,2,3,4) \quad (4.4.70)$$

são funções de forma lineares. A expressão (4.4.69) pode ser, escrita na forma reduzida

$$\sigma_r = P_{rk} \beta_k \quad (r=1,2,3); \quad (k=1,2,\dots,5) \quad (4.4.71)$$

No contorno do elemento impõe-se que a variação dos deslocamentos seja linear, dada por

$$u_m = N_i q_{im} \quad (i=1,2,3,4); \quad (m=1,2); \quad (im=i+4m-4) \quad (4.4.72)$$

onde q_{im} são os deslocamentos generalizados, indicados na figura 4.2. Dessa forma garante-se a conformidade entre elementos.

Como se admitiu linear a relação entre tensões e deformações torna-se imediato escrever a expressão das deformações em termos das tensões generalizadas

$$\epsilon_r = H_{rs}^{-1} P_{s\ell} \beta_\ell \quad (r=1,2,3); \quad (s=1,2,3); \quad (\ell=1,2,3,4,5) \quad (4.4.73)$$

ou

$$\epsilon_r = R_{r\ell} \beta_\ell \quad (4.4.74)$$

A energia de deformação complementar do elemento é dada então por

$$U^* = \frac{1}{2} \beta_k K_{k\ell} \beta_\ell \quad (k,\ell=1,2,\dots,5) \quad (4.4.75)$$

onde

$$K_{k\ell} = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 P_{rk} R_{r\ell} e \Delta dy_1 dy_2 \quad (r=1,2,3) \quad (4.4.76)$$

Pode-se demonstrar facilmente que as forças no contorno do elemento, que equilibram os campos admissíveis de tensões, são expressas por

$$p_m = \frac{1}{\Delta} S_{mk} \beta_k \quad (m=1,2); \quad (k=1,2,\dots, 5) \quad (4.4.77)$$

ou, em forma expandida, para o lado $y_s=3-2q$ (com $s=1,2$ e $q=1,2$)

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{21} \\ S_{12} & S_{22} \\ S_{13} & S_{23} \\ S_{14} & S_{24} \\ S_{15} & S_{25} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a J_{2,3-s} & 0 \\ a J_{2,3-s} N_i x_{i2} & 0 \\ 0 & -a J_{1,3-s} \\ 0 & -a J_{1,3-s} N_i x_{i1} \\ -a J_{1,3-s} & a J_{2,3-s} \end{bmatrix}$$

onde

$$a = (3-2s)(3-2q) \quad (4.4.79)$$

$$N_i = .25 (1 + (3-2q) y_{is})(1 + y_{i,3-s} y_{3-s}) \quad (4.4.80)$$

($i=1,2,3,4$)

$$J_{m,3-s} = .25 (1 + (3-2q) y_{is}) y_{i,3-s} x_{im} \quad (4.4.81)$$

($m=1,2$); ($i=1,2,3,4$)

$$\Delta = \sqrt{J_{1,3-s}^2 + J_{2,3-s}^2} \quad (4.4.82)$$

Como os deslocamentos no contorno do elemento são fixados através de (4.4.72), a energia potencial complementar das forças externas é dada por

$$P^* = -\beta_k T_{k,im} q_{im} \quad (4.4.83)$$

onde

$$T_{k,im} = \sum_{s=1}^2 \sum_{q=1}^2 \left\{ \int_{-1}^1 S_{mk} N_i e \, dy_{3-s} \right\} \quad (4.4.84)$$

Substituindo (4.4.75) e (4.4.83) em (3.2.35) obtêm-se a energia potencial complementar total em termos das tensões e deslocamentos generalizados

$$T^* = \frac{1}{2} \beta_k K_{k\ell} \beta_\ell - \beta_k T_{k,im} q_{im} \quad (4.4.85)$$

Os elementos β_k devem ser tais que T^* seja mínimo. Dessa forma derivando T^* em relação aos β_k obtêm-se

$$K_{k\ell} \beta_\ell - T_{k,im} q_{im} = 0 \quad (4.4.86)$$

que permite estabelecer imediatamente a expressão das tensões generalizadas em termos dos deslocamentos generalizados

$$\beta_\ell = F_{\ell k} T_{k,im} q_{im} \quad (\ell=1,2,\dots,5); (k=1,2,\dots,5) \quad (4.4.87) \\ (i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4)$$

onde

$$F_{\ell k} = K_{k\ell}^{-1} \quad (4.4.88)$$

A energia de deformação complementar do elemento pode então ser expressa em termos dos deslocamentos generalizados

$$U^* = \frac{1}{2} q_{jn} (T_{s,jn} F_{\ell s} K_{k\ell} F_{kt} T_{t,im}) q_{im} \quad (4.4.89)$$

Tendo em vista que o material é elástico linear a energia de deformação do elemento é igual a energia de deformação complementar. Dessa forma, por analogia com os casos anteriores, pode-se estabelecer diretamente a expressão das equações de equilíbrio envolvendo forças e deslocamentos generalizados

$$KK_{imjn} q_{jn} = f_{im} \quad (4.4.90)$$

onde

$$KK_{imjn} = T_{s,jn} F_{\ell s} K_{k\ell} F_{kt} T_{t,im} \quad (4.4.91)$$

$$\begin{aligned} (i=1,2,3,4); (m=1,2); (im=i+4m-4) \\ (j=1,2,3,4); (n=1,2); (jn=j+4n-4) \\ (s=1,2,\dots,5); (t=1,2,\dots,5) \\ (k=1,2,\dots,5); (\ell=1,2,\dots,5) \end{aligned}$$

é a matriz de rigidez do elemento.

Como exemplo, apresenta-se a matriz de rigidez calculada para o elemento quadrado de lado unitário como espessura $e=1$, módulo de elasticidade $E=1$ e coeficiente de Poisson $\nu = \frac{1}{3}$, que coincide com a apresentada por Pian [27]

.45833	-.27083	-.29167	.10417	.18750	.00000	-.18750	.00000
	.45833	.10417	-.29167	.00000	-.18750	.00000	.18750
		.45833	-.27083	-.18750	.00000	.18750	.00000
			.45833	.00000	.18750	.00000	-.18750
				.45833	.10417	-.29167	-.27083
simétrica					.45833	-.27083	-.29167
						.45833	.10417
							.45833

BIBLIOGRAFIA

- |¹| Araujo, F.C. de
Elasticidade e plasticidade
Porto, edição do autor, 1962

- |²| Argyris, J.H.
Energy Theorems and structural analysis
London, Butterworths, 1960

- |³| Brebbia, C.A., Connor, J.J.
Fundamentals of finite elements techniques
London, Butterworths, 1973

- |⁴| Fung, Y.C.
Foundations of solid mechanics
New Delhi, Prentice-Hall of India, 1968

- |⁵| Gelf'and, I.M.
Lectures on linear algebra
New York, Interscience Publisher, 1961

- |⁶| Hansteen, O.E.
Finite element methods as applications of variational principles
Norway, Tapir, 1970

- |⁷| Irons, B.M., Oliveira, E.R.A., Zienkiewicz, O.C.
Comments on the paper: Theorethical foundations of the finite element methods
IJSS, vol. 6, pg. 695-697, 1970

- [⁸] Kachanov, L.M.
Foundations of the theory of plasticity
- [⁹] Langendonck, T.van
Tensões
Rio de Janeiro, Cientifica, 1956
- [¹⁰] Langendonck, T.van
Deformações
Rio de Janeiro, Cientifica, 1960
- [¹¹] Lekhnitskii, S.G.
Theory of elasticity of an anisotropic elastic body
San Francisco, Holden-Day, 1963
- [¹²] Oden, J.T.
Mechanics of elastic structures
New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1967
- [¹³] Oliveira, E.R.A.
Introdução à teoria das estruturas de comportamento linear
Lisboa, edição do autor, 1966
- [¹⁴] Oliveira, E.R.A.
Formulações básicas do método dos elementos finitos
Lisboa, LNEC - memória nº 326, 1969
- [¹⁵] Oliveira, E.R.A.
Completeness and convergence in the finite element method
Lisboa, LNEC - memória nº 373, 1971

- |¹⁶| Oliveira, E.R.A.
Lectures. (Nato advanced study institute on finite
element methods in continuum mechanics)
Lisbon, LNEC, 1971
- |¹⁷| Oliveira, E.R.A.
The convergence theorems and their role in the theory
of structures
Liège, Université de Liège (IUTAM Symposium), 1971
- |¹⁸| Oliveira, E.R.A.
Foundations of the theory of structures
Lisbon, LNEC - course 134, 1972
- |¹⁹| Oliveira, E.R.A., Tavares, A.S.M.
Quatro anos de atividades na mecanica estrutural
Lourenço Marques, 3as. Jornadas Luso-Brasileiras, 1972
- |²⁰| Oliveira, E.R.A.
Advanced theory of structures
Lisbon, International course on structural concrete,
CEB-LNEC, 1973
- |²¹| Pedro, J.O.
Dimensionamento de barragens de betão pelo método dos
elementos finitos
Lisboa, LNEC (tese para especialista), 1967
- |²²| Pedro, J.O.
Cálculo de estruturas laminares e maciças pelo método
dos elementos finitos
Lisboa, LNEC - curso 127, 1973
- |²³| Pedro, J.O., Miranda, M.P.
Estudo de equilíbrios planos em estruturas laminares e
maciças pelo método dos elementos finitos,
Lisboa, LNEC (edição interna), 1973

- |²⁴| Pedro, J.O.
Finite element stress analysis of plates, shells and massive structures
Lisbon, International course on structural concrete, CEB-LNEC, 1973
- |²⁵| Pedro, J.O., Andr, J.C.
Elementos finitos para estudos de cascas derivados de elementos tridimensionais parablicos
Lisboa, LNEC (edio interna), 1974
- |²⁶| Pedro, J.O.
Estudo das deformaes de um cilindro plstico colocado no interior de um macio rochoso
Lisboa, LNEC (edio interna), 1974
- |²⁷| Pian, T.H.H.
Derivation of element stiffness matrices by assumed stress distribution
AIAA Journal, vol. 2, Julho, 1964
- |²⁸| Pian, T.H.H.
Derivation of element stiffness matrices
AIAA Journal, vol. 2, maro, 1964
- |²⁹| Pian, T.H.H.
Hybrid models
New York, London, Academic Press, 1973
- |³⁰| Prager, W.
The extremum principles of the mathematical theory of elasticity and their use in stress analysis
Seattle, University of Washington Press, Bulletin n 119, 1951

- |³¹| Przemieniecki, J.S.
Theory of matrix structural analysis
New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1968
- |³²| Sokolnikoff, I.S.
Mathematical theory of elasticity
New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1956
- |³³| Timoshenko, S., Goodier, J.N.
Theory of elasticity
New York, Toronto, London, McGraw-Hill, 1951
- |³⁴| Washizu, K.
Variational methods in elasticity and plasticity
London, Pergamon Press, 1968
- |³⁵| Veubecke, B.F. de
Lectures (Nato advanced study institute on finite
element methods in continuum mechanics)
Lisbon, LNEC, 1971
- |³⁶| Wilson, E.L., Taylor, R.L., Doherty, W.P., Ghaboussi, J.
Incompatible displacement models
New York, London, Academic Press, 1973
- |³⁷| Vocabulário da teoria das estruturas
São Paulo, Associação Brasileira de Cimento Portland,
1967
- |³⁸| Zagottis, D.L.
Conceituação do método dos elementos Finitos
São Paulo, edição do autor, 1974

- |³⁹| Zienkiewicz, O.C., Irons, B.M., Ahmad, S.
Analysis of thick and thin shells structures by curved
finite elements
IJNME, vol. 2, pg. 419-451, 1970
- |⁴⁰| Zienkiewicz, O.C.
The finite element method in engineering science
London, McGraw-Hill, 1971