CAROLINA BANKI MARTINS

**ESTUDO DO EFEITO DO ESCORREGAMENTO DOS
CABOS DE BORDA EM ESTRUTURAS DE MEMBRANAS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia

Área de concentração:

Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr.

Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti

São Paulo

2008

CAROLINA BANKI MARTINS

**ESTUDO DO EFEITO DO ESCORREGAMENTO DOS
CABOS DE BORDA EM ESTRUTURAS DE MEMBRANAS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia

**São Paulo
2008**

FICHA CATALOGRÁFICA

Martins, Carolina Banki

Estudo do efeito do escorregamento dos cabos de borda em estruturas de membranas / C.B. Martins. -- São Paulo, 2008. 180 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Estruturas de membranas 2.Cabos I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Agradecimentos

A Deus, sempre em primeiro lugar.

A meus pais, pelo orgulho incondicional e pelo constante apoio durante todas as etapas de minha vida.

Ao professor Ruy Marcelo Pauletti, por todo auxílio e incentivo e por sua tranquilidade e dedicação na orientação deste trabalho.

A meus colegas Daniel e Diogo, que contribuíram de forma imensa nesta jornada, sendo muitas vezes “a luz no fim do túnel”. Sem eles a conclusão desta pesquisa não seria possível.

A meu irmão André, primeiramente pelo exemplo de perseverança, pelo incentivo e apoio sem medidas, pelo carinho e atenção dispensados e por todo auxílio na revisão do texto.

A minha amiga Mara, que trabalhou como duas quando foi preciso e que fez tudo o que estava em seu alcance para que eu pudesse ter a oportunidade de participar deste programa de mestrado.

A empresa Carlos Leal Engenheiros Consultores, em especial ao Eng. Carlos, por ter acreditado em meu potencial e ter investido neste trabalho.

A meu querido marido Leonardo, que não me deixou desistir, incentivando todos os dias, tolerando minha ausência, me amparando nos momentos difíceis e comemorando comigo cada passo, cada vitória.

Obrigada a todos vocês!!!

Resumo

Este trabalho apresenta a implementação computacional do elemento finito de cabo deslizando sem atrito, em ambiente MATLAB®, com a finalidade de modelar os cabos de borda não-aderentes das estruturas de membrana. Este novo elemento foi incluído no programa de análise de estruturas retesadas SATS, já previamente desenvolvido. Esta ferramenta é capaz de gerar resultados em deslocamentos, tensões e deformações em estruturas retesadas. São apresentadas as formulações utilizadas para a análise de estruturas de membrana, como a formulação do Método de Newton-Raphson para a resolução de equações não-lineares, as formulações do Elemento Finito de Trelça e do Elemento Finito de Cabo Ideal. É proposta, neste trabalho, a generalização da formulação do elemento de cabo de três nós para o super-elemento de cabo ideal de “n” nós. São desenvolvidas verificações da eficiência dos elementos finitos de cabo, por meio de exemplos simples de aplicação, nos quais são comparados os resultados obtidos com soluções analíticas. Por fim, é estudado o desempenho dos elementos de cabo, associados a elementos de membrana, por meio da análise da estrutura de cobertura do Memorial dos Povos de Belém do Pará. São comparados os resultados obtidos a partir da implementação das duas formulações apresentadas para os cabos, avaliando a influência da discretização e as diferenças em relação aos resultados obtidos em análises tradicionais usando elementos de trelça. Demonstra-se que a consideração do escorregamento nos cabos de borda é importante para a correta representação das tensões e deslocamentos em estruturas retesadas.

Palavras-chave: Elemento Finito de Cabo, Estruturas de Membrana, Análise de Estruturas.

Abstract

This work presents the implementation of a cable finite element, developed in MATLAB® environment, with the aim of modeling the cables at the boundary of membrane structures. It was added to a software named SATS (System for the Analysis of Taut Structures), which is able to give accurate results on displacements, stress and strains. This work also presents formulations used for the analysis of membrane structures, such as, the Newton-Raphson Method for solving non-linear equations, the Truss Finite Element and the Cable Finite Element. A generalization of the formulation from the three node cable element to an “n”-node cable super-element is proposed. The efficiency of the cable finite element has been verified by applying simple examples, comparing numerical results to analytical solutions. Finally, it has been studied the performance of these cable elements, along with the membrane finite elements, through the analysis of the membrane roof of the amphitheater of the “Memorial dos Povos de Belém do Pará”. The results from the implementation of both cable formulations and the traditional analysis using truss elements were compared. It has been shown that the consideration of the cable sliding is important for the accurate stress and displacements analysis.

Keywords: Finite Cable Element, Membrane Structures, Structural Analysis.

Sumário

1	INTRODUÇÃO	1
1.1	Contextualização	2
1.1.1	Estruturas retesadas no mundo	3
1.1.2	Estruturas retesadas no Brasil	13
1.1.3	Análise de estruturas retesadas	14
1.2	Objetivos	21
2	FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA	22
2.1	Método de Newton-Raphson	24
2.2	Elemento de Treliça	25
2.2.1	Elemento de Treliça Geometricamente Exato	26
2.2.2	Elemento de Treliça de Tensão Constante - VIL (Variable Initial Length)	27
2.3	Elemento de Cabo Escorregando	28
2.3.1	Elemento de Cabo Ideal (sem atrito)	29
2.3.2	Super-Elemento de Cabo Escorregando sem Atrito	31
3	IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL	38
4	EXEMPLOS PRELIMINARES	41
4.1	Verificação do elemento finito de cabo escorregando sem atrito	41
4.1.1	Exemplo 1A (Elipse) – Elemento de cabo ideal	42
4.1.2	Exemplo 1B (Elipse) – Super-elemento de cabo ideal	47
4.1.3	Exemplo 2A (Cabo suspenso) – Elemento de cabo ideal	52
4.1.4	Exemplo 2B (Cabo suspenso) – Elemento de cabo ideal com nova discretização	56
4.1.5	Exemplo 2C (Cabo suspenso) – Super-elemento de cabo ideal	59
4.2	Aplicação a problemas de protensão não aderente	64
4.2.1	Exemplo 3A (Viga) – Elemento de cabo ideal	65
4.2.2	Exemplo 3B (Viga) – Super-elemento de cabo ideal	70
4.2.3	Exemplo 3C (Viga) – Comparação com o SAP2000®	72
5	APLICAÇÃO PRÁTICA	76
5.1	Discretização do modelo	77
5.2	Forma viável	79
5.2.1	Carregamentos atuantes	79
5.2.2	Propriedades físicas	80

5.2.3 Busca da forma	80
5.3 Modelos com Sete Elementos por Borda	82
5.3.1 Elementos de Cabo Ideais (E3 – 7 DIV)	84
5.3.2 Super-Elementos de Cabo Ideais (SE – 7 DIV)	90
5.3.3 Comparativo entre os modelos E3 – 7 DIV e SE – 7 DIV	95
5.4 Modelos com Trinta e Dois Elementos por Borda	98
5.4.1 Busca da forma	98
5.4.2 Elementos de Cabo Ideais (E3 – 32 DIV)	102
5.4.3 Comparativo entre os modelos E3 – 7 DIV e E3 – 32 DIV	107
5.4.4 Super-Elementos de Cabo Ideais (SE – 32 DIV)	109
5.4.5 Comparativo entre os modelos E3 – 32 DIV e SE – 32 DIV	112
5.4.6 Comparativo entre os modelos SE – 7 DIV e SE – 32 DIV	114
5.4.7 Elementos de Cabo Aderentes (AD – 32 DIV)	115
5.4.8 Comparativo entre os modelos AD – 32 DIV e SE – 32 DIV	119
5.5 Modelos com Trinta e Dois Elementos por Borda e Mastros Principais .	123
5.5.1 Busca da forma	125
5.5.2 Super-Elementos de Cabo Ideais (SE – MASTROS)	128
5.5.3 Elementos de Cabo Aderentes (AD – MASTROS)	130
5.5.4 Comparativo entre os modelos 32 DIV e MASTROS	132
5.6 Comparação das Tensões nos Cabos de Borda	134
6 CONSIDERAÇÕES FINAIS	137
7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	142

Lista de figuras

<i>Figura 1 - Arena de Raleigh [Tibert, 1999]</i>	<i>4</i>
<i>Figura 2 - Pavilhão Alemão na Feira Mundial de Montreal 1967 [Jota, 2007].....</i>	<i>5</i>
<i>Figura 3 - Estádio Olímpico de Munique - Detalhe</i>	<i>5</i>
<i>Figura 4 - Estádio Olímpico de Munique [Pauletti, 2003]</i>	<i>6</i>
<i>Figura 5 - Estádio Rei Fahd, Riad, Arábia Saudita [Tibert, 1999].....</i>	<i>7</i>
<i>Figura 6 - Millennium Dome, Londres, 2000 [Jota, 2007].....</i>	<i>7</i>
<i>Figura 7 - Aeroporto Internacional de Denver – Colorado, EUA.....</i>	<i>8</i>
<i>Figura 8 - Aeroporto Internacional de Denver – Vista Externa.....</i>	<i>8</i>
<i>Figura 9 - Terminal de Passageiros de Jeddah, Arábia Saudita, 1981 [Guirad, 2006].....</i>	<i>9</i>
<i>Figura 10 - Allianz Arena, Munique, 2006.....</i>	<i>10</i>
<i>Figura 11 - Allianz Arena - Detalhe da fachada</i>	<i>10</i>
<i>Figura 12 - Estádio Gottlieb Daimler - Stuttgart, 2006 – Vista externa.....</i>	<i>11</i>
<i>Figura 13 - Estádio Gottlieb Daimler - Stuttgart, 2006 – Vista interna</i>	<i>11</i>
<i>Figura 14 - Centro Aquático Nacional - Beijing, China.....</i>	<i>12</i>
<i>Figura 15 - Igreja Batista de Fortaleza [Pauletti & Brasil, 2004]</i>	<i>13</i>
<i>Figura 16 - Memorial dos Povos de Belém do Pará [Pauletti & Brasil, 2005].....</i>	<i>14</i>
<i>Figura 17 – Detalhes de fixação das membranas.....</i>	<i>16</i>
<i>Figura 18 - Detalhe do cabo de borda com bainha.....</i>	<i>17</i>
<i>Figura 19 - Memorial dos Povos - Detalhes de fixação.....</i>	<i>18</i>
<i>Figura 20 - Elemento finito de treliça.....</i>	<i>26</i>
<i>Figura 21 - Elemento de cabo ideal.....</i>	<i>29</i>
<i>Figura 22 - Super-elemento - Numeração dos nós</i>	<i>31</i>
<i>Figura 23 - Super-elemento - Numeração dos elementos</i>	<i>32</i>
<i>Figura 24 - Interface gráfica do programa SATS.....</i>	<i>38</i>
<i>Figura 25 – Gráfico de convergência dos deslocamentos (SATS).....</i>	<i>39</i>
<i>Figura 26 –Exemplo 1A - Descrição.....</i>	<i>42</i>
<i>Figura 27 - Exemplo 1A – Configuração inicial (SATS).....</i>	<i>43</i>
<i>Figura 28– Definição geométrica da elipse</i>	<i>43</i>
<i>Figura 29 – Exemplo 1A - Posições de equilíbrio para as diferentes cargas aplicadas</i>	<i>45</i>
<i>Figura 30 – Exemplo 1A – Gráficos de convergência dos deslocamentos (SATS).....</i>	<i>46</i>
<i>Figura 31 - Exemplo 1A - Posição de equilíbrio (SATS)</i>	<i>46</i>
<i>Figura 32 -Exemplo 1B - Numeração dos nós.....</i>	<i>47</i>

<i>Figura 33 – Exemplo 1B - Gráficos de convergência em deslocamentos (SATS)</i>	48
<i>Figura 34 – Exemplo 1B - Configuração de equilíbrio (SATS)</i>	48
<i>Figura 35 – Exemplo 1 - Comparação dos resultados</i>	50
<i>Figura 36 – Exemplo 1- Comparativo de posições de equilíbrio</i>	50
<i>Figura 37 – Exemplo 1- Comparativo de erro entre os modelos</i>	51
<i>Figura 38 - Cabo catenário</i>	52
<i>Figura 39 – Exemplo 2A - Numeração dos nós e numeração dos elementos</i>	54
<i>Figura 40 – Exemplo 2A - Gráficos de convergência em deslocamentos (SATS)</i>	54
<i>Figura 41 – Exemplo 2A - Configuração de equilíbrio (SATS)</i>	55
<i>Figura 42 – Exemplo 2B - Configuração inicial</i>	57
<i>Figura 43 – Exemplo 2B - Numeração dos nós e elementos</i>	57
<i>Figura 44 – Exemplo 2B – Gráficos de convergência dos deslocamentos (SATS)</i>	58
<i>Figura 45 - Exemplo 2B - Configuração de equilíbrio (SATS)</i>	58
<i>Figura 46 – Exemplo 2B - Configuração ideal</i>	59
<i>Figura 47 – Exemplo 2C com 13 nós - Configuração inicial (SATS)</i>	60
<i>Figura 48 – Exemplo 2C com 23 nós - Configuração inicial (SATS)</i>	61
<i>Figura 49 - Exemplo 2C com 13 nós - Convergência dos deslocamentos (SATS)</i>	61
<i>Figura 50 - Exemplo 2C com 13 nós - Configuração de equilíbrio (SATS)</i>	61
<i>Figura 51 - Exemplo 2C com 23 nós - Convergência dos deslocamentos (SATS)</i>	62
<i>Figura 52 - Exemplo 2C com 23 nós - Configuração de equilíbrio (SATS)</i>	63
<i>Figura 53 - Problema físico – Viga de concreto com protensão não-aderente</i>	64
<i>Figura 54 – Exemplo 3A - Numeração dos nós</i>	65
<i>Figura 55 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de membrana</i>	65
<i>Figura 56 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de cabo ideal</i>	65
<i>Figura 57 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de treliça</i>	66
<i>Figura 58 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de treliça tipo VIL</i>	66
<i>Figura 59 - Exemplo 3A - Numeração de todos os elementos e nós do modelo</i>	67
<i>Figura 60 - Exemplo 3A - Detalhe para o nó 2</i>	67
<i>Figura 61 - Exemplo 3A - Configuração inicial do modelo (SATS)</i>	68
<i>Figura 62 - Exemplo 3A - Convergência em deslocamentos (SATS)</i>	68
<i>Figura 63 - Exemplo 3A - Norma dos deslocamentos ampliados (SATS)</i>	68
<i>Figura 64 - Exemplo 3A - Primeira tensão principal (SATS)</i>	69
<i>Figura 65 - Exemplo 3A - Segunda tensão principal (SATS)</i>	69
<i>Figura 66 - Exemplo 3A - Tensão axial nos elementos (SATS)</i>	69

<i>Figura 67 – Exemplo 3B - Numeração dos nós</i>	70
<i>Figura 68 - Exemplo 3B - Numeração dos super-elementos de cabo</i>	70
<i>Figura 69 - Exemplo 3B - Características do modelo</i>	71
<i>Figura 70 - Exemplo 3B - Configuração inicial do modelo (SATS)</i>	71
<i>Figura 71 - Exemplo 3B - Convergência em deslocamentos (SATS)</i>	71
<i>Figura 72 - Exemplo 3B - Norma dos deslocamentos ampliados (SATS)</i>	72
<i>Figura 73 - Exemplo 3B - Primeira tensão principal (SATS)</i>	72
<i>Figura 74 - Exemplo 3B - Segunda tensão principal (SATS)</i>	72
<i>Figura 75 - Exemplo 3C - Configuração inicial (SAP)</i>	73
<i>Figura 76 - Exemplo 3C - Deslocamentos do modelo (SAP)</i>	74
<i>Figura 77 - Exemplo 3C - Força interna atuante no cabo (SAP)</i>	74
<i>Figura 78 - Exemplo 3C - Primeira tensão principal (SAP)</i>	74
<i>Figura 79 - Exemplo 3C - Segunda tensão principal (SAP)</i>	75
<i>Figura 80 - Memorial dos Povos de Belém do Pará [Pauletti & Brasil, 2005]</i>	76
<i>Figura 81 - Discretização com 7 elementos por borda (Modelo 7 DIV)</i>	77
<i>Figura 82 - Discretização com 32 elementos por borda (Modelo 32 DIV)</i>	77
<i>Figura 83 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Busca da Forma)</i>	82
<i>Figura 84 - Norma dos deslocamentos (Busca da Forma)</i>	83
<i>Figura 85 – Primeira e segunda tensões principais (Busca da Forma)</i>	83
<i>Figura 86 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	84
<i>Figura 87 - Norma dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	85
<i>Figura 88 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	86
<i>Figura 89 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	86
<i>Figura 90 - Norma dos deslocamentos ampliados (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	87
<i>Figura 91 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	87
<i>Figura 92 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	88
<i>Figura 93 - Norma dos deslocamentos ampliados (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	89
<i>Figura 94 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 7 DIV)</i>	90
<i>Figura 95 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)</i>	91
<i>Figura 96 - Norma dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)</i>	91
<i>Figura 97 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 7 DIV)</i>	92
<i>Figura 98- Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)</i>	92
<i>Figura 99 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 7 DIV)</i>	93
<i>Figura 100 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 7 DIV)</i>	93

<i>Figura 101 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)</i>	94
<i>Figura 102 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 7 DIV)</i>	94
<i>Figura 103 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 7 DIV)</i>	95
<i>Figura 104 - Modelo com 32 divisões por borda</i>	98
<i>Figura 105 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Busca da Forma)</i>	99
<i>Figura 106 - Norma dos deslocamentos (Busca da Forma)</i>	100
<i>Figura 107 – Primeira e segunda tensões principais (Busca da Forma)</i>	100
<i>Figura 108 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)</i>	101
<i>Figura 109 - Norma dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)</i>	101
<i>Figura 110 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD – 32 DIV)</i>	102
<i>Figura 111 - Gráfico de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 32 DIV)</i>	103
<i>Figura 112 - Norma dos deslocamentos (Modelo E3 – 32 DIV)</i>	104
<i>Figura 113 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 32 DIV)</i>	104
<i>Figura 114 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 32 DIV)</i>	105
<i>Figura 115 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo E3 – 32 DIV)</i>	106
<i>Figura 116 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 32 DIV)</i>	106
<i>Figura 117 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 32 DIV)</i>	109
<i>Figura 118 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 32 DIV)</i>	110
<i>Figura 119 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 32 DIV)</i>	110
<i>Figura 120 - Gráficos de convergência dos deslocamentos</i>	111
<i>Figura 121 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 32 DIV)</i>	112
<i>Figura 122 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 32 DIV)</i>	112
<i>Figura 123- Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)</i>	116
<i>Figura 124 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo AD – 32 DIV)</i>	116
<i>Figura 125 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD – 32 DIV)</i>	117
<i>Figura 126 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)</i>	117
<i>Figura 127 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo AD – 32 DIV)</i>	118
<i>Figura 128 - Primeira tensão principal (Modelo AD – 32 DIV)</i>	119
<i>Figura 129 - Detalhe típico de vértice</i>	121
<i>Figura 130 - Detalhes do Memorial dos Povos [Pauletti & Brasil, 2005]</i>	123
<i>Figura 131 - Modelo com mastro estaiado - Forma inicial</i>	124
<i>Figura 132 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Busca da Forma)</i>	125
<i>Figura 133 - Norma dos deslocamentos (Busca da Forma)</i>	126
<i>Figura 134 – Primeira e segunda tensões principais (Busca da Forma)</i>	126

<i>Figura 135 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD –MASTROS).....</i>	<i>127</i>
<i>Figura 136 - Norma dos deslocamentos (Modelo AD –MASTROS).....</i>	<i>127</i>
<i>Figura 137 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD –MASTROS).....</i>	<i>128</i>
<i>Figura 138 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE –MASTROS).....</i>	<i>129</i>
<i>Figura 139 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE –MASTROS)</i>	<i>129</i>
<i>Figura 140 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE –MASTROS)</i>	<i>130</i>
<i>Figura 141 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD –MASTROS).....</i>	<i>131</i>
<i>Figura 142 - Norma dos deslocamentos ampliados (Modelo AD –MASTROS).....</i>	<i>131</i>
<i>Figura 143 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD –MASTROS)</i>	<i>132</i>
<i>Figura 144 - Numeração dos Cabos de Borda.....</i>	<i>135</i>

Lista de Tabelas

<i>Tabela 1 – Deslocamentos x Força aplicada</i>	<i>44</i>
<i>Tabela 2 - Comparação dos deslocamentos: Elemento de Cabo x Super-Elemento de Cabo.....</i>	<i>49</i>
<i>Tabela 3 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e SE - 7 DIV (Retesamento).....</i>	<i>96</i>
<i>Tabela 4 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e SE - 7 DIV (Vento Paralelo)</i>	<i>96</i>
<i>Tabela 5 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e SE - 7 DIV (Vento Normal).....</i>	<i>96</i>
<i>Tabela 6 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e E3 - 32 DIV (Vento Paralelo)</i>	<i>107</i>
<i>Tabela 7 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e E3 - 32 DIV (Vento Normal).....</i>	<i>107</i>
<i>Tabela 8 - Comparativo entre modelos E3 - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Paralelo)</i>	<i>113</i>
<i>Tabela 9 - Comparativo entre modelos E3 - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Normal)</i>	<i>113</i>
<i>Tabela 10 - Comparativo entre modelos SE - 7 DIV e SE - 32 DIV (Vento Paralelo).....</i>	<i>114</i>
<i>Tabela 11- Comparativo entre modelos SE - 7 DIV e SE - 32 DIV (Vento Normal)</i>	<i>114</i>
<i>Tabela 12 - Comparativo entre modelos AD - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Paralelo).....</i>	<i>119</i>
<i>Tabela 13 - Comparativo entre modelos AD - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Normal)</i>	<i>120</i>
<i>Tabela 14 - Comparativo entre modelos SE - MASTROS e SE - 32 DIV (Vento Normal).....</i>	<i>133</i>
<i>Tabela 15 - Comparativo entre modelos AD - MASTROS e AD - 32 DIV (Vento Normal)</i>	<i>133</i>
<i>Tabela 16 - Comparativo entre AD - MASTROS e SE - 32 MASTROS (Vento Normal).....</i>	<i>133</i>
<i>Tabela 17 - Tensões nos Cabos de Borda (Retesamento)</i>	<i>135</i>
<i>Tabela 18- Tensões nos Cabos de Borda (Vento Paralelo).....</i>	<i>136</i>
<i>Tabela 19- Tensões nos Cabos de Borda (Vento Normal)</i>	<i>136</i>

1 INTRODUÇÃO

O termo estruturas retesadas, o qual será empregado neste trabalho, foi definido por Pauletti [2003], como uma alusão ao estado em que se encontram as cordas dos arcos, utilizando o comportamento de uma corda retesada (enrijecida, tensionada) para explicar o comportamento de estruturas mais complexas, como a rede de cabos ou as membranas. Existem outras nomenclaturas de uso mais corrente, como, por exemplo, o termo “tensoestrutura”, de uso já bastante consagrado no campo das coberturas de cabos e membranas, o qual define uma estrutura tensionada, sob um estado de tensão, não necessariamente de tração, uma vez que o termo tensão abrange, genericamente, todos os estados de solicitação interna. Também é inadequado falar de estruturas “tracionadas”, uma vez que muitas estruturas podem estar tracionadas sem caracterizarem sistemas retesados (isto é, sem dependerem desse estado para funcionarem efetivamente) [Pauletti, 2003]. Por esses motivos, as estruturas de membranas e cabos serão designadas Estruturas Retesadas.

Este tipo de estrutura apresenta grandes vantagens, em comparação com outros sistemas mais convencionais, como, por exemplo:

- Diferencial arquitetônico;
- Translucidez (deixando passar até 20% da luz natural);
- Isolamento térmico e acústico;
- Impermeabilidade;
- Vence grandes vãos;
- Não propaga o fogo em caso de incêndios;
- Leveza e resistência, face às cargas do projeto e efeitos do vento;
- Durabilidade e resistência à intempérie;
- Facilidade no transporte e montagem.

1.1 Contextualização

As estruturas retesadas possuem dois estados: ou estão retesadas ou estão frouxas. Para funcionarem como elementos estruturais, elas dependem essencialmente da existência de um campo de tensões biaxial de tração, ou seja, é essencial um estado de retesamento para que trabalhem adequadamente. Este estado de retesamento é caracterizado pelo enrijecimento do elemento através da imposição de um adequado estado de esforços internos de tração.

As estruturas retesadas representam uma nova tendência arquitetônica: a construção com o uso mínimo de materiais. A principal vantagem das estruturas retesadas é que essas podem ser tão leves quanto a resistência à tração de seus materiais permitir. Com o surgimento de novos materiais, como os cabos de aço de alta resistência e as membranas com fibra de vidro recobertas de silicone, maiores vãos podem ser vencidos, utilizando a mesma quantidade de material [Tibert, 1999].

As estruturas retesadas podem ainda ser classificadas como sistemas flexíveis, por sofrerem mudanças drásticas de forma quando o padrão de carregamento a que estão submetidas é alterado. Em contraposição, os sistemas rígidos, tais como as vigas e as cascas, não apresentam deformações consideráveis sobre a ação das cargas de serviço, mantendo uma forma próxima da original.

Os sistemas retesados são, geralmente, estruturas leves. O peso por área de uma estrutura retesada é aproximadamente duas ordens de grandeza menor que o de uma estrutura em concreto armado e uma ordem menor que o de uma estrutura convencional de aço. Devido ao seu baixo peso próprio, os carregamentos devidos ao vento tornam-se críticos para o projeto desse tipo de estrutura.

Quanto aos elementos construtivos, as estruturas retesadas classificam-se basicamente em dois grandes grupos: as estruturas de cabos e as estruturas de membrana. Os cabos são elementos lineares, capazes de suportar carregamentos externos apenas desenvolvendo esforços axiais de tração. As

membranas são elementos superficiais, as quais equilibram os esforços externos desenvolvendo tensões de tração e cisalhamento no plano.

O material utilizado para fabricação das membranas tem pouca espessura, é bastante flexível e apresenta resistência a esforços no plano, mas nenhuma rigidez a flexão, podendo resistir a esforços transversais somente devido a sua curvatura. Como as estruturas retesadas não podem resistir a esforços de compressão, a instabilidade da estrutura ou a perda de equilíbrio, representada pelo enrugamento do elemento, acontecerá quando os carregamentos externos resultarem em esforços de compressão maiores do que as tensões iniciais de tração [Tabarrok, 1991].

A partir de qualquer alteração no carregamento, as tensões e as curvaturas locais se alteram para manter o equilíbrio do sistema. Essas mudanças são acompanhadas por deslocamentos e rotações significativas da superfície.

Por esse motivo, a forma dos cabos e membranas não pode ser imposta, mas sim obtida através da interação entre os carregamentos externos e o campo de tensões interno, satisfazendo o equilíbrio. Portanto, seu dimensionamento envolve a determinação da forma inicial, ou forma viável, combinando a forma da estrutura e seu correspondente campo de tensões. A forma viável deve atender tanto aos requisitos arquitetônicos (forma e função) quanto às necessidades estruturais (resistência e estabilidade) [Pauletti, 2003].

1.1.1 Estruturas retesadas no mundo

As estruturas retesadas têm sido utilizadas, ininterruptamente, desde a pré-história, na forma de tendas ou cabanas, mas, somente a partir do século XX, com o desenvolvimento de materiais de maior resistência e durabilidade e o avanço na tecnologia construtiva das coberturas de membrana, se tornou possível passar de estruturas pequenas a mega-estruturas, bem como de coberturas necessariamente retráteis e temporárias a coberturas permanentes. Dois são os principais fatores que permitiram essa mudança: o uso de formas anticlásticas e o desenvolvimento de materiais de maior resistência [Jota, 2007].

Um grande passo no desenvolvimento das coberturas suspensas aconteceu em 1950, com o revolucionário projeto do arquiteto russo Matthew Nowicki, o State Fair Arena, em Raleigh, Carolina do Norte, EUA, ficando conhecida como a Arena de Raleigh (Figura 1), medindo 92 m x 97 m, composta de uma rede de cabos de aço entre arcos de concreto para formar uma superfície tridimensional com dupla curvatura inversa. A rede de cabos de aço foi montada cabo por cabo, sendo, primeiramente, postos os cabos de suporte, unindo os arcos parabólicos e, depois, os cabos de tração, unindo extensões entre um mesmo arco. A intersecção entre dois cabos era fixa com presilhas metálicas. A malha, formada por polígonos quadrangulares de aproximadamente 1,90 x 1,90 m, foi posteriormente coberta com uma manta de fibra revestida com pintura de alumínio.

Figura 1 - Arena de Raleigh [Tibert, 1999]

A constatação, a partir da Arena de Raleigh, de que as superfícies anticlásticas retesadas eram dotadas de grande estabilidade frente aos carregamentos aerodinâmicos, influenciou os projetistas do mundo todo durante as décadas seguintes.

Impressionado com o efeito estético da Arena, o arquiteto alemão Frei Otto, voltou seu trabalho para o projeto das estruturas retesadas, tornando-se responsável pelas maiores realizações técnicas e conceituais no campo das estruturas de redes de cabos e membrana até a década de 1970, com estudos baseados em modelos físicos reduzidos.

Otto se envolveu na construção de muitas estruturas retesadas de grande porte durante os anos 60 e 70. Dentre essas obras, está a primeira grande estrutura de rede de cabos recoberta com membrana, o Pavilhão Alemão na Feira

Mundial de 1967 em Montreal (Figura 2), com área recoberta de 7.730 m² e altura dos mastros de 14 a 38 m, o qual foi um marco na época, despertando a atenção de todo o mundo por sua rapidez de fabricação e montagem. A concepção arquitetônica foi de Rolf Gutbrod e Frei Otto e análise estrutural do engenheiro Fritz Leonhardt (*Leonhardt, Andrä and Partners*).

Figura 2 - Pavilhão Alemão na Feira Mundial de Montreal 1967 [Jota, 2007]

O Estádio Olímpico de Munique, nas Olimpíadas de 1972 (Figura 3 e Figura 4), com área coberta de 74 mil m², formada com uma rede de cabos e painéis acrílicos, foi o marco inicial do uso de análise computacional e de tecnologia digital para suplantar a tecnologia baseada em medição de modelos físicos reduzidos. Métodos computacionais matemáticos desenvolvidos por J. Argyris e K. Linkwitz foram utilizados nos processos de determinação da geometria e de análises de cargas, sendo essa a primeira vez em que recursos computacionais atuaram na execução de uma tensoestrutura [Jota, 2007].

Figura 3 - Estádio Olímpico de Munique - Detalhe

Figura 4 - Estádio Olímpico de Munique [Pauletti, 2003]

É necessário destacar, também, o projeto do Estádio Rei Fahd (Figura 5), construído entre 1983 e 1986, concebido pelos arquitetos Ian Frasier e John Roberts e dimensionado pelos engenheiros David Geiger e Horst Berger (*Geiger Berger Associates*). A cobertura de 51 mil m² é formada por 24 módulos idênticos, os quais se repetem radialmente, 24 mastros de 58 m de altura, um para cada módulo, os quais formam os pontos altos responsáveis pelo suporte da cobertura, outros 24 mastros secundários, 24 pontos de ancoragem da membrana diretamente no solo, e o anel central, que responde pelo equilíbrio das forças de ancoragem no solo. Essas forças atuam radialmente, do centro para a parte externa do estádio, com suas componentes verticais sendo suportadas pelos mastros e as horizontais e pelo anel central de tração [Jota, 2007]. A construção custou cerca de US\$ 80 milhões.

Figura 5 - Estádio Rei Fahd, Riad, Arábia Saudita [Tibert, 1999]

Um dos mais incríveis projetos de Estruturas Leves do século XX é o Millennium Dome (Figura 6), construído para celebrar a virada do milênio em Londres. A cobertura consiste em uma calota esférica com 320 m de diâmetro e 48 m de altura, sustentada por 12 mastros com 100 m cada, e uma armação de cabos de aço, servindo de base para a cobertura com painéis de membrana de fibra de vidro.

Figura 6 - Millennium Dome, Londres, 2000 [Jota, 2007]

Outro projeto de grande destaque é a cobertura de membrana do Aeroporto Internacional de Denver (Figura 7 e Figura 8), com projeto arquitetônico do escritório *Fentress Bradburn Architects* e concepção estrutural de *Horst Berger Associates* e *Severud Associates*.

Figura 7 - Aeroporto Internacional de Denver – Colorado, EUA

A estrutura, completada em 1993, é composta por duas camadas de fibra de vidro recoberta com Teflon, espaçadas de 60 cm, para efeito de isolamento térmico e acústico, e cobre uma área de 40.000 m², com mastros de altura de 40 m. Muitos viram o Aeroporto de Denver como uma prova de fogo para as grandes coberturas em membrana retesada, uma vez que a obra responde a condições muito adversas, tanto de serviço, como climáticas [Pauletti, 2003].

Figura 8 - Aeroporto Internacional de Denver – Vista Externa

A maior cobertura em membrana até o momento é o Terminal de Passageiros de Jeddah (Figura 9), na Arábia Saudita, projetado pela firma Skidmore-Owings-Merril, tendo Horst Berger como consultor. A estrutura, completada em 1981, consiste em 210 módulos de membranas quase cônicas, com base quadrada de lado 45 m e altura média dos mastros de 45,75 m, cobrindo aproximadamente 470.000 m² [Guirard, 2006].

Figura 9 - Terminal de Passageiros de Jeddah, Arábia Saudita, 1981 [Guirad, 2006].

Entre as grandes estruturas leves da atualidade, as que obtêm maior destaque e divulgação são as coberturas dos estádios esportivos, construídos para sediar as Copas Mundiais da FIFA e os Jogos Olímpicos. Dentre os 22 estádios usados na Copa da Coreia do Sul e Japão (2002) e na Copa da Alemanha (2006), 18 possuem estruturas com membranas servindo de cobertura, como, por exemplo, o Estádio Gottlieb Daimler em Stuttgart (Alemanha), ou servindo como estrutura de vedação de fachada, como o famoso Allianz Arena em Munique, ambos sedes de jogos da Copa Mundial da Alemanha.

Construído entre 2002 e 2005, para a Copa da Alemanha de 2006, com custo aproximado de 275 milhões de euros, o Allianz Arena, em Munique (Figura 10 e Figura 11), é um dos grandes destaques. Com capacidade para 66 mil espectadores, deslumbra a todos com sua excepcional fachada iluminada, tendo tornado-se um marco milionário na arquitetura moderna. O projeto arquitetônico é do escritório suíço Herzog e De Meuron e o estrutural é do escritório Sailer

Stepan and Partner. A característica mais marcante do estádio é sua estrutura externa, constituída por 2.974 painéis de membrana inflados em forma de losango, dos quais 1.056 são iluminados. A cobertura é treliçada, com altura de 50 m e área total de 171.000m².

Figura 10 - Allianz Arena, Munique, 2006.

Figura 11 - Allianz Arena - Detalhe da fachada

O Estádio Gottlieb Daimler em Stuttgart, na Alemanha (Figura 12 e Figura 13), construído em 1993 e com capacidade para mais de 55 mil espectadores, possui cobertura em membrana de dupla curvatura, de área superior a 34 mil m² e altura de 28 m. O projeto é do arquiteto Rudolf Bergemann (*Siegel, Wonneberg and Partner*) e a análise estrutural dos engenheiros Frank Breinlinger e Knut Göppert (*Schlaich, Bergemann and Partners*). Foram usadas, na construção da cobertura de membrana, fibras de poliéster recobertas com PVC com aproximadamente 8% de translucidez. Foram necessárias cerca de 2700 ton de aço e 420 ton de cabos de aço de alta resistência.

Figura 12 - Estádio Gottlieb Daimler - Stuttgart, 2006 – Vista externa

Figura 13 - Estádio Gottlieb Daimler - Stuttgart, 2006 – Vista interna

O Centro Aquático Nacional, conhecido como “Cubo Aquático” (Figura 14), foi construído em 2008 para receber as competições de natação das Olimpíadas de Beijing. Sua concepção deslumbrante representa a água, com bolhas azuis irregulares. O projeto arquitetônico é de John Bilmon (PTW Architects) e o engenheiro estrutural é Peter Macdonald. A estrutura de membrana é composta por mais de 3000 bolsas pneumáticas revestidas de um material parecido com Teflon, o ETFE (etileno-tetrafluoroetileno), totalizando uma área coberta de mais de 110.000 m², a maior do mundo. É uma estrutura quadrada, de 177 m de lado e 31 m de altura.

O “Cubo Aquático” é, também, a única edificação pública totalmente feita em membrana. As vantagens do ETFE são inúmeras, como, por exemplo, elevada resistência mecânica (cada uma das 3000 bolhas é capaz de resistir ao peso de um carro), ductibilidade, resistência ao fogo e ao calor. Como o coeficiente de atrito do material é pequeno, a poluição não se fixa facilmente a superfície, sendo lavada pela chuva.

Como o material ETFE é muito mais leve do que as estruturas translúcidas convencionais, como os painéis de acrílico, o custo da estrutura metálica de suporte foi consideravelmente reduzido. Além disso, permite a entrada de mais luz e calor que o vidro, o que reduz em 30% o gasto energético.

Figura 14 - Centro Aquático Nacional - Beijing, China

1.1.2 Estruturas retesadas no Brasil

No Brasil, a ocorrência de estruturas de membrana é relativamente pequena, sendo pouco conhecidas e, geralmente, de fabricação empírica.

Em 2002, foi construída a membrana de cobertura da Igreja Batista de Fortaleza (Figura 15) para cobrir um teatro aberto pré-existente. A membrana, com dupla curvatura assimétrica, possui aproximadamente 70 m de comprimento e 50 m de largura, sendo suspensa por dois mastros de 20 m de altura articulados nas suas extremidades e formando uma área coberta de cerca de 2.900 m², a qual representa um recorde nacional para as Estruturas de Membranas com Bordas Flexíveis [Pauletti & Brasil, 2004].

Figura 15 - Igreja Batista de Fortaleza [Pauletti & Brasil, 2004]

Esta estrutura foi projetada por Ruy M. O. Pauletti e Reyolando M. L. R. F. Brasil, ambos professores associados do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. O projeto de cobertura da Igreja Batista seguiu todas as fases necessárias para o desenvolvimento da análise estrutural, iniciando pela busca da forma, seguido pela determinação dos padrões de corte, verificação das condições do projeto e,

finalmente, pela análise da resposta da estrutura aos carregamentos. Esta obra é um marco na construção de estruturas de membranas no contexto nacional.

O anfiteatro do Memorial dos Povos de Belém do Pará (Figura 16), inaugurado em 2005 em homenagem aos imigrantes pela Prefeitura de Belém, é responsável por abrigar atividades culturais e educacionais. Segundo Pauletti & Brasil [2005], a cobertura é composta por uma membrana em forma de cela, com dois apoios elevados e quatro apoios mais baixos nivelados. A projeção horizontal da cobertura tem 22,6 de largura por 28,6 m de comprimento, totalizando uma área aproximada de 400 m². O projeto estrutural é de autoria de Ruy M. O. Pauletti e Reyolando M. L. R. F. Brasil.

Figura 16 - Memorial dos Povos de Belém do Pará [Pauletti & Brasil, 2005]

1.1.3 Análise de estruturas retesadas

De acordo com Pauletti [2003], as dificuldades analíticas encontradas pelo comportamento não-linear das estruturas de membrana e a falta de materiais adequados somente possibilitaram seu uso a partir das últimas três décadas. No que diz respeito aos materiais, pode-se afirmar que apenas com o surgimento dos aços de alta resistência, e dos materiais compósitos e sintéticos, as estruturas de membrana puderam ser plenamente exploradas. Os materiais mais utilizados para confecção da membrana são: fibras de poliéster ou de vidro

recobertas com PVC, fibras de vidro ou carbono recobertas com Teflon e fibras de vidro ou carbono recobertas com silicone.

Conforme apresenta Guirardi [2006], as características do processo de projeto e análise das estruturas de membrana apresentam as seguintes fases:

- Busca da forma: é difícil definir a priori a forma de uma estrutura retesada. Como esta não possui rigidez à flexão, tampouco, à compressão, a forma, os carregamentos externos e o estado interno de tensões (exclusivamente de tração), devem interagir de modo a satisfazer as equações de equilíbrio;
- Determinação dos padrões de corte: Uma vez definida a configuração da estrutura, a superfície encontrada deve ser convertida em um conjunto de peças planas para sua fabricação;
- Análise da resposta aos carregamentos: Estabelecida a forma de equilíbrio viável, que corresponde à resposta estrutural da membrana às forças de retesamento, e possivelmente ao peso próprio, deve-se proceder ao estudo do comportamento da estrutura sujeita a uma variedade de carregamentos, para garantir que possa suportar todas as solicitações de serviço. A ausência de rigidez a flexão torna as estruturas retesadas suscetíveis a grandes variações geométricas, mesmo sob carregamentos moderados. Os carregamentos de pressão são sempre normais à superfície, dependendo, portanto, da deformação da membrana, o que torna necessário proceder-se uma análise não-linear para incluir esses efeitos no estudo da respostas aos carregamentos.

Segundo Pauletti [2003], o comportamento não-linear das estruturas de membrana torna inviável o uso de soluções analíticas, levando necessariamente à utilização de soluções por métodos numéricos. Entre os métodos numéricos empregados, o mais utilizado é o método dos elementos finitos.

A simulação numérica da ação dos cabos tensionados, como os cabos de borda de estruturas de membrana e os cabos de estruturas de concreto com protensão não aderentes, tem despertado o interesse de vários pesquisadores.

No caso das estruturas de membrana com borda flexível, suportadas por cabos de borda retesados, o problema físico é particularmente complexo, devido ao escorregamento relativo entre os cabos e a membrana.

Como pode ser observado na Figura 17 (detalhe da cobertura do Aeroporto Internacional de Denver), a extremidade da membrana é fixa a uma chapa metálica através de uma bainha de membrana (em destaque pela seta vermelha), a qual funciona como um engrossamento da borda, não permitindo que a membrana se desprenda da chapa, chamada de “gordinho”. Entre a membrana e a chapa é colocada uma fita de elastômero (neoprene), a qual permite que a membrana se desloque livremente sob a chapa, ficando fixa apenas pelo gordinho, evitando concentrações de tensões. Na estrutura apresentada na Figura 17, o cabo é externo, ou seja, não possui bainha metálica ou de tecido. Os cabos são ligados à membrana através de presilhas metálicas, as quais possuem um pequeno espaçamento e são rigidamente soldadas a chapa metálica.

Figura 17 – Detalhes de fixação das membranas

A Figura 18 apresenta outro tipo de fixação dos cabos de borda: o cabo está deslizando dentro da bainha de tecido, a qual é soldada diretamente à borda da membrana. Nesse exemplo, o atrito entre o cabo e a membrana é menor.

Figura 18 - Detalhe do cabo de borda com bainha

A membrana do Memorial dos Povos de Belém do Pará, a qual teve seu projeto inspirado na cobertura do Aeroporto Internacional de Denver, também é tracionada por cabos externos, como apresenta a Figura 19. O sistema de fixação é o mesmo utilizado em Denver, diferenciado apenas pela ausência da fita de neoprene sob a chapa metálica, dispensada buscando menor custo, ligando a membrana à chapa metálica por atrito. Esse tipo de ligação impede a deformação uniforme da borda da membrana, provocando concentrações de tensões nas regiões entre as chapas. Essas tensões atingem valores muito superiores aos obtidos na análise, o que pode provocar ou propagar rasgos.

Figura 19 - Memorial dos Povos - Detalhes de fixação

A maioria dos programas comerciais de análise estrutural, que utilizam o método dos elementos finitos, não dispõe de um elemento que represente satisfatoriamente, sem custos computacionais muito elevados, os efeitos de um cabo sem aderência em uma estrutura.

Modelar o cabo como uma seqüência de elementos de treliça é a alternativa mais usual. No entanto, esse procedimento apresenta resultados aceitáveis

apenas para casos de protensão com aderência perfeita, depois da estrutura já estar protendida.

Existem artifícios para simular o escorregamento relativo entre a malha da membrana e o cabo, no caso de modelagens com elementos de treliça. Por exemplo, as propriedades dos materiais podem ser manipuladas, reduzindo seus módulos de elasticidade, provocando deformações elevadas, que resultam tensões quase constantes ao longo dos cabos, fato característico da protensão sem aderência. Entretanto, essas alterações das características dos materiais diminuem a rigidez elástica dos elementos de borda, distorcendo os resultados dos deslocamentos e, conseqüentemente, os valores das tensões e deformações principais. Além de introduzirem erros na análise da resposta aos carregamentos, esse tipo de solução, impede a verificação das tensões atuantes nos cabos, que podem atingir valores superiores a sua resistência, causando danos a estrutura.

Outra alternativa para simular o problema dos cabos de borda deslizando é fazer uma análise considerando o problema de contato. No entanto, com a possibilidade de escorregamento entre o cabo e a superfície da bainha, em qualquer trecho do mesmo, um grande número de elementos seria necessário para uma boa discretização da área de contato, o que tornaria o processamento muito dispendioso computacionalmente.

Um elemento finito de cabo composto por três nós foi, inicialmente, apresentado por Aufaure [1993]. Com outras técnicas de derivação, uma generalização do elemento de Aufaure para o escorregamento não-ideal, foi apresentada por Pauletti & Pimenta [1995].

A implementação deste elemento finito de cabo, que permite o escorregamento relativo dos nós, foi desenvolvida por Deifeld [2001], em linguagem Fortran, e incluída no programa PEFSYS, desenvolvido por Pimenta e Pauletti.

Propõem-se neste trabalho, utilizar métodos numéricos de solução, para desenvolver a implementação computacional do elemento finito de cabo deslizando sem atrito, em ambiente MATLAB®, o qual dispõe de recursos importantes para a resolução de sistemas de equações lineares, como, por

exemplo, o tratamento de matrizes esparsas e a facilidade de obtenção de matrizes inversas, que será incluído no programa de análise de estruturas retesadas SATS (**S**ystem for the **A**nalysis of **T**aut **S**tructures), desenvolvido por Guiradi e Pauletti.

A formulação adotada neste trabalho foi desenvolvida por Pauletti [2003], que apresentou a distinção entre as parcelas elásticas e geométricas da matriz de rigidez tangente dos elementos.

Uma generalização da formulação deste elemento de três nós para um super-elemento de cabo com “n” nós será proposta neste trabalho. A modelagem com elementos de três nós gera a necessidade da criação de nós intermediários, suplementares a malha original do problema. Em análises de estrutura correntes, com modelos de muitos elementos, esse procedimento é trabalhoso, manual e pode gerar erros de difícil identificação. Dessa forma, buscando uma maior praticidade, clareza e melhor desempenho da modelagem, será utilizado apenas um super-elemento de cabo ideal por borda da estrutura.

1.2 Objetivos

Este trabalho estuda o efeito do escorregamento dos cabos de borda em estruturas de membrana, através de análises numéricas, feitas com o auxílio do método dos elementos finitos. Os objetivos específicos foram:

- Desenvolvimento da generalização da formulação do elemento de cabo de três nós para um super-elemento com “n” nós.
- Implementação computacional do elemento de cabo deslizando sem atrito de três nós, do elemento de treliça com tensão constante (elemento tipo “VIL”) e do super-elemento de cabo ideal, em ambiente MATLAB®;
- Incorporação dos novos elementos ao programa de análise de estruturas retesadas SATS (**S**ystem for the **A**nalysis of **T**aut **S**tructures), previamente desenvolvido por Guiradi e Pauletti, de forma a gerar uma nova ferramenta, a qual possibilite maior praticidade e rapidez ao desenvolvimento de projetos de estruturas de membranas ou de rede de cabos;
- Análise do comportamento conjunto do elemento de cabo ideal e do elemento de membrana, através do desenvolvimento de exemplos numéricos;
- Comparação do desempenho do elemento de cabo com três nós com os resultados obtidos pelo novo super-elemento proposto;
- Análise da influência da consideração do escorregamento dos cabos de borda nas respostas da estrutura aos carregamentos, através da comparação entre os resultados obtidos com modelos aderentes (análises tradicionais) e modelos não-aderentes (análise proposta com cabos ideais).

2 FUNDAMENTAÇÃO TEÓRICA

A formulação adotada neste trabalho é proveniente de Pauletti [2003], no qual se pode encontrar o detalhamento completo das expressões aqui apresentadas.

O elemento de cabo escorregando sem atrito foi, inicialmente, apresentado por Aufaure [1993], o qual equacionou o problema de um cabo passando por uma polia, no contexto da simulação do içamento dos cabos das linhas de transmissão de eletricidade.

Com outras técnicas de derivação, uma generalização do elemento de Aufaure para o escorregamento não-ideal, ou seja, considerando o efeito do atrito, foi apresentada por Pauletti & Pimenta [1995], onde se verificou que a representação usual dos cabos por um agrupamento de elementos discretos, do tipo treliça, introduz uma condição de solidariedade entre os cabos, em correspondência aos pontos de cruzamento, o que não se verifica para todas as estruturas, nem para todos os estados de um particular arranjo construtivo.

A formulação apresenta a montagem da matriz de rigidez tangente do elemento de cabo, contando com a distinção entre a parcela elástica e a geométrica, conforme demonstrado em Pauletti [2003].

Será proposta uma generalização da formulação do elemento de cabo de três nós para um super-elemento de cabo deslizando sem atrito de “n” nós.

Os elementos estruturais básicos das estruturas retesadas, apesar de possuírem uma formulação simples, têm o comportamento estrutural do conjunto essencialmente não-linear, inviabilizando, na maioria dos casos, as soluções analíticas, fazendo dos métodos numéricos a única solução geral [Pauletti, 2003].

A não-linearidade nas estruturas retesadas é do tipo geométrica, visto que as relações tensão-deformação dos materiais que compõem os cabos e as membranas, como elementos estruturais, permanecem dentro dos limites lineares.

A maneira mais sistemática de análise de estruturas retesadas é feita via análise matricial de estruturas, utilizando o Método de Elementos Finitos (MEF) como

técnica de discretização dos elementos do contínuo e o Método de Newton-Raphson para a resolução das equações não-lineares resultantes da formulação.

Ao ser formulado para análises computacionais, o MEF tornou viável a resolução de uma classe de problemas antes tratados apenas de maneira empírica e cujas soluções analíticas são de difícil alcance.

Este capítulo apresenta as formulações utilizadas para a análise de estruturas de cabos: a formulação do Método Newton-Raphson para resolução de equações não-lineares, as formulações do Elemento Finito de Treliça, ou cabo rígido, do Elemento Finito de Cabo Escorregando Sem Atrito e, por fim, a proposta do novo Super-Elemento de Cabo Escorregando Sem Atrito.

2.1 Método de Newton-Raphson

O Método de Newton-Raphson é uma técnica de resolução de sistemas de equações não-lineares. É da adoção desse método, que se deriva o conceito de matriz de rigidez tangente.

A equação que descreve o equilíbrio em um ponto qualquer pode ser escrita da seguinte forma:

$$g(u) = P(u) - F(u) = 0 \quad (2.1)$$

Onde u é o vetor de deslocamentos nodais, $g(u)$ é o vetor das forças desbalanceadas, ou vetor de erro, $P(u)$ é o vetor resultante das forças internas e $F(u)$ é o vetor resultante das cargas externas. Dessa forma, para o sistema estar em equilíbrio $g(u) = 0$.

Esse problema pode ser resolvido com iterações de Newton-Raphson, através da seguinte expressão

$$u_{i+1} = u_i - (K_i^t)^{-1} g(u_i) \quad (2.2)$$

Onde se define a matriz de rigidez tangente como a primeira derivada do vetor de forças desbalanceadas em função do deslocamento, ou seja, a matriz de rigidez tangente pode ser escrita como:

$$K_i^t = \left. \frac{\partial g}{\partial u} \right|_{u_i} \quad (2.3)$$

Pode-se decompor o vetor resultante das cargas internas $P(u)$ em um esforço interno escalar $N(u)$ e um operador geométrico $C(u)$.

$$P(u) = N(u)C(u) \quad (2.4)$$

$$g(u) = N(u)C(u) - F(u) \quad (2.5)$$

Isso resulta, para matriz de rigidez tangente global do sistema, a equação (2.6).

$$K_t = \frac{\partial}{\partial u} (CN - F) = N^T \frac{\partial C}{\partial u} + C \frac{\partial N}{\partial u} - \frac{\partial F}{\partial u} = K_e + K_g + K_{ext} \quad (2.6)$$

A matriz de rigidez geométrica K_g corresponde à relutância da estrutura de mudar sua geometria, dado certo estado de solicitações. A matriz de rigidez

elástica K_e corresponde à relutância da estrutura de mudar seu estado de solicitação, dada certa configuração geométrica. De forma similar, a matriz de rigidez externa K_{ext} corresponde à relutância do campo de forças externas de mudar sua configuração.

É importante ressaltar que a decomposição $P = CN$ pode não ser única, uma vez que K_g e K_e dependem de definições particulares. Entretanto, a soma $K_g + K_e$ é única.

Buscando uma maior simplicidade para esta exposição, admitem-se, neste trabalho, relações constitutivas elástico-lineares, e medidas lineares de deformação.

2.2 Elemento de Treliza

Um cabo pode ser representado por uma sucessão encadeada de barras articuladas, carregadas exclusivamente nos pontos de articulação e, portanto, trabalhando exclusivamente sob esforços axiais. Dessa forma, o problema passa a ser naturalmente discreto, ou seja, pode-se empregar o elemento de barra de treliza para representar qualquer combinação de cabos e barras [Pauletti, 2003]. Sob o ponto de vista da otimização do modelo numérico, não é interessante derivar diretamente a matriz de rigidez global da estrutura. É mais conveniente tratar do problema para cada uma das barras (ou “elementos”), encontrar a matriz de rigidez de cada elemento, e, depois, adicionar essas contribuições na matriz global do sistema. Para tanto, considera-se que o vetor dos deslocamentos nodais do (e) -ésimo elemento, designado por $u(e)$, pode ser obtido a partir de

$$u(e) = A(e)u \quad (2.7)$$

onde $A(e)$ é a matriz de conectividade ou de incidências do (e) -ésimo elemento de ordem $6 \times 3n$ e u é o vetor dos deslocamentos globais da estrutura, de forma que $A_{li}^6 = A_{2j}^6 = I_3$ e $A_{1k}^6 = A_{2k}^6 = 0$, $k \neq i$, $k \neq j$, onde 0 e I_3 são, respectivamente, a matriz nula e a matriz identidade de ordem 3.

Evidentemente, não há necessidade de se proceder às operações matriciais presentes na equação (2.7), as quais envolvem um grande número de multiplicações por zero ou um, e soma de elementos nulos. Mais econômico, computacionalmente, é colocar os termos da matriz de rigidez de cada elemento diretamente nas suas posições correspondentes na matriz de rigidez global.

2.2.1 Elemento de Treliça Geometricamente Exato

Considere-se, agora, a obtenção da matriz de rigidez tangente k_t , de um elemento em uma dada configuração, definida por nós i e j , na numeração global, correspondendo aos nós 1 e 2, respectivamente, na numeração local do elemento.

Figura 20 - Elemento finito de treliça

O vetor das forças internas fica descrito pela equação (2.8).

$$p = \begin{bmatrix} -vN \\ vN \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -v \\ v \end{bmatrix} N = CN \quad (2.8)$$

Onde o escalar N é o esforço interno do elemento, v é o versor direcionado do nó 1 para o nó 2 e C é o operador geométrico.

Como já mencionado, a matriz de rigidez tangente do elemento é definida como

$$k_t = k_e + k_g = C \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right)^T + N \frac{\partial C}{\partial u} \quad (2.9)$$

Admitindo a linearidade física, temos a relação (2.10).

$$N = \frac{EA}{\ell^r} (\ell - \ell^r) \quad (2.10)$$

Onde ℓ^r é o comprimento de referência ou comprimento indeformado do elemento. Sendo o elemento definido na configuração inicial ℓ_0 , já sob ação de uma força normal N^0 , ℓ^r é dado pela expressão (2.11).

$$\ell^r = \frac{EA}{EA + N^0} \ell^0 \quad (2.11)$$

Tem-se, portanto:

$$\frac{\partial N}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{EA}{\ell^r} (\ell - \ell^r) \right) = \frac{EA}{\ell^r} \frac{\partial \ell}{\partial u} = \frac{EA}{\ell^r} C \quad (2.12)$$

O que resulta, para a parcela elástica da rigidez tangente:

$$k_e = C \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right)^T = C \frac{EA}{\ell^r} C^T = \frac{EA}{\ell^r} C C^T \quad (2.13)$$

A parcela geométrica da rigidez tangente pode ser expressa, após derivações, como:

$$k_g = N \frac{\partial C}{\partial u} = \frac{N}{\ell} \begin{bmatrix} (I_3 - vv^T) & -(I_3 - vv^T) \\ -(I_3 - vv^T) & (I_3 - vv^T) \end{bmatrix} \quad (2.14)$$

Por fim, a matriz de rigidez tangente é obtida através da soma da parcela elástica e geométrica:

$$k_t = k_e + k_g = \frac{EA}{\ell^r} \begin{bmatrix} vv^T & -vv^T \\ -vv^T & vv^T \end{bmatrix} + \frac{N}{\ell} \begin{bmatrix} (I_3 - vv^T) & -(I_3 - vv^T) \\ -(I_3 - vv^T) & (I_3 - vv^T) \end{bmatrix} \quad (2.15)$$

2.2.2 Elemento de Trelça de Tensão Constante - VIL (Variable Initial Lenght)

Trata-se de uma especialização interessante do elemento de trelça, que considera um estado de tração constante, fisicamente correspondente, por exemplo, à ação de um acionador pneumático ideal, como um macaco de protensão. Nesse caso, como a força normal não varia, tem-se $k_e = 0$ e a rigidez tangente resume-se à parcela k_g . Um elemento com essas características já foi anteriormente proposto por Meek, com o nome de “variable initial lenght

element” [Pauletti, 2003]. O comprimento inicial variável é calculado, para cada configuração de equilíbrio, de modo a obter-se

$$\ell^r = \frac{E}{E + N^0} \ell \quad (2.16)$$

O comprimento inicial varia, uma vez que a configuração do elemento é atualizada em cada situação de equilíbrio, variando, assim, em cada iteração, o valor do comprimento da configuração corrente ℓ .

Os elementos de treliça VIL serão utilizados nos exemplos preliminares, contidos neste trabalho, com o intuito de simular, de forma mais realista, a ação de um carregamento externo imposto. Se as forças fossem aplicadas diretamente em uma extremidade de barra de treliça, a direção da carga não se alteraria para as diferentes configurações que o sistema assume o que não retrataria bem a realidade.

2.3 Elemento de Cabo Escorregando

Um elemento de cabo ideal (cabo infinitamente flexível, finitamente extensível, escorregando sem atrito), foi inicialmente desenvolvido por Aufaure [1993]. Pauletti & Pimenta [1995] generalizaram o elemento para incluir o efeito do atrito, apresentando o escorregamento não-ideal. No contexto das estruturas retesadas, esse elemento é muito útil, por exemplo, para representar os cabos de borda das membranas retesadas, os quais, usualmente, têm liberdade para escorregar dentro de bainhas. O novo elemento encontra aplicações também em outros contextos além das estruturas retesadas, como, por exemplo, na representação dos cabos de protensão sem aderência, de uso corrente nas estruturas de concreto protendido [Pauletti & Pimenta, 1995], [Deifeld, 2001].

2.3.1 Elemento de Cabo Ideal (sem atrito)

Considere um elemento de cabo ideal, representado na Figura 21.

Figura 21 - Elemento de cabo ideal

O comprimento total do cabo, na configuração corrente, é dado pela soma dos comprimentos de cada um dos trechos, e pode ser calculado por:

$$\ell = \ell_1 + \ell_2 = \sqrt{l_1^T l_1} + \sqrt{l_2^T l_2} \quad (2.17)$$

$$l_1 = x_1^0 + u_1 - x_3^0 + u_3 \quad l_2 = x_2^0 + u_2 - x_3^0 + u_3 \quad (2.18)$$

De forma análoga ao elemento de treliça, o elemento de cabo de três nós é definido em uma configuração inicial, sujeito a uma força normal N^0 , constante ao longo de todo o elemento. O comprimento do cabo, na configuração inicial, é dado pela soma dos comprimentos iniciais de cada trecho.

O comprimento total indeformado do elemento de cabo, considerando um comportamento elástico linear, é dado por:

$$\ell^r = \frac{EA}{EA + N^0} \ell^0 \quad (2.19)$$

Dessa forma, a força normal na configuração corrente é:

$$N = \frac{EA}{\ell^r} (\ell - \ell^r) \quad (2.20)$$

O vetor de deslocamentos nodais do elemento é:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

O vetor das forças nodais é definido como:

$$p = N \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ -(v_1 + v_2) \end{bmatrix} = CN \quad (2.22)$$

Onde a força normal N corresponde a um esforço interno escalar, a matriz C é o operador geométrico de ordem 9×1 , e v_1 e v_2 são os versores direcionais dos trechos 1 e 2, indicados na Figura 21.

De forma análoga ao elemento de treliça, a matriz de rigidez tangente do elemento de cabo ideal fica definida como:

$$k_t = k_e + k_g = C \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right)^T + N \frac{\partial C}{\partial u} \quad (2.23)$$

Onde a parcela elástica da matriz de rigidez do elemento de cabo ideal, após alguma álgebra, pode ser expressa como:

$$k_e = \frac{EA}{\ell^r} \begin{bmatrix} v_1 v_1^T & v_1 v_2^T & -(v_1 v_1^T + v_1 v_2^T) \\ v_2 v_1^T & v_2 v_2^T & -(v_2 v_1^T + v_2 v_2^T) \\ -(v_1 v_1^T + v_2 v_1^T) & -(v_1 v_2^T + v_2 v_2^T) & (v_1 v_1^T + v_1 v_2^T + v_2 v_1^T + v_2 v_2^T) \end{bmatrix} \quad (2.24)$$

A parcela geométrica fica representada da seguinte forma, após as derivações:

$$k_g = \begin{bmatrix} \frac{N}{\ell_1} (I_3 - v_1 v_1^T) & 0 & -\frac{N}{\ell_1} (I_3 - v_1 v_1^T) \\ 0 & \frac{N}{\ell_2} (I_3 - v_2 v_2^T) & -\frac{N}{\ell_2} (I_3 - v_2 v_2^T) \\ -\frac{N}{\ell_1} (I_3 - v_1 v_1^T) & -\frac{N}{\ell_2} (I_3 - v_2 v_2^T) & \left(-\frac{N}{\ell_1} (I_3 - v_1 v_1^T) + \frac{N}{\ell_2} (I_3 - v_2 v_2^T) \right) \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

A matriz de rigidez do elemento de cabo escorregando sem atrito é obtida pela soma da parcela elástica e da geométrica. Denotando, por concisão,

$$M_{ij} = v_i v_j^T \quad M_i = I_3 - v_i v_i^T, \quad i = 1, 2$$

Pode-se escrever:

$$k_t = \begin{bmatrix} \frac{EA}{\ell^r} M_{11} + \frac{N}{\ell_1} M_1 & \frac{EA}{\ell^r} M_{12} & -\frac{EA}{\ell^r} (M_{11} + M_{12}) - \frac{N}{\ell_1} M_1 \\ \frac{EA}{\ell^r} M_{21} & \frac{EA}{\ell^r} M_{22} + \frac{N}{\ell_2} M_2 & -\frac{EA}{\ell^r} (M_{21} + M_{22}) - \frac{N}{\ell_2} M_2 \\ -\frac{EA}{\ell^r} (M_{11} + M_{21}) - \frac{N}{\ell_1} M_1 & -\frac{EA}{\ell^r} (M_{12} + M_{22}) - \frac{N}{\ell_2} M_2 & \frac{EA}{\ell^r} (M_{11} + M_{12} + M_{21} + M_{22}) + \left(\frac{N}{\ell_1} M_1 + \frac{N}{\ell_2} M_2 \right) \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

Evidentemente, k_t é simétrica, como se requer de um sistema conservativo [Pauletti, 2003]. Percebe-se, ainda, que o elemento colapsa quando o nó intermediário coincide com uma das extremidades, implicando em $\ell_1 = 0$ ou $\ell_2 = 0$. Essa singularidade na modelagem do elemento de cabo escorregando traz alguns problemas à sua aplicação em estruturas correntes, no geral grandes e complexas. Quando se busca uma melhor discretização dos elementos, as ações das forças atuantes no cabo, rotineiramente, causam o colapso do elemento, o que limita bastante o desenvolvimento dos modelos.

Procurando burlar esse problema, e buscando uma abordagem mais geral do elemento em questão, será proposto, a seguir, um super-elemento de cabo escorregando sem atrito. Esse super-elemento tem a formulação generalizada do elemento de três nós para “n” nós.

2.3.2 Super-Elemento de Cabo Escorregando sem Atrito

Considere-se inicialmente um super-elemento de cabo ideal (cabo infinitamente flexível, finitamente extensível, escorregando sem atrito), de n_{seg} segmentos, $nn = n_{seg} + 1$ nós, escorregando por $n_p = n_{seg} - 1$ polias, nos nós intermediários, apresentado na Figura 22 e na Figura 23.

Figura 22 - Super-elemento - Numeração dos nós

Figura 23 - Super-elemento - Numeração dos elementos

Associados a cada trecho i_k , $k = 1, \dots, n_{seg}$ têm-se os vetores dados por:

$$l_k = x_{k+1}^0 + u_{k+1} - x_k^0 - u_k \quad (2.27)$$

O comprimento total do cabo, na configuração corrente, é dado pela soma dos comprimentos de cada um dos trechos, e pode ser calculado pela soma das normas dos vetores l_k , como apresentado na equação (2.28).

$$\ell = \sum_{k=1}^{nseg} \ell_k = \sum_{k=1}^{nseg} (l_k^T l_k)^{\frac{1}{2}} \quad (2.28)$$

Novamente, o elemento é definido em uma configuração inicial, já sujeito a uma força normal N^0 , constante ao longo de todo o elemento. O comprimento do cabo, na configuração inicial, é dado pelo somatório dos comprimentos iniciais de cada segmento.

$$\ell^0 = \sum_{k=1}^{nseg} \left((l_k^0)^T l_k^0 \right)^{\frac{1}{2}} \quad (2.29)$$

Onde

$$l_k^0 = x_{k+1}^0 - x_k^0 \quad (2.30)$$

O comprimento total indeformado do elemento de cabo, $\ell^r = \sum_{k=1}^{nseg} \ell_k^r$, pode ser calculado considerando que, para um material elástico-linear, vale a relação:

$$N^0 = EA \epsilon^0 = \frac{EA}{\ell^r} (\ell^0 - \ell^r) \quad (2.31)$$

portanto:

$$\ell^r = \frac{EA}{EA + N^0} \ell^0 \quad (2.32)$$

Da mesma forma, a força normal na configuração corrente é:

$$N = \frac{EA}{\ell^r} (\ell - \ell^r) \quad (2.33)$$

As forças internas agindo sobre os nós do elemento, $i, i=1, \dots, nn$, na configuração corrente, em equilíbrio, são

$$p_i = N(v_{i-1} - v_i) \quad (2.34)$$

onde os versores direcionais, indicados na Figura 22, são dados por:

$$v_i = \frac{l_i}{\ell_i} \quad i = 1, \dots, (nn-1) \quad (2.35)$$

Sendo definidos ainda:

$$v_0 = v_{nn} = 0$$

De sorte que

$$p_1 = N(v_0 - v_1) = -Nv_1$$

$$p_{nn} = N(v_{nn-1} - v_{nn}) = -Nv_{nn-1}$$

O vetor das forças nodais é definido como

$$p^{(e)} = \begin{bmatrix} p_1 \\ \vdots \\ p_i \\ \vdots \\ p_{nn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 - v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} - v_i \\ \vdots \\ v_{nn-1} - v_{nn} \end{bmatrix} N = CN \quad (2.36)$$

onde a força normal N corresponde a um esforço interno escalar e C é um operador geométrico matricial, de ordem $(3nn \times 1)$.

$$C = \begin{bmatrix} v_0 - v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} - v_i \\ \vdots \\ v_{nn-1} - v_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

O vetor de deslocamentos nodais do elemento é

$$u^{(e)} = \begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_i \\ \vdots \\ u_{nn} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

A matriz de rigidez tangente do (e)-ésimo elemento será, portanto:

$$k_t^{(e)} = \frac{\partial p^{(e)}}{\partial u^{(e)}} = C^{(e)} \left(\frac{\partial N^{(e)}}{\partial u^{(e)}} \right)^T + N^{(e)} \frac{\partial C^{(e)}}{\partial u^{(e)}} = k_e^{(e)} + k_g^{(e)} \quad (2.39)$$

Para a determinação explícita de $k_t^{(e)}$, considere-se inicialmente a parcela elástica $k_e^{(e)}$, omitido-se, em prol da concisão, o índice (e) do elemento.

$$k_e = C \left(\frac{\partial N}{\partial u} \right)^T = C \frac{EA}{\ell^r} \left(\frac{\partial \ell}{\partial u} \right)^T \quad (2.40)$$

Ora,

$$\frac{\partial \ell}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\sum_{i=1}^{nn-1} (l_i^T l_i)^{\frac{1}{2}} \right) = \sum_{i=1}^{nn-1} \left(\frac{1}{\ell_i} \left(\frac{\partial l_i}{\partial u} \right)^T l_i \right) \quad (2.41)$$

Tem-se ainda que

$$\frac{\partial l_i}{\partial u} = \begin{bmatrix} 0 & \dots & \overset{i}{\downarrow} -I & \overset{i+1}{\downarrow} I & \dots & 0 \end{bmatrix}, i = 1, \dots, nn-1$$

onde I e 0 são, respectivamente, a matriz identidade e a matriz nula de ordem três.

De onde obtém-se:

$$\frac{\partial \ell}{\partial u} = \sum_{i=1}^{nn-1} \left(\frac{1}{\ell_i} \left(\frac{\partial l_i}{\partial u} \right)^T l_i \right) = \sum_{i=1}^{nn-1} \frac{1}{\ell_i} \begin{bmatrix} 0_3 \\ \vdots \\ -I_3 \\ I_3 \\ \vdots \\ 0_3 \end{bmatrix} l_i$$

$$\frac{\partial \ell}{\partial u} = \begin{bmatrix} -v_1 \\ \vdots \\ v_i - v_{i-1} \\ v_{i+1} - v_i \\ v_{i+1} - v_i \\ \vdots \\ v_{nn-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_0 - v_1 \\ \vdots \\ v_i - v_{i-1} \\ v_{i+1} - v_i \\ v_{i+1} - v_i \\ \vdots \\ v_{nn-1} - v_{nn} \end{bmatrix} = C \quad (2.42)$$

De onde obtém-se a parcela elástica da matriz de rigidez do elemento de cabo ideal:

$$k_e = \frac{EA}{\ell^r} CC^T \quad (2.43)$$

Considere-se agora a obtenção da parcela geométrica da matriz de rigidez:

$$k_g = N \frac{\partial C}{\partial u} = N \frac{\partial}{\partial u} \begin{bmatrix} v_0 - v_1 \\ \vdots \\ v_{i-1} - v_i \\ \vdots \\ v_{nn-1} - v_{nn} \end{bmatrix} = N \begin{bmatrix} \frac{\partial v_0}{\partial u} - \frac{\partial v_1}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial v_{i-1}}{\partial u} - \frac{\partial v_i}{\partial u} \\ \vdots \\ \frac{\partial v_{nn-1}}{\partial u} - \frac{\partial v_{nn}}{\partial u} \end{bmatrix} \quad (2.44)$$

Ora,

$$\frac{\partial v_i}{\partial u} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{l_i}{\ell_i} \right) = \frac{1}{\ell_i^2} \left(\ell_i \frac{\partial l_i}{\partial u} - l_i \left(\frac{\partial \ell_i}{\partial u} \right)^T \right) \quad (2.45)$$

considerando:

$$\frac{\partial v_i}{\partial u} = \frac{1}{\ell_i^2} \left(\ell_i [0_3 \quad \dots \quad -I_3 \quad I_3 \quad \dots \quad 0_3] - l_i \left(\frac{\partial \ell_i}{\partial u} \right)^T \right) \quad (2.46)$$

Ora,

$$\frac{\partial \ell_i}{\partial u} = \frac{\partial (l_i^T l_i)}{\partial u} = \left(\frac{1}{\ell_i} \left(\frac{\partial l_i}{\partial u} \right)^T l_i \right) = \frac{1}{\ell_i} \begin{bmatrix} 0_3 \\ \vdots \\ -I_3 \\ I_3 \\ \vdots \\ 0_3 \end{bmatrix} l_i = \begin{bmatrix} 0_3 \\ \vdots \\ -v_i \\ v_i \\ \vdots \\ 0_3 \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

$$\left(\frac{\partial \ell_i}{\partial u} \right)^T = [0_3 \quad \dots \quad -v_i^T \quad v_i^T \quad \dots \quad 0_3]$$

logo,

$$\frac{\partial v_i}{\partial u} = \frac{1}{\ell_i} ([0_3 \quad \dots \quad -I_3 \quad I_3 \quad \dots \quad 0_3] - [0_3 \quad \dots \quad -v_i v_i^T \quad v_i v_i^T \quad \dots \quad 0_3])$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial u} = \frac{1}{\ell_i} [0_3 \quad \dots \quad -(I_3 - v_i v_i^T) \quad (I_3 - v_i v_i^T) \quad \dots \quad 0_3]$$

Denotando

$$M_i = I_3 - v_i v_i^T$$

$$M_0 = M_m = 0$$

$$\frac{\partial v_i}{\partial u} = \frac{1}{\ell_i} [0_3 \quad \dots \quad -M_i \quad M_i \quad \dots \quad 0_3]$$

Portanto,

$$k_g = N \begin{bmatrix} \left(M_0 + \frac{M_1}{\ell_1}\right) & \frac{-M_1}{\ell_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \frac{-M_1}{\ell_1} & \left(\frac{M_1}{\ell_1} + \frac{M_2}{\ell_2}\right) & \frac{-M_2}{\ell_2} & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-M_2}{\ell_2} & \left(\frac{M_2}{\ell_2} + \frac{M_3}{\ell_3}\right) & \frac{-M_3}{\ell_3} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-M_{i-1}}{\ell_{i-1}} & \left(\frac{M_{i-1}}{\ell_{i-1}} + \frac{M_i}{\ell_i}\right) & \frac{-M_i}{\ell_i} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{-M_i}{\ell_i} & \left(\frac{M_i}{\ell_i} + \frac{M_{i+1}}{\ell_{i+1}}\right) & \frac{-M_{i+1}}{\ell_{i+1}} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \frac{-M_{i+1}}{\ell_{i+1}} & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \frac{-M_{m-2}}{\ell_{m-2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \frac{-M_{m-2}}{\ell_{m-2}} & \left(\frac{M_{m-2}}{\ell_{m-2}} + \frac{M_{m-1}}{\ell_{m-1}}\right) & \frac{-M_{m-1}}{\ell_{m-1}} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \frac{-M_{m-1}}{\ell_{m-1}} & \left(\frac{M_{m-1}}{\ell_{m-1}} + \frac{M_m}{\ell_m}\right) \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Nota-se que matriz de rigidez do super-elemento conta com muito menos zeros do que matriz do elemento de cabo escorregando com três nós, fato que se deve a interação existente entre todos os nós que compõem o super-elemento. A mudança no comprimento de um trecho do cabo interfere no comprimento total do elemento, o que influencia todos os seus demais trechos, ou seja, o deslocamento de um dos nós internos do super-elemento interfere no comportamento dos demais, desta forma cada nó contribui para rigidez elástica do conjunto. No caso do elemento de três nós, apesar do deslocamento do nó de polia influenciar os dois trechos do elemento de cabo, os elementos de cabo não interagem entre si, formando uma cadeia de trechos isolados. Desta forma, o super-elemento relata melhor a realidade, formando uma ferramenta mais flexível, real e de modelagem mais simples.

3 IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

Os elementos finitos de cabo escorregando sem atrito, descritos no Capítulo 2, foram implementados computacionalmente no ambiente MATLAB[®] e incorporados ao programa de análise de estruturas retesadas desenvolvido por Guirardi e Pauletti, chamado SATS (*System for the Analysis of Taut Structures*). O programa SATS é capaz de gerar resultados em deslocamentos, tensões e deformações, para estrutura de membranas e de cabos.

A formulação do elemento de treliça geometricamente exato e a do elemento de membrana de três nós, baseado na formulação natural de Argyris, já estavam implementadas no SATS quando iniciou-se esse trabalho, não cabendo aqui, portanto, uma discussão sobre tais implementações. A formulação do elemento de membrana pode ser encontrada em Pauletti [2003] e Guirardi [2006].

O SATS é um programa de agradável interface com o usuário, como ilustra a Figura 24, possibilita a visualização gráfica dos dados iniciais do modelo antes do processamento.

Figura 24 - Interface gráfica do programa SATS

Permite a entrada de dados através de rotinas do próprio MATLAB®, usualmente empregadas no caso de exemplos com poucos elementos, ou através de importação de arquivos de dados gerados no Microsoft Excel®, no caso de estruturas com maior número de elementos.

Na busca da solução, há a opção de limitar o número máximo de iterações e a tolerância dos erros para a convergência dos deslocamentos, de acordo com a necessidade avaliada para o problema em estudo. Durante a busca da solução, o programa traça gráficos de convergência dos deslocamentos, como pode ser visto na Figura 25. A curva da esquerda representa o erro em função do número de iterações e a da direita representa o logaritmo natural do erro em função do número de iterações, desde a configuração inicial até a convergência obtida pelo programa.

Figura 25 – Gráfico de convergência dos deslocamentos (SATS)

Após a conclusão do processamento, o programa indica o número de iterações que foram necessárias para atingir a solução e tempo total de processamento. Esses dados serão apresentados nos exemplos numéricos abordados no capítulo a seguir.

Há, ainda, a opção de Nova Análise, através da qual são executadas rotinas que atualizam a geometria, tensões, resistência dos materiais e/ou carregamentos, recalculando o modelo com as novas configurações. Essa funcionalidade é bastante útil, por exemplo, na etapa de busca da forma, como será apresentado no Capítulo 5, onde as características físicas dos materiais são alteradas, com o objetivo de dar maior flexibilidade à estrutura e obter sua forma de equilíbrio.

Com a forma viável encontrada, os materiais têm suas características corrigidas e uma nova análise é realizada. Essa opção também permite a análise incremental de carregamento na estrutura, necessária para cargas mais elevadas que não podem ser aplicadas integralmente em uma só etapa ou a convergência não é atingida.

O programa apresenta opções que permitem traçar, com escala de cores, os deslocamentos encontrados, na forma de “curvas de nível”. É possível, ainda, visualizar as tensões e deformações por nós e por elementos. Os resultados de deslocamentos, coordenadas finais, tensões e deformações podem, também, ser exportados para uma planilha do Microsoft Excel®, o que facilita a interpretação e armazenamento dos dados [Guirardi, 2006]. Para uma descrição mais completa da estrutura e organização do programa SATS ver Guirardi [2006].

A proposta deste trabalho era a de incluir, no programa SATS já desenvolvido, o elemento de cabo escorregando sem atrito de três nós, o elemento de treliça de tensão constante (VIL) e o super-elemento de cabo escorregando sem atrito com “ n ” nós. Para isso, foram acrescentadas três rotinas dentro do programa, *build_slidingtruss_matrices*, *build_vil_matrices* e *build_superelement_matrices*, respectivamente, além de modificações simples no restante do programa, que possibilitaram a inclusão desses novos elementos. Nessas rotinas, são calculadas as matrizes de rigidez locais dos elementos (k), seguindo a formulação apresentada no Capítulo 2, através da soma da parcela elástica (k_e) e da parcela geométrica (k_g). Obtidas as matrizes de rigidez locais, é realizado o espalhamento na matriz de rigidez global da estrutura (K). Também são calculados os vetores das forças internas nos elementos, que tem suas parcelas somadas, para compor o vetor das forças internas global da estrutura (P).

Com a matriz de rigidez, o vetor das forças internas e o vetor das forças externas, calculado baseado nos carregamentos aplicados ao modelo, é calculado o vetor das forças desbalanceadas (G) e, com isso, os deslocamentos, até atingir o erro limite especificado pelo usuário.

4 EXEMPLOS PRELIMINARES

Neste capítulo são apresentadas algumas aplicações iniciais dos elementos de cabo deslizando sem atrito, com o objetivo de validar as implementações realizadas e suas inclusões no programa SATS. Isso é feito através de dois exemplos numéricos, cuja solução analítica é conhecida.

Com o objetivo de ilustrar a aplicabilidade do elemento desenvolvido, é elaborado um terceiro exemplo, o qual trata o caso de uma viga de concreto, com protensão não-aderente. Comparam-se os resultados dos deslocamentos obtidos, modelando-se o cabo de protensão, ora com elementos de treliça, em um programa comercial de análise estrutural, ora com elementos de cabo ideal, no programa SATS.

4.1 Verificação do elemento finito de cabo escorregando sem atrito

O primeiro exemplo foi adaptado do apresentado originalmente por Pauletti & Pimenta [1995], no qual se modela o comportamento de um único elemento de cabo com nós de extremidade do elemento fixos e carregamento aplicado no nó intermediário.

Os valores do deslocamento, assumindo o material do cabo com elevada rigidez, ou seja, desconsiderando a deformação do elemento, são comparados com os valores analíticos para o caso que define geometricamente a curva de uma elipse.

O segundo exemplo traz o caso de um cabo suspenso, sujeito a um carregamento uniformemente distribuído, representado por forças normais constantes. Os resultados obtidos, considerando a não-linearidade geométrica, são analisados e comparados com os valores obtidos a partir da formulação analítica da flecha de um cabo catenário.

4.1.1 Exemplo 1A (Elipse) – Elemento de cabo ideal

Neste exemplo, modela-se o comportamento de um único elemento de cabo, considerando escorregamento ideal, com nós de extremidade fixos e carregamento aplicado no nó intermediário, ou “nó de polia”, o qual está inicialmente localizado no ponto médio do cabo, conforme o esquema mostrado na Figura 26. Os trechos do elemento de cabo têm comprimento inicial de 5 m. Os nós numerados como 1 e 2 são pontos de apoio fixos e o nó de número 3 é o nó de polia.

Figura 26 –Exemplo 1A - Descrição

Considera-se o material do cabo com elevada rigidez, para que seja desprezível a deformação do elemento, o que torna possível a comparação dos resultados numéricos, em termos de deslocamentos, fornecidos pelo programa SATS, com os valores analíticos, obtidos para o caso que define geometricamente uma elipse.

A Figura 27 ilustra os dados iniciais gerados no programa SATS. Em verde, aparece o elemento de cabo na sua configuração inicial, com o nó central de polia destacado em vermelho.

Figura 27 - Exemplo 1A – Configuração inicial (SATS)

A elipse é o conjunto dos pontos P do plano, tais que a soma das distâncias de P a dois pontos fixos $F1$ e $F2$ (focos) é constante. No caso descrito neste exemplo, os focos da elipse são os apoios. Dessa forma, variando-se as componentes da carga aplicada, ou seja, o ângulo de inclinação da força resultante, a posição de equilíbrio do nó de polia varia, descrevendo um arco de elipse, como aparece na Figura 28.

Figura 28– Definição geométrica da elipse

Os valores obtidos na análise do elemento de cabo em questão foram comparados com as coordenadas que definem a curva plana da elipse, dadas pela equação (4.1).

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (4.1)$$

Como mencionado, para manter a premissa de que o elemento é indeformável, o cabo foi modelado com rigidez axial elevada, $EA = 1.10^{10} \text{ kN}$. Foi adotado, como critério de parada, o erro limite de 1.10^{-6} m (em deslocamentos). A tensão inicial aplicada no cabo foi de $N_0 = 1.10^3 \text{ kN}$.

Inicialmente, o cabo foi tracionado por uma força vertical $F_y = 100 \text{ kN}$, agindo sobre o nó de polia, na direção da bissetriz do ângulo interno γ_r , formado pelos dois segmentos do cabo. Em seguida, foi aplicada uma força horizontal F_x , com intensidade variando desde 0 a 600 kN. Na seqüência, foi anulada a componente vertical e aplicada somente $F_x=100 \text{ kN}$. Para concluir, o carregamento F_y teve sua orientação invertida.

A Tabela 1 apresenta, para cada valor adotado para as componentes do carregamento (F_x e F_y), os valores das coordenadas finais do nó central (x e y) obtidos no programa SATS e o número de iterações necessárias para atingir o equilíbrio.

Força Aplicada		Coord. Final SATS		Eq. Elipse	Número de Iterações	Erro
$F_x \text{ (kN)}$	$F_y \text{ (kN)}$	$x \text{ (m)}$	$y \text{ (m)}$	$Y \text{ (m)}$		
0	100	0,0000	4,0000	4,0000	2	0,0000%
50	100	2,6500	3,3920	3,3920	25	-0,0003%
100	100	3,9043	2,4988	2,4988	25	0,0010%
150	100	4,4118	1,8824	1,8823	35	-0,0053%
200	100	4,6251	1,5196	1,5197	30	0,0048%
400	100	4,9029	0,7845	0,7845	35	0,0023%
600	100	4,2395	2,1206	2,1206	10	0,0012%
100	0	5,0000	0,0000	0,0000	29	0,0000%
100	-100	3,9043	2,4988	2,4988	48	0,0010%
200	-100	4,6424	1,4856	1,4855	35	-0,0047%
0	-100	0,0000	4,0000	4,0000	2	0,0000%

Tabela 1 – Deslocamentos x Força aplicada

A partir da equação da elipse, foi calculado o valor da componente Y , utilizando como dado conhecido o valor da coordenada x fornecido pelo SATS. O novo valor encontrado para Y foi comparado com o do programa. A partir desses dados, foi calculado o erro. Os deslocamentos obtidos, através da análise numérica no SATS, não resultaram, em ponto algum da curva, em erro maior do que 0,0053%, quando comparados com a equação da elipse. Isso comprova o bom desempenho do novo elemento implementado.

A Figura 29 mostra, em vermelho, as configurações de equilíbrio do nó central para os diferentes valores da carga aplicada e, em verde, a configuração inicial do problema. Aparece também, na ilustração, o arco de elipse traçado a partir das dimensões adotadas neste exemplo.

Figura 29 – Exemplo 1A - Posições de equilíbrio para as diferentes cargas aplicadas

A Figura 30 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos do elemento de cabo, para o caso de carregamento com componentes $F_x = F_y = 100kN$. A curva da direita representa o erro em função do número de iterações e, a da esquerda, representa o logaritmo natural do erro em função do número de iterações, desde a configuração inicial até a convergência obtida pelo programa.

O tempo de resolução no SATS foi 1,5 segundos, após 25 iterações, com uma precisão de 10^{-6} m.

Figura 30 – Exemplo 1A – Gráficos de convergência dos deslocamentos (SATS)

A Figura 31 ilustra a saída dos resultados do SATS para o exemplo em questão, na qual a linha verde tracejada representa a posição inicial do sistema e a linha vermelha representa a posição de equilíbrio do cabo, para o caso de carregamento de $F_x = F_y = 100kN$.

Figura 31 - Exemplo 1A - Posição de equilíbrio (SATS)

4.1.2 Exemplo 1B (Elipse) – Super-elemento de cabo ideal

Com o objetivo de comparar o desempenho do elemento de cabo de três nós, escorregando sem atrito (**E3**), e o do super-elemento de cabo ideal (**SE**), o mesmo exemplo descrito anteriormente, sob condições iniciais idênticas e submetido aos mesmos carregamentos, foi analisado com modelo **SE**.

Figura 32 -Exemplo 1B - Numeração dos nós

Como mostra a Figura 32, a numeração local dos nós sofreu alteração, devido às diferenças na formulação dos elementos. No caso do super-elemento, o nó de polia é o de número 2, enquanto os apoios fixos correspondem aos nós 1 e 3. A Figura 33 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos do super-elemento de cabo, para o caso de carregamento com componentes $F_x = F_y = 100kN$, da mesma forma como apresentado anteriormente para o elemento de três nós. O tempo de resolução foi 1,36 segundos, após 31 iterações, com a mesma precisão em termos de deslocamentos de 10^{-6} m.

Figura 33 – Exemplo 1B - Gráficos de convergência em deslocamentos (SATS)

A Figura 34 apresenta a saída dos resultados do SATS, no qual a linha azul tracejada representa a posição inicial do sistema e a linha vermelha representa a posição de equilíbrio do cabo, para o caso de carregamento de $F_x = F_y = 100kN$.

Figura 34 – Exemplo 1B - Configuração de equilíbrio (SATS)

Os resultados obtidos com o modelo **SE** são muito próximos daqueles obtidos a partir da modelagem com **E3**. A Tabela 2 apresenta os valores obtidos na modelagem com os dois tipos de elemento, na qual as duas primeiras colunas trazem os valores de carregamento adotados, as colunas 3 e 4 mostram os valores das coordenadas do nó central, obtidas no caso do elemento de cabo,

as colunas 5 e 6 mostram os valores dessas coordenadas para o caso do super-elemento e as colunas 7 e 8 apresentam um comparativo percentual entre os valores obtidos para as coordenadas através dois modelos. A coluna 9 apresenta os valores analíticos calculados a partir da equação da elipse, conforme demonstrado no exemplo 1, assumindo-se como referência os valores gerados no SATS para a coordenada x . Por último, a coluna 10 apresenta os valores calculados dos erros relativos nas coordenadas y , obtidas através da modelagem do super-elemento, em relação aos valores analíticos para Y . Os erros são muito baixos, inferiores a 0,006%, o que atesta o bom desempenho do modelo utilizando a implementação do super-elemento de cabo escorregando sem atrito, de forma análoga ao elemento de cabo com três nós.

Força Aplicada		Elemento Cabo		Super-Elemento Cabo		Comparativo		Eq. Elipse	Erro
F_x (kN)	F_y (kN)	x (m)	y (m)	x (m)	y (m)	x	y	Y (m)	
0	100	0,0000	4,0000	0,0000	4,0000	0,0000%	0,0000%	4,0000	0,0000%
50	100	2,6500	3,3920	2,6500	3,3920	0,0000%	0,0000%	3,3920	-0,0003%
100	100	3,9043	2,4988	3,9036	2,4995	0,0179%	-0,0280%	2,4995	0,0010%
150	100	4,4118	1,8824	4,4118	1,8824	0,0000%	0,0000%	1,8823	-0,0053%
200	100	4,6251	1,5196	4,6424	1,4856	-0,3740%	2,2374%	1,4855	-0,0047%
400	100	4,9029	0,7845	4,9029	0,7845	0,0000%	0,0000%	0,7845	0,0023%
100	-100	3,9043	2,4988	3,9043	2,4988	0,0000%	0,0000%	2,4988	0,0010%
200	-100	4,6424	1,4856	4,6429	1,4846	-0,0108%	0,0673%	1,4845	-0,0048%
0	-100	0,0000	4,0000	0,0000	4,0000	0,0000%	0,0000%	4,0000	0,0000%

Tabela 2 - Comparação dos deslocamentos: Elemento de Cabo x Super-Elemento de Cabo

As diferenças entre os modelos **E3** e **SE**, apesar de pequenas (inferiores a 2,23%), existem e devem-se, principalmente, às variações na formulação dos elementos, as quais levaram à implementações distintas, como demonstrado no Capítulo 2. A Figura 35 enfatiza a grande proximidade entre os valores analíticos e os resultados de ambos os modelos numéricos. Em verde, são apresentadas as coordenadas do modelo **E3**, em magenta, as coordenadas referentes ao modelo **SE** e, em vermelho, os valores analíticos. Visualmente, não é possível distinguir as três curvas na figura, já que estão praticamente superpostas.

Figura 35 – Exemplo 1 - Comparação dos resultados

A Figura 36 apresenta a configuração de equilíbrio para o caso de carregamento $F_x = 200kN$ e $F_y = 100kN$. O mesmo padrão de cores foi adotado nessa figura, na qual pode-se notar o quão pequenos são os erros obtidos em ambos os modelos.

Figura 36 – Exemplo 1- Comparativo de posições de equilíbrio

Os erros apresentados na Tabela 2, gerados a partir da comparação dos resultados obtidos através da modelagem numérica e da análise analítica, aparecem ilustrados na Figura 37. Em verde, plotam-se os valores dos erros obtidos a partir do modelo **E3** e, em vermelho, os valores obtidos através do modelo **SE**.

Figura 37 – Exemplo 1- Comparativo de erro entre os modelos

4.1.3 Exemplo 2A (Cabo suspenso) – Elemento de cabo ideal

Este exemplo traz o estudo, considerando a não-linearidade geométrica, de um cabo livremente suspenso, sujeito a um carregamento uniformemente distribuído $w(x)$ ao longo do vão, o qual depende do comprimento do cabo e não da sua projeção horizontal. Esse carregamento pode ser representado por forças normais constantes P , obtidas através da multiplicação do carregamento w adotado, pela largura de influência do nó ΔL , como ilustra a equação (4.2).

$$P = w(x)\Delta L \quad (4.2)$$

Essas condições caracterizam um cabo catenário, o que permite utilizar a sua formulação analítica para balizar os resultados obtidos. A formulação adotada foi extraída de Pauletti [2003]. A Figura 38 ilustra o comportamento do cabo de vão entre apoios L e flecha h , sujeito ao carregamento $w(x)$, com a origem das coordenadas x e y no ponto médio do cabo.

Figura 38 - Cabo catenário

A integração da curva, sujeita às condições de contorno $y(0) = 0$ e $y(\frac{L}{2}) = h$, fornece o valor para a flecha do cabo h .

$$h = \frac{H}{w} \left[\cosh\left(\frac{wL}{2H}\right) - 1 \right] \quad (4.3)$$

O cabo catenário desse exemplo foi modelado através de uma sequência de elementos de treliça encadeados, com um elemento de cabo deslizando sem atrito (**E3**) sobre o nó de polia e com um elemento VIL na extremidade direita, todos sujeitos a uma tração inicial $H_0 = 40,0kN$. O cabo tem a rigidez axial

elevada, $EA = 1.10^7 \text{ kN}$, o que resulta em pequenas deformações nos elementos, simulando o modelo analítico, que considera o cabo inextensível. A distância entre apoios é $L = 10\text{m}$, decomposta em nove elementos de treliça, um elemento de cabo escorregando sem atrito e um elemento de treliça com tensão constante (VIL), totalizando 11 elementos e 13 nós, sendo o nó de número 11 um nó de polia. O cabo está sujeito a um carregamento uniformemente distribuído $w = 5,0\text{kN/m}$, ou seja, a força concentrada equivalente em cada nó é de $P = 5,0\text{kN}$. Foi adotado como critério de parada o erro limite de 1.10^{-7} m (em deslocamentos).

As figuras a seguir ilustram os dados utilizados, partindo da configuração inicial assumida, sob a ação da carga distribuída w , seguida pela numeração dos nós, já sob a ação do carregamento equivalente P concentrado nos nós de extremidade dos elementos de treliça. A numeração dos elementos de treliça, cabo e VIL aparecem nas figuras seguintes.

Numeração dos Nós - Configuração Inicial

a=1

Numeração dos Nós - Carregamento Equivalente

Numeração dos Elementos de Treliça

Numeração dos Elementos de Cabo Escorregando

Numeração dos Elementos VIL

Figura 39 – Exemplo 2A - Numeração dos nós e numeração dos elementos.

A Figura 40 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos do Exemplo 2A, gerados no SATS. O tempo de resolução no SATS foi 0,83 segundos, após 13 iterações, com uma precisão de 10^{-7} m.

Figura 40 – Exemplo 2A - Gráficos de convergência em deslocamentos (SATS)

O valor da coordenada final do nó central (nó 6), o qual representa o valor da flecha do cabo catenário, foi de $h = 1,8371m$. A Figura 41 mostra a configuração de equilíbrio atingida; em preto, está a configuração inicial e, em escala de cores, está a configuração de equilíbrio final calculada.

Figura 41 – Exemplo 2A - Configuração de equilíbrio (SATS)

Uma vez que está sendo usada uma discretização contendo elementos de barra em uma configuração inicial, na qual o cabo forma um ângulo entre o ponto de aplicação do empuxo, e o cabo propriamente dito, temos como valor da força interna no trecho horizontal do cabo o próprio dado de entrada $H_0 = 40,0kN$, mas a parcela da força interna que age sobre o restante do cabo depende deste ângulo formado entre o cabo na posição de equilíbrio e a horizontal. O valor exato da parcela do empuxo agindo no cabo H é fornecido pelo SATS após o processamento da estrutura, para essa configuração e dados iniciais $H = 33,645kN$. A diferença entre os valores dos empuxos inicial e final corresponde ao valor da reação horizontal no apoio do nó 11.

$$R_{H11} = H_0 - H$$

Como o carregamento uniformemente distribuído é simulado através de cargas concentradas nos nós e a parcela do carregamento correspondente ao trecho de cabo entre o apoio de extremidade e o nó seguinte, é desconsiderada no modelo, é feita uma correção neste valor do carregamento w , a partir dos resultados das forças internas obtidos no SATS, ou seja, o valor de w é calculado baseado na redistribuição da soma das reações verticais pelo vão do cabo.

$$w = \frac{R_{V1} + R_{V11}}{L} = \frac{23,366 + 21,634}{10,0} = 4,5 \text{ kN} / \text{m}$$

Os valores de w e H são mais próximos dos dados iniciais do problema quanto maior for a discretização do cabo.

Sendo conhecidos o valor do empuxo real H agindo sobre o cabo, o vão entre apoios L e o carregamento distribuído corrigido w , é possível calcular o valor da flecha final através da equação analítica da catenária e comparar esse valor com o obtido através da análise numérica.

$$h_{corr} = \frac{33,645}{4,5} \left[\cosh \left(\frac{4,5 \times 10,0}{2 \times 33,645} \right) - 1 \right] = 1,7351 \text{ m}$$

Comparando o valor analítico, $h_{corr} = 1,7351 \text{ m}$, com o obtido no programa SATS, $h = 1,8371 \text{ m}$, obteve-se um erro de 5,88%. Este erro tem algumas fontes prováveis, dentre as quais se destacam a discretização grosseira do cabo e o deslocamento horizontal do nó central na posição de equilíbrio, o qual faz com que a coordenada final do nó 6 não expresse exatamente a flecha atingida. Para contornar esses problemas, foi testada uma nova discretização, dobrando o número de nós.

4.1.4 Exemplo 2B (Cabo suspenso) – Elemento de cabo ideal com nova discretização

Neste exemplo, o cabo está sujeito as mesmas condições do modelado anteriormente, ou seja: tração inicial $H_0 = 40,0 \text{ kN}$, rigidez axial $EA = 1.10^7 \text{ kN}$ e distância entre apoios $L = 10 \text{ m}$, mas agora, decomposto em dezenove

elementos de treliça, de comprimento de $l = 0,5m$, um elemento de cabo escorregando sem atrito e um elemento de treliça com tensão constante (VIL), totalizando 21 elementos e 23 nós, sendo o nó de número 21 um nó de polia. O cabo está sujeito ao mesmo carregamento uniformemente distribuído $w = 5,0kN/m$.

A Figura 42 e a Figura 43 ilustram, respectivamente, a configuração inicial, sob a ação da carga distribuída w , e a numeração dos nós e dos elementos, já sob a ação do carregamento equivalente P concentrado nos nós. Em verde, estão representados os elementos de barra, em vermelho, o elemento de cabo ideal e, em rosa, o elemento VIL.

Figura 42 – Exemplo 2B - Configuração inicial

Implementação com Elementos de Treliça, Cabo e VIL

Figura 43 – Exemplo 2B - Numeração dos nós e elementos

A Figura 44 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos gerados no SATS. O tempo de resolução foi 0,95 segundos, após 14 iterações, com uma precisão de 10^{-7} m.

Figura 44 – Exemplo 2B – Gráficos de convergência dos deslocamentos (SATS)

O valor da coordenada final do nó central (nó 11), foi de $h = 1,8848m$. A Figura 45 mostra a configuração de equilíbrio atingida, na qual, em preto, está indicada a configuração inicial e, em escala de cores, a configuração de equilíbrio final.

Figura 45 - Exemplo 2B - Configuração de equilíbrio (SATS)

O valor exato da parcela do empuxo agindo no cabo, fornecido pelo SATS após o processamento da estrutura, foi de $H = 32,907kN$. A correção no valor do carregamento w , a partir dos resultados das forças internas obtidas no SATS, resultou na expressão seguinte:

$$w = \frac{R_{v1} + R_{v21}}{L} = \frac{24,76 + 22,74}{10,0} = 4,75 \text{ kN/m}$$

Como a discretização deste exemplo foi maior do que a proposta inicialmente, os valores de w e H são mais próximos dos dados iniciais do problema.

O valor da flecha analítica final, calculado através da equação da catenária, resulta em:

$$h_{corr} = \frac{32,907}{4,75} \left[\cosh \left(\frac{4,75 \times 10,0}{2 \times 32,907} \right) - 1 \right] = 1,8840 \text{ m}$$

Comparando o valor analítico, $h_{corr} = 1,8840 \text{ m}$, com o obtido no programa SATS, $h = 1,8848 \text{ m}$, obtemos um erro de 0,0413%, o que atesta o bom funcionamento do elemento de cabo ideal.

O erro mínimo seria atingido em uma solução ideal, na qual a discretização seria máxima, com o número “n” de barras, de tamanho tendendo a zero, como ilustra Figura 46.

Figura 46 – Exemplo 2B - Configuração ideal

4.1.5 Exemplo 2C (Cabo suspenso) – Super-elemento de cabo ideal

Novamente, com o objetivo de comparar o desempenho do modelo **E3** e do modelo **SE**, o exemplo descrito anteriormente, sob condições iniciais idênticas, foi modelado utilizando o **SE**. Para isso, os elementos de número 10 e 20 (numeração local dos elementos de cabo da primeira e da segunda

discretização do modelo), foram substituídos por super-elementos de cabo. A Figura 47 e a Figura 48 apresentam, respectivamente, as configurações iniciais dos modelos com 13 nós e com 23 nós, nas quais, em vermelho, estão representados os elementos de barra tipo treliça, em verde, o elemento de treliça tipo VIL e, em azul, o super-elemento de cabo.

Figura 47 – Exemplo 2C com 13 nós - Configuração inicial (SATS)

Figura 48 – Exemplo 2C com 23 nós - Configuração inicial (SATS)

A Figura 49 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos para o modelo com 13 nós. O tempo de resolução foi 1,80 segundos, após 19 iterações, com a precisão em deslocamentos de 10^{-7} m.

Figura 49 - Exemplo 2C com 13 nós - Convergência dos deslocamentos (SATS)

A Figura 50 apresenta resultados dos deslocamentos gerados pelo SATS para essa discretização, na qual a linha preta representa a configuração inicial e a colorida a posição de equilíbrio da catenária.

Figura 50 - Exemplo 2C com 13 nós - Configuração de equilíbrio (SATS)

Os resultados obtidos com o modelo **SE** são exatamente iguais aos obtidos a partir da modelagem com **E3**, ou seja, o valor da flecha dado pelas coordenadas finais do modelo foi de $h = 1,8371m$ e o valor exato da parcela do empuxo agindo no cabo, obtido a partir da reação de apoio do nó 11, foi $H = 33,645kN$. O carregamento uniformemente distribuído, calculado a partir da redistribuição da soma das reações verticais pelo vão do cabo, também foi $w = 4,5kN/m$. Como as duas grandezas resultaram nos mesmos valores do modelo **E3**, com a flecha

analítica da catenária calculada também igual, $h_{corr} = 1,7351m$, chega-se ao mesmo valor de erro: 5,88%.

A Figura 51 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos deste exemplo para o modelo com 23 nós com elementos de **SE**. O tempo de resolução foi 2,54 segundos, após 29 iterações, com a mesma precisão em deslocamentos de 10^{-7} m. A Figura 52 apresenta os resultados dos deslocamentos para esse mesmo modelo. Analogamente ao modelo anterior, a linha preta representa a configuração inicial e a colorida a posição de equilíbrio da catenária.

Figura 51 - Exemplo 2C com 23 nós - Convergência dos deslocamentos (SATS)

Novamente, os resultados gerados a partir da discretização com super-elementos de cabo são exatamente iguais aos obtidos com elementos de cabo, ou seja, o valor da flecha fornecido pela análise numérica do SATS foi de $h = 1,8848m$, o valor exato da parcela do empuxo agindo no cabo foi $H = 32,907kN$ e o carregamento uniformemente distribuído foi $w = 4,75kN/m$. Sendo ambas as grandezas iguais e o valor da flecha analítica da catenária calculada idêntico $h_{corr} = 1,8840m$, chega-se ao mesmo valor baixo para o erro: 0,0413%. Isso atesta, também, o bom funcionamento do super-elemento de cabo de “n” nós escorregando sem atrito.

Figura 52 - Exemplo 2C com 23 nós - Configuração de equilíbrio (SATS)

4.2 Aplicação a problemas de protensão não aderente

Este exemplo simula o caso de uma viga de concreto protendida, com protensão não-aderente, na qual o cabo possui liberdade de deslocamento, ou seja, em uma situação ideal, pode escorregar sem atrito. Esta viga está submetida apenas ao carregamento de protensão propriamente dito, sendo desconsiderados, neste estudo, os efeitos devidos ao peso próprio da viga ou qualquer outro tipo de carregamento atuante.

A Figura 53 representa o problema físico em estudo: uma viga protendida, com protensão não-aderente, na qual a carga de protensão é aplicada em apenas uma das extremidades, sendo a outra extremidade uma ancoragem passiva do cabo.

Figura 53 - Problema físico – Viga de concreto com protensão não-aderente

A viga foi modelada no programa SATS através de elementos de membrana triangulares, com características físicas do material concreto, e o cabo de protensão com elementos ou super-elementos de cabo ideal com características físicas do material aço.

Os resultados de deslocamentos obtidos foram comparados com os valores obtidos a partir da modelagem dessa mesma estrutura em um programa comercial de elementos finitos (SAP 2000®), no qual foram utilizados elementos de *shell* tipo *membrane* representando o concreto e elementos de barra tipo *straight frame* para modelar o cabo de protensão. Buscando simular o efeito da protensão não-aderente no programa SAP 2000®, foi imposto um estado de tensão quase constante, simulado a partir da inserção de um campo de variação de temperatura.

4.2.1 Exemplo 3A (Viga) – Elemento de cabo ideal

Neste exemplo, a distância entre apoios é de 6 m, dividida em seis módulos de 1 m, com altura de 75 cm e largura de 20 cm. O cabo teve a curvatura considerada linear para a obtenção das coordenadas de seus nós.

Como ilustram as figuras seguintes, a viga foi modelada com 21 elementos de membrana, seis elementos de cabo ideal, um elemento de treliça tipo VIL e um elemento de treliça, totalizando 26 nós, sendo os nós de número 2, 17, 19, 21, 23 e 25 nós de polia, ou nós intermediários dos elementos de cabo deslizantes.

Figura 54 – Exemplo 3A - Numeração dos nós

Figura 55 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de membrana

Figura 56 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de cabo ideal

Os elementos de membrana têm módulo de elasticidade $E = 2,5 \cdot 10^{10} \text{ N/m}^2$, espessura de $e = 0,20m$, coeficiente de poisson $\nu = 0,2$ e, como foi

desconsiderado o peso próprio do material, $\gamma_G = 0$. Os elementos de cabo simulam cordoalhas engraxadas de diâmetro $\phi = 12,7\text{mm}$, com área da seção transversal equivalente $A = 7,854 \cdot 10^{-5}\text{m}^2$ e módulo de elasticidade $E = 1,8 \cdot 10^{11}\text{N/m}^2$, o que resulta em uma rigidez axial de $EA = 1,8 \cdot 10^7\text{N}$. A tensão inicial aplicada no cabo foi de $N_0 = 1,0 \cdot 10^6\text{N}$.

Numeração dos Elementos de Treliça

Figura 57 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de treliça

Numeração dos Elementos VIL

Figura 58 - Exemplo 3A - Numeração dos elementos de treliça tipo VIL

A aplicação da protensão no cabo foi simulada através de um elemento de treliça com tensão constante tipo VIL, destacado em rosa na Figura 58, com tensão inicial equivalente à força no cabo. Para modelar a ação do macaco hidráulico atuante na extremidade esquerda da viga, o qual tende a empurrar a estrutura enquanto traciona o cabo, transferindo um esforço de compressão à viga, foi utilizado um elemento de treliça, assinalado em verde na Figura 57, com sua numeração local 29. Esse elemento de barra tem as características do material aço e seção transversal de 20x20, o que resultou em uma rigidez axial de $EA = 2,25 \cdot 10^7\text{N}$. Esse elemento de barra possui a mesma carga aplicada no elemento VIL, mas de sinal contrário, implicando em uma compressão.

A Figura 59 traz um resumo das características do modelo, apresentando, em amarelo, os elementos de membrana, em vermelho, os elementos de cabo ideal,

em rosa, o elemento tipo VIL e, em verde, o elemento de treliça. É exibida também a numeração adotada para os nós.

Implementação com Elementos de Membrana, Treliça, Cabo e VIL

Figura 59 - Exemplo 3A - Numeração de todos os elementos e nós do modelo

O esquema na figura a seguir amplia o detalhe, destacando os elementos utilizados e as hipóteses de contorno utilizadas para a inserção da carga no modelo.

Figura 60 - Exemplo 3A - Detalhe para o nó 2

Os nós de polia foram propositalmente dispostos deslocados do centro das barras diagonais, para evitar o colapso do elemento, que seria provocado por um comprimento nulo em um dos trechos do cabo, o que ocorre quando o nó central se encontra com um nó de extremidade. O posicionamento adotado para o nó evitou essa condição de inconsistência, mesmo sob cargas de tração mais elevadas. A Figura 61 apresenta a imagem da configuração inicial gerada pelo SATS.

Figura 61 - Exemplo 3A - Configuração inicial do modelo (SATS)

A Figura 62 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos deste exemplo. O tempo de resolução foi 0,7 segundos, após 3 iterações, com o limite de precisão em termos de deslocamentos de 10^{-6} m.

Figura 62 - Exemplo 3A - Convergência em deslocamentos (SATS)

A Figura 63 apresenta os resultados dos deslocamentos ampliados em 100x. Como já esperado, a protensão do cabo, desconsiderando o efeito de qualquer carga distribuída atuando na viga, incluindo o peso próprio, resultou em uma contra-flecha na viga. A norma do deslocamento máximo foi de 1,61 mm. O deslocamento do nó central inferior, de numero 12, que será tomado como referência para comparação entre os resultados obtidos pelo programa SATS e pelo SAP 2000®, foi de $u_x^{12} = 0,8mm$ e $u_z^{12} = 1,05mm$.

Figura 63 - Exemplo 3A - Norma dos deslocamentos ampliados (SATS)

A Figura 64 e a Figura 65 apresentam, respectivamente, o diagrama de primeira e segunda tensões principais. Uma vez que o traçado do cabo pode ser interpretado como um carregamento distribuído, agindo de baixo para cima, o resultado das tensões indica exatamente esse comportamento, apresentando, no meio do vão, tensões de tração na face superior e de compressão na face inferior.

Figura 64 - Exemplo 3A - Primeira tensão principal (SATS)

Figura 65 - Exemplo 3A - Segunda tensão principal (SATS)

A Figura 66 ilustra a força normal atuante nos elementos de barra do modelo. Como previsto, o carregamento é praticamente constante e igual ao valor inicial de $N = 1,0 \cdot 10^6 N$.

Figura 66 - Exemplo 3A - Tensão axial nos elementos (SATS)

4.2.2 Exemplo 3B (Viga) – Super-elemento de cabo ideal

Buscando comparar o desempenho do modelo usando elementos tipo **E3** com modelos tipo **SE**, a mesma estrutura descrita anteriormente, foi modelada utilizando modelo **SE**. Como a discretização com super-elementos dispensa a inserção de nós intermediários, ou seja, os nós de polia do super-elemento são os mesmos nós do restante da estrutura, houve uma alteração na numeração dos nós, reduzindo seu número para 21 nós, conforme apresenta a Figura 67.

Figura 67 – Exemplo 3B - Numeração dos nós

A quantidade e numeração dos elementos de membrana não foram alteradas, mantendo-se, dessa forma, a configuração apresentada na Figura 55. O modelo contém apenas um elemento de treliça, o qual teve sua numeração local alterada para 23 e, também, um elemento de treliça tipo VIL, numerado como elemento 24, presentes para a modelagem da ação do macaco de protensão, da mesma forma como no modelo **E3**. Nessa modelagem, tem-se apenas um super-elemento de cabo, representando a ação do cabo de protensão, como aparece na Figura 68.

Figura 68 - Exemplo 3B - Numeração dos super-elementos de cabo

A Figura 69 traz as características do modelo, apresentando, em amarelo, os elementos de membrana, em vermelho, o elemento **SE**, em rosa, o elemento

tipo VIL e, em verde, o elemento de treliça. É exibida, também, a numeração adotada para os nós.

Implementação com Elementos de Membrana, Treliça, SE e VIL

Figura 69 - Exemplo 3B - Características do modelo

A Figura 70 apresenta a imagem da configuração inicial gerada pelo SATS.

Figura 70 - Exemplo 3B - Configuração inicial do modelo (SATS)

A Figura 71 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos deste exemplo. O tempo de resolução foi 0,85 segundos, após 3 iterações, com o mesmo limite de precisão de 10^{-6} m.

Figura 71 - Exemplo 3B - Convergência em deslocamentos (SATS)

Os resultados para os deslocamentos e as tensões principais foram idênticos aos obtidos com o modelo E3, como apresenta a seqüência de figuras a seguir, ou seja, a norma do deslocamento máximo foi de 1,61 mm e os deslocamentos do nó central inferior foram $u_x^{12} = 0,8mm$ e $u_z^{12} = 1,05mm$.

Figura 72 - Exemplo 3B - Norma dos deslocamentos ampliados (SATS)

Figura 73 - Exemplo 3B - Primeira tensão principal (SATS)

Figura 74 - Exemplo 3B - Segunda tensão principal (SATS)

Como os resultados obtidos com a modelagem com elementos **E3** e **SE** são exatamente iguais e a discretização com super-elementos é consideravelmente mais simples, uma vez que dispensa a colocação de nós intermediários suplementares, além de garantir que todo o cabo esteja submetido à mesma força axial. Conclui-se, portanto, que a utilização do modelo **SE** é mais indicada.

4.2.3 Exemplo 3C (Viga) – Comparação com o SAP2000®

Na modelagem efetuada no programa SAP2000®, foram utilizados exatamente os mesmos valores iniciais da modelagem no programa SATS, mas, como não

existe nesse programa a opção de impor ao material uma tensão inicial, esse efeito foi modelado a partir da inserção de um campo de variação de temperatura, considerando-se, como coeficiente de dilatação térmica $\alpha = 1,17 \cdot 10^{-5} / ^\circ C$. Para atingir a tensão inicial de $N_0 = 1,0 \cdot 10^6 N$, foi aplicada uma variação de temperatura de $\Delta T = 6045,8^\circ C$, como demonstrado a seguir:

$$\varepsilon = \alpha \Delta T$$

$$\sigma = E \varepsilon$$

$$\frac{N}{A} = E \alpha \Delta T$$

$$\Delta T = \frac{1,0 \cdot 10^6}{1,0 \cdot 10^{-4} \cdot 1,8 \cdot 10^{11} \cdot 1,17 \cdot 10^{-5}} = 6045,8^\circ C$$

Sendo ε e σ a deformação e a tensão no elemento, respectivamente.

A Figura 75 foi importada do ambiente gráfico do SAP e apresenta a modelagem adotada para a viga deste exemplo. Em amarelo, estão representados os elementos de membrana e, em vermelho, os elementos de barra que representam o cabo de protensão.

Figura 75 - Exemplo 3C - Configuração inicial (SAP)

A Figura 76 mostra a resposta gráfica do programa SAP2000®, também em termos de deslocamentos, na qual os valores para o nó central inferior foram $u_x^{12} = 0$ e $u_z^{12} = 0,90 mm$. A diferença entre os resultados, deste modelo e do modelo apresentado no Exemplo 3B, quando comparado o deslocamento vertical do nó central, foi de aproximadamente 11%. Essa divergência deve-se, principalmente, ao fato de que o programa SAP 2000® fornece uma análise linear das estruturas, enquanto o SATS faz uma análise não-linear.

Figura 76 - Exemplo 3C - Deslocamentos do modelo (SAP)

A Figura 77 apresenta a tensão uniforme no cabo, com valor aproximado ao valor inicial, ou seja, $N = 1,0 \cdot 10^6 \text{ N}$.

Figura 77 - Exemplo 3C - Força interna atuante no cabo (SAP)

A Figura 78 ilustra o diagrama da primeira tensão principal. Sua configuração é bastante semelhante ao campo de tensões, gerado pelos resultados obtidos no programa SATS. O modelo apresenta tensões de tração na face superior, com valor máximo de aproximadamente -0,27 MPa, e de compressão na face inferior, com valores na ordem de 0,25 MPa.

Figura 78 - Exemplo 3C - Primeira tensão principal (SAP)

A segunda tensão principal está representada na Figura 79, que de forma análoga a análise do SATS, apresenta somente esforços de compressão, com valor máximo de aproximadamente 12 MPa, na parte superior central e sobre os apoios.

Figura 79 - Exemplo 3C - Segunda tensão principal (SAP)

As intensidades das tensões e os valores dos deslocamentos são diferentes nas duas formulações, como já esperado, já que a análise fornecida pelo SATS é não-linear, enquanto a análise do SAP 2000® é puramente linear. Mas a coerência entre os desenhos das curvas de tensões e semelhança nos formatos das estruturas deformadas, sugere o bom funcionamento do elemento de cabo implementado em MATLAB®.

5 APLICAÇÃO PRÁTICA

Visando analisar comparativamente o desempenho dos elementos de cabo e avaliar a importância dos mesmos, em um exemplo de grande porte e representatividade, será apresentada a análise estrutural da cobertura de membrana do Memorial dos Povos de Belém do Pará (Figura 80).

Figura 80 - Memorial dos Povos de Belém do Pará [Pauletti & Brasil, 2005]

Como citado no capítulo 1, sua cobertura é composta por uma membrana em forma de cela, com dois apoios elevados e quatro apoios mais baixos nivelados. A projeção horizontal da cobertura tem 22,6 m de largura por 28,6 m de comprimento. O modelo teórico adotado neste trabalho está baseado no artigo de Ruy M. O. Pauletti e Reyolando M. L. R. F. Brasil [Pauletti & Brasil, 2005]. Objetivou-se, nesse exemplo, comparar, quantitativa e qualitativamente, os resultados obtidos na análise não-linear da estrutura em duas situações:

- utilizando modelos usuais, com cabos de borda aderentes (**AD**), modelados a partir do uso de elementos de barra tipo treliça rigidamente ligados aos nós dos elementos de membrana;
- utilizando a nova implementação dos elementos de cabo ideal de três nós (**E3**) e dos super-elementos de cabo escorregando sem atrito (**SE**).

5.1 Discretização do modelo

Foram adotadas duas discretizações para o problema da cobertura do Memorial dos Povos. A primeira (Figura 81) divide a borda da estrutura em 7 elementos de membrana (modelo **7 DIV**), composto por 120 nós, 196 elementos de membrana e 42 elementos de barra.

Figura 81 - Discretização com 7 elementos por borda (Modelo 7 DIV)

A segunda (Figura 82) divide a borda em 32 elementos de membrana (modelo **32 DIV**), composto por 2145 nós, 4096 elementos de membrana e 192 elementos de barra.

Figura 82 - Discretização com 32 elementos por borda (Modelo 32 DIV)

As respostas de ambas as discretizações serão apresentadas, buscando avaliar a necessidade de um modelo ainda mais refinado, ou mesmo para validar o uso do modelo de **32 DIV**, ponderando a suavidade do campo de tensões, os deslocamentos obtidos e o tempo de processamento da estrutura.

Em um primeiro momento, foi comparado o desempenho dos dois elementos de cabo deslizantes, buscando analisar o comportamento da implementação do novo super-elemento de cabo desenvolvido neste trabalho.

Na seqüência, será apresentada a comparação dos resultados numéricos obtidos através de modelos usuais com cabos de borda aderentes, com os resultados gerados pelos novos elementos de cabo não-aderentes, objetivando avaliar a importância da consideração do escorregamento dos cabos de borda e a sua influência na análise do comportamento da estrutura.

Por fim, foi estudada, também, a influência da consideração dos mastros estaiados principais (“mastro rei”), o qual aparece em destaque na Figura 80, e o mastro menor, na extremidade oposta (“mastro rainha”), no equilíbrio e na distribuição das tensões na estrutura. Esses mastros permitem à estrutura deslocamentos maiores, devido a não-simetria da sua condição de contorno, ou seja, ao não travamento da estrutura no seu eixo transversal.

Resumidamente, cada discretização foi modelada conforme a listagem a seguir.

- Modelos com sete elementos de membrana por borda:
 - Elementos de cabo não-aderentes (Modelo E3 – 7 DIV);
 - Super-elementos de cabo não-aderentes (Modelo SE – 7 DIV);
- Modelos com trinta e dois elementos de membrana por borda:
 - Elementos de cabo não-aderentes (Modelo E3 – 32 DIV);
 - Super-elementos de cabo não-aderentes (Modelo SE – 32 DIV);
 - Elementos de cabo aderentes (Modelo AD – 32 DIV);
- Modelos com trinta e dois elementos de membrana por borda e consideração dos mastros principais:
 - Super-elementos de cabo não-aderentes (Modelo SE - MASTROS).
 - Elementos de cabo aderentes (Modelo AD – MASTROS);

5.2 Forma viável

A análise de uma estrutura retesada, como esta, sempre envolve uma fase inicial de busca da forma, na qual se compatibilizam os requisitos arquitetônicos (de forma) e estruturais (de equilíbrio). Depois de encontrada a forma viável, verifica-se a resposta da estrutura para as solicitações críticas de projeto. No caso das estruturas tensionadas de cobertura, os carregamentos devidos à ação do vento costumam ser preponderantes.

5.2.1 Carregamentos atuantes

Para a análise estrutural foram considerados três casos de carregamento. Conforme Guirardi [2003], os carregamentos adotados se dividem em:

- 1- Retesamento: campo de tensões ao longo da membrana e correspondentes cargas de ancoragem, a serem convenientemente aplicadas aos vértices da membrana durante a montagem da estrutura. Procura-se garantir uma tensão média de retesamento suficientemente alta para compensar as pequenas declividades médias que caracterizam a forma das duas águas da membrana.
- 2- Vento Paralelo: cargas de pressão devidas ao vento, agindo na direção paralela à cumeeira da membrana, combinadas com as cargas de retesamento.
- 3- Vento Normal: cargas de pressão devidas ao vento, agindo na direção normal à cumeeira da membrana, também combinadas com as cargas de retesamento.

Os carregamentos de vento são definidos de acordo com a norma brasileira NBR 6123/88. Como essa norma não contempla o caso de coberturas com cumeeira em sela e águas parabolóide-hiperbólicas, foram adotados, por semelhança, os coeficientes de pressão específicos para o caso de um telhado aberto de duas águas planas. Para o caso do Vento Paralelo, a pressão adotada

foi de $q = -286 N/m^2$ em ambas as águas e, para o Vento Normal, a pressão aplicada foi de $q = -286 N/m^2$ a barlavento e $q = 114 N/m^2$ a sotavento.

5.2.2 Propriedades físicas

As características dos materiais utilizados em todos os modelos foram iguais. Para a membrana, foi adotada uma espessura $t = 1,0 \cdot 10^{-3} m$ e módulo de elasticidade $E = 1,0 \cdot 10^9 N/m^2$. Seu o peso-próprio foi desprezado devido à pequena influência, frente aos demais carregamentos. Para os cabos de borda, foi admitida a utilização de um cabo de diâmetro 1" (uma polegada), ou seja, com área da seção transversal $A = 5,0 \cdot 10^{-4} m^2$ e módulo de elasticidade $E = 2,0 \cdot 10^{11} N/m^2$. Portanto, a rigidez axial dos cabos de borda adotada foi de $EA = 1,0 \cdot 10^8 N$. A tensão inicial aplicada nos cabos, em todos os casos de carregamentos, foi $N_0 = 1,0 \cdot 10^5 N$. Para os casos com cabos de borda não-aderentes, foi adotada a metodologia apresentada para o deslizamento ideal, ou seja, desconsiderando qualquer efeito do atrito.

5.2.3 Busca da forma

Na etapa da busca da forma viável, utiliza-se um baixo módulo de elasticidade para os materiais, a fim de tornar a estrutura mais flexível, permitindo que se deforme e atinja a configuração de equilíbrio. Para os elementos de membrana, o módulo de elasticidade foi diminuído para $E = 1,0 \cdot 10^7 N/m^2$ e a rigidez axial dos cabos de borda para $EA = 1,0 \cdot 10^6 N$. Partindo da malha inicial indeformada, foi aplicado um campo de tensões correspondente ao retesamento $q = 5,0 \cdot 10^6 N/m^2$ e uma tensão inicial nos cabos correspondente à força de protensão aplicada nos cabos de borda $N_0 = 1,0 \cdot 10^5 N$.

As tensões principais obtidas neste processamento são descartadas, uma vez que não representam a situação real, devido às alterações nas características

dos materiais. Nessa fase, apenas interessam os deslocamentos calculados, os quais representam a forma viável de equilíbrio da estrutura.

Atualiza-se, a seguir, a configuração inicial do modelo. Somando-se os deslocamentos encontrados às coordenadas iniciais, a forma obtida passa a ser a nova forma inicial adotada para a estrutura. Com a nova forma, submete-se a estrutura ao carregamento de retesamento puro e analisa-se a resposta dos deslocamentos. Caso os valores das normas dos deslocamentos sejam considerados elevados e, portanto, não satisfaçam os requisitos estruturais, um novo processamento de busca de forma é realizado, atualizando novamente a forma inicial do modelo, até que os deslocamentos sejam considerados baixos.

Na busca da forma dessa estrutura, para todas discretizações estudadas, foram utilizados modelos com cabos de borda aderentes e a forma encontrada era adotada para todos os demais modelos, ou seja, para uma comparação mais fiel dos resultados, era sempre utilizada a mesma forma inicial.

Por outro lado, como se trata de uma comparação entre modelos considerando aderência e não-aderência dos cabos de borda, foi necessário um segundo passo na busca da forma. A configuração inicial obtida foi inserida no modelo com elementos cabo ideais. Esse procedimento foi necessário porque, no caso dos elementos aderentes, a tensão no cabo varia, ou seja, as forças normais não são uniformes, provocando uma variação nos raios de curvatura das bordas, os quais são proporcionais a essas forças normais. Se o campo de tensões da membrana fosse constante e a tensão nos cabos não variasse, como no caso dos cabos sem aderência, a forma da borda seria praticamente circular. Como, para o caso de retesamento puro utilizado na busca da forma, a variação nas tensões da membrana é pequena, o mais adequado é utilizar o formato circular da borda, uma vez que se trata de uma forma viável para ambos os modelos, inclusive para o aderente.

O contrário não seria verdade, pois o formato não-circular não é uma forma viável para o modelo sem aderência, ou seja, se não fosse corrigida a forma, quando a configuração inicial fosse adotada para o modelo sem aderência, a borda iria necessariamente se deformar até atingir a formato circular, o que

acarretaria em deslocamentos extras que mascarariam a comparação entre os dois modelos.

5.3 Modelos com Sete Elementos por Borda

Nesta discretização, apresentada na Figura 81, foram comparados os modelos com elementos de cabo não-aderentes (Modelo **E3 – 7 DIV**) e os modelos com super-elementos de cabo não-aderentes (Modelo **SE – 7 DIV**), para os casos de carregamento de retesamento, vento paralelo à cumeeira e vento normal à cumeeira.

A Figura 83 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos para a etapa da busca da forma. O tempo de resolução no SATS foi de 1,9 segundos, após 4 iterações, com a precisão em termos de deslocamentos de 10^{-6} m.

Figura 83 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Busca da Forma)

Na Figura 84, são apresentadas as normas dos deslocamentos. Como o modelo está muito flexível, estes deslocamentos são elevados, sendo o valor máximo de 39,4 cm, próximo as bordas, e, em torno de 15,0 cm, nos vãos centrais das duas águas. Esses valores de deslocamentos apenas representam o ajuste da forma inicial para a forma de equilíbrio.

Figura 84 - Norma dos deslocamentos (Busca da Forma)

A Figura 85 traz os valores obtidos para as tensões principais. Como já mencionado, essas tensões são descartadas, pois, nessa etapa de busca da forma viável, apenas os deslocamentos são importantes.

Figura 85 – Primeira e segunda tensões principais (Busca da Forma)

5.3.1 Elementos de Cabo Ideais (E3 – 7 DIV)

O conjunto de figuras seguintes apresenta os resultados da estrutura para a discretização com sete divisões, utilizando elementos de cabo ideais de três nós (E3) para simular os cabos de borda. Como a formulação desses elementos necessita de nós intermediários, os quais não fazem parte da malha original, foi interpolado o ponto médio entre os dois nós que compõem a borda externa de cada elemento de membrana periférico, gerando um nó central. Com isso, foi aumentada a quantidade total de nós para 150, totalizando 196 elementos de membrana e 36 elementos de cabo.

Serão apresentados os resultados deste modelo para os três casos de carregamento.

Carregamento de retesamento

Obtida a forma de equilíbrio da estrutura, atualiza-se a configuração inicial, adotando-se, como coordenadas iniciais, as coordenadas finais obtidas na etapa de busca da forma, buscando-se uma solução para o campo uniforme de tensões do retesamento.

A Figura 86 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos para essa nova solução. O tempo de resolução do SATS foi de 1,3 segundos após 3 iterações, com precisão de 10^{-6} m.

Figura 86 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)

A Figura 87 apresenta as normas dos deslocamentos para o caso do retesamento puro. O valor máximo do deslocamento foi pequeno, aproximadamente 0,4mm. Conclui-se, portanto, que esta é uma forma viável de equilíbrio para a estrutura e não é necessário ser refeita a análise de busca da forma.

Figura 87 - Norma dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)

A Figura 88 apresenta as tensões principais provocadas pelo retesamento da membrana. Como ilustra a figura, ambas as tensões têm variação mínima, o que pode ser observado pela cor uniforme no diagrama, com o valor médio igual ao valor fixado para o retesamento, ou seja, em torno de 5 MPa, não apresentando tensões de compressão em ponto algum da estrutura.

Figura 88 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 7 DIV)

Carregamento de vento paralelo à cumeeira

A seguir, apresentam-se os resultados obtidos para o carregamento do vento paralelo à cumeeira. A Figura 89 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução do SATS foi de 2,06 segundos após 5 iterações, com precisão de 10^{-6} m.

Figura 89 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)

A Figura 90 apresenta a norma dos deslocamentos ampliados em dez vezes. Como esse carregamento é caracterizado por uma pressão uniforme, succionando toda membrana, a deformação é simétrica, positiva e máxima nos dois vãos centrais das águas. O valor máximo do deslocamento é de 43,3 cm.

Figura 90 - Norma dos deslocamentos ampliados (Modelo E3 – 7 DIV)

A simetria dos resultados dos deslocamentos atesta o bom desempenho do elemento de cabo implementado. O desenho das curvas de tensões é bastante semelhante ao apresentado por Pauletti & Brasil [2005], o que também comprova a coerência dos resultados obtidos.

A Figura 91 apresenta as tensões principais. O máximo valor da primeira tensão principal é de 20,7 MPa, concentrado nos vértices da membrana. O restante da estrutura apresenta tensões da ordem de 13 MPa.

Figura 91 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 7 DIV)

A segunda tensão principal varia de -12,9 a 6,2 MPa, sendo que o valor negativo da tensão indica compressão. Como as estruturas retesadas não resistem aos esforços de compressão, esse resultado representa um enrugamento da membrana. As regiões destacadas em azul apresentaram enrugamento, quando submetidas ao carregamento de vento paralelo.

Diferentemente de materiais rígidos como o concreto, esse estado de tensão não representa uma ruptura, uma vez que, quando o carregamento for cessado ou mesmo alterado, a estrutura voltará trabalhar normalmente.

Esse dado espúrio nas tensões seria evitado com a inclusão de um modelo não-compressível para a membrana, o qual representaria o enrugamento do material, analisando a influência deste efeito para o restante da estrutura. Mas esta implementação extrapola os objetivos deste trabalho e será sugerida como proposta para trabalhos futuros.

Carregamento de vento normal à cumeeira

Na seqüência, apresentam-se os resultados obtidos no SATS para o carregamento do vento normal à cumeeira.

A Figura 92 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução foi de 2,4 segundos após 6 iterações, com uma precisão de 10^{-6} m.

Figura 92 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 7 DIV)

A Figura 93 apresenta as normas dos deslocamentos da estrutura, ampliados em dez vezes. Como esse carregamento é bastante assimétrico e não-uniforme,

sendo parte da cobertura succionada e parte pressionada, a deformação é também assimétrica, positiva em uma água e negativa na outra, atingindo o valor máximo de 51,4 cm no trecho succionado e, aproximadamente, 25 cm no trecho sob carregamento de pressão, tendendo a zero nas bordas e cumeeira.

Figura 93 - Norma dos deslocamentos ampliados (Modelo E3 – 7 DIV)

A Figura 94 apresenta as duas tensões principais. A primeira tensão principal tem valor máximo de 17,1 MPa, concentrado no vértice da água que recebe o carregamento de sucção da membrana. O restante da estrutura apresenta tensões da ordem de 8 MPa. A segunda tensão principal varia de -2,8 a 7,2 MPa. Novamente, as regiões com tensões de compressão, identificadas pela cor azul na figura, são espúrias e representam o enrugamento da membrana. Esses valores de compressão deverão ser desconsiderados, uma vez que, independentemente de sua intensidade, a resposta física é a mesma.

Figura 94 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 7 DIV)

5.3.2 Super-Elementos de Cabo Ideais (SE – 7 DIV)

As figuras seguintes apresentam os resultados obtidos para o modelo com sete divisões, utilizando, para a modelagem dos cabos de borda, os super-elementos de cabo escorregando sem atrito (**SE**), cuja formulação é proposta nesse trabalho. A formulação desses elementos dispensa a criação de nós intermediários nas bordas, ficando cada borda representada por um único super-elemento. Dessa forma, a quantidade total de nós volta a 120, tendo os mesmos 196 elementos de membrana, mas apenas 6 super-elementos de cabo.

Novamente, serão apresentadas as respostas para os dois casos de carregamento de vento e para o retesamento.

Carregamento de retesamento

A mesma forma viável, obtida para o estudo com os elementos de cabo de três nós, foi adotada para o modelo **SE**.

A Figura 95 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos para o caso de carregamento com campo de tensões uniformes. O tempo de resolução do SATS foi de 1,6 segundos após 3 iterações, com precisão de 10^{-6} m.

Figura 95 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)

A Figura 96 apresenta a norma dos deslocamentos para o caso do retesamento. O valor máximo do deslocamento foi exatamente igual ao obtido com o modelo **E3**, ou seja, apenas 0,4 mm, o que valida a conclusão de que esta é uma forma viável de equilíbrio para a estrutura.

Figura 96 - Norma dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)

A Figura 97 ilustra as tensões principais provocadas pelo retesamento puro da estrutura. Ambas as tensões apresentam uma variação mínima, com valores próximos a 5,0 MPa. Como se pode notar, em ponto algum da estrutura há tensões de compressão e, portanto, não há enrugamento.

Figura 97 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 7 DIV)

Carregamento de vento paralelo à cumeeira

Apresentam-se, agora, os resultados do modelo **SE** submetido ao carregamento do vento paralelo à cumeeira. A Figura 98 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução do SATS foi de 3,0 segundos após 6 iterações, com precisão nos deslocamentos de 10^{-6} m.

Figura 98- Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)

A Figura 99 apresenta a norma dos deslocamentos ampliados em dez vezes, em vista lateral. Analogamente ao caso de retesamento, o diagrama de deslocamentos foi o mesmo gerado para o modelo **E3**, com exatamente o

mesmo valor máximo para o deslocamento, 43,3 cm, positivo e no vão central das duas águas simétricas.

Figura 99 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 7 DIV)

A Figura 100 mostra as tensões principais. A primeira tensão principal tem valor máximo de 20,7 MPa, com valor de pico concentrado nos vértices da membrana e o restante da estrutura apresenta tensões da ordem de 13 MPa, novamente, valores iguais ao obtidos no modelo **E3**.

Figura 100 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 7 DIV)

A segunda tensão principal apresenta a variação de -12,9 a 6,2 MPa. As regiões destacadas em azul possuem a segunda tensão principal negativa, dado espúrio que representa, fisicamente, um enrugamento no material.

Carregamento de vento normal à cumeeira

Os resultados gerados no **SATS** para o modelo **SE**, sob o carregamento do vento normal à cumeeira, foram exatamente iguais ao obtidos a partir do modelo **E3**, conforme indicam as figuras na sequência.

A Figura 101 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução foi de 3,9 segundos após 6 iterações, com erro limite de 10^{-6} m em termos de deslocamento.

Figura 101 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 7 DIV)

A Figura 102 apresenta a norma dos deslocamentos da estrutura ampliados em dez vezes. O mesmo valor do deslocamento máximo de 51,4 cm é notado no trecho succionado e, também, o trecho sob a pressão tem aproximadamente 25 cm de deslocamento.

Figura 102 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 7 DIV)

A Figura 103 apresenta os valores das duas tensões principais. A primeira tensão principal varia entre 4,9 e 17,2 MPa, com tensões médias da ordem de 8 MPa. A segunda tensão principal varia de -2,8 a 7,2 MPa. Novamente, as regiões com tensões de compressão, identificadas pela cor azul na figura da direita, são espúrias e representam o enrugamento da membrana.

Figura 103 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 7 DIV)

5.3.3 Comparativo entre os modelos E3 – 7 DIV e SE – 7 DIV

A seguir, serão apresentadas tabelas comparativas dos resultados dos modelos com cabos de borda, representados por elementos de cabo ideais de três nós e de “n” nós, para os modelos com sete elementos de membrana por borda.

As tabelas trazem os valores dos deslocamentos máximos, a variação nas tensões principais, o número de iterações necessárias para a convergência e o tempo de processamento. A primeira linha apresenta os valores obtidos para o modelo **E3**, a segunda para o modelo **SE** e, na terceira linha, expõe-se um comparativo percentual dos resultados obtidos nos dois modelos.

A Tabela 3 apresenta os resultados para o retesamento, a Tabela 4, os valores gerados para o carregamento de vento paralelo à cumeeira e, a Tabela 5, os resultados para o carregamento de vento normal à cumeeira.

CASO DE CARREGAMENTO: RETESAMENTO							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
E3 - 7 DIV.	0,041	0,000	0,000	5,041	4,996	3	1,31
SE - 7 DIV.	0,041	4,993	4,976	5,041	4,996	3	1,61
Comparativo	0%	-	-	0%	0%	0	19%

Tabela 3 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e SE - 7 DIV (Retesamento)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO PARALELO							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
E3 - 7 DIV.	43,295	0,000	-12,951	20,739	6,185	5	2,06
SE - 7 DIV.	43,295	4,080	-12,951	20,739	6,185	6	2,97
Comparativo	0%	-	0%	0%	0%	1	31%

Tabela 4 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e SE - 7 DIV (Vento Paralelo)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
E3 - 7 DIV.	51,431	0,000	-2,826	17,148	7,182	6	2,44
SE - 7 DIV.	51,431	4,885	-2,826	17,148	7,182	6	3,86
Comparativo	0%	-	0%	0%	0%	0	37%

Tabela 5 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e SE - 7 DIV (Vento Normal)

Os resultados dos dois modelos foram idênticos, como já citado no texto. Apenas os menores valores obtidos para as tensões principais apresentam diferenças, devidas à plotagem da escala dos diagramas. Para verificação, foram analisadas as tensões em cada elemento de membrana e, em nenhum deles, houve tensões nulas. Todos os valores das tensões principais foram exatamente iguais para os dois modelos. Por isso, nesses casos, não foi feita a comparação percentual dos resultados, por não possuir significado físico.

O tempo de processamento dos modelos com super-elementos é maior, mas o aumento de tempo é aceitável e não impede a aplicabilidade dos modelos **SE**.

Pode-se afirmar que é consideravelmente mais simples a modelagem com o uso dos super-elementos, uma vez que esses dispensam a criação de nós de polia intermediários, os quais não fazem parte da malha inicial. A ausência de nós suplementares, além de facilitar o lançamento do modelo, elimina um problema intrínseco à modelagem de três nós: a singularidade do modelo, que pode

ocorrer, devido ao comprimento nulo gerado para um dos trechos do cabo. Esse comprimento nulo ocorre quando a borda é submetida a cargas mais elevadas, as quais provocam maiores deslocamentos dos nós de polia intermediários, até que estes tenham suas posições coincidadas com os nós de extremidades do cabo. Os super-elementos resistem a maiores deslocamentos sem colapsar.

Conclui-se, portanto, que o uso do modelo **SE** é mais indicado, por apresentar bons resultados, com custo computacional razoável e de modelagem mais simples e clara.

Analisando-se os diagramas de tensões apresentados para ambos os modelos, em todos os casos de carregamento estudados, pode-se notar que as curvas das tensões não são suaves, o que sugere que a discretização do modelo foi insuficiente. Buscando uma melhor análise da estrutura, os mesmos casos de carregamento foram estudados com uma discretização com 32 elementos de membrana por borda, como será apresentado na seqüência.

5.4 Modelos com Trinta e Dois Elementos por Borda

Na discretização apresentada na Figura 104, cada borda da estrutura está dividida em trinta e dois elementos de membrana. Com essa malha, foram analisados os modelos com elementos de cabo de borda aderentes (Modelo **AD – 32 DIV**), elementos de cabo não-aderentes (Modelo **E3 – 32 DIV**) e super-elementos de cabo não-aderentes (Modelo **SE – 32 DIV**). Todas as hipóteses utilizadas para os cabos das bordas foram estudadas para os dois casos de carregamento de vento já apresentados: o vento paralelo à cumeeira e o vento normal à cumeeira.

Figura 104 - Modelo com 32 divisões por borda

5.4.1 Busca da forma

Foi realizada a etapa inicial de busca da forma viável, de maneira análoga ao realizado para o modelo com sete divisões por borda. Alterou-se o módulo de elasticidade da membrana para $E = 1,0 \cdot 10^7 \text{ N/m}^2$ e a rigidez axial dos cabos de borda para $EA = 1,0 \cdot 10^6 \text{ N}$, objetivando uma maior flexibilidade da estrutura. Partindo da malha inicial indeformada, aplicou-se um campo de tensões

uniforme correspondente ao retesamento $q = 5,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ e uma tensão inicial nos cabos de $N_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N}$.

Foram encontrados os deslocamentos utilizando o modelo com cabos de borda aderentes, atualizando-se as coordenadas iniciais dos nós até a obtenção de deslocamentos baixos na análise da estrutura submetida a um campo de tensão uniforme de retesamento, já com as propriedades físicas dos materiais corrigidas. Encontrada a forma viável, foi utilizado o modelo com cabos de borda não-aderentes, para corrigir o formato da borda para um arco de círculo, forma viável para modelos considerando ou não o escorregamento dos cabos de borda. Esta nova forma viável com bordas circulares foi verificada no modelo com cabos aderentes e foi adotada para todos os modelos, objetivando uma comparação mais fiel dos resultados.

A Figura 105 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos para a etapa da busca da forma. O tempo de resolução no SATS foi de 45,9 segundos, após 4 iterações, com a precisão em termos de deslocamentos de 10^{-6} m .

Figura 105 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Busca da Forma)

Na Figura 106, são apresentadas as normas dos deslocamentos da última etapa de busca da forma. O valor máximo do deslocamento é de 20,5 cm, próximo a cumeeira. É importante ressaltar que esses valores de deslocamento apenas representam o ajuste da estrutura de sua forma inicial para a forma viável e, portanto, sua magnitude não tem influência no comportamento da estrutura.

Figura 106 - Norma dos deslocamentos (Busca da Forma)

A Figura 107 traz os valores obtidos para as tensões principais, as quais são descartadas, pois, nessa fase, apenas interessam os deslocamentos calculados, os quais representam a forma viável de equilíbrio da estrutura.

Figura 107 – Primeira e segunda tensões principais (Busca da Forma)

Como mencionado, os deslocamentos da estrutura na forma de equilíbrio viável encontrada foram verificados, considerando apenas o campo uniforme de tensões do retesamento, utilizando o modelo **AD**.

A Figura 108 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos para essa nova solução. O tempo de resolução do SATS foi de 43,5 segundos após 3 iterações, com precisão de 10^{-6} m.

Figura 108 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)

A Figura 109 apresenta a norma dos deslocamentos para o caso do retesamento puro. O valor máximo do deslocamento foi de 2,7 cm, o que leva a conclusão de que esta é uma forma viável de equilíbrio para a estrutura.

Figura 109 - Norma dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)

A Figura 110 apresenta as tensões principais, provocadas pelo retesamento da membrana. Como ilustra a figura, ambas as tensões possuem variação pequena. A primeira tensão principal varia de 5,2 a 6,0 MPa, enquanto a segunda tensão principal está entre os valores de 4,1 e 5,2 MPa, ou seja, tem

um valor médio próximo à tensão de retesamento, não apresentando tensões de compressão em ponto algum da estrutura.

Figura 110 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD – 32 DIV)

5.4.2 Elementos de Cabo Ideais (E3 – 32 DIV)

As figuras a seguir apresentam os resultados da estrutura, para a discretização com trinta e duas divisões por borda, utilizando elementos de cabo ideais de três nós (**E3**) nos cabos de borda. O mesmo processo de inserção de nós intermediários suplementares à malha original, realizado para o modelo **E3 – 7 DIV**, foi realizado para essa nova malha de elementos, ou seja, foi interpolado linearmente o ponto médio entre cada par de nós que compunham as bordas, gerando nós centrais. Isso alterou a quantidade total de nós para 2325, totalizando 4096 elementos de membrana e 186 elementos de cabo tipo **E3**.

Serão apresentados os resultados deste modelo para os dois casos de carregamento de vento, utilizando, como forma inicial, a encontrada no processo de busca de forma descrito anteriormente.

Carregamento de vento paralelo à cumeeira

A seguir, apresentam-se os resultados dos deslocamentos e das tensões principais, obtidos para o carregamento do vento paralelo à cumeeira.

Como é usual na análise de estruturas retesadas, as quais sofrem grandes deslocamentos perante aos carregamentos, foi realizado um estudo incremental de carga no modelo, ou seja, a estrutura foi submetida a carregamentos crescentes, sempre atualizando sua forma e seu estado de tensão, até atingir o valor do carregamento de projeto. Nessa análise, foram necessárias 4 etapas de processamento, com os carregamentos $q = -150 \text{ N/m}^2$, $q = -200 \text{ N/m}^2$, $q = -240 \text{ N/m}^2$ e, por último, $q = -286 \text{ N/m}^2$. Para casos como este, o SATS possui um recurso de processamento que permite atualizar os dados do modelo para as respostas encontradas e realizar um incremento no carregamento, até atingir o valor necessário.

A Figura 111 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos para o carregamento final de projeto.

Figura 111 - Gráfico de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 32 DIV)

A Figura 112 apresenta a norma dos deslocamentos para esse carregamento, o qual é caracterizado por uma pressão uniforme, succionando toda a membrana. A deformação é simétrica, positiva e máxima nos dois vãos centrais, com valor de 41,1 cm, tendendo a zero nas bordas.

Novamente, a simetria dos resultados dos deslocamentos atesta o bom desempenho do elemento de cabo implementado. O desenho das curvas de

tensões é bastante semelhante ao obtido no modelo **E3 – 7 DIV**, apenas mais suave.

Figura 112 - Norma dos deslocamentos (Modelo E3 – 32 DIV)

A Figura 113 apresenta as duas tensões principais. A primeira tensão principal máxima é de 42,5 MPa, concentrada nos vértices da membrana, em destaque na cor vermelha escuro na figura. O restante da estrutura apresenta tensões da ordem de 13 MPa.

Figura 113 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 32 DIV)

A segunda tensão principal varia de -47,9 a 11,3 MPa, sendo que o valor negativo da tensão indica uma compressão. Como as estruturas retesadas não resistem a esses esforços, o resultado é o enrugamento da membrana, que acontece nas regiões destacadas em azul, próximas aos pontos mais altos da cumeeira.

Como mencionado, esse dado espúrio nas tensões seria evitado com a inclusão de um modelo não-compressível para a membrana, o qual representaria o enrugamento do material, analisando a influência deste efeito para o restante da estrutura, mas esta implementação extrapola os objetivos deste trabalho e deverá ser objeto de uma nova pesquisa.

Carregamento de vento normal à cumeeira

Na sequência, apresentam-se os resultados gerados no SATS para o carregamento do vento normal à cumeeira.

A Figura 114 traz os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução da estrutura foi de 100,0 segundos após 6 iterações, com uma precisão de 10^{-6} m em termos de deslocamentos.

Figura 114 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo E3 – 32 DIV)

A Figura 115 apresenta a norma dos deslocamentos ampliados em dez vezes. Como esse carregamento tem parte da cobertura succionada e parte pressionada, a deformação é assimétrica, positiva em uma água e negativa na outra, atingindo o valor máximo de 49,7 cm no trecho succionado e,

aproximadamente, 30 cm no trecho sob carregamento de pressão, desenho bastante semelhante ao obtido no modelo **E3 – 7 DIV**.

Figura 115 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo E3 – 32 DIV)

A Figura 116 apresenta o diagrama das duas tensões principais. A primeira tensão principal tem valor máximo de 34,1 MPa, concentrado no vértice superior. O restante da estrutura apresenta tensões menores, da ordem de 9 MPa. A segunda tensão principal está no intervalo entre -17,0 a 9,1 MPa. As regiões com tensões de compressão espúrias, identificadas pela cor azul na figura, representam o enrugamento da membrana.

Figura 116 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo E3 – 32 DIV)

5.4.3 Comparativo entre os modelos E3 – 7 DIV e E3 – 32 DIV

Apresentam-se, a seguir, as tabelas comparativas dos resultados dos modelos com elementos de cabo ideais de três nós, nas duas discretizações estudadas, com sete e com trinta e dois elementos de membrana por borda, para as ações do vento.

As tabelas trazem os valores dos deslocamentos máximos, a variação nas tensões principais, o número de iterações necessárias para a convergência e o tempo de processamento. A primeira linha traz os valores obtidos para o modelo **7 DIV**, a segunda, para o modelo **32 DIV** e, a terceira linha apresenta um comparativo percentual dos resultados obtidos nos dois modelos.

A Tabela 6 apresenta os resultados para o caso de carregamento de vento paralelo à cumeeira e, a Tabela 7, os valores para o carregamento de vento normal à cumeeira.

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO PARALELO							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	□1 min	□2 min	□1 max	□2 max		
E3 - 7 DIV.	43,295	0,000	-12,951	20,739	6,185	5	2,06
E3 - 32 DIV.	41,090	0,000	-47,915	42,489	11,302	*	*
Comparativo	5%	0%	73%	51%	45%	-	-

Tabela 6 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e E3 - 32 DIV (Vento Paralelo)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	□1 min	□2 min	□1 max	□2 max		
E3 - 7 DIV.	51,431	0,000	-2,826	17,148	7,182	6	2,44
E3 - 32 DIV.	49,733	0,000	-17,044	34,120	9,092	6	100,43
Comparativo	3%	0%	83%	50%	21%	0	98%

Tabela 7 - Comparativo entre modelos E3 - 7 DIV e E3 - 32 DIV (Vento Normal)

Os deslocamentos obtidos nos dois modelos foram muito semelhantes, com diferença máxima de 5%, o que sugere que o novo modelo está suficientemente discretizado, dispensando assim a criação de malhas ainda mais refinadas, que trariam um custo computacional maior.

Analisando-se os diagramas de tensões dos modelos **32 DIV**, pode-se notar que apresentam linhas suaves, formando curvas contínuas, em contraposição aos resultados dos modelos **7 DIV**.

Os valores máximos das tensões principais nos vértices foram bastante superiores no caso com a malha mais refinada. Isso ocorre porque o valor da tensão calculada para os elementos é o valor médio da tensão naquela área. Como os elementos da primeira malha são muito maiores, esse valor médio é distorcido e os picos ficam suavizados pelo restante da área. No caso da malha mais refinada, os elementos com áreas de influência menores têm uma representação mais correta dos valores máximos de tensão, o que permite a verificação mais real das concentrações de tensões que ocorrem nos vértices, sendo essas regiões críticas de projeto.

No restante da estrutura, parte central da cobertura, as tensões foram bastante próximas nos dois casos de carregamento para as duas malhas.

O aumento no valor negativo da segunda tensão principal não interfere no comportamento da estrutura, uma vez que, independentemente de sua intensidade, a resposta física a esse resultado é a mesma: as regiões com tensões de compressão apresentam enrugamento. Na realidade, a estrutura de membrana não resistirá a nenhum esforço negativo e, portanto, essa indicação de tensão de compressão não é real. Esse dado espúrio nas tensões seria evitado com a inclusão de um modelo não-compressível para a membrana, o qual representaria o enrugamento do material, mas essa implementação extrapola os objetivos desse trabalho e deverá ser objeto de uma nova pesquisa. O tempo de processamento dos modelos com trinta e duas divisões é, logicamente, maior, o que se deve ao grande aumento no número graus de liberdade. Ainda assim, o tempo de processamento do modelo mais refinado não é muito elevado, sendo perfeitamente aceitável para as análises correntes.

Conclui-se, portanto, que o uso do modelo **32 DIV** é mais indicado, por gerar resultados mais realistas, ilustrando melhor as concentrações de tensões que ocorrem nas bordas, com custo computacional razoável. Como os valores das tensões no modelo 7 DIV são menores, pode-se dizer que o modelo com a malha grosseira apresentou resultados contrários à segurança.

5.4.4 Super-Elementos de Cabo Ideais (SE – 32 DIV)

A seguir, serão apresentadas as repostas aos carregamentos de vento para o modelo com trinta e dois elementos de membrana por borda, utilizando super-elementos de cabo escorregando sem atrito (**SE**). Como a formulação desses elementos não necessita de nós intermediários nas bordas, e cada borda é representada por um único super-elemento, a quantidade total de nós volta a 2145, tendo os mesmo 4096 elementos de membrana, com apenas 6 super-elementos de cabo.

Carregamento de vento paralelo à cumeeira

Apresentam-se, agora, os resultados do modelo **SE – 32 DIV**, submetido ao carregamento do vento paralelo à cumeeira. Analogamente ao executado no modelo com cabos de borda de três nós, foi necessária a análise incremental de carregamento no modelo. A mesma sucessão de cargas do modelo anterior foi adotada para este, até atingir o valor de projeto de $q = -286 N / m^2$.

A Figura 117 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos, para o incremento final do carregamento.

Figura 117 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE – 32 DIV)

A Figura 118 apresenta a norma dos deslocamentos. O diagrama tem a mesma forma daquele gerado para o modelo E3, com exatamente o mesmo valor máximo para o deslocamento, de 41,1 cm.

Figura 118 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 32 DIV)

A Figura 119 apresenta as duas tensões principais. A primeira tensão principal está no intervalo de 2,3 a 42,5 MPa, com valor de pico concentrado nos vértices e o restante da estrutura apresentando tensões da ordem de 13 MPa. Novamente, os valores são iguais ao obtidos no modelo E3.

Figura 119 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 32 DIV)

A segunda tensão principal também apresenta variação de -47,9 a 11,3 MPa. As regiões destacadas em azul indicam tensões de compressão espúrias, que representam o enrugamento na membrana.

Carregamento de vento normal à cumeeira

Da mesma forma como apresentado para a malha mais grosseira, os resultados gerados para o modelo **SE** sob o carregamento do vento normal à cumeeira foram iguais aos do modelo **E3**, conforme indicam as figuras na sequência.

A Figura 120 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução foi de 352,5 segundos após 7 iterações, com erro limite de 10^{-6} m.

Figura 120 - Gráficos de convergência dos deslocamentos

A Figura 121 apresenta a norma dos deslocamentos da estrutura ampliados em dez vezes. O valor do deslocamento máximo também foi de 49,7 cm.

A Figura 122 apresenta os valores das duas tensões principais. A primeira tensão principal varia entre 4,5 e 34,1 MPa, com tensões médias da ordem de 8 MPa. A segunda tensão principal varia de -17,0 a 9,1 MPa. As regiões com tensões de compressão, identificadas pela cor azul na figura da direita, são espúrias e representam o enrugamento da membrana.

Figura 121 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE – 32 DIV)

Figura 122 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE – 32 DIV)

5.4.5 Comparativo entre os modelos E3 – 32 DIV e SE – 32 DIV

A seguir serão apresentadas tabelas comparativas dos resultados dos modelos **E3 – 32 DIV** e **SE – 32 DIV**. As tabelas trazem os valores dos deslocamentos máximos, a variação nas tensões principais, o número de iterações necessárias para a convergência e o tempo de processamento. A primeira linha apresenta os

valores obtidos para o modelo **E3**, a segunda, para o modelo **SE** e, a terceira linha expõe um comparativo percentual dos resultados obtidos nos dois modelos.

A Tabela 8 apresenta os resultados para o carregamento de vento paralelo à cumeeira e, a Tabela 9, os valores para o vento normal à cumeeira.

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO PARALELO							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	Umax	$\sigma 1$ min	$\sigma 2$ min	$\sigma 1$ max	$\sigma 2$ max		
E3 - 32 DIV.	41,090	0,000	-47,915	42,489	11,302	*	*
SE - 32 DIV.	41,090	2,264	-47,915	42,489	11,302	*	*
Comparativo	0%	-	0%	0%	0%	-	-

Tabela 8 - Comparativo entre modelos E3 - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Paralelo)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	Umax	$\sigma 1$ min	$\sigma 2$ min	$\sigma 1$ max	$\sigma 2$ max		
E3 - 32 DIV.	49,733	0,000	-17,044	34,120	9,092	6	100,43
SE - 32 DIV.	49,733	4,502	-17,044	34,120	9,092	7	352,61
Comparativo	0%	-	0%	0%	0%	1	72%

Tabela 9 - Comparativo entre modelos E3 - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Normal)

Novamente, os resultados dos dois modelos foram idênticos. Apenas os menores valores obtidos para as tensões principais apresentam diferenças, devidas à plotagem da escala dos diagramas, diferenças essas que não foram encontradas na análise mais criteriosa de verificação das tensões em cada elemento.

Como dispensam a criação de nós de polia intermediários, os modelos **SE** têm lançamento muito mais simples do que os modelos **E3**, além de suportarem maiores deslocamentos, uma vez que não apresentam o risco de gerar comprimentos nulos em seus trechos, os quais causariam singularidades no modelo.

Baseando-se nesses dados, conclui-se que o uso do modelo **SE** é mais indicado, por apresentar os mesmos resultados, a um esforço computacional razoável, mas com uma modelagem bem mais simples e clara.

5.4.6 Comparativo entre os modelos SE – 7 DIV e SE – 32 DIV

Como exposto no comparativo anterior, os resultados obtidos para os modelos **SE** foram exatamente iguais aos dos modelos **E3**. Portanto, a análise comparativa das duas malhas, exposta para o caso de três nós, vale para o super-elemento, como apresentam a Tabela 10 e a Tabela 11.

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO PARALELO							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
SE - 7 DIV.	43,295	4,080	-12,951	20,739	6,185	6	2,97
SE - 32 DIV.	41,090	2,264	-47,915	42,489	11,302	*	*
Comparativo	5%	0%	73%	51%	45%	-	-

Tabela 10 - Comparativo entre modelos SE - 7 DIV e SE - 32 DIV (Vento Paralelo)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
SE - 7 DIV.	51,431	4,885	-2,826	17,148	7,182	6	3,86
SE - 32 DIV.	49,733	4,502	-17,044	34,120	9,092	7	352,61
Comparativo	3%	0%	83%	50%	21%	1	99%

Tabela 11- Comparativo entre modelos SE - 7 DIV e SE - 32 DIV (Vento Normal)

Conclui-se, baseado em todas as tabelas comparativas expostas até o momento, que o modelo que melhor representa a cobertura de membrana em questão é o modelo **SE – 32 DIV**. Foi verificado, portanto, que a melhor discretização é a de 32 divisões por borda e que o modelo com super-elementos é o de modelagem mais simples. Resta, ainda, avaliar a influência da consideração do escorregamento dos cabos de borda nas respostas da estrutura aos carregamentos, comparando-se os deslocamentos e as tensões principais da estrutura. Para isso, serão apresentados os resultados obtidos para os dois carregamentos de vento, utilizando um modelo com cabos de borda aderentes.

5.4.7 Elementos de Cabo Aderentes (AD – 32 DIV)

As figuras a seguir apresentam os resultados da estrutura para o modelo com trinta e duas divisões por borda, utilizando cabos de borda aderentes, simulados através de elementos de treliça rigidamente ligados aos nós dos elementos de membrana. Foi utilizada a malha original, com 2145 nós, 4096 elementos de membrana e 192 elementos de treliça. As coordenadas iniciais dos nós foram obtidas na etapa de busca da forma viável.

Este modelo representa as análises convencionais de estruturas de cobertura retesadas. Na maioria dos casos, trabalha-se com as mesmas hipóteses adotadas nesse modelo, ou seja, com os elementos de treliça de dois nós, desconsiderando totalmente o escorregamento real entre o material da membrana e os cabos de borda que a tracionam, gerando, assim, tensões variáveis nestes elementos.

Há programas que utilizam elementos de barra com as características dos materiais alteradas, diminuindo a rigidez axial dos elementos, buscando simular o estado de tensão constante, característico da protensão sem aderência. Esse tipo de artifício é apropriado apenas na etapa da busca da forma, pois diminui a rigidez elástica dos elementos dos cabos de borda, mascarando o seu comportamento e sua influência nas respostas aos carregamentos, além de não permitir a verificação dos valores de tensões máximos atingidos nos cabos.

A seguir, serão apresentados os resultados deste modelo para os dois casos de carregamento de vento.

Carregamento de vento paralelo à cumeeira

Apresentam-se, a seguir, os resultados dos deslocamentos e das tensões principais obtidos para o carregamento do vento paralelo à cumeeira no modelo com malha de 32 divisões por borda e elementos de cabos de borda aderentes.

A Figura 123 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução do SATS foi de 72,8 segundos após 6 iterações, com precisão de 10^{-6} m.

Figura 123- Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)

A Figura 124 apresenta a norma dos deslocamentos encontrados. A deformação é simétrica e positiva, com valor máximo de 37,0 cm nos dois vãos centrais.

Figura 124 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo AD – 32 DIV)

A Figura 125 apresenta as duas tensões principais. A primeira tensão principal varia no intervalo de 4,2 a 13,2 MPa, com valor máximo na parte central da estrutura de membrana. Desenho que se aproxima do apresentado para o modelo **SE – 32 DIV**, quando se desconsideram os picos de tensões localizados nos vértices. A segunda tensão principal varia de -3,3 a 5,8 MPa. Analogamente

aos resultados dos demais modelos apresentados, o valor mínimo da segunda tensão principal indica uma compressão, a qual representa um enrugamento da membrana, nas regiões destacadas em azul.

Figura 125 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD – 32 DIV)

Carregamento de vento normal à cumeeira

As figuras a seguir ilustram os resultados gerados no **SATS**, para o carregamento do vento normal à cumeeira no modelo **AD – 32 DIV**.

A Figura 126 traz os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução da estrutura foi de 88,0 segundos após 6 iterações, com uma precisão de 10^{-6} m.

Figura 126 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD – 32 DIV)

A Figura 127 apresenta a norma dos deslocamentos ampliados em dez vezes. O valor do deslocamento máximo, na parte succionada da cobertura, é de, aproximadamente, 45 cm, enquanto que, no trecho sob carregamento de pressão, é cerca de 25 cm, tendendo a zero nas bordas e na cumeeira. Desenho muito semelhante ao gerado a partir dos resultados obtidos com os modelo de borda não-aderentes.

Figura 127 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo AD – 32 DIV)

A Figura 128 apresenta o diagrama das duas tensões principais. A primeira tensão principal tem valor máximo de 10,9 MPa, concentrado na borda superior da água succionada da cobertura. A segunda tensão principal tem o valor máximo de 7,4 MPa, sem apresentar tensões de compressão em ponto algum da estrutura.

Figura 128 - Primeira tensão principal (Modelo AD – 32 DIV)

5.4.8 Comparativo entre os modelos AD – 32 DIV e SE – 32 DIV

As tabelas a seguir apresentam a comparação dos resultados obtidos com a utilização dos modelos **AD – 32 DIV** e **SE – 32 DIV**, na discretização com trinta e duas divisões por borda.

De forma análoga aos comparativos anteriores, as tabelas apresentam os valores dos deslocamentos máximos, a variação nas tensões principais, o número de iterações necessárias para a convergência e o tempo de processamento. A primeira linha apresenta os valores obtidos para o modelo **AD – 32 DIV**, a segunda, para o modelo **SE – 32 DIV** e, a terceira linha apresenta um comparativo percentual entre os modelos.

A Tabela 12 apresenta os resultados para o carregamento de vento paralelo à cumeeira e, a Tabela 13, os valores para o vento normal à cumeeira.

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO PARALELO							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	Umax	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
AD - 32 DIV.	36,959	4,233	-3,295	13,194	5,765	6	72,81
SE - 32 DIV.	41,090	2,264	-47,915	42,489	11,302	*	*
Comparativo	10%	47%	93%	69%	49%	-	-

Tabela 12 - Comparativo entre modelos AD - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Paralelo)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
AD - 32 DIV.	45,285	5,142	0,638	10,879	7,393	6	88,071
SE - 32 DIV.	49,733	4,502	-17,044	34,120	9,092	7	352,61
Comparativo	9%	12%	104%	68%	19%	1	75%

Tabela 13 - Comparativo entre modelos AD - 32 DIV e SE - 32 DIV (Vento Normal)

As variações, da ordem de 10% nos deslocamentos, são devidas à diferença na formulação dos elementos, uma vez que as bordas não aderentes são menos rígidas e permitem maiores deslocamentos.

Os modelos com cabos de borda aderentes, geralmente, não apresentam tensões de compressão, representadas pelos valores negativos na segunda tensão principal. Isso se deve ao fato de que os elementos de treliça possuem maior resistência e, como estão rigidamente ligados aos nós dos elementos de membrana, transmitem-lhes uma rigidez transversal superior à real. Essas tensões de compressão, apesar de serem dados espúrios, indicam as regiões de provável surgimento de enrugamento do material, as quais não são detectadas nos modelos usuais com cabos de borda aderentes. Esse enrugamento realmente é identificado nas estruturas correntes. O conhecimento dessas regiões permite que sejam especificados cuidados especiais na execução e no detalhamento das estruturas. Dependendo do caso, pode-se sugerir campos de tensões de retesamento mais elevados ou tensões maiores nos cabos de borda protendidos.

Os valores máximos da primeira tensão principal foram bastante superiores nos modelos com cabos de borda não-aderentes. Esses valores de pico estão concentrados nos vértices da estrutura, regiões muito críticas e propensas ao aparecimento e propagação de rasgos. No caso dos modelos com cabos aderentes, os elementos de membrana dos cantos têm suas arestas “reforçadas” pela rigidez dos elementos de treliça, apresentando deformações menores, o que mascara o campo de tensões reais desses elementos. A desconsideração desses valores de pico de tensão é contrária a segurança e pode acarretar problemas *in loco* nessas estruturas.

Esses valores máximos de tensão não estarão, necessariamente, atuantes na estrutura, uma vez que é de prática corrente na execução das coberturas retesadas de membrana, a eliminação do material dos vértices, como no caso do Memorial dos Povos, conforme pode ser notado na Figura 129. Mas o conhecimento do campo elevado de tensões nessas regiões permite um detalhamento de um reforço eficiente nestas áreas críticas, evitando que a membrana perca a tangência com os cabos, podendo, assim, evitar problemas bastante usuais de propagação de rasgos.

Figura 129 - Detalhe típico de vértice

Como pode ser visto nas figuras apresentadas para os resultados de ambos os modelos, na parte central da estrutura os valores da primeira tensão principal foram bastante parecidos.

O tempo de processamento dos modelos com super-elementos é maior, mas trata-se de uma diferença aceitável, a qual não atrapalha a aplicabilidade dos modelos utilizando super-elementos de cabo deslizando sem atrito.

A proximidade nos valores dos deslocamentos entre os dois modelos leva a conclusão de que a implementação dos elementos de cabo deslizantes retrata, de maneira bastante satisfatória, o comportamento das estruturas retesadas.

Baseado nesses dados, conclui-se que o uso do novo modelo **SE**, desenvolvido neste trabalho, é mais indicado, por representar de maneira muito mais eficiente, os problemas de concentrações de tensões nos vértices e de surgimento de regiões com enrugamento dos materiais, com custo computacional razoável.

Presume-se que, quanto maior for o carregamento aplicado à estrutura, ou os deslocamentos impostos, maiores serão as discrepâncias entre os modelos considerando ou não o escorregamento dos cabos de borda. Por isso, será apresentado, na seqüência, os resultados obtidos para a estrutura considerando as condições de apoio assimétricas, geradas pela modelagem dos mastros principais.

5.5 Modelos com Trinta e Dois Elementos por Borda e Mastros Principais

A análise numérica original da estrutura do Memorial dos Povos, de acordo com Pauletti & Brasil [2005], não contava com a modelagem da influência dos mastros estaiados principais, utilizando, como condições de contorno, nós fixos, sem nenhum grau de liberdade livre, nas posições dos apoios, de maneira análoga aos modelos apresentados anteriormente neste trabalho.

Será estudada, nesta etapa, a influência da consideração destes mastros estaiados, o “mastro rei” (ilustração superior esquerda da Figura 130), e o “mastro rainha” (ilustração inferior direita da Figura 130), para o equilíbrio e para a distribuição das tensões na estrutura.

Figura 130 - Detalhes do Memorial dos Povos [Pauletti & Brasil, 2005]

Esses elementos introduzem na estrutura deslocamentos maiores, quando submetida a carregamentos assimétricos, devido à não-simetria da sua condição de contorno, ou seja, ao não travamento da estrutura no seu eixo transversal.

Os outros quatro apoios nivelados são compostos por tripés metálicos (ilustração inferior esquerda da Figura 130), os quais não foram introduzidos no modelo, uma vez que suas condições de apoio são bem representadas por apoios fixos nos nós.

A discretização, apresentada na Figura 131, é a mesma utilizada nos modelos com trinta e dois elementos de membrana por borda. Apenas foram acrescentados os mastros (barras internas) e estais (barras externas), modelados como elementos de treliça, com as dimensões de projeto. A seção transversal dos tubos circulares adotados para os mastros foi de $A = 0,005m^2$, considerando o módulo de elasticidade de $E = 200GPa$, obtém-se a rigidez axial de $EA = 1,0 \cdot 10^9 N$. Os estais têm a mesma rigidez axial considerada para os cabos de borda, ou seja, $EA = 1,0 \cdot 10^8 N$. Para a obtenção da força interna inicial atuante nestas barras, foram utilizadas as reações de apoio desses nós, obtidas no caso de carregamento de retesamento puro, levando em consideração a geometria do modelo.

Figura 131 - Modelo com mastro estaiado - Forma inicial

5.5.1 Busca da forma

Foi realizada a etapa inicial de busca da forma viável, partindo-se da forma viável encontrada para o modelo **AD – 32 DIV** sem a consideração dos mastros. Procedeu-se como usual, fornecendo maior flexibilidade da estrutura, deixando-a se deformar sob um campo de tensões uniforme correspondente ao retesamento $q = 5,0 \cdot 10^6 \text{ N/m}^2$ e uma tensão inicial nos cabos de $N_0 = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N}$, utilizando o modelo com cabos de borda aderentes. Encontrada a forma viável, foi utilizado o modelo com cabos de borda não-aderentes para corrigir o formato da borda para um arco de círculo, como realizado para as outras malhas.

A Figura 132 mostra os gráficos de convergência dos deslocamentos para a etapa da busca da forma. O tempo de resolução foi de 95,8 segundos, após 7 iterações, com a precisão de 10^{-6} m .

Figura 132 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Busca da Forma)

Na Figura 133 são apresentadas as normas dos deslocamentos. O valor máximo do deslocamento é de 1,84 m, próximo ao mastro rainha.

Figura 133 - Norma dos deslocamentos (Busca da Forma)

A Figura 134 traz os valores obtidos para as tensões principais, as quais são descartadas, já que nesta fase apenas interessam os deslocamentos calculados, os quais representam a forma viável de equilíbrio da estrutura.

Figura 134 – Primeira e segunda tensões principais (Busca da Forma)

Como nos modelos anteriores, os deslocamentos da estrutura na forma de equilíbrio viável encontrada foram verificados, considerando apenas o campo uniforme de tensões do retesamento. A Figura 135 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos para a nova configuração. O tempo de resolução foi de 60,9 segundos após 4 iterações, com precisão de 10^{-6} m.

Figura 135 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD –MASTROS)

A Figura 136 apresenta a norma dos deslocamentos para o caso do retesamento puro. Como os deslocamentos foram pequenos, com valor máximo de aproximadamente 3 cm, conclui-se que esta é uma forma viável de equilíbrio para a estrutura.

Figura 136 - Norma dos deslocamentos (Modelo AD –MASTROS)

A Figura 137 apresenta as tensões principais provocadas pelo retesamento da membrana. Em um campo praticamente uniforme, o valor máximo da primeira tensão principal foi de 5,9 MPa e da segunda tensão principal foi de 5,1 MPa, não apresentando tensões de compressão em ponto algum da estrutura.

Figura 137 – Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD –MASTROS)

5.5.2 Super-Elementos de Cabo Ideais (SE – MASTROS)

As figuras seguintes apresentam os resultados para o caso de carregamento de vento normal à cumeeira, o qual foi escolhido por ser um carregamento assimétrico, que provocaria, supostamente, diferenças nos resultados dos modelos considerando ou não a modelagem dos mastros.

Foi utilizada a malha de trinta e dois elementos de membrana por borda, acrescentando os mastros principais e utilizando os super-elementos de cabo escorregando sem atrito para simular os cabos de borda.

Carregamento de vento normal à cumeeira

Apresentam-se os resultados do modelo **SE – MASTROS** submetido ao carregamento do vento normal à cumeeira.

A Figura 138 apresenta os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução foi de 406,8 segundos após 8 iterações, com erro limite de 10^{-6} m.

Figura 138 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo SE –MASTROS)

A Figura 139 apresenta a norma dos deslocamentos da estrutura ampliados em dez vezes. O valor da norma do deslocamento máximo foi de 51,3 cm no centro da água succionada e de, aproximadamente, 30 cm na outra água.

Figura 139 - Norma dos deslocamentos aumentados (Modelo SE –MASTROS)

A Figura 140 apresenta as duas tensões principais. A primeira tensão principal tem valor máximo nos vértices de 29,6 MPa. O restante da estrutura apresenta tensões na ordem de 11 MPa.

Figura 140 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo SE –MASTROS)

A segunda tensão principal varia de -30,2 a 9,1 MPa. O valor negativo na tensão indica esforços de compressão, mas, como as estruturas retesadas não resistem a esses esforços, o resultado é o enrugamento do material da membrana, que acontece nas regiões destacadas em azul, próximas aos vértices.

Como mencionado para a análise sem a consideração dos mastros principais, esse dado espúrio de tensão negativa seria evitado com a inclusão de um modelo não-compressível para a membrana, o qual analisaria a influência do enrugamento no restante da estrutura.

5.5.3 Elementos de Cabo Aderentes (AD – MASTROS)

Apresentam-se, a seguir, os resultados da estrutura para o modelo com trinta e duas divisões por borda, utilizando cabos de borda aderentes, considerando os mastros principais como pontos de apoio, sob o carregamento de vento assimétrico.

Carregamento de vento normal à cumeeira

As figuras a seguir ilustram os resultados gerados no SATS para o carregamento do vento normal à cumeeira para o modelo **AD – MASTROS**.

A Figura 141 traz os gráficos de convergência dos deslocamentos. O tempo de resolução da estrutura foi de 100,0 segundos após 6 iterações, com uma precisão de 10^{-6} m.

Figura 141 - Gráficos de convergência dos deslocamentos (Modelo AD –MASTROS)

A Figura 142 apresenta a norma dos deslocamentos ampliados em dez vezes. O valor do deslocamento máximo na parte succionada da cobertura é de 47,6 cm, enquanto que, no trecho sob carregamento de pressão, é cerca de 30 cm, tendendo a zero nas bordas e na cumeeira.

Figura 142 - Norma dos deslocamentos ampliados (Modelo AD –MASTROS)

A Figura 143 apresenta as tensões principais. A primeira tensão principal tem valor máximo de 9,9 MPa, distribuído em quase toda a área da cobertura. A segunda tensão principal tem o valor máximo de 6,5 MPa, sem apresentar tensões de compressão em ponto algum da estrutura.

Figura 143 - Primeira e segunda tensões principais (Modelo AD –MASTROS)

5.5.4 Comparativo entre os modelos 32 DIV e MASTROS

As tabelas a seguir apresentam a comparação dos resultados obtidos acrescentando ou não os mastros estaiados principais na modelagem. Considera-se a discretização com trinta e duas divisões por borda e o caso de carregamento do vento normal à cumeeira.

Como nos comparativos anteriores, as tabelas apresentam os valores dos deslocamentos máximos, a variação nas tensões principais, o número de iterações necessárias para a convergência e o tempo de processamento. A primeira linha apresenta os valores obtidos para o modelo **MASTROS**, a segunda, para o modelo **32 DIV** e, a terceira linha expõe um comparativo percentual entre os dois modelos.

A Tabela 14 apresenta os resultados para o modelo com super-elementos de cabo ideais e, a Tabela 15, os valores do modelo com cabos de borda aderentes.

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
SE - MASTROS	51,271	0,000	-30,251	29,611	9,117	8	406,85
SE - 32 DIV.	49,733	4,502	-17,044	34,120	9,092	7	352,61
Comparativo	3%	-	44%	13%	0%	1	13%

Tabela 14 - Comparativo entre modelos SE - MASTROS e SE - 32 DIV (Vento Normal)

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
AD - MASTROS	47,632	0,000	0,000	9,938	6,470	6	100,02
AD - 32 DIV.	45,285	5,142	0,638	10,879	7,393	6	88,071
Comparativo	5%	-	-	9%	12%	0	12%

Tabela 15 - Comparativo entre modelos AD - MASTROS e AD - 32 DIV (Vento Normal)

Pode-se notar que ocorreram diferenças pequenas nos deslocamentos entre os modelos com e sem os mastros principais, mas esses pequenos incrementos de deslocamentos causaram um aumento de aproximadamente 10% no valor máximo da primeira tensão principal, o que pode vir a ser um fator crítico, dependendo dos limites de resistência adotados. Portanto, a desconsideração da influência dos mastros principais desta estrutura, na análise de carregamentos assimétricos, é contra a segurança e deve ser evitada.

A Tabela 16 compara os resultados dos modelos aderentes e não-aderentes, com a introdução dos mastros principais. A primeira linha apresenta os valores para o modelo **AD - MASTROS**, a segunda, para o modelo **SE - MASTROS** e, a terceira linha expõe um comparativo percentual entre eles.

CASO DE CARREGAMENTO: VENTO NORMAL							
Modelo	Desloc. (cm)	Tensões (MPa)				Iterações	Tempo (s)
	U _{max}	σ_1 min	σ_2 min	σ_1 max	σ_2 max		
AD - MASTROS	47,632	0,000	0,000	9,938	6,470	6	100,02
SE - MASTROS	51,271	0,000	-30,251	29,611	9,117	8	406,85
Comparativo	7%	0%	-	66%	29%	0	75%

Tabela 16 - Comparativo entre AD - MASTROS e SE - 32 MASTROS (Vento Normal)

Como pode ser observado na Tabela 13 e na Tabela 16, as diferenças entre os modelos **AD – MASTROS** e **SE – MASTROS** foram da mesma ordem de grandeza das diferenças dos modelos que não consideravam os mastros. Isso ocorre porque ambos os modelos tiveram aumentos parecidos nos deslocamentos e nas tensões principais. Dessa forma, a mesma análise feita para a comparação dos resultados dos modelos **32 DIV** se aplica aqui e, por concisão, não será repetida.

Portanto, ao contrário do pressuposto, a consideração das condições de apoio assimétricas, geradas pela modelagem dos mastros principais, não acarretou em maiores discrepâncias entre os modelos, considerando ou não o escorregamento dos cabos de borda.

Como a diferença no tempo de processamento com acréscimo dos mastros é pequena e a modelagem desses elementos é bastante simples, conclui-se que o uso dos modelos **MASTROS** é mais indicado, por gerar resultados mais elevados para os deslocamentos e para tensões atuantes na membrana.

5.6 Comparação das Tensões nos Cabos de Borda

Foram analisadas as tensões resultantes nos cabos de borda dos modelos **SE – 32 DIV** e **AD – 32 DIV**, para os casos de carregamento de vento normal, vento paralelo à cumeeira e de retesamento puro. A Figura 144 apresenta a numeração dos cabos de borda adotada para os super-elementos, a qual será utilizada aqui para melhor exposição dos resultados.

Uma vez que, nos modelos com cabos de borda aderentes, a tensão nos elementos varia, será apresentada uma comparação de seus valores médios, mínimos e máximos, com os valores de tensão constantes obtidos na análise com cabos de borda sem aderência. O objetivo desse comparativo é avaliar se a hipótese de aderência dos cabos de borda subestima os valores das tensões.

Figura 144 - Numeração dos Cabos de Borda

As tabelas a seguir apresentam os valores das tensões nos cabos das seis bordas, conforme a numeração da Figura 144, para os modelos com cabos de borda aderentes (**AD**) e para os modelos com super-elementos de cabo escorregando sem atrito (**SE**).

A Tabela 17 apresenta os resultados para o carregamento de tensão constante do retesamento, a Tabela 18, para o caso de vento paralelo à cumeeira e, a Tabela 19, os valores para o vento normal à cumeeira.

Retesamento - Tensões nos cabos (N)				
cabo	AD			SE
	Nmin	N médio	N máx	N
1	8,66E+04	9,31E+04	9,93E+04	9,64E+04
2	7,93E+04	8,20E+04	8,30E+04	7,21E+04
3	8,22E+04	8,48E+04	8,66E+04	8,47E+04
4	8,22E+04	8,48E+04	8,66E+04	8,47E+04
5	7,94E+04	8,20E+04	8,30E+04	7,21E+04
6	8,66E+04	9,31E+04	9,93E+04	9,64E+04

Tabela 17 - Tensões nos Cabos de Borda (Retesamento)

Vento Paralelo - Tensões nos cabos (N)				
cabo	AD			SE
	Nmin	N médio	N máx	N
1	6,31E+04	8,55E+04	1,11E+05	8,74E+04
2	1,17E+05	1,23E+05	1,38E+05	1,60E+05
3	6,64E+04	8,97E+04	9,78E+04	7,99E+04
4	6,64E+04	8,97E+04	9,78E+04	7,99E+04
5	1,17E+05	1,23E+05	1,38E+05	1,60E+05
6	6,31E+04	8,55E+04	1,11E+05	8,74E+04

Tabela 18- Tensões nos Cabos de Borda (Vento Paralelo)

Vento Normal - Tensões nos cabos (N)				
cabo	AD			SE
	Nmin	N médio	N máx	N
1	9,75E+04	1,08E+05	1,21E+05	1,10E+05
2	9,82E+04	1,09E+05	1,23E+05	1,10E+05
3	7,66E+04	8,90E+04	9,70E+04	9,29E+04
4	9,37E+04	1,13E+05	1,26E+05	1,01E+05
5	9,73E+04	1,04E+05	1,10E+05	1,16E+05
6	8,31E+04	9,29E+04	1,02E+05	1,04E+05

Tabela 19- Tensões nos Cabos de Borda (Vento Normal)

Os valores mínimos são inferiores, no geral, aos obtidos nos modelos **SE**. Por isso, sua consideração seria contrária à segurança. Esses resultados sugerem que o valor que melhor representa a tensão constante, obtida nos modelos sem aderência, seria o valor médio das tensões obtidas em cada elemento que compõe uma borda, mas conclusões mais concretas e definitivas dependem de estudos mais aprofundados, os quais não fazem parte do escopo deste trabalho e deverão ser objeto de uma nova pesquisa.

6 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho, foram utilizados métodos numéricos para desenvolver a implementação computacional do elemento finito de cabo deslizando sem atrito, proposto por Pauletti [2003], baseado na formulação do elemento de cabo de três nós, desenvolvido por Aufaure [1993].

A alternativa mais usual na modelagem dos cabos de borda de estruturas de membrana é simular o cabo como uma seqüência de elementos de treliça. No entanto, esse procedimento apresenta resultados aceitáveis apenas para casos de protensão com aderência perfeita.

Para simular o escorregamento relativo entre a malha da membrana e o cabo, em modelos com elementos de treliça, é comum utilizar o artifício de alterar as propriedades dos materiais. Entretanto, essa solução provoca uma diminuição da rigidez elástica dos elementos de borda, distorcendo os resultados dos deslocamentos e, conseqüentemente, os valores das tensões e deformações principais. Além de introduzir erros na análise da resposta aos carregamentos, esse tipo de solução impede a verificação das tensões atuantes nos cabos, as quais podem atingir valores superiores à sua resistência, causando danos à estrutura. Na análise de reforço de estruturas de membranas existentes, o uso desse artifício também não seria aconselhável, uma vez que o ganho de resistência do sistema e a interação dos cabos de reforço com os cabos existentes só podem ser melhor estimados através de um modelo mais realista.

Uma generalização da formulação do elemento de cabo de três nós, apresentada por Pauletti [2003], foi proposta, desenvolvendo-se um super-elemento de cabo escorregando sem atrito, com “n” nós. A interação entre todos os nós que compõem o super-elemento, intrínseca à sua formulação, faz com que cada nó de uma borda da estrutura contribua para rigidez elástica do conjunto, enquanto que, no caso do elemento de três nós, apesar do deslocamento do nó de polia influenciar os dois trechos do cabo, os elementos não interagem entre si, formando uma cadeia de trechos isolados. Desta forma, o super-elemento retrata melhor a realidade, sendo uma ferramenta mais

flexível, realista e de modelagem mais simples, uma vez que dispensa a criação de nós de polia intermediários. A ausência de nós suplementares à malha original, além de facilitar o lançamento do modelo, elimina um problema intrínseco à modelagem de três nós: a singularidade do modelo, que pode ocorrer devido ao comprimento nulo gerado para um dos trechos do cabo.

Os elementos de cabo implementados foram inseridos em um programa de análise de estruturas retesadas, denominado SATS. Produzido para o ambiente MATLAB®, o programa é capaz de gerar resultados em deslocamentos, tensões e deformações. O procedimento adotado para a implementação de ambos os elementos de cabo ideal mostrou-se coerente e os resultados obtidos indicam a eficiência alcançada. Os novos elementos de cabo acrescentaram ao programa SATS a possibilidade da consideração mais realista do efeito do escorregamento dos cabos de borda nas estruturas de membranas.

Os elementos finitos de cabo ideal apresentaram excelentes resultados, quando comparados com as soluções analíticas, tanto no primeiro exemplo, caracterizado por um único elemento de cabo com extremidades fixas, submetido ao carregamento em seu nó intermediário, quanto no segundo caso, composto por um cabo livremente suspenso submetido ao carregamento distribuído ao longo de seu vão.

O funcionamento do super-elemento de cabo ideal foi verificado a partir da comparação de seus resultados com os valores dos modelos de cabo de três nós, chegando a resultados praticamente iguais nas duas modelagens.

No exemplo do Memorial dos Povos de Belém do Pará, as respostas obtidas aos carregamentos de vento foram satisfatórias, tanto em deslocamentos quanto em tensões, quando comparados aos resultados das análises convencionais, as quais utilizam elementos de treliça para representar as bordas.

Nas análises dos carregamentos de vento com modelos não-aderentes, surgiram valores negativos na segunda tensão principal, os quais representam as regiões com enrugamento da membrana. Esses dados espúrios nas tensões seriam evitados com a inclusão de um modelo não-compressível para o

elemento finito de membrana, o qual representaria o enrugamento do material, permitindo analisar a influência desse efeito para o restante da estrutura.

Os modelos com cabos de borda aderentes, geralmente, não apresentam tensões de compressão. Isso se deve ao fato de que, como os elementos de treliça possuem maior resistência e estão rigidamente ligados aos nós dos elementos de membrana, transmitem-lhes uma rigidez transversal superior a real, não permitindo a identificação das regiões com possível enrugamento.

Na comparação entre os modelos considerando ou não o escorregamento dos cabos de borda, foram observadas variações, da ordem de 10%, nos resultados dos deslocamentos, indicando que as bordas com elementos não-aderentes são menos rígidas e permitem maiores deslocamentos.

Os valores máximos da primeira tensão principal foram bastante superiores nos modelos com cabos de borda deslizantes. Os valores de pico de tensão estão concentrados nos vértices da estrutura, regiões muito críticas e propensas ao aparecimento e propagação dos rasgos. No caso dos modelos com cabos aderentes, os elementos de membrana dos cantos têm suas arestas “reforçadas” pela rigidez dos elementos de treliça, apresentando deformações menores, o que mascara o campo de tensões real desses elementos. A desconsideração desses valores de pico de tensão é contrária a segurança e pode acarretar problemas no comportamento em serviço dessas estruturas. É necessário salientar, entretanto, que esses valores máximos de tensão não estarão, necessariamente, atuantes na estrutura, uma vez que é de prática corrente, na execução das coberturas retesadas de membrana, a eliminação do material dos vértices, mas o conhecimento desse campo de tensões elevado nos vértices é importante e permite um detalhamento mais eficiente do reforço na região recortada.

Em uma última análise, foram inseridos os mastros principais na modelagem da cobertura do Memorial dos Povos, procurando avaliar a influência de sua condição de contorno assimétrica no comportamento global da estrutura. Ocorreram variações mínimas nos deslocamentos entre os modelos com e sem os mastros principais, mas esses pequenos incrementos de deslocamentos

causaram um aumento de aproximadamente 10% no valor máximo da primeira tensão principal, o que pode ser um fator crítico, dependendo dos limites de resistência adotados. Conclui-se que, pela facilidade da inclusão desses elementos nos modelos e por sua influência nos resultados, a utilização dos mastros é aconselhável.

Por fim, com o objetivo de avaliar se a hipótese de aderência dos cabos de borda subestima os valores das tensões nos cabos de borda, foram comparados os valores das tensões obtidos nos modelos considerando ou não o escorregamento. Os resultados sugeriram que o valor que melhor representa a tensão constante, obtida nos modelos sem aderência, seria o valor médio das tensões obtidas em cada elemento que compõe uma borda aderente, mas conclusões mais concretas e definitivas dependem de estudos mais detalhados.

A implementação do super-elemento de cabo deslizando sem atrito, desenvolvida neste trabalho, mostrou-se bastante eficiente para auxiliar o projeto e análise de estruturas de membrana. O assunto tratado é de grande relevância prática, devido à carência de ferramentas computacionais que permitem a análise do escorregamento dos cabos de borda. Faz-se necessário, entretanto, o desenvolvimento de novas pesquisas envolvendo o material e a implementação de novos elementos finitos.

Em continuidade a este trabalho, propõem-se alguns temas para pesquisas futuras:

- Formulação e implementação de um elemento finito de membrana incompressível, com o objetivo de eliminar os dados espúrios obtidos nas tensões principais, estudando a influência do enrugamento do material da membrana no comportamento global da estrutura;
- Estudo dos valores de tensão atingidos nos cabos de borda utilizando modelos aderentes, buscando avaliar se os valores adotados nas análises usuais subestimam os valores reais das tensões nos cabos sem aderência;

- Formulação e implementação de um super-elemento de cabo deslizando com a consideração do efeito do atrito, existente entre o cabo e sua estrutura de suporte.

7 REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[Aufaure, 1993] M. Aufaure. **“A finite element of cable passing through a pulley”**, Computer & Structures v. 46 (5) p. 807–912 (1993).

[Bathe, 1996] K. J. Bathe. **“Finite Element Procedures”**. Prentice Hall, Englewood Cliffs, New Jersey (1996).

[Deifeld, 2001] T.E.C. Deifeld. **Aplicação de um Elemento Finito de Cabo à Modelagem Numérica da Protensão sem Aderência**. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (2001).

[Haber, 1982A] R.B. Haber & J.F. Abel. **“Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I – Formulations.”** Comp. Meth. in Appl. Mech. and Eng. (1982).

[LEWIS, 1998] W.J. Lewis. **“Lightweight tension membranes –an overview.”** Proc. Instn. Civ. Engrs. Civ. Engng v.126 p.171-181, (1998).

[Guirardi, 2006] D. M. Guirardi. **Implementação de um Elemento Finito de Membrana Baseado na Formulação Natural de Argyris**. Dissertação de Mestrado. Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (2006).

[Jota, 2007] F. O. Jota & C. E. Porto. **Evolução das Estruturas de Membranas**. Faculdade de Arquitetura e Urbanismo da Universidade de Brasília (2007) – Trabalho apresentado à disciplina de curso de mestrado.

[MATSUMOTO, 2004] E. Y. Matsumoto. **Matlab 7 Fundamentos**. São Paulo, ed. Ética, primeira edição (2004).

[Pauletti & Pimenta, 1995] R.M.O. Pauletti & P.M. Pimenta. **Formulação de um Elemento Finito de Cabo Incorporando o Efeito do Atrito ('Elemento de cabos escorregando')**". Revista Internacional de Métodos Numéricos para Cálculo y Diseño em Ingeniería. Vol 11, n. 4, pp. 565-576 (1995).

[Pauletti, 2003] R.M.O. Pauletti. **História, Análise e Projeto de Estruturas Retesadas**. Tese de Livre Docência. Escola Politécnica da USP (2003).

[Pauletti, 2008] R.M.O. Pauletti. **"Static Analysis of Taut Structures"**. Computational Methods in Applied Sciences, Springer Ed. (2008).

[Pauletti, 2005] R.M.O. Pauletti, D. M. Guirardi & T.E.C. Deifeld. **Argyris' Natural Membrane Finite Element Revisited**. International Conference on Textile Composites and Inflatable Structures, STRUCTURAL MEMBRANES 2005, Stuttgart (2005).

[Pauletti & Brasil, 2005] R. M. O. Pauletti & R. M. L. R. F. Brasil. **"Structural Analysis and Construction of the Membrane Roof of the "Memorial dos Povos de Belém do Pará", II Simposio Latinoamericano de Tensoestructuras**. Caracas, Venezuela (2005).

[Pauletti & Brasil, 2004] R. M. O. Pauletti, R. M. L. R. F. Brasil & R. A. A. Alvim. **"A Large Membrane Roof for the Baptist Church of Fortaleza: from Models to Realization"**. IASS 2004 - International Association for Shell and Spatial Structures. Montpellier, França (2004).

[SONG, 2003] C. Song. **"Analysis of Tensioned Membrane Structures Considering Cable Sliding"**. Journal of Zhejiang University SCIENCE, Vol4, n. 6, pp 672-682 (2003).

[Tabarrok, 1991] B. Tabarrok & Z. Qin. “**Nonlinear Analysis of Tension Structures**”. Revista Computers & Structures. Vol 45, n. 5/6, pp. 973-984 (1992).

[Tibert, 1999] G. Tibert. “**Numerical Analysis of Cable Roof Structures**”. Department of Structural Engineering, Royal Institute of Technology, Stockholm, Sweden (1999).

[Mitsugi, 1992] J. Mitsugi. “**Static Analysis of Cable Networks and Their Supporting Structures**”. Revista Computers & Structures. Vol 51, n. 1, pp. 47-56 (1994).

[ZHOU, 2004] B. Zhou, M. L. Accorsi & J. W. Leonard. “**Finite Element Modeling Sliding Cable Elements**”. Revista Computers & Structures. Vol 82, pp. 271-280 (2003).

NICOLAS JANBERG’S STRUCTURAE – International Database and Gallery of Structures. Disponível em: <<http://en.structurae.de>>. Acesso em: maio 2008.

MET@LICA TENSOESTRUTURAS – Membranas Tensionadas. Disponível em: <<http://www.metalica.com.br>>. Acesso em: maio 2008.