HENRIQUE DE BRITTO COSTA

ENGENHEIRO CIVIL, ESCOLA POLITÉCNICA DA USP, 1975

ELEMENTOS FINITOS (VIA RESÍDUOS PONDERADOS) NA RESOLUÇÃO DO PROBLEMA DE SEGUNDA ORDEM DAS PLACAS

TESE APRESENTADA À
ESCOLA POLITÉCNICA DA USP
PARA A OBTENÇÃO DO TÍTULO
DE DOUTOR EM ENGENHARIA

ORIENTADOR:
PROF. DR. VICTOR M. DE SOUZA LIMA
PROFESSOR TITULAR

SÃO PAULO
1986

Aos meus pais,
Luciano e Sylvia.

AGRADECIMENTOS

O autor agradece ao Prof. Dr. Victor M. de Souza Lima pela assistência e pela colaboração no decorrer deste trabalho.

Agradece, também, a Angela Schneider Loyola, pelo trabalho de datilografia.

RESUMO

Este trabalho aborda os conceitos básicos da teoria de segunda ordem das placas elásticas delgadas, utilizando o Método dos Elementos Finitos (introduzido através do Método dos Resíduos Ponderados, na variante de Galerkin).

São deduzidas as matrizes de rigidez geométrica, de rigidez secante e de rigidez tangente, relativas ao problema em consideração. É proposta ainda uma conduta notavelmente simplificada, que facilita sobremaneira a construção da matriz de rigidez tangente.

ABSTRACT

This paper deals with the basic concepts of the second order theory of thin elastic plates, through the use of the Finite Element Method (introduced through the Weighted Residual Method, in Galerkin's approach).

The matrices of geometric stiffness, secant stiffness, and tangent stiffness for the problem under consideration are deduced. It is also proposed an outstandingly simplified conduct, which will greatly easen the construction of the tangent stiffness matrix.

NOTAÇÃO (CHAPAS E PLACAS)

Letras Romanas Maiúsculas

$\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$	matrizes que dependem do vetor $\underline{\xi}$
$\underline{A}^e$, $\underline{B}^e$, $\underline{C}^e$	matrizes $\underline{A}$, $\underline{B}$, $\underline{C}$ para o elemento e
$\bar{\underline{A}}^e$, $\bar{\underline{B}}^e$, $\bar{\underline{C}}^e$	matrizes $\underline{A}^e$, $\underline{B}^e$, $\underline{C}^e$ simplificadas
A_p, B_p, C_p	coeficientes de L_p
A_r, B_r, C_r	coeficientes de L_r
A_s, B_s, C_s	coeficientes de L_s
C	contorno da chapa (placa)
C_d	contorno essencial da chapa (placa)
C_σ	contorno natural da chapa (placa)
C_d^e	porção de C_d pertencente ao elemento e
C_σ^e	porção de C_σ pertencente ao elemento e
D	rigidez da placa
E	módulo de elasticidade
F_i^x, F_i^y, F_i^z	forças nodais equivalentes
$\underline{G}$	matriz componente de $\Delta\underline{K}_0$
$\bar{\underline{G}}$	matriz $\underline{G}$ simplificada
$\underline{H}$	matriz componente de $\Delta\underline{K}_0$
$\bar{\underline{H}}$	matriz $\underline{H}$ simplificada
$\underline{K}$	matriz de rigidez secante
$\bar{\underline{K}}$	matriz $\underline{K}$ simplificada
$\underline{K}_T$	matriz de rigidez tangente
$\bar{\underline{K}}_T$	matriz $\underline{K}_T$ simplificada
$\underline{K}_0^p$	matriz de rigidez de primeira ordem da chapa
$\underline{K}_0^b$	matriz de rigidez de primeira ordem da placa
$\Delta\underline{K}_0$	matriz de correção de coordenadas
$\Delta\bar{\underline{K}}_0$	matriz $\Delta\underline{K}_0$ simplificada

$\underline{K}_g$	matriz de rigidez geométrica
$\bar{\underline{K}}_g$	matriz $\underline{K}_g$ simplificada
$\underline{K}_g^b$	matriz componente de $\underline{K}_g$
$\bar{\underline{K}}_g^b$	matriz $\underline{K}_g^b$ simplificada
L_p, L_r, L_s	coordenadas naturais do triângulo
M_n, M_{nt}	momentos fletor e de torção aplicados em C_σ
M_n^e, M_{nt}^e	momentos $\bar{M}_n$ e $\bar{M}_{nt}$ aplicados em C_σ^e
M_x, M_y, M_{xy}	momentos fletores e de torção solicitantes
M_i^x, M_i^y	momentos nodais equivalentes
N_x, N_y, N_{xy}	forças de membrana
N_x^e, N_y^e, N_{xy}^e	forças de membrana no elemento e
$\bar{N}_x^e$, $\bar{N}_y^e$, $\bar{N}_{xy}^e$	forças N_x^e, N_y^e, N_{xy}^e feitas constantes
P	ponto do contorno da chapa (placa)
P_i, P_j, P_p, P_r, P_s	pontos nodais
Q_x, Q_y, Q_n	forças cortantes
R_P	força vertical aplicada em P
R_T	força vertical aplicada em T
T	ponto do contorno da chapa (placa)
V_x, $\bar{V}_n$	carga vertical aplicada em C_σ
$\bar{V}_n^e$	carga vertical aplicada em C_σ^e
X , Y	forças de volume
X^e, Y^e	forças de volume no elemento e
$\bar{X}$, $\bar{Y}$	forças de superfície aplicadas em C_σ
$\bar{X}^e$, $\bar{Y}^e$	forças de superfície aplicadas em C_σ^e

Letras Romanas Minúsculas

$\underline{a}$	vetor de parâmetros nodais
$\underline{a}^p$	vetor de parâmetros nodais de chapa
$\underline{a}^b$	vetor de parâmetros nodais de placa
a_j, b_j, c_j	coeficientes de solução aproximada no Método dos Resíduos Ponderados
$\underline{f}$	vetor de esforços nodais equivalentes
$\underline{f}^p$	vetor de esforços nodais equivalentes da chapa
$\underline{f}^b$	vetor de esforços nodais equivalentes da placa
h	espessura da chapa (placa)
$\vec{i}$, $\vec{j}$	versores dos eixos x e y, respectivamente
ℓ, m, n	cossenos diretores de $\vec{n}$
$\vec{n}$	normal externa a C
p	carga transversal
p^e	carga transversal no elemento e
s	abscissa ao longo de C
$\vec{t}$	versor tangente a C
u, v, w	deslocamentos dos pontos do plano médio da chapa (placa)
$\bar{u}$, $\bar{v}$, $\bar{w}$	deslocamentos u, v, w impostos em C_d
u_i, v_i, w_i	deslocamentos u, v, w do nó P_i

Letras Gregas Maiúsculas

Γ	função de ponto contínua e derivável
Δ	área do triângulo
Δ^e	área do elemento e
Λ	função de ponto contínua e derivável
Ω	domínio da chapa (placa)
Ω^e	domínio do elemento e

Letras Gregas Minúsculas

α, β	rotações
α_j, β_j	rotações α e β do nó P_j
γ_1, γ_2	ângulos
γ_{xy}	distorção (deformação angular)
γ	distorção (deformação angular)
δ	ângulo de $\vec{n}$ com $\vec{i}$
ε	alongamento ou encurtamento (deformação linear)
ε_x, ε_y	alongamentos ou encurtamentos
η_j	função de forma correspondente a β_j
$\bar{\theta}$	rotação forçada de apoio
λ	fator de carga
$\vec{\mu}$	vetor posição
ν	coeficiente de deformação transversal (Poisson)
$\underline{\xi}$	vetor
$\underline{\xi}^e$	vetor $\underline{\xi}$ definido no elemento e
$1/\rho_x$, $1/\rho_y$, $1/\rho_{xy}$	curvaturas
σ_x, σ_y	tensões normais
τ_{xy}	tensão tangencial
τ_{ext}	trabalho virtual dos esforços externos
τ_{int}	trabalho virtual dos esforços internos
ϕ	função de ponderação
ϕ_j	função coordenada (MRP) ou função de forma correspondente a w_j(MEF)
χ	função de ponderação

χ_j	função coordenada (MRP) ou função de forma correspondente a u_j e a v_j (MEF)
χ_j^e	função de forma χ_j definida no elemento e
ψ_j	função de forma correspondente a α_j
ω, ω^*	ângulos
ω_1, ω_2, ..., ω_9	coeficientes polinomiais

NOTAÇÃO (BARRAS)

Letras Romanas Maiúsculas

A	área da seção transversal
E	módulo de elasticidade
I	momento de inércia da seção transversal
L	comprimento da barra
M	momento fletor
N	força normal
Q_1 a Q_6	elementos do vetor $\underline{Q}$
$\underline{Q}$	vetor dos esforços de extremidade
$\underline{Q}_a$ e $\underline{Q}_f$	parcelas do vetor $\underline{Q}$
$\underline{R}$	parcela da matriz $\Delta\underline{k}_0$
$\underline{S}$	parcela da matriz $\Delta\underline{k}_0$
V	força cortante

Letras Romanas Minúsculas

$\underline{k}$	matriz de rigidez secante
$\underline{k}_g$	matriz de rigidez geométrica
$\bar{\underline{k}}_g$	parte intrínseca de $\underline{k}_g$
$\underline{k}_0$	matriz de rigidez da teoria de primeira ordem
$\underline{k}_0^a$ e $\underline{k}_0^f$	parcelas de $\underline{k}_0$
$\Delta\underline{k}_0$	correção de $\underline{k}_0$
$\underline{k}_T$	matriz de rigidez tangente
$\underline{m}$	matriz coluna
p	carga transversal
$\underline{q}$	vetor dos parâmetros nodais

q_1 a q_6	elementos de $\underline{q}$
u e v	deslocamentos dos pontos do eixo da barra

Letras Gregas Minúsculas

ε	deformação dos pontos do eixo da barra
ϕ	função de ponderação
$\underline{\phi}$	matriz coluna
ϕ_2, ϕ_3, ϕ_5, ϕ_6	elementos de $\underline{\phi}$

ÍNDICE

pág.

1. INTRODUÇÃO 1

2. ESTADO PLANO DE TENSÃO 3

2.1. Equações Diferenciais de Navier 3

2.1.1. Hipóteses 3
2.1.2. Equações Constitutivas 3
2.1.3. Equações de Compatibilidade 4
2.1.4. Equações Diferenciais de Equilíbrio 6
2.1.5. Equações de Navier 7
2.1.6. Condições de Contorno das Equações de Navier 8

2.2. Método dos Resíduos Ponderados 10

2.2.1. Introdução 10
2.2.2. Formulação Integral 10
2.2.3. Significado da Expressão "Resíduos Ponderados" 12
2.2.4. Introdução das Condições de Contorno Estáticas 12
2.2.5. Equações Integrais de Equilíbrio 13
2.2.6. O Teorema dos Trabalhos Virtuais 14
2.2.7. Introdução das Equações Constitutivas e de Compatibilidade 15
2.2.8. Introdução das Condições de Contorno Geométricas 16
2.2.9. Hipótese de Galerkin 16

2.3. Método dos Elementos Finitos 17

2.3.1. Dificuldades na Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados 17
2.3.2. Características do Método dos Elementos Finitos 18
2.3.3. Elemento Triangular de Chapa 20
2.3.4. Formulação Matricial 22
2.3.5. Critérios de Convergência 26
2.3.6. Interpretação Física dos Critérios de Convergência 27

3. TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DAS PLACAS 29

3.1. Equação Diferencial de Lagrange 29

3.1.1. Hipóteses 29
3.1.2. Deslocamentos 30
3.1.3. Equações de Compatibilidade 32
3.1.4. Equações Constitutivas 32
3.1.5. Momentos Fletores e de Torção 33
3.1.6. Equações Diferenciais de Equilíbrio 35
3.1.7. Equação de Lagrange 37
3.1.8. Condições de Contorno para Placas Retangulares 38
3.1.9. Condições de Contorno para Placas de Formato Qualquer 42

pág.

3.2. Método dos Resíduos Ponderados 47

3.2.1. Introdução 47
3.2.2. Transformação da Equação de Equilíbrio numa Equação Integral 47
3.2.3. A Expressão "Resíduos Ponderados" 48
3.2.4. Introdução das Condições de Contorno Naturais 49
3.2.5. Equação Integral de Equilíbrio 52
3.2.6. O Teorema dos Trabalhos Virtuais 53
3.2.7. Introdução das Equações Constitutivas e de Compatibilidade 53
3.2.8. Introdução das Condições de Contorno Geométricas 54
3.2.9. Hipótese de Galerkin 55

3.3. Método dos Elementos Finitos 56

3.3.1. Introdução 56
3.3.2. Elemento Triangular de Placa 57
3.3.3. Formulação Matricial 62
3.3.4. Condição de Contorno Mista (Apoio Simples) 68
3.3.5. Critérios de Convergência 69

4. TEORIA DE SEGUNDA ORDEM DAS PLACAS 74

4.1. Equacionamento Diferencial 74

4.1.1. Premissas Básicas 74
4.1.2. Equilíbrio no Plano 76
4.1.3. Equilíbrio Transversal 77
4.1.4. Acoplamento dos Efeitos de Membrana e de Flexão 80
4.1.5. Um Problema Particular: o da Flambagem 84
4.1.6. A Membrana Infinitamente Flexível (Rede) 85

4.2. Método dos Elementos Finitos 87

4.2.1. Introdução 87
4.2.2. O Efeito de Membrana 87
4.2.3. Flexão. Matriz de Rigidez Geométrica 92
4.2.4. Acoplamento dos Efeitos de Membrana e de Flexão 96
4.2.5. Flambagem 98
4.2.6. Matriz de Rigidez Tangente 100
4.2.7. O Problema da Membrana (Rede) 115
4.2.8. Uma Observação de Ordem Prática 116
4.2.9. Uma Notável Simplificação 119

5. ANÁLISE MATRICIAL DE SEGUNDA ORDEM (ESTRUTURAS DE BARRAS) 122

5.1. Introdução 122

5.2. Equilíbrio Transversal 122

pág.

5.3. Equilíbrio Axial (conforme (22)) 127

5.4. Matriz de Rigidez Secante 129

5.5. Matriz de Rigidez Tangente 130

6. OBSERVAÇÕES FINAIS 134

ANEXO A - INTEGRAÇÃO POR PARTES 140

ANEXO B - COORDENADAS NATURAIS 144

BIBLIOGRAFIA 147

1. INTRODUÇÃO

O presente trabalho consiste no estudo numérico das placas elásticas delgadas, através do Método dos Resíduos Ponderados (na variante de Galerkin), e, também, por intermédio do Método dos Elementos Finitos, cuja formulação é análoga à do Método dos Resíduos Ponderados. A única diferença reside na escolha das funções de ponderação, que no Método dos Elementos Finitos passam a ser as funções de forma, ou de interpolação.

O estudo foi dividido em quatro compartimentos:

a) Inicialmente, o estado plano de tensão (estudo das chapas) é abordado, dentro das hipóteses da teoria de primeira ordem. Como se sabe, o comportamento estrutural das chapas é comandado pelas equações de Navier.

b) Em seguida, a teoria de primeira ordem das placas é desenvolvida. Corresponde isso ao problema clássico das placas, governado pela equação de Lagrange.

c) Logo após, uma teoria simplificada de segunda ordem das placas entrará em cena, quando se mostrará a interação que existe entre os efeitos de membrana e os de flexão. Serão deduzidas as matrizes de rigidez geométrica, de rigidez secante e de rigidez tangente. A natureza do estudo a ser feito permitirá o esclarecimento da questão da flambagem de chapas. O problema da membrana flexível (rede) vai ser examinado como um caso particular dentro da teoria de segunda ordem das placas, com importantes simplificações. Finalmente, será proposta uma conduta notavelmente simplificada, que facilitará sobremaneira a construção da matriz de rigidez tangente.

d) Por último, abordar-se-á a construção das matrizes de rigidez geométrica, de rigidez secante e de rigidez tangente de uma barra de pórtico plano, em relação ao sistema local. A razão

para isso é a de enfatizar a analogia existente entre as formulações correspondentes às teorias de segunda ordem das placas e das estruturas reticuladas, conforme estabelecida esta última em (22).

Em todo o trabalho adotar-se-á, sistematicamente, o Processo dos Deslocamentos, e o esquema básico de apresentação será sempre o mesmo, a saber: numa primeira fase, será estabelecido o equacionamento diferencial do problema; a seguir, a resolução numérica das equações diferenciais obtidas, através de uma formulação integral, quando se introduz o Método dos Resíduos Ponderados. Para finalizar, serão esclarecidas as características essenciais do Método dos Elementos Finitos.

Adotar o Método dos Resíduos Ponderados como base para a introdução do Método dos Elementos Finitos tem a vantagem de permitir o ataque direto das equações diferenciais regentes do fenômeno, quer existam ou não princípios variacionais ligados ao problema. Trata-se, portanto, de um procedimento de largo espectro, e os conceitos a serem elucidados têm aplicação praticamente ilimitada, seja o problema linear ou não-linear.

Serão cuidados, no desenrolar do programa, os aspectos conceituais e didáticos, de modo a torná-lo francamente acessível.

A propósito da importância do conceito, menciona-se Manuel Garcia Morente ("Lições Preliminares de Filosofia"):

"Para Sócrates, o interesse fundamental da Filosofia era a Moral: chegar a ter das virtudes e da conduta do Homem conceitos tão puros e tão perfeitos que a Moral pudesse ser aprendida e ensinada como se aprende e ensina a Matemática."

2. ESTADO PLANO DE TENSÃO

2.1. Equações Diferenciais de Navier

2.1.1. Hipóteses

Em primeiro lugar, para que se preserve a validade da Lei de Hooke, as deformações (lineares ε, e angulares γ) do material que constitui a chapa não devem ser superiores a poucos milésimos. Assim, a ordem de grandeza das deformações será de 10^{-3}.

Por outro lado, em se tratando de teoria de primeira ordem, sabe-se que as rotações, ou deslocamentos angulares, devem ser da mesma ordem de grandeza de ε ou γ. Para uma rotação α que tenha a ordem de grandeza de 10^{-3} será sempre possível escrever:

$$\cos \alpha = 1 \tag{1}$$

$$\operatorname{sen} \alpha = \operatorname{tg} \alpha = \alpha \qquad \text{(com } \alpha \text{ em radianos)} \tag{2}$$

2.1.2. Equações Constitutivas

Para uma chapa construída de material homogêneo e isótropo, as equações constitutivas se escrevem como (Fig. 1):

$$\varepsilon_x = \frac{1}{h\,E}\,(N_x - \nu\, N_y) \tag{3}$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{h\,E}\,(N_y - \nu\, N_x) \tag{4}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{2(1+\nu)}{h\;\;E}\,N_{xy} \tag{5}$$

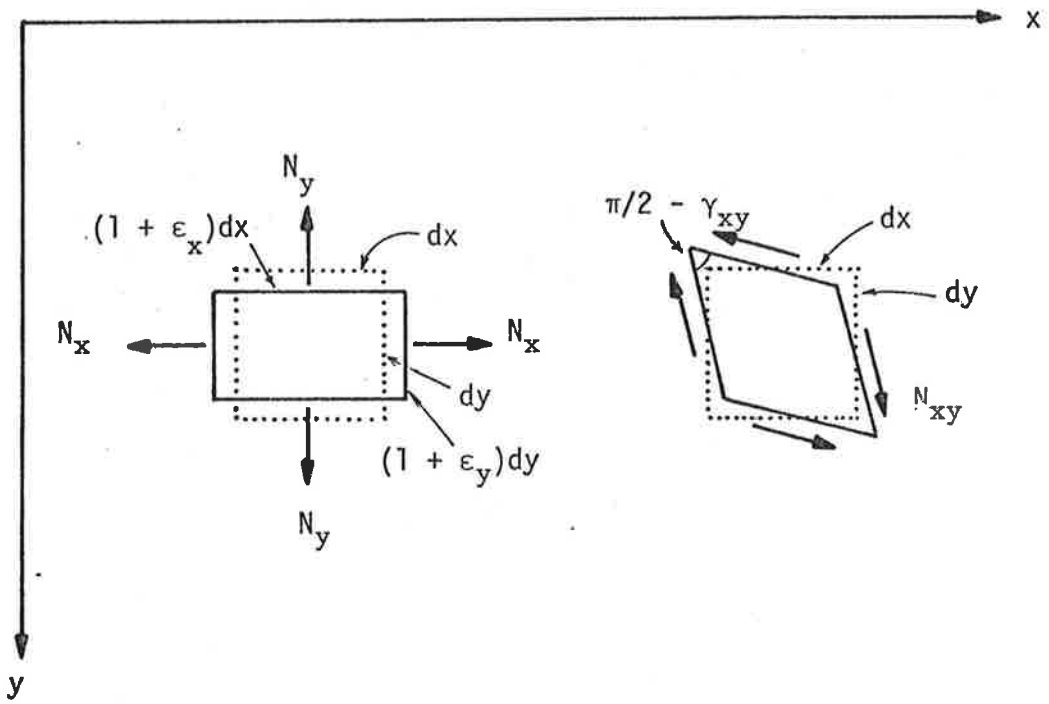


Figura 1

As equações anteriores expressam a Lei de Hooke para o material considerado. Ao se escreverem as forças de membrana em função das deformações, obtêm-se:

$$N_x = \frac{h\,E}{1 - \nu^2}\,(\varepsilon_x + \nu\,\varepsilon_y) \tag{6}$$

$$N_y = \frac{h\,E}{1 - \nu^2}\,(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x) \tag{7}$$

$$N_{xy} = \frac{h\,E}{2(1 + \nu)}\,\gamma_{xy} \tag{8}$$

2.1.3. Equações de Compatibilidade

As relações deformação-deslocamento, a seguir escritas, representam as equações de compatibilidade (Fig. 2):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{9}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} \tag{10}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \tag{11}$$

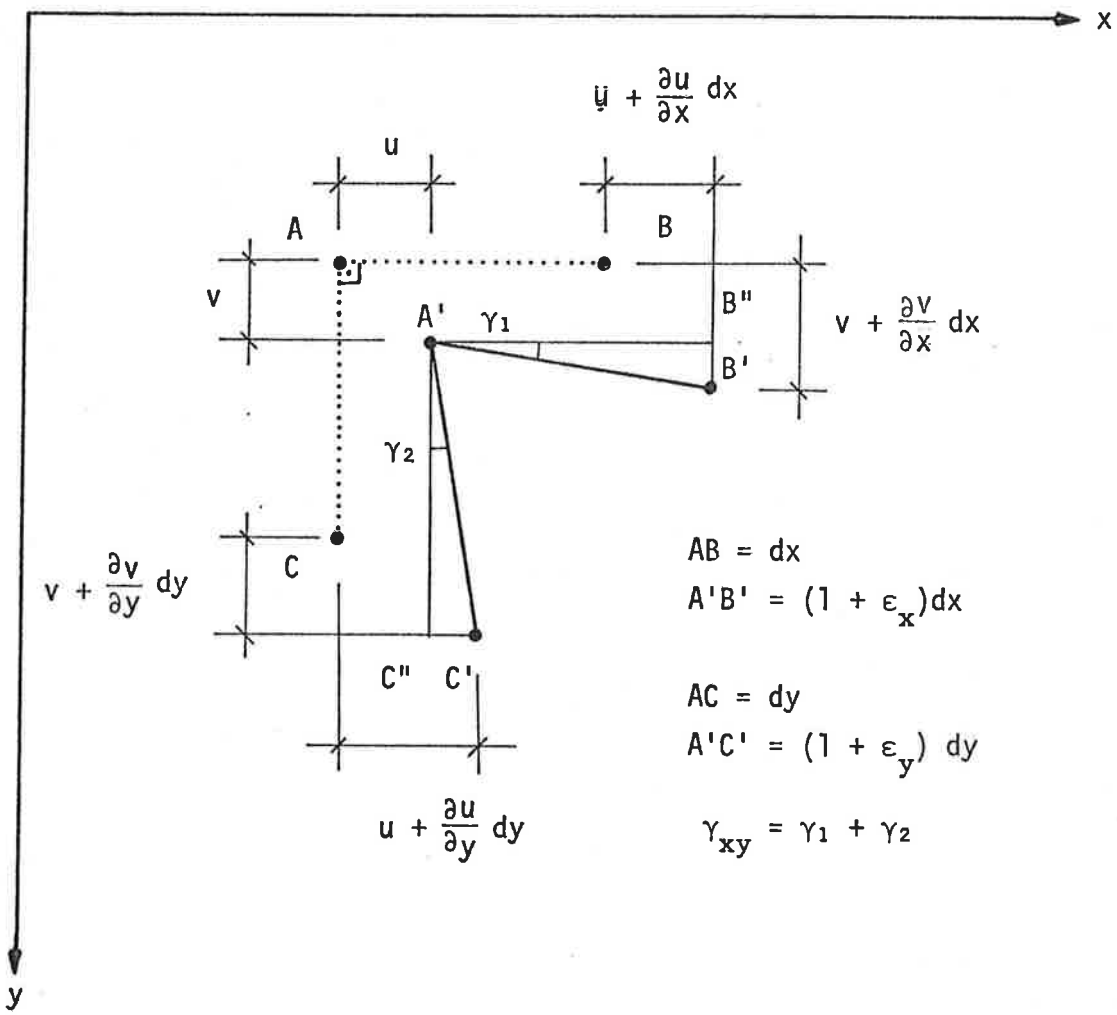


Figura 2

Observe-se que, na dedução das equações de compatibilidade, estão embutidas as hipóteses introduzidas no item 2.1.1.

Com efeito, γ_1 e γ_2 representam rotações para as quais pode-se escrever, segundo (1):

$$\cos \gamma_1 = \cos \gamma_2 = 1$$

logo

$$\begin{cases} A'\,B'' = A'\,B' = (1 + \varepsilon_x)\,dx \\ A'\,C'' = A'\,C' = (1 + \varepsilon_y)\,dy \end{cases}$$

de onde se tiram:

$$\varepsilon_x = \frac{A'\,B' - A\,B}{A\,B} = \frac{A'\,B'' - A\,B}{A\,B} = \frac{\partial u}{\partial x}$$

$$\varepsilon_y = \frac{A'\,C' - A\,C}{A\,C} = \frac{A'\,C'' - A\,C}{A\,C} = \frac{\partial v}{\partial y}$$

Por outro lado, de acordo com (2):

$$\gamma_1 = \operatorname{tg} \gamma_1 = \frac{B'\,B''}{A'\,B''} = \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\gamma_2 = \operatorname{tg} \gamma_2 = \frac{C'\,C''}{A'\,C''} = \frac{\partial u}{\partial y}$$

de onde

$$\gamma_{xy} = \gamma_1 + \gamma_2 = \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

2.1.4. Equações Diferenciais de Equilíbrio

São as seguintes (Fig. 3):

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + h\,X = 0 \qquad (12)$$

$$\frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial N_y}{\partial y} + h\,Y = 0 \qquad (13)$$

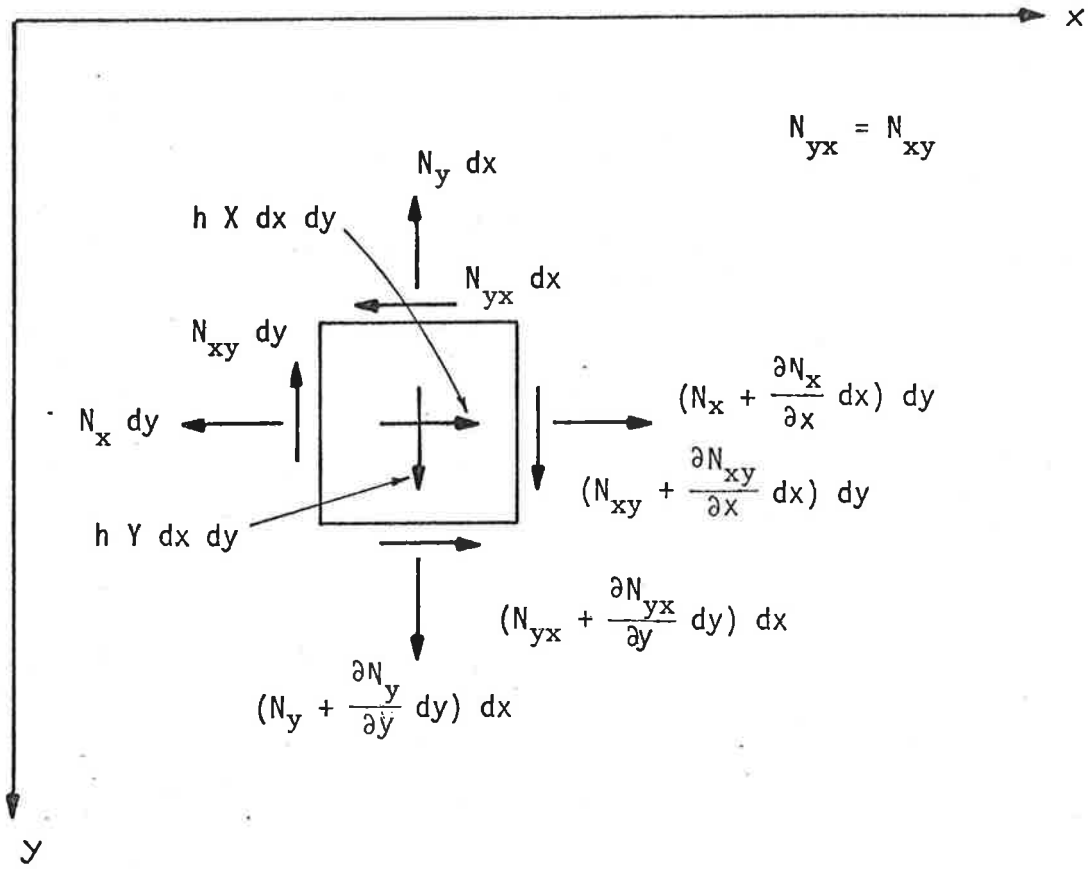


Figura 3

As equações (12) e (13) representam o equilíbrio do elemento de chapa nas direções x e y, respectivamente. Elas foram escritas na geometria indeformada do elemento, por se tratar de teoria de primeira ordem.

2.1.5. Equações de Navier

Injetando-se as equações de compatibilidade (9), (10) e (11) nas expressões (6), (7) e (8), obtêm-se as forças de membrana em função dos deslocamentos:

$$N_x = \frac{h\,E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \tag{14}$$

$$N_y = \frac{h\,E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) \tag{15}$$

$$N_{xy} = \frac{h\,E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \tag{16}$$

Introduzindo-se estas últimas nas equações de equilíbrio (12) e (13), chega-se às equações diferenciais de Navier:

$$\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x\,\partial y}\right) + X = 0 \tag{17}$$

$$\frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) + \frac{E}{2(1 + \nu)} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}\right) + Y = 0 \tag{18}$$

2.1.6. Condições de Contorno das Equações de Navier

Considere-se o contorno da chapa dividido em duas partes, C_d e C_σ, segundo a Fig. 4:

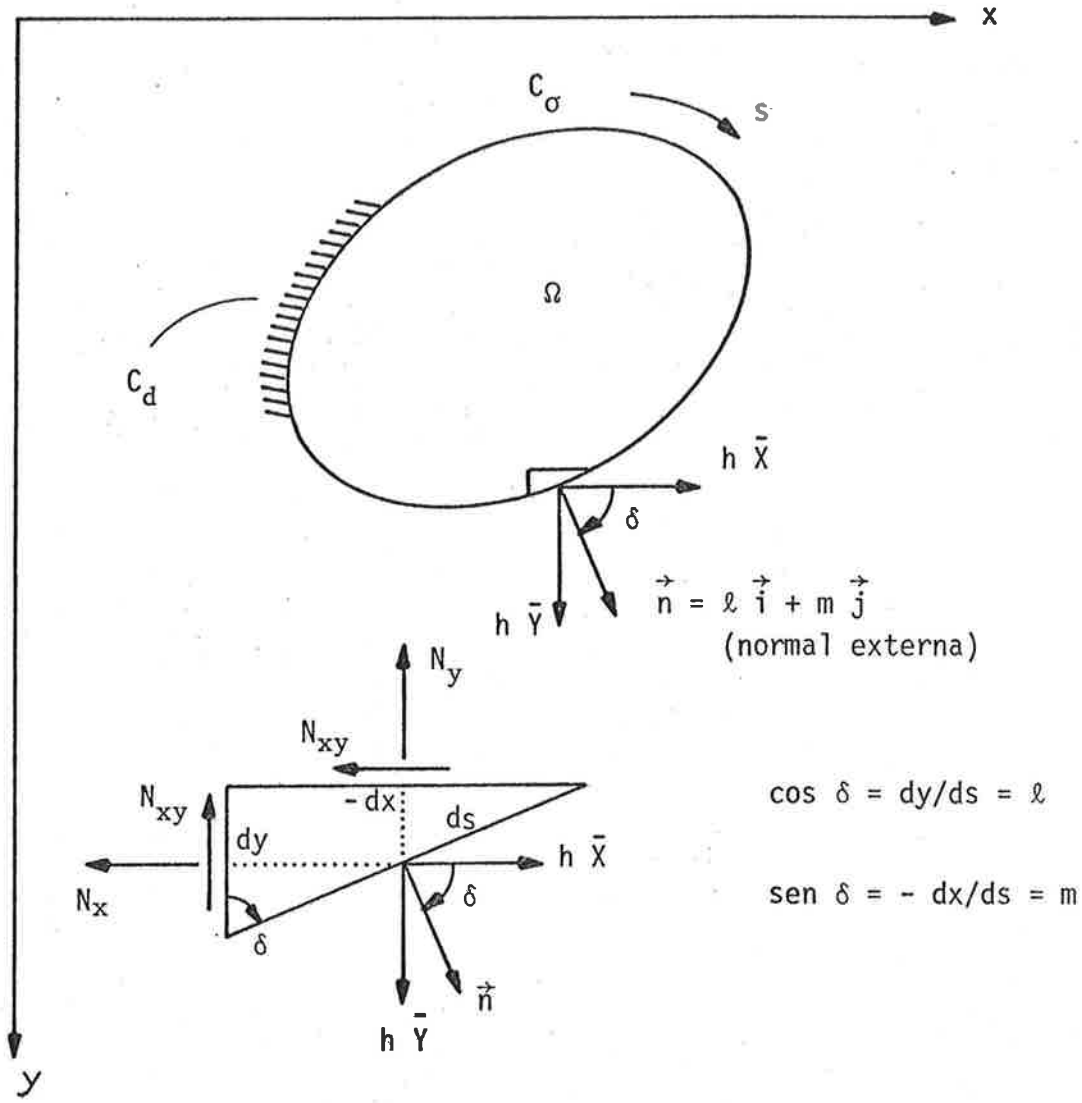


Figura 4

a) C_d é a região de apoio da chapa. Em C_d os deslocamentos são conhecidos:

$$u = \bar{u}(x, y) \tag{19}$$

$$v = \bar{v}(x, y) \tag{20}$$

Estas são as condições de contorno *essenciais* (ou *geométricas*).

b) Em C_σ as forças de membrana são conhecidas e equilibram o carregamento externo aplicado. Do equilíbrio do prisma elementar da Fig. 4, vêm:

$$\ell N_x + m N_{xy} = h \bar{X} \tag{21}$$

$$m N_y + \ell N_{xy} = h \bar{Y} \tag{22}$$

Estas são as condições de contorno *naturais* (ou *estáticas*).

Observação: É possível colocarem-se as condições de contorno naturais em função dos deslocamentos, através do uso das expressões (14), (15) e (16).

2.2. Método dos Resíduos Ponderados

2.2.1. Introdução

Trata-se de resolver numericamente o sistema de equações diferenciais (17) e (18) nas incógnitas u(x, y) e v(x, y), com as condições de contorno essenciais (19) e (20) e naturais (21) e (22).

Para isso será usado o Método dos Resíduos Ponderados, conforme a sugestão de Galerkin, e no próximo capítulo mostrar-se-á que o Método dos Elementos Finitos nasce da mesma formulação.

2.2.2. Formulação Integral

Inicialmente, considere-se, das equações de equilíbrio, apenas a (12), abaixo reescrita:

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + h X = 0$$

Trata-se de uma equação diferencial, referida a um elemento infinitesimal

de área. É necessário transformá-la numa equação integral que, além de incorporar a condição de contorno natural (21), traduza o mesmo fenômeno representado pela equação diferencial, mas referido agora a toda a chapa, e não apenas a um elemento de área.

Para isso admita-se a existência de uma função arbitrária $\chi(x, y)$, contínua e derivável em Ω, e que satisfaça em C_d a condição de contorno essencial (19), tornada homogênea:

$$\chi = 0 \quad \text{em} \quad C_d$$

Multipliquem-se ambos os membros de (12) pela função χ. Em seguida, por integração na chapa, obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + hX\right) dx\, dy = 0 \tag{23}$$

É lícito afirmar-se que, se a equação integral (23) se cumpre para qualquer χ, então a equação diferencial (12) será cumprida em qualquer ponto de Ω (a recíproca é imediata). Demonstra-se este fato ao se admitir que seja

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + hX \neq 0$$

em algum ponto de Ω. Como a função acima é contínua, existirá uma porção finita da chapa em torno deste ponto onde a função será diferente de zero. Assim sendo, existirá certamente alguma função χ que faça

$$\iint_{\Omega} \chi \left(\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + hX\right) dx\, dy \neq 0$$

Logo, deve-se ter

$$\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + hX = 0$$

em todos os pontos da chapa.

2.2.3. Significado da Expressão "Resíduos Ponderados"

Antes de dar prosseguimento, suponha-se que seja introduzida na equação (12) uma solução aproximada

$$u = \hat{u}(x, y)$$

$$v = \hat{v}(x, y)$$

(não se perca de vista o fato de que as incógnitas básicas são os campos de deslocamentos u e v). Ter-se-ão:

$$N_x = \hat{N}_x$$

$$N_{xy} = \hat{N}_{xy}$$

(recorde-se que as expressões (14), (15) e (16) fornecem as forças de membrana em função dos deslocamentos). Evidentemente, resultará:

$$\frac{\partial \hat{N}_x}{\partial x} + \frac{\partial \hat{N}_{xy}}{\partial y} + hX \neq 0$$

e representa o erro, ou resíduo, obtido ao se fazer a substituição da solução aproximada. Portanto a equação (23), com $N_x = \hat{N}_x$ e $N_{xy} = \hat{N}_{xy}$, será a integral de tais resíduos (ponderados pela função χ), forçada a ser igual a zero. Esta é a origem do nome "Método dos Resíduos Ponderados".

2.2.4. Introdução das Condições de Contorno Estáticas

O próximo passo consiste na introdução da condição de contorno estática (ou natural) (21) na equação (23).

Integrando-se por partes o primeiro membro de (23), vem (ver Anexo A, fórmulas A-4):

$$\int\int_{\Omega} \chi \frac{\partial N_x}{\partial x} dx\, dy = - \int\int_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial x} N_x\, dx\, dy + \int_{C_\sigma} \chi\, N_x\, \ell\, ds$$

$$\iint_{\Omega} \chi \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} dx\, dy = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \chi}{\partial y} N_{xy}\, dx\, dy + \int_{C_\sigma} \chi\, N_{xy}\, m\, ds$$

A rigor, as integrais acima, de contorno, deveriam ser desenvolvidas ao longo de toda a fronteira da chapa, mas como $\chi = 0$ em C_d, elas serão calculadas apenas em C_σ.

Substituindo os resultados acima em (23), e considerando (21), chega-se a:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial x} N_x + \frac{\partial \chi}{\partial y} N_{xy}\right) dx\, dy = h \iint_{\Omega} \chi\, X\, dx\, dy + h \int_{C_\sigma} \chi\, \bar{X}\, ds \qquad (24)$$

Conseguiu-se, assim, introduzir naturalmente, na formulação do problema, a condição de contorno (21) (e que por causa disso se chama natural).

A expressão (24) é conhecida como a "forma fraca" de (23), por ser mais permissiva, isto é, ela admite uma menor ordem de continuidade na determinação das funções N_x e N_{xy}, embora exija, por outro lado, uma maior ordem de continuidade ao se definirem as funções χ.

2.2.5. Equações Integrais de Equilíbrio

Procedendo-se de maneira análoga com a equação (13) de equilíbrio, e a condição de contorno natural (22), a seguinte equação é deduzida:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial \chi}{\partial y} N_y + \frac{\partial \chi}{\partial x} N_{xy}\right) dx\, dy = h \iint_{\Omega} \chi\, Y\, dx\, dy + h \int_{C_\sigma} \chi\, \bar{Y}\, ds \qquad (25)$$

As equações (24) e (25) são conhecidas como "equações integrais de equilíbrio", pois traduzem este último, tanto no interior do domínio Ω, como no seu contorno C_σ, desde que sejam verificadas para qualquer função χ, satisfazendo a condição imposta no início do item 2.2.2 ($\chi = 0$ em C_d).

2.2.6. O Teorema dos Trabalhos Virtuais

Uma observação à parte merece ser feita. Inicialmente façam-se, nas equações (24) e (25), respectivamente :

$$\chi = \chi^*$$

$$\chi = \chi^{**}$$

Em seguida, somando-se membro a membro essas mesmas equações, e considerando-se que $N_x = h\,\sigma_x$, $N_y = h\,\sigma_y$ e $N_{xy} = h\,\tau_{xy}$, tem-se:

$$h \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \chi^*}{\partial x}\,\sigma_x + \frac{\partial \chi^{**}}{\partial y}\,\sigma_y + \left(\frac{\partial \chi^*}{\partial y} + \frac{\partial \chi^{**}}{\partial x}\right)\tau_{xy} \right] dx\,dy =$$

$$= h \iint_{\Omega} (\chi^*\,X + \chi^{**}\,Y)\,dx\,dy + h \int_{C_\sigma} (\chi^*\,\bar{X} + \chi^{**}\,\bar{Y})\,ds \qquad (26)$$

A fórmula (26) expressa o Teorema dos Trabalhos Virtuais, desde que se considerem χ^* e χ^{**} como deslocamentos virtuais nas direções x e y, respectivamente. Assim, $(\partial\chi^*/\partial x)$ e $(\partial\chi^{**}/\partial y)$ serão deformações lineares virtuais nas direções x e y, respectivamente. Por outro lado, $(\partial\chi^*/\partial y) + (\partial\chi^{**}/\partial x)$ será a deformação angular virtual segundo os eixos x e y.

Observe-se que χ^* e χ^{**} satisfazem os requisitos de um campo de deslocamentos virtuais, isto é: no trecho C_d, onde se verificam as condições de contorno geométricas (19) e (20), têm-se:

$$\chi^* = \chi^{**} = 0$$

Sendo assim, o primeiro membro de (26) representa o trabalho virtual dos esforços internos, enquanto que o segundo membro, o trabalho virtual dos esforços externos.

O Teorema dos Trabalhos Virtuais afirma que, havendo equilíbrio, isto é, estando satisfeitas as correspondentes equações diferenciais (de Navier) e as condições estáticas de contorno, verifica-se a igualdade:

$$\tau_{int} = \tau_{ext}$$

para quaisquer campos de deslocamentos virtuais χ^* e χ^{**}. É o que exprime a equação (26). Note-se também que tal expressão é válida, independentemente das propriedades reológicas do material constituinte da chapa.

2.2.7. Introdução das Equações Constitutivas e de Compatibilidade

Prosseguindo, introduzam-se as expressões (14), (15) e (16) nas equações integrais (24) e (25). Obtém-se o seguinte sistema:

$$\frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[\iint_\Omega \left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint_\Omega \left(\nu\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy\right] = h\iint_\Omega \chi\,X\,dx\,dy + h\int_{C_\sigma} \chi\,\bar{X}\,ds \qquad (27)$$

$$\frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[\iint_\Omega \left(\nu\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial y}\right) dx\,dy + \iint_\Omega \left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial v}{\partial y} + \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx\,dy\right] = h\iint_\Omega \chi\,Y\,dx\,dy + h\int_{C_\sigma} \chi\,\bar{Y}\,ds \qquad (28)$$

As equações integrais acima trazem dentro de si:

- informações completas sobre o equilíbrio (como já foi visto);
- informações parciais sobre a compatibilidade (as deformações são obtidas derivando-se os deslocamentos);
- informações completas sobre as propriedades reológicas do material (através das equações constitutivas).

Falta apenas incluir, na compatibilidade, as condições de contorno geométricas.

2.2.8. Introdução das Condições de Contorno Geométricas

Admita-se a seguinte solução aproximada (neste ponto introduz-se a aproximação do método):

$$u = \chi_u + \sum_{j=1}^{n} a_j \chi_j$$
$$v = \chi_v + \sum_{j=1}^{n} b_j \chi_j \qquad (29)$$

onde as funções χ_u e χ_v são funções que satisfazem, em C_d, as condições de contorno essenciais, ou seja:

$$\left.\begin{aligned} \chi_u &= \bar{u}(x, y) \\ \chi_v &= \bar{v}(x, y) \end{aligned}\right. \quad \text{em } C_d$$

que são chamadas de essenciais pelo fato de que devem ser necessariamente levadas em conta, na escolha da função de ponderação χ, sob a forma:

$$\chi = 0 \quad \text{em } C_d$$

As demais funções χ_j são funções que se anulam em C_d, e são conhecidas como funções coordenadas.

Tanto χ_j quanto χ_u e χ_v devem ser contínuas e deriváveis em Ω.

2.2.9. Hipótese de Galerkin

Galerkin propôs que as funções de ponderação $\chi(x, y)$ fossem as mesmas que as usadas para as funções coordenadas $\chi_j(x, y)$.

Sendo assim, introduza-se a solução aproximada (29) nas equações integrais (27) e (28) e faça-se, nestas últimas, sucessivamente, χ igual a cada uma das n funções χ_j; o resultado será um sistema de 2n equações algébricas lineares que possibilitará a determinação das 2n incógnitas do problema, que são os parâmetros a_j e b_j.

Em outras palavras: das infinitas incógnitas do problema original, ou seja, as duas componentes u e v do deslocamento de cada ponto da chapa, passa-se agora para um número finito de incógnitas, quais sejam os parâmetros a_j e b_j.

De fato, conhecidos estes parâmetros, o campo de deslocamentos dos pontos da chapa ficará determinado, embora aproximadamente (pois trata-se de um método numérico), pelas expressões (29).

A adoção da solução aproximada (29) corresponde, portanto, a uma discretização do problema original.

2.3. Método dos Elementos Finitos

2.3.1. Dificuldades na Aplicação do Método dos Resíduos Ponderados

O Método dos Elementos Finitos segue exatamente a mesma formulação do Método dos Resíduos Ponderados. A única diferença reside na escolha das funções χ_u, χ_v e χ_j .

Com efeito, a aplicação prática do Método dos Resíduos Ponderados esbarra nas seguintes dificuldades:

a) As funções coordenadas χ_j são definidas em todo o domínio da chapa. Portanto, no sistema de equações obtido, a matriz dos coeficientes não terá a forma de banda, ou seja, será uma matriz repleta de elementos não-nulos. Este fato dificulta a resolução do sistema, e será mais bem compreendido mais adiante, quando for enfocada a formulação matricial do método.

b) Também pelo fato de as funções χ_j serem definidas globalmente, a utilização prática do método fica restrita a chapas com formas geometricamente simples.

c) Mesmo nas chapas de formato simples, as funções χ_u e χ_v podem ficar difíceis de ser construídas, se as condições de contorno essenciais são complicadas.

d) Os parâmetros a_j e b_j da solução aproximada (29) não têm nenhuma interpretação física. Embora esta não seja uma dificuldade matemática, merece ser levada em conta.

Pois bem, no Método dos Elementos Finitos as funções χ_u, χ_v e χ_j serão escolhidas de modo a sobrepujar as quatro dificuldades enumeradas acima.

2.3.2. Características do Método dos Elementos Finitos

Inicialmente subdivide-se a chapa em pequenas regiões poligonais (elementos finitos), separadas entre si pelos seus lados. Os vértices dos elementos finitos serão os pontos nodais P_j, numerados de 1 a n (os pontos nodais pertencentes a C_d não são numerados, pois neles os deslocamentos já são conhecidos. Mais adiante será esclarecido este detalhe).

A função χ_j será unitária em P_j e nula nos demais pontos nodais. Além disso, χ_j será nula em toda a chapa, exceto nos elementos finitos que rodeiam P_j.

Para exemplificar, considere-se o caso particular de elementos triangulares. Aqui a função χ_j pode ser visualizada como na Figura abaixo.

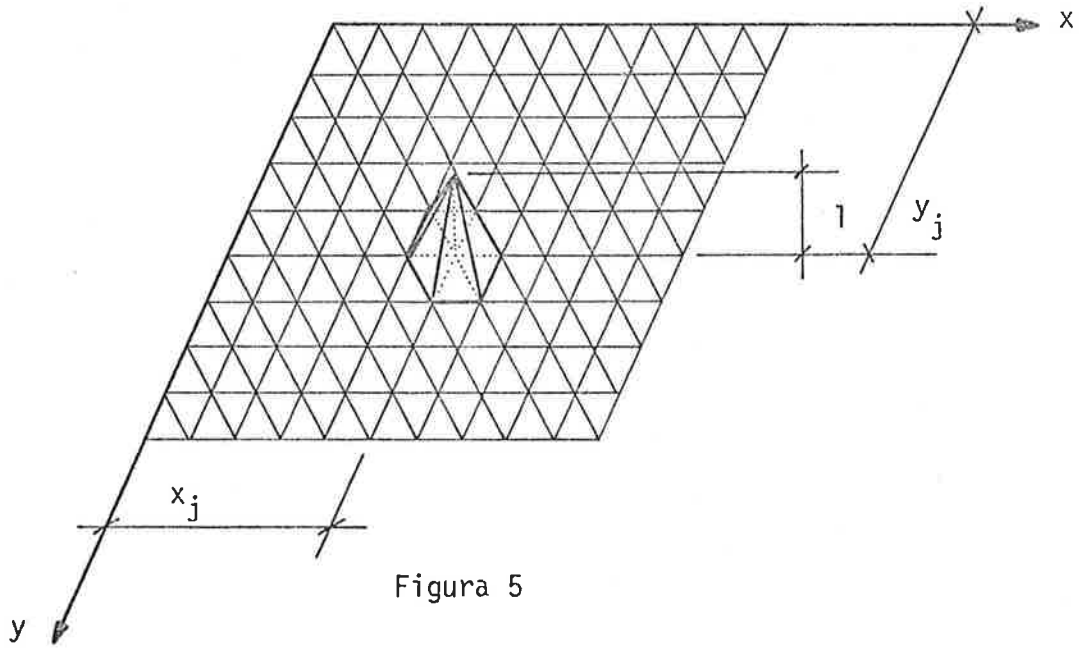


Figura 5

Esta Figura evidencia o caráter essencialmente localizado das funções χ_j no Método dos Elementos Finitos.

As funções χ_u e χ_v são diferentes de zero apenas nos elementos finitos contíguos à fronteira C_d. Dentro destes elementos, χ_u e χ_v variam linearmente com as coordenadas (no caso do elemento triangular a ser visto), de modo a satisfazer, nos vértices pertencentes a C_d, as condições de contorno essenciais (19) e (20). Nestes mesmos elementos, nos vértices internos, não pertencentes a C_d, cumprir-se-á forçosamente $\chi_u = \chi_v = 0$.

Observação: Quando as condições de contorno essenciais forem homogêneas, serão, evidentemente, $\chi_u = \chi_v = 0$ em todos os elementos.

O fato de as funções χ_j serem localizadas faz com que a matriz dos coeficientes do sistema de equações seja uma matriz de banda, isto é, com elementos não-nulos apenas nas proximidades da diagonal principal, como será visto mais tarde. Isto viabiliza a resolução automática do sistema, mesmo com milhares de incógnitas, com drástica redução no tempo de processamento e enorme economia de memória. De fato, na resolução do sistema de equações é usado o algoritmo de Gauss da triangularização com retro-substituição em seguida, e como a matriz de banda já está parcialmente triangularizada, o esforço computacional será muito menor.

A limitação a formas geométricas relativamente simples fica restrita agora ao elemento finito em si, e não mais à chapa em estudo. Assim, com elementos finitos muito simples, é possível obterem-se as configurações de chapas as mais complicadas e realistas, mediante uma montagem adequada.

Agora, como se pode depreender facilmente, as funções χ_u e χ_v ficaram muito fáceis de ser construídas, sejam quais forem as condições de contorno essenciais, pois estas últimas serão respeitadas, em C_d, apenas nos pontos nodais.

Por último, sendo $\chi_j = 1$ em P_j e $\chi_j = 0$ nos outros pontos nodais, os parâmetros incógnitos a_j e b_j assumem agora uma interpretação física a mais simples e interessante possível: eles passam a ser os próprios

deslocamentos dos pontos nodais, ou seja, a solução aproximada (29) fica:

$$u = \chi_u + \sum_{j=1}^{n} u_j \chi_j$$

$$v = \chi_v + \sum_{j=1}^{n} v_j \chi_j$$

ou, em notação indicial:

$$u = \chi_u + u_j \chi_j$$

$$v = \chi_v + v_j \chi_j \qquad (30)$$

É por esta razão que os pontos nodais pertencentes a C_d não são numerados. É que neles, como já se sabe, os deslocamentos são conhecidos.

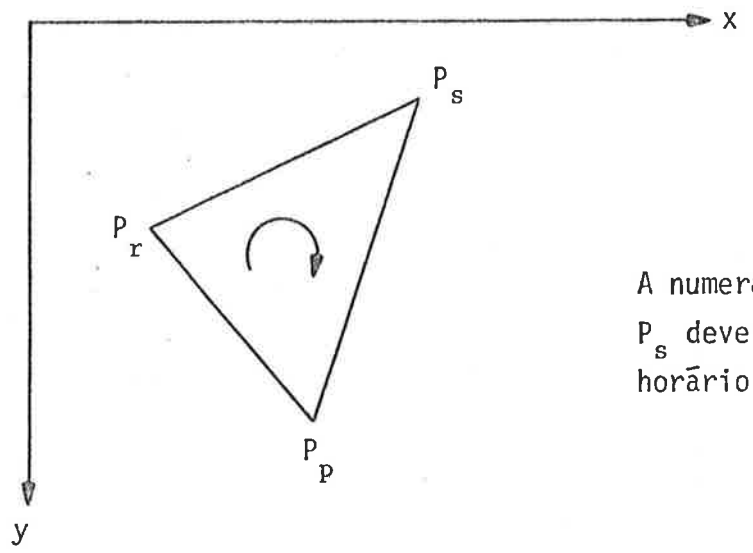
A interpretação física dos parâmetros incógnitos como deslocamentos nodais permite que se trate, com a maior facilidade, um eventual trecho da fronteira onde reinem condições de contorno de natureza mista, ou seja, uma condição essencial e outra natural. O assunto não será tratado aqui, pois no Capítulo seguinte, ao se estudarem as placas, ele voltará à cena.

Sem dúvida, deve-se à escolha mencionada das funções χ_j a grande versatilidade e popularidade do Método dos Elementos Finitos.

2.3.3. Elemento Triangular de Chapa

No Método dos Elementos Finitos, as funções χ_j são conhecidas como funções de interpolação, ou funções de forma (na língua inglesa, "shape functions").

Em elasticidade plana, o elemento finito mais simples que se conhece é o triângulo:



A numeração dos nós P_p, P_r e P_s deve ser feita no sentido horário.

Figura 6

Tome-se, por exemplo, a função de forma $\chi_p(x, y)$. Para ela, no elemento $P_p\ P_r\ P_s$:

$$\chi_p = 1 \quad \text{em } P_p$$
$$\chi_p = 0 \quad \text{em } P_r \text{ e } P_s$$

Por outro lado, χ_p deve variar linearmente com as coordenadas, no interior do elemento. Isto acontece porque são três as condições fixadas para χ_p (nos vértices do elemento) e três são os termos de um polinômio de primeiro grau em x e y.

Assim, percebe-se claramente que, no caso do triângulo com deslocamentos lineares, as funções de forma χ_p, χ_r e χ_s confundem-se com as coordenadas naturais L_p, L_r e L_s, respectivamente, apresentadas no Anexo B.

Assim, tem-se:

$$\begin{cases} \chi_p = L_p \\ \chi_r = L_r \\ \chi_s = L_s \end{cases} \tag{31}$$

No Anexo B, encontram-se deduzidas as expressões que fornecem L_p, L_r e L_s em função de x e y.

O elemento apresentado é conhecido pela sigla CST, que na língua inglesa significa "constant strain triangle", ou seja, triângulo de deformação constante.

2.3.4. Formulação Matricial

Para as aplicações práticas do Método dos Elementos Finitos, tendo em vista o cálculo automático, é de todo conveniente e mesmo necessário que se dê ao mesmo uma formulação matricial.

Introduza-se a solução aproximada (30) nas equações (27) e (28) e faça-se nestas últimas, sucessivamente, $\chi = \chi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$; será obtido assim um sistema de 2n equações simultâneas e 2n incógnitas, que são os deslocamentos u_j e v_j dos n pontos nodais.

Em seguida, escrever-se-á diretamente o sistema obtido, já na forma matricial:

$$\underline{K}_0^P \, \underline{a}^P = \underline{f}^P \tag{32}$$

onde a matriz $\underline{K}_0^P$ é dada por (a letra p vem da palavra inglesa "plane"):

$$\underline{K}_0^P = \frac{h\,E}{1 - \nu^2} \begin{bmatrix} (\underline{K}_0^P)_{11} & \cdots\cdots & (\underline{K}_0^P)_{1n} \\ \vdots & & \\ (\underline{K}_0^P)_{n1} & \cdots\cdots & (\underline{K}_0^P)_{nn} \end{bmatrix} \tag{33}$$

sendo

$$(\underline{K}_0^P)_{ij} = \begin{bmatrix} (K_0^P)_{ij}^{11} & (K_0^P)_{ij}^{12} \\ & \\ (K_0^P)_{ij}^{21} & (K_0^P)_{ij}^{22} \end{bmatrix} \tag{34}$$

com:

$$
\begin{aligned}
(K_0^P)_{ij}^{11} &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x}\frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \chi_i}{\partial y}\frac{\partial \chi_j}{\partial y}\right) dx\, dy \\
(K_0^P)_{ij}^{12} &= \iint_\Omega \left(\nu\frac{\partial \chi_i}{\partial x}\frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \chi_i}{\partial y}\frac{\partial \chi_j}{\partial x}\right) dx\, dy \\
(K_0^P)_{ij}^{21} &= \iint_\Omega \left(\nu\frac{\partial \chi_i}{\partial y}\frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \chi_i}{\partial x}\frac{\partial \chi_j}{\partial y}\right) dx\, dy \\
(K_0^P)_{ij}^{22} &= \iint_\Omega \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial y}\frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2}\frac{\partial \chi_i}{\partial x}\frac{\partial \chi_j}{\partial x}\right) dx\, dy
\end{aligned}
\tag{35}
$$

Constata-se facilmente que

$$(\underline{K}_0^P)_{ij} = (\underline{K}_0^P)_{ji}^T$$

Para isso, basta comprovar, nas expressões (35), que

$$(K_0^P)_{ij}^{ab} = (K_0^P)_{ji}^{ba}$$

Em outras palavras, a matriz $\underline{K}_0^P$ é simétrica. Este fato é conseqüência de as equações diferenciais de Navier serem auto-adjuntas, e também da adoção da hipótese de Galerkin, e contribui para diminuir enormemente o esforço computacional.

A matriz $\underline{K}_0^P$ é conhecida como *matriz de rigidez* da chapa, da teoria de primeira ordem.

O vetor $\underline{a}^P$ é dado por:

$$\underline{a}^P = \begin{Bmatrix} \underline{a}_1^P \\ \vdots \\ \underline{a}_j^P \\ \vdots \\ \underline{a}_n^P \end{Bmatrix} \tag{36}$$

com

$$\underline{a}_j^p = \begin{Bmatrix} u_j \\ v_j \end{Bmatrix} \tag{37}$$

e consiste no *vetor de parâmetros nodais* do estado plano de tensão.

O vetor $\underline{f}^p$ é o vetcr das *forças nodais equivalentes*, e é dado por:

$$\underline{f}^p = \begin{Bmatrix} \underline{f}_1^p \\ \vdots \\ \underline{f}_i^p \\ \vdots \\ \underline{f}_n^p \end{Bmatrix} \tag{38}$$

com

$$\underline{f}_i^p = \begin{Bmatrix} F_i^x \\ F_i^y \end{Bmatrix} \tag{39}$$

sendo

$$F_i^x = h \int_{C_\sigma} \chi_i \bar{X}\, ds + h \iint_\Omega \chi_i X\, dx\, dy - \frac{h E}{1 - \nu^2} \left\{ \iint_\Omega \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_u}{\partial x} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_u}{\partial y} \right) dx\, dy + \iint_\Omega \left(\nu \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_v}{\partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_v}{\partial x} \right) dx\, dy \right\}$$
$$F_i^y = h \int_{C_\sigma} \chi_i \bar{Y}\, ds + h \iint_\Omega \chi_i Y\, dx\, dy - \frac{h E}{1 - \nu^2} \left\{ \iint_\Omega \left(\nu \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_u}{\partial x} + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_u}{\partial y} \right) dx\, dy + \iint_\Omega \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_v}{\partial y} + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_v}{\partial x} \right) dx\, dy \right\} \tag{40}$$

O vetor $\underline{f}_i^p$ consiste de duas forças concentradas, aplicadas em P_i, nas direções x e y, e que são equivalentes às cargas externas e aos deslocamentos forçados de apoio.

Em resumo, há n equações matriciais, das quais a i-ésima pode ser escrita, sob forma indicial, como:

$$(\underline{K}_0^p)_{ij} \; \underline{a}_j^p = \underline{f}_i^p$$

Cada uma destas n equações matriciais se desdobra em duas equações comuns.

A esta altura, percebe-se claramente que a matriz de rigidez $\underline{K}_0^p$ é de banda.

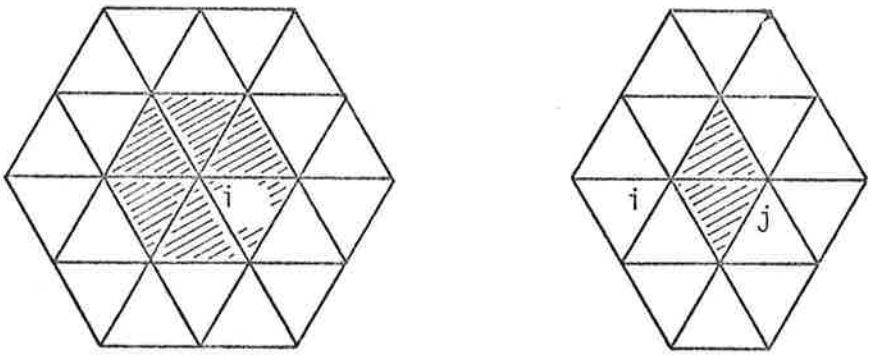
Para isso, basta que se observe que a determinação de uma submatriz genérica $(\underline{K}_0^p)_{ij}$ de $\underline{K}_0^p$ implica no cálculo de integrais do tipo

$$\iint_\Omega \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} \, dx \, dy$$

Quando i = j, a integral acima será diferente de zero apenas nos elementos que tiverem em comum o ponto nodal P_i.

Quando $i \neq j$, a integral será não-nula apenas nos elementos que contiverem simultaneamente os pontos nodais P_i e P_j.

Tal fato pode ser visualizado com muita clareza na Figura abaixo, feita para o caso de elementos triangulares, e onde foram hachurados os elementos nos quais a integral em questão é diferente de zero.



i = j i ≠ j

Figura 7

Portanto aparece um grande número de submatrizes $(\underline{K}_0^p)_{ij}$ nulas fora da diagonal principal de $(\underline{K}_0^p)$.

As submatrizes $(\underline{K}_0^p)_{ij}$ diferentes de zero estarão tanto mais afastadas da diagonal quanto maior for a diferença j - i entre a numeração de dois nós de um mesmo elemento.

Assim sendo, é importante na numeração dos nós que se restrinja o valor desta diferença. Alguns programas fazem isto automaticamente, através de uma renumeração dos nós.

É interessante também que se registre que os elementos da diagonal principal de $(\underline{K}_0^p)$ são sempre positivos (basta que se observem as fórmulas apresentadas para $(K_0^p)_{ij}^{11}$ e $(K_0^p)_{ij}^{22}$, fazendo nelas i = j).
E mais: eles são, de um modo geral, os maiores elementos da matriz de rigidez $(\underline{K}_0^p)$, pois além do fato de seu cálculo envolver apenas parcelas positivas, o número de elementos finitos nos quais a integração deve ser feita é maior quando i = j, como já foi explicado (Fig. 7).

Esta é mais uma característica do Método dos Elementos Finitos que influi na redução do esforço computacional.

De fato, o algoritmo de Gauss de triangularização exige (para diminuir os erros de arredondamento) que se permutem as linhas de $(\underline{K}_0^p)$ de modo a se colocarem na diagonal principal os maiores valores dos coeficientes de rigidez. Pelo que foi visto, dispensam-se estas operações.

2.3.5. Critérios de Convergência

Obviamente, a precisão da solução aproximada depende de quão próximo o campo de deslocamentos obtido está do campo verdadeiro.

Há certas condições que se impõem às funções de forma χ_j, que, uma vez atendidas, asseguram a convergência, ou seja, a tendência à solução exata com a diminuição de tamanho dos elementos finitos.

Em Elasticidade os requisitos para a convergência são tão simples que se torna difícil conseguir um elemento não-convergente.

Em primeiro lugar, as expressões aproximadas dos deslocamentos, representadas por (30), devem ser polinômios completos até o primeiro grau, isto é, devem conter pelo menos todos os termos de grau zero e grau um. Por exemplo, para o deslocamento na direção x:

$$u = \chi_u + \quad u_j \chi_j = \underbrace{A + B x + C y}_{\text{mínimo de termos necessários}} + \ldots$$

Esta exigência corresponde ao critério da *completeza*.

Por outro lado, o campo de deslocamentos obtido ao longo da chapa discretizada não deve apresentar descontinuidades no interior dos elementos, e nem ao longo dos seus lados, satifazendo assim o critério da *conformidade*.

Os critérios mencionados acima serão obedecidos automaticamente se as funções χ_j, χ_u e χ_v escolhidas forem contínuas (tanto no interior dos elementos como nos seus limites), e se as suas expressões (em cada elemento onde elas forem diferentes de zero) contiverem pelo menos todos os termos de grau zero e grau um. O elemento triangular já visto satisfaz, evidentemente, os dois critérios, e portanto é convergente.

A demonstração rigorosa destas afirmações se faz através do Cálculo Variacional, e fcge ao escopo deste trabalho.

2.3.6. Interpretação Física dos Critérios de Convergência

É possível, no caso da Elasticidade, interpretarem-se fisicamente os critérios de convergência.

De fato, o critério da completeza é conhecido também como critério da *deformação constante*, cujo enunciado é:

"Se os deslocamentos nodais são compatíveis com um estado de deformação constante, então tal estado deve de fato ser obtido no interior do elemento".

Ora, a única maneira de se conseguirem estados de deformação constante dentro do elemento é preservando os termos de primeiro grau da função de forma.

Quando os deslocamentos nodais são próprios de um movimento de corpo rígido, não devem aparecer deformações no elemento. Este é um caso particular do critério de deformação constante, com deformação nula. O termo de grau zero na função de forma assegura a possibilidade de movimentos de translação sem que apareçam deformações.

Por último, o critério da conformidade de certo modo garante a continuidade física do corpo após a deformação, evitando que apareçam irregularidades do tipo:

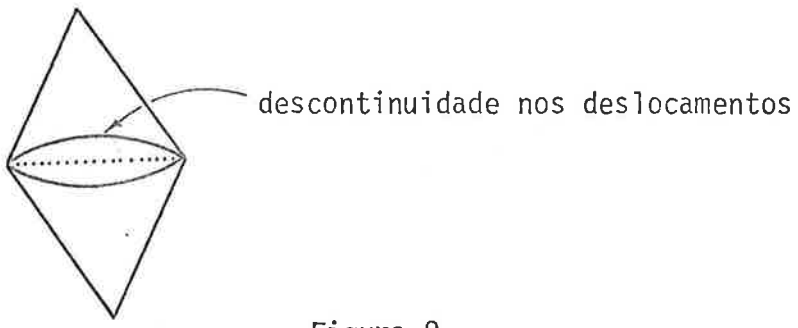


Figura 8

É de se observar também que, se os deslocamentos são descontínuos, aparecem deformações infinitas, violando desta maneira a condição de integrabilidade das equações (27) e (28).

3. TEORIA DE PRIMEIRA ORDEM DAS PLACAS

3.1. Equação Diferencial de Lagrange

3.1.1. Hipóteses

Valem aqui as hipóteses gerais das teorias de primeira ordem, ou seja, que as deformações e rotações têm ordem de grandeza de 10^{-3}. Portanto continuam válidas as expressões (1) e (2).

Além disso, as seguintes outras hipóteses também serão adotadas:

a) Espessura da placa constante e pequena face às outras dimensões.

b) Material homogêneo e isótropo.

c) Linearidade física. Isto significa que as deformações serão imediatas, reversíveis, e que as relações entre tensões e deformações (equações constitutivas) serão expressas por equações lineares (Lei de Hooke).

d) Linearidade geométrica. Isto é conseqüência de a ordem de grandeza das rotações ter sido limitada em 10^{-3}, e significa, em outras palavras, que as equações de equilíbrio serão escritas na geometria indeformada da placa, que as relações deformação-deslocamento serão lineares, e ainda que as curvaturas considerar-se-ão linearizadas.

e) O plano médio da placa não se deforma, permanecendo neutro durante a flexão. Esta hipótese é inteiramente satisfeita apenas no caso em que o plano médio da placa, após a flexão, assume a forma de uma superfície desenvolvível. No caso geral, porém, a flexão da placa dá origem a uma superfície elástica não-desenvolvível e, portanto, deformada. Porém as tensões que correspondem a essas deformações podem ser desprezadas quando as rotações são muito pequenas, ou seja, da ordem de grandeza de 10^{-3}.

f) Os pontos da placa situados inicialmente numa reta normal ao plano médio estarão, após o equilíbrio, numa reta normal à superfície média da placa deformada. Equivale esta hipótese a desprezar o efeito das forças cortantes na deformação da placa, e corresponde à hipótese de Navier na Teoria das Vigas.

g) A tensão normal (produzida pela carga transversal p) de direção perpendicular ao plano médio da placa será desprezada face às demais.

h) Não há cargas externas paralelas ao plano médio da placa atuando no mesmo.

3.1.2. Deslocamentos

De acordo com as hipóteses feitas, pode-se escrever, com muito boa aproximação, para os pontos da placa:

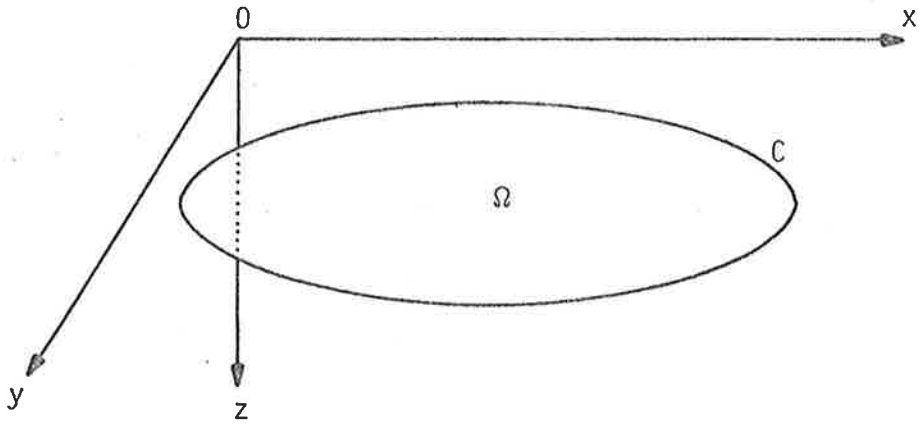


Figura 9

$$w = w(x, y) \tag{41}$$

Além disso, para os pontos da superfície média deformada, têm-se:

$$\begin{cases} u = 0 \\ v = 0 \end{cases}$$

Supõe-se que o plano médio da placa seja o plano Oxy. Fazendo-se um corte vertical, paralelo ao eixo Oy:

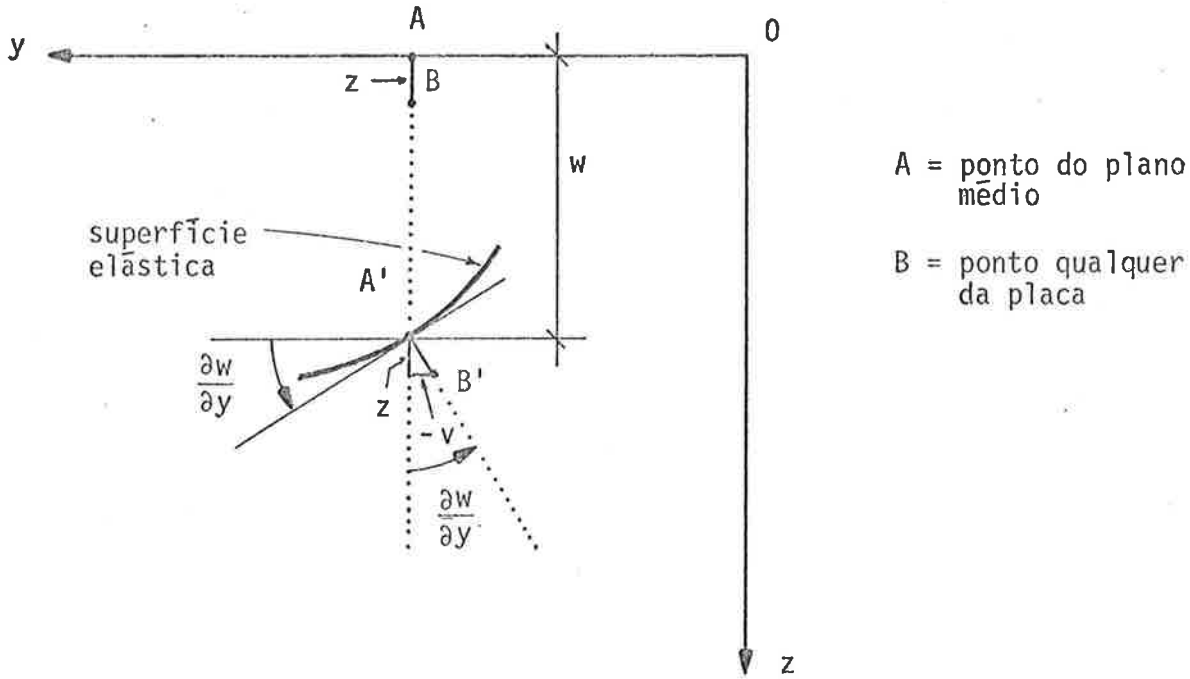


Figura 10

Observe-se que identificaram-se a rotação e a sua tangente (expressão (2)).

Tem-se, portanto:

$$- v = z \frac{\partial w}{\partial y} \qquad v = - z \frac{\partial w}{\partial y} \tag{42}$$

Analogamente, fazendo-se um corte vertical paralelo ao eixo Ox, obtém-se:

$$u = - z \frac{\partial w}{\partial x} \tag{43}$$

Portanto os deslocamentos u e v dos pontos da placa ficam perfeitamente caracterizados por (41).

3.1.3. Equações de Compatibilidade

Introduzindo-se as relações deformação-deslocamento (9), (10) e (11), vêm:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} = - z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \tag{44}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} = - z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \tag{45}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = - 2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \tag{46}$$

ou seja:

$$\frac{\varepsilon_x}{z} = - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = \frac{1}{\rho_x} \tag{47}$$

onde $1/\rho_x$ é a curvatura da superfície média num plano paralelo ao plano Oxz;

$$\frac{\varepsilon_y}{z} = - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = \frac{1}{\partial_y} \tag{48}$$

sendo $1/\rho_y$ a curvatura da superfície média num plano paralelo ao plano Oyz;

$$\frac{\gamma_{xy}}{-2z} = \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} = \frac{1}{\rho_{xy}} \tag{49}$$

onde $1/\rho_{xy}$ é o giro da superfície média em relação aos eixos Ox e Oy, ou "curvatura mista".

As curvaturas acima definidas dependem apenas de w(x, y).

3.1.4. Equações Constitutivas

Aplicando-se agora a Lei de Hooke, vêm:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\varepsilon_x + \nu \, \varepsilon_y) = - z \frac{E}{1 - \nu^2} \left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{50}$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\,\varepsilon_x) = -\,z\,\frac{E}{1-\nu^2}\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{51}$$

$$\tau_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)}\,\gamma_{xy} = -\,z\,\frac{E}{1+\nu}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \tag{52}$$

As fórmulas anteriores mostram que as deformações e as tensões também ficam completamente caracterizadas pelo conhecimento da função $w = w(x, y)$.

Mostram também que essas grandezas, a exemplo dos deslocamentos u e v, variam linearmente com z, anulando-se para $z = 0$.

3.1.5. Momentos Fletores e de Torção

Na Fig. 11 encontram-se as tensões ao longo de uma normal genérica à placa, supondo-se que as grandezas $\partial^2 w/\partial x^2$, $\partial^2 w/\partial y^2$ e $\partial^2 w/\partial x\,\partial y$ sejam negativas para $z > 0$.

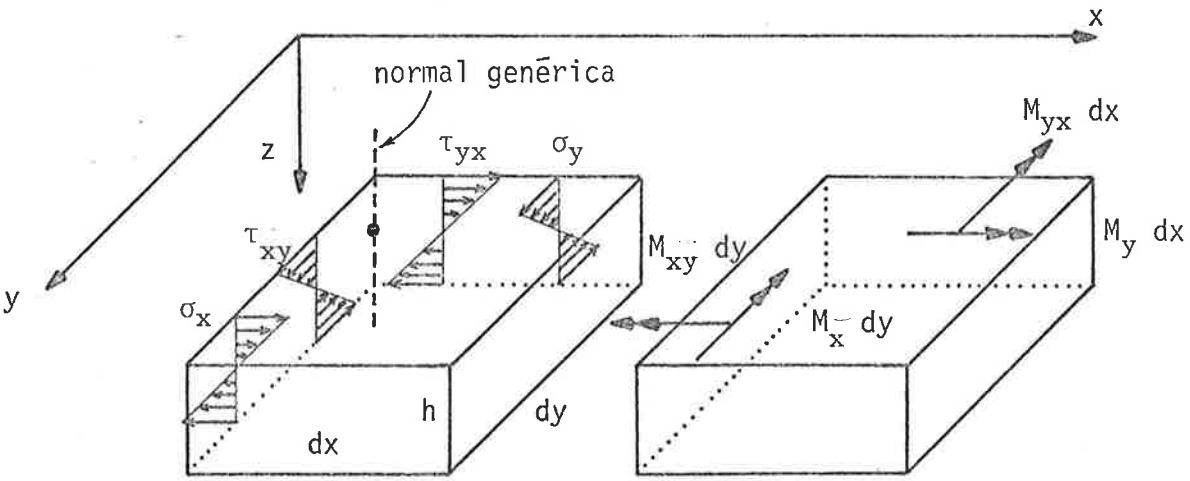


Figura 11

Por integração das tensões, obtêm-se os momentos (fletores e de torção) por unidade de comprimento:

$$M_x = \int_{-h/2}^{h/2} z(\sigma_x \cdot 1 \cdot dz)$$

$$M_y = \int_{-h/2}^{h/2} z(\sigma_y \cdot 1 \cdot dz)$$

$$M_{xy} = - \int_{-h/2}^{h/2} z(\tau_{xy} \cdot 1 \cdot dz)$$

O sinal (-) na fórmula de M_{xy} indica que ao sentido indicado para as tensões τ_{xy} corresponde $M_{xy} < 0$ (os sinais dos momentos são positivos, conforme indicado na Fig. 11).

Substituindo-se nas expressões acima as fórmulas (50), (51) e (52), e chamando-se de *rigidez* da placa ao parâmetro:

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1 - \nu^2)} \tag{53}$$

virão:

$$M_x = - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}\right) \tag{54}$$

$$M_y = - D\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \tag{55}$$

$$M_{xy} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \tag{56}$$

Por último, sendo

$$M_{yx} = \int_{-h/2}^{h/2} z(\tau_{yx} \cdot 1 \cdot dz)$$

e sabendo-se que $\tau_{yx} = \tau_{xy}$, resulta:

$$M_{yx} = - M_{xy} \tag{57}$$

Verifica-se que também os momentos ficam definidos quando se conhece $w = w(x, y)$.

3.1.6. Equações Diferenciais de Equilíbrio

Prosseguindo, introduzir-se-ão as equações diferenciais de equilíbrio para um elemento de placa dx dy:

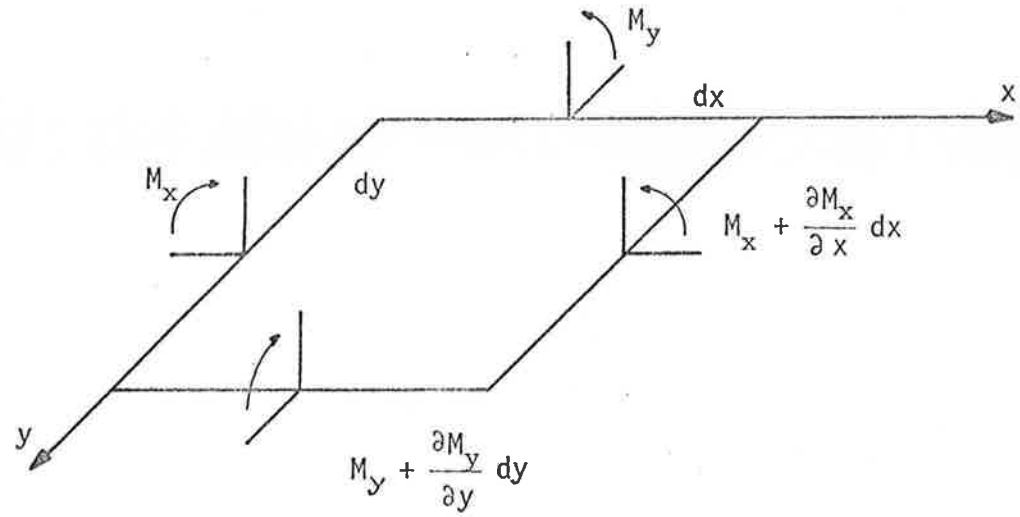


Figura 12 - Momentos Fletores (por unidade de comprimento)

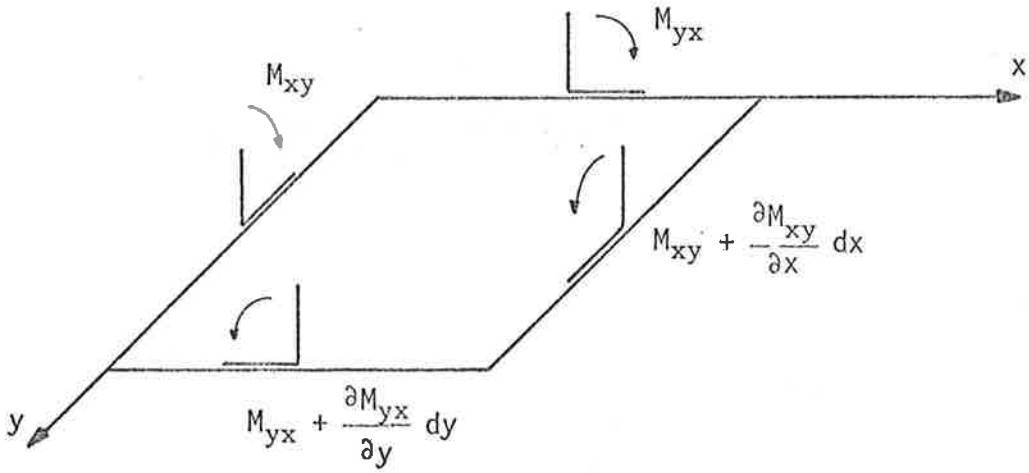


Figura 13 - Momentos de Torção (por unidade de comprimento)

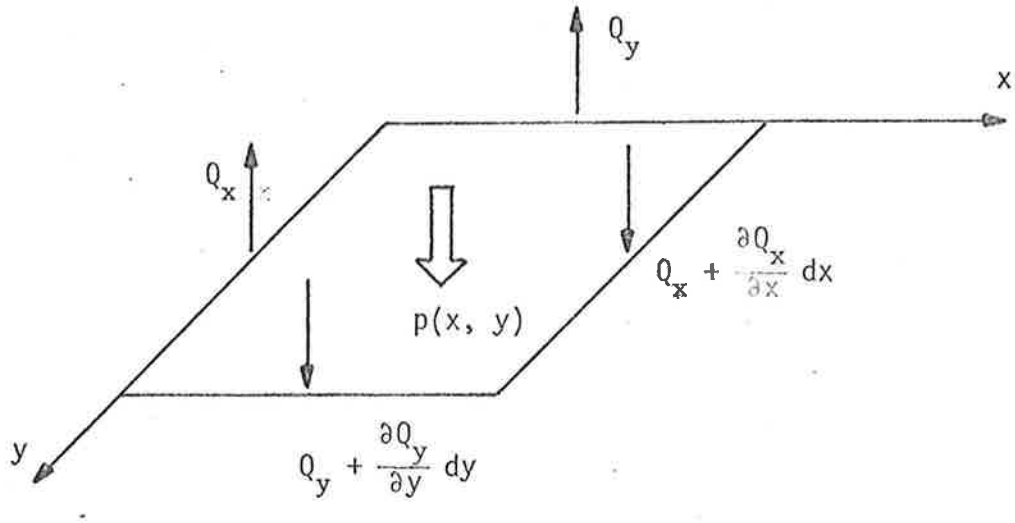


Figura 14 - Forças Cortantes (por unidade de comprimento)

Para facilitar, convém representar vetorialmente os momentos em planta, conforme a Fig. 15.

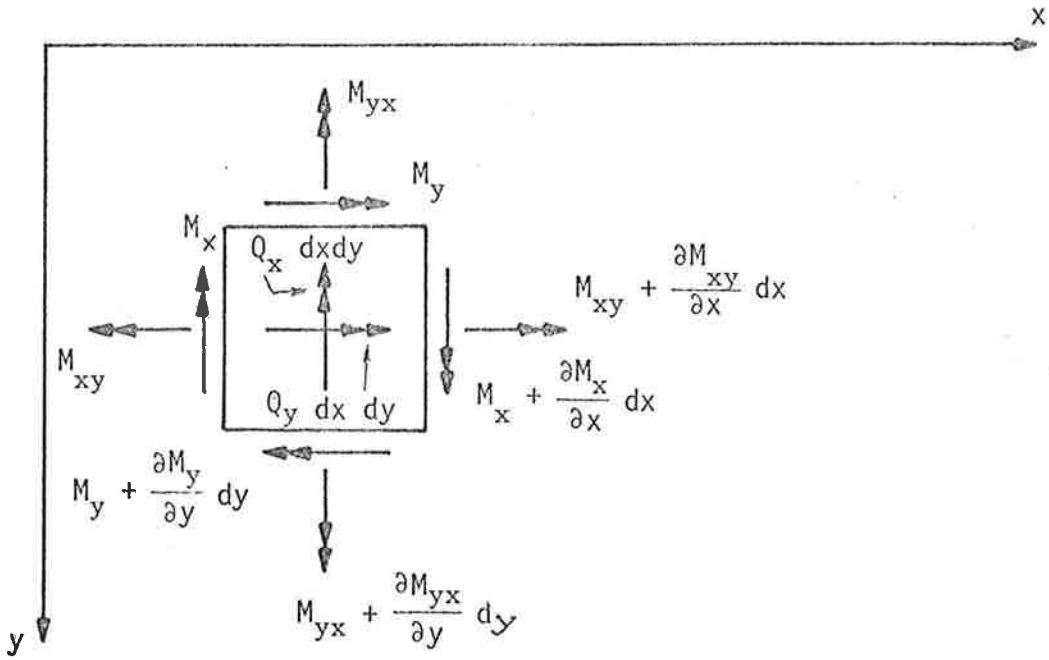


Figura 15

O equilíbrio de forças na vertical (Fig. 14) fornece:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} dx\, dy + \frac{\partial Q_y}{\partial y} dy\, dx + p\, dx\, dy = 0$$

de onde:

$$\frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} = - p(x, y) \tag{58}$$

O equilíbrio de momentos em torno do eixo Ox se escreve como:

$$- \frac{\partial M_y}{\partial y} dy\, dx + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\, dy + Q_y\, dx\, dy = 0$$

Portanto:

$$Q_y = \frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \tag{59}$$

O exame da expressão acima sugere considerar a grandeza $\partial M_{xy}/\partial x$ como força cortante. Mais adiante será esclarecido este detalhe.

Finalmente, escrevendo-se o equilíbrio de momentos em torno do eixo Oy, vem:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} + \frac{\partial M_{yx}}{\partial y}$$

Sendo $M_{yx} = - M_{xy}$, a expressão acima fica:

$$Q_x = \frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \tag{60}$$

3.1.7. Equação de Lagrange

Para eliminarem-se Q_x e Q_y das equações de equilíbrio, basta derivar (60) com relação a x, (59) com relação a y, e substituir os resultados em (58). Obtém-se:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - p \tag{61}$$

Considerando-se (54), (55) e (56), a expressão anterior fica:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2\,\frac{\partial^4 w}{\partial x^2\,\partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \tag{62}$$

Esta equação foi obtida por Lagrange em 1811, e também pode ser escrita como:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \qquad \text{ou} \qquad \nabla^2 (\nabla^2 w) = \frac{p}{D}$$

onde $\nabla^2 = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$ é o operador laplaciano.

A equação de Lagrange, sendo de ordem $2m = 4$, exige que, em cada ponto do contorno, sejam satisfeitas $m = 2$ condições, expressas por equações diferenciais, cada uma de ordem no máximo igual a $2m - 1 = 3$.

A condição será chamada de essencial (ou geométrica) quando a ordem de sua equação for menor ou igual a $m - 1 = 1$. Caso contrário, será denominada natural (ou estática).

3.1.8. Condições de Contorno para Placas Retangulares

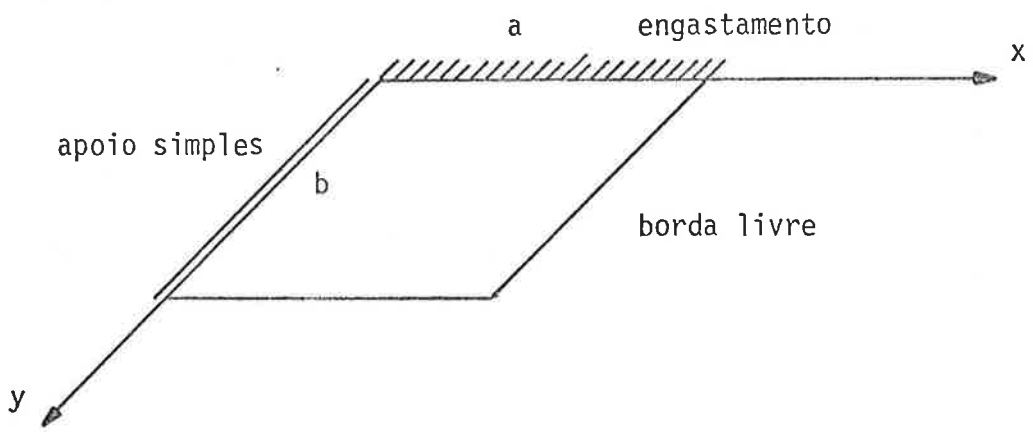


Figura 16

a) Engastamento

Para $y = 0$, têm-se:

$$\begin{cases} w = 0 & \text{(essencial)} \\ \dfrac{\partial w}{\partial y} = 0 & \text{(essencial)} \end{cases}$$

b) Apoio Simples

Para x = 0, têm-se:

$$\begin{cases} w = 0 \\ M_x = 0 \end{cases}$$

Considerando (54) e que, sendo w = 0, será:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = 0 \text{ e } \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0$$

as condições para apoio simples (x = 0) serão:

$$\begin{cases} w = 0 & \text{(essencial)} \\ \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0 & \text{(natural)} \end{cases}$$

Trata-se de condição *mista*, evidentemente (uma essencial e outra natural).

c) Bordo Livre

Em x = a, em princípio, têm-se:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ M_{xy} = 0 \\ Q_x = 0 \end{cases}$$

Tais condições foram expressas por Poisson sob esta forma. Mas três condições são demais para a ordem da equação de Lagrange. Sendo assim, Kirchhoff substituiu as duas últimas condições por uma única, resultando, para x = a:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ V_x = Q_x - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

sendo V_x a carga vertical de borda.

Lord Kelvin e P. G. Tait deram a explicação física do fato. Tal justificativa foi colocada em termos de equivalência estática.

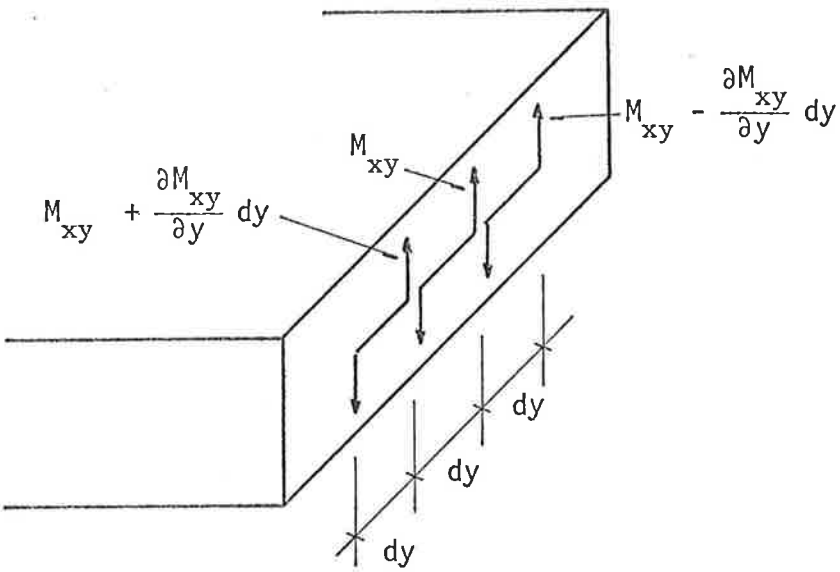


Figura 17

O estado de flexão da placa não se altera se as tensões τ_{xy}, atuando num elemento dy, as quais originam o momento M_{xy} dy, são substituídas por duas forças verticais de grandeza M_{xy} separadas pela distância dy, dando origem ao binário M_{xy} dy. Pelo Princípio de Saint-Venant, as mudanças no campo de tensões serão apenas locais.

No trecho dy há um saldo de força igual a $-(\partial M_{xy}/\partial y)$ dy ou, por unidade de comprimento: $-(\partial M_{xy}/\partial y)$.

Conclui-se, portanto, que a distribuição de momentos de torção M_{xy} é estaticamente equivalente a uma distribuição de forças cortantes de intensidade $-(\partial M_{xy}/\partial y)$ para x = a, e a duas forças concentradas, aplicadas nas extremidades da borda livre, de intensidade igual a M_{xy} (Fig. 18).

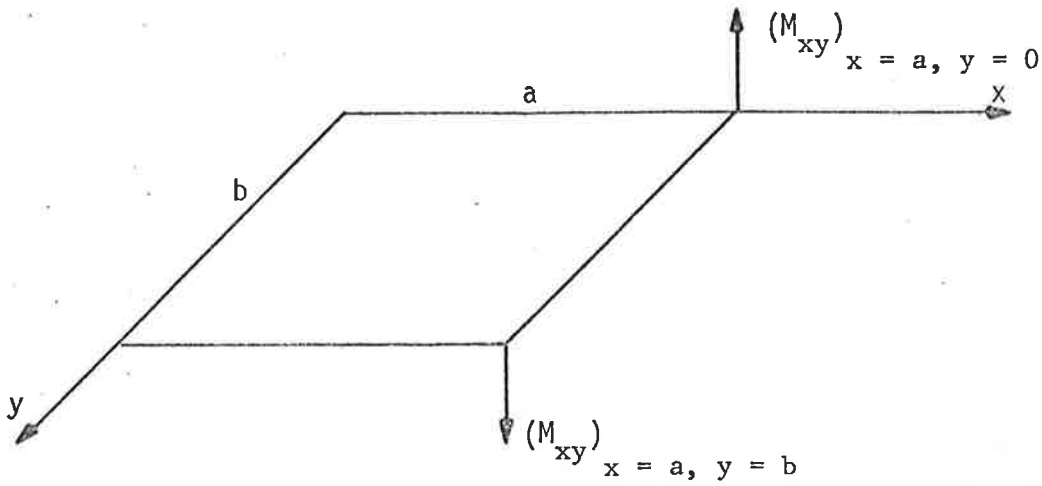


Figura 18

Analogamente, considerando a borda livre y = b, a distribuição de M_{yx} será equivalente a uma certa distribuição de forças cortantes, e haverá ainda duas forças concentradas, como indicado na Fig. 19.

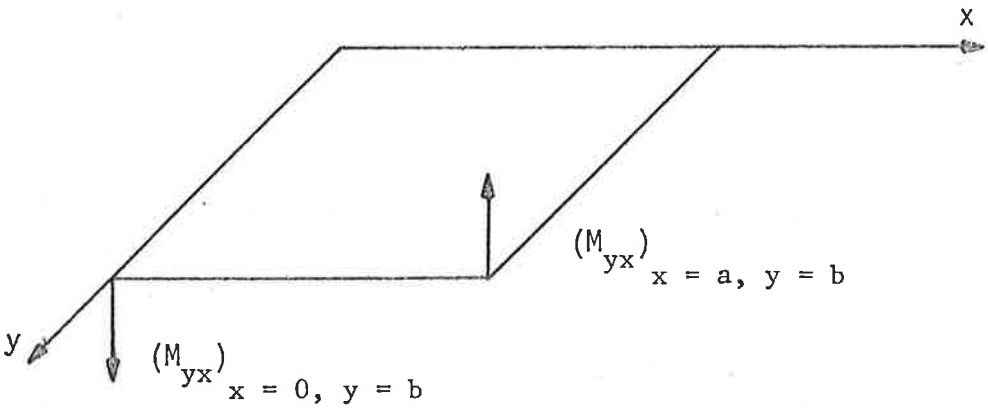


Figura 19

Em resumo, para borda livre (x = a) as condições de contorno são:

$$\begin{cases} M_x = 0 \\ V_x = Q_x - \dfrac{\partial M_{xy}}{\partial y} = 0 \end{cases}$$

Considerando-se (54), (56) e (60), estas condições podem ser colocadas em função de w e suas derivadas. Respectivamente, ter-se-ão, em x = a:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \dfrac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 & \text{(natural)} \\[2ex] \dfrac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu) \dfrac{\partial^3 w}{\partial x \, \partial y^2} = 0 & \text{(natural)} \end{cases}$$

3.1.9. Condições de Contorno para Placas de Formato Qualquer

Considere-se o contorno C da placa, dividido em duas partes, de acordo com a Fig. 20:

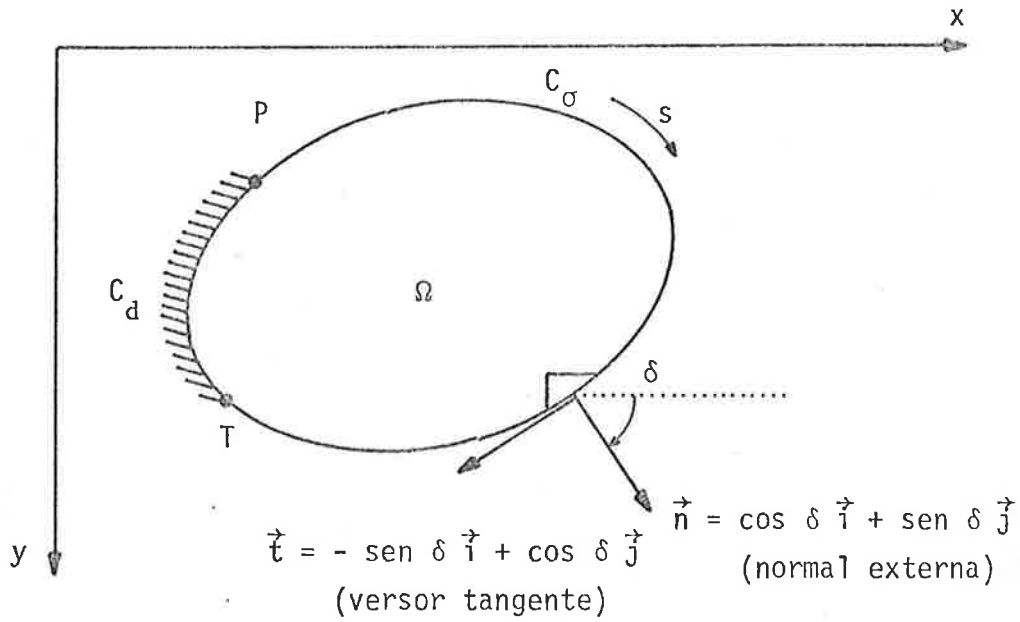


Figura 20

Antes de se prosseguir, três observações devem ser feitas:

Primeira Observação

A condição de apoio simples, por ser uma condição mista de contorno, será por enquanto esquecida. No momento oportuno será indicada a maneira como tratá-la.

Segunda Observação

Serão deduzidas agora algumas expressões que se revelarão úteis mais tarde. Para isto isole-se um trecho infinitesimal ds do contorno, conforme a Fig. 21 a seguir.

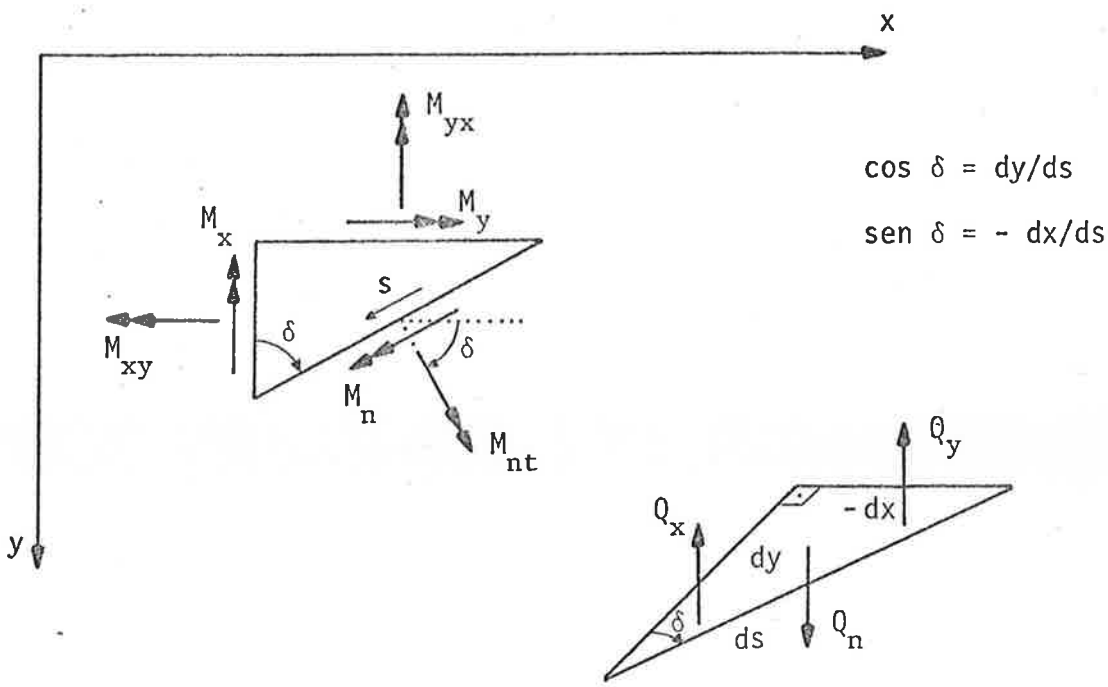


Figura 21

O equilíbrio de forças na vertical fornece:

$$Q_n \, ds = Q_x \, dy - Q_y \, dx$$

ou

$$Q_n = Q_x \cos \delta + Q_y \operatorname{sen} \delta \tag{63}$$

O equilíbrio de momentos em torno de Ox indica que:

$$M_{nt} \, ds \cos \delta - M_n \, ds \operatorname{sen} \delta = M_{xy} \, ds \cos \delta - M_y \, ds \operatorname{sen} \delta$$

ou

$$M_{nt} \cos \delta - M_n \operatorname{sen} \delta = M_{xy} \cos \delta - M_y \operatorname{sen} \delta \tag{64}$$

Analogamente, o equilíbrio de momentos em torno de Oy fornece:

$$M_n \, ds \cos \delta + M_{nt} \, ds \operatorname{sen} \delta = M_x \, ds \cos \delta + M_{yx} \, ds \operatorname{sen} \delta$$

Sendo $M_{yx} = - M_{xy}$, vem:

$$M_n \cos \delta + M_{nt} \operatorname{sen} \delta = M_x \cos \delta - M_{xy} \operatorname{sen} \delta \tag{65}$$

Terceira Observação

Na imposição das condições de contorno, quando este tem uma forma qualquer, é necessário que se coloquem M_n, M_{nt} e Q_n em função de w e suas derivadas.

Inicialmente, estabeleça-se, no prisma elementar da Fig. 21, o equilíbrio de momentos nas direções de M_n e M_{nt}:

$$M_n = M_x \cos^2 \delta + M_y \operatorname{sen}^2 \delta - 2M_{xy} \operatorname{sen} \delta \cos \delta \tag{66}$$

$$M_{nt} = (M_x - M_y) \operatorname{sen} \delta \cos \delta + M_{xy}(\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2 \delta) \tag{67}$$

Considerando as expressões (54), (55) e (56), e também as seguintes outras:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \text{grad } w \times \vec{n} = \frac{\partial w}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \delta$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \text{grad } w \times \vec{t} = - \frac{\partial w}{\partial x} \operatorname{sen} \delta + \frac{\partial w}{\partial y} \cos \delta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} = \text{grad } \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right) \times \vec{n} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \cos^2 \delta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \operatorname{sen}^2 \delta + 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \operatorname{sen} \delta \cos \delta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial s^2} = \text{grad } \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) \times \vec{t} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \operatorname{sen}^2 \delta + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \cos^2 \delta - 2 \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} \operatorname{sen} \delta \cos \delta$$

$$\frac{\partial^2 w}{\partial n \, \partial s} = \text{grad } \left(\frac{\partial w}{\partial s}\right) \times \vec{n} = \left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) \operatorname{sen} \delta \cos \delta + \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} (\cos^2 \delta + - \operatorname{sen}^2 \delta)$$

As expressões (66) e (67) ficam, respectivamente:

$$M_n = - D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} \right) \tag{68}$$

$$M_{nt} = D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial n \, \partial s} \tag{69}$$

Em seguida, considere-se a expressão (63), na qual se injetaram (59) e (60), obtendo-se:

$$Q_n = \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}\right) \cos\delta + \left(\frac{\partial M_y}{\partial y} - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}\right) \operatorname{sen}\delta \qquad (70)$$

De (66) e (67) pode-se escrever:

$$\frac{\partial M_n}{\partial n} = \text{grad } M_n \times \vec{n} =$$

$$= \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \cos^2\delta + \frac{\partial M_y}{\partial x} \operatorname{sen}^2\delta - 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \operatorname{sen}\delta \cos\delta\right)\cos\delta +$$

$$+ \left(\frac{\partial M_x}{\partial y} \cos^2\delta + \frac{\partial M_y}{\partial y} \operatorname{sen}^2\delta - 2\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \operatorname{sen}\delta \cos\delta\right)\operatorname{sen}\delta$$

$$\frac{\partial M_{nt}}{\partial s} = \text{grad } M_{nt} \times \vec{t} =$$

$$= \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial x} - \frac{\partial M_y}{\partial x}\right) \operatorname{sen}\delta \cos\delta + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x}(\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\delta)\right] (-\operatorname{sen}\delta) +$$

$$+ \left[\left(\frac{\partial M_x}{\partial y} - \frac{\partial M_y}{\partial y}\right) \operatorname{sen}\delta \cos\delta + \frac{\partial M_{xy}}{\partial y}(\cos^2\delta - \operatorname{sen}^2\delta)\right] \cos\delta$$

Subtraindo-se a última expressão da penúltima e levando em conta (70), vem, finalmente:

$$Q_n = \frac{\partial M_n}{\partial n} - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \qquad (71)$$

Prosseguindo-se na introdução das condições de contorno:

a) <u>Condições de Contorno Geométricas (ou Essenciais)</u>

C_d é a região de apoio da placa. Em C_d são conhecidos:

- recalque de apoio:

$$w = \bar{w}(s) \qquad (72)$$

- rotação forçada de apoio:

$$\frac{\partial w}{\partial n} = \bar{\theta}(s) \tag{73}$$

Evidentemente, quando o apoio for um engastamento perfeito, as condições acima enunciadas serão homogêneas.

b) Condições de Contorno Estáticas (ou Naturais)

C_σ é a borda livre da placa, que pode estar carregada ou não. Em C_σ são conhecidos:

- momento fletor externo aplicado:

$$M_n = \bar{M}_n(s) \tag{74}$$

- carga vertical externa aplicada:

$$V_n = \bar{V}_n(s) \tag{75}$$

sendo

$$V_n = Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s} \tag{76}$$

Há ainda duas forças concentradas, aplicadas nos pontos P e T (Fig. 22).

$$R_P = (M_{nt})_P \qquad \text{e} \qquad R_T = (M_{nt})_T$$

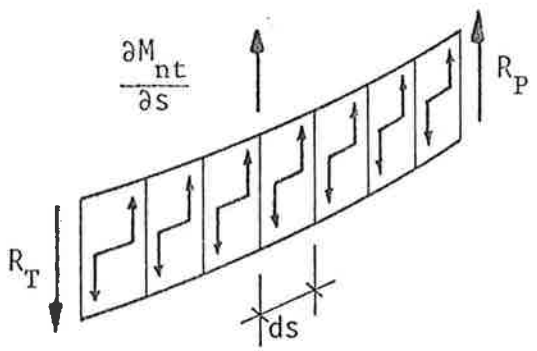


Figura 22

Evidentemente, no caso de borda descarregada, as condições (74) e (75) serão homogêneas.

Para finalizar, observe-se que a aplicação das expressões (68), (69) e (71) coloca as condições de contorno (74) e (75) em função das derivadas de w normal e tangente ao contorno. Ter-se-ão, respectivamente:

$$- D \left(\frac{\partial^2 w}{\partial n^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial s^2}\right) = \bar{M}_n(s)$$

$$- D \left[\frac{\partial^3 w}{\partial n^3} + (2 - \nu) \frac{\partial^3 w}{\partial n \, \partial s^2} \right] = \bar{V}_n(s)$$

3.2. Método dos Resíduos Ponderados

3.2.1. Introdução

Trata-se de resolver numericamente a equação (62) de Lagrange, na incógnita $w = w(x, y)$, com as condições de contorno essenciais (72) e (73) e naturais (74) e (75).

Os conceitos gerais do Método dos Resíduos Ponderados são os mesmos que já foram elucidados no Capítulo anterior, quando se apresentou o estado plano de tensão. Por causa disso, a exposição agora será mais rápida.

3.2.2. Transformação da Equação de Equilíbrio numa Equação Integral

Considere-se a equação (61) diferencial de equilíbrio

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - p \qquad (61)$$

Seja uma função arbitrária $\phi = \phi(x, y)$, contínua e duas vezes derivável em Ω, e que satisfaça em C_d as condições de contorno essenciais (72) e (73), tornadas homogêneas, isto é:

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial n} = 0 \qquad \text{em } C_d$$

Observe-se (Fig. 20) que, sendo $\phi = 0$ em C_d, vem:

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \text{grad } \phi \times \vec{t} = - \text{ sen } \delta \frac{\partial\phi}{\partial x} + \cos \delta \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

Mas, por outro lado:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{grad } \phi \times \vec{n} = \cos \delta \frac{\partial\phi}{\partial x} + \text{ sen } \delta \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0$$

Considerando-se que as duas equações acima devem valer para qualquer δ, chega-se a

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = \frac{\partial\phi}{\partial y} = 0 \qquad \text{em } C_d$$

Em seguida, multipliquem-se ambos os membros de (61) pela função ϕ. Logo após, por integração na placa, obtém-se:

$$\iint_{\Omega} \phi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \, \partial y} + p\right) dx \, dy = 0 \qquad (77)$$

Se a equação integral se cumpre para qualquer ϕ, então a equação diferencial (61) será respeitada em todo e qualquer ponto de Ω (a recíproca é imediata). A demonstração é análoga àquela vista no item 2.2.2.

3.2.3. A Expressão "Resíduos Ponderados"

Seja uma solução aproximada $\hat{M}_x$, $\hat{M}_y$, $\hat{M}_{xy}$, calculada com $w = \hat{w}(x, y)$.

Introduzindo-se essa solução em (61), virá:

$$\frac{\partial^2 \hat{M}_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \hat{M}_y}{\partial y^2} - 2 \frac{\partial^2 \hat{M}_{xy}}{\partial x \, \partial y} + p \neq 0$$

e representa um resíduo. Assim, a equação (77), com $M_x = \hat{M}_x$, $M_y = \hat{M}_y$ e $M_{xy} = \hat{M}_{xy}$, será simplesmente a integral desses resíduos, ponderados pela função ϕ, forçada a ser igual a zero.

Isto foi apenas um parênteses na exposição, para que se recordasse o significado da expressão "resíduos ponderados".

3.2.4. Introdução das Condições de Contorno Naturais

O próximo passo consiste na introdução das condições de contorno naturais (74) e (75) na equação (77).

Integrando-se duas vezes por partes o primeiro membro de (77), obtêm-se os seguintes resultados (ver o Anexo A, fórmulas A-4):

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} dx\, dy = \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_x}{\partial x} \cos\delta\, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial M_x}{\partial x} dx\, dy =$$

$$= \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_x}{\partial x} \cos\delta\, ds - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x} M_x \cos\delta\, ds + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x\, dx\, dy$$

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} dx\, dy = \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_y}{\partial y} \operatorname{sen}\delta\, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial M_y}{\partial y} dx\, dy =$$

$$= \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_y}{\partial y} \operatorname{sen}\delta\, ds - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial y} M_y \operatorname{sen}\delta\, ds + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y\, dx\, dy$$

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos\delta\, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial x} \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} dx\, dy =$$

$$= \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos\delta\, ds - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x} M_{xy} \operatorname{sen}\delta\, ds + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\, dx\, dy$$

$$\iint_{\Omega} \phi \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial y\, \partial x} dx\, dy = \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \operatorname{sen}\delta\, ds - \iint_{\Omega} \frac{\partial \phi}{\partial y} \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} dx\, dy =$$

$$= \int_{C_\sigma} \phi \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \operatorname{sen}\delta\, ds - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial y} M_{xy} \cos\delta\, ds + \iint_{\Omega} \frac{\partial^2 \phi}{\partial y\, \partial x} M_{xy}\, dx\, dy$$

Observe-se que as integrais de contorno acima deveriam ser desenvolvidas ao longo de toda a fronteira da placa, mas como

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi}{\partial x} = \frac{\partial \phi}{\partial y} = 0$$

em C_d, elas serão calculadas apenas em C_σ.

As duas últimas expressões, somadas, dão:

$$2 \iint_\Omega \phi \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} dx\, dy = \int_{C_\sigma} \phi \left(\frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \delta + \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \operatorname{sen} \delta\right) ds +$$

$$- \int_{C_\sigma} M_{xy} \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \operatorname{sen} \delta + \frac{\partial \phi}{\partial y} \cos \delta\right) ds + 2 \iint_\Omega \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\, dx\, dy$$

Substituindo-se os resultados acima em (77), fica:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\right) dx\, dy +$$

$$+ \int_{C_\sigma} \phi \left(\frac{\partial M_x}{\partial x} \cos \delta + \frac{\partial M_y}{\partial y} \operatorname{sen} \delta - \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} \cos \delta - \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} \operatorname{sen} \delta\right) ds +$$

$$- \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x} (M_x \cos \delta - M_{xy} \operatorname{sen} \delta)\, ds +$$

$$- \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial y} (M_y \operatorname{sen} \delta - M_{xy} \cos \delta)\, ds = - \iint_\Omega \phi\, p\, dx\, dy$$

Substituindo-se, na equação acima, as expressões (64), (65) e (70), obtém-se:

$$\iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2 \phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\right) dx\, dy + \int_{C_\sigma} \phi\, Q_n\, ds +$$

$$- \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial x} (M_n \cos \delta + M_{nt} \operatorname{sen} \delta)\, ds +$$

$$- \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial y} (M_n \operatorname{sen} \delta - M_{nt} \cos \delta)\, ds = - \iint_\Omega \phi\, p\, dx\, dy$$

Reorganizando-se os termos da equação acima, virá:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial\phi^2}{\partial y^2} M_y - 2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} M_{xy}\right) dx\,dy +$$

$$+ \int_{C_\sigma} \phi\, Q_n\, ds - \int_{C_\sigma} M_n \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\delta + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\text{sen}\,\delta\right) ds +$$

$$+ \int_{C_\sigma} M_{nt} \left(-\frac{\partial\phi}{\partial x}\,\text{sen}\,\delta + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\delta\right) ds = -\iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\,dy$$

Sendo:

$$\begin{cases} \vec{n} = \cos\delta\,\vec{i} + \text{sen}\,\delta\,\vec{j} \\ \vec{t} = -\,\text{sen}\,\delta\,\vec{i} + \cos\delta\,\vec{j} \end{cases}$$

virão as seguintes expressões:

$$\frac{\partial\phi}{\partial n} = \text{grad}\,\phi \times \vec{n} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\cos\delta + \frac{\partial\phi}{\partial y}\,\text{sen}\,\delta$$

$$\frac{\partial\phi}{\partial s} = \text{grad}\,\phi \times \vec{t} = \frac{\partial\phi}{\partial x}(-\,\text{sen}\,\delta) + \frac{\partial\phi}{\partial y}\cos\delta$$

que, substituídas na equação integral anterior, produzem:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} M_y - 2\,\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y} M_{xy}\right) dx\,dy +$$

$$+ \int_{C_\sigma} \phi\, Q_n\, ds - \int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial n} M_n\, ds + \int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial s} M_{nt}\, ds = -\iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\,dy$$

Integrando-se por partes, na região C_σ do contorno, a última das integrais do primeiro membro da equação acima, vem (Anexo A, fórmula A-5):

$$\int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial s} M_{nt}\, ds = \left|\, \phi\, M_{nt} \right|_P^T - \int_{C_\sigma} \phi\, \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}\, ds$$

Mas $\left|\phi\, M_{nt}\right|_P^T = 0$, pois $\phi = 0$ em P e T.

Portanto:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\right) dx\, dy +$$

$$- \int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial n} M_n\, ds + \int_{C_\sigma} \phi \left(Q_n - \frac{\partial M_{nt}}{\partial s}\right) ds = - \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\, dy$$

Considerando-se (76), vem:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\right) dx\, dy =$$

$$= \int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial n} M_n\, ds - \int_{C_\sigma} \phi\, V_n\, ds - \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\, dy$$

Finalmente, injetando-se (74) e (75) na equação acima, consegue-se introduzir naturalmente, na formulação do problema, as condições de contorno naturais, ficando-se com:

$$\iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} M_y - 2 \frac{\partial^2\phi}{\partial x\, \partial y} M_{xy}\right) dx\, dy =$$

$$= \int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial n} \bar{M}_n\, ds - \int_{C_\sigma} \phi\, \bar{V}_n\, ds - \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\, dy \qquad (78)$$

A expressão (78) é a "forma fraca" de (77), por ser mais permissiva, isto é, admitir uma menor ordem de continuidade na determinação das funções M_x, M_y e M_{xy}. Em compensação ela é mais exigente ao se definirem as funções ϕ, no que diz respeito à ordem de continuidade.

3.2.5. Equação Integral de Equilíbrio

A equação (78) pode ser interpretada como sendo uma equação integral de equilíbrio, pois traduz este último, tanto no interior do domínio Ω como no seu contorno C_σ, desde que seja verificada para qualquer função ϕ, satisfazendo as condições impostas no início deste capítulo (vide item 3.2.2).

3.2.6. O Teorema dos Trabalhos Virtuais

Neste ponto, torna-se adequada uma observação que é a seguinte: a equação (78) expressa o Teorema dos Trabalhos Virtuais, desde que se considere ϕ como deslocamentos virtuais, $-(\partial\phi/\partial n)$ como rotações virtuais e:

$$\frac{1}{\rho_x^*} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}, \qquad \frac{1}{\rho_y^*} = -\frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}, \qquad \frac{1}{\rho_{xy}^*} = \frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}$$

como curvaturas virtuais.

Observe-se que ϕ satisfaz as exigências de um campo de deslocamentos virtuais, isto é: no trecho C_d, onde se verificam as condições de contorno geométricas (72) e (73), têm-se:

$$\phi = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0$$

Assim, o primeiro membro de (78) representa o trabalho virtual dos esforços internos:

$$\tau_{int} = \iint_\Omega \left(\frac{1}{\rho_x^*} M_x + \frac{1}{\rho_y^*} M_y + \frac{2}{\rho_{xy}^*} M_{xy}\right) dx\, dy$$

Por outro lado, o segundo membro de (78) é nada menos que o trabalho virtual dos esforços externos p, $\bar{M}_n$ e $\bar{V}_n$.

O Teorema dos Trabalhos Virtuais afirma que, havendo equilíbrio, isto é, estando satisfeitas a equação diferencial (61) e as condições estáticas de contorno (74) e (75), verifica-se a igualdade entre os trabalhos virtuais dos esforços internos e externos. É o que exprime a (78).

Convém notar, finalmente, que tal expressão é válida, independentemente das propriedades reológicas do material que constitui a placa.

3.2.7. Introdução das Equações Constitutivas e de Compatibilidade

Em prosseguimento, injetem-se na equação (78) as expressões (54), (55) e

e (56), que dão os momentos em função das curvaturas. Obtém-se:

$$D \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial^2\phi}{\partial x^2}\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2}\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\frac{\partial^2\phi}{\partial x\,\partial y}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) dx\,dy =$$

$$= -\int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial n}\bar{M}_n\,ds + \int_{C_\sigma} \phi\,\bar{V}_n\,ds + \iint_{\Omega} \phi\,p\,dx\,dy \qquad (79)$$

A equação integral (79) carrega no seu bojo informações completas sobre o equilíbrio e a reologia, e informações parciais sobre a compatibilidade (as curvaturas são obtidas derivando-se duas vezes os deslocamentos).

Falta só considerar, na compatibilidade, as condições de contorno geométricas, o que será feito em seguida.

Note-se que até aqui não foi feita nenhuma aproximação.

3.2.8. Introdução das Condições de Contorno Geométricas

Admita-se a seguinte solução aproximada (neste ponto introduz-se a aproximação do método):

$$w = \phi_0 + \sum_{j=1}^{n} c_j\,\phi_j \qquad (80)$$

onde $\phi_0(x, y)$ é uma função que satisfaz as condições de contorno essenciais, ou seja:

$$\phi_0 = \bar{w}(s) \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi_0}{\partial n} = \bar{\theta}(s) \quad \text{em } C_d$$

que são chamadas de essenciais porque devem ser levadas em conta na construção das funções de ponderação ϕ, sob a forma:

$$\phi = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial\phi}{\partial n} = 0 \quad \text{em } C_d$$

Para facilitar a construção de ϕ_0, observe-se que, sendo:

$$\phi_0 = \bar{w}(s)$$

virá:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial s} = \text{grad } \phi_0 \times \vec{t} = - \text{ sen } \delta \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \cos \delta \frac{\partial \phi_0}{\partial y} = \frac{\partial \bar{w}}{\partial s} \tag{81}$$

Mas, por outro lado:

$$\frac{\partial \phi_0}{\partial n} = \text{grad } \phi_0 \times \vec{n} = \cos \delta \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \text{ sen } \delta \frac{\partial \phi_0}{\partial y} = \bar{\theta} \tag{82}$$

A resolução do sistema acima fornece as derivadas de ϕ_0 em relação a x e y, no trecho C_d.

As demais funções $\phi_j(x, y)$ que figuram na solução aproximada (80) são funções arbitrárias, tais que:

$$\phi_j = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_j}{\partial n} = 0 \qquad \text{em } C_d$$

e chamam-se funções coordenadas.

As funções ϕ_0 e ϕ_j devem ser contínuas e deriváveis até a segunda ordem, no domínio da placa.

3.2.9. Hipótese de Galerkin

Galerkin sugeriu que as funções de ponderação $\phi(x, y)$ fossem as mesmas que as usadas para as funções coordenadas $\phi_j(x, y)$.

Então, injete-se a solução aproximada (80) na equação integral (79) e faça-se nesta última, sucessivamente, ϕ igual a cada uma das n funções ϕ_j.

O resultado será um sistema de n equações algébricas lineares que possibilitará a determinação dos n parâmetros c_j, que são as incógnitas do problema discretizado.

3.3. Método dos Elementos Finitos

3.3.1. Introdução

Em relação às dificuldades de aplicação prática do Método dos Resíduos Ponderados, valem aqui as mesmas observações que foram feitas no Capítulo anterior, quando se resolveu o problema das chapas (ver Item 2.3.1).

Quanto às vantagens do Método dos Elementos Finitos, também continua valendo o que lá foi exposto (ver Item 2.3.2).

Entretanto, a aplicação do Método dos Elementos Finitos ao problema das placas se reveste de algumas dificuldades adicionais, que no caso das chapas não existiam, e a seguir serão expostas.

Inicialmente, de acordo com o que foi visto no Item 2.3.2, a solução aproximada (80) poderia, em princípio, ser agora escrita como:

$$w = \phi_0 + \sum_{i=1}^{n} w_j \, \phi_j \tag{83}$$

onde w_j seriam os deslocamentos dos pontos nodais P_j, e poder-se-ia, aparentemente, utilizar no caso das placas o mesmo elemento triangular (de deformação constante) apresentado no Item 2.3.3 (neste caso, $\phi_j = \chi_j$).

Tal procedimento, porém, apresenta três impedimentos que o tornam infranqueável.

Em primeiro lugar, ao se observar a expressão (79), nota-se imediatamente que a injeção de (83) naquela expressão anula o seu primeiro membro. Isto acontece porque, no triângulo de deformação constante, as funções de forma são de primeiro grau.

Além disso, a superfície elástica que seria obtida com este procedimento, caso fosse possível obtê-la, seria poliédrica (de faces triangulares), violando claramente as condições de continuidade física da placa após

a deformação (a formação de dobras é inadmissível).

Finalmente, com tal elemento seria possível que se respeitasse a condição de contorno essencial (72), mas jamais a (73).

Assim, no problema das placas, não basta que as funções de forma contenham apenas termos de grau zero e grau um. São necessários termos de ordem mais elevada. Além disso, a superfície elástica, obtida ao longo da placa discretizada, deve apresentar continuidade não apenas nos deslocamentos w, mas também nas rotações $\alpha = (\partial w/\partial x)$ e $\beta = (\partial w/\partial y)$, para que não haja a formação de dobras.

A primeira exigência é fácil de ser cumprida, mas a segunda fica muito difícil de ser satisfeita, e este fato tem motivado enormes esforços no desenvolvimento dos estudos (a continuidade nas rotações se constitui no gargalo das pesquisas).

No item seguinte, será apresentado o elemento triangular de placa mais simples que se conhece. Ele não é totalmente contínuo nas rotações, mas provou ser extremamente útil na prática, devido à sua simplicidade.

3.3.2. Elemento Triangular de Placa

Inicialmente deve-se dizer, adiantando o que será visto mais tarde (ao se apresentarem os critérios de convergência) que, no caso das placas, as funções de forma devem ser polinômios completos até o segundo grau, pelo menos.

Assim, considere-se o triângulo de Pascal, desenvolvido até os termos cúbicos:

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & x & & y & & \\ & x^2 & & xy & & y^2 & \\ x^3 & & x^2y & & xy^2 & & y^3 \end{array} \qquad (84)$$

É, portanto, indispensável na expressão polinomial da função de forma o comparecimento dos seis termos, 1, x, y, x^2, xy e y^2, que constituem o desenvolvimento completo do segundo grau. Isto satisfaz a primeira exigência do item anterior.

Por outro lado, para que se consiga a continuidade nos deslocamentos e rotações (que é também uma condição de convergência, conforme será visto depois), a primeira idéia que surge é a de imporem-se, como parâmetros nodais de P_j, além do deslocamento w_j, as rotações

$$\alpha_j = \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_j \quad \text{e} \quad \beta_j = \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_j \tag{85}$$

Com isso, a solução aproximada (83) fica:

$$w = \phi_0 + \sum_{j=1}^{n} (w_j\ \phi_j + \alpha_j\ \psi_j + \beta_j\ \eta_j) \tag{86}$$

onde as funções de forma ϕ_j, ψ_j e η_j devem ser de natureza tal que a expressão (86) tenha sentido.

Vale a pena esclarecer o que significa isso.

Para tanto, considere-se o elemento finito triangular, de nós P_p, P_r e P_s, da Fig. 6. Nesse elemento, deve-se ter, por exemplo, para as funções de forma correspondentes ao nó P_p, começando com ϕ_p:

$$\begin{cases} \phi_p = 1 & \text{em } P_p \\ \phi_p = 0 & \text{em } P_r \text{ e } P_s \\ \dfrac{\partial \phi_p}{\partial x} = \dfrac{\partial \phi_p}{\partial y} = 0 & \text{em } P_p,\ P_r \text{ e } P_s \end{cases} \tag{87}$$

Analogamente, para ψ_p:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \psi_p}{\partial x} = 1 & \text{em } P_p \\ \dfrac{\partial \psi_p}{\partial x} = 0 & \text{em } P_r \text{ e } P_s \\ \psi_p = 0 \text{ e } \dfrac{\partial \psi_p}{\partial y} = 0 & \text{em } P_p,\ P_r \text{ e } P_s \end{cases} \tag{88}$$

Por último, para a função η_p:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \eta_p}{\partial y} = 1 & \text{em } P_p \\[2ex] \dfrac{\partial \eta_p}{\partial y} = 0 & \text{em } P_r \text{ e } P_s \\[2ex] \eta_p = 0 \text{ e } \dfrac{\partial \eta_p}{\partial x} = 0 & \text{em } P_p,\ P_r \text{ e } P_s \end{cases} \tag{89}$$

Para as funções de forma ϕ_r, ψ_r e η_r correspondentes ao nó P_r, assim como ϕ_s, ψ_s e η_s, relativas a P_s, as condições a serem impostas são análogas àquelas acima.

A obediência às condições expressas por (87), (88) e (89) garante a interpretação física dos parâmetros w_j, α_j e β_j da solução aproximada (86).

Essa mesma interpretação física vai facilitar enormemente o tratamento da condição de contorno mista (apoio simples), conforme será visto mais adiante.

Quanto à função ϕ_0, que também comparece em (86), sabe-se que ela é diferente de zero apenas nos elementos finitos contíguos à fronteira C_d. Dentro desses elementos, ϕ_0 varia com as coordenadas x e y, de modo a satisfazer, nos vértices da fronteira mencionada, as condições de contorno essenciais (72) e (73). Nesses mesmos elementos, nos nós internos, não pertencentes a C_d, tem-se:

$$\phi_0 = 0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial \phi_0}{\partial x} = \frac{\partial \phi_0}{\partial y} = 0$$

Evidentemente, quando as condições de contorno essenciais forem homogêneas (engastamento perfeito), será:

$$\phi_0 = 0$$

em todos os elementos.

Na construção de ϕ_0 são úteis as expressões (81) e (82), e essa construção segue marcha análoga àquela que será apresentada a seguir, para a determinação das funções de forma ϕ_j, ψ_j e η_j.

Quanto ao elemento finito que se quer apresentar, note-se que, sendo nove os parâmetros nodais (três em cada nó: um deslocamento e duas rotações), será necessário um desenvolvimento polinomial de nove termos para expressar univocamente o campo de deslocamentos w em função dos parâmetros nodais.

Aparece assim a grande dificuldade. Observando-se o triângulo de Pascal, nota-se que um desenvolvimento completo até o terceiro grau tem dez termos, ou seja, um a mais do que o necessário para o que se tem em mente. E o que é pior: o desprezo de qualquer termo do terceiro grau gera uma assimetria na expressão da função de forma (recorde-se que os termos de grau zero, primeiro e segundo graus não podem ser deixados de lado).

Levando em conta que, para o triângulo, as coordenadas naturais (ver o Anexo B), como o próprio nome diz, são muito mais apropriadas, surgiu um elemento para o qual se propôs:

$$\begin{aligned} w = {} & \omega_1 L_p + \omega_2 L_r + \omega_3 L_s + \omega_4(L_r^2 L_p + 0{,}5 L_p L_r L_s) + \\ & + \omega_5(L_s^2 L_r + 0{,}5 L_p L_r L_s) + \omega_6(L_p^2 L_s + 0{,}5 L_p L_r L_s) + \\ & + \omega_7(L_p^2 L_r + 0{,}5 L_p L_r L_s) + \omega_8(L_r^2 L_s + 0{,}5 L_p L_r L_s) + \\ & + \omega_9(L_s^2 L_p + 0{,}5 L_p L_r L_s) \end{aligned} \tag{90}$$

Através da regra da cadeia:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial L_p}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_p} + \frac{\partial L_r}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_r} + \frac{\partial L_s}{\partial x}\frac{\partial}{\partial L_s} \tag{91}$$

e, levando em conta as expressões (B-5), (B-6) e (B-7) do Anexo B, obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{B_p}{2\Delta}\Big\{\omega_1 + \omega_4(L_r^2 + 0{,}5L_r\,L_s) + \omega_5(0{,}5L_r\,L_s) +$$

$$+ \omega_6(2L_p\,L_s + 0{,}5L_r\,L_s) + \omega_7(2L_p\,L_r + 0{,}5L_r\,L_s) +$$

$$+ \omega_8(0{,}5\,L_r\,L_s) + \omega_9(L_s^2 + 0{,}5L_r\,L_s)\Big\} +$$

$$+ \frac{B_r}{2\Delta}\Big\{\omega_2 + \omega_4(2L_r\,L_p + 0{,}5L_p\,L_s) + \omega_5(L_s^2 + 0{,}5L_p\,L_s) +$$

$$+ \omega_6(0{,}5L_p\,L_s) + \omega_7(L_p^2 + 0{,}5L_p\,L_s) + \omega_8(2L_r\,L_s + 0{,}5L_p\,L_s) +$$

$$+ \omega_9(0{,}5L_p\,L_s)\Big\} + \frac{B_s}{2\Delta}\Big\{\omega_3 + \omega_4(0{,}5L_p\,L_r) +$$

$$+ \omega_5(2L_s\,L_r + 0{,}5L_p\,L_r) + \omega_6(L_p^2 + 0{,}5L_p\,L_r) +$$

$$+ \omega_7(0{,}5L_p\,L_r) + \omega_8(L_r^2 + 0{,}5L_p\,L_r) + \omega_9(2L_s\,L_p + 0{,}5L_p\,L_r)\Big\} \tag{92}$$

Analogamente, sendo:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial L_p}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial L_p} + \frac{\partial L_r}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial L_r} + \frac{\partial L_s}{\partial y}\,\frac{\partial}{\partial L_s} \tag{93}$$

obtém-se:

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{C_p}{2\Delta}\Big\{\ \ldots\ldots\ \Big\} + \frac{C_r}{2\Delta}\Big\{\ \ldots\ldots\ \Big\} + \frac{C_s}{2\Delta}\Big\{\ \ldots\ldots\ \Big\} \tag{94}$$

Na expressão acima, o conteúdo dos colchetes é idêntico ao dos da expressão (92), na mesma ordem.

Pode-se agora, de posse das expressões de w, $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$, que são, respectivamente, a (90), a (92) e a (94), determinar as funções de forma do elemento $P_p\,P_r\,P_s$, assim como a função ϕ_0, naqueles elementos onde ϕ_0 é diferente de zero. Em cada caso se recai num sistema de nove equações a nove incógnitas (ω_1 a ω_9).

Para a determinação de ϕ_p, basta imporem-se, nas equações (90), (92) e (94), as nove condições expressas por (87), notando que em P_p: $L_p = 1$, $L_r = L_s = 0$; em P_r: $L_r = 1$, $L_p = L_s = 0$, e em P_s: $L_s = 1$ e $L_p = L_r = 0$.

Para ψ_p, as condições são as (88) e para η_p, as (89).

Para a determinação de ϕ_r e ϕ_s, ψ_r e ψ_s, e η_r e η_s, as condições a serem impostas são análogas às (87), (88) e (89), respectivamente.

Na construção de ϕ_0, obriga-se que (90) obedeça à condição de contorno essencial (72), e que (92) e (94) obedeçam às condições resultantes da resolução do sistema (81) e (82). Essas imposições se fazem, na fronteira C_d, apenas nos pontos nodais.

Continuando, note-se que a equação (79) indica a necessidade de se determinarem as derivadas segundas das funções de forma e da função ϕ_0.

Para isso, podem-se utilizar os operadores (91) e (93), aplicados às expressões (92) e (94), particularizadas estas últimas para as funções de forma e para a função ϕ_0 (através dos correspondentes coeficientes ω_1 a ω_9, já determinados).

A determinação das integrais que comparecem em (79) pode ser feita, com muito mais facilidade, se se usarem as fórmulas B-11 e B-12, do Anexo B. Uma alternativa muito prática para isso é o uso de integração numérica.

Finalmente, quanto à satisfação ou não dos critérios de convergência, pelo elemento apresentado, isto será discutido mais adiante. Antes será apresentada a formulação matricial do método.

3.3.3. Formulação Matricial

Inicialmente, recordar-se-ão as premissas básicas de aplicação do Método dos Elementos Finitos, particularizadas para o elemento triangular esboçado no item anterior.

Assim, subdivide-se a placa em pequenas regiões triangulares, separadas entre si pelos seus lados. Os vértices dos triângulos serão os pontos nodais P_j, numerados de 1 a n (os nós pertencentes ao trecho C_d do contorno não são numerados, pois neles os deslocamentos, assim como as suas derivadas primeiras, já são conhecidos).

Os parâmetros nodais de P_j são, como já foi visto, o deslocamento w_j e as rotações $\alpha_j = (\partial w/\partial x)_j$ e $\beta_j = (\partial w/\partial y)_j$. A Fig. 23 ilustra o que se disse:

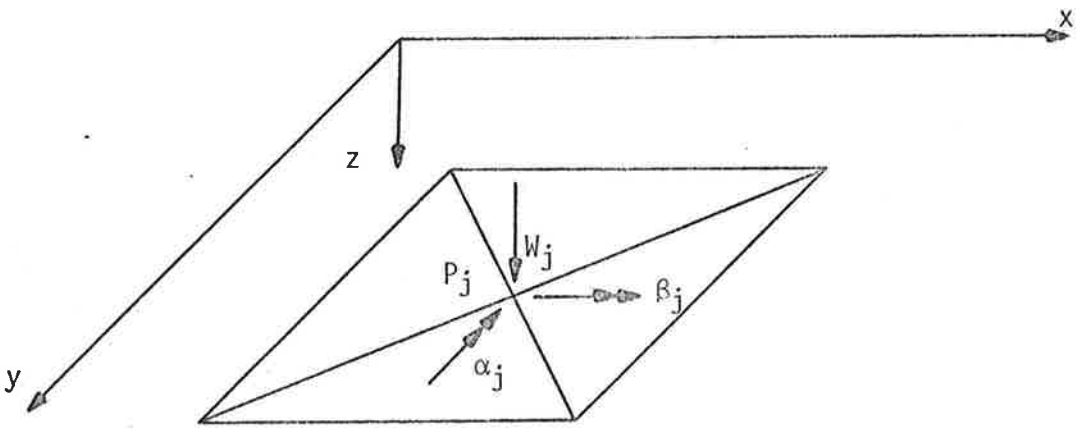


Figura 23

A Fig. 24 mostra, em hachurado, os elementos finitos nos quais as funções de forma ϕ_j, ψ_j e η_j são diferentes de zero. Nota-se nessa figura o caráter localizado das funções de forma.

Na Fig. 24, em cada um dos seis elementos hachurados, as funções ϕ_j, ψ_j e η_j são constr uídas conforme conduta esclarecida no item anterior.

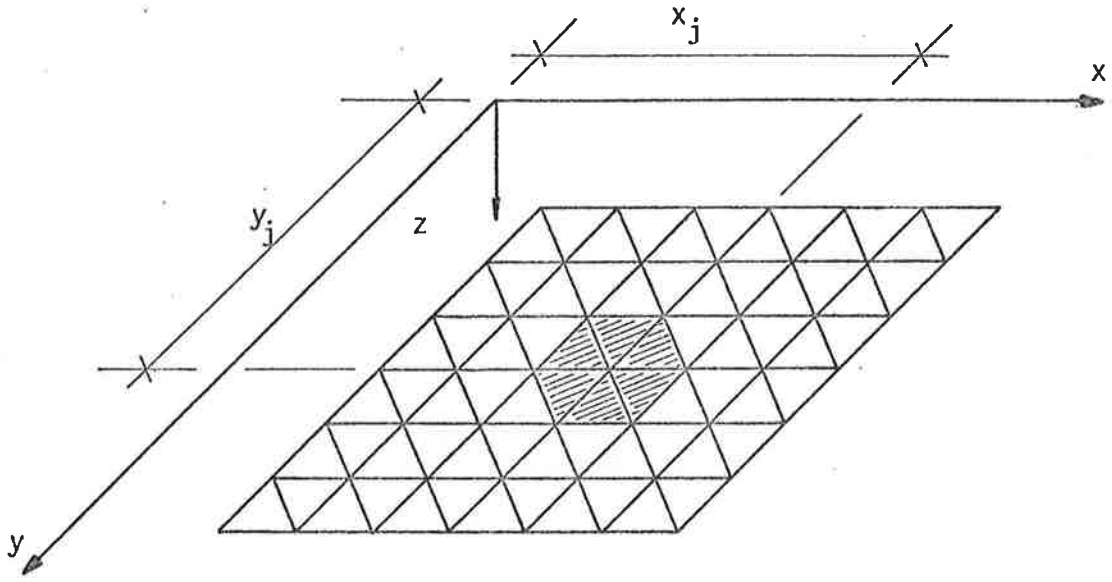


Figura 24

A solução aproximada (86) também pode ser escrita como:

$$w = \phi_0 + \underline{\xi}^T \underline{a}^b \tag{95}$$

(a letra b vem da palavra inglesa "bending").

O vetor

$$\underline{a}^b = \left\{ \begin{array}{c} \underline{a}_1^b \\ \vdots \\ \underline{a}_j^b \\ \vdots \\ \underline{a}_n^b \end{array} \right\} \tag{96}$$

é o *vetor dos parâmetros nodais*.

O subvetor genérico $\underline{a}_j^b$ é escrito:

$$\underline{a}_j^b = \left\{ \begin{array}{c} w_j \\ \alpha_j \\ \beta_j \end{array} \right\} \tag{97}$$

com $\alpha_j = (\frac{\partial w}{\partial x})_j$ e $\beta_j = (\frac{\partial w}{\partial y})_j$.

O vetor $\underline{\xi}$ é dado por:

$$\underline{\xi} = \begin{Bmatrix} \underline{\xi}_1 \\ \vdots \\ \underline{\xi}_j \\ \vdots \\ \underline{\xi}_n \end{Bmatrix} \tag{98}$$

O subvetor genérico $\underline{\xi}_j$ consiste em:

$$\underline{\xi}_j = \begin{Bmatrix} \phi_j \\ \psi_j \\ \eta_j \end{Bmatrix} \tag{99}$$

Para se chegar à formulação matricial do método, inicialmente introduz-se na equação (79) a solução aproximada (95). Em seguida, iguala-se ϕ, na expressão (79), a cada uma das 3n funções de forma contidas no vetor $\underline{\xi}$, sucessivamente (ou seja, basta fazer $\phi \equiv \underline{\xi}$). Obtém-se, dessa maneira, um sistema de 3n equações algébricas lineares que, uma vez resolvido, levanta as incógnitas do problema, que são os 3n parâmetros nodais contidos no vetor $\underline{a}^b$. À luz do conhecimento desses parâmetros nodais, a equação (95) se constitui na solução (aproximada) do problema.

O sistema obtido, em formato matricial, é o seguinte:

$$\underline{K}_0^b \; \underline{a}^b = \underline{f}^b \tag{100}$$

onde:

$$\underline{K}_0^b = D \iint_\Omega \left[\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial x \, \partial y} \right] dx \, dy \tag{101}$$

A matriz $\underline{K}_0^b$ é a *matriz de rigidez da placa*, da teoria de primeira ordem. Uma sua submatriz genérica $(\underline{K}_0^b)_{ij}$ é dada por:

$$(\underline{K}_0^b)_{ij} = D \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}_j^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}_j^T}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}_j^T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \underline{\xi}_j^T}{\partial x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial^2 \underline{\xi}_j^T}{\partial x\, \partial y} \right) dx\, dy \qquad (102)$$

Constata-se facilmente que:

$$(\underline{K}_0^b)_{ij} = (\underline{K}_0^b)_{ji}^T$$

Em outras palavras, a matriz $\underline{K}_0^b$ é simétrica. Este fato é conseqüência da adoção da hipótese de Galerkin e do fato de a equação diferencial de Lagrange ser auto-adjunta.

O vetor:

$$\underline{f}^b = - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial n} \bar{M}_n\, ds + \int_{C_\sigma} \underline{\xi}\, \bar{V}_n\, ds + \iint_\Omega \underline{\xi}\, p\, dx\, dy +$$

$$- D \iint_\Omega \left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu) \frac{\partial^2 \underline{\xi}}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x\, \partial y} \right) dx\, dy \qquad (103)$$

é o *vetor dos esforços nodais equivalentes*.

O subvetor genérico $\underline{f}_i^b$ é dado por:

$$\underline{f}_i^b = -\int_{C_\sigma} \frac{\partial \underline{\xi}_i}{\partial n} \bar{M}_n \, ds + \int_{C_\sigma} \underline{\xi}_i \bar{V}_n \, ds + \iint_\Omega \underline{\xi}_i \, p \, dx \, dy +$$

$$- D \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial x^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial y^2} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2}\right) + \right.$$

$$\left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \underline{\xi}_i}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x \, \partial y} \right\} dx \, dy = \begin{Bmatrix} F_i^z \\ M_i^y \\ M_i^x \end{Bmatrix} \qquad (104)$$

Os esforços nodais equivalentes se constituem de uma força vertical e dois momentos, aplicados no ponto nodal P_i, conforme esboçado na Fig. 25, e equivalem ao carregamento externo que atua na placa, assim como aos deslocamentos e rotações impostos em C_d.

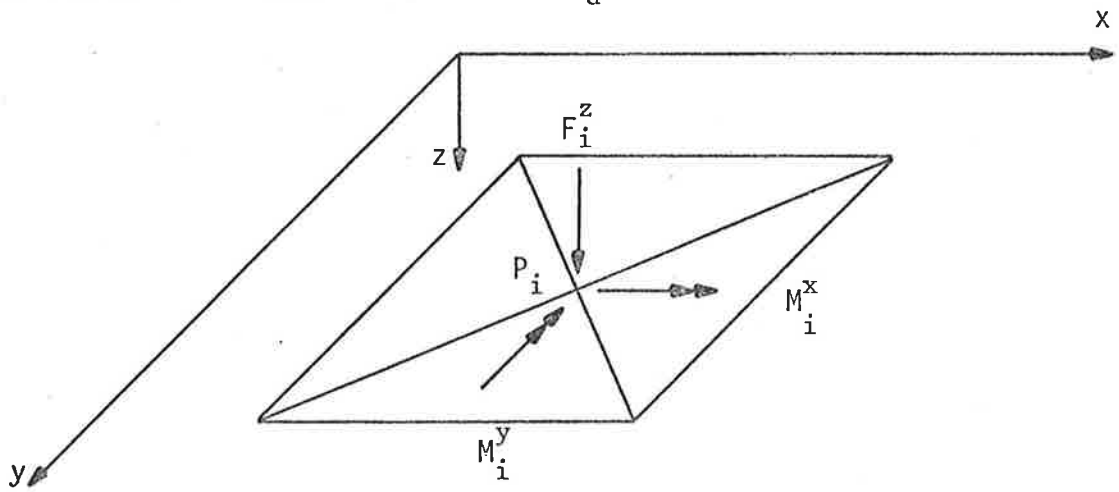


Figura 25

Para finalizar este item, diga-se que valem aqui todas as observações feitas no final do Item 2.3.4 sobre o fato de a matriz de rigidez ser bandeada.

3.3.4. Condição de Contorno Mista (Apoio Simples)

Num trecho da fronteira onde existe uma condição mista de contorno (apoio simples), são conhecidos:

- recalque de apoio (condição essencial):

$$w = \bar{w}(s) \tag{72}$$

- momento fletor externo aplicado (condição natural):

$$M_n = \bar{M}_n(s) \tag{74}$$

Tendo em vista a formulação matricial do Método dos Elementos Finitos, aliada à interpretação física das incógnitas (parâmetros nodais), o tratamento da condição de contorno mista é muito simples.

Em primeiro lugar, ainda na formulação do Método dos Resíduos Ponderados, a função ϕ de ponderação deve obedecer, além de às condições $\phi = (\partial\phi/\partial n) = 0$ em C_d, à restrição adicional $\phi = 0$ no trecho do contorno simplesmente apoiado. Portanto desaparece neste trecho a segunda das integrais que figuram no segundo membro de (79).

Além disso, com relação à solução aproximada (80), a função ϕ_0 deve obedecer agora, além de às condições já impostas em C_d,

$$\phi_0 = \bar{w}(s) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\phi_0}{\partial n} = \bar{\theta}(s)$$

à restrição adicional $\phi_0 = \bar{w}(s)$ na borda simplesmente apoiada.

Quanto às funções coordenadas ϕ_j, que também figuram em (80), elas devem respeitar, além das exigências

$$\phi_j = 0 \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial\phi_j}{\partial n} = 0 \qquad \text{em } C_d,$$

a seguinte outra imposição:

$$\phi_j = 0$$

na borda simplesmente apoiada.

Na aplicação do Método dos Elementos Finitos, os pontos nodais pertencentes à borda simplesmente apoiada devem ser numerados, como se se tratasse de uma fronteira do tipo C_σ (borda livre).

Entretanto não se definirão, nos pontos nodais P_j pertencentes à borda simplesmente apoiada, as funções de forma ϕ_j correspondentes aos deslocamentos w_j. Naqueles pontos haverá somente dois parâmetros nodais, que são as rotações α_j e β_j, cujas funções de forma associadas são, respectivamente, ψ_j e η_j. Note-se que a simetria da matriz de rigidez $\underline{K}_0^b$ ficou inalterada.

Para terminar, ressalte-se que a função ϕ_0, que comparece na solução aproximada (95), deve obedecer agora, além de às restrições impostas em C_d:

$$\phi_0 = \bar{w}(s) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = \bar{\theta}(s)$$

às condições adicionais

$$\phi_0 = \bar{w}(s) \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \phi_0}{\partial n} = 0$$

nos elementos finitos contíguos à borda simplesmente apoiada.

3.3.5. Critérios de Convergência

Recorde-se que convergência, no Método dos Elementos Finitos, significa "tendência à solução exata com a diminuição de tamanho dos elementos finitos".

No caso das placas, as condições para haver convergência são dadas a seguir.

Em primeiro lugar, a expressão aproximada do campo de deslocamentos obtido ao longo da placa discretizada deve conter *pelo menos* todos os termos de grau zero, primeiro e segundo graus:

$$w = \underbrace{A + Bx + Cy + Dx^2 + Ey^2 + Fxy}_{\text{mínimo de termos necessários}} + \ldots\ldots$$

Esta exigência corresponde ao *critério da completeza* e é muito fácil de ser obedecida. Basta que as funções de forma escolhidas contenham, na sua expressão, todos os termos de grau zero, primeiro e segundo graus.

O elemento finito triangular, apresentado no Item 3.3.2, satisfaz este critério, pois as funções de forma adotadas (ϕ_j, ψ_j e η_j), que são definidas por expressões análogas à (90), contêm todos os termos de grau zero, primeiro e segundo graus em x e y.

Para se perceber este fato, simplesmente substituam-se, na equação (90), as expressões de L_p, L_r e L_s, que são dadas, respectivamente, por (B-5), (B-6) e (B-7), do Anexo B.

Fazendo-se isso, fica claro que, nas funções de forma ϕ_j, ψ_j e η_j, estão presentes não apenas um polinômio completo de segundo grau (o que é condição necessária para a convergência) mas também todos os dez termos de um polinômio completo do terceiro grau (o que torna mais rápida a convergência).

Por outro lado, os campos obtidos de w, $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ devem ser contínuos, ao longo de toda a placa discretizada. Este é o *critério da conformidade*, difícil de ser satisfeito.

Evidentemente, tal critério ficará obedecido quando as funções de forma adotadas forem contínuas e tiverem as suas derivadas primeiras contínuas. Neste caso, os elementos correspondentes serão chamados de elementos *conformes* ou *compatíveis*.

O elemento triangular já estudado é do tipo *não-conforme*. Para a compreensão deste fato, reconheça-se, inicialmente, que, no interior dos elementos, há com certeza continuidade das funções de forma e de suas derivadas primeiras. Nos pontos nodais, tal continuidade também existe, pois foi imposta. Resta verificar o que acontece ao longo dos lados.

Considerem-se, na Fig. 26, dois elementos que têm um lado comum i-j:

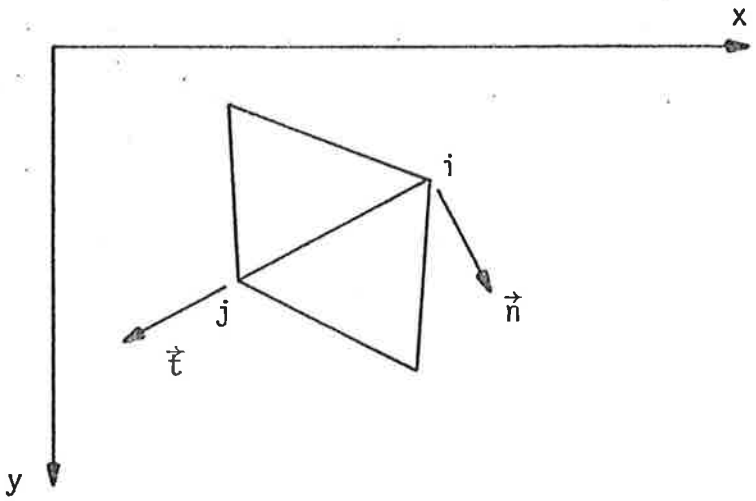


Figura 26

Os deslocamentos w descrevem uma curva do terceiro grau ao longo do lado comum:

$$w = A + Bt + Ct^2 + Dt^3 \tag{105}$$

pois w é expresso, como já foi visto, por um polinômio completo do terceiro grau em x e y. Assim, através de uma mudança de coordenadas do sistema xy para o sistema nt, indicado na Fig. 26, w será expresso por um polinômio completo do terceiro grau em n e t. Para n = 0, obtém-se a (105).

Os parâmetros nodais w_i, w_j, $(\partial w/\partial t)_i$ e $(\partial w/\partial t)_j$, que são comuns a ambos os elementos, fornecem quatro condições de contorno para w. Portanto os deslocamentos w ao longo do lado i-j são idênticos para ambos os elementos, já que uma curva do terceiro grau fica univocamente definida por quatro condições. Conseqüentemente, a derivada:

$$\frac{\partial w}{\partial t} = B + 2Ct + 3Dt^2 \tag{106}$$

também será igual para ambos os elementos.

Agora note-se que a derivada $\partial w/\partial n$, normal ao lado, que é expressa por um polinômio completo do segundo grau em n e t (pois, como já foi visto, w se exprime por um polinômio completo do terceiro grau em n e t), fica, para n = 0, descrita por uma curva do segundo grau em t.

Portanto a derivada $\partial w/\partial n$, ao longo do lado, está indefinida, pois uma curva do segundo grau necessita de três condições para bem defini-la, e neste caso há apenas duas, que são:

$$\left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_i \qquad \text{e} \qquad \left(\frac{\partial w}{\partial n}\right)_j$$

Assim, ao longo do lado, a derivada normal é descontínua, exceto (é claro) nos nós, onde a continuidade foi forçada. Logo, o elemento triangular apresentado é não-conforme.

Convém fazer ainda uma observação final, relativa ao cálculo dos momentos fletores e de torção. Uma vez determinado o vetor $\underline{a}^b$, a solução aproximada fica definida pela expressão (95), abaixo reescrita:

$$w = \phi_0 + \underline{\xi}^T \underline{a}^b$$

As rotações aproximadas são:

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial \phi_0}{\partial x} + \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial x} \underline{a}^b \tag{107}$$

$$\frac{\partial w}{\partial y} = \frac{\partial \phi_0}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial y} \underline{a}^b \tag{108}$$

Analogamente, para os campos aproximados de curvaturas, se têm:

$$\frac{1}{\rho_x} = -\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial x^2} \underline{a}^b \tag{109}$$

$$\frac{1}{\rho_y} = -\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = -\frac{\partial^2 \phi_0}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial y^2} \underline{a}^b \tag{110}$$

$$\frac{1}{\rho_{xy}} = \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \phi_0}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}^T}{\partial x\, \partial y}\, \underline{a}^b \qquad (111)$$

Em virtude da não-conformidade do elemento triangular apresentado, as curvaturas são calculadas no centro de gravidade dos elementos, onde os resultados são confiáveis. Nota-se uma gradativa deterioração dos resultados conforme se afasta da região central dos elementos.

Uma vez calculadas as curvaturas, através de (109), (110) e (111), os momentos, fletores e de torção, ficam conhecidos por intermédio das expressões (54), (55) e (56).

O elemento triangular descrito, apesar de ser não-conforme, é usado na prática, com muito bons resultados. Ele foi proposto por Zienkiewicz.

4. TEORIA DE SEGUNDA ORDEM DAS PLACAS

4.1. Equacionamento Diferencial

4.1.1. Premissas Básicas

Será abordada, a seguir, uma teoria de segunda ordem, ou seja, geometricamente não-linear, de caráter simplificado, e aplicável ao estudo das placas elásticas delgadas.

Admitir-se-á que as deformações lineares ε, assim como aquelas angulares γ, continuem sendo muito pequenas (da ordem do milésimo). Assim, a Lei de Hooke segue válida, isto é, fica preservada a linearidade física.

Por outro lado, sabe-se que a ordem de grandeza das rotações é que define o maior ou menor grau de precisão exigido na construção de uma teoria de segunda ordem.

Classificam-se as rotações, de acordo com a sua ordem de grandeza, em três tipos:

a) *Rotações muito pequenas* (ordem de grandeza de 0,001): são aquelas da teoria de primeira ordem. Para elas valem sempre as aproximações (1) e (2).

b) *Rotações pequenas* (ordem de grandeza de $\sqrt{0{,}001} \cong 0{,}03$): são aquelas rotações que, apesar de não serem grandes, têm intensidade suficiente para provocar efeitos de segunda ordem. O presente estudo é feito para rotações dessa ordem de grandeza.

   Para uma rotação dessa intensidade ($\alpha = 0{,}03$), podem-se confundir o seno, a tangente e o arco (em radianos), de acordo com a aproximação (2).

   Quanto ao cosseno, será feito unitário quando aparecer como fator multiplicativo. Entretanto, sempre que uma deformação e a diferença $(1 - \cos \alpha)$ figurarem como parcelas de uma mesma

expressão, a aproximação (1) ficará impossível de ser aceita, pois $(1 - \cos \alpha)$ será da mesma ordem de grandeza da deformação.

Neste caso, adotar-se-á a aproximação:

$$\cos \alpha = 1 - \frac{\alpha^2}{2} \tag{112}$$

que corresponde a se tomarem os dois primeiros termos do desenvolvimento da função cosseno em série de McLaurin. O terceiro termo desse desenvolvimento, que envolve a quarta potência da rotação, evidentemente fica desprezível quando comparado com a segunda potência, para $\alpha = 0{,}03$.

Menção será feita, no desenrolar da exposição, sempre que tais simplificações forem usadas.

c) *Rotações grandes* (ordem de grandeza maior do que 0,03): para essas não valem mais as aproximações introduzidas.

Os problemas que envolvem grandes rotações são de equacionamento complicado, mas felizmente têm pouquíssimo interesse prático. Para eles deixa de valer, em geral, a Lei de Hooke.

Assim sendo (ver observação (e) do Item 3.1.1), as deformações do plano médio da placa (encurtamento ou alongamento) não podem mais ser esquecidas, porque além das forças de membrana daí decorrentes serem agora de grandeza apreciável, o fato de as rotações não serem mais muito pequenas faz com que aquelas forças interfiram no equilíbrio transversal do elemento da placa.

Logo, o problema perde a linearidade geométrica, pois doravante o equilíbrio será escrito na estrutura deformada, e as relações deformação-deslocamento serão não-lineares.

A natureza do estudo a ser feito permitirá que se considere, no comportamento a flexão da estrutura, o efeito de cargas externas atuantes no plano médio da placa (a ele paralelas).

Para facilitar a formulação, todas as condições de contorno essenciais serão supostas iguais a zero.

4.1.2. Equilíbrio no Plano

Continuam valendo aqui as equações de equilíbrio no plano (12) e (13), que foram deduzidas com base na Fig. 3.

Quanto às condições de contorno, têm-se, em C_d:

$$\left\{ \begin{array}{ll} u = 0 & \\ & \text{condições } \textit{essenciais} \\ v = 0 & \end{array} \right. \qquad \begin{array}{r} (113) \\ \\ (114) \end{array}$$

Em C_σ, permanecem válidas as condições *naturais* (21) e (22).

Nas equações (12), (13), (21) e (22), todas de equilíbrio, está embutida a aproximação de se fazerem unitários os cossenos das rotações:

$$\alpha \cong \text{sen } \alpha \cong \text{tg } \alpha = \frac{\partial w}{\partial x} \qquad (115)$$

e

$$\beta \cong \text{sen } \beta \cong \text{tg } \beta = \frac{\partial w}{\partial y} \qquad (116)$$

que se verificam em planos perpendiculares aos eixos y e x, respectivamente (observe-se que nas expressões (115) e (116) fizeram-se iguais o arco, o seno e a tangente, de acordo com (2)).

Em outras palavras, as equações (12), (13) (21) e (22) valem, estritamente falando, para $N_x \cos \alpha$, $N_y \cos \beta$, $N_{xy} \cos \beta$ e $N_{yx} \cos \alpha$ (ver Fig. 3).

Entretanto, por serem α e β da ordem de 0,03, como já se disse, e pelo fato de $\cos \alpha$ e $\cos \beta$ aparecerem como coeficientes multiplicativos, fizeram-se, naquelas equações:

$$\cos \alpha = \cos \beta = 1$$

4.1.3. Equilíbrio Transversal

Seja feito, na Fig. 3, um corte no elemento dx dy, através de um plano perpendicular ao eixo y:

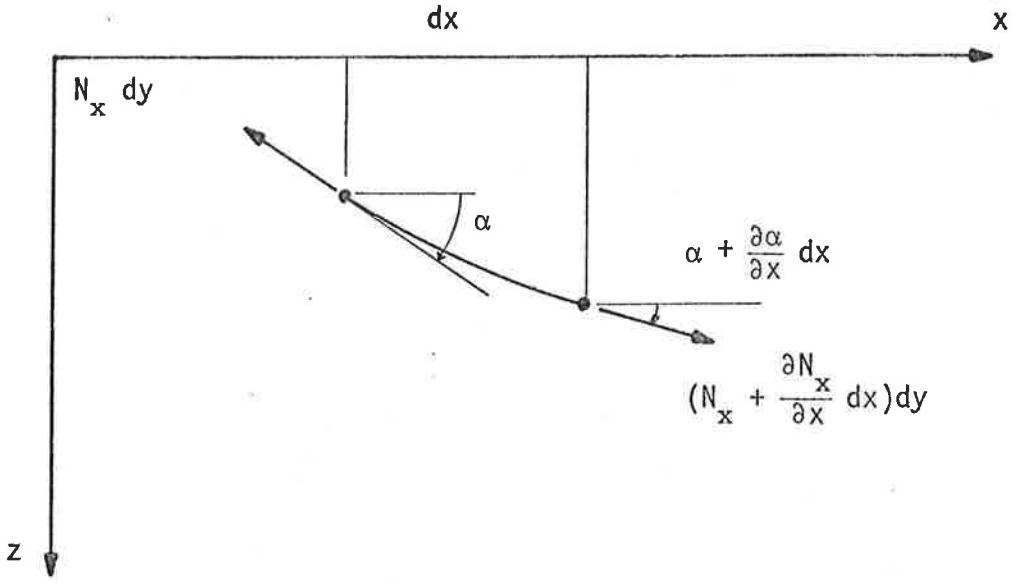


Figura 27

A projeção das forças N_x na direção z produz:

$$- N_x \, dy \, \text{sen} \, \alpha + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) \, dy \, \text{sen} \, (\alpha + \frac{\partial \alpha}{\partial x} dx)$$

Considerando (115), a expressão acima fica:

$$- N_x \, dy \, \frac{\partial w}{\partial x} + (N_x + \frac{\partial N_x}{\partial x} dx) \, dy \, (\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx)$$

Desprezando-se o infinitésimo de segunda ordem, vem:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} dx \, dy + \frac{\partial N_x}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial x} dx \, dy \qquad \text{(a)}$$

Analogamente, a projeção das forças N_y na vertical reduz-se a:

$$N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} dx\, dy + \frac{\partial N_y}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial y} dx\, dy \qquad \text{(b)}$$

Por outro lado, a projeção das forças N_{xy} na direção z se escreve como:

$$- N_{xy}\, dy \operatorname{sen} \beta + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx)\, dy \operatorname{sen} (\beta + \frac{\partial \beta}{\partial x} dx)$$

Levando (116) em conta, vem:

$$- N_{xy}\, dy \frac{\partial w}{\partial y} + (N_{xy} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} dx)\, dy\, (\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} dx)$$

ou, esquecendo-se do infinitésimo de segunda ordem:

$$N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} dx\, dy + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} dx\, dy$$

Uma expressão análoga pode ser obtida para a projeção das forças $N_{yx} = N_{xy}$ na vertical. A soma das projeções das forças N_{xy} e N_{yx} é dada por:

$$(2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} \frac{\partial w}{\partial x})\, dx\, dy \qquad \text{(c)}$$

As expressões (a), (b) e (c) devem ser adicionadas à carga transversal p dx dy que atua no elemento.

Fazendo-se isso, a equação de equilíbrio que era, na teoria de primeira ordem, dada pela (61), agora se expressa como:

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = - (p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} +$$

$$+ 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} - h\, X \frac{\partial w}{\partial x} - h\, Y \frac{\partial w}{\partial y}) \qquad (117)$$

(observe-se que, quando se somaram as expressões (a), (b) e (c), as equações de equilíbrio no plano (12) e (13) foram invocadas).

Finalmente, considerando-se as relações momento-curvatura (54), (55) e (56), a expressão (117) assume a sua forma final:

$$D \nabla^4 w = p + N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x \, \partial y} - h X \frac{\partial w}{\partial x} - h Y \frac{\partial w}{\partial y} \quad (118)$$

Quanto às condições de contorno de (118):

a) Em C_d reinam as condições essenciais (72) e (73), agora tornadas homogêneas:

$$\begin{cases} w = 0 & (119) \\ \dfrac{\partial w}{\partial n} = 0 & (120) \end{cases}$$

Isso corresponde a um apoio do tipo engastamento perfeito.

b) Em C_σ permanece a condição natural (74). Entretanto a condição (75), também natural, deve ser modificada. Para isso considere-se, na Fig. 4, o equilíbrio transversal do prisma infinitesimal lá esboçado.

As cargas externas $h \bar{X}$ e $h \bar{Y}$, por serem conservativas, não têm projeção vertical. Sendo assim, a expressão (75) agora fica:

$$V_n \, ds = \bar{V}_n \, ds - (N_x \, ds \cos \delta) \frac{\partial w}{\partial x} - (N_y \, ds \operatorname{sen} \delta) \frac{\partial w}{\partial y} +$$

$$- (N_{xy} \, ds \cos \delta) \frac{\partial w}{\partial y} - (N_{xy} \, ds \operatorname{sen} \delta) \frac{\partial w}{\partial x}$$

ou ainda

$$V_n = \bar{V}_n - (N_x \cos \delta + N_{xy} \operatorname{sen} \delta) \frac{\partial w}{\partial x} - (N_y \operatorname{sen} \delta +$$

$$+ N_{xy} \cos \delta) \frac{\partial w}{\partial y}$$

Considerando-se (21) e (22), tem-se, finalmente:

$$V_n = \bar{V}_n - h\,\bar{X}\,\frac{\partial w}{\partial x} - h\,\bar{Y}\,\frac{\partial w}{\partial y} \tag{121}$$

4.1.4. Acoplamento dos Efeitos de Membrana e de Flexão

As equações diferenciais de equilíbrio (12), (13) e (118), com as suas condições de contorno, governam o comportamento da estrutura. As incógnitas são os deslocamentos u, v e w dos pontos do plano médio da placa. É necessário, pois, escreverem-se as forças de membrana em função daqueles deslocamentos. É o que se fará em seguida.

As deformações ε_x, ε_y e γ_{xy} dos pontos do plano médio da placa são escritas, na sua forma mais geral, como (as expressões seguintes são válidas, como se sabe, quando as deformações são muito pequenas):

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial x}\,\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\,\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y}$$

Devido à grande rigidez da placa no seu próprio plano, e ao fato de as rotações $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ serem pequenas, as grandezas

$$\frac{\partial u}{\partial x}\ ,\ \frac{\partial u}{\partial y}\ ,\ \frac{\partial v}{\partial x}\ \text{ e }\ \frac{\partial v}{\partial y}$$

são muito pequenas, da mesma ordem de grandeza das deformações. Assim, as expressões anteriores ficam:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 \tag{122}$$

$$\varepsilon_y = \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 \tag{123}$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial w}{\partial y} \tag{124}$$

As expressões acima constituem as relações deformação-deslocamento para a interação entre os efeitos de membrana e os de flexão. Elas constam de uma parte linear (que já foi discutida no Item 2.1.3) e de outra parte, não-linear, que pode e deve ser interpretada à luz das aproximações introduzidas no Item 4.1.1.

Por exemplo, para a parte não-linear ε'_x do alongamento ε_x:

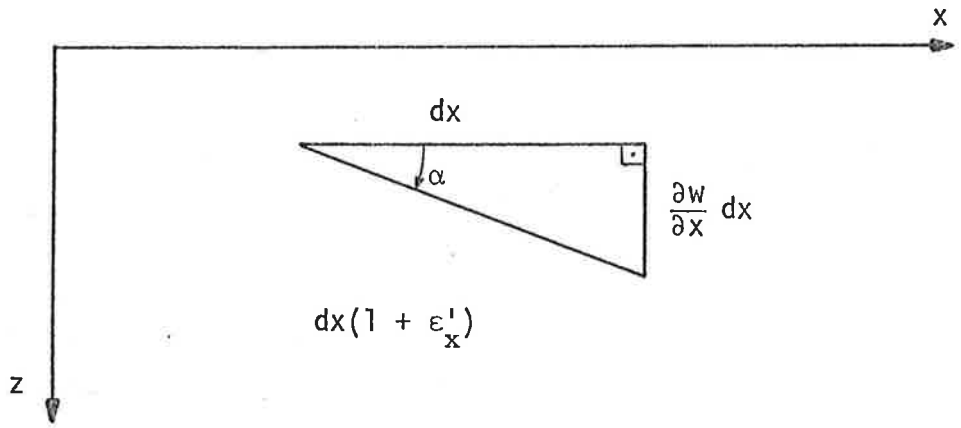


Figura 28

De acordo com a Fig. 28, pode-se escrever:

$$dx(1 + \varepsilon'_x)\cos\alpha = dx$$

Portanto, após algumas operações algébricas:

$$\varepsilon'_x \cdot \cos\alpha = 1 - \cos\alpha$$

No primeiro membro da expressão acima, cos α aparece como fator multiplicativo e pode, portanto, ser feito igual à unidade. Fica:

$$\varepsilon'_x = 1 - \cos\alpha$$

Agora, ε'_x e $(1 - \cos\alpha)$ figuram como parcelas de uma mesma expressão. Utilizando a aproximação (112), vem:

$$\varepsilon'_x = 1 - (1 - \frac{\alpha^2}{2}) = \frac{1}{2}\alpha^2$$

Finalmente, em virtude de (115), resulta:

$$\varepsilon'_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2$$

como se queria demonstrar.

Para a parte não linear ε'_y de ε_y, a demonstração é análoga.

Em relação à parte não-linear γ'_{xy} da distorção γ_{xy}, considere-se a Fig. 29:

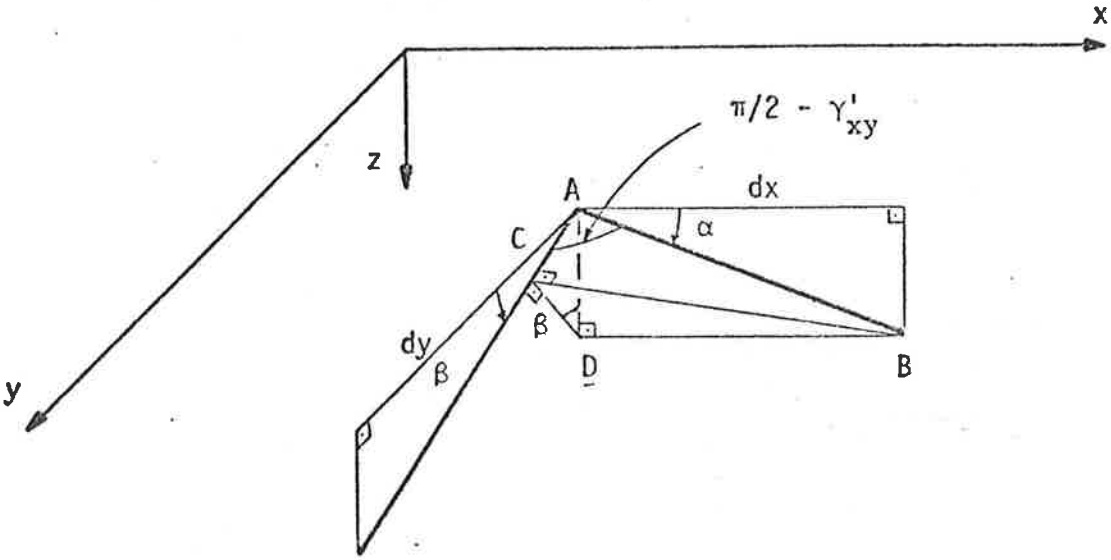


Figura 29

Dela pode-se escrever:

$$\overline{AC} = \overline{AB}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \gamma'_{xy}\right) = \overline{AD}\,\text{sen}\,\beta = \overline{AB}\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$$

$$\therefore \quad \text{sen}\ \gamma'_{xy} = \text{sen}\ \alpha\ \text{sen}\ \beta$$

ou, o que é equivalente:

$$\text{sen}\ \gamma'_{xy} = \cos\alpha\ \text{tg}\ \alpha\ \cos\beta\ \text{tg}\ \beta$$

ou ainda:

$$\text{sen}\ \gamma'_{xy} = \cos\alpha\ \frac{\partial w}{\partial x}\ \cos\beta\ \frac{\partial w}{\partial y}$$

Mas $\cos\alpha = \cos\beta = 1$, por figurarem como coeficientes multiplicativos. Por outro lado, sendo γ'_{xy} uma distorção muito pequena, o resultado final é:

$$\gamma'_{xy} = \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y}$$

como se queria demonstrar.

Continuando, injetem-se as equações de compatibilidade (122), (123) e (124) nas equações constitutivas (6), (7) e (8). Obter-se-ão as forças de membrana em função dos deslocamentos:

$$N_x = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 + \nu\left[\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right]\right\} \tag{125}$$

$$N_y = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\left\{\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 + \nu\left[\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right]\right\} \tag{126}$$

$$N_{xy} = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\ \frac{1-\nu}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial x}\ \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{127}$$

A introdução das expressões acima nas equações de equilíbrio (12), (13) e (118) gera um sistema de três equações nas incógnitas u, v e w. Trata-se de equações diferenciais não-lineares, acoplando os efeitos de membrana com os de flexão. A solução analítica desse sistema é desconhecida para o caso geral.

4.1.5. Um Problema Particular: o da Flambagem

Supondo-se que $p = 0$ em Ω, $\bar{M}_n = \bar{V}_n = 0$ em C_σ, e que o carregamento plano $h\,X$, $h\,Y$ (em Ω), $h\,\bar{X}$, $h\,\bar{Y}$ (em C_σ) cresce, a partir de zero, proporcionalmente a um parâmetro λ (fator de carga), a partir de um certo valor de λ (que será denominado crítico), a chapa pode passar a ter, além da configuração trivial de equilíbrio ($w = 0$), uma outra configuração (estável) de equilíbrio, enquanto que a trivial se torna instável. Em outras palavras, pode ocorrer um ponto de bifurcação do equilíbrio (flambagem).

O fenômeno da flambagem, se acontecer, será governado pela equação diferencial (118), quando nela se fizer $p = 0$:

$$D\,\nabla^4 w = \lambda \left(N_x^* \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y^* \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}^* \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - h\,X^* \frac{\partial w}{\partial x} - h\,Y^* \frac{\partial w}{\partial y}\right) \tag{128}$$

Observe-se que as forças de membrana N_x^*, N_y^* e N_{xy}^*, devidas ao carregamento de referência $h\,X^*$, $h\,Y^*$, $h\,\bar{X}^*$ e $h\,\bar{Y}^*$, são determinadas com o uso exclusivo das equações (12) e (13) de equilíbrio no plano, junto com suas condições de contorno (113), (114), (21) e (22).

A explicação desse fato é muito simples. Quando λ aumenta e atinge o seu valor crítico, a chapa flamba, mesmo para rotações $\partial w/\partial x$ e $\partial w/\partial y$ muito pequenas. Ora, se as rotações são muito pequenas, as forças λN_x^*, λN_y^* e λN_{xy}^* passam a ser funções só de u e v, e portanto determináveis apenas e tão somente com a utilização das condições de equilíbrio no plano.

Isto significa que a flexão não influencia o estado plano, embora a recíproca evidentemente não se verifique. É como se houvesse um desacoplamento parcial das equações governantes.

Assim, a equação (128) rege o fenômeno da flambagem quando este ainda é incipiente. Neste ponto, uma importante advertência deve ser feita:

a expressão (128) serve apenas para determinar a carga de flambagem; se houver a necessidade de se estudar o comportamento pós-crítico da chapa flambada, deve-se recorrer à teoria não linear.

A equação diferencial homogênea (128) caracteriza um problema linear de autovalores. A solução trivial é imediata ($w = 0$). Por outro lado, só haverá soluções diferentes da trivial para certos valores (em número infinito) de λ, que são os autovalores. As correspondentes autofunções w são os "modos" de flambagem.

O menor dos autovalores ($\lambda_{mín} = \lambda_{cr}$) define, para todos os efeitos práticos, o carregamento crítico.

A pesquisa analítica de soluções da equação (128) foge ao escopo deste trabalho, estando esse problema, inclusive, ainda não resolvido para o caso geral.

Em relação às condições de contorno de (128), são elas:

a) em C_d, valem as expressões (119) e (120).

b) em C_σ:

$$M_n = \bar{M}_n = 0 \qquad (129)$$
$$\bar{V}_n = 0$$

Portanto, de (121):

$$V_n = \lambda \left(- h \bar{X}^* \frac{\partial w}{\partial x} - h \bar{Y}^* \frac{\partial w}{\partial y}\right) \qquad (130)$$

4.1.6. <u>A Membrana Infinitamente Flexível (Rede)</u>

Até agora, supôs-se sempre que a espessura h da placa fosse pequena ("thin plate").

Quando a espessura for muito pequena ("very thin plate") a rigidez da

placa:

$$D = \frac{E\,h^3}{12(1 - \nu^2)}$$

praticamente se anulará, e o equilíbrio transversal do elemento infinitesimal dx dy só será possível graças ao aparecimento das componentes verticais das forças de membrana.

O equacionamento diferencial feito, de segunda ordem, se aplica a este caso, com muita propriedade e importantes simplificações.

Permanecem válidas as equações (12) e (13) de equilíbrio no plano. Entretanto a equação de equilíbrio transversal, que era a (118), passa a ser escrita, com D = 0, da seguinte forma:

$$N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} - h\,X \frac{\partial w}{\partial x} - h\,Y \frac{\partial w}{\partial y} = -\,p \qquad (131)$$

Observe-se que a (118), que era de quarta ordem, passa a ser de segunda ordem.

Quanto às condições de contorno do problema, continuam valendo as expressões (21) e (22), assim como as (19) e (20), estas últimas feitas homogêneas. Entretanto, para a equação diferencial (131), desaparece a fronteira natural C_σ, permanecendo apenas as condições de contorno essenciais, sob a forma única:

$$w = 0 \qquad (132)$$

Assim, os carregamentos $\bar{M}_n$ e $\bar{V}_n$ não são fisicamente possíveis de ser aplicados à membrana.

O problema da flambagem perde o sentido, pois, supondo-se p = 0, a configuração trivial de equilíbrio (w = 0) seria instável, por menores que fossem h X, h Y, h $\bar{X}$ e h $\bar{Y}$.

Em outras palavras: a membrana não tendo rigidez a flexão, fica incapaz de gerar os momentos fletores e de torção que seriam necessários para equilibrar a configuração alternativa de equilíbrio. À mesma conclusão se pode chegar examinando a equação (128), com D = 0. A única possibilidade de solução, além da trivial, é dada por $\lambda = 0$.

4.2. Método dos Elementos Finitos

4.2.1. Introdução

Agora será mostrado como pode o Método dos Elementos Finitos ser utilizado na resolução do sistema não-linear constituído pelas equações de equilíbrio diferenciais (12), (13) e (118).

A introdução do método será feita, como sempre, via resíduos ponderados (Galerkin). Os conceitos básicos de ambos os métodos (resíduos ponderados e elementos finitos) são os mesmos que já foram elucidados nos dois capítulos anteriores, e por causa disso não serão repetidos.

4.2.2. O Efeito de Membrana

Neste item serão tratadas as equações de equilíbrio no plano.

Esta apresentação difere daquela que se fez no Capítulo 2, por levar em conta, nas expressões de N_x, N_y e N_{xy}, os efeitos de segunda ordem.

Pode-se partir das equações integrais de equilíbrio (24) e (25), nas quais se injetam as expressões (125), (126) e (127). Produzir-se-ão as duas seguintes equações:

$$\frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial x}+\nu\frac{\partial v}{\partial y}\right)dx\,dy+\frac{1-\nu}{2}\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial y}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy\right]+$$

$$+\frac{h\,E}{2(1-\nu^2)}\left[\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy+\nu\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{2}\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy+\frac{1-\nu}{2}\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy\right]=$$

$$=h\iint_\Omega \chi\,X\,dx\,dy+h\int_{C_\sigma}\chi\,\bar{X}\,ds \qquad (133)$$

$$\frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial y}\left(\frac{\partial v}{\partial y}+\nu\frac{\partial u}{\partial x}\right)dx\,dy+\frac{1-\nu}{2}\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial x}\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{\partial v}{\partial x}\right)dx\,dy\right]+$$

$$+\frac{h\,E}{2(1-\nu^2)}\left[\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2 dx\,dy+\nu\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial y}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2 dx\,dy+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{2}\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\,dx\,dy+\frac{1-\nu}{2}\iint_\Omega \frac{\partial\chi}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\,dx\,dy\right]=$$

$$=h\iint_\Omega \chi\,Y\,dx\,dy+h\int_{C_\sigma}\chi\,\bar{Y}\,ds \qquad (134)$$

O próximo passo consiste em discretizar a placa através de uma malha de elementos finitos (triangulares). Os pontos nodais P_j são numerados de 1 a n. Relembre-se que os nós pertencentes a C_d não são numerados, pois neles os deslocamentos e rotações já são conhecidos (valem zero neste capítulo).

Para interpolar os deslocamentos u e v, considerem-se as aproximações (30), com $\chi_u = \chi_v = 0$, escritas a seguir:

$$\begin{cases} u = u_j \, \chi_j & (135) \\ v = v_j \, \chi_j & (136) \end{cases}$$

A interpolação dos deslocamentos w é dada pela (95), com $\phi_0 = 0$:

$$w = \underline{\xi}^T \, \underline{a}^b = (\underline{a}^b)^T \, \underline{\xi} \qquad (137)$$

Em seguida, introduzam-se as interpolações (135), (136) e (137) nas equações integrais (133) e (134).

Depois faça-se, nessas equações, $\chi = \chi_1$ (de acordo com a sugestão de Galerkin). Obter-se-ão as duas primeiras equações do sistema. E assim por diante, até que para $\chi = \chi_n$ serão produzidas as duas últimas equações, num total de 2n equações.

Escrevem-se abaixo os resultados obtidos para $\chi = \chi_i$:

$$\frac{h\,E}{1-\nu^2} \left\{ \iint_\Omega u_j \left(\frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} \right) dx\, dy + \right.$$

$$\left. + \iint_\Omega v_j \left(\nu \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \frac{\partial \chi_j}{\partial x} \right) dx\, dy \right\} +$$

$$+ \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial \chi_i}{\partial x} (\underline{a}^b)^T \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial x} \underline{a}^b + \nu \frac{\partial \chi_i}{\partial x} (\underline{a}^b)^T \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial y} \underline{a}^b + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} (\underline{a}^b)^T \left(\frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial x} \right) \underline{a}^b \right\} dx\, dy =$$

$$= h \iint_\Omega \chi_i \, X \, dx\, dy + h \int_{C_\sigma} \chi_i \, \bar{X} \, ds \qquad (138)$$

$$\frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[\iint_\Omega u_j\left(\nu\frac{\partial\chi_i}{\partial y}\frac{\partial\chi_j}{\partial x}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi_i}{\partial x}\frac{\partial\chi_j}{\partial y}\right)dx\,dy+\right.$$

$$+\iint_\Omega v_j\left(\frac{\partial\chi_i}{\partial y}\frac{\partial\chi_j}{\partial y}+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi_i}{\partial x}\frac{\partial\chi_j}{\partial x}\right)dx\,dy+$$

$$+\frac{h\,E}{2(1-\nu^2)}\iint_\Omega\left[\frac{\partial\chi_i}{\partial y}(\underline{a}^b)^T\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial y}\frac{\partial\underline{\xi}^T}{\partial y}\underline{a}^b+\nu\frac{\partial\chi_i}{\partial y}(\underline{a}^b)^T\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial x}\frac{\partial\underline{\xi}^T}{\partial x}\underline{a}^b+\right.$$

$$\left.+\frac{1-\nu}{2}\frac{\partial\chi_i}{\partial x}(\underline{a}^b)^T\left(\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial x}\frac{\partial\underline{\xi}^T}{\partial y}+\frac{\partial\underline{\xi}}{\partial y}\frac{\partial\underline{\xi}^T}{\partial x}\right)\underline{a}^b\right]dx\,dy=$$

$$=h\iint_\Omega\chi_i\,Y\,dx\,dy+h\int_{C_\sigma}\chi_i\,\bar{Y}\,ds \tag{139}$$

O sistema de equações resultante, em formato matricial, é o seguinte:

$$\underline{K}_0^p\;\underline{a}^p+\underline{G}\;\underline{a}^b=\underline{f}^p \tag{140}$$

A matriz $\underline{K}_0^p$ é dada pelas expressões (33), (34) e (35). O vetor $\underline{a}^p$ é dado por (36) e (37). Por outro lado, o vetor $\underline{f}^p$ é fornecido pelas (38), (39) e (40), com $\chi_u = \chi_v = 0$. Além disso, o vetor $\underline{a}^b$ está definido pelas expressões (96) e (97).

A matriz $\underline{G}$ se escreve como:

$$\underline{G}=\begin{bmatrix}\underline{G}_1\\ \vdots\\ \underline{G}_n\end{bmatrix} \tag{141}$$

A i-ésima submatriz de $\underline{G}$ é dada por:

$$\underline{G}_i = \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \begin{bmatrix} (\underline{a}^b)^T \iint_\Omega \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial x} (\underline{A} + \nu\, \underline{B}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \underline{C} \right] dx\, dy \\ (\underline{a}^b)^T \iint_\Omega \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial y} (\underline{B} + \nu\, \underline{A}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \underline{C} \right] dx\, dy \end{bmatrix} \tag{142}$$

onde as matrizes $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ são definidas por:

$$\underline{A} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial x} \tag{143}$$

$$\underline{B} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial y} \tag{144}$$

$$\underline{C} = \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial x} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\xi}}{\partial y} \frac{\partial \underline{\xi}^T}{\partial x} \tag{145}$$

Observe-se a simetria de $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$.

As matrizes $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ são de ordem 3n x 3n. As suas submatrizes, de ordem 3 x 3, são as seguintes:

$$\underline{A}_{ij} = \frac{\partial \underline{\xi}_i}{\partial x} \frac{\partial \underline{\xi}_j^T}{\partial x} \tag{146}$$

$$\underline{B}_{ij} = \frac{\partial \underline{\xi}_i}{\partial y} \frac{\partial \underline{\xi}_j^T}{\partial y} \tag{147}$$

$$\underline{C}_{ij} = \frac{\partial \underline{\xi}_i}{\partial x} \frac{\partial \underline{\xi}_j^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\xi}_i}{\partial y} \frac{\partial \underline{\xi}_j^T}{\partial x} \tag{148}$$

Assim, fica claro que a matriz $\underline{G}_i$ é de ordem (2 x 3n), enquanto que $\underline{G}$ será de ordem (2n x 3n). A matriz $\underline{G}$ é função linear dos parâmetros nodais contidos em $\underline{a}^b$.

Em suma, há n equações matriciais, das quais a i-ésima, em notação

indicial, se escreve:

$$(\underline{K}_0^P)_{ij} \; \underline{a}_j^P + \underline{G}_i \; \underline{a}^b = \underline{f}_i^P$$

Cada uma dessas equações matriciais se desdobra em duas equações comuns.

O sistema (140) não pode ainda ser resolvido, pois há nele 5n incógnitas e apenas 2n equações.

No item seguinte serão determinadas as 3n equações restantes.

4.2.3. Flexão. Matriz de Rigidez Geométrica

Neste item será tratada a equação (118), de equilíbrio transversal.

Considere-se a função de ponderação $\phi = \phi(x, y)$, definida no Item 3.2.2. Multipliquem-se ambos os membros de (117) por ϕ, e integre-se o resultado no domínio da placa:

$$\iint_\Omega \phi \left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) dx\,dy + \iint_\Omega \phi\, p\, dx\,dy =$$

$$= -\iint_\Omega \phi \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy}\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right) dx\,dy +$$

$$+ \iint_\Omega \phi\left(h\,X\frac{\partial w}{\partial x} + h\,Y\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\,dy \qquad (149)$$

A integração por partes da primeira integral que figura no primeiro membro da equação acima leva, como se viu no Capítulo 3, ao seguinte resultado:

$$\iint_{\Omega} \phi\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) dx\,dy + \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\,dy =$$

$$= \iint_{\Omega} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} M_x + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2} M_y - 2\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y} M_{xy}\right) dx\,dy +$$

$$- \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} M_n\, ds + \int_{C_\sigma} \phi\, V_n\, ds + \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\,dy \qquad (150)$$

Considerando-se as relações momento-curvatura (54), (55) e (56), e também as condições de contorno naturais (74) e (121), a expressão (150) fica:

$$\iint_{\Omega} \phi\left(\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} - 2\,\frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x\,\partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2}\right) dx\,dy + \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\,dy =$$

$$= - D \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial y^2}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1-\nu)\,\frac{\partial^2 \phi}{\partial x\,\partial y}\,\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} \right] dx\,dy - \int_{C_\sigma} \frac{\partial \phi}{\partial n} \bar{M}_n\, ds + \int_{C_\sigma} \phi\, \bar{V}_n\, ds +$$

$$- h \int_{C_\sigma} \phi\left(\bar{X}\,\frac{\partial w}{\partial x} + \bar{Y}\,\frac{\partial w}{\partial y}\right) ds + \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\,dy \qquad (151)$$

Trata-se, agora, de integrar por partes a primeira das integrais que comparecem no segundo membro de (149). De acordo com o Anexo A, obtêm-se:

$$- \iint_{\Omega} (\phi\, N_x)\,\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx\,dy = \iint_{\Omega} \left(\phi\,\frac{\partial N_x}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} N_x\right)\frac{\partial w}{\partial x}\, dx\,dy +$$

$$- \int_{C_\sigma} \phi\, N_x\,\frac{\partial w}{\partial x}\cos\delta\, ds$$

$$- \iint_{\Omega} (\phi\, N_y) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial N_y}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} N_y\right) \frac{\partial w}{\partial y}\, dx\, dy +$$

$$- \int_{C_\sigma} \phi\, N_y \frac{\partial w}{\partial y} \operatorname{sen} \delta\, ds$$

$$- \iint_{\Omega} (\phi\, N_{xy}) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial N_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \phi}{\partial x} N_{xy}\right) \frac{\partial w}{\partial y}\, dx\, dy +$$

$$- \int_{C_\sigma} \phi\, N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y} \cos \delta\, ds$$

$$- \iint_{\Omega} (\phi\, N_{xy}) \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right) dx\, dy = \iint_{\Omega} \left(\phi \frac{\partial N_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial \phi}{\partial y} N_{xy}\right) \frac{\partial w}{\partial x}\, dx\, dy +$$

$$- \int_{C_\sigma} \phi\, N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x} \operatorname{sen} \delta\, ds$$

Portanto, considerando-se os resultados acima, e ainda as equações de equilíbrio (12) e (13), assim como as condições de contorno naturais (21) e (22), o segundo membro de (149) fica, após algumas passagens algébricas:

$$- \iint_{\Omega} \phi \left(N_x \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + N_y \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2N_{xy} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y}\right) dx\, dy +$$

$$+ \iint_{\Omega} \phi \left(h\, X \frac{\partial w}{\partial x} + h\, Y \frac{\partial w}{\partial y}\right) dx\, dy = \iint_{\Omega} \left[\frac{\partial \phi}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial \phi}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}\right) \right] dx\, dy - h \int_{C_\sigma} \phi \left(\bar{X} \frac{\partial w}{\partial x} + \bar{Y} \frac{\partial w}{\partial y}\right) ds \qquad (152)$$

Assim, introduzindo-se (151) e (152) em (149), resulta finalmente:

$$D \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \right.$$

$$\left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2\phi}{\partial x\, \partial y} \frac{\partial^2 w}{\partial x\, \partial y} \right\} dx\, dy +$$

$$+ \iint_{\Omega} \left\{ \frac{\partial\phi}{\partial x} \left(N_x \frac{\partial w}{\partial x} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial y}\right) + \frac{\partial\phi}{\partial y} \left(N_y \frac{\partial w}{\partial y} + N_{xy} \frac{\partial w}{\partial x}\right) \right\} dx\, dy =$$

$$= \iint_{\Omega} \phi\, p\, dx\, dy - \int_{C_\sigma} \frac{\partial\phi}{\partial n} \bar{M}_n\, ds + \int_{C_\sigma} \phi\, \bar{V}_n\, ds \qquad (153)$$

Introduza-se a interpolação (137) na equação acima. Em seguida, fazendo-se, nessa mesma equação, a função de ponderação ϕ igual a cada uma das funções de forma contidas em $\underline{\xi}$, que é dado por (98) e (99), ou seja, fazendo-se simplesmente $\phi = \underline{\xi}$, obter-se-á um sistema de 3n equações que, em formato matricial, é o seguinte:

$$(\underline{K}_0^b + \underline{K}_g^b)\ \underline{a}^b = \underline{f}^b \qquad (154)$$

A matriz $\underline{K}_0^b$ é fornecida pelas expressões (101) e (102). O vetor $\underline{a}^b$ é dado por (96) e (97). O vetor $\underline{f}^b$ é expresso por (103) e (104), onde se fez $\phi_0 = 0$.

Por outro lado, a matriz $\underline{K}_g^b$ é uma das componentes da matriz de *rigidez geométrica* da placa (conforme mais tarde será visto), e vem expressa por:

$$\underline{K}_g^b = \iint_{\Omega} (N_x\, \underline{A} + N_y\, \underline{B} + N_{xy}\, \underline{C})\, dx\, dy \qquad (155)$$

onde $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ são dadas, respectivamente, por (143), (144) e (145).

A matriz $\underline{K}_g^b$ é de ordem (3n x 3n), e uma sua submatriz genérica $(\underline{K}_g^b)_{ij}$, de ordem (3 x 3), se exprime como:

$$(\underline{K}_g^b)_{ij} = \iint_\Omega (N_x \underline{A}_{ij} + N_y \underline{B}_{ij} + N_{xy} \underline{C}_{ij})\, dx\, dy \tag{156}$$

onde $\underline{A}_{ij}$, $\underline{B}_{ij}$ e $\underline{C}_{ij}$ são dadas, respectivamente, por (146), (147) e (148).

É imediato que $\underline{K}_g^b$ é simétrica, pois as matrizes $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$ também o são.

4.2.4. Acoplamento dos Efeitos de Membrana e de Flexão

Os dois sistemas de equações (acoplados), representados pelas expressões (140) e (154), resolvem o problema. É possível escrevê-los na seguinte forma concisa:

$$\underline{K}\ \underline{a} = \underline{f} \tag{157}$$

onde $\underline{K}$ é a *matriz de rigidez* da estrutura, da teoria de segunda ordem, e é dada por:

$$\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{K}_0^p & \underline{G} \\ \underline{0} & \underline{K}_0^b + \underline{K}_g^b \end{bmatrix} \tag{158}$$

Evidentemente, $\underline{K}$ não apresenta simetria.

O vetor $\underline{a}$ se expressa como:

$$\underline{a} = \begin{Bmatrix} \underline{a}^p \\ \underline{a}^b \end{Bmatrix} \tag{159}$$

e o vetor $\underline{f}$ se exprime por:

$$\underline{f} = \begin{Bmatrix} \underline{f}^p \\ \underline{f}^b \end{Bmatrix} \tag{160}$$

O acoplamento dos sistemas (140) e (154) é devido à existência da matriz $\underline{G}$, e também ao fato de que $\underline{K}_g^b$, sendo função de N_x, N_y e N_{xy}, depende, conseqüentemente, não apenas de $\underline{a}^b$, mas também de $\underline{a}^p$.

O sistema (157) não pode ser resolvido diretamente, pois $\underline{K}$ é função de $\underline{a}$, como já foi visto.

Um dos processos possíveis de resolução de (157) é o processo da *iteração direta*.

Se inicialmente se admite um valor de $\underline{a} = \underline{a}^0 = \underline{0}$, a primeira aproximação se obtém da seguinte forma:

$$\underline{a}^1 = (\underline{K}^0)^{-1}\ \underline{f}$$

onde

$$\underline{K}^0 = \underline{K}(\underline{a}^0)$$

Observe-se que nesta primeira iteração, pelo fato de ser $\underline{a}^0 = \underline{0}$, virão: $\underline{G} = \underline{0}$ e $\underline{K}_g^b = \underline{0}$, isto é, os dois sistemas (140) e (154) ficam totalmente desacoplados.

Repetindo-se o procedimento, pode-se escrever que:

$$\underline{a}^n = (\underline{K}^{n-1})\ \underline{f}$$

com

$$\underline{K}^{n-1} = \underline{K}\ (\underline{a}^{n-1})$$

Interrompem-se as iterações quando duas soluções consecutivas $\underline{a}^{n-1}$ e $\underline{a}^n$ resultam suficientemente próximas.

O processo de iteração direta pode ser ilustrado, para um único grau de liberdade, pela Fig. 30:

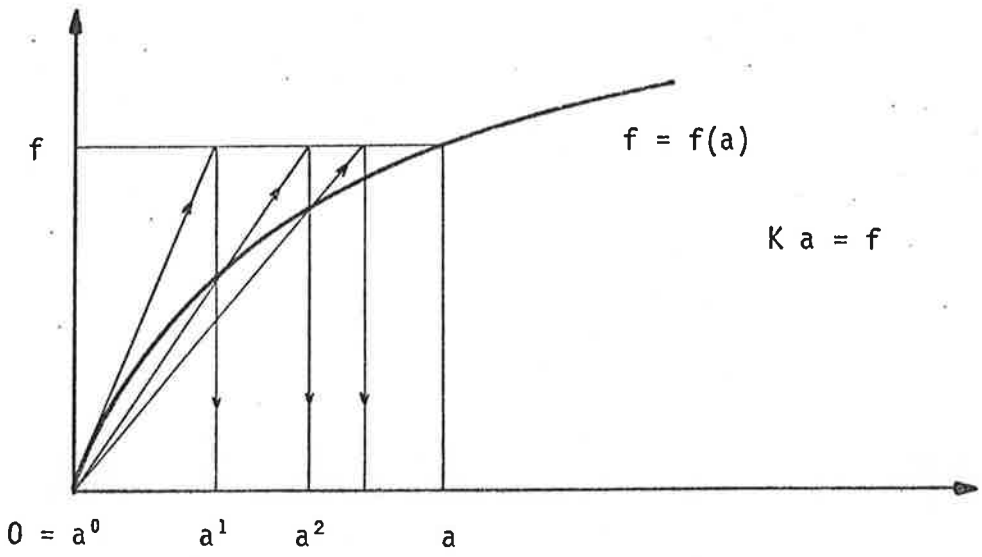


Figura 30

Há duas desvantagens no processo de iteração direta que fazem com que ele não seja utilizado na prática.

Em primeiro lugar, em cada iteração (exceto na primeira) é necessário inverter-se uma matriz que não é simétrica (na primeira iteração a matriz é simétrica).

Além disso, o processo costuma, com freqüência, ser divergente, e mesmo quando converge o faz com excessiva morosidade.

Por isso usam-se na prática o processo iterativo de Newton-Raphson e também o processo incremental. Ambos se utilizam do conceito de matriz de rigidez tangente, e serão explanados no Item 4.2.6.

Mas antes será revisto o problema da flambagem sob o prisma do Método dos Elementos Finitos.

4.2.5. Flambagem

Como foi visto no Item 4.2.3, a equação diferencial (118), junto com as suas condições de contorno naturais (74) e (121), conduziram ao sistema

algébrico de equações (154).

Por um processo inteiramente análogo, a equação (128), que rege o fenômeno da flambagem, e mais as condições de contorno naturais (129) e (130), conduzem a:

$$\left[\underline{K}_0^b + \lambda \, (\underline{K}_g^b)^* \right] \underline{a}^b = \underline{0} \tag{161}$$

onde $(\underline{K}_g^b)^*$ está associada ao carregamento de referência:

$$(\underline{K}_g^b)^* = \iint_\Omega (N_x^* \, \underline{A} + N_y^* \, \underline{B} + N_{xy}^* \, \underline{C}) \, dx \, dy \tag{162}$$

As forças N_x^*, N_y^* e N_{xy}^* são calculadas, como já foi visto, através das expressões (14), (15) e (16), para os deslocamentos u e v obtidos numericamente da resolução do sistema (140), com $\underline{G} = \underline{0}$, para o carregamento de referência h X^*, h Y^*, h $\bar{X}^*$ e h $\bar{Y}^*$.

A solução trivial $\underline{a}^b = \underline{0}$ é imediata em (161). Para que haja soluções diferentes da trivial, é preciso que:

$$\det \left[\underline{K}_0^b + \lambda \, (\underline{K}_g^b)^* \right] = 0 \tag{163}$$

A expressão (163) representa uma equação polinomial, de grau 3n, em λ. A menor das suas raízes fornece o valor crítico de λ.

Observe-se que a equação diferencial original (128) admitia infinitos autovalores, porque o problema tinha infinitos graus de liberdade. Após a discretização, porém, há apenas 3n valores possíveis de λ, que são as raízes de (163). Esses 3n valores de λ correspondem aos autovalores mais baixos, e isto acontece porque o número de graus de liberdade da placa discretizada (que é igual a 3n, porque há 3n parâmetros nodais) não é grande o suficiente para modelar modos de flambagem correspondentes a autovalores elevados.

Há inúmeros processos de se determinarem os valores de λ que satisfazem

(163), e alguns deles são extremamente eficientes, se em conta for levado o fato de que interessa apenas o valor mais baixo de λ. O assunto, porém, foge ao âmbito do presente estudo.

Para finalizar este item, observe-se que, uma vez determinado um qualquer autovalor λ, e injetado de volta na (161), não constitui condição suficiente para a definição da correspondente autofunção, pois $\underline{a}^b$ fica indeterminado.

Entretanto pode-se determinar $\underline{a}^b$ em função de um qualquer de seus elementos (que é feito, por exemplo, igual à unidade), simplesmente resolvendo-se a (161), que deixa de ser homogênea, e cujo determinante, que teve a sua ordem baixada de uma unidade (pois despreza-se a equação correspondente ao grau de liberdade fixado, a qual passa a ser combinação linear das demais; note-se que a simetria do determinante não se perde), não é mais nulo.

Assim, as autofunções (ou modos de flambagem) $(\underline{a}^b)^T \underline{\xi}$ são determinadas a menos de uma constante, e dão uma idéia apenas qualitativa da configuração alternativa de equilíbrio da placa submetida ao carregamento crítico. Isso é uma característica da teoria linearizada.

4.2.6. Matriz de Rigidez Tangente

A aplicação do Método dos Elementos Finitos, via Resíduos Ponderados (Galerkin), ao problema de segunda ordem das placas, levou ao sistema (157) de equações não-lineares, abaixo reescrito:

$$\underline{K}\ \underline{a} = \underline{f}$$

Foi comentado que um dos caminhos possíveis para a resolução de tal sistema era o da *iteração direta*. Agora serão apresentadas outras maneiras de se chegar à solução de (157).

Antes, observe-se que a matriz $\underline{K}$ pode ser considerada como uma *matriz de rigidez secante*.

Biblioteca da Escola Politécnica
São Paulo
FT-991

Para esclarecer esse fato, raciocine-se inicialmente como se o problema fosse de apenas um grau de liberdade, e a carga externa f aumentasse, a partir de zero, até atingir o seu valor prescrito (ver Fig. 31). Para cada valor dessa carga, ter-se-ia:

$$K = K(a) = \frac{f}{a} = tg\ \omega \tag{164}$$

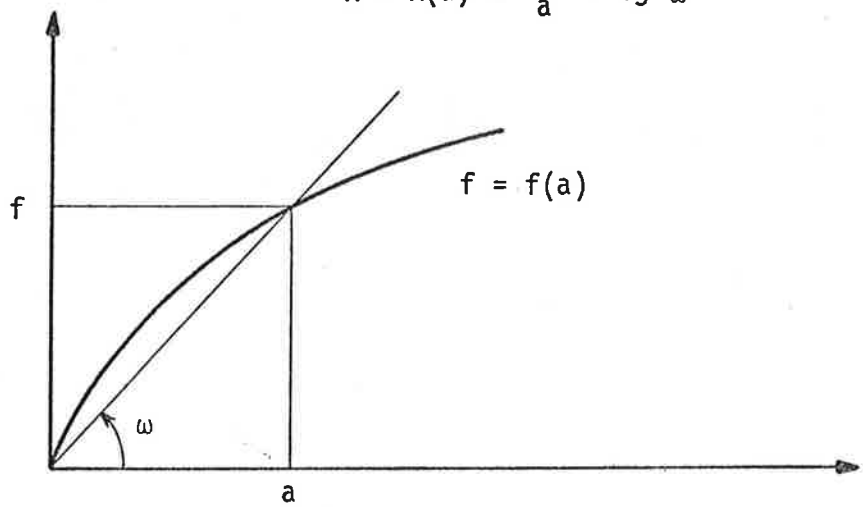


Figura 31

Na expressão (164), K representa o coeficiente angular da reta secante ao gráfico da função f = f(a), coeficiente angular este variável com o nível f de solicitação da estrutura.

A idéia acima pode ser generalizada para vários graus de liberdade, se as cargas externas, representadas pelo vetor $\underline{f}$, crescerem de modo proporcional, a partir de zero. Neste caso, na expressão (157), a matriz $\underline{K}$ pode ser entendida como sendo uma matriz de rigidez secante.

Do ponto de vista teórico, o problema considera-se resolvido (equacionado) a partir da montagem do sistema (157). No entanto, como já foi explicado, a resolução de (157) através do método de iteração direta consiste em procedimento tortuoso.

Buscando-se outros caminhos mais amenos de se obter a resposta do problema, chega-se, em contraposição à idéia de matriz de rigidez secante, ao

importantíssimo conceito de *matriz de rigidez tangente*.

Considere-se novamente o problema de um único grau de liberdade para um carregamento crescente a partir de zero:

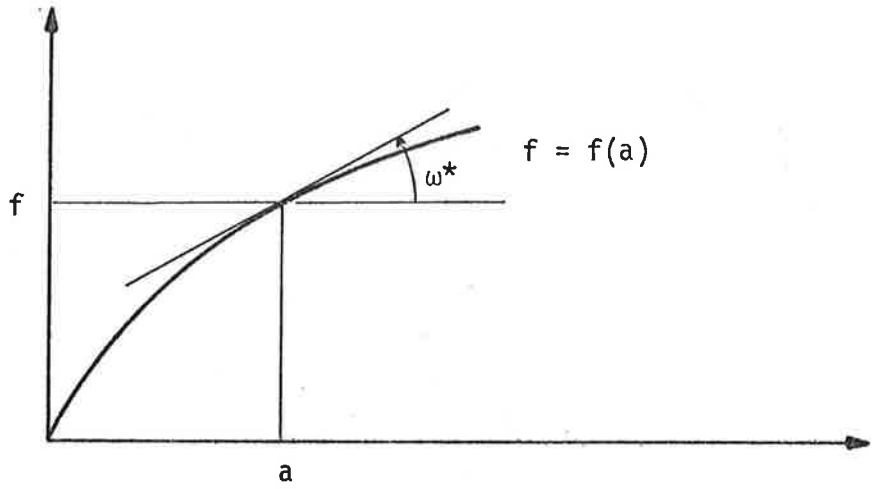


Figura 32

Define-se *rigidez tangente*, para o nível f de carga, à expressão:

$$K_T = \frac{df}{da} = \text{tg } \omega^* \qquad (165)$$

Assim, a rigidez tangente representa o coeficiente angular da reta tangente à curva f = f(a), e é variável com o nível do carregamento.

Essa idéia pode ser estendida a um problema com vários graus de liberdade, na hipótese de o carregamento aumentar proporcionalmente a partir de zero. Tem-se, então, o conceito de *matriz de rigidez tangente*:

$$\underline{K}_T \, \underline{da} = \underline{df} \qquad (166)$$

Portanto a matriz de rigidez tangente relaciona os incrementos de carga com os acréscimos de deslocamentos.

Em seguida, serão introduzidos dois novos processos de se resolver o

problema: o processo incremental e o método iterativo de Newton-Raphson. Ambos chegam à solução, não através do sistema de equações original (157), mas sim utilizando a sua forma incremental (166). Mas antes é preciso determinar a matriz de rigidez tangente.

O ponto central da questão é: como obter a $\underline{K}_T$, conhecida a $\underline{K}$? As próximas páginas dedicar-se-ão a esse mister.

Diferenciando-se (157), vem:

$$\underline{K}\ d\underline{a} + d\underline{K}\ \underline{a} = d\underline{f} \tag{167}$$

A comparação de (166) e (167) deixa claro que:

$$\underline{K}_T\ d\underline{a} = \underline{K}\ d\underline{a} + d\underline{K}\ \underline{a} \tag{168}$$

Centralize-se a atenção na segunda parcela $d\underline{K}\ \underline{a}$ do segundo membro de (168). Tendo em vista (158), pode-se escrever:

$$d\underline{K} = \begin{bmatrix} \underline{0} & d\underline{G} \\ \underline{0} & d\underline{K}_g^b \end{bmatrix} \tag{169}$$

pois $\underline{K}_0^p$ e $\underline{K}_0^b$ são constantes.

Considerando-se (159), vem:

$$d\underline{K}\ \underline{a} = \begin{Bmatrix} d\underline{G}\ \ \underline{a}^b \\ d\underline{K}_g^b\ \underline{a}^b \end{Bmatrix} \tag{170}$$

Demonstra-se que:

$$d\underline{G}\ \underline{a}^b = \underline{G}\ d\underline{a}^b \tag{171}$$

Para isso, basta demonstrar que:

$$d\underline{G}_i \, \underline{a}^b = \underline{G}_i \, d\underline{a}^b \tag{172}$$

Mas a expressão acima é imediata, da simples observação de (142).

Por outro lado, pode-se demonstrar também que é lícito escrever-se:

$$d\underline{K}_g^b \, \underline{a}^b = 2\underline{G}^T \, d\underline{a}^P + \underline{H} \, d\underline{a}^b \tag{173}$$

onde a matriz $\underline{H}$ é dada por:

$$\underline{H} = \frac{h\,E}{1-\nu^2} \iint_\Omega \{ \underline{A}\,\underline{a}^b(\underline{a}^b)^T \underline{A} + \underline{B}\,\underline{a}^b(\underline{a}^b)^T \underline{B} +$$

$$+ \nu \left[\underline{B}\,\underline{a}^b(\underline{a}^b)^T \underline{A} + \underline{A}\,\underline{a}^b(\underline{a}^b)^T \underline{B} \right] +$$

$$+ \frac{1-\nu}{2} \underline{C}\,\underline{a}^b(\underline{a}^b)^T \underline{C} \} \, dx\, dy \tag{174}$$

Como se percebe facilmente, $\underline{H}$ é simétrica. Além disso, $\underline{H}$ é função quadrática dos elementos de $\underline{a}^b$.

Para demonstrar a expressão (173), inicialmente introduzam-se as (125), (126) e (127) na expressão de $\underline{K}_g^b$, ou seja, na (155). Obtém-se:

$$\underline{K}_g^b = \frac{h\,E}{1-\nu^2} \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} + \nu \frac{\partial v}{\partial y}\right) \underline{A} + \left(\frac{\partial v}{\partial y} + \nu \frac{\partial u}{\partial x}\right) \underline{B} + \right.$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\right) \underline{C} \right] dx\, dy + \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \iint_\Omega \left[\left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x} + \right.\right.$$

$$\left. + \nu \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y}\right) \underline{A} + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial y} + \nu \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \underline{B} +$$

$$\left. + \frac{1-\nu}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial w}{\partial x}\right) \underline{C} \right] dx\, dy$$

Injetando-se na expressão acima as interpolações (135), (136) e (137), abaixo reescritas:

$$u = u_i \, \chi_i$$

$$v = v_i \, \chi_i$$

$$w = \underline{\xi}^T \, \underline{a}^b = (\underline{a}^b)^T \, \underline{\xi}$$

e levando em conta as definições de $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, dadas respectivamente por (143), (144) e (145), fica-se com:

$$\underline{K}_g^b = \frac{h\,E}{1-\nu^2} u_i \iint_\Omega \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial x} (\underline{A} + \nu \, \underline{B}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \underline{C} \right] dx\, dy +$$

$$+ \frac{h\,E}{1-\nu^2} v_i \iint_\Omega \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial y} (\underline{B} + \nu \, \underline{A}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \underline{C} \right] dx\, dy +$$

$$+ \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \iint_\Omega \Big[(\underline{a}^b)^T \underline{A}\, \underline{a}^b \underline{A} + \nu \, (\underline{a}^b)^T \underline{B}\, \underline{a}^b \underline{A} +$$

$$+ (\underline{a}^b)^T \underline{B}\, \underline{a}^b \underline{B} + \nu \, (\underline{a}^b)^T \underline{A}\, \underline{a}^b \underline{B} + \frac{1-\nu}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{C}\, \underline{a}^b \underline{C} \Big] dx\, dy$$

Diferenciando-se a expressão acima, obter-se-á:

$$d\underline{K}_g^b = \frac{h\,E}{1-\nu^2} du_i \iint_\Omega \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial x} (\underline{A} + \nu \, \underline{B}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial y} \underline{C} \right] dx\, dy +$$

$$+ \frac{h\,E}{1-\nu^2} dv_i \iint_\Omega \left[\frac{\partial \chi_i}{\partial y} (\underline{B} + \nu \, \underline{A}) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i}{\partial x} \underline{C} \right] dx\, dy +$$

$$+ \frac{h\,E}{1-\nu^2} \iint_\Omega \Big\{ (\underline{a}^b)^T \underline{A}\, d\underline{a}^b \underline{A} + (\underline{a}^b)^T \underline{B}\, d\underline{a}^b \underline{B} +$$

$$+ \nu \left[(\underline{a}^b)^T \underline{A}\, d\underline{a}^b \underline{B} + (\underline{a}^b)^T \underline{B}\, d\underline{a}^b \underline{A} \right] + \frac{1-\nu}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{C}\, d\underline{a}^b \underline{C} \Big\} dx\, dy$$

Multiplicando-se a expressão anterior, à direita, membro a membro, pelo vetor $\underline{a}^b$, obtém-se:

$$d\underline{K}_g^b\,\underline{a}^b = (d\underline{K}_g^b)_1\,\underline{a}^b + (d\underline{K}_g^b)_2\,\underline{a}^b \tag{175}$$

A primeira parcela do segundo membro de (175) é dada por:

$$(d\underline{K}_g^b)_1\,\underline{a}^b = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\,du_i \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(\underline{A} + \nu\,\underline{B}) + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial \chi_i}{\partial y}\,\underline{C} \right\} dx\,dy\,\underline{a}^b +$$

$$+ \frac{h\,E}{1-\nu^2}\,dv_i \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial \chi_i}{\partial y}(\underline{B} + \nu\,\underline{A}) + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial \chi_i}{\partial x}\,\underline{C} \right\} dx\,dy\,\underline{a}^b \tag{176}$$

Agora, observe-se que, por causa de (141), se tem:

$$\underline{G}^T = \left[\, \underline{G}_1^T \;\ldots\ldots\; \underline{G}_n^T \,\right] \tag{177}$$

sendo que a i-ésima submatriz de $\underline{G}^T$ se exprime, por causa de (142), através de:

$$\underline{G}_i^T = \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \left[\begin{array}{c|c} \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial \chi_i}{\partial x}(\underline{A} + \nu\,\underline{B}) + \right. & \iint_\Omega \left\{ \frac{\partial \chi_i}{\partial y}(\underline{B} + \nu\,\underline{A}) + \right. \\ \left. + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial \chi_i}{\partial y}\,\underline{C} \right\} dxdy\,\underline{a}^b & \left. + \frac{1-\nu}{2}\,\frac{\partial \chi_i}{\partial x}\,\underline{C} \right\} dxdy\,\underline{a}^b \end{array} \right] \tag{178}$$

O produto $2\underline{G}^T\,d\underline{a}^P$ é dado pela seguinte soma, em notação indicial:

$$2\underline{G}^T\,d\underline{a}^P = 2\underline{G}_i^T\,d\underline{a}_i^P = 2\underline{G}_i^T \begin{Bmatrix} du_i \\ dv_i \end{Bmatrix} \tag{179}$$

Injetando-se (178) em (179), e comparando-se o resultado com (176), verifica-se que:

$$(d\,\underline{K}_g^b)_1\,\underline{a}^b = 2\underline{G}^T\,d\underline{a}^P \tag{180}$$

A segunda parcela do segundo membro de (175), por sua vez, é escrita, após algumas passagens algébricas, por:

$$(d\underline{K}_g^b)_2\ \underline{a}^b = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\iint_\Omega \{\ \underline{A}\ \underline{a}^b\ (\underline{a}^b)^T\ \underline{A} + \underline{B}\ \underline{a}^b\ (\underline{a}^b)^T\ \underline{B} +$$

$$+\ \nu\left[\ \underline{B}\ \underline{a}^b\ (\underline{a}^b)^T\ \underline{A} + \underline{A}\ \underline{a}^b\ (\underline{a}^b)^T\ \underline{B}\ \right] +$$

$$+\ \frac{1-\nu}{2}\ \underline{C}\ \underline{a}^b\ (\underline{a}^b)^T\ \underline{C}\ \}\ dx\ dy\ d\underline{a}^b$$

de onde:

$$(d\underline{K}_g^b)_2\ \underline{a}^b = \underline{H}\ d\underline{a}^b \tag{181}$$

A injeção das expressões (180) e (181) em (175) demonstra, finalmente, a relação (173).

Continuando a dedução, observe-se que as expressões (171) e (173) levam (170) à seguinte forma:

$$d\underline{K}\ \underline{a} = \left\{ \begin{array}{l} \underline{G}\ d\underline{a}^b \\ \\ 2\underline{G}^T\ d\underline{a}^p + \underline{H}\ d\underline{a}^b \end{array} \right\}$$

que também pode ser expressa por:

$$d\underline{K}\ \underline{a} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{G} \\ \\ 2\underline{G}^T & \underline{H} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} d\underline{a}^p \\ \\ d\underline{a}^b \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{G} \\ \\ 2\underline{G}^T & \underline{H} \end{bmatrix} d\underline{a}$$

Finalmente, levando-se a expressão acima em (168) e considerando-se que o resultado deve ser válido quaisquer que sejam os acréscimos de deslocamentos $d\underline{a}$, obtém-se:

$$\underline{K}_T = \underline{K} + \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{G} \\ \\ 2\underline{G}^T & \underline{H} \end{bmatrix}$$

ou ainda, relembrando (158):

$$\underline{K}_T = \begin{bmatrix} \underline{K}_0^p & 2\underline{G} \\ 2\underline{G}^T & \underline{K}_0^b + \underline{K}_g^b + \underline{H} \end{bmatrix} \tag{182}$$

Está determinada a matriz de rigidez tangente. Observe-se a sua simetria.

Costuma-se desmembrar $\underline{K}_T$ em três parcelas, todas elas simétricas:

$$\underline{K}_T = \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{K}_0^p & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_0^b \end{bmatrix}}_{\underline{K}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & 2\underline{G} \\ 2\underline{G}^T & \underline{H} \end{bmatrix}}_{\Delta\underline{K}_0} + \underbrace{\begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_g^b \end{bmatrix}}_{\underline{K}_g} \tag{183}$$

A interpretação física das três parcelas da matriz de rigidez tangente é dada a seguir.

Imagine-se que, para um determinado carregamento, definido pelo vetor $\underline{f}$, tenha sido determinada a correspondente configuração de equilíbrio (vetor $\underline{a}$), através da resolução de:

$$\left[\underline{K}\ (\underline{a}) \right] \underline{a} = \underline{f}$$

Em seguida, suponha-se que seja dado, a partir de $\underline{f}$, um incremento $d\underline{f}$ no carregamento. O correspondente acréscimo de deslocamentos $d\underline{a}$ é obtido através da resolução do seguinte sistema:

$$\left[\underline{K}_T\ (\underline{a}) \right] d\underline{a} = d\underline{f}$$

ou, considerando que $\underline{K}_T = \underline{K}_0 + \Delta\underline{K}_0 + \underline{K}_g$:

$$\underline{K}_0\ d\underline{a} + \Delta\underline{K}_0\ d\underline{a} + \underline{K}_g\ d\underline{a} = d\underline{f}$$

Assim, o incremento de carga $d\underline{f}$ é equilibrado por três parcelas:

a) A primeira, que vale $\underline{K}_0\, d\underline{a}$, tem sua origem na rigidez da placa, rigidez esta determinada na geometria indeformada da estrutura.

b) Quanto à segunda parcela, cuja expressão é dada por $\Delta\underline{K}_0\, d\underline{a}$, consiste numa correção da primeira parcela, correção esta necessária por causa da variação sensível de geometria da placa. Relembre-se que a variação de geometria da placa era provocada pelos deslocamentos transversais w, pois os deslocamentos u e v dos pontos do plano médio eram irrelevantes, devido à grande rigidez da placa no seu plano. É por esta razão que $\Delta\underline{K}_0$ é função apenas de $\underline{a}^b$, e não de $\underline{a}^p$ (a componente $\underline{G}$ é função linear de $\underline{a}^b$, enquanto que $\underline{H}$ é função quadrática de $\underline{a}^b$).

c) A terceira e última parcela $\underline{K}_g\, d\underline{a}$, consiste numa outra correção de $\underline{K}_0\, d\underline{a}$, desta feita motivada pela presença das forças de membrana. A denominação dada a $\underline{K}_g$, de *matriz de rigidez geométrica*, provém do fato de ela ser função (uma vez conhecidas as forças de membrana, calculadas para os deslocamentos $\underline{a}$), apenas da *geometria* da placa discretizada.

Assim, $\underline{K}_g$ não depende (como $\underline{K}_0$ e $\Delta\underline{K}_0$) das constantes elásticas do material de que é formada a placa. Sua expressão seria a mesma num caso mais geral de anisotropia.

Advirta-se, para finalizar, que o efeito da rigidez geométrica pode ser favorável ou não, dependendo evidentemente da natureza das forças de membrana. Forças de tração tornam a placa mais rígida, enquanto que forças de natureza compressiva a deixam mais flexível.

Uma vez determinada a $\underline{K}_T$, algo será dito a respeito do processo incremental de resolução do problema, assim como do método iterativo de Newton-Raphson.

O processo *incremental* consiste em se aplicar o carregamento proporcionalmente, em várias etapas, a partir de zero, e determinarem-se os acréscimos de deslocamentos para cada etapa, através de

$$\underline{K}_T \; \underline{\Delta a} = \underline{\Delta f} \tag{184}$$

que é uma aproximação da (166).

Em cada incremento $\underline{\Delta f}$, a matriz $\underline{K}_T$ permanece constante, mas ela vai-se alterando de incremento para incremento, em função dos acréscimos de deslocamentos $\underline{\Delta a}$ já obtidos, acumulados no início de cada novo incremento.

O processo pode ser visualizado, para o n-ésimo incremento de carga Δf, num problema de um único grau de liberdade, pela figura abaixo:

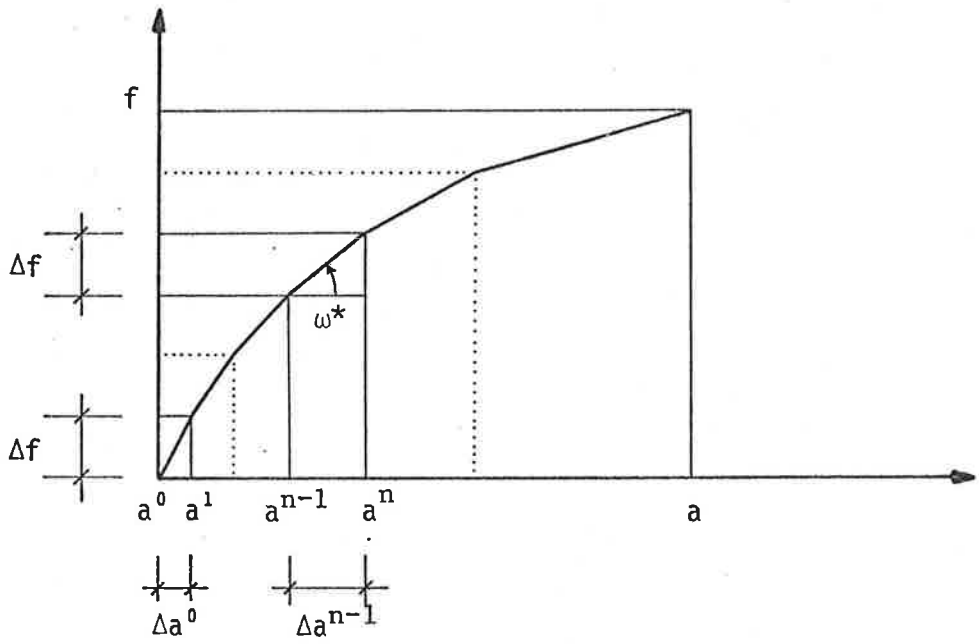


Figura 33

Na Fig. 33, tem-se, para o n-ésimo incremento Δf (os incrementos costumam-se fazer iguais entre si):

$$K_T^{n-1}\ \Delta a^{n-1} = \Delta f$$

sendo

$$K_T^{n-1} = K_T\ (a^{n-1}) = \text{tg}\ \omega^*$$

de onde:

$$\Delta a^{n-1} = (K_T^{n-1})^{-1}\ \Delta f$$

e

$$a^n = a^{n-1} + \Delta a^{n-1}$$

A convergência do processo pode ser garantida, desde que se escolham incrementos Δf do carregamento suficientemente pequenos.

Na língua inglesa, o processo incremental toma o nome de "step by step". Matematicamente, ele corresponde a uma integração numérica (ao longo do carregamento) da equação diferencial (166), pelo método das diferenças finitas de Euler.

O método *iterativo de Newton-Raphson* consiste em se fazerem iterações análogas àquelas já vistas no método da iteração direta, só que agora com o uso da matriz de rigidez tangente, que, além de ser simétrica, permite uma convergência bem mais rápida. Mesmo assim o processo às vezes diverge.

Para um único grau de liberdade, o método de Newton-Raphson pode ser visualizado através da figura seguinte.

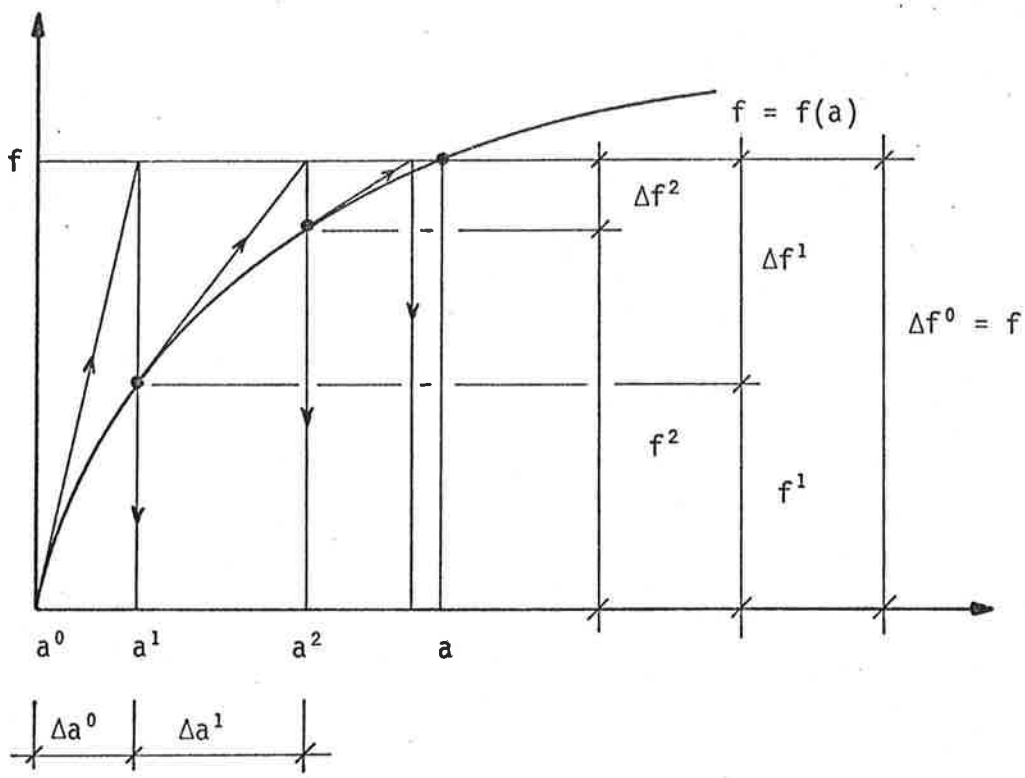


Figura 34

Na primeira iteração:

$$\Delta a^0 = (K_T^0)^{-1} \quad \Delta f^0$$

com:

$$\begin{cases} K_T^0 = K_T(a^0) = K_T(0) = K(0) \\ \Delta f^0 = f \end{cases}$$

Na segunda iteração:

$$\Delta a^1 = (K_T^1)^{-1} \; \Delta f^1$$

com

$$\begin{cases} K_T^1 = K_T(a^1) & \text{sendo } a^1 = a^0 + \Delta a^0 = \Delta a^0 \\ \Delta f^1 = f - f^1 & \text{com} \quad f^1 = K(a^1)\, a^1 \end{cases}$$

Na n-ésima iteração:

$$\Delta a^{n-1} = (K_T^{n-1})^{-1} \quad \Delta f^{n-1}$$

com

$$\begin{cases} K_T^{n-1} = K_T(a^{n-1}) & \text{sendo } a^{n-1} = a^{n-2} + \Delta a^{n-2} \\ \Delta f^{n-1} = f - f^{n-1} & \text{com } f^{n-1} = K(a^{n-1})\, a^{n-1} \end{cases}$$

Na Fig. 35 ilustra-se a n-ésima iteração.

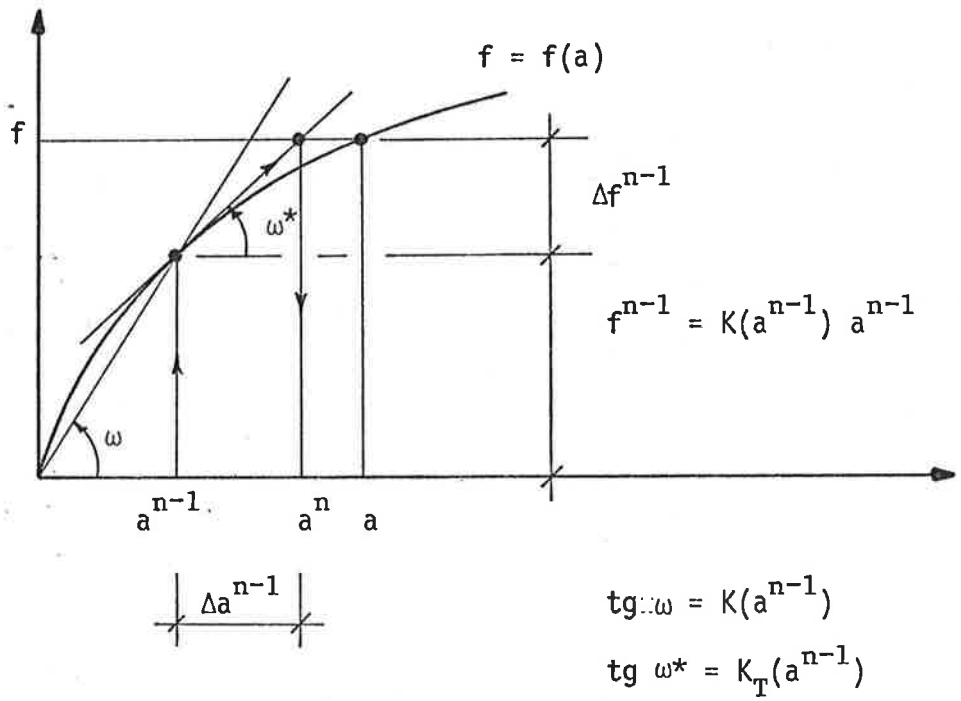


Figura 35

Verifica-se que, no método iterativo de Newton-Raphson, entram em cena as duas rigidezes, a tangente para fazer a iteração e a secante na determinação das quantidades f^i.

As idéias apresentadas para os processos incremental e de Newton-Raphson relativas a um único grau de liberdade podem ser facilmente generalizadas para vários graus de liberdade.

Convém assinalar que, em cada incremento, ou em cada iteração, usam-se, na construção de $\underline{K}_g$, as seguintes expressões:

$$N_x = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\left\{ u_j \frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \nu\, v_j \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \frac{1}{2}(\underline{a}^b)^T\,\underline{A}\,\underline{a}^b + \frac{\nu}{2}(\underline{a}^b)^T\,\underline{B}\,\underline{a}^b \right\} \quad (185)$$

$$N_y = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\left\{ v_j \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + \nu\, u_j \frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1}{2}(\underline{a}^b)^T\,\underline{B}\,\underline{a}^b + \frac{\nu}{2}(\underline{a}^b)^T\,\underline{A}\,\underline{a}^b \right\} \quad (186)$$

$$N_{xy} = \frac{h\,E}{2(1+\nu)}\left\{ u_j \frac{\partial \chi_j}{\partial y} + v_j \frac{\partial \chi_j}{\partial x} + \frac{1}{2}(\underline{a}^b)^T\,\underline{C}\,\underline{a}^b \right\} \quad (187)$$

as quais foram obtidas pela injeção das soluções aproximadas (135), (136) e (137) nas expressões (125), (126) e (127), e levando em conta as definições de $\underline{A}$, $\underline{B}$ e $\underline{C}$, dadas, respectivamente, por (143), (144) e (145).

A vantagem do processo de Newton-Raphson, quando ele não diverge, é a rapidez da convergência.

A vantagem do processo incremental, além da certeza da convergência, é a descrição do comportamento estrutural em face da variação (sempre proporcional) do carregamento. Trata-se, entretanto, de um processo caro, mas indispensável quando se quer investigar a eventual existência de uma instabilidade do tipo *ponto-limite* (passagem, na trajetória do equilíbrio, para uma situação instável com ausência de ponto de bifurcação), a qual se caracteriza por $K_T = 0$ (perda da rigidez para acréscimo de carregamento).

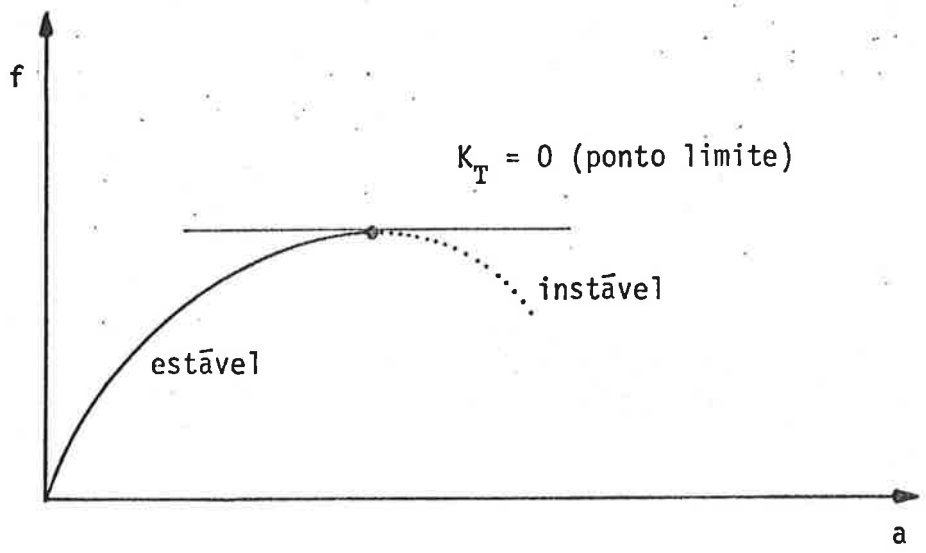


Figura 36

Quando há vários graus de liberdade, a característica essencial de um ponto-limite é:

$$\det(\underline{K}_T) = 0$$

4.2.7. O Problema da Membrana (Rede)

Além das simplificações já indicadas em 4.1.6, relativas à formulação diferencial do problema da membrana flexível, serão vistas agora características também de caráter simplificativo, inerentes à aplicação do Método dos Elementos Finitos ao mesmo problema.

Em primeiro lugar, como D = 0, vem:

$$\underline{K}_0^b = \underline{0}$$

Em segundo lugar, verifica-se que em todas as matrizes resultantes que envolvem derivadas das funções de forma ϕ_j, ψ_j e η_j, ou seja, as matrizes $\underline{K}_g^b$, $\underline{G}$ e $\underline{H}$, a ordem das derivadas dessas funções de forma, que aparecem sob o sinal de integração, é igual a um.

Por causa disso, pode-se agora utilizar, para a interpolação de w, ao

invés da expressão (137), a seguinte outra, em notação indicial:

$$w = w_j \chi_j \tag{188}$$

sendo χ_j as mesmas funções de forma que foram usadas para interpolar os deslocamentos u e v. Pode-se, inclusive, usar aqui o mesmo elemento triangular de deformação constante, apresentado em 2.3.3.

Portanto basta agora que os deslocamentos w sejam contínuos. Não mais é necessário que a superfície elástica não contenha "dobras".

Assim, o problema se simplifica consideravelmente, pois além de as funções de forma χ_j serem muito mais simples, o número de incógnitas, que era de 5n, passa a ser de 3n, ou seja, os deslocamentos u_j, v_j e w_j dos n pontos nodais P_j.

4.2.8. Uma Observação de Ordem Prática

No Método dos Elementos Finitos, as funções de forma χ_j, ϕ_j, ψ_j e η_j têm uma expressão diferente para cada elemento que se considere.

É conveniente, por causa desse fato, que se faça uma ligeira reinterpretação das expressões que conduzem às matrizes do método de modo a torná-las mais claras.

O que se quer dizer é que as integrações podem ser feitas separadamente para cada elemento, designado aqui genericamente pela letra "e", e podem-se somar os resultados logo em seguida.

Por exemplo, a primeira das expressões (35) ficaria:

$$(K_0^p)^{11}_{ij} = \sum \iint_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y}\right) dx\, dy \tag{189}$$

onde a somatória se estende a todos os elementos e.

A primeira das relações (40), com $\chi_u = \chi_v = 0$, assumiria a seguinte forma:

$$F_i^x = \sum h \int_{C_\sigma^e} \chi_i^e \bar{X}^e \, ds + \sum h \iint_{\Omega^e} \chi_i^e X^e \, dx \, dy \tag{190}$$

A matriz $\underline{K}_0^b$, que é expressa por (101), agora se escreve:

$$\underline{K}_0^b = D \sum \iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial^2 \underline{\xi}^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}^e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\underline{\xi}^e)^T}{\partial y^2} + \right.$$

$$+ \nu \left(\frac{\partial^2 \underline{\xi}^e}{\partial x^2} \frac{\partial^2 (\underline{\xi}^e)^T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \underline{\xi}^e}{\partial y^2} \frac{\partial^2 (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x^2} \right) +$$

$$\left. + 2(1 - \nu) \frac{\partial^2 \underline{\xi}^e}{\partial x \, \partial y} \frac{\partial^2 (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x \, \partial y} \right\} dx \, dy \tag{191}$$

e o vetor $\underline{f}^b$, dado por (103), fica, com $\phi_0 = 0$:

$$\underline{f}^b = - \sum \int_{C_\sigma^e} \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial n} \bar{M}_n^e \, ds + \sum \int_{C_\sigma^e} \underline{\xi}^e \bar{V}_n^e \, ds + \sum \iint_{\Omega^e} \underline{\xi}^e p^e \, dx \, dy \tag{192}$$

Por outro lado, com relação à matriz $\underline{G}$, a expressão (142) se transforma na seguinte:

$$\underline{G}_i = \frac{h E}{2(1 - \nu^2)} \begin{pmatrix} (\underline{a}^b)^T \sum \iint_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} (\underline{A}^e + \nu \underline{B}^e) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} \underline{C}^e \right) dx \, dy \\ (\underline{a}^b)^T \sum \iint_{\Omega^e} \left(\frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} (\underline{B}^e + \nu \underline{A}^e) + \frac{1 - \nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} \underline{C}^e \right) dx \, dy \end{pmatrix} \tag{193}$$

sendo:

$$\underline{A}^e = \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial x} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x} \tag{194}$$

$$\underline{B}^e = \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial y} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial y} \tag{195}$$

$$\underline{C}^e = \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial x} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial y} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x} \tag{196}$$

A matriz $\underline{K}_g^b$, por seu turno, que era expressa por (155), agora se exprime por:

$$\underline{K}_g^b = \sum \iint_{\Omega^e} (N_x^e \underline{A}^e + N_y^e \underline{B}^e + N_{xy}^e \underline{C}^e)\, dx\, dy \tag{197}$$

sendo que, através de (185), (186) e (187), podem-se escrever:

$$N_x^e = \frac{h\,E}{1 - \nu^2} \left(u_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \nu\, v_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y} + \frac{1}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{A}^e \underline{a}^b + \frac{\nu}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{B}^e \underline{a}^b \right) \tag{198}$$

$$N_y^e = \frac{h\,E}{1 - \nu^2} \left(v_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y} + \nu\, u_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{B}^e \underline{a}^b + \frac{\nu}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{A}^e \underline{a}^b \right) \tag{199}$$

$$N_{xy}^e = \frac{h\,E}{2(1 + \nu)} \left(u_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y} + v_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \frac{1}{2} (\underline{a}^b)^T \underline{C}^e \underline{a}^b \right) \tag{200}$$

Finalmente, no que concerne à expressão (174), que fornece a matriz $\underline{H}$, agora se tem:

$$\begin{aligned} \underline{H} = \frac{h\,E}{1 - \nu^2} \sum \iint_{\Omega^e} \{ & \underline{A}^e \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T \underline{A}^e + \underline{B}^e \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T \underline{B}^e + \\ & + \nu \left(\underline{B}^e \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T \underline{A}^e + \underline{A}^e \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T \underline{B}^e \right) + \\ & + \frac{1 - \nu}{2} \underline{C}^e \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T \underline{C}^e \}\, dx\, dy \end{aligned} \tag{201}$$

Nas expressões anteriores, todas as grandezas que contêm um índice e em cima e à direita, se referem, evidentemente, ao elemento de ordem e. Além disso, nunca é demais repetir, as somatórias naquelas expressões se estendem a todos os elementos.

4.2.9. Uma Notável Simplificação

Suponha-se que doravante se utilize, na interpolação dos deslocamentos u e v, as funções de forma χ_j que correspondem ao triângulo de deformação constante descrito em 2.3.3.

O exame das expressões (198), (199) e (200) mostra que as forças de membrana no elemento são variáveis de ponto para ponto, pois apesar de $\partial\chi_j^e/\partial x$ e $\partial\chi_j^e/\partial y$ serem constantes, as matrizes $\underline{A}^e$, $\underline{B}^e$ e $\underline{C}^e$ não o são.

Essa variabilidade de $\underline{A}^e$, $\underline{B}^e$ e $\underline{C}^e$ torna o cálculo das matrizes $\underline{K}_g$ e $\Delta\underline{K}_0$, em cada incremento (ou iteração) extremamente laborioso. Seria muito conveniente que se pudesse contornar essa dificuldade. Propõe-se, a seguir, uma maneira de se chegar a esse objetivo.

Se se definirem (Δ^e é a área do elemento):

$$\bar{\underline{A}}^e = \frac{1}{\Delta^e}\iint_{\Omega^e} \underline{A}^e \, dx \, dy \tag{202}$$

$$\bar{\underline{B}}^e = \frac{1}{\Delta^e}\iint_{\Omega^e} \underline{B}^e \, dx \, dy \tag{203}$$

$$\bar{\underline{C}}^e = \frac{1}{\Delta^e}\iint_{\Omega^e} \underline{C}^e \, dx \, dy \tag{204}$$

e se considerarem, para as forças de membrana, ao invés das expressões (198), (199) e (200), as seguintes outras:

$$\bar{N}_x^e = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[u_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \nu\, v_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\underline{a}^b)^T \underline{\bar{A}}^e \underline{a}^b + \frac{\nu}{2}(\underline{a}^b)^T \underline{\bar{B}}^e \underline{a}^b \right] \tag{205}$$

$$\bar{N}_y^e = \frac{h\,E}{1-\nu^2}\left[v_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y} + \nu\, u_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2}(\underline{a}^b)^T \underline{\bar{B}}^e \underline{a}^b + \frac{\nu}{2}(\underline{a}^b)^T \underline{\bar{A}}^e \underline{a}^b \right] \tag{206}$$

$$\bar{N}_{xy}^e = \frac{h\,E}{2(1+\nu)}\left[u_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial y} + v_j \frac{\partial \chi_j^e}{\partial x} + \frac{1}{2}(\underline{a}^b)^T \underline{\bar{C}}^e \underline{a}^b \right] \tag{207}$$

as forças de membrana se tornam *constantes* dentro de cada elemento, porque as matrizes $\underline{\bar{A}}^e$, $\underline{\bar{B}}^e$ e $\underline{\bar{C}}^e$ são constantes.

Como fica a matriz $\underline{K}_g$? De (197) vem, com $\bar{N}_x^e$, $\bar{N}_y^e$ e $\bar{N}_{xy}^e$ no lugar de N_x^e, N_y^e e N_{xy}^e, respectivamente, e levando-se em conta as definições (202), (203) e (204):

$$\underline{\bar{K}}_g^b = \sum \Delta^e \left(\bar{N}_x^e \underline{\bar{A}}^e + \bar{N}_y^e \underline{\bar{B}}^e + \bar{N}_{xy}^e \underline{\bar{C}}^e\right) \tag{208}$$

Vê-se que o cálculo de $\underline{\bar{K}}_g^b$ em cada incremento (ou iteração) agora é muito mais simples.

Com relação à matriz $\underline{G}$, de (193) se pode escrever, considerando-se as definições (202), (203) e (204):

$$\bar{\underline{G}}_i = \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \sum \Delta^e \begin{pmatrix} (\underline{a}^b)^T \left[\frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} (\bar{\underline{A}}^e + \nu\, \bar{\underline{B}}^e) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} \bar{\underline{C}}^e \right] \\ (\underline{a}^b)^T \left[\frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} (\bar{\underline{B}}^e + \nu\, \bar{\underline{A}}^e) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} \bar{\underline{C}}^e \right] \end{pmatrix} \tag{209}$$

Finalmente, com relação à matriz $\underline{H}$, imagine-se que se faça novamente a sua dedução, que foi mostrada em 4.2.6, só que agora usando-se, para a matriz $\underline{K}_g^b$, a sua expressão simplificada (208). Obter-se-á (as passagens algébricas foram omitidas):

$$\bar{\underline{H}} = \frac{h\,E}{1-\nu^2} \sum \Delta^e \{ \bar{\underline{A}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \bar{\underline{A}}^e + \bar{\underline{B}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \bar{\underline{B}}^e +$$

$$+ \nu \left(\bar{\underline{B}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \bar{\underline{A}}^e + \bar{\underline{A}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \bar{\underline{B}}^e \right) + \frac{1-\nu}{2} \bar{\underline{C}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \bar{\underline{C}}^e \} \tag{210}$$

Portanto verifica-se que, nos sucessivos incrementos (ou iterações), o cálculo das matrizes $\bar{\underline{G}}$ e $\bar{\underline{H}}$ também fica extraordinariamente simplificado.

Resumindo, o resultado é uma matriz de rigidez tangente simplificada:

$$\bar{\underline{K}}_T = \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{K}_0^p & 0 \\ \underline{0} & \underline{K}_0^b \end{pmatrix}}_{\underline{K}_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{0} & 2\bar{\underline{G}} \\ 2\bar{\underline{G}}^T & \bar{\underline{H}} \end{pmatrix}}_{\Delta\bar{\underline{K}}_0} + \underbrace{\begin{pmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \bar{\underline{K}}_g^b \end{pmatrix}}_{\bar{\underline{K}}_g} \tag{211}$$

Essa matriz $\bar{\underline{K}}_T$ de rigidez tangente é agora muito mais fácil de se calcular, em cada incremento (ou iteração) do que a sua expressão original $\underline{K}_T$, dada pela fórmula (183). Convém observar, todavia, que a primeira parcela de $\underline{K}_T$ correspondente à matriz de rigidez da teoria de primeira ordem, não mudou. Mas isso não tem importância, porque, como se sabe, tal parcela é constante ao longo das iterações (ou incrementos).

5. ANÁLISE MATRICIAL DE SEGUNDA ORDEM (ESTRUTURAS DE BARRAS)

5.1. Introdução

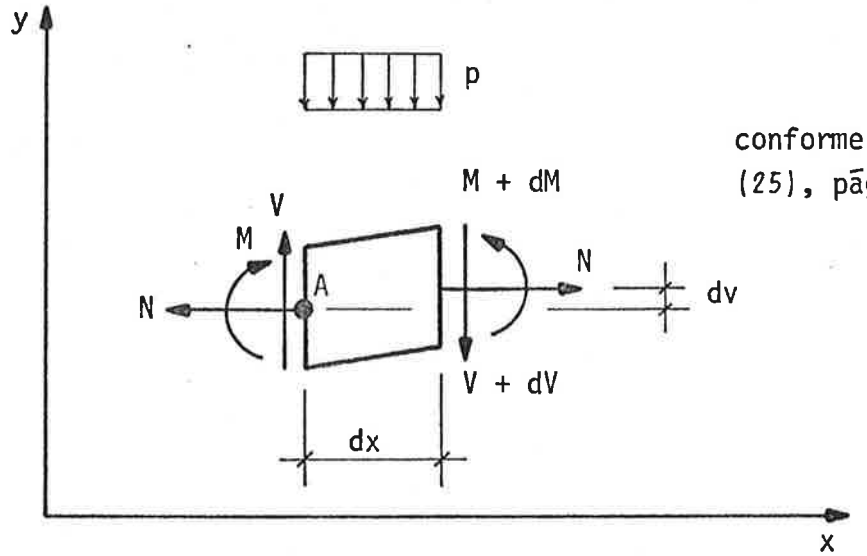
Neste capítulo, serão deduzidas as matrizes de rigidez geométrica e de rigidez tangente para uma barra de pórtico plano, seguindo-se idênticos princípios gerais que foram o alicerce da construção dessas mesmas matrizes no caso das placas.

Assim, será adotado o Método dos Resíduos Ponderados.

As deduções serão feitas no sistema local, como é de praxe na Análise Matricial. A passagem para o sistema global e o subseqüente espalhamento seguem a mesma marcha do cálculo de primeira ordem, por demais conhecida.

5.2. Equilíbrio Transversal

Na Fig. 37 mostra-se um elemento de viga submetido à flexo-tração (desprezam-se as deformações por força cortante):



conforme referência (25), pág. 3.

Figura 37

Equilíbrio de forças na vertical:

$$dV + p\,dx = 0 \qquad \frac{dV}{dx} = -\,p \tag{212}$$

Equilíbrio de momentos em torno de A:

$$dM - Ndv - Vdx = 0 \quad \therefore \quad V = \frac{dM}{dx} - N\frac{dv}{dx} \tag{213}$$

Combinando (212) com (213):

$$\frac{d^2M}{dx^2} - N\frac{d^2v}{dx^2} = -\,p$$

Mas p = 0, por hipótese. Logo:

$$\frac{d^2M}{dx^2} - N\frac{d^2v}{dx^2} = 0 \tag{214}$$

A equação diferencial (214) governa o comportamento das barras esbeltas a flexão composta. Em seguida, será essa equação tratada pelo Método dos Resíduos Ponderados.

Seja $\phi = \phi(x)$ uma função qualquer, contínua e duas vezes derivável ao longo da barra. Pode-se escrever (supõe-se N constante ao longo da barra):

$$\int_0^L \phi\,\frac{d^2M}{dx^2}\,dx - N\int_0^L \phi\,\frac{d^2v}{dx^2}\,dx = 0 \tag{215}$$

Integrando-se por partes:

$$\int_0^L \phi\,\frac{d}{dx}\left(\frac{dM}{dx}\right)dx = -\int_0^L \frac{d\phi}{dx}\,\frac{dM}{dx}\,dx + \left[\phi\,\frac{dM}{dx}\right]_0^L =$$

$$= \int_0^L \frac{d^2\phi}{dx^2}\,M\,dx - \left[\frac{d\phi}{dx}\,M\right]_0^L + \left[\phi\,\frac{dM}{dx}\right]_0^L \tag{216}$$

$$\int_0^L \phi \frac{d}{dx}\left(\frac{dv}{dx}\right) dx = -\int_0^L \frac{d\phi}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx + \left[\phi \frac{dv}{dx}\right]_0^L \tag{217}$$

Levando (216) e (217) em (215), vem:

$$\int_0^L \frac{d^2\phi}{dx^2} M\, dx + N \int_0^L \frac{d\phi}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = \left[\frac{d\phi}{dx} M\right]_0^L - \left[\phi \left(\frac{dM}{dx} - N\frac{dv}{dx}\right)\right]_0^L$$

Lembrando que:

$$M = EI \frac{d^2v}{dx^2}$$

e, considerando (213), vem, finalmente:

$$EI \int_0^L \frac{d^2\phi}{dx^2}\frac{d^2v}{dx^2}\, dx + N \int_0^L \frac{d\phi}{dx}\frac{dv}{dx}\, dx = \left[\frac{d\phi}{dx} M\right]_0^L - \left[\phi\ V\right]_0^L \tag{218}$$

Considere-se agora a barra na sua posição deformada, referida esta última ao sistema local:

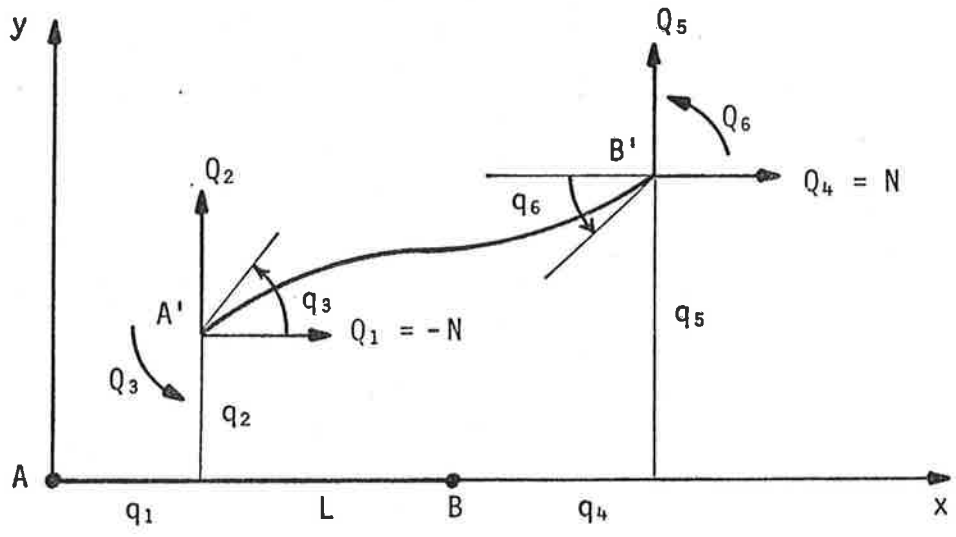


Figura 38

Seja a seguinte interpolação:

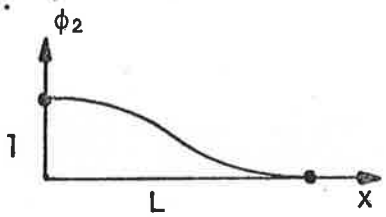
$$v = q_2\,\phi_2 + q_3\,\phi_3 + q_5\,\phi_5 + q_6\,\phi_6 = \underline{q}^T\ \underline{\phi} \tag{219}$$

com:

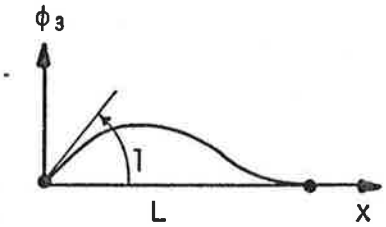
$$\underline{q}^T = \left\{ q_1 \quad q_2 \quad q_3 \quad q_4 \quad q_5 \quad q_6 \right\} \tag{220}$$

$$\underline{\phi}^T = \left\{ 0 \quad \phi_2 \quad \phi_3 \quad 0 \quad \phi_5 \quad \phi_6 \right\} \tag{221}$$

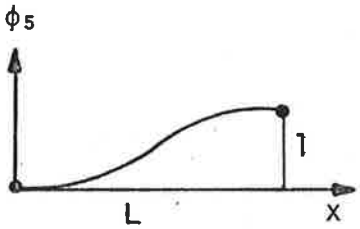
sendo:



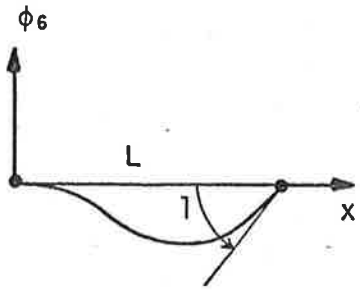
$$\phi_2 = 1 - 3\frac{x^2}{L^2} + 2\frac{x^3}{L^3} \tag{222}$$



$$\phi_3 = x - 2\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \tag{223}$$



$$\phi_5 = 3\frac{x^2}{L^2} - 2\frac{x^3}{L^3} \tag{224}$$



$$\phi_6 = -\frac{x^2}{L} + \frac{x^3}{L^2} \tag{225}$$

Injetando-se (219) em (218), e fazendo-se nesta última $\phi = \underline{\phi}$, vem:

$$EI \int_0^L \frac{d^2\underline{\phi}}{dx^2} \frac{d^2\underline{\phi}^T}{dx^2} dx \; \underline{q} + N \int_0^L \frac{d\underline{\phi}}{dx} \frac{d\underline{\phi}^T}{dx} dx \; \underline{q} =$$

$$= \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ Q_6 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ -Q_3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ -Q_5 \\ 0 \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ Q_2 \\ Q_3 \\ 0 \\ Q_5 \\ Q_6 \end{Bmatrix} = \underline{Q}_f \qquad (226)$$

ou, em notação concisa:

$$(\underline{k}_0^f + \underline{k}_g)\, \underline{q} = \underline{Q}_f \qquad (227)$$

com:

$$\underline{k}_0^f = EI \int_0^L \frac{d^2\underline{\phi}}{dx^2} \frac{d^2\underline{\phi}^T}{dx^2} dx \qquad (228)$$

Desenvolvendo-se as integrais acima, fica:

$$\underline{k}_0^f = EI \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} & 0 & -\frac{12}{L^3} & \frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} & 0 & \frac{12}{L^3} & -\frac{6}{L^2} \\ 0 & \frac{6}{L^2} & \frac{2}{L} & 0 & -\frac{6}{L^2} & \frac{4}{L} \end{bmatrix} \qquad (229)$$

Mais adiante se descreverá o papel de $\underline{k}_0^f$.

A matriz $\underline{k}_g$ é a *matriz de rigidez geométrica*, e representa a influência da força normal N sobre a rigidez da barra. Ela é expressa por:

$$\underline{k}_g = N\,\underline{\bar{k}}_g = N \int_0^L \frac{d\underline{\phi}}{dx}\,\frac{d\underline{\phi}^T}{dx}\,dx \tag{230}$$

Desenvolvendo-se as integrais acima, vem:

$$\underline{k}_g = \frac{N}{L}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{6}{5} & \frac{L}{10} & 0 & -\frac{6}{5} & \frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} & 0 & -\frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{6}{5} & -\frac{L}{10} & 0 & \frac{6}{5} & -\frac{L}{10} \\ 0 & \frac{L}{10} & -\frac{L^2}{30} & 0 & -\frac{L}{10} & \frac{2L^2}{15} \end{bmatrix} \tag{231}$$

Observe-se a simetria de $\underline{k}_g$.

5.3. Equilíbrio Axial (conforme (22))

Como se tratam de pequenas (segundo a definição vista em 4.1.1) as rotações que sofre a barra, o cosseno delas pode ser feito igual a um, quando figurar como coeficiente multiplicativo. Desse fato decorre que a força normal é constante ao longo da barra, e vale N. Conseqüentemente, a deformação ε do eixo da barra também será constante.

Num ponto qualquer do eixo da barra, a deformação se exprime como:

$$\varepsilon = \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 = \text{constante}$$

Na expressão acima está embutida a aproximação (112). Tal expressão é análoga à (122), cuja dedução foi feita em 4.1.4.

Assim, é lícito escrever-se:

$$\varepsilon = \frac{1}{L}\int_0^L \varepsilon\, dx = \frac{1}{L}\int_0^L \left\{ \frac{du}{dx} + \frac{1}{2}\left(\frac{dv}{dx}\right)^2 \right\} dx$$

ou seja:

$$\varepsilon = \frac{1}{L}\int_0^L du + \frac{1}{2L}\int_0^L \frac{dv}{dx}\,\frac{dv}{dx}\, dx = \frac{1}{L}(q_4 - q_1) + \frac{1}{2L}\int_0^L \frac{dv}{dx}\,\frac{dv}{dx}\, dx$$

ou ainda, considerando-se (219):

$$\varepsilon = \frac{1}{L}(q_4 - q_1) + \frac{1}{2L}\,\underline{q}^T \int_0^L \frac{d\underline{\phi}}{dx}\,\frac{d\underline{\phi}^T}{dx}\, dx\, \underline{q} \tag{232}$$

Definindo-se:

$$\underline{m}^T = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{233}$$

e levando em conta (230), a expressão (232) fica:

$$\varepsilon = \frac{1}{L}\,\underline{m}^T\,\underline{q} + \frac{1}{2L}\,\underline{q}^T\,\underline{\bar{k}}_g\,\underline{q} \tag{234}$$

Da combinação da Lei de Hooke com (234), resulta:

$$N = EA\,\varepsilon = \frac{EA}{L}\,\underline{m}^T\,\underline{q} + \frac{EA}{2L}\,\underline{q}^T\,\underline{\bar{k}}_g\,\underline{q} \tag{235}$$

Por outro lado, pelas condições de equilíbrio nas extremidades da barra, tem-se:

$$N\,\underline{m} = \begin{Bmatrix} -N \\ 0 \\ 0 \\ N \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} Q_1 \\ 0 \\ 0 \\ Q_4 \\ 0 \\ 0 \end{Bmatrix} = \underline{Q}_a \tag{236}$$

Injetando (235) em (236), resulta:

$$(\underline{k}_0^a + \underline{R})\,\underline{q} = \underline{Q}_a \tag{237}$$

com:

$$\underline{k}_0^a = \frac{EA}{L}\,\underline{m}\,\underline{m}^T = \frac{EA}{L}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{238}$$

e

$$\underline{R} = \frac{EA}{2L}\,\underline{m}\,\underline{q}^T\,\underline{\bar{k}}_g \tag{239}$$

Evidentemente $\underline{R}$ não é simétrica.

5.4. Matriz de Rigidez Secante

Somando-se (227) com (237), membro a membro, obtém-se:

$$(\underline{k}_0 + \underline{k}_g + \underline{R})\,\underline{q} = \underline{Q} \tag{240}$$

sendo

$$\underline{Q} = \underline{Q}_a + \underline{Q}_f \tag{241}$$

e

$$\underline{k}_0 = \underline{k}_0^f + \underline{k}_0^a \tag{242}$$

A matriz $\underline{k}_0$, simétrica, é a conhecida matriz de rigidez da barra, da teoria de primeira ordem.

Por outro lado, a matriz

$$\underline{k} = \underline{k}_0 + \underline{k}_g + \underline{R} \tag{243}$$

se constitui na *matriz de rigidez secante* da barra, e o sistema (240) fica:

$$\underline{k}\ \underline{q} = \underline{Q} \tag{244}$$

Convém observar que, devido à presença de $\underline{R}$, a matriz de rigidez secante não é simétrica, como não o era no caso das placas.

5.5. Matriz de Rigidez Tangente

A formulação do problema da análise matricial de segunda ordem poderia seguir agora o caminho tradicional, uma vez conhecida a matriz de rigidez secante da barra. O produto final seria um sistema de equações não-lineares, o qual poderia ser resolvido através do método da iteração direta.

Entretanto isso não é prático, por causa da assimetria da matriz de rigidez secante da estrutura. Além disso, a convergência do método da iteração direta, quando o mesmo converge, é muito lenta. Por último, recorde-se que o conceito de rigidez secante não permite a detecção de eventual instabilidade do tipo *ponto-limite* (ver Fig. 36).

Em vista desses fatos, será determinada, em seguida, uma nova matriz, de importância fundamental nas aplicações, a *matriz de rigidez tangente da barra*.

Por definição:

$$\underline{k}_T \, d\underline{q} = d\underline{Q} \tag{245}$$

isto é, a matriz de rigidez tangente $\underline{k}_T$ relaciona os acréscimos de deslocamentos $d\underline{q}$ com os incrementos de esforços $d\underline{Q}$.

Por outro lado, a diferenciação de (244) produz:

$$d\underline{k} \, \underline{q} + \underline{k} \, d\underline{q} = d\underline{Q} \tag{246}$$

Comparando-se (245) com (246), vem:

$$\underline{k}_T \, d\underline{q} = d\underline{k} \, \underline{q} + \underline{k} \, d\underline{q} \tag{247}$$

Mas a diferencial da matriz de rigidez secante é dada por (ver (243)):

$$d\underline{k} = d\underline{k}_g + d\underline{R} \tag{248}$$

Portanto, de (230) e (239), vem:

$$d\underline{k} = dN \, \bar{\underline{k}}_g + \frac{EA}{2L} \, \underline{m} \, d\underline{q}^T \, \bar{\underline{k}}_g \tag{249}$$

Considerando-se (235), tem-se:

$$dN = \frac{EA}{L} \, \underline{m}^T \, d\underline{q} + \frac{EA}{2L} \, d\underline{q}^T \, \bar{\underline{k}}_g \, \underline{q} + \frac{EA}{2L} \, \underline{q}^T \, \bar{\underline{k}}_g \, d\underline{q}$$

ou seja:

$$dN = \frac{EA}{L} \, \underline{m}^T \, d\underline{q} + \frac{EA}{L} \, \underline{q}^T \, \bar{\underline{k}}_g \, d\underline{q} \tag{250}$$

Levando (250) em (249), vem:

$$d\underline{k} = \frac{EA}{L} \, \underline{m}^T \, d\underline{q} \, \bar{\underline{k}}_g + \frac{EA}{L} \, \underline{q}^T \, \bar{\underline{k}}_g \, d\underline{q} \, \bar{\underline{k}}_g + \frac{EA}{2L} \, \underline{m} \, d\underline{q}^T \, \bar{\underline{k}}_g$$

Multiplicando-se a expressão acima, à direita, membro a membro, pelo vetor $\underline{q}$, fica:

$$d\underline{k}\,\underline{q} = \frac{EA}{L}\,\underline{m}^T\,d\underline{q}\,\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q} + \frac{EA}{L}\,\underline{q}^T\bar{\underline{k}}_g\,d\underline{q}\,\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q} + \frac{EA}{2L}\,\underline{m}\,d\underline{q}^T\,\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q}$$

ou ainda:

$$d\underline{k}\,\underline{q} = \frac{EA}{L}\,\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q}\,\underline{m}^T\,d\underline{q} + \frac{EA}{L}\,\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q}\,\underline{q}^T\,\bar{\underline{k}}_g\,d\underline{q} + \frac{EA}{2L}\,\underline{m}\,\underline{q}^T\,\bar{\underline{k}}_g\,d\underline{q} \qquad (251)$$

Injetando-se (251) e (243) (na qual se introduziu (239)) em (247), e considerando-se que a expressão resultante deve valer, quaisquer que sejam os acréscimos de deslocamentos $d\underline{q}$, vem, finalmente:

$$\underline{k}_T = \underline{k}_0 + \Delta\underline{k}_0 + \underline{k}_g \qquad (252)$$

sendo

$$\Delta\underline{k}_0 = \frac{EA}{L}\,(\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q}\,\underline{m}^T + \underline{m}\,\underline{q}^T\,\bar{\underline{k}}_g + \bar{\underline{k}}_g\,\underline{q}\,\underline{q}^T\,\bar{\underline{k}}_g) \qquad (253)$$

a matriz de correção de $\underline{k}_0$, devida à mudança geométrica da barra deformada. Ela é simétrica, pois as suas duas primeiras parcelas são a transposta uma da outra, e a terceira é simétrica intrinsecamente.

Note-se que $\Delta\underline{k}_0$ pode ser escrita como:

$$\Delta\underline{k}_0 = 2\underline{R} + 2\underline{R}^T + \underline{S} \qquad (254)$$

sendo:

$$\underline{S} = \frac{EA}{L}\,\bar{\underline{k}}_g\,\underline{q}\,\underline{q}^T\,\bar{\underline{k}}_g \qquad (255)$$

Determinada a matriz $\underline{k}_T$ de rigidez tangente da barra, no sistema local, o restante da análise segue exatamente os mesmos passos da análise matricial de primeira ordem, processo dos deslocamentos.

Agora, para chegar à solução do problema, utiliza-se não a relação original (244), mas sim a sua forma incremental (245), que tem a vantagem de produzir a matriz de rigidez tangente, da estrutura, simétrica. Além disso, agora pode-se usar o processo incremental de resolução do sistema, assim como o método iterativo de Newton-Raphson.

Nos problemas de flambagem, evidentemente, a matriz $\Delta \underline{k}_0$ é nula, e a força N nas barras é obtida através de uma análise de primeira ordem. Recai-se, como é sabido, num problema linear de autovalores.

Para finalizar este capítulo, diga-se que, para outras estruturas reticuladas, tais como treliças e grelhas, as fórmulas gerais referentes a $\underline{k}_T$ são análogas àquelas aqui deduzidas para o caso dos pórticos.

6. OBSERVAÇÕES FINAIS

As observações específicas, relativas a cada tópico apresentado, já foram mencionadas no decorrer do trabalho.

Deseja-se apenas chamar a atenção para um fato extremamente interessante, relativo à perfeita analogia formal que existe entre as formulações matriciais do problema de segunda ordem das placas (com a simplificação proposta em 4.2.9) e aquele dos pórticos, conforme estabelecido no último capítulo.

Assim, a matriz de rigidez tangente, para o caso das placas, era dada pela seguinte expressão:

$$\underline{\bar{K}}_T = \underline{K}_0 + \Delta\underline{\bar{K}}_0 + \underline{\bar{K}}_g$$

com:

$$\underline{K}_0 = \begin{bmatrix} \underline{K}_0^p & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{K}_0^b \end{bmatrix}$$

$$\Delta\underline{\bar{K}}_0 = \begin{bmatrix} \underline{0} & 2\underline{\bar{G}} \\ 2\underline{\bar{G}}^T & \underline{\bar{H}} \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{K}}_g = \begin{bmatrix} \underline{0} & \underline{0} \\ \underline{0} & \underline{\bar{K}}_g^b \end{bmatrix}$$

sendo, nas expressões anteriores:

$$\underline{\bar{G}} = \begin{bmatrix} \underline{\bar{G}}_1 \\ \vdots \\ \underline{\bar{G}}_n \end{bmatrix}$$

$$\underline{\bar{G}}_i = \frac{h\,E}{2(1-\nu^2)} \sum \Delta^e \begin{pmatrix} (\underline{a}^b)^T \left[\frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} (\underline{\bar{A}}^e + \nu\, \underline{\bar{B}}^e) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} \underline{\bar{C}}^e \right] \\ (\underline{a}^b)^T \left[\frac{\partial \chi_i^e}{\partial y} (\underline{\bar{B}}^e + \nu\, \underline{\bar{A}}^e) + \frac{1-\nu}{2} \frac{\partial \chi_i^e}{\partial x} \underline{\bar{C}}^e \right] \end{pmatrix}$$

$$\bar{H} = \frac{h\,E}{1-\nu^2} \sum \Delta^e \{ \underline{\bar{A}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \underline{\bar{A}}^e + \underline{\bar{B}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \underline{\bar{B}}^e +$$

$$+ \nu \left(\underline{\bar{B}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \underline{\bar{A}}^e + \underline{\bar{A}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \underline{\bar{B}}^e \right) + \frac{1-\nu}{2} \underline{\bar{C}}^e\, \underline{a}^b (\underline{a}^b)^T\, \underline{\bar{C}}^e \}$$

$$\underline{\bar{K}}_g^b = \sum \Delta^e \, (\bar{N}_x^e\, \underline{\bar{A}}^e + \bar{N}_y^e\, \underline{\bar{B}}^e + \bar{N}_{xy}^e\, \underline{\bar{C}}^e)$$

Observe-se que as matrizes $\underline{\bar{A}}^e$, $\underline{\bar{B}}^e$ e $\underline{\bar{C}}^e$ são dadas por:

$$\underline{\bar{A}}^e = \frac{1}{\Delta^e} \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial x} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x}\, dx\, dy$$

$$\underline{\bar{B}}^e = \frac{1}{\Delta^e} \iint_{\Omega^e} \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial y} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial y}\, dx\, dy$$

$$\underline{\bar{C}}^e = \frac{1}{\Delta^e} \iint_{\Omega^e} \left\{ \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial x} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial y} + \frac{\partial \underline{\xi}^e}{\partial y} \frac{\partial (\underline{\xi}^e)^T}{\partial x} \right\} dx\, dy$$

No caso dos pórticos, tinha-se:

$$\underline{k}_T = \underline{k}_0 + \Delta \underline{k}_0 + \underline{k}_g$$

com:

$$\underline{k}_0 = \underline{k}_0^f + \underline{k}_0^a$$

e

$$\Delta \underline{k}_0 = 2\underline{R} + 2\underline{R}^T + \underline{S}$$

Na expressão anterior, têm-se:

$$\underline{R} = \frac{EA}{2L}\,\underline{m}\,\underline{q}^T\,\underline{\bar{k}}_g$$

$$\underline{S} = \frac{EA}{L}\,\underline{\bar{k}}_g\,\underline{q}\,\underline{q}^T\,\underline{\bar{k}}_g$$

onde:

$$\underline{\bar{k}}_g = \int_0^L \frac{d\underline{\phi}}{dx}\,\frac{d\underline{\phi}^T}{dx}\,dx$$

Finalmente:

$$\underline{k}_g = N\,\underline{\bar{k}}_g$$

Ficam, portanto, estabelecidas analogias entre as seguintes matrizes:

Placas	Pórticos
$\underline{\bar{K}}_T$	$\underline{k}_T$
$\underline{K}_0$	$\underline{k}_0$
$\underline{K}_0^p$	$\underline{k}_0^a$
$\underline{K}_0^b$	$\underline{k}_0^f$
$\Delta\underline{\bar{K}}_0$	$\Delta\underline{k}_0$
$\underline{\bar{G}}$	$\underline{R}$
$\underline{\bar{H}}$	$\underline{S}$
$\underline{\bar{K}}_g^b$	$\underline{k}_g$
$\underline{\bar{A}}^e$, $\underline{\bar{B}}^e$, $\underline{\bar{C}}^e$	$\underline{\bar{k}}_g$

Como sugestão para trabalhos futuros, menciona-se a necessidade de se verificar quais são as implicações de ordem numérica decorrentes da teoria simplificada proposta em 4.2.9, que torna constantes as forças de membrana no elemento, em cada iteração (ou incremento).

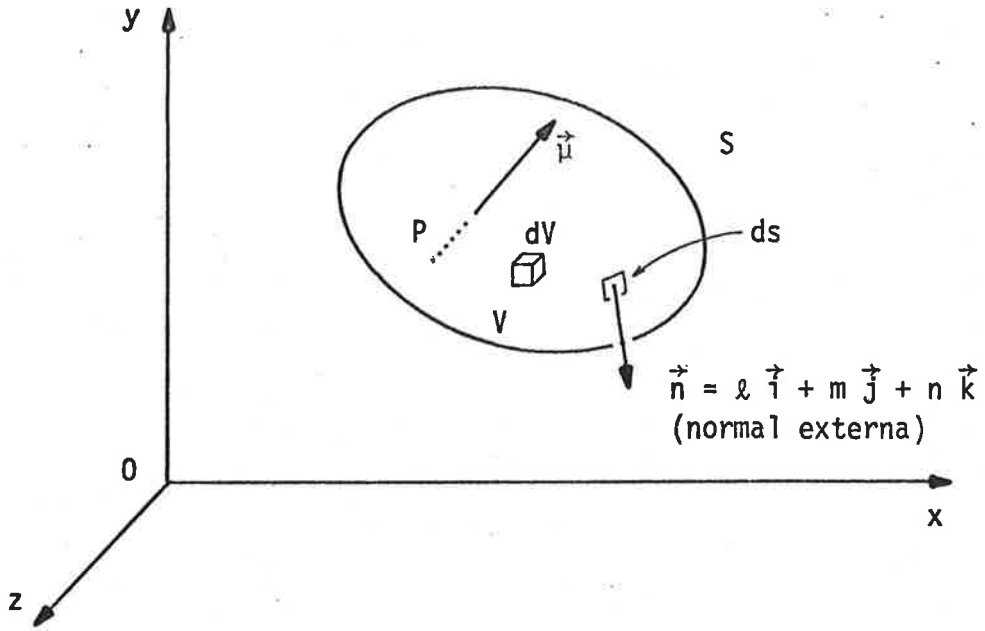
Para finalizar, indica-se a seguir a correspondência entre a bibliografia e o texto:

Item da Tese	Referência (s)
2.1.1	(19), (22) e (26)
2.1.2	(19) e (26)
2.1.3	(19) e (26)
2.1.4	(19) e (26)
2.1.5	(19)
2.1.6	(19)
2.2.1	(21)
2.2.2	(21) e (24)
2.2.3	(32)
2.2.4	(21)
2.2.5	(21)
2.2.6	(21) e (26)
2.2.7	(21)
2.2.8	(1) e (21)
2.2.9	(1) e (21)
2.3.1	(32)
2.3.2	(2), (5), (9), (21), (29) e (32)
2.3.3	(21),(30) e (32)
2.3.4	(2) e (29)
2.3.5	(21) e (32)
2.3.6	(21) e (32)
3.1.1	(19), (27) e (31)
3.1.2	(19), (27) e (31)
3.1.3	(19), (27) e (31)
3.1.4	(19), (27) e (31)
3.1.5	(19), (27) e (31)
3.1.6	(19), (27) e (31)
3.1.7	(1), (6), (19), (27) e (31)
3.1.8	(19) e (27)

3.1.9	(19)
3.2.1	(21)
3.2.2	(21)
3.2.3	(21)
3.2.4	(21)
3.2.5	(21)
3.2.6	(21)
3.2.7	(21)
3.2.8	(21)
3.2.9	(21)
3.3.1	(21) e (32)
3.3.2	(21) e (32)
3.3.3	(21)
3.3.4	-
3.3.5	(18), (21) e (32)
4.1.1	(4), (7), (8), (9),(12), (13), (16), (22) e (23)
4.1.2	(21) e (26)
4.1.3	(27)
4.1.4	-
4.1.5	(3), (6), (15) e (25)
4.1.6	(27)
4.2.1	-
4.2.2	-
4.2.3	-
4.2.4	-
4.2.5	(3), (5), (10), (13), (15) e (32)
4.2.6	-
4.2.7	-
4.2.8	-
4.2.9	-
5.1	(14), (20), (22), (23) e (28)
5.2	-

5.3	(22)
5.4	-
5.5	(22)
Anexo A	(11) e (17)
Anexo B	(21) e (32)

Anexo A - INTEGRAÇÃO POR PARTES



Seja $\vec{\mu} = \vec{\mu}(P)$ uma função vetorial de ponto, contínua e derivável, definida no sólido V. Pode-se escrever:

$$\vec{\mu} = \mu_1\,\vec{i} + \mu_2\,\vec{j} + \mu_3\,\vec{k}$$

Demonstra-se que:

$$\iiint_V \frac{\partial \mu_1}{\partial x}\,dV = \iint_S \mu_1\,\ell\,dS$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mu_2}{\partial y}\,dV = \iint_S \mu_2\,m\,dS \qquad (A.1)$$

$$\iiint_V \frac{\partial \mu_3}{\partial z}\,dV = \iint_S \mu_3\,n\,dS$$

Somando-se membro a membro as expressão anteriores, vem:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial \mu_1}{\partial x} + \frac{\partial \mu_2}{\partial y} + \frac{\partial \mu_3}{\partial z}\right) dV = \iint_S (\mu_1 \ell + \mu_2 m + \mu_3 n)\, dS$$

ou seja:

$$\iiint_V \operatorname{div} \vec{\mu}\, dV = \iint_S \vec{\mu} \times \vec{n}\, dS \qquad (A.2)$$

que é a expressão do Teorema do Divergente, cuja interpretação é dada por: "a integral da divergência de um campo vetorial, estendida a um certo volume, é igual ao fluxo do vetor através da superfície que limita este volume".

Para deduzir as expressões que representam a integração por partes, basta supor que:

$$\mu = \Gamma \Lambda$$

onde Γ e Λ são funções contínuas e deriváveis em V. Portanto

$$\mu_1 = \Gamma_1 \Lambda_1 \qquad \mu_2 = \Gamma_2 \Lambda_2 \qquad \mu_3 = \Gamma_3 \Lambda_3$$

Assim, de (A.1) virão:

$$\iiint_V \left(\Gamma_1 \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x} + \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \Lambda_1\right) dV = \iint_S \Gamma_1 \Lambda_1 \ell\, dS$$

$$\iiint_V \left(\Gamma_2 \frac{\partial \Lambda_2}{\partial y} + \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \Lambda_2\right) dV = \iint_S \Gamma_2 \Lambda_2 m\, dS$$

$$\iiint_V \left(\Gamma_3 \frac{\partial \Lambda_3}{\partial z} + \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} \Lambda_3\right) dV = \iint_S \Gamma_3 \Lambda_3 n\, dS$$

ou ainda:

$$\iiint_V \Gamma_1 \frac{\partial \Lambda_1}{\partial x}\, dV = - \iiint_V \frac{\partial \Gamma_1}{\partial x} \Lambda_1\, dV + \iint_S \Gamma_1 \Lambda_1\, \ell\, dS$$

$$\iiint_V \Gamma_2 \frac{\partial \Lambda_2}{\partial y}\, dV = - \iiint_V \frac{\partial \Gamma_2}{\partial y} \Lambda_2\, dV + \iint_S \Gamma_2 \Lambda_2\, m\, dS$$

$$\iiint_V \Gamma_3 \frac{\partial \Lambda_3}{\partial z}\, dV = - \iiint_V \frac{\partial \Gamma_3}{\partial z} \Lambda_3\, dV + \iint_S \Gamma_3 \Lambda_3\, n\, dS$$

De um modo geral, sendo Γ e Λ funções contínuas e deriváveis em V, pode-se escrever:

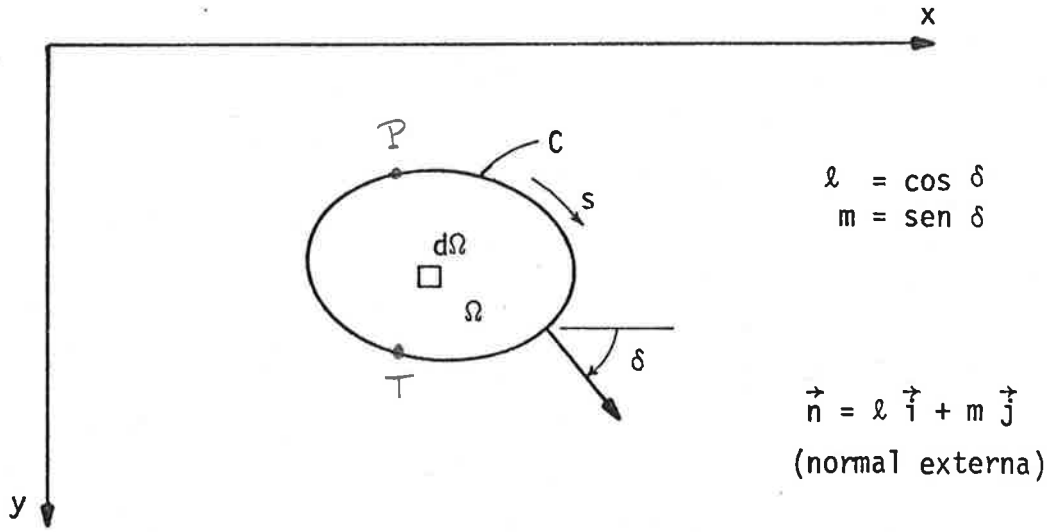
$$\iiint_V \Gamma \frac{\partial \Lambda}{\partial x}\, dV = - \iiint_V \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \Lambda\, dV + \iint_S \Gamma \Lambda\, \ell\, dS$$

$$\iiint_V \Gamma \frac{\partial \Lambda}{\partial y}\, dV = - \iiint_V \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \Lambda\, dV + \iint_S \Gamma \Lambda\, m\, dS \qquad \text{(A.3)}$$

$$\iiint_V \Gamma \frac{\partial \Lambda}{\partial z}\, dV = - \iiint_V \frac{\partial \Gamma}{\partial z} \Lambda\, dV + \iint_S \Gamma \Lambda\, n\, dS$$

As expressões acima representam a integração por partes em três dimensões.

Em duas dimensões, ocorre algo semelhante:



$$\iint_{\Omega} \Gamma \frac{\partial \Lambda}{\partial x} \, d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial x} \Lambda \, d\Omega + \int_{C} \Gamma \, \Lambda \, \ell \, ds$$

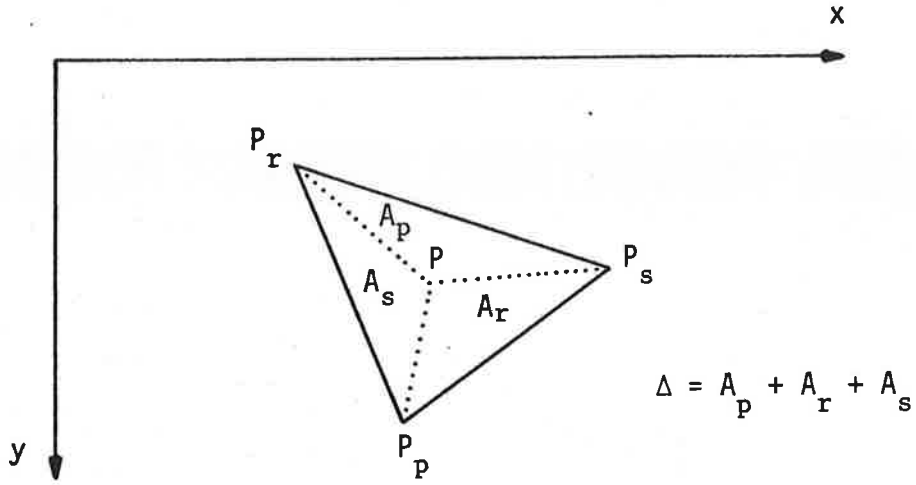
$$\iint_{\Omega} \Gamma \frac{\partial \Lambda}{\partial y} \, d\Omega = - \iint_{\Omega} \frac{\partial \Gamma}{\partial y} \Lambda \, d\Omega + \int_{C} \Gamma \, \Lambda \, m \, ds \qquad (A.4)$$

Finalmente, em uma dimensão:

$$\int_{P}^{T} \Gamma \frac{\partial \Lambda}{\partial s} \, ds = - \int_{P}^{T} \frac{\partial \Gamma \Lambda}{\partial s} ds + \Big| \, \Gamma \, \Lambda \, \Big|_{P}^{T} \qquad (A.5)$$

Anexo B - COORDENADAS NATURAIS

Na Figura abaixo, a numeração dos nós P_p, P_r e P_s deve ser feita no sentido horário:



O ponto P no interior do triângulo tem coordenadas cartesianas x e y. Suas coordenadas naturais (ou de área) são:

$$L_p = \frac{A_p}{\Delta} \qquad L_r = \frac{A_r}{\Delta} \qquad L_s = \frac{A_s}{\Delta} \qquad \text{(B-1)}$$

Portanto $$L_p + L_r + L_s = 1$$

Isto é, as coordenadas naturais não são independentes. Duas quaisquer delas definem a terceira (como não poderia deixar de ser, já que um ponto no plano tem apenas dois graus de liberdade).

A relação entre as coordenadas cartesianas e as naturais é dada pela equação matricial:

$$\begin{Bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_p & x_r & x_s \\ y_p & y_r & y_s \end{bmatrix} \cdot \begin{Bmatrix} L_p \\ L_r \\ L_s \end{Bmatrix}$$

que pode ser desdobrada nas seguintes equações:

$$1 = L_p + L_r + L_s \tag{B-2}$$

$$x = L_p\, x_p + L_r\, x_r + L_s\, x_s \tag{B-3}$$

$$y = L_p\, y_p + L_r\, y_r + L_s\, y_s \tag{B-4}$$

As duas últimas equações fornecem diretamente as coordenadas cartesianas em função das naturais.

Para se obterem as coordenadas naturais em função das cartesianas, basta resolver o sistema acima, de três equações. Obtêm-se:

$$L_p = \frac{A_p + B_p\, x + C_p\, y}{2\Delta} \tag{B-5}$$

$$L_r = \frac{A_r + B_r\, x + C_r\, y}{2\Delta} \tag{B-6}$$

$$L_s = \frac{A_s + B_s\, x + C_s\, y}{2\Delta} \tag{B-7}$$

onde:

$$\Delta = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_p & x_r & x_s \\ y_p & y_r & y_s \end{vmatrix} = \text{área do triângulo}$$

Por outro lado:

$$\begin{cases} A_p = x_r\, y_s - x_s\, y_r \\ B_p = y_r - y_s \\ C_p = x_s - x_r \end{cases} \tag{B-8}$$

$$\begin{cases} A_r = x_s\, y_p - x_p\, y_s \\ B_r = y_s - y_p \\ C_r = x_p - x_s \end{cases} \tag{B-9}$$

$$\begin{cases} A_s = x_p\, y_r - x_r\, y_p \\ B_s = y_p - y_r \\ C_s = x_r - x_p \end{cases} \tag{B-10}$$

Demonstra-se que:

$$\iint_{\Omega} L_p^a\, L_r^b\, L_s^c\, d\Omega = 2\Delta\, \frac{a!\; b!\; c!}{(2 + a + b + c)!} \tag{B-11}$$

Esta fórmula é extremamente útil na integração sobre uma região Ω triangular.

Pode-se eliminar L_s (por exemplo) através de B-2. Fica simplesmente:

$$\iint_{\Omega} L_p^a\, L_r^b\, d\Omega = 2\Delta\, \frac{a!\; b!}{(2 + a + b)!} \tag{B-12}$$

BIBLIOGRAFIA

(1) André, J. C.
"Métodos Numéricos para a Análise de Sistemas Físicos"
Notas de aula, EPUSP, 1984.

(2) Barros, I. Q.
"Introdução ao Cálculo Numérico"
Unicamp, 1970.

(3) Bathe, K. J.
"Finite Element Procedures in Engineering Analysis"
Prentice-Hall, Inc., Englewood Cliffs, New Jersey, 1982.

(4) Camargo, M. C. H.
"A Importância das Rotações no Estudo da Não-Linearidade Geométrica"
Dissertação de Mestrado apresentada à EPUSP, 1983.

(5) Cook, R. D.
"Concepts and Applications of Finite Element Analysis"
John Wiley & Sons, New York, 1981.

(6) Crandall, S. H.
"Engineering Analysis"
McGraw-Hill Book Company, New York, 1956.

(7) Diogo, L. A. C.
"Contribuição ao Estudo dos Efeitos de Segunda Ordem em Placas pelo Método dos Elementos Finitos"
Tese de Doutoramento apresentada à EPUSP, 1984.

(8) Fung, Y. C.
"Foundations of Solid Mechanics"
Prentice-Hall, Inc., New Jersey, 1965.

(9) Gallagher, R. H.
"Finite Element Analysis of Geometrically Nonlinear Problems"
Proc. 1973 Tokyo Seminar on Finite Element Analysis, Univ. of Tokyo Press, 1973.

(10) Holand, I., Bell, K.
"Finite Element Methods in Stress Analysis"
Tapir, Norway, 1972.

(11) Kaplan, W.
"Cálculo Avançado"
Edgard Blücher Ltda., São Paulo, 1972.

(12) Kneese, F. Q. S.
"Sobre a Teoria da Elasticidade Não-Linear e suas Simplificações"
Dissertação de Mestrado apresentada à EPUSP, 1979.

(13) Lamas, A. R. G.
"Comportamento de Placas e Lajes em Regime Linear e Não-Linear"
Notas de aula, EPUSP, 1984.

(14) Livesley, R. K.
"Matrix Methods of Structural Analysis"
2nd ed., Pergamon Press, Oxford, 1975.

(15) Mazzilli, C. E. N.
"Flambagem"
Notas de aula, EPUSP, 1985.

(16) Novozhilov, V. V.
"Foundations of the Nonlinear Theory of Elasticity"
Graylock Press, Rochester, New York, 1953.

(17) Piskunov, N.
"Cálculo Diferencial e Integral"
Editorial Mir, Moscou, 1969.

(18) Siqueira, J. A. L.
"Elementos Finitos de Placas: Esforços Solicitantes"
Dissertação de Mestrado apresentada à EPUSP, 1982.

(19) Soares, C. A.
"Teoria da Elasticidade"
Notas de aula, EPUSP, 1981.

(20) Souza Lima, V. M.
"Análise Matricial de Estruturas"
Notas de aula, EPUSP, 1981.

(21) Souza LIma, V. M.
"Método dos Elementos Finitos"
Notas de aula, EPUSP, 1980.

(22) Souza Lima, V. M., Venancio Filho, F.
"A Noção de Rigidez Tangente no Estudo da Não-Linearidade Geométrica das Estruturas Reticuladas"
5º Congresso Latino-Americano para Métodos Computacionais em Engenharia, Salvador, 1984.

(23) Souza Lima, V. M., Venancio Filho, F.
"Considerações sobre a Não-Linearidade Geométrica em Estruturas Reticuladas"
III Escola de Matemática Aplicada, Laboratório de Computação Científica (CNPq), Rio de Janeiro, 1982.

(24) Souza Lima, V. M., Zagottis, D. L., André, J. C.
"As Tensões de Origem Térmica nas Barragens e o Comportamento Viscoelástico do Concreto"
XI Seminário Nacional de Grandes Barragens, Fortaleza, 1976.

(25) Timoshenko, S. P., Gere, J. M.
"Theory of Elastic Stability"
McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1961.

(26) Timoshenko, S. P., Goodier, J. N.
"Theory of Elasticity"
McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1970.

(27) Timoshenko, S. P., Woinowsky-Krieger, S.
"Theory of Plates and Shells"
McGraw-Hill Kogakusha, Ltd., Tokyo, 1959.

(28) Venancio Filho, F.
"Análise Matricial de Estruturas"
Almeida Neves, Rio de Janeiro, 1975.

(29) Zagottis, D. L.
"Formulação Matricial do Método dos Elementos Finitos"
EPUSP, 1981.

(30) Zagottis, D. L.
"Introdução ao Método dos Elementos Finitos"
Notas de aula, FDTE/EPUSP/IPT, 1979.

(31) Zagottis, D. L.
"Introdução à Teoria das Placas e das Cascas"
EPUSP, 1972.

(32) Zienkiewicz, O. C.
"The Finite Element Method"
McGraw-Hill Book Company, London,1977.