Adriane Costa

Identificação de parâmetros em obras civis

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Doutor em Engenharia.

São Paulo

2006

Adriane Costa

Identificação de parâmetros em obras civis

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:

Engenharia de Estruturas

Orientador:

João Cyro André

São Paulo

2006

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de junho de 2006.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Costa, Adriane

Identificação de parâmetros em obras civis. – ed.
rev. – São Paulo, 2006.

240p.

Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo. Departamento de
Engenharia de Estruturas e Fundações.

1. Identificação de parâmetros 2. Retroanálise I.
Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Estruturas e
Fundações II. t

ao meu marido Christian

Agradecimentos

A Deus, pela vida e pela oportunidade de realizar este trabalho com saúde.

Ao meu marido Christian, por sempre ter estado ao meu lado, por seu auxílio constante, pela atenção, incentivo, compreensão, amor e carinho.

Aos meus pais, que sempre me incentivaram e me dão o apoio indispensável para minhas realizações.

Ao professor João Cyro André, pela orientação deste trabalho, pelo estímulo, incentivo, amizade e confiança em mim depositada.

Aos professores Waldemar Hachich, Luiz Eloy Vaz, Edgar Sant'Anna Almeida Neto e Arsênio Negro pela preciosa colaboração durante o desenvolvimento do trabalho.

Ao engenheiro Márcio Goulart pelo trabalho em conjunto, pelas sugestões e pelos dados e informações necessárias para este trabalho.

Aos amigos do LMC (Laboratório de Mecânica Computacional) e do PEF (Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações), pelo apoio e companheirismo sempre demonstrados.

À Marly Coimbra, pela boa vontade, disposição e auxílio em todas as questões administrativas que surgiram ao longo deste trabalho.

Ao LMC, pela instalação e equipamentos a mim disponibilizados.

A CAPES, pela bolsa de estudo concedida.

À Embraer (Empresa Brasileira de Aeronáutica S.A.), por ter proporcionado a conciliação das atividades desenvolvidas na empresa com o desenvolvimento desta tese.

A todos aqueles que contribuíram para este trabalho.

Sumário

Lista de figuras

Lista de tabelas

Lista dos principais símbolos

Resumo

Abstract

Capítulo 1	Introdução	1
1.1	Objetivos e estrutura da tese	5
Capítulo 2	Identificação de Sistemas.....	8
2.1	Critérios de identificação	11
2.1.1	Retroanálise bayesiana.....	13
2.2	Minimização de funções.....	15
2.2.1	Algoritmos de minimização.....	17
2.2.1.1	Métodos do tipo Newton.....	18
2.3	Utilização do método dos elementos finitos no processo de identificação de parâmetros.....	25
2.4	Procedimento desenvolvido	29
2.5	Análise dos resultados	31
Capítulo 3	Problema de Referência	38
3.1	Caso 1.....	40
3.1.1	Critério dos mínimos quadrados	44
3.1.1.1	Obtenção gráfica do mínimo	46
3.1.2	Critério da máxima verossimilhança	48

3.1.2.1	Obtenção gráfica do mínimo	50
3.1.3	Influência do número de medidas.....	51
3.1.3.1	Obtenção gráfica do mínimo	53
3.1.4	Influência do valor inicial dos parâmetros	55
3.1.4.1	Obtenção gráfica do mínimo	58
3.1.5	Análise dos resultados.....	58
3.2	Caso 2.....	65
3.2.1	Obtenção gráfica do mínimo	68
3.2.2	Análise dos resultados.....	70
3.3	Caso 3.....	72
3.3.1	Obtenção gráfica do mínimo	73
3.3.2	Análise dos resultados.....	75
3.4	Caso 4.....	77
3.4.1	Obtenção gráfica do mínimo	79
3.4.2	Análise dos resultados.....	81
3.5	Caso 5.....	83
3.5.1	Obtenção gráfica do mínimo	87
3.5.2	Análise dos resultados.....	89
3.6	Observações finais	91
Capítulo 4	Túnel Hudvudsta	93
4.1	Deslocamentos medidos.....	95
4.2	Modelo matemático 1	96
4.3	Modelo matemático 2.....	99

4.4	Identificação de parâmetros com o modelo matemático 1	
(Caso 1)		101
4.5	Identificação de parâmetros com o modelo matemático 2	
(Caso 2)		105
4.6	Identificação de parâmetros com o modelo matemático 2	
(Caso 3)		112
4.6.1	Identificação simultânea dos parâmetros	112
4.6.2	Identificação isolada dos parâmetros.....	123
4.7	Análise dos resultados	126
Capítulo 5	Barragem de Machadinho.....	129
5.1	Descrição da obra estudada.....	133
5.2	Modelo linear de viga	138
5.3	Modelo bidimensional.....	145
5.4	Modelo linear de viga sobre apoio elástico	152
5.5	Modelo não-linear de viga	157
5.6	Resultados	162
5.7	Verificação estrutural das lajes	168
5.8	Projeto de instrumentação.....	170
5.9	Análise dos resultados	171
Capítulo 6	Observações finais.....	173
Bibliografia		179
Anexos		189
	Anexo A – Problema de referência	191

A1 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando 12 medidas (Caso 1)	191
A2 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Levenberg-Marquardt, considerando 12 medidas (Caso 1)	195
A3 – Rotina desenvolvida utilizando o critério da máxima verossimilhança com o método de Gauss-Newton, considerando 12 medidas e que as medidas verticais têm maior variância (Caso 1)	199
Anexo B – Túnel Hudvudsta.....	203
B1 – Rotina desenvolvida utilizando o critério da máxima verossimilhança com a condição de primeira ordem (Caso 2).....	203
B2 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Newton-Raphson (Caso 3)	206
Anexo C – Barragem de Machadinho.....	210
C1 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo linear de viga.....	210
C2 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo bidimensional.....	214
C3 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo linear de viga sobre apoio elástico	217

C4 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo não-linear de viga.....	237
--	-----

Lista de Figuras

Figura 1.1 – Viga bi-apoiada	2
Figura 1.2 – Análise e retroanálise	3
Figura 2.1 – Abordagem direta para identificação de parâmetros	10
Figura 2.2 – Processo iterativo	10
Figura 2.3 – Procedimento desenvolvido	30
Figura 3.1 – Características do maciço	39
Figura 3.2 – Geometria, condições de contorno e parâmetros físicos do problema de referência	39
Figura 3.3 – Malha de elementos finitos com a localização das 12 medidas consideradas	40
Figura 3.4 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados no caso 1	48
Figura 3.5 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério da máxima verossimilhança no caso 1	51
Figura 3.6 – Malha de elementos finitos com a localização das 24 medidas consideradas	52
Figura 3.7 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 1	54
Figura 3.8 – Variação do parâmetro E com as iterações	56
Figura 3.9 – Variação do parâmetro K_0 com as iterações	56
Figura 3.10 – Coeficientes de sensibilidade em relação a E calculados com os diferentes valores iniciais	57

Figura 3.11 – Coeficientes de sensibilidade em relação a K_0 calculados com os diferentes valores iniciais.....	57
Figura 3.12 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados no caso 1, com os pares de valores iniciais dos parâmetros	58
Figura 3.13 – Coeficientes de sensibilidade.....	60
Figura 3.14 – Malha refinada para se obter os deslocamentos medidos.....	65
Figura 3.15 – Malha 3 de elementos finitos.....	67
Figura 3.16 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 2.....	69
Figura 3.17 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 3.....	74
Figura 3.18 – Localização das 2 medidas semelhante à do túnel Hudvudsta..	78
Figura 3.19 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados nos casos 3 e 4.....	80
Figura 3.20 – Características do maciço heterogêneo.....	83
Figura 3.21 – Modelo de elementos finitos considerando uma região com um módulo de elasticidade menor.....	84
Figura 3.22 – Coeficientes de sensibilidade.....	87
Figura 3.23 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 5.....	88
Figura 4.1– Geometria do túnel e deslocamentos medidos.....	96
Figura 4.2 – Seção transversal generalizada.....	97
Figura 4.3 – Forma do túnel considerada no modelo matemático.....	99
Figura 4.4 – Carregamento no contorno	100

Figura 4.5 – Malha de elementos finitos utilizada	100
Figura 4.6 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados para o modelo matemático 1	102
Figura 4.7 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança para o modelo matemático 1	102
Figura 4.8 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para o modelo matemático 1	103
Figura 4.9 – Representação da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados para o modelo matemático 2	107
Figura 4.10 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados para o modelo matemático 2	107
Figura 4.11 – Representação da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança para o modelo matemático 2	108
Figura 4.12 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança para o modelo matemático 2	108
Figura 4.13 – Representação da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para o modelo matemático 2	109
Figura 4.14 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para o modelo matemático 2	109
Figura 4.15 – Domínio adotado dos valores iniciais dos parâmetros	116
Figura 4.16 – Variação do módulo de elasticidade com as iterações.....	118
Figura 4.17 – Variação do coeficiente K_0 com as iterações	118

Figura 4.18 – Coeficientes de sensibilidade.....	121
Figura 4.19 – Variação do módulo de elasticidade com as iterações.....	125
Figura 4.20 – Variação do coeficiente K_0 com as iterações	125
Figura 5.1 - Componentes de uma BEFC	130
Figura 5.2 - Arranjo geral da Usina Hidrelétrica Machadinho.....	133
Figura 5.3 – Execução da face de concreto da barragem de Machadinho	135
Figura 5.4 – Locação dos eletrónveis na laje 24	136
Figura 5.5 – Modelo linear de viga e rotações medidas na laje 24.....	139
Figura 5.6 – Pressão hidrostática e reação obtida na laje 24 (tf/m)	141
Figura 5.7 – Coeficientes de sensibilidade	144
Figura 5.8 – Materiais considerados no modelo bidimensional.....	146
Figura 5.9 – Modelo bidimensional em elementos finitos na seção transversal da laje 24	148
Figura 5.10 – Estimativas iniciais dos coeficientes de sensibilidade.....	149
Figura 5.11 – Coeficientes de sensibilidade.....	151
Figura 5.12 – Modelo linear de viga sobre apoio elástico da laje 24.....	152
Figura 5.13 – Variação dos coeficientes de mola com as iterações	155
Figura 5.14 – Variação dos coeficientes de mola com as iterações	156
Figura 5.15 – Coeficientes de sensibilidade.....	156
Figura 5.16 – Diagrama momento-curvatura para a seção 4.....	158
Figura 5.17 – Variação dos parâmetros com as iterações com o método de Gauss-Newton	160
Figura 5.18 – Variação dos parâmetros com as iterações com o método de Levenberg-Marquardt	161

Figura 5.19 – Coeficientes de sensibilidade.....	161
Figura 5.20 – Conjunto 1 de curvas das rotações da laje 24.....	163
Figura 5.21 – Conjunto 2 de curvas das rotações da laje 24.....	163
Figura 5.22 – Conjunto 1 de configurações deformadas da laje 24.....	164
Figura 5.23 – Conjunto 2 de configurações deformadas da laje 24.....	165
Figura 5.24 – Conjunto 1 de diagramas de momentos fletores da laje 24....	166
Figura 5.25 – Conjunto 2 de diagramas de momentos fletores da laje 24....	166
Figura 5.26 – Momentos fletores obtidos com o modelo bidimensional resultante do Adina	167
Figura 5.27 – Comparação da armadura existente e calculada.....	169

Lista de Tabelas

Tabela 3.1 – Resultados obtidos no caso 1 com o critério dos mínimos quadrados.....	46
Tabela 3.2 – Resultados obtidos no caso 1 com o critério da máxima verossimilhança.....	50
Tabela 3.3 – Resultados obtidos no caso 1 no estudo da influência do número de medidas	53
Tabela 3.4 – Resultados obtidos no caso 1 no estudo da influência do valor de p_0	55
Tabela 3.5 – Resultados obtidos no caso 1.....	59
Tabela 3.6 – Análise dos resultados obtidos no caso 1	62
Tabela 3.7 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 1	64
Tabela 3.8 – Resultados obtidos no caso 2.....	67
Tabela 3.9 – Análise dos resultados obtidos no caso 2	70
Tabela 3.10 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 2	71
Tabela 3.11 – Resultados obtidos no caso 3	73
Tabela 3.12 – Análise dos resultados obtidos no caso 3	75
Tabela 3.13 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 3	76
Tabela 3.14 – Resultados obtidos no caso 4	79
Tabela 3.15 – Análise dos resultados obtidos nos casos 3 e 4.....	81

Tabela 3.16 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para os casos 3 e 4.....	82
Tabela 3.17 – Resultados obtidos no caso 5	86
Tabela 3.18 – Análise dos resultados obtidos no caso 5	89
Tabela 3.19 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 5	90
Tabela 4.1 - Parâmetros iniciais característicos do maciço	94
Tabela 4.2 – Coeficientes das equações (4.1) a (4.4)	98
Tabela 4.3 – Características geométricas da seção.....	99
Tabela 4.4 – Resultados obtidos no caso1.....	103
Tabela 4.5 – Resultados obtidos no caso 2.....	110
Tabela 4.6 – Influência dos parâmetros estimados a priori no critério da máxima verossimilhança com informação prévia	111
Tabela 4.7 – Resultados obtidos no caso 3 com a identificação simultânea dos parâmetros	117
Tabela 4.8 – Análise dos resultados obtidos no caso 3 com a identificação simultânea dos parâmetros.....	119
Tabela 4.9 - Análise dos resíduos finais para o caso 3 com a identificação simultânea dos parâmetros.....	120
Tabela 4.10 – Resultados obtidos no caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros	124
Tabela 4.11 – Análise dos resultados obtidos no caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros	126
Tabela 4.12 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros	126

Tabela 5.1 – BEFC no Brasil.....	129
Tabela 5.2 – Parâmetros identificados com o modelo linear de viga	141
Tabela 5.3 – Resultados obtidos com o modelo linear de viga em elementos finitos.....	143
Tabela 5.4 - Coeficientes de correlação dos parâmetros estimados com o modelo linear de viga em elementos finitos.....	143
Tabela 5.5 – Características dos materiais.....	146
Tabela 5.6 – Resultados obtidos com o modelo bidimensional.....	150
Tabela 5.7 – Análise dos resultados obtidos com o modelo bidimensional .	150
Tabela 5.8 – Intervalo de confiança do parâmetro estimado e análise dos resíduos finais para o modelo bidimensional.....	151
Tabela 5.9 – Valores iniciais dos parâmetros km_i	154
Tabela 5.10 – Resultados obtidos com o modelo linear de viga sobre apoio elástico.....	154
Tabela 5.11 – Coeficientes de correlação dos parâmetros estimados com o modelo linear de viga sobre apoio elástico.....	155
Tabela 5.12 – Resultados obtidos com o modelo não-linear de viga.....	159
Tabela 5.13 – Coeficientes de correlação dos parâmetros estimados com o modelo não-linear de viga	160
Tabela 5.14 – Comparação da armadura existente e da calculada	168
Tabela 5.15 – Comparação da armadura recomendada pelos critérios empíricos e da calculada.....	168

Lista dos principais símbolos

Letras romanas minúsculas

a	vetor dos interceptos (Retroanálise bayesiana)
d	vetor da direção de busca
<i>e</i>	espessura da laje
$h_i(x)$	funções de interpolação cúbica do elemento de viga
km_i	coeficientes de mola
ℓ	comprimento da viga bi-apoiada
<i>m</i>	número de medidas
m'	vetor médio das variáveis de estado (Retroanálise bayesiana)
m_p	vetor das observações previstas (Retroanálise bayesiana)
<i>n</i>	número de variáveis de estado (Retroanálise bayesiana)
<i>n</i>	número de parâmetros
n_H	número de medidas horizontais
n_V	número de medidas verticais
<i>p</i>	número de observações (Retroanálise bayesiana)
p_j^0	parâmetros estimados a priori
p	vetor dos parâmetros
p̄	vetor dos parâmetros que tornam mínima a função
p₀	vetor dos valores iniciais dos parâmetros
p⁰	vetor dos parâmetros estimados a priori

q	carga distribuída
q_i	parâmetros que representam a diferença entre a pressão hidrostática conhecida e a reação a ser determinada
$\bar{r}$	resíduo médio
$r(x)$	função que define os valores da reação obtida em cada elemento
r_{ii}	coeficientes de variação
r_E	coeficiente de variação do módulo de elasticidade
r_{K_0}	coeficiente de variação do coeficiente de empuxo (Capítulo 3)
r_{K_0}	coeficiente de variação do coeficiente K_0 (Capítulo 4)
r_{km_i}	coeficientes de variação dos coeficientes de mola
r_{q_i}	coeficientes de variação dos parâmetros q_i
r_{ij}	coeficientes de correlação
r_{km_i, km_j}	coeficientes de correlação dos coeficientes de mola
r_{q_i, q_j}	coeficientes de correlação dos parâmetros q_i e q_j
s	número de dígitos precisos
s_0^2	variância final do erro
t	número de dígitos significativos do computador
$\mathbf{v}$	vetor dos erros de medidas (Retroanálise bayesiana)
$y_{\text{máx}}$	deslocamento transversal máximo
$\mathbf{y}^*$	vetor dos valores medidos
$\mathbf{y}(\mathbf{p})$	vetor dos valores calculados
w	equação da linha elástica

Letras romanas maiúsculas

A	matriz de sensibilidade
A_E	matriz de sensibilidade em relação a <i>E</i>
A'_E	matriz reduzida de sensibilidade em relação a <i>E</i>
A_{K₀}	matriz de sensibilidade em relação a <i>K₀</i>
A'_{K₀}	matriz reduzida de sensibilidade em relação a <i>K₀</i>
A_{km_i}	matriz de sensibilidade em relação a <i>km_i</i>
A_{q_i}	matriz de sensibilidade em relação a <i>q_i</i>
A_S	área da armadura
B	matriz de sensibilidade (Retroanálise bayesiana)
C	cobertura da seção transversal do túnel
C_{p_{ii}}	variância dos parâmetros estimados
$\sqrt{C_{p_{ii}}}$	desvio padrão dos parâmetros estimados
C'	matriz de covariância das variáveis de estado (Retroanálise bayesiana)
C_p	matriz de covariância dos parâmetros estimados
C_{p⁰}	matriz de covariância dos parâmetros estimados a priori
C_U	matriz de covariância dos deslocamentos medidos
C_y	matriz de covariância das medidas
D	domínio da função objetivo
E	módulo de elasticidade do material
F(p)	função objetivo
F_{mínimo}	função objetivo calculada no mínimo

H	altura da seção transversal do túnel (túnel Hudvusta)
H	altura do nível de água máximo normal em relação à face de concreto (barragem de Machadinho)
$\mathbf{H}$	matriz hessiana
$^i\mathbf{H}$	parcela i da matriz hessiana
$\mathbf{H}_{GN}$	matriz hessiana definida pelo método de Gauss-Newton
$\mathbf{H}_{LM}$	matriz hessiana definida pelo método de Levenberg-Marquardt
$\mathbf{H}_{NR}$	matriz hessiana definida pelo método de Newton-Raphson
I	momento de inércia da seção transversal
$\mathbf{I}$	matriz identidade
K_0	coeficiente de empuxo (Capítulo 3)
K_0	coeficiente K_0 (Capítulo 4)
K_{ij}	elemento (i, j) da matriz de rigidez da estrutura
$\mathbf{K}$	matriz de rigidez da estrutura
L	largura da seção transversal do túnel
M	momento fletor
R_{eq}	raio equivalente da seção transversal do túnel
R_i	elemento i do vetor dos esforços nodais
$\mathbf{R}$	vetor dos esforços nodais
U_j	elemento j do vetor dos deslocamentos nodais
$\mathbf{U}$	vetor dos deslocamentos nodais
$\mathbf{U}$	vetor das variáveis de estado (Retroanálise bayesiana)
$\mathbf{U}'$	vetor reduzidos dos deslocamentos calculados

$\mathbf{U}^*$	vetor dos deslocamentos medidos
V	força cortante
$\mathbf{V}$	matriz de covariância das observações (Retroanálise bayesiana)
$\mathbf{Z}$	vetor das observações (Retroanálise bayesiana)

Letras gregas minúsculas

α	tamanho do passo
δ_{jk}	símbolo de Kronecker
ε	erro relativo
$\bar{\varepsilon}$	valor admissível do erro relativo
γ	peso específico do material
λ	escalar positivo e variável
λ_1	menor autovalor de uma matriz
λ_n	maior autovalor de uma matriz
σ	tensão normal aplicada no contorno do túnel
σ_E	desvio padrão do módulo de elasticidade
σ_{K_0}	desvio padrão do coeficiente de empuxo (Capítulo 3)
σ_{K_0}	desvio padrão do coeficiente K_0 (Capítulo 4)
$\sigma_{k_{m_i}}$	desvios padrão dos coeficientes de mola
σ_{q_i}	desvios padrão dos parâmetros q_i
σ_H^2	variância das medidas horizontais
$\sigma_{p^0}^2$	variância dos parâmetros estimados a priori

σ_r^2	variância dos resíduos finais
σ_U^2	variância dos deslocamentos medidos
$\sigma_{U_H}^2$	variância dos deslocamentos horizontais medidos
$\sigma_{U_V}^2$	variância dos deslocamentos verticais medidos
σ_V^2	variância das medidas verticais
σ_y^2	variância das medidas
τ	tensão tangencial aplicada no contorno do túnel

Letras gregas maiúsculas

$\Delta \mathbf{p}$	vetor dos incrementos dos parâmetros
$\Delta \mathbf{p}^0$	vetor das diferenças entre os parâmetros e os parâmetros estimados a priori
$\Delta \mathbf{U}$	vetor das diferenças entre os deslocamentos medidos e os calculados
$\Delta \mathbf{y}$	vetor das diferenças entre os valores medidos e os calculados

Outros símbolos

∇	gradiente
----------	-----------

Resumo

O problema de identificação de parâmetros consiste em se determinar parâmetros que minimizem a diferença entre valores medidos e calculados de determinadas grandezas. Certamente, essa identificação é realizada para parâmetros que apresentam razoável grau de incerteza nos seus valores.

Neste trabalho apresentam-se os principais conceitos e fundamentos matemáticos envolvidos no assunto, desenvolve-se um procedimento de identificação de parâmetros com base matemática sólida e aplica-se esse procedimento em problemas de interesse prático da engenharia.

São estudados o túnel Hudvudsta e a barragem de Machadinho, nos quais são identificados parâmetros relacionados com as ações ou com as propriedades físicas dos materiais, considerando modelos hierárquicos para representar as estruturas. Utilizam-se os principais critérios de identificação para a definição das funções objetivo e métodos do tipo Newton para a minimização dessas funções.

Abstract

The parameter identification problem consists of determining the values of the parameters that minimize the difference between measured and calculated values of some variables. Indeed, this identification is performed to parameters that present some uncertainty on their values.

In this work the main mathematical concepts and fundamentals related to back analysis are presented. A procedure for parameter identification with a consistent mathematical basis is developed and applied in practical engineering problems.

The Hudvudsta tunnel and the Machadinho dam are studied to identify parameters related to loads or material physical properties by using hierarchical models to represent the structures. The objective functions are defined with the main identification criteria and minimized with Newton's methods.

Capítulo 1

Introdução

Sabe-se que muitas vezes o comportamento real das obras civis difere do previsto, embora cada vez mais sejam utilizados modelos matemáticos bem elaborados e sofisticados métodos computacionais para a resolução dos mesmos. Essa diferença decorre, principalmente, das incertezas associadas aos parâmetros envolvidos no modelo, às vezes de difícil determinação na fase de projeto.

Para superar essas dificuldades e melhorar o nível de conhecimento desses parâmetros, diminuindo a incerteza a eles relacionada, são efetuadas, além de ensaios em laboratório e *in-situ*, instrumentações durante e após a construção das obras. Em geral, o emprego da instrumentação é mais abrangente, permitindo acompanhar a execução da obra, monitorar o seu desempenho e a sua segurança e avaliar a adequação do modelo adotado, fornecendo informações importantes sobre o seu real comportamento. A interpretação aprofundada e a confiabilidade dos resultados da instrumentação são de vital importância para essas ações. Uma simples coleção de dados medidos, por mais extensa que seja, quase nada contribuirá para a melhoria do conhecimento dos fatores de incerteza.

Nesse sentido, a retroanálise dos dados medidos vem sendo utilizada para a identificação dos parâmetros envolvidos no modelo matemático que melhor representem o processo observado, sejam eles relacionados com a geometria da estrutura, com as propriedades dos materiais ou com a caracterização do carregamento. Trata-se de se obter os valores dos parâmetros que, quando introduzidos nas equações que regem o problema em

questão, conduzem a resultados tão próximos quanto possível dos correspondentes valores medidos.

Para exemplificar o conceito da retroanálise, considere a viga bi-apoiada com carga distribuída ilustrada na Figura 1.1.

Figura 1.1 – Viga bi-apoiada

Considerando o material elástico, linear e homogêneo, a configuração deformada da viga pode ser descrita pela equação da linha elástica:

$$y = \frac{q}{24EI} (x^4 - 2\ell x^3 + \ell^3 x) \quad (1.1)$$

com valor máximo do deslocamento transversal no centro do vão dado por:

$$y_{\text{máx}} = \frac{5q\ell^4}{384EI} \quad (1.2)$$

sendo q a carga distribuída, I o momento de inércia da seção transversal e E o módulo de elasticidade do material.

Adotando $q = 2\text{kN/m}$, $I = 2,25 \times 10^{-4} \text{ m}^4$ e $E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$, obtém-se $y_{\text{máx}} = 2,4 \times 10^{-3} \text{ m}$.

Esse procedimento corresponde à análise convencional, em que se conhece o modelo e os parâmetros desse modelo e obtêm-se as respostas.

Admitindo agora que a viga tenha sido instrumentada e que se obteve o deslocamento medido no centro do vão: $y_{\text{máx (med)}} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$. O valor medido

do deslocamento difere do previsto. A equação (1.1) descreve de forma exata, a configuração deformada da viga ilustrada na Figura 1.1. Logo, essa diferença decorre dos valores dos parâmetros utilizados na análise. Imaginando que existe uma maior confiança na definição do carregamento, pode-se considerar $q = 2\text{kN/m}$ e determinar o valor do módulo de elasticidade. Nesse caso, tem-se um sistema com uma equação e uma incógnita e o parâmetro pode ser obtido pela simples inversão da equação (1.2), ou seja,

$$E = \frac{5q\ell^4}{384I y_{\text{máx (med)}}} \quad (1.3)$$

obtendo-se $E = 2,4 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$.

Da mesma forma, se a incerteza fosse maior em relação à carga distribuída, poderia ser adotado $E = 3 \times 10^7 \text{ kN/m}^2$ e identificado o valor de q . Se houvessem sido medidos deslocamentos em pelo menos 2 pontos da viga, poderiam ser determinados o módulo de elasticidade e a carga distribuída.

Esse procedimento caracteriza, de forma bastante simples, a retroanálise, ou seja, dispondo de um modelo e de valores medidos da resposta identificam-se os parâmetros. Esse procedimento também é conhecido como identificação de sistemas, ou análise inversa.

A Figura 1.2 ilustra esquematicamente os dois procedimentos.

Figura 1.2 – Análise e retroanálise

No exemplo apresentado, o parâmetro pode ser obtido pela simples inversão da equação, já que o modelo é definido por uma equação explícita nos parâmetros e o número de parâmetros a serem identificados é igual ao número de valores medidos. Isso normalmente não ocorre nos casos reais de obras civis, nos quais os modelos não podem ser representados por uma equação explícita e precisam ser resolvidos por um método numérico, e não se tem o mesmo número de parâmetros e de medidas.

Os parâmetros são então obtidos minimizando a diferença entre os valores medidos e calculados, utilizando um algoritmo de minimização. Ressalta-se que os algoritmos de minimização são os mesmos empregados em problemas de otimização, nos quais também se deseja minimizar ou maximizar uma determinada função.

Embora a aplicação da retroanálise estenda-se a diversas áreas da Engenharia Civil, a contribuição em obras geotécnicas é particularmente importante. A interpretação do comportamento dessas obras é consideravelmente complexa, pois se trata de meios naturais predominantemente descontínuos, com propriedades que apresentam, em geral, elevados graus de heterogeneidade e de anisotropia.

Os ensaios experimentais de caracterização de materiais conduzem a parâmetros representativos de comportamento particulares (no que se refere ao tipo da amostra testada e às condições do ensaio), ao passo que os parâmetros resultantes da retroanálise são representativos do comportamento global das obras (desde que a instrumentação envolva toda a obra).

Dentro desse contexto, este trabalho insere-se no esforço da comunidade tecnológica de se ter uma melhor compreensão do comportamento de estruturas civis, no que se refere sobretudo aos parâmetros que governam os modelos matemáticos.

1.1 Objetivos e estrutura da tese

A bibliografia sobre o assunto é relativamente ampla, mas, ao mesmo tempo, muito dispersa. Existem poucos trabalhos que reúnam embasamento conceitual, procedimentos detalhados de identificação de parâmetros e aplicações em obras de interesse prático da engenharia civil. Considerando essas observações, estabelecem-se como principais objetivos da tese:

- elaborar um trabalho de unificação dos conceitos, fundamentos e métodos numéricos envolvidos, consolidando o estudo iniciado no programa de mestrado (Costa, 2000);
- incluir análise dos resultados, um assunto pouco discutido nos trabalhos de identificação de parâmetros em engenharia de estruturas e geotécnica;
- desenvolver um procedimento geral de identificação de parâmetros que possa ser aplicado a uma grande variedade de problemas em engenharias de estruturas e geotécnica;
- desenvolver um procedimento para determinação da expressão explícita da função objetivo para os casos em que não se dispõe de uma equação analítica para o cálculos das grandezas. Esse processo, válido para problemas lineares, utiliza o princípio da superposição dos efeitos e permite a representação gráfica da função objetivo por curvas de nível;
- desenvolver um problema de referência com resultados conhecidos, no qual possa ser aplicado o procedimento desenvolvido e estudada a influência dos diversos fatores envolvidos;

- aplicar os conhecimentos adquiridos e o procedimento desenvolvido em dois casos reais: o túnel Hudvudsta e a barragem de Machadinho.

Nesse sentido, a tese encontra-se dividida em cinco capítulos. A presente introdução corresponde ao Capítulo 1.

No Capítulo 2 expõem-se as principais bases matemáticas envolvidas nos problemas de identificação de parâmetros. São apresentados os critérios de identificação e os algoritmos de minimização do tipo Newton. Para a determinação da matriz de sensibilidade, presente na maioria dos algoritmos de minimização e que contém informações importantes sobre o comportamento do sistema em relação aos parâmetros, descreve-se o método analítico da diferenciação direta utilizando a formulação do método dos elementos finitos. Apresenta-se o procedimento desenvolvido para identificação de parâmetros e conceitos envolvidos na análise dos resultados.

No Capítulo 3 apresenta-se um problema de referência com resultados conhecidos, no qual são estudados os diversos fatores envolvidos, como os critérios de identificação, os algoritmos de minimização, o número e a precisão das medidas, o refinamento da malha utilizada no modelo de elementos finitos e a influência do modelo matemático. O problema considerado é o da escavação de um túnel, no qual se aplica o procedimento desenvolvido para a determinação dos parâmetros físicos: módulo de elasticidade e coeficiente de empuxo.

No Capítulo 4 apresenta-se o estudo do túnel Hudvudsta, no qual se dispõe de deslocamentos medidos e são identificados dois parâmetros característicos do maciço: módulo de elasticidade e coeficiente K_0 . Desenvolve-se um modelo em elementos finitos para representar a estrutura, e os parâmetros são identificados por dois procedimentos. No primeiro, utiliza-se o princípio da superposição dos efeitos para escrever uma expressão

explícita para o cálculo dos deslocamentos, e os parâmetros são obtidos resolvendo um sistema de equações. São considerados diferentes critérios de identificação. O segundo consiste no procedimento desenvolvido, adotando diferentes algoritmos de minimização.

O Capítulo 5 destina-se ao estudo da barragem de Machadinho, em que se utilizam as rotações fornecidas pelos eletrônives para identificar parâmetros relacionados com as ações ou com as propriedades físicas dos materiais. Para representar a estrutura são considerados: modelo linear de viga, modelo bidimensional, modelo linear de viga sobre apoio elástico e modelo não-linear de viga. Ao final do processo de identificação, os modelos são analisados com os parâmetros encontrados, obtendo-se deslocamentos e esforços solicitantes da laje da barragem de enrocamento com face de concreto. Com os resultados obtidos, pode-se calcular a taxa de armadura necessária e compará-la com a recomendada pelos critérios empíricos e com a existente na barragem.

No Capítulo 6 apresentam-se as considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

Identificação de Sistemas

O conceito de sistema é central na ciência moderna que, fundamentada na observação e na modelagem, tem como problema básico a relação entre a realidade e sua representação. Muitos fenômenos físicos podem ser representados por sistemas, interpretados como um conjunto de elementos relacionados entre si por uma determinada lei.

O meio mais prático para representar um sistema é definindo um modelo que bem o represente nos aspectos essenciais do seu comportamento em certas condições de utilização. Segundo (Eykhoff, 1974) “modelo é uma representação, de uma forma utilizável, dos aspectos essenciais do comportamento de um dado sistema, existente ou em concepção”.

Definir um modelo consiste em estabelecer as relações entre os principais componentes do sistema, os sinais de entrada, as propriedades do sistema e os sinais de saída. Os sinais de entrada correspondem às solicitações que o meio aplica ao sistema, os sinais de saída são as respostas de como o sistema se comporta sob tais solicitações e as propriedades do sistema são as relações entre os dois sinais.

Em geral, são conhecidos elementos de dois desses grupos e pretende-se determinar os elementos do terceiro. Em análise de sistemas, os elementos desconhecidos são os sinais de saída, enquanto que em identificação de sistemas esses elementos ou parte deles são conhecidos e utilizados para determinar os modelos ou parâmetros dos modelos relacionados aos sinais de entrada ou às propriedades do sistema.

Em engenharia de estruturas os modelos são, normalmente, bem conhecidos, de forma que o problema de identificação de sistemas se reduz a um problema de identificação de parâmetros do modelo que melhor correlacionam medidas e previsões do modelo, sejam eles relacionados com a geometria da estrutura, com as propriedades dos materiais, com as leis que regem o modelo ou com a caracterização das ações.

Nesses termos, o processo de identificação de parâmetros corresponde a um problema matemático, usualmente um problema de minimização de uma dada função cuja solução seja o valor desses parâmetros, os quais tornam mínima a diferença entre os valores medidos e calculados.

A formulação desse processo pode ser estabelecida por duas abordagens distintas: abordagem inversa e abordagem direta. Adota-se essa nomenclatura por ser amplamente empregada na bibliografia consultada.

A abordagem inversa é baseada na formulação oposta à adotada em análise estrutural. As equações que governam o modelo são reescritas de modo que alguns sinais de entrada são as incógnitas (parâmetros a identificar), e alguns dados de saída são os dados do problema (medidas).

A utilização da abordagem inversa requer uma relação explícita entre os parâmetros a identificar e as grandezas observadas. Além disso, é necessário que o número de medidas disponíveis seja maior ou igual ao número de parâmetros desconhecidos.

Na abordagem direta adota-se o mesmo modelo matemático utilizado na análise estrutural. A resolução do processo pode ser resumida nas seguintes fases: de posse dos resultados da instrumentação e tendo definido o modelo matemático para representar a estrutura, escolhe-se um critério de identificação que define uma função a ser minimizada, denominada função objetivo ($F(\mathbf{p})$). Essa função representa a diferença entre os valores medidos

$(\mathbf{y}^*)$ e os valores calculados pelo modelo $(\mathbf{y}(\mathbf{p}))$, em função dos parâmetros a identificar $(\mathbf{p})$, ou seja,

$$F(\mathbf{p}) = F(\mathbf{y}^*, \mathbf{y}(\mathbf{p})) \quad (2.1)$$

Em uma segunda fase, com uma técnica de minimização, a função objetivo é minimizada obtendo-se os parâmetros. A Figura 2.1 ilustra o processo.

Figura 2.1 – Abordagem direta para identificação de parâmetros

Normalmente, os algoritmos de minimização são baseados em um processo iterativo, partindo de valores iniciais dos parâmetros $(\mathbf{p}_0)$ (Figura 2.2).

Figura 2.2 – Processo iterativo

Existe ainda outro procedimento de retroanálise baseado na tentativa e erro, que constitui uma seqüência de cálculos em que são atribuídos valores

aos parâmetros a identificar até se alcançar um ajuste satisfatório entre os resultados numéricos e experimentais. Trata-se, porém, de um processo que não será utilizado neste trabalho.

2.1 Critérios de identificação

O primeiro passo para abordar matematicamente o problema de identificação de parâmetros é estabelecer um critério de identificação. Os critérios são baseados na definição da diferença entre os valores observados e calculados e se distinguem, fundamentalmente, pelo grau de informação prévia disponível a respeito do problema. Os principais critérios são: critério da máxima verossimilhança com informação prévia, critério da máxima verossimilhança e critério dos mínimos quadrados.

Quando se conhece a qualidade dos resultados das observações e se dispõe de informações prévias sobre os valores dos parâmetros a estimar, baseadas na experiência adquirida ao longo do tempo com o estudo e a observação das obras, pode-se utilizar o critério da máxima verossimilhança com informação prévia. A função objetivo definida com esse critério tem a forma:

$$F(\mathbf{p}) = [\mathbf{y}^* - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T \mathbf{C}_y^{-1} [\mathbf{y}^* - \mathbf{y}(\mathbf{p})] + [\mathbf{p} - \mathbf{p}^0]^T \mathbf{C}_{p^0}^{-1} [\mathbf{p} - \mathbf{p}^0] \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{y}^*$ é o vetor dos valores medidos, $\mathbf{y}(\mathbf{p})$ é o vetor dos valores calculados em função dos parâmetros a determinar ($\mathbf{p}$), $\mathbf{C}_y$ é a matriz de covariância das medidas e $\mathbf{C}_{p^0}$ é a matriz de covariância dos parâmetros estimados a priori ($\mathbf{p}^0$).

Se as medidas não são correlacionadas, a matriz $\mathbf{C}_y$ é uma matriz diagonal e seus elementos são as variâncias das medidas. Da mesma forma,

quando os parâmetros não são correlacionados, a matriz $\mathbf{C}_{p^0}$ é diagonal, sendo formada pelas variâncias dos parâmetros estimados a priori.

O termo $[\mathbf{p} - \mathbf{p}^0]^T \mathbf{C}_{p^0}^{-1} [\mathbf{p} - \mathbf{p}^0]$ da equação (2.2) atua como uma função de penalidade que mantém os parâmetros próximos da estimativa inicial. À medida que o vetor $\mathbf{p}$ se move para longe de $\mathbf{p}^0$, a contribuição desse termo cresce quadraticamente; logo, o mínimo da função objetivo só será obtido com êxito se $\mathbf{p}$ permanecer próximo de $\mathbf{p}^0$ (Velloso 2000).

Nos casos em que se dispõe somente de informações sobre a precisão das medidas, o critério mais indicado é o critério da máxima verossimilhança, que tem a função objetivo definida por:

$$F(\mathbf{p}) = [\mathbf{y}^* - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T \mathbf{C}_y^{-1} [\mathbf{y}^* - \mathbf{y}(\mathbf{p})] \quad (2.3)$$

Se as medidas forem independentes e, adicionalmente, apresentarem a mesma precisão, a matriz $\mathbf{C}_y$ é a matriz identidade multiplicada pela variância das medidas (σ_y^2) .

Nesse caso, a função objetivo fica definida apenas pelo somatório dos quadrados das diferenças entre os valores medidos e os calculados, multiplicado pelo referido escalar. Como se trata de um problema de minimização, esse escalar positivo não altera o resultado, e o critério da máxima verossimilhança se reduz ao critério dos mínimos quadrados. A função objetivo pode então ser expressa como:

$$F(\mathbf{p}) = [\mathbf{y}^* - \mathbf{y}(\mathbf{p})]^T [\mathbf{y}^* - \mathbf{y}(\mathbf{p})] \quad (2.4)$$

O critério dos mínimos quadrados também se aplica quando não se dispõe de nenhum tipo de informação adicional sobre os parâmetros ou as medidas.

2.1.1 Retroanálise Bayesiana

A retroanálise bayesiana é um método probabilístico de reavaliar os parâmetros adotados nos modelos matemáticos a partir dos resultados da instrumentação, utilizando informações adicionais relativas à precisão dos resultados e dos valores iniciais adotados para os parâmetros.

É um método equivalente ao processo de identificação de parâmetros quando se utiliza o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para definir a função objetivo, equação (2.2).

Utilizando a nomenclatura apresentada em (Hachich, 1981), os parâmetros são as n variáveis de estado representados pelo vetor $\mathbf{U}$, as medidas são as p observações representadas pelo vetor $\mathbf{Z}$ e os erros de medidas são representados pelo vetor $\mathbf{v}$

Na formulação da retroanálise bayesiana, baseada no Teorema de Bayes, são adotadas as seguintes hipóteses:

- o vetor $\mathbf{U}$ tem uma distribuição normal em n dimensões, com vetor médio $\mathbf{m}'$ e matriz de covariância $\mathbf{C}'$;
- o vetor $\mathbf{v}$ tem uma distribuição normal em p dimensões, com vetor médio nulo ($\mathbf{0}$) e matriz de covariância $\mathbf{V}$;
- os erros de medidas não estão linearmente correlacionados com as variáveis de estado;
- a relação entre as observações e variáveis de estado é linear ou pode ser linearizada em torno da média.

Nessas condições, a equação que permite rever as estimativas iniciais das variáveis de estado em função das observações é dada por:

$$\mathbf{m}'' = \mathbf{m}' + \mathbf{C}' \cdot \mathbf{B}^T \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}' \cdot \mathbf{B}^T + \mathbf{V})^{-1} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{m}_p) \quad (2.5)$$

em que $\mathbf{B}$ é a matriz de sensibilidade de dimensão $p \times n$ e $\mathbf{m}_p$ é o vetor das observações previstas, com base no valor médio das variáveis de estado. O vetor $\mathbf{m}_p$ pode ser definido por $\mathbf{m}_p = \mathbf{a} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{m}'$, com $\mathbf{a}$ sendo um vetor de p interceptos.

Quando não existe correlação entre as diversas variáveis, a matriz de covariância $\mathbf{C}'$ é diagonal e seus elementos são as variâncias dessas variáveis. Da mesma forma, quando os erros de medidas não são correlacionados, a matriz de covariância $\mathbf{V}$ é diagonal, sendo formada pelas variâncias dos erros das medidas.

Quando as medidas são muito precisas e existe uma grande incerteza com relação às estimativas iniciais dos parâmetros, as informações das estimativas podem não ser significativas no processo, comparadas com a informação contida nos dados. Dessa forma, a equação (2.5) torna-se:

$$\mathbf{m}'' = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{V}^{-1} \cdot (\mathbf{Z} - \mathbf{a}) \quad (2.6)$$

A equação (2.6) equivale à função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança, equação (2.3).

Finalmente, quando se tem o mesmo desvio padrão para os p erros de medidas, a matriz de covariância não acrescenta nenhuma informação adicional e, além disso, se $\mathbf{a} = 0$, a equação (2.6) se reduz a:

$$\mathbf{m}'' = (\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{B})^{-1} \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{Z} \quad (2.7)$$

que corresponde à função objetivo obtida com o critério dos mínimos quadrados, equação (2.4).

Uma formulação mais detalhada da retroanálise bayesiana pode ser encontrada em (Hachich, 1981).

2.2 Minimização de funções

Em geral, os problemas de minimização consistem em se encontrar um conjunto de parâmetros ($\mathbf{p}$) que minimize a função objetivo definida, impondo algumas restrições a esses parâmetros.

Em problemas de otimização, em que as variáveis devem cumprir determinadas condições, as restrições são necessárias. Entretanto, em problemas de identificação de parâmetros, as restrições não são imprescindíveis, pois considerando os conhecimentos teóricos ou experimentais e o sentido físico dos parâmetros tem-se uma idéia dos valores esperados, sendo possível a rejeição dos parâmetros encontrados. Além disso, em alguns critérios de identificação, como o critério da máxima verossimilhança com informação prévia, as restrições já estão consideradas implicitamente na função objetivo. Dessa forma, neste trabalho, estudam-se apenas os métodos de minimização sem restrições.

Antes, porém, é importante lembrar alguns conceitos matemáticos que fundamentam esses métodos.

Seja $F(\mathbf{p})$ a função a minimizar, contínua e derivável até segunda ordem no seu domínio (D), e $\bar{\mathbf{p}}$ o vetor dos n parâmetros que tornam mínima a função.

Matematicamente, se

$$\bar{\mathbf{p}} \in D \text{ e } F(\mathbf{p}) \geq F(\bar{\mathbf{p}}), \forall \mathbf{p} \in D \quad (2.8)$$

então $\bar{\mathbf{p}}$ é um mínimo de $F(\mathbf{p})$.

Para que $\bar{\mathbf{p}}$ seja um mínimo é necessário e suficiente que se satisfaçam as seguintes condições:

a) Condição de primeira ordem:

$$\nabla F(\bar{\mathbf{p}}) = \mathbf{0} \quad (2.9)$$

em que ∇F indica o gradiente da função $F(\mathbf{p})$. O gradiente é um vetor constituído pelas derivadas parciais da função em relação aos parâmetros p_i , ou seja,

$$\nabla F(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_1} \\ \vdots \\ \frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

O elemento i do gradiente depende da função objetivo e da direção p_i . A derivada da função em uma dada direção $\mathbf{d}$ é dada por:

$$\mathbf{d}^T \nabla F(\mathbf{p}) \quad (2.11)$$

b) Condição de segunda ordem:

$$\mathbf{H}(\bar{\mathbf{p}}) \text{ é positiva definida} \quad (2.12)$$

em que $\mathbf{H}$ é a matriz hessiana da função. A matriz hessiana é uma matriz simétrica formada pelas derivadas parciais de segunda ordem da função em relação aos parâmetros p_i , ou seja,

$$\mathbf{H}(\mathbf{p}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 F(\mathbf{p})}{\partial p_1^2} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{p})}{\partial p_1 \partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 F(\mathbf{p})}{\partial p_n \partial p_1} & \dots & \frac{\partial^2 F(\mathbf{p})}{\partial p_n^2} \end{bmatrix} \quad (2.13)$$

A segunda derivada direcional da função na direção $\mathbf{d}$ é dada pelo produto:

$$\mathbf{d}^T \mathbf{H}(\mathbf{p}) \mathbf{d} \quad (2.14)$$

2.2.1 Algoritmos de minimização

Em geral, os algoritmos de minimização de funções baseiam-se em um processo iterativo da forma:

$$\mathbf{p}_{k+1} = \mathbf{p}_k + \Delta \mathbf{p}_k \quad F_{k+1} < F_k \quad (2.15)$$

em que $\mathbf{p}_k$ representa o vetor dos valores iniciais dos parâmetros e $\Delta \mathbf{p}_k$ o vetor dos incrementos dos parâmetros.

Existem diversos métodos para o cálculo de $\Delta \mathbf{p}_k$, que pode ser colocado na forma:

$$\Delta \mathbf{p}_k = \mathbf{d}_k \alpha_k \quad (2.16)$$

sendo $\mathbf{d}_k$ a direção de busca e α_k o tamanho do passo. A exigência básica para a direção de busca é que a função objetivo seja reduzida quando se move uma pequena distância nessa direção.

Os algoritmos de minimização podem ser classificados de acordo com a ordem da derivada da função objetivo utilizada na determinação da direção de busca. Os métodos de ordem zero utilizam somente informações da função objetivo, enquanto que os de primeira ordem necessitam do gradiente da função e os de segunda ordem, da hessiana da função.

Nos métodos de ordem zero, ou métodos de busca direta, calcula-se a função objetivo em vários pontos do espaço dos parâmetros, localizando de forma direta o mínimo. O método *simplex* é um exemplo desses métodos.

Em geral, esses métodos são pouco eficientes, principalmente se o número de parâmetros é alto. Podem dar bons resultados no caso em que a função objetivo tenha descontinuidade ou o gradiente não seja facilmente calculado (Ledesma, 1987).

Os métodos de primeira ordem, ou métodos de gradiente, têm como condição inicial que a função objetivo seja contínua em todo o domínio de

definição. São exemplos desse tipo de método: método da máxima descida, método dos gradientes conjugados. Maiores informações sobre os métodos de ordem zero e de primeira ordem podem ser encontradas em (Ledesma, 1987), (Castro, 1997) e (Velloso, 2000).

Finalmente, como método de segunda ordem, que utiliza a matriz hessiana da função, podemos citar o método de Newton-Raphson. Os métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt são tidos como métodos tipo Newton, que utilizam uma aproximação da matriz hessiana. Esses são os três métodos utilizados neste trabalho.

2.2.1.1 Métodos do tipo Newton

Como o critério da máxima verossimilhança com informação prévia é o mais geral, formulam-se os métodos do tipo Newton para funções objetivo definidas por esse critério, particularizando para os outros critérios.

A função objetivo definida pelo critério da máxima verossimilhança com informação prévia, equação (2.2), pode ser escrita na forma:

$$F(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i^2(p_1, \dots, p_n) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{p_j^0}^2} (p_j - p_j^0)^2 \quad (2.17)$$

sendo

$$f_i(p_1, \dots, p_n) = y_i^* - y_i(p_1, \dots, p_n) = \Delta y_i(p_1, \dots, p_n) \quad (2.18)$$

em que $(p_1, \dots, p_n)$ são os n parâmetros a serem identificados, m é o número de medidas, $\sigma_{y_i}^2$ a variância de cada uma das medidas e $\sigma_{p_j^0}^2$ a variância de cada um dos parâmetros estimados a priori (p_j^0) .

Observa-se que $\Delta y_i(p_1, \dots, p_n)$ representa as diferenças entre os valores medidos e os valores calculados. No que se segue, adota-se a convenção $F(\mathbf{p}) = F(p_1, \dots, p_n)$ para as diversas funções de $\mathbf{p}^T = \{p_1, \dots, p_n\}$.

Sabe-se que na condição de mínimo, o gradiente da função objetivo, equação (2.10), deve ser nulo, logo:

$$\frac{\partial F(\mathbf{p})}{\partial p_k} = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} 2f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{p_j^0}^2} 2(p_j - p_j^0) \frac{\partial p_j}{\partial p_k} = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (2.19)$$

Trata-se, portanto, de se determinar $(p_1, \dots, p_n)$ que satisfaçam as n equações:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{p_j^0}^2} (p_j - p_j^0) \delta_{jk} = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (2.20)$$

em que δ_{jk} é o símbolo de Kronecker que assume valor 1 para $j=k$ e 0 para $j \neq k$. Assim, as equações (2.20) tornam-se:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} + \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} (p_k - p_k^0) = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (2.21)$$

É conveniente introduzir as variáveis:

$$A_{i,k}(\mathbf{p}) = -\frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} = \frac{\partial y_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} \quad (2.22)$$

o que permite reescrever as equações (2.21) na forma indicial:

$$-\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) A_{i,k}(\mathbf{p}) + \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} (p_k - p_k^0) = 0 \quad (k=1, \dots, n) \quad (2.23)$$

ou na forma matricial:

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{C}_{p^0}^{-1} \Delta \mathbf{p}^0 = \mathbf{0} \quad (2.24)$$

em que $\mathbf{C}_y$ é a matriz de covariância das medidas e $\mathbf{C}_{p^0}$ é a matriz de covariância dos parâmetros estimados a priori $(\mathbf{p}^0)$.

A matriz $\mathbf{A}$, de ordem $m \times n$,

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \frac{\partial y_1(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_1(\mathbf{p})}{\partial p_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial y_m(\mathbf{p})}{\partial p_1} & \dots & \frac{\partial y_m(\mathbf{p})}{\partial p_n} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

é a matriz de sensibilidade formada pelas derivadas parciais dos valores calculados em relação aos parâmetros a estimar.

O vetor $\Delta \mathbf{y}$, de ordem $m \times 1$,

$$\Delta \mathbf{y} = \begin{Bmatrix} \Delta y_1 \\ \vdots \\ \Delta y_m \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} y_1^* - y_1(\mathbf{p}) \\ \vdots \\ y_m^* - y_m(\mathbf{p}) \end{Bmatrix} \quad (2.26)$$

é o vetor das diferenças entre os valores medidos e os calculados.

O vetor $\Delta \mathbf{p}^0$, de ordem $n \times 1$,

$$\Delta \mathbf{p}^0 = \begin{Bmatrix} \Delta p_1^0 \\ \vdots \\ \Delta p_n^0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} p_1 - p_1^0 \\ \vdots \\ p_n - p_n^0 \end{Bmatrix} \quad (2.27)$$

é o vetor das diferenças entre os parâmetros e os parâmetros estimados a priori.

2.2.1.1.1 Método de Newton-Raphson

Seja $\bar{\mathbf{p}}^T = \{\bar{p}_1, \dots, \bar{p}_n\}$ a solução do sistema de equações (2.21), e $\mathbf{p}^T = \{p_1, \dots, p_n\}$ uma solução aproximada tal que $\bar{\mathbf{p}} = \mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}$. Dessa forma, as n equações podem ser escritas na forma:

$$\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p} + \Delta \mathbf{p})}{\partial p_k} + \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} ((p_k + \Delta p_k) - p_k^0) \quad (2.28)$$

Desenvolvendo (2.28) em série de Taylor em torno de $\mathbf{p}$, obtém-se:

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} + \sum_{\ell=1}^n \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} \right) \Delta p_\ell + \\ & \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} (p_k - p_k^0) + \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} \Delta p_k + O(2) = 0 \end{aligned} \quad (2.29)$$

ou

$$\begin{aligned} & \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} + \\ & \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_\ell} \frac{\partial f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k} \right) \Delta p_\ell + \sum_{\ell=1}^n \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} f_i(\mathbf{p}) \frac{\partial^2 f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_\ell} \right) \Delta p_\ell + \\ & \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} (p_k - p_k^0) + \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} \Delta p_k + O(2) = 0 \end{aligned} \quad (2.30)$$

Introduzindo as variáveis $B_{i,k\ell}$ definidas por:

$$B_{i,k\ell}(\mathbf{p}) = -\frac{\partial^2 f_i(\mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_\ell} = \frac{\partial^2 y_i(\mathbf{p})}{\partial p_k \partial p_\ell} \quad (2.31)$$

substituindo $(p_k - p_k^0)$ por Δp_k^0 e, para não sobrecarregar as expressões que se seguem, representando as variáveis $\Delta y_i(\mathbf{p})$, $A_{i,k}(\mathbf{p})$ e $B_{i,k\ell}(\mathbf{p})$ por Δy_i , $A_{i,k}$ e $B_{i,k\ell}$, as equações (2.30) podem ser colocadas na forma:

$$\begin{aligned} & \left(-\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \Delta y_i A_{i,k} \right) + \sum_{j=1}^n \frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} (\Delta p_k^0) + \\ & \sum_{\ell=1}^n \left[\left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} A_{i,\ell} A_{i,k} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \Delta y_i B_{i,k\ell} \right) + \left(\frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} \right) \delta_{k\ell} \right] \Delta p_\ell + O(2) = 0 \end{aligned} \quad (2.32)$$

ou na forma matricial:

$$-\mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \Delta \mathbf{y} + \mathbf{C}_{p^0}^{-1} \Delta \mathbf{p}^0 + \mathbf{H} \Delta \mathbf{p} + O(2) = \mathbf{0} \quad (2.33)$$

A matriz $\mathbf{H}$ é uma matriz simétrica, de ordem $n \times n$, que é a matriz hessiana da função $F(\mathbf{p})$, e o seu termo genérico é definido por:

$$H_{k\ell} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} A_{i,\ell} A_{i,k} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_{y_i}^2} \Delta y_i B_{i,k\ell} \right) + \left(\frac{1}{\sigma_{p_k^0}^2} \right) \delta_{k\ell} \quad (2.34)$$

e pode ser colocada na forma matricial:

$$\mathbf{H} = {}^1\mathbf{H} + {}^2\mathbf{H} + {}^3\mathbf{H} \quad (2.35)$$

as parcelas ${}^1\mathbf{H}$ e ${}^3\mathbf{H}$ podem ser escritas na forma matricial:

$$\begin{aligned} {}^1\mathbf{H} &= \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A} \\ {}^3\mathbf{H} &= \mathbf{C}_{p^0}^{-1} \end{aligned} \quad (2.36)$$

O método de Newton-Raphson baseia-se na equação (2.33) e consiste em se estabelecer um processo iterativo com correções nas parcelas lineares dessa equação, caracterizado na iteração r por:

$$\mathbf{p}|_{r+1} = \mathbf{p}|_r + \Delta\mathbf{p}|_r \quad (2.37)$$

com

$$\Delta\mathbf{p}|_r = \mathbf{H}^{-1}|_r \left(\mathbf{A}^T|_r \mathbf{C}_y^{-1} \Delta\mathbf{y}|_r - \mathbf{C}_{p^0}^{-1} \Delta\mathbf{p}^0|_r \right) \quad (2.38)$$

A formulação apresentada pode ser particularizada para a função objetivo definida com os critérios da máxima verossimilhança e dos mínimos quadrados.

A função objetivo obtida com o critério da máxima verossimilhança, equação (2.3), pode ser escrita na forma:

$$F(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} f_i^2(p_1, \dots, p_n) \quad (2.39)$$

que consiste no primeiro termo da equação (2.17).

Desenvolvendo a equação (2.39) da mesma forma que para o critério da máxima verossimilhança com informação prévia, obtém-se a seguinte equação para o termo genérico da matriz hessiana:

$$H_{k\ell} = \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} A_{i,\ell} A_{i,k} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \frac{1}{\sigma_i^2} \Delta y_i B_{i,k\ell} \right) \quad (2.40)$$

que são os dois primeiros termos da equação (2.34).

Logo, com o critério da máxima verossimilhança, o método iterativo de Newton-Raphson fica definido pela equação (2.37), com a matriz hessiana dada pela equação (2.40) e com o vetor dos incrementos dado por:

$$\Delta \mathbf{p}|_r = \mathbf{H}^{-1}|_r \mathbf{A}^T|_r \mathbf{C}_y^{-1} \Delta \mathbf{y}|_r \quad (2.41)$$

Para o critério dos mínimos quadrados, a função objetivo definida na equação (2.4) pode ser escrita na forma:

$$F(p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^m f_i^2(p_1, \dots, p_n) \quad (2.42)$$

que consiste em uma particularização da equação (2.17), utilizada quando não se tem nenhuma informação adicional quanto à precisão das medidas ou quanto às estimativas iniciais dos parâmetros.

Da mesma forma que para os critérios anteriores, desenvolve-se a equação (2.42), obtendo-se a seguinte equação para o termo genérico da matriz hessiana:

$$H_{k\ell} = \left(\sum_{i=1}^m A_{i,\ell} A_{i,k} \right) - \left(\sum_{i=1}^m \Delta y_i B_{i,k\ell} \right) \quad (2.43)$$

Portanto, o método de Newton-Raphson com o critério dos mínimos quadrados fica definido pela equação (2.37), com a matriz hessiana dada pela equação (2.43) e com o vetor dos incrementos dado por:

$$\Delta \mathbf{p}|_r = \mathbf{H}^{-1}|_r \mathbf{A}^T|_r \Delta \mathbf{y}|_r \quad (2.44)$$

2.2.1.1.2 Método de Gauss-Newton

É uma modificação do método de Newton-Raphson, no qual a matriz hessiana se reduz às suas parcelas ${}^1\mathbf{H}$ e ${}^3\mathbf{H}$ da equação (2.35).

Com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia, o processo iterativo é então definido pelas equações (2.37) e (2.38), com a matriz hessiana dada por:

$$\mathbf{H} \cong \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{C}_{p^0}^{-1} \quad (2.45)$$

com o critério da máxima verossimilhança, a matriz $\mathbf{H}$ fica definida por:

$$\mathbf{H} \cong \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A} \quad (2.46)$$

e, com o critério dos mínimos quadrados, é dada por:

$$\mathbf{H} \cong \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (2.47)$$

2.2.1.1.3 Método de Levenberg-Marquardt

O método de Levenberg-Marquardt é uma modificação do método de Gauss-Newton, visando ao melhor condicionamento numérico na resolução do sistema de equações (2.45). Para o critério da máxima verossimilhança com informação prévia, esse sistema é aproximado por:

$$\mathbf{H} \cong \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A} + \mathbf{C}_{p^0}^{-1} + \lambda \mathbf{I} \quad (2.48)$$

com o critério da máxima verossimilhança torna-se:

$$\mathbf{H} \cong \mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I} \quad (2.49)$$

e com o critério dos mínimos quadrados fica definida por:

$$\mathbf{H} \cong \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{I} \quad (2.50)$$

em que λ é um escalar positivo variável em cada iteração. A estratégia usual é iniciar com um valor alto de λ e então diminuí-lo se houver um decréscimo da função objetivo, ou aumentá-lo no caso contrário.

Normalmente, devido à diferença da ordem de grandeza dos parâmetros, é necessário normalizar o problema. Isso pode ser feito substituindo a matriz identidade das equações (2.48), (2.49) e (2.50) por uma

matriz diagonal de ordem n com os elementos iguais aos elementos da diagonal da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Uma descrição mais detalhada deste método pode ser encontrada em (Ledesma, 1987), (Levenberg, 1944) e (Marquardt, 1963).

2.3 Utilização do método dos elementos finitos no processo de identificação de parâmetros

A determinação da matriz de sensibilidade é de suma importância no processo de identificação de parâmetros.

O método mais simples é a aproximação por diferenças finitas, em que cada uma das colunas da matriz é obtida por:

$$\frac{\partial \mathbf{y}}{\partial p_i} \equiv \frac{[\mathbf{y}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i + \Delta p_i, p_{i+1}, \dots, p_n) - \mathbf{y}(p_1, \dots, p_{i-1}, p_i, p_{i+1}, \dots, p_n)]}{\Delta p_i} \quad (2.51)$$

Percebe-se que esta estimativa da matriz de sensibilidade necessita da resolução de $n+1$ problemas diretos, sendo n o número de parâmetros.

Embora seja sempre possível obter a matriz de sensibilidade por diferenças finitas, desenvolveram-se métodos específicos no âmbito da análise de sensibilidade que, utilizando a formulação do modelo matemático, permitem obtê-la de uma forma mais precisa. Os dois métodos analíticos mais importantes são o método da diferenciação direta e o método do adjunto.

O método do adjunto, ou método do sistema adjunto, não faz parte do escopo deste trabalho. A descrição desse método pode ser encontrada em (Kleiber, 1997) e (Haftka & Gürdal, 1993).

Na maioria dos casos estudados neste trabalho utiliza-se o método da diferenciação direta, amplamente empregado em problemas de identificação de parâmetros. Esse método exige uma equação de equilíbrio explícita.

Nos estudos realizados neste trabalho emprega-se o método dos elementos finitos para se obter a solução dos modelos matemáticos. Assim, utiliza-se a formulação do método dos elementos finitos com o método da diferenciação direta para se obter a matriz de sensibilidade.

A equação de equilíbrio estabelecida pelo método dos elementos finitos para um modelo elástico linear tem a forma:

$$\sum_{j=1}^{ng} K_{ij} U_j = R_i \quad (i=1, \dots, ng) \quad (2.52)$$

em que K_{ij} é o elemento (i, j) da matriz de rigidez da estrutura, U_j é o elemento j do vetor dos deslocamentos nodais, R_i é o elemento i do vetor dos esforços nodais e ng é o número de graus de liberdade do sistema discretizado.

Derivando as equações (2.52) em relação ao parâmetro p_k tem-se:

$$\sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial(K_{ij} U_j)}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} \quad (2.53)$$

e desenvolvendo-se as equações (2.53):

$$\sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} U_j + \sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} \quad (2.54)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} U_j \quad (2.55)$$

que pode ser expresso na forma matricial por:

$$\mathbf{K} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \quad (2.56)$$

O elemento $\frac{\partial U_j}{\partial p_k}$ do sistema de equações (2.55) representa o termo A_{jk}

da matriz de sensibilidade, caracterizada na equação (2.56) pelo vetor $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}}$,

quando se utiliza a formulação pelo método dos elementos finitos para um problema elástico linear e as grandezas medidas são deslocamentos.

Percebe-se que, para se obter as sensibilidades em relação aos n parâmetros, devem ser resolvidos n problemas auxiliares lineares que têm a mesma matriz de rigidez que o problema direto, com um carregamento fictício dado pelo segundo membro das equações (2.55).

Da mesma forma, obtém-se a expressão dos coeficientes $B_{i,k\ell}$, definidos nas equações (2.34) e (2.40) e que estão presentes na parcela ${}^2\mathbf{H}$ da matriz hessiana. Derivando as equações (2.52) primeiramente em relação a p_k , obtém-se as equações (2.55), e depois em relação a p_ℓ ,

$$\sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left(K_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} \right) = \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial}{\partial p_\ell} \left(\frac{\partial R_i}{\partial p_k} - \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} U_j \right) \quad (2.57)$$

desenvolvendo,

$$\sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_\ell} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} + \sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial p_k \partial p_\ell} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial p_k \partial p_\ell} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial p_k \partial p_\ell} U_j - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} \frac{\partial U_j}{\partial p_\ell} \quad (2.58)$$

logo,

$$\sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial^2 U_j}{\partial p_k \partial p_\ell} = \frac{\partial^2 R_i}{\partial p_k \partial p_\ell} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial^2 K_{ij}}{\partial p_k \partial p_\ell} U_j - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} \frac{\partial U_j}{\partial p_\ell} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_\ell} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} \quad (2.59)$$

A equação (2.59) define os coeficientes $B_{j,k\ell} = \frac{\partial^2 U_j}{\partial p_k \partial p_\ell}$, quando se utiliza a formulação pelo método dos elementos finitos e as grandezas medidas são deslocamentos.

Considerando-se a classe de problemas não-lineares cuja equação de equilíbrio resultante do método dos elementos finitos pode ser colocada na forma:

$$\sum_{j=1}^{ng} K_{ij}(U_1, \dots, U_n) U_j = R_i \quad (i=1, \dots, ng) \quad (2.60)$$

a matriz de rigidez depende dos parâmetros e dos deslocamentos, os quais, por sua vez, também dependem dos parâmetros. Derivando as equações (2.60) em relação aos parâmetros tem-se:

$$\sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial}{\partial p_k} [K_{ij}(U_1, \dots, U_{ng}) U_j] = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} \quad (2.61)$$

desenvolvendo,

$$\sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} U_j + \sum_{j=1}^{ng} \sum_{r=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r} \frac{\partial U_r}{\partial p_k} U_j + \sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} \quad (2.62)$$

ou ainda,

$$\sum_{j=1}^{ng} \sum_{r=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial U_r} \frac{\partial U_r}{\partial p_k} U_j + \sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ij}}{\partial p_k} U_j \quad (2.63)$$

trocando convenientemente os índices,

$$\sum_{j=1}^{ng} \sum_{r=1}^{ng} \frac{\partial K_{ir}}{\partial U_j} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} U_r + \sum_{j=1}^{ng} K_{ij} \frac{\partial U_j}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ir}}{\partial p_k} U_r \quad (2.64)$$

logo,

$$\sum_{j=1}^{ng} \left(\sum_{r=1}^{ng} \frac{\partial K_{ir}}{\partial U_j} U_r + K_{ij} \right) \frac{\partial U_j}{\partial p_k} = \frac{\partial R_i}{\partial p_k} - \sum_{j=1}^{ng} \frac{\partial K_{ir}}{\partial p_k} U_r \quad (2.65)$$

que pode ser expresso na forma matricial por:

$$\left(\mathbf{K} + \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{U}} \mathbf{U} \right) \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \quad (2.66)$$

O elemento $\frac{\partial U_j}{\partial p_k}$ das equações (2.65) representa o elemento A_{jk} da

matriz de sensibilidade, representada na equação (2.66) pelo vetor $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}}$,

quando se utiliza a formulação pelo método dos elementos finitos para um problema não-linear e as grandezas medidas são deslocamentos.

2.4 Procedimento desenvolvido

Baseado no que foi exposto, desenvolve-se um procedimento para identificação de parâmetros utilizando o método dos elementos finitos e considerando que as grandezas medidas são deslocamentos. Para tanto, utiliza-se o *software* de elementos finitos Adina e uma rotina desenvolvida em Matlab.

Com o programa Adina, as estruturas são analisadas e resolvem-se os problemas auxiliares com carregamentos fictícios necessários para se obter a matriz de sensibilidade, equação (2.55), e também os coeficientes $B_{j,kl}$ da matriz hessiana, equação (2.59). Esses problemas auxiliares variam de acordo com os parâmetros a serem identificados.

A rotina em Matlab engloba toda a formulação matemática do processo iterativo, sendo alimentada por dados resultantes das análises realizadas no Adina. O procedimento não é automatizado, a cada iteração é necessário interagir com o Adina, fornecendo os valores dos parâmetros obtidos na iteração anterior. Utilizando o programa Adina obtêm-se, em forma de um arquivo ASCII, os elementos do vetor dos deslocamentos nodais e os elementos da matriz de rigidez da estrutura, que são tratados para alimentarem a rotina.

O critério de convergência adotado consiste em verificar se $F_{k+1} < F_k$ e em estabelecer que o erro relativo (ε) entre cada iteração seja menor que um valor admissível ($\bar{\varepsilon}$):

$$\varepsilon = \frac{\|\Delta \mathbf{p}_k\|}{\|\mathbf{p}_k\|} \leq \bar{\varepsilon} \quad (2.67)$$

Desenvolve-se uma rotina em Matlab para cada problema, de acordo com os parâmetros a serem identificados e com o algoritmo de minimização utilizado. A Figura 2.3 ilustra esquematicamente o procedimento desenvolvido.

Figura 2.3 – Procedimento desenvolvido

2.5 Análise dos resultados

Após os parâmetros serem identificados é importante realizar uma análise dos resultados, pois existem vários fatores que podem influenciar a qualidade dos mesmos.

As principais fontes de incerteza presentes na identificação de parâmetros são:

- imprecisão dos valores medidos;
- modelo adotado para representar a estrutura;
- erros de solução do método dos elementos finitos;
- erros de solução do processo iterativo;
- baixa sensibilidade dos parâmetros e dos valores medidos;
- alta correlação entre os parâmetros.

Na imprecisão dos valores medidos estão considerados os erros de leitura, provenientes da intervenção humana, e a precisão do instrumento utilizado.

O modelo adotado para representar a estrutura deve descrever o mais fielmente possível o sistema real. Deve-se lembrar que os resultados obtidos devem ser analisados levando-se em conta as hipóteses consideradas no modelo. Os parâmetros identificados são válidos para o modelo adotado.

Os principais erros relacionados com a utilização do método dos elementos finitos estão relacionados com a discretização, com a integração numérica, com os erros de arredondamento e truncamento e com a solução do sistema de equações por métodos iterativos.

Com relação aos erros de solução do processo iterativo, são eles os erros na solução das equações pelos métodos iterativos de Newton-Raphson,

Gauss-Newton e Levenberg-Marquardt e, novamente, pode-se citar os erros de arredondamento e de truncamento.

De acordo com (Bathe, 1996) o erro de truncamento é o erro que surge quando se restringe o número de dígitos que representam as variáveis e o erro de arredondamento é o erro que surge na solução de um sistema de equações devido ao número de dígitos utilizados.

Esses erros numéricos podem ter forte influência em sistemas mal condicionados. De acordo com Hadamard *apud* (Lecampion, 2002), um problema pode ser mal condicionado nas seguintes condições:

- a solução não existir. Isso pode acontecer quando o modelo escolhido não é capaz de reproduzir as medidas;
- a solução não ser única;
- o problema ser instável, ou seja, pequenas perturbações nos dados de entrada provocam grandes perturbações nos resultados.

O termo estabilidade tem um significado análogo quando usado para qualificar um método numérico ou um método iterativo. A estabilidade fornece informações sobre a sensibilidade do método aos erros de arredondamento acumulados nos cálculos. Um método é estável se pequenas perturbações nos dados conduzem a soluções próximas.

Observa-se que existem casos em que o problema matemático é bem condicionado, mas a utilização de métodos instáveis pode fornecer maus resultados.

O número de condição de um sistema é um indicador do condicionamento desse sistema. Quanto maior o número de condição, maior a probabilidade de erros na solução. Em um sistema do tipo:

$$\mathbf{K}\mathbf{U}=\mathbf{R} \quad (2.68)$$

o número de condição é dado por:

$$\text{cond}(\mathbf{K}) = \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \quad (2.69)$$

sendo λ_n e λ_1 , respectivamente, o maior e o menor autovalor de $\mathbf{K}$.

Com relação ao número de dígitos envolvidos no processo, (Bathe, 1996) apresenta uma estimativa do número de dígitos precisos (s) obtidos na solução do sistema de equações (2.68), dada por:

$$s \geq t - \log_{10}[\text{cond}(\mathbf{K})] \quad (2.70)$$

sendo t o número de dígitos significativos do computador.

Em vista do exposto, nos procedimentos iterativos aplicados na identificação de parâmetros, o número de condição da matriz hessiana fornece uma medida da dificuldade de convergência no processo iterativo; quanto maior o número de condição da matriz hessiana, maior será a probabilidade de erros na solução.

A matriz de sensibilidade contém informações sobre o comportamento do sistema em relação aos parâmetros e aos valores medidos. Os elementos da matriz de sensibilidade, equação (2.25), são os coeficientes de sensibilidade, definidos por:

$$A_{ij} = \frac{\partial y_i(\mathbf{p})}{\partial p_j} \quad (2.71)$$

Esses coeficientes mostram o impacto de uma pequena variação do parâmetro p_j no valor calculado y_i .

Logo, a análise dos coeficientes de sensibilidade realizada antes do processo de identificação propicia a determinação dos parâmetros que mais influenciam a resposta do sistema e dos melhores pontos de medidas. O ideal

seria que essa análise fosse realizada antes da definição do projeto de instrumentação.

Deve-se ter em mente que os coeficientes de sensibilidade devem ser expressos na mesma unidade, para que eles possam ser comparados.

Ao final do processo, a matriz de sensibilidade calculada com os parâmetros obtidos pode ser utilizada para avaliar os parâmetros identificados pela análise dos coeficientes de sensibilidade e pela obtenção da matriz de covariância dos parâmetros estimados.

Se a análise dos coeficientes de sensibilidade indicar uma baixa sensibilidade dos parâmetros em relação aos pontos de medidas, significa que esses pontos não são adequados ou são insuficientes, e os resultados podem não ser confiáveis.

A análise dos elementos da matriz de covariância propicia informações a respeito da dispersão dos parâmetros p_i e da correlação linear entre esses parâmetros. De acordo com (Finsterle e Persoff, 1997) e (Finsterle e Pruess, 1995), para o método dos mínimos quadrados a matriz de covariância é estimada por:

$$\mathbf{C}_p = s_0^2 [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1} \quad (2.72)$$

em que $\mathbf{A}$ é a matriz de sensibilidade calculada com os parâmetros obtidos e s_0^2 a variância final do erro, estimada por:

$$s_0^2 = \frac{F_{\text{mínimo}}}{m - n} \quad (2.73)$$

em que $F_{\text{mínimo}}$ é o valor da função objetivo calculada no mínimo.

Considerando o critério da máxima verossimilhança, a equação (2.72) torna-se:

$$\mathbf{C}_p = s_0^2 [\mathbf{A}^T \mathbf{C}_y^{-1} \mathbf{A}]^{-1} \quad (2.74)$$

em que $\mathbf{C}_y$ é a matriz de covariância das medidas.

Nos casos estudados neste trabalho, utiliza-se a variância final do erro estimada pela equação (2.73) para se obter a matriz de covariância dos parâmetros estimados. Entretanto, nos casos em que o número de medidas é igual ao número de parâmetros utiliza-se a variância dos resíduos finais avaliada estatisticamente.

Os elementos da diagonal de $\mathbf{C}_p$ contêm as variâncias dos parâmetros estimados ($C_{p_{ii}}$) que permitem a avaliação das dispersões absolutas dos parâmetros pelos desvios padrão ($\sqrt{C_{p_{ii}}}$) e das dispersões relativas pelos coeficientes de variação, definidos por:

$$r_{ii} = \frac{\sqrt{C_{p_{ii}}}}{\bar{p}_i} \quad (2.75)$$

As variâncias dos parâmetros estimados representam uma medida da incerteza dos parâmetros. Das equações (2.72) e (2.74) percebe-se que a incerteza dos parâmetros estimados é inversamente proporcional ao valor absoluto do coeficiente de sensibilidade.

Os elementos fora da diagonal de $\mathbf{C}_p$ são as covariâncias que permitem, pelos coeficientes adimensionais de correlação, dados por:

$$r_{ij} = \frac{C_{p_{ij}}}{\sqrt{C_{p_{ii}} C_{p_{jj}}}} \quad -1 \leq r_{ij} \leq 1 \quad (2.76)$$

estabelecer medidas de correlações lineares entre os parâmetros.

Um coeficiente de correlação zero indica que não há correlação entre os parâmetros p_i e p_j , enquanto um valor maior que 0,9 indica alta correlação, ou seja, os dois parâmetros não devem ser determinados independentemente. Por exemplo, se dois parâmetros são correlacionados, uma mesma resposta do

modelo pode ser obtida pelo acréscimo de um parâmetro e decréscimo do outro (Velloso, 2000).

Nos casos com baixos coeficientes de sensibilidade ou com alta correlação entre parâmetros, pode-se utilizar as informações dessas análises para propor um projeto de instrumentação adequado. Em alguns desses casos os problemas ocorrem devido ao modelo utilizado, sendo necessário modificar o modelo.

Ao final do processo, pode-se ainda determinar o intervalo de confiança dos parâmetros e os resíduos finais.

De acordo com (Benjamin e Cornell, 1970), o intervalo de confiança dos parâmetros pode ser dado por:

$$\left(p_i - \sqrt{C_{p_{ii}}} t_{(\alpha/2, m-n)} \right) \text{ a } \left(p_i + \sqrt{C_{p_{ii}}} t_{(\alpha/2, m-n)} \right) \quad (2.77)$$

em que $t_{(\alpha/2, m-n)}$ representa o valor da distribuição t de Student para o nível de confiança $(1-\alpha)100\%$ com $m-n$ graus de liberdade. Observa-se que esse intervalo não fica definido quando o número de medidas é igual ao número de parâmetros.

Os resíduos finais são a diferença entre os valores medidos e calculados com os parâmetros identificados, que nada mais é do que a função objetivo calculada no mínimo.

Os resíduos representam a soma de todos os erros do processo. Em problemas de identificação de parâmetros assume-se que o modelo matemático descreve o mais fielmente possível o sistema real, ou seja, não existem erros de modelo. Logo, a distribuição dos resíduos finais deve ser consistente com a distribuição dos erros de medidas (Finsterle e Persoff, 1997).

Conforme apresentado anteriormente, admite-se que os erros de medidas são variáveis aleatórias independentes, normalmente distribuídas com média nula, representados pela matriz de covariância ($\mathbf{C}_y$).

Se os erros de medidas estão apropriadamente descritos pela matriz $\mathbf{C}_y$ e se prevalece a hipótese de que não existem erros de modelo e numéricos, a razão entre a variância final do erro (s_0^2), equação (2.73), e a variância das medidas (σ_y^2) não deve ser muito diferente de 1 (Finsterle e Persoff, 1997). A comparação entre essas duas variâncias fornece uma medida do ajuste do modelo. Se a diferença entre esses valores for grande, é provável que o modelo matemático não esteja representando bem o sistema, ou que a hipótese sobre os erros de medidas não foram muito realistas, ou até mesmo que o sistema resultante não é bem condicionado numericamente (Finsterle e Pruess, 1995).

Capítulo 3

Problema de Referência

Neste capítulo apresenta-se um exemplo de aplicação do procedimento desenvolvido para identificação de parâmetros, com o método dos elementos finitos, em um problema de referência com resultados conhecidos. São estudadas as influências dos critérios de identificação, dos algoritmos de minimização, do número e da precisão das medidas, do refinamento da malha utilizada no modelo de elementos finitos e do modelo matemático na identificação dos parâmetros. Ressalta-se que as conclusões estabelecidas para o problema de referência não são imediatamente estendidas a outros problemas, mas têm como objetivo discutir uma série de questões relacionadas com a identificação de parâmetros.

O problema de referência corresponde a uma escavação simulada de um túnel. Esse mesmo problema foi estudado por (Ledesma, 1987) com as mesmas características geométricas utilizadas por Mair e Taylor *apud* (Ledesma, 1987) em um ensaio de modelo reduzido.

Trata-se da determinação de parâmetros físicos, módulo de elasticidade (E) e coeficiente de empuxo (K_0) em um maciço homogêneo e isótropo em regime elástico linear com um campo de tensões iniciais, que é gerado pela abertura instantânea de um túnel circular com as características indicadas na Figura 3.1.

Figura 3.1 – Características do maciço

Considera-se como medidas deslocamentos horizontais em alguns pontos da linha 1 e deslocamentos verticais em alguns pontos da linha 2, obtidas pelo método dos elementos finitos. São utilizados elementos de estado plano de deformação e considera-se material homogêneo e isótropo em regime elástico linear e carregamento caracterizado pelos esforços devidos ao alívio provocado pela abertura instantânea do túnel. A Figura 3.2 apresenta a geometria considerando a simetria, as condições de contorno e os parâmetros físicos do material admitidos na análise.

Figura 3.2 – Geometria, condições de contorno e parâmetros físicos do problema de referência

Para facilitar a interpretação da influência dos diversos fatores na identificação dos parâmetros do problema de referência são estudados cinco casos com distintas situações.

3.1 Caso 1

Utiliza-se este primeiro caso para descrever detalhadamente o procedimento desenvolvido. São considerados os critérios de identificação dos mínimos quadrados e da máxima verossimilhança, os métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt, e estudadas as influências do número de medidas e dos valores iniciais dos parâmetros.

Para o modelo de elementos finitos utilizam-se elementos de estado plano de deformação de 4 nós, obtendo-se um modelo com 90 nós e 148 graus de liberdade. Na Figura 3.3 são apresentadas a malha de elementos finitos e as condições de contorno.

Figura 3.3 – Malha de elementos finitos com a localização das 12 medidas consideradas

Adotam-se como medidas os valores dos deslocamentos horizontais dos pontos 1 a 7 e dos deslocamentos verticais dos pontos 8 a 12 obtidos da análise, pelo método dos elementos finitos, do problema bidimensional em estado plano de deformação com os dados indicados na Figura 3.2 e com a malha da Figura 3.3. Nessas condições, obtém-se o seguinte vetor dos deslocamentos, considerado como medidos:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} U_{x1} \\ U_{x2} \\ U_{x3} \\ U_{x4} \\ U_{x5} \\ U_{x6} \\ U_{x7} \\ U_{y8} \\ U_{y9} \\ U_{y10} \\ U_{y11} \\ U_{y12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \\ U_4 \\ U_5 \\ U_6 \\ U_7 \\ U_8 \\ U_9 \\ U_{10} \\ U_{11} \\ U_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3,089 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 5,483 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 1,691 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,727 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 4,340 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,816 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 2,047 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -3,529 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -3,881 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -4,591 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -5,946 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -6,653 \times 10^{-2} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

Esse mesmo modelo, com a malha da Figura 3.3, é utilizado para se obter os deslocamentos calculados.

Como se dispõe de 12 deslocamentos medidos, devem ser selecionados os 12 graus de liberdade do modelo que correspondem aos deslocamentos medidos e utilizar vetores e matrizes reduzidas.

Sendo assim, o vetor reduzido dos deslocamentos calculados ($\mathbf{U}'$) é formado apenas pelos 12 deslocamentos associados aos deslocamentos medidos, abaixo indicados com a numeração dos graus de liberdade da malha de elementos finitos adotada.

$$\mathbf{U}' = \begin{bmatrix} U_{104} \\ U_{100} \\ U_{96} \\ U_{94} \\ U_{92} \\ U_{90} \\ U_{88} \\ U_{148} \\ U_{145} \\ U_{139} \\ U_{136} \\ U_{135} \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

Nesse caso, a matriz de sensibilidade, equação (2.25), é de ordem 12×2 , 12 medidas e 2 parâmetros. A primeira coluna da matriz corresponde às derivadas $\frac{\partial U_i}{\partial E}$ e a segunda às derivadas $\frac{\partial U_i}{\partial K_0}$. Assim, a matriz de sensibilidade fica representada na iteração k por:

$$\mathbf{A}_k = [\mathbf{A}_{E_k} \quad \mathbf{A}_{K_{0k}}] \quad (3.3)$$

Conforme visto no item 2.3, quando se utiliza o método dos elementos finitos para um modelo elástico linear e as grandezas medidas são deslocamentos, a matriz de sensibilidade fica definida pela equação:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right) \quad (3.4)$$

Dessa forma, a primeira coluna da matriz de sensibilidade pode ser obtida por:

$$\mathbf{A}_{E_k} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(- \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \mathbf{U}_k \right) \quad (3.5)$$

pois o vetor das forças nodais não depende do parâmetro E .

Logo, para o cálculo desta coluna da matriz é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura ($\mathbf{K}_k$) e o vetor dos deslocamentos calculados

$(\mathbf{U}_k)$ em cada iteração, e a derivada da matriz de rigidez em relação ao módulo de elasticidade $\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E}\right)$, que independe da iteração. Com o problema sendo tratado como estado plano de deformação, a matriz de rigidez é linear em E . Assim, a derivada da matriz de rigidez em relação a E é a matriz de rigidez obtida resolvendo um problema auxiliar com o mesmo modelo matemático, considerando $E=1$.

Como a matriz de rigidez independe do parâmetro K_0 , a segunda coluna da matriz de sensibilidade é dada por:

$$\mathbf{A}_{K_{0k}} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial K_0} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0} \right) \quad (3.6)$$

Portanto, para se obter essa parcela da matriz é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura em cada iteração e a derivada do vetor das forças nodais em relação ao coeficiente de empuxo $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0}\right)$, que independe da iteração. Para determinar essa derivada, resolve-se um problema auxiliar com o mesmo modelo e um carregamento fictício definido apenas pelas componentes do carregamento que variam com K_0 , considerando $K_0=1$. Logo,

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0} = \mathbf{R}|_{K_0=1} = \mathbf{K} \mathbf{U}|_{K_0=1} \quad (3.7)$$

sendo $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez da estrutura e $\mathbf{U}|_{K_0=1}$ o vetor dos deslocamentos nodais gerados pelo carregamento fictício.

Da mesma forma que para o vetor dos deslocamentos calculados, das matrizes $\mathbf{A}_{E_k}$ e $\mathbf{A}_{K_{0k}}$ são obtidas as matrizes reduzidas $\mathbf{A}'_{E_k}$ e $\mathbf{A}'_{K_{0k}}$, que são formadas apenas pelos elementos das matrizes $\mathbf{A}_{E_k}$ e $\mathbf{A}_{K_{0k}}$ que correspondem aos graus de liberdade 104, 100, 96, 94, 92, 90, 88, 148, 145, 139, 136 e 135.

Ao se resolver o problema direto e os problemas auxiliares com o programa Adina, obtêm-se arquivos do tipo ASCII contendo os elementos das matrizes e dos vetores necessários no processo. Para o procedimento de identificação de parâmetros desenvolve-se uma rotina em Matlab que lê esses arquivos e monta as matrizes e vetores na forma adequada para o processo. Desenvolvem-se rotinas específicas de acordo com o critério de identificação e do método de minimização adotado.

3.1.1 Critério dos mínimos quadrados

O procedimento é semelhante ao esquema ilustrado na Figura 2.3 e, utilizando o critério dos mínimos quadrados e o método de Gauss-Newton, pode ser definido nas seguintes etapas:

- 1) relacionar os deslocamentos medidos $(\mathbf{U}^*_{(12 \times 1)})$, equação (3.1);
- 2) resolver o problema auxiliar no Adina com $E=1$, obtendo-se os elementos da derivada da matriz de rigidez $\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E}\right)$;
- 3) montar a derivada da matriz de rigidez $\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E}_{(148 \times 148)}\right)$;
- 4) resolver o problema auxiliar no Adina aplicando o carregamento fictício correspondente apenas a componentes do carregamento que variam com K_0 , considerando $K_0=1$, obtendo-se os elementos do vetor dos deslocamentos gerados pelo carregamento fictício $(\mathbf{U}|_{K_0=1})$;
- 5) montar o vetor dos deslocamentos $(\mathbf{U}|_{K_0=1(148 \times 1)})$;
- 6) obter a derivada do vetor dos carregamentos nodais:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0}_{(148 \times 1)} = \mathbf{K}_{(148 \times 148)} \mathbf{U}|_{K_0=1(148 \times 1)};$$
- 7) definir um valor inicial para os parâmetros $(\mathbf{p}_{0(2 \times 1)})$;

- 8) resolver o problema direto no Adina considerando o valor inicial dos parâmetros, obtendo-se os elementos do vetor dos deslocamentos calculados e os elementos da matriz de rigidez;
- 9) montar a matriz de rigidez da estrutura $(\mathbf{K}_{k(148 \times 148)})$;
- 10) montar o vetor dos deslocamentos calculados $(\mathbf{U}_{k(148 \times 1)})$ e o vetor reduzido dos deslocamentos calculados $(\mathbf{U}'_{k(12 \times 1)})$;
- 11) obter o vetor das diferenças entre os deslocamentos medidos e os calculados: $\Delta \mathbf{U}_{k(12 \times 1)} = \mathbf{U}^*_{(12 \times 1)} - \mathbf{U}'_{k(12 \times 1)}$;
- 12) calcular a matriz de sensibilidade em relação ao parâmetro E :

$$\mathbf{A}_{Ek(148 \times 1)} = \mathbf{K}_{k(148 \times 148)}^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E}_{(148 \times 148)} \mathbf{U}_{k(148 \times 1)} \right)$$
 e obter a matriz reduzida $(\mathbf{A}'_{Ek(12 \times 1)})$;
- 13) calcular a matriz de sensibilidade em relação ao parâmetro K_0 :

$$\mathbf{A}_{K_0k(148 \times 1)} = \mathbf{K}_{k(148 \times 148)}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0} \right)_{(148 \times 1)}$$
 e obter a matriz reduzida $(\mathbf{A}'_{K_0k(12 \times 1)})$;
- 14) obter a matriz de sensibilidade: $\mathbf{A}_{k(12 \times 2)} = [\mathbf{A}'_{Ek(12 \times 1)} \quad \mathbf{A}'_{K_0k(12 \times 1)}]$;
- 15) obter o vetor dos incrementos dos parâmetros:

$$\Delta \mathbf{p}_{k(2 \times 1)} = (\mathbf{A}_{k(2 \times 12)}^T \mathbf{A}_{k(12 \times 2)})_{(2 \times 2)}^{-1} \mathbf{A}_{k(2 \times 12)}^T \Delta \mathbf{U}_{k(12 \times 1)}$$
;
- 16) obter os novos parâmetros: $\mathbf{p}_{k+1(2 \times 1)} = \mathbf{p}_{k(2 \times 1)} + \Delta \mathbf{p}_{k(2 \times 1)}$;
- 17) calcular a função objetivo: $F = [\mathbf{U}^* - \mathbf{U}]^T [\mathbf{U}^* - \mathbf{U}]$;
- 18) calcular o erro relativo $\varepsilon = \frac{\|\Delta \mathbf{p}_k\|}{\|\mathbf{p}_k\|}$;
- 19) verificar se $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ e $F_k \leq F_{k-1}$, em caso afirmativo $\mathbf{p} = \mathbf{p}_{k+1}$. Caso contrário, repetir os procedimentos 7 a 18, com $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_{k+1}$ até $\varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$.

Nesses estudos, adota-se $\bar{\varepsilon} = 1\%$.

Uma segunda estimativa dos parâmetros pode ser obtida com o método de Levenberg-Marquardt. O procedimento é o mesmo que o descrito para o método de Gauss-Newton, sendo a única diferença o cálculo do vetor dos incrementos dado por:

$$\Delta \mathbf{p}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{A}_k + \lambda_k \mathbf{D}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \Delta \mathbf{U}_k \quad (3.8)$$

em que λ é um escalar positivo variável em cada iteração e a matriz $\mathbf{D}$ é uma matriz diagonal de ordem 2 com os elementos iguais aos elementos da diagonal da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$. Inicia-se o processo com $\lambda = 10$, dividindo-o por 100 em cada iteração.

Para os dois critérios, iniciando o processo com $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$, obtêm-se os valores exatos dos parâmetros considerados na análise, conforme ilustra a Tabela 3.1.

Tabela 3.1 – Resultados obtidos no caso 1 com o critério dos mínimos quadrados

Processo utilizado	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
Gauss-Newton	$E = 10,000 \text{ MPa}$	$8,289 \times 10^{-11}$	0,39%
	$K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-12}$	4
Levenberg-Marquardt	$E = 10,000 \text{ MPa}$	$8,289 \times 10^{-11}$	0,41%
	$K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-12}$	6

3.1.1.1 Obtenção gráfica do mínimo

Como se tem apenas 2 parâmetros, pode-se representar a função objetivo mediante curvas de nível e obter o mínimo graficamente.

Como o modelo matemático utilizado é um modelo linear nos parâmetros identificados, é possível estabelecer uma expressão explícita para o

cálculo dos deslocamentos em função dos parâmetros utilizando o princípio da superposição dos efeitos:

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \frac{1}{E} \mathbf{U}_0 + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1 \right) \quad (3.9)$$

em que $\mathbf{U}_0$ é o vetor dos deslocamentos obtidos resolvendo o modelo para $E=1$ e considerando apenas o carregamento vertical γh , e $\mathbf{U}_1$ é o vetor dos deslocamentos obtidos considerando $E=1$ e aplicando somente o carregamento horizontal $K_0 \gamma h$, com $K_0=1$.

Utilizando o critério dos mínimos quadrados, equação (2.4), para definir a função objetivo, tem-se:

$$F(\mathbf{p}) = \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_0 + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_1 \right) \right) \right]^T \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_0 + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_1 \right) \right) \right] \quad (3.10)$$

em que $\mathbf{U}^*$ é o vetor dos deslocamentos medidos, $\mathbf{U}'_0$ é o vetor reduzido do vetor $\mathbf{U}_0$, formado apenas pelos deslocamentos calculados correspondentes aos deslocamentos medidos e, da mesma forma, $\mathbf{U}'_1$ é o vetor reduzido do vetor $\mathbf{U}_1$.

Com a função objetivo definida pela equação (3.10), pode-se traçar as curvas de nível dessa função em um intervalo dos parâmetros. A Figura 3.4 ilustra essas curvas de nível. Percebe-se que o mínimo está bem definido.

Figura 3.4 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados no caso 1

Outra forma de se obter as curvas de nível seria resolver o problema direto para cada ponto da função objetivo com os parâmetros E e K_0 correspondentes e calcular a norma do vetor das diferenças entre os deslocamentos medidos e calculados. Esse procedimento não é utilizado neste trabalho, mas seria imprescindível na obtenção de curvas de nível quando não se dispõe da função objetivo explícita.

3.1.2 Critério da máxima verossimilhança

Pode-se modificar o problema utilizando o critério da máxima verossimilhança, que considera a precisão das medidas. A função objetivo definida com esse critério tem a forma:

$$F(\mathbf{p}) = [\mathbf{U}^* - \mathbf{U}(\mathbf{p})]^T \mathbf{C}_U^{-1} [\mathbf{U}^* - \mathbf{U}(\mathbf{p})] \quad (3.11)$$

em que $\mathbf{C}_U$ é a matriz de covariância dos deslocamentos medidos.

Nesse estudo, considera-se que as medidas verticais têm uma variância diferente das medidas horizontais. Se as medidas são independentes, entre

grupos e dentro de cada grupo de medidas, a matriz de covariância é proporcional à matriz identidade, com os elementos dados pela variância das medidas.

Dessa forma, a inversa da matriz de covariância pode ser interpretada como uma matriz de pesos para as medidas, dando um peso menor às medidas com uma variância maior.

O procedimento para identificação dos parâmetros é o mesmo que o descrito na seção 3.1.1, exceto quando se trata do vetor dos incrementos que, utilizando o método de Gauss-Newton, é dado por:

$$\Delta \mathbf{p}_k = (\mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_U^{-1} \mathbf{A}_k)^{-1} \mathbf{A}_k^T \mathbf{C}_U^{-1} \Delta \mathbf{U}_k \quad (3.12)$$

Considera-se, primeiramente, que as medidas verticais têm uma variância 16 vezes maior que as horizontais. Assim, a matriz de covariância das medidas, aqui denominada $\mathbf{C}_{U(1/16)}$, tem a forma:

$$\mathbf{C}_{U(1/16)} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 16 \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

Em um segundo caso, admite-se que as medidas horizontais têm uma variância 16 vezes maior que as verticais, dando agora mais importância às medidas verticais. A matriz de covariância, agora denominada $\mathbf{C}_{U(16/1)}$, é semelhante à apresentada em (3.13), trocando os valores 1 por 16 e vice-versa.

Novamente, admite-se $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$ e obtêm-se os valores exatos dos parâmetros. A Tabela 3.2 apresenta os resultados.

Tabela 3.2 – Resultados obtidos no caso 1 com o critério da máxima verossimilhança

Descrição	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
Medidas verticais com maior variância	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$5,173 \times 10^{-11}$ $5,173 \times 10^{-12}$	0,38% 4
Medidas horizontais com maior variância	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$3,634 \times 10^{-11}$ $3,634 \times 10^{-12}$	0,39% 4

3.1.2.1 Obtenção gráfica do mínimo

Novamente, utilizando o princípio da superposição dos efeitos, pode-se definir explicitamente a função objetivo. Com o critério da máxima verossimilhança, a equação (3.10) torna-se:

$$F(\mathbf{p}) = \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_0 + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_1 \right) \right) \right]^T \mathbf{C}_U^{-1} \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_0 + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}'_1 \right) \right) \right] \quad (3.14)$$

sendo $\mathbf{C}_U$ a matriz de covariância das medidas.

Com a função objetivo assim definida, pode-se traçar as curvas de nível e determinar o mínimo graficamente. Na Figura 3.5 (a) apresenta-se as curvas de nível obtidas considerando as medidas verticais com uma variância maior, e em (b), considerando as medidas horizontais com uma maior variância.

Figura 3.5 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério da máxima verossimilhança no caso 1

3.1.3 Influência do número de medidas

Neste item estuda-se a influência do número de medidas. Além das 12 medidas anteriormente utilizadas, são considerados mais três grupos de medidas:

- 24 medidas ilustradas na Figura 3.6, sendo 15 horizontais (1 a 15) e 9 verticais (16 a 24);

- 6 medidas, sendo as medidas horizontais dos pontos 1, 7, 11 e 15 e as verticais dos pontos 16 e 24;
- 2 medidas, sendo a horizontal do ponto 11 e a vertical do ponto 24.

Figura 3.6 – Malha de elementos finitos com a localização das 24 medidas consideradas

Considerando o critério dos mínimos quadrados, o método de Gauss-Newton e $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$, obtêm-se os valores exatos dos parâmetros. A Tabela 3.3 apresenta os resultados, incluindo os obtidos anteriormente para 12 medidas.

Tabela 3.3 – Resultados obtidos no caso 1 no estudo da influência do número de medidas

Descrição	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
Mínimos quadrados (12 medidas)			
Gauss-Newton	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,39% 4
Levenberg-Marquardt	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,41% 6
Influência do número de medidas Mínimos quadrados com Gauss-Newton			
24 medidas	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$1,888 \times 10^{-10}$ $8,583 \times 10^{-12}$	0,39% 4
6 medidas	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$6,766 \times 10^{-11}$ $1,692 \times 10^{-11}$	0,39% 4
2 medidas	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$1,381 \times 10^{-11}$ -	0,39% 4

3.1.3.1 Obtenção gráfica do mínimo

Novamente, pode-se estabelecer as funções explícitas $F(\mathbf{p})$, que com o critério dos mínimos quadrados ficam definidas pela equação (3.10), variando o número de elementos dos vetores $\mathbf{U}^*$, $\mathbf{U}'_0$ e $\mathbf{U}'_1$ de acordo com o número de medidas consideradas. A Figura 3.7 apresenta as curvas de nível assim estabelecidas, sendo em (a) para 24 medidas, em (b) para 12 medidas (Figura 3.4), em (c) para 6 medidas e em (d) para 2 medidas.

(a)

(b)

(c)

(d)

Figura 3.7 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 1

Analisando as curvas de nível da Figura 3.7, percebe-se que o número de medidas não influencia na melhor definição do mínimo.

3.1.4 Influência do valor inicial dos parâmetros

Ainda nesse exemplo, pode-se avaliar a influência do valor inicial dos parâmetros no processo iterativo.

São realizados mais três estudos utilizando o método de Gauss-Newton com o critério dos mínimos quadrados considerando 12 medidas, com $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 15 \text{ MPa} \\ 1,5 \end{bmatrix}$, $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 12 \text{ MPa} \\ 0,8 \end{bmatrix}$ e $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 4 \text{ MPa} \\ 1,2 \end{bmatrix}$. Em todos os casos houve convergência para o valor exato, conforme se observa na Tabela 3.4. Repetem-se os resultados apresentados na Tabela 3.1, obtidos com o critério dos mínimos quadrados admitindo $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$.

Tabela 3.4 – Resultados obtidos no caso 1 no estudo da influência do valor de $\mathbf{p}_0$

Valor inicial dos parâmetros	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,39% 4
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 15 \text{ MPa} \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,39% 4
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 12 \text{ MPa} \\ 0,8 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,16% 3
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 4 \text{ MPa} \\ 1,2 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,02% 5

A Figura 3.8 apresenta a variação do parâmetro E com as iterações e, de maneira análoga, na Figura 3.9 para o parâmetro K_0 . Neste estudo, o valor

inicial dos parâmetros não influencia os resultados, sendo a única diferença o número de iterações.

Figura 3.8 – Variação do parâmetro E com as iterações

Figura 3.9 – Variação do parâmetro K_0 com as iterações

Nas figuras 3.10 e 3.11 ilustram-se os coeficientes de sensibilidade calculados com os valores iniciais dos parâmetros.

Figura 3.10 – Coeficientes de sensibilidade em relação a E calculados com os diferentes valores iniciais

Figura 3.11 – Coeficientes de sensibilidade em relação a K_0 calculados com os diferentes valores iniciais

Percebe-se que as curvas, tanto em relação a E quanto em relação a K_0 , têm o mesmo comportamento, independente do valor inicial considerado. Os maiores coeficientes de sensibilidade em relação a E ocorrem nos pontos de medida 5 e 12, e em relação a K_0 , nos pontos 5 e 10.

3.1.4.1 Obtenção gráfica do mínimo

Novamente, a função objetivo pode ser obtida de forma explícita e fica definida pela equação (3.10). Como se consideram 12 medidas neste estudo do valor inicial dos parâmetros, as curvas de nível da função objetivo são as apresentadas na Figura 3.4. Repetem-se essas curvas de nível na Figura 3.12, ilustrando-se os quatro pares de valores iniciais dos parâmetros.

Figura 3.12 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados no caso 1, com os pares de valores iniciais dos parâmetros

3.1.5 Análise dos resultados

Reapresentam-se na Tabela 3.5 os valores dos parâmetros estimados (E e K_0), da função objetivo calculada no mínimo ($F_{\text{mínimo}}$), da variância final do erro (s_0^2), do erro relativo e do número de iterações do processo iterativo dos diversos estudos do caso 1.

Tabela 3.5 – Resultados obtidos no caso 1

Descrição	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
Mínimos quadrados (12 medidas)			
Gauss-Newton	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,39% 4
Levenberg-Marquardt	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,41% 6
Máxima verossimilhança com Gauss-Newton (12 medidas)			
Medidas verticais com maior variância	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$5,173 \times 10^{-11}$ $5,173 \times 10^{-12}$	0,38% 4
Medidas horizontais com maior variância	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$3,634 \times 10^{-11}$ $3,634 \times 10^{-12}$	0,39% 4
Influência do número de medidas			
Mínimos quadrados com Gauss-Newton			
24 medidas	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$1,888 \times 10^{-10}$ $8,583 \times 10^{-12}$	0,39% 4
6 medidas	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$6,766 \times 10^{-11}$ $1,692 \times 10^{-11}$	0,39% 4
2 medidas	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$1,381 \times 10^{-11}$ -	0,39% 4
Influência do valor de $\mathbf{p}_0$			
Mínimos quadrados com Gauss-Newton (12 medidas)			
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 15 \text{ MPa} \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,39% 4
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 12 \text{ MPa} \\ 0,8 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,16% 3
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 4 \text{ MPa} \\ 1,2 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000$	$8,289 \times 10^{-11}$ $8,289 \times 10^{-12}$	0,02% 5

O símbolo “-” que aparece na tabela quando se consideram duas medidas é devido ao valor da variância final do erro (s_0^2) não poder ser estimado pela equação (2.73), pois o número de medidas é igual ao número de parâmetros. Esse símbolo será utilizado sempre que alguma grandeza não puder ser calculada.

Nesse problema estudado, o método de Levenberg-Marquardt não apresenta vantagens em relação ao método de Gauss-Newton, uma vez que necessita de um número maior de iterações. Normalmente, quando não existem problemas de convergência, o método de Gauss-Newton converge em menos iterações. Dessa forma, opta-se por utilizar o método de Gauss-Newton nos estudos realizados nesse problema.

A Figura 3.13 apresenta os coeficientes de sensibilidade calculados no mínimo da função objetivo definida com 12 medidas. Percebe-se que as curvas têm o mesmo comportamento das obtidas com os valores iniciais dos parâmetros, ilustradas nas figuras 3.10 e 3.11, com maiores coeficientes de sensibilidade na medida horizontal 5 e na medida vertical 12. Conforme apresentado no estudo da influência do número de medidas, apenas essas duas medidas são suficientes para identificar os parâmetros E e K_0 .

Figura 3.13 – Coeficientes de sensibilidade

A análise dos resultados se efetua com a análise do número de condição, dos desvios padrão de E e K_0 , dos coeficientes de variação de E e de K_0 e do coeficiente de correlação entre esses parâmetros. Apresenta-se na Tabela 3.6 a análise dos resultados para as várias condições do caso 1.

Cabe lembrar que, quando se consideram duas medidas, utiliza-se o valor da variância dos resíduos finais para se obter a matriz de covariância dos parâmetros estimados, ou seja, $\mathbf{C}_p = \sigma_r^2 [\mathbf{A}^T \mathbf{A}]^{-1}$. Esse valor da variância encontra-se na Tabela 3.7.

Nos casos em que se considera o critério da máxima verossimilhança, a matriz de covariância dos parâmetros estimados deve ser ponderada, pois não se dispõe dos valores dos desvios padrão das medidas horizontais e verticais, mas apenas da relação entre esses desvios. Para tanto, divide-se cada componente dessas matrizes por um valor médio, que pondera as medidas verticais e horizontais pelas suas variâncias, dado por:

$$\sigma_m = \frac{n_H(\sigma_H^2) + n_V(\sigma_V^2)}{n_H + n_V} \quad (3.15)$$

sendo n_H o número de medidas horizontais, n_V o número de medidas verticais, σ_H^2 a variância das medidas horizontais e σ_V^2 a variância das medidas verticais.

Tabela 3.6 – Análise dos resultados obtidos no caso 1

Descrição	Nº de condição	Desvio padrão	Coefficiente de variação	Coefficiente de correlação
Mínimos quadrados (12 medidas)				
Gauss-Newton	21,528	$\sigma_E = 2,237 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 5,095 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,005\%$	0,308
Levenberg-Marquardt	21,528	$\sigma_E = 2,237 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 5,095 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,005\%$	0,308
Máxima verossimilhança com Gauss-Newton (12 medidas)				
Medidas verticais com maior variância	248,217	$\sigma_E = 2,279 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 3,136 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,003\%$	0,884
Medidas horizontais com maior variância	6,362	$\sigma_E = 6,551 \times 10^{-5}$ MPa $\sigma_{K_0} = 3,596 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,000\%$ $r_{K_0} = 0,004\%$	-0,583
Influência do número de medidas Mínimos quadrados com Gauss-Newton				
24 medidas	22,737	$\sigma_E = 1,696 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 3,788 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,004\%$	0,325
6 medidas	25,165	$\sigma_E = 4,921 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 1,076 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,005\%$ $r_{K_0} = 0,011\%$	0,394
2 medidas	27,467	$\sigma_E = 4,206 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 8,835 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,004\%$ $r_{K_0} = 0,009\%$	0,403
Influência do valor de $\mathbf{p}_0$ Mínimos quadrados com Gauss-Newton (12 medidas)				
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 15 \text{ MPa} \\ 1,5 \end{bmatrix}$	21,528	$\sigma_E = 2,237 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 5,095 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,005\%$	0,308
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 12 \text{ MPa} \\ 0,8 \end{bmatrix}$	21,528	$\sigma_E = 2,237 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 5,095 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,005\%$	0,308
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 4 \text{ MPa} \\ 1,2 \end{bmatrix}$	21,528	$\sigma_E = 2,237 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 5,095 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,002\%$ $r_{K_0} = 0,005\%$	0,308

Os baixos valores obtidos do número de condição indicam a boa convergência dos procedimentos.

Intuitivamente, espera-se que um número maior de medidas facilite o processo iterativo, o que não acontece neste estudo. A forma da função objetivo, o número de condição e o coeficiente de correlação variaram pouco ao se aumentar ou se diminuir o número de medidas. Além disso, ao se aumentar o número de medidas, o valor da função objetivo calculada no mínimo também aumenta. Neste exemplo, as 12 medidas adicionadas podem ser consideradas redundantes, pois não fornecem nenhuma informação adicional.

Analisando os valores dos coeficientes de correlação percebe-se a baixa correlação entre os parâmetros na maioria dos casos. Quando se considera que as medidas verticais têm maior variância que as horizontais, encontra-se o maior coeficiente de correlação e também o maior valor do número de condição. Esses resultados indicam que é desaconselhável que as medidas verticais tenham uma maior variância, ou ainda, que se utilize apenas medidas horizontais.

Conforme esperado, obtêm-se valores baixos dos desvios padrão e dos coeficientes de variação dos parâmetros estimados, indicando uma dispersão quase nula desses parâmetros.

Para complementar a análise dos resultados, ilustram-se na Tabela 3.7 os intervalos de confiança dos parâmetros estimados, calculados considerando um nível de confiança de 95%. Para verificar os resíduos finais, apresenta-se também nessa tabela a variância dos resíduos finais e o resíduo médio.

Tabela 3.7 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 1

Descrição	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
Mínimos quadrados (12 medidas)			
Gauss-Newton	$E = 10,000 \pm 4,985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 1,135 \times 10^{-4}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$
Levenberg-Marquardt	$E = 10,000 \pm 4,985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 1,135 \times 10^{-4}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$
Máxima verossimilhança com Gauss-Newton (12 medidas)			
Medidas verticais com maior variância	$E = 10,000 \pm 5,077 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 6,988 \times 10^{-5}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$
Medidas horizontais com maior variância	$E = 10,000 \pm 1,460 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 8,012 \times 10^{-5}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$
Influência do número de medidas Mínimos quadrados com Gauss-Newton			
24 medidas	$E = 10,000 \pm 3,523 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 7,857 \times 10^{-5}$	$\bar{r} = 2,750 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 8,129 \times 10^{-12}$
6 medidas	$E = 10,000 \pm 1,366 \times 10^{-3} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 2,986 \times 10^{-4}$	$\bar{r} = 4,534 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 1,328 \times 10^{-11}$
2 medidas	- -	$\bar{r} = -1,493 \times 10^{-6}$	$\sigma_r^2 = 9,351 \times 10^{-12}$
Influência do valor de $\mathbf{p}_0$ Mínimos quadrados com Gauss-Newton (12 medidas)			
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 15 \text{ MPa} \\ 1,5 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \pm 4,985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 1,135 \times 10^{-4}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 12 \text{ MPa} \\ 0,8 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \pm 4,985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 1,135 \times 10^{-4}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$
$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 4 \text{ MPa} \\ 1,2 \end{bmatrix}$	$E = 10,000 \pm 4,985 \times 10^{-4} \text{ MPa}$ $K_0 = 1,000 \pm 1,135 \times 10^{-4}$	$\bar{r} = 4,573 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 7,304 \times 10^{-12}$

3.2 Caso 2

Nesse caso, estuda-se a influência do refinamento da malha de elementos finitos. Com uma malha bem refinada obtêm-se os deslocamentos considerados medidos e utiliza-se uma malha menos refinada para se obter os deslocamentos calculados.

A Figura 3.14 apresenta a malha de elementos finitos utilizada para se obter os deslocamentos medidos. Utilizam-se elementos de estado plano de deformação de 9 nós, obtendo-se um modelo com 2081 nós e 4007 graus de liberdade. São considerados os mesmos 12 pontos de medidas utilizados no caso 1.

Figura 3.14 – Malha refinada para se obter os deslocamentos medidos

Dessa forma, o vetor dos deslocamentos medidos é dado por:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 5,603 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 8,814 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 3,171 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,224 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 6,738 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,562 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,525 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -5,606 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -6,100 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -7,120 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -9,765 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -1,124 \times 10^{-1} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

Para a obtenção dos deslocamentos calculados são consideradas três malhas. A primeira é a malha definida no caso 1, Figura 3.3, com 90 nós e 148 graus de liberdade. Para a malha 2 admite-se a mesma discretização da malha 1, porém com elementos de estado plano de deformação de 9 nós, totalizando 319 nós e 577 graus de liberdade. A última malha, ilustrada na Figura 3.15, é um pouco mais refinada que as anteriores, definida com elementos de estado plano de deformação de 9 nós, com 545 nós e 1011 graus de liberdade.

Figura 3.15 – Malha 3 de elementos finitos

Considerando o critério dos mínimos quadrados, o método de Gauss-Newton e com o valor inicial $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 3.8.

Tabela 3.8 – Resultados obtidos no caso 2

Malha utilizada	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
Malha 1	$E = 6,189 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,925$	$1,178 \times 10^{-4}$ $1,178 \times 10^{-5}$	0,06% 3
Malha 2	$E = 9,876 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,991$	$1,998 \times 10^{-6}$ $1,998 \times 10^{-7}$	0,35% 4
Malha 3	$E = 10,017 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,999$	$9,742 \times 10^{-7}$ $9,742 \times 10^{-8}$	0,40% 4

Observa-se, conforme o esperado, que quanto mais refinada a malha, melhores são os resultados. Os valores obtidos com a malha menos refinada (malha 1) estão distantes dos esperados. Não se encontram variações significativas do número de iterações e do erro relativo com as diferentes malhas.

3.2.1 Obtenção gráfica do mínimo

Com a expressão explícita da função objetivo, definida na equação (3.10), pode-se traçar as curvas de nível e obter graficamente o mínimo da função. A Figura 3.16 ilustra as curvas de nível obtidas, considerando em (a) a malha 1, em (b) a malha 2 e em (c) a malha 3. Ressalta-se que os valores dos parâmetros que caracterizam o mínimo nessas curvas são os obtidos no processo iterativo, apresentados na Tabela 3.8.

(a)

(b)

(c)

Figura 3.16 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 2

Percebe-se que o mínimo está melhor definido ao considerar a malha 1, porém os valores desse mínimo estão longe dos esperados. Um mínimo bem definido é condição necessária, mas não suficiente para garantir bons resultados.

3.2.2 Análise dos resultados

A Tabela 3.9 apresenta os valores dos números de condição, dos desvios padrão, dos coeficientes de variação e dos coeficientes de correlação dos parâmetros estimados.

Tabela 3.9 – Análise dos resultados obtidos no caso 2

Malha utilizada	Nº de condição	Desvio padrão	Coeficiente de variação	Coeficiente de correlação
Malha 1	8,377	$\sigma_E = 1,023 \times 10^{-1} \text{ MPa}$ $\sigma_{K_0} = 3,722 \times 10^{-2}$	$r_E = 1,653\%$ $r_{K_0} = 4,024\%$	0,278
Malha 2	22,699	$\sigma_E = 2,377 \times 10^{-2} \text{ MPa}$ $\sigma_{K_0} = 5,910 \times 10^{-3}$	$r_E = 0,241\%$ $r_{K_0} = 0,596\%$	0,513
Malha 3	23,427	$\sigma_E = 1,692 \times 10^{-2} \text{ MPa}$ $\sigma_{K_0} = 4,162 \times 10^{-3}$	$r_E = 0,169\%$ $r_{K_0} = 0,417\%$	0,520

Observa-se que um valor baixo do número de condição e do coeficiente de correlação nem sempre indica uma boa estimativa dos parâmetros. Com a malha 1, por exemplo, obtêm-se os menores valores do número de condição e do coeficiente de correlação. Porém, conforme analisado na Tabela 3.8, os valores dos parâmetros identificados, $E = 6,189 \text{ MPa}$ e $K_0 = 0,925$, estão longe dos esperados, $E = 10 \text{ MPa}$ e $K_0 = 1$.

Por outro lado, a análise dos demais resultados indica que a malha 1 tem os piores resultados, ou seja, os maiores valores do desvio padrão e de coeficiente de variação dos parâmetros estimados. Confirma-se a importância da análise desses fatores.

A Tabela 3.10 complementa a análise dos resultados com os intervalos de confiança dos parâmetros estimados, obtidos considerando um nível de confiança de 95%, e com a análise dos resíduos finais.

Tabela 3.10 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 2

Malha utilizada	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
Malha 1	$E = 6,189 \pm 0,228 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,925 \pm 0,083$	$\bar{r} = 5,495 \times 10^{-4}$	$\sigma_r^2 = 1,038 \times 10^{-5}$
Malha 2	$E = 9,876 \pm 0,053 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,991 \pm 0,013$	$\bar{r} = 4,514 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 1,794 \times 10^{-7}$
Malha 3	$E = 10,017 \pm 0,038 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,999 \pm 0,009$	$\bar{r} = -5,701 \times 10^{-6}$	$\sigma_r^2 = 8,852 \times 10^{-8}$

Percebe-se claramente a influência da malha nos resultados obtidos. Utilizar uma malha pouco refinada pode alterar significativamente os resultados. Quanto mais refinada a malha, melhores são os resultados. Entretanto, não existem regras que determinem quando uma malha está bem refinada. Pode-se adotar, por exemplo, que quando os resultados variam, entre uma malha e outra, em torno de 1%, a malha está suficientemente refinada.

Nesse exemplo, obtêm-se os melhores valores para os parâmetros identificados com a malha 3. Como utilizar essa malha não acarreta em maiores tempos de processamento, adota-se a malha 3 nos estudos que se seguem.

3.3 Caso 3

O objetivo nesse caso é estudar a influência dos erros de medidas. Os deslocamentos obtidos com a malha refinada, Figura 3.14, são agora perturbados para considerar erros de medidas. Aos deslocamentos obtidos com essa malha, equação (3.16), é somada uma componente aleatória com distribuição normal, média nula e um dado desvio padrão. Considera-se para a componente aleatória somada às medidas verticais um desvio padrão de 0,001 m, e às horizontais, um desvio padrão de 0,002 m. Nessas condições, são gerados pelo Matlab três grupos de componentes aleatórias que conduzem aos seguintes vetores de deslocamentos considerados medidos:

$$\mathbf{U}_1^* = \begin{bmatrix} 4,738 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 5,483 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 3,196 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,282 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 6,509 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,800 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,763 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -5,602 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -6,133 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -7,137 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -9,746 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -1,131 \times 10^{-1} \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_2^* = \begin{bmatrix} 4,426 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 1,318 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,144 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,247 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 6,951 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,574 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,506 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -5,523 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -6,129 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -6,986 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -9,836 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -1,140 \times 10^{-1} \text{ m} \end{bmatrix} \quad \mathbf{U}_3^* = \begin{bmatrix} 4,219 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 1,053 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,422 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 4,905 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 6,450 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 5,676 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 3,445 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -5,675 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -6,182 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -7,191 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -9,894 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -1,131 \times 10^{-1} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

Para se obter os deslocamentos calculados utiliza-se a malha 3 do caso 2, Figura 3.15.

Utilizando o procedimento descrito anteriormente com o método de Gauss-Newton e o critério dos mínimos quadrados, considerando $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$, encontram-se os valores ilustrados na Tabela 3.11. Os resultados obtidos com a malha 3 no caso 2 são também apresentados nessa tabela, pois a malha 3 é a mesma malha aqui utilizada para se obter os deslocamentos

calculados. Dessa forma, pode-se comparar os resultados obtidos com as medidas exatas com os obtidos considerando medidas perturbadas.

Tabela 3.11 – Resultados obtidos no caso 3

Descrição	Parâmetros estimados	$F_{\minimo}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
12 medidas exatas			
Malha 3	$E = 10,017 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,999$	$9,742 \times 10^{-7}$ $9,742 \times 10^{-8}$	0,40% 4
12 medidas perturbadas			
U_1^*	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,007$	$3,105 \times 10^{-5}$ $3,105 \times 10^{-6}$	0,39% 4
U_2^*	$E = 9,980 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,013$	$2,496 \times 10^{-5}$ $2,496 \times 10^{-6}$	0,39% 4
U_3^*	$E = 9,914 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,961$	$2,889 \times 10^{-5}$ $2,889 \times 10^{-6}$	0,37% 4

Percebe-se que mesmo considerando os erros de medidas, os parâmetros obtidos estão bem próximos dos valores exatos. Comparando-os com os resultados obtidos com as medidas exatas observa-se apenas uma diferença no mínimo da função objetivo.

3.3.1 Obtenção gráfica do mínimo

Novamente, pode-se obter as curvas de nível da função objetivo definida explicitamente na equação (3.10) considerando os deslocamentos medidos U_1^* , U_2^* e U_3^* , e obter o mínimo graficamente. Essas curvas de nível estão ilustradas na Figura 3.17, sendo em (b) para os deslocamentos medidos U_1^* , em (c) para U_2^* e em (d) para U_3^* . Em (a) repetem-se as curvas de nível da função objetivo definida com a malha 3 no caso 2 (Figura 3.16 (c)). Cabe lembrar que os valores dos parâmetros que estão representando o mínimo são os obtidos com o processo iterativo.

Figura 3.17 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 3

Constata-se que não existem diferenças na definição do mínimo ao se considerar erros de medidas.

3.3.2 Análise dos resultados

A análise dos resultados obtidos no caso 3 está apresentada na Tabela 3.12, incluindo o número de condição, o desvio padrão e o coeficiente de variação dos parâmetros estimados, e o coeficiente de correlação desses parâmetros. Apresentam-se também os valores obtidos com a malha 3 do caso 2.

Tabela 3.12 – Análise dos resultados obtidos no caso 3

Descrição	Nº de condição	Desvio padrão	Coeficiente de variação	Coeficiente de correlação
12 medidas exatas				
Malha 3	23,427	$\sigma_E = 1,692 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 4,162 \times 10^{-3}$	$r_E = 0,169\%$ $r_{K_0} = 0,417\%$	0,520
12 medidas perturbadas				
U_1^*	23,359	$\sigma_E = 9,517 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,349 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,952\%$ $r_{K_0} = 2,332\%$	0,522
U_2^*	23,276	$\sigma_E = 8,498 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,105 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,852\%$ $r_{K_0} = 2,080\%$	0,524
U_3^*	22,917	$\sigma_E = 9,023 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,225 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,910\%$ $r_{K_0} = 2,316\%$	0,508

Percebe-se que ao se considerar erros de medidas obtêm-se valores mais altos dos desvios padrão e dos coeficientes de variação dos parâmetros estimados. Os erros de medidas não influenciam os números de condição e os coeficientes de correlação.

Os intervalos de confiança, calculados admitindo um nível de confiança de 95%, e a análise dos resíduos finais estão apresentados na Tabela 3.13.

Tabela 3.13 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 3

Descrição	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
12 medidas			
Malha 3	$E = 10,017 \pm 0,038 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,999 \pm 0,009$	$\bar{r} = -5,701 \times 10^{-6}$	$\sigma_r^2 = 8,852 \times 10^{-8}$
12 medidas perturbadas			
$\mathbf{U}_1^*$	$E = 10,000 \pm 0,212 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,007 \pm 0,052$	$\bar{r} = -2,367 \times 10^{-4}$	$\sigma_r^2 = 2,761 \times 10^{-6}$
$\mathbf{U}_2^*$	$E = 9,980 \pm 0,189 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,013 \pm 0,047$	$\bar{r} = 2,585 \times 10^{-4}$	$\sigma_r^2 = 2,196 \times 10^{-6}$
$\mathbf{U}_3^*$	$E = 9,914 \pm 0,201 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,961 \pm 0,050$	$\bar{r} = 6,235 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 2,622 \times 10^{-6}$

A perturbação das medidas equivale aos erros de medidas que ocorrem em um caso real. Nesse exemplo, os valores dos parâmetros identificados, do número de condição e do coeficiente de correlação não são afetados significativamente pelos erros de medidas. Encontra-se uma pequena variação dos desvios padrão e dos coeficientes de variação dos parâmetros estimados, dos intervalos de confiança e da análise dos resíduos ao se considerar os erros de medidas.

Conforme citado no Capítulo 2, a comparação da variância final do erro (s_0^2) com a variância das medidas (σ_u^2) fornece uma medida da adequação do modelo. Os valores de s_0^2 variam entre $2,496 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ e $3,105 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ e tem-se $\sigma_{U_v}^2 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ para as medidas verticais e $\sigma_{U_h}^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ para as medidas horizontais. Logo, uma análise global da razão entre os valores médios de s_0^2 e σ_u^2 assume valores próximos de 1, indicando que não há problemas com o modelo.

3.4 Caso 4

Novamente, aos deslocamentos obtidos com a malha refinada, Figura 3.14, são somados valores correspondentes a uma componente aleatória com distribuição normal, com média nula e um dado desvio padrão, para simular erros de medidas. O objetivo é estudar a influência do número e da posição das medidas.

Como no caso 3, admite-se para a componente aleatória somada às medidas verticais um desvio padrão de 0,001 m, e às horizontais um desvio padrão de 0,002 m. Nessas condições, são gerados pelo Matlab os grupos de componentes aleatórios que, somados aos deslocamentos obtidos pela análise com o método dos elementos finitos com a malha da Figura 3.14, resultam nos deslocamentos considerados medidos.

Além das 12 medidas admitidas no caso 3, são considerados mais quatro grupos de medidas:

- 24 medidas ilustradas na Figura 3.6;
- 6 medidas escolhidas baseando-se nos coeficientes de sensibilidade plotados na Figura 3.13, que são as medidas horizontais 4, 5, 6 e 7 e as verticais 11 e 12 da Figura 3.15;
- 2 medidas com os maiores coeficientes de sensibilidade, medidas 5 e 12;
- 2 medidas localizadas em posições semelhantes às medidas existentes do túnel Hudvudsta (Capítulo 4), ilustradas na Figura 3.18.

Figura 3.18 – Localização das 2 medidas semelhante à do túnel Hudvudsta

Para o cálculo dos deslocamentos utiliza-se a malha 3 do caso 2 (Figura 3.15).

Utilizando o critério dos mínimos quadrados, o método de Gauss-Newton e considerando $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$, obtêm-se os resultados apresentados na Tabela 3.14.

Os resultados referentes ao estudo que considera as duas medidas em posição semelhante às do túnel Hudvudsta estão representados nas tabelas por 2 medidas (TH). Apresentam-se novamente os resultados obtidos considerando as 12 medidas perturbadas.

Tabela 3.14 – Resultados obtidos no caso 4

Descrição	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
12 medidas perturbadas			
U_1^*	$E = 10,000 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,007$	$3,105 \times 10^{-5}$ $3,105 \times 10^{-6}$	0,39% 4
U_2^*	$E = 9,980 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,013$	$2,496 \times 10^{-5}$ $2,496 \times 10^{-6}$	0,39% 4
U_3^*	$E = 9,914 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,961$	$2,889 \times 10^{-5}$ $2,889 \times 10^{-6}$	0,37% 4
Influência do número e posição das medidas perturbadas			
24 medidas	$E = 9,986 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,017$	$5,513 \times 10^{-5}$ $5,506 \times 10^{-6}$	0,39% 4
6 medidas	$E = 10,041 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,977$	$1,146 \times 10^{-5}$ $2,864 \times 10^{-6}$	0,40% 4
2 medidas	$E = 10,216 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,004$	$1,053 \times 10^{-11}$ -	0,47% 4
2 medidas (TH)	$E = 10,033 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,001$	$1,211 \times 10^{-9}$ -	0,40% 4

O número de medidas influencia pouco os resultados. Novamente, apenas duas medidas mostram-se suficientes para identificar os parâmetros. Cabe lembrar que isso ocorre porque as duas medidas escolhidas são as que apresentam os maiores coeficientes de sensibilidade.

3.4.1 Obtenção gráfica do mínimo

As curvas de nível da função objetivo definida explicitamente na equação (3.10), para os grupos de medidas considerados, estão ilustradas na Figura 3.19, sendo em (a) considerando U_1^* , em (b) U_2^* , em (c) U_3^* , em (d) 24 medidas, em (e) 6 medidas, em (f) 2 medidas e em (g) 2 medidas (TH). Novamente, os valores que estão caracterizando o mínimo na Figura 3.19 são os obtidos com o processo iterativo.

Figura 3.19 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados nos casos 3 e 4

Percebe-se que o número de medidas consideradas não influencia na definição do mínimo.

3.4.2 Análise dos resultados

Na Tabela 3.15 apresenta-se a análise dos resultados do caso 4 e repete-se a análise dos resultados do caso 3, no qual são consideradas 12 medidas perturbadas.

Tabela 3.15 – Análise dos resultados obtidos nos casos 3 e 4

Descrição	Nº de condição	Desvio padrão	Coeficiente de variação	Coeficiente de correlação
12 medidas perturbadas				
U_1^*	23,359	$\sigma_E = 9,517 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,349 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,952\%$ $r_{K_0} = 2,332\%$	0,522
U_2^*	23,276	$\sigma_E = 8,498 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,105 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,852\%$ $r_{K_0} = 2,080\%$	0,524
U_3^*	22,917	$\sigma_E = 9,023 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,225 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,910\%$ $r_{K_0} = 2,316\%$	0,508
Influência do número e posição das medidas perturbadas				
24 medidas	25,628	$\sigma_E = 6,406 \times 10^{-2}$ MPa $\sigma_{K_0} = 1,522 \times 10^{-2}$	$r_E = 0,641\%$ $r_{K_0} = 1,496\%$	0,534
6 medidas	36,279	$\sigma_E = 1,159 \times 10^{-1}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,437 \times 10^{-2}$	$r_E = 1,155\%$ $r_{K_0} = 2,494\%$	0,597
2 medidas	31,766	$\sigma_E = 3,105 \times 10^{-4}$ MPa $\sigma_{K_0} = 6,830 \times 10^{-5}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,007\%$	0,573
2 medidas (TH)	48,432	$\sigma_E = 2,270 \times 10^{-3}$ MPa $\sigma_{K_0} = 4,504 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,023\%$ $r_{K_0} = 0,045\%$	0,675

A análise dos resultados mostra que duas medidas não somente são suficientes para identificar os parâmetros, como também propiciam os menores valores de desvio padrão e de coeficiente de variação dos parâmetros estimados. No caso em que se consideram as duas medidas em posição semelhante às do túnel Hudvudsta, os resultados também são satisfatórios.

Complementando a análise dos resultados, adota-se 95% para o nível de confiança na determinação dos intervalos de confiança ilustrados na Tabela 3.16 juntamente com os resultados da análise de resíduos finais.

Tabela 3.16 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para os casos 3 e 4

Descrição	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
12 medidas perturbadas			
$\mathbf{U}_1^*$	$E = 10,000 \pm 0,212 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,007 \pm 0,052$	$\bar{r} = -2,367 \times 10^{-4}$	$\sigma_r^2 = 2,761 \times 10^{-6}$
$\mathbf{U}_2^*$	$E = 9,980 \pm 0,189 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,013 \pm 0,047$	$\bar{r} = 2,585 \times 10^{-4}$	$\sigma_r^2 = 2,196 \times 10^{-6}$
$\mathbf{U}_3^*$	$E = 9,914 \pm 0,201 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,961 \pm 0,050$	$\bar{r} = 6,235 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 2,622 \times 10^{-6}$
Influência do número e posição das medidas perturbadas			
24 medidas	$E = 9,986 \pm 0,133 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,017 \pm 0,032$	$\bar{r} = -7,425 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 2,391 \times 10^{-6}$
6 medidas	$E = 10,041 \pm 0,322 \text{ MPa}$ $K_0 = 0,977 \pm 0,068$	$\bar{r} = 1,954 \times 10^{-4}$	$\sigma_r^2 = 2,246 \times 10^{-6}$
2 medidas	- -	$\bar{r} = -2,994 \times 10^{-7}$	$\sigma_r^2 = 1,035 \times 10^{-11}$
2 medidas (TH)	- -	$\bar{r} = 1,761 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 5,909 \times 10^{-10}$

Os menores valores na análise dos resíduos finais também são obtidos considerando apenas duas medidas. É importante lembrar que a qualidade dos resultados obtidos considerando as duas medidas está relacionada com a escolha dessas medidas, pois são as que apresentam os maiores coeficientes de sensibilidade.

3.5 Caso 5

Esse caso mostra a importância de se escolher um modelo adequado para representar a estrutura. Ilustra-se como a escolha de um modelo que não representa fielmente a estrutura influencia os valores dos parâmetros identificados.

Como nos casos anteriores, trata-se da determinação do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de empuxo (K_0), porém em um maciço heterogêneo. São consideradas duas regiões com as características indicadas na Figura 3.20.

Figura 3.20 – Características do maciço heterogêneo

Considera-se como medidas deslocamentos horizontais em alguns pontos da linha 1 e deslocamentos verticais em alguns pontos da linha 2. Essas medidas são obtidas pelo método dos elementos finitos utilizando elementos de estado plano de deformação, considerando o material de cada região componente do maciço como homogêneo e isótropo em regime elástico linear. O carregamento é o definido anteriormente nos outros casos, caracterizado pelos esforços devidos ao alívio provocado pela abertura instantânea do túnel.

Na Figura 3.21 apresenta-se o novo modelo. Na região destacada considera-se $E = 1 \text{ MPa}$, e nas demais $E = 10 \text{ MPa}$. Utiliza-se a mesma malha refinada, apresentada na Figura 3.14, com 2081 nós e 4007 graus de liberdade.

Figura 3.21 – Modelo de elementos finitos considerando uma região com um módulo de elasticidade menor

Os deslocamentos obtidos com esse modelo são perturbados para considerar os erros de medidas. Soma-se aos deslocamentos uma componente aleatória com distribuição normal, com média nula e um desvio padrão de 0,001 m para as medidas verticais e de 0,002 m para as horizontais. Assim, o vetor dos deslocamentos considerados medidos é dado por:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 5,383 \times 10^{-3} \text{ m} \\ 7,668 \times 10^{-4} \text{ m} \\ 2,444 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 9,781 \times 10^{-2} \text{ m} \\ 1,675 \times 10^{-1} \text{ m} \\ 1,039 \times 10^{-1} \text{ m} \\ 2,968 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -8,251 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -8,627 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -8,782 \times 10^{-2} \text{ m} \\ -1,081 \times 10^{-1} \text{ m} \\ -1,277 \times 10^{-1} \text{ m} \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

Para se obter os deslocamentos calculados emprega-se o modelo anteriormente descrito, com módulo de elasticidade uniforme, com a malha 3 apresentada na Figura 3.15.

Estuda-se a influência do número de medidas com os mesmos grupos de medidas dos casos anteriores: as 24 medidas ilustradas na Figura 3.6, as 6 medidas (4, 5, 6, 7, 11 e 12) da Figura 3.15 e as medidas 5 e 12 da mesma figura.

Utiliza-se o procedimento descrito anteriormente, com o critério dos mínimos quadrados e o método de Gauss-Newton, considerando

$\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 5 \text{ MPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 3.17.

Tabela 3.17 – Resultados obtidos no caso 5

Número de medidas	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° de iterações
12 medidas perturbadas			
12 medidas	$E = 8,525 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,867$	$3,583 \times 10^{-3}$ $3,583 \times 10^{-4}$	0,08% 4
Influência do número de medidas perturbadas			
24 medidas	$E = 8,505 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,907$	$7,057 \times 10^{-3}$ $3,208 \times 10^{-4}$	0,009% 4
6 medidas	$E = 9,194 \text{ MPa}$ $K_0 = 2,038$	$2,407 \times 10^{-3}$ $6,018 \times 10^{-4}$	0,20% 4
2 medidas	$E = 9,538 \text{ MPa}$ $K_0 = 2,595$	$4,743 \times 10^{-10}$ -	0,28% 4

Observa-se que nesse caso o número de medidas influencia os resultados. Minimizando a função objetivo definida para cada grupo de medidas, obtêm-se valores de E e K_0 que caracterizam um maciço homogêneo equivalente capaz de reproduzir as medidas. Esse tipo de resultado mostra que, mesmo se os modelos não estiverem bem definidos, pode-se obter bons resultados matemáticos.

A Figura 3.22 ilustra os coeficientes de sensibilidade calculados no mínimo. Percebe-se que as curvas têm o mesmo comportamento dos casos anteriores, sendo que as medidas 5 e 12 apresentam os maiores coeficientes de sensibilidade.

Figura 3.22 – Coeficientes de sensibilidade

3.5.1 Obtenção gráfica do mínimo

Novamente, pode-se determinar as curvas de nível das funções objetivo desse caso, definidas pela equação (3.10), e determinar graficamente o mínimo dessas funções.

A Figura 3.23 ilustra essas curvas de nível com o valor do mínimo encontrado no processo iterativo. São consideradas em (a) 24 medidas, em (b) 12 medidas, em (c) 6 medidas e em (d) 2 medidas.

Ressalta-se que os valores dos parâmetros que estão representando o mínimo são os obtidos no processo iterativo.

Figura 3.23 – Curvas de nível das funções objetivo definidas com o critério dos mínimos quadrados no caso 5

3.5.2 Análise dos resultados

A Tabela 3.18 contém a análise dos resultados obtidos nesse caso, apresentando o número de condição, o desvio padrão, o coeficiente de variação e o coeficiente de correlação para cada grupo de medidas.

Tabela 3.18 – Análise dos resultados obtidos no caso 5

Número de medidas	Nº de condição	Desvio padrão	Coeficiente de variação	Coeficiente de correlação
12 medidas perturbadas				
12 medidas	18,687	$\sigma_E = 7,430 \times 10^{-1}$ MPa $\sigma_{K_0} = 2,622 \times 10^{-1}$	$r_E = 8,715\%$ $r_{K_0} = 14,044\%$	0,714
Influência do número de medidas perturbadas				
24 medidas	20,505	$\sigma_E = 5,257 \times 10^{-1}$ MPa $\sigma_{K_0} = 1,820 \times 10^{-1}$	$r_E = 6,181\%$ $r_{K_0} = 9,546\%$	0,732
6 medidas	33,452	$\sigma_E = 1,409$ MPa $\sigma_{K_0} = 4,402 \times 10^{-1}$	$r_E = 15,323\%$ $r_{K_0} = 21,603\%$	0,808
2 medidas	32,095	$\sigma_E = 1,430 \times 10^{-3}$ MPa $\sigma_{K_0} = 5,124 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,015\%$ $r_{K_0} = 0,020\%$	0,842

As curvas de nível das funções objetivo, Figura 3.23, com um mínimo bem definido, e os valores baixos dos números de condição indicam que não existem problemas de convergência. Logo, pode-se concluir que, nesse caso, a consideração de um modelo inadequado não resulta em problemas matemáticos.

A Tabela 3.19 apresenta a análise dos resíduos finais e os intervalos de confiança dos parâmetros estimados obtidos considerando um nível de confiança de 95%.

Tabela 3.19 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 5

Número de medidas	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
12 medidas perturbadas			
12 medidas	$E = 8,525 \pm 1,655 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,867 \pm 0,584$	$\bar{r} = -5,257 \times 10^{-3}$	$\sigma_r^2 = 2,956 \times 10^{-4}$
Influência do número de medidas perturbadas			
24 medidas	$E = 8,505 \pm 1,090 \text{ MPa}$ $K_0 = 1,907 \pm 0,378$	$\bar{r} = -4,992 \times 10^{-3}$	$\sigma_r^2 = 2,808 \times 10^{-4}$
6 medidas	$E = 9,193 \pm 3,911 \text{ MPa}$ $K_0 = 2,038 \pm 1,222$	$\bar{r} = -4,055 \times 10^{-3}$	$\sigma_r^2 = 4,617 \times 10^{-4}$
2 medidas	- -	$\bar{r} = -9,625 \times 10^{-6}$	$\sigma_r^2 = 2,890 \times 10^{-10}$

Os valores dos desvios padrão, dos coeficientes de variação, dos coeficientes de correlação e os intervalos de confiança estão mais altos do que nos casos anteriores, indicando que os parâmetros estimados podem não ser satisfatórios.

Para analisar a adequação do modelo compara-se o valor da variância final do erro com a variância das medidas. Os valores de s_0^2 variam entre $3,208 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e $6,018 \times 10^{-4} \text{ m}^2$ e têm-se $\sigma_{U_v}^2 = 1 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ para as medidas verticais e $\sigma_{U_h}^2 = 4 \times 10^{-6} \text{ m}^2$ para as medidas horizontais. Logo, a análise global da razão entre os valores médios de s_0^2 e σ_u^2 assume valores de ordem de grandeza diferentes de 1, indicando que o modelo não está adequado para representar a estrutura.

Analisando globalmente os valores obtidos no caso 5, percebe-se que com a escolha inadequada do modelo pode-se obter bons resultados matemáticos, mas nem sempre uma boa estimativa dos parâmetros.

3.6 Observações finais

Nesse problema de referência pode-se estudar o procedimento desenvolvido para identificação de parâmetros e os diversos fatores envolvidos no processo.

O procedimento desenvolvido pode ser utilizado considerando o método de Newton-Raphson, de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt. Nesse exemplo, estuda-se a aplicação dos métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt. Com o método de Levenberg-Marquardt obtém-se o mínimo com um número maior de iterações. Normalmente, quando não existem problemas de convergência, o método de Gauss-Newton é mais eficiente.

Na definição da função objetivo com o critério dos mínimos quadrados não se inclui nenhuma informação adicional, além dos valores medidos e calculados. Ou seja, nos casos em que se consideram as medidas perturbadas para simular os erros de medidas, esses erros não estão considerados na função objetivo. Percebe-se que, mesmo nesses casos quando as medidas não são exatas, o processo utilizado fornece bons resultados.

Ressalta-se a importância de se analisar os coeficientes de sensibilidade, identificando as medidas com maior coeficiente de sensibilidade, conseqüentemente, com maior influência no processo. Na maioria dos casos estudados apenas as duas medidas com maior coeficiente de sensibilidade mostram-se suficientes para identificar os parâmetros. Portanto, não é o número de medidas que interfere nos resultados, mas sim a influência das medidas no processo.

Estudando a influência do refinamento da malha de elementos finitos verifica-se, conforme o esperado, que a malha deve ser a mais refinada

possível para não introduzir erros associados a discretização do modelo matemático.

Os resultados obtidos no caso 5 mostram claramente a influência da escolha do modelo no processo de identificação de parâmetros, reforçando a importância de se definir um modelo que represente o comportamento real da estrutura.

Ressalta-se que as conclusões obtidas são válidas para esse problema e não devem ser tomadas como absolutas e sim como referências importantes nos casos reais de identificação de parâmetros.

Capítulo 4

Túnel Hudvudsta

O conhecimento dos parâmetros característicos do maciço é fundamental para a previsão dos deslocamentos que ocorrem no perímetro dos túneis.

Uma primeira estimativa de tais parâmetros pode ser feita baseada na experiência dos especialistas, considerando as características do maciço. Em seguida, podem ser efetuados ensaios de laboratório a partir de amostras do terreno e ensaios *in situ*. Porém, existem diversos fatores que podem influenciar os resultados dos ensaios de laboratório, tais como o processo de extração da amostra do terreno, o que pode alterar sua qualidade, as diferenças no comportamento macro e microestrutural do terreno e a dificuldade de se reproduzir no laboratório o campo de tensões *in situ*. A monitoração da obra em todas as suas fases e, posteriormente, a sua finalização, pode fornecer informações que permitam estimar os referidos parâmetros de forma que o comportamento do maciço seja mais realistamente contemplado. A retroanálise tem se mostrado de grande valia para a estimativa desses parâmetros.

Nesse estudo de caso, utiliza-se a retroanálise para identificar parâmetros característicos do maciço do túnel Hudvudsta, localizado na Suécia, o qual foi construído, sem revestimento, para uma estação subterrânea da linha 3 do metrô de Estocolmo. A construção foi concluída em 1981. O maciço do local é formado por granito submetido a tectonismo intenso com zonas de fratura milonitizadas.

Este túnel já foi tema de outros trabalhos. Inicialmente, (Negro; Kuwajima, 1985a e 1985b) o analisaram para a aferição de um modelo matemático, desenvolvido por esses autores, para o cálculo dos deslocamentos que ocorrem no perímetro de túneis. Utilizando o modelo de cálculo de deslocamentos desenvolvido por (Negro; Kuwajima, 1985a e 1985b), (Hachich; Negro, 1990) analisaram esse túnel aplicando a retroanálise bayesiana e, com esse mesmo modelo, em (Costa, 2000) iniciaram-se os estudos de identificação de parâmetros. Neste trabalho, utiliza-se o procedimento desenvolvido com o método dos elementos finitos para identificação dos parâmetros. Os resultados obtidos ao longo do trabalho foram apresentados nos seguintes artigos: (Costa; André, 2001), (André *et al*, 2003), (Costa; André, 2003), (Costa; André, 2004) e (Costa *et al*, 2004b).

Na Tabela 4.1 estão indicados os parâmetros iniciais característicos do maciço, propostos em (Hachich; Negro, 1990).

Tabela 4.1 - Parâmetros iniciais característicos do maciço

Peso específico $\gamma(\text{kN/m}^3)$	Módulo de elasticidade $E(\text{GPa})$	Coefficiente K_0
20	40	16

Dos parâmetros relativos ao material: módulo de elasticidade (E), peso específico (γ) e coeficiente K_0 , o que apresenta uma menor incerteza em relação aos demais é o peso específico, podendo ser admitido para ele o valor obtido com os ensaios. Sendo assim, têm-se dois parâmetros a serem identificados: E e K_0 . O coeficiente K_0 representa a relação entre as tensões horizontais e verticais.

Para o cálculo dos deslocamentos são utilizados dois modelos matemáticos. O modelo matemático 1 foi desenvolvido por (Negro;

Kuwajima, 1985a e 1985b), e desenvolve-se o modelo matemático 2 em elementos finitos utilizando o programa Adina.

Para identificação dos parâmetros são considerados três casos. Primeiramente, considerando o modelo matemático 1, aplica-se a abordagem inversa e a abordagem direta com os critérios de identificação dos mínimos quadrados, da máxima verossimilhança e da máxima verossimilhança com informação prévia, utilizando a condição de primeira ordem para minimizar as funções objetivo.

Na seqüência, adota-se o modelo matemático 2 e, escrevendo as expressões explícitas para o cálculo dos deslocamentos, utilizam-se os critérios dos mínimos quadrados, da máxima verossimilhança e da máxima verossimilhança com informação prévia para definir a função objetivo e a condição de primeira ordem para minimizá-la.

E, por último, considerando o modelo matemático 2, utiliza-se o procedimento desenvolvido, descrito no item 2.4, para identificar os parâmetros, utilizando o critério dos mínimos quadrados para definir a função objetivo e os métodos de Newton-Raphson, de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt para minimizá-la.

4.1 Deslocamentos medidos

Usualmente, os instrumentos de observação de deslocamentos são instalados após uma parte do túnel ter sido escavada. Portanto, as medições feitas referem-se a uma parte dos deslocamentos totais que resultam da escavação. Para ser possível a comparação entre os deslocamentos previstos e medidos é necessário estimar a magnitude dos deslocamentos que ocorreram antes do início da observação. Os procedimentos usuais para o cálculo desses deslocamentos podem ser encontrados em (Negro; Kuwajima, 1985a).

Nesse túnel foram medidos deslocamentos no teto com extensômetro ISETH, e deslocamentos na lateral entre o ponto médio e o pé da parede com medidor de convergência. A Figura 4.1 apresenta esquematicamente a geometria da seção transversal do túnel, indicando os deslocamentos medidos. Esses e outros dados utilizados nas análises que se seguem foram retirados de (Hachich; Negro, 1990). Ressalta-se que os valores dos deslocamentos apresentados são os valores totais, ou seja, os valores medidos acrescentados do valor calculado dos deslocamentos que ocorreram antes da instalação dos equipamentos.

Figura 4.1– Geometria do túnel e deslocamentos medidos

4.2 Modelo matemático 1

O primeiro modelo utilizado para o cálculo dos deslocamentos foi desenvolvido por (Negro; Kuwajima, 1985a e 1985b) para o cálculo dos deslocamentos no perímetro de túneis. Com o intuito de se obter uma formulação simples, foram consideradas algumas simplificações.

Admitiu-se que os túneis se situam a grandes profundidades em relação às suas dimensões transversais, podendo se considerar um campo de tensões constante com a profundidade, na área de interesse. Considerou-se que os túneis tenham um comprimento muito maior que suas dimensões transversais,

recaindo-se em uma situação de estado plano de deformação. Para permitir um tratamento mais simples do problema, as direções verticais e horizontais foram admitidas paralelamente às tensões principais *in situ*. Nessas condições, é razoável supor que a tensão de campo vertical seja geoestática devido ao peso do material que recobre o ponto considerado. Logo, a tensão horizontal é dada pela tensão vertical multiplicada pelo coeficiente K_0 . Admitiu-se ainda que o maciço seja elástico, linear, isotrópico e homogêneo e que os deslocamentos de interesse sejam apenas os radiais. Por último, foi suposto que a escavação produza um alívio total das tensões no perímetro da abertura, ou seja, que o túnel não seja revestido.

Com base nessas considerações, (Negro; Kuwajima, 1985a e 1985b) realizaram diversas análises numéricas paramétricas para estabelecer as relações entre as variáveis envolvidas no problema, utilizando o método dos elementos de contorno.

Considerando uma seção transversal generalizada, (Hachich; Negro, 1990) apresentaram as equações (4.1) a (4.4) para o cálculo dos deslocamentos U_i , nas posições indicadas na Figura 4.2:

Figura 4.2 – Seção transversal generalizada

$$U_1 = J(C/H + 1) \left\{ \begin{aligned} &[(a_1 H/C + b_1) + (c_1 H/C + d_1)L/H] \\ &+ [(e_1 H/C + f_1) + (g_1 H/C + h_1)H/L]K_0 \end{aligned} \right\} \quad (4.1)$$

$$U_2 = J(C/H + 1/2) \left\{ \begin{array}{l} [(a_2 H/C + b_2) + (c_2 + d_2 C/H)L/H] \\ + [(e_2 H/C + f_2) + (g_2 H/C + h_2)H/L]K_0 \end{array} \right\} \quad (4.2)$$

$$U_3 = J(C/H) \left\{ \begin{array}{l} [(a_3 H/C + b_3) + (c_3 H/C + d_3)L/H] \\ + [(e_3 H/C + f_3) + (g_3 H/C + h_3)L/H]K_0 \end{array} \right\} \quad (4.3)$$

$$U_4 = J(C/H + 1) \left\{ \begin{array}{l} [(a_4 H/C + b_4) + (c_4 H/C + d_4)L/H] \\ + [(e_4 H/C + f_4) + (g_4 H/C + h_4)L/H]K_0 \end{array} \right\} \quad (4.4)$$

em que

$$J = 2R_{eq} \gamma H/E \quad (4.5)$$

em que γ é o peso específico do material, E é o módulo de elasticidade, K_0 é o coeficiente que representa a relação entre as tensões horizontais e verticais, R_{eq} é o raio equivalente do túnel (raio de um túnel circular com mesma área de seção transversal), L é a sua largura, H a sua altura e C a sua cobertura. Os valores coeficientes a_i a h_i , obtidos nas análises paramétricas, encontram-se na Tabela 4.2. Na Tabela 4.3, apresentam-se as características geométricas da seção, propostas em (Hachich; Negro, 1990).

Tabela 4.2 – Coeficientes das equações (4.1) a (4.4)

Coeficientes	Piso ($i=1$)	Lateral ($i=2$)	Teto ($i=3$)	Canto ($i=4$)
a_i	-0,1446	-0,0052	0,5885	0,0028
b_i	0,3767	-0,1515	0,5678	-0,0206
c_i	-0,0664	-0,1422	0,3226	0,0123
d_i	0,4386	-0,0046	0,3478	-0,1534
e_i	0,0089	-0,0022	-0,1747	-0,0450
f_i	-0,0557	0,5745	-0,4638	0,6276
g_i	0,0191	0,0066	0,0223	0,0099
h_i	-0,1648	0,4115	0,0926	-0,1396

Tabela 4.3 – Características geométricas da seção

C (m)	H (m)	L (m)	R_{eq} (m)
15,75	9,50	17,80	7,00

4.3 Modelo matemático 2

Para o cálculo dos deslocamentos emprega-se um modelo matemático bidimensional em elementos finitos utilizando o programa Adina. Admite-se uma abertura em um semiplano infinito, em estado plano de deformação, sob a ação exclusiva de esforços correspondentes ao alívio provocado pela execução instantânea da abertura correspondente ao túnel. Em cada ponto da linha de abertura do túnel são aplicados esforços distribuídos e estaticamente equivalentes a uma tensão vertical γh (efeito da retirada do peso próprio) e a uma tensão horizontal $K_0 \gamma h$ (efeito da retirada do confinamento lateral), conforme se mostra na Figura 4.3.

Figura 4.3 – Forma do túnel considerada no modelo matemático

Dessa forma, em cada elemento do contorno tem-se:

Figura 4.4 – Carregamento no contorno

Logo, em cada ponto do contorno são aplicados σ e τ definidos por:

$$\sigma = \gamma h \cos^2 \alpha + K_0 \gamma h \sin^2 \alpha \quad (4.6)$$

$$\tau = (\gamma h - K_0 \gamma h) \cos \alpha \sin \alpha \quad (4.7)$$

Considera-se o material elástico, linear, isótropo e homogêneo com elementos de estado plano de deformação de 8 nós. A malha de elementos finitos utilizada, bem como o carregamento e as condições de contorno, estão ilustrados na Figura 4.5. Devido à simetria, modela-se apenas metade da estrutura.

Figura 4.5 – Malha de elementos finitos utilizada

4.4 Identificação de parâmetros com o modelo matemático 1 (Caso 1)

Com o modelo matemático 1, têm-se expressões explícitas para o cálculo dos deslocamentos em função dos parâmetros a identificar: módulo de elasticidade (E) e coeficiente K_0 .

Nesse caso, como se dispõe dos resultados de deslocamentos em dois pontos distintos e as equações para o cálculo desses deslocamentos dependem de dois parâmetros, ou seja, o número de medidas é igual ao número de incógnitas, pode-se obter uma primeira identificação dos parâmetros utilizando a abordagem inversa.

Com a abordagem direta define-se a função objetivo utilizando o critério dos mínimos quadrados (equação (2.4)), o critério da máxima verossimilhança (equação (2.3)) e o critério da máxima verossimilhança com informação prévia (equação (2.2)).

Para definir a matriz de covariância ($\mathbf{C}_v$), nos critérios da máxima verossimilhança e da máxima verossimilhança com informação prévia, adota-se um desvio padrão de $0,2 \times 10^{-3} \text{ m}$ para as medidas de deslocamento. No critério da máxima verossimilhança com informação prévia, os valores do vetor dos parâmetros estimados a priori ($\mathbf{p}^0$) são os valores apresentados na Tabela 4.1. Nesse mesmo critério, para estabelecer a matriz de covariância dos parâmetros estimados a priori ($\mathbf{C}_{p^0}$), adota-se um desvio padrão de 1,5 GPa para o módulo de elasticidade, e para o coeficiente K_0 um desvio padrão de 1,0. De acordo com (Hachich & Negro, 1990), esses valores adotados resultaram de um consenso estabelecido após um diálogo entre profissionais de Geotecnia, com base não apenas nos resultados de ensaios, mas também na experiência profissional dos envolvidos.

As Figuras 4.6, 4.7 e 4.8 apresentam as curvas de nível das funções objetivo definidas, respectivamente, com o critério dos mínimos quadrados, da máxima verossimilhança e da máxima verossimilhança com informação prévia.

Figura 4.6 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados para o modelo matemático 1

Figura 4.7 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança para o modelo matemático 1

Figura 4.8 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para o modelo matemático 1

Para minimizar a função objetivo obtida com cada um dos critérios, aplica-se a condição de primeira ordem (gradiente nulo), derivando a respectiva função em relação aos parâmetros. Resolvendo o sistema de equações resultante, obtêm-se os valores dos parâmetros.

A Tabela 4.4 apresenta os resultados obtidos nesse caso e os obtidos por (Hachich; Negro, 1990) com a retroanálise bayesiana.

Tabela 4.4 – Resultados obtidos no caso 1

Procedimento utilizado	Parâmetros estimados
Abordagem inversa	$E = 149,855 \text{ GPa}$ $K_0 = 60,268$
Critério dos mínimos quadrados	$E = 149,855 \text{ GPa}$ $K_0 = 60,268$
Critério da máxima verossimilhança	$E = 149,855 \text{ GPa}$ $K_0 = 60,268$
Critério da max. verossimilhança com inf. Prévia	$E = 39,854 \text{ GPa}$ $K_0 = 16,211$
Retroanálise bayesiana	$E = 39,910 \text{ GPa}$ $K_0 = 16,036$

Com a abordagem inversa, com o critério dos mínimos quadrados e com o critério da máxima verossimilhança obtêm-se os mesmos valores dos parâmetros identificados. No caso do critério dos mínimos quadrados, como não se considera nenhuma informação adicional e dispõe-se do mesmo número de medidas e de parâmetros, a minimização da função objetivo conduz aos mesmos resultados da abordagem inversa. No critério da máxima verossimilhança as medidas possuem o mesmo desvio padrão, ou seja, a matriz de covariância não acrescenta nenhuma informação adicional. Nessas condições, conforme descrito no Capítulo 2, os dois critérios apresentam os mesmos resultados.

Os resultados obtidos com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia são semelhantes aos obtidos com a retroanálise bayesiana, confirmando as expectativas, visto que as formulações da retroanálise bayesiana e do critério da máxima verossimilhança com informação prévia são baseadas nos mesmos princípios.

Os valores dos parâmetros identificados nesses dois procedimentos estão bem próximos dos parâmetros iniciais característicos do maciço indicados na Tabela 4.1, diferentemente dos obtidos com os outros três procedimentos. Além disso, comparando as curvas de nível das funções objetivo, observa-se que o mínimo está bem melhor caracterizado na função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia. Percebe-se claramente a forte ponderação da informação prévia.

4.5 Identificação de parâmetros com o modelo matemático 2 (Caso 2)

Como o modelo matemático 2 é um modelo linear nos parâmetros a serem estimados, é possível escrever uma expressão para o cálculo dos deslocamentos em função dos parâmetros a identificar, utilizando o princípio da superposição dos efeitos:

$$\mathbf{U}(\mathbf{p}) = \frac{1}{E} \mathbf{U}_0 + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1 \right) \quad (4.8)$$

em que $\mathbf{U}_0$ é o vetor dos deslocamentos obtidos resolvendo o modelo para $E=1$ e considerando apenas o carregamento vertical γh , e $\mathbf{U}_1$ é o vetor dos deslocamentos obtidos considerando $E=1$ e aplicando somente o carregamento horizontal $K_0 \gamma h$, com $K_0=1$.

Utilizando o critério dos mínimos quadrados para definir a função objetivo, tem-se:

$$F(\mathbf{p}) = \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_0' + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1' \right) \right) \right]^T \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_0' + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1' \right) \right) \right] \quad (4.9)$$

Com o critério da máxima verossimilhança, a função objetivo torna-se:

$$F(\mathbf{p}) = \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_0' + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1' \right) \right) \right]^T \mathbf{C}_U^{-1} \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_0' + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1' \right) \right) \right] \quad (4.10)$$

Para o critério da máxima verossimilhança com informação prévia a função objetivo é dada por:

$$F(\mathbf{p}) = \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_0' + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1' \right) \right) \right]^T \mathbf{C}_U^{-1} \left[\mathbf{U}^* - \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_0' + K_0 \left(\frac{1}{E} \mathbf{U}_1' \right) \right) \right] + \left[\mathbf{p} - \mathbf{p}^0 \right]^T \mathbf{C}_{p^0}^{-1} \left[\mathbf{p} - \mathbf{p}^0 \right] \quad (4.11)$$

em que $\mathbf{U}^*$ é o vetor dos deslocamentos medidos na parede lateral e no teto, $\mathbf{U}_0'$ é o vetor reduzido do vetor $\mathbf{U}_0$, formado apenas pelos dois deslocamentos

calculados correspondentes aos deslocamentos medidos e, da mesma forma, $\mathbf{U}'_1$ é o vetor reduzido do vetor $\mathbf{U}_1$. Esses vetores são dados por:

$$\mathbf{U}^* = \begin{bmatrix} 0,6 \times 10^{-3} \\ 1,4 \times 10^{-3} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}'_0 = \begin{bmatrix} -8,588 \times 10^6 \\ -1,683 \times 10^6 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{U}'_1 = \begin{bmatrix} 2,800 \times 10^6 \\ 3,786 \times 10^6 \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

A matriz de covariância das medidas ($\mathbf{C}_U$), a matriz de covariância dos parâmetros estimados a priori ($\mathbf{C}_{p^0}$) e o vetor dos parâmetros estimados a priori ($\mathbf{p}^0$) são definidos como no caso 1.

A função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados está representada nas figuras 4.9 e 4.10. Nas figuras 4.11 e 4.12 representa-se a função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança e nas figuras 4.13 e 4.14 a função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia.

Nessas figuras pode-se obter graficamente, de forma aproximada, o mínimo. Esse procedimento é o mesmo utilizado no Capítulo 3 na determinação gráfica do mínimo.

Figura 4.9 – Representação da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados para o modelo matemático 2

Figura 4.10 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério dos mínimos quadrados para o modelo matemático 2

Figura 4.11 – Representação da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança para o modelo matemático 2

Figura 4.12 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança para o modelo matemático 2

Figura 4.13 – Representação da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para o modelo matemático 2

Figura 4.14 – Curvas de nível da função objetivo definida com o critério da máxima verossimilhança com informação prévia para o modelo matemático 2

Ao aplicar a condição de mínimo (gradiente nulo), derivando cada uma das funções em relação aos parâmetros e resolvendo o sistema, obtém-se a solução de cada problema. Os resultados obtidos estão apresentados na Tabela 4.5.

Tabela 4.5 – Resultados obtidos no caso 2

Critério de identificação	Parâmetros estimados
Mínimos quadrados	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$
Máxima verossimilhança	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$
Máxima verossimilhança com informação prévia	$E = 40,051 \text{ GPa}$ $K_0 = 15,933$

Assim como no caso 1, obtêm-se os mesmos parâmetros com o critério dos mínimos quadrados e com o critério da máxima verossimilhança. Como as medidas possuem o mesmo desvio padrão, a matriz de covariância não acrescenta nenhuma informação adicional.

Novamente, como no caso 1, os valores dos parâmetros obtidos utilizando o critério da máxima verossimilhança com informação prévia estão bem próximos dos parâmetros iniciais característicos do maciço, indicados na Tabela 4.1. Outro fato que pode ser observado nas figuras 4.13 e 4.14 é que, utilizando esse critério, o mínimo fica muito bem definido.

Para verificar a influência dessas estimativas iniciais no procedimento, considera-se agora outros vetores $\mathbf{p}^0$. Considera-se a mesma matriz de covariância dos parâmetros estimados a priori ($\mathbf{C}_{p^0}$) utilizada nos casos anteriores, caracterizada por um desvio padrão de 1,5 GPa para o módulo de elasticidade e de 1,0 para o coeficiente K_0 . A Tabela 4.6 apresenta os resultados.

Tabela 4.6 – Influência dos parâmetros estimados a priori no critério da máxima verossimilhança com informação prévia

Parâmetros estimados a priori	Parâmetros estimados
$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} 20 \text{ GPa} \\ 8 \end{bmatrix}$	$E = 20,024 \text{ GPa}$ $K_0 = 7,961$
$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} 10 \text{ GPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$	$E = 9,897 \text{ GPa}$ $K_0 = 1,941$
$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} 30 \text{ GPa} \\ 10 \end{bmatrix}$	$E = 29,964 \text{ GPa}$ $K_0 = 10,047$
$\mathbf{p}^0 = \begin{bmatrix} 50 \text{ GPa} \\ 5 \end{bmatrix}$	$E = 49,951 \text{ GPa}$ $K_0 = 5,263$

Os resultados evidenciam a grande influência das estimativas iniciais. Os parâmetros estão sendo identificados apenas por essas estimativas, ou seja, os valores dos deslocamentos medidos não estão interferindo na identificação dos parâmetros. A informação prévia está praticamente substituindo a retroanálise.

Pode-se concluir que o critério da máxima verossimilhança com informação prévia deve ser utilizado com muito cuidado, para não invalidar a retroanálise.

4.6 Identificação de parâmetros com o modelo matemático 2 (Caso 3)

4.6.1 Identificação simultânea dos parâmetros

Utilizando o modelo matemático 2 são aplicados os métodos de Newton-Raphson, de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt para a identificação de parâmetros. Utiliza-se o procedimento desenvolvido apresentado no item 2.4.

Conforme apresentado no Capítulo 2, esses métodos consistem em um processo iterativo do tipo:

$$\mathbf{p}|_{r+1} = \mathbf{p}|_r + \Delta\mathbf{p}|_r \quad (4.13)$$

com

$$\Delta\mathbf{p}|_r = \mathbf{H}^{-1}|_r \mathbf{A}^T|_r \Delta\mathbf{U}|_r \quad (4.14)$$

Nesse caso, a matriz de sensibilidade ($\mathbf{A}$) é de ordem 2×2 , 2 deslocamentos medidos e 2 parâmetros. Conforme visto no item 2.3, quando se utiliza o método dos elementos finitos para um modelo elástico linear e as grandezas medidas são deslocamentos, a matriz de sensibilidade fica definida pela equação:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right) \quad (4.15)$$

Nesse problema, a primeira coluna da matriz é formada pelas derivadas dos deslocamentos em relação ao módulo de elasticidade (E). Como o vetor das forças nodais independe do parâmetro E , essa coluna pode ser obtida por:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \mathbf{U}_k \right) \quad (4.16)$$

Logo, para o cálculo dessa coluna da matriz de sensibilidade é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura ($\mathbf{K}_k$) e o vetor dos deslocamentos calculados ($\mathbf{U}_k$) em cada iteração, e a derivada da matriz de rigidez em relação ao módulo de elasticidade $\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \right)$. Com o problema sendo tratado como estado plano de deformação, a matriz de rigidez é linear em E . Dessa forma, a derivada da matriz de rigidez em relação ao módulo de elasticidade é a matriz de rigidez obtida resolvendo um problema auxiliar com o mesmo modelo matemático, considerando $E=1$.

A segunda coluna da matriz corresponde às derivadas dos deslocamentos em relação ao coeficiente K_0 . Nesse caso, a matriz de rigidez independe do parâmetro K_0 , logo,

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial K_0} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0} \right) \quad (4.17)$$

Portanto, para se obter essa parcela da matriz é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura e a derivada do vetor das forças nodais em relação ao coeficiente K_0 $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0} \right)$. Para se determinar essa derivada, resolve-se um problema auxiliar com o mesmo modelo e com um carregamento fictício definido apenas pelas componentes do carregamento que variam com K_0 , considerando $K_0=1$. Logo,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial K_0} \right) = \mathbf{R}|_{K_0=1} = \mathbf{K} \mathbf{U}|_{K_0=1} \quad (4.18)$$

sendo $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez da estrutura e $\mathbf{U}|_{K_0=1}$ o vetor dos deslocamentos nodais gerados pelo carregamento fictício.

A matriz hessiana ($\mathbf{H}$) difere em cada um dos métodos. Com o método de Newton-Raphson, a matriz hessiana tem a forma:

$$\mathbf{H}_{NR} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} - \begin{bmatrix} \Delta U_1 \frac{\partial^2 U_1(\mathbf{p})}{\partial E \partial E} + \Delta U_2 \frac{\partial^2 U_2(\mathbf{p})}{\partial E \partial E} & \Delta U_1 \frac{\partial^2 U_1(\mathbf{p})}{\partial E \partial K_0} + \Delta U_2 \frac{\partial^2 U_2(\mathbf{p})}{\partial E \partial K_0} \\ \Delta U_1 \frac{\partial^2 U_1(\mathbf{p})}{\partial K_0 \partial E} + \Delta U_2 \frac{\partial^2 U_2(\mathbf{p})}{\partial K_0 \partial E} & \Delta U_1 \frac{\partial^2 U_1(\mathbf{p})}{\partial K_0 \partial K_0} + \Delta U_2 \frac{\partial^2 U_2(\mathbf{p})}{\partial K_0 \partial K_0} \end{bmatrix} \quad (4.19)$$

no método de Gauss-Newton a matriz hessiana é aproximada por:

$$\mathbf{H}_{GN} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (4.20)$$

e com o método de Levenberg-Marquardt a matriz hessiana torna-se:

$$\mathbf{H}_{LM} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{D} \quad (4.21)$$

sendo λ um escalar positivo e variável em cada iteração e $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal de ordem 2 com os elementos iguais aos elementos da diagonal da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

A obtenção da matriz $\mathbf{H}$ do método de Newton-Raphson envolve as derivadas segundas dos deslocamentos em relação aos parâmetros. Quando se utiliza o método dos elementos finitos para um modelo elástico linear e as grandezas medidas são deslocamentos, essas derivadas podem ser obtidas partindo da equação:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial p_k \partial p_\ell} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial^2 \mathbf{R}}{\partial p_k \partial p_\ell} - \frac{\partial^2 \mathbf{K}}{\partial p_k \partial p_\ell} \mathbf{U} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_k} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial p_\ell} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial p_\ell} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial p_k} \right) \quad (4.22)$$

Para as derivadas segundas em relação ao parâmetro E , tem-se:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial E \partial E} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(-2 \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E} \Big|_k \right) \quad (4.23)$$

Para o cálculo desta parcela é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura e a derivada do vetor dos deslocamentos nodais em relação ao módulo de elasticidade em cada iteração, e a derivada da matriz de rigidez em relação ao módulo de elasticidade. Como os deslocamentos são inversamente

proporcionais ao módulo de elasticidade, suas derivadas são inversamente proporcionais ao quadrado do módulo de elasticidade, logo $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E}$ é o vetor dos deslocamentos calculados resolvendo um problema auxiliar com o mesmo modelo matemático considerando E^2 .

Para as derivadas segundas em relação aos parâmetros E e K_0 , a equação (4.22) torna-se:

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial E \partial K_0} = \frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial K_0 \partial E} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E} \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial K_0} \right) \quad (4.24)$$

Para esse cálculo, além da matriz de rigidez e da derivada da matriz de rigidez em relação ao módulo de elasticidade, precisa-se da derivada do vetor dos deslocamentos nodais em relação ao parâmetro K_0 . Os deslocamentos são diretamente proporcionais a K_0 , portanto $\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial K_0}$ é o vetor dos deslocamentos calculados obtido resolvendo um problema auxiliar com o mesmo modelo matemático e com um carregamento fictício definido apenas pelas componentes do carregamento que variam com K_0 , considerando $K_0 = 1$.

As derivadas segundas dos deslocamentos em relação a K_0 são nulas, ou seja,

$$\frac{\partial^2 \mathbf{U}}{\partial K_0 \partial K_0} = 0 \quad (4.25)$$

Com base no exposto acima, desenvolve-se uma rotina para a identificação dos parâmetros, módulo de elasticidade e coeficiente de empuxo, para cada um dos métodos utilizando o critério dos mínimos quadrados. O procedimento é semelhante ao apresentado no Capítulo 3.

Ressalta-se a importância da definição dos valores iniciais dos parâmetros no processo iterativo. Como se trata de um problema físico com

domínio razoavelmente bem definido desses parâmetros, é interessante efetuar cálculos com diversos valores iniciais e verificar os resultados obtidos. Realiza-se esse tipo de análise nesse exemplo.

O gráfico da Figura 4.15 ilustra o domínio adotado dos valores iniciais dos parâmetros e os quatro pares de valores iniciais utilizados nos processos iterativos. Adotam-se como limites superiores do domínio os valores dos parâmetros estimados a priori, apresentados na Tabela 4.1.

Figura 4.15 – Domínio adotado dos valores iniciais dos parâmetros

A função objetivo está representada nas figuras 4.9 e 4.10, e a Tabela 4.7 apresenta os resultados obtidos com cada um dos processos iterativos. Nos casos em que não há convergência utiliza-se o termo NC.

No método de Levenberg-Marquardt adota-se como valor inicial $\lambda = 10$. Nos três primeiros pares de valores iniciais da Tabela 4.7, divide-se esse escalar por 100 em cada iteração. Para o último par de valores, como não há convergência dividindo por 100, divide-se o escalar por 10.

Tabela 4.7 – Resultados obtidos no caso 3 com a identificação simultânea dos parâmetros

Processo utilizado	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$	Erro relativo e N° iterações
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 10 \text{ GPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$			
Newton-Raphson	NC	NC	NC
Gauss-Newton	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$	$1,269 \times 10^{-15}$	0,09% 4
Levenberg-Marquardt	$E = 16,862 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,680$	$1,582 \times 10^{-14}$	0,97% 4
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 20 \text{ GPa} \\ 8 \end{bmatrix}$			
Newton-Raphson	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$	$1,269 \times 10^{-15}$	0,36% 6
Gauss-Newton	$E = 16,865 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,682$	$2,111 \times 10^{-14}$	0,14% 3
Levenberg-Marquardt	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$	$1,269 \times 10^{-15}$	0,04% 5
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 30 \text{ GPa} \\ 10 \end{bmatrix}$			
Newton-Raphson	NC	NC	NC
Gauss-Newton	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$	$1,269 \times 10^{-15}$	0,03% 6
Levenberg-Marquardt	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,680$	$1,269 \times 10^{-15}$	0,40% 6
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 40 \text{ GPa} \\ 16 \end{bmatrix}$			
Newton-Raphson	NC	NC	NC
Gauss-Newton	NC	NC	NC
Levenberg-Marquardt	$E = 16,863 \text{ GPa}$ $K_0 = 6,681$	$1,269 \times 10^{-15}$	0,54% 7

Ilustra-se nas figuras 4.16 e 4.17, respectivamente, a variação dos parâmetros E e K_0 com as iterações partindo dos valores iniciais $E = 20$ GPa e $K_0 = 8$ para os três métodos utilizados.

Figura 4.16 – Variação do módulo de elasticidade com as iterações

Figura 4.17 – Variação do coeficiente K_0 com as iterações

A Tabela 4.8 apresenta a análise dos resultados obtidos e a Tabela 4.9 a análise dos resíduos. Como nesse estudo o número de parâmetros é igual ao número de medidas, o valor da variância final do erro não pode ser estimado pela equação (2.73). Logo, a matriz de covariância dos parâmetros estimados é calculada com o valor da variância dos resíduos finais, apresentada na Tabela 4.9.

Tabela 4.8 – Análise dos resultados obtidos no caso 3 com a identificação simultânea dos parâmetros

Processo utilizado	Nº de condição	Desvio padrão	Coefficiente de variação	Coefficiente de correlação
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 10 \text{ GPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$				
Newton-Raphson	NC	NC	NC	NC
Gauss-Newton	218,704	$\sigma_E = 4,539 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 1,468 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,002\%$	0,973
Levenberg-Marquardt	218,682	$\sigma_E = 2,070 \times 10^{-3} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 6,696 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,012\%$ $r_{K_0} = 0,010\%$	0,973
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 20 \text{ GPa} \\ 8 \end{bmatrix}$				
Newton-Raphson	180,868	$\sigma_E = 4,539 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 1,468 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,002\%$	0,973
Gauss-Newton	218,746	$\sigma_E = 2,401 \times 10^{-3} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 7,766 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,014\%$ $r_{K_0} = 0,012\%$	0,973
Levenberg-Marquardt	218,704	$\sigma_E = 4,539 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 1,468 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,002\%$	0,973
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 30 \text{ GPa} \\ 10 \end{bmatrix}$				
Newton-Raphson	NC	NC	NC	NC
Gauss-Newton	218,704	$\sigma_E = 4,539 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 1,468 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,002\%$	0,973
Levenberg-Marquardt	218,704	$\sigma_E = 4,539 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 1,468 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,002\%$	0,973
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 40 \text{ GPa} \\ 16 \end{bmatrix}$				
Newton-Raphson	NC	NC	NC	NC
Gauss-Newton	NC	NC	NC	NC
Levenberg-Marquardt	218,696	$\sigma_E = 4,539 \times 10^{-4} \text{ GPa}$ $\sigma_{K_0} = 1,468 \times 10^{-4}$	$r_E = 0,003\%$ $r_{K_0} = 0,002\%$	0,973

Tabela 4.9 - Análise dos resíduos finais para o caso 3 com a identificação simultânea dos parâmetros

Processo utilizado	Análise dos resíduos finais	
	Resíduo médio	Variância
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 10 \text{ GPa} \\ 0,5 \end{bmatrix}$		
Newton-Raphson	NC	NC
Gauss-Newton	$\bar{r} = -2,429 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17}$
Levenberg-Marquardt	$\bar{r} = -8,360 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 1,847 \times 10^{-15}$
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 20 \text{ GPa} \\ 8 \end{bmatrix}$		
Newton-Raphson	$\bar{r} = -2,429 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17}$
Gauss-Newton	$\bar{r} = 9,430 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 3,325 \times 10^{-15}$
Levenberg-Marquardt	$\bar{r} = -2,429 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17}$
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 30 \text{ GPa} \\ 10 \end{bmatrix}$		
Newton-Raphson	NC	NC
Gauss-Newton	$\bar{r} = -2,429 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17}$
Levenberg-Marquardt	$\bar{r} = -2,429 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17}$
Valor inicial dos parâmetros $\mathbf{p}_0 = \begin{bmatrix} 40 \text{ GPa} \\ 16 \end{bmatrix}$		
Newton-Raphson	NC	NC
Gauss-Newton	NC	NC
Levenberg-Marquardt	$\bar{r} = -2,429 \times 10^{-8}$	$\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17}$

Os coeficientes de sensibilidade calculados em $E = 16,863 \text{ GPa}$ e $K_0 = 6,681$ estão plotados na Figura 4.18. Percebe-se que o deslocamento horizontal, medida 2, tem maior influência que o deslocamento vertical, medida 1, tanto em relação a E como em relação a K_0 .

Figura 4.18 – Coeficientes de sensibilidade

Nos casos em que houve convergência obtêm-se praticamente os mesmos valores para os parâmetros, independentemente do método utilizado. Conseqüentemente, os valores obtidos na análise dos resultados e na análise dos resíduos também estão muito próximos. Dessa forma, essas análises não fornecem informações para a escolha de um dos métodos.

Observando globalmente os resultados percebe-se que, nesse estudo, o método de Newton-Raphson não apresenta bons resultados, convergiu apenas para o caso em que os valores iniciais dos parâmetros estão próximos da solução e, além disso, com um número maior de iterações. Já os métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt apresentam melhores resultados. Ressalta-se que nesses dois métodos existe uma maior simplicidade na determinação da matriz hessiana, o que diminui o número de análises da estrutura.

O método de Levenberg-Marquardt não apresenta vantagens em relação ao método de Gauss-Newton nos casos em que este não apresenta problemas de convergência, ou seja, nos três primeiros pares de valores iniciais da Tabela 4.7. Sendo assim, considera-se recomendável para os sistemas que não estejam automatizados o uso do método de Gauss-Newton,

e quando houver problemas de convergência, o método de Levenberg-Marquardt. Considera-se sistemas não automatizados os sistemas aqui utilizados, nos quais em cada iteração é necessário interagir com o software de análise numérica. Logo, um número menor de iterações resulta em um menor tempo no processo.

O alto valor do coeficiente de correlação (0,973) indica que os parâmetros E e K_0 estão correlacionados e, portanto, não poderiam ser identificados simultaneamente. Entretanto, fisicamente em um modelo elástico linear não existe essa correlação.

Como se dispõe apenas de duas medidas, não se tem informações se elas apresentam os maiores coeficientes de sensibilidade, ou seja, se elas têm grande influência no processo e se são suficientes para se determinar os parâmetros. No estudo do caso 4, no Capítulo 3, obtém-se o maior coeficiente de correlação utilizando duas medidas em posição semelhante às desse túnel. Logo, a possível utilização de medidas com pequena influência no processo, ou seja, com baixos coeficientes de sensibilidade, pode justificar o alto valor do coeficiente de correlação.

Nos diversos estudos do Capítulo 3 obtém-se os maiores valores do coeficiente de correlação no caso 5, no qual se considera um modelo não representativo da estrutura. Logo, o modelo elástico linear adotado pode ser inadequado e ser outro possível indicativo do alto valor do coeficiente de correlação aqui encontrado.

Comparando o valor da variância dos resíduos finais $\sigma_r^2 = 8,880 \times 10^{-17} \text{ m}^2$ com a variância das medidas $\sigma_u^2 = 4 \times 10^{-8} \text{ m}^2$ percebe-se que a razão entre esses valores é de uma ordem de grandeza diferente de 1, novamente indicando que o modelo não está representando bem a estrutura ou que variância das medidas não é muito realista.

Portanto, os valores dos parâmetros identificados $E=16,863$ GPa e $K_0=6,681$ devem ser cuidadosamente analisados.

4.6.2 Identificação isolada dos parâmetros

Como os resultados obtidos com a identificação simultânea dos parâmetros indicam a necessidade de uma análise cuidadosa, aplica-se o procedimento desenvolvido para identificar cada um dos parâmetros isoladamente. Utiliza-se o critério dos mínimos quadrados e o método de Gauss-Newton.

Para a identificação do módulo de elasticidade considera-se como conhecido o valor do coeficiente K_0 ($K_0=16$). A matriz de sensibilidade é de ordem 2×1 , 2 deslocamentos medidos e 1 parâmetro, e pode ser obtida pela equação (4.16).

Na identificação do coeficiente K_0 admite-se como valor conhecido o valor do módulo de elasticidade, $E=40$ GPa. A matriz de sensibilidade, também de ordem 2×1 , fica definida pela equação (4.17).

São considerados os mesmos valores iniciais dos parâmetros que os utilizados na identificação simultânea dos parâmetros. A Tabela 4.10 apresenta os resultados encontrados.

Tabela 4.10 – Resultados obtidos no caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros

Valores iniciais dos parâmetros	Parâmetros estimados	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° iterações
Identificação do módulo de elasticidade			
$\mathbf{p}_0 = [10 \text{ GPa}]$	$E = 45,876 \text{ GPa}$	$4,938 \times 10^{-8}$ $4,938 \times 10^{-8}$	0,04% 6
$\mathbf{p}_0 = [20 \text{ GPa}]$	$E = 45,876 \text{ GPa}$	$4,938 \times 10^{-8}$ $4,938 \times 10^{-8}$	0,01% 5
$\mathbf{p}_0 = [30 \text{ GPa}]$	$E = 45,876 \text{ GPa}$	$4,938 \times 10^{-8}$ $4,938 \times 10^{-8}$	0,02% 4
$\mathbf{p}_0 = [40 \text{ GPa}]$	$E = 45,876 \text{ GPa}$	$4,938 \times 10^{-8}$ $4,938 \times 10^{-8}$	0,03% 3
Identificação do coeficiente K_0			
$\mathbf{p}_0 = [0,5]$	$K_0 = 13,965$	$4,101 \times 10^{-8}$ $4,101 \times 10^{-8}$	0% 2
$\mathbf{p}_0 = [8]$	$K_0 = 13,965$	$4,101 \times 10^{-8}$ $4,101 \times 10^{-8}$	0% 2
$\mathbf{p}_0 = [10]$	$K_0 = 13,965$	$4,101 \times 10^{-8}$ $4,101 \times 10^{-8}$	0% 2
$\mathbf{p}_0 = [16]$	$K_0 = 13,965$	$4,101 \times 10^{-8}$ $4,101 \times 10^{-8}$	0% 2

As figuras 4.19 e 4.20 apresentam, respectivamente, a variação dos parâmetros E e K_0 com as iterações para os diversos valores iniciais considerados.

Figura 4.19 – Variação do módulo de elasticidade com as iterações

Figura 4.20 – Variação do coeficiente K_0 com as iterações

As tabelas 4.11 e 4.12 apresentam, respectivamente, a análise dos resultados e a análise dos resíduos finais juntamente com o intervalo de confiança calculado, considerando um nível de confiança de 95%. Como para todos os valores iniciais obteve-se o mesmo parâmetro estimado, tanto para o módulo de elasticidade quanto para o coeficiente K_0 , ilustram-se as análises apenas de um resultado em cada identificação.

Tabela 4.11 – Análise dos resultados obtidos no caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros

Parâmetros estimados	Nº de condição	Desvio padrão	Coefficiente de variação
Identificação do módulo de elasticidade			
$E = 45,876 \text{ GPa}$	1	$\sigma_E = 6,766 \text{ GPa}$	$r_E = 14,748\%$
Identificação do coeficiente K_0			
$K_0 = 13,965$	1	$\sigma_{K_0} = 1,720$	$r_{K_0} = 12,319\%$

Tabela 4.12 – Intervalo de confiança dos parâmetros estimados e análise dos resíduos finais para o caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros

Parâmetros estimados	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
Identificação do módulo de elasticidade			
$E = 45,876\text{GPa}$	$E = 45,876 \pm 81,963\text{GPa}$	$\bar{r} = -3.646 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 4,673 \times 10^{-8}$
Identificação do coeficiente K_0			
$K_0 = 13,965$	$K_0 = 13,965 \pm 21,859$	$\bar{r} = -2,119 \times 10^{-5}$	$\sigma_r^2 = 4,011 \times 10^{-8}$

Os altos valores dos desvios padrão e dos coeficientes de variação e os intervalos de confiança obtidos nesse estudo indicam resultados pouco significativos.

4.7 Análise dos resultados

Com a consideração da informação prévia, tanto no caso 1 como no caso 2, obtêm-se valores muito próximos dessa informação prévia, independente do valor considerado, conforme apresentado na Tabela 4.6. Nesse estudo, ao se considerar a informação prévia as medidas estão sendo negligenciadas no processo de identificação dos parâmetros. Logo, a incorporação da informação prévia deve ser cuidadosamente analisada para não mascarar a retroanálise.

Analisando os resultados obtidos no caso 3 com o método de Newton-Raphson, de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt, considera-se recomendável, pela eficiência e maior simplicidade, o uso do método de Gauss-Newton e, nos casos com problemas de convergência, o método de Levenberg-Marquardt.

Pode-se concluir que a escolha do modelo adotado para representar a estrutura tem uma grande influência nos resultados. Os valores obtidos com o modelo matemático 1, com os procedimentos que não incluem nenhuma informação adicional, $E = 149,855 \text{ GPa}$ e $K_0 = 60,268$, estão muito distantes dos valores esperados.

Com o modelo matemático 2, os valores encontrados no caso 2, com os critérios dos mínimos quadrados e da máxima verossimilhança, e na identificação conjunta dos parâmetros com o critério dos mínimos quadrados no caso 3, $E = 16,863 \text{ GPa}$ e $K_0 = 6,681$, poderiam ser considerados satisfatórios. Porém, o valor obtido do coeficiente de correlação indica uma alta correlação entre os parâmetros. Correlação essa que não existe fisicamente no modelo elástico linear adotado.

Esse alto coeficiente de correlação pode ter ocorrido porque as medidas podem apresentar baixos coeficientes de sensibilidade e o modelo adotado não ser representativo da estrutura.

Os valores dos parâmetros obtidos no caso 3 com a identificação isolada dos parâmetros, $E = 45,876 \text{ GPa}$ e $K_0 = 13,965$, poderiam ser considerados satisfatórios. Porém os altos valores dos desvios padrão e dos coeficientes de variação e os intervalos de confiança obtidos nesse estudo indicam resultados pouco significativos.

O alto valor do coeficiente K_0 , tanto o inicial como os obtidos, e a própria escolha deste parâmetro para ser identificado são fatores questionados por alguns especialistas da área.

Capítulo 5

Barragem de Machadinho

O desenvolvimento recente de novas barragens de enrocamento com face de concreto (BEFC) tem se caracterizado pela otimização do zoneamento dos seus materiais constituintes e pelo aumento de suas alturas, o que tem exigido estudos mais detalhados do comportamento dessas estruturas e de seus elementos estruturais. No Brasil existem nove barragens de enrocamento com face de concreto, apresentadas na Tabela 5.1.

Tabela 5.1 – BEFC no Brasil

Nome	Ano de conclusão	Altura(m)
Foz do Areia	1980	160
Segredo	1992	145
Xingo	1994	150
Ita	1999	125
Machadinho	2001	125
Itapebi	2003	120
Quebra-Queixo	2003	75
Barra Grande	2005	194
Campos Novos	2005	200

As barragens de enrocamento com face de concreto são caracterizadas por terem como sistema de vedação uma laje de concreto apoiada no paramento de montante, uma vez que o material constituinte da barragem, o enrocamento, é francamente drenante. As linhas de injeções de calda de cimento na rocha de fundação são executadas a partir de um elemento estrutural denominado plinto, no qual se apóia a borda inferior da laje. A Figura 5.1 ilustra os principais componentes de uma barragem de enrocamento com face de concreto.

Figura 5.1 - Componentes de uma BEFC

No interior do maciço da barragem é estudado o zoneamento do enrocamento, com o intuito de aproveitar ao máximo os materiais provenientes das escavações do empreendimento, sem comprometer as deformações do maciço. O resultado desse estudo é a variação da granulometria e da mineralogia do enrocamento e de diferentes condições de compactação desses materiais, ocasionando módulos de elasticidade diferenciados ao longo de uma seção transversal da barragem.

A face de concreto é dividida em painéis verticais com largura da ordem de 16 m, com juntas de vedação entre os mesmos. A deformação da barragem, quando solicitada pelo enchimento do reservatório, ocasiona compressão nas juntas centrais do paramento e tração nas juntas próximas às ombreiras da barragem. Uma junta perimetral é instalada no contato da laje com o plinto, permitindo a translação e a rotação dos painéis.

Em muitas dessas barragens têm ocorrido problemas de infiltração decorrentes de fissuras e de trincas nos painéis de concreto ou de rompimentos das juntas de vedações em determinadas regiões do paramento. Uma possível causa dessas infiltrações está relacionada com as técnicas construtivas próprias das BEFC que, combinadas às otimizações do zoneamento do maciço composto por materiais provenientes das escavações obrigatórias, podem ocasionar deformações diferenciais excessivas em algumas regiões da face de concreto, provocando zonas com elevada concentração de fissuras.

Na maioria dos casos são utilizadas regras empíricas para o dimensionamento da laje. A taxa de armadura recomendada é de 0,40% na sua direção longitudinal e de 0,30 a 0,35% na sua direção horizontal, posicionadas no plano médio da laje. A espessura (e), em metros, é usualmente definida pela expressão:

$$e = 0,30 + 0,002H \quad (5.1)$$

em que H , em metros, é a altura do nível máximo normal em relação à face de concreto considerada (Goulart, 2004).

Entretanto, a utilização exclusiva desses critérios empíricos é incompatível com as possibilidades de análises estruturais oferecidas por modelos matemáticos cada vez mais complexos, que propiciam análises mais elaboradas.

A constatação de infiltrações de água por fissuras horizontais existentes nas lajes de vedação e o caráter empírico que tem sido dado ao seu dimensionamento indicam claramente a necessidade de se estudar o dimensionamento dessas lajes de vedação, adotando modelos matemáticos que representem o comportamento real da obra.

O uso desses modelos matemáticos exige, como contrapartida, qualidade nos dados de entrada referentes às ações e aos parâmetros físicos. Somente tem sentido a utilização dos modelos complexos se houver confiabilidade nos dados de entrada fornecidos.

As atuais barragens de enrocamento com face de concreto estão sendo monitoradas. O projeto de instrumentação inclui a utilização de eletrônives instalados na face de concreto. Esses instrumentos fornecem a rotação no ponto onde estão localizados, permitindo determinar a configuração deformada e, por consequência, os esforços solicitantes na laje, analisada como viga.

Um dos procedimentos mais utilizados na interpretação dos resultados das leituras efetuadas nos eletrônives é o chamado método dos polinômios, que consiste no ajuste de uma curva polinomial contínua representativa das rotações medidas em função das distâncias de instalação dos aparelhos. Normalmente, utiliza-se um polinômio do quinto ou sexto grau, dependendo do ajuste proporcionado, que pode ser verificado pelo fator de correlação da curva com as rotações medidas.

A equação da linha elástica (w) é determinada pela integração da curva das rotações. A constante de integração é calculada assumindo deslocamento nulo no contato da face de concreto com o plinto, ou utilizando o valor do deslocamento transversal nesse ponto. Esse deslocamento é registrado por medidores de abertura de juntas, nos quais se assume que o plinto é um ponto indeslocável, ou mesmo por leituras topográficas efetuadas na extremidade superior da face de concreto.

Os diagramas de momentos fletores e esforços cortantes são obtidos pelas expressões da teoria de barra de Bernoulli-Euler, ou seja, $M = -EIw''$ e $V = -EIw'''$.

Também é usual na prática de projeto calcular os deslocamentos por integração numérica das rotações. Por hipótese, admite-se que a variação entre os pontos de leitura das rotações seja linear e calcula-se a área do diagrama abaixo dessa curva.

Estudos adicionais podem ser realizados com as leituras dos eletrônicos, como a aplicação da retroanálise para identificar parâmetros relacionados com as ações ou com as propriedades físicas dos materiais, que é o objetivo deste trabalho.

5.1 Descrição da obra estudada

A Usina Hidrelétrica (UHE) Machadinho é composta por três unidades geradoras com capacidade nominal de 380MW, totalizando 1140MW instalados, e está localizada no rio Pelotas, entre os estados do Rio Grande do Sul e de Santa Catarina. O seu arranjo geral está apresentado na Figura 5.2.

Figura 5.2 - Arranjo geral da Usina Hidrelétrica Machadinho

As obras foram iniciadas em março de 1998 e foram finalizadas em julho de 2002. O enchimento do reservatório ocorreu no mês de outubro de 2001.

A barragem da UHE Machadinho foi implantada ao longo de um eixo retilíneo com aproximadamente 673 m de extensão e altura máxima de 125 m. Os paramentos de montante e de jusante têm inclinação de 1:1,3 (v:h) e 1:1,2, respectivamente.

A face de concreto está dividida em 43 painéis verticais, com largura de 16,10 m, com exceção apenas para o painel 6, que está subdividido em dois outros com largura de 8,05 m. Essa decisão foi tomada para minimizar o problema estrutural decorrente da esconsidade existente no contato do mesmo com o plinto.

De acordo com (Goulart, 2004), os painéis foram executados após o alteamento da barragem, numa fase única, tendo sido aplicadas mantas plásticas com espessura de 0,15 mm para reduzir a aderência entre a laje e o concreto extrudado, o qual serviu como base para a concretagem da referida laje. A espessura dos painéis varia conforme a equação (5.1). A Figura 5.3 ilustra a execução da face de concreto da barragem de Machadinho.

Figura 5.3 – Execução da face de concreto da barragem de Machadinho

Ainda de acordo com (Goulart, 2004), no projeto executivo foram estudados os deslocamentos no maciço da barragem com modelos matemáticos bidimensionais analisados pelo método dos elementos finitos. Esses modelos contemplavam seções transversais da barragem submetidas, numa primeira etapa, aos carregamentos do peso próprio do enrocamento simulando as diversas fases construtivas, e posteriormente, à ação do empuxo hidrostático do reservatório atuante na face de concreto. Os deslocamentos obtidos foram impostos nos painéis da laje para se determinar a armadura necessária, sendo limitada à abertura de fissuras em 0,30 mm apenas na face superior em contato com a água. Como a face de concreto foi executada após o alteamento da barragem, admitiu-se que grande parte do adensamento do enrocamento já havia ocorrido e, portanto, não se considerou essa deformação atuante na estrutura.

Na face de concreto da barragem da UHE Machadinho foram instalados quatro tipos de aparelhos para monitorar o comportamento da

estrutura. As aberturas de juntas entre painéis e entre painéis e plinto são monitoradas respectivamente com medidores de abertura de juntas e medidores triortogonais de junta perimetral. A configuração deformada da laje de concreto é determinada pelas medidas fornecidas nos eletrônives, e a tensão existente na armadura é medida por tensômetros instalados na mesma. Como o objetivo deste trabalho é o estudo da deformação na face de concreto e a avaliação estrutural da mesma, utilizam-se apenas os dados dos eletrônives.

Foram instalados eletrônives nas lajes 14, 24 e 36. A primeira está localizada junto à ombreira direita, a segunda na região central da barragem e a terceira junto à ombreira esquerda. Os dados de leituras disponíveis para esse estudo estão contidos no período compreendido entre 28/08/01 e 26/03/02. Em virtude da rápida estabilização dessas leituras, utilizam-se os dados de 20/03/2002. Não se dispõe de dados posteriores a 26/03/2002.

A Figura 5.4 apresenta a localização dos eletrônives na laje 24, que é objeto de estudo neste trabalho.

Figura 5.4 – Localização dos eletrônives na laje 24

Segundo (Goulart, 2004), na análise dos dados da barragem de Machadinho a aproximação das rotações por um polinômio resultou em trechos com baixa aderência em relação aos valores medidos. A alternativa para esse problema foi a utilização de quatro polinômios de quarto grau, interpolando trechos contíguos. Os mesmos foram determinados considerando, além dos pontos do trecho em questão, dois pontos do trecho anterior e um do posterior.

A curva obtida não é contínua, estando as descontinuidades localizadas nos pontos de ligação entre dois polinômios adjacentes. Dessa forma, a curva de momentos fletores obtidas a partir da derivada da curva de rotações também não é contínua. Quanto aos deslocamentos, a função determinada é contínua, uma vez que a constante de integração de um dado polinômio é calculada no ponto inicial do seu trecho, impondo-se o deslocamento obtido no trecho final do polinômio anterior. Os polinômios foram sobrepostos para garantir a continuidade das funções (Goulart, 2004).

Os deslocamentos também foram obtidos diretamente das rotações medidas utilizando a integração numérica. Admitiu-se deslocamento nulo no plinto e rotação linear em cada trecho, obtendo-se variação linear dos deslocamentos em cada trecho.

Neste trabalho, utiliza-se a retroanálise para identificar parâmetros a partir das rotações fornecidas pelos eletrônives instalados na face de concreto da UHE Machadinho. Com os parâmetros obtidos, analisa-se a laje da barragem, determinando-se os deslocamentos e os esforços solicitantes. Partindo desses resultados, pode-se calcular a taxa de armadura necessária e compará-la com a recomendada pelos critérios empíricos e com a existente na barragem. Essa obra foi extensivamente estudada em conjunto com o engenheiro Márcio L. S. Goulart, resultando em diversos trabalhos publicados, a saber: (Goulart *et al*, 2003a), (Goulart *et al*, 2003b), (André *et al*,

2003), (Costa *et al*, 2004a), (André *et al*, 2004a), (André *et al*, 2004b) e em uma dissertação de mestrado (Goulart, 2004).

A contribuição neste estudo consiste na identificação de parâmetros considerando modelos hierárquicos para representar a estrutura. Os parâmetros a serem identificados variam em cada caso.

5.2 Modelo linear de viga

Os valores medidos das rotações, obtidos dos eletrônives, são utilizados para determinar a reação da barragem de enrocamento sobre a face de concreto. O problema é analisado por análise matricial de estruturas (formulação em deslocamentos). Esse estudo foi parcialmente apresentado em (Goulart *et al*, 2003a), (Goulart *et al*, 2003b) e (André *et al*, 2003).

O modelo adotado considera a face de concreto como uma viga biengastada com altura variável, discretizada em elementos. Considera-se o material como elástico, linear, isotrópico e homogêneo com módulo de elasticidade $E = 3 \times 10^6 \text{ tf/m}^2$. Adota-se a hipótese de carregamento linearmente distribuído nos elementos.

A Figura 5.5 apresenta o modelo com a viga discretizada em 8 elementos, com 7 parâmetros a identificar, $q_1, q_2, q_3, q_4, q_5, q_6$, e q_7 . Esses parâmetros representam a diferença entre a pressão hidrostática conhecida e a reação a ser determinada. Os valores dessa diferença admitidos nas extremidades esquerda, $q = -1 \text{ tf/m}$, e direita, $q = 0$, são obtidos a partir de estudos preliminares, que incluíram julgamento baseado em experiência de projeto. As rotações medidas consideradas, apresentadas na mesma figura, correspondem aos eletrônives 15, 16, 17, 18, 20, 22 e 25.

Figura 5.5 – Modelo linear de viga e rotações medidas na laje 24

Observa-se que modelo de viga não contempla toda a extensão da face de concreto, ele se inicia no eletrônível 13 e termina no 28. Isto decorre da necessidade de se conhecer e de se aplicar os recalques de apoio nas extremidades da estrutura. Assim, limita-se o modelo nos eletrôníveis próximos às extremidades dos painéis, impondo nesses pontos as rotações medidas e os deslocamentos transversais à face de concreto, estes estimados por integração numérica das rotações.

Uma primeira identificação dos parâmetros é obtida pela abordagem inversa. Conforme visto no Capítulo 2, a abordagem inversa é baseada na simples inversão das equações que governam o modelo. Pela análise matricial, determina-se o vetor das rotações em função do carregamento e iguala-se ao vetor das rotações medidas. Como se tem o mesmo número de equações e incógnitas, os parâmetros são obtidos resolvendo um sistema de 7 equações a 7 incógnitas. Desenvolve-se uma rotina utilizando o programa de matemática simbólica Macsyma.

Com o objetivo de se verificar os primeiros resultados, utiliza-se também o método de Gauss-Newton com o critério dos mínimos quadrados. Conforme apresentado no Capítulo 2, o método de Gauss-Newton consiste em um processo iterativo do tipo:

$$\mathbf{p}|_{r+1} = \mathbf{p}|_r + \Delta\mathbf{p}|_r \quad (5.2)$$

com

$$\Delta\mathbf{p}|_r = \mathbf{H}^{-1}|_r \mathbf{A}^T|_r \Delta\mathbf{U}|_r \quad (5.3)$$

e a matriz hessiana ($\mathbf{H}$) dada por:

$$\mathbf{H}_{GN} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} \quad (5.4)$$

A matriz de sensibilidade será da ordem 7×7 , 7 medidas e 7 parâmetros. Conforme visto no item 2.3, a matriz de sensibilidade fica definida pela equação:

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial \mathbf{p}} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \mathbf{p}} - \frac{\partial \mathbf{K}}{\partial \mathbf{p}} \mathbf{U} \right) \quad (5.5)$$

Como a matriz de rigidez independe dos parâmetros a serem determinados, cada coluna da matriz de sensibilidade será dada por:

$$\mathbf{A}_{q_i} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial q_i} = \mathbf{K}^{-1} \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \right) \quad (5.6)$$

O procedimento é semelhante ao apresentado no item 2.4, porém não se utiliza o programa Adina para o cálculo das rotações e, conseqüentemente, da matriz de sensibilidade. Desenvolve-se uma rotina utilizando o programa de matemática simbólica Macsyma, que calcula as rotações por análise matricial. Nesse cálculo já está incluída a determinação da matriz de rigidez da estrutura. Utilizando análise matricial para resolver a estrutura, dispõe-se de expressões explícitas para o cálculo do vetor das forças nodais ($\mathbf{R}$), logo,

pode-se obter facilmente a derivada desse vetor em relação aos parâmetros $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i}\right)$. O processo iterativo está incluído nessa mesma rotina.

Considerando como valores iniciais para os parâmetros $q_{i_0} = 0$, obtêm-se os parâmetros identificados, apresentados na Tabela 5.2, em duas iterações com um erro relativo de 0,0%. Esses valores são os mesmos obtidos com a aplicação da abordagem inversa.

Tabela 5.2 – Parâmetros identificados com o modelo linear de viga

Parâmetros identificados (tf/m)						
$q_1 = 0,247$	$q_2 = 0,072$	$q_3 = -0,080$	$q_4 = 0,120$	$q_5 = -0,046$	$q_6 = 0,003$	$q_7 = -0,001$

Com os valores obtidos para os parâmetros e o carregamento conhecido, correspondente à pressão hidrostática, obtém-se a reação da barragem de enrocamento sobre a face de concreto, apresentada na Figura 5.6

Figura 5.6 – Pressão hidrostática e reação obtida na laje 24 (tf/m)

Com o mesmo objetivo, determina-se a reação da barragem de enrocamento sobre a face de concreto utilizando as rotações medidas e considerando o mesmo modelo linear de viga, utilizando agora o método dos elementos finitos, com o programa Adina, para resolver a estrutura. Para se obter os parâmetros utiliza-se o critério dos mínimos quadrados e o método de Gauss-Newton, equações (5.2) a (5.4); o procedimento é semelhante ao apresentado no item 2.4.

Considera-se o material como elástico, linear, isótropo e homogêneo. Utilizando elementos de viga de 2 nós, obtém-se um modelo com 180 nós e 535 graus de liberdade.

Novamente, a matriz de sensibilidade será da ordem 7×7 , com cada coluna definida pela equação (5.6). Logo, para se obter cada coluna da matriz é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura e a derivada do vetor das forças nodais em relação aos parâmetros $\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \right)$. Para se determinar cada uma dessas derivadas, resolve-se um problema auxiliar com o mesmo modelo e um carregamento fictício dado por $q_i = 1$ e as demais cargas nulas. Logo,

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial q_i} \right) = \mathbf{R}|_{q_i=1} = \mathbf{K} \mathbf{U}|_{q_i=1} \quad (4.26)$$

sendo $\mathbf{K}$ a matriz de rigidez da estrutura e $\mathbf{U}|_{q_i=1}$ o vetor dos deslocamentos nodais gerados pelo carregamento fictício.

Adotando novamente os valores iniciais para os parâmetros $q_{i_0} = 0$, obtém-se os resultados em apenas duas iterações com um erro relativo de 0,0%. A Tabela 5.3 apresenta os parâmetros estimados. Percebe-se, conforme esperado, que os valores obtidos são praticamente iguais aos apresentados na Tabela 5.2.

Considerando os parâmetros encontrados obtém-se o valor da função objetivo calculada no mínimo, $F_{\text{mínimo}} = 3,958 \times 10^{-11}$, e do número de condição, $\text{cond}(\mathbf{H}) = 9,468 \times 10^4$.

Ainda na Tabela 5.3 encontram-se os valores dos desvios padrão e dos coeficientes de variação dos parâmetros, e na Tabela 5.4 apresentam-se os coeficientes de correlação.

Cabe lembrar que, quando o número de medidas é igual ao número de parâmetros, utiliza-se o valor da variância dos resíduos finais para se obter a matriz de covariância dos parâmetros estimados.

Tabela 5.3 – Resultados obtidos com o modelo linear de viga em elementos finitos

Parâmetros estimados (tf/m)	Desvio padrão (tf/m)	Coeficiente de variação
$q_1 = 0,245$	$\sigma_{q_1} = 2,361 \times 10^{-3}$	$r_{q_1} = 0,965\%$
$q_2 = 0,070$	$\sigma_{q_2} = 2,010 \times 10^{-3}$	$r_{q_2} = 2,864\%$
$q_3 = -0,079$	$\sigma_{q_3} = 7,163 \times 10^{-4}$	$r_{q_3} = 0,908\%$
$q_4 = 0,117$	$\sigma_{q_4} = 1,619 \times 10^{-4}$	$r_{q_4} = 0,138\%$
$q_5 = -0,045$	$\sigma_{q_5} = 6,895 \times 10^{-5}$	$r_{q_5} = 0,152\%$
$q_6 = 0,003$	$\sigma_{q_6} = 3,835 \times 10^{-5}$	$r_{q_6} = 1,235\%$
$q_7 = -0,001$	$\sigma_{q_7} = 2,400 \times 10^{-5}$	$r_{q_7} = 1,798\%$

Tabela 5.4 - Coeficientes de correlação dos parâmetros estimados com o modelo linear de viga em elementos finitos

Coeficientes de correlação			
$r_{q_1 q_2} = -0,966$	$r_{q_2 q_3} = -0,920$	$r_{q_3 q_5} = 0,514$	$r_{q_5 q_6} = -0,893$
$r_{q_1 q_3} = 0,803$	$r_{q_2 q_4} = 0,619$	$r_{q_3 q_6} = -0,305$	$r_{q_5 q_7} = 0,759$
$r_{q_1 q_4} = -0,498$	$r_{q_2 q_5} = -0,345$	$r_{q_3 q_7} = 0,238$	$r_{q_6 q_7} = -0,996$
$r_{q_1 q_5} = 0,288$	$r_{q_2 q_6} = 0,221$	$r_{q_4 q_5} = -0,854$	
$r_{q_1 q_6} = -0,212$	$r_{q_2 q_7} = -0,195$	$r_{q_4 q_6} = 0,601$	
$r_{q_1 q_7} = 0,203$	$r_{q_3 q_4} = -0,832$	$r_{q_4 q_7} = -0,467$	

A análise dos resíduos finais mostra um resíduo médio igual a $\bar{r} = 1,236 \times 10^{-6}$ com variância $\sigma_r^2 = 4,815 \times 10^{-12}$.

A Figura 5.7 ilustra os coeficientes de sensibilidade em relação aos parâmetros. Os coeficientes de sensibilidade em relação a q_1 , q_2 e q_3 são baixos, indicando que uma pequena variação desses parâmetros influencia pouco a resposta do modelo. Por outro lado, os parâmetros q_4 , q_5 , q_6 , e q_7 têm maior influência na resposta do modelo, sendo que em alguns pontos de medidas a influência é maior. Por exemplo, o parâmetro q_6 , que apresenta os maiores coeficientes de sensibilidade, tem maior influência na resposta do modelo nos pontos de medidas 4, 5 e 7.

Figura 5.7 – Coeficientes de sensibilidade

Analisando a Tabela 5.4 percebe-se que os pares de parâmetros q_1 e q_2 , q_2 e q_3 , q_6 e q_7 são altamente correlacionados, e os pares q_1 e q_3 , q_3 e q_4 , q_4 e q_5 , q_5 e q_6 também apresentam um alto valor do coeficiente de correlação. Nesse caso, é esperada certa correlação entre os parâmetros.

5.3 Modelo bidimensional

Nesse estudo, os valores medidos das rotações são utilizados para se identificar o módulo de elasticidade de um dos materiais que compõem o maciço do enrocamento. Resultados parciais foram apresentados em (Costa *et al*, 2004).

Adota-se um modelo bidimensional em elementos finitos para representar a estrutura. São utilizados elementos de estado plano de deformação para discretizar o maciço do enrocamento e a fundação da barragem, e elementos de viga de Bernoulli-Euler para discretizar a face de concreto, considerando espessura constante nos elementos, mas variável ao longo da altura da barragem de acordo com a equação (5.1).

Admite-se que a fundação da barragem é composta por apenas um material e o maciço do enrocamento é formado por sete materiais, conforme indicado na Figura 5.8. Todos os materiais são considerados como elásticos, lineares, isotrópicos e homogêneos. A Tabela 5.5 apresenta as características desses materiais, conforme (Goulart, 2004).

Figura 5.8 – Materiais considerados no modelo bidimensional

Tabela 5.5 – Características dos materiais

Materiais	Módulo de elasticidade (MPa)	Coefficiente de Poisson
M_1	140	0,15
M_2	100	0,15
M_3	50	0,15
M_4	80	0,15
M_5	50	0,15
M_6	40	0,15
M_7	80	0,15
M_8	30600	0,20
M_9	30000	0,30

As restrições à translação são aplicadas nas linhas de contorno da fundação. A pressão hidrostática é aplicada na face de concreto e as forças de percolação atuantes no maciço de fundação são desprezadas em razão da existência de uma cortina de impermeabilização à montante da barragem. Por simplificação de cálculo, não se considera a aplicação da pressão hidrostática no bloco de fundação à montante da barragem, pois após uma série de estudos, verifica-se uma influência desprezível dessa ação nas deformações da face de concreto. Considera-se a configuração deformada devido à ação da

gravidade sobre o maciço e a fundação como sendo a configuração de referência, portanto não são aplicadas forças de gravidade sobre a estrutura.

Não são considerados elementos de junta ligando os elementos de viga e os de estado plano de deformação, uma vez que não há informações disponíveis quanto às movimentações paralelas ao plano de contato da laje com o maciço. Assim, os esforços axiais na face de concreto não são analisados, limitando-se os estudos aos deslocamentos transversais à face de concreto e aos momentos fletores atuantes na estrutura.

Durante a fase de análise do modelo bidimensional, estuda-se a influência da fundação da barragem no modelo. Verifica-se que, sem considerar a fundação da barragem, aplicando as condições de contorno na base da barragem, os momentos fletores nos trechos iniciais da laje têm um valor elevado, não condizente com a realidade.

A Figura 5.9 ilustra o modelo de elementos finitos construído no Adina, com 1599 elementos de estado plano de deformação, 215 elementos de viga e um total de 3472 graus de liberdade.

Figura 5.9 – Modelo bidimensional em elementos finitos na seção transversal da laje 24

Considerando 16 rotações medidas, eletrônicas 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28 e 29, e utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, identifica-se o módulo de elasticidade do material 2 (M_2). O procedimento é semelhante ao apresentado no item 2.4.

De acordo com a experiência de especialistas em engenharia geotécnica de barragens de enrocamento com face de concreto, o material constituinte da região 2 é o que deve influenciar mais os deslocamentos da face de concreto. Essa opinião pode ser verificada pela análise dos coeficientes de sensibilidade, Figura 5.10, que são calculados considerando os valores dos módulos de elasticidade dos materiais constituintes da barragem, apresentados na Tabela 5.5.

A matriz de sensibilidade será da ordem 16×1 , 16 medidas e 1 parâmetro. Nesse caso, o vetor das forças nodais independe do parâmetro a ser identificado, e a equação (5.5) se reduz a:

$$\mathbf{A}_{E_2} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial E_2} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E_2} \mathbf{U}_k \right) \quad (5.7)$$

Logo, para o cálculo da matriz de sensibilidade é necessário conhecer a matriz de rigidez da estrutura ($\mathbf{K}_k$) e o vetor dos deslocamentos calculados ($\mathbf{U}_k$) em cada iteração, e a derivada da matriz de rigidez em relação ao módulo de elasticidade do material 2 $\left(\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial E_2} \right)$. Com o problema sendo tratado como estado plano de deformação e sendo realizada análise linear, a matriz de rigidez é linear em E . Dessa forma, a derivada da matriz de rigidez em relação a E_2 é a matriz de rigidez obtida resolvendo um problema auxiliar com o mesmo modelo matemático considerando $E_2 = 1$ e os demais módulos de elasticidade iguais a zero.

A Figura 5.10 apresenta as estimativas iniciais dos coeficientes de sensibilidade nos pontos de medição, e comprova-se a opinião dos especialistas. Pode-se observar que, para os demais materiais, os valores dos coeficientes de sensibilidade são muito próximos de zero, com exceção dos pontos de medidas 2 e 3 para o material 1.

Figura 5.10 – Estimativas iniciais dos coeficientes de sensibilidade

O procedimento para a identificação do parâmetro E_2 é aplicado para distintos valores iniciais desse parâmetro, definidas em domínio fisicamente possível. A Tabela 5.6 apresenta os resultados obtidos para os três valores iniciais considerados.

Tabela 5.6 – Resultados obtidos com o modelo bidimensional

Valor inicial do parâmetro	Parâmetro estimado	$F_{\text{mínimo}}$ e s_0^2	Erro relativo e N° iterações
$p_0 = 50$ MPa	$E_2 = 68,014$ MPa	$2,526 \times 10^{-4}$ $1,684 \times 10^{-5}$	0,09% 23
$p_0 = 80$ MPa	$E_2 = 68,776$ MPa	$2,527 \times 10^{-4}$ $1,685 \times 10^{-5}$	0,10% 20
$p_0 = 100$ MPa	$E_2 = 68,770$ MPa	$2,527 \times 10^{-4}$ $1,685 \times 10^{-5}$	0,10% 26

Na Tabela 5.7 encontra-se a análise dos resultados, e na Tabela 5.8 os intervalos de confiança dos parâmetros estimados, obtidos considerando um nível de confiança de 95%, e a análise dos resíduos finais.

Tabela 5.7 – Análise dos resultados obtidos com o modelo bidimensional

Valor inicial do parâmetro	N° de condição	Desvio padrão	Coefficiente de variação
$p_0 = 50$ MPa	1	$\sigma_E = 6,350$ MPa	$r_E = 9,336\%$
$p_0 = 80$ MPa	1	$\sigma_E = 6,401$ MPa	$r_E = 9,307\%$
$p_0 = 100$ MPa	1	$\sigma_E = 6,400$ MPa	$r_E = 9,307\%$

Tabela 5.8 – Intervalo de confiança do parâmetro estimado e análise dos resíduos finais para o modelo bidimensional

Valor inicial do parâmetro	Intervalo de confiança	Análise dos resíduos finais	
		Resíduo médio	Variância
$p_0 = 50 \text{ MPa}$	$E = 68,014 \pm 13,532 \text{ MPa}$	$\bar{r} = 1,710 \times 10^{-3}$	$\sigma_r^2 = 1,372 \times 10^{-5}$
$p_0 = 80 \text{ MPa}$	$E = 68,776 \pm 13,640 \text{ MPa}$	$\bar{r} = 1,711 \times 10^{-3}$	$\sigma_r^2 = 1,372 \times 10^{-5}$
$p_0 = 100 \text{ MPa}$	$E = 68,770 \pm 13,639 \text{ MPa}$	$\bar{r} = 1,711 \times 10^{-3}$	$\sigma_r^2 = 1,372 \times 10^{-5}$

Pode-se observar que os resultados são praticamente os mesmos para os 3 valores iniciais, o que mostra o bom comportamento do sistema em estudo.

Na Figura 5.11 apresentam-se os coeficientes de sensibilidade em relação a E_2 para os 3 valores obtidos. Como os valores são muito próximos, obtém-se curvas praticamente sobrepostas. Percebe-se que as curvas têm o mesmo comportamento da curva inicial dos coeficientes de sensibilidade em relação a E_2 , ilustrada na Figura 5.10. Observa-se que as medidas 3 e 16, correspondentes aos eletrônives 16 e 29, são as que mais influenciam no processo.

Figura 5.11 – Coeficientes de sensibilidade

5.4 Modelo linear de viga sobre apoio elástico

Adotando um modelo linear de viga sobre apoio elástico para representar a face de concreto, as rotações medidas são utilizadas para identificar os coeficientes de mola que definem o apoio elástico. Esse estudo foi apresentado em (André *et al*, 2004a).

O modelo adotado considera a face de concreto como uma viga sobre apoio elástico com altura variável de acordo com a equação (5.1), discretizada em 8 elementos. O carregamento aplicado corresponde à pressão hidrostática. A Figura 5.12 apresenta o modelo adotado em que os coeficientes de mola, km_i , constantes em cada elemento, são os parâmetros a identificar.

Figura 5.12 – Modelo linear de viga sobre apoio elástico da laje 24

Para o cálculo das rotações utiliza-se análise matricial com formulação em deslocamentos. Esse cálculo é feito em uma rotina desenvolvida no programa de computação simbólica Macsyma. Nessa mesma rotina está incluído o processo iterativo para a identificação dos parâmetros km_i , que

utiliza o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, equações (5.2) a (5.4).

A matriz de sensibilidade é de ordem 9×8 , 9 medidas e 8 parâmetros. As medidas consideradas correspondem aos eletrônives 13, 15, 16, 17, 18, 20, 22, 25 e 28. Como o vetor das forças nodais independe dos parâmetros a serem identificados, a equação (5.5) torna-se:

$$\mathbf{A}_{km_i} = \frac{\partial \mathbf{U}}{\partial km_i} = \mathbf{K}_k^{-1} \left(-\frac{\partial \mathbf{K}}{\partial km_i} \mathbf{U}_k \right) \quad (5.8)$$

Nesse caso, dispõe-se de expressões explícitas para o cálculo das rotações e da matriz de rigidez. Dessa forma, pode-se obter diretamente a derivada da matriz de rigidez em relação aos parâmetros.

Para se definir um valor inicial dos parâmetros km_i , são utilizados os valores da reação da barragem de enrocamento sobre a face de concreto obtidos com o modelo linear de viga. Dessa forma, o valor inicial de km_i em cada elemento é dado por:

$$km_{i_0} = \frac{\int r(x) dx}{\int w(x) dx} \quad (5.9)$$

em que $r(x)$ é a função que define os valores da reação obtida em cada elemento e $w(x)$ é a equação da linha elástica definida em cada elemento por:

$$w(x) = h_1(x)u_1 + h_2(x)u_2 + h_3(x)u_3 + h_4(x)u_4 \quad (5.10)$$

sendo $h_i(x)$ as funções de interpolação cúbica da formulação de elemento de viga e u_i os deslocamentos nodais em cada elemento.

Os valores iniciais para os coeficientes de mola estão apresentados na Tabela 5.9.

Tabela 5.9 – Valores iniciais dos parâmetros km_i

Valores iniciais dos parâmetros km_i (tf/m ²)							
km_{1_0}	km_{2_0}	km_{3_0}	km_{4_0}	km_{5_0}	km_{6_0}	km_{7_0}	km_{8_0}
2207,280	689,658	387,778	243,266	533,908	419,224	120,331	40,697

Partindo desses valores iniciais, após 8 iterações e com um erro relativo de 0,52%, obtêm-se os valores dos coeficientes de mola apresentados na Tabela 5.10.

Considerando os parâmetros encontrados, obtém-se o valor da função objetivo calculada no mínimo, que nesse caso apresenta o mesmo valor que a variância final do erro, $F_{\text{mínimo}} = s_0^2 = 3,706 \times 10^{-6}$.

Tabela 5.10 – Resultados obtidos com o modelo linear de viga sobre apoio elástico

Parâmetros estimados (tf/m ²)	Desvio padrão (tf/m ²)	Coeficiente de variação	Intervalo de confiança (tf/m ²)
$km_1 = 26632,536$	$\sigma_{km_1} = 31953,742$	$r_{km_1} = 119,980\%$	$km_1 = 26632,536 \pm 406004,169$
$km_2 = 850,499$	$\sigma_{km_2} = 496,517$	$r_{km_2} = 58,380\%$	$km_2 = 850,499 \pm 6308,749$
$km_3 = 492,611$	$\sigma_{km_3} = 105,428$	$r_{km_3} = 21,402\%$	$km_3 = 492,611 \pm 1339,566$
$km_4 = 304,326$	$\sigma_{km_4} = 56,570$	$r_{km_4} = 18,589\%$	$km_4 = 304,326 \pm 718,777$
$km_5 = 222,447$	$\sigma_{km_5} = 36,081$	$r_{km_5} = 16,220\%$	$km_5 = 222,447 \pm 458,445$
$km_6 = 216,587$	$\sigma_{km_6} = 38,734$	$r_{km_6} = 17,884\%$	$km_6 = 216,587 \pm 492,157$
$km_7 = 205,540$	$\sigma_{km_7} = 41,682$	$r_{km_7} = 20,279\%$	$km_7 = 205,540 \pm 529,606$
$km_8 = 162,310$	$\sigma_{km_8} = 35,996$	$r_{km_8} = 22,177\%$	$km_8 = 162,310 \pm 457,361$

Ainda na Tabela 5.10 encontram-se os valores da análise dos resultados, complementados pelos coeficientes de correlação apresentados na Tabela 5.11. Para o cálculo do intervalo de confiança considera-se um nível de confiança de 95%.

Tabela 5.11 – Coeficientes de correlação dos parâmetros estimados com o modelo linear de viga sobre apoio elástico

Coeficientes de correlação			
$r_{km_1km_2} = -0,927$	$r_{km_2km_3} = 0,942$	$r_{km_3km_5} = 0,909$	$r_{km_4km_8} = 0,781$
$r_{km_1km_3} = -0,841$	$r_{km_2km_4} = 0,925$	$r_{km_3km_6} = 0,875$	$r_{km_5km_6} = 0,952$
$r_{km_1km_4} = -0,836$	$r_{km_2km_5} = 0,882$	$r_{km_3km_7} = 0,808$	$r_{km_5km_7} = 0,879$
$r_{km_1km_5} = -0,798$	$r_{km_2km_6} = 0,848$	$r_{km_3km_8} = 0,739$	$r_{km_5km_8} = 0,803$
$r_{km_1km_6} = -0,767$	$r_{km_2km_7} = 0,784$	$r_{km_4km_5} = 0,962$	$r_{km_6km_7} = 0,914$
$r_{km_1km_7} = -0,709$	$r_{km_2km_8} = 0,717$	$r_{km_4km_6} = 0,925$	$r_{km_6km_8} = 0,829$
$r_{km_1km_8} = -0,648$	$r_{km_3km_4} = 0,955$	$r_{km_4km_7} = 0,854$	$r_{km_7km_8} = 0,832$

A análise dos resíduos finais mostra um resíduo médio igual a $\bar{r} = 2,092 \times 10^{-4}$ com variância $\sigma_r^2 = 4,140 \times 10^{-7}$.

As figuras 5.13 e 5.14 ilustram a variação dos parâmetros com as iterações.

Figura 5.13 – Variação dos coeficientes de mola com as iterações

Figura 5.14 – Variação dos coeficientes de mola com as iterações

Na Figura 5.15 apresentam-se os coeficientes de sensibilidade. Novamente, como no modelo linear de viga, os parâmetros que representam o trecho inicial da viga, km_1 , km_2 e km_3 , apresentam menores coeficientes de sensibilidade. Isso indica que eles influenciam menos a resposta do modelo. Percebe-se que as medidas 4 a 8 são as que têm maior importância no processo.

Figura 5.15 – Coeficientes de sensibilidade

Os altos valores dos desvios padrão e dos coeficientes de variação e os intervalos de confiança obtidos indicam que para o ensaio realizado não se considera esse modelo razoável. Os resultados são apresentados para complementação do trabalho, mas não se recomenda esse modelo.

5.5 Modelo não-linear de viga

Os valores medidos das rotações são utilizados para se identificar os parâmetros que definem a reação da barragem de enrocamento sobre a face de concreto, como com o modelo linear de viga, considerando agora um modelo de viga que considera a não-linearidade física do concreto. Os resultados desse estudo foram apresentados em (André *et al*, 2004b).

Adotam-se as mesmas definições do modelo linear, ou seja, considera-se a face de concreto como uma viga biengastada com altura variável, discretizada em 8 elementos. Os deslocamentos e as rotações nas extremidades, obtidos das rotações medidas pelos eletrônives 13 e 28, são considerados como recalques de apoio. Adota-se a hipótese de carregamento linearmente distribuído nos elementos, conforme ilustrado na Figura 5.5.

Conforme citado anteriormente, os 7 parâmetros a identificar (q_i) representam a diferença entre a pressão hidrostática conhecida e a reação da barragem a ser determinada. Os valores dessa diferença, admitidos nas extremidades esquerda, $q = -1\text{tf/m}$, e direita, $q = 0$, foram obtidos a partir de estudos preliminares.

Para o cálculo das rotações emprega-se o modelo definido utilizando o programa de elementos finitos Adina. Utilizam-se elementos de viga de 2 nós considerando o material não-linear, caracterizado pelo diagrama momento-curvatura, conforme exemplificado na Figura 5.16 para a seção 4. O primeiro trecho do diagrama corresponde ao estágio I do concreto, o patamar é uma aproximação do estágio I_b e o último trecho é uma aproximação dos estágios II e III, obtida pelo método das camadas.

Figura 5.16 – Diagrama momento-curvatura para a seção 4

Para a identificação dos parâmetros utiliza-se o procedimento desenvolvido, utilizando o critério dos mínimos quadrados e os métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt.

Conforme apresentado no Capítulo 2, o método de Levenberg-Marquardt, assim como o método de Gauss-Newton, consiste em um processo iterativo definido pelas equações (5.2) e (5.3), com a matriz hessiana definida por:

$$\mathbf{H}_{LM} = \mathbf{A}^T \mathbf{A} + \lambda \mathbf{D} \quad (5.11)$$

sendo λ um escalar positivo variável em cada iteração e $\mathbf{D}$ uma matriz diagonal com os elementos iguais aos elementos da matriz $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$.

Nesse estudo, adota-se como valor inicial $\lambda = 10$, dividindo esse escalar por 100 em cada iteração.

A matriz de sensibilidade, de ordem 7×7 , nesse caso não é calculada pelo método da diferenciação direta como nos casos anteriores, mas sim aproximada pelo método das diferenças finitas. Dessa forma, cada uma das colunas dessa matriz, formada pelas derivadas dos deslocamentos angulares em relação a cada um dos parâmetros q_i , é estimada por:

$$\frac{\partial U}{\partial q_i} = \frac{U(q_1, \dots, q_i + \Delta q_i, \dots, q_7) - U(q_1, \dots, q_i, \dots, q_7)}{\Delta q_i} \quad (5.12)$$

Percebe-se que essa estimativa da matriz de sensibilidade necessita da resolução de 8 problemas diretos.

Como valor inicial dos parâmetros utiliza-se os valores dos parâmetros identificados com o modelo linear de viga, apresentados na Tabela 5.2. Após 4 iterações com o método de Gauss-Newton e 7 iterações com o método de Levenberg-Marquardt, com um erro relativo de 0,02%, obtêm-se os parâmetros apresentados na Tabela 5.12.

Considerando os parâmetros encontrados obtém-se o valor da função objetivo calculada no mínimo, $F_{\text{mínimo}} = 1,444 \times 10^{-10}$, e do número de condição, $\text{cond}(\mathbf{H}) = 5,267 \times 10^5$.

Ainda na Tabela 5.12 encontram-se os valores dos desvios padrão e dos coeficientes de correlação de variação dos parâmetros, e na Tabela 5.13 os coeficientes de correlação.

Tabela 5.12 – Resultados obtidos com o modelo não-linear de viga

Parâmetros estimados (tf/m)	Desvio padrão (tf/m)	Coefficiente de variação
$q_1 = 0,079$	$\sigma_{q_1} = 4,517 \times 10^{-3}$	$r_{q_1} = 5,685\%$
$q_2 = 0,088$	$\sigma_{q_2} = 3,980 \times 10^{-3}$	$r_{q_2} = 4,501\%$
$q_3 = -0,082$	$\sigma_{q_3} = 1,490 \times 10^{-3}$	$r_{q_3} = 1,810\%$
$q_4 = 0,120$	$\sigma_{q_4} = 3,666 \times 10^{-4}$	$r_{q_4} = 0,306\%$
$q_5 = -0,047$	$\sigma_{q_5} = 1,635 \times 10^{-4}$	$r_{q_5} = 0,349\%$
$q_6 = 0,004$	$\sigma_{q_6} = 9,432 \times 10^{-5}$	$r_{q_6} = 2,435\%$
$q_7 = -0,002$	$\sigma_{q_7} = 6,042 \times 10^{-5}$	$r_{q_7} = 3,227\%$

Tabela 5.13 – Coeficientes de correlação dos parâmetros estimados com o modelo não-linear de viga

Coeficientes de correlação			
$r_{q_1q_2} = -0,972$	$r_{q_2q_3} = -0,930$	$r_{q_3q_5} = 0,743$	$r_{q_5q_6} = -0,942$
$r_{q_1q_3} = 0,827$	$r_{q_2q_4} = 0,727$	$r_{q_3q_6} = -0,681$	$r_{q_5q_7} = 0,869$
$r_{q_1q_4} = -0,607$	$r_{q_2q_5} = -0,617$	$r_{q_3q_7} = 0,674$	$r_{q_6q_7} = -0,978$
$r_{q_1q_5} = 0,540$	$r_{q_2q_6} = 0,623$	$r_{q_4q_5} = -0,927$	
$r_{q_1q_6} = -0,577$	$r_{q_2q_7} = -0,646$	$r_{q_4q_6} = 0,807$	
$r_{q_1q_7} = 0,611$	$r_{q_3q_4} = -0,894$	$r_{q_4q_7} = -0,745$	

A análise dos resíduos finais mostra um resíduo médio igual a $\bar{r} = 2,446 \times 10^{-6}$ com variância $\sigma_r^2 = 1,709 \times 10^{-11}$.

A variação dos parâmetros com as iterações está ilustrada na Figura 5.17 com o método de Gauss-Newton, e na Figura 5.18 com o método de Levenberg-Marquardt.

Figura 5.17 – Variação dos parâmetros com as iterações com o método de Gauss-Newton

Figura 5.18 – Variação dos parâmetros com as iterações com o método de Levenberg-Marquardt

Na Figura 5.19 estão plotados os coeficientes de sensibilidade. Novamente, como no modelo linear de viga e no modelo linear de viga sobre apoio elástico, os parâmetros correspondentes ao trecho inicial da viga, q_1 , q_2 e q_3 , são os que apresentam menores coeficientes de sensibilidade. Diferentemente dos modelos anteriores, os pontos de medidas 1, 2 e 3 têm importância no processo, assim como os pontos 4 e 7.

Figura 5.19 – Coeficientes de sensibilidade

Analisando os coeficientes de correlação percebe-se que os parâmetros são mais correlacionados que nos outros modelos, sendo que os parâmetros q_1 e q_2 , q_2 e q_3 , q_4 e q_5 , q_5 e q_6 , e q_6 e q_7 são altamente correlacionados. Como no caso do modelo linear de viga, é esperada uma correlação entre os parâmetros.

Com os valores obtidos dos parâmetros e o carregamento conhecido, correspondente a pressão hidrostática, obtém-se a reação da barragem de enrocamento sobre a face de concreto.

5.6 Resultados

Os modelos são resolvidos com os valores dos parâmetros identificados, obtendo-se rotações, deslocamentos transversais (que caracterizam a configuração deformada da laje) e momentos fletores.

A Figura 5.20 apresenta as curvas das rotações obtidas com o modelo linear de viga, com o modelo bidimensional, com o método dos polinômios e as rotações medidas. Apresenta-se também uma suavização da curva das rotações obtida com o modelo bidimensional, com um polinômio do sexto grau. Na Figura 5.21 estão, novamente, as rotações medidas e a curva das rotações obtidas pelo método dos polinômios, juntamente com as curvas obtidas com o modelo não-linear de viga e com o modelo linear de viga sobre apoio elástico, e com a suavização dessa última com um polinômio do quinto grau.

Figura 5.20 – Conjunto 1 de curvas das rotações da laje 24

Figura 5.21 – Conjunto 2 de curvas das rotações da laje 24

Observa-se que as curvas de rotações obtidas são aderentes aos valores medidos, exceto aquelas referentes ao modelo bidimensional. O modelo bidimensional empregado neste estudo possui simplificações que podem contribuir para a maior dispersão dos valores obtidos em relação aos medidos. As principais hipóteses simplificadoras utilizadas são a representação do enrocamento como elástico linear e a não consideração do deslocamento relativo entre a face de concreto e o enrocamento.

Os deslocamentos transversais obtidos nas análises dos diversos modelos estão apresentados nas figuras 5.22 e 5.23, juntamente com os obtidos pelos métodos dos polinômios e da integração numérica.

Figura 5.22 – Conjunto 1 de configurações deformadas da laje 24

Figura 5.23 – Conjunto 2 de configurações deformadas da laje 24

Os resultados obtidos com o modelo de viga sobre apoio elástico não são aderentes aos demais, e pode-se observar também certo desvio dos deslocamentos obtidos pelo modelo bidimensional no trecho da laje junto à crista da barragem.

Nas figuras 5.24 e 5.25 estão ilustrados os diagramas de momentos fletores representados a partir do eletrônível 13. Admite-se que no trecho anterior os momentos são nulos na junta entre a face de concreto e o plinto.

Figura 5.24 – Conjunto 1 de diagramas de momentos fletores da laje 24

Figura 5.25 – Conjunto 2 de diagramas de momentos fletores da laje 24

Nos diagramas obtidos na análise com o modelo bidimensional e com o modelo linear de viga sobre apoio elástico ocorrem alguns picos. Sendo assim, para esses modelos, apresentam-se nas figuras 5.24 e 5.25 os diagramas obtidos pelas derivadas das curvas das rotações aproximadas, respectivamente, por um polinômio do sexto e do quinto grau, ilustradas nas figuras 5.20 e 5.21.

O diagrama de momentos fletores obtido diretamente da análise do modelo bidimensional com o programa Adina está apresentado na Figura 5.26. O momento máximo corresponde a 61 tfm, aproximadamente o dobro do valor obtido com os outros modelos. Já no caso do modelo linear de viga sobre apoio elástico, o momento máximo corresponde a 352 tfm, cerca de 10 vezes superior ao valor médio encontrado com os outros modelos.

Figura 5.26 – Momentos fletores obtidos com o modelo bidimensional resultante do Adina

No caso dos momentos fletores, nota-se que a dispersão dos resultados obtidos com os diversos modelos é maior que nos casos das rotações e deslocamentos.

5.7 Verificação estrutural das lajes

Para complementar este trabalho, repetem-se aqui os resultados de (Goulart, 2004) com relação à verificação estrutural da laje. Foi feita a verificação da laje à flexão no estado limite último conforme NBR 6118, sendo as fissuras limitadas em 0,30mm somente na face em contato com a água. Nos cálculos adotou-se $f_{ck}=18$ MPa e $\gamma_F=1,40$. Foram considerados os esforços provenientes da análise com o modelo linear de viga, em virtude da qualidade dos resultados obtidos com esse modelo, tanto em relação às rotações quanto aos momentos fletores.

A Tabela 5.14 apresenta a comparação entre a armadura calculada nas três seções indicadas nos diagramas de momentos fletores e a armadura existente na laje. Os valores correspondem à armadura posicionada em cada face dos painéis.

Tabela 5.14 – Comparação da armadura existente e da calculada

A_s	Seção 1	Seção 2	Seção 3
A_s calculada (cm ²)	25,00	10,80	15,75
A_s existente (cm ²)	25,00	15,75	15,75

Na Tabela 5.15 são comparadas a armadura recomendada pelos critérios empíricos com a calculada, considerando a malha posicionada no meio da seção transversal.

Tabela 5.15 – Comparação da armadura recomendada pelos critérios empíricos e da calculada

A_s	Seção 1	Seção 2	Seção 3
A_s calculada (cm ²)	39,00	22,11	3,80
A_s crit. Empíricos (cm ²)	20,80	19,20	15,75

Analisando os resultados percebe-se que nas duas primeiras seções as armaduras determinadas pelos critérios empíricos são inferiores ao valor necessário determinado no estado limite último. Esse fato é explicado pela recomendação da adoção dessa armadura na seção transversal média, reduzindo a capacidade de resistência da estrutura. Nesse caso, a utilização de uma armadura dupla é recomendada. Por outro lado, a armadura no trecho L2, indicado na Figura 5.27, é maior nos critérios empíricos. Esses dados permitem estudar a otimização da armadura nesse trecho, devendo-se estudar uma armadura mínima para resistir aos esforços decorrentes da retração da laje. Na Figura 5.27 são comparadas a armadura calculada e a existente (Goulart, 2004).

Figura 5.27 – Comparação da armadura existente e calculada

5.8 Projeto de instrumentação

Novamente, para complementação deste trabalho, reproduz-se um estudo que pode fornecer subsídios para a concepção dos projetos de instrumentação de novas barragens de enrocamento com face de concreto apresentado em (Goulart, 2004). Estudou-se a distribuição ideal dos eletrônives de forma a obter um polinômio que seja o mais aderente possível às rotações medidas.

Para o estudo foram considerados três modelos bidimensionais formulados pelo método dos elementos finitos, desenvolvidos com o programa Adina, similares ao utilizado neste trabalho. Os modelos empregados visam a representar a maioria das barragens existentes, sendo assim, foram consideradas barragens com alturas de 100, 150 e 200 m.

Concluiu-se que nos trechos iniciais da face de concreto (a partir do plinto), correspondendo entre 10 e 15% da altura da barragem, é adequada a utilização de eletrônives com espaçamento de 4 m na vertical. Nos demais trechos, considerou-se que a melhor solução técnica-econômica é instalar eletrônives a cada 10 m na vertical.

Nos estudos realizados ao longo deste trabalho percebe-se a necessidade dos resultados de outros instrumentos além dos eletrônives. Para determinar os esforços axiais na face de concreto recomenda-se a instalação de um medidor triortogonal de abertura de junta entre o plinto e a face de concreto, além de marcos superficiais na crista da barragem, para se analisar os deslocamentos da mesma.

Adicionalmente, é interessante a utilização de extensômetros para armadura e para o concreto, colocados em pares em cada face da laje. Com os dados desses aparelhos é possível a determinação da linha neutra na seção analisada, possibilitando o cálculo do momento fletor e da força normal

atuante. De acordo com (Goulart, 2004), esses extensômetros devem ser instalados próximos às seções onde são locados os eletrônives. A força normal determinada, quando existir, será devido ao atrito entre a estrutura de concreto e o enrocamento. Será então determinada uma força de atrito média, que obedeça, por exemplo, a lei de atrito de Coulomb.

Com esses resultados adicionais pode-se desenvolver um modelo matemático mais representativo da estrutura.

5.9 Análise dos resultados

Os resultados da retroanálise apresentados neste trabalho são válidos apenas para a data de leitura das medidas, que correspondem a leituras efetuadas logo após o enchimento do reservatório. Dessa forma, recomenda-se a contínua monitoração e análise dos dados para analisar a evolução dos deslocamentos na laje e para caracterizar os esforços, propiciando não somente a interpretação do que ocorre na laje, como também a observação de possíveis acomodações no enrocamento, o que sem dúvida fornecerá subsídios para ações visando à garantia da segurança da barragem.

Os melhores resultados em rotações, deslocamentos e momentos fletores são obtidos com os modelos linear e não-linear de viga. Dessa forma, recomenda-se o modelo linear de viga para a retroanálise dos dados, tendo em vista os resultados obtidos e a simplicidade do modelo.

São realizados alguns ensaios com o modelo linear de viga para estudar a discretização da viga. Observa-se que os carregamentos obtidos variam muito pouco com a discretização, já os resultados em rotações, deslocamentos transversais e momentos fletores são piores para a viga discretizada em menos elementos.

O modelo bidimensional não se mostra adequado para a retroanálise dos dados, porém ele pode ser convenientemente empregado na fase de dimensionamento da estrutura, considerando material não-linear para o enrocamento elementos de junta na ligação da face de concreto com o plinto e elementos de contato que simulam o atrito da estrutura de concreto com o enrocamento da barragem.

Ressalta-se que não se recomenda o modelo de viga sobre apoio elástico e que os resultados são apresentados apenas para complementação do trabalho.

Os métodos usuais de análise dos dados, método dos polinômios e método da integração numérica, utilizados por (Goulart, 2004) apresentaram bons resultados.

É conveniente utilizar mais de um modelo para a retroanálise dos dados. Baseando-se nos resultados obtidos neste trabalho, recomenda-se o método dos polinômios e o modelo linear de viga.

Capítulo 6

Observações Finais

Os principais objetivos desta tese eram desenvolver um procedimento de identificação de parâmetros com base matemática sólida que pudesse ser aplicado a vários problemas em engenharia de estruturas e geotécnica, e aplicá-lo em casos de significativo interesse prático da engenharia civil. Para conseguir atingir esses objetivos, foi fundamental estabelecer um trabalho de unificação dos conceitos, fundamentos e métodos numéricos envolvidos.

O primeiro passo para a caracterização matemática de um problema de identificação de parâmetros consiste em escolher um critério de identificação para a definição da função objetivo, baseando-se nas informações disponíveis relacionadas com as medidas e com os parâmetros a serem identificados. Os parâmetros são obtidos a partir da minimização dessa função objetivo. Logo, foram apresentados os principais critérios de identificação e os métodos do tipo Newton, adotados neste trabalho para a minimização das diversas funções.

Nesses métodos de minimização aparece naturalmente a matriz de sensibilidade. Para a sua determinação, adotou-se o método da diferenciação direta. Esse método exige uma equação de equilíbrio explícita. Como na maioria dos casos estudados ao longo deste trabalho, utilizou-se o método dos elementos finitos para a análise das diversas estruturas; empregou-se essa formulação para determinar a matriz de sensibilidade.

Além de estar presente no processo de minimização, essa matriz contém informações indispensáveis para análise dos resultados, relacionadas com o comportamento do sistema em relação aos parâmetros e aos valores

medidos. A análise dos coeficientes de sensibilidade, elementos dessa matriz, permite determinar os melhores pontos de medidas, os parâmetros que mais influenciam o sistema e a possível correlação entre os parâmetros. Pôde-se concluir ao longo deste trabalho que um projeto de instrumentação deve ser precedido por uma análise prévia dos coeficientes de sensibilidade, para que se possa definir um projeto que forneça medidas adequadas para identificar os parâmetros.

Na seqüência, apresentou-se o procedimento desenvolvido para a identificação de parâmetros, o qual utiliza o *software* de elementos finitos Adina e uma rotina desenvolvida em Matlab. Essa rotina engloba toda a formulação matemática do processo iterativo, sendo alimentada por dados resultantes das análises realizadas no Adina. O procedimento não é automatizado, a cada iteração é necessário interagir com o Adina, fornecendo os valores dos parâmetros e, depois de realizada a análise da estrutura, exportar os resultados, que são tratados para alimentarem a rotina. Cabe lembrar que esse procedimento pode ser automatizado, o que não era objetivo desta tese.

O procedimento pode ser aplicado a vários problemas em engenharia de estruturas e geotécnica, desde que possam ser representados por uma equação de equilíbrio linear. Porém, para cada problema são necessárias algumas modificações na rotina, dependendo dos parâmetros a serem identificados, do critério de identificação e do método de minimização. Ressalta-se que, com algumas adaptações, foi possível obter alguns resultados iniciais considerando não-linearidade física, e que extensões para problemas com não linearidades físicas ou geométricas são possíveis e envolvem dificuldades significativas.

Discutiram-se os principais fatores envolvidos na análise dos resultados. Essa análise é muito importante para avaliar a qualidade dos parâmetros identificados, não só por meio da análise matemática dos resultados, como

também pelo julgamento de especialistas da área. Pode-se obter bons resultados matemáticos, mas parâmetros sem significado físico.

Ao longo dos trabalhos de mestrado e de doutorado percebeu-se que simulações prévias enriqueciam a avaliação do procedimento desenvolvido. Nesta tese, foram estudadas as influências de diversos fatores envolvidos em problemas de identificação de parâmetros em um problema de referência. Os resultados foram ricos e orientadores. As principais conclusões obtidas estão relacionadas com a influência do número de medidas e do modelo adotado para representar a estrutura.

Um maior número de medidas não trouxe necessariamente melhores resultados. Não é o número de medidas que interfere nos resultados, mas a influência das medidas no processo. Ressalta-se a importância de se analisar os coeficientes de sensibilidade para definir quais as medidas mais significativas no processo, e assim poder definir um projeto de instrumentação muito bem orientado e de boa qualidade.

A consideração de um modelo inadequado não acarretou em problemas de convergência, foram obtidos bons resultados matemáticos (exceto no coeficiente de correlação), porém os valores dos parâmetros estavam diferentes dos esperados. Esse fato evidencia a necessidade do julgamento dos parâmetros obtidos por especialistas na área.

Considera-se também uma contribuição desta tese a utilização do princípio da superposição dos efeitos para escrever a equação analítica que representa o modelo e, conseqüentemente, para determinar explicitamente a função objetivo. Esse processo permite obter a expressão da função objetivo em problemas representados por modelos matemáticos lineares nos parâmetros a serem identificados. Além disso, pode-se determinar graficamente as curvas de nível em problemas com dois parâmetros.

As conclusões relativas aos critérios de identificação e aos métodos de minimização foram estabelecidas ao longo do trabalho, no estudo do problema de referência, do túnel Hudvudsta e da barragem de Machadinho.

Na maioria dos estudos realizados, as medidas eram independentes e não se dispunha de informações adicionais relacionadas com as medidas ou com os parâmetros. Nessas condições, recai-se automaticamente no critério dos mínimos quadrados. Em alguns estudos do túnel Hudvudsta aplicou-se o critério da máxima verossimilhança com informação prévia, e percebeu-se claramente a forte influência da informação prévia nos resultados. Esse critério deve ser utilizado com muito cuidado para não invalidar a retroanálise.

Com relação aos algoritmos de minimização utilizados, o método de Newton-Raphson, empregado apenas no estudo do túnel Hudvudsta, não se mostrou eficiente, convergindo apenas no caso em que os valores iniciais dos parâmetros estavam próximos do mínimo e com um número maior de iterações. Ainda no estudo do túnel Hudvudsta, os métodos de Gauss-Newton e de Levenberg-Marquardt mostraram-se eficientes. Ressalta-se que nesses dois métodos existe uma maior simplicidade na determinação da matriz hessiana em relação ao método de Newton-Raphson, o que diminui o número de análises da estrutura.

Nos diversos estudos realizados neste trabalho, os métodos de Levenberg-Marquardt e de Gauss-Newton mostraram-se igualmente eficientes nos casos em que o método de Gauss-Newton não apresentou problemas de convergência. Sendo assim, considera-se recomendável para os sistemas que não estejam automatizados o uso do método de Gauss-Newton e, quando houver problemas de convergência, o método de Levenberg-Marquardt. Considera-se sistemas não automatizados os sistemas aqui utilizados, nos quais em cada iteração é necessário interagir com o *software* de análise

numérica. Logo, um número menor de iterações resulta em um menor tempo no processo.

O estudo do túnel Hudvudsta resultou em uma série de trabalhos publicados, tendo como objetivo identificar parâmetros característicos do maciço. Foram considerados modelos distintos para representar a estrutura, e utilizados diferentes critérios de identificação e métodos de minimização. Com o princípio da superposição dos efeitos foi possível escrever a equação para o cálculo dos deslocamentos considerando o modelo de elementos finitos e obter explicitamente as expressões das funções objetivo para os diferentes critérios de identificação. Como eram dois parâmetros a serem identificados, pôde-se ainda representar graficamente as funções objetivo.

Uma questão que gerou polêmica entre especialistas da área e que permanece aberta está associada aos valores obtidos para o coeficiente K_0 . Os valores estimados, $K_0 \cong 7$, considerando apenas as medidas, e $K_0 \cong 16$, considerando informações prévias, foram considerados altos. Reitera-se que a própria identificação deste coeficiente foi questionada.

Outro resultado questionável é o alto coeficiente de correlação obtido na identificação simultânea dos parâmetros E e K_0 com o modelo de elementos finitos e utilizando o procedimento desenvolvido. Esses parâmetros físicos são independentes.

A possibilidade de um novo estudo desse túnel, com a consideração de um material não-linear para representar o maciço foi descartada. De acordo com especialistas em geotecnia, o túnel foi construído em uma rocha intacta que pode ser modelada considerando material linear. Essa decisão foi reforçada pelo pequeno número de medidas disponíveis. A consideração de modelos não-lineares pode ser utilizada em outros túneis em que se disponha um maior número de medidas.

O objetivo principal do estudo da barragem de Machadinho era identificar parâmetros considerando modelos hierárquicos para representar a estrutura. Com os parâmetros obtidos analisou-se a barragem, determinando deslocamentos e esforços solicitantes. O desenvolvimento deste estudo deu origem a uma série de artigos publicados e a um estudo da distribuição ideal dos eletrônios, que forneceu informações para a concepção dos projetos de instrumentação das novas barragens de enrocamento com face de concreto, apresentado em (Goulart, 2004). Os resultados obtidos indicam que o modelo de viga é o mais indicado para a retroanálise dos dados, pois já contempla sobre a laje de concreto as influências da heterogeneidade do maciço, da fundação da barragem, da não-linearidade do maciço e da concentração de tensões na região do plinto. Para a análise da barragem, os modelos bidimensional ou tridimensional são os mais apropriados.

Conforme se percebeu nos estudos de caso, cada problema deve ser tratado de uma forma particular. A obtenção de bons resultados é fruto da combinação da qualidade do modelo, de uma sólida formulação matemática e de uma grande experiência no julgamento de engenharia.

A identificação de parâmetros é uma área extremamente rica e complexa. Considera-se que este trabalho é uma contribuição nessa ampla área, e que os objetivos foram atingidos.

Bibliografia

- ANDRÉ, J.C.; COSTA, A.; GOULART, M.L.S. Application of Back Analysis in Civil Engineering Structures. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON APPLICATIONS OF COMPUTATIONAL MECHANICS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, 4., Ouro Preto, 2003. **Proceedings**. 2003.
- ANDRÉ, J.C.; COSTA, A.; GOULART, M.L.S. Retroanálise aplicada ao estudo da laje central de concreto da barragem da UHE Machadinho. In: JORNADAS SUDAMERICANAS DE INGENIERÍA ESTRUCTURAL, 31., Mendoza, 2004. **Proceedings**. 2004a.
- ANDRÉ, J.C.; COSTA, A.; GOULART, M.L.S. Retroanálise no estudo da laje da barragem de enrocamento com face de concreto utilizando modelo matemático com não-linearidade física. In: BETÃO ESTRUTURAL 2004, Porto, 2004. **Proceedings**. 2004b.
- AKUTAGAWA, S.; BROWN, E.T.; MEEK, J.L. A back analysis procedure for establishing load parameters and Young's moduli from stress and displacement measurements. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON ROCK MECHANICS, 7., Aachen, 1991. **Proceedings**. Rotterdam, A.A.Balkema, 1991.
- ARORA, J.S. **Introduction to optimum design**. New York, McGraw-Hill, 1989.
- BARD, Y. **Nonlinear parameter estimation**. New York, Academic Press, 1974.
- BATHE, K.J. **Finite element procedures**. New Jersey, Prentice-Hall, 1996.

- BECK, J.V.; ARNOLD, K.J. **Parameter estimation in engineering and science**. New York, John Wiley & Sons, 1977.
- BENJAMIN, J.R.; CORNELL, C.A. **Probability, statistics and decision for civil engineers**. New York, McGraw-Hill, 1970.
- BERNARDES, H.M. **Retroanálise do efeito estrutural das reações álcali-agregado em barragens de concreto**. São Paulo, 2000. 142p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- BONNET, M.; PILVIN, P.; RAYNAUD, M.; REYNIER, M. **Problèmes inverses en mécanique des solides**: principes, méthodes de resolution and applications. Paris, Instituto para a Promoção das Ciências da Engenharia, 1995.
- CASTRO, A.T.; SOUSA, L.R. Interpretation of the monitored behaviour of a large underground powerhouse using back analysis techniques. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ENGINEERING MECHANICS TODAY, Hanoi, 1995. **Proceedings**. Nguyen Quoc Son, Nguyen Van Diep, 1995.
- CASTRO, A.T. **Métodos de retroanálise na interpretação do comportamento de barragens de betão**. Lisboa, 1997. 244p. Tese (Doutorado) - Instituto Superior Técnico, Universidade Técnica de Lisboa.
- CASTRO, A.T.; LEMOS, J.V. Evaluation of the hydraulic behaviour of concrete dam foundations using back-analysis. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON APPLICATIONS OF COMPUTATIONAL MECHANICS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, 3., Porto, 2001. **Proceedings**. Lisse, Swets & Zeitlinger, 2001.

- CIVIDINI, A.; JURINA, L.; GIODA, G. Some aspects of “characterization” problems in geomechanics. **International Journal of Rock Mechanics**, v.18, p.487-503, 1981.
- CONSTANTINESCU, A; MINH, D.N.; DENG, D. Joint back-analysis in mining subsidence. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON APPLICATIONS OF COMPUTATIONAL MECHANICS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, 3., Porto, 2001. **Proceedings**. Lisse, Swets & Zeitlinger, 2001.
- COOKE, J.B. The development of today’s CFRD dam. In: SIMPÓSIO SOBRE BARRAGENS DE ENROCAMENTO COM FACE DE CONCRETO, 2., Florianópolis, 1999. **Anais**. 1999.
- COSTA, A. **Aplicação das técnicas de retroanálise em obras civis**. São Paulo, 2000. 96p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- COSTA, A.; ANDRÉ, J.C. Aplicação das técnicas de retroanálise em escavação de túneis. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 22., Campinas, 2001. **Proceedings**. 2001.
- COSTA, A.; ANDRÉ, J.C. Aplicação do método dos elementos finitos na identificação de parâmetros em problemas de retroanálise na escavação de túneis. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 24., Ouro Preto, 2003. **Proceedings**. 2003.
- COSTA, A.; ANDRÉ, J.C. Estudo dos métodos de Newton-Raphson e de Gauss-Newton na identificação de parâmetros em problemas de retroanálise. In: CONGRESSO TEMÁTICO DE DINÂMICA E CONTROLE DA SBMAC, 3., Ilha Solteira, 2004. **Anais**. 2004.

- COSTA, A.; ANDRÉ, J.C. ; GOULART, M.L.S. Back analysis of electro-level readings installed in the slab of the UHE Machadinho dam. In: INVERSE PROBLEMS, DESIGN AND OPTIMIZATION SYMPOSIUM, 25., Rio de Janeiro, 2004. **Proceedings**. 2004a.
- COSTA, A.; ANDRÉ, J.C. ; GOULART, M.L.S. Back analysis for identification of parameters using the finite element method: iterative methods. In: IBERIAN LATIN-AMERICAN CONGRESS ON COMPUTATIONAL METHODS IN ENGINEERING, 25., Recife, 2004. **Proceedings**. 2004b.
- CUNHA, M. C. **Métodos numéricos**. Campinas, Editora da Unicamp, 2003.
- DENG, D.; MINH, D.N.; CONSTANTINESCU, A.; VIEIRA, A.; SOUSA, L.R. Back analysis method for loading parameters in cv-cf tunnel calculation – application to a case history. **AFTES – Journées d'études internationales de Paris**, p.189-95, 1999.
- DENG, D.; MINH, D.N. Back analysis on mechanical behavior of joints, using a new method based on virtual work principle. In: INTERNATIONAL CONFERENCE OF INTERNATIONAL ASSOCIATION FOR COMPUTER METHODS AND ADVANCES IN GEOTECHNICS, 10., Arizona, 2001. **Proceedings**. 2001.
- DENG, D.; MINH, D.N.; CONSTANTINESCU, A. Back analysis of loading parameters in shallow tunnels. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON APPLICATIONS OF COMPUTATIONAL MECHANICS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, 3., Porto, 2001. **Proceedings**. Lisse, Swets & Zeitlinger, 2001.
- DENNIS, J.E.; SCHNABEL, R.B. **Numerical Methods for Unconstrained Optimization and NonLinear Equations**. New Jersey, Prentice Hall, Englewood Cliffs, 1983.

- EYKHOFF, P. **System identification:** parameter and state estimation. London, John Wiley & Sons, 1974.
- FERNÁNDEZ, C.A.G. Análisis estadístico de errores experimentales en el diseño de experimentos. **Ingeniería Estructural y Vial**, v.19, n.3/4, 1988.
- FINSTERLE, S.; PERSOFF, P. Determining permeability of tight rock samples using inverse modeling. **Water Resour. Res.**, v.33, n.8, p.1803-1811, 1997.
- FINSTERLE, S.; PRUESS, K. Solving the estimation-identification problem in two-phase flow modeling. **Water Resour. Res.**, v.31, n.4, p.913-923, 1995.
- FLETCHER, R. **Practical methods of optimization**, vol. 1, unconstrained optimization, vol. 2, constrained optimization. London, John Wiley & Sons, 1981.
- GENS, A.; LEDESMA, A.; ALONSO, E. Estimation of parameters in geotechnical backanalysis – II. Application to a tunnel excavation problem. **Computers and Geotechnics**, v.18, n.1, p.29-46, 1996.
- GENS, A.; LEDESMA, A. Análisis inverso e identificación de parámetros en Geotecnia. In: HOMENAJE A JOSÉ ANTONIO JIMÉNEZ SALAS, GEOTECNIA EN EL AÑO 2000. **Livro**. CEDEX, 2000. p.27-41.
- GIODA, G. Indirect identification of the average elastic characteristics of rock masses. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON STRUCTURAL FOUNDATIONS ON ROCK, Sydney, 1980. **Proceedings**. Rotterdam, A.A.Balkema, 1980. p.65-73.
- GIODA, G.; MAIER, G. Direct search solution of an inverse problem in elastoplasticity: identification of cohesion, friction angle and in situ stress

- by pressure tunnel tests. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.15, p.1823-48, 1980.
- GIODA, G.; JURINA, L. Numerical identification of soil-structure interaction pressures. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v.5, p.33-56, 1981.
- GIODA, G.; SAKURAI, S. Back analysis procedures for the interpretation of field measurements in geomechanics. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v.11, n.6, p.555-83, 1987.
- GOULART, M.L.S.; COSTA, A.; ANDRÉ, J.C. Utilização de dados de eletrônicos para o dimensionamento da laje de uma barragem de enrocamento com face de concreto. In: SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, 5., São Paulo, 2003. **Anais**. São Paulo, Escola Politécnica da USP, 2003a.
- GOULART, M.L.S.; ALVES, A.J.; ANDRÉ, J.C.; COSTA, A. Retroanálise dos dados dos eletrônicos instalados na barragem principal da UHE Machadinho. In: SEMINÁRIO NACIONAL DE GRANDES BARRAGENS, 25., Salvador, 2003. **Anais**. 2003b.
- GOULART, M.L.S. **Retroanálise da laje da barragem de enrocamento com face de concreto da UHE Machadinho**. São Paulo, 2004. 84p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- HACHICH, W.C. **Seepage-related reliability of embankment dams**. Massachusetts, 1981. 173p. Tese (Doutorado) – Massachusetts Institute of Technology.
- HACHICH, W. Probabilistic updating of permeability fields. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON APPLICATIONS OF STATISTICS AND PROBABILITY IN SOIL AND STRUCTURAL

- ENGINEERING, 4., Itália, 1983. **Proceedings**. Bologna, Pitagora Editrice, 1983.
- HACHICH, W; VANMARCKE, E.H. Probabilistic updating of pore pressure fields. Research Report R81-14, Department of Civil Engineering, Massachusetts Institute of Technology, Cambridge, MA, may, 1981.
- HACHICH, W; NEGRO, A. Retroanálise probabilística: um modelo para interpretação de medidas de convergência em túneis. In: SIMPÓSIO SOBRE INSTRUMENTAÇÃO GEOTÉCNICA DE CAMPO, Rio de Janeiro, 1990. **Anais**. Rio de Janeiro, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro , 1990. p269-77.
- HAFTKA, R.T.; GÜRDAL, Z. **Elements of structural optimization**, 3rd revised and expanded edition. Boston, Kluwer Academic Publishers, 1993.
- HOPMANS J.W.; SIMUNEK, J. Review of inverse estimation of soil Hydraulic properties. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON CHARACTERIZATION AND MEASUREMENT OF THE HYDRAULIC PROPERTIES OF UNSATURATED POROUS MEDIA, California, 1997. **Proceedings**. Riverside, University of California, 1997. p.643-655.
- JACKSON, D. D. Interpretation of inaccurate, insufficient and inconsistent data. **Geophysical Journal of the Royal Astronomical Society**, v.28, p.97-109, 1972.
- KAVANAGH, K.T. Experiment versus analysis: computational techniques for the description of static material response. **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, v.5, p.503-15, 1973.

- KLEIBER, M. **Parameter sensitivity in non linear mechanics: theory and finite element computation.** New York, John Wiley & Sons, 1997.
- LECAMPION, B. **Sur l'identification des paramètres des lois de comportement des roches argileuses.** France, 2002. 192p. PhD thesis – Ecole Polytechnique.
- LEDESMA, A. **Identificación de parámetros en geotecnia: aplicación a la excavación de túneles.** Barcelona, 1987. 331p. Tesis (Doctorado) – Escuela Técnica Superior de Ingenieros de Caminos, Canales y Puertos de Barcelona, Universitat Politècnica de Catalunya.
- LEDESMA, A.; GENS, A.; ALONSO, E. Parameter and variance estimation in geotechnical backanalysis using prior information. **International Journal for Numerical and Analytical Methods in Geomechanics**, v.20, n.2, p.119-41, 1996.
- LEDESMA, A.; GENS, A.; ALONSO, E. Estimation of parameters in geotechnical backanalysis – I. Maximum likelihood approach. **Computers and Geotechnics**, v.18, n.1, p.1-27, 1996.
- LEITÃO, N.S.; SOUSA, L.R.; LEMOS, J.V. Structural analysis of the Campilhas dam gallery using back-analysis techniques. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON APPLICATIONS OF COMPUTATIONAL MECHANICS IN GEOTECHNICAL ENGINEERING, 3., Porto, 2001. **Proceedings.** Lisse, Swets & Zeitlinger, 2001.
- LEROUEIL, S.; TAVENAS, F. Pitfalls of back-analyses. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING, 10., Stockholm, 1981. **Proceedings.** Rotterdam, A.A.Balkema, 1981.

- LEVENBERG, K. A method for the solution of certain non-linear problems in least squares. **Quarterly of applied mathematics**, v.2, n.2, p.164-68, 1944.
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the Society for Industrial and Applied Mathematics**, v.11, n.2, p.431-41, 1963.
- MASSAD, F. Braced excavations in lateritic and weathered sedimentary soils. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON SOIL MECHANICS AND FOUNDATION ENGINEERING, 11., San Francisco, 1985. **Proceedings**. Rotterdam, A.A.Balkema, 1985.
- NEGRO, A; KUWAJIMA, F.M. O uso do espaço subterrâneo para abrigos e para armazenamento de produtos inflamáveis e explosivos: deslocamentos ao redor de aberturas subterrâneas escavadas em rocha. Relatório à Diretoria de Engenharia da Aeronáutica, CCPIAR, Ministério da Aeronáutica, 1985a.
- NEGRO, A; KUWAJIMA, F.M. Deslocamentos ao redor de cavidades subterrâneas. In: SIMPÓSIO SOBRE ESCAVAÇÕES SUBTERRÂNEAS, 2., Rio de Janeiro, 1985. **Anais**. São Paulo, Associação Brasileira de Geologia de Engenharia, 1985b.
- NEGRO, A; KUWAJIMA, F.M. Ground movements around underground openings in gravitational stress fields. In: INTERNATIONAL CONFERENCE ON UNDERGROUND SPACE AND EARTH SHELTERED BUILDINGS, 3., Shangai, 1988. **Proceedings**. China, 1988.
- ONWUBIKO, C.O. **Introduction to engineering design optimization**. Boston, Addison Wesley Pub, 2000.

- ROCHA FILHO, P.; PRICE, G. **Instrumentação em engenharia geotécnica**: aplicação da técnica de electrónicas. Lisboa, Sociedade Portuguesa de Geotecnia, 2000.
- SAKURAI, S.; AKUTAGAWA, S. Some aspects of back analysis in geotechnical engineering. In: SIMPÓSIO DA SOCIEDADE INTERNACIONAL DE MECÂNICA DAS ROCHAS, Lisboa, 1993. **Proceedings**. Rotterdam, A.A.Balkema, 1993.
- SIMUNEK, J.; WENDROTH, O.; GENUCHTEN, M.T.V. Soil hydraulic properties from laboratory evaporation experiments by parameter estimation. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON CHARACTERIZATION AND MEASUREMENT OF THE HYDRAULIC PROPERTIES OF UNSATURATED POROUS MEDIA, California, 1997. **Proceedings**. Riverside, University of California, 1997. p.713-723.
- VANDERPLAATS, G.N. **Numerical optimization techniques for engineering design**, with applications. New York, McGraw-Hill, 1984.
- VELLOSO, R.Q. **Estudo numérico da estimativa de parâmetros hidráulicos em solos parcialmente saturados**. Rio de Janeiro, 2000. 80p. Dissertação (Mestrado) – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro.
- VOGEL, T.; NAKHAEI, M.; CÍSLEROVÁ, M. Description of soil hydraulic properties near saturation from the point of view of inverse modeling. In: INTERNATIONAL WORKSHOP ON CHARACTERIZATION AND MEASUREMENT OF THE HYDRAULIC PROPERTIES OF UNSATURATED POROUS MEDIA, California, 1997. **Proceedings**. Riverside, University of California, 1997. p.693-703.

Anexos

Apresentam-se nestes anexos as rotinas, desenvolvidas em Matlab, dos diversos estudos realizados ao longo deste trabalho. Tendo como objetivo ilustrar o procedimento, apresentam-se apenas as rotinas mais representativas.

Os anexos estão separados por estudo de caso, sendo que no Anexo A encontram-se as rotinas do problema de referência, no Anexo B as do túnel Hudvudsta e no Anexo C as da barragem de Machadinho.

Dos diversos estudos realizados no problema de referência, escolhem-se as rotinas relacionadas com o caso 1, considerando 12 medidas. Não existem mudanças significativas nas rotinas dos demais estudos, pois as diferenças estão relacionadas com o número de medidas, os valores das medidas e o modelo adotado. São apresentadas rotinas correspondentes aos seguintes procedimentos:

- critério dos mínimos quadrados com método de Gauss-Newton;
- critério dos mínimos quadrados com método de Levenberg-Marquardt;
- critério da máxima verossimilhança com método de Gauss-Newton, considerando que as medidas verticais têm maior variância.

No caso do túnel Hudvudsta, os estudos dos casos 1 e 2 são desenvolvidos no *software* de matemática simbólica Macsyma, sendo utilizada a condição de primeira ordem para obtenção dos parâmetros. Ilustra-se a rotina do caso 2, que considera o critério da máxima verossimilhança, por ser a mais abrangente. Nessa rotina está incluída a determinação da representação gráfica da função objetivo. Do caso 3, apresenta-se a rotina correspondente ao método de Newton-Raphson utilizando o critério dos mínimos quadrados.

No estudo da barragem de Machadinho são considerados modelos distintos para representar a estrutura, e os parâmetros a serem identificados variam em cada caso. Apresentam-se as rotinas dos procedimentos desenvolvidos considerando o método de Gauss-Newton com o critério dos mínimos quadrados para cada um dos seguintes modelos:

- modelo linear de viga;
- modelo bidimensional;
- modelo linear de viga sobre apoio elástico (desenvolvida no *software* de matemática simbólica Macsyma);
- modelo não-linear de viga.

Nas diversas rotinas apresentam-se apenas a primeira e a última iteração.

Anexo A – Problema de referência

A1 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando 12 medidas (Caso 1)

```
% Problema de referência
% Caso 1
% Critério dos mínimos quadrados
% Método de Gauss-Newton (12 medidas)
% Identificação do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de empuxo (k0)

% *****
% Vetor dos deslocamentos medidos
umed=[3.089e-3; 5.483e-3; 1.691e-2; 3.727e-2; 4.340e-2; 3.816e-2; 2.047e-2;...
      -3.529e-2; -3.881e-2; -4.591e-2; -5.946e-2; -6.653e-2];
% *****

% *****
% Resolução dos problemas auxiliares para obtenção da matriz de sensibilidade
% Esses problemas auxiliares são resolvido com o programa Adina considerando
% o mesmo modelo matemático que o problema direto.

% -----
% Problema auxiliar resolvido com E=1

% matriz de rigidez delk
% Resolvendo o modelo no Adina obtém-se um arquivo fort.70 que contém os elementos da
% matriz de rigidez, o mesmo deve ser dividido em 2 arquivos, aqui denominados maxa e
% global, para montagem da matrix de rigidez de acordo com (Bathe, 1996).

load maxae.txt
load globale.txt

delk=zeros(148,148);
for i=1:1:148
    delk(i,i)=globale(maxae(i,2));
    nzerose=(i-1)-((maxae(i+1,2)-1)-maxae(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzerose+1)
            delk(j,i)=globale(maxae(i,2)+(i-j));
            delk(i,j)=delk(j,i);
        end
    end
end
end
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com carregamento fictício definido apenas pelas
% componentes do carregamento que variam com k0 considerando k0=1

% matriz de rigidez kr
kr=5.0*delk;

% vetor delR
% Resolvendo o modelo no Adina extrai-se um arquivo.txt contendo os deslocamentos
% horizontais e verticais de cada um dos nós da malha. Com um programa desenvolvido
% em Fortran, os deslocamentos não nulos são agrupados em um único vetor(*_disp.txt).

load deslochr_disp.txt
delR=kr*deslochr_disp;
% -----
% *****
```

```

% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina.
% Os graus de liberdade 104, 100, 96, 94, 92, 90, 88, 148, 145, 139, 136 e 135
% são os graus de liberdade que correspondem aos deslocamentos medidos.

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[5.0; 0.5];
% -----

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p0

% matriz de rigidez
k0=5.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(104);iter0_disp(100);iter0_disp(96);iter0_disp(94);iter0_disp(92);...
    iter0_disp(90);iter0_disp(88);iter0_disp(148);iter0_disp(145);iter0_disp(139);...
    iter0_disp(136);iter0_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed-u0;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae0=inv(k0)*(-delk*iter0_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak0=inv(k0)*delR;

% matriz de sensibilidade
A0=[Ae0(104) Ak0(104);Ae0(100) Ak0(100);Ae0(96) Ak0(96);Ae0(94) Ak0(94);...
    Ae0(92) Ak0(92);Ae0(90) Ak0(90);Ae0(88) Ak0(88);Ae0(148) Ak0(148);...
    Ae0(145) Ak0(145);Ae0(139) Ak0(139);Ae0(136) Ak0(136);Ae0(135) Ak0(135)];

% vetor deltap
deltap0=(inv(A0'*A0))*(A0'*deltau0);

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)'*(umed-u0);

% erro
errol=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

Iterações 2 e 3

% -----
% Iteração 4
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p3

% matriz de rigidez
k3=9.961*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter3_disp.txt
u3=[iter3_disp(104);iter3_disp(100);iter3_disp(96);iter3_disp(94);iter3_disp(92);...
    iter3_disp(90);iter3_disp(88);iter3_disp(148);iter3_disp(145);iter3_disp(139);...
    iter3_disp(136);iter3_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau3=umed-u3;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae3=inv(k3)*(-delk*iter3_disp);

```

```

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak3=inv(k3)*delR;

% matriz de sensibilidade
A3=[Ae3(104) Ak3(104);Ae3(100) Ak3(100);Ae3(96) Ak3(96);Ae3(94) Ak3(94); ...
    Ae3(92) Ak3(92);Ae3(90) Ak3(90);Ae3(88) Ak3(88);Ae3(148) Ak3(148); ...
    Ae3(145) Ak3(145);Ae3(139) Ak3(139);Ae3(136) Ak3(136);Ae3(135) Ak3(135)];

% vetor deltap
deltap3=(inv(A3'*A3))*(A3'*deltau3);

% novos parâmetros
p4=p3+deltap3;

% função objetivo
f3=(umed-u3)'*(umed-u3);

% erro
erro4=norm(deltap3)/norm(p4);
% -----
% *****

% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de correlação e
% intervalo de confiança calculados com os parâmetros identificados (p4).

% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros identificados (p4)

% matriz de rigidez
k4=10.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter4_disp.txt
u4=[iter4_disp(104);iter4_disp(100);iter4_disp(96);iter4_disp(94);iter4_disp(92);...
    iter4_disp(90);iter4_disp(88);iter4_disp(148);iter4_disp(145);iter4_disp(139);...
    iter4_disp(136);iter4_disp(135)];

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae4=inv(k4)*(-delk*iter4_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak4=inv(k4)*delR;

% matriz de sensibilidade
A4=[Ae4(104) Ak4(104);Ae4(100) Ak4(100);Ae4(96) Ak4(96);Ae4(94) Ak4(94);...
    Ae4(92) Ak4(92);Ae4(90) Ak4(90);Ae4(88) Ak4(88);Ae4(148) Ak4(148);...
    Ae4(145) Ak4(145);Ae4(139) Ak4(139);Ae4(136) Ak4(136);Ae4(135) Ak4(135)];

% função objetivo
f4= (umed-u4)'*(umed-u4);

% matriz Hessiana
He=A4'*A4;

% variância final do erro
s2=f4/(12-2);

% matriz de covariância dos parâmetros identificados
Cp=s2*(inv(A4'*A4));

% variância dos parâmetros identificados
Cpe= Cp(1,1);
Cpk0= Cp(2,2);

% desvio padrão dos parâmetros identificados
se=sqrt(Cpe);
sk0=sqrt(Cpk0);

% coeficientes de variação dos parâmetros identificados
re=100*(se/p4(1));
rk0=100*(sk0/p4(2));

```

```
% coeficiente de correlação entre os parâmetros identificados  
rek0=Cp(1,2)/sqrt(Cp(1,1)*Cp(2,2));
```

```
% intervalo de confiança dos parâmetros identificados  
ie=sqrt(Cp(1,1))*2.228;  
ik0=sqrt(Cp(2,2))*2.228;
```

```
% *****
```

A2 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Levenberg-Marquardt, considerando 12 medidas (Caso 1)

```
% Problema de referência
% Caso 1
% Critério dos mínimos quadrados
% Método de Levenberg-Marquardt (12 medidas)
% Identificação do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de empuxo (k0)

% *****
% Vetor dos deslocamentos medidos
umed=[3.089e-3; 5.483e-3; 1.691e-2; 3.727e-2; 4.340e-2; 3.816e-2; 2.047e-2;...
      -3.529e-2; -3.881e-2; -4.591e-2; -5.946e-2; -6.653e-2];
% *****

% *****
% Resolução dos problemas auxiliares para obtenção da matriz de sensibilidade
% Esses problemas auxiliares são resolvido com o programa Adina considerando
% o mesmo modelo matemático que o problema direto.

% -----
% Problema auxiliar resolvido com E=1

% matriz de rigidez delk
% Resolvendo o modelo no Adina obtém-se um arquivo fort.70 que contém os elementos da
% matriz de rigidez, o mesmo deve ser dividido em 2 arquivos, aqui denominados maxa e
% global, para montagem da matrix de rigidez de acordo com (Bathe, 1996).

load maxae.txt
load globale.txt

delk=zeros(148,148);
for i=1:1:148
    delk(i,i)=globale(maxae(i,2));
    nzerose=(i-1)-((maxae(i+1,2)-1)-maxae(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzerose+1)
            delk(j,i)=globale(maxae(i,2)+(i-j));
            delk(i,j)=delk(j,i);
        end
    end
end
end
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com carregamento fictício definido apenas pelas
% componentes do carregamento que variam com k0 considerando k0=1

% matriz de rigidez kr
kr=5.0*delk;

% vetor delR
% Resolvendo o modelo no Adina extrai-se um arquivo.txt contendo os deslocamentos
% horizontais e verticais de cada um dos nós da malha. Com um programa desenvolvido
% em Fortran, os deslocamentos não nulos são agrupados em um único vetor(*_disp.txt).

load desloclr_disp.txt
delR=kr*desloclr_disp;
% -----
% *****
```

```

% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina.
% Os graus de liberdade 104, 100, 96, 94, 92, 90, 88, 148, 145, 139, 136 e 135
% são os graus de liberdade que correspondem aos deslocamentos medidos.

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[5.0; 0.5];
% -----

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p0

% matriz de rigidez
k0=5.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(104);iter0_disp(100);iter0_disp(96);iter0_disp(94);iter0_disp(92);...
    iter0_disp(90);iter0_disp(88);iter0_disp(148);iter0_disp(145);iter0_disp(139);...
    iter0_disp(136);iter0_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed-u0;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae0=inv(k0)*(-delk*iter0_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak0=inv(k0)*delR;

% matriz de sensibilidade
A0=[Ae0(104) Ak0(104);Ae0(100) Ak0(100);Ae0(96) Ak0(96);Ae0(94) Ak0(94);...
    Ae0(92) Ak0(92);Ae0(90) Ak0(90);Ae0(88) Ak0(88);Ae0(148) Ak0(148);...
    Ae0(145) Ak0(145);Ae0(139) Ak0(139);Ae0(136) Ak0(136);Ae0(135) Ak0(135)];

% matriz auxiliar D
da0=A0'*A0;
D0=[da0(1,1) 0;0 da0(2,2)];

% vetor deltap
deltap0=(inv(A0'*A0+10.0*D0))*(A0'*deltau0);

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)'*(umed-u0);

% erro
errol=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

% Iterações 2 a 5

% -----
% Iteração 6
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p5

% matriz de rigidez
k5=9.953*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter5_disp.txt
u5=[iter5_disp(104);iter5_disp(100);iter5_disp(96);iter5_disp(94);iter5_disp(92);...
    iter5_disp(90);iter5_disp(88);iter5_disp(148);iter5_disp(145);iter5_disp(139);...
    iter5_disp(136);iter5_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau5=umed-u5;

```

```

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae5=inv(k5)*(-delk*iter5_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak5=inv(k5)*delR;

% matriz de sensibilidade
A5=[Ae5(104) Ak5(104);Ae5(100) Ak5(100);Ae5(96) Ak5(96);Ae5(94) Ak5(94);...
    Ae5(92) Ak5(92);Ae5(90) Ak5(90);Ae5(88) Ak5(88);Ae5(148) Ak5(148);...
    Ae5(145) Ak5(145);Ae5(139) Ak5(139);Ae5(136) Ak5(136);Ae5(135) Ak5(135)];

% matriz auxiliar D
da5=A5'*A5;
D5=[da5(1,1) 0;0 da5(2,2)];

% vetor deltap
deltap5=(inv(A5'*A5+1.0e-9*D5))*(A5'*deltau5);

% novos parâmetros
p6=p5+deltap5;

% função objetivo
f5=(umed-u5)'*(umed-u5);

% erro
erro6=norm(deltap5)/norm(p6);
% -----
% *****

% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de correlação e
% intervalo de confiança calculados com os parâmetros identificados (p6).

% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros identificados (p6)

% matriz de rigidez
k6=10.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter6_disp.txt
u6=[iter6_disp(104);iter6_disp(100);iter6_disp(96);iter6_disp(94);iter6_disp(92);...
    iter6_disp(90);iter6_disp(88);iter6_disp(148);iter6_disp(145);iter6_disp(139);...
    iter6_disp(136);iter6_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau6=umed-u6;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae6=inv(k6)*(-delk*iter6_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak6=inv(k6)*delR;

% matriz de sensibilidade
A6=[Ae6(104) Ak6(104);Ae6(100) Ak6(100);Ae6(96) Ak6(96);Ae6(94) Ak6(94);...
    Ae6(92) Ak6(92);Ae6(90) Ak6(90);Ae6(88) Ak6(88);Ae6(148) Ak6(148);...
    Ae6(145) Ak6(145);Ae6(139) Ak6(139);Ae6(136) Ak6(136);Ae6(135) Ak6(135)];

% matriz auxiliar D
da6=A6'*A6;
D6=[da6(1,1) 0;0 da6(2,2)];

% função objetivo
f6=(umed-u6)'*(umed-u6);

% matriz Hessiana
He=(A6'*A6+1.0e-11*D6);

% variância final dos erros
s2=f6/(12-2);

% matriz de covariância dos parâmetros identificados
Cp=s2*(inv(A6'*A6));

```

```

% variância dos parâmetros identificados
Cpe= Cp(1,1);
Cpk0= Cp(2,2);

% desvio padrão dos parâmetros identificados
se=sqrt(Cpe);
sk0=sqrt(Cpk0);

% coeficientes de variação dos parâmetros identificados
re=100*(se/p6(1));
rk0=100*(sk0/p6(2));

% coeficiente de correlação entre os parâmetros identificados
rek0=Cp(1,2)/sqrt(Cp(1,1)*Cp(2,2));

% intervalo de confiança dos parâmetros identificados
ie=sqrt(Cp(1,1))*2.228;
ik0=sqrt(Cp(2,2))*2.228;

% *****

```


A3 – Rotina desenvolvida utilizando o critério da máxima verossimilhança com o método de Gauss-Newton, considerando 12 medidas e que as medidas verticais têm maior variância (Caso 1)

```
% Problema de referência
% Caso 1
% Critério da máxima verossimilhança
% Medidas verticais têm variância 16 vezes maior que as medidas horizontais
% Método de Gauss-Newton (12 medidas)
% Identificação do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente de empuxo (k0)

% *****
% Vetor dos deslocamentos medidos
umed=[3.089e-3; 5.483e-3; 1.691e-2; 3.727e-2; 4.340e-2; 3.816e-2; 2.047e-2;...
      -3.529e-2; -3.881e-2; -4.591e-2; -5.946e-2; -6.653e-2];
% *****

% *****
% Matriz de covariância
Cu=[1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0 0; ...
    0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 0; ...
    0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0 0; ...
    0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 16 0;0 0 0 0 0 0 0 0 0 0 16];
% *****

% *****
% Resolução dos problemas auxiliares para obtenção da matriz de sensibilidade
% Esses problemas auxiliares são resolvido com o programa Adina considerando
% o mesmo modelo matemático que o problema direto

% -----
% Problema auxiliar resolvido com E=1

% matriz de rigidez delk
% Resolvendo o modelo no Adina obtém-se um arquivo fort.70 que contém os elementos da
% matriz de rigidez, o mesmo deve ser dividido em 2 arquivos, aqui denominados maxa e
% global, para montagem da matrix de rigidez de acordo com (Bathe, 1996).

load maxae.txt
load globale.txt

delk=zeros(148,148);
for i=1:1:148
    delk(i,i)=globale(maxae(i,2));
    nzerose=(i-1)-((maxae(i+1,2)-1)-maxae(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzerose+1)
            delk(j,i)=globale(maxae(i,2)+(i-j));
            delk(i,j)=delk(j,i);
        end
    end
end
end
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com carregamento fictício definido apenas pelas
% componentes do carregamento que variam com k0 considerando k0=1

% matriz de rigidez kr
kr=5.0*delk;
```

```

% vetor delR
% Resolvendo o modelo no Adina extrai-se um arquivo.txt contendo os deslocamentos
% horizontais e verticais de cada um dos nós da malha. Com um programa desenvolvido
% em Fortran, os deslocamentos não nulos são agrupados em um único vetor(*_disp.txt).

load deslochr_disp.txt
delR=kr*deslochr_disp;

% -----
% *****

% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina
% Os graus de liberdade 104, 100, 96, 94, 92, 90, 88, 148, 145, 139, 136 e 135
% são os graus de liberdade que correspondem aos deslocamentos medidos.

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[5.0; 0.5];
% -----

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p0

% matriz de rigidez
k0=5.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(104);iter0_disp(100);iter0_disp(96);iter0_disp(94);iter0_disp(92);...
    iter0_disp(90);iter0_disp(88);iter0_disp(148);iter0_disp(145);iter0_disp(139);...
    iter0_disp(136);iter0_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed-u0;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae0=inv(k0)*(-delk*iter0_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak0=inv(k0)*delR;

% matriz de sensibilidade
A0=[Ae0(104) Ak0(104);Ae0(100) Ak0(100);Ae0(96) Ak0(96);Ae0(94) Ak0(94);...
    Ae0(92) Ak0(92);Ae0(90) Ak0(90);Ae0(88) Ak0(88);Ae0(148) Ak0(148);...
    Ae0(145) Ak0(145);Ae0(139) Ak0(139);Ae0(136) Ak0(136);Ae0(135) Ak0(135)];

% vetor deltap
deltap0=(inv(A0'*inv(Cu)*A0))*(A0'*inv(Cu)*deltau0);

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)'*inv(Cu)*(umed-u0);

% erro
erro1=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

% Iterações 2 e 3

% -----
% Iteração 4
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p3

% matriz de rigidez
k3=9.961*delk;

```

```

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter3_disp.txt
u3=[iter3_disp(104);iter3_disp(100);iter3_disp(96);iter3_disp(94);iter3_disp(92);...
    iter3_disp(90);iter3_disp(88);iter3_disp(148);iter3_disp(145);iter3_disp(139);...
    iter3_disp(136);iter3_disp(135)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau3=umed-u3;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae3=inv(k3)*(-delk*iter3_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak3=inv(k3)*delR;

% matriz de sensibilidade
A3=[Ae3(104) Ak3(104);Ae3(100) Ak3(100);Ae3(96) Ak3(96);Ae3(94) Ak3(94);...
    Ae3(92) Ak3(92);Ae3(90) Ak3(90);Ae3(88) Ak3(88);Ae3(148) Ak3(148);...
    Ae3(145) Ak3(145);Ae3(139) Ak3(139);Ae3(136) Ak3(136);Ae3(135) Ak3(135)];

% vetor deltap
deltap3=(inv(A3'*inv(Cu)*A3))*(A3'*inv(Cu)*deltau3);

% novos parâmetros
p4=p3+deltap3;

% função objetivo
f3=(umed-u3)'\*inv(Cu)*(umed-u3);

% erro
erro4=norm(deltap3)/norm(p4);
% -----
% *****

% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de correlação e
% intervalo de confiança calculados com os parâmetros identificados (p4).

% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros identificados (p4)

% matriz de rigidez
k4=10.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter4_disp.txt
u4=[iter4_disp(104);iter4_disp(100);iter4_disp(96);iter4_disp(94);iter4_disp(92);...
    iter4_disp(90);iter4_disp(88);iter4_disp(148);iter4_disp(145);iter4_disp(139);...
    iter4_disp(136);iter4_disp(135)];

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae4=inv(k4)*(-delk*iter4_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak4=inv(k4)*delR;

% matriz de sensibilidade
A4=[Ae4(104) Ak4(104);Ae4(100) Ak4(100);Ae4(96) Ak4(96);Ae4(94) Ak4(94);...
    Ae4(92) Ak4(92);Ae4(90) Ak4(90);Ae4(88) Ak4(88);Ae4(148) Ak4(148);...
    Ae4(145) Ak4(145);Ae4(139) Ak4(139);Ae4(136) Ak4(136);Ae4(135) Ak4(135)];

% função objetivo
f4=(umed-u4)'\*inv(Cu)*(umed-u4);

% matriz Hessiana
He=A4'\*inv(Cu)*A4;

% variância final dos erros
s2=f4/(12-2);

% matriz de covariância dos parâmetros identificados
Cpm=s2*(inv(A4'\*inv(Cu)*A4));
Cm=(7*1+5*16)/12;
Cp=Cpm/Cm;

```

```

% variância dos parâmetros identificados
Cpe= Cp(1,1);
Cpk0= Cp(2,2);

% desvio padrão dos parâmetros identificados
se=sqrt(Cpe);
sk0=sqrt(Cpk0);

% coeficientes de variação dos parâmetros identificados
re=100*(se/p4(1));
rk0=100*(sk0/p4(2));

% coeficiente de correlação entre os parâmetros identificados
rek0=Cp(1,2)/sqrt(Cp(1,1)*Cp(2,2));

% intervalo de confiança dos parâmetros identificados
ie=sqrt(Cp(1,1))*2.228;
ik0=sqrt(Cp(2,2))*2.228;

% *****

```

Anexo B – Túnel Hudvudsta

B1 – Rotina desenvolvida utilizando o critério da máxima verossimilhança com a condição de primeira ordem (Caso 2)

Túnel Hudvudsta

Caso 2

Critério da máxima verossimilhança com informação prévia

Identificação do módulo de elasticidade (e) e do coeficiente de empuxo (k0)

Vetor dos deslocamentos medidos

(c1) umed:matrix([0.6e-3], [1.4e-3])

(d1)
$$\begin{bmatrix} 6.0e-4 \\ 0.0014 \end{bmatrix}$$

Vetor dos deslocamentos calculados

(c2) ucalc1:matrix([-8.58788e6], [-1.68286e6])

(d2)
$$\begin{bmatrix} -8587880.0 \\ -1682860.0 \end{bmatrix}$$

(c3) ucalc2:matrix([2.79988e6], [3.78560e6])

(d3)
$$\begin{bmatrix} 2799880.0 \\ 3785600.0 \end{bmatrix}$$

(c4) ucalc:1/e*ucalc1+(k0*1/e)*ucalc2

(d4)
$$\begin{bmatrix} \frac{2799880.0}{e} - \frac{8587880.0}{e} \\ \frac{3785600.0}{e} - \frac{1682860.0}{e} \end{bmatrix}$$

Parâmetros a identificar

(c5) p:matrix([e],[k0])

(d5)
$$\begin{bmatrix} e \\ k0 \end{bmatrix}$$

Estimativas iniciais dos parâmetros

(c6) p0:matrix([40.0e9],[16.0])

(d6)
$$\begin{bmatrix} 3.99998e+10 \\ 16.0 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância das medidas

(c7) C::matrix([0.4e-6, 0], [0, 0.4e-6])

(d7)
$$\begin{bmatrix} 4.0e-7 & 0 \\ 0 & 4.0e-7 \end{bmatrix}$$

(c8) Cu::C^^-1

C:\Macysma\Macysma2\share\nkau.x.fas being loaded.
C:\Macysma\Macysma2\matrix\supportl.fas being loaded.
C:\Macysma\Macysma2\matrix\bla_lu.fas being loaded.
C:\Macysma\Macysma2\matrix\blinalg1.fas being loaded.

(d8)
$$\begin{bmatrix} 2500000.0 & 0.0 \\ 0.0 & 2500000.0 \end{bmatrix}$$

Matriz de covariância das estimativas iniciais dos parâmetros

(c9) Cp::matrix([2.25e18, 0],[0, 1])

$$(d9) \begin{bmatrix} 2.24999e+18 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

(c10) Cp0::Cp^^-1

$$(d10) \begin{bmatrix} 4.44446e-19 & 0.0 \\ 0.0 & 1.0 \end{bmatrix}$$

Função objetivo

$$F(p)=[u^*-u_{calc}]^T (C_u)^{-1} [u^*-u_{calc}] + [p-p^0]^T (C_p^0)^{-1} [p-p^0]$$

(c11) F:((transpose(umed-u_{calc}),Cu.(umed-u_{calc}))+((transpose(p-p0),Cp0.(p-p0))),expand

$$(d11) \frac{5.5425e+19 \cdot k_0^2}{e^2} + 1.0 \cdot k_0^2 - \frac{3.48986e+10 \cdot k_0}{e} - \frac{1.52078e+20 \cdot k_0}{e^2} - 32.0 \cdot k_0 \\ + 4.44446e-19 \cdot e^2 - 3.55555e-8 \cdot e + \frac{3.75435e+10}{e} + \frac{1.91458e+20}{e^2} \\ + 972.911$$

Condição de primeira ordem

(c12) F1: diff(F,e), expand

$$(d12) - \frac{1.10849e+20 \cdot k_0^2}{e^3} + \frac{3.48986e+10 \cdot k_0}{e^2} + \frac{3.04154e+20 \cdot k_0}{e^3} + 8.88899e-19 \cdot e - \frac{3.75435e+10}{e^2} - \frac{3.82919e+20}{e^3} - 3.55555$$

(c13) F2: diff(F,k0), expand

$$(d13) \frac{1.10849e+20 \cdot k_0}{e^2} + 2.0 \cdot k_0 - \frac{3.48986e+10}{e} - \frac{1.52078e+20}{e^2} - 32.0$$

Resolução do sistema de equações

(c14) eqF1:coeff(F2,k0)

$$(d14) \frac{1.10849e+20}{e^2} + 2.0$$

(c15) eqF2:expand((F2-eqF1*k0)/-eqF1)

$$(d15) - \frac{1.52078e+20}{-2.0 \cdot e^2 - 1.10849e+20} - \frac{3.48986e+10}{-2.0 \cdot e - \frac{1.10849e+20}{e}} - \frac{32.0}{-\frac{1.10849e+20}{e^2} - 2.0}$$

(c16) eqF3:ratsubst(eqF2,k0,dfloat(F1))

$$(d16) \frac{\left(\begin{aligned} &28125009 \cdot e^8 - 1125000239265316864 \cdot e^7 + 3117669626698855399966113792 \cdot e^6 \\ &- 108227138982889615173670171184621158400 \cdot e^5 \\ &- 650358737472571683041302980055325082239077711872 \cdot e^4 \\ &- 4314965044929506405172204051866349606760662347325047308288 \cdot e^3 \\ &- 611261244457327108774196873355390 \cdot e^2 \\ &- 457203263321901444332521990914048 \cdot e \\ &+ 10045332803721702559158191497418054780 \\ &+ 18446418228091500136432522967438589952 \\ &- 1693964449773823007177279017462256246627722 \\ &- 5427852241862504051200064433552084546093056 \end{aligned} \right)}{\left(\begin{aligned} &31640641854339190187851776 \cdot e^7 \\ &+ 3507379075986423434332109595009671305560588288 \cdot e^5 \\ &+ 971986285810785797132819961740334 \cdot e^3 \\ &+ 89551794282496849280620440846336 \end{aligned} \right)}$$

Parâmetros obtidos

(c17) ee:realroots(eqF3)

$$(d17) [e = -1.80559e+9, e = 4.00508e+10]$$

(c18) k0k0:ev(sfloat(eqF2),e=40.0508e9)

$$(d18) 15.9326$$

Determinação gráfica da função objetivo

(c25) lista1: [e=40.0508e9, k0=15.9326]

(d25) [e = 4.00505e+10 , k0 = 15.9326]

(c26) DF: F - ev(F, lista1), expand

(d26)

$$\frac{5.5425e+19 \, k_0^2}{e^2} + 1.0 \, k_0^2 - \frac{3.48986e+10 \, k_0}{e} - \frac{1.52078e+20 \, k_0}{e^2} - 32.0 \, k_0$$
$$+ 4.44446e-19 \, e^2 - 3.55555e-8 \, e + \frac{3.75435e+10}{e} + \frac{1.91458e+20}{e^2}$$
$$+ 972.671$$

(c27) plot3d(DF,k0,5,25,e,20.0e9,60.0e9)

(c28) contourplot(F,k0,1,25,e,15.0e9,60.0e9)

B2 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Newton-Raphson (Caso 3)

```
% Tunel Hudvudsta
% Caso 3
% Critério dos mínimos quadrados
% Método de Newton Raphson
% Identificação do módulo de elasticidade (E) e do coeficiente do carregamento (k0)

% *****
% vetor dos deslocamentos medidos
umed=[0.6e-3; 1.4e-3];
% *****

% *****
% Resolução dos problemas auxiliares para obtenção da matriz de sensibilidade
% Esses problemas auxiliares são resolvido com o programa Adina considerando
% o mesmo modelo matemático que o problema direto.

% -----
% Problema auxiliar resolvido com E=1

% matriz de rigidez delk
% Resolvendo o modelo no Adina obtém-se um arquivo fort.70 que contém os elementos da
% matriz de rigidez, o mesmo deve ser dividido em 2 arquivos, aqui denominados maxa e
% global, para montagem da matrix de rigidez de acordo com (Bathe, 1996).

load maxae.txt
load globale.txt

delk=zeros(1658,1658);
for i=1:1:1658
    delk(i,i)=globale(maxae(i,2));
    nzerose=(i-1)-((maxae(i+1,2)-1)-maxae(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzerose+1)
            delk(j,i)=globale(maxae(i,2)+(i-j));
            delk(i,j)=delk(j,i);
        end
    end
end
end
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com carregamento fictício definido apenas pelas
% componentes do carregamento que variam com k0 considerando k0=1

% matriz de rigidez kr
kr=20.0*delk;

% vetor delR
% Resolvendo o modelo no Adina extrai-se um arquivo.txt contendo os deslocamentos
% horizontais e verticais de cada um dos nós da malha. Com um programa desenvolvido
% em Fortran, os deslocamentos não nulos são agrupados em um único vetor(*_disp.txt).

load deslochr_disp.txt
delR=kr*deslochr_disp;
% -----

% *****

% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina.
% Os graus de liberdade 25 e 1020 são os graus de liberdade que correspondem aos
% deslocamentos medidos.
```



```

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[20.0; 8.0];
% -----

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p0

% matriz de rigidez
k0=20.0*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(25);iter0_disp(1020)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed-u0;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae0=inv(k0)*(-delk*iter0_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak0=inv(k0)*delR;

% matriz de sensibilidade
A0=[Ae0(25) Ak0(25);Ae0(1020) Ak0(1020)];

% matriz hessiana
load itere0_disp.txt
load iterk00disp_.txt

delue0a=inv(k0)*(-2*delk*-itere0_disp);
deluk0e0a=inv(k0)*(-delk*iterk00_disp);

delue0=[delue0a(25); delue0a(1020)];
deluk0e0=[deluk0e0a(25); deluk0e0a(1020)];

H02=[(deltau0'*delue0) (deltau0'*deluk0e0);(deltau0'*deluk0e0) 0];

H0=(A0'*A0)-H02;

% vetor deltap
deltap0=inv(H0)*A0'*deltau0;

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)''*(umed-u0);

% erro
errol=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

% Iterações 2 a 5

% -----
% Iteração 6
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p5

% matriz de rigidez
k5=16.801*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter5_disp.txt
u5=[iter5_disp(25);iter5_disp(1020)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau5=umed-u5;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae5=inv(k5)*(-delk*iter5_disp);

```

```

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak5=inv(k5)*delR;

% matriz de sensibilidade
A5=[Ae5(25) Ak5(25);Ae5(1020) Ak5(1020)];

% matriz hessiana
load itere5_disp.txt
load iterk05disp_.txt

delue5a=inv(k5)*(-2*delk*-itere5_disp);
deluk0e5a=inv(k5)*(-delk*iterk05_disp);

delue5=[delue5a(25); delue5a(1020)];
deluk0e5=[deluk0e5a(25); deluk0e5a(1020)];

H52=[(deltau5'*delue5) (deltau5'*deluk0e5);(deltau5'*deluk0e5) 0];

H5=(A5'*A5)-H52;

% vetor deltap
deltap5=inv(H5)*A5'*deltau5;

% novos parâmetros
p6=p5+deltap5;

% função objetivo
f5=(umed-u5)'+*(umed-u5);
% erro
erro6=norm(deltap5)/norm(p6);
% -----

% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação e coeficiente de correlação
% calculados com os parâmetros identificados (p6).

% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros identificados (p6)

% matriz de rigidez
k6=16.863*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter6_disp.txt
u6=[iter6_disp(25);iter6_disp(1020)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau6=umed - u6;

% matriz de sensibilidade em relação a E
Ae6=inv(k6)*(-delk*iter6_disp);

% matriz de sensibilidade em relação a k0
Ak6=inv(k6)*delR;

% matriz de sensibilidade
A6=[Ae6(25) Ak6(25);Ae6(1020) Ak6(1020)];

% matriz hessiana
load itere6_disp.txt
load iterk06disp_.txt

delue6a=inv(k6)*(-2*delk*-itere6_disp);
deluk0e6a=inv(k6)*(-delk*iterk06_disp);

delue6=[delue6a(25); delue6a(1020)];
deluk0e6=[deluk0e6a(25); deluk0e6a(1020)];

H62=[(deltau6'*delue6) (deltau6'*deluk0e6);(deltau6'*deluk0e6) 0];

H6=(A6'*A6)-H62;

% função objetivo
f6=(umed-u6)'+*(umed-u6);

```

```

% variância final dos erros (calculada estatisticamente)
s2=8.880e-17;

% matriz de covariância dos parâmetros identificados
Cp=s2*(inv(A6'*A6));

% variância dos parâmetros identificados
Cpe= Cp(1,1);
Cpk0= Cp(2,2);

% desvio padrão dos parâmetros identificados
se=sqrt(Cpe);
sk0=sqrt(Cpk0);

% coeficientes de variação dos parâmetros identificados
re=100*(se/p6(1));
rk0=100*(sk0/p6(2));

% coeficiente de correlação entre os parâmetros identificados
rek0=Cp(1,2)/sqrt(Cp(1,1)*Cp(2,2));

% *****

```

Anexo C – Barragem de Machadinho

C1 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo linear de viga

```
% Barragem de Machadinho
% Modelo linear de viga
% Critério dos mínimos quadrados
% Método de Gauss-Newton
% Identificação dos parâmetros que definem a reação da barragem de enrocamento
% sobre a face de concreto (p1, p2, p3, p4, p5, p6 e p7)

% *****
% vetor dos deslocamentos medidos
umed=[-0.01227; -0.01333; -0.01291; -0.00911; 0.00089; 0.00091; 0.00001];
% *****

% *****
% matriz de rigidez k
% Resolvendo o modelo no Adina obtém-se um arquivo fort.70 que contém os elementos da
% matriz de rigidez, o mesmo deve ser dividido em 2 arquivos, aqui denominados maxa e
% global, para montagem da matrix de rigidez de acordo com (Bathe, 1996).

load maxak.txt
load globalk.txt

k=zeros(535,535);
for i=1:1:535
    k(i,i)=globalk(maxak(i,2));
    nzeros=(i-1)-((maxak(i+1,2)-1)-maxak(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzeros+1)
            k(j,i)=globalk(maxak(i,2)+(i-j));
            k(i,j)=k(j,i);
        end
    end
end
% *****

% *****
% Resolução dos problemas auxiliares para obtenção da matriz de sensibilidade
% Esses problemas auxiliares são resolvido com o programa Adina considerando
% o mesmo modelo matemático que o problema direto, a menos das condições de contorno.

% -----
% matriz de rigidez kp

load maxap.txt
load globalp.txt

kp=zeros(531,531);
for i=1:1:531
    kp(i,i)=globalp(maxap(i,2));
    nzerosp=(i-1)-((maxap(i+1,2)-1)-maxap(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzerosp+1)
            kp(j,i)=globalp(maxap(i,2)+(i-j));
            kp(i,j)=kp(j,i);
        end
    end
end
% -----
```

```

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p1=1 e demais pi=0
load delRp1_disp.txt
delRp1=kp*delRp1_disp;
Ap1=inv(kp)*delRp1;
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p2=1 e demais pi=0
load delRp2_disp.txt
delRp2=kp*delRp2_disp;
Ap2=inv(kp)*delRp2;
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p3=1 e demais pi=0
load delRp3_disp.txt
delRp3=kp*delRp3_disp;
Ap3=inv(kp)*delRp3;
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p4=1 e demais pi=0
load delRp4_disp.txt
delRp4=kp*delRp4_disp;
Ap4=inv(kp)*delRp4;
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p5=1 e demais pi=0
load delRp5_disp.txt
delRp5=kp*delRp5_disp;
Ap5=inv(kp)*delRp5;
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p6=1 e demais pi=0
load delRp6_disp.txt
delRp6=kp*delRp6_disp;
Ap6=inv(kp)*delRp6;
% -----

% -----
% Problema auxiliar resolvido com p7=1 e demais pi=0
load delRp7_disp.txt
delRp7=kp*delRp7_disp;
Ap7=inv(kp)*delRp7;
% -----
% *****

% *****
% Matriz de sensibilidade
% Os graus de liberdade 36, 60, 84, 123, 201, 279 e 396 são os graus de liberdade
% que correspondem aos deslocamentos medidos.

A=[Ap1(36) Ap2(36) Ap3(36) Ap4(36) Ap5(36) Ap6(36) Ap7(36);
  Ap1(60) Ap2(60) Ap3(60) Ap4(60) Ap5(60) Ap6(60) Ap7(60);
  Ap1(84) Ap2(84) Ap3(84) Ap4(84) Ap5(84) Ap6(84) Ap7(84);
  Ap1(123) Ap2(123) Ap3(123) Ap4(123) Ap5(123) Ap6(123) Ap7(123);
  Ap1(201) Ap2(201) Ap3(201) Ap4(201) Ap5(201) Ap6(201) Ap7(201);
  Ap1(279) Ap2(279) Ap3(279) Ap4(279) Ap5(279) Ap6(279) Ap7(279);
  Ap1(396) Ap2(396) Ap3(396) Ap4(396) Ap5(396) Ap6(396) Ap7(396)];
% *****

% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina.
% Os graus de liberdade 38, 62, 86, 125, 203, 281 e 398 são os graus de liberdade
% que correspondem aos deslocamentos medidos.

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[0; 0; 0; 0; 0; 0; 0];
% -----

```

```

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p0

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(38);iter0_disp(62);iter0_disp(86);iter0_disp(125);iter0_disp(203);iter0_d
isp(281);iter0_disp(398)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed-u0;

% vetor deltap
deltap0=(inv(A'*A))*(A'*deltau0);

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)'*(umed-u0);

% erro
erro1=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

% -----
% Iteração 2
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p1

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter1_disp.txt
u1=[iter1_disp(38);iter1_disp(62);iter1_disp(86);iter1_disp(125);iter1_disp(203);iter1_d
isp(281);iter1_disp(398)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltaul=umed-u1;

% vetor deltap
deltap1=(inv(A'*A))*(A'*deltaul);

% novos parâmetros
p2=p1+deltap1;

% função objetivo
f1=(umed-u1)'*(umed-u1);

% erro
erro2=norm(deltap1)/norm(p2);
% -----
% *****
% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação e coeficiente de correlação
% calculados com os parâmetros identificados (p2).

% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros identificados (p2)

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter2_disp.txt
u2=[iter2_disp(38);iter2_disp(62);iter2_disp(86);iter2_disp(125);iter2_disp(203);iter2_d
isp(281);iter2_disp(398)];

% função objetivo
f2=(umed-u2)'*(umed-u2);

% matriz Hessiana
He=A'*A;

% variância final dos erros (calculada estatisticamente)
s2a=4.815e-12;

% matriz de covariância dos parâmetros identificados
Cp=s2a*(inv(A'*A));

```

```

% variância dos parâmetros estimados
Cp1= Cp(1,1);
Cp2= Cp(2,2);
Cp3= Cp(3,3);
Cp4= Cp(4,4);
Cp5= Cp(5,5);
Cp6= Cp(6,6);
Cp7= Cp(7,7);

% desvio padrão dos parâmetros estimados
s1=sqrt(Cp1);
s2=sqrt(Cp2);
s3=sqrt(Cp3);
s4=sqrt(Cp4);
s5=sqrt(Cp5);
s6=sqrt(Cp6);
s7=sqrt(Cp7);

% coeficientes de variação
r1=100*(s1/p2(1));
r2=100*(s2/p2(2));
r3=100*(s3/p2(3));
r4=100*(s4/p2(4));
r5=100*(s5/p2(5));
r6=100*(s6/p2(6));
r7=100*(s7/p2(7));

% coeficiente de correlação
r12=Cp(1,2)/(Cp(1,1)*Cp(2,2))^0.5;
r13=Cp(1,3)/(Cp(1,1)*Cp(3,3))^0.5;
r14=Cp(1,4)/(Cp(1,1)*Cp(4,4))^0.5;
r15=Cp(1,5)/(Cp(1,1)*Cp(5,5))^0.5;
r16=Cp(1,6)/(Cp(1,1)*Cp(6,6))^0.5;
r17=Cp(1,7)/(Cp(1,1)*Cp(7,7))^0.5;
r23=Cp(2,3)/(Cp(2,2)*Cp(3,3))^0.5;
r24=Cp(2,4)/(Cp(2,2)*Cp(4,4))^0.5;
r25=Cp(2,5)/(Cp(2,2)*Cp(5,5))^0.5;
r26=Cp(2,6)/(Cp(2,2)*Cp(6,6))^0.5;
r27=Cp(2,7)/(Cp(2,2)*Cp(7,7))^0.5;
r34=Cp(3,4)/(Cp(3,3)*Cp(4,4))^0.5;
r35=Cp(3,5)/(Cp(3,3)*Cp(5,5))^0.5;
r36=Cp(3,6)/(Cp(3,3)*Cp(6,6))^0.5;
r37=Cp(3,7)/(Cp(3,3)*Cp(7,7))^0.5;
r45=Cp(4,5)/(Cp(4,4)*Cp(5,5))^0.5;
r46=Cp(4,6)/(Cp(4,4)*Cp(6,6))^0.5;
r47=Cp(4,7)/(Cp(4,4)*Cp(7,7))^0.5;
r56=Cp(5,6)/(Cp(5,5)*Cp(6,6))^0.5;
r57=Cp(5,7)/(Cp(5,5)*Cp(7,7))^0.5;
r67=Cp(6,7)/(Cp(6,6)*Cp(7,7))^0.5;

% *****

```

C2 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo bidimensional

```
% Barragem de Machadinho
% Modelo bidimensional
% Critério dos mínimos quadrados
% Método de Gauss-Newton
% Identificação do módulo de elasticidade do material 2 (E2)
% po=8000 tf/m2

% *****
% vetor dos deslocamentos medidos
umed=[-0.00599; -0.01227; -0.01333; -0.01291; -0.00911; -0.00315; 0.00089; 0.00177;...
      0.00091; -0.00106; 0.00073; 0.00001; -0.00073; -0.00065; -0.00016; -0.00112];
% *****

% *****
% Resolução dos problemas auxiliares para obtenção da matriz de sensibilidade
% Esse problema auxiliar é resolvido com o programa Adina considerando
% o mesmo modelo matemático que o problema direto.

% -----
% Problema auxiliar resolvido com E2=1

% matriz de rigidez delk
% Resolvendo o modelo no Adina obtém-se um arquivo fort.70 que contém os elementos da
% matriz de rigidez, o mesmo deve ser dividido em 2 arquivos, aqui denominados maxa e
% global, para montagem da matrix de rigidez de acordo com (Bathe, 1996).

load maxae.txt
load globale.txt

delk=zeros(3472,3472);
for i=1:1:3472
    delk(i,i)=globale(maxae(i,2));
    nzerose=(i-1)-((maxae(i+1,2)-1)-maxae(i,2));
    if i>1
        for j=i-1:-1:(nzerose+1)
            delk(j,i)=globale(maxae(i,2)+(i-j));
            delk(i,j)=delk(j,i);
        end
    end
end
end
% -----
% *****
% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina.
% Os graus de liberdade 3, 1655, 1685, 1715, 774, 1910, 1955, 2000, 2045, 2090, 2135,
% 2180, 2225, 2270, 2315, 2369 são os graus de liberdade que correspondem aos
% deslocamentos medidos.

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[8000];
% -----

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com o parâmetro p0

% matriz de rigidez
k0=8000*delk;
```



```

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(3);iter0_disp(1655);iter0_disp(1685);iter0_disp(1715);iter0_disp(774);...
    iter0_disp(1910);iter0_disp(1955);iter0_disp(2000);iter0_disp(2045);...
    iter0_disp(2090);iter0_disp(2135);iter0_disp(2180);iter0_disp(2225);...
    iter0_disp(2270);iter0_disp(2315);iter0_disp(2369)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed - u0;

% matriz de sensibilidade
Ae0=inv(k0)*(-delk*iter0_disp);

A0=[Ae0(3);Ae0(1655);Ae0(1685);Ae0(1715);Ae0(774);Ae0(1910);Ae0(1955);Ae0(2000);...
    Ae0(2045);Ae0(2090);Ae0(2135);Ae0(2180);Ae0(2225);Ae0(2270);Ae0(2315);Ae0(2369)];

% vetor deltap
deltap0=(inv(A0'*A0))*(A0'*deltau0);

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)'*(umed-u0);

% erro
errol=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

Iterações 2 a 19

% -----
% Iteração 20
% Problema direto resolvido com o programa Adina com o parâmetro p19

% matriz de rigidez
k19=6884.7*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter19_disp.txt
u19=[iter19_disp(3);iter19_disp(1655);iter19_disp(1685);iter19_disp(1715);...
    iter19_disp(774);iter19_disp(1910);iter19_disp(1955);iter19_disp(2000);...
    iter19_disp(2045);iter19_disp(2090);iter19_disp(2135);iter19_disp(2180);...
    iter19_disp(2225);iter19_disp(2270);iter19_disp(2315);iter19_disp(2369)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau19=umed-u19;

% matriz de sensibilidade
Ae19=inv(k19)*(-delk*iter19_disp);

A19=[Ae19(3);Ae19(1655);Ae19(1685);Ae19(1715);Ae19(774);Ae19(1910);Ae19(1955);...
    Ae19(2000);Ae19(2045);Ae19(2090);Ae19(2135);Ae19(2180);Ae19(2225);Ae19(2270);...
    Ae19(2315);Ae19(2369)];

% vetor deltap
deltap19=(inv(A19'*A19))*(A19'*deltau19);

% novos parâmetros
p20=p19+deltap19;

% função objetivo
f19=(umed-u19)'*(umed-u19);

% erro
erro20=norm(deltap19)/norm(p20);
% -----
% *****

% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de correlação e
% intervalo de confiança calculados com o parâmetro identificado (p20).

```

```

% Problema direto resolvido com o programa Adina com o parâmetro identificado (p20)

% matriz de rigidez
k20=6877.6*delk;

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter20_disp.txt
u20=[iter20_disp(3);iter20_disp(1655);iter20_disp(1685);iter20_disp(1715);...
      iter20_disp(774);iter20_disp(1910);iter20_disp(1955);iter20_disp(2000);...
      iter20_disp(2045);iter20_disp(2090);iter20_disp(2135);iter20_disp(2180);...
      iter20_disp(2225);iter20_disp(2270);iter20_disp(2315);iter20_disp(2369)];

% matriz de sensibilidade
Ae20=inv(k20)*(-delk*iter20_disp);

A20=[Ae20(3);Ae20(1655);Ae20(1685);Ae20(1715);Ae20(774);Ae20(1910);Ae20(1955);...
      Ae20(2000);Ae20(2045);Ae20(2090);Ae20(2135);Ae20(2180);Ae20(2225);Ae20(2270);...
      Ae20(2315); Ae20(2369)];

% função objetivo
f20=(umed-u20)' * (umed-u20);

% matriz Hessiana
He=A20'*A20;

% variância final do erro
s2=f20/(16-1);

% matriz de covariância do parâmetro identificado
Cp=s2*(inv(A20'*A20));

% variância do parâmetro identificado
Cpe=Cp(1,1);

% desvio padrão do parâmetro identificado
se=sqrt(Cpe);

% coeficientes de variação
re=100*(se/p20(1));

% intervalo de confiança
ie=sqrt(Cp(1,1))*2.131;

% *****

```

C3 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo linear de viga sobre apoio elástico

Observação: Neste estudo apresenta-se apenas a primeira iteração e a análise dos resultados.

Barragem Machadinho

Modelo de viga sobre apoio elástico

Critério dos mínimos quadrados

Método de Gauss Newton

Identificação dos coeficientes de mola que definem o apoio elástico ($km_1, km_2, km_3, km_4, km_5, km_6, km_7$ e km_8)

Análise da estrutura

Análise matricial

Funções de interpolação

(c1) $h1: 2 \cdot x^3/h^3 - 3 \cdot x^2/h^2 + 1$

(d1)

$$\frac{2x^3}{h^3} - \frac{3x^2}{h^2} + 1$$

(c2) $h2: x^3/h^2 - 2 \cdot x^2/h + x$

(d2)

$$\frac{x^3}{h^2} - \frac{2x^2}{h} + x$$

(c3) $h3: -2 \cdot x^3/h^3 + 3 \cdot x^2/h^2$

(d3)

$$\frac{3x^2}{h^2} - \frac{2x^3}{h^3}$$

(c4) $h4: x^3/h^2 - x^2/h$

(d4)

$$\frac{x^3}{h^2} - \frac{x^2}{h}$$

Elementos da matriz de rigidez de elemento de mola

(c5) $k11m: \text{integrate}(km \cdot h1^2, x, 0, h)$

(d5)

$$\frac{13 h km}{35}$$

(c6) $k12m: \text{integrate}(km \cdot h1 \cdot h2, x, 0, h)$

(d6)

$$\frac{11 h^2 km}{210}$$

(c7) $k13m: \text{integrate}(km \cdot h1 \cdot h3, x, 0, h)$

(d7)

$$\frac{9 h km}{70}$$

(c8) $k14m: \text{integrate}(km \cdot h1 \cdot h4, x, 0, h)$

(d8)

$$-\frac{13 h^2 km}{420}$$

(c9) $k22m: \text{integrate}(km \cdot h2^2, x, 0, h)$

(d9)

$$\frac{h^3 km}{105}$$

(c10) $k23m: \text{integrate}(km \cdot h2 \cdot h3, x, 0, h)$

(d10)

$$\frac{13 h^2 km}{420}$$

(c11) k24m:integrate(km*h2*h4,x,0,h)

(d11)
$$-\frac{h^3 \text{ km}}{140}$$

(c12) k33m:integrate(km*h3^2,x,0,h)

(d12)
$$\frac{13 h \text{ km}}{35}$$

(c13) k34m:integrate(km*h3*h4,x,0,h)

(d13)
$$-\frac{11 h^2 \text{ km}}{210}$$

(c14) k44m:integrate(km*h4^2,x,0,h)

(d14)
$$\frac{h^3 \text{ km}}{105}$$

Matriz de rigidez de elemento de mola

(c15) kmm:matrix([k11m, k12m, k13m, k14m], [k12m, k22m, k23m, k24m], [k13m, k23m, k33m, k34m], [k14m, k24m, k34m, k44m])

(d15)
$$\begin{bmatrix} \frac{13 h \text{ km}}{35} & \frac{11 h^2 \text{ km}}{210} & \frac{9 h \text{ km}}{70} & -\frac{13 h^2 \text{ km}}{420} \\ \frac{11 h^2 \text{ km}}{210} & \frac{h^3 \text{ km}}{105} & \frac{13 h^2 \text{ km}}{420} & -\frac{h^3 \text{ km}}{140} \\ \frac{9 h \text{ km}}{70} & \frac{13 h^2 \text{ km}}{420} & \frac{13 h \text{ km}}{35} & -\frac{11 h^2 \text{ km}}{210} \\ -\frac{13 h^2 \text{ km}}{420} & -\frac{h^3 \text{ km}}{140} & -\frac{11 h^2 \text{ km}}{210} & \frac{h^3 \text{ km}}{105} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez de barra de viga contínua

(c16) kb:matrix ([12*ei/h^3,6*ei/h^2, -12*ei/h^3,6*ei/h^2],
[6*ei/h^2,4*ei/h, -6*ei/h^2,2*ei/h],
[-12*ei/h^3,-6*ei/h^2,12*ei/h^3,-6*ei/h^2],
[6*ei/h^2,2*ei/h, -6*ei/h^2,4*ei/h]);

(d16)
$$\begin{bmatrix} \frac{12 \text{ ei}}{h^3} & \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & -\frac{12 \text{ ei}}{h^3} & \frac{6 \text{ ei}}{h^2} \\ \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{4 \text{ ei}}{h} & -\frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{2 \text{ ei}}{h} \\ -\frac{12 \text{ ei}}{h^3} & -\frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{12 \text{ ei}}{h^3} & -\frac{6 \text{ ei}}{h^2} \\ \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{2 \text{ ei}}{h} & -\frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{4 \text{ ei}}{h} \end{bmatrix}$$

Matriz de rigidez da estrutura

(c17) k:kmm+kb

(d17)
$$\begin{bmatrix} \frac{13 h \text{ km}}{35} + \frac{12 \text{ ei}}{h^3} & \frac{11 h^2 \text{ km}}{210} + \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{9 h \text{ km}}{70} - \frac{12 \text{ ei}}{h^3} & \frac{6 \text{ ei}}{h^2} - \frac{13 h^2 \text{ km}}{420} \\ \frac{11 h^2 \text{ km}}{210} + \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{h^3 \text{ km}}{105} + \frac{4 \text{ ei}}{h} & \frac{13 h^2 \text{ km}}{420} - \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{2 \text{ ei}}{h} - \frac{h^3 \text{ km}}{140} \\ \frac{9 h \text{ km}}{70} - \frac{12 \text{ ei}}{h^3} & \frac{13 h^2 \text{ km}}{420} - \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{13 h \text{ km}}{35} + \frac{12 \text{ ei}}{h^3} & -\frac{11 h^2 \text{ km}}{210} - \frac{6 \text{ ei}}{h^2} \\ \frac{6 \text{ ei}}{h^2} - \frac{13 h^2 \text{ km}}{420} & \frac{2 \text{ ei}}{h} - \frac{h^3 \text{ km}}{140} & -\frac{11 h^2 \text{ km}}{210} - \frac{6 \text{ ei}}{h^2} & \frac{h^3 \text{ km}}{105} + \frac{4 \text{ ei}}{h} \end{bmatrix}$$

Esforços nas extremidades da barra devidos a uma carga p2 uniformemente distribuida

(c18) funif: matrix([p2*h/2], [p2*h^2/12], [p2*h/2], [-p2*h^2/12]) \$

Esforços nas extremidades da barra devidos a uma carga triangular (p1-p2)

(c19) ftri: matrix([7*(p1-p2)*h/20], [(p1-p2)*h^2/20], [3*(p1-p2)*h/20], [-(p1-p2)*h^2/30]) \$

Esforços nas extremidades da barra devidos a soma das cargas

(c20) flin: (funif+ ftri),expand

$$(d20) \quad \begin{bmatrix} \frac{3 h p2}{20} + \frac{7 h p1}{20} \\ \frac{h^2 p2}{30} + \frac{h^2 p1}{20} \\ \frac{7 h p2}{20} + \frac{3 h p1}{20} \\ - \frac{h^2 p2}{20} - \frac{h^2 p1}{30} \end{bmatrix}$$

Análise da estrutura com 8 elementos

Elemento 1

(c21) lista1: dfloat([ei=37967.36, h=11.81, p1=116.4, p2=109.4, km=k1m]);

(d21) [ei = 37967.359375d0 , h = 11.8099975585938d0 , p1 = 116.399993896484d0 , p2 = 109.399993896484d0 , km = k1m]

(c22) k1: ev(k,lista1)

(d22)

4.38657052176338d0	k1m + 276.593656493062d0	7.30588793178044d0	k1m + 1633.28520395278d0	1.51842825753348d0
7.30588793178044d0	k1m + 1633.28520395278d0	15.6877306613976d0	k1m + 12859.3961807798d0	4.31711559605208d0
1.51842825753348d0	k1m - 276.593656493062d0	4.31711559605208d0	k1m - 1633.28520395278d0	4.38657052176338d0
1633.28520395278d0	- 4.31711559605208d0	k1m	6429.69809038992d0	- 11.7657979960482d0

(c23) f1: ev(flin,lista1);

(d23)

674.94132443238d0
1320.37312982058d0
658.407327850348d0
- 1304.10092488162d0

Elemento 2

(c24) lista2: dfloat([ei=34834.09, h=8.23, p1=109.4, p2=104.4, km=k2m]);

(d24) [ei = 34834.078125d0 , h = 8.22999954223632d0 , p1 = 109.399993896484d0 , p2 = 104.399993896484d0 , km = k2m]

(c25) k2: ev(k,lista2)

(d25)

3.05685697283064d0	k2m + 749.870268064548d0	3.54791341484434d0	k2m + 3085.71598145394d0	1.05814279828752d0
3.54791341484434d0	k2m + 3085.71598145394d0	5.30896832364782d0	k2m + 16930.2940765582d0	2.09649429058984d0
1.05814279828752d0	k2m - 749.870268064548d0	2.09649429058984d0	k2m - 3085.71598145394d0	3.05685697283064d0
3085.71598145394d0	- 2.09649429058984d0	k2m	8465.14703827908d0	- 3.98172624273586d0

(c26) f2: ev(flin, lista2);

(d26)

444.008450187684d0
606.2093531129d0
435.778450645448d0
- 600.564945407466d0

Elemento 3

(c27) lista3: dfloat([ei=32844.00, h=8.27, p1=104.4, p2=99.4, km=k3m]);

(d27) [ei = 32844.0d0 , h = 8.27000045776366d0 , p1 = 104.399993896484d0 , p2 = 99.399993896484d0 , km = k3m]

(c28) k3: ev(k,lista3)

(d28)

3.07171445574078d0	k3m + 696.820130783306d0	3.58248563469298d0	k3m + 2881.35140027844d0	1.06328577314104d0
3.58248563469298d0	k3m + 2881.35140027844d0	5.38675597069866d0	k3m + 15885.8515995204d0	2.1169233295913d0
1.06328577314104d0	k3m - 696.820130783306d0	2.1169233295913d0	k3m - 2881.35140027844d0	3.07171445574078d0
2881.35140027844d0	- 2.1169233295913d0	k3m	7942.92579976022d0	- 4.040066978024d0

(c29) f3: ev(flin, lista3);

(d29)

425.491498313902d0
583.619443156278d0
417.221497856138d0
- 577.920034191994d0

Elemento 4

(c30) lista4: dfloat([ei=30931.31, h=12.89, p1=99.4, p2=91.4, km=k4m]);

(d30) [ei = 30931.3046875d0 , h = 12.8899993896484d0 , p1 = 99.399993896484d0 , p2 = 91.399993896484d0 , km = k4m]

(c31) k4: ev(k,lista4)

(d31)
$$\begin{bmatrix} 4.78771405901228d0 & k4m + 173.308871627038d0 & 8.70320441388812d0 & k4m + 1116.97562474658d0 & 1.65728563581194d0 \\ 8.70320441388812d0 & k4m + 1116.97562474658d0 & 20.3971453787278d0 & k4m + 9598.54341415716d0 & 5.14280260820662d0 \\ 1.65728563581194d0 & k4m - 173.308871627038d0 & 5.14280260820662d0 & k4m - 1116.97562474658d0 & 4.78771405901228d0 \\ 1116.97562474658d0 & - 5.14280260820662d0 & k4m & 4799.27170707858d0 & - 15.297859034046d0 & k4m & - 8.70320441388812d0 \end{bmatrix}$$

(c32) f4: ev(flin, lista4);

(d32)
$$\begin{bmatrix} 625.164931060792d0 \\ 1331.9857910162d0 \\ 604.540932037354d0 \\ - 1309.83217978084d0 \end{bmatrix}$$

Elemento 5

(c33) lista5: dfloat([ei=26987.72, h=25.84, p1=91.4, p2=75.4, km=k5m]);

(d33)
$$[ei = 26987.71875d0, h = 25.8399963378906d0, p1 = 91.3999938964844d0, p2 = 75.3999938964844d0, km = k5m]$$

(c34) k5: ev(k,lista5)

(d34)
$$\begin{bmatrix} 9.59771292550222d0 & k5m + 18.7702509191978d0 & 34.9750453245914d0 & k5m + 242.51160750668d0 & 3.32228524344308d0 & k \\ 34.9750453245914d0 & k5m + 242.51160750668d0 & 164.319098746364d0 & k5m + 4177.66603324574d0 & 20.6670722372586d0 & k \\ 3.32228524344308d0 & k5m - 18.7702509191978d0 & 20.6670722372586d0 & k5m - 242.51160750668d0 & 9.59771292550222d0 & k \\ 242.51160750668d0 & - 20.6670722372586d0 & k5m & 2088.83301662286d0 & - 123.239324059772d0 & k5m & - 34.9750453245914d0 \end{bmatrix}$$

(c35) f5: ev(flin, lista5);

(d35)
$$\begin{bmatrix} 1118.87176257324d0 \\ 4729.57965314472d0 \\ 1036.183774292d0 \\ - 4551.5248769468d0 \end{bmatrix}$$

Elemento 6

(c36) lista6: dfloat([ei=21724.05, h=26.24, p1=75.4, p2=59.4, km=k6m]);

(d36)
$$[ei = 21724.046875d0, h = 26.2399978637694d0, p1 = 75.3999938964844d0, p2 = 59.3999938964844d0, km = k6m]$$

(c37) k6: ev(k,lista6)

(d37)
$$\begin{bmatrix} 9.74628492082868d0 & k6m + 14.4288125451774d0 & 36.0662493656996d0 & k6m + 189.306005181092d0 & 3.37371401105608d0 & k \\ 36.0662493656996d0 & k6m + 189.306005181092d0 & 172.06878296548d0 & k6m + 3311.59278103374d0 & 21.3118746251862d0 & k \\ 3.37371401105608d0 & k6m - 14.4288125451774d0 & 21.3118746251862d0 & k6m - 189.306005181092d0 & 9.74628492082868d0 & k \\ 189.306005181092d0 & - 21.3118746251862d0 & k6m & 1655.79639051686d0 & - 129.05158722411d0 & k6m & - 36.0662493656996d0 \end{bmatrix}$$

(c38) f6: ev(flin, lista6);

(d38)
$$\begin{bmatrix} 926.271844512946d0 \\ 3959.09020516284d0 \\ 842.303851348882d0 \\ - 3775.480208392d0 \end{bmatrix}$$

Elemento 7

(c39) lista7: dfloat([ei=16321.6, h=39.45, p1=59.4, p2=35.4, km=k7m]);

(d39)
$$[ei = 16321.59765625d0, h = 39.4499969482422d0, p1 = 59.3999938964844d0, p2 = 35.3999938964844d0, km = k7m]$$

(c40) k7: ev(k,lista7)

(d40)
$$\begin{bmatrix} 14.652856009347d0 & k7m + 3.19009041391572d0 & 81.5205945303786d0 & k7m + 62.9245285467958d0 & 5.07214246477398d0 & k \\ 81.5205945303786d0 & k7m + 62.9245285467958d0 & 584.724946444058d0 & k7m + 1654.91497276044d0 & 48.1712604043146d0 & k \\ 5.07214246477398d0 & k7m - 3.19009041391572d0 & 48.1712604043146d0 & k7m - 62.9245285467958d0 & 14.652856009347d0 & k \\ 62.9245285467958d0 & - 48.1712604043146d0 & k7m & 827.457486380224d0 & - 438.543709833044d0 & k7m & - 81.5205945303786d0 \end{bmatrix}$$

(c41) f7: ev(flin, lista7);

(d41)
$$\begin{bmatrix} 1029.64479995728d0 \\ 6458.65358417146d0 \\ 840.284814605722d0 \\ - 5836.13268048492d0 \end{bmatrix}$$

Elemento 8

(c42) lista8: dfloat([ei=10934.2, h=46.2, p1=35.4, p2=7.4, km=k8m]);

(d42)
$$[ei = 10934.19921875d0, h = 46.1999969482422d0, p1 = 35.3999938964844d0, p2 = 7.39999961853026d0, km = k8m]$$

(c43) k8: ev(k,lista8)

(d43)
$$\begin{bmatrix} 17.15999886649d0 & k8m + 1.33058427874848d0 & 111.803985229492d0 & k8m + 30.7364948087792d0 & 5.93999960763114d0 & k \\ 111.803985229492d0 & k8m + 30.7364948087792d0 & 939.153413891614d0 & k8m + 946.683977576844d0 & 66.0659912719728d0 & k \\ 5.93999960763114d0 & k8m - 1.33058427874848d0 & 66.0659912719728d0 & k8m - 30.7364948087792d0 & 17.15999886649d0 & k \\ 30.7364948087792d0 & - 66.0659912719728d0 & k8m & 473.341988788422d0 & - 704.36506041871d0 & k8m & - 111.803985229492d0 \end{bmatrix}$$

```

-
(c44) f8: ev(flin, lista8);
(d44)

$$\begin{bmatrix} 623.699857463842d0 \\ 4304.45275281534d0 \\ 364.979927425388d0 \\ - 3308.38108796318d0 \end{bmatrix}$$


Matriz de rigidez da estrutura Kg e Kgp
(c45) Kg : zeromatrix (18,18)$
(c46) Lt:matrix ( [10,1,11,2], [11,2,12,3], [12,3,13,4],[13,4,14,5],[14,5,15,6],[15,6,16,7],[16,7,17,8],[17,8,18,9] )

(d46)

$$\begin{bmatrix} 10 & 1 & 11 & 2 \\ 11 & 2 & 12 & 3 \\ 12 & 3 & 13 & 4 \\ 13 & 4 & 14 & 5 \\ 14 & 5 & 15 & 6 \\ 15 & 6 & 16 & 7 \\ 16 & 7 & 17 & 8 \\ 17 & 8 & 18 & 9 \end{bmatrix}$$


for i:1 thru 4 do
(ii:Lt[1,i],
if ii#0 then ( for j:1 thru 4 do
(c47) (jj:Lt[1,j],
if jj#0 then Kg[ii,jj] : Kg[ii,jj]+k1[i,j] )
)
)$

for i:1 thru 4 do
(ii:Lt[2,i],
if ii#0 then ( for j:1 thru 4 do
(c48) (jj:Lt[2,j],
if jj#0 then Kg[ii,jj] : Kg[ii,jj]+k2[i,j] )
)
)$

for i:1 thru 4 do
(ii:Lt[3,i],
if ii#0 then ( for j:1 thru 4 do
(c49) (jj:Lt[3,j],
if jj#0 then Kg[ii,jj] : Kg[ii,jj]+k3[i,j] )
)
)$

for i:1 thru 4 do
(ii:Lt[4,i],
if ii#0 then ( for j:1 thru 4 do
(c50) (jj:Lt[4,j],
if jj#0 then Kg[ii,jj] : Kg[ii,jj]+k4[i,j] )
)
)$

for i:1 thru 4 do
(ii:Lt[5,i],
if ii#0 then ( for j:1 thru 4 do
(c51) (jj:Lt[5,j],
if jj#0 then Kg[ii,jj] : Kg[ii,jj]+k5[i,j] )
)
)$

for i:1 thru 4 do
(ii:Lt[6,i],
if ii#0 then ( for j:1 thru 4 do
(c52) (jj:Lt[6,j],
if jj#0 then Kg[ii,jj] : Kg[ii,jj]+k6[i,j] )
)
)$

```

[illegible]

Vetores de forças R, Ro

(c57) R: dfloat(transpose(matrix ([0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0])))

(d57)

0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0
0.0d0

(c58) Ro: dfloat(transpose(matrix ([0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0])))\$

(c59) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[1,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f1[i])\$

(c60) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[2,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f2[i])\$

(c61) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[3,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f3[i])\$

(c62) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[4,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f4[i])\$

(c63) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[5,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f5[i])\$

(c64) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[6,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f6[i])\$

(c65) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[7,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f7[i])\$

(c66) for i:1 thru 4 do (ii: Lt[8,i], if ii#0 then Ro[ii]: Ro[ii]+f8[i])\$

(c67) Ro, dfloat

(d67)

1320.37312982058d0
- 697.891571768726d0
- 16.9455022511878d0
754.0657568242d0
3419.74747336388d0
- 592.434671783958d0
2683.17337577944d0
- 1531.67992766956d0
- 3308.38108796318d0
674.94132443238d0
1102.41577803802d0
861.26994895935d0
1042.38642891692d0
1723.4126946106d0
1962.45561880494d0
1871.94865130616d0
1463.98467206956d0
364.979927425388d0

Vetores dos deslocamentos

(c68) U: dfloat(matrix([u1],[u2],[u3],[u4],[u5],[u6],[u7],[u8],[u9],[u10],[u11],[u12],[u13],[u14],[u15],[u16],[u17],[u18]))

(d68)

$$\begin{bmatrix} u1 \\ u2 \\ u3 \\ u4 \\ u5 \\ u6 \\ u7 \\ u8 \\ u9 \\ u10 \\ u11 \\ u12 \\ u13 \\ u14 \\ u15 \\ u16 \\ u17 \\ u18 \end{bmatrix}$$

Aplicação $R=R_0 + KU$ para as submatrizes

(c69) eq: dfloat(R-R₀-Kgp.U)

(d69)

$$\begin{bmatrix} 19540.7042375006d0 & u2 - 7895.79467342914d0 & u11 - 17759.4203810606d0 & u10 - 47486.599284633d0 \\ - 5719.11784447932d0 & u3 - 68078.2656195916d0 & u2 + 1639.85200798334d0 & u12 + 12226.8576752718d0 & u11 + 7895.7946734291d0 \\ - 6376.2768925888d0 & u4 - 38566.3831440402d0 & u3 - 5719.11784447932d0 & u2 + 2060.45520253966d0 & u13 + 1262.00235549085d0 \\ - 1077.8228657562d0 & u5 - 32535.1920116694d0 & u4 - 6376.2768925888d0 & u3 - 134.093349340986d0 & u14 + 1036.39107709542d0 \\ 63709.6229587444d0 & u6 - 106469.415869656d0 & u5 - 1077.8228657562d0 & u4 - 10791.8027488706d0 & u15 - 15681.7973989428d0 \\ 52445.7260858964d0 & u7 - 167355.896749987d0 & u6 + 63709.6229587444d0 & u5 - 8745.14330187556d0 & u16 + 3606.8233780991d0 \\ 51942.942877815d0 & u8 - 147462.404874606d0 & u7 + 52445.7260858964d0 & u6 - 5733.57110139018d0 & u17 + 5436.76462252914d0 \\ 28192.4114675568d0 & u9 - 111183.137377725d0 & u8 + 51942.942877815d0 & u7 - 2657.97071693968d0 & u18 + 5291.52227990318d0 \\ - 39167.688586037d0 & u9 + 28192.4114675568d0 & u8 + 4580.85639161386d0 & u18 + 2657.97071693968d0 \\ 7895.79467342914d0 & u2 - 3075.00160015057d0 & u11 - 9958.97995346356d0 & u10 - 17759.4203810606d0 \\ - 1639.85200798334d0 & u3 + 12226.8576752718d0 & u2 + 20.1136654835578d0 & u12 - 12817.0359623176d0 & u11 - 3075.00160015057d0 \\ - 2060.45520253966d0 & u4 + 1262.00235549085d0 & u3 + 1639.85200798334d0 & u2 + 284.501349049374d0 & u13 - 4746.0192868687d0 \\ 134.093349340986d0 & u5 + 1036.39107709542d0 & u4 + 2060.45520253966d0 & u3 - 229.852361288402d0 & u14 - 3225.96015584186d0 \\ 10791.8027488706d0 & u6 - 15681.7973989428d0 & u5 - 134.093349340986d0 & u4 - 1755.0242825714d0 & u15 - 6481.06244771924d0 \\ 8745.14330187556d0 & u7 + 3606.8233780991d0 & u6 - 10791.8027488706d0 & u5 - 1399.91306673116d0 & u16 - 9243.37092256884d0 \\ 5733.57110139018d0 & u8 + 5436.76462252914d0 & u7 - 8745.14330187556d0 & u6 - 607.145852318586d0 & u17 - 5866.68816654016d0 \\ 2657.97071693968d0 & u9 + 5291.52227990318d0 & u8 - 5733.57110139018d0 & u7 - 240.411338839814d0 & u18 - 2466.07895381796d0 \\ 4580.85639161386d0 & u9 - 2657.97071693968d0 & u8 - 699.696139954594d0 & u18 - 240.411338839814d0 \end{bmatrix}$$

(c70) lista11: dfloat(linsolve([eq[1],eq[2],eq[3],eq[4],eq[5],eq[6],eq[7],eq[8],eq[9],eq[10],eq[11],eq[12],eq[13],eq[14],eq[15],eq[16],eq[17],eq[18]], [u1,u2,u3,u4,u5,u6,u7,u8,u9,u10,u11,u12,u13,u14,u15,u16,u17,u18])), expand

(d70)

$$\begin{aligned} u1 &= 5.8191836772143d-4, & u2 &= - 0.01489978246478d0, & u3 &= - 0.01543405012646d0, \\ u4 &= - 0.01761203988218d0, & u5 &= 0.02208259364128d0, & u6 &= - 0.00497910841302d0, \\ u7 &= - 0.03407023597526d0, & u8 &= - 0.0354923973367d0, & u9 &= - 6.82070057997876d-4, \\ u10 &= - 0.05408331462512d0, & u11 &= - 0.08595339728976d0, \\ u12 &= - 0.20362353538842d0, & u13 &= - 0.33665925693904d0, \\ u14 &= - 0.26695941267562d0, & u15 &= - 0.17863958121708d0, \\ u16 &= - 0.28353354305198d0, & u17 &= - 0.5001317312107d0, \\ u18 &= - 0.21942282049526d0 \end{aligned}$$

Deslocamentos calculados

(c71)	uc1: (part(part(lista11,1) ,2))	
(d71)		5.8191836772143d-4
(c72)	uc2: (part(part(lista11,2) ,2))	
(d72)		- 0.01489978246478d0
(c73)	uc3: (part(part(lista11,3) ,2))	
(d73)		- 0.01543405012646d0
(c74)	uc4: (part(part(lista11,4) ,2))	
(d74)		- 0.01761203988218d0
(c75)	uc5: (part(part(lista11,5) ,2))	
(d75)		0.02208259364128d0
(c76)	uc6: (part(part(lista11,6) ,2))	
(d76)		- 0.00497910841302d0
(c77)	uc7: (part(part(lista11,7) ,2))	
(d77)		- 0.03407023597526d0
(c78)	uc8: (part(part(lista11,8) ,2))	
(d78)		- 0.0354923973367d0
(c79)	uc9: (part(part(lista11,9) ,2))	
(d79)		- 6.82070057997876d-4
(c80)	uc10: (part(part(lista11,10) ,2))	
(d80)		- 0.05408331462512d0
(c81)	uc11: (part(part(lista11,11) ,2))	
(d81)		- 0.08595339728976d0
(c82)	uc12: (part(part(lista11,12) ,2))	
(d82)		- 0.20362353538842d0
(c83)	uc13: (part(part(lista11,13) ,2))	
(d83)		- 0.33665925693904d0
(c84)	uc14: (part(part(lista11,14) ,2))	
(d84)		- 0.26695941267562d0
(c85)	uc15: (part(part(lista11,15) ,2))	
(d85)		- 0.17863958121708d0
(c86)	uc16: (part(part(lista11,16) ,2))	
(d86)		- 0.28353354305198d0
(c87)	uc17: (part(part(lista11,17) ,2))	
(d87)		- 0.5001317312107d0
(c88)	uc18: (part(part(lista11,18) ,2))	
(d88)		- 0.21942282049526d0

(c89) ucalct: matrix([uc1],[uc2],[uc3],[uc4],[uc5],[uc6],[uc7],[uc8],[uc9],[uc10],[uc11],[uc12],[uc13],[uc14],[uc15],[uc16],[uc17],[uc18]), dfloat

(d89)

$$\begin{bmatrix} 5.8191836772143d-4 \\ - 0.01489978246478d0 \\ - 0.01543405012646d0 \\ - 0.01761203988218d0 \\ 0.02208259364128d0 \\ - 0.00497910841302d0 \\ - 0.03407023597526d0 \\ - 0.0354923973367d0 \\ - 6.82070057997876d-4 \\ - 0.05408331462512d0 \\ - 0.08595339728976d0 \\ - 0.20362353538842d0 \\ - 0.33665925693904d0 \\ - 0.26695941267562d0 \\ - 0.17863958121708d0 \\ - 0.28353354305198d0 \\ - 0.5001317312107d0 \\ - 0.21942282049526d0 \end{bmatrix}$$

(c90) ucalc: matrix([uc1],[uc2],[uc3],[uc4],[uc5],[uc6],[uc7],[uc8],[uc9]), dfloat

(d90)

$$\begin{bmatrix} 5.8191836772143d-4 \\ - 0.01489978246478d0 \\ - 0.01543405012646d0 \\ - 0.01761203988218d0 \\ 0.02208259364128d0 \\ - 0.00497910841302d0 \\ - 0.03407023597526d0 \\ - 0.0354923973367d0 \\ - 6.82070057997876d-4 \end{bmatrix}$$

Identificação dos parâmetros do carregamento km₁ a km₈

Iteração 1

Parâmetros iniciais

(c91) p0:dfloat(matrix([2207.28],[689.658],[387.778],[243.266],[533.908],[419.224],[120.331],[40.6973]))

(d91)

$$\begin{bmatrix} 2207.279296875d0 \\ 689.657958984374d0 \\ 387.777954101562d0 \\ 243.265991210938d0 \\ 533.907958984374d0 \\ 419.223999023438d0 \\ 120.330993652344d0 \\ 40.697296142578d0 \end{bmatrix}$$

Deslocamentos medidos

(c92) umed: dfloat(matrix([-0.00599],[-0.01227],[-0.01333], [-0.01291],[-0.00911], [0.00089],[0.00091], [0.00001],[-0.00016]))

(d92)

$$\begin{bmatrix} - 0.00598999857902d0 \\ - 0.0122699998319d0 \\ - 0.01332999765872d0 \\ - 0.0129099972546d0 \\ - 0.0091099999845d0 \\ 8.90000024810434d-4 \\ 9.09999944269656d-4 \\ 9.99999974737874d-6 \\ - 1.5999999595806d-4 \end{bmatrix}$$

Delta u

(c93) deltau: umed - ucalc

(d93)

$$\begin{bmatrix} -0.00657191694674d0 \\ 0.00262978263288d0 \\ 0.00210405246772d0 \\ 0.00470204262758d0 \\ -0.03119259362578d0 \\ 0.00586910843784d0 \\ 0.03498023591952d0 \\ 0.03550239733646d0 \\ 5.22070062039816d-4 \end{bmatrix}$$

Matriz de sensibilidade em relação a km_i

(c94) delK1:dffloat(diff(Kg,klm))

(d94)

15.6877306613976d0	- 11.7657979960482d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	7.30588793178044d0
- 11.7657979960482d0	15.6877306613976d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	- 4.31711559605208d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
7.30588793178044d0	- 4.31711559605208d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	4.38657052176338d0
4.31711559605208d0	- 7.30588793178044d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	1.51842825753348d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0

(c95) Ap1: dffloat((kgp^^-1) . (-delK1 . ucalct))

C:\Macsyma\Macsyma2\share\nk aux.fas being loaded.
 C:\Macsyma\Macsyma2\matrix\supportl.fas being loaded.
 C:\Macsyma\Macsyma2\matrix\bla_lu.fas being loaded.
 C:\Macsyma\Macsyma2\matrix\blinalg.fas being loaded.

(d95)

$$\begin{bmatrix} -9.87778431325936d-7 \\ -3.26676923754218d-6 \\ -4.09498373707098d-7 \\ 1.48583865754734d-7 \\ -5.59897030133202d-9 \\ -8.91782119936658d-10 \\ -2.00408903527178d-10 \\ -7.14518915423974d-11 \\ -6.93940036784392d-11 \\ 2.33203872968606d-5 \\ 1.9082978998751d-5 \\ -1.24073657534828d-6 \\ -3.24891138999326d-7 \\ 1.99336361932618d-8 \\ 2.13086934291566d-9 \\ 5.52496183689676d-10 \\ 1.23787778225902d-10 \\ -2.25422017343046d-10 \end{bmatrix}$$

Matriz de sensibilidade em relação a km,

(c96) delK2:dfloat(diff(Kg,k2m))

[illegible]

(c97) Ap2: dfloat((kgp^^-1), (-delK2, ucalct))

(d97)

- 5.17416486287086d-5
2.94662337343438d-5
- 2.46284243680194d-5
- 4.8755662139534d-6
3.59281089332418d-8
2.9980238223873d-8
7.325468286931d-9
2.62493764547234d-9
2.55003273433456d-9
2.64208322254286d-6
7.00929373169992d-5
1.51166745765132d-4
- 3.97952916945832d-6
2.21902973168838d-7
- 6.2425549032577d-8
- 1.996979163595d-8
- 4.54171590114062d-9
8.28389071182016d-9

Matriz de sensibilidade em relação a km_2

```
(c98) delK3:dfloat(diff(Kg,k3m))
```

[illegible]

Matriz de sensibilidade em relação a km:

```
(c102) delK5:dfloat(diff(Kg,k5m))
```

[illegible]

(c103) Ap5: dfloat((kgp^^-1), (-delK5, ucalct))

(d103)

3.06011335781722d-9
6.56729178217394d-8
- 5.4561918587058d-7
- 2.02885757680448d-6
2.15363496972794d-5
- 2.38490578357382d-5
- 3.4780811451762d-7
- 1.16368087573768d-8
- 5.36999949175186d-9
6.90516303193202d-9
1.28593642019728d-7
- 2.05004326944878d-7
- 1.60808808537708d-5
2.2396517526741d-4
1.35485954788878d-4
2.87972854644346d-6
7.037717781961d-8
- 1.5132813417618d-8

Matriz de sensibilidade em relação a km_c

```
(c104) delK6:dfloat(diff(Kg,k6m))
```

[illegible]

(c105) Ap6: dfloat((kgp^^1) . (-delK6 . ucalct))

(d105)

```

2.5385275649023d-10
1.28474483607284d-10
1.09527999618552d-8
- 1.49015365304362d-7
3.37649586065936d-6
3.7188117050857d-5
- 2.55962641900028d-5
2.10945695641102d-6
2.64179247343092d-6
7.33153168839764d-11
- 1.3736628445935d-9
5.03965657257808d-8
- 2.87738252007624d-7
5.49685553738268d-6
1.7825277872133d-4
2.6262797882196d-4
1.36648600581682d-6
8.8127946349456d-6

```

Matriz de sensibilidade em relação a km₇

(c106) delK7:dfloat(diff(Kg,k7m))

(d106)

0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	584.724946444058d0	- 438.543709833044d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	- 438.543709833044d0	584.724946444058d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	81.5205945303786d0	- 48.1712604043146d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	48.1712604043146d0	- 81.5205945303786d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0

(c107) Ap7: dfloat((kgp^^1) . (-delK7 . ucalct))

(d107)

```

7.0466653791743d-10
- 2.55339933919138d-9
6.11563465049342d-8
- 4.03097534469142d-7
1.02425558107192d-5
3.4994550751664d-5
2.8801203492559d-4
- 1.54435596488692d-4
2.74215996520712d-5
- 6.97416958525094d-11
- 1.04003295557262d-8
1.76768200851586d-7
- 2.26368659606052d-7
8.10193507025966d-6
9.38047082840072d-5
0.00118085849288d0
0.00176948384094d0
1.58205423149912d-4

```

Matriz de sensibilidade em relação a km_k

(c108) delK8:dfloat(diff(Kg,k8m))

(d108)	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	939.153413891614d0	- 704.36506041871d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	- 704.36506041871d0	939.153413891614d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	111.803985229492d0	- 66.0659912719728d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0
	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	66.0659912719728d0	- 111.803985229492d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0	0.0d0

(c109) Ap8: dfloat((kgp^-1) . (-delK8 . ucalct))

(d109)	8.56854428650852d-10
	- 3.18588398002724d-9
	7.52206109142494d-8
	- 4.89861310782756d-7
	1.24788731619678d-5
	4.06525157552358d-5
	2.0126780571805d-4
	0.00121602486028d0
	- 2.57593265016868d-4
	- 9.2412125098021d-11
	- 1.28299098316588d-8
	2.15971740316296d-7
	- 2.59321774785482d-7
	9.652459769902d-6
	1.02898786472342d-4
	5.74321917945498d-4
	0.00691346508568d0
	0.00418814412614d0

Matriz de sensibilidade

A:dfloat(matrix([part(part(Ap1,1),1),part(part(Ap2,1),1),part(part(Ap3,1),1),part(part(Ap4,1),1),part(part(Ap5,1),1),part(part(Ap6,1),1),part(part(Ap7,1),1),part(part(Ap8,1),1)],
[part(part(Ap1,2),1),part(part(Ap2,2),1),part(part(Ap3,2),1),part(part(Ap4,2),1),part(part(Ap5,2),1),part(part(Ap6,2),1),part(part(Ap7,2),1),part(part(Ap8,2),1)],
[part(part(Ap1,3),1),part(part(Ap2,3),1),part(part(Ap3,3),1),part(part(Ap4,3),1),part(part(Ap5,3),1),part(part(Ap6,3),1),part(part(Ap7,3),1),part(part(Ap8,3),1)],
[part(part(Ap1,4),1),part(part(Ap2,4),1),part(part(Ap3,4),1),part(part(Ap4,4),1),part(part(Ap5,4),1),part(part(Ap6,4),1),part(part(Ap7,4),1),part(part(Ap8,4),1)],
[part(part(Ap1,5),1),part(part(Ap2,5),1),part(part(Ap3,5),1),part(part(Ap4,5),1),part(part(Ap5,5),1),part(part(Ap6,5),1),part(part(Ap7,5),1),part(part(Ap8,5),1)],
[part(part(Ap1,6),1),part(part(Ap2,6),1),part(part(Ap3,6),1),part(part(Ap4,6),1),part(part(Ap5,6),1),part(part(Ap6,6),1),part(part(Ap7,6),1),part(part(Ap8,6),1)],
[part(part(Ap1,7),1),part(part(Ap2,7),1),part(part(Ap3,7),1),part(part(Ap4,7),1),part(part(Ap5,7),1),part(part(Ap6,7),1),part(part(Ap7,7),1),part(part(Ap8,7),1)],
[part(part(Ap1,8),1),part(part(Ap2,8),1),part(part(Ap3,8),1),part(part(Ap4,8),1),part(part(Ap5,8),1),part(part(Ap6,8),1),part(part(Ap7,8),1),part(part(Ap8,8),1)],
[part(part(Ap1,9),1),part(part(Ap2,9),1),part(part(Ap3,9),1),part(part(Ap4,9),1),part(part(Ap5,9),1),part(part(Ap6,9),1),part(part(Ap7,9),1),part(part(Ap8,9),1))])

$$(d110) \begin{bmatrix} -9.87778431325936d-7 & -5.17416486287086d-7 & 1.29104321574206d-6 & -2.93918194640324d-7 & 3.06011335781722d- \\ -3.26676923754218d-6 & 2.94662337343438d-5 & -1.91760200554926d-6 & -2.16072403903178d-6 & 6.56729178217394d- \\ -4.09498373707098d-7 & -2.46284243680194d-5 & 8.28734810341568d-5 & 8.5806473389244d-6 & -5.4561918587058d- \\ 1.48583865754734d-7 & -4.8755662139534d-6 & -7.0032694194399d-5 & 1.79830131564082d-4 & -2.02885757680448d- \\ -5.59897030133202d-9 & 3.59281089332418d-8 & 5.49717075754926d-6 & -1.54309193434476d-4 & 2.15363496972794d- \\ -8.91782119936658d-10 & 2.9980238223873d-8 & 4.06448286320202d-7 & -1.92939424890418d-5 & -2.38490578357382d- \\ -2.00408903527178d-10 & 7.325468286931d-9 & 7.9968205996688d-8 & -4.20781007332592d-6 & -3.4780811451762d- \\ -7.14518915423974d-11 & 2.62493764547234d-9 & 2.82561301568538d-8 & -1.49734086544266d-6 & -1.16368087573768d- \\ -6.93940036784392d-11 & 2.55003273433456d-9 & 2.74288648826716d-8 & -1.45406431026412d-6 & -5.36999949175186d- \end{bmatrix}$$

Vetor deltap

$$(c111) \text{deltap:dfloat}(((\text{inv}(A^{\wedge} \cdot A)) \cdot (A^{\wedge} \cdot \text{deltap})))$$

$$(d111) \begin{bmatrix} 7859.57699959696d0 \\ 1009.83519654848d0 \\ 348.198468437248d0 \\ 182.525270842362d0 \\ -262.269476666752d0 \\ -36.5358742132144d0 \\ 91.9207368395004d0 \\ 39.6654257466818d0 \end{bmatrix}$$

Novos parâmetros

$$(c112) \text{p:dfloat}((p0+\text{deltap}))$$

$$(d112) \begin{bmatrix} 10066.856296472d0 \\ 1699.49315553286d0 \\ 735.97642253881d0 \\ 425.7912620533d0 \\ 271.638482317622d0 \\ 382.688124810222d0 \\ 212.251730491844d0 \\ 80.36272188926d0 \end{bmatrix}$$

Função objetivo

$$(c114) \text{fobj:}(\text{umed} - \text{ucale})^{\wedge} \cdot (\text{umed} - \text{ucale})$$

$$(d114) 0.00356837610044d0$$

Erro relativo

$$(c113) \text{erro:dfloat}(\text{mat_norm}(\text{deltap},2)/\text{mat_norm}(p,2))$$

C:\Macsyma\Macsyma2\matrix\mathfuns.fas being loaded.
C:\Macsyma\Macsyma2\matrix\simpfuns.fas being loaded.

$$(d113) 0.77393798256178d0$$

Iterações 2 a 8

Análise dos resultados

Função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância, variância, desvio padrão, coeficiente de variação, coeficiente de correlação e intervalo de confiança calculados com os parâmetros identificados (p8).

Função objetivo

$$(c114) \text{fobj:}(\text{umed} - \text{ucale})^{\wedge} \cdot (\text{umed} - \text{ucale})$$

$$(d114) 3.70559394295122d-6$$

Matriz hessiana

$$(c115) \text{He:}(A^{\wedge} \cdot A)$$

$$(d115) \begin{bmatrix} 2.76160729485422d-14 & 2.10872419719658d-12 & -2.59620688611048d-12 & 6.06028514717292d-13 & -8.40116634132 \\ 2.10872419719658d-12 & 3.02945617161882d-10 & -6.40746953768226d-10 & -3.38110613065792d-10 & 2.177118815565 \\ -2.59620688611048d-12 & -6.40746953768226d-10 & 5.51076556839576d-9 & -6.68846054091104d-9 & 1.309488299936 \\ 6.06028514717292d-13 & -3.38110613065792d-10 & -6.68846054091104d-9 & 3.24956085835922d-8 & -2.42018033485 \\ -8.40116634132188d-14 & 2.17711881556588d-11 & 1.30948829993674d-9 & -2.42018033485914d-8 & 6.002166254555 \\ -7.87698159573824d-15 & 3.17147526093166d-12 & 7.11854359917712d-11 & -2.24471001611208d-9 & -2.22410438430 \\ -2.70563692999602d-16 & 3.33513015897928d-13 & 2.35777476635802d-13 & -7.28784191501552d-11 & -1.05932983630 \\ -6.09935732139338d-16 & 2.21151753802964d-13 & 4.98283804160354d-12 & -1.6344799899474d-10 & -8.495144025980 \end{bmatrix}$$

Variância final do erro

$$(c116) \text{s22:fobj/1}$$

$$(d116) 3.70559394295122d-6$$

Matriz de covariância dos parâmetros identificados

(c182) Cp:s22 *(inv(A^ . A))

(d182)	1.02104164875214d+9	- 1.47076217177568d+7	- 2832401.8385152d0	- 1511896.07435531d0	- 920232.417837581d0
	- 1.47076217177568d+7	246529.523506334d0	49292.6566240684d0	25982.755709786d0	15803.5058787334d0
	- 2832401.83851518d0	49292.6566240684d0	11115.0259086035d0	5698.62389266582d0	3459.2716047879d0
	- 1511896.07435532d0	25982.755709786d0	5698.62389266582d0	3200.1528353724d0	1963.26681734184d0
	- 920232.417837569d0	15803.5058787332d0	3459.27160478788d0	1963.26681734184d0	1301.8370123728d0
	- 949797.455970122d0	16312.8086068108d0	3571.61642214992d0	2025.9464552502d0	1330.0791070251d0
	- 944339.405187907d0	16219.268618206d0	3551.2622520654d0	2014.34272325266d0	1322.48888732718d0
	- 745594.515563494d0	12805.804876986d0	2803.87651816706d0	1590.3499513298d0	1043.15812016402d0

Variância dos parâmetros identificados

(c118) Cp1:Cp[1,1]

(d118) 1.02104164875214d+9

(c119) Cp2:Cp[2,2]

(d119) 246529.523506334d0

(c120) Cp3:Cp[3,3]

(d120) 11115.0259086035d0

(c121) Cp4:Cp[4,4]

(d121) 3200.1528353724d0

(c122) Cp5:Cp[5,5]

(d122) 1301.8370123728d0

(c123) Cp6:Cp[6,6]

(d123) 1500.3418179917d0

(c124) Cp7:Cp[7,7]

(d124) 1737.35244539522d0

(c125) Cp8:Cp[8,8]

(d125) 1295.6869724099d0

Desvio padrão dos parâmetros identificados

(c126) s1:sqrt(Cp1)

(d126) 31953.742327811d0

(c127) s2:sqrt(Cp2)

(d127) 496.517394968528d0

(c128) s3:sqrt(Cp3)

(d128) 105.427823218558d0

(c129) s4:sqrt(Cp4)

(d129) 56.5698933653972d0

(c130) s5:sqrt(Cp5)

(d130) 36.0809785395686d0

(c131) s6:sqrt(Cp6)

(d131) 38.7342460620018d0

(c132) s7:sqrt(Cp7)

(d132) 41.6815600163338d0

(c133) s8:sqrt(Cp8)

(d133) 35.9956521320272d0

Coeficientes de variação

(c185) $r1:100*(s1/26632.536)$	
(d185)	119.980117653334d0
(c186) $r2:100*(s2/850.499)$	
(d186)	58.3795373405288d0
(c187) $r3:100*(s3/492.611)$	
(d187)	21.4018427054308d0
(c188) $r4:100*(s4/304.326)$	
(d188)	18.5885881582764d0
(c189) $r5:100*(s5/222.447)$	
(d189)	16.2200366625398d0
(c190) $r6:100*(s6/216.587)$	
(d190)	17.8839221723914d0
(c191) $r7:100*(s7/205.540)$	
(d191)	20.2790524823296d0
(c192) $r8:100*(s8/162.310)$	
(d192)	22.1771010248662d0

Coeficientes de correlacao

(c142) $r12:Cp[1,2]/(Cp[1,1]*Cp[2,2])^{0.5}$	
(d142)	- 0.92701391737584d0
(c143) $r13:Cp[1,3]/(Cp[1,1]*Cp[3,3])^{0.5}$	
(d143)	- 0.84077134005154d0
(c144) $r14:Cp[1,4]/(Cp[1,1]*Cp[4,4])^{0.5}$	
(d144)	- 0.83640159153446d0
(c145) $r15:Cp[1,5]/(Cp[1,1]*Cp[5,5])^{0.5}$	
(d145)	- 0.798173844734d0
(c146) $r16:Cp[1,6]/(Cp[1,1]*Cp[6,6])^{0.5}$	
(d146)	- 0.7673865201004d0
(c147) $r17:Cp[1,7]/(Cp[1,1]*Cp[7,7])^{0.5}$	
(d147)	- 0.70902642030376d0
(c148) $r18:Cp[1,8]/(Cp[1,1]*Cp[8,8])^{0.5}$	
(d148)	- 0.64823269221204d0
(c149) $r23:Cp[2,3]/(Cp[2,2]*Cp[3,3])^{0.5}$	
(d149)	0.94165651877082d0
(c150) $r24:Cp[2,4]/(Cp[2,2]*Cp[4,4])^{0.5}$	
(d150)	0.92505037140874d0
(c151) $r25:Cp[2,5]/(Cp[2,2]*Cp[5,5])^{0.5}$	
(d151)	0.88214640136602d0
(c152) $r26:Cp[2,6]/(Cp[2,2]*Cp[6,6])^{0.5}$	
(d152)	0.84820175263964d0
(c153) $r27:Cp[2,7]/(Cp[2,2]*Cp[7,7])^{0.5}$	
(d153)	0.78370538952786d0
(c154) $r28:Cp[2,8]/(Cp[2,2]*Cp[8,8])^{0.5}$	
(d154)	0.71651018134142d0

(c155) $r_{34}:Cp[3,4]/(Cp[3,3]*Cp[4,4])^{0.5}$ (d155)	0.95549714746454d0
(c156) $r_{35}:Cp[3,5]/(Cp[3,3]*Cp[5,5])^{0.5}$ (d156)	0.90939196980132d0
(c157) $r_{36}:Cp[3,6]/(Cp[3,3]*Cp[6,6])^{0.5}$ (d157)	0.8746100518745d0
(c158) $r_{37}:Cp[3,7]/(Cp[3,3]*Cp[7,7])^{0.5}$ (d158)	0.80813430064538d0
(c159) $r_{38}:Cp[3,8]/(Cp[3,3]*Cp[8,8])^{0.5}$ (d159)	0.73884544082542d0
(c160) $r_{45}:Cp[4,5]/(Cp[4,4]*Cp[5,5])^{0.5}$ (d160)	0.961868403597d0
(c161) $r_{46}:Cp[4,6]/(Cp[4,4]*Cp[6,6])^{0.5}$ (d161)	0.92458638891638d0
(c162) $r_{47}:Cp[4,7]/(Cp[4,4]*Cp[7,7])^{0.5}$ (d162)	0.85428747481408d0
(c163) $r_{48}:Cp[4,8]/(Cp[4,4]*Cp[8,8])^{0.5}$ (d163)	0.78101125734698d0
(c164) $r_{56}:Cp[5,6]/(Cp[5,5]*Cp[6,6])^{0.5}$ (d164)	0.95170873874936d0
(c165) $r_{57}:Cp[5,7]/(Cp[5,5]*Cp[7,7])^{0.5}$ (d165)	0.87936618049536d0
(c166) $r_{58}:Cp[5,8]/(Cp[5,5]*Cp[8,8])^{0.5}$ (d166)	0.80319646721238d0
(c167) $r_{67}:Cp[6,7]/(Cp[6,6]*Cp[7,7])^{0.5}$ (d167)	0.9136835069554d0
(c168) $r_{68}:Cp[6,8]/(Cp[6,6]*Cp[8,8])^{0.5}$ (d168)	0.829163675764d0
(c169) $r_{78}:Cp[7,8]/(Cp[7,7]*Cp[8,8])^{0.5}$ (d169)	0.83230608281998d0
Intervalos de confiança	
(c170) $i_1:\text{sqrt}(Cp[1,1])*12.706$ (d170)	406004.16907965d0
(c171) $i_2:\text{sqrt}(Cp[2,2])*12.706$ (d171)	6308.74876281192d0
(c172) $i_3:\text{sqrt}(Cp[3,3])*12.706$ (d172)	1339.56565477064d0
(c173) $i_4:\text{sqrt}(Cp[4,4])*12.706$ (d173)	718.776921811518d0
(c174) $i_5:\text{sqrt}(Cp[5,5])*12.706$ (d174)	458.44482193212d0
(c175) $i_6:\text{sqrt}(Cp[6,6])*12.706$ (d175)	492.157232351538d0
(c176) $i_7:\text{sqrt}(Cp[7,7])*12.706$ (d176)	529.605795989854d0
(c177) $i_8:\text{sqrt}(Cp[8,8])*12.706$ (d177)	457.360664814026d0

C4 – Rotina desenvolvida utilizando o critério dos mínimos quadrados com o método de Gauss-Newton, considerando modelo não-linear de viga

```
% Barragem de Machadinho
% Modelo não=linear de viga
% Critério dos mínimos quadrados
% Método de Gauss-Newton
% Identificação dos parâmetros que definem a reação da barragem de enrocamento
% sobre a face de concreto (q1, q2, q3, q4, q5, q6 e q7)

% *****
% vetor dos deslocamentos medidos
umed=[-0.01227; -0.01333; -0.01291; -0.00911; 0.00089; 0.00091; 0.00001];
% *****

% *****
% Processo iterativo
% O processo iterativo não é automatizado, pois em cada iteração é necessário rodar
% o modelo no Adina.
% Os graus de liberdade 38, 62, 86, 125, 203, 281 e 398 são os graus de liberdade
% que correspondem aos deslocamentos medidos.

% -----
% Parâmetros iniciais
p0=[2.47; 0.72; -0.8; 1.2; -0.46; 0.03; -0.01];
% -----

% -----
% Iteração 1
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p0

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter0_disp.txt
u0=[iter0_disp(38);iter0_disp(62);iter0_disp(86);iter0_disp(125);iter0_disp(203);...
    iter0_disp(281);iter0_disp(398)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau0=umed-u0;

% matriz de sensibilidade
% Neste estudo a matriz de sensibilidade é aproximada pelo método das diferenças
% finitas. Para a obtenção de cada coluna da matriz é necessário rodar o mesmo modelo
% no Adina considerando um delta no respectivo parâmetro.

load iter0p1_disp.txt
u0p1=[iter0p1_disp(38);iter0p1_disp(62);iter0p1_disp(86);iter0p1_disp(125);...
    iter0p1_disp(203);iter0p1_disp(281);iter0p1_disp(398)];
A0p1=(u0p1-u0)/0.247;

load iter0p2_disp.txt
u0p2=[iter0p2_disp(38);iter0p2_disp(62);iter0p2_disp(86);iter0p2_disp(125);...
    iter0p2_disp(203);iter0p2_disp(281);iter0p2_disp(398)];
A0p2=(u0p2-u0)/0.072;

load iter0p3_disp.txt
u0p3=[iter0p3_disp(38);iter0p3_disp(62);iter0p3_disp(86);iter0p3_disp(125);...
    iter0p3_disp(203);iter0p3_disp(281);iter0p3_disp(398)];
A0p3=(u0p3-u0)/0.08;

load iter0p4_disp.txt
u0p4=[iter0p4_disp(38);iter0p4_disp(62);iter0p4_disp(86);iter0p4_disp(125);...
    iter0p4_disp(203);iter0p4_disp(281);iter0p4_disp(398)];
A0p4=(u0p4-u0)/0.12;

load iter0p5_disp.txt
u0p5=[iter0p5_disp(38);iter0p5_disp(62);iter0p5_disp(86);iter0p5_disp(125);...
    iter0p5_disp(203);iter0p5_disp(281);iter0p5_disp(398)];
A0p5=(u0p5-u0)/0.046;
```

```

load iter0p6_disp.txt
u0p6=[iter0p6_disp(38);iter0p6_disp(62);iter0p6_disp(86);iter0p6_disp(125);...
      iter0p6_disp(203);iter0p6_disp(281);iter0p6_disp(398)];
A0p6=(u0p6-u0)/0.003;

load iter0p7_disp.txt
u0p7=[iter0p7_disp(38);iter0p7_disp(62);iter0p7_disp(86);iter0p7_disp(125);...
      iter0p7_disp(203);iter0p7_disp(281);iter0p7_disp(398)];
A0p7=(u0p7-u0)/0.001;

A0=[A0p1 A0p2 A0p3 A0p4 A0p5 A0p6 A0p7];

% vetor deltap
deltap0=(inv(A0'*A0))*(A0'*deltau0);

% novos parâmetros
p1=p0+deltap0;

% função objetivo
f0=(umed-u0)'*(umed-u0);

% erro
errol=norm(deltap0)/norm(p1);
% -----

% Iterações 2 e 3

% -----
% Iteração 4
% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros p3

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter3_disp.txt
u3=[iter3_disp(38);iter3_disp(62);iter3_disp(86);iter3_disp(125);iter3_disp(203);...
    iter3_disp(281);iter3_disp(398)];

% vetor da diferença entre deslocamentos medidos e deslocamentos calculados
deltau3=umed-u3;

% matriz de sensibilidade
load iter3p1_disp.txt
u3p1=[iter3p1_disp(38);iter3p1_disp(62);iter3p1_disp(86);iter3p1_disp(125);...
      iter3p1_disp(203);iter3p1_disp(281);iter3p1_disp(398)];
A3p1=(u3p1-u3)/0.07826;

load iter3p2_disp.txt
u3p2=[iter3p2_disp(38);iter3p2_disp(62);iter3p2_disp(86);iter3p2_disp(125);...
      iter3p2_disp(203);iter3p2_disp(281);iter3p2_disp(398)];
A3p2=(u3p2-u3)/0.08823;

load iter3p3_disp.txt
u3p3=[iter3p3_disp(38);iter3p3_disp(62);iter3p3_disp(86);iter3p3_disp(125);...
      iter3p3_disp(203);iter3p3_disp(281);iter3p3_disp(398)];
A3p3=(u3p3-u3)/0.08208;

load iter3p4_disp.txt
u3p4=[iter3p4_disp(38);iter3p4_disp(62);iter3p4_disp(86);iter3p4_disp(125);...
      iter3p4_disp(203);iter3p4_disp(281);iter3p4_disp(398)];
A3p4=(u3p4-u3)/0.1196;

load iter3p5_disp.txt
u3p5=[iter3p5_disp(38);iter3p5_disp(62);iter3p5_disp(86);iter3p5_disp(125);...
      iter3p5_disp(203);iter3p5_disp(281);iter3p5_disp(398)];
A3p5=(u3p5-u3)/0.0467;

load iter3p6_disp.txt
u3p6=[iter3p6_disp(38);iter3p6_disp(62);iter3p6_disp(86);iter3p6_disp(125);...
      iter3p6_disp(203);iter3p6_disp(281);iter3p6_disp(398)];
A3p6=(u3p6-u3)/0.00378;

load iter3p7_disp.txt
u3p7=[iter3p7_disp(38);iter3p7_disp(62);iter3p7_disp(86);iter3p7_disp(125);...
      iter3p7_disp(203);iter3p7_disp(281);iter3p7_disp(398)];
A3p7=(u3p7-u3)/0.00181;

```



```

A3=[A3p1 A3p2 A3p3 A3p4 A3p5 A3p6 A3p7];

% vetor deltap
deltap3=(inv(A3'*A3))*(A3'*deltau3);

% novos parâmetros
p4=p3+deltap3;

% função objetivo
f3=(umed-u3)'+(umed-u3);

% erro
erro4=norm(deltap3)/norm(p4);
% -----
% *****

% *****
% Análise dos resultados
% Matriz de sensibilidade, função objetivo, matriz Hessiana, matriz de covariância,
% variância, desvio padrão, coeficiente de variação e coeficiente de correlação e
% calculados com os parâmetros identificados (p4).

% Problema direto resolvido com o programa Adina com os parâmetros identificados (p4)

% vetor dos deslocamentos calculados
load iter4_disp.txt
u4=[iter4_disp(38);iter4_disp(62);iter4_disp(86);iter4_disp(125);iter4_disp(203);...
    iter4_disp(281);iter4_disp(398)];

% matriz de sensibilidade
load iter4p1_disp.txt
u4p1=[iter4p1_disp(38);iter4p1_disp(62);iter4p1_disp(86);iter4p1_disp(125);...
    iter4p1_disp(203);iter4p1_disp(281);iter4p1_disp(398)];
A4p1=(u4p1-u4)/0.07945;

load iter4p2_disp.txt
u4p2=[iter4p2_disp(38);iter4p2_disp(62);iter4p2_disp(86);iter4p2_disp(125);...
    iter4p2_disp(203);iter4p2_disp(281);iter4p2_disp(398)];
A4p2=(u4p2-u4)/0.08846;

load iter4p3_disp.txt
u4p3=[iter4p3_disp(38);iter4p3_disp(62);iter4p3_disp(86);iter4p3_disp(125);...
    iter4p3_disp(203);iter4p3_disp(281);iter4p3_disp(398)];
A4p3=(u4p3-u4)/0.08237;

load iter4p4_disp.txt
u4p4=[iter4p4_disp(38);iter4p4_disp(62);iter4p4_disp(86);iter4p4_disp(125);...
    iter4p4_disp(203);iter4p4_disp(281);iter4p4_disp(398)];
A4p4=(u4p4-u4)/0.11976;

load iter4p5_disp.txt
u4p5=[iter4p5_disp(38);iter4p5_disp(62);iter4p5_disp(86);iter4p5_disp(125);...
    iter4p5_disp(203);iter4p5_disp(281);iter4p5_disp(398)];
A4p5=(u4p5-u4)/0.04683;

load iter4p6_disp.txt
u4p6=[iter4p6_disp(38);iter4p6_disp(62);iter4p6_disp(86);iter4p6_disp(125);...
    iter4p6_disp(203);iter4p6_disp(281);iter4p6_disp(398)];
A4p6=(u4p6-u4)/0.00389;

load iter4p7_disp.txt
u4p7=[iter4p7_disp(38);iter4p7_disp(62);iter4p7_disp(86);iter4p7_disp(125);...
    iter4p7_disp(203);iter4p7_disp(281);iter4p7_disp(398)];
A4p7=(u4p7-u4)/0.00187;

A4=[A4p1 A4p2 A4p3 A4p4 A4p5 A4p6 A4p7];

% função objetivo
f4=(umed-u4)'+(umed-u4);

% matriz Hessiana
He=A4'*A4;

% variância final do erro (calculada estatisticamente)
s2a=1.709e-11;

```

```

% matriz de covariância dos parâmetros identificados
Cp=s22a*(inv(A4'*A4));

% variância dos parâmetros estimados
Cp1= Cp(1,1);
Cp2= Cp(2,2);
Cp3= Cp(3,3);
Cp4= Cp(4,4);
Cp5= Cp(5,5);
Cp6= Cp(6,6);
Cp7= Cp(7,7);

% desvio padrão dos parâmetros estimados
s1=sqrt(Cp1);
s2=sqrt(Cp2);
s3=sqrt(Cp3);
s4=sqrt(Cp4);
s5=sqrt(Cp5);
s6=sqrt(Cp6);
s7=sqrt(Cp7);

% coeficientes de variação
r1=100*(s1/p4(1));
r2=100*(s2/p4(2));
r3=100*(s3/p4(3));
r4=100*(s4/p4(4));
r5=100*(s5/p4(5));
r6=100*(s6/p4(6));
r7=100*(s7/p4(7));

% coeficientes de correlação
r12=Cp(1,2)/(Cp(1,1)*Cp(2,2))^0.5;
r13=Cp(1,3)/(Cp(1,1)*Cp(3,3))^0.5;
r14=Cp(1,4)/(Cp(1,1)*Cp(4,4))^0.5;
r15=Cp(1,5)/(Cp(1,1)*Cp(5,5))^0.5;
r16=Cp(1,6)/(Cp(1,1)*Cp(6,6))^0.5;
r17=Cp(1,7)/(Cp(1,1)*Cp(7,7))^0.5;
r23=Cp(2,3)/(Cp(2,2)*Cp(3,3))^0.5;
r24=Cp(2,4)/(Cp(2,2)*Cp(4,4))^0.5;
r25=Cp(2,5)/(Cp(2,2)*Cp(5,5))^0.5;
r26=Cp(2,6)/(Cp(2,2)*Cp(6,6))^0.5;
r27=Cp(2,7)/(Cp(2,2)*Cp(7,7))^0.5;
r34=Cp(3,4)/(Cp(3,3)*Cp(4,4))^0.5;
r35=Cp(3,5)/(Cp(3,3)*Cp(5,5))^0.5;
r36=Cp(3,6)/(Cp(3,3)*Cp(6,6))^0.5;
r37=Cp(3,7)/(Cp(3,3)*Cp(7,7))^0.5;
r45=Cp(4,5)/(Cp(4,4)*Cp(5,5))^0.5;
r46=Cp(4,6)/(Cp(4,4)*Cp(6,6))^0.5;
r47=Cp(4,7)/(Cp(4,4)*Cp(7,7))^0.5;
r56=Cp(5,6)/(Cp(5,5)*Cp(6,6))^0.5;
r57=Cp(5,7)/(Cp(5,5)*Cp(7,7))^0.5;
r67=Cp(6,7)/(Cp(6,6)*Cp(7,7))^0.5;

% *****

```