FERNANDO ROGÉRIO GONÇALVES

Equações constitutivas ortótropas para a modelagem de membranas: teoria e implementação em elementos finitos.

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia.

São Paulo
2012

FERNANDO ROGÉRIO GONÇALVES

Equações constitutivas ortótropas para a modelagem de membranas: teoria e implementação em elementos finitos.

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador: Professor
Dr. Eduardo M. B. Campello

São Paulo
2012

Aos Meus pais Maria Rosa e Luiz Carlos e aos meus Sobrinhos Aliny e Alexandre.

Agradecimentos:

Ao Professor Eduardo Campello pela valiosa orientação durante o desenvolvimento desse trabalho.

Ao Professor Paulo M. Pimenta, pela acolhida ao grupo e por sugestões sobre o trabalho.

Ao Professor Ruy M. Pauletti, pelas sugestões referentes a minha pesquisa.

Aos meus pais Maria Rosa e Luiz Carlos e todos meus familiares, em especial agradeço (*in memoriam*) a minha tia Ana Panhota, a minha avó Beth e ao meu avô Domingos.

Aos amigos: Ana Gabi, Cleiton, Lilian, Gervásio, Érika, Edward, Wandla, Rodrigo agradeço pela compreensão por minha ausência nos últimos três anos.

Aos amigos: Renata Uchôa, Guilherme Neves, Juliana Turri, Ana Cristina, Sílvia, Cesar, Natan, Raquel, Dina, Márcio Santos, Janaína Pitteri sempre presentes em minhas lembranças.

Aos amigos da Poli: Augusto, Fábio, Mauro, Fernando Piva, Solange, Luciano.

Aos amigos do CAM: Alexandre (Tikine), Fúlvio, Renato, Ricardo (Salada), Daniel Chu, Sílvio, pela amizade alguns a mais de 25 anos.

Aos amigos: Manoel Marto, Jackson, Beth e Edely pelo apoio nos últimos anos.

Ao amigo Laílson, sua mãe Tiana e suas filhas Maria Luiza e Maria Fernanda.

A minha grande amiga Paulinha Yorozuya.

Aos meus amigos e vizinhos:Valadão, Neusa, Marina e Marcelo.

A minha prima Cristiane e meu afilhado Guilherme.

Aos amigos e compadres Luciana Lion e Ricardo, a Gabi, ao meu afilhado Felipe, e a toda turma Leila, Giovana, Luiz, Letícia, Soraia e Irani.

A Grande Família do JAC/AADP: Leonardo Lago, Paulo Nigro, Jorge Costa, Eduardo Simões, Alexandre Beletti (Higuita), Marcelo Rassy, Henrique (e Mônica), Marco Brasiel (Maguinho), Marina Lima, Kamila, Evandro, Nádia Ota e Cinthia.

Aos amigos da pós-graduação e outros laboratórios: Igor Pierin, Márcia Sato, Rodrigo, Érika Uagaia, Luís Bitencourt, Diogo, Ladislao, Plínio, Nicolau, Ricardo Oliveira, Ana Carolina e Luciana Kataoka.

A Jô, Adilson, Ramos, Guilherme em especial aos meus sobrinhos Aliny e Alexandre.

Agradeço ainda ao CNPq pelo suporte financeiro.

ÍNDICE

RESUMO v

ABSTRACT vi

1. Introdução 1

1.1. Estado da arte 2

1.2. Objetivos 4

1.3. Notação utilizada 4

2. Formulação de casca com implementação em elementos finitos 6

2.1. Cinemática 6

2.2. Estática 12

2.3. Equilíbrio 17

2.4. Discretização em elementos finitos 20

3. Descrição do Material 25

3.1. Configuração e composição do material 26

3.2. Comportamento mecânico do tecido 28

3.3. Idealização 29

3.4. Modelos constitutivos propostos 30

3.4.1. Modelo Constitutivo de Oliveira-Pimenta [5] e [8] 32

3.4.2. Modelo constitutivo de Saint-Venant (Raible [28] e [33]) 41

4. Calibração dos parâmetros materiais dos modelos constitutivos propostos 48

4.1. Calibração do modelo constitutivo de o Oliveira-Pimenta utilizando uma membrana composta de fibras de poliéster revestida por PVC 51

4.2. Calibração do modelo constitutivo ortótropo de Saint-Venant utilizando uma membrana composta de fibras de poliéster revestida por PVC 54

5. Exemplos numéricos 56

5.1. Membrana quadrada (modelo constitutivo de Oliveira-Pimenta) 56

5.2. Membrana quadrada (modelo constitutivo ortótropo de Saint-Venant-Pimenta) 62

6. Conclusões 68

Anexo A 71

Anexo B 103

7. Referências Bibliográficas 121

RESUMO

O emprego das estruturas de membrana é cada dia mais frequente em edificações de relevância civil e arquitetônica, em especial para a cobertura de grandes vãos. Sua aplicabilidade, contudo, vai além da construção civil, sendo igualmente importante nas indústrias das engenharias mecânica, naval, oceânica, aeroespacial e biomédica: aeronaves, satélites, paraquedas, *airbags*, velas de embarcações, moinhos de vento e até aplicações biomecânicas com tecidos humanos ou artificiais utilizam a tecnologia das estruturas de membrana.

O comportamento mecânico de grande parte das membranas estruturais pode ser idealizado como uma casca isótropa de pequena espessura reforçada por uma membrana ortótropa.

O objetivo desta pesquisa de mestrado é dar continuidade aos estudos referentes às teorias de casca geometricamente exatas desenvolvidas por [1], [2], [3] e [4], e sua generalização para o âmbito das membranas iniciada em [5]. Pretende-se contribuir, principalmente, para o desenvolvimento de equações constitutivas ortótropas consistentes para grandes deformações, apresentar uma metodologia para calibração dos parâmetros materiais destas equações constitutivas e para a análise de estabilidade com vistas ao estudo do fenômeno do enrugamento.

ABSTRACT

The use of membrane structures is becoming increasingly common in buildings of architectural and civil engineering importance, especially to cover large spans. Its applicability, however, goes beyond the construction industry being equally important in the industries of mechanical, naval, ocean, aerospace and biomedical engineering: aircraft, satellites, parachutes, airbags, sails of boats, windmills and even biomechanical applications with human and artificial tissues use the technology of membrane structures.

The mechanical behavior of most structural membranes can be idealized as an isotropic thin shell reinforced by an orthotropic membrane.

The objective of this work is to continue the studies on the geometrically exact shell theories developed by [1], [2] , [3] and [4] and its generalization to the scope of the membranes initially studied by [5]. It aims intended to contribute mainly to the development of consistent orthotropic constitutive equations for large deformations, to present a methodology for the calibration of the material parameters in those constitutive relations and for the stability analysis in order to study the phenomenon of wrinkling.

1. Introdução

Uma *membrana estrutural* é um elemento superficial que resiste aos carregamentos externos desenvolvendo tensões normais e de cisalhamento, as quais atuam nos planos tangentes à sua superfície em cada ponto de seu domínio.

Conforme [6], uma estrutura de membrana é aquela em que a membrana constitui dos pontos de vista arquitetônico e estrutural, a parte principal do sistema. Neste caso, todos os demais elementos estruturais, tais como mastros, masteletes, estais e cabos, estarão dispostos no sistema a fim de que a membrana:

- tenha uma configuração geométrica próxima àquela definida na intenção arquitetônica;
- desempenhe a função para a qual foi concebida (em geral, cobrir grandes áreas livres);
- seja estável;
- resista aos carregamentos externos, sejam eles estáticos ou dinâmicos.

O uso das estruturas de membrana tem sido cada vez mais frequente em obras de relevância civil e arquitetônica, em especial nas coberturas para grandes vãos. Para [7] seu emprego vai além, como por exemplo: em aplicações de aeronaves e naves espaciais, paraquedas, *airbags* de automóveis, velas de embarcações, moinhos de vento e tecidos humanos.

Segundo [8] o desenvolvimento de novos materiais aliado ao aumento das possibilidades de se projetar, proporcionado pelas simulações computacionais, são fortemente responsáveis pelo atual cenário das estruturas de membrana na construção civil.

No âmbito da simulação computacional uma área de importância fundamental é a representação do material que compõe a estrutura. Para que isso aconteça da forma mais realista possível é necessário compreender o mecanismo de resistência deste material.

Uma membrana estrutural consiste de uma rede fina de fibras revestida por finas coberturas nas suas superfícies inferior e superior. Tais fibras são geralmente tecidas em duas direções ortogonais, e por este motivo as características ortótropas estão presentes em seu comportamento mecânico.

Vale destacar, que a formulação proposta neste trabalho pode não ser adequada a aplicações arquitetônicas de membrana, pois na busca de uma intensão arquitetônica, a colagem dos diversos padrões de corte, que apresentaram direções diferentes, provocará perda da

ortotropia. Por outro lado, para aplicações que requerem precisão geométrica, como por exemplo, em aplicações aeroespaciais, o tratamento adequado da ortotropia assim como do enrugamento, se tornam essenciais.

1.1. Estado da arte

Na obra de Itskov e Basar (1999) [9] e Itskov (2001) [10] um modelo constitutivo ortótropo hiperelástico foi desenvolvido para a simulação numérica do reforço com fibras de borracha em tecidos biológicos. O modelo usa uma extensão não linear ortótropa do material de Saint Venant-Kirchhoff descrevendo as direções principais dos materiais por uma função tensorial isótropa acoplada com os tensores estruturais correspondentes. Lürding (2001) [11] desenvolve com base na função isótropa de energia de deformação do material (dada como uma função exponencial em termos dos invariantes principais), uma extensão para o caso transversalmente isótropo e ortótropo.

A motivação para os trabalhos de Bonet e Burton (1998) [12], Weiss *et al*. (1996) [13] e Holzapfel *et al*. (2000) [14] é a modelagem de processos de grandes deformação em materiais biológicos. Um modelo constitutivo hiperelástico transversalmente isótropo para o caso de grandes deformações é desenvolvido por Bonet e Burton (1998) [12].

Weiss et al. (1996) [13] também apresentam um modelo constitutivo isótropo, onde o foco está na incompressibilidade.

Para a simulação das paredes arteriais, um modelo de material constitutivo ortótropo novo é desenvolvido por Holzapfel *et al*. (2000) [14], em que cada camada da artéria é modelada como um material reforçado por fibra. Os invariantes com respeito a várias direções preferenciais são aditivamente dissociados, o que significa que o modelo proposto pode ser considerado como uma sobreposição de diferentes modelos de materiais transversalmente isótropos. Uma visão geral e estudo comparativo dos vários modelos mecânicos para aplicações em sistemas biomecânicos também está incluso neste trabalho.

Um modelo para materiais transversalmente isótropos quase incompressíveis é proposto por Rüter e Stein (2000). [15] Eles também desenvolveram um estimador de erro para a medição do erro de discretização dentro do método dos elementos finitos.

Com base nos trabalho de Spencer (1984) [16] e Boehler (1987) [17] uma função de energia de deformação para materiais ortótropos não lineares é proposta por Raible *et al*. (2000) [18] e Reese *et al*. (2001) [19]. A formulação é incluída em um elemento contínuo especial (ver Reese (2000) [20] e Wriggers (2008)) [21]. Para identificar as propriedades específicas de ortotropia são feitas investigações em micro escala para o material do tecido e as conclusões são introduzidas diretamente na descrição macroscópica do material.

Com base na teoria dos invariantes, Schröder e Neff (2002) [22] desenvolvem uma metodologia para obter funções de energia livre, que automaticamente preenchem as condições de poli convexidade no sentido de Ball (1977) [23], a fim de garantir solução única. As funções de energia livre e a funções de anisótropas de tensão são representados por funções tensoriais isótropas a valores escalares e tensoriais, respectivamente. Equações constitutivas transversalmente isótropas e ortótropas são dadas em uma estrutura aditiva, onde os termos individuais atendem a priori a condição poli convexidade.

No nível de estruturas reais, rugas são instabilidades locais visíveis em membranas devido à compressão local. Para descrever esse efeito, vários estudos são baseados na introdução de uma variável cinemática adicional que mapeia a região enrugada em uma chamada "configuração média". Roddeman (1987) [24] formula várias condições para a classificação das regiões enrugadas e mostra que esta abordagem pode ser aplicada a deformações finitas e modelos de materiais anisótropos. Taenzer (1997) utiliza a abordagem de Roddeman para desenvolver uma formulação robusta de elementos finitos. Schoop *et al*. (2002) [25] apresenta uma formulação alternativa à abordagem de Roddeman resultando em equações não lineares mais simples. Baseando-se nas condições de enrugamento de Roddeman, Ziegler (2001) desenvolve um algoritmo análogo à elasto-plasticidade de divisão aditiva com pequenas deformações para calcular as deformações de enrugamento. Como o algoritmo requer que as tensões e as deformações principais tenham direções idênticas, é aplicável apenas a materiais isotrópicos.

Liu et al. (2000) [26] apresenta sua abordagem para o tratamento do enrugamento. As rugas são resolvidas em detalhes quanto ao comprimento de onda, número e amplitude da onda com base em duas análises: a primeira é uma análise grosseira que objetiva localizar regiões da membrana que possam estar tensionadas, folgadas ou enrugadas. Na segunda etapa, com base na suposição de rugas sinusoidais, uma analise mais refinada determina rugas físicas com base em informações das tensões principais e deformações obtidas pela análise grosseira.

Oliveira (2006) [5], simula o comportamento mecânico dos tecidos estruturais idealizando-os como uma casca fina isótropa reforçada por uma membrana ortótropa, utilizando a teoria de cascas geometricamente exata desenvolvida por Pimenta (1993) [1] e discretizando os modelos com o elemento finito T6-3i desenvolvido por Campello *et al (2003)* [4].

Chivante (2009) [27], estuda diferentes métodos de modelagem para materiais típicos de estruturas retesadas, com ênfase nos modelos ortótropos representados por um funcional de energia de deformação hiperelástico.

1.2.Objetivos

Aproveitando-se das formulações de cascas e membranas desenvolvidas em [1,3,4,5], pretende-se fundamentalmente estender os modelos existentes para incorporar leis constitutivas ortótropas que se adequem aos materiais efetivamente utilizados na confecção das membranas, capazes de representar o seu comportamento macroestrutural de maneira mais apropriada. São apresentadas em detalhes a dedução das expressões que constitui a matriz das contribuições constitutivas da parcela das equações constitutivas referentes a ortotropia. Pretende-se também, apresentar uma metodologia para calibração de modelos constitutivos ortótropos utilizando dados experimentais de teste de tração biaxial de membranas reais empregadas em projetos de engenharia e iniciar o estudo da analise de instabilidade visando o fenômeno no enrugamento.

1.3. Notação utilizada

Com relação à notação utilizada, ao longo de todo o trabalho letras minúsculas ou gregas em itálico $\left(a,b,\ldots,\alpha,\beta,\ldots\right)$ representam grandezas escalares, ao passo que as correspondentes em negrito $\left(\boldsymbol{a},\boldsymbol{b},\ldots,\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta},\ldots\right)$ denotam vetores. Letras maiúsculas latinas ou gregas em negrito-itálico $\left(\boldsymbol{A},\boldsymbol{B},\ldots\right)$ expressam tensores de segunda ordem no espaço Euclidiano tridimensional. Vetores e matrizes construídos com componentes tensoriais (por exemplo, para fins computacionais) são expressos por letras latinas em negrito não itálico $\left(\mathbf{A},\mathbf{B},\ldots,\mathbf{a},\mathbf{b},\ldots\right)$.

Adota-se ainda a convenção de somatório sobre índices repetidos, estando subentendido que estes tomam valores entre $\{1,2\}$ para letras gregas ou entre $\{1,2,3\}$ para letras latinas.

2. Formulação de casca com implementação em elementos finitos

Cascas são estruturas de superfícies delgadas, geralmente não planas, que recebem carregamentos e resistem através de esforços solicitantes de tração, compressão, flexão e cisalhamento.

A teoria estrutural de casca, utilizada neste trabalho, tem origem em [1] e foi desenvolvida e implementada numericamente em [2] e [4]. É cinematicamente exata e comporta deformações finitas. Esse modelo emprega como grandezas essenciais o gradiente das deformações e o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, e impõe estado plano de tensões sobre o campo real das tensões nominais (primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff).

Neste trabalho, não se admite alteração de espessura durante o movimento. A formulação proposta se aplica a qualquer tipo de equação constitutiva para estado plano de tensões.

A formulação apresentada a seguir foi retirada de [2] e [4].

2.1. Cinemática

Para o estudo cinemático das cascas sem deformação de espessura, define-se preliminarmente uma base ortonormal $\left\{\boldsymbol{e}_1^r,\ \boldsymbol{e}_2^r,\ \boldsymbol{e}_3^r\right\}$, com coordenadas $\left\{\xi_1,\ \xi_2,\ \zeta\right\}$ na configuração de referência, inicialmente plana, posicionada no plano médio $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ com $\boldsymbol{e}_3^r$ normal a este plano como apresentado na **Figura 1**.

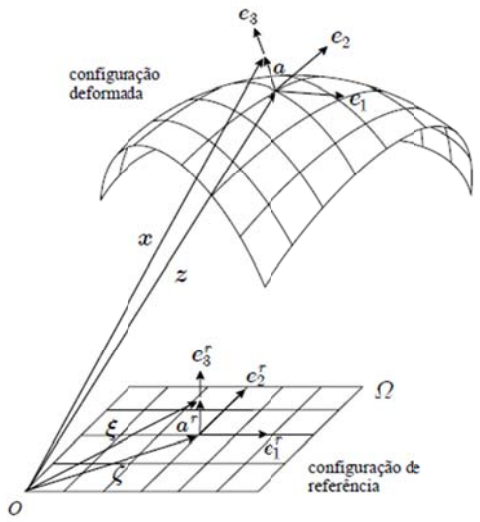


Figura 1: Cinemática da casca e suas grandezas fundamentais (figura retirada de [2]).

O campo vetorial $\boldsymbol{\xi} = \hat{\boldsymbol{\xi}}\left(\xi_1, \xi_2, \zeta\right)$ descreve a posição dos pontos materiais na configuração de referência, dado por:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{a}^r \,, \tag{2.1}$$

onde

$$\boldsymbol{\zeta} = \xi_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r \tag{2.2}$$

define um ponto sobre o plano médio e

$$\boldsymbol{a}^r = \zeta \boldsymbol{e}_3^r \tag{2.3}$$

é o vetor diretor neste ponto, normal ao plano médio, sendo $\zeta \in H = \left[-h^b, h^t\right]$ a coordenada ao longo da espessura $h = h^b + h^t$.

A base ortonormal local na configuração deformada $\left\{\boldsymbol{e}_1,\ \boldsymbol{e}_2,\ \boldsymbol{e}_3\right\}$ é obtida pela aplicação de uma rotação promovida pelo tensor de rotação $\boldsymbol{Q}$ à base definida na configuração de referência, de modo que, $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i^r$. Essa rotação sobre a base $\left\{\boldsymbol{e}_i^r\right\}$ é genérica, de modo que o plano definido pelos vetores $\boldsymbol{e}_\alpha$ não é necessariamente tangente à superfície média deformada e $\boldsymbol{e}_3$ não é obrigatoriamente ortogonal à mesma. Em outras palavras: a hipótese de *Reissner-Mindlin* é válida para o diretor $\boldsymbol{a}^r$.

O vetor $\boldsymbol{x}$, que representa a posição dos pontos materiais na configuração deformada, é expresso por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a} \,, \tag{2.4}$$

onde $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}}\left(\xi_1, \xi_2\right)$ descreve a posição de um ponto sobre a superfície média e $\boldsymbol{a}$ representa o vetor diretor neste ponto, obtido por através de

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^r . \tag{2.5}$$

Diz-se que o vetor $\boldsymbol{v}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{v}$ é o equivalente retrorrotacionado de $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{v}^r$, para qualquer par de vetores $\boldsymbol{v}, \boldsymbol{v}^r \in \mathbb{R}^3$. O índice "r" significa que se trata de uma grandeza retrorrotacionada para configuração de referência.

A substituição da equação (2.3) em (2.5) resulta que $\boldsymbol{a} = \zeta \boldsymbol{e}_3$, de onde se observa que $\boldsymbol{e}_3$ está alinhado com $\boldsymbol{a}$ e magnitude do diretor é preservada durante o movimento, desta forma não sendo permitida a deformação da espessura no modelo adotado.

O tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$ pode ser expresso em função do vetor das rotações $\boldsymbol{\theta}$ utilizando a formula de Euler-Rodrigues

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + h_1(\theta)\boldsymbol{\Theta} + h_2(\theta)\boldsymbol{\Theta}^2 \tag{2.6}$$

onde

$$\boldsymbol{\theta} = \theta_1\boldsymbol{e}_1^r + \theta_2\boldsymbol{e}_2^r + \theta_3\boldsymbol{e}_3^r \ (\theta_i \text{ componentes de } \boldsymbol{\theta}),$$

$$\theta = \|\boldsymbol{\theta}\|, \quad h_1(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta}, \quad h_2(\theta) = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2\left(\theta/2\right)}{\left(\theta/2\right)^2} \tag{2.7}$$

$$\text{e} \quad \boldsymbol{\Theta} = \operatorname{Skew}\left(\boldsymbol{\theta}\right) = \begin{bmatrix} 0 & -\theta_3 & \theta_2 \\ \theta_3 & 0 & -\theta_1 \\ -\theta_2 & \theta_1 & 0 \end{bmatrix}.$$

O deslocamento dos pontos sobre o plano médio da casca é dado pelo vetor

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta} \tag{2.8}$$

As componentes de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\theta}$ no sistema cartesiano global constituem os seis graus-de-liberdade do modelo.

Da equação (2.4) obtém-se o vetor posição $\boldsymbol{x}$ na configuração deformada, que derivado em relação ao vetor posição $\boldsymbol{\xi}$ na configuração de referência resulta no gradiente da deformação que pode ser escrito, fazendo uso da notação $\left(\bullet\right)_{,\alpha} = \partial\left(\bullet\right) / \partial\xi_\alpha$ e $\left(\bullet\right)' = \partial\left(\bullet\right) / \partial\zeta$, por

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta} \otimes \boldsymbol{e}_3^r \\ &= \left(\boldsymbol{z}_{,\alpha} + \boldsymbol{Q}_{,\alpha}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{a}\right) \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + a' \otimes \boldsymbol{e}_3^r \\ &= \left(\boldsymbol{\eta}_\alpha + \boldsymbol{K}_\alpha\boldsymbol{a}\right) \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{Q},\end{aligned} \tag{2.9}$$

onde

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \boldsymbol{z}_{,\alpha} - \boldsymbol{e}_\alpha \quad \text{e} \quad \boldsymbol{K}_\alpha = \boldsymbol{Q}_{,\alpha}\boldsymbol{Q}^T \tag{2.10}$$

podem ser entendidos como deformações generalizadas das seções transversais, com $\boldsymbol{z}_{,\alpha} = \boldsymbol{u}_{,\alpha} + \boldsymbol{e}_\alpha^r$. As deformações de membrana são representadas pelas componentes de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ nas direções $\boldsymbol{e}_\beta$, enquanto o cisalhamento transversal pela componente em $\boldsymbol{e}_3$. Os tensores $\boldsymbol{K}_\alpha$ são antissimétricos e descrevem a as rotações específicas do diretor, com seus vetores axiais designados por $\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \mathrm{axial}\left(\boldsymbol{K}_\alpha\right)$. É possível demonstrar que

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}, \tag{2.11}$$

com

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I} + h_2(\theta)\boldsymbol{\Theta} + h_3(\theta)\boldsymbol{\Theta}^2 \tag{2.12}$$

onde

$$h_3\left(\theta\right) = \frac{1 - h_1\left(\theta\right)}{\theta^2}. \tag{2.13}$$

Observe que as propriedades $\boldsymbol{\Gamma}^T = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}^T$ e $\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}^T$ valem para $\boldsymbol{\Gamma}$.

Retrorrotacionando as deformações de membrana e as rotações específicas do diretor para a configuração de referência, encontram-se

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_\alpha^r &= \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\eta}_\alpha = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}_{,\alpha} - \boldsymbol{e}_\alpha^r \qquad \text{e} \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r &= \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}. \end{aligned} \tag{2.14}$$

Lembrando que para um tensor antissimétrico $\boldsymbol{Y}$ qualquer e seu respectivo vetor axial $\boldsymbol{y}$ a propriedade $\boldsymbol{Y}\boldsymbol{b} = \boldsymbol{y} \times \boldsymbol{b}$ é verdadeira, e substituindo os resultados de (2.14) em (2.9), obtém-se a expressão

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\Big[\boldsymbol{I} + \Big(\boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \times \boldsymbol{a}^r\Big) \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\Big], \tag{2.15}$$

e definindo

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r = \boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \times \boldsymbol{a}^r, \tag{2.16}$$

Obtém-se

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\Big(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\Big). \tag{2.17}$$

Com esse resultado, $\boldsymbol{F}$ pode ser reescrito com

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^r, \tag{2.18}$$

O tensor $\boldsymbol{F}^r$ é expresso por

$$\boldsymbol{F}^r = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r. \tag{2.19}$$

Utilizando a notação $\dot{\left(\bullet\right)}$ para indicar diferenciação no tempo e aplicando essa operação sobre a equação (2.18), resulta no gradiente das velocidades:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{F}} &= \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{F}^r + \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{F}}^r \\ &= \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\gamma}^r_\alpha \otimes \boldsymbol{e}^r_\alpha\right) \\ &= \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\gamma}^r_\alpha \otimes \boldsymbol{e}^r_\alpha\right),\end{aligned} \tag{2.20}$$

onde o tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$ representa a velocidade angular do diretor e apresenta vetor axial $\boldsymbol{\omega} = \mathrm{axial}\left(\boldsymbol{\Omega}\right)$, e de modo análogo à equação (2.11) é expresso por

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}\,. \tag{2.21}$$

Para o cálculo da equação (2.20) faz-se necessário conhecer as derivadas temporais $\dot{\gamma}^r_\alpha$ que podem ser expressas por

$$\dot{\gamma}^r_\alpha = \dot{\boldsymbol{\eta}}^r_\alpha + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r_\alpha \times \boldsymbol{a}^r\,. \tag{2.22}$$

As derivadas $\dot{\boldsymbol{\eta}}^r_\alpha$ e $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r_\alpha$ são conseguidas promovendo a diferenciação temporal de (2.14). Derivando a expressão $(2.14)_1$ referente ao termo $\boldsymbol{\eta}^r_\alpha$ e lembrando que $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega}$, tem-se

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{\eta}}^r_\alpha &= \dot{\boldsymbol{Q}}^T\boldsymbol{z}_{,\alpha} + \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{z}}_{,\alpha} = \boldsymbol{Q}^T\left(\boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^T\boldsymbol{z}_{,\alpha} + \dot{\boldsymbol{u}}_{,\alpha}\right) \\ &= \boldsymbol{Q}^T\left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,\alpha} + \boldsymbol{\Omega}^T\boldsymbol{z}_{,\alpha}\right) = \boldsymbol{Q}^T\left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,\alpha} - \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}} \times \boldsymbol{z}_{,\alpha}\right) \\ &= \boldsymbol{Q}^T\left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,\alpha} + \boldsymbol{Z}_{,\alpha}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}\right),\end{aligned} \tag{2.23}$$

onde $\boldsymbol{Z}_{,\alpha} = \mathrm{Skew}\left(\boldsymbol{\omega}\right)$.

Para obtenção do termo $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}^{r}$, lembrando que vale a identidade $\boldsymbol{\Omega}_{,\alpha} = \boldsymbol{K}_{\alpha} - \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{K}_{\alpha} + \boldsymbol{K}_{\alpha}\boldsymbol{\Omega}$, ver [2], de onde decorre

$$\boldsymbol{\omega}_{,\alpha} = \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha} - \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}_{\alpha} \Rightarrow \dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha} = \boldsymbol{\omega}_{,\alpha} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\kappa}_{\alpha}. \tag{2.24}$$

Diferenciando $(2.14)_2$ no tempo, e usando $(2.24)_2$ juntamente com a propriedade $\dot{\boldsymbol{Q}}^T = -\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Omega}$ (que decorre de $\boldsymbol{\Omega}^T = -\boldsymbol{\Omega} = \boldsymbol{Q}\dot{\boldsymbol{Q}}^T$), encontra-se a expressão

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}^{r} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\omega}_{,\alpha}, \tag{2.25}$$

e levando em conta (2.21), obtém-se

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}_{\alpha}^{r} = \boldsymbol{Q}^T\left(\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha}\dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\theta}}_{,\alpha}\right). \tag{2.26}$$

Calculando as derivadas em relação aos parâmetros ξ_{α} do tensor $\boldsymbol{\Gamma}$ utilizando a equação (2.12), e após algumas manipulações algébricas, chega-se

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha} = {} & h_2\left(\theta\right)\boldsymbol{\Theta}_{,\alpha} + h_3\left(\theta\right)\left(\boldsymbol{\Theta}\boldsymbol{\Theta}_{,\alpha} + \boldsymbol{\Theta}_{,\alpha}\boldsymbol{\Theta}\right) + \\ & + h_4\left(\theta\right)\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\right)\boldsymbol{\Theta} + h_5\left(\theta\right)\left(\boldsymbol{\theta}\cdot\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\right)\boldsymbol{\Theta}^2,\end{aligned} \tag{2.27}$$

onde $\boldsymbol{\Theta}_{,\alpha} = \mathrm{Skew}\left(\boldsymbol{\theta}_{,\alpha}\right)$ e

$$h_4\left(\theta\right) = \frac{h_1\left(\theta\right) - 2h_2\left(\theta\right)}{\theta^2} \qquad \text{e} \qquad h_5\left(\theta\right) = \frac{h_2\left(\theta\right) - 3h_3\left(\theta\right)}{\theta^2}. \tag{2.28}$$

2.2.Estática

O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{P}$ é representado por

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{\tau}_i \otimes \boldsymbol{e}_i^r, \tag{2.29}$$

onde os vetores-colunas $\boldsymbol{\tau}_i$ representam as tensões na configuração deformada que podem ser expressas em função de $\boldsymbol{\tau}_i^r$, suas equivalentes retrorrotacionadas por unidade de área da configuração de referência e atuam em planos dos quais as normais nesta configuração são dadas por $\boldsymbol{e}_i^r$, pela relação $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_i^r$, obtendo-se então

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^r, \tag{2.30}$$

onde $\boldsymbol{P}^r$ é o equivalente de $\boldsymbol{P}$ retrorrotacionado para a configuração de referência.

Ao se introduzir as hipóteses de estado plano de tensões em $\boldsymbol{P}$, estes vetores passam a ser designados pro $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i$ e $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r$, respectivamente, do qual falaremos no capítulo 3.

Usando os tensores energeticamente conjugados $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{F}$, a potência dos esforços internos por unidade de volume de referência vale

$$\begin{aligned} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} &= \left[\boldsymbol{Q}\left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r\right)\right] : \left[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right)\right] \\ &= \boldsymbol{P} : \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r. \end{aligned} \tag{2.31}$$

O termo $\boldsymbol{P} : \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T : \boldsymbol{\Omega} = 0$, decorre do balanço do momento angular, ou segunda equação local do movimento. Note que a potência associada a $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_3^r$ é nula devido a hipótese de diretor com magnitude constante. Substituindo (2.22) em (2.31), tem-se

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \left(\boldsymbol{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r\right) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r, \tag{2.32}$$

e realizando a integração ao longo da espessura, obtém-se

$$\int_H \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} d\zeta = \boldsymbol{n}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \boldsymbol{m}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \tag{2.33}$$

onde

$$\boldsymbol{n}_\alpha^r = \int_H \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{m}_\alpha^r = \int_H \boldsymbol{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta \,. \tag{2.34}$$

Os vetores $\boldsymbol{n}_\alpha^r$ representam as forças generalizadas retrorrotacionadas atuantes na seção transversal com normal $\boldsymbol{e}_\alpha^r$, e $\boldsymbol{m}_\alpha^r$ os momentos generalizados retrorrotacionados na mesma seção, todos por unidade de comprimento da configuração de referência. O emprego do termo generalizado foi utilizado para diferenciar dos esforços $\boldsymbol{n}_\alpha^r$ e $\boldsymbol{m}_\alpha^r$ de seus equivalentes na configuração deformada,

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{n}_\alpha^r \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{Q}\, \boldsymbol{m}_\alpha^r \,, \tag{2.35}$$

que são os esforços verdadeiros que atuam nas seções transversais da casca.

Note que os vetores $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r$, $\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r$, $\boldsymbol{n}_\alpha^r$, $\boldsymbol{m}_\alpha^r$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha^r$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^r$ têm na base $\left\{\boldsymbol{e}_i^r\right\}$ as mesmas componentes que $\boldsymbol{\tau}_\alpha$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha$, $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$, $\boldsymbol{n}_\alpha$, $\boldsymbol{m}_\alpha$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$ na base $\left\{\boldsymbol{e}_i\right\}$. Os primeiros são grandezas objetivas (não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido).

Neste ponto, é conveniente agrupar as grandezas da seção transversal nos três vetores abaixo

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^r \\ \boldsymbol{\sigma}_2^r \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^r = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_2^r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\theta} \end{bmatrix} \tag{2.36}$$

tal que

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_\alpha^r \\ \boldsymbol{m}_\alpha^r \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \varepsilon_\alpha^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_\alpha^r \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \end{bmatrix}. \tag{2.37}$$

Com auxílio destes vetores a expressão (2.33) pode ser reescrita como

$$\int_H \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} d\zeta = \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\varepsilon}^r \,, \tag{2.38}$$

e com auxílio das expressões (2.23) e (2.26), a derivada temporal $\dot{\varepsilon}^r$ é dada por

$$\dot{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^r \\ \dot{\varepsilon}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T \left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,1} + \boldsymbol{Z}_{,1} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \\ \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}_{,1} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,1} \right) \\ \boldsymbol{Q}^T \left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,2} + \boldsymbol{Z}_{,2} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) \\ \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}_{,2} \dot{\boldsymbol{\theta}} + \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\theta}}_{,2} \right) \end{bmatrix}. \tag{2.39}$$

Utilizando os operadores

$$\boldsymbol{\Psi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Z}_{,1} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}_{,1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^T & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{Z}_{,2} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\Gamma}_{,2} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \dfrac{\partial}{\partial \xi_1} \\ \boldsymbol{I} \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \dfrac{\partial}{\partial \xi_2} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}, \tag{2.40}$$

é possível reescrever a expressão (2.39) como

$$\dot{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} \,. \tag{2.41}$$

Integrando a equação (2.38) no domínio Ω, obtém-se a potência dos esforços internos, dada por

$$\begin{aligned} P_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \int_{H} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} \; d\zeta d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\varepsilon}^r \; d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} \; d\Omega. \end{aligned} \tag{2.42}$$

A potência dos esforços externos pode ser definida por

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{t}}^{t} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{t} + \overline{\boldsymbol{t}}^{b} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^{b} + \int_{H} \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} \; d\zeta \right) d\Omega \,, \tag{2.43}$$

onde $\overline{\boldsymbol{t}}^{t}$ e $\overline{\boldsymbol{t}}^{b}$ são respectivamente os vetores das forças externas distribuídas que atuam nas superfícies de topo e de fundo da casca, por unidade de ária da configuração de referência, e o vetor $\overline{\boldsymbol{b}}$ as forças externas distribuídas no volume de referência. Por diferenciação no tempo de (2.4), obtém-se

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{z}} + \dot{\boldsymbol{a}} \;\; &= \dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\overline{\left(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^{r} \right)}} \\ &= \dot{\boldsymbol{u}} + \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{a}^{r} \;= \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^{r} \\ &= \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{a} \;\; = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{2.44}$$

Note-se em (2.43) que $\dot{\boldsymbol{x}}^{t} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}^{t}$ e $\dot{\boldsymbol{x}}^{b} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}^{b}$. Substituindo (2.21) em (2.44), e o resultado desta operação em (2.43), chega-se a

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\Gamma}^{T} \overline{\boldsymbol{m}} \cdot \dot{\boldsymbol{\theta}} \right) d\Omega \,, \tag{2.45}$$

onde

$$\begin{aligned} \overline{\boldsymbol{n}} &= \overline{\boldsymbol{t}}^{t} + \overline{\boldsymbol{t}}^{b} + \int_{H} \overline{\boldsymbol{b}} \; d\zeta \qquad \text{e} \\ \overline{\boldsymbol{m}} &= \boldsymbol{a}^{t} \times \overline{\boldsymbol{t}}^{t} + \boldsymbol{a}^{b} \times \overline{\boldsymbol{t}}^{b} + \int_{H} \boldsymbol{a} \times \overline{\boldsymbol{b}} \; d\zeta \end{aligned} \tag{2.46}$$

são respectivamente as resultantes externas de força e momento, ambos por unidade de área da configuração de referência. Definindo

$$\overline{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{\Gamma}^{T} \overline{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix}, \tag{2.47}$$

tem-se

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{d}} \; d\Omega. \tag{2.48}$$

O vetor

$$\overline{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\Gamma}^T \overline{\boldsymbol{m}} \tag{2.49}$$

que aparece em (2.45), é denominado de *pseudo-momento externo distribuído*, em oposição aos momentos externos verdadeiros $\overline{\boldsymbol{m}}$. O *pseudo-momento* $\overline{\boldsymbol{\mu}}$ é quem está energeticamente conjugado com as rotações $\boldsymbol{\theta}$.

2.3.Equilíbrio

Inicialmente considere que os campos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\theta}$ satisfazem as condições de contorno essenciais na fronteira do plano médio da casca. Sejam os campos virtuais de deslocamentos e rotações representados respectivamente por $\delta\boldsymbol{u}$ e $\delta\boldsymbol{\theta}$, definidos sobre o plano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ da configuração de referência. Com esses campos se constrói $\delta\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{u} & \delta\boldsymbol{\theta} \end{bmatrix}^T$. Procedendo de modo análogo ao utilizado para obter a expressão (2.42), referente à potência dos esforços internos, pode-se escrever o trabalho virtual dos esforços internos como

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}^r \; d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d} \; d\Omega, \tag{2.50}$$

onde

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d} \tag{2.51}$$

é obtido de modo equivalente a (2.41). O trabalho virtual dos esforços externos é obtido semelhante a (2.48), isto é,

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{d} \; d\Omega, \tag{2.52}$$

de maneira que o equilíbrio estático da casca com condições de contorno essenciais nas fronteiras pode ser formulado na forma fraca por meio do teorema dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{d} \mid \delta \boldsymbol{d} = \boldsymbol{o} \text{ em } \Gamma, \tag{2.53}$$

sendo Γ a fronteira de Ω. Substituindo (2.50) e (2.52) em (2.53), tem-se

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r \; d\Omega - \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d} \; d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \Big[\boldsymbol{n}_{\alpha}^r \cdot \boldsymbol{Q}^T \left(\delta \boldsymbol{u}_{,\alpha} + \boldsymbol{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} \right) + \boldsymbol{m}_{\alpha}^r \cdot \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha} \delta \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta}_{,\alpha} \right) \Big] \; d\Omega + \\ &- \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \delta \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Gamma}^T \overline{\boldsymbol{m}} \cdot \delta \boldsymbol{\theta} \right) \; d\Omega = 0. \end{aligned} \tag{2.54}$$

Integrando por partes os termos com $\delta \boldsymbol{u}_{,\alpha}$ e $\left(\boldsymbol{\Gamma} \delta \boldsymbol{\theta} \right)_{,\alpha}$, e utilizando o lema fundamental do cálculo variacional, obtêm-se as seguintes equações locais do equilíbrio:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{n}_{\alpha,\alpha} + \overline{\boldsymbol{n}} &= \boldsymbol{o} \\ \boldsymbol{m}_{\alpha,\alpha} + \boldsymbol{z}_{,\alpha} \times \boldsymbol{n}_{\alpha} + \overline{\boldsymbol{m}} &= \boldsymbol{o} \end{aligned} \tag{2.55}$$

Pode-se entender o trabalho virtual δW na equação (2.53) como um funcional dos campos $\boldsymbol{d}$ e $\delta \boldsymbol{d}$, sendo linear em relação a $\delta \boldsymbol{d}$. Sua derivada de Gateaux em relação a $\boldsymbol{d}$, segundo uma variação $\delta^* \boldsymbol{d}$ pertencente ao mesmo espaço de $\delta \boldsymbol{d}$, resulta no operador tangente:

$$\begin{aligned} \delta^* \left(\delta W \right) &= \delta^* \Big[\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \boldsymbol{\varepsilon}^r - \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d} \right) \; d\Omega \Big] \\ &= \delta^* \Big[\int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d} - \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d} \right) \; d\Omega \Big] \\ &= \int_{\Omega} \Big[\left(\delta^* \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}^r + \boldsymbol{\Psi}^T \delta^* \boldsymbol{\sigma}^r \right) \cdot \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d} - \delta^* \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d} \Big] \; d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\left(\frac{\partial \boldsymbol{\Psi}^T \boldsymbol{\sigma}^r}{\partial \boldsymbol{d}} \delta^* \boldsymbol{d} + \boldsymbol{\Psi}^T \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^r}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}^r} \delta^* \boldsymbol{\varepsilon}^r \right) \cdot \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d} - \frac{\partial \overline{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{d}} \delta^* \boldsymbol{d} \cdot \delta \boldsymbol{d} \right] \; d\Omega, \end{aligned} \tag{2.56}$$

que depois de alguma álgebra pode-se escrever

$$\begin{aligned}\delta^*\left(\delta W\right) = &\int_\Omega \left(\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Psi}\boldsymbol{\Delta}\delta^*\boldsymbol{d}\right)\, d\Omega + \\ &+\int_\Omega \left(\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Delta}\delta^*\boldsymbol{d}\right)\, d\Omega - \int_\Omega \left(\delta\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{L}\boldsymbol{\Delta}\delta^*\boldsymbol{d}\right)\, d\Omega.\end{aligned} \tag{2.57}$$

As matrizes $\boldsymbol{D}$,$\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{L}$ são dadas por

$$\boldsymbol{D} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^r}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^r} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \\ \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \dfrac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_1^{u'\theta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_1^{\theta'\theta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_2^{u'\theta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_2^{\theta'\theta} \\ \boldsymbol{G}_1^{\theta u'} & \boldsymbol{G}_1^{\theta\theta'} & \boldsymbol{G}_2^{\theta u'} & \boldsymbol{G}_2^{\theta\theta'} & \boldsymbol{G}_1^{\theta\theta} + \boldsymbol{G}_2^{\theta\theta} \end{bmatrix} \quad \text{e} \tag{2.58}$$

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial\overline{\boldsymbol{q}}}{\partial\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\overline{\boldsymbol{n}}}{\partial\boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial\overline{\boldsymbol{n}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} \\ \dfrac{\partial\overline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial\boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial\overline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix},$$

As matrizes $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{L}$ representam respectivamente as contribuições constitutivas, geométricas dos esforços internos e geométricas dos esforços externos. As submatrizes de $\boldsymbol{G}$ são encontradas em [2] e foram primeiramente publicadas em [1]. Para campos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\theta}$ quaisquer, $\boldsymbol{G}$ é sempre simétrico. As submatrizes $\boldsymbol{L}$ dependem do caráter dos esforços externos, conforme $(2.58)_3$.

O operador tangente (2.57) é uma forma bilinear de $\delta\boldsymbol{d}$ e $\delta^*\boldsymbol{d}$, e como $\boldsymbol{G} = \boldsymbol{G}^T$, resultará simétrico se $\boldsymbol{D}$ e $\boldsymbol{L}$ também forem simétricos, isto é, sempre que a lei constitutiva presumir a

existência de um potencial, como é o caso dos materiais hiperelásticos, e o carregamento for conservativo.

Introduzindo os tensores tangentes

$$\tilde{\boldsymbol{C}}^{r}_{\alpha\beta} = \frac{\partial \tilde{\boldsymbol{\tau}}^{r}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\gamma}^{r}_{\beta}}, \tag{2.59}$$

e com a ajuda das derivadas

$$\frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^{r}_{\gamma}}{\partial \boldsymbol{\eta}^{r}_{\beta}} = \delta_{\gamma\beta}\boldsymbol{I} \qquad \text{e} \qquad \frac{\partial \boldsymbol{\gamma}^{r}_{\gamma}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{r}_{\beta}} = -\delta_{\gamma\beta}\boldsymbol{A}^{r}, \tag{2.60}$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker e $\boldsymbol{A}^{r} = \mathrm{Skew}\left(\boldsymbol{a}^{r}\right)$, as submatrizes de $\boldsymbol{D}$, fazendo uso da regra da cadeia, podem ser expressas por

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{n}^{r}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\eta}^{r}_{\beta}} &= \int_{H} \tilde{\boldsymbol{C}}^{r}_{\alpha\beta}\ d\zeta, \\
\frac{\partial \boldsymbol{n}^{r}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{r}_{\beta}} &= -\int_{H} \tilde{\boldsymbol{C}}^{r}_{\alpha\beta}\boldsymbol{A}^{r}\ d\zeta, \\
\frac{\partial \boldsymbol{m}^{r}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\eta}^{r}_{\beta}} &= \int_{H} \boldsymbol{A}^{r}\tilde{\boldsymbol{C}}^{r}_{\alpha\beta}\ d\zeta \qquad \text{e} \\
\frac{\partial \boldsymbol{m}^{r}_{\alpha}}{\partial \boldsymbol{\kappa}^{r}_{\beta}} &= -\int_{H} \boldsymbol{A}^{r}\tilde{\boldsymbol{C}}^{r}_{\alpha\beta}\boldsymbol{A}^{r}\ d\zeta.
\end{aligned} \tag{2.61}$$

2.4. Discretização em elementos finitos

Diante de uma formulação de casca consistente, se faz necessário neste ponto do trabalho utilizar um método matemático que possa ser implementado numericamente, e propicie a resolução de problemas que admitam ser modelados por esse tipo de concepção estrutural.

Este trabalho realizou-se utilizando o método dos elementos finitos para implementação, admitindo a presença de não linearidade geométrica e material nos modelos.

O elemento finito considerado será triangular de seis nós, plano em sua configuração indeformada e numerado conforme **Figura 2.**

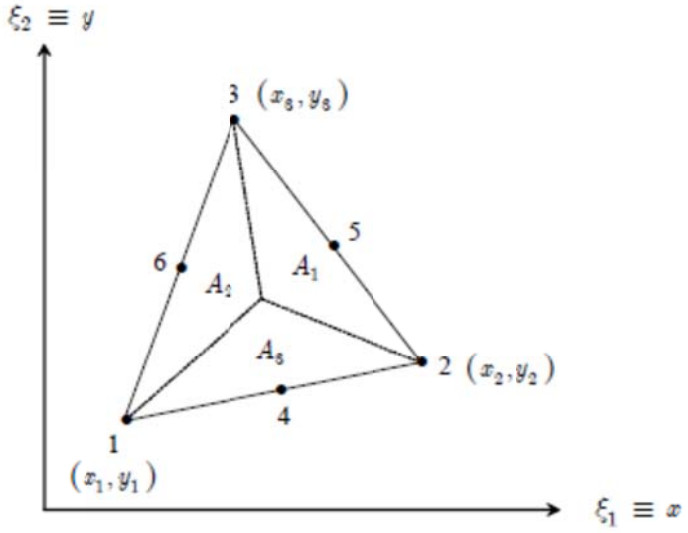


Figura 2: Elemento triangular de seis nós (Campello, 2005).

Definine-se $\boldsymbol{p}_i$ $\left(i = 1,\ldots,6\right)$ como o vetor dos graus de liberdade do nó i, de modo que

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{u}_i, \quad \text{se } i = 1,2,3, \quad \text{ou} \quad \boldsymbol{p}_i = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{\theta}_i \end{bmatrix}, \quad \text{se } i = 4,5,6. \tag{2.62}$$

Construído desta forma, o elemento apresenta graus de liberdade de deslocamento em todos os nós e rotação apenas nos nós localizados no meio dos lados. A interpolação dos deslocamentos é feita por funções quadráticas completas, enquanto as rotações são interpoladas por funções lineares a partir dos nós intermediários.

Seja A a área total do elemento triangular e A_i $\left(i = 1,\ 2,\ 3\right)$ as áreas indicadas na Figura 2. As funções de interpolação de $\boldsymbol{u}$ podem ser expressas por

$$
\begin{aligned}
N_1^u &= \left(2L_1 - 1\right)L_1, \\
N_2^u &= \left(2L_2 - 1\right)L_2, \\
N_3^u &= \left(2L_3 - 1\right)L_3, \\
N_4^u &= 4L_1L_2, \\
N_5^u &= 4L_2L_3, \\
N_6^u &= 4L_3L_1, \\
&\text{com } L_i = \frac{A_i}{A},\ i = 1,\ 2,\ 3,
\end{aligned}
\tag{2.63}
$$

em coordenadas cartesianas L_i pode ser escrito como:

$$
L_i = \frac{1}{2A}\left(a_i + b_i x + c_i y\right),\ \ i = 1, 2, 3 \text{ com}
$$

$$
\begin{aligned}
a_1 &= x_2y_3 - x_3y_2, \\
b_1 &= y_2 - y_3, \\
c_1 &= x_3 - x_2, \\
\\
a_2 &= x_3y_1 - x_1y_3, \\
b_2 &= y_3 - y_1, \\
c_2 &= x_1 - x_3, \\
\\
a_3 &= x_1y_2 - x_2y_1, \\
b_3 &= y_1 - y_2, \\
c_3 &= x_2 - x_1.
\end{aligned}
\tag{2.64}
$$

As funções de interpolação de $\boldsymbol{\theta}$ são dadas por:

$$N_4^\theta = 1 - 2L_3,$$

$$N_5^\theta = 1 - 2L_1 \qquad \text{e} \tag{2.65}$$

$$N_6^\theta = 1 - 2L_2.$$

O elemento com tal configuração é chamado T6-3i. Note que a ausência dos graus de liberdade $\boldsymbol{\theta}$ nos vértices do elemento o torna incompatível em relação ao campo de rotações. Conforme [2], nenhum outro recurso do método dos elementos finitos foi utilizado para sua construção e o travamento numérico não é observado devido à incompatibilidade de $\boldsymbol{\theta}$ e à interpolação quadrática de $\boldsymbol{u}$ tornarem o elemento suficientemente flexível.

Conforme Oliveira [5],

> "Como membranas apresentam espessuras muito pequenas, o T6-3i é um elemento finito exatamente adequado para a análise desses materiais, já que o travamento – dificuldade do elemento de reproduzir estados de flexão pura sem desenvolver deformações de membrana ou de cortante – não se manifesta."

Definindo $\boldsymbol{p}$ como o vetor que agrupa os graus de liberdade nodais do T6-3i, e escrevendo

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_6 \end{bmatrix}, \tag{2.66}$$

os campos de deslocamentos e rotações em seu interior são obtidos pela equação

$$\boldsymbol{d} = \mathbf{N}\boldsymbol{p}, \tag{2.67}$$

onde

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1^u \boldsymbol{I} & N_2^u \boldsymbol{I} & N_3^u \boldsymbol{I} & N_4^u \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & N_5^u \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & N_6^u \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & N_4^\theta \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & N_5^\theta \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & N_6^\theta \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{2.68}$$

é a matriz de interpolação. Fazendo a substituição de (2.67) na expressão de trabalhos virtuais (2.50) e (2.52), e realizando a discretização do domínio $\Omega \cong \cup \Omega_e$, obtém-se o vetor $\mathbf{P}_e$ dos esforços nodais desbalanceados

$$\mathbf{P}_e = \int_{\Omega_e} \left[\left(\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{N} \right)^T \boldsymbol{\sigma}^r - \mathbf{N}^T \overline{\boldsymbol{q}} \right] d\Omega, \tag{2.69}$$

onde Ω_e representa o domínio do elemento. A matriz de rigidez é obtida diferenciando (2.69) em relação a $\boldsymbol{p}$. Desta operação resulta:

$$\mathbf{K}_e = \int_{\Omega_e} \left[\left(\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{N} \right)^T \boldsymbol{D} \left(\boldsymbol{\Psi} \boldsymbol{\Delta} \mathbf{N} \right) + \left(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{N} \right)^T \boldsymbol{G} \left(\boldsymbol{\Delta} \mathbf{N} \right) - \mathbf{N}^T \boldsymbol{L} \mathbf{N} \right] d\Omega. \tag{2.70}$$

Devido ao modelo de casca utilizado não apresentar nenhuma rigidez associada à rotação do diretor em torno de seu próprio eixo (*drilling*), que corresponde no sistema local à terceira componente de $\boldsymbol{\theta}$, assim como realizado em [2], apenas para evitar que $\boldsymbol{K}_e$ resulte singular, adota-se localmente na equação constitutiva uma rigidez fictícia de Eh^3 (sendo E o módulo de elasticidade e h a espessura da casca). Este valor é da ordem da rigidez à flexão o que garante o bom condicionamento das matrizes.

Os vetores dos esforços nodais desbalanceados (2.69) e a matriz de rigidez (2.70) são calculados com três pontos de integração sobre Ω_e, situados no meio das arestas dos elementos e coincidentes com os nós 4, 5 e 6 do elemento. Ao longo da espessura, foram utilizados três pontos de Gauss para integração de (2.34) e (2.61).

3. Descrição do Material

Uma membrana estrutural consiste basicamente de um tecido ou uma rede fina de fibras revestida por finas coberturas, nas suas superfícies inferior e superior, em geral de resina polimérica. Tais fibras são tecidas em duas direções ortogonais, como mostra a **Figura 3**, e por este motivo características ortótropas estão presentes em seu comportamento mecânico.

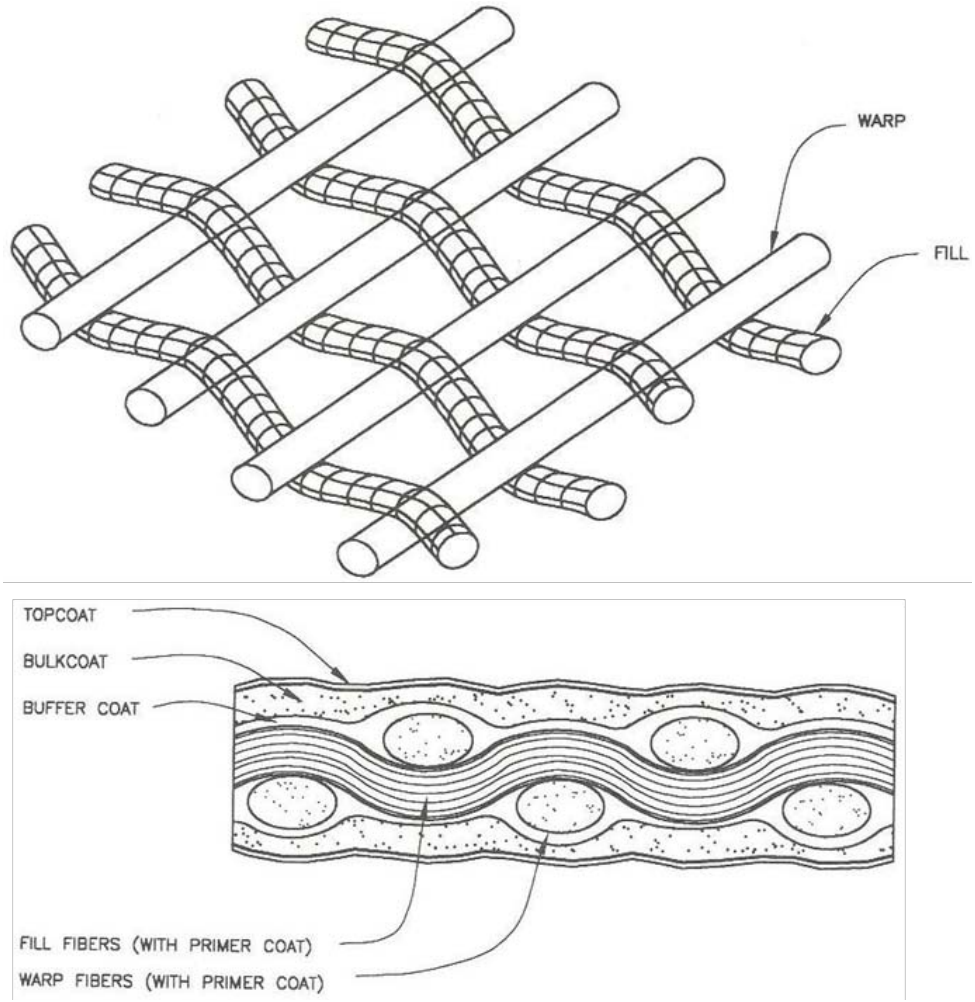


Figura 3: Estrutura de um tecido ortótropo revestido por rezina polimérica.

Neste capítulo será apresentada uma breve caracterização da mesoestrutura do material, que possibilita compreensão qualitativa do comportamento mecânico dos tecidos estruturais. A descrição macroestrutural será realizada pela elaboração de modelos constitutivos que pretendem representar o comportamento ortótropo deste tipo de material.

3.1. Configuração e composição do material

Os tecidos estruturais podem ser montados de forma a manipular suas propriedades mecânicas [28]. Várias configurações e tipologias são possíveis, a **Figura 4** mostra delas.

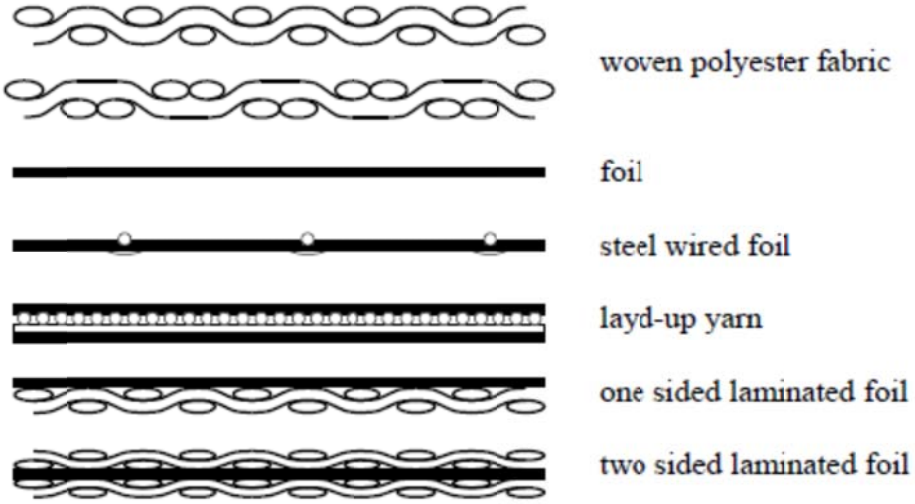


Figura 4: Configurações de tecidos estruturais (figura retirada de [28]).

Materiais como poliéster e etileno-tetrafluoretileno (ETFE) são tipicamente utilizados para laminados. Para as fibras, podem ser usados fios de poliéster, *Nylon*, fibra de vidro, fibras de carbono, fibra de vinil (Vinylon) e aramidas (*Kevlar*). Além desses materiais, fios de aços podem ser fundidos em laminados termoplásticos para reforço. Resinas poliméricas de poliéster, politetrafluoretileno (PTFE ou *teflon*), cloreto de polivinila (PVC) e borrachas, são frequentemente utilizados para a camada de revestimento [28] , [29] e [30].

Vantagens e desvantagens para alguns dos materiais citados nesses itens, para fibras e resinas, são apresentadas a seguir, conforme descrito por [5], [29] , [30] e [31].

Fibras:

1.) **Compostos de poliamida (*Nylon*):** estes tecidos apresentam alta recuperação elástica; umidade, luz solar e oxidação afetam suas propriedades mecânicas (envelhecimento); são inflamáveis e mais suscetíveis à ação da umidade que os tecidos como o poliéster.
2.) **Fibras de poliéster (*Trevira*, *Terylen*e, *Dacron*):** são um pouco mais resistentes e seu custo é maior que o *nylon*; são impermeáveis e resistentes às intempéries; apresentam módulo de elasticidade mais elevado que os do *Nylon*; são inflamáveis.

3.) **Fibra de Vidro (*Fiberglass*):** apresenta alta resistência à tração e ao fogo; seu módulo de elasticidade é bastante elevado quando comparado ao de outros tipos de tecido; são translúcidos e bastante flexíveis; por outro lado não aceitam costuras e possuem baixa resistência à abrasão.
4.) **Compostos de fibra de vinil (*Vinylon*):** apresentam resistências próximas aos tecidos de fibra de vidro, quando recoberto por *Hypalon* (tipo de borracha sintética); quando o cobrimento for de PVC, a resistência é mais baixa, comparável ao poliéster do tipo (*Trevira*); apresenta baixo custo.

Revestimento (resinas poliméricas):

1.) **PVC (cloreto de polivinila):** sensível a intempéries; apresenta baixa elasticidade; quando transparente a vida útil é reduzida; rígidos em clima frio.
2.) **Composto de borracha sintética (Polietileno e Clorosulfanato, *Hypalon* ou policloroprene, *Neoprene*):** revestimentos de *Hypalon* são resistentes à ação de ácidos, oxidação, ozônio, calor e luz; apresenta boas propriedades mecânicas com excelente resistência à abrasão; baixa absorção de água; boa retenção das cores de pigmentação; baixo custo; pouca resistência a baixas temperaturas;
3.) **Politerafluoretileno (PTFE – nome comercial: *Teflon*):** duráveis e altamente resistentes à tração; impermeáveis; misturado a aditivos aumenta sua flexibilidade e resistência à abrasão.
4.) **Silicone:** excelente resistência a ação de raios UV, alta flexibilidade; resistência ao fogo; alta resistência à tração.

Destacam-se entre as principais composições de membranas estruturais:

1.) **Poliéster revestido com PVC:** vida útil de 15 a 20 anos; não propaga chamas.
2.) **Fibra de vidro revestido com *Teflon*:** vida útil em torno de 30 anos; translúcido; não combustível.
3.) **Fibra de vidro revestida com Silicone:** mais flexível que o *teflon*; apresenta elevada translucidez, que proporciona aproveitamento de iluminação natural.

3.2. Comportamento mecânico do tecido

As fibras, que compõem o tecido, estão diretamente relacionadas ao comportamento mecânico das membranas estruturais. Conforme [5] e [8], as fibras são comumente tecidas em duas direções ortogonais entre si, o que introduz no material, do ponto de vista macroscópico, um comportamento mecânico tipicamente ortótropo.

Durante o processo de fiação do tecido, em uma das direções, denominada urdume ou urdidura (*warp*), os fios são mantidos numa posição retilínea e num estado retesado. Enquanto isso, de acordo com [32], os fios da outra direção, denominada de trama (*weft* ou *fill*), são passados alternadamente por cima e por baixo de cada fio do urdume, apresentando, portanto, uma ondulação mais acentuada que estes últimos fios. O urdume acaba por ondular-se, porém em menor grau do que a trama, em decorrência da interação entre os fios, como pode ser observado na **Figura 5**.

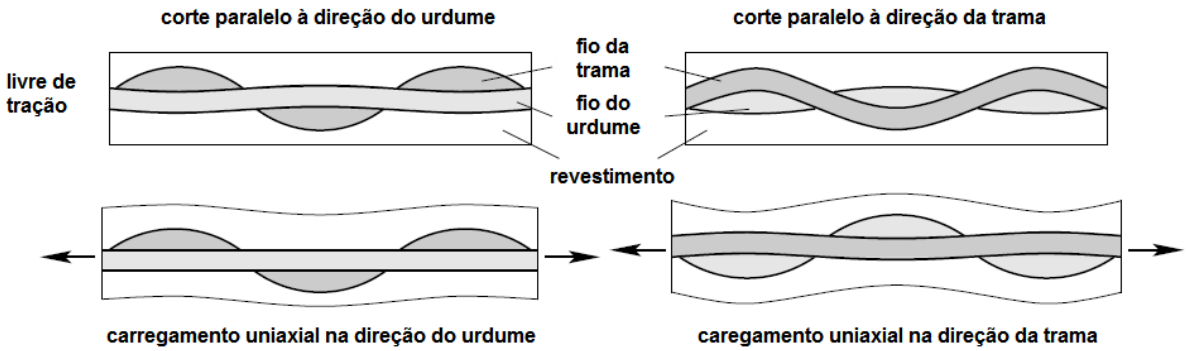


Figura 5: Comportamento do tecido (figura adaptada de [28]).

Observa-se na **Figura 5** que a direção do urdume apresenta maior rigidez à tração que a da trama. Isto ocorre devido ao fato de que os fios do urdume, na configuração livre de tração, apresentam ondulação muito baixa quando comparados com os fios da trama. Note que, tracionando um tecido igualmente nas duas direções, o aumento da ondulação do urdume reflete a grande influência das interações com os fios da trama e pode gerar tensões de compressão naquela direção, caso a trama apresente grandes deformações. Já o revestimento polimérico fornece pequena rigidez à compressão, flexão e ao cisalhamento transversal [5].

A pequena rigidez fornecida pelo revestimento desempenha papel fundamental na obtenção do equilíbrio em estruturas que apresentem flexão ou enrugamento da membrana estrutural. A flexibilidade desses materiais aliado ao surgimento de pequenas tensões de compressão, proporciona como resposta estrutural surgimento de dobras e rugas.

3.3. Idealização

Este trabalho segue a idealização proposta por [5], na qual a membrana estrutural, apresentada na **Figura 6,**

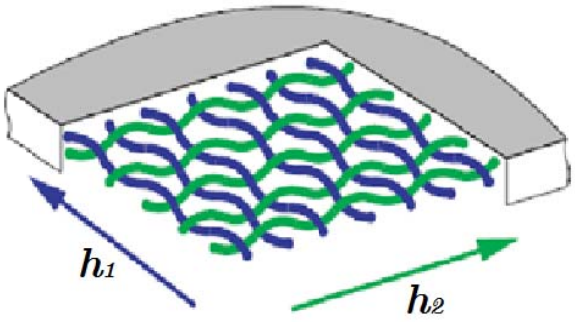


Figura 6: Direções de ortotropia (figura adaptada de [33])

é idealizada como a superposição de efeitos de um tecido que funciona como uma membrana ortótropa e de um revestimento que funciona como uma casca fina isótropa, como apresentado na **Figura 7.** Essa superposição se dá pela decomposição aditiva da energia de deformação específica em duas parcelas distintas, uma referente ao tecido ortótropo e outra ao revestimento isótropo.

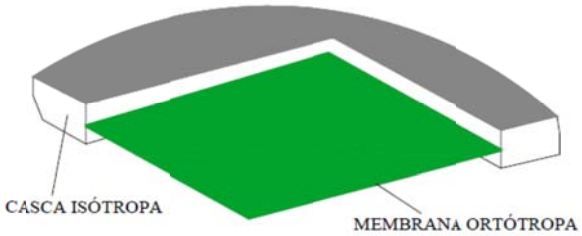


Figura 7: Idealização do tecido (figura retirada de [5])

Neste modelo, o revestimento polimérico contribui com uma pequena rigidez à tração, à compressão, à flexão e ao cisalhamento, enquanto o tecido ortótropo com uma rigidez à tração adicional, em geral elevada. Estas são as hipóteses básicas assumidas nessa idealização.

A distribuição contínua das fibras, com seção transversal e rigidez idêntica e a perfeita adesão do tecido e revestimento, também são hipóteses levadas em conta nessa idealização.

3.4. Modelos constitutivos propostos

Os tecidos revestidos por resina polimérica apresentam comportamento mecânico complexo. Sendo assim, fatores como plasticidade, viscosidade, relaxação e envelhecimento poderiam ser levados em consideração para uma melhor representação do comportamento mecânico do material.

Neste trabalho, optou-se por simplificação, utilizar apenas modelos constitutivos referentes a materiais hiperelásticos.

Segundo Pimenta [34], pode-se definir um material hiperelástico como:

> "Um material é dito hiperelástico se existir uma função escalar $\psi\left(\boldsymbol{E}\right)$, denominada energia de deformação específica, que serve de potencial para as tensões tal que $\boldsymbol{S} = \dfrac{\partial \psi}{\partial \boldsymbol{E}}$."

Nesse caso, $\boldsymbol{S}$ é o segundo tensor das tensões de Piola-Kircchoff e $\boldsymbol{E}$ o tensor das deformações de Green. Estas grandezas são energeticamente conjugadas e equações constitutivas formuladas a partir destas, respeitam os princípios da objetividade, ou seja, as forças internas não são afetadas por movimentos superpostos de corpo rígido [34].

Levando em conta a idealização proposta no item 3.3, a energia de deformação específica será expressa por

$$\psi = \psi_{iso} + \psi_{orto}. \tag{3.1}$$

Como consequência da decomposição da energia de deformação específica, decorre que

$$\begin{aligned} \boldsymbol{S} &= \boldsymbol{S}_{iso} + \boldsymbol{S}_{orto} \qquad \text{e} \\ \boldsymbol{P} &= \boldsymbol{P}_{iso} + \boldsymbol{P}_{orto}, \end{aligned} \tag{3.2}$$

onde $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}$ é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff.

Lembrando de (2.29) e (2.30), pode-se escrever

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r,$$

$$\boldsymbol{P}_{iso} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_{i_{iso}}^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r \qquad \text{e} \tag{3.3}$$

$$\boldsymbol{P}_{orto} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_{i_{orto}}^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r.$$

E, a partir de (3.3), tem-se

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r = \boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{\tau}_{i_{iso}}^r + \boldsymbol{\tau}_{i_{orto}}^r\right) \otimes \boldsymbol{e}_i^r, \tag{3.4}$$

resultando portanto em

$$\boldsymbol{\tau}_i^r = \boldsymbol{\tau}_{i_{iso}}^r + \boldsymbol{\tau}_{i_{orto}}^r. \tag{3.5}$$

Esse resultado significa que os vetores de tensão totais podem ser obtidos por uma simples soma das suas contribuições isótropa e ortótropa.

Uma consequência imediata de (3.5) é que os esforços internos atuantes nas seções transversais, dados por (2.34), podem ser escritos como

$$\boldsymbol{n}_\alpha^r = \boldsymbol{n}_{\alpha iso}^r + \boldsymbol{n}_{\alpha orto}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_\alpha^r = \boldsymbol{m}_{\alpha iso}^r. \tag{3.6}$$

E a matriz dos módulos constitutivos de rigidez tangente (dada por $(2.58)_1$) como

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{iso} + \boldsymbol{D}_{orto}. \tag{3.7}$$

A seguir, apresentaremos dois modelos constitutivos formulados a partir desse equacionamento. No primeiro a energia de deformação específica foi proposta por Oliveira e Pimenta em [5] e no segundo foi proposta por Raible em [28].

3.4.1. Modelo Constitutivo de Oliveira-Pimenta [5] e [8]

Parcela isótropa:

A parcela isótropa considerará uma energia de deformação isótropa proposta por Simo-Ciarlet em [35,36]. A energia de deformação específica proposta é expressa como uma função dos invariantes do tensor das deformações de Cauchy-Green, dado por

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T \boldsymbol{F}, \tag{3.8}$$

para o qual os invariante adotados são:

$$\begin{aligned} I_1 &= \boldsymbol{I} : \boldsymbol{C}, \\ I_2 &= \boldsymbol{I} : \boldsymbol{C}^2 \qquad \text{e} \\ J &= \det \boldsymbol{F}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

A energia de deformação é definida por

$$\psi_{iso}\left(I_1, J\right) = \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{1}{2}\left(J^2 - 1\right) - \ln J\right] + \frac{1}{2}\mu\left(I_1 - 3 - 2\ln J\right), \tag{3.10}$$

onde λ e μ são constantes generalizadas de Lamé generalizadas, que em função do módulo de elasticidade E e do coeficiente de Poisson ν são dadas por:

$$\lambda = \frac{E\nu}{\left(1+\nu\right)\left(1-2\nu\right)} \qquad \text{e} \qquad \mu = \frac{E}{2\left(1+\nu\right)}. \tag{3.11}$$

O segundo tensor de Piola-Kirchhoff para a parte isótropa é dado então por

$$\boldsymbol{S}_{iso} = \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial \boldsymbol{E}} = 2\frac{\partial \psi_{iso}}{\partial \boldsymbol{C}} = 2\left(\frac{\partial \psi_{iso}}{\partial I_1}\frac{\partial I_1}{\partial \boldsymbol{C}} + \frac{\partial \psi_{iso}}{\partial J}\frac{\partial J}{\partial \boldsymbol{C}}\right). \tag{3.12}$$

Utilizando a relação $\boldsymbol{P}_{iso} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_{iso}$, e em seguida obtendo o equivalente retrorrotacionado para configuração de referência $\boldsymbol{P}^r_{iso}$ juntamente com a imposição de estado plano de tensão $\left(\tau_{33} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}^r_3 \cdot \boldsymbol{e}_3 = 0\right)$, é possível chegar a (ver [4] para detalhes)

$$\boldsymbol{\tau}^r_{1iso} = \begin{bmatrix} \mu\vartheta\left(1+\gamma_{22}\right) + \mu\left(\gamma_{11}-\gamma_{22}\right) \\ -\mu\vartheta\gamma_{21} + \mu\left(\gamma_{12}-\gamma_{21}\right) \\ \mu\gamma_{13} \end{bmatrix} \qquad \text{e}$$

$$\boldsymbol{\tau}^r_{2iso} = \begin{bmatrix} -\mu\vartheta\gamma_{12} + \mu\left(\gamma_{12}-\gamma_{21}\right) \\ \mu\vartheta\left(1+\gamma_{11}\right) + \mu\left(\gamma_{22}-\gamma_{11}\right) \\ \mu\gamma_{23} \end{bmatrix}, \tag{3.13}$$

onde γ_{ij} são as componentes do vetor de deformação $\boldsymbol{\gamma}^r$ (vide equação (2.16)) e

$$\vartheta = \frac{\lambda\left(\bar{J}^3 - 1\right) + 2\mu\left(\bar{J} - 1\right)}{\lambda\bar{J}^3 + 2\mu\bar{J}} \qquad \text{e}$$

$$J = \left(1+\gamma_{11}\right)\left(1+\gamma_{22}\right) + \gamma_{12}\gamma_{21}. \tag{3.14}$$

A partir de (3.13) é possível obter, para a parte isótropa, as forças e momentos generalizados $\boldsymbol{n}^r_{\alpha iso}$ e $\boldsymbol{m}^r_{\alpha iso}$ de (3.6), que atuam na seção transversal de normal $\boldsymbol{e}^r_\alpha$, e deste último a matriz $\boldsymbol{D}_{iso}$ de (3.7). Suas expressões foram desenvolvidas pela primeira vez em [4] e serão omitidos por questão de simplicidade.

Parcela ortótropa:

A parcela ortótropa afeta exclusivamente as deformações de membrana do gradiente da deformação. Dessa forma, é conveniente expressar $\boldsymbol{F}$ (ou equivalente , $\boldsymbol{F}^r$, ver (2.18)) e apenas com estas deformações. Sendo assim, este será expresso por

$$\boldsymbol{F}^r = \begin{bmatrix} 1+\eta_{11} & \eta_{21} & 0 \\ \eta_{12} & 1+\eta_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \tag{3.15}$$

onde $\eta_{\alpha\beta}$ são as componentes do vetor η_α^r definido em (2.14)$_1$.

Lembrando que $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{F}^T\boldsymbol{F} = \boldsymbol{F}^{r^T}\boldsymbol{F}^r$ e que $\boldsymbol{E} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}\right)$, o tensor das deformações de Green, resulta em

$$\boldsymbol{E} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & 0 \\ E_{21} & E_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \text{com}$$

$$\begin{aligned} E_{11} &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\eta_{11}\right)^2 + {\eta_{12}}^2 - 1\right], \\ E_{22} &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\eta_{22}\right)^2 + {\eta_{21}}^2 - 1\right] \qquad \text{e} \\ E_{12} &= E_{21} = \frac{1}{2}\left[\left(1+\eta_{11}\right)\eta_{21} + \left(1+\eta_{22}\right)\eta_{12}\right]. \end{aligned} \tag{3.16}$$

A energia de deformação específica (por unidade de volume) ortótropa ψ_{orto} pode ser escrita em função da energia de deformação por unidade de área $\hat{\psi}_{orto}$, da seguinte forma

$$\psi_{orto} = \frac{1}{h}\hat{\psi}_{orto}, \tag{3.17}$$

com h representando a espessura da membrana na configuração indeformada e que permanecerá constante. Como consequência,

$$\boldsymbol{S}_{orto} = \frac{1}{h}\hat{\boldsymbol{S}}_{orto} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{P}_{orto} = \frac{1}{h}\hat{\boldsymbol{P}}_{orto}. \tag{3.18}$$

Sejam as direções locais de ortotropia, na configuração de referência, dada pelos versores $\boldsymbol{h}_1^r$ (direção do urdume) e $\boldsymbol{h}_2^r$ (direção da trama), de modo que $\boldsymbol{h}_1^r \cdot \boldsymbol{h}_2^r = 0$. É possível definir os chamados tensores estruturais $\boldsymbol{H}_\alpha$ (vide por exemplo [28]), da seguinte forma

$$\boldsymbol{H}_{\alpha} = \boldsymbol{h}_{\alpha}^{r} \otimes \boldsymbol{h}_{\alpha}^{r}. \tag{3.19}$$

A função energia de deformação ortótropa por unidade de área pode ser escrita em função de quatro invariantes nas direções da ortotropia $\psi_{orto} = \hat{\psi}_{orto}\left(I_{11}, I_{12}, I_{21}, I_{22}\right)$, sendo eles:

$$\begin{aligned} I_{11} &= \boldsymbol{H}_{1} : \boldsymbol{E}, \\ I_{12} &= \boldsymbol{H}_{2} : \boldsymbol{E}, \\ I_{21} &= \boldsymbol{H}_{1} : \boldsymbol{E}^{2} \text{ e} \\ I_{22} &= \boldsymbol{H}_{2} : \boldsymbol{E}^{2}, \end{aligned} \tag{3.20}$$

que podem ser reescritos da seguinte forma

$$\begin{aligned} I_{11} &= E_{11}, \\ I_{12} &= E_{22}, \\ I_{21} &= E_{11}^{2} + E_{12}^{2} \text{ e} \\ I_{22} &= E_{22}^{2} + E_{12}^{2}. \end{aligned} \tag{3.21}$$

Com auxílio de

$$\frac{\partial I_{1\alpha}}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{H}_{\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\partial I_{2\alpha}}{\partial \boldsymbol{E}} = \boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{H}_{\alpha}, \tag{3.22}$$

o tensor $\hat{\boldsymbol{S}}_{orto}$ é então dado por

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{orto} = \frac{\partial \hat{\psi}_{orto}}{\partial I_{1\alpha}} \boldsymbol{H}_{\alpha} + \frac{\partial \hat{\psi}_{orto}}{\partial I_{2\alpha}} \left(\boldsymbol{H}_{\alpha}\boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{H}_{\alpha} \right). \tag{3.23}$$

A função de energia de deformação ortótropa por unidade de área, proposta por [5] e [8] e adotado aqui, é a seguinte:

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{orto}\left(I_{11},I_{12},I_{21},I_{22}\right) = &\left(aI_{11}^2 + bI_{12}^2 + cI_{11}I_{12}\right) + \\ &+\left(hI_{11}^4 + kI_{11}^3 I_{12} + lI_{11}^2 I_{12}^2 + mI_{11}I_{12}^3 + nI_{11}^4\right) + \\ &+\overline{\mu}\left(I_{21} + I_{22}\right),\end{aligned} \tag{3.24}$$

com a, b, c, h, k, l, m, n e $\overline{\mu}$ sendo os parâmetros do material. Nesse caso, o tensor $\hat{\boldsymbol{S}}_{orto}$ pode ser reescrito como

$$\hat{\boldsymbol{S}}_{orto} = \varphi_\alpha \boldsymbol{H}_\alpha + \overline{\mu}\left(\boldsymbol{H}_\alpha \boldsymbol{E} + \boldsymbol{E}\boldsymbol{H}_\alpha\right), \tag{3.25}$$

onde

$$\begin{aligned}\varphi_1 &= 2aI_{11} + cI_{12} + 4hI_{11}^3 + 3kI_{11}^2 I_{12} + 2lI_{11}I_{12}^2 + mI_{12}^3 \quad \text{e} \\ \varphi_2 &= 2bI_{12} + cI_{11} + kI_{11}^3 + 2lI_{11}^2 I_{12} + 3mI_{11}I_{12}^2 + 4nI_{12}^3.\end{aligned} \tag{3.26}$$

O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, por sua vez, é obtido via $\hat{\boldsymbol{P}}_{\hat{o}rto} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{S}}_{\hat{o}rto}$,e seus vetores-coluna resultam em

$$\boldsymbol{\tau}_{1orto}^r = \frac{1}{h}\begin{bmatrix}\left(\varphi_1 + 2\overline{\mu}I_{11}\right)\left(1+\eta_{11}\right) + \overline{\mu}{\eta_{21}}^2\left(1+\eta_{11}\right) + \overline{\mu}\eta_{21}\eta_{12}\left(1+\eta_{22}\right) \\ \left(\varphi_1 + 2\overline{\mu}I_{11}\right)\eta_{12} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{22}\right)\left(1+\eta_{11}\right)\eta_{21} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{22}\right)^2\eta_{12} \\ 0\end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\tau}_{2orto}^r = \frac{1}{h}\begin{bmatrix}\left(\varphi_2 + 2\overline{\mu}I_{12}\right)\eta_{21} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{11}\right)^2\eta_{21} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{22}\right)\left(1+\eta_{11}\right)\eta_{12} \\ \left(\varphi_2 + 2\overline{\mu}I_{12}\right)\left(1+\eta_{22}\right) + \overline{\mu}\eta_{21}\eta_{12}\left(1+\eta_{11}\right) + \overline{\mu}{\eta_{12}}^2\left(1+\eta_{22}\right) \\ 0\end{bmatrix}.$$

(3.27)

Recorrendo a $(2.34)_1$, encontra-se as forças generalizadas retrorrotacionadas atuantes na seção transversal de normal $\boldsymbol{e}_\alpha^r$, da parcela ortótropa, dadas por

$$\boldsymbol{n}_{1orto}^r = \begin{bmatrix} \left(\varphi_1 + 2\overline{\mu} I_{11}\right)\left(1+\eta_{11}\right) + \overline{\mu}\eta_{21}{}^2\left(1+\eta_{11}\right) + \overline{\mu}\eta_{21}\eta_{12}\left(1+\eta_{22}\right) \\ \left(\varphi_1 + 2\overline{\mu} I_{11}\right)\eta_{12} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{22}\right)\left(1+\eta_{11}\right)\eta_{21} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{22}\right)^2\eta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{n}_{2orto}^r = \begin{bmatrix} \left(\varphi_2 + 2\overline{\mu} I_{12}\right)\eta_{21} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{11}\right)^2\eta_{21} + \overline{\mu}\left(1+\eta_{22}\right)\left(1+\eta_{11}\right)\eta_{12} \\ \left(\varphi_2 + 2\overline{\mu} I_{12}\right)\left(1+\eta_{22}\right) + \overline{\mu}\eta_{21}\eta_{12}\left(1+\eta_{11}\right) + \overline{\mu}\eta_{12}{}^2\left(1+\eta_{22}\right) \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.28}$$

A resultante total das forças e momentos generalizados (retrorrotacionados) que atuam na seção transversal de normal $\boldsymbol{e}_\alpha^r$, finalmente é dada por:

$$\boldsymbol{n}_\alpha^r = \boldsymbol{n}_{\alpha iso}^r + \boldsymbol{n}_{\alpha orto}^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_\alpha^r = \boldsymbol{m}_{\alpha iso}^r. \tag{3.29}$$

As expressões de $\boldsymbol{n}_{\alpha iso}^r$ não foram apresentadas aqui, mas podem ser encontradas em [4]. Vale ressaltar que a parcela ortótropa não contribui em $\boldsymbol{m}_\alpha^r$.

A matriz dos módulos constitutivos de rigidez tangente da parcela ortótropa é calculada a partir de $(2.58)_1$ e vale:

$$\boldsymbol{D}_{orto} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_{1orto}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^r} & \boldsymbol{O} & \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_{1orto}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^r} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_{2orto}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_1^r} & \boldsymbol{O} & \dfrac{\partial \boldsymbol{n}_{2orto}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}_2^r} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{D}_{11\eta\eta orto} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_{12\eta\eta orto} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{D}_{21\eta\eta orto} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{D}_{22\eta\eta orto} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}. \tag{3.30}$$

onde

$$
\boldsymbol{D}_{11\eta\eta orto} = \frac{\partial \boldsymbol{n}^r_{1orto}}{\partial \boldsymbol{\eta}^r_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{11}} & \dfrac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{12}} & 0 \\ \dfrac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{11}} & \dfrac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}_{12\eta\eta orto} = \frac{\partial \boldsymbol{n}^r_{1orto}}{\partial \boldsymbol{\eta}^r_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{21}} & \dfrac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{22}} & 0 \\ \dfrac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{21}} & \dfrac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},
$$

$$
\boldsymbol{D}_{21\eta\eta orto} = \frac{\partial \boldsymbol{n}^r_{2orto}}{\partial \boldsymbol{\eta}^r_1} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{11}} & \dfrac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{12}} & 0 \\ \dfrac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{11}} & \dfrac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{12}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ e}
$$

$$
\boldsymbol{D}_{22\eta\eta orto} = \frac{\partial \boldsymbol{n}^r_{2orto}}{\partial \boldsymbol{\eta}^r_2} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{21}} & \dfrac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{22}} & 0 \\ \dfrac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{21}} & \dfrac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{22}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{3.31}
$$

As expressões explícitas dessas submatrizes são:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{11}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{11}} + 2\overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\right]\big(1+\eta_{11}\big) + \big(\varphi_1 + 2\overline{\mu} I_{11}\big) + \overline{\mu}{\eta_{21}}^2, \\
\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{12}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{12}} + 2\overline{\mu}\eta_{12}\right]\big(1+\eta_{11}\big) + \overline{\mu}\eta_{21}\big(1+\eta_{22}\big), \\
\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{11}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{11}} + 2\overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\right]\eta_{12} + \overline{\mu}\eta_{21}\big(1+\eta_{22}\big), \\
\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{12}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{12}} + 2\overline{\mu}\eta_{12}\right]\eta_{12} + \big(\varphi_1 + 2\overline{\mu} I_{11}\big) + \overline{\mu}\big(1+\eta_{22}\big)^2,
\end{aligned}
\tag{3.32}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{21}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{21}}\right]\big(1+\eta_{11}\big) + 2\overline{\mu}\eta_{21}\big(1+\eta_{11}\big) + \overline{\mu}\eta_{12}\big(1+\eta_{22}\big), \\
\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{22}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{22}}\right]\big(1+\eta_{22}\big) + \overline{\mu}\eta_{12}\eta_{21}, \\
\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{21}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{21}}\right]\eta_{12} + \overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\big(1+\eta_{22}\big), \\
\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{22}} &= \left[\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta^r_{22}}\right]\eta_{12} + \overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\eta_{21} + 2\overline{\mu}\big(1+\eta_{22}\big)\eta_{12},
\end{aligned}
\tag{3.33}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{11}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{11}}\right]\eta_{21} + 2\overline{\mu}\eta_{21}\big(1+\eta_{11}\big) + \overline{\mu}\eta_{12}\big(1+\eta_{22}\big),\\
\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{12}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{12}}\right]\eta_{21}\big(1+\eta_{22}\big) + \overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\big(1+\eta_{22}\big),\\
\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{11}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{11}}\right]\big(1+\eta_{22}\big) + \overline{\mu}\eta_{21}\eta_{12},\\
\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{12}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{12}}\right]\big(1+\eta_{22}\big) + \overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\eta_{21} + 2\overline{\mu}\big(1+\eta_{22}\big)\eta_{12},
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{21}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{21}} + 2\overline{\mu}\eta_{21}\right]\eta_{21} + \big(\varphi_2 + 2\overline{\mu}I_{12}\big) + \overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)^2,\\
\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{22}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{22}} + 2\overline{\mu}\big(1+\eta_{22}\big)\right]\eta_{21} + \overline{\mu}\big(1+\eta_{11}\big)\eta_{12},\\
\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{21}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{21}} + 2\overline{\mu}\eta_{21}\right]\big(1+\eta_{22}\big) + \overline{\mu}\eta_{12}\big(1+\eta_{11}\big),\\
\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{22}} &= \left[\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta^r_{22}} + 2\overline{\mu}\big(1+\eta_{22}\big)\right]\big(1+\eta_{22}\big) + \big(\varphi_2 + 2\overline{\mu}I_{12}\big) + \overline{\mu}{\eta_{12}}^2,
\end{aligned}
\tag{3.35}
$$

onde as derivadas $\dfrac{\partial \varphi_\gamma}{\partial \eta^r_{\alpha\beta}}$ que aparecem em (3.32), (3.33), (3.34) e (3.35) são dadas por:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_{11}^r} = \left(2a + 12hI_{11}{}^2 + 6kI_{11}I_{12} + 2lI_{12}\right)\left(1 + \eta_{11}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_{12}^r} = \left(2a + 12hI_{11}{}^2 + 6kI_{11}I_{12} + 2lI_{12}\right)\eta_{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_{21}^r} = \left(c + 3kI_{11}{}^2 + 4lI_{11}I_{12} + 3mI_{12}{}^2\right)\eta_{21}$$

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial \eta_{22}^r} = \left(c + 3kI_{11}{}^2 + 4lI_{11}I_{12} + 3mI_{12}{}^2\right)\left(1 + \eta_{22}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_{11}^r} = \left(c + 3kI_{11}{}^2 + 4lI_{11}I_{12} + 3mI_{12}{}^2\right)\left(1 + \eta_{11}\right)$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_{12}^r} = \left(c + 3kI_{11}{}^2 + 4lI_{11}I_{12} + 3mI_{12}{}^2\right)\eta_{12}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_{21}^r} = \left(2b + 2lI_{11}{}^2 + 6mI_{11}I_{12} + 12nI_{12}{}^2\right)\eta_{21} \tag{3.36}$$

$$\frac{\partial \varphi_2}{\partial \eta_{21}^r} = \left(2b + 2lI_{11}{}^2 + 6mI_{11}I_{12} + 12nI_{12}{}^2\right)\left(1 + \eta_{22}\right)$$

Finalmente a matriz “total” dos módulos constitutivos de rigidez tangente é total é finalmente dada por:

$$\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}_{iso} + \boldsymbol{D}_{orto}. \tag{3.37}$$

onde mais uma vez remete-se a [4] para expressão de $\boldsymbol{D}_{iso}$.

3.4.2. Modelo constitutivo de Saint-Venant (Raible [28] e [33])

Esse modelo faz uma generalização da equação constitutiva isótropa de Saint Venant, a qual relaciona linearmente o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$ com o Tensor das Deformações de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$, para um material ortótropo. Segundo [28], foi sugerida

por [37], fazendo a adaptação da função de energia específica com comportamento linear para o caso de comportamento não linear através da substituição do tensor das pequenas deformações ε pelo tensor $\boldsymbol{E}$. Expressando $\boldsymbol{E}$ em função do Tensor das Deformações de Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$, os invariantes envolvidos para o caso não linear serão:

$$tr\boldsymbol{C},\ tr\boldsymbol{C}^2,\ tr\boldsymbol{C}^3,\ tr\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C},\ tr\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}^2,\ tr\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} \text{ e } tr\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}^2. \tag{3.38}$$

Os tensores $\boldsymbol{C}$ e $\boldsymbol{H}_\alpha$ são os mesmos definidos no item 3.4.1.

Parcela isótropa

A parcela isótropa considera o material hiperelástico isótropo de Saint-Venant, cuja função energia de deformação específica é dada por

$$\psi_{iso} = \frac{1}{8}\lambda\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{C} - 3\right)^2 + \frac{1}{4}\mu\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{C}^2 - 2\operatorname{tr}\boldsymbol{C} + 3\right) \tag{3.39}$$

onde λ e μ são as constantes de Lamé.

O segundo tensor de Piola Kirchhoff para a parte isótropa é obtido análogo a (3.12), resultando em:

$$\boldsymbol{S}_{iso} = 2\frac{\partial\psi_{iso}}{\partial\boldsymbol{C}} = \frac{1}{2}\lambda\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{C} - 3\right) + \mu\left(\boldsymbol{C} - \boldsymbol{I}\right). \tag{3.40}$$

Utilizando a relação $\boldsymbol{P}_{iso} = \boldsymbol{F}\boldsymbol{S}_{iso}$ e em seguida obtendo o equivalente retrorrotacionado para configuração de referência $\boldsymbol{P}^r_{iso}$, juntamente com a imposição de estado plano de tensão $\left(S_{33} = \boldsymbol{e}^r_3 \cdot \boldsymbol{S}\boldsymbol{e}^r_3 = 0\right)$, é possível chegar em (ver [4] para detalhes):

$$
\boldsymbol{\tau}^{r}_{1iso} = \begin{bmatrix} \bar{E}\left(1+\gamma_{11}\right)\left(E_{11}+\nu\left(E_{22}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\right)\right)+2\mu\gamma_{21}E_{12} \\ 2\mu\left(1+\gamma_{22}\right)E_{12}+\bar{E}\gamma_{12}\left(E_{11}+\nu\left(E_{22}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\right)\right) \\ \mu\gamma_{13}+2\mu\gamma_{13}\left(E_{11}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\right)+2\mu\gamma_{23}E_{12} \end{bmatrix} \quad \text{e}
$$

$$
\boldsymbol{\tau}^{r}_{2iso} = \begin{bmatrix} 2\mu\left(1+\gamma_{11}\right)E_{12}+\bar{E}\gamma_{21}\left(E_{22}+\nu\left(E_{11}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\right)\right) \\ \bar{E}\left(1+\gamma_{22}\right)\left(E_{22}+\nu\left(E_{11}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\right)\right)+2\mu\gamma_{12}E_{12} \\ \mu\gamma_{23}+2\mu\gamma_{23}\left(E_{22}-\frac{1}{2}\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}\right)+2\mu\gamma_{13}E_{12} \end{bmatrix}. \tag{3.41}
$$

onde

$$
\begin{aligned}
\bar{E} &= \frac{2\mu}{1-\nu}\ , \quad \nu = \frac{\lambda}{2\left(\lambda+\mu\right)} \\
E_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\left(\gamma_{\alpha\beta}+\gamma_{\beta\alpha}+\gamma_{\alpha\gamma}\gamma_{\beta\gamma}+\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\beta 3}\right), \\
E_{\alpha 3} &= \frac{1}{2}\left(1+\gamma_{33}\right)\gamma_{\alpha 3} \quad \text{e} \\
E_{33} &= \frac{1}{2}\left[\left(1+\gamma_{33}\right)^{2}-1\right],
\end{aligned} \tag{3.42}
$$

com

$$
\gamma_{33} = \sqrt{1-\frac{2\nu}{1-\nu}\left(\gamma_{\alpha\alpha}+\frac{1}{2}\gamma_{\alpha\beta}\gamma_{\alpha\beta}\right)-\gamma_{\alpha 3}\gamma_{\alpha 3}}-1\,. \tag{3.43}
$$

A partir de (3.41) é possível obter, para a parte isótropa, as forças e momentos generalizados $\boldsymbol{n}^{r}_{\alpha iso}$ e $\boldsymbol{m}^{r}_{\alpha iso}$, respectivamente, e destes último a matriz $\boldsymbol{D}_{iso}$. Novamente, por questão de simplicidade, suas expressões não serão apresentadas aqui, mas podem ser encontradas em [4].

Parcela ortótropa:

Como já dito, a parcela ortótropa afeta exclusivamente as deformações de membrana do gradiente das deformações. Desta forma, é conveniente expressar, $\boldsymbol{F}$ ou $\boldsymbol{F}^T$, o tensor das deformações de Green-Lagrange, a energia de deformação específica ortótropa e os tensores de Piola Kirchhoff pelas equações (3.15), (3.16), (3.17) e (3.18) respectivamente.

Neste caso, a função energia de deformação específica para a ortotropia é dada por (vide [28,37])

$$\begin{aligned}\hat{\psi}_{orto} &= \frac{1}{4}\left[\alpha_1 \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{H}_1\right) + \alpha_2 \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{H}_2\right)\right]\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{C} - 3\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\left[\mu_1\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}^2\right) - 2\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}\right) + \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_1\right) + \mu_2\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}^2\right) - 2\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}\right) + \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_2\right)\right] + \\ &+ \frac{1}{8}\beta_1\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_1\right)^2 + \frac{1}{8}\beta_2\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_2\right)^2 + \\ &+ \frac{1}{4}\beta_{12}\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_1\right)\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_2\right),\end{aligned} \tag{3.44}$$

onde as constantes α_1, α_2, μ_1, μ_2, β_1, β_2 e β_{12} são parâmetros do material.

O correspondente segundo tensor das tensões Piola-Kirchhoff, resulta em:

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{S}}_{orto} &= 2\frac{\partial\psi_{orto}}{\partial\boldsymbol{C}} = \\ &= \frac{1}{2}\left(\alpha_1\boldsymbol{H}_1 + \alpha_2\boldsymbol{H}_2\right)\left(\operatorname{tr}\boldsymbol{C} - 3\right) + \frac{1}{4}\left[\alpha_1 \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C} - \boldsymbol{H}_1\right) + \alpha_2 \operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} - \boldsymbol{H}_2\right)\right]\boldsymbol{I} + \\ &+ \mu_1\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_1 - 2\boldsymbol{H}_1\right) + \mu_2\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C} + \boldsymbol{C}\boldsymbol{H}_2 - 2\boldsymbol{H}_2\right) + \\ &+ \frac{1}{2}\beta_1\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_1\right)\boldsymbol{H}_1 + \frac{1}{2}\beta_2\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_2\right)\boldsymbol{H}_2 + \\ &+ \frac{1}{2}\beta_{12}\left[\boldsymbol{H}_1\left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_2\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_2\right) + \left(\operatorname{tr}\left(\boldsymbol{H}_1\boldsymbol{C}\right) - \operatorname{tr}\boldsymbol{H}_1\right)\boldsymbol{H}_2\right].\end{aligned} \tag{3.45}$$

O primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff é obtido via $\hat{\boldsymbol{P}}_{\hat{o}rto} = \boldsymbol{F}\hat{\boldsymbol{S}}_{\hat{o}rto}$, e seus vetores-coluna resultam

$$\boldsymbol{\tau}^r_{1orto} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} \left[\left(2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1\right)E_{11} + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{22}\right](1+\eta_{11}) + 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}\eta_{21} \\ 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}(1+\eta_{22}) + \left[\left(2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1\right)E_{11} + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{22}\right]\eta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{\tau}^r_{2orto} = \frac{1}{h}\begin{bmatrix} 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}(1+\eta_{11}) + \left[\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{11} + \left(2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2\right)E_{22}\right]\eta_{12} \\ \left[\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{11} + \left(2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2\right)E_{22}\right]\left(1+\eta_{22}\right) + 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}\eta_{21} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.46}$$

Novamente, recorrendo a $(2.34)_1$, encontram-se as forças generalizadas retrorrotacionadas atuantes na seção transversal de normal $\boldsymbol{e}^r_\alpha$, da parcela ortótropa, dadas por

$$\boldsymbol{n}^r_{1orto} = \begin{bmatrix} \left[\left(2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1\right)E_{11} + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{22}\right](1+\eta_{11}) + 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}\eta_{21} \\ 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}(1+\eta_{22}) + \left[\left(2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1\right)E_{11} + \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{22}\right]\eta_{12} \\ 0 \end{bmatrix}$$

e

$$\boldsymbol{n}^r_{2orto} = \begin{bmatrix} 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}(1+\eta_{11}) + \left[\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{11} + \left(2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2\right)E_{22}\right]\eta_{12} \\ \left[\left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right)E_{11} + \left(2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2\right)E_{22}\right]\left(1+\eta_{22}\right) + 2\left(\mu_1 + \mu_2\right)E_{12}\eta_{21} \\ 0 \end{bmatrix}. \tag{3.47}$$

A resultante total das forças e momentos generalizados (retrorrotacionados), são obtidas de forma análoga a (3.29), lembrando que a parcela ortótropa não contribui em $\boldsymbol{m}^r_\alpha$.

A matriz dos módulos constitutivos de rigidez tangente da parcela ortótropa é obtida analogamente a (3.30) e (3.31). Suas submatrizes são constituídas pelas seguintes expressões explicitas:

$$\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{11}} = \big(2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1\big)E_{11} + \big(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\big)E_{22},$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{11}} = 0, \tag{3.48}$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{12}} = \big(2\alpha_1 + 4\mu_1 + \beta_1\big)E_{11} + \big(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\big)E_{22},$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{21}} = 2\big(\mu_1 + \mu_2\big)E_{12}$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_1}}{\partial \eta^r_{22}} = 0,$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{21}} = 0, \tag{3.49}$$

$$\frac{\partial n^r_{1orto_2}}{\partial \eta^r_{22}} = 2\big(\mu_1 + \mu_2\big)E_{12},$$

$$\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{11}} = 2\big(\mu_1 + \mu_2\big)E_{12}$$

$$\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{12}} = 0,$$

$$\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{11}} = 0, \tag{3.50}$$

$$\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{12}} = 2\big(\mu_1 + \mu_2\big)E_{12},$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{21}} &= \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right) E_{11} + \left(2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2\right) E_{22}, \\
\frac{\partial n^r_{2orto_1}}{\partial \eta^r_{22}} &= 0, \\
\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{21}} &= 0, \\
\frac{\partial n^r_{2orto_2}}{\partial \eta^r_{22}} &= \left(\alpha_1 + \alpha_2 + \beta_{12}\right) E_{11} + \left(2\alpha_2 + 4\mu_2 + \beta_2\right) E_{22},
\end{aligned}
\tag{3.51}
$$

Finalmente matriz total dos módulos constitutivos de rigidez tangente pode ser obtida analogamente a (3.37).

4. Calibração dos parâmetros materiais dos modelos constitutivos propostos

Os modelos constitutivos propostos no item 3.4, foram implementados no programa ***PEFSYS***. O ***PEFSYS*** é um programa de elementos finitos, implementado em linguagem *Fortran 90*, para análise não linear de sólidos e estruturas, desenvolvido na *Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*, pelos professores Paulo de Mattos Pimenta, Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti e Eduardo de Morais Barreto Campello. Como pré-processador e pós-processador é utilizado o programa ***GID*** desenvolvido pelo *CIMNE* (*Centro Internacional de Métodos Numéricos en Ingeniería*) da Universidade Politécnica da Catalunha.

A calibração dos parâmetros materiais presentes na idealização do item 3.4 será realizada utilizando dados obtidos em ensaios físicos de tração biaxial de membranas, disponíveis na literatura, em corpos de prova cruciformes. A **Figura 8** detalha as dimensões dos corpos de prova ensaiados, os carregamentos aplicados, as condições de contornos e o modelo computacional utilizado para efetuar as calibrações.

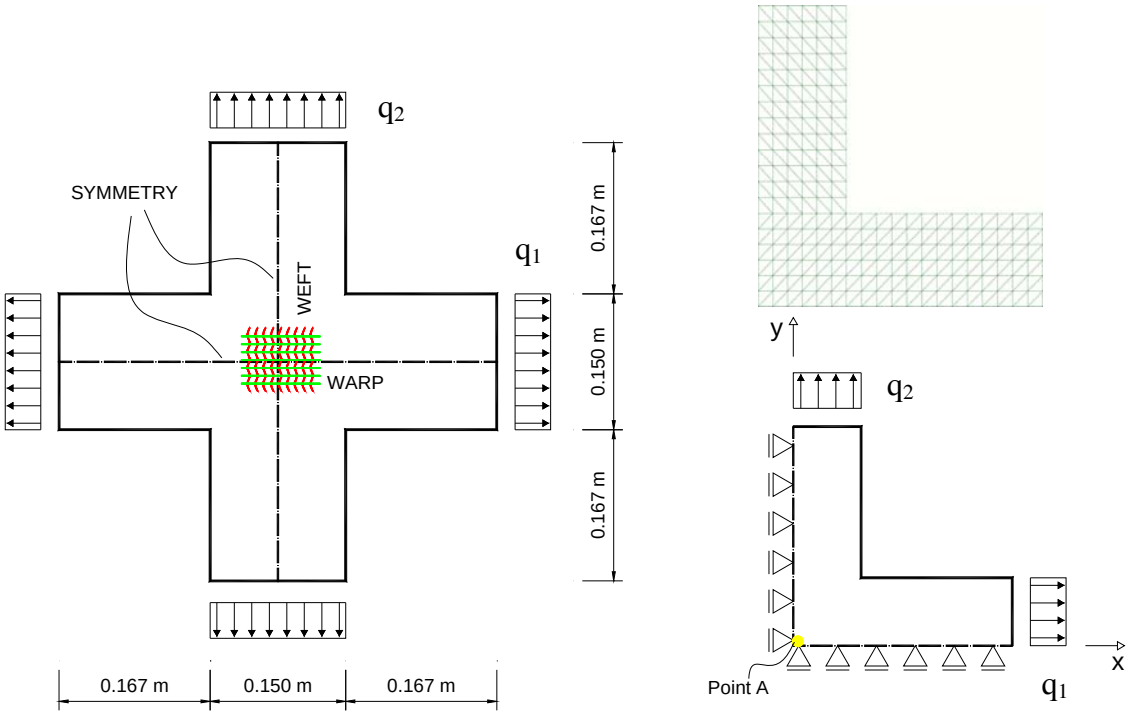


Figura 8: Teste de tração biaxial (figura adaptada de [8]).

Além das condições de contorno apresentadas na figura **Figura 8**, foi considerado que os deslocamentos transversais ao plano do corpo de prova são nulos, desta forma o diretor não apresentará rotação, ou seja, $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$.

No presente trabalho, que os dados utilizados para a calibração referem-se a uma membrana composta por fibras de *poliéster* revestidas por *PVC*, obtidos nos catálogos de produtos de [38]. O ensaio biaxial de [38] fornece apenas as curvas q_1 *versus* deformação na direção 1 e q_2 *versus* deformação 2 para carregamentos aplicados nas direções 1 e 2 simultaneamente: direção do urdume (direção 1) da trama (direção 2). Os ensaios foram realizados aplicando-se esses carregamentos em três razões diferentes: $q_1 : q_2 = 1:1$, $q_1 : q_2 = 1:2$ e , e os resultados estão apresentados Figura 9 a seguir.

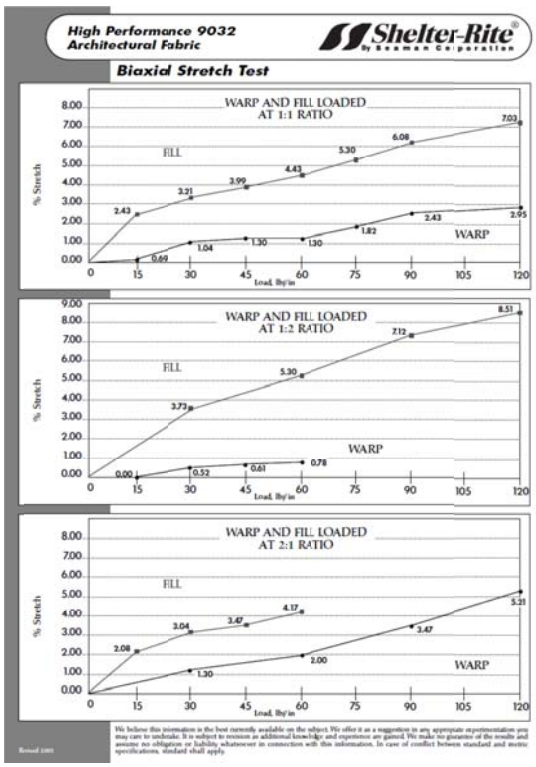


Figura 9: Curvas experimentais: Carregamento x Estiramento (Shelter-Rite) [38].

Note que no eixo das ordenadas dos gráficos apresentados **Figura 9**, referem-se ao estiramento. O estiramento está diretamente relacionado com a deformação linear, sendo dado por $\lambda_{\alpha\alpha} = 1 + \varepsilon_{\alpha\alpha}$, onde $\lambda_{\alpha\alpha}$ são os estiramentos e $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ as deformações lineares.

Levando em consideração a hipótese que $\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I}$ na equação $(2.14)_1$ obteremos:

$$\boldsymbol{\eta}_{\alpha}^{r} = \boldsymbol{z}_{,\alpha} - \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r} = \boldsymbol{u}_{,\alpha} + \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r} - \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r} = \boldsymbol{u}_{,\alpha} \rightarrow \begin{cases} \eta_{11}^{r} = \dfrac{\partial u_1}{\partial \xi_1} = \varepsilon_{11} \\ \eta_{22}^{r} = \dfrac{\partial u_2}{\partial \xi_2} = \varepsilon_{22} \end{cases}, \tag{4.1}$$

ou seja, as deformações de membrana $\eta_{\alpha\alpha}^{r}$ equivalem as deformações lineares $\varepsilon_{\alpha\alpha}$. Sendo assim, os valores porcentuais referentes ao estiramento nas curvas da **Figura 9**, são as parcelas das deformações lineares na expressão do estiramento.

O modelo matemático utilizado para calibração dos parâmetros materiais é semelhante ao utilizado em [27].

O objetivo da calibração é obter os parâmetros materiais (coeficientes dos polinômios das funções de energia de deformação específica) do modelo constitutivo que melhor aproximam as curvas experimentais.

Primeiramente, escolhidos os k pontos das curvas experimentais que serão ajustados, calculam-se os resíduos para as curvas $q_1 \times deformação_1$ e $q_2 \times deformação_2$, que serão dados por:

$$\begin{aligned} & r_{\alpha}^{(k)} = q_{\alpha}^{(k)} - \boldsymbol{n}_{\alpha iso}^{r} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha iso}^{r}\Big|_{k} - \boldsymbol{n}_{\alpha orto}^{r} \cdot \boldsymbol{e}_{\alpha orto}^{r}\Big|_{k} = q_{\alpha}^{(k)} - n_{\alpha iso_{\alpha}}^{r(k)} - n_{\alpha orto_{\alpha}}^{r(k)} \\ & k = 1,2,\ldots,n_{pontos} \text{ e } \alpha = 1,2, \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde $r_{\alpha}^{(k)}$ é o resíduo no *k*-ésimo ponto na direção α, q_{α} é o valor do carregamento experimental na direção α no *k*-ésimo ponto, $n_{\alpha iso_{\alpha}}^{r(k)}$ e $n_{\alpha orto_{\alpha}}^{r(k)}$ são respectivamente as componentes dos esforços internos $\boldsymbol{n}_{\alpha iso}^{r}$ e $\boldsymbol{n}_{\alpha orto}^{r}$ na direção α no k-ésimo ponto.

Note que as componentes $n_{\alpha iso_{\alpha}}^{r(k)}$ e $n_{\alpha orto_{\alpha}}^{r(k)}$ de $\boldsymbol{n}_{\alpha iso}^{r}$ e $\boldsymbol{n}_{\alpha orto}^{r}$ são funções das deformações de membrana $\boldsymbol{\eta}^{r}$ (vide suas expressões no item 3.4), também conhecidos nas curvas experimentais.

A soma dos resíduos quadráticos é dada por:

$$S = \sum_{k=1}^{n_{pontos}} \left[\left(r_1^{(k)} \right)^2 + \left(r_2^{(k)} \right)^2 \right] \tag{4.3}$$

onde S é a soma dos resíduos quadráticos que será a função objetivo a ser minimizada visando a obtenção dos parâmetros materiais que melhor ajustam a função.

Para a minimização da função S, será utilizado o algoritmo *GRG2* (Gradientes Reduzidos Generalizados), implementado no ***SOLVER*** do software Excel 2010. Este algoritmo foi desenvolvido por *Leon Ladson*, da Universidade do Texas em Austin e *Allan Ware*n, da Universidade Estadual de Cleveland [39], com a finalidade de resolver problemas de programação não linear. Maiores informações sobre este algoritmo podem ser encontradas em [40].

Observa-se que através da minimização serão obtidos apenas os parâmetros materiais referentes à parcela ortótropa, sendo previamente arbitrados os parâmetros E e ν (ou seus correspondentes parâmetros de *Lamé*).

Apesar de ser possível determinar, via minimização, também os parâmetros da parcela isótropa, optou-se pela estratégia de fixar tais parâmetros em valores arbitrários, objetivando ter um controle parcial da calibração. Além disso, diminui a sensibilidade das variáveis no problema de minimização.

Levando em conta as considerações acima, optou-se pela estratégia de calibrar os parâmetros ortótropos utilizando diferentes valores fixos $\left(E_i, \nu_j \right)$, com o intuito de investigar aqueles que melhor se ajustam aos dados experimentais.

4.1. Calibração do modelo constitutivo de o Oliveira-Pimenta utilizando uma membrana composta de fibras de poliéster revestida por PVC

Neste seção, será feita a calibração da equação constitutiva de Oliveira-Pimenta utilizando o material de [38].

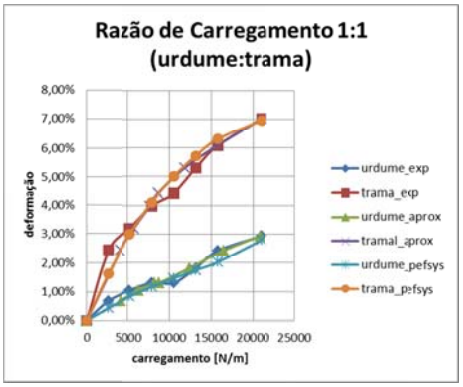
O teste biaxial foi computacionalmente simulado conforme ilustrado na **Figura 8,** levando em conta a simetria do modelo. A malha utilizada é apresentada nesta figura, a qual é composta por 384 elementos finitos do tipo T6-3i. A membrana estudada tem espessura de 0,50 mm

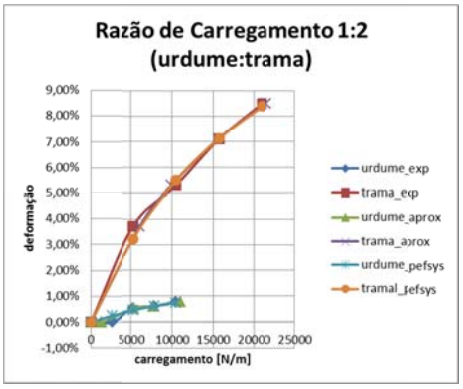
(sugerida em [5,8]). Neste teste biaxial, as deformações η_{11} e η_{22} componentes de $\boldsymbol{\eta}_{\alpha}^{r}$ para cada carregamento foram medidas no ponto A conforme ilustrado na **Figura 8**

Seguindo a estratégia descrita anteriormente, utilizou-se para a calibração do material, diferentes valores fixos para o modulo de elasticidade e para o coeficiente de Poisson parcela isótropa $E = \left\{1\times10^{3},\ 2\times10^{3},\ 5\times10^{3},\ 1\times10^{4},\ 1\times10^{5},\ 1\times10^{6},\ 1\times10^{7},\ 1\times10^{8}\right\}$ todos em $N\ /\ m^{2}$ e $\nu = \left\{0{,}00,\ 0{,}15,\ 0{,}30,\ 0{,}45\right\}$. Os resultados obtidos em cada um desses casos são apresentados no **Anexo A**.

Os melhores resultados, no sentido de se ter curvas mais aderentes as curvas experimentais, ocorre para valores de $E = 1\times10^{7} N\ /\ m^{2}$ para quaisquer valores de ν. Nesse caso, os valores resultantes dos parâmetros da parcela ortótropa e as curvas carregamento *versus* deformação correspondente para cada razão de carregamento estão apresentados na **Figura 10** a seguir.

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,110E+05	[N/m]
b	6,748E+04	[N/m]
c	3,809E+04	[N/m]
h	2,517E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,332E+06	[N/m]
n	2,558E+06	[N/m]





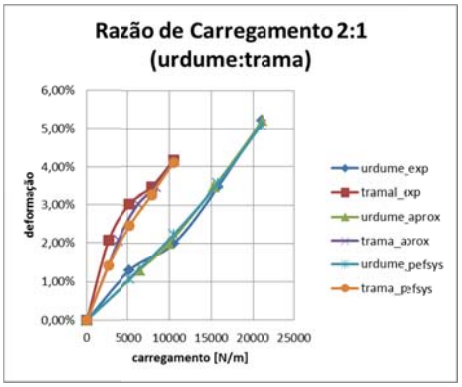


Figura 10: Resultados da calibração obtida para $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ **-** $\nu = 0,00$ **(Material de Oliveira-Pimenta)**

Analisando as curvas do **Anexo A**, observa-se que as curvas com razão de carregamento 1:1 não são totalmente ajustadas para valores de módulo de elasticidade inferiores a $E = 1 \times 10^7$ N/m^2. Ainda observando a curva com razão de carregamento 1:1, quando é adotado $E = 1 \times 10^8$ N/m^2, nota-se que a curva gerada pelo ***PEFSYS*** inicia uma perda de aderência em relação às curvas experimentais.

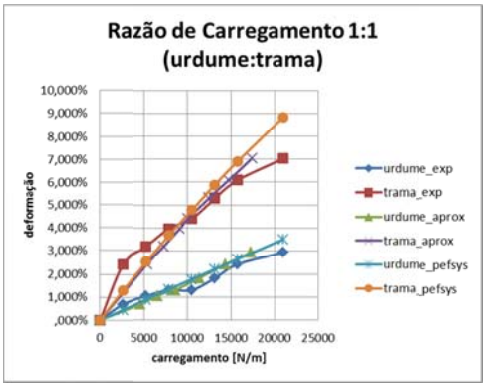
Outro fato importante é a influência praticamente nula do coeficiente de Poisson ν no ajuste das curvas. Desta forma, para esse material, pode-se adotá-lo nulo. Os parâmetros do modelo ortótropo estão cumprindo o papel de representar o efeito Poison neste caso.

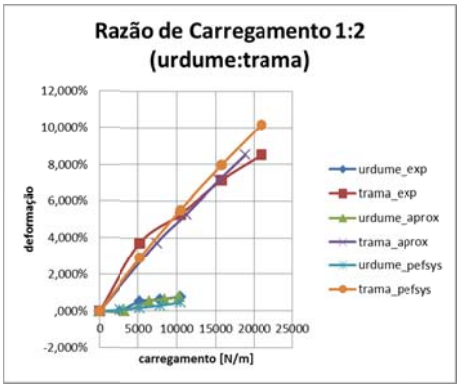
4.2. Calibração do modelo constitutivo ortótropo de Saint-Venant utilizando uma membrana composta de fibras de poliéster revestida por PVC

Nesta seção será feita a calibração da equação constitutiva de Saint-Venant utilizando o mesmo material da seção anterior, isto é, [38], cujo comportamento é representado pelas curvas da Figura 9.

Seguindo a mesma estratégia de fixar valore de E e ν, variando-os conforme $E = \left\{1 \times 10^3,\ 2 \times 10^3,\ 5 \times 10^3,\ 1 \times 10^4,\ 1 \times 10^5,\ 1 \times 10^6,\ 1 \times 10^7,\ 1 \times 10^8\right\}$ valores em $N\ /\ m^2$ e $\nu = \left\{0{,}00,\ 0{,}15,\ 0{,}30,\ 0{,}45\right\}$, obteve-se os resultados apresentados no **Anexo B**. Nota-se que os melhores resultados no sentido de ter curvas mais aderentes, ocorreu para $E = 3{,}75 \times 10^7 N\ /\ m^2$ e $\nu = 0{,}45$. Os valores resultantes dos parâmetros da parte ortótropa, nesse caso, e as curvas carregamento *versus* deformação correspondente, estão apresentados na **Figura 11** a seguir.

Parâmetros		
E	3,750E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	4,724E+07	[N/m]
$\alpha 2$	1,508E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,109E+08	[N/m]
$\mu 2$	4,807E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,752E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,187E+07	[N/m]
$\beta 12$	-8,956E+06	[N/m]





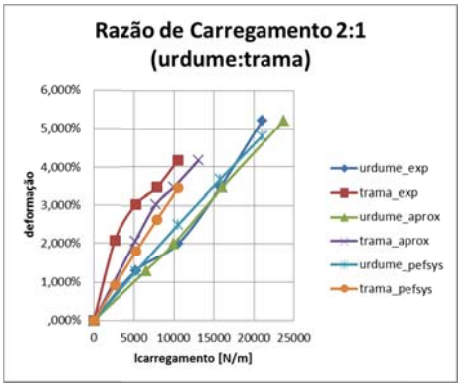


Figura 11: Resultados da calibração obtida para $E = 3,75 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ **-** $\nu = 0,45$ **(Material de Saint-Venant).**

5. Exemplos numéricos

5.1.Membrana quadrada (modelo constitutivo de Oliveira-Pimenta)

Utilizando os parâmetros calibrados para o modelo constitutivo de Oliveira-Pimenta, referente ao material apresentado na **Figura 9** analisou-se o comportamento do modelo descrito na **Figura 12**, considerando duas situações: a primeira a tração ocorre na direção das fibras do urdume já a segunda a tração ocorre na direção das fibras da trama.

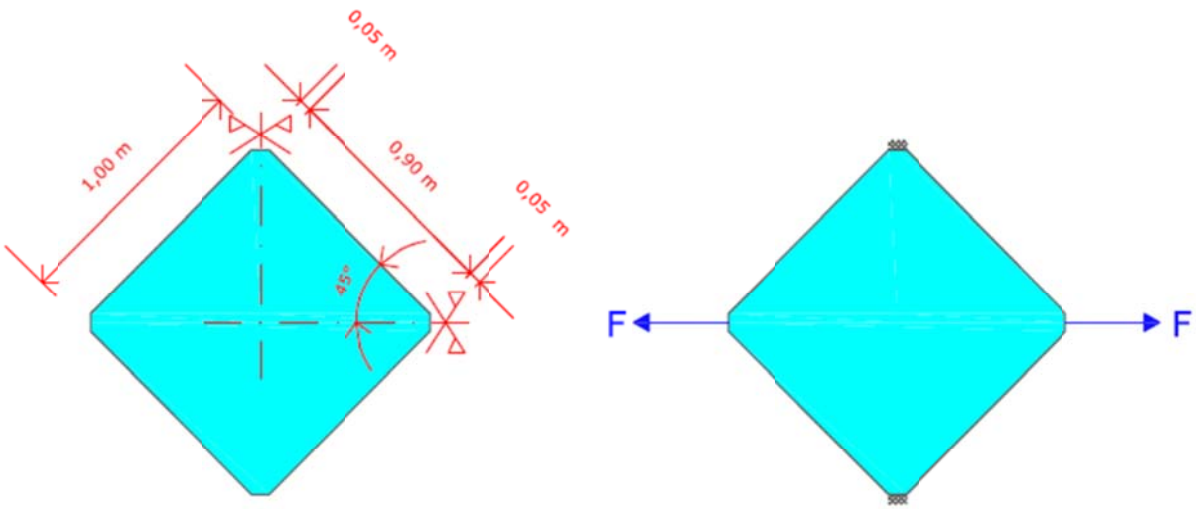


Figura 12: Membrana quadrada.

Para as situações analisada utilizou-se 1,00 kN para as forças de tração distribuídas nos nós dos elementos da aresta onde ocorre a tração. O modelo foi discretizado por 2316 elementos finitos do tipo T6-31, totalizando 4773 nós. A **Figura 13** representa a malha utilizada bem como o real carregamento aplicado nos nós que totalizam a força de tração. Vale notar que existem pequenas forças transversais ao plano da membrana, cada força na ordem de 1% do carregamento de tração, que tem a função de induzir o enrugamento da membrana.

O enrugamento é um fenômeno de instabilidade e para tratar esse fenômeno é necessário a implementação de um método da continuação, como por exemplo, o *arc-length,* para possibilitar a obtenção das trajetórias de equilíbrio do modelo. Até este ponto do trabalho, não implementado no ***PEFSYS*** nenhum método da continuação. Uma forma de obter possíveis estados de enrugamento é provocando uma perturbação transversal ao plano da membrana através da utilização de forças muito pequenas comparadas com o carregamento de tração.

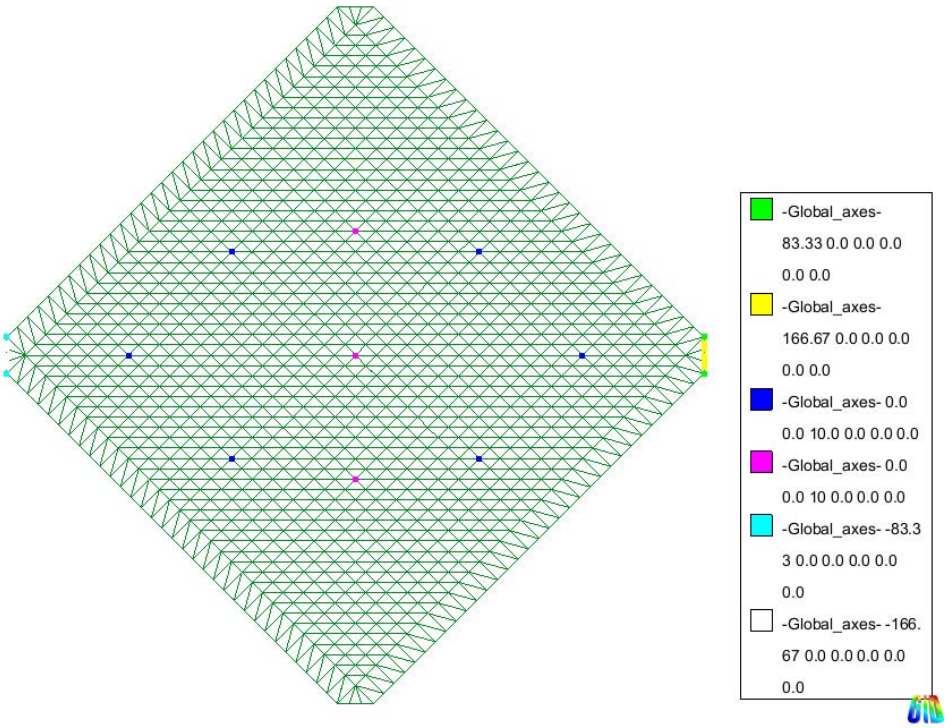
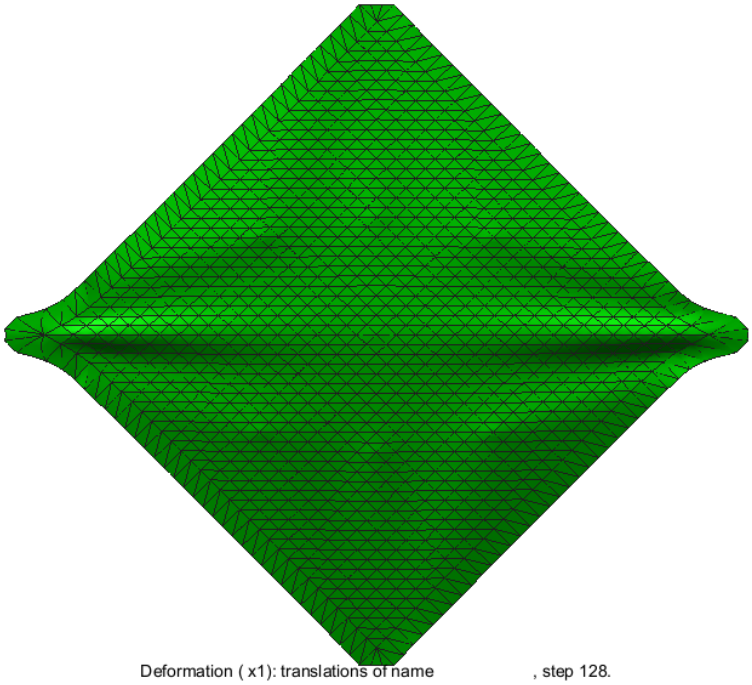


Figura 13: Malha e carregamento aplicado na membrana.

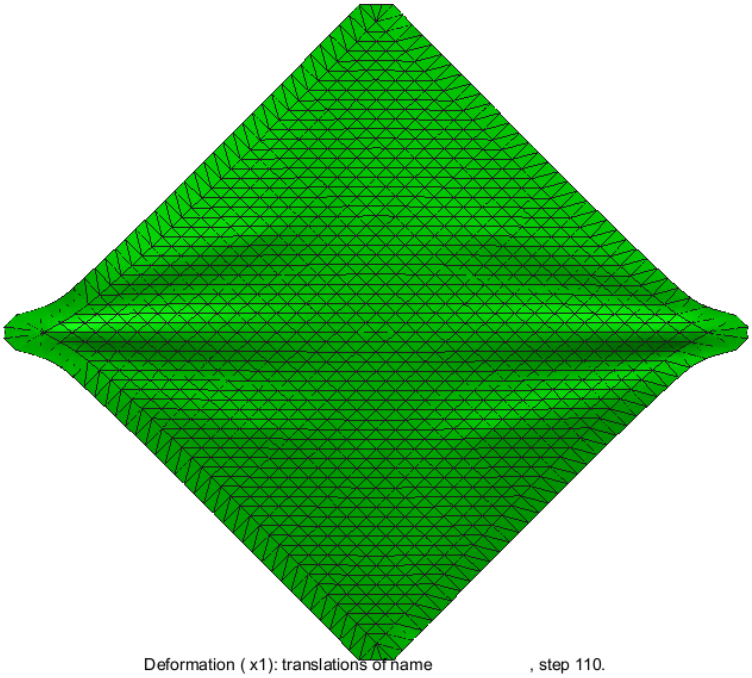
Após o processamento no programa ***PEFSYS*** obteve-se as configurações deformadas apresentadas na **Figura 14.**

Os deslocamentos transversais ao plano da membrana podem ser observados na **Figura 15** e os deslocamentos horizontais na **Figura 16**. Analisando as duas figuras, percebe-se que a direção do urdume é mais rígida que a direção da trama, como era esperado, pois as fibras na direção do trama que partem de uma situação mais ondulada e quando tracionada tem mais a se retificar. Quanto a amplitude das rugas, a trama por se esticar mais na direção horizontal, apresentará rugas com amplitude menores que as que surgem quando o tracionamento é realizado na direção do urdume

A **Figura 17** mostra que as regiões com maiores tensões normais na horizontal são as que apresentam maior deformação, como era esperado. Na **Figura 18**, observa-se diversos pontos de compressão na região do enrugamento. Estas tensões surgem da interação entre as fibras e colaboram para formação de rugas.



(a) Deformation (x1): translations of name , step 128.



(b) Deformation (x1): translations of name , step 110.

Figura 14: Configuração deformada com tração na direção:(a) urdume; (b) trama.

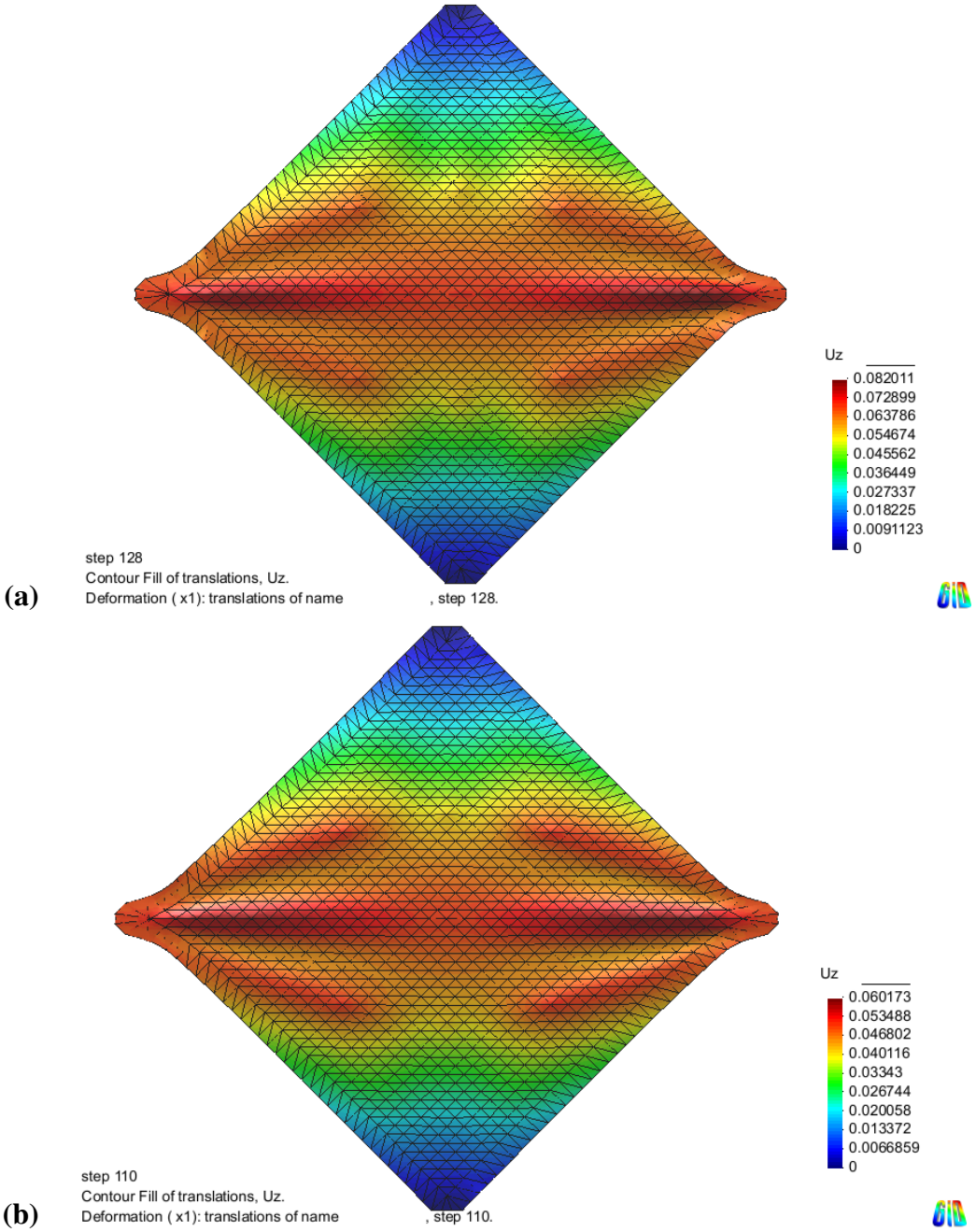


Figura 15: Deslocamentos transversais ao plano da membrana com tração na direção: (a) urdume; (b) trama.

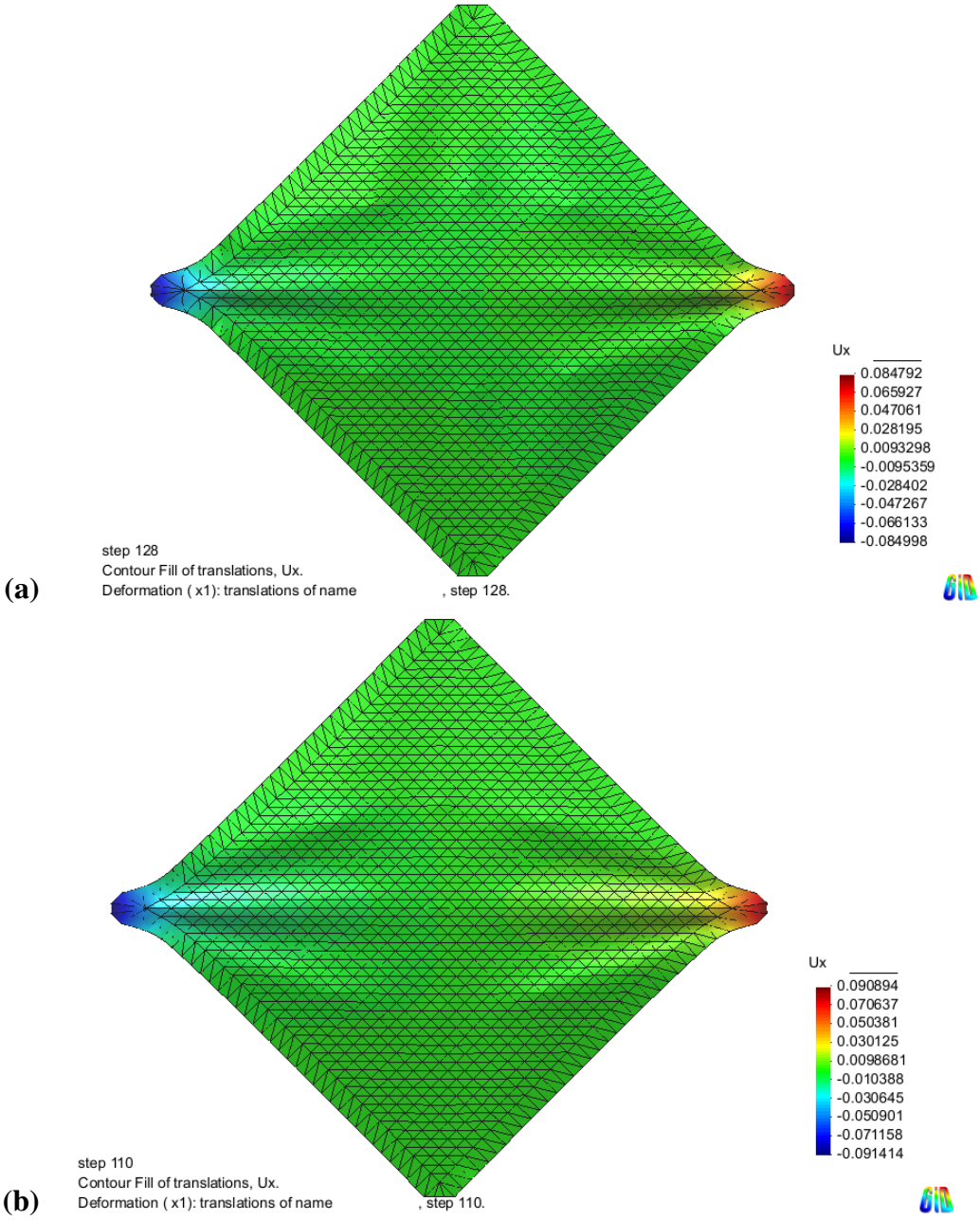


Figura 16: Deslocamentos horizontais com tração na direção: (a) urdume; (b) trama.

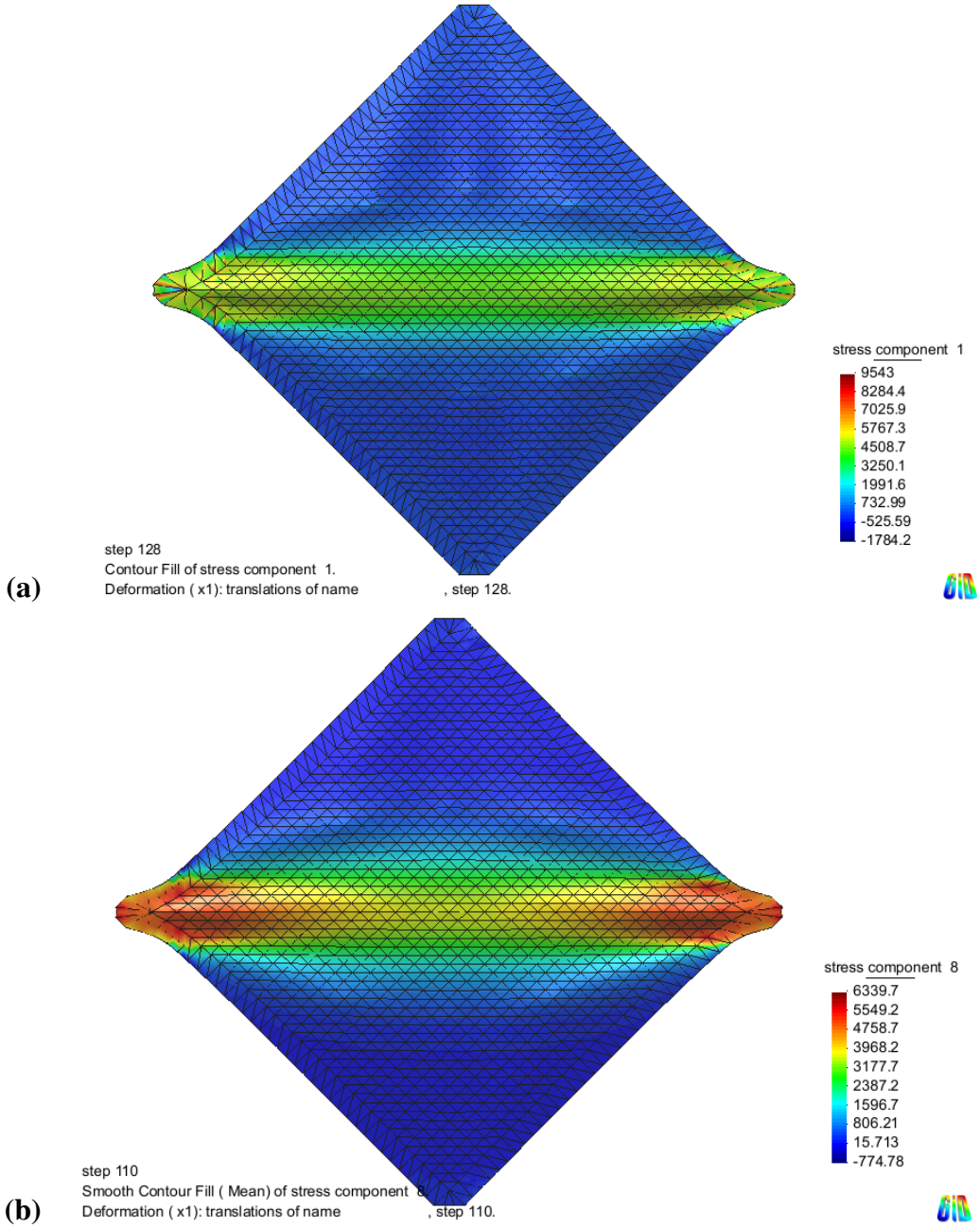


Figura 17:Tensões normais na direção horizontal com tração na direção: (a)urdume; (b) trama.

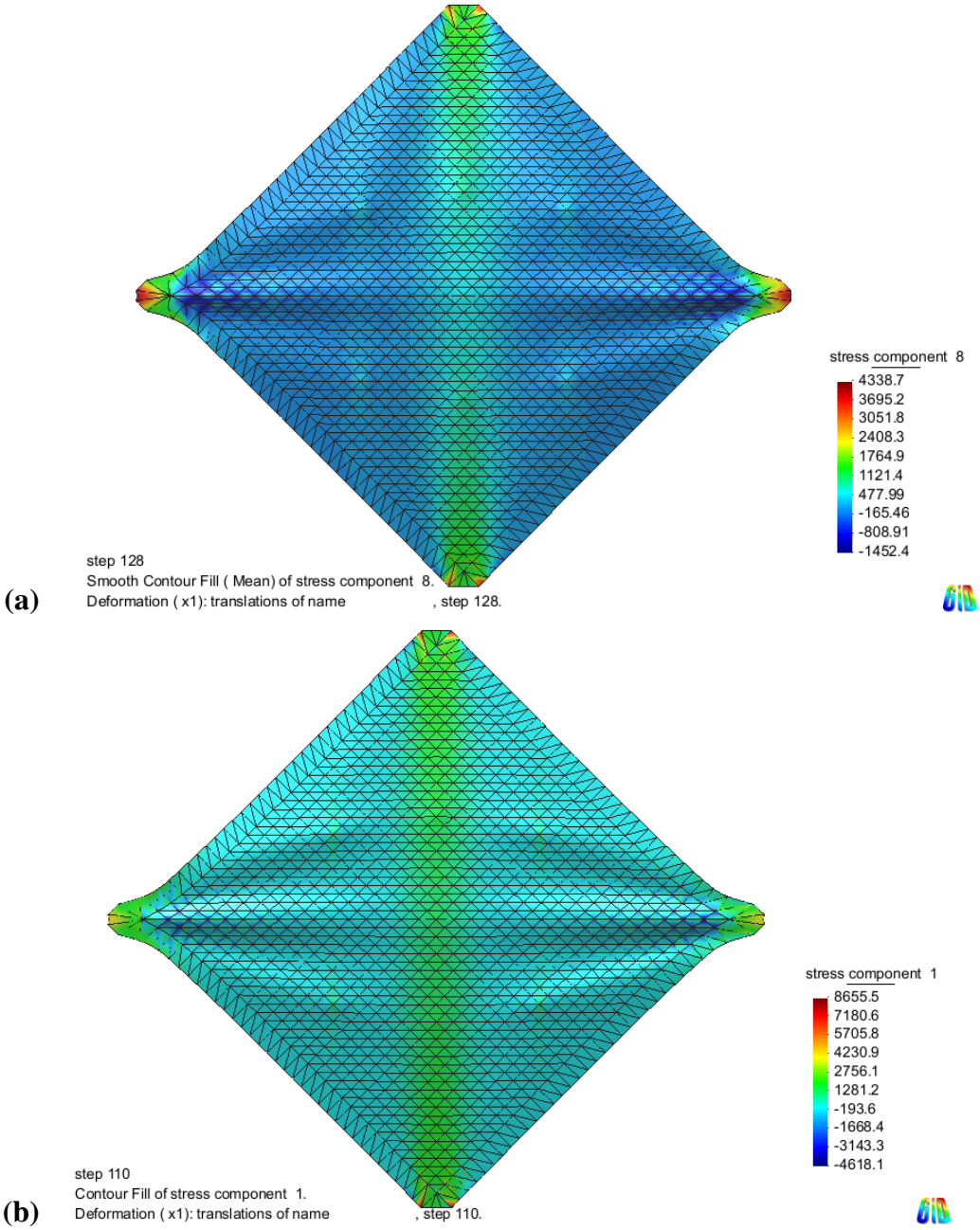


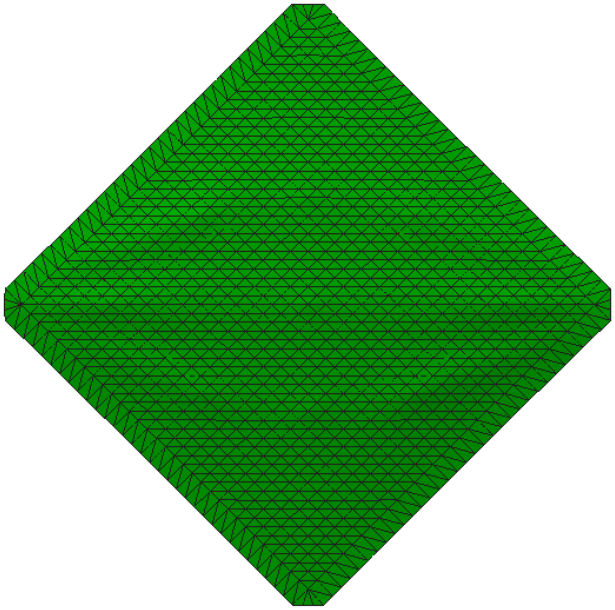
Figura 18: Tensões normais na direção vertical com tração na direção: (a)urdume; (b) trama.

5.2.Membrana quadrada (modelo constitutivo ortótropo de Saint-Venant-Pimenta)

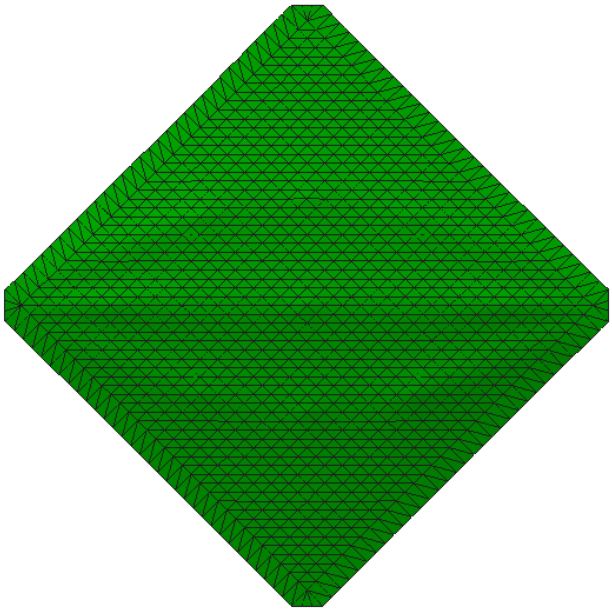
Utilizando os parâmetros calibrados para o modelo constitutivo ortótropo de Saint-Venant, referente ao material apresentado na **Figura 9**, simulou-se o mesmo modelo realizado na seção **(5.1)**, com a diferença que o carregamento de tração utilizado neste caso foi $0{,}60\ \text{kN}$,

visto que a utilização do carregamento de 1,00 kN apresentou grande dificuldade para finalização da simulação. Como é sabido, o modelo constitutivo de Saint-Venant não é poli-convexo, desta forma só serve para o caso de pequenas deformações, podendo ter sido este o motivo da dificuldade de finalização da simulação.

Após o processamento no programa ***PEFSYS*** obteve-se as configurações deformadas apresentadas na **Figura 19.**



(a) Deformation (x1): translations of name , step 77.



(b) Deformation (x1): translations of name , step 68.

Figura 19: Configuração deformada com tração na direção:(a) urdume; (b) trama.

Os deslocamentos transversais ao plano da membrana aparecem na **Figura 20** e os deslocamentos horizontais na **Figura 21**. Novamente mostrando que a tração na direção do urdume apresenta-se mais rígida e suas rugas com maior amplitude.

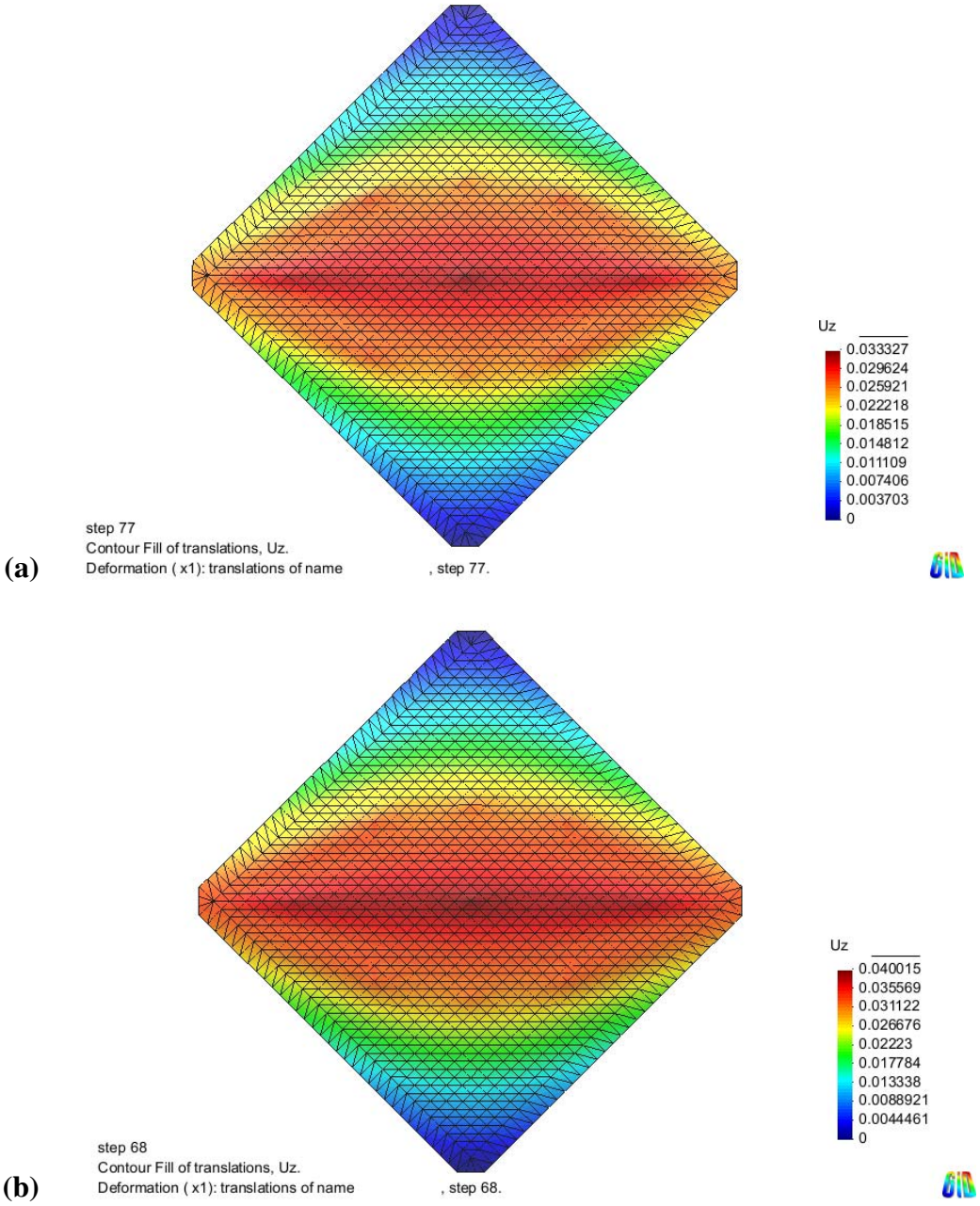


Figura 20: Deslocamentos transversais ao plano da membrana com tração na direção: (a) urdume; (b) trama.

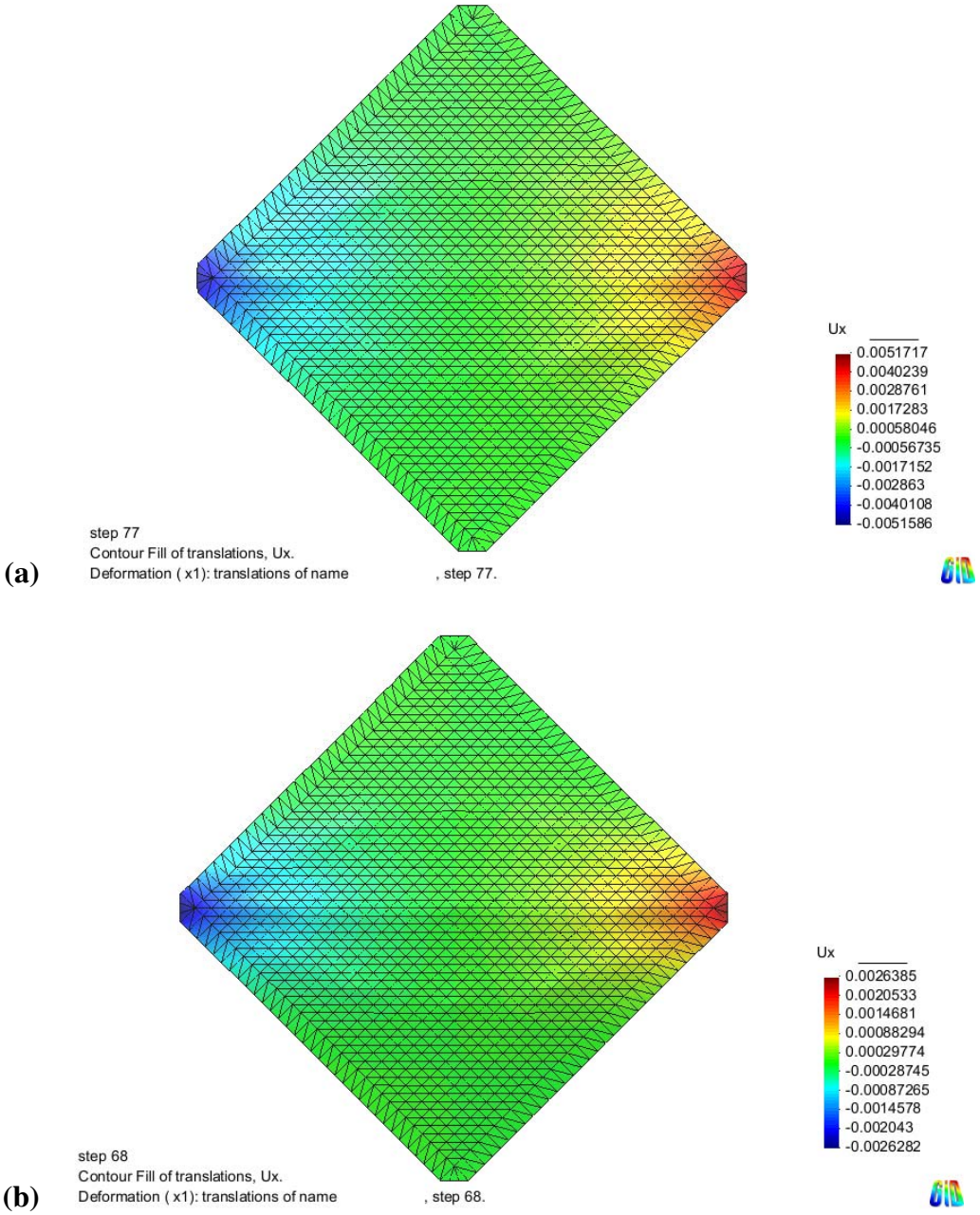


Figura 21: Deslocamentos horizontais com tração na direção: (a) urdume; (b) trama

A **Figura 22** apresenta as tensões normais na direção horizontal, mostrando que as tensões se uniformizam na região central da membrana devido as baixas deformações que ocorrem nessa região. A região das extremidades da membrana, apresentam deformações maiores.

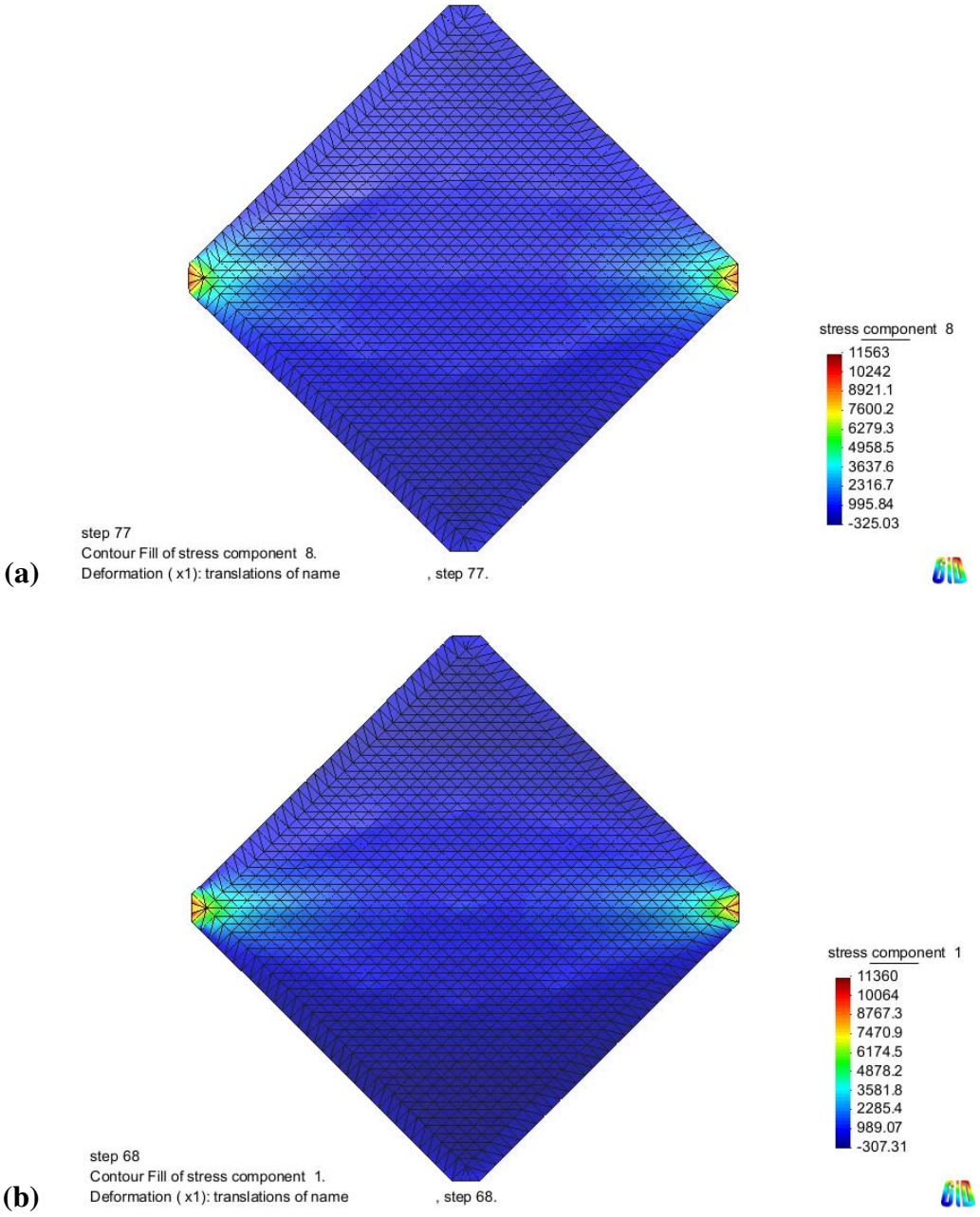


Figura 22: Tensões normais na direção horizontal com tração na direção: (a)urdume; (b) trama.

Na **Figura 23**, observa-se diversos pontos de compressão na região do enrugamento. Estas tensões surgem da interação entre as fibras e colaboram para formação de rugas.

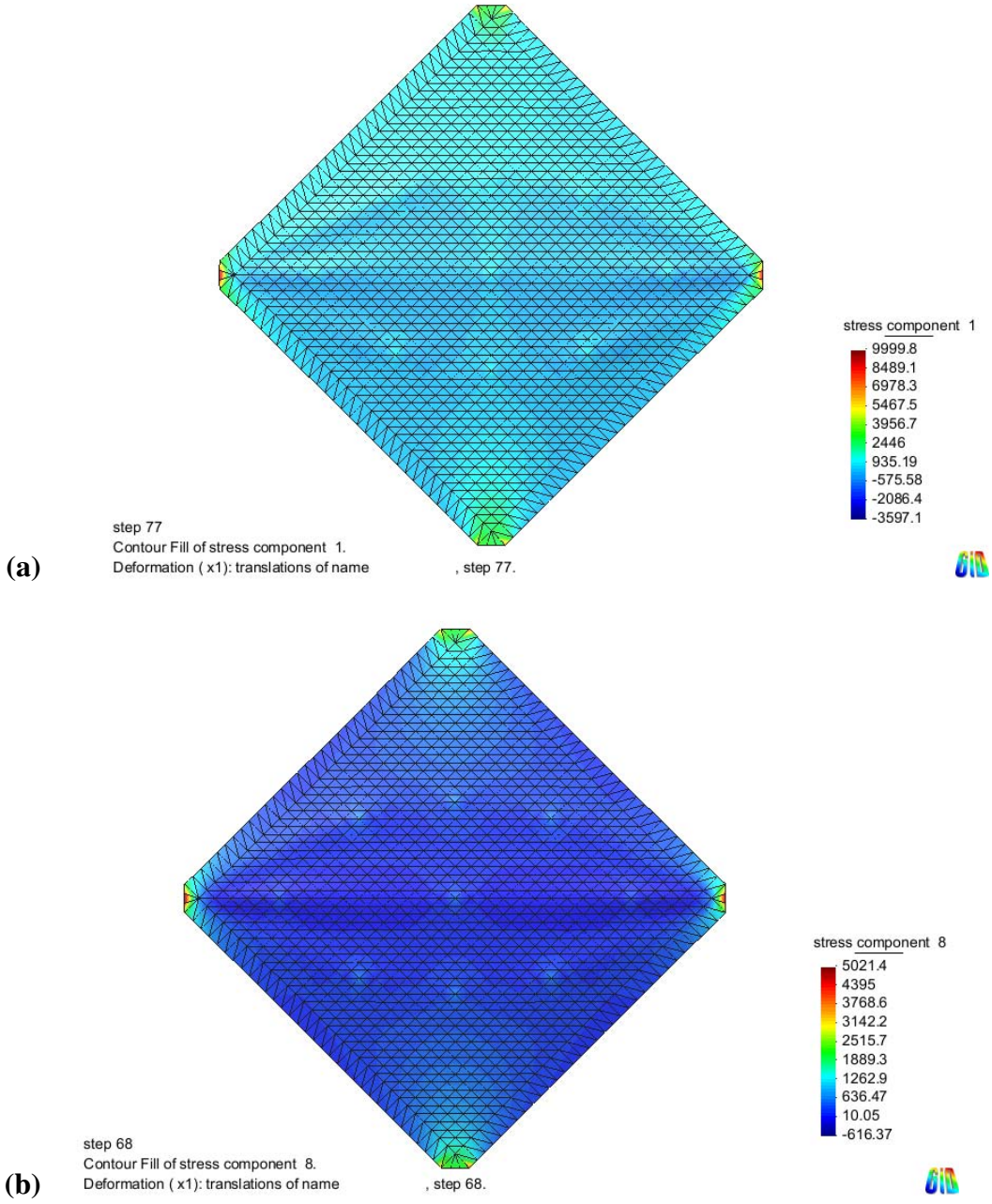


Figura 23: Tensões normais na direção vertical com tração na direção: (a)urdume; (b) trama.

6. Conclusões

Neste trabalho, utilizou-se de uma cinemática de uma teoria de casca geometricamente exata desenvolvida em [1,2,4] e posteriormente generalizada em [5] para descrever o comportamento mecânico de membranas que é idealizado como a superposição de efeitos de uma casca isótropa de pequena espessura com o reforço de um tecido ortótropo.

Os modelos constitutivos, estudados neste trabalho, são hiperelásticos e a energia de deformação específica é decomposta aditivamente em uma parcela isótropa e outra ortótropa. A parte isótropa contribui com rigidez a tração, compressão, flexão e cisalhamento enquanto a parte ortótropa é responsável por uma rigidez adicional a tração na direção das fibras do tecido, direções estas expressas pelos tensores estruturais apresentados na equação (3.19).

Dois modelos constitutivos com características ortótropas foram utilizados neste trabalho: modelo de Oliveira-Pimenta [5,8] e modelo de Saint-Venant [28,33]. A primeira utiliza para a parte isótropa a função energia de deformação específica de Simo-Ciarlet e para parte ortótropa a função de energia de deformação específica é dada por um polinômio onde as variáveis são invariantes do tensor das deformações de Green-Lagrange $\boldsymbol{E}$ nas direções de ortotropia. Já para o modelo de Saint-Venant, a parte isótropa é representada pela função energia de deformação específica de Saint-Venant e a parte ortótropa por um polinômio formado por invariantes do tensor das deformações de Cauchy-Green $\boldsymbol{C}$ nas direções de ortotropia.

Para os dois modelos estudados, foram obtidos a partir de suas respectivas funções energia de deformação específica os tensores das tensões de Piola-Kirchhoff $\boldsymbol{S}$ e $\boldsymbol{P}$, retrorrotacionando $\boldsymbol{P}$ para a configuração de referência foi obtido $\boldsymbol{P}^r$ e através de sua decomposição espectral obteve-se os vetores-colunas $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$ que representam as tensões nas seções transversais com normal $\boldsymbol{e}_\alpha^r$ e a partir destas tensões encontrou-se as forças e momentos generalizados respectivamente $\boldsymbol{n}_\alpha^r$ e $\boldsymbol{m}_\alpha^r$ nestas seções, e destas finalmente obteve-se a matriz dos módulos constitutivos de rigidez tangente $\boldsymbol{D}$. Devido todas as grandezas apresentadas serem obtidas a partir da função energia de deformação específica e lembrando que esta pode ser decompostas aditivamente em uma parcela isótropa e outra ortótropa, temos como consequência estas grandezas também podem ser decompostas aditivamente em uma parcela isótropa e outra ortótropa.

Os modelos constitutivos foram implementados dentro do programa de elementos finitos ***PEFSYS*** e os modelos físicos foram discretizados utilizando o elemento finito T6-3i que é um elemento triangular de seis nós puro em deslocamento, que garante as propriedades de convergência e estabilidade, e com ausência nos vértices dos graus de liberdades referente à rotação, o que o torna incompatível em relação ao campo de rotações. O travamento numérico não é observado visto que a incompatibilidade das rotações e a interpolação quadrática dos deslocamentos tornam o T6-3i suficientemente flexíveis o que torna desnecessário a utilização de técnicas como por exemplo integração reduzida, AES e ANS para evitar o travamento do elemento.

Após a implementação dos modelos constitutivos ortótropos no ***PEFSYS*** tornou-se necessário a calibração dos dois modelos. Para isso foi escolhido uma membrana de *poliéster* revestida por *PVC* [38] cujo comportamento mecânico está representado na **Figura 9**. A calibração foi feita fixando valores de E e ν da parte isótropa e os coeficientes dos polinômios da parte ortótropa foram obtidos através da minimização da soma dos resíduos quadráticos $r_{\alpha}^{(k)}$. Procedendo desta forma, os melhores resultados para calibração do modelo de Oliveira-Pimenta foram alcançados fixando $E = 1 \times 10^7 N \,/\, m^2$ e $\nu = 0,00$ cujos parâmetros materiais da parcela ortótropa são apresentados na **Figura 10**. Para o modelo de Saint-Venant os melhores resultados de calibração foram obtidos fixando $E = 3,75 \times 10^7 N \,/\, m^2$ e $\nu = 0,45$, para estes valores os parâmetros materiais são apresentados na **Figura 11** .

Para o modelo de Oliveira-Pimenta, observou-se que para o material calibrado, o coeficiente de Poisson não apresentou influência nos resultados. Observou-se ainda que a curva de carregamento com razão 1:1 não é perfeitamente aderida para valores de modulo de elasticidade equivalente inferiores a $E = 1 \times 10^7 N \,/\, m^2$. Além disso, para valores superiores a $E = 1 \times 10^7 N \,/\, m^2$, as curvas calibradas, através da simulação utilizando o ***PEFSYS,*** que representam comportamento mecânico do material começam perder aderência das curvas experimentais, mostrando que a partir desse valor a parcela isótropa começa a superar o domínio da parcela ortótropa no comportamento mecânico do material.

Já o modelo de Saint-Venant, as curvas de calibração não apresenta uma aderência tão boa em relação aos dados experimentais, mas considerando a ordem de grandeza das deformações, consegue representar o comportamento mecânico da membrana calibrada.

Em relação aos exemplos numéricos, é essencial para o tratamento do enrugamento a implementação de um método da continuação para uma análise mais criteriosa. O artificio de induzir a formação de ruga não é uma forma adequada de tratar o problema de instabilidade. Talvez, se a geração das perturbações fosse condicionada a uma análise prévia de autovalores, conhecer iam-se os graus de liberdade que se instabilizariam, podendo as imperfeições ser aplicadas nesses pontos, melhorando a configuração deformada. Porém, a utilização deste artificio serviu para observar qualitativamente os efeitos devido a interação das fibras da membrana, mostrando que os modelos constitutivos conseguem representar este comportamento.

No geral, tanto o modelo de elementos finitos adotado para analise da membrana, a idealização dos modelos constitutivos e a metodologia de calibração adotada foram satisfatórias para obtenção dos resultados finais apresentados nesta dissertação.

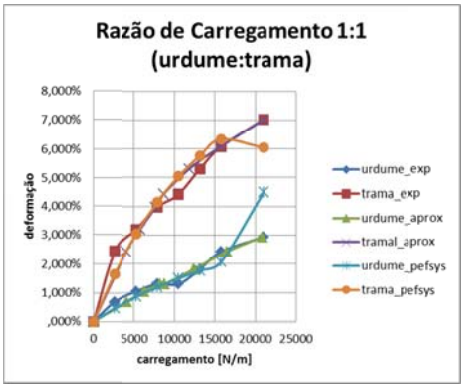
Sugestões para futuros trabalhos

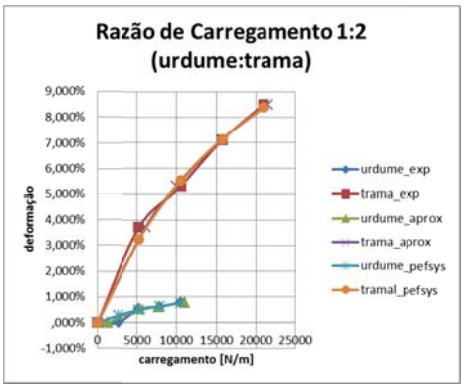
Segue algumas sugestões para estudos futuros:

1. Influência da ortotropia no enrugamento de membranas;
2. Estudo da poli convexidade das funções energia de deformação da parcela ortótropa;
3. Busca de configurações enrugadas utilizando métodos de continuação como, por exemplo, *arc-length* ou controle de deslocamentos.
4. Aplicações de membranas ortótropas em biomecânica;
5. Interação fluido-estrutura em membranas.
6. Verificar se o problema do enrugamento pode ser tratado como um problema dinâmico.
7. Utilizar algoritmos genéticos para calibrar equações constitutivas ortótropas.

Anexo A

Parâmetros		
E	1,000E+03	[N/m²]
ν	0,00	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





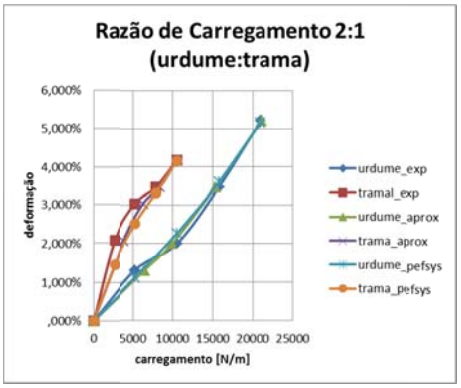
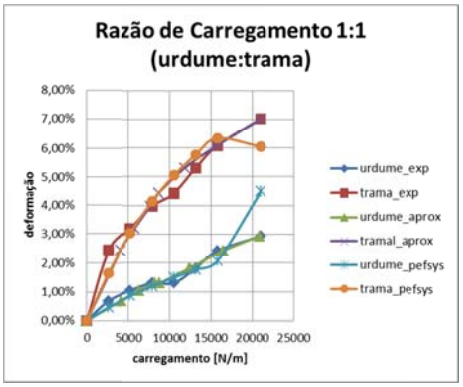
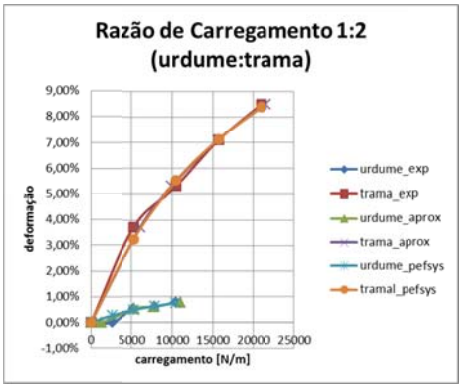


Figura 24: Calibração $E = 1 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	2,000E+03	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





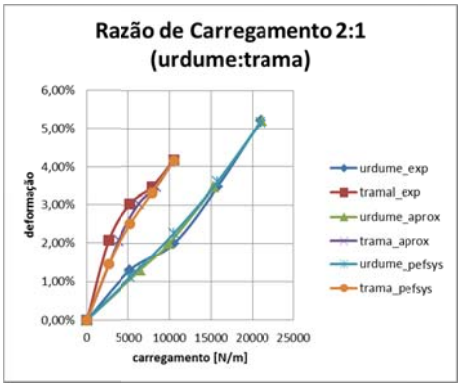
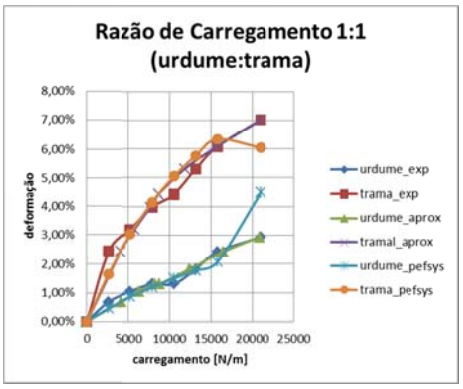
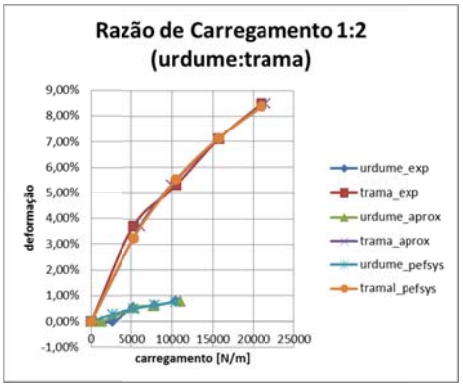


Figura 25: Calibração $E = 2 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	5,000E+03	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





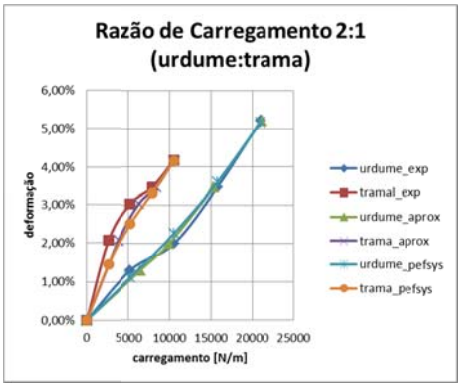
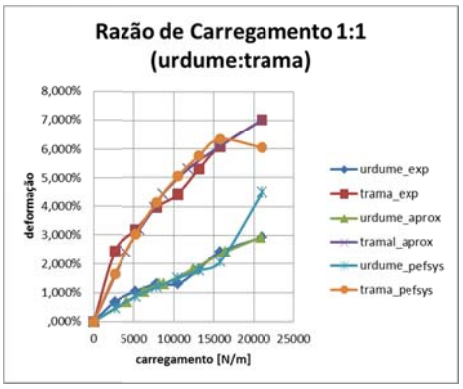
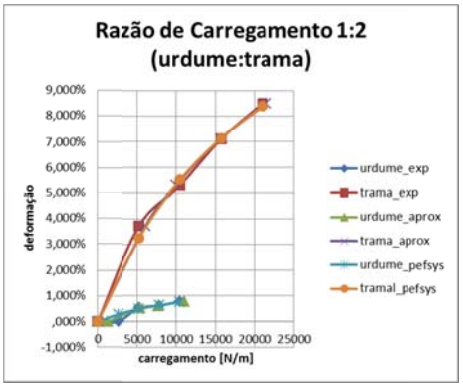


Figura 26: Calibração $E = 5 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+04	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





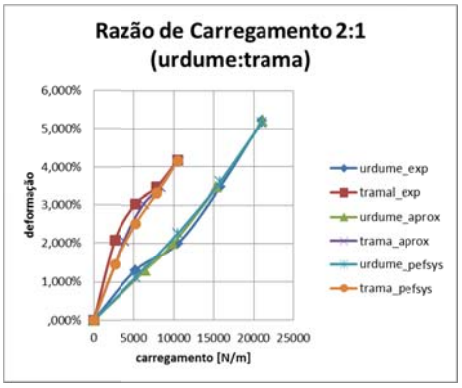
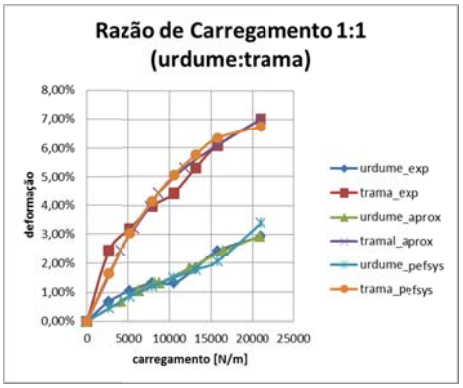
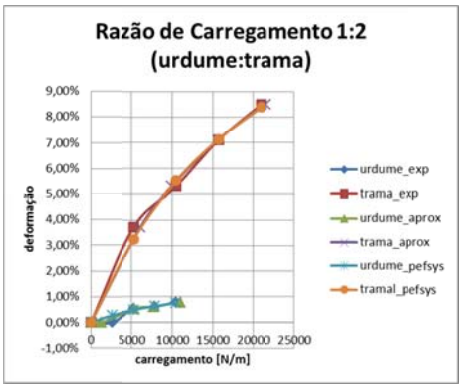


Figura 27: Calibração $E = 1 \times 10^4\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+05	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,981E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





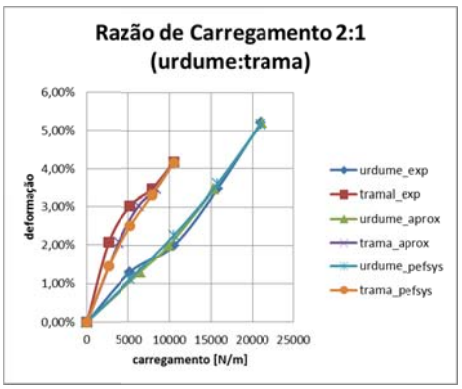
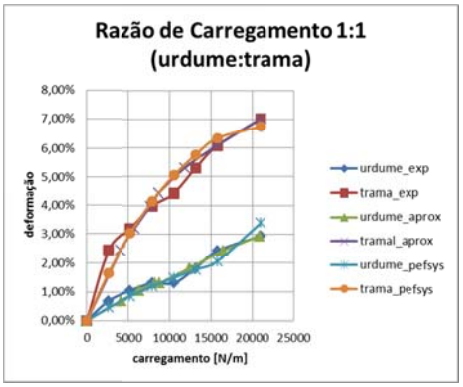
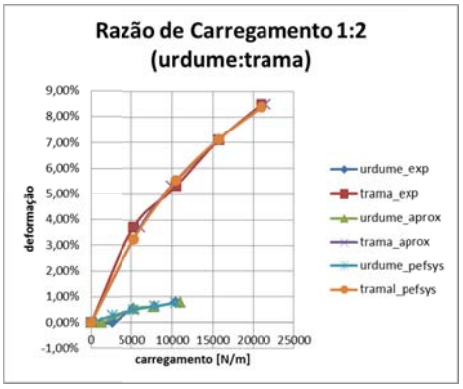


Figura 28: Calibração $E = 1 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+06	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,132E+05	[N/m]
b	6,960E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,544E+06	[N/m]





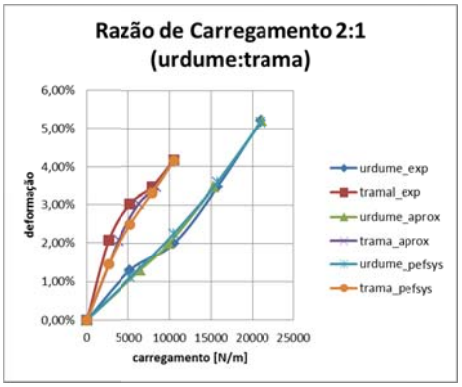
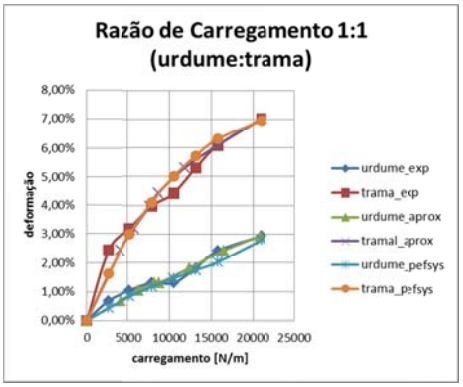
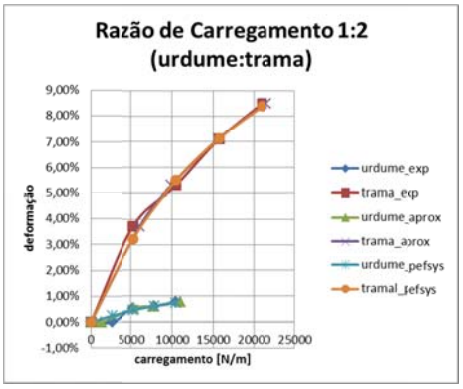


Figura 29: Calibração $E = 1 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
nu	0,00	
a	2,110E+05	[N/m]
b	6,748E+04	[N/m]
c	3,809E+04	[N/m]
h	2,517E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,332E+06	[N/m]
n	2,558E+06	[N/m]





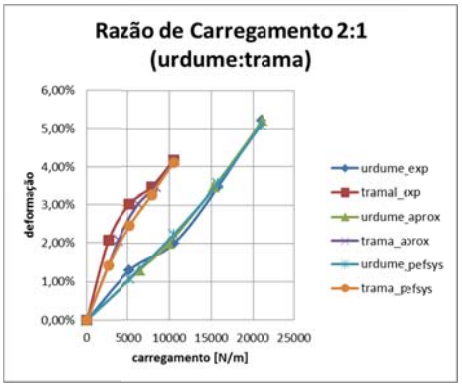
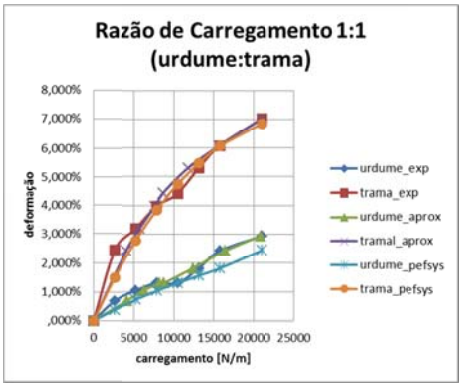
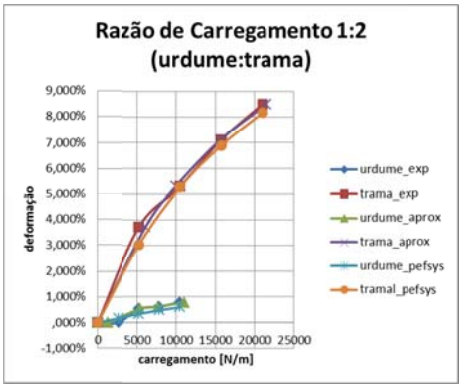


Figura 30: Calibração $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+08	[N/m²]
nu	0,00	
a	1,895E+05	[N/m]
b	4,627E+04	[N/m]
c	3,768E+04	[N/m]
h	2,542E+07	[N/m]
k	-8,747E+07	[N/m]
l	6,432E+07	[N/m]
m	-3,290E+06	[N/m]
n	2,695E+06	[N/m]





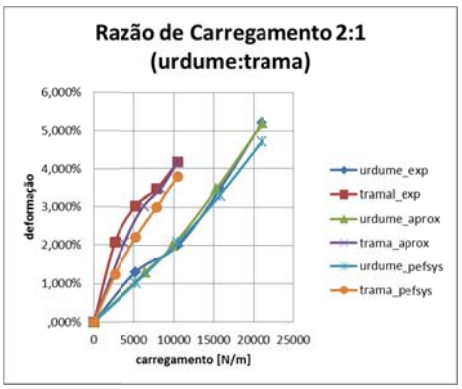
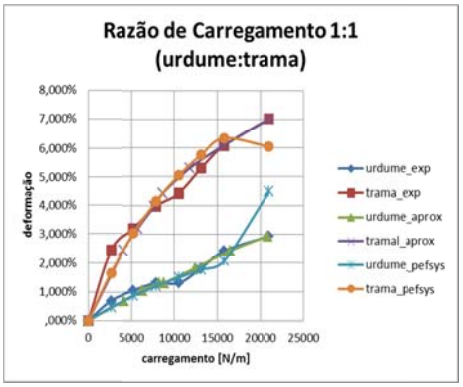
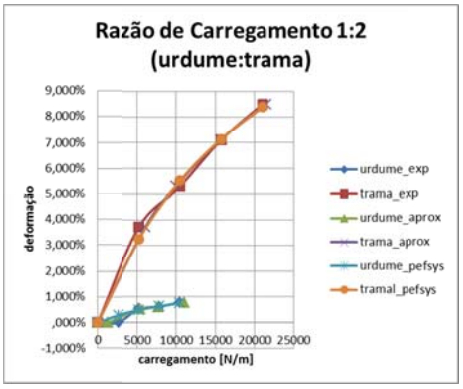


Figura 31: Calibração $E = 1 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+03	[N/m²]
nu	0,15	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





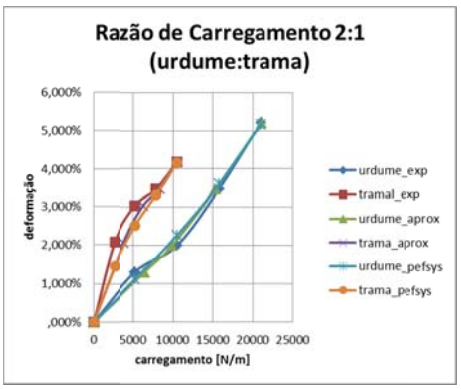
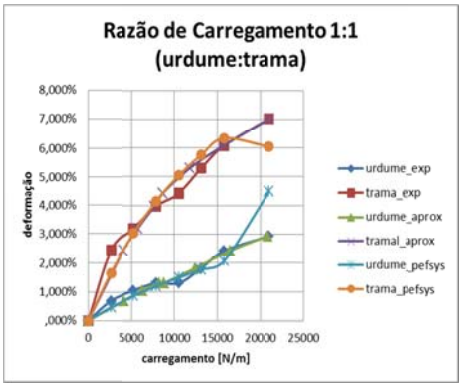
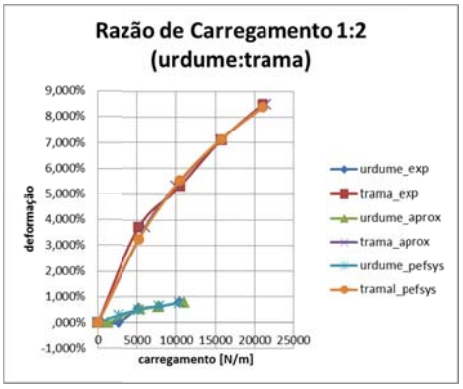


Figura 32: Calibração $E = 1 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	2,000E+03	[N/m²]
nu	0,15	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





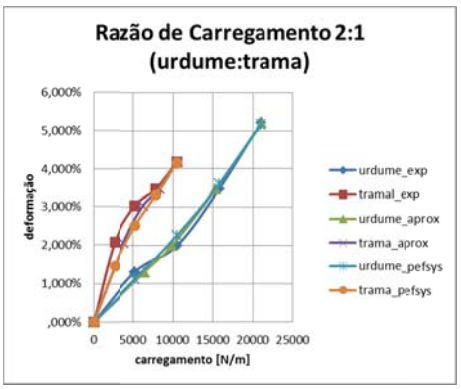
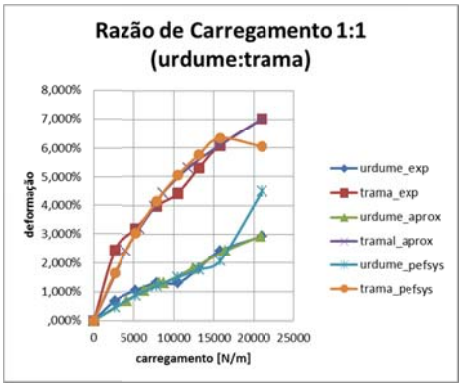
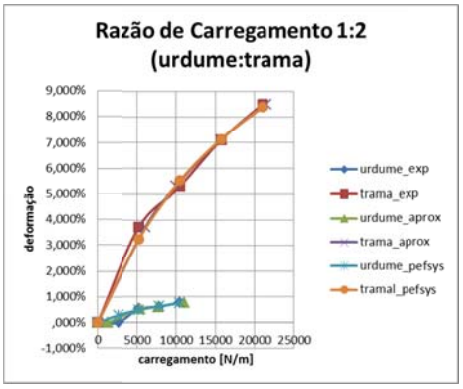


Figura 33: Calibração $E = 2 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	5,000E+03	[N/m²]
ν	0,15	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





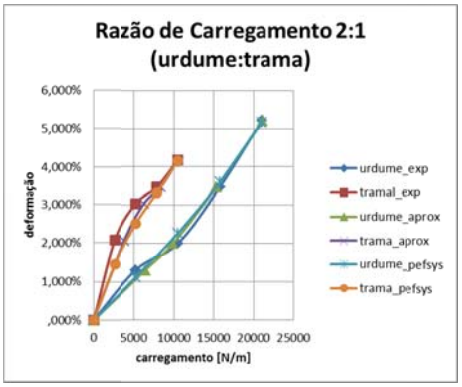
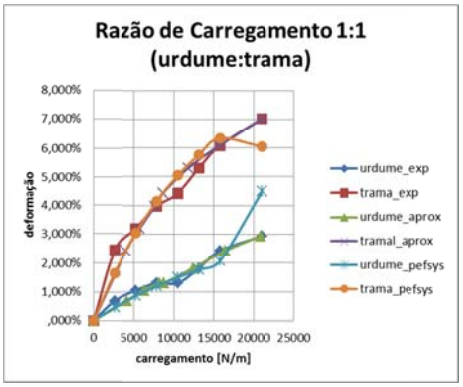
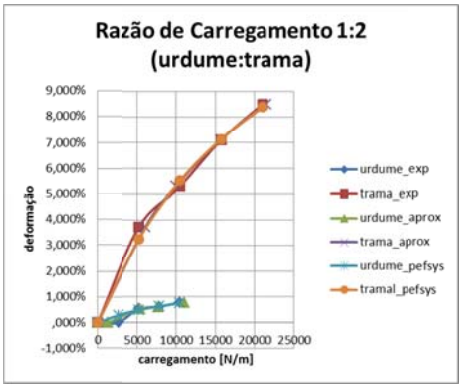


Figura 34: Calibração $E = 5 \times 10^3 \mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	1,000E+04	[N/m²]
ν	0,15	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





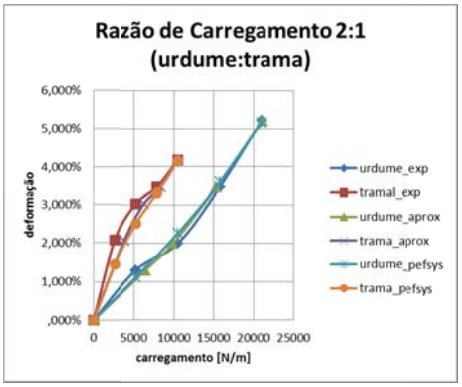
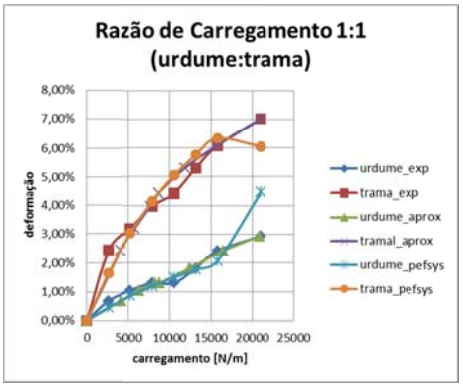
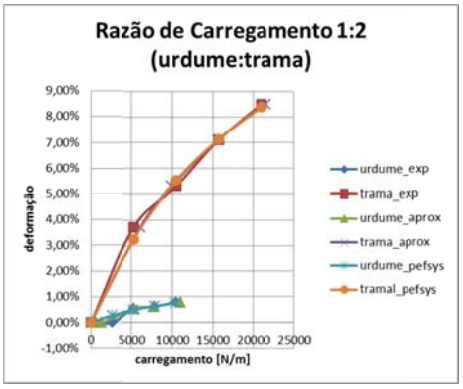


Figura 35: Calibração $E = 1 \times 10^4\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	1,000E+05	[N/m²]
ν	0,15	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,981E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





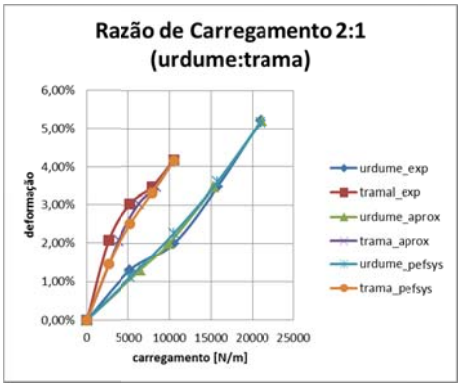
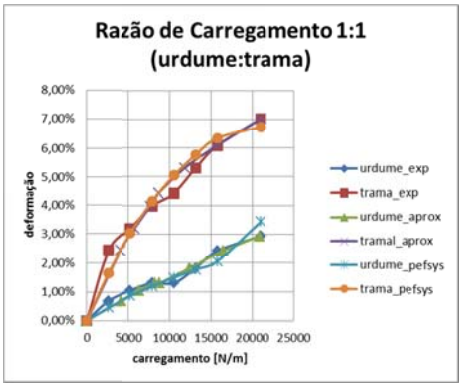
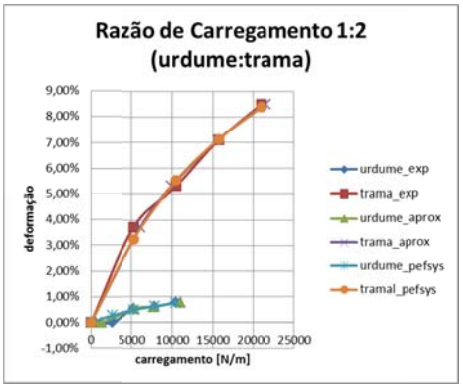


Figura 36: Calibração $E = 1 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	1,000E+06	[N/m²]
ν	0,15	
a	2,132E+05	[N/m]
b	6,959E+04	[N/m]
c	3,805E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,544E+06	[N/m]





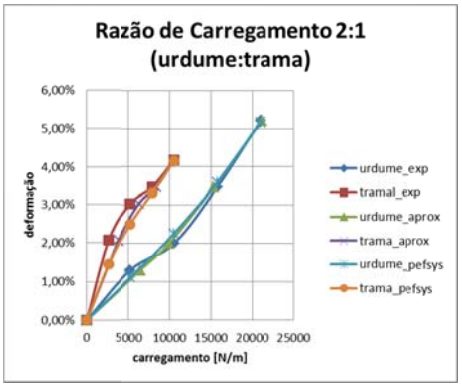
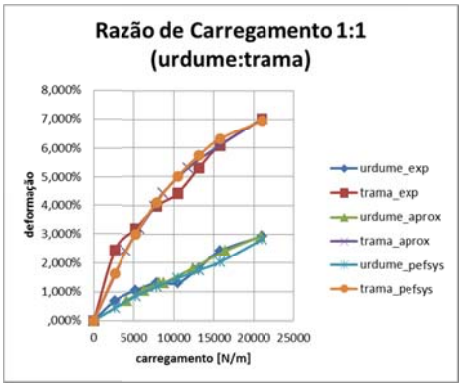
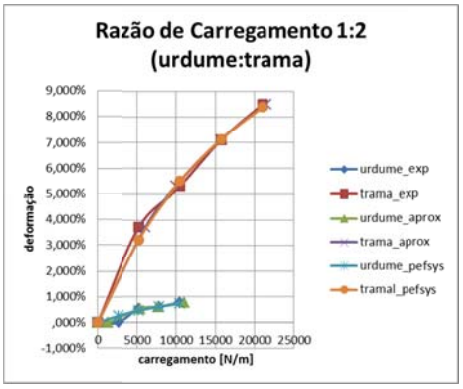


Figura 37: Calibração $E = 1 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
ν	0,15	
a	2,110E+05	[N/m]
b	6,743E+04	[N/m]
c	3,733E+04	[N/m]
h	2,517E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,330E+06	[N/m]
n	2,558E+06	[N/m]





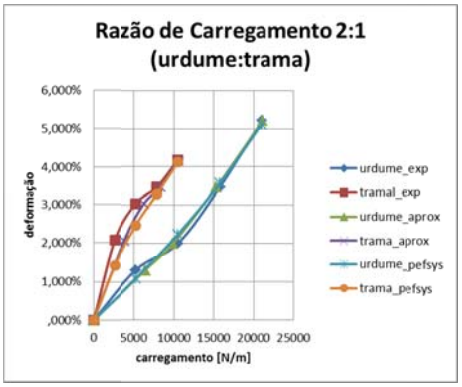
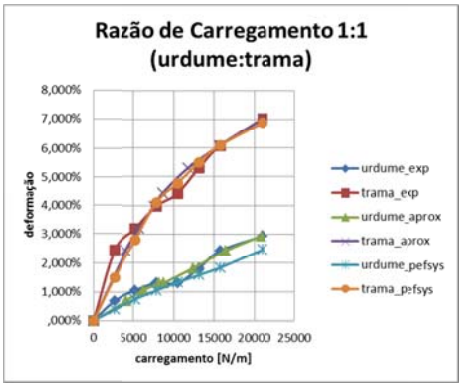
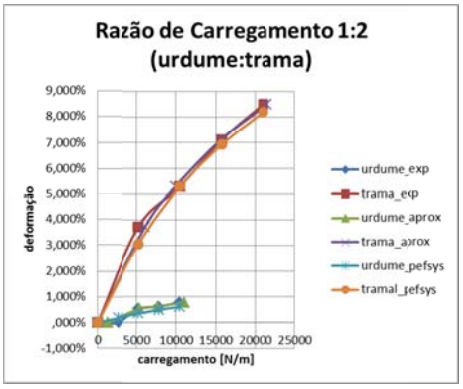


Figura 38: Calibração $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	1,000E+08	[N/m²]
ν	0,15	
a	1,890E+05	[N/m]
b	4,577E+04	[N/m]
c	3,008E+04	[N/m]
h	2,542E+07	[N/m]
k	-8,745E+07	[N/m]
l	6,435E+07	[N/m]
m	-3,270E+06	[N/m]
n	2,702E+06	[N/m]





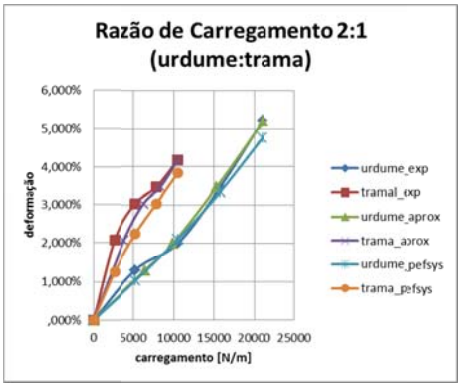
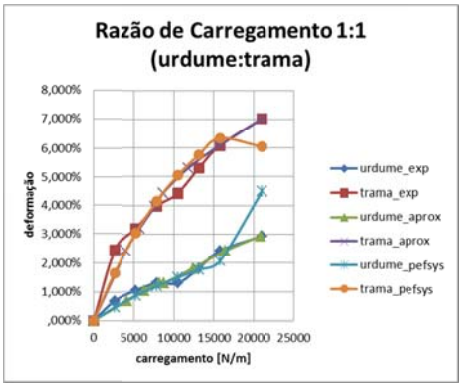
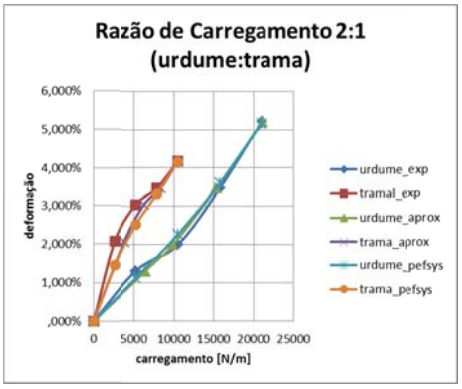


Figura 39: Calibração $E = 1 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0{,}15$

Parâmetros		
E	1,000E+03	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





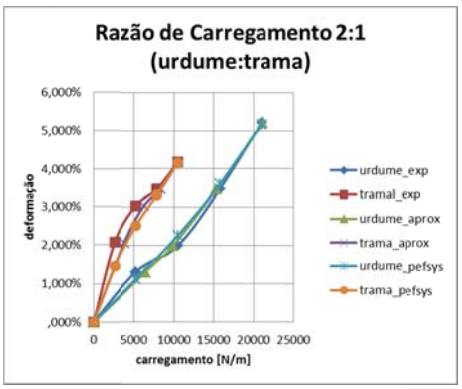
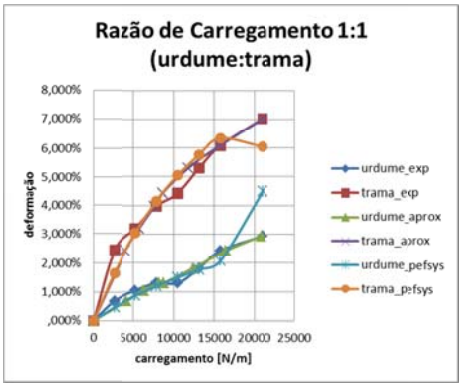
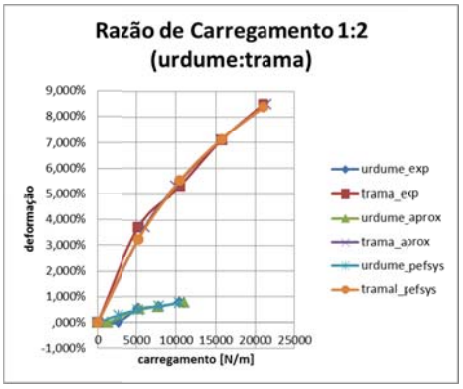


Figura 40: Calibração $E = 1 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	2,000E+03	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





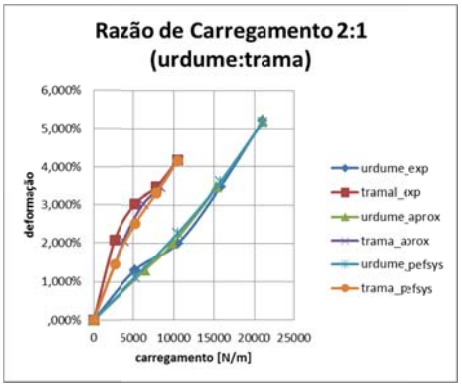
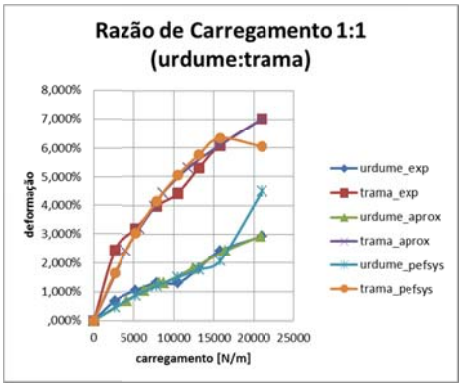
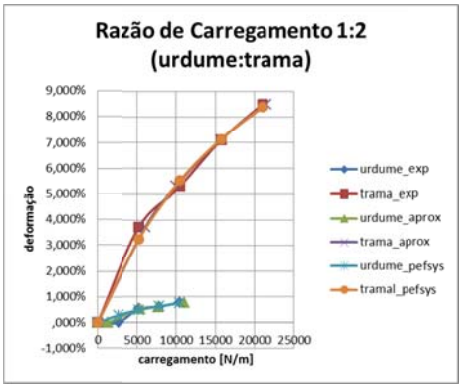


Figura 41: Calibração $E = 2 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	5,000E+03	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





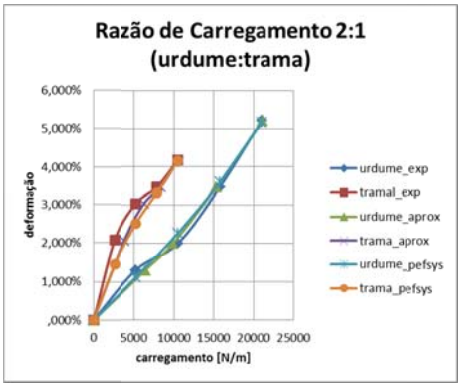
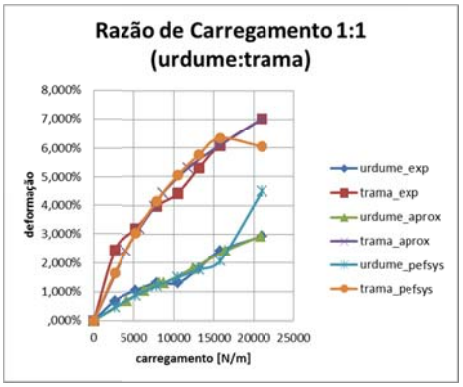
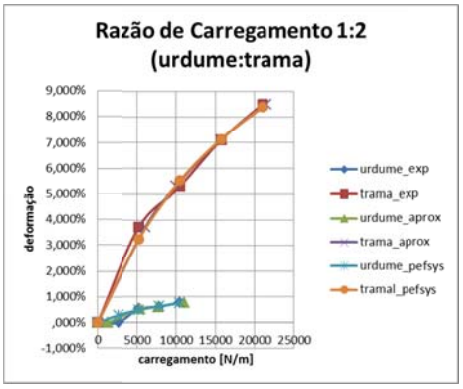


Figura 42: Calibração $E = 5 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	1,000E+04	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





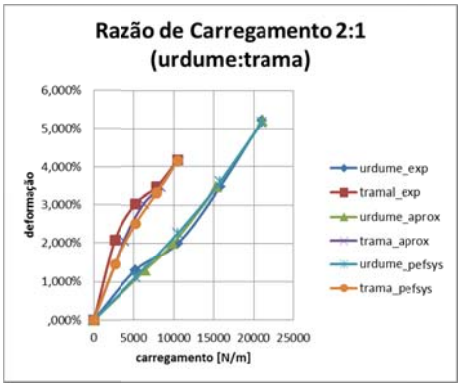
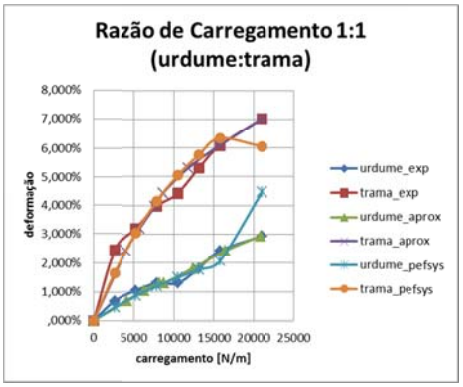
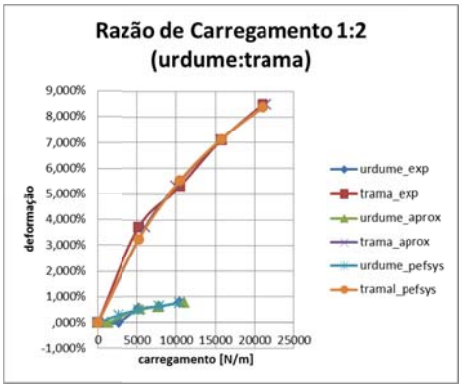


Figura 43: Calibração $E = 1 \times 10^4\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	1,000E+05	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,981E+04	[N/m]
c	3,812E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





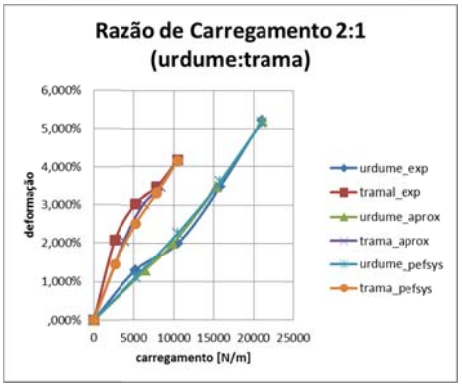
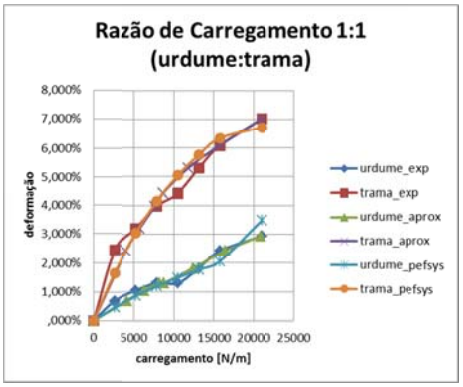
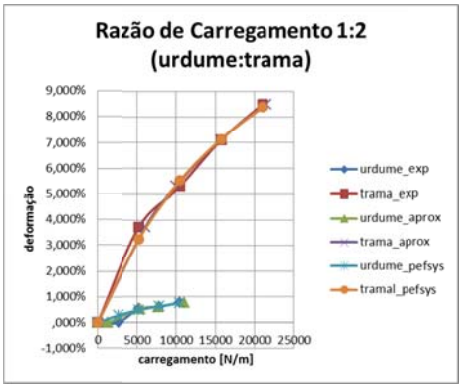


Figura 44: Calibração $E = 1 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	1,000E+06	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,131E+05	[N/m]
b	6,958E+04	[N/m]
c	3,797E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,335E+06	[N/m]
n	2,544E+06	[N/m]





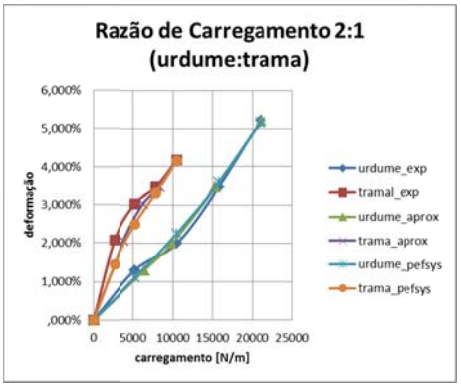
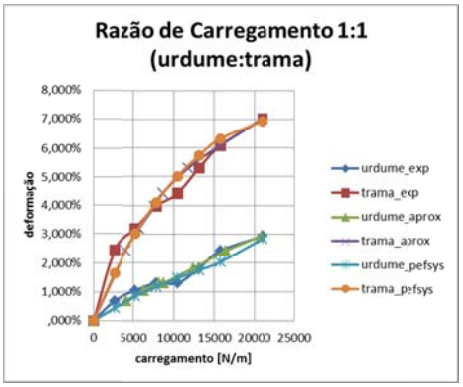
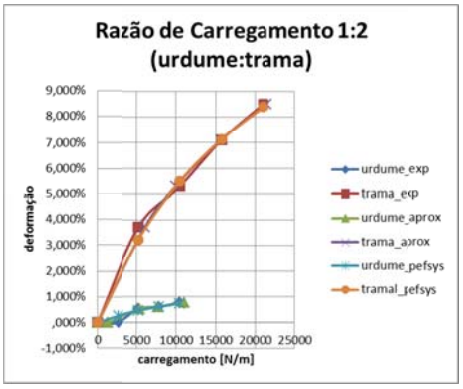


Figura 45: Calibração $E = 1 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
ν	0,30	
a	2,108E+05	[N/m]
b	6,727E+04	[N/m]
c	3,648E+04	[N/m]
h	2,518E+07	[N/m]
k	-8,742E+07	[N/m]
l	6,428E+07	[N/m]
m	-3,322E+06	[N/m]
n	2,561E+06	[N/m]





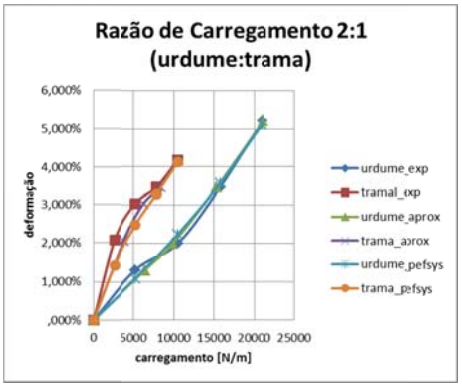
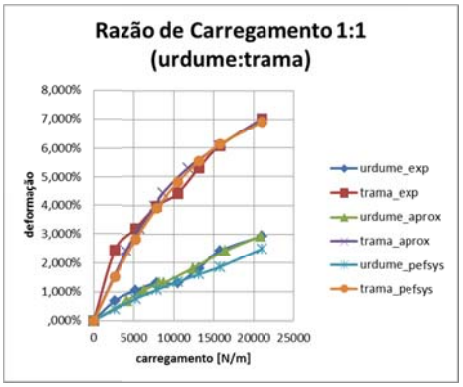
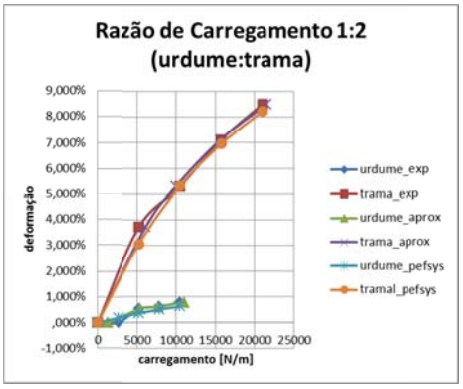


Figura 46: Calibração $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	1,000E+08	[N/m²]
ν	0,30	
a	1,874E+05	[N/m]
b	4,417E+04	[N/m]
c	2,163E+04	[N/m]
h	2,544E+07	[N/m]
k	-8,735E+07	[N/m]
l	6,443E+07	[N/m]
m	-3,195E+06	[N/m]
n	2,726E+06	[N/m]





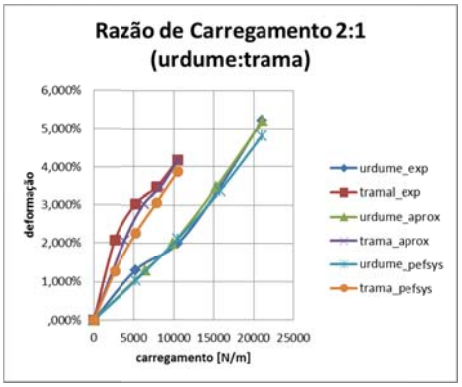
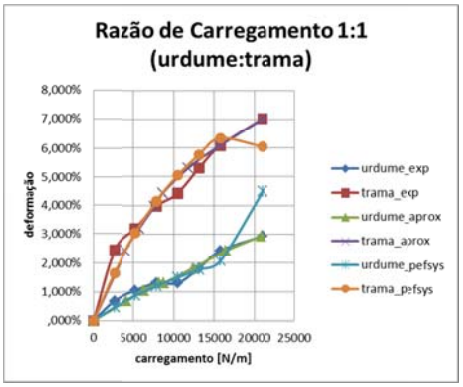
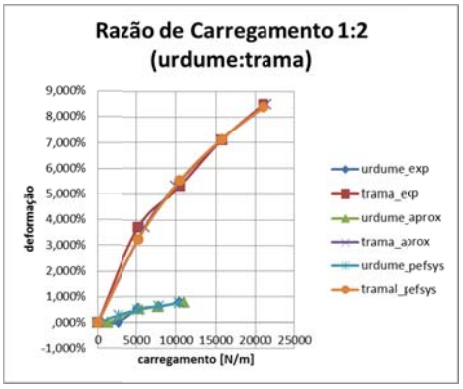


Figura 47: Calibração $E = 1 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,30$

Parâmetros		
E	1000,00	[N/m²]
ν	0,45	
a	213401,51	[N/m]
b	69832,48	[N/m]
c	38133,14	[N/m]
h	25145795,92	[N/m]
k	-87428219,41	[N/m]
l	64265962,75	[N/m]
m	-3336436,76	[N/m]
n	2542259,23	[N/m]





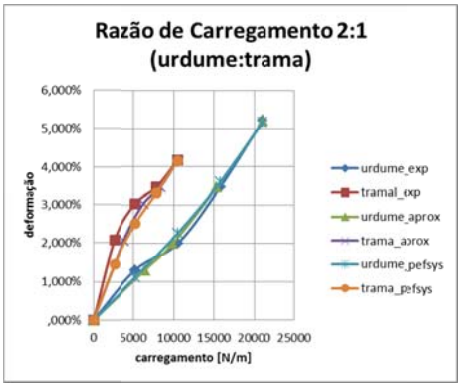
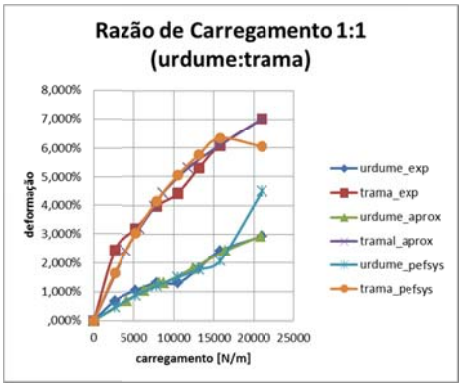
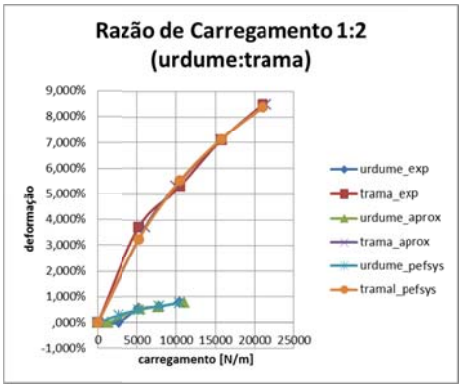


Figura 48: Calibração $E = 1 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	2,000E+03	[N/m²]
ν	0,45	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





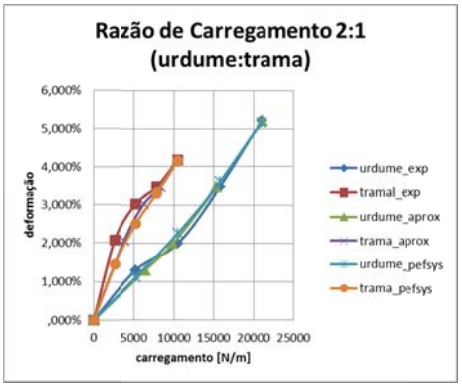
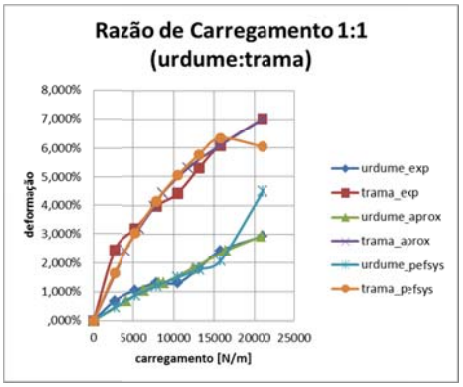
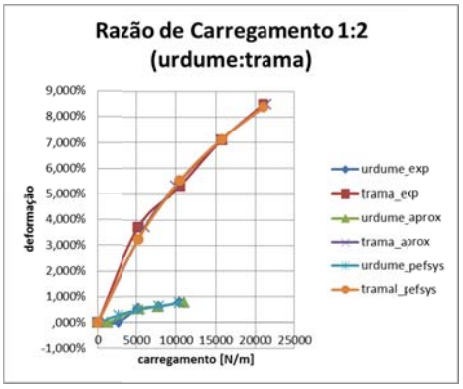


Figura 49: Calibração $E = 2 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	5,000E+03	[N/m²]
ν	4,500E-01	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





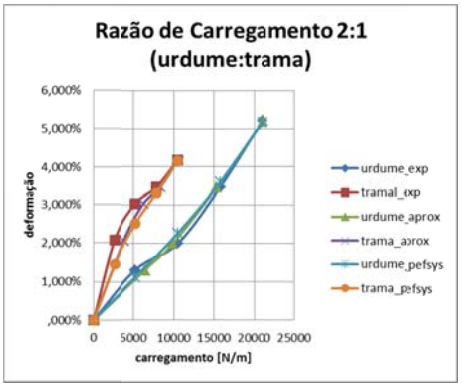
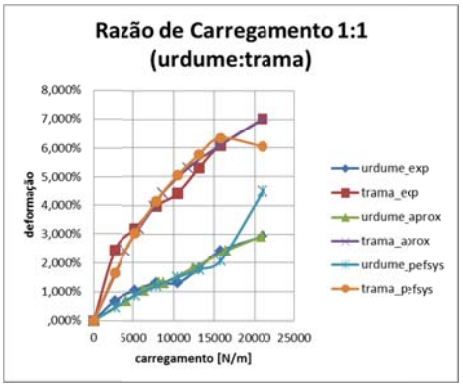
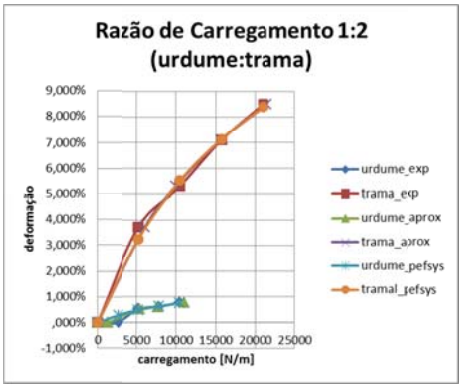


Figura 50: Calibração $E = 5 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+04	[N/m²]
ν	0,45	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,983E+04	[N/m]
c	3,813E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





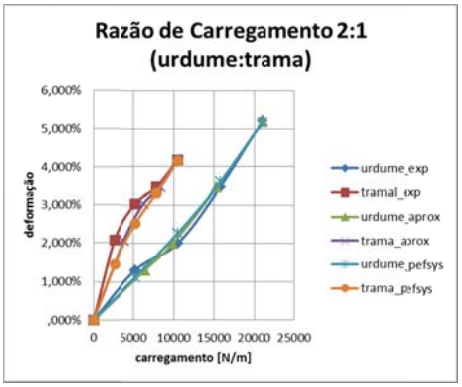
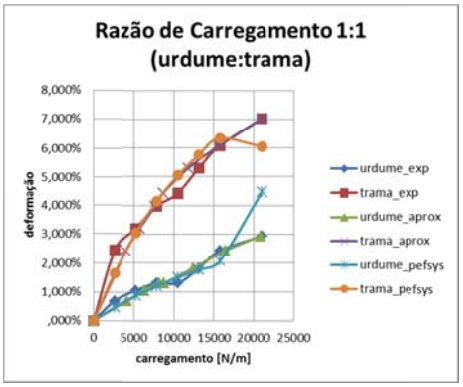
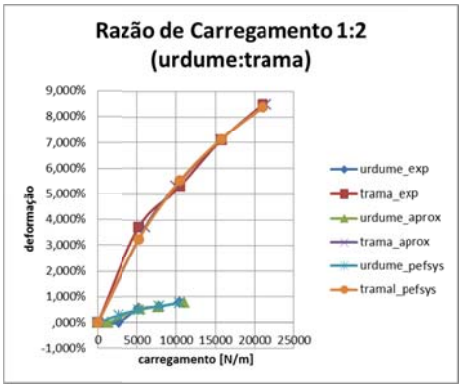


Figura 51: Calibração $E = 5 \times 10^4 \, \mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+05	[N/m²]
ν	0,45	
a	2,134E+05	[N/m]
b	6,980E+04	[N/m]
c	3,811E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,743E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,336E+06	[N/m]
n	2,542E+06	[N/m]





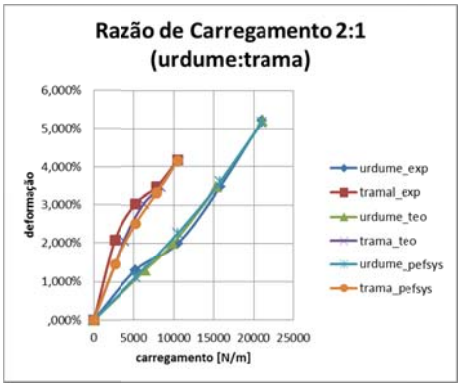
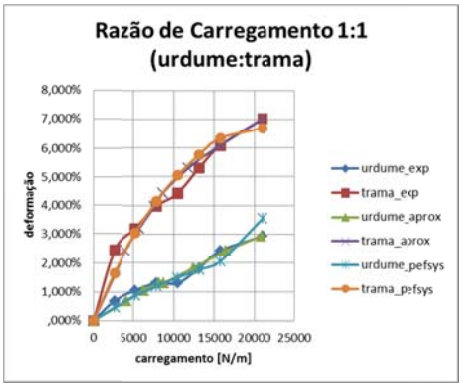
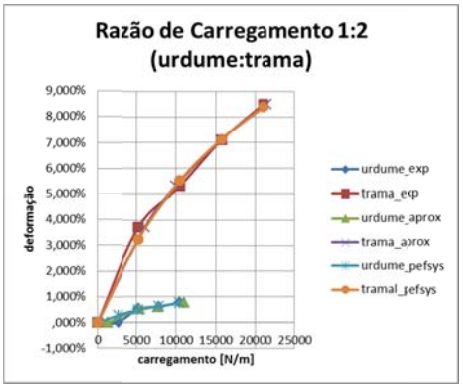


Figura 52: Calibração $E = 1 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+06	[N/m²]
ν	0,45	
a	2,131E+05	[N/m]
b	6,954E+04	[N/m]
c	3,786E+04	[N/m]
h	2,515E+07	[N/m]
k	-8,742E+07	[N/m]
l	6,427E+07	[N/m]
m	-3,333E+06	[N/m]
n	2,545E+06	[N/m]





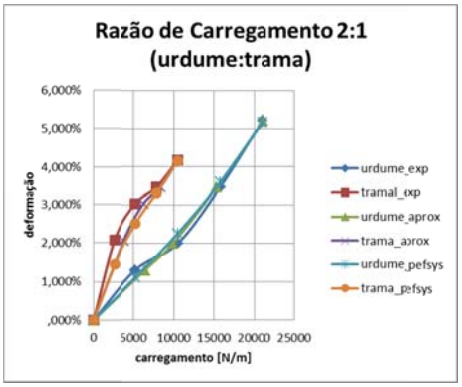
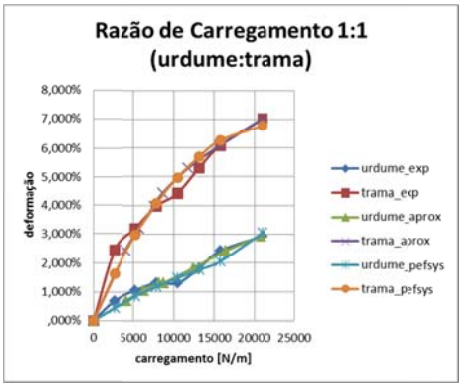
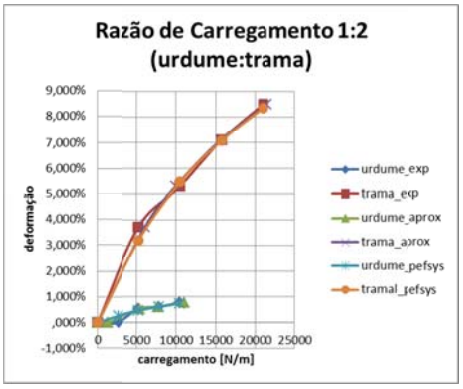


Figura 53: Calibração $E = 1 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
ν	0,45	
a	2,105E+05	[N/m]
b	6,695E+04	[N/m]
c	3,541E+04	[N/m]
h	2,518E+07	[N/m]
k	-8,740E+07	[N/m]
l	6,430E+07	[N/m]
m	-3,304E+06	[N/m]
n	2,566E+06	[N/m]





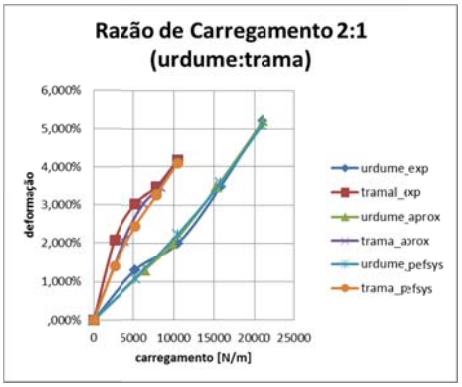
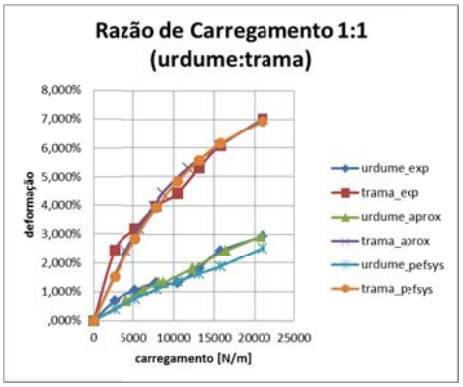
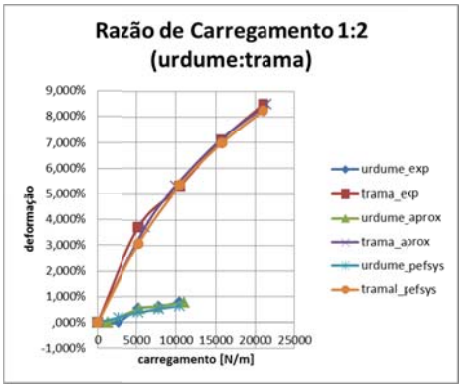


Figura 54: Calibração $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+08	[N/m²]
ν	0,45	
a	1,842E+05	[N/m]
b	4,105E+04	[N/m]
c	1,091E+04	[N/m]
h	2,547E+07	[N/m]
k	-8,710E+07	[N/m]
l	6,464E+07	[N/m]
m	-3,013E+06	[N/m]
n	2,779E+06	[N/m]





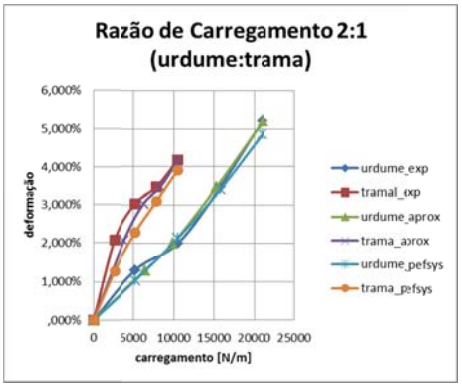
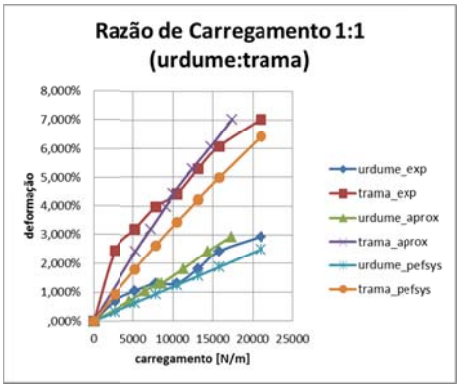
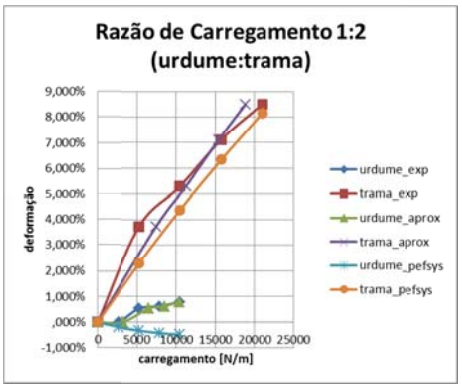


Figura 55: Calibração $E = 1 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Anexo B

Parâmetros		
E	1,000E+03	[N/m²]
ν	0,00	
$\alpha 1$	8,811E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,610E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,252E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,215E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,113E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,579E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,553E+07	[N/m]





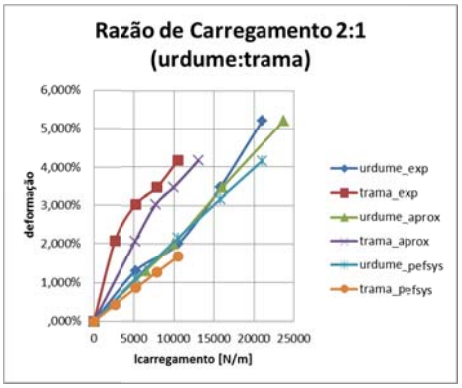
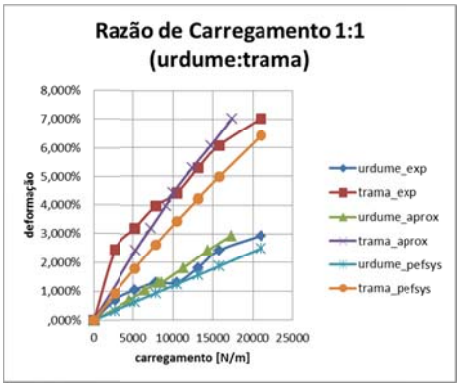
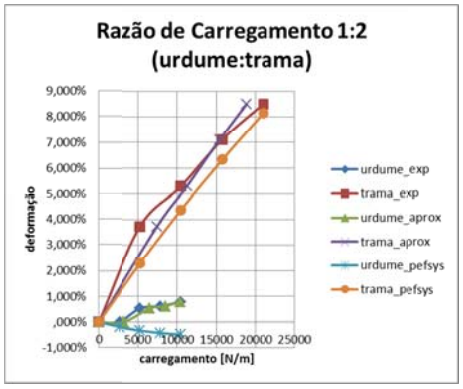


Figura 56: Calibração $E = 1 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	2,000E+03	[N/m²]
ν	0,000E+00	
$\alpha 1$	8,872E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,608E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,249E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,229E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,105E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,524E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,494E+07	[N/m]





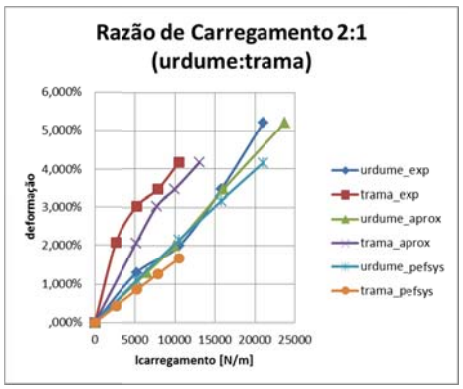
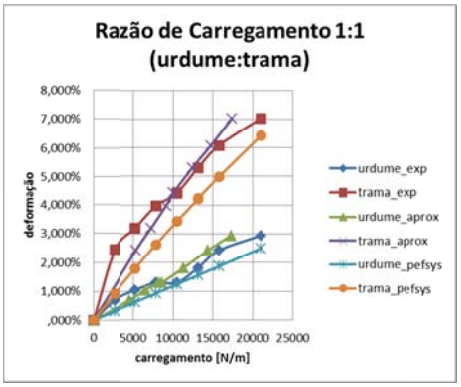
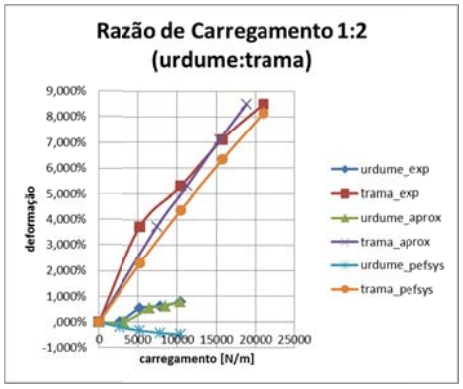


Figura 57: Calibração $E = 2 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	5,000E+03	[N/m²]
ν	0,00	
$\alpha 1$	8,836E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,617E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,250E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,227E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,141E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,515E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,521E+07	[N/m]





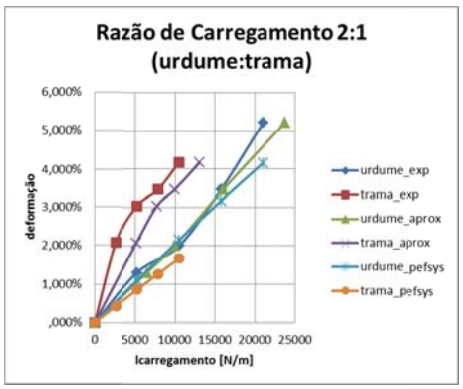
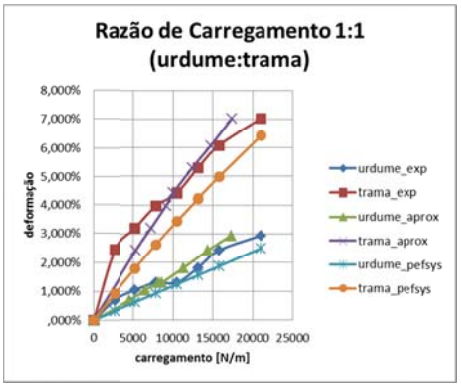
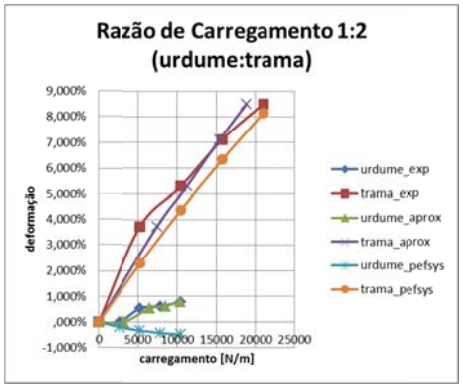


Figura 58: Calibração $E = 5 \times 10^3\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+04	[N/m²]
ν	0,00	
$\alpha 1$	8,797E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,615E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,254E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,204E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,067E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,609E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,563E+07	[N/m]





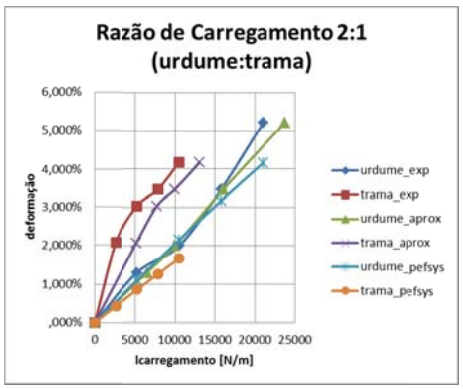
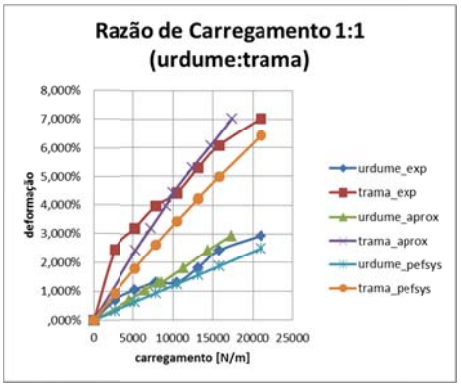
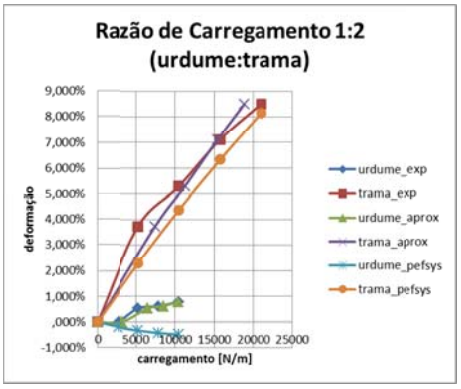


Figura 59: Calibração $E = 1 \times 10^4\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+05	[N/m²]
ν	0,00	
$\alpha 1$	8,770E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,698E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,253E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,184E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,132E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,513E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,506E+07	[N/m]





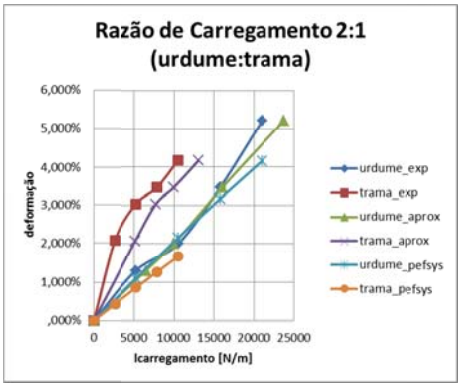
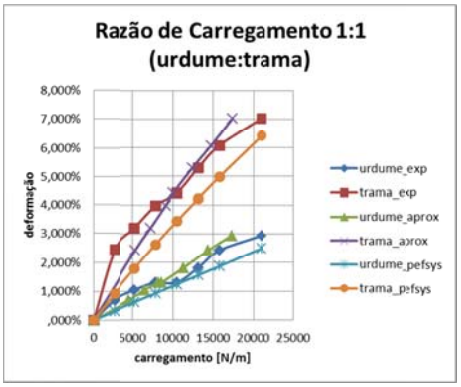
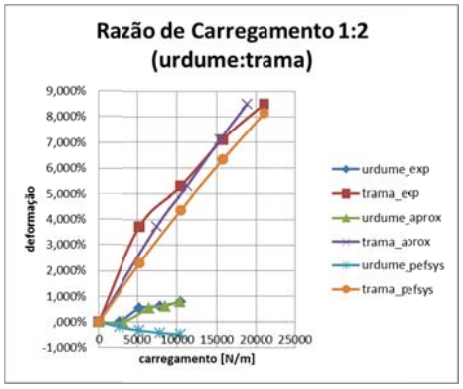


Figura 60: Calibração $E = 1 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+06	[N/m²]
ν	0,00	
$\alpha 1$	8,851E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,613E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,248E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,204E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,086E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,517E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,511E+07	[N/m]





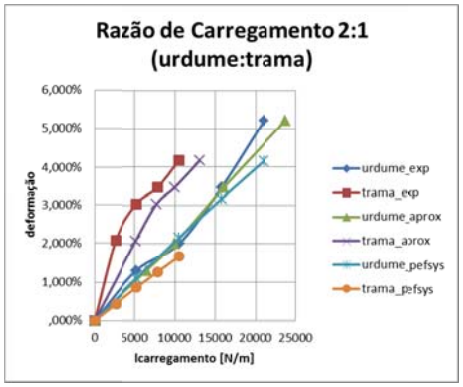
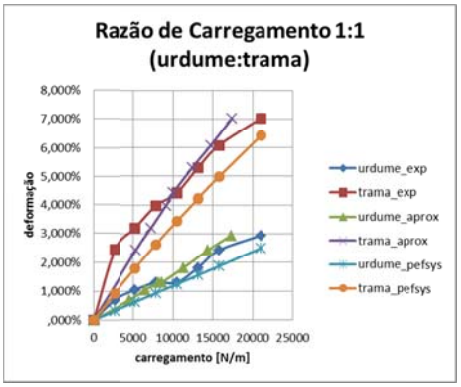
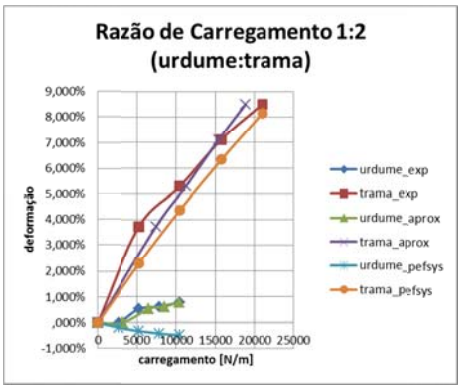


Figura 61: Calibração $E = 1 \times 10^5\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
ν	0,000E+00	
$\alpha 1$	8,790E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,597E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,227E+08	[N/m]
$\mu 2$	5,985E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,152E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,522E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,587E+07	[N/m]





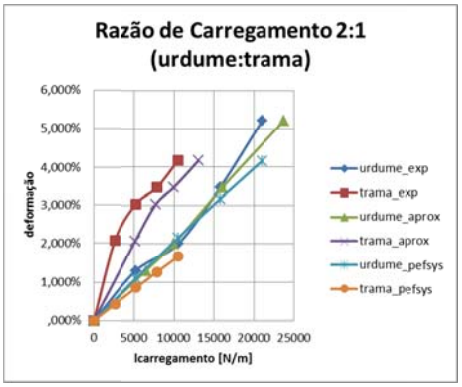
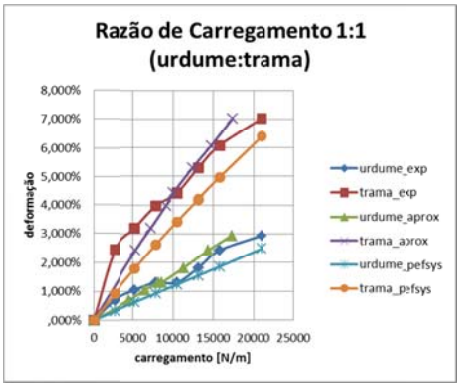
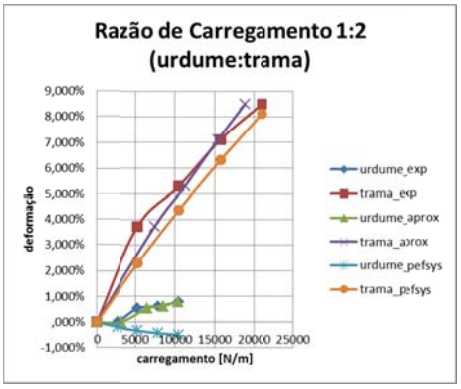


Figura 62: Calibração $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

Parâmetros		
E	1,000E+08	[N/m²]
ν	0,00	
$\alpha 1$	8,362E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,308E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,038E+08	[N/m]
$\mu 2$	4,005E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,572E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,023E+07	[N/m]
$\beta 12$	3,305E+07	[N/m]





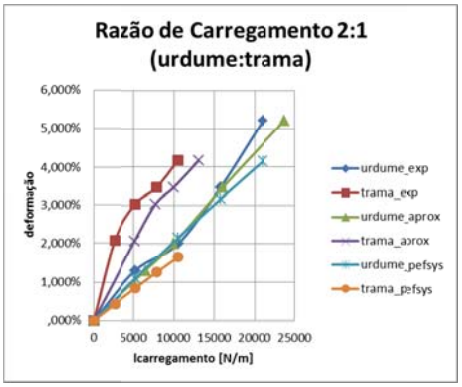
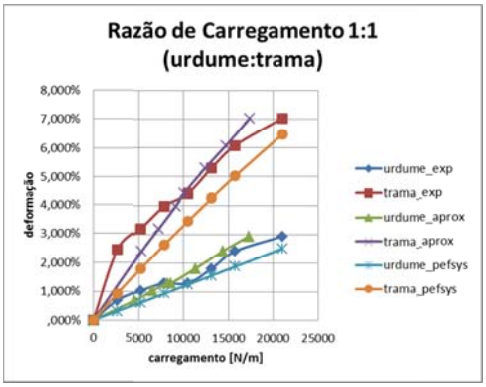
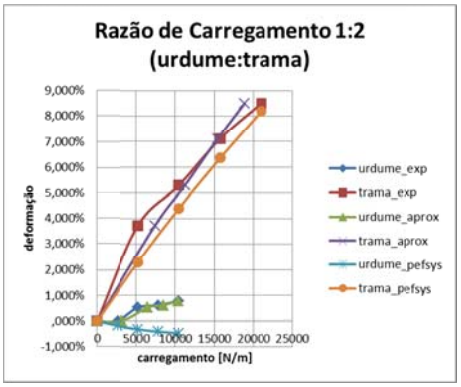


Figura 63: Calibração $E = 1 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,00$

As séries de calibrações para $\nu = 0{,}15$, $\nu = 0{,}30$ repetem os resultados apresentados para a série gerada com $\nu = 0{,}00$. Utilizando $\nu = 0{,}45$, a série continua repetindo os resultados das séries anteriores, exceto para $E = 1 \times 10^8$ N/m^2 . Observe a seguir os resultados das três ultimas calibrações desta série:

Parâmetros		
E	1,000E+06	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	8,711E+07	[N/m]
$\alpha 2$	5,549E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,248E+08	[N/m]
$\mu 2$	6,156E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,086E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,556E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,404E+07	[N/m]





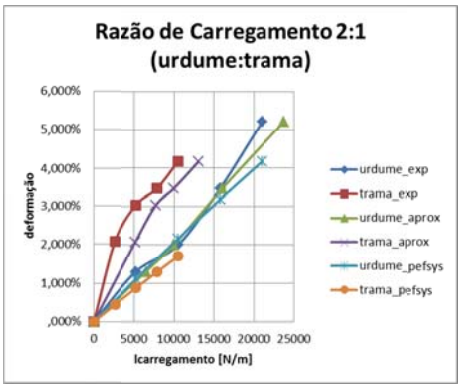
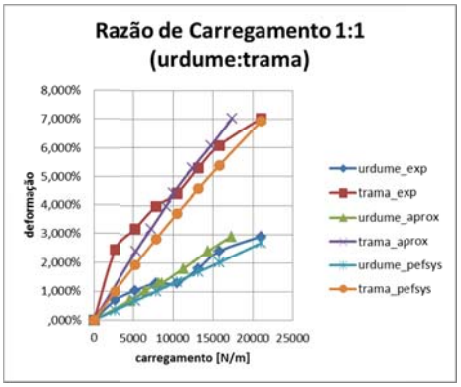
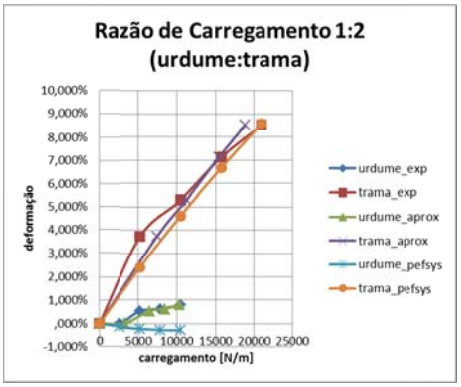


Figura 64: Calibração $E = 1 \times 10^6\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	7,750E+07	[N/m]
$\alpha 2$	4,500E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,211E+08	[N/m]
$\mu 2$	5,870E+07	[N/m]
$\beta 1$	3,065E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,384E+07	[N/m]
$\beta 12$	1,621E+07	[N/m]





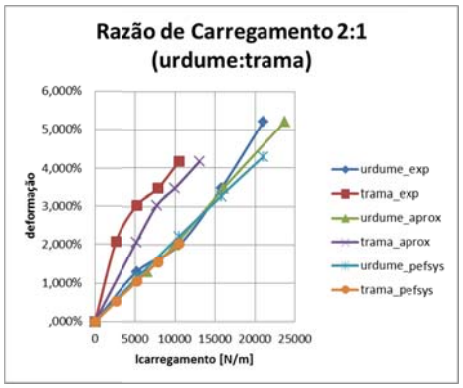
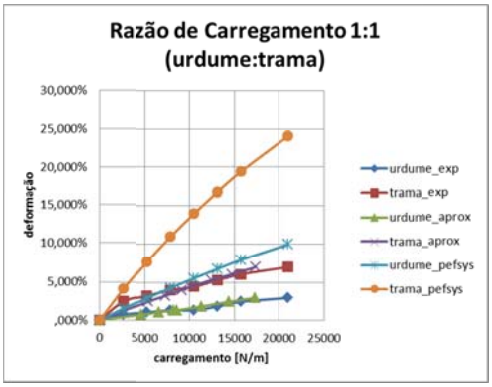
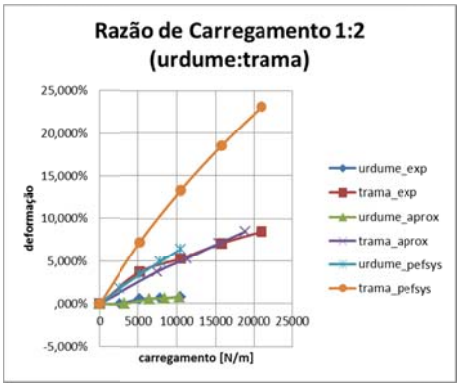


Figura 65: Calibração $E = 1 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	1,000E+08	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	-2,172E+07	[N/m]
$\alpha 2$	-5,321E+07	[N/m]
$\mu 1$	8,762E+07	[N/m]
$\mu 2$	2,436E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,170E+07	[N/m]
$\beta 2$	6,229E+06	[N/m]
$\beta 12$	-6,567E+07	[N/m]





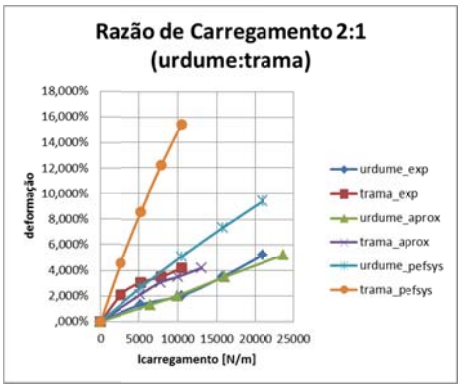
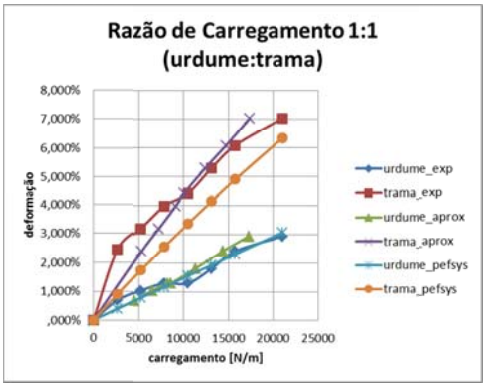
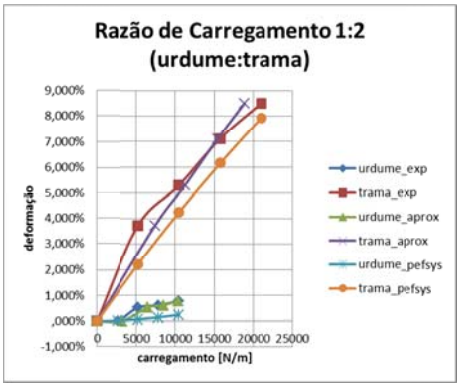


Figura 66: Calibração $E = 1 \times 10^8\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Observando no **Anexo** B as três últimas calibrações para $\nu = 0,45$, pode-se notar que, até as curvas obtidas com $E = 1 \times 10^7$ N/m^2, não houve alteração significativa e o comportamento obtido não está de acordo com os dados experimentais. Já para $E = 1 \times 10^8$ N/m^2 ocorreu uma alteração brusca no comportamento. Desta forma, tornou-se necessário uma averiguação mais cautelosa no intervalo entre $E = 1 \times 10^7$ N/m^2 e $E = 1 \times 10^8$ N/m^2, refinando este intervalo. O novos valores de módulo de elasticidade utilizados para o refinamento foram $E = \left\{2,50,\ 3,75,\ 5,00,\ 6,25,\ 7,50\right\} \times 10^7$ N/m^2, $\nu = 0,45$, cujos resultados também se encontram no **Anexo B**.

Parâmetros		
E	2,500E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	6,066E+07	[N/m]
$\alpha 2$	2,892E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,157E+08	[N/m]
$\mu 2$	5,268E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,904E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,317E+07	[N/m]
$\beta 12$	2,577E+06	[N/m]





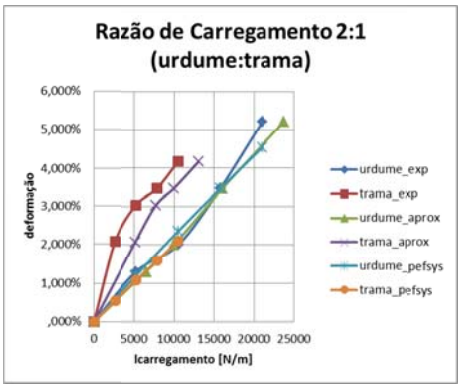
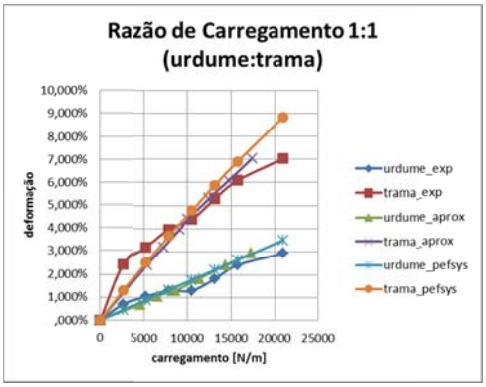
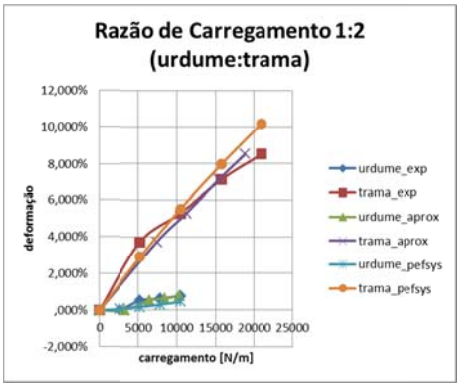


Figura 67: Calibração $E = 2,50 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	3,750E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	4,724E+07	[N/m]
$\alpha 2$	1,508E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,109E+08	[N/m]
$\mu 2$	4,807E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,752E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,187E+07	[N/m]
$\beta 12$	-8,956E+06	[N/m]





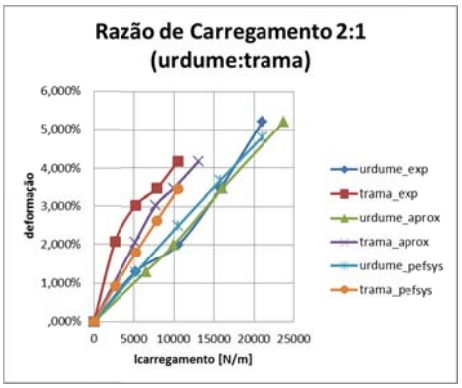
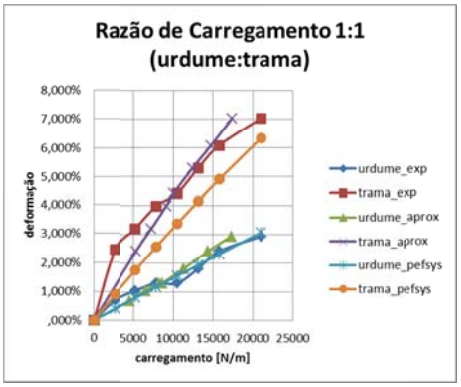
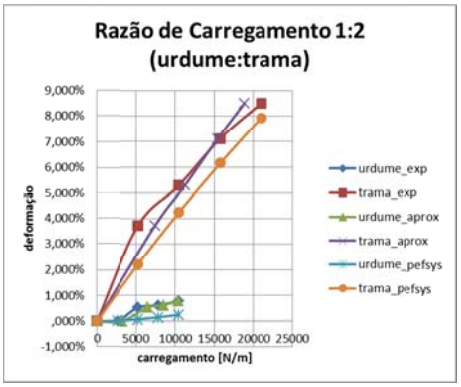


Figura 68: Calibração $E = 3,75 \times 10^7$ N/m^2 - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	5,000E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	3,332E+07	[N/m]
$\alpha 2$	1,487E+06	[N/m]
$\mu 1$	1,064E+08	[N/m]
$\mu 2$	4,344E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,608E+07	[N/m]
$\beta 2$	1,016E+07	[N/m]
$\beta 12$	-2,024E+07	[N/m]





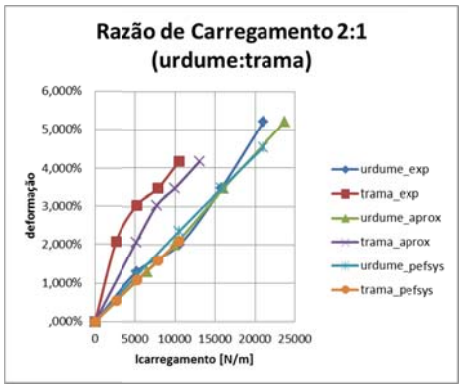
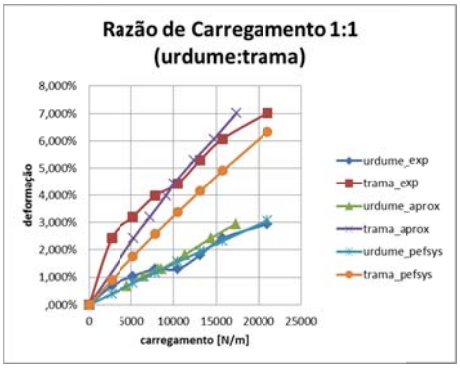
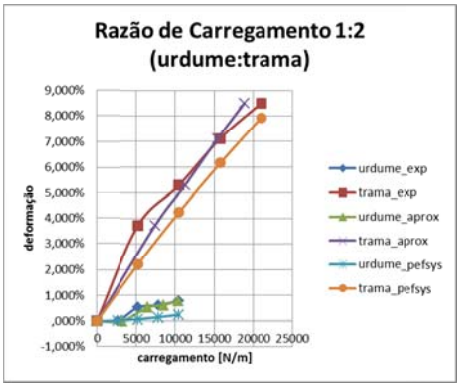


Figura 69: Calibração $E = 5,00 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	6,250E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	1,940E+07	[N/m]
$\alpha 2$	-1,217E+07	[N/m]
$\mu 1$	1,017E+08	[N/m]
$\mu 2$	3,857E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,533E+07	[N/m]
$\beta 2$	9,544E+06	[N/m]
$\beta 12$	-3,145E+07	[N/m]





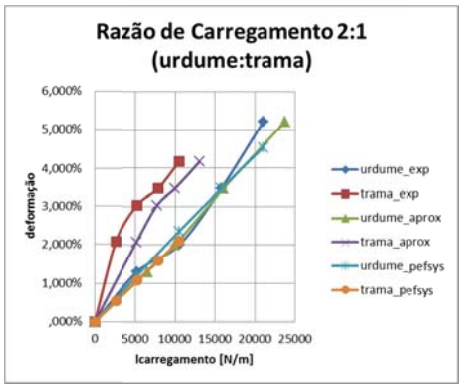
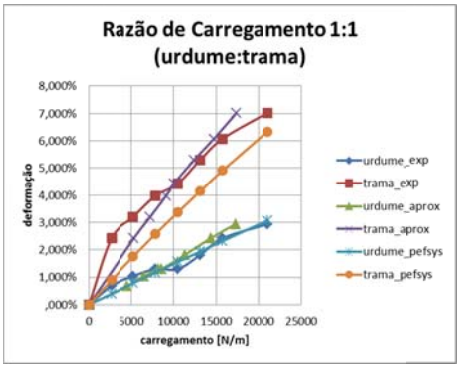
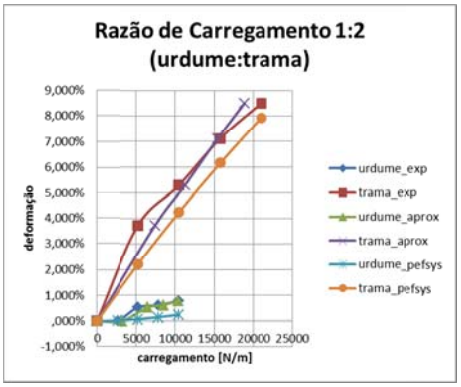


Figura 70: Calibração $E = 6,25 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

Parâmetros		
E	7,500E+07	[N/m²]
ν	0,45	
$\alpha 1$	5,370E+06	[N/m]
$\alpha 2$	-2,567E+07	[N/m]
$\mu 1$	9,714E+07	[N/m]
$\mu 2$	3,380E+07	[N/m]
$\beta 1$	2,425E+07	[N/m]
$\beta 2$	8,240E+06	[N/m]
$\beta 12$	-4,271E+07	[N/m]





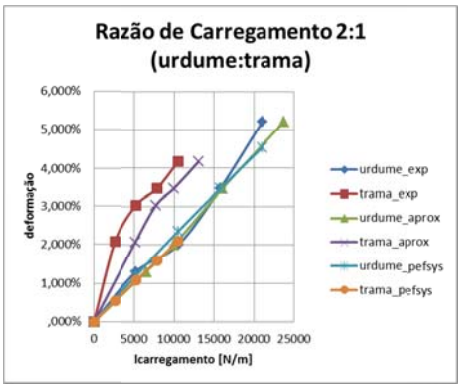


Figura 71: Calibração $E = 7,50 \times 10^7\,\mathrm{N/m^2}$ - $\nu = 0,45$

7. Referências Bibliográficas

[1] PIMENTA, P. M. On a geometrically-exact finite-strain shell model. *Proceedings of the 3rd Pan-Americam Congress on Applied Mechanics, III PACAM* 1993

[2] CAMPELLO, E. M. B. *Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações:* teoria e implementação em elementos finitos. Tese de doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil : 2005.

[3] PIMENTA, P. M., CAMPELLO, E. M. B., WRIGGERS, P. A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element. *Comput. Mech,* 2004; **34 (3)**:181-193

[4] CAMPELLO, E. M. B., PIMENTA, P. M., WRIGGERS, P. A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation. *Comput. Mech.* 2003; **31(6)**:505-518

[5] OLIVEIRA, I. P. *Análise não-linear de membranas:* ortotropia e enrugamento. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil : 2006.

[6] SOUZA, D. C. B. *Sobre a busca de superfícies minimais e seu emprego nas estruturas de membrana*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil : 2008.

[7] VALDES, J. G. *Nonlinear analysis of orthotropic membrane and shell structures including fluid-structure interaction.* Phd Thesis, Universitat Politécnica de Catalunya, Barcelona, Spain : 2007.

[8] OLIVEIRA, I.P., CAMPELLO, E. M. B., PIMENTA P. M. *Finite element analysis of the wrinkling of orthotropic membranes*. III European Conference on Computational Mechanics Solids, Structures and Coupled Problems in Engineering, Lisboa, Portugal : 2006.

[9] ITSKOV, I., BASAR,Y. generalized orthotropic hyperelastic constitutive model for fiber. *Consitutive Models for Rubber* 1999:107-115

[10] ITSKOV, I. A generalized orthotropic hyperelastic material model with application to incompressible. *Int. J. Numer. Meth. Eng* 50(2001):1777-1799

[11] LÜRDING, D. *Modellierung großer Deformationen in orthotropen, hyperelastischen*. Ph.D. thesis, Ruhr-Universität Bochum, Institut f ür Mechanik : 2001.

[12] BONET, J., BURTON, A. A simple orthotropic, transversely isotropic hyper elastic constitutive. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng* 162 (1998):151-164

[13] WEISS,J.A., MAKER, B. N., GOVINDJEE, S. Finite element implementation of incompressible, transversely isotropic elasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng* 135 (1996):107-128

[14] HOLZAPFEL, G. A., GASSER, T.C. E OGDEN, R. W. A new constitutive framework for arterial wall mechanics and a comperative study of material models. *Journal of Elasticity* 61 (2000):1-48

[15] RÜTER, M., STEIN, E. Analysis, finite element computation and error estimation in transversely isotropic nearly incompressible elasticity. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.* 190 (2000):519-542

[16] SPENCER, A. J. M. Continuum theory of the mechanics of fiber-reinforced composites. *CISM Course and Lectures No. 282. International Center for Mechanical Science,* 1984

[17] BOEHLER, J. P.. Applications of tensor functions in solid mechanics. *CISM Courses and Lectures No. 292. International Center for Mechanical Science, Springer* 1987

[18] RAIBLE, T. REESE, S., WRIGGERS P. finite element formulation to model the orthotropic non-linearly elastic material behavior of pneumatic membranes. *Math. Mech.* 80 (2000):409-410

[19] REESE.S., RAIBLE, T., WRIGGERS, P.. Finite element modeling of orthotropic material behavior in pneumatic membranes. *Int. J. Sol. Struc.* 38 (2001):9525–9544

[20] REESE, S. Large deformation fe modeling of the orthotropic elastoplastic material behaviour in pneumatic membranes. *In Proceedings of ECCOMAS 2000. European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, Barcelona*

2000

[21] WRIGGERS, P. *Nonlinear finite element methods*. Springer : 2008.

[22] SCHORÖDER, J., NEFF, P. Invariant formulation of hyperelastic transverse isotropy based on polyconvex free energy functions. *International Journal of Solids and Structures* 2002

[23] BALL, J.. Convexity conditions and existence theorems in non-linear elasticity. *Arch. Rat. Mech. Anal.* 63(1977):337–403

[24] RODDEMAN, D. G. *Force transmission in wrinkled membranes*. PHD Thesis, Eindhoven University of Technology : 1987.

[25] SCHOOP, H. TAENZER, L., HORNING, J. Wrinkling of nonlinear membranes. *Comp. Mech.* 29 (2002):68–74

[26] LIU, X., JENKINS C. H., SCHUR, W. W. Fine scale analysis of wrinkled membranes. *Int. J. Comp. Eng. Sci* 1 (2000) :281–298

[27] CHIVANTE, M. R. P. *Avaliação experimental das relações tensão-deformação de um tecido de fibra de vidro recoberto por PTFE*. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo : São Paulo, 2009.

[28] RAIBLE, T. *Concepts for nonlinear orthotropic material modeling with applications to membrane structures*. Doctoral Thesis, Institut für Baumechanik und Numerische Mechanik, Universität Hannover, Hannover : 2003.

[29] ALVIM, R. A. A. *Avaliação experimental de propriedades mecânicas dos tecidos estruturais*. Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil : 2003.

[30] HOUTMAN, R., ORPANA, M. *Materials for Membrane Structures*. disponivel em http://archone.tamu.edu/faculty/anichols/index_files/courses/arch631/NS13-1membrane.pdf, acessado em 30/01/2011 : 2000.

[31] HTTP://WWW.METALICA.COM.BR/PROPRIEDADES-DAS-MANTAS-MAIS-

UTILIZADAS-PARA-TENSOESTRUTURAS/. acessado em 31/01/2011 :

[32] PAULETTI, R. M. O. *História, analise e projeto das estruturas retesadas.* Tese de Livre-Docência, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Brasil : 2003.

[33] RAIBLE, T., TEGELER, K., LÖHNER, S., WRIGGERS, P. Development of a wrinkling algorithm for orthotropic membrane materials. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 2005; **194**:2550-2568

[34] PIMENTA, P. M. *Fundamentos da mecânica dos sólidos e das estruturas*. Apostila do curso de pós-graduação em estruturas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo : 2008.

[35] CIARLET, P. G. *Mathematical Elasticity. Vol. I:* Three-dimensional elasticity. North-Holland, Amsterdam, 1988.

[36] SIMO, J. C., HUGLES, T. R. J. *Computational Elasticity*. Springer-Verlag : New York, 1998.

[37] SCHRÖDER, J. *Theoretische und algorithmische Konzepte zur phänomenoligischen Beschreibung anisotropen Materialverhaltens*. Ph.D. thesis, Universität Hannover, Institut für Mechnanik und Numerische Mechanik : Hannover, 1996.

[38] SHELTER-RITE Architectural Fabrics. *http:* //www.architecturalfabrics.com/downloads/product-data/9032_fabric_test_results.pdf. Accessed in: 10 fev. 2011.

[39] SOBRE o Solver - Excel - Office.com. Avaliable on: <http://office.microsoft.com/pt-br/excel-help/sobre-o-solver-HP005198368.aspx>. Accessed in: 18 jun. 2012.

[40] LASDON, L. S., WAREN, A. D. *GRG2 USER´S GUIDE*. 1997.

[41] DING, H., YANG, B. The modeling and numerical analysis of wrinkled membranes. *Int. J. Numer. Meth. Engng.* 2003:58, 1785-1801

[42] VALDÉS, J. G., MIGUEL, J., OÑATE, E. Nonlinear finite element analysis of orthotropic and prestressed membrane structures. *Fin. Elem. Anal. Design* 2009;

45(**6,7**):395-405