Marcelo Araújo da Silva

**SOBRE A OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS
SUBMETIDAS
A CARREGAMENTO DINÂMICO**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Civil

São Paulo

2000

Marcelo Araújo da Silva

SOBRE A OTIMIZAÇÃO DE ESTRUTURAS
SUBMETIDAS
A CARREGAMENTO DINÂMICO

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Civil

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas.

Orientador: Prof. Dr. Reyolando M. L. R. da
Fonseca Brasil

São Paulo

2000

À minha avó

Adelina

AGRADECIMENTOS

Este texto é baseado nos resultados de pesquisa do autor durante seu Programa de Doutorado no Departamento de Engenharia de Estruturas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, sob orientação do Prof. Dr. Reyolando M. L. R. F. Brasil. Uma parte do trabalho foi realizado no Optimal Design Laboratory, anexo ao Department of Civil and Environmental Engineering da The University of Iowa, Estados Unidos, como parte de Programa de Doutorado no País com Estágio no Exterior da CAPES (“sandwich”), sob supervisão do Prof. Dr. Jasbir S. Arora. Naquele estágio, uma grande colaboração a este trabalho também foi dada pelo Prof. Dr. Colby C. Swan, da mesma The University of Iowa. A CAPES – Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior, também proveu suporte financeiro para os estudos realizados no Brasil. Todos esses apoios, supervisão e suporte são imensamente agradecidos. Gostaria de agradecer também:

- a Prof. Dra. Priscila Goldenberg, minha orientadora durante o mestrado e no início do doutorado, pelo apoio e inesgotável atenção;
- o amigo Alex Alves Bandeira, pela colaboração na programação em linguagem C, e por ter gentilmente cedido o programa de sua autoria para a visualização gráfica de estruturas discretizadas em elementos finitos;
- a amiga Elizabeth Alvarez pelo grande apoio na revisão ortográfica;
- a minha esposa Gislene e os meus filhos Yan e Pâmela por me inspirarem e me darem força nas batalhas do dia à dia;
- os meus pais Onofre e Marielva, a irmã Ticiane e o amigo Aureliano que me acompanharam durante cada passo desta jornada e muito me incentivaram;
- os professores e funcionários da EPUSP que colaboraram com este trabalho.

RESUMO

Estudam-se, nesta Tese, procedimentos e aplicações práticas de técnicas de otimização no projeto de estruturas civis submetidas a carregamento dinâmico. Ênfase especial é colocada em soluções integradas para sistemas estruturais compostos por fundações, pórticos e placas, destinados ao suporte de máquinas vibratórias.

Problemas de minimizar o custo de estruturas e fundações são definidos como problemas de otimização. As dimensões dos elementos estruturais, bem como as armaduras utilizadas, no caso do concreto armado, são as variáveis de projeto. Para se calcular a função custo, são considerados os custos de construção, incluindo os custos do concreto, do aço, da forma e do escoramento, quando aplicáveis. São consideradas, entre outras, restrições devidas à ruptura dos materiais e do solo, deslocamentos excessivos, bem como as relacionadas com a percepção pelo ser humano de níveis de vibração desconfortáveis.

Um critério de ruína para barras de concreto armado submetidas à flexão oblíqua composta é desenvolvido, com o objetivo de minimizar o tempo computacional.

Um programa de computador foi implementado, com base no Método dos Elementos Finitos e no algoritmo do Lagrangiano Aumentado, e utilizado para resolver diversos problemas práticos de otimização. Também a sensibilidade das soluções é abordada.

ABSTRACT

In this Thesis, procedures and practical applications of optimization techniques to the project of Civil Engineering structures subjected to dynamic loading are studied. Special emphasis is placed on integrated solutions for structural systems composed by beams, columns, plates and footings designed to support vibrating machines.

Problems of minimizing structures and foundations cost are defined as optimization problems. The dimensions of the structural parts and their reinforcements, when reinforced concrete is used, are the design variables. In order to evaluate the cost function, the cost of the concrete, the steel, the form and the propping form, whenever proper, are considered. Constraints are considered, among others, due to material and soil failure, excessive displacements, as well as those related to the perception of uncomfortable vibration levels by human beings.

A failure criterion for reinforced concrete members subjected to asymmetric bending and axial loading is presented in order to minimize computer time.

A computer code was implemented, based on the Finite Element Method and the Augmented Lagrangian algorithm, and used to solve several practical optimization problems. The sensitivity of the solutions is also assessed.

ÍNDICE

	Página
LISTA DE TABELAS	x
LISTA DE FIGURAS E GRÁFICOS	xii
LISTA OF SÍMBOLOS	xiv
1 Introdução	1
1.1 Motivação	1
1.2 Objetivos e métodos	3
1.3 Plano da Tese	4
2 Alguma literatura sobre otimização de estruturas sob carregamento dinâmico	6
3 Processos de otimização	10
3.1 Introdução	10
3.2 Conceitos básicos de programação matemática	11
3.2.1 Otimização sem restrições	12
3.2.2 Otimização com restrições	13
3.3 Variáveis de projeto	16
3.4 Variáveis de estado	17
3.5 Função objetivo	18
3.6 Restrições de projeto	20
3.7 Tipos de formulação para problemas de programação matemática	21
3.8 O método do Lagrangiano aumentado	23
3.8.1 Apresentação do problema de otimização para variáveis contínuas	23
3.8.2 O Método do Lagrangiano aumentado	24
4 Otimização com restrições dinâmicas	31
4.1 Introdução	31
4.2 Análise de sensibilidade para problemas com restrições dinâmicas	34
4.2.1 Introdução	34
4.2.2 O princípio do Método das Variáveis Adjuntas	35
4.2.3 Análise de sensibilidade do Lagrangiano com o Método das	

Variáveis Adjuntas	37
4.2.4 O Método das Diferenças Finitas	39
4.2.5 Comentários sobre os métodos para a análise de sensibilidade	40
5 Programas implementados	41
5.1 Introdução	41
5.2 O programa computacional	43
6 Otimização de uma placa metálica	47
6.1 Introdução	47
6.2 Formulação do problema	49
6.3 Dados numéricos	51
6.4 Resultados numéricos	51
6.5 Comentários	53
7 Otimização de uma placa em concreto armado	55
7.1 Formulação do problema	55
7.2 Dados numéricos	58
7.3 Resultados numéricos	59
7.4 Comentários	62
8 Otimização de uma sapata em concreto armado	63
8.1 Introdução	63
8.2 Formulação do problema de otimização	64
8.3 Dados numéricos	70
8.4 Análise da influência do nível de conforto no projeto final	71
8.4.1 Introdução	71
8.4.2 Resultados obtidos	72
8.4.3 Comentários	72
8.5 Influência da análise de sensibilidade no projeto final	73
8.5.1 Introdução	73
8.5.2 Resultados obtidos	74
8.5.3 Comentários	75

9 Um critério de ruína para elementos lineares em concreto armado submetidos a flexão oblíqua composta	76
9.1 Introdução	76
9.2 Apresentação do problema	77
9.3 Critérios de ruína existentes	80
9.3.1 Introdução	80
9.3.2 Os Métodos de Bresler	81
9.3.3 Superfícies piramidais	83
9.3.4 O Método da Carga de Contorno Generalizado	83
9.4 Um critério de ruína e um procedimento viável para a sua implementação	84
9.4.1 A superfície de ruína proposta	84
9.4.2 Determinação dos coeficientes exponenciais	85
9.5 Comentários sobre os critérios de ruína apresentados	88
9.6 Exemplos analisados	89
9.6.1 Dados numéricos	89
9.6.2 Resultados para a otimização sem restrições	90
9.6.3 Resultados para a otimização com restrições	93
9.7 Comentários	97
10 Otimização de fundação aporticada para máquinas desbalanceadas	99
10.1 Introdução	99
10.2 Formulação do problema de otimização	101
10.3 Dados numéricos	107
10.4 Resultados numéricos	109
10.5 Comentários	112
11 Algumas conclusões e sugestões para futuros trabalhos	113
11.1 Algumas conclusões	113
11.2 Algumas sugestões para futuros trabalhos	115
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	116

LISTA DE TABELAS

Tabela 6.4.1 – Projeto ótimo considerando todas as restrições dinâmicas	52
Tabela 6.4.2 – Projeto ótimo não considerando a restrição de deslocamento	53
Tabela 7.3.1 – Valores assumidos por P_{motor} e p_0	59
Tabela 7.3.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 1	59
Tabela 7.3.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2	60
Tabela 7.3.4 – Resultados obtidos para o Exemplo 3	61
Tabela 7.3.5 – Resultados obtidos para o Exemplo 4	61
Tabela 8.4.1 – Valores assumidos por z_{du} , v_u e a_u	61
Tabela 8.4.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 1	71
Tabela 8.4.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2	72
Tabela 8.5.1 – Resultados obtidos utilizando-se o método das variáveis Adjuntas	74
Tabela 8.5.2 – Comparação dos vetores gradiente obtidos com o método das variáveis adjuntas e o método das diferenças finitas	75
Tabela 9.6.1 – Seções transversais analisadas	90
Tabela 9.6.2 – Resultados obtidos utilizando o método da reta de máximo declive	90
Tabela 9.6.3 – Resultados obtidos utilizando o método dos gradientes conjugados	91
Tabela 9.6.4 – Resultados obtidos utilizando-se o método de Gauss-Newton	91
Tabela 9.6.5 – Resultados obtidos utilizando o método da reta de máximo declive – otimização com restrições	94

Tabela 9.6.6 – Resultados obtidos utilizando o método dos gradientes conjugados– otimização com restrições	95
Tabela 10.3.1 – Projeto inicial para a sapata	108
Tabela 10.3.2 – Projeto inicial para os elementos lineares	108
Tabela 10.4.1 – Projeto ótimo para a sapata – aproximação da superfície de ruptura nunca é contra a segurança	109
Tabela 10.4.2 – Projeto ótimo para os elementos lineares – aproximação da superfície de ruptura nunca é contra a segurança	109
Tabela 10.4.3 – Projeto ótimo para a sapata – aproximação da superfície de ruptura deixando os erros se espalharem livremente	110
Tabela 10.4.4 – Projeto ótimo para os elementos lineares – aproximação da superfície de ruptura deixando os erros se espalharem livremente	111

LISTA DE FIGURAS E GRÁFICOS

Figura 4.4.1 – Tratamento das restrições dinâmicas	32
Figura 5.1.1 – Processo clássico de otimização estrutural	42
Figura 5.2.1 – Processo alternativo de otimização estrutural	44
Figura 6.1.1 – Placa a ser otimizada	48
Figura 6.1.2 – Discretização adotada	48
Figura 6.4.1 – Máximo deslocamento obtido para o projeto ótimo do primeiro problema	52
Figura 6.4.2 – Máximo deslocamento obtido para o projeto ótimo do segundo problema	53
Figura 7.3.1 – Configuração de deslocamento máximo na solução ótima no Exemplo 1	60
Figura 7.3.2 – Configuração de deslocamento máximo na solução ótima no Exemplo 4	61
Figura 8.1.1 – Sapata a ser otimizada	64
Figura 8.1.2 – Sapata discretizada	65
Figura 9.2.1 – Típica seção transversal de um elemento linear em concreto Armado submetido à flexão oblíqua composta	79
Figura 9.3.1 – Contornos de interação para diferentes valores de $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$	82
Figura 9.6.1 – Superfície de ruptura obtida para o projeto 126 utilizando o Método dos gradientes conjugados	92
Gráfico 9.6.1 – M_a^* como a aproximação de M_a utilizando o método dos	

gradientes para diversos valores do ângulo $\xi = a -$ otimização sem restrições	93
Gráfico 9.6.2 – M_b^* como a aproximação de M_b utilizando o método dos gradientes para diversos valores do ângulo $\xi = a -$ otimização sem restrições	94
Gráfico 9.6.3 – M_a^* como a aproximação de M_a utilizando o método dos gradientes para diversos valores do ângulo $\xi = a -$ otimização com restrições	96
Gráfico 9.6.4 – M_b^* como a aproximação de M_b utilizando o método dos gradientes para diversos valores do ângulo $\xi = a -$ otimização com restrições	96
Figura 10.1.1 – Fundação aporticada de máquina a ser otimizada e a respectiva discretização adotada	100

LISTA DE SÍMBOLOS

Letras romanas maiúsculas:

A	Área do plano da placa
A_s	Armadura longitudinal total para os elementos lineares
A_{se}, A_{sse}	Armadura longitudinal e transversal, respectivamente, do e -ésimo elemento linear
A_{ss}	Armadura transversal total para os elementos lineares
A_{ss}^V	Armadura transversal de combate à força cortante nos elementos lineares
A_{ss}^T	Armadura transversal de combate ao momento de torção nos elementos lineares
A_{sx}, A_{sy}	Armadura de flexão da placa
B	Largura de uma seção transversal de um elemento linear
B_e, H_e	Dimensões da seção transversal do e -ésimo elemento linear
C	Função objetivo (custo total)
C_c	Custo total do concreto
C_f	Custo total da forma
C_{pf}	Custo total do escoramento
C_s	Custo total do aço
C	Matriz de amortecimento
D^a	Vetor das forças de controle ativas ou passivas
E	Módulo de elasticidade longitudinal do concreto
E_1, E_2	Funções erro de aproximação global
E^i	Funções erro de aproximação local no i -ésimo ponto sobre as

	superfícies de ruptura
E_s	Módulo de elasticidade longitudinal do aço
F	Superfície de ruptura genérica
$\mathbf{F}^D$	Vetor das forças de amortecimento
$\mathbf{F}^I$	Vetor das forças de inércia
$\mathbf{F}^S$	Vetor das forças internas resistentes
G	Módulo de elasticidade transversal do concreto
$G(N, M_a, M_b, \alpha) - 1$	Superfície de ruptura proposta no presente trabalho
H	Altura de uma seção transversal de um elemento linear
$H(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, \mathbf{z}^a, t)$	Integrando do funcional Lagrangiano aumentado (parcela dinâmica) modificado para a utilização no método das variáveis adjuntas
$I_E, I_L, I_{E'}, I_{I'}$	Conjunto de números inteiros relacionados com os índices das restrições violadas no algoritmo do Lagrangiano
K	Parâmetro do algoritmo do método do Lagrangiano aumentado
K_b	Máxima violação de restrição
K_T, K_X, K_Y	Constantes elásticas da sapata
$\mathbf{K}$	Matriz de rigidez
$\mathbf{K}^e$	Matriz de rigidez do e -ésimo elemento
L	Comprimento dos elementos lineares
L_e	Comprimento do e -ésimo elemento linear
LN	Linha neutra
M_a, M_b, M	Momentos fletores atuantes nos elementos lineares
M_a^*, M_b^*	Aproximações de M_a e M_b , respectivamente

M_{ba}	Valor máximo possível para M_a quando $M_b = 0$ e $N = N_b$;
M_{bb}	Valor máximo possível para M_b quando $M_a = 0$ e $N = N_b$;
M_d	Momento fletor de projeto resultante nos elementos lineares
M_{ei}	Momento fletor resultante no i -ésimo ponto sobre a superfície de ruptura empírica
M_{nb}	Constante que depende das propriedades da seção transversal
$M_{px}^+, M_{px}^-, M_{py}^+, M_{py}^-$	Momentos de plastificação em lajes
$M_{x\ i}^e, M_{y\ i}^e$	Momentos de flexão no i -ésimo nó do e -ésimo elemento de placa
$M_{xy\ i}^e$	Momento de torção no i -ésimo nó do e -ésimo elemento de placa
$M_{x\ i}, M_{y\ i}$	Momentos de flexão no i -ésimo nó da placa (sistema global)
$M_{xy\ i}$	Momento de torção no i -ésimo nó da placa (sistema global)
M_{xr}, M_{yr}	Momentos resistentes da placa metálica
M_u	Momento resistente nos elementos lineares (momento último)
M_{ua}, M_{ub}	Momentos resistentes (últimos) nos elementos lineares nas direções dos eixos aa e bb
M_{ui}	Momento resistente resultante sobre um ponto i da superfície de ruptura “real”
M_{uaN}, M_{ubN}	Momentos resistentes máximos para uma dada força axial nas direções dois eixos aa e bb nos elementos lineares
$\mathbf{M}$	Matriz de massa
N	Força axial atuando nos elementos lineares
N_{aprox}	Força axial última aproximada pelo método da carga recíproca
N_b	Força axial para a qual M_u é máximo

N_{br}	Diferença entre forças axiais
N_c	Média dos valores máximo e mínimo que podem ser assumidos pela força axial nos elementos lineares
N_d	Força axial de projeto resultante nos elementos lineares
N_r	Semi diferença (raio) entre os valores máximo e mínimo que podem ser assumido pela força axial nos elementos lineares
N_{ua}, N_{ub}	Cargas axiais últimas no método da carga recíproca
N_{uc}, N_{ut}	Máximos esforços de compressão e tração resistido pelos elementos lineares
$\mathbf{N}^e$	Matriz das funções de forma para o e -ésimo elemento
P_{motor}	Peso do motor
$\mathbf{P}$	Vetor que contém todos os pontos calculados sobre a superfície de ruptura “real”
$\mathbf{P}_i \equiv (N, M_{ua}, M_{ub})_i$	i -ésimo ponto calculado sobre a superfície de ruptura “real”
R_{s1}, R_{s2}, R_c	Resultante das tensões, respectivamente, na armadura superior, na armadura inferior e no concreto nos elementos lineares
$\mathbf{R}$	Vetor das forças externas aplicadas
S_f	Área da forma para o concreto armado
S_{pf}	Área do escoramento da forma
T	Instante final
V_c	Volume da estrutura
V_h	Vizinhança aberta em B

Letras romanas minúsculas:

a_u	Máxima aceleração permitida
$\mathbf{b}$	Vetor das variáveis de projeto
c	Cobrimento mínimo da armadura dos elementos lineares
$c(\mathbf{b}, T)$	Parcela estática do funcional Lagrangiano aumentado
c_c	Custo por unidade de volume do concreto
c_f	Custo por unidade de área da forma
c_p	Cobrimento mínimo da armadura da placa
c_{pf}	Custo por unidade de área do escoramento
c_s	Custo por unidade de massa do aço
$\mathbf{c}$	Vetor das variáveis de projeto no problema de minimização do erro de aproximação global
d	Espessura útil da placa
d_{su}	Máximo deslocamento diferencial estático permitido
e_a, e_b	Excentricidades de aplicação da carga axial no método da carga recíproca
f	Função objetivo
$\bar{f}$	Parcela estática da função objetivo
$\tilde{f}$	Parcela dinâmica da função objetivo
f_{cd}	Resistência de projeto do concreto
f_{ck}	Resistência característica do concreto
f_y	Tensão de escoamento característica do aço
f_{yd}	Tensão de escoamento de projeto do aço

$\mathbf{g}$	Vetor das restrições
$\bar{\mathbf{g}}$	Parcela estática do vetor das restrições
$\tilde{\mathbf{g}}$	Parcela dinâmica do vetor das restrições
h	Espessura da placa
h_l	Mínimo valor permitido para a espessura
$h(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t)$	Integrando do funcional Lagrangiano aumentado (parcela dinâmica)
k	Número de iterações dos processos de otimização
l	Numero de restrições de igualdade estática
l_x, l_y	Dimensões da placa
$l_x \text{ min}$	Valor mínimo permitido para l_x
$l_y \text{ min}$	Valor mínimo permitido para l_y
$l' - m$	Numero de restrições de igualdade dinâmica
m	O número de pontos calculados sobre a superfície de ruptura “real”
$m - l$	Numero de restrições de desigualdade estática
m_X, m_Y, m_T	Constantes de massa relacionadas com os movimentos de corpo rígido da sapata
$m' - l'$	Numero de restrições de desigualdade dinâmica
n	Número de variáveis de projeto
n_e	Número de elementos utilizados na discretização da placa
n_{no}	Número de nós da discretização da placa
n_{pe}	Número de elementos lineares
n_{pno}	Número de nós adotado na discretização do pórtico
p	Número máximo de iterações permitidas num algoritmo de

	otimização
p_{dx}, p_{dz}	Forças nodais dinâmicas nas direções de x e z , respectivamente
p_{sz}	Força nodal estática na direção de z
p_0	Amplitude da carga dinâmica externa
$\mathbf{p}$	Vetor das cargas externas
$\mathbf{p}_{dM}$	Vetor carga externa dinâmica devido ao funcionamento do motor
$\mathbf{p}_{sgM}$	Vetor carga estática devido ao peso próprio do motor
$\mathbf{p}_{sgp}$	Vetor carga estática devido ao peso próprio da sapata
$\mathbf{p}_{sM}$	Vetor carga externa estática devido ao peso do motor
$\mathbf{p}_{sp}$	Vetor carga externa estática devido ao peso próprio da placa
r_0	Raio equivalente da sapata
$\mathbf{r}$	Vetor dos parâmetros de penalidade
t	Tempo
t_s	Tempo de aplicação dos esforços estáticos, quando estes são simulados como uma carga dinâmica
u	Deslocamento na direção de x de um ponto genérico no domínio da estrutura
u_i	Deslocamento na direção de x do i -ésimo nó (sistema global)
u_p e v_p	Deslocamentos de corpo rígido da placa nas direções x e y , respectivamente
$\mathbf{u}$	Vetor dos multiplicadores de Lagrange
v	Deslocamento na direção de y de um ponto genérico no domínio da estrutura
v_i	Deslocamento na direção de y do i -ésimo nó (sistema global)

v_u	Máxima velocidade permitida
w	Deslocamento na direção de z de um ponto genérico no domínio da estrutura
w_i	Deslocamento na direção de z do i -ésimo nó (sistema global)
y_{LN}	Distância da LN ao centro de gravidade da seção transversal nos elementos lineares
y	Distância de um determinada fibra longitudinal à LN nos elementos lineares
z_{du}	Máximo deslocamento dinâmico permitido
z_{su}	Máximo deslocamento estático permitido
z_u	Máximo deslocamento permitido
z	Vetor deslocamento
z^a	Vetor das variáveis adjuntas
z_0	Vetor deslocamento inicial
$\dot{z}_0$	Vetor velocidade inicial

Letras gregas maiúsculas:

Δ	perturbação no valor original das variáveis de projeto para o cálculo do gradiente com o método das diferenças finitas
B	Espaço vetorial de funções
B_a	Vizinhança aberta em $\mathfrak{R}^n$
Φ	Funcional Lagrangiano
Φ^a	Lagrangiano aumentado modificado para a utilização no método das

	variáveis adjuntas
Γ	Subconjunto de $\mathfrak{R}^n$
Π	Funcional genérico
Ω	Domínio de integração bidimensional
Ω	Frequência do motor
Ω_e	Domínio de integração para o e -ésimo elemento de placa
Ω_c	Domínio de integração do concreto comprimido
Ω_{s1}	Domínio de integração da armadura superior
Ω_{s2}	Domínio de integração da armadura inferior

Letras gregas minúsculas:

α_i	Coeficientes exponenciais das superfícies de ruptura empíricas
α, β	Parâmetros do algoritmo do método do Lagrangiano aumentado
β	Coeficiente adotado para o cálculo da aproximação do diagrama de interação
$\beta_w, \beta_x, \beta_y, \eta_w, \eta_{xy}$	Coeficientes relacionados com as dimensões da sapata
β_1, β_2	Coeficientes para o dimensionamento do concreto armado lineares
δ	Representa variação
$\mathcal{E}(y)$	Deformação de uma fibra longitudinal distante y da linha neutra
$\varepsilon_c^{\max}$	Máxima deformação permitida para o concreto
ε_m	Tolerância para a máxima violação de restrição

$\varepsilon_{\max}$	Erro máximo admitido na aproximação da superfície de ruptura
$\varepsilon_s^{\max}$	Máxima deformação permitida para o aço
$\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \varepsilon_c$	Deformações, respectivamente, na armadura superior, na armadura inferior e no concreto nos elementos lineares
ϕ	Coeficiente de redução dos momentos resistentes da placa metálica
ϕ	Inclinação da linha neutra
ϕ_i	i -ésima componente do vetor gradiente de Φ calculada com o método das diferenças finitas
γ_c	Coeficiente para a redução da resistência característica do concreto
γ_{ds}	Coeficiente para a minoração da tensão de ruptura do solo sob esforços dinâmicos
γ_f	Coeficiente para majoração dos esforço característicos
γ_s	Coeficiente para redução da resistência característica do aço
γ_{ss}	Coeficiente para a minoração da tensão de ruptura do solo sob esforços estáticos
γ_1, γ_2	Coeficientes que dependem da força axial nos elementos lineares
η	Coeficiente de reação vertical do solo
ν_s	Coeficiente de Poisson do solo
θ	Vetor que relaciona os multiplicadores de Lagrange com os parâmetros de penalidade
ρ	Densidade do concreto
ρ_s	Densidade do aço

σ_s	Tensão de ruptura do solo
$\sigma_{s1}, \sigma_{s2}, \sigma_c$	Tensões, respectivamente, na armadura superior, na armadura inferior e no concreto nos elementos lineares
τ_{td}, τ_{wd}	Tensões de cisalhamento nos elementos lineares devidas ao momento de torção e à força cortante, respectivamente
τ_{tu}, τ_{wu}	Tensões de cisalhamento últimas nos elementos lineares relativas ao momentos de torção e força cortante, respectivamente
ξ	Ângulo de inclinação do momento resultante nos elementos lineares

Outros:

∂	Representa deriva parcial
∇	Representa o operador diferencial
$\Re$	Conjunto dos números reais
$()_s$	Índice que representa componente estática
$()_d$	Índice que representa componente dinâmica
$(\bullet)^{\bullet}, (\dot{\bullet}), (\bullet)^{\bullet\bullet}, (\ddot{\bullet})$	Representam as derivadas de $\bullet$ em relação ao tempo

FICHA CATALOGRÁFICA

Silva, Marcelo Araújo da
Sobre a otimização de estruturas submetidas a
carregamento dinâmico. São Paulo, 2000.
145p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de
São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Fundações.

1.Estruturas - Dinâmica 2.Concreto armado 3.Otimização
I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento
de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.

Capítulo 1

Introdução

1.1 Motivação

O processo tradicional de projeto e dimensionamento de estruturas é baseado na análise de diversas soluções e da viabilidade de sua execução. Nesse processo, não existe uma maneira formal de aprimorar um dado projeto e, muitas vezes, o projetista não está apto a melhorá-lo baseado apenas em sua intuição e experiência. Em um determinado estágio desse procedimento, uma decisão precisa ser tomada: aceitar o projeto atual como final ou refiná-lo. Observa-se então que esse método depende fortemente da intuição, experiência e habilidade do engenheiro.

O processo de projeto ótimo é mais estruturado. Nessa abordagem, as variáveis de projeto são identificadas. A seguir, a função objetivo, aquela que mede o mérito relativo de uma solução (Arora, 1989), é definida. Uma vez que os requerimentos de projeto e a função objetivo são formulados em termos das variáveis de projeto, um método de otimização apropriado pode ser utilizado para aperfeiçoar um projeto inicialmente estimado. Como se vê,

o engenheiro ainda precisa adotar um projeto inicial, mas o aprimoramento do projeto agora não depende apenas de sua experiência. Como resultado, o processo de projeto ótimo, ainda mais quando auxiliado por computador, pode conduzir a projetos e dimensionamentos mais econômicos em um tempo relativamente curto, e com a segurança desejada.

Na Engenharia Civil, problemas de otimização de estruturas compostas por pórticos e placas são um desafio para qualquer algoritmo de otimização, dado o grande número de graus de liberdade e de variáveis de projeto. Esse número pode chegar facilmente a dezenas de milhares para um edifício típico.

Percebe-se, também, que a quantidade de trabalho envolvido no processo de otimização cresce enormemente quando estruturas e fundações são submetidas a carregamentos dinâmicos. A presença desse tipo de carga torna extremamente caro, do ponto de vista de esforço computacional, a verificação de todos os requerimentos de projeto em cada instante do tempo.

Métodos de otimização para problemas dinâmicos requerem um grande número de cálculos numéricos. Algumas análises de grande porte só tem se tornado viáveis devido aos recentes avanços na tecnologia de “hardware” e a obtenção pelos pesquisadores da área de novos algoritmos de otimização robustos e eficientes. Os destinados a problemas contínuos encontram-se bem desenvolvidos, enquanto que outros, para otimização discreta ou de variáveis mistas, estão ainda em fase de desenvolvimento (Kocer e Arora, 1999). Assim, alguns problemas de engenharia de interesse têm sido resolvido utilizando-se vários processos de otimização. Os resultados destas aplicações mostram que o desenvolvimento de projetos utilizando-se essa técnica não são apenas mais baratos, mas também mais flexíveis (Silva et al, 1999). Uma outra conclusão desses estudos é que a formulação do problema tem um efeito significativo sobre o processo de dimensionamento e o resultado final. Algumas formulações podem trabalhar eficientemente para um determinado sistema estrutural e

algoritmo de otimização, mas podem não ser apropriadas para outros. A definição da formulação do problema e do método de otimização deve ser específica para cada aplicação. Para se estar apto a desenvolver formulações de problemas realistas e práticos, diferentes formulações precisam ser estudadas e seus efeitos no processo de dimensionamento devem ser investigados.

Ao rever a literatura sobre o assunto (Capítulo 2) o autor sentiu-se motivado por algumas pesquisas recentes conduzidas para a otimização de estruturas submetidas a esforços dinâmicos. Em particular, sentiu a necessidade de estudos sobre a otimização integrada de estruturas e fundações civis de grande porte, analisadas como um conjunto de barras e placas. Tornou-se visível, para ele, que essa área do conhecimento necessita de esforços de pesquisa para o seu desenvolvimento. Essas conclusões se reafirmaram, ainda mais, quando de seu estágio de doutorado sanduíche no ODL, Optimal Design Laboratory, da The University of Iowa, sob orientação do Prof. Jasbir Arora.

Num país extremamente carente de soluções baratas para as construções de Engenharia Civil como o Brasil, processos de otimização aplicados ao dimensionamento ótimo de estruturas e fundações mostram uma direção possível para que projetistas e pesquisadores possam colaborar expressivamente para a melhoria da qualidade de vida da população brasileira.

1.2 Objetivos e métodos

O propósito desta Tese é formular, desenvolver ferramentas e resolver alguns problemas de otimização integrada de estruturas e fundações civis submetidas à carregamentos dinâmico, tais como os provocados por máquinas mal balanceadas nelas montadas. Como exemplos específicos dessa classe de problema, serão dimensionadas placas

metálicas e em concreto armado, sapatas em concreto armado e estruturas compostas de pórticos e placas, submetidas simultaneamente à esforços estáticos e dinâmicos. Métodos de otimização e formulações adequadas para a solução dos problemas serão investigados.

Resumem-se, a seguir, os objetivos propostos.

- 1) Desenvolver formulações para o projeto ótimo de algumas estruturas e fundações civis sob carregamentos dinâmicos, analisadas como conjuntos.
- 2) Identificar variáveis de projeto, funções objetivo e restrições mais adequadas para realização do objetivo maior, constante do primeiro item.
- 3) Implementar diferentes formulações para o cálculo do gradiente dos funcionais envolvidos e analisar sua sensibilidade. Os diferentes processos adotados serão investigados segundo sua facilidade de implementação, tempo de CPU requerido e o projeto ótimo obtido.
- 4) Desenvolver e/ou implementar critérios de ruína cuja simplicidade viabilize a grande massa de cálculos envolvidos no processo de otimização dinâmica.

Como ferramentas para a pesquisa, conduzida conforme os objetivos acima, desenvolveram-se programas de computador próprios, incorporando diversos métodos numéricos para a solução das diversas etapas do processo de otimização. A análise estrutural, via método dos elementos finitos, é também implementada e incorporada a esses programas. Dessa forma, todo o procedimento se dá de forma integrada, independente de troca de arquivos entre programas comerciais, sejam esses de análise estrutural ou de otimização.

1.3 Plano da Tese

No Capítulo 2 uma revisão da bibliografia consultada e relevante é apresentada. As bases teóricas dos processos de otimização são apresentadas no Capítulo 3. Sua

especialização para o caso de restrições dinâmicas é descrita no Capítulo 4. Já no Capítulo 5, os aspectos computacionais da implementação dos diversos procedimentos é comentada. No Capítulo 6 o primeiro exemplo é analisado, uma placa metálica utilizada na sustentação de motores é otimizada. Um problema equivalente, para uma placa de concreto armado, é mostrado no Capítulo 7. No Capítulo 8 uma fundação em sapata em concreto armado para máquinas vibratórias é dimensionada de diversas maneiras, considerando diversos níveis de conforto humano relativo a vibrações, bem como diferentes métodos de otimização. Um critério de ruína para vigas e colunas em concreto armado submetidas a flexão oblíqua composta, bem como um procedimento baseado em técnicas de otimização para a determinação de alguns parâmetros envolvidos, são apresentados no Capítulo 9. No Capítulo 10, uma fundação aporticada para máquinas desbalanceadas é otimizada já incorporando o critério de ruína proposto. Conclusões e sugestões para futuras pesquisas são dadas no Capítulo 10.

Capítulo 2

Alguma literatura sobre otimização de estruturas sob carregamento dinâmico

A meta de um engenheiro é o projeto não apenas seguro mas também otimizado de estruturas. As tentativas de seguir à risca esta proposição têm impulsionado significativamente o desenvolvimento e a aplicação dos processos de otimização no projeto ótimo de estruturas e fundações. Assim, numerosos trabalhos têm surgido nesta área nas últimas décadas (Fletcher, 1985; Arora, 1989; Arora et al, 1997; Arora, 1999; Silva et al, 2000a, 2000b, 2000c, 2000d). Neles se demonstra como processos de otimização podem ser aplicados para a realização de projetos otimizados.

Os problemas de otimização com restrições dinâmicas se caracterizam pelo grande esforço computacional necessário para a repetitiva análise estrutural e computação das funções restrições, em cada instante do tempo. Diversos autores têm investigado problemas com restrições dinâmicas. Haug e Arora (1979) são alguns dos pioneiros nesse tipo de problema. Eles analisaram absorvedores de impacto, isoladores de vibração, sistema de suspensão de veículos, além de treliças e outros tipos de estruturas. A otimização de estruturas de grande porte submetidas a cargas dinâmicas foi primeiramente realizado por Chahande e Arora (1994). Eles minimizaram a massa das colunas de um “shear-building” de 50 pavimentos solicitado por uma explosão próxima aos cinco últimos pavimentos. Pimenta et al (1995a, 1995b) utilizaram o método do Lagrangiano aumentado para resolver diversos problemas de otimização dinâmica, tais como estruturas de pórticos submetidas à cargas de impacto, isoladores de vibração e um “shear-building” de 10 pavimentos solicitado por uma explosão. Goldenberg et al (1997a) realizaram a otimização de um pórtico em concreto de comportamento elastoplástico submetido à uma carga de impacto. Uma coluna em concreto, submetida a esforços vibratórios foi otimizada por Goldenberg et al (1997b) considerando o conforto humano relativo às vibrações. Num problema relativamente similar à este, a massa de uma placa metálica foi minimizada por Goldenberg et al (1997c) considerando, além das restrições sobre deslocamentos, o conforto humano relativo às vibrações provocadas por um motor instalado sobre a placa. Diversos trabalhos sobre a otimização do custo de placas submetidas a esforços vibratórios têm sido realizados por Silva e Brasil (1998, 1999a, 1999b, 1999c). Kocer e Arora (1999) trataram a otimização de estruturas para linhas de transmissão de eletricidade submetidas a esforços provenientes de terremoto utilizando diversos métodos de otimização e de análise estrutural. Naquele trabalho, foi realizado o dimensionamento ótimo de uma estrutura H, travada em X com perfis metálicos, composta por postes metálicos e uma outra estrutura tangente, tipo torre, para circuito duplo de 110 kV.

Nesta Tese, a maior parte dos exemplos referem-se a estruturas civis de concreto armado. Alguns estudos têm sido publicados recentemente onde restrições relativas à capacidade de resistência à flexão oblíqua composta foram impostas em estruturas de concreto. Por exemplo, Roddis et al (1996) e Roddis e Chunnanond (1996) utilizaram o algoritmo genético onde tais restrições foram incorporadas à uma *função de aptidão* global para o projeto e detalhamento de estruturas de concreto submetidas à carregamento estático. O processo de otimização adotado é desenvolvido de maneira tal que cada elemento estrutural seja otimizado separadamente, submetido à restrições associadas com o envelope de esforços internos. Balling e Yao (1997) descreveram um procedimento para a otimização de pórticos submetidos a carregamento estático composto de duas etapas. Na primeira, as dimensões das seções transversais de todos os elementos estruturais são tratadas como variáveis de projeto contínuas e toda a estrutura é otimizada utilizando-se métodos de otimização não-linear. Na segunda fase, estas dimensões são fixadas, tanto quanto o envelope de esforços internos, enquanto que as armaduras de cada elemento estrutural são otimizadas separadamente utilizando-se um método de otimização discreta (Balling et al, 1997).

Quanto à otimização de lajes de concreto armado, Mont'alverne et al (1999) realizaram o projeto ótimo de peças desse tipo submetidas à esforços estáticos. Um critério de ruína proposto por Velasco et al (1994) foi utilizado como restrição. O processo de otimização adotado foi o método dos pontos internos (Herskovits, 1995). Silva e Brasil (1999c) realizaram a otimização de uma laje em concreto armado submetida à esforços vibratórios, considerando os custos do aço, do concreto e da forma para a elaboração de uma função custo. As variáveis de projeto, uma função objetivo e restrições envolvidas na otimização de sapatas sob carregamento vibratório foram abordadas por Silva et al (1999). Nesse trabalho, uma sapata em concreto armado foi otimizada utilizando como função objetivo o custo dos materiais e de construção.

Algumas referências bibliográficas mais específicas serão mostradas nos Capítulos pertinentes.

Capítulo 3

Processos de otimização

3.1 Introdução

Uma vez que o problema de otimização é formulado, um método de otimização pode ser utilizado para resolvê-lo. Para problemas contínuos o processo se inicia com a adoção de um projeto inicial. Este é analisado para um determinado carregamento, a função objetivo e as restrições são computadas, e se verifica se o projeto satisfaz as condições de otimalidade (Arora, 1989). Caso satisfaça, ele é aceito como o projeto ótimo, caso contrário, precisa ser aprimorado. Alguns métodos otimizam os projetos utilizando os gradientes das funções objetivo e restrições em relação às variáveis de projeto. Nesse caso, deve-se utilizar um método para a realização da análise de sensibilidade do algoritmo.

3.2 Conceitos básicos de programação matemática

A área da matemática que trata dos problemas de otimização (classificação, solução, etc.) é denominada programação matemática. Neste texto, adotam-se conceitos e nomenclatura dessa especialidade que são definidos a seguir.

Definição 3.2.1

Diz-se que um ponto $\mathbf{b}^* \in \Gamma \subset \mathfrak{R}^n$ é um ponto de mínimo local ou ponto de mínimo relativo de uma função $f(\mathbf{b})$ se $f(\mathbf{b}) \geq f(\mathbf{b}^*)$ para todo $\mathbf{b} \in B_a(\mathbf{b}^*, r)$, onde $B_a(\mathbf{b}^*, r)$ é uma vizinhança aberta de $\mathbf{b}^*$.

Definição 3.2.2

Diz-se que um ponto $\mathbf{b}^* \in \Gamma \subset \mathfrak{R}^n$ é um ponto de mínimo global de $f(\mathbf{b})$ se $f(\mathbf{b}) \geq f(\mathbf{b}^*)$ para todo $\mathbf{b} \in \Gamma$. Se $f(\mathbf{b}) > f(\mathbf{b}^*)$ para todo $\mathbf{b} \in \Gamma$, $\mathbf{b} \neq \mathbf{b}^*$, diz-se que $\mathbf{b}^*$ é um ponto de mínimo global estrito de $f(\mathbf{b})$.

Definição 3.2.3

Seja B um espaço vetorial de funções. Chama-se funcional a aplicação Π que associa a cada elemento f de B um único elemento y de $\mathfrak{R}$. A notação utilizada é $\Pi : B \mapsto \mathfrak{R}$, tal que se $f \in B$ então $y = \Pi(f)$.

Definição 3.2.4

Um funcional $\Pi : B \mapsto \mathfrak{R}$ é dito convexo se

$$\Pi((1-\theta)f_a + \theta f_b) \leq (1-\theta)\Pi(f_a) + \theta\Pi(f_b), \quad \forall f_a, f_b \in B, \quad \forall \theta \in [0,1]. \quad (3.2.1)$$

Um funcional $\Pi : B \mapsto \mathfrak{R}$ é dito estritamente convexo se

$$\Pi((1-\theta)f_a + \theta f_b) < (1-\theta)\Pi(f_a) + \theta\Pi(f_b), \quad \forall f_a, f_b \in B, \quad \forall \theta \in (0,1). \quad (3.2.2)$$

Considere $V_h(f_0)$ uma vizinhança aberta de f_0 .

Definição 3.2.5

Diz-se que o funcional $\Pi : B \mapsto \mathfrak{R}$ passa por um mínimo local em f_0 se existir uma vizinhança V_k de f_0 na qual

$$\Pi(f) \geq \Pi(f_0), \quad \forall f \in V_h(f_0). \quad (3.2.3)$$

Diz-se também que Π é estacionário em f_0 .

Definição 3.2.6

Diz-se que este mínimo é global se

$$\Pi(f) \geq \Pi(f_0), \quad \forall f \in B. \quad (3.2.4)$$

Diz-se que este mínimo é estrito se

$$\Pi(f) > \Pi(f_0), \quad \forall f \in V_h(f_0) \mid d(f, f_0) \neq 0. \quad (3.2.5)$$

3.2.1 Otimização sem restrições

Considere-se o problema de minimizar uma função $f(\mathbf{b})$, $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n$. O problema pode ser colocado na forma

$$\text{minimizar} \quad f(\mathbf{b}), \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n. \quad (3.2.6)$$

Admite-se que a função $f(\mathbf{b}) \in C_2$. A função $f(\mathbf{b})$ é denominada função objetivo.

Nesta seção, serão estabelecidas condições que devem ser satisfeitas por um ponto, para que seja um mínimo local do problema (3.2.6). Também serão descritas as propriedades de convexidade da função objetivo que asseguram que o ponto encontrado seja um ponto de mínimo global.

Teorema 3.2.1:

Para que um ponto $\mathbf{b}^*$ seja um ponto de mínimo local do problema (3.2.6) é suficiente que o gradiente da função objetivo em $\mathbf{b}^*$ seja nulo, ou seja, $\nabla f(\mathbf{b}^*) = \mathbf{0}$ e que a matriz Hessiana $\nabla^2 f(\mathbf{b}^*)$ seja definida positiva, isto é

$$\langle \mathbf{d}, \nabla^2 f(\mathbf{b}^*) \mathbf{d} \rangle > 0 \quad \forall \mathbf{d} \neq \mathbf{0}.$$

O símbolo $\langle \mathbf{a}, \mathbf{b} \rangle$ representa o produto interno dos vetores $\mathbf{a}$ e $\mathbf{b}$.

Teorema 3.2.2:

Seja $f(\mathbf{b})$ uma função convexa definida em $\mathfrak{R}^n$ e seja Ω o conjunto dos pontos $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n$ onde $f(\mathbf{b})$ atinge seu mínimo. Então Ω é convexo e todo mínimo local é um ponto de mínimo global.

Teorema 3.2.3:

Seja $f(\mathbf{b}) \in C_1$ uma função convexa. Se existir um $\mathbf{b}^* \in \mathfrak{R}^n$ tal que para todo $\mathbf{y} \in \mathfrak{R}^n$,

$$\langle \nabla f(\mathbf{b}^*), (\mathbf{y} - \mathbf{b}^*) \rangle \geq 0$$

então $\mathbf{b}^*$ é um ponto de mínimo global de $f(\mathbf{b})$.

3.2.2 Otimização com restrições

Considere um problema da forma

$$\text{minimizar} \quad f(\mathbf{b}), \mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n, \quad (3.2.7)$$

$$\text{sujeito a} \quad \begin{aligned} g_i(\mathbf{b}) &= 0, & i \in E \\ g_i(\mathbf{b}) &\leq 0, & i \in I \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

onde a função $f(\mathbf{b})$ é denominada função objetivo e as funções $g_i(\mathbf{b})$, $i = 1, \dots, m$ são denominadas restrições. E é o conjunto dos índices das restrições de igualdade e I é o

conjunto dos índices das restrições de desigualdade. A solução de (3.2.7) e (3.2.8) é denominada de solução ou ponto ótimo e será denotada por $\mathbf{b}^*$.

Quando um ponto $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n$ satisfaz todas as restrições, diz-se que ele é viável, e o conjunto de todos os pontos viáveis é denominado de região viável Γ . Admite-se que as funções $f(\mathbf{b})$ e $g_i(\mathbf{b}) \in C_2[\mathfrak{R}^n]$.

Definição 3.2.7

As restrições $\{g_i(\mathbf{b}), i \in I \mid g_i(\mathbf{b}) = 0\}$ são denominadas restrições ativas em $\mathbf{b}$.

Indicar-se-á por I^* o conjunto dos índices referentes às restrições ativas em $\mathbf{b}$.

Definição 3.2.8

As restrições $\{g_i(\mathbf{b}) \mid \|g_i(\mathbf{b})\| \leq \varepsilon\}$ são denominadas restrições ε -ativas em $\mathbf{b}$.

Definição 3.2.9

Diz-se que um ponto $\mathbf{b}_v$, que satisfaz as restrições $g_i(\mathbf{b}), i \in E \cup I^*$, é um ponto regular se os vetores gradientes $\{\nabla g_i(\mathbf{b}_v), i \in E \cup I^*\}$ forem linearmente independentes.

Denomina-se a função Lagrangiana a função definida por:

$$\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{b}), \quad (3.2.9)$$

onde $u_i \in \mathfrak{R}, i = 1, \dots, m$ são os multiplicadores de Lagrange.

Indica-se por $\nabla \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = \begin{bmatrix} \nabla_{\mathbf{b}} \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \\ \nabla_{\mathbf{u}} \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u}) \end{bmatrix}$ o vetor gradiente de $\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u})$, onde $\nabla_{\mathbf{b}}$ indica as

derivadas parciais em relação à $b_i, i=1, \dots, n$, e $\nabla_{\mathbf{u}}$ indica as derivadas em relação à $u_j, j=1, \dots, m$.

O vetor gradiente da função Lagrangiana em relação à $\mathbf{b}$ em $(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbf{R}^{n+m}$ é dado por:

$$\nabla_{\mathbf{b}} \lambda(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*) = \nabla f(\mathbf{b}^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\mathbf{b}^*),$$

onde $\mathbf{u}^*$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange no ponto ótimo.

Analogamente ao vetor gradiente, a matriz Hessiana da função Lagrangiana em relação à $\mathbf{b}$ no ponto $(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*) \in \mathbf{R}^{n+m}$ é dada por:

$$\nabla_b^2 L(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*) = \nabla^2 f(\mathbf{b}^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla^2 g_i(\mathbf{b}^*).$$

Teorema 3.2.4 (Kuhn-Tucker):

Seja $\mathbf{b}^*$ um ponto de mínimo local do problema (2.42). Se $\mathbf{b}^*$ é um ponto regular, então existem multiplicadores de Lagrange $\mathbf{u}^* = [u_1^*, u_2^*, \dots, u_m^*]^T$, de tal forma que $\mathbf{b}^*$ e $\mathbf{u}^*$ satisfazem o seguinte sistema de equações:

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{b}^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\mathbf{b}^*) &= \mathbf{0} \\ g_i(\mathbf{b}^*) &= 0, \quad i \in E \\ g_i(\mathbf{b}^*) &\leq 0, \quad i \in I \\ u_i^* &> 0, \quad i \in I \\ u_i^* g_i(\mathbf{b}^*) &= 0. \quad \forall i \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

As equações acima são denominadas Condições necessárias de Kuhn-Tucker.

Teorema 3.2.5:

Para que o ponto $\mathbf{b}^*$ seja um ponto de mínimo local do problema (3.2.10) é necessário que seja um ponto regular, que satisfaça as condições de Kuhn-Tucker e ainda que

$$\langle \mathbf{d}^T, \nabla_x^2 L(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*) \mathbf{d} \rangle \geq 0 \quad \forall \mathbf{d} \in \mathbf{G}^*. \tag{3.2.11}$$

onde $\mathbf{G}^*$ é dado por:

$$\begin{aligned} \mathbf{G}^* = \{ \mathbf{d} / \mathbf{d} \neq \mathbf{0}, \mathbf{d}^T \nabla g_i(\mathbf{b}^*) = 0, i \in (E \cup I^*) / u_i^* > 0 \\ \text{e } \mathbf{d}^T \nabla g_i(\mathbf{b}^*) \leq 0, i \in I^* / u_i^* = 0 \} \end{aligned} \tag{3.2.12}$$

3.3 Variáveis de projeto

As variáveis de projeto para um problema são aquelas que definem o sistema. Elas podem ser relacionadas com materiais, topologia, configuração, seção transversal, armação etc.

As variáveis de projeto podem ser agrupadas em três diferentes grupos em função dos valores que podem assumir. Estes são:

- **variáveis contínuas:** podem assumir qualquer valor dentro de um intervalo especificado;
- **variáveis discretas:** os valores possíveis de serem assumidos por estas variáveis são previamente especificados, estes incluem variáveis reais, inteiras e binárias;
- **variáveis discretas vinculadas:** este tipo de variáveis são tais que um determinado valor assumido, especifica um conjunto de propriedades.

Variáveis de projeto relacionadas com materiais são usadas na seleção do tipo de material adotado: aço, concreto, polímeros, etc. Elas são variáveis discretas que representam as propriedades físicas e mecânicas dos materiais. Variáveis topológicas são introduzidas se a forma e/ou o “layout” da estrutura ou fundação estão sendo otimizados. Variáveis de configuração representam a geometria da estrutura e geralmente são variáveis discretas. Variáveis de projeto relacionadas com a seção transversal podem representar áreas, momentos de inércia e dimensões, e podem ser contínuas ou discretas. Por exemplo, o tipo de perfil a ser adotado num projeto de estruturas metálicas pode ser considerado uma variável discreta de seção transversal. No caso de problemas de otimização de estruturas e fundações em concreto armado, a armação da estrutura torna-se uma variável de projeto. Ela pode estar relacionada com a bitola e quantidade de barras, como variáveis discretas, ou então simplesmente com a área da armação, sendo então uma variável contínua. Ainda, neste tipo

de problema, a disposição e o detalhamento da armadura podem ser tratados como variáveis topológicas (Balling et al, 1997). Nesta Tese, trabalharemos apenas com variáveis de configuração, seção transversal e armação.

A seleção das variáveis de projeto é um importante passo, visto que toda a formulação do problema depende dessa escolha. Deve-se proceder de tal forma que o processo de cálculo seja flexível e o projeto final prático. O domínio viável para a solução de um determinado problema aumenta proporcionalmente ao aumento da quantidade das variáveis de projeto (Arora, 1989). Em outras palavras, o aumento das variáveis de projeto resulta em um melhor projeto.

Neste trabalho, as variáveis de projeto serão representadas por um vetor $\mathbf{b}$ como

$$\mathbf{b}^t = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ \dots \ b_n]$$

onde n é o número total de variáveis de projeto.

No caso de variáveis de projeto discretas, estas devem satisfazer a condição:

$$b_i \in \mathbf{b}_i \equiv \{b_{i1} \ b_{i2} \ \dots \ b_{iN_{Ei}}\}, i=1, \dots, n$$

onde $b_{i1}, b_{i2}, \dots, b_{iN_{Ei}}$ são os N_{Ei} possíveis valores discretos que podem ser assumidos pela variável b_i .

3.4 Variáveis de estado

As variáveis de estado são funções implícitas das variáveis de projeto e são computadas por integração das equações de estado. Nos problemas de otimização estrutural sob carregamento dinâmico, as variáveis de estado são os deslocamentos da estrutura $\mathbf{z}$ e suas derivadas (velocidades e acelerações), e a equação de estado é a equação do movimento. Ela pode ser escrita de uma maneira geral na seguinte forma:

$$\mathbf{F}^I + \mathbf{F}^D + \mathbf{F}^S = \mathbf{R} + \mathbf{D}^a, \text{ para } t \in [0, T], \quad (3.4.1)$$

onde $\mathbf{F}^I$ são as forças de inércia, função das acelerações, $\mathbf{F}^D$ são as forças de amortecimento, função das velocidades, $\mathbf{F}^S$ são as forças resistentes internas, função dos deslocamentos, $\mathbf{R}$ são as forças externas aplicadas, e $\mathbf{D}^a$ é o vetor das forças de controle ativas ou passivas, quando incorporadas na estrutura.

3.5 Função objetivo

A função objetivo de um dado problema de otimização é uma função das variáveis de projeto que mede o mérito relativo de várias soluções. Sua seleção é, claramente, uma importante tarefa, pois é a partir de suas indicações que um dado projeto pode ser melhorado.

Em vários problemas de otimização estrutural o peso da estrutura é escolhido como função objetivo (Chahande e Arora, 1994; Goldenberg et al, 1997a, Silva e Brasil, 1998, 1999a, 1999b). Este fato é devido à grande facilidade de computação dessa grandeza e também porque seu valor está diretamente relacionado com o custo da estrutura. Um uso mais eficiente dos materiais irá minimizar o custo de construção quando todos os outros fatores permanecerem constantes.

Outros custos existentes são: transporte, montagem, tempo de construção, custos relacionados à ruína e eficiência da estrutura, entre outros. Enquanto que o tempo de construção permite uma avaliação de custo, o mesmo não ocorre com a ruína. Esta encontra-se intrinsecamente relacionada com a segurança adotada tanto no processo de dimensionamento quanto no processo de construção. Segundo Sussekind (1979), o aparecimento de um estado limite na estrutura pode dever-se à combinação de vários fatores aleatórios, originados nas causas seguintes: a) incertezas relativas aos valores considerados como resistências dos materiais utilizados, levando-se em conta não só as condições de

execução e controle da obra, como também alguns parâmetros que repercutem sobre o estado limite em questão (tais como carga de longa duração, fadiga, etc.); b) erros cometidos quanto à geometria da estrutura e suas seções; c) avaliação inexata das ações diretas, indiretas ou excepcionais, devido à impossibilidade de defini-las, à princípio, com precisão absoluta, ao longo de toda a vida útil da estrutura; d) divergência entre os valores calculados e os valores reais das solicitações, face às hipóteses simplificadoras usualmente adotadas no cálculo. De acordo ainda com Sussekind (1979), o objetivo a ser atingido no dimensionamento de uma estrutura é aquele de se conciliar um custo mínimo para a mesma, mantendo-se abaixo de um valor previamente estabelecido a probabilidade do aparecimento de um estado limite. A finalidade da aplicação, nesse dimensionamento, dos princípios de teoria probabilística seria a da obtenção, com a segurança apropriada, do custo ótimo da estrutura. Esse custo deveria levar em conta, entre outros fatores, considerações de ordem moral e psicológica (o que é difícil de se quantificar), bem como o valor da vida humana e a reação da opinião pública face à ocorrência de algum acidente.

Antes de se tentar formular todos os fatores envolvidos num processo de dimensionamento, é importante saber se eles de fato têm influência sobre a solução. Não seria desejável considerar uma função mais geral possível, porque o resultado pode ser uma função objetivo plana que não seja sensível às variações nas variáveis de projeto e que não resulte numa melhoria do projeto inicialmente adotado (Kocer e Arora, 1999). Um vez que os fatores mais importantes na computação do custo são determinados, eles podem ser aproximados em função das variáveis de projeto.

Às vezes é desejável minimizar ou maximizar várias funções objetivos simultaneamente. Isto é chamado otimização multicriterial ou otimização com objetivos múltiplos. Este tipo de problema pode ser definido como: determinar um vetor variável de projeto o qual satisfaz às restrições e otimiza um vetor função cujas componentes são as

diversas funções objetivo. As funções objetivos consideradas neste tipo de problema estão geralmente em conflito uma com as outras. Como um exemplo, na otimização simultânea de uma estrutura com um sistema de controle incorporado, tanto a minimização do custo da estrutura quanto a minimização dos deslocamentos devem ser tratadas como funções objetivo. Neste caso, vê-se claramente que a minimização do custo da estrutura implicaria em diminuir as dimensões das seções dos elementos estruturais, o que acarretaria um aumento nos deslocamentos.

Uma função objetivo geral para um sistema de estruturas e fundações submetidas a carregamento dinâmico pode ser definida como:

$$f(\mathbf{b}, T) = \bar{f}(\mathbf{b}, T) + \int_0^T \tilde{f}(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) dt, \quad (3.5.1)$$

onde $\mathbf{z}$ é o vetor das variáveis de estado e T é o intervalo de tempo total considerado. É assumido que a função objetivo é contínua e diferenciável. A equação (3.5.1) pode representar qualquer função custo. Por exemplo, $\bar{f}$ pode representar a massa da estrutura, enquanto que $\tilde{f}$ pode representar o deslocamento ou a tensão em dado ponto, ou ainda qualquer outra função envolvendo as variáveis de estado.

3.6 Restrições de projeto

Para os problemas descritos e resolvidos neste trabalho, as restrições de projeto são divididas em dois grupos: restrições estáticas e restrições dinâmicas. Restrições dinâmicas são impostas ao longo de todo o intervalo de tempo $t \in [0, T]$ no qual a estrutura é analisada. Limites para os valores assumidos pelas tensões, deslocamentos e acelerações são exemplos deste tipo de restrição. Já as restrições estáticas, independem do tempo, e estão relacionadas a

limites geométricos da estrutura e fundação, intervalos estabelecidos para as frequências naturais de vibração, deslocamentos estáticos, tensões estáticas sobre o solo, e limites para as variáveis de projeto.

Um forma geral para representar as restrições estáticas é:

$$g_i = \bar{g}_i(\mathbf{b}, T) + \int_0^T \tilde{g}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) dt \begin{cases} = 0 & \text{para } i = 1, \dots, l \\ \leq 0 & \text{para } i = l + 1, \dots, m \end{cases} \quad (3.6.1)$$

E uma forma geral para as restrições dinâmica é:

$$g_i = \tilde{g}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) \begin{cases} = 0 & \text{para } i = m + 1, \dots, l' \\ \leq 0 & \text{para } i = l' + 1, \dots, m' \end{cases} \text{ para } t \in [0, T]. \quad (3.6.2)$$

3.7 Tipos de formulação para problemas de programação matemática

Os problemas com variáveis contínuas que possuem função objetivo e funções restrições lineares são tratados pela programação linear (PL), mas se o problema possui pelo menos uma função objetivo ou restrição não-linear, o mesmo é então tratado pela programação não-linear (PNL). Se o problema possui variáveis discretas, então o problema é tratado pela programação discreta (PD). Os problemas analisados neste trabalho são não-lineares e serão tratados via PNL.

Dependendo das variáveis de projeto, problemas de programação matemática são agrupados em três tipos:

- **problemas de programação não-linear (PNL):** são aqueles onde todas as variáveis são contínuas;

- **problemas de programação não-linear discreta mista (PNL-DM):** são aqueles onde algumas das variáveis são discretas e outras são contínuas;
- **problemas de programação não-linear com variáveis discretas vinculadas (PNL-DV):** são aqueles problemas de variáveis mistas que possuem variáveis contínuas, discretas e discretas vinculadas.

Formulações para otimização estrutural podem ser divididas em formulações de variáveis simples e formulações de variáveis múltiplas, dependendo de como muitas variáveis são definidas para cada elemento estrutural. Kocer e Arora (1999) agrupou as formulações de variáveis simples em três grupos e formulações de variáveis múltiplas em dois. Estes podem ser classificados e descritos como:

- **formulação de variável de projeto simples 1:** uma das propriedades geométricas do elemento é considerada variável contínua ou discreta e as outras são relacionadas à ela através de relações empíricas; as relações entre as variáveis de projeto e as demais propriedades geométricas do elemento podem não ser precisas; uma das desvantagens de se usar esta formulação é que a imposição das restrições de projeto torna-se não confiável.
- **formulação de variável de projeto simples 2:** uma das propriedades geométricas da seção é discreta vinculada, resultando em um PNL-DV; os valores discretos para as variáveis correspondem, por exemplo no caso de elementos lineares, aos perfis disponíveis no mercado; as outras propriedades geométricas do elemento podem ser vinculadas com a escolhida através de expressões empíricas;
- **formulação de variável de projeto simples 3:** esta formulação é baseada na adoção de um número inteiro como variável de projeto discreta; através deste número, todas as características do elemento podem ser obtidos através de busca em uma tabela, onde uma das colunas é a variável inteira escolhida; um bom

resultado desta abordagem é que todas as propriedades geométricas podem ser obtidas com precisão e as restrições podem ser impostas de forma confiável;

- **formulação de variável de projeto múltipla 1:** para cada elemento, várias propriedades geométricas são tratadas como variáveis de projeto contínuas e então formulado um problema de PNL;
- **formulação de variável de projeto múltipla 2:** para cada seção, várias propriedades geométricas são tratadas como variáveis de projeto discretas e então formulado um problema de PNL-DM.

No presente trabalho será adotada a quarta formulação apresentada acima.

Existe também a classificação dos problemas de otimização em função da diferenciabilidade das funções objetivo e restrições. Caso pelo menos uma destas funções não seja diferenciável em algum ponto, então o problema é considerado de programação matemática não diferenciável, caso contrário, de programação matemática diferenciável (Medrano, 2000).

3.8 O Método do Lagrangiano Aumentado

3.8.1 Apresentação do problema de otimização para variáveis contínuas

Os problemas de otimização estrutural para variáveis contínuas resolvidos neste trabalho podem ser apresentados na forma:

determine $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n$ que minimize a função objetivo

$$f(\mathbf{b}, T) = \bar{f}(\mathbf{b}, T) + \int_0^T \tilde{f}(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) dt, \quad (3.8.1)$$

sujeito às restrições estáticas

$$g_i = \bar{g}_i(\mathbf{b}, T) + \int_0^T \tilde{g}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) dt \begin{cases} = 0 \text{ para } i = 1, \dots, l \\ \leq 0 \text{ para } i = l+1, \dots, m \end{cases} \quad (3.8.2)$$

e às restrições dinâmicas

$$g_i = \tilde{g}_i(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \dot{\mathbf{z}}, \ddot{\mathbf{z}}, t) \begin{cases} = 0 \text{ para } i = m+1, \dots, l' \\ \leq 0 \text{ para } i = l'+1, \dots, m' \end{cases} \text{ para } t \in [0, T]. \quad (3.8.3)$$

Nos problemas tratados aqui, as variáveis de estado $\mathbf{z}(t)$, ou vetor deslocamento, devem satisfazer as equações do movimento:

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{z}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{z}} + \mathbf{K}\mathbf{z} = \mathbf{p}(t), \quad \forall t \in [0, T], \quad (3.8.4)$$

com as condições iniciais $\mathbf{z}(0) = \mathbf{z}_0$ e $\dot{\mathbf{z}}(0) = \dot{\mathbf{z}}_0$. As restrições com respostas dinâmicas são funções explícitas das variáveis de estado e implícitas das variáveis de projeto.

3.8.2 O Método do Lagrangiano Aumentado

Para se obter uma explicação mais detalhada do método descrito neste item, recomenda-se consultar os trabalhos de Arora et al (1991), Chahande e Arora (1994), Arora et al (1994), Medrano (1994), Silva (1997), Arora (1999), Kocer e Arora (1999) e Medrano (2000).

O método do Lagrangiano aumentado, segundo Arora et al (1991), foi proposto inicialmente por Haarhoff e Powell, e a seguir por Buys. O método, originalmente descrito para aplicações em problemas com restrições estáticas, na década passada passou a ser utilizado também para problemas com restrições dinâmicas. O método é iterativo e a idéia básica consiste em transformar um problema de otimização com restrições em uma seqüência de problemas de otimização sem restrições. Para se formular o problema sem restrições um funcional Lagrangiano $\Phi(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r})$ é construído combinando-se a função objetivo com as

funções restrições. Nesta combinação ainda são introduzidos ao problema mais dois vetores denominados variáveis duais: um contendo os parâmetros de penalidade, $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^m$, e outro, $\boldsymbol{\theta} \in \mathfrak{R}^m$, relacionados com os multiplicadores de Lagrange $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ através das expressões $u_i = r_i \theta_i$, $i=1, \dots, m$. As soluções dos problemas sem restrições gera uma seqüência de pontos, soluções ótimas dos problemas sem restrições, que sob certas hipóteses convergem para a solução do problema com restrições.

Considera-se então o seguinte problema de otimização, com restrições de igualdade e desigualdade:

Problema P. Determine $\mathbf{b} \in \mathfrak{R}^n$ que minimize a função objetivo $f(\mathbf{b})$ sujeito a

$$\text{restrições de igualdade:} \quad g_i(\mathbf{b}) = 0; \quad i = 1, l \quad (3.8.5)$$

$$\text{restrições de desigualdade:} \quad g_i(\mathbf{b}) \leq 0; \quad i = l+1, m \quad (3.8.6)$$

Conforme definido em (3.2.9), a função Lagrangiana do **Problema P** é definido como

$$\lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u}) = f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^m u_i g_i(\mathbf{b}) \quad (3.8.7)$$

onde $\mathbf{u} \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor dos multiplicadores de Lagrange. A variante do método do Lagrangiano aumentado utilizada no presente trabalho introduz termos de penalidade quadrática relacionados com cada restrição:

$$\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) = \lambda(\mathbf{b}, \mathbf{u}) + P(\mathbf{r}, \mathbf{g}), \quad (3.8.8)$$

onde

$$P(\mathbf{r}, \mathbf{g}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i g_i(\mathbf{b})^2 \quad (3.8.9)$$

é a função de penalidade quadrática e $\mathbf{r} \in \mathfrak{R}^m$ é o vetor dos parâmetros de penalidade.

O método pode ser resumido pelo seguinte algoritmo:

Algoritmo I (Lagrangiano):

passo 1 - faça $k=0$, adote os vetores $\mathbf{u}$ e $\mathbf{r}$;

passo 2 - minimize $\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}^k)$ em relação a $\mathbf{b}$; considere $\mathbf{b}^k$ a solução;

passo 3 - caso os critérios de convergência forem satisfeitos, pare o processo iterativo;

passo 4 - atualize $\mathbf{u}^k$ e $\mathbf{r}^k$ se necessário;

passo 5 - faça $k=k+1$ e vá ao passo 2.

Conceitualmente o método dos multiplicadores é muito simples e sua essência está contida nos passos 2 e 4. O desempenho do método depende fortemente de como estes passos são executados. A precisão requerida para o mínimo de Φ no algoritmo de minimização sem restrições utilizado no passo 2 influencia o comportamento e a eficiência do método. Estes aspectos são essenciais no desempenho do método e serão discutidos.

Como todo o processo iterativo, o método do Lagrangiano aumentado, também necessita de critérios de parada, ou de convergência, quando for o caso. Neste trabalho, considerar-se-á os seguintes critérios:

$$k < p, \quad (3.8.10)$$

$$\|\nabla \Phi(\mathbf{b}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}^k)\| \leq \varepsilon_m \text{ e} \quad (3.8.11)$$

$$K_b = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} |g_i|; \max_{l+1 \leq i \leq m} |\max(g_i, -\theta_i)| \right\} \leq \varepsilon_m, \quad (3.8.12)$$

onde k é o número de iterações e p é o número máximo de iterações, K_b representa a máxima violação de restrição, e em (3.8.11) e (3.8.12) ε_m é a tolerância estabelecida. Caso o algoritmo não convirja, a condição (3.8.10) impõe um número máximo de iterações. Chahande e Arora (1994) observaram em diversos exemplos analisados que o valor ideal para p é igual a $2n$.

O procedimento para acréscimo dos multiplicadores, passo 4, para restrições de igualdade, é feito na forma

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{b}^k); i=1, \dots, l \quad (3.8.13)$$

Quando restrições de desigualdade estão presente, os multiplicadores podem ser acrescidos usando os valores das funções violação de restrição como

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max[g_i(\mathbf{b}^k); -\theta_i^k]; \theta_i^{k+1} \geq 0, i=l+1, \dots, m \quad (3.8.14)$$

A expressão (3.8.14) é denominada fórmula de Hestenes-Powell. Observe que (3.8.13) e (3.8.14) não requerem o cálculo do gradiente das restrições individualmente, como ocorre em grande parte dos métodos (Herskovits, 1995).

O Lagrangiano aumentado pode ser definido de diversas maneiras. Uma delas é o funcional de Rockafellar (Arora et al, 1991):

$$\bar{\Phi}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{b}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i [(g_i + \theta_i)^2 - \theta_i^2] + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^m r_i [(g_i + \theta_i)_+^2 - \theta_i^2] \quad (3.8.15)$$

O símbolo $(h)_+$ significa $\max(0, h)$.

O Lagrangiano adotado neste trabalho foi definido por Fletcher (1987):

$$\Phi(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{b}) + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^l r_i (g_i + \theta_i)^2 + \frac{1}{2} \sum_{i=l+1}^m r_i (g_i + \theta_i)_+^2 \quad (3.8.16)$$

A relação entre os dois funcionais é dada por

$$\bar{\Phi}(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = \Phi(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^m r_i \theta_i^2 \quad (3.8.17)$$

O segundo termo do membro direito não depende de $\mathbf{b}$. Logo a solução $\mathbf{b}^*$, de ambos os problemas, dados $\mathbf{r}$ e $\boldsymbol{\theta}$, é a mesma. Porém, os funcionais têm valores diferente. O Lagrangiano aumentado em função de $\mathbf{u}$ é:

$$\bar{\Phi}(\mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{r}) = \begin{cases} f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} r_i g_i^2 + u_i g_i \right) + \sum_{i=l+1}^m \left(\frac{1}{2} r_i g_i^2 + u_i g_i \right); \text{ se } \left(g_i + \frac{u_i}{r_i} \right) \geq 0 \text{ para } i > l \\ f(\mathbf{b}) + \sum_{i=1}^l \left(\frac{1}{2} r_i g_i^2 + u_i g_i \right) - \sum_{i=l+1}^m \left(\frac{u_i^2}{2r_i} \right); \text{ se } \left(g_i + \frac{u_i}{r_i} \right) < 0 \text{ para } i > l \end{cases} \quad (3.8.18)$$

Observa-se claramente que $\bar{\Phi}(\mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{r})$ contém termos de penalidade quadrática $\frac{1}{2} r_i g_i^2$, $i=1, \dots, m$, adicionados ao funcional definido em (3.8.7).

A seguir, estudar-se-á a relação entre as condições necessárias e suficientes que deve satisfazer a solução do **Problema P** e a sequência de soluções ótimas do problema de minimização do funcional de Fletcher (3.8.16) quando $k \rightarrow \infty$. Como no decorrer deste trabalho somente serão efetuados derivadas em relação à $\mathbf{b}$, indicar-se-á simplesmente $\nabla_{\mathbf{b}} = \nabla$.

Considera-se que $f(\mathbf{b})$ e $g_i(\mathbf{b}) \in C_2$ e que os vetores $\nabla g_i(\mathbf{b}^*)$, $i \in E \cup I^*$, sejam linearmente independentes.

Seja $\mathbf{b}^*$ a solução do **Problema P** e $\mathbf{u}^*$ o correspondente vetor dos multiplicadores de Lagrange no ponto ótimo. Segundo o Teorema 3.2.4, para o **Problema P** existem únicos multiplicadores de Lagrange $\mathbf{u}^*$, de tal forma que $\mathbf{b}^*$ e $\mathbf{u}^*$ satisfazem

$$\nabla f(\mathbf{b}^*) + \sum_{i=1}^m u_i^* \nabla g_i(\mathbf{b}^*) = \mathbf{0}. \quad (3.8.19)$$

Por outro lado, seja $\mathbf{b}^k$ o mínimo de $\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{u}^k, \mathbf{r}^k)$, onde $\mathbf{r}^k > \mathbf{0}$ e $\mathbf{u}^k$ são os valores correntes dos parâmetros na k -ésima iteração do método dos multiplicadores. A condição para que $\mathbf{b}^k$ seja o mínimo do Lagrangeano Aumentado é $\nabla \Phi(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\theta}^k, \mathbf{r}^k) = \mathbf{0}$. Utilizando o fato de que

$$\nabla (g_i(\mathbf{b}^k) + \theta_i^k)_+^2 = 2(g_i(\mathbf{b}^k) + \theta_i^k)_+ \nabla g_i(\mathbf{b}^k), \quad i = l+1, m,$$

demonstrado por Luemberger (1986), escreve-se:

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(\mathbf{b}^k, \boldsymbol{\theta}^k, \mathbf{r}^k) &= \nabla f(\mathbf{b}^k) + \sum_{i=1}^l r_i (g_i(\mathbf{b}^k) + \theta_i^k) \nabla g_i(\mathbf{b}^k) \\ &\quad + \sum_{i=l+1}^m r_i (g_i(\mathbf{b}^k) + \theta_i^k)_+ \nabla g_i(\mathbf{b}^k) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8.20)$$

Observa-se que $(g_i + \theta_i)_+ = \max(g_i + \theta_i, 0) = \theta_i + \max(-\theta_i, g_i)$, e portanto (3.8.20) pode ser escrita na forma

$$\begin{aligned} \nabla \Phi(\mathbf{b}^k, \theta^k, \mathbf{r}^k) &= \nabla f(\mathbf{b}^k) + \sum_{i=1}^l r_i^k (\theta_i^k + g_i(\mathbf{b}^k)) \nabla g_i(\mathbf{b}^k) \\ &+ \sum_{i=l+1}^m r_i^k [\theta_i^k + \max(-\theta_i^k, g_i(\mathbf{b}^k))] \nabla g_i(\mathbf{b}^k) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (3.8.21)$$

Arora et al (1991) demonstram utilizando (3.8.13) e (3.8.14) que $\lim_{k \rightarrow \infty} \theta_i^k = \theta_i^*$ ($i = 1, m$) e que nestas condições

$$g_i(\mathbf{b}^k) = 0; \quad i = 1, l \quad (3.8.22)$$

$$\max(-\theta_i, g_i(\mathbf{b}^k)) = 0; \quad i = l+1, m \quad (3.8.23)$$

Substituindo-se (3.8.22) e (3.8.23) em (3.8.21), obtém-se (3.8.24). Por comparação, pode-se concluir que $\mathbf{b}^k = \mathbf{b}^*$ e $r_i^k \theta_i^k = r_i^k \theta_i^* = u_i^*$. Observe que (3.8.23) pode ser satisfeita somente quando $\theta_i^k = 0$ ou $g_i(\mathbf{b}^k) = 0$ ou ambos nulos. Estas igualdades podem ser escritas como $\theta_i^k g_i(\mathbf{b}^k) = 0; i = l+1, m$. Assim as equações (3.8.21) à (3.8.23) são equivalentes às condições de Kuhn-Tucker que são as condições necessárias para o **Problema P**:

$$\nabla f(\mathbf{b}^k) + \sum_{i=1}^m u_i^k \nabla g_i(\mathbf{b}^k) = \mathbf{0} \quad (3.8.24)$$

$$g_i(\mathbf{b}^k) = 0; \quad i = 1, l \quad (3.8.25)$$

$$u_i^k \geq 0, \quad g_i(\mathbf{x}^k) \leq 0 \quad \text{e} \quad u_i^k g_i(\mathbf{x}^k) = 0; \quad i = l+1, m. \quad (3.8.26)$$

Até o momento as discussões foram voltadas para as condições necessárias que $\mathbf{b}^*$ deve satisfazer para ser um mínimo local do **Problema P**. Já as condições suficientes para que $\mathbf{b}^*$ seja um mínimo local isolado do **Problema P** é

$$\langle \mathbf{b}, \nabla^2 L(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*) \mathbf{b} \rangle > 0 \quad (3.8.27)$$

para todo $\mathbf{b} \neq \mathbf{0}$ e satisfazendo as condições

$$\begin{aligned} \langle \nabla g_i(\mathbf{b}^*), \mathbf{b} \rangle &= 0; \quad i \in E \cup I \\ \langle \nabla g_i(\mathbf{b}^*), \mathbf{b} \rangle &\leq 0; \quad i \notin E \cup I \end{aligned} \quad (3.8.28)$$

onde $\nabla^2 L(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*)$ é a matriz Hessiana do Lagrangiano. Se $\nabla^2 L(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*)$ for definida positiva, tem-se uma condição suficiente para que $\mathbf{b}^*$ seja um mínimo local isolado. Considerando-se que $\mathbf{b}^k$, para um k suficientemente grande, satisfaz as condições de (3.8.21) à (3.8.23), então a condição suficiente para que $\mathbf{b}^k$ seja um mínimo de $\Phi(\mathbf{b}, \mathbf{u}^*, \mathbf{r})$ é que $\nabla^2 \Phi(\mathbf{b}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})$ seja definida positiva. Segundo Arora et al (1991), se $\nabla^2 L(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*)$ for definida positiva, então $\nabla^2 \Phi(\mathbf{b}^*, \mathbf{u}^*, \mathbf{r})$ também o é, podendo-se concluir que o mínimo do **Problema P** é também o mínimo de $\lim_{k \rightarrow \infty} \Phi(\mathbf{b}^k, \mathbf{u}^k, \mathbf{r})$.

Capítulo 4

Otimização com restrições dinâmicas

4.1 Introdução

Em um problema de otimização com restrições dinâmicas, como o dado pelas equações (3.8.1) à (3.8.3), dependendo do método utilizado, torna-se necessário eliminar a variável independente tempo nas restrições. Restrição dinâmicas, definidas em um intervalo $t \in [0, T]$, podem ser transformadas em estáticas, como mostrado a seguir:

$$\begin{aligned} g_i(\mathbf{b}, t) = 0, \forall t \in [0, T] &\rightarrow \varphi_i(\mathbf{b}) = \int_0^T |g_i(\mathbf{b}, t)| dt = 0, \quad i = 1, \dots, l \\ g_i(\mathbf{b}, t) \leq 0, \forall t \in [0, T] &\rightarrow \varphi_i(\mathbf{b}) = \int_0^T (g_i(\mathbf{b}, t))_+ dt \leq 0, \quad i = l + 1, \dots, m \end{aligned} \quad (4.1.1)$$

Utilizando-se (4.1.1) pode-se aplicar os conceitos e métodos descritos no Capítulo 3 para os problemas de otimização com restrições dinâmicas. A representação gráfica do tratamento

dado às restrições dinâmicas em (4.1.1) é mostrada na Figura 4.1.1. Arora (1999) apresenta diversas maneiras de se tratar restrições dinâmicas.

Figura 4.1.1 – Tratamento das restrições dinâmicas

Para a apresentação do algoritmo do método do Lagrangiano aumentado para problemas dinâmicos é necessário ampliar o conceito de K_b (a máxima violação de restrição) dado em (3.8.12):

$$K_b = \max \left\{ \max_{1 \leq i \leq l} |g_i|; \max_{l+1 \leq i \leq m} |\max(g_i, -\theta_i)|; \right. \\ \left. \max_{m+1 \leq i \leq l'} \left(\max_{t \in [0, T]} |g_i| \right); \max_{l'+1 \leq i \leq m'} \left(\max_{t \in [0, T]} |\max(g_i, -\theta_i)| \right) \right\} \leq \varepsilon_m, \quad (4.1.2)$$

O funcional Lagrangiano aumentado de Fletcher para o problema (3.8.1) à (3.8.3), é definido por:

$$\Phi(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}, \mathbf{r}) = f(\mathbf{b}, T) + \frac{1}{2} \left\{ \sum_{i=1}^l r_i (g_i + \theta_i)^2 + \sum_{i=l+1}^m r_i (g_i + \theta_i)_+^2 \right\} + \\ \frac{1}{2} \int_0^T \left\{ \sum_{i=m+1}^{l'} r_i (g_i + \theta_i)^2 + \sum_{i=l'+1}^{m'} r_i (g_i + \theta_i)_+^2 \right\} dt. \quad (4.1.3)$$

Considerando o funcional (4.1.3) e K_b em (4.1.2), o **Algoritmo I** pode ser detalhado como descrito abaixo.

Algoritmo II (Lagrangiano):

Passo 1 - Faça $k=0$; $K=\infty$; estime os vetores $\mathbf{b}^0$, $\boldsymbol{\theta}^0$, $\mathbf{r}^0$, e os escalares $\alpha>1$, $\beta>1$, $\varepsilon_m>0$ (ε é um número pequeno usado como tolerância nos critérios de parada).

Passo 2 - Minimize $\Phi(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}^k, \mathbf{r}^k)$ em relação a $\mathbf{b}$. Denomina-se $\mathbf{b}^k$ o ponto que minimiza $\Phi(\mathbf{b}, \boldsymbol{\theta}^k, \mathbf{r}^k)$.

Passo 3 - Calcule $g_i(\mathbf{b}^k)$, $i = 1, m$ e $g_i(\mathbf{b}^k, t)$; $i = m+1, m'$ e $t \in [0, T]$. Calcule K_b e cheque o critério de parada; isto é: verifique se os critérios descritos em (3.8.10), (3.8.11) e (4.1.2) são satisfeitos. Caso positivo, então pare o processo. Caso contrário, estabeleça os seguintes conjuntos de restrições de igualdade e desigualdade

$$I_E = \{i : |g_i(\mathbf{b}^k)| > K/\alpha; i = 1, l\} \text{ (igualdade)}$$

$$I_I = \{i : |\max(g_i(\mathbf{b}^k), -\theta_i^k)| > K/\alpha; i = l+1, m\} \text{ (desigualdade)}$$

$$I_{E'} = \{i : \max_{0 \leq t \leq T} |g_i(\mathbf{b}^k, t)| > K/\alpha; i = m+1, l'\} \text{ (igualdade dinâmica)}$$

$$I_{I'} = \{i : \max_{0 \leq t \leq T} |\max(g_i(\mathbf{b}^k, t), -\theta_i^k)| > K/\alpha; i = l'+1, m'\} \text{ (desigualdade dinâmica)}$$

Passo 4 - Efetue os seguintes acréscimos nos parâmetros de penalidade e multiplicadores.

(a) Se $K_b \geq K$, faça $r_i^{k+1} = \beta r_i^k$ e $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k / \beta$ para todo $i \in I_E \cup I_I$; faça $r_i^{k+1} = \beta r_i^k$ e $\theta_i^{k+1} = \theta_i^k / \beta$ para todo $i \in I_{E'} \cup I_{I'}$ e $t \in [0, T]$; isto é incremente os parâmetros de penalidade sem modificar os multiplicadores de Lagrange. Vá ao passo 5.

(b) Se $K_b < K$, acresce-se θ_i^k fazendo

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{b}^k); i = 1, l$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max(g_i(\mathbf{b}^k), -\theta_i^k); i = l+1, m$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + g_i(\mathbf{b}^k, t); i = m+1, l', t \in [0, T]$$

$$\theta_i^{k+1} = \theta_i^k + \max(g_i(\mathbf{b}^k, t), -\theta_i^k); i = l'+1, m', t \in [0, T]$$

e vá ao passo 5.

(c) Se $K_b \leq K/\alpha$, faça $K=K_b$ e vá ao passo 5. Senão, faça $r_i^{k+1} = \beta r_i^{k+1}$ e

$\theta_i^{k+1} = \theta_i^{k+1}/\beta$ para todo $i \in I_E \cup I_I$; faça $r_i^{k+1} = \beta r_i^{k+1}$ e $\theta_i^{k+1} = \theta_i^{k+1}/\beta$ para todo

$i \in I_E \cup I_I$, e $t \in [0, T]$. Faça $K=K_b$ e vá ao passo 5.

Passo 5 - Faça $k=k+1$, e vá passo 2.

4.2 Análise de sensibilidade para problemas com restrições dinâmicas

4.2.1 Introdução

A dedução de expressões e procedimentos para o cálculo da sensibilidade (gradientes) dos funcionais envolvidos no problema (4.1.1) à (4.1.3), em relação às variações de projeto é denominado análise de sensibilidade de projeto (ASP). Os vetores obtidos através da ASP são utilizados no aprimoramento de um dado projeto. Existem basicamente três métodos para o desenvolvimento da ASP: das diferenças finitas, da diferenciação direta e das variáveis adjuntas.

Considere um funcional envolvido no problema de otimização escrito na seguinte forma:

$$H(\mathbf{b}, T) = c(\mathbf{b}, T) + \int_0^T h(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) dt. \quad (4.2.1)$$

onde $\mathbf{b}$ é o vetor n -dimensional das variáveis de projeto e $\mathbf{z}$ é o vetor k -dimensional dos deslocamentos. Considera-se nesta dedução que as funções envolvidas em (4.2.1) são pelo menos uma vez diferenciável.

O método da diferenciação direta é baseado no cálculo da variação total do funcional Φ , obtendo-se uma expressão para o gradiente dada por

$$\frac{dH}{d\mathbf{b}} = c_{,b} + \int_0^T [h_{,b} + \mathbf{z}_{,b} h_{,z} + \dot{\mathbf{z}}_{,b} h_{,\dot{z}} + \ddot{\mathbf{z}}_{,b} h_{,\ddot{z}}] dt \quad (4.2.2)$$

onde a notação da “vírgula” é utilizada para representar a diferenciação parcial. Nesta notação, as derivadas parciais do escalar $h(\mathbf{b}, t)$ e do vetor k -dimensional $\mathbf{z}$ em relação ao vetor n -dimensional $\mathbf{b}$ são definidas como

$$h_{,b} = \frac{\partial h}{\partial \mathbf{b}} \quad (n\text{-dimensional}) \quad (4.2.3)$$

$$\mathbf{z}_{,b} = \frac{\partial \mathbf{z}}{\partial \mathbf{b}} \quad (n \times k\text{-dimensional}) \quad (4.2.4)$$

Todos os termos do segundo membro de (4.2.2) podem ser explicitamente calculados, exceto $\mathbf{z}_{,b}$, $\dot{\mathbf{z}}_{,b}$ e $\ddot{\mathbf{z}}_{,b}$. Estes podem ser calculados diferenciando a equação do movimento em relação à $\mathbf{b}$, e então integrando-a no domínio do tempo para determinar $\mathbf{z}_{,b}$, $\dot{\mathbf{z}}_{,b}$ e $\ddot{\mathbf{z}}_{,b}$.

4.2.2 O Princípio do Método das Variáveis Adjuntas

Considere o funcional (4.2.1) escrito na seguinte forma:

$$H(\mathbf{b}, T) : B \mapsto \Re \quad (4.2.5)$$

A equação do movimento é escrita como

$$W(\mathbf{b}, \mathbf{z}) = \mathbf{0}. \quad (4.2.6)$$

A variação total do funcional da equação (4.2.5) é escrita como

$$\delta H = \left\langle \frac{dH}{d\mathbf{b}}, \delta \mathbf{b} \right\rangle \quad \text{e} \quad (4.2.7)$$

$$\frac{dH}{d\mathbf{b}} = H_{,b} + \mathbf{z}_{,b} H_{,z}. \quad (4.2.8)$$

O problema da análise de sensibilidade é calcular a derivada total $dH/d\mathbf{b}$. Quando esta derivada é calculada utilizando-se (4.2.8), o método é denominado método de diferenciação direta. Esta abordagem necessita do cálculo da matriz $\mathbf{z}_{,b}$, a qual pode ser calculada resolvendo o seguinte sistema de equações lineares obtido escrevendo-se a variação total da equação (4.2.6) como

$$\mathbf{W}_{,z}^t \mathbf{z}_{,b}^t = -\mathbf{W}_{,b}^t. \quad (4.2.9)$$

Para desenvolver o princípio variacional do método das variáveis adjuntas um outro funcional é criado adicionando à (4.2.1) um termo relativo ao vetor das variáveis adjuntas como

$$H^a(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \mathbf{z}^a) = H(\mathbf{b}, \mathbf{z}) + W^a(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \mathbf{z}^a) \quad (4.2.10)$$

onde $\mathbf{z}^a$ é o campo vetorial das variáveis adjuntas que precisa ser determinado e

$$W^a(\mathbf{b}, \mathbf{z}, \mathbf{z}^a) = \langle \mathbf{W}(\mathbf{b}, \mathbf{z}), \mathbf{z}^a \rangle. \quad (4.2.11)$$

O princípio do método das variáveis adjuntas:

A variação total de um funcional em (4.2.1) é igual à variação explícita do funcional (4.2.10); ou seja,

$$\delta H = \delta_b H^a \quad (4.2.12)$$

onde δ_b representa a variação explícita do projeto, i.e., $\mathbf{z}$ é considerado fixo. Para se calcular (4.2.12), o campo $\mathbf{z}^a(\mathbf{b}, t)$ precisa ser determinado. Isto é feito requerendo-se que o funcional em (4.2.10) seja estacionário em relação às variáveis de estado $\mathbf{z}$; ou seja, requerendo que a variação em relação a $\mathbf{z}$ se anule:

$$\delta_z H^a = 0. \quad (4.2.13)$$

A prova deste princípio é direta. A variação total em relação ao projeto do funcional (4.2.10) é

$$\delta H^a = \delta H + \delta W^a \quad (4.2.14)$$

com

$$\delta W^a = \langle \delta z^a, W \rangle + \langle z^a, \delta W \rangle. \quad (4.2.15)$$

Se δz^a é selecionado como um campo admissível, então o primeiro termo de (4.2.15) se anula. Ainda, considerando o equilíbrio no projeto corrente e no variado, obtém-se $\langle z^a, (W + \delta W) \rangle = 0$. Com isso a equação (4.2.14) reduz-se para

$$\delta H^a = \delta H. \quad (4.2.16)$$

A variação de H^a pode ser também escrita como

$$\delta H^a = \delta_b H^a + \delta_z H^a. \quad (4.2.17)$$

Utilizando (4.2.13) em (4.2.17), a equação (4.2.17) reduz-se à (4.2.12), como se queria demonstrar.

4.2.3 Análise de sensibilidade do Lagrangiano com o

Método das Variáveis Adjuntas

Considere o funcional Lagrangiano aumentado escrito na seguinte forma:

$$\Phi(\mathbf{b}, T) = c(\mathbf{b}, T) + \int_0^T h(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) dt. \quad (4.2.18)$$

Considere agora o funcional Lagrangiano aumentado modificado para aplicação no método das variáveis adjuntas:

$$\Phi^a(\mathbf{b}, T) = c(\mathbf{b}, T) + \int_0^T G(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), \mathbf{z}^a(t), t) dt, \quad (4.2.19)$$

onde

$$G(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), \mathbf{z}^a(t), t) = h(\mathbf{b}, \mathbf{z}(t), \dot{\mathbf{z}}(t), \ddot{\mathbf{z}}(t), t) + [\mathbf{M}(\mathbf{b})\ddot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{C}(\mathbf{b})\dot{\mathbf{z}}(t) + \mathbf{K}(\mathbf{b})\mathbf{z}(t) - \mathbf{p}(\mathbf{b}, t)]^t \mathbf{z}^a(t) \quad (4.2.20)$$

e $\mathbf{z}^a$ é o vetor das variáveis adjuntas.

O princípio do método das variáveis adjuntas (4.2.12) permite escrever:

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{b}} = \frac{\partial \Phi^a}{\partial \mathbf{b}}. \quad (4.2.21)$$

Esta expressão significa que o cálculo das derivadas totais do Lagrangiano (4.2.18) em relação à $\mathbf{b}$ é equivalente ao cálculo das derivadas explícitas parciais do funcional modificado (4.2.19) em relação à $\mathbf{b}$; i.e., no segundo membro de (4.2.21) $\mathbf{z}$ é considerado fixo.

De acordo com (4.2.13) para se poder utilizar a expressão (4.2.21), o funcional (4.2.19) precisa ser estacionário em relação às variáveis de estado $\mathbf{z}$, o que implica em:

$$G_{,z} - (G_{,z})^\bullet + (G_{,z})^{\bullet\bullet} = 0. \quad (4.2.22)$$

com as condições terminais

$$G_{,z}(T) = 0, \text{ e } G_{,z}(T) - \frac{d}{dt} G_{,z}(T) = 0. \quad (4.2.23)$$

Substituindo G dado em (4.2.20) nas equações (4.2.22) e (4.2.23), o problema das variáveis adjuntas torna-se então:

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})^t \ddot{\mathbf{z}}^a - \mathbf{C}(\mathbf{b})^t \dot{\mathbf{z}}^a + \mathbf{K}(\mathbf{b})^t \mathbf{z}^a = -h_{,z} + \frac{d}{dt}(h_{,z}) - \frac{d^2}{dt^2}(h_{,z}) \quad (4.2.24)$$

com as condições terminais

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})^t \mathbf{z}^a(T) = -h_{,z}(T) \text{ e } \quad (4.2.25)$$

$$\mathbf{M}(\mathbf{b})^t \dot{\mathbf{z}}^a(T) = \mathbf{C}(\mathbf{b})^t \mathbf{z}^a(T) + h_{,z}(T) - \frac{d}{dt}(h_{,z})(T). \quad (4.2.26)$$

Pode-se ainda utilizar o método das diferenças finitas para o cálculo das derivadas parciais em (4.2.21). Neste caso, o método das variáveis adjuntas torna-se semi-analítico, tendo uma parte desenvolvida analiticamente e outra com auxílio de métodos numéricos.

A formulação do problema das variáveis adjuntas descrita por (4.2.24) à (4.2.26) incluindo os termos $h_{,z}$ é original, visto que as demais formulações apresentadas na literatura incluem apenas as derivadas de h em relação aos deslocamentos e velocidades, além do tempo. No caso dos problemas que apresentam restrições envolvendo as acelerações nodais a literatura consultada indica que o vetor aceleração deve ser simplesmente isolado na equação do movimento e então substituído em h , tornando h uma função apenas de $\mathbf{b}$, $\mathbf{z}$, $\dot{\mathbf{z}}$ e t .

4.2.4 O Método das Diferenças Finitas

O método das diferenças finitas divide-se em três tipos, de acordo com a perturbação: adiante, central e para trás. No presente trabalho são utilizadas as variações do método com perturbação adiante e central.

Para um funcional $\Phi(\mathbf{b})$, onde $\mathbf{b}$ é o vetor n -dimensional das variáveis de projeto, pode-se definir seu gradiente numérico por

$$\frac{d\Phi}{d\mathbf{b}} \cong [\phi_i], i=1, \dots, n \quad (4.2.27)$$

onde

$$\phi_i = \frac{\Phi(b_1, b_2, \dots, b_i + \Delta, \dots, b_n) - \Phi(b_1, b_2, \dots, b_i, \dots, b_n)}{\Delta}, i=1, \dots, n, \quad (4.2.28)$$

sendo que Δ é a perturbação aplicada à i -ésima variável de projeto no método das diferenças finitas com perturbação adiante, ou

$$\phi_i = \frac{\Phi(b_1, b_2, \dots, b_i + \Delta, \dots, b_n) - \Phi(b_1, b_2, \dots, b_i - \Delta, \dots, b_n)}{2\Delta}, i=1, \dots, n, \quad (4.2.29)$$

sendo que Δ é a perturbação aplicada à i -ésima variável de projeto no método das diferenças finitas com perturbação central.

4.2.5 Comentários sobre os métodos para a análise de sensibilidade

Deve-se observar que, no uso do método das variáveis adjuntas para o cálculo do gradiente do Lagrangiano aumentado, torna-se necessário resolver o sistema de equações diferenciais ordinárias (da mesma ordem da equação do movimento) duas vezes: uma para se obter $\mathbf{z}$ e uma outra para se determinar $\mathbf{z}^a$. Uma vantagem desse método é que para o cálculo de $\mathbf{z}^a$ pode-se utilizar os mesmos métodos e matrizes utilizadas no cálculo de $\mathbf{z}$. Se a análise de sensibilidade for realizada utilizando-se o método das diferenças finitas, será necessário resolver $n + 1$, com perturbação adiante, ou $2n$, com perturbação central, sistemas de equações diferenciais ordinárias da mesma ordem que a equação do movimento, correspondentes às perturbações do valor original de $\mathbf{b}$. Para computar o gradiente utilizando o método da diferenciação direta é necessário resolver $n + 1$ sistema de equações diferenciais ordinárias da mesma ordem da equação do movimento, correspondentes à determinação de $\mathbf{z}$ e das matrizes $\partial \mathbf{z} / \partial \mathbf{b}$, $\partial \dot{\mathbf{z}} / \partial \mathbf{b}$ e $\partial \ddot{\mathbf{z}} / \partial \mathbf{b}$.

Assim, pode-se concluir que o método das variáveis adjuntas é o que apresenta o menor número de operações aritméticas e consequentemente deveria apresentar o menor tempo computacional para o cálculo do vetor gradiente do Lagrangiano aumentado.

Capítulo 5

Programas implementados

5.1 Introdução

As várias etapas de um determinado processo de projeto ótimo exigem o uso de diversos métodos numéricos. Os métodos numéricos implementados nos programas desenvolvidos para o presente trabalho são a seguir listados.

1. Para resolução dos sistemas lineares, utiliza-se decomposição de Cholesky (Atkinson, 1993);
2. Para o cálculo de integrais, utiliza-se regra de Simpson (Atkinson, 1993);
3. Para resolução das equações do movimento, utiliza-se o método de Newmark (Tedesco et al, 1999).
4. Relativamente aos processos de otimização sem restrições, utiliza-se o método dos gradientes conjugados com busca unidimensional de Armijo (Arora, 1989);
5. Para o cálculo dos gradientes utiliza-se o método das diferenças finitas (Atkinson, 1993) ou método das variáveis adjuntas (Arora, 1999).

6. Para o cálculo das frequências naturais de vibração utiliza-se o método da iteração inversa (Tedesco et al, 1999).

Figura 5.1.1 – Processo clássico de otimização estrutural

O procedimento usual para a solução de problemas de otimização de estruturas submetidas a esforços dinâmicos é a utilização em separado de um programa de otimização e um programa de análise estrutural. A solução do problema de otimização é, em geral, implementada utilizando-se uma biblioteca já existente de sub-rotinas de otimização e um outro programa para a realização da análise estrutural (Figura 5.1.1). Geralmente, o programa de análise estrutural é um programa comercial, tal como ANSIS, ADYNA, ou STRAP. A vantagem dessa abordagem de organização da solução é que a análise estrutural pode ser

efetuada com a confiabilidade e a variada gama de modelos constitutivos, elementos e ferramentas de pré e pós processamento que esses programas oferecem. Esta formulação conduz, em geral, a um trabalho relativamente lento, porque a troca de informações entre o programa de análise estrutural e o programa de otimização se dá por meio de arquivos, com intervenção do usuário. Em cada etapa, o programa de otimização gera arquivos de entrada para o programa de análise estrutural. Este os lê, processa os dados e gera um novo arquivo, o qual será lido pelo programa de otimização, e assim sucessivamente até a convergência do método. O processo de geração, abertura, leitura e fechamento de arquivos torna esta implementação muito cara do ponto de vista de tempo computacional.

No presente trabalho, de forma alternativa, foram implementados vários programas de computador que contemplam tanto o processo de otimização, quanto a análise estrutural (Figura 5.1.2). Esta abordagem visa resolver de forma integrada o problema de otimização e a análise estrutural. Apenas vetores e matrizes são trocados entre o programa de otimização e o programa de análise estrutural. Com isso, o processo ganha velocidade e projetos ótimos podem ser obtidos com um menor custo computacional.

5.2 O programa computacional

Os programas desenvolvidos neste trabalho apresentam vários módulos que contemplam desde a discretização da estrutura, definição dos esforços atuantes, até à verificação das restrições de projeto. Toda a programação computacional foi desenvolvida visando organizar em arquivos específicos (módulos) as diversas áreas que o presente trabalho abrange.

Figura 5.2.1 – Processo alternativo de otimização estrutural

Todo o código computacional foi desenvolvido em linguagem C. Para a compilação dos programas foi utilizado o compilador Microsoft Visual C++ 6.0. Os arquivos que contemplam as sub-rotinas utilizadas distribuem-se nos seguintes módulos:

- variavel.h;
- entrada.h;
- alocdi.h;
- funcoes.h;
- matrizes.h;
- stress.h;
- concreto.h;

- restrico.h;
- newmarkc.h;
- adjoint.h;
- lagrange.h;
- saida.h;
- optimi.cpp

O módulo `variavel.h` contém todas as variáveis globais envolvidas no programa. A partir do momento que as variáveis globais estão definidas, as sub-rotinas do módulo `alocdi.h` faz a alocação dinâmica de todos os vetores e matrizes globais. As sub-rotinas descritas em `entrada.h` lêem o arquivo de entrada, o qual contém informações sobre as propriedades mecânicas dos materiais, definição e discretização da estrutura, intervalo de tempo e discretização temporal adotados, e finalmente, os valores iniciais para as variáveis de projeto. O módulo `funcoes.h` apresenta algumas funções elaboradas para facilitar a programação. Uma vez que a estrutura e a discretização são definidos, as sub-rotinas do módulo `matrizes.h` calculam as matrizes de massa, rigidez e amortecimento. O vetor força externa é definido em `newmak.h`, onde também é resolvida a equação do movimento, obtendo-se os valores dos vetores deslocamento, velocidade e aceleração. De posse destes valores as sub-rotinas do módulo `stress.h` calculam os esforços internos em cada elemento. As sub-rotinas do módulo `concreto.h` realizam as verificações do concreto armado. No módulo `restrico.h` são computadas as restrições de projeto. No módulo `adjoint.h` é realizada a análise de sensibilidade em relação às variáveis de projeto do funcional Lagrangiano. No módulo `lagrange.h` encontra-se o algoritmo de otimização, que por sua vez utiliza todos os outros módulos descritos anteriormente. Finalmente, o módulo `saida.h`, imprime em arquivo, informações contendo os relatórios finais. Em `optimi.cpp` encontra-se o programa principal.

Para a visualização gráfica de alguns resultados, utilizou-se um software desenvolvido por Bandeira (1995), gentilmente cedido para a utilização no presente trabalho.

Capítulo 6

Otimização de uma placa metálica

6.1 Introdução

Neste capítulo descreve-se a otimização de uma placa metálica submetida a esforços vibratórios. A placa (Figura 6.1.1) é quadrada e simplesmente apoiada nos seus vértices. A função objetivo adotada é a massa da placa. As dimensões da placa são os lados $2l_x$ e $2l_y$, e a espessura h . A área do plano da placa é então $A = 4l_x l_y$. A placa é discretizada em $n_{no} = 49$ nós (Figura 6.1.2) utilizando-se elementos finitos triangulares com 9 graus de liberdade (Shigueme, 1995), implementados pelo autor no programa de otimização. O sistema dinâmico descrito pelas equações do movimento possui 3 $n_{no} = 147$ graus de liberdade. O carregamento estático é proveniente do peso próprio da placa e de um motor instalado. O motor em funcionamento excita a placa com carregamento harmônico de frequência Ω . As

verificações mais comum neste tipo de problema são relativas à resistência dos materiais empregados e àquelas relacionadas com os limites dos deslocamentos.

Figura 6.1.1 – Placa a ser otimizada

Figura 6.1.2 – Discretização adotada

6.2 Formulação do problema

O problema consiste em minimizar a massa da placa metálica mostrada nas Figuras 6.1.1 e 6.1.2. A placa é excitada por um carregamento harmônico provocado por um motor de massa M_{motor} e frequência Ω . A variável de projeto adotada para resolver o problema é $\mathbf{b} = [b_1] \equiv [h]$. Uma restrição estática é aplicada sobre o valor da espessura, enquanto que restrições dinâmicas são aplicadas sobre os deslocamentos e momentos de flexão nodais.

O problema de otimização dinâmica é minimizar a função objetivo (massa da placa) $f(\mathbf{b})$ escrita como:

$$f(\mathbf{b}) = \rho_s A b_1 \quad (6.2.1)$$

onde ρ_s é a densidade do aço.

Sujeito à restrição estática:

- a espessura mínima

$$- b_1 + h_l \leq 0 \quad (6.2.2)$$

Sujeito às restrições dinâmicas, $\forall t \in [0, T]$:

- o máximo deslocamento vertical

$$\max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{w_i\} - z_u \leq 0, \quad (6.2.3)$$

- os máximos momentos de flexão

$$\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} - M_{xr} \leq 0, \quad (6.2.4)$$

$$\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} - M_{yr} \leq 0, \quad (6.2.5)$$

onde γ_f é o coeficiente de majoração dos esforços característicos, M_{xi} e M_{yi} são os momentos de flexão nodais característicos por unidade de comprimento de placa. Já z_u é o máximo valor permitido para w , o campo de deslocamento transversal da placa. No caso da placa

discretizada, os deslocamentos nodais são $z_i = [w_i \ \alpha_i \ \beta_i]^t$, $i = 1, \dots, n_{no}$, onde w_i é o deslocamento transversal, α_i a rotação em torno de uma fibra orientada segundo o eixo dos xx e β_i a rotação em torno de uma fibra orientada segundo o eixo dos yy . Os momentos resistentes da placa, M_{xr} e M_{yr} , são dados pela expressão:

$$M_{xr} = M_{yr} = \frac{\phi f_y b_1^2}{6} \quad (6.2.6)$$

onde ϕ é o coeficiente de redução da resistência ao escoamento do aço f_y (NBR-8800, 1986). Como em (6.2.4) e (6.2.5) são considerados apenas os valores máximos de M_{xi} e M_{yi} , não foram aplicadas restrições sobre os momentos de torção M_{xyi} .

O vetor força externa $p(t)$ possui uma parcela estática, devida ao peso próprio da placa e do motor instalado, e outra dinâmica, devida à vibração do motor em funcionamento. As cargas estáticas foram simuladas como cargas dinâmicas aplicadas lentamente em um intervalo de tempo t_s relativamente grande. A parcela relativa ao peso próprio da placa p_{sp} é considerada igualmente distribuída sobre os nós:

$$p_{spi} = \begin{cases} (b_1 A \rho_s 9,81 / n_{no}) t, & t \in [0, t_s], \ i = 1, 4, 7, 10, \dots, 3n_{no} - 2 \\ b_1 A \rho_s 9,81 / n_{no}, & t \in (t_s, T], \ i = 1, 4, 7, 10, \dots, 3n_{no} - 2 \end{cases} \quad (6.2.7)$$

A parcela estática provida pelo peso próprio do motor p_{sm} é considerada igualmente aplicada sobre os nós 17, 18, 19, 24, 25, 26, 31, 32 e 33 e é dada por:

$$p_{smi} = \begin{cases} (M_{motor} 9,81 / 9) t, & t \in [0, t_s], \ i = 49, 52, 55, 70, 73, 76, 91, 94, 97 \\ M_{motor} 9,81 / 9, & t \in (t_s, T], \ i = 49, 52, 55, 70, 73, 76, 91, 94, 97 \end{cases} \quad (6.2.8)$$

A parcela de carga dinâmica devida à excitação harmônica do motor é também considerada aplicada sobre os nós 17, 18, 19, 24, 25, 26, 31, 32 e 33 e é dada por:

$$p_{dmi} = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_s], \ i = 49, 52, 55, 70, 73, 76, 91, 94, 97 \\ p_0 \sin[\Omega(t - t_s)], & t \in (t_s, T], \ i = 49, 52, 55, 70, 73, 76, 91, 94, 97 \end{cases} \quad (6.2.9)$$

Finalmente, o vetor carga $p(t)$ é escrito como:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{sp}(t) + \mathbf{p}_{sM}(t) + \mathbf{p}_{dM}(t), t \in [0, T]. \quad (6.2.9)$$

As condições iniciais do problema são $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.

6.3 Dados numéricos

Este problema foi resolvido utilizando-se o método das diferenças finitas com perturbação adiante para o cálculo do gradiente do funcional Lagrangiano aumentado. Os dados numéricos adotados foram: $h_l = 0,01 \text{ m}$, $A = 36 \text{ m}^2$, $\phi = 0,87$, $f_y = 250 \text{ MPa}$, $\rho_s = 7850 \text{ Kg/m}^3$, $\Omega = 120\pi \text{ rad/s}$, $M_{\text{motor}} = 10000 \text{ Kg}$ e $p_0 = 50 \text{ KN}$. O módulo de elasticidade do aço é $E_s = 205 \text{ GPa}$. O amortecimento de Rayleigh foi utilizado com uma taxa de amortecimento de 2% para o primeiro e o segundo modo de vibração. O intervalo considerado para aplicação dos esforços estáticos é $t_s = 1 \text{ s}$ e o instante tempo final é $T = 2 \text{ s}$. O intervalo de tempo foi discretizado com 200 divisões.

6.4 Resultados numéricos

O problema descrito pelas Equações (6.2.1) à (6.2.5) foi resolvido de duas maneiras diferentes. Durante a primeira delas foram consideradas todas as restrições dinâmicas, com $z_u = \sqrt{A}/500 \text{ m}$. Os resultados obtidos para este caso são mostrados na Tabela 6.4.1.

A Figura 6.4.1 mostra a configuração da placa quando a mesma atingiu o deslocamento máximo no projeto ótimo. Observe que a placa quase toca o plano relativo à máxima restrição de deslocamento. O máximo deslocamento obtido foi $1,199 \text{ cm}$, enquanto que o permitido é de $1,2 \text{ cm}$. O momentos de projeto obtidos foram $\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} = \gamma_f$

$\max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} = 106477 \text{ Nm/m}$. Este valor é bem menor que 522000 Nm/m que é o momento

resistido pela placa. Neste caso, a restrição relativa ao deslocamento é ε -ativa.

Tabela 6.4.1 – Projeto ótimo considerando todas as restrições dinâmicas.

Projeto	$b_1(m)$	$f(b) (Kg)$	Iteração
Inicial	0,100	28260	0
Ótimo	0,120	34014	14

Figura 6.4.1 – Máximo deslocamento obtido para o projeto ótimo do primeiro problema

A segunda solução para o problema foi obtida não considerando a Equação (6.2.3). Em outras palavras, foi permitido que a placa se deslocasse irrestritamente. Os resultados obtidos para este caso são mostrados na Tabela 6.4.2. A Figura 6.4.2 mostra a configuração da placa quando a mesma atingiu o máximo deslocamento no projeto ótimo. O deslocamento máximo obtido foi $0,17 \text{ m}$. Para efeito de ilustração é mostrado na Figura 6.4.2 um plano para deslocamentos iguais à $\sqrt{A}/20 = 0,3 \text{ m}$. Os momentos fletores de projeto obtidos foram $\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} = \gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} = 10945 \text{ Nm/m}$. Este valor está bem próximo de 11102 Nm/m que é o momento resistido pela placa no projeto ótimo. As restrições relativas aos momentos fletores são ε -ativas.

Tabela 6.4.2: Projeto ótimo não considerando a restrição do deslocamento máximo.

Projeto	$b_1 (m)$	$F(\mathbf{b}) (Kg)$	Iteração
Inicial	0,100	28260	0
Ótimo	0,018	5087	23

Figura 6.4.2 - Máximo deslocamento obtido para o projeto ótimo do segundo problema

6.5 Comentários

Foram elaboradas algumas formulações para o problema descrito neste capítulo. Em uma delas foi aplicada uma restrição sobre o deslocamento de cada nó, obtendo-se um total de n_{no} restrições relacionadas com esses deslocamentos. O mesmo foi feito com os momentos de flexão, sendo então aplicadas mais $2n_{no}$ restrições relativas aos valores limites de $M_{xx\ i}$ e $M_{yy\ i}$ em todos os nós da placa. Na outra formulação, restrições são aplicadas apenas sobre os valores máximos do deslocamento e dos momentos fletores. De uma formulação com $3n_{no} = 147$ restrições dinâmicas passou-se a outra que utiliza apenas 3 restrições dinâmicas. Isto foi possível também devido à utilização do método das diferenças finitas para o cálculo do gradiente do Lagrangiano aumentado. Caso o gradiente fosse obtido com o método das variáveis adjuntas ou com o método da diferenciação direta a formulação descrita por (6.2.1) à (6.2.5) não seria viável. Os valores finais obtidos com as duas formulações foram exatamente os mesmos.

Conclui-se que a segunda formulação representa uma simplificação extremamente significativa no número de restrições utilizadas no problema e consequentemente, um ganho de tempo computacional.

Capítulo 7

Otimização de uma placa em concreto armado

7.1 Formulação do problema

O objetivo é minimizar o custo de construção de uma placa em concreto armado semelhante àquela mostrada nas Figuras 6.1.1 e 6.1.2. Carregamento harmônico, devido a um motor de peso P_{motor} , é aplicado à placa. As variáveis de projeto adotadas para a solução do problema são $\mathbf{b}' = [b_1 \ b_2 \ b_3] \equiv [h \ A_{sx} \ A_{sy}]$, onde A_{sx} e A_{sy} são as áreas de aço perpendicular, respectivamente, aos eixos y e x . Estaticamente, são impostas restrições sobre os valores da espessura e das taxas de armadura. Nesses aspectos foram respeitados os dispositivos da NB1 (1978). Um valor limite para o deslocamento transversal e verificações do concreto armado são as restrições dinâmicas.

O problema de otimização é então formulado como minimizar a função custo:

$$f(\mathbf{b}) = C_c + C_s + C_f, \quad (7.1.1)$$

onde C_c , C_s e C_f são respectivamente os custos do concreto do aço e da forma. Baseado no vetor das variáveis de projeto, pode-se escrever:

$$C_c = A b_1 c_c, \quad (7.1.2)$$

$$C_s = 2(l_x b_2 + l_y b_3) \rho_s c_s \quad e \quad (7.1.3)$$

$$C_f = 4[(l_x + l_y) b_1 + l_x l_y] c_f. \quad (7.1.4)$$

Nestas expressões c_c é o custo por unidade de volume do concreto, ρ_s é a densidade do aço, c_s é o custo por unidade de massa do aço e c_f é o custo por unidade de área da forma.

Sujeito às restrições estáticas:

- a espessura mínima

$$- b_1 + h_l \leq 0 \quad (7.1.5)$$

- o valor mínimo de A_{sx}

$$- b_2 + 0,0015 b_1 \leq 0 \quad (7.1.6)$$

- o valor mínimo de A_{sy}

$$- b_3 + 0,0015 b_1 \leq 0 \quad (7.1.7)$$

- o valor máximo de A_{sx}

$$b_2 - 0,04 b_1 \leq 0 \quad (7.1.8)$$

- o valor máximo de A_{sy}

$$b_3 - 0,04 b_1 \leq 0. \quad (7.1.9)$$

Sujeito às restrições dinâmicas, $\forall t \in [0, T]$:

- o máximo deslocamento transversal

$$\max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{w_i\} - z_u \leq 0 \quad (7.1.10)$$

- altura útil mínima da laje

$$-(b_1 - c_p) + \beta_1 \sqrt{\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{ \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\}; \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} \}} \leq 0 \quad (7.1.11)$$

- verificação de A_{sx}

$$\gamma_f \mid \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} \mid -\beta_2 b_2 (b_1 - c_p) \leq 0 \quad (7.1.12)$$

- verificação de A_{sy}

$$\gamma_f \mid \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} \mid -\beta_2 b_3 (b_1 - c_p) \leq 0 \quad (7.1.13)$$

- verificação da torção – critério de ruína de Johansen

$$M_{xyi}^2 - (M_{px}^+ - M_{xi})(M_{py}^+ - M_{yi}) \leq 0, i = 1, \dots, n_{no} \quad (7.1.14)$$

$$M_{xyi}^2 - (M_{px}^- + M_{xi})(M_{py}^- + M_{yi}) \leq 0, i = 1, \dots, n_{no} \quad (7.1.15)$$

onde h_l é a espessura mínima da placa, c_p é o cobrimento mínimo das armaduras, β_i , $i = 1, 2$ são coeficientes do dimensionamento do concreto armado sob flexão simples e z_u é o máximo deslocamento permitido para a placa.

As equações (7.1.14) e (7.1.15) representam o critério de ruína de Johanson, enquanto que M_{px}^+ , M_{px}^- , M_{py}^+ e M_{py}^- são os momentos de plastificação (Mont'alverne et al, 1999).

O vetor força externa $\mathbf{p}(t)$ possui uma parcela estática, provida pelo peso próprio da placa e do motor instalado, e outra dinâmica, devida à excitação dinâmica do motor. As cargas estáticas serão simuladas como cargas dinâmicas aplicadas lentamente em um intervalo de tempo t_s relativamente grande. Desta forma, a parcela relativa ao peso próprio da placa $\mathbf{p}_{sp}$ é considerada igualmente distribuída sobre os nós:

$$p_{spi} = \begin{cases} (b_1 A \rho 9,81 / n_{no}) t, & t \in [0, t_s], i = 1, 4, 7, 10, \dots, 3n_{no} - 2 \\ b_1 A \rho 9,81 / n_{no}, & t \in (t_s, T], i = 1, 4, 7, 10, \dots, 3n_{no} - 2 \end{cases} \quad (7.1.16)$$

onde ρ é a densidade do concreto. A parcela estática provida pelo peso próprio do motor $\mathbf{p}_{sm}$ é considerada igualmente aplicada sobre os nós 17, 18, 19, 24, 25, 26, 31, 32 e 33 e é dada por:

$$p_{sMi} = \begin{cases} (P_{\text{motor}}/9)t, & t \in [0, t_s], i = 49,52,55,70,73,76,91,94,97 \\ P_{\text{motor}}/9, & t \in (t_s, T], i = 49,52,55,70,73,76,91,94,97 \end{cases} \quad (7.1.17)$$

A parcela de carga dinâmica devida à excitação harmônica do motor é também considerada aplicada sobre os nós 17, 18, 19, 24, 25, 26, 31, 32 e 33 e é dada por:

$$p_{dMi} = \begin{cases} 0, & t \in [0, t_s], i = 49,52,55,70,73,76,91,94,97 \\ p_0 \sin[\Omega(t - t_s)], & t \in (t_s, T], i = 49,52,55,70,73,76,91,94,97 \end{cases} \quad (7.1.18)$$

Finalmente, o vetor carga $\mathbf{p}(t)$ é escrito como:

$$\mathbf{p}(t) = \mathbf{p}_{sp}(t) + \mathbf{p}_{sM}(t) + \mathbf{p}_{dM}(t), t \in [0, T]. \quad (7.1.19)$$

As condições iniciais do problema são $\mathbf{z}(0) = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{z}}(0) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.

7.2 Dados numéricos

Este exemplo foi resolvido utilizando-se o método do Lagrangiano aumentado e o método das diferenças finitas para o cálculo do gradiente do Lagrangiano. Durante a resolução do problema, o valor mínimo adotado para a espessura é $h_l = 0,07 \text{ m}$. A área da placa é $A = 36 \text{ m}^2$. Para o dimensionamento em concreto armado, adotou-se $c_p = 2 \text{ cm}$, $f_{ck} = 18 \text{ MPa}$, $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$, aço CA-50, $\beta_1 = 0,0699$ e $\beta_2 = 39100$ (Sussekund, 1979). A densidade do concreto é $\rho = 2500 \text{ Kg/m}^3$ e do aço $\rho_s = 7850 \text{ Kg/m}^3$. O módulo de elasticidade da placa é $E = 20 \text{ GPa}$. O motor possui frequência $\Omega = 120\pi \text{ rad/s}$, peso P_{motor} (foram analisados diversos valores de peso, conforme será mostrado na próxima seção) e $p_0 = 0,1P_{\text{motor}}$. Para se obter a matriz de amortecimento de Rayleigh foi considerado uma taxa de amortecimento de 2% para o primeiro e o segundo modo de vibração. O intervalo considerado para aplicação dos esforços estáticos é $t_s = 1 \text{ s}$ e o instante tempo final é $T = 2 \text{ s}$. O intervalo de tempo foi discretizado com 200 divisões. O deslocamento máximo adotado foi $z_u = 2l_y/300 = 2 \text{ cm}$. Para computar a função custo foi considerado $c_c = \text{R\$ } 190,00 / \text{m}^3$, $c_s =$

R\$ 2,60 /Kg e $c_f = \text{R\$ } 50,00 /m^2$. Estes custos incluem o custo do material utilizado e sua aplicação.

7.3 Resultados numéricos

O problema foi resolvido utilizando-se quatro diferentes valores para o peso do motor P_{motor} , como mostrado na Tabela 7.3.1. Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 7.3.2 à 7.3.5.

Tabela 7.3.1 – Valores assumidos por P_{motor} e p_0 :

Exemplo	$P_{\text{motor}} (N)$	$p_0 (N)$
01	50000	5000
02	100000	10000
03	200000	20000
04	300000	30000

Tabela 7.3.2 – Resultados obtidos para o Exemplo 1:

k	Variáveis de Projeto			Custo R\$			
	$b_1 (m)$	$b_2 (m^2/m)$	$b_3 (m^2/m)$	Concreto	Aço	Forma	Total
0	0,0700	0,00011	0,00011	478,80	25,72	1884,00	2388,52
27	0,1714	0,00086	0,00080	1172,38	203,28	2005,68	3381,34

O custos do concreto, aço e forma foram separados com o objetivo de se verificar a influência de cada um no peso final e também sua sensibilidade em relação às variáveis de projeto. O máximo deslocamento obtido no Exemplo 1 foi 1,83 cm, enquanto que o máximo permitido é 2 cm. Os momentos de projeto máximo são $\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} = \gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} = 47914 \text{ Nm/m}$. A Figura 7.3.1 mostra a configuração da placa quando a mesma atinge o

deslocamento máximo no projeto ótimo. Nesta figura, o plano que representa a restrição aos deslocamentos é mostrado logo abaixo da placa.

Figura 7.3.1 – Configuração de deslocamento máximo na solução ótima no Exemplo 1

Tabela 7.3.3 – Resultados obtidos para o Exemplo 2:

k	Variáveis de Projeto			Custo R\$			
	b_1 (m)	b_2 (m ² /m)	b_3 (m ² /m)	Concreto	Aço	Forma	Total
0	0,1500	0,00023	0,00023	1026,00	55,11	1980,00	3061,11
23	0,2050	0,00099	0,00099	1402,52	241,98	2046,06	3690,56

O máximo deslocamento obtido no Exemplo 2 foi 1,63 *cm*, enquanto que o máximo permitido é 2 *cm*. Os momentos de projeto máximo são $\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} = \gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} = 71837 \text{ Nm/m}$.

O máximo deslocamento obtido no Exemplo 3 foi 1,39 *cm*, enquanto que o máximo permitido é 2 *cm*. Os momentos de projeto máximo são $\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} = \gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} = 114268 \text{ Nm/m}$.

Tabela 7.3.4 – Resultados obtidos para o Exemplo 3:

k	Variáveis de Projeto			Custo R\$			
	$b_1 (m)$	$b_2 (m^2/m)$	$B_3 (m^2/m)$	Concreto	Aço	Forma	Total
0	0,2500	0,00038	0,00038	1710,00	91,85	2100,00	3901,85
17	0,2544	0,00128	0,00125	1740,10	309,21	2105,28	4154,59

Tabela 7.3.5 – Resultados obtidos para o Exemplo 4:

k	Variáveis de Projeto			Custo R\$			
	$b_1 (m)$	$b_2 (m^2/m)$	$B_3 (m^2/m)$	Concreto	Aço	Forma	Total
0	0,2500	0,00038	0,00038	1710,00	91,85	2100,00	3901,85
32	0,2926	0,00151	0,00144	2001,38	361,62	2151,12	4514,13

O máximo deslocamento obtido no Exemplo 4 foi 1,24 *cm*, enquanto que o máximo permitido é 2 *cm*. Os momentos de projeto máximo são $\gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{xi}\} = \gamma_f \max_{1 \leq i \leq n_{no}} \{M_{yi}\} = 153728 \text{ Nm/m}$. A Figura 7.3.2 mostra a configuração da placa quando a mesma atinge o deslocamento máximo no projeto ótimo. Nesta figura, o plano que representa a restrição aos deslocamentos é mostrado logo abaixo da placa.

Figura 7.3.2 – Configuração de deslocamento máximo na solução ótima no Exemplo 4

Pode-se notar que em todos os exemplos resolvidos nesta seção que apenas os momentos fletores influenciaram o projeto final. Tal conclusão pode ser obtida observando-se que os deslocamentos máximos obtidos em todos os casos estão relativamente distante do

máximo permitido. Nestes exemplos, pode-se dizer que as restrições relativas aos momentos fletores são ε -ativas.

7.4 Comentários

No problema em questão prevalecem os esforços de flexão. Neste caso, o critério de ruína de Johanson trabalha eficientemente. Segundo (Velasco et al, 1995), nos casos onde os esforços de torção são significativos é necessário a correção desta superfície.

Capítulo 8

Otimização de uma sapata em concreto armado

8.1 Introdução

O objetivo deste Capítulo é formular um problema de otimização do projeto de uma sapata destinada ao suporte de uma máquina vibratória. A sapata é mostrada na Figura 8.1.1 e a discretização adotada na Figura 8.1.2. A sapata é retangular e encontra-se apoiada sobre o solo, considerado aqui como uma base de comportamento viscoelástico.

A função objetivo considerada é o custo de construção da sapata, incluindo o custo do concreto, do aço e da forma. O carregamento estático é o peso próprio do motor e também da sapata, enquanto que o carregamento dinâmico é devido às vibrações provocadas pelo funcionamento do motor. As verificações adotadas na solução deste problema estão baseadas em expressões para o cálculo do concreto armado, interação solo-estrutura e ainda outras

relacionadas com o conforto humano. Apresenta-se, ainda, análise de sensibilidade no resultado final.

Figura 8.1.1 – Sapata a ser otimizada

8.2 Formulação do problema

O problema consiste em minimizar o custo de construção de uma sapata semelhante àquela mostrada nas Figuras 8.1.1 e 8.1.2. Os lados da sapata são $2l_x$ e $2l_y$, enquanto que a espessura é h . A sapata é discretizada em $n_{no} = 80$ nós e $n_e = 126$ elementos, utilizando-se elementos triangulares com 9 graus de liberdade, conforme descrito no Capítulo 6. O sistema dinâmico descrito pelas equações do movimento possui 3 $n_{no} = 240$ graus de liberdade. A sapata é excitada com carregamento harmônico devido a um motor com peso P_{motor} e frequência Ω . As variáveis de projeto adotadas para o problema são $\mathbf{b}' = [b_1 \ b_2 \ b_3 \ b_4 \ b_5] \equiv [h$

$A_{sx} \ A_{sy} \ l_x \ l_y]$, onde A_{sx} e A_{sy} são as áreas de aço perpendicular, respectivamente, aos eixos y e x .

Figura 8.1.2 – Sapata discretizada

O problema de otimização é minimizar a função custo:

$$f(\mathbf{b}) = C_c + C_s + C_f, \quad (8.2.1)$$

onde C_c , C_s e C_f são respectivamente os custos do concreto, do aço e da forma. Pode-se escrever:

$$C_c = 4 \ b_1 b_4 b_5 c_c, \quad (8.2.2)$$

$$C_s = 2(b_2 b_4 + b_3 b_5) \rho_s c_s \text{ e} \quad (8.2.3)$$

$$C_f = 4[b_1(b_4 + b_5) + b_4 b_5] c_f. \quad (8.2.4)$$

Nessas expressões c_c é o custo por unidade de volume do concreto, ρ_s é a densidade do aço, c_s é o custo por unidade de massa do aço e c_f é o custo por unidade de área da forma.

Sujeito às restrições estáticas:

- a espessura mínima

$$-b_1 + h_l \leq 0 \quad (8.2.5)$$

- o valor mínimo de A_{sx}

$$-b_2 + 0,0015b_1 \leq 0 \quad (8.2.6)$$

- o valor mínimo de A_{sy}

$$-b_3 + 0,0015b_1 \leq 0 \quad (8.2.7)$$

- o valor máximo de A_{sx}

$$b_2 - 0,04b_1 \leq 0 \quad (8.2.8)$$

- o valor máximo de A_{sy}

$$b_3 - 0,04b_1 \leq 0. \quad (8.2.9)$$

- o valor mínimo de l_x

$$-b_4 + l_{x \min} \leq 0 \quad (8.2.10)$$

- o valor mínimo de l_y

$$-b_5 + l_{y \min} \leq 0 \quad (8.2.11)$$

- a principal frequência natural de vibração

$$0,5 \geq \frac{\Omega}{\omega_1} \geq 1,5 \quad (8.2.12)$$

- o máximo deslocamento estático

$$|w_{si}| - z_{su} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (8.2.13)$$

- o máximo deslocamento diferencial

$$|w_{si} - w_{sj}| - d_{su} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no}; j = i + 1, \dots, n_{no} \quad (8.2.14)$$

- a máxima tensão estática no solo

$$\eta |w_{si}| - \sigma_s / \gamma_{ss} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (8.2.15)$$

Sujeito às restrições dinâmicas, $\forall t \in [0, T]$:

- o máximo deslocamento transversal

$$|w_{di}| - z_{du} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (8.2.16)$$

- a máxima velocidade transversal

$$|\dot{w}_{di}| - v_u \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (8.2.17)$$

- a máxima aceleração transversal

$$|\ddot{w}_{di}| - a_u \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (8.2.18)$$

- a verificação da altura útil da sapata

$$-\left[(b_1 - c_p)/\beta_1\right]^2 + \gamma_f |M_{x\ i}^e| \leq 0; e = 1, \dots, n_e; i = 1, 2, 3 \quad (8.2.19)$$

- a verificação da altura útil da sapata

$$-\left[(b_1 - c_p)/\beta_1\right]^2 + \gamma_f |M_{y\ i}^e| \leq 0; e = 1, \dots, n_e; i = 1, 2, 3 \quad (8.2.20)$$

- a verificação da área de aço A_{sx}

$$\gamma_f |M_{x\ i}^e| - \beta_2 b_2 (b_1 - c_p) \leq 0; e = 1, \dots, n_e; i = 1, 2, 3 \quad (8.2.21)$$

- a verificação da área de aço A_{sy}

$$\gamma_f |M_{y\ i}^e| - \beta_2 b_3 (b_1 - c_p) \leq 0; e = 1, \dots, n_e; i = 1, 2, 3 \quad (8.2.22)$$

- a máxima tensão dinâmica no solo

$$\eta |w_{di}| - \sigma_s/\gamma_{ds} \leq 0; i = 1, \dots, m \quad (8.2.23)$$

- verificação da torção – superfície de ruína de Johansen

$$M_{xy\ i}^2 - (M_{px}^+ - M_{x\ i}^e)(M_{py}^+ - M_{y\ i}^e) \leq 0; e = 1, \dots, n_e; i = 1, 2, 3 \quad (8.2.24)$$

$$M_{xy\ i}^2 - (M_{px}^- + M_{x\ i}^e)(M_{py}^- + M_{y\ i}^e) \leq 0; e = 1, \dots, n_e; i = 1, 2, 3 \quad (8.2.25)$$

Os índices $(*)^e_i$ representam os campos $(*)$ no i -ésimo nó do e -ésimo elemento. Os valores máximo e mínimo da espessura e da armadura são dados pela NB-1 (1978). As dimensões do motor a ser instalado bem como o espaço necessário para a sua operação e manutenção definem os valores de $l_{x\ min}$ e $l_{y\ min}$. Dependendo da área disponível para a

construção da fundação, torna-se necessário restringir também os valores máximos de l_x e l_y . As restrições (8.2.12) estão relacionadas com as condições de ressonância do sistema fundação-máquina, enquanto que as (8.2.3) à (8.2.5) dependem dos requerimentos da máquina e do solo sob a sapata. O máximo deslocamento estático permitido é $z_{su} = \min(b_4; b_5)/10$ e o máximo deslocamento diferencial permitido é $d_{su} = \min(b_4; b_5)/100$. As restrições (8.2.16) à (8.2.18) contemplam a sensibilidade dos seres humanos e da estrutura em relação às vibrações. As equações (8.2.19) à (8.2.22) são necessárias para a verificação da equivalência entre os esforços internos e os externos, enquanto que (8.2.23) impõe um limite máximo para as tensões dinâmicas de compressão no solo.

As constantes γ_{ss} e γ_{ds} são os coeficientes de minoração da tensão de ruptura do solo σ_s (Das, 1990; Bowles, 1996). Para sapatas embutidas no solo, o coeficiente de reação vertical do solo η pode ser determinado através da expressão (Arya et al, 1979):

$$\eta = \frac{G_s}{1 - \nu_s} \frac{\beta_w \eta_w}{\sqrt{4l_x l_y}}, \quad (8.2.26)$$

onde

$$\beta_w = 0.07778 \frac{l_x}{l_y} + 2.07222, \quad (8.2.27)$$

$$\eta_w = 1 + \frac{0.6(1 - \nu_s)h}{\sqrt{\frac{4l_x l_y}{\pi}}} \quad (8.2.28)$$

e ν_s o coeficiente de Poisson e G_s o módulo de elasticidade transversal do solo. Arya et al (1979) também apresentaram as seguintes constantes elásticas relacionadas com os movimentos de corpo rígido de rotação em torno do eixo z , e de deslocamentos nas direções de x e y , respectivamente:

$$K_T = \frac{16G_s r_0^3}{3}, \quad (8.2.29)$$

$$K_X = 4(1 + \nu_s) G_s \beta_x \eta_{xy} \sqrt{l_x l_y} \quad \text{e} \quad (8.2.30)$$

$$K_Y = 4(1 + \nu_s) G_s \beta_y \eta_{xy} \sqrt{l_x l_y} \quad , \quad (8.2.31)$$

onde

$$r_0 = 2 \sqrt[4]{\frac{l_x l_y (l_x^2 + l_y^2)}{6\pi}} \quad (8.2.32)$$

é o raio equivalente da sapata, e

$$\beta_x = 0.02105 \frac{l_x}{l_y} + 0.98947 \quad , \quad (8.2.33)$$

$$\beta_y = 0.02105 \frac{l_y}{l_x} + 0.98947 \quad \text{e} \quad (8.2.34)$$

$$\eta_{xy} = 1 + \frac{0.55(2 - \nu_s)h}{\sqrt{\frac{4l_x l_y}{\pi}}} \quad (8.2.35)$$

são coeficientes não dimensionais relacionados com as dimensões da sapata e o coeficiente de Poisson do solo. As constantes relacionadas com a massa da estrutura nas direções de x e y , e a rotação em torno do eixo z são, respectivamente:

$$m_X = m_Y = 4 \rho h l_x l_y \quad \text{e} \quad (8.2.36)$$

$$m_T = \frac{4}{3} \rho h l_x l_y (l_x^2 + l_y^2) \quad . \quad (8.2.37)$$

A contribuição da elasticidade do solo para a matriz de rigidez de um determinado elemento é considerada como (Silva et al, 1999):

$$\mathbf{K}^e = \eta \iint_{\Omega_e} \mathbf{N}^e \mathbf{N}^{e^t} dx dy \quad , \quad (8.2.38)$$

onde $\mathbf{N}^e$ é do vetor das funções de forma do elemento e Ω_e é o domínio do elemento (Shigueme, 1995).

O vetor carga $\mathbf{p}(t)$ possui uma parte estática, devida ao peso próprio da sapata $\mathbf{p}_{sgp}$, igualmente distribuída sobre os m nós,

$$p_{sgp\,i} = 4b_1b_4b_59,81\rho/n_{no}, \quad i=1,4,8,10,\dots,3m+1, \quad (8.2.39)$$

e uma outra provida pelo peso do motor e equipamentos instalados $\mathbf{p}_{sg\,M}$, aplicadas sobre os nós 11, 14, 35, 38, 68 e 80,

$$p_{sgM\,i} = P_{motor} / 6, \quad i = 31,40,103,112,199,208. \quad (8.2.40)$$

Assim, o vetor carga estática pode ser escrito como:

$$\mathbf{p}_s = \mathbf{p}_{sgp} + \mathbf{p}_{sgM}. \quad (8.2.41)$$

O motor em funcionamento produz os esforços dinâmicos, como descrito abaixo:

$$p_{dM\,i} = p_0 \sin \Omega t, \quad t \in [0, T], \quad i = 31,40,103,112,199,208. \quad (8.2.42)$$

O vetor de carregamento dinâmico pode então ser escrito como:

$$\mathbf{p}_d(t) = \mathbf{p}_{dM}(t), \quad t \in [0, T]. \quad (8.2.43)$$

Finalmente o vetor carga externa é $\mathbf{p} = \mathbf{p}_s + \mathbf{p}_d$. As condições iniciais são $\mathbf{z}_d(0) = \mathbf{0}$ e $\dot{\mathbf{z}}_d(0) = \mathbf{0}$, onde $\mathbf{0}$ é o vetor nulo.

8.3 Dados numéricos

A espessura mínima é $h_l = 0,50 \text{ m}$. Os valores mínimos para os semi-lados da placa são $l_{x\,min} = 3,0 \text{ m}$ e $l_{y\,min} = 4,0 \text{ m}$. Para o dimensionamento em concreto armado, foi adotado um cobrimento $c_p = 3 \text{ cm}$, e também $f_{ck} = 18 \text{ MPa}$, $\gamma_c = 1,4$, $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_s = 1,15$, aço CA-50, $\beta_1 = 0,0699$ e $\beta_2 = 39100$ (Sussekund, 1989). A armadura possui densidade $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$. O concreto apresenta densidade $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$ e módulo de elasticidade $E = 20 \text{ GPa}$. O motor tem frequência $\Omega = 727,7 \text{ rad/s}$, $P_{motor} = 1066500 \text{ N}$ e $p_0 = 35956 \text{ N}$. São considerados ainda os fatores $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_{ss} = 2$ e $\gamma_{ds} = 4/3$. Para obter o amortecimento de Rayleigh foi considerado

uma taxa de amortecimento de 15% para o primeiro modo de vibração e de 20% para o quarto modo. O tempo de análise é $T = 0,0863 \text{ s}$, discretizado em 120 segmentos. Os parâmetros do solo são $G_s = 44833839,8 \text{ Pa}$, $\nu_s = 0,45$ e $\sigma_s = 0,1 \text{ MPa}$. Para computar a função custo foi considerado $c_c = \text{R\$ } 190,00 / \text{m}^3$, $c_s = \text{R\$ } 2,60 / \text{Kg}$ e $c_f = \text{R\$ } 50,00 / \text{m}^2$. Estes custos incluem o custo do material utilizado e também sua aplicação.

8.4 Análise da influência do nível de conforto no projeto final

8.4.1 Introdução

O objetivo desta seção é investigar a influência do nível de conforto em relação às vibrações no projeto final. Para tal análise, o problema descrito pelas equações (8.2.1) à (8.2.25) foi resolvido de duas maneiras diferentes: no Exemplo 1, considerando apenas exigências da máquina e estrutura; no Exemplo 2, considerando a presença de pessoas trabalhando perto da fundação. Para o cálculo do gradiente do Lagrangiano aumentado foi utilizado o método das diferenças finitas com perturbação central.

Tabela 8.4.1 – Valores assumidos por z_{du} , v_u e a_u :

Exemplo	$z_{du} \text{ (mm)}$	$v_u \text{ (m/s)}$	$a_u \text{ (m/s}^2\text{)}$
01	0,006	0,01280	3,92
02	0,003	0,00254	1,08

8.4.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos para os dois exemplos são mostrados nas Tabelas 8.4.2 e 8.4.3. Observe que as restrições sobre o deslocamento, a velocidade e a aceleração são ε -ativos, visto que suas variações influenciam no projeto final.

O tempo computacional para a obtenção do projeto ótimo no Exemplo 1 foi de 2834 s, enquanto que no Exemplo 2 foi de 6950 s. O valor da função objetivo mostrado na Tabela 8.4.3 (praticamente o dobro do valor da Tabela 8.4.2) indica que o nível de conforto adotado num projeto de fundação de máquina influencia sobremaneira o projeto final. O nível de conforto dos operadores e das pessoas que fazem manutenção no projeto ótimo do Exemplo 2 é bem superior que aquele do Exemplo 1. O nível de conforto proporcionado pelo projeto do Exemplo 1 não causa nos seres humanos danos físicos nem psicológicos (Arya et al, 1978).

Tabela 8.4.2 - Resultados obtidos para o Exemplo 1:

Projeto	Iteração	B_1 (cm)	b_2 (cm ²)	b_3 (cm ²)	b_4 (dm)	b_5 (dm)	$f(\mathbf{b})$ (R\$)
Inicial	0	85,00	11,25	11,25	30,00	40,00	10611,46
Final	12	88,84	12,08	11,82	30,10	42,21	11526,35

Tabela 8.4.3 - Resultados obtidos para o Exemplo 2:

Projeto	Iteração	B_1 (cm)	b_2 (cm ²)	b_3 (cm ²)	b_4 (dm)	b_5 (dm)	$f(\mathbf{b})$ (R\$)
Inicial	0	85,00	11,25	11,25	30,00	40,00	10611,46
Final	14	109,02	16,46	16,94	38,61	51,12	22882,33

8.4.3 Comentários

Outra abordagem para análise dos problemas de conforto humano pode ser encontrada no trabalho de Fusco e Almeida (1998). Neste trabalho, uma análise das vibrações no Estádio

do Morumbi foi realizada e o conforto humano verificado. A norma ISO 2631-1 apresenta diversos ábacos e limites de deslocamento, velocidade e aceleração para os problemas de vibrações envolvendo o conforto humano, e ainda a tolerância ao valor máximo da aceleração devido ao tempo de exposição. O trabalho de Almeida Neto (1989), além de contemplar com muita propriedade a análise de fundações de máquinas, apresenta os limites de vibração a partir dos quais podem ocorrer danos à saúde humana e à segurança de uma dada estrutura. Goldenberg et al (1998b, 1998c) analisaram dois problemas de otimização, um de uma placa metálica e outro de uma coluna em concreto armado, onde o custo da estrutura é minimizado, levando-se em consideração o conforto humano.

8.5 Influência da análise de sensibilidade no projeto final

8.5.1 Introdução

O problema de otimização descrito por (8.2.1) à (8.2.26) é agora resolvido utilizando-se o método das variáveis adjuntas para o cálculo do gradiente do Lagrangiano aumentado. Isto é feito para o nível de conforto descrito no Exemplo 1 da seção 8.4. Ou seja, apenas exigências da máquina e estrutura serão levadas em consideração.

Na implementação do método das variáveis adjuntas foi adotado um processo semi-analítico, visto que o cálculo de $\partial\Phi^a / \partial\mathbf{b}$ foi realizado utilizando-se o método das diferenças finitas com perturbação central.

8.5.2 Resultados obtidos

Os resultados obtidos para o problema em questão são mostrados na Tabela 8.5.1. Observe que os valores desta tabela são extremamente próximos daqueles mostrados na Tabela 8.4.2, visto que o valor final da função objetivo nesta tabela difere em apenas 0.06% dos mostrados naquela. O tempo computacional necessário para a obtenção dos resultados utilizando-se o método das variáveis adjuntas é de 2439 s, aproximadamente 15% inferior ao tempo computacional apresentado utilizando-se o método das diferenças finitas.

Para verificar a precisão e ao mesmo tempo a diferença entre a solução dada pelos dois métodos, elaborou-se a Tabela 8.5.2 onde são mostrados os valores obtidos pelo método das variáveis adjuntas e pelo método das diferenças finitas com perturbação central. Os cálculos foram efetuados para os parâmetros de conforto do Exemplo 1 descrito na seção 8.4 à partir dos seguintes valores das variáveis de projeto: $\mathbf{b}^t = [91 \ 13,65 \ 13,65 \ 36,6 \ 45,81]$. Observa-se dos valores mostrados que os resultados são extremamente próximos durante todos os passos analisados. Os passos descritos na Tabela 8.5.2 representam as iterações do problema de otimização sem restrições, passo 2 do Algoritmo I (Lagrangiano aumentado). Observa-se também que o módulo do vetor gradiente diminui passo a passo, assim como esperado num processo de otimização sem restrições.

Tabela 8.5.1 - Resultados obtidos utilizando-se o método das variáveis adjuntas:

Projeto	Iteração	b_1 (cm)	b_2 (cm ²)	b_3 (cm ²)	b_4 (dm)	b_5 (dm)	$f(\mathbf{b})$ (R\$)
Inicial	0	85,00	11,25	11,25	30,00	40,00	10611,46
Final	10	88,88	12,08	11,82	30,09	42,24	11533,59

Tabela 8.5.2 - Comparação dos vetores gradiente obtidos com o método das variáveis adjuntas e o método das diferenças finitas:

Passo (i)	Método	$\nabla f(\mathbf{b}_i)_1$	$\nabla f(\mathbf{b}_i)_2$	$\nabla f(\mathbf{b}_i)_3$	$\nabla f(\mathbf{b}_i)_4$	$\nabla f(\mathbf{b}_i)_5$
1	Dif. Finitas	-4295,58	14,94	18,65	-6992,86	-5821,98
	Adjuntas	-4294,23	14,94	18,66	-6993,50	-5818,41
2	Dif. Finitas	-2892,55	-928,45	-929,11	-4001,11	-3238,04
	Adjuntas	-2891,09	-928,06	-928,83	-4003,51	-3238,14
3	Dif. Finitas	-1085,63	-689,92	-683,35	-1208,00	-862,12
	Adjuntas	-1085,68	-689,82	-683,25	-1208,28	-863,88
4	Dif. Finitas	-34,82	18,82	20,90	281,18	289,52
	Adjuntas	-35,13	18,82	20,90	280,89	289,15

8.5.3 Comentários

A adoção do método das variáveis adjuntas para o cálculo do vetor gradiente, no presente exemplo, proporciona resultados com a mesma precisão daqueles fornecidos pelo método das diferenças finitas, porém com um ganho de tempo computacional da ordem de 15%. Tal resultado já havia sido levantado na seção 4.2.5 onde foi comentado o número de operações aritméticas necessárias para a evolução do vetor gradiente utilizando-se diferentes métodos.

Capítulo 9

Um critério de ruína para elementos em concreto armado submetidos a flexão obliqua composta

9.1 Introdução

A necessidade de procedimentos automáticos para a obtenção de estruturas em concreto armado cada vez mais leves e econômicas tem dado grande motivação ao desenvolvimento de métodos computacionais de otimização. Uma dificuldade inerente ao concreto armado é que suas características de resistência dependem da disposição e quantidade de armaduras e do valor da deformação em cada ponto das infinitas seções

transversais de uma estrutura. Essa circunstância dificulta sobremaneira a definição das restrições a serem impostas no processo de otimização, especialmente em problemas de otimização dinâmica.

No presente trabalho de pesquisa, foi desenvolvido um critério de ruína para vigas e colunas sujeitas a flexão oblíqua composta. Esse critério baseia-se em uma aproximação da superfície de ruptura “real”, que seria obtida utilizando as disposições de Norma, por uma superfície empírica, função de oito parâmetros. Quatro deles são as resistências em alguns pontos específicos na superfície e quatro são coeficientes exponenciais da equação da superfície. A função objetivo é o erro com que a superfície “real” de ruptura é aproximada pela superfície empírica, enquanto que as variáveis de projeto são os coeficientes exponenciais. A meta é determinar os coeficientes de para que o erro global de aproximação seja mínimo. Isso pode ser feito de forma tal que os erros locais de aproximação sejam conservativos ou não. Por outro lado, essa superfície pode ser criada impondo que a aproximação nunca seja contra a segurança, restringindo-se os erros locais. Vários exemplos práticos são apresentados e resolvidos. Diferentes funções objetivo e métodos numéricos são adotados visando determinar qual a maneira mais eficiente para a solução deste tipo de problema.

9.2 Apresentação do problema

Considere a seção transversal retangular de uma barra em concreto armado mostrada na Figura 9.2.1a submetida aos seguintes esforços internos: a força axial (ou normal) N , e os momentos de flexão M_a e M_b , na direção dos eixos principais aa e bb da seção, que compõem um ponto (N, M_a, M_b) num espaço tridimensional. Considera-se $N > 0$ na tração e $N < 0$ na compressão. A resultante dos momentos é M , $\xi = \arctan(M_b/M_a)$ é o ângulo entre as direções

de M e o eixo aa , e ϕ o ângulo entre a linha neutra e o eixo aa . A linha neutra é designada por LN e y_{LN} é a distância entre a linha neutra e o centro de gravidade da seção transversal. A Figura 9.2.1b mostra a hipótese cinemática adotada para as deformações normais das fibras longitudinais do elemento. A distância de uma determinada fibra longitudinal à linha neutra é designada por y e a deformação à qual ela está submetida é $\varepsilon(y)$. As grandezas ε_{s1} , ε_{s2} e ε_c representam, respectivamente, as deformações em um ponto genérico da armadura superior A_{s1} , da armadura inferior A_{s2} , e do concreto. A Figura 9.2.1c apresenta as relações tensão-deformação para as armaduras superior e inferior, e também para o concreto comprimido.

Em geral, a máxima resistência à flexão oblíqua composta de um elemento estrutural resulta de hipóteses nas quais as deformações no aço e/ou no concreto assumem os valores máximos permitidos. A máxima deformação permitida para o aço $\varepsilon_s^{\max}$ e o máximo encurtamento permitido para o concreto é $\varepsilon_c^{\max}$. As tensões normais correspondentes às deformações ε_{s1} , ε_{s2} e ε_c são, respectivamente, σ_{s1} , σ_{s2} e σ_c , e as resultantes da integral destas tensões no domínio da seção são, respectivamente, R_{s1} , R_{s2} e R_c . Pode-se escrever:

$$R_{s1} = \int_{\Omega_{s1}} \sigma_{s1}(\varepsilon) d\Omega, \quad (9.2.1)$$

$$R_{s2} = \int_{\Omega_{s2}} \sigma_{s2}(\varepsilon) d\Omega \text{ e} \quad (9.2.2)$$

$$R_c = \int_{\Omega_c} \sigma_c(\varepsilon) d\Omega, \quad (9.2.3)$$

onde Ω_{s1} , Ω_{s2} , Ω_c são respectivamente os domínios da armadura superior, da armadura inferior e da parte comprimida da seção transversal.

Fazendo o equilíbrio de forças axiais, obtém-se:

$$R_{s1} + R_{s2} + R_c + N = 0 \quad (9.2.4)$$

As integrais das tensões no aço podem ser facilmente obtidas utilizando procedimentos descritos em Fusco (1981). Já as integrais das tensões no concreto podem ser feitas analítica ou numericamente. Os processos mais conhecidos para resolver esse problema são o processo das malhas e o processo da poligonal (Santos, 1994).

Figura 9.2.1 – Típica seção transversal de um elemento linear em concreto armado submetido à flexão oblíqua composta

As restrições dinâmicas, baseadas no método dos estados limites, relacionadas com a verificação da resistência à flexão oblíqua composta de barras num problema de dinâmica estrutural podem ser expressas por:

$$M_d(\mathbf{b}, t) - M_u(\mathbf{b}, \xi, \phi, N(t)) \leq 0 \quad \forall t \in [0, T] \quad (9.2.5a)$$

$$N_{uc} \leq N_d(\mathbf{b}, t) \leq N_{ut} \quad \forall t \in [0, T] \quad (9.2.5b)$$

onde $M_d = \gamma_f M$ e $N_d = \gamma_f N$ são, respectivamente, o momento de flexão resultante de projeto e a força axial de projeto, fornecidos pela análise estrutural. Estes esforços são funções da geometria da estrutura, das propriedades dos materiais que compõem a estrutura, do carregamento externo e do tempo. O fator γ_f é o coeficiente de majoração dos esforços característicos. O momento M_u é o momento resistente último da seção transversal em relação ao eixo que passa pelo centro de gravidade da seção e faz um ângulo ξ com a direção de M_a .

Finalmente, N_{ut} e N_{uc} são, respectivamente, de força de tração e de compressão resistentes últimas da seção. Enquanto que o cálculo de N_{ut} e N_{uc} é trivial, o mesmo geralmente não é verdade para M_u que depende das variáveis de projeto b , da força axial N e dos ângulos ξ e ϕ .

O primeiro problema a ser resolvido para se obter M_u é a determinação simultânea da distância da linha neutra ao centro de gravidade da seção transversal y_{LN} que satisfaça (9.2.4) e da inclinação ϕ que resulte em M_u paralelo à M_d . O procedimento tradicional para a determinação de y_{LN} e ϕ é através da utilização de iterações do tipo Newton-Raphson (Atkinson, 1993). Uma vez encontrada a linha neutra, determina-se M_u calculando-se o momento resultante das tensões internas no aço e no concreto.

O cálculo de M_u através do processo de integração de tensões torna a adoção da restrição (9.2.5a) extremamente cara do ponto de vista de tempo computacional. A sugestão dada neste trabalho para superar este problema é a adoção de um critério de ruína. Métodos de otimização são utilizados para a determinação de alguns parâmetros envolvidos no critério de ruína.

9.3 Critérios de ruína existentes

9.3.1 Introdução

Critérios de ruptura (ou de ruína) são tipicamente caracterizados por uma superfície limite, a qual divide o espaço de esforços em dois sub-espacos: um onde o conjunto de forças e momentos não provocam ruptura da seção e o espaço restante que leva à ruptura. Uma representação geral para a superfície de ruptura dos elementos em concreto armado em questão é expressa matematicamente por:

$$F(N, M_a, M_b) = 0. \quad (9.3.1)$$

O conjunto de força normal e de momentos de flexão que não levam a estrutura a um estado limite último satisfaz o critério:

$$F(N, M_a, M_b) \leq 0, \quad (9.3.2)$$

enquanto que todas as outras combinações de esforços excedem a capacidade estrutural.

9.3.2 Os Métodos de Bresler

Existem dois métodos, desenvolvidos por Bresler (1969), para seções submetidas à flexão oblíqua composta: o método da carga recíproca e método da carga de contorno.

Para a formulação do método da carga recíproca, Bresler observou que a superfície de ruptura “real” pode ser plotada em termos de $1/N$ e das excentricidades $e_a = M_a/N$ e $e_b = M_b/N$. Esta superfície é, então, aproximada através de planos definidos para cada combinação de e_a e e_b . Observe-se que para cada ponto (N, M_a, M_b) um plano é definido. A idéia por trás deste método é que a ordenada exata $(1/N)_{\text{exata}}$ será sempre estimada a favor da segurança pela ordenada $(1/N)_{\text{aprox}}$ obtida considerando o plano de Bresler. Em outras palavras, $(1/N)_{\text{aprox}}$ é sempre maior do que $(1/N)_{\text{exata}}$, o que significa que N_{aprox} é sempre menor que N_{exata} . A equação para o método da carga recíproca é deduzida à partir da geometria do plano de aproximação e pode ser escrita como:

$$-\frac{1}{N_{\text{aprox}}} + \frac{1}{N_{ua}} + \frac{1}{N_{ub}} - \frac{1}{N_{uc}} = 0 \quad (9.3.3)$$

onde N_{aprox} é a aproximação do valor limite da força axial para excentricidades e_a e e_b , N_{ua} é o valor máximo de N quando somente a excentricidade e_a está presente (i.e., $e_b = 0$), N_{ub} é o valor máximo de N quando somente a excentricidade e_b está presente (i.e., $e_a = 0$) e N_{uc} foi definido na seção 9.2.2. Este método encontra-se também descrito nos trabalhos subsequentes de Nilson e Winter (1986).

O método da carga de contorno é baseado na representação da superfície de ruptura por uma família de curvas, onde uma curva é criada para cada valor de N . A forma geral das curvas é representada por uma equação adimensional de interação escrita como:

$$\left(\frac{M_a}{M_{uaN}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{ubN}} \right)^{\alpha_2} - 1 = 0, \quad (9.3.4)$$

onde M_a e M_b são os momentos de flexão; α_1 and α_2 são coeficientes exponenciais. Eles dependem das dimensões da seção transversal, da quantidade e distribuição da armadura longitudinal, das relações tensão-deformação tanto do concreto quanto do aço, do cobrimento da armadura e o diâmetro dos estribos. M_{uaN} é o máximo valor que pode ser assumido por M_a quando $M_b = 0$, para um dado valor de N ; M_{ubN} é o máximo valor que pode ser assumido por M_b quando $M_a = 0$, para um dado valor de N . Cálculos efetuados por Bresler (1960), considerando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$ indicam que os valores de α variam entre 1,15 e 1,55 para seções retangulares.

Figura 9.3.1 – Contornos de interação para diferentes valores de $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$

9.3.3 Superfícies piramidais

MacGregor (1992) apresentou uma superfície de ruptura piramidal. Esta superfície é um caso particular do método da carga de contorno, considerando os coeficientes exponenciais igual à 1.

Ferguson et al (1988) e MacGregor (1992) propuseram a seguinte superfície de ruína:

$$\left(\frac{M_a}{M_{uaN}}\right) + \left(\frac{M_b}{M_{ubN}}\right) \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) - 1 = 0 \quad \text{se} \quad \frac{M_a}{M_{uaN}} > \frac{M_b}{M_{ubN}} \quad \text{ou} \quad (9.3.5a)$$

$$\left(\frac{M_a}{M_{uaN}}\right) \left(\frac{1-\beta}{\beta}\right) + \left(\frac{M_b}{M_{ubN}}\right) - 1 = 0 \quad \text{se} \quad \frac{M_a}{M_{uaN}} \leq \frac{M_b}{M_{ubN}}. \quad (9.3.5b)$$

O valor de $\beta \in (0, 1)$ depende das dimensões da seção transversal, quantidade e distribuição da armadura e das relações tensão-deformação para o aço e o concreto.

9.3.4 O Método da Carga de Contorno Generalizado

Dos métodos descritos anteriormente, o que se consagrou como o mais eficiente e se tornou o mais utilizado é o método da carga de contorno. Assim, pesquisadores trabalharam no sentido de generalizar este método. Hsu (1988) propôs a seguinte equação para a superfície de ruína:

$$\left(\frac{M_a}{M_{ba}}\right)^{1,5} + \left(\frac{M_b}{M_{bb}}\right)^{1,5} + \left(\frac{N - N_b}{N_{br}}\right) - 1 = 0 \quad (9.3.6)$$

onde

- N_b é o valor de força axial para a qual o momento resistente M_u é máximo;
- N_{br} é igual à $N_{ut} - N_b$ se $N > N_b$, ou $N_b - N_{uc}$ se $N \leq N_b$;
- M_{ba} é o valor do máximo possível para M_a quando $M_b = 0$ e $N = N_b$;
- M_{bb} é o valor do máximo possível para M_b quando $M_a = 0$ e $N = N_b$;

Continuando os estudos sobre a generalização do método da carga de contorno, Muñoz e Hsu (1997) propuseram a equação:

$$\left[\left(\frac{M_a}{M_{nb}} \gamma_1 \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{nb}} \gamma_2 \right)^{\alpha_1} \right]^{1/\alpha_1} + \left(\frac{N - N_b}{N_{br}} \right)^{\alpha_2} - 1 = 0 \quad (9.3.7)$$

onde γ_1 e γ_2 são coeficientes que dependem da força axial, M_{nb} depende apenas das propriedades da seção transversal, e α_1 e α_2 que são os coeficientes exponenciais.

9.4 Um critério de ruína e um procedimento viável para a sua implementação

9.4.1 A superfície de ruína proposta

Considere-se $N_c = 1/2 (N_{ut} + N_{uc})$ e $N_r = 1/2 (N_{ut} - N_{uc})$; M_{ua} como o valor máximo que pode ser assumido por M_a quando $M_b = 0$ e $N = N_c$; M_{ub} o valor máximo que pode ser assumido por M_b quando $M_a = 0$ e $N = N_c$. Supõe-se que a superfície de ruptura de um elemento em concreto armado (Figura 9.2.1a) submetido à flexão oblíqua composta pode ser aproximada como:

$$G(N, M_a, M_b, \alpha) - 1 = 0, \quad (9.4.1a)$$

onde

$$G = \left(\frac{M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{N - N_c}{N_r} \right)^{\alpha_3} \text{ se } N > N_c; \quad (9.4.1b)$$

$$G = \left(\frac{M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{|N - N_c|}{N_r} \right)^{\alpha_4} \text{ se } N \leq N_c; \quad (9.4.1c)$$

onde α_i , $i = 1, \dots, 4$ são os coeficientes exponenciais, dependentes das dimensões da seção transversal, da quantidade e distribuição da armadura longitudinal, das relações tensão-deformação tanto do concreto quanto do aço, do cobrimento da armadura e o diâmetro dos estribos. O critério de ruína, considerando os esforços de projeto, é escrito como:

$$\left(\frac{\gamma_f M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{\gamma_f M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{N - N_c}{N_r} \right)^{(\alpha_3 \text{ ou } \alpha_4)} - 1 \leq 0. \quad (9.4.2)$$

Uma vez que os valores de N , M_a e M_b são fornecidos pela análise estrutural e os valores de M_{ua} , M_{ub} , N_{ut} e N_{uc} são facilmente calculáveis, as incógnitas do problema são os valores de α_i , $i = 1, \dots, 4$. Se estes puderem ser obtidos com uma certa facilidade, a verificação da resistência à flexão oblíqua composta de barras de concreto armado torna-se muito mais simples.

As equações (9.4.1) representam uma das variações do método da carga de contorno generalizado, porém com algumas características até então inexploradas, tais como o número de quatro coeficientes exponenciais.

9.4.2 Determinação dos coeficientes exponenciais

Calcule-se m pontos $\{P_i \equiv (N_i, M_{uai}, M_{ubi}), i = 1, 2, \dots, m\}$ sobre a superfície de ruptura “real”. Em geral, para uma dada força normal N_i e um ângulo $\xi_i = \arctan(M_{ubi}/M_{uai})$, o momento resistente de um elemento estrutural em concreto armado M_{ui} pode ser computado e decomposto em $M_{uai} = M_{ui} \cos \xi_i$ e $M_{ubi} = M_{ui} \sin \xi_i$. Considerando-se os pontos $P = [P_1 \ P_2 \ P_3 \ \dots \ P_m]^t$, uma função de erro global de aproximação em função de $\alpha = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ \alpha_4]^t$ pode ser escrita como:

$$E_1(P, \alpha) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} [G(P_i, \alpha) - 1]^2. \quad (9.4.3)$$

O erro local linear de aproximação da superfície “real” pela superfície empírica é

$$E^i(\mathbf{P}_i, \alpha) = \frac{M_{ei} - M_{ui}}{M_{ui}}, \quad (9.4.4)$$

onde M_{ei} é o momento de aproximação, ou seja, um ponto sobre a superfície empírica para uma dada força axial N_i e um ângulo ξ_i . Assim, M_{ei} precisa satisfazer a equação:

$$\left(\frac{M_{ei} \cos \xi_i}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_{ei} \sin \xi_i}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{|N_i - N_c|}{N_r} \right)^{\alpha_3, \alpha_4} - 1 = 0. \quad (9.4.5)$$

Em (9.4.5) os coeficientes exponenciais do terceiro termo do primeiro membro podem ser α_3 ou α_4 , de acordo com (9.4.1b) e (9.4.1c). Para resolver a equação (9.4.5) é necessário dispor de métodos numéricos tais como o método de Newton (Atkinson, 1993). Uma vez que os valores de M_{ei} e M_{ui} são obtidos, pode-se calcular (9.4.4). Se este resultado for positivo, então a aproximação é não conservativa (i.e., contra a segurança); se o resultado for negativo, então a solução é conservativa; se o resultado for nulo, significa que a aproximação é exata. Baseado na expressão (9.4.4), pode-se definir outra função erro global de aproximação como:

$$E_2(\mathbf{P}, \alpha) = \sum_{i=1}^m \frac{1}{2} E^i(\mathbf{P}_i, \alpha)^2. \quad (9.4.6)$$

Observe que a computação de (9.4.3) inclui o erro numérico do cálculo de M_{ui} , enquanto que a computação de (9.4.6) inclui o erro numérico do cálculo de M_{ui} e M_{ei} .

Minimizar a função erro global (9.4.3) ou (9.4.6) é o mesmo que utilizar o método dos mínimos quadrados para resolver o problema de aproximação. Neste caso, a adoção de métodos de otimização sem restrições seria suficiente para a determinação dos valores ótimos dos coeficientes exponenciais. Mas, utilizando esta técnica, o projetista não tem nenhum controle sobre os valores assumidos pelo erro local em (9.4.4). Para se obter um controle sobre os erros locais é necessário a adoção de métodos de otimização com restrições, onde o seriam impostos limites para os valores assumidos por (9.4.4).

Considere-se o vetor $\mathbf{c} = [c_i]$, onde $c_i = \alpha_i$, $i = 1, \dots, 4$, e a função objetivo $f(\mathbf{c})$ tal que $f(\mathbf{c}) = E_j(\mathbf{P}, \mathbf{c})$, onde $j = 1$ ou 2 .

Pode-se definir um problema de otimização sem restrições como minimizar a função objetivo (erro global de aproximação):

$$\text{minimize } f(\mathbf{c}), \mathbf{c} \in \mathbb{R}^4. \quad (9.4.7)$$

Os métodos de otimização sem restrição utilizados para a solução de (9.4.7) são baseadas em uma direção de busca e em um algoritmo de busca unidimensional (Gill et al, 1981). Para computar a direção de busca foram utilizados três diferentes métodos: o método da reta de máximo declive (Luenberger, 1984); o método Gauss-Newton (Gill et al, 1981); e o método dos gradientes conjugados (Arora, 1989). Na busca unidimensional foi utilizado o método de Armijo, como descrito por Fletcher (1985).

Pode-se definir um problema de otimização com restrições como minimizar a função objetivo (erro global de aproximação):

$$\text{minimize } f(\mathbf{c}), \mathbf{c} \in \mathbb{R}^4 \quad (9.4.8)$$

sujeito à

$$g_i = E^i(\mathbf{P}_i, \alpha) - \varepsilon_{\max} \leq 0, \quad i=1, \dots, m. \quad (9.4.9)$$

onde $\varepsilon_{\max}$ é o máximo erro de aproximação permitido.

Para a solução do problema descrito por (9.4.8) e (9.4.9) foi adotado o método do Lagrangiano aumentado (Chahande e Arora, 1994). Para computar a direção de busca foram

utilizados dois diferentes métodos: o método da reta de máximo declive (Luenberger, 1984); e o método dos gradientes conjugados (Arora, 1989). Na busca unidimensional foi utilizado o método de Armijo, como descrito por Fletcher (1985).

Caso, no problema definido por (9.4.8) e (9.4.9), $\varepsilon_{\max}$ seja nulo, a superfície empírica obtida nunca estará contra a segurança. No caso $\varepsilon_{\max} = 0,1$, em alguns pontos poder-se-á obter um erro de 10% contra a segurança. Uma outra consideração é que se $\varepsilon_{\max}$ assume um valor relativamente alto, a solução do problema de otimização com restrições torna-se a mesma do problema sem restrições. A formulação dada por (9.4.7) não permite um controle sobre o erro máximo, enquanto que o problema definido por (9.4.8) e (9.4.9) deixa para o projetista a decisão de escolher com qual erro máximo ele pretende trabalhar.

9.5 Comentários sobre os critérios de ruína apresentados

A desvantagens dos métodos apresentados com base nas Equações (9.3.1) à (9.3.5) é que, para efeitos práticos, eles recaem no problema de tempo computacional da Equação (9.2.5a), visto que para o cálculo de N_{ua} e N_{ub} ou M_{uaN} e M_{ubN} é necessário realizar a integração de tensões, o equilíbrio de forças normais, calcular o momento resultante, etc., para todos os valores de N (i.e. para várias seções de todos os elementos e para todos os instantes de tempo).

O método baseado na Equação (9.3.6) apresenta o problema da determinação do valor de N_b . Uma vez conhecida esta grandeza, o método torna-se extremamente ágil. A Equação (9.3.7), segundo Muñoz e Hsu (1997), apresenta boa precisão, porém γ_1 e γ_2 dependem da

força axial N e conseqüentemente traz o problema de tempo computacional da Equação (9.2.5a).

Estes dois métodos foram desenvolvidos no contexto de pesquisas relacionadas com o dimensionamento do concreto armado. Já o método proposto neste trabalho foi desenvolvido em uma pesquisa sobre a otimização de estruturas de pórticos espaciais em concreto armado. A computação da restrição apresentada em (9.2.5a) tornaria inviável o algoritmo de otimização. Em resumo, no critério de ruína dado pela Equação (9.4.2), uma vez determinados os quatro parâmetros do método M_{ua} , M_{ub} , N_c e N_r , e os coeficientes exponenciais, a verificação das restrições relacionadas com o momento de flexão oblíqua podem ser facilmente computadas, com baixo custo computacional. Além disso, a utilização de técnicas de otimização permitem um controle sobre o erro de aproximação, proporcionando segurança adequada ao sistema estrutural.

9.6 Exemplos analisados

9.6.1 Dados numéricos

Foram computados $m=79$ pontos $P_i \equiv (N_i, M_{uai}, M_{ubi})$ em um quadrante da superfície de ruptura para cada exemplo analisado, naquele quadrante onde M_a e M_b são positivos. Tal simplificação foi possível visto que para as seções analisadas as superfícies de rupturas são simétricas em relação ao eixo de N . Outros dados adotados são: $f_{ck} = 18 \text{ MPa}$; $\gamma_c = 1,4$; $\varepsilon_s^{\max} = 1\%$; $\varepsilon_c^{\max} = 0,35\%$; $f_y = 490,5 \text{ MPa}$; $\gamma_s = 1,15$; o módulo de elasticidade longitudinal do concreto $E = 21,55 \text{ GPa}$ e o módulo de elasticidade longitudinal do aço $E_s = 206,01 \text{ GPa}$. A distribuição de tensões no concreto é do tipo parábola retângulo (Fusco, 1981). Durante o processo de otimização foram adotados valores iniciais unitários para as variáveis de projeto,

isto é, $c_i = 1,0$ para $i = 1, \dots, 4$. Foram analisadas cinco seções transversais com diferentes valores para a largura, altura e área de aço. No presente trabalho considerou-se $A_{s1} = A_{s2} = A_s/2$. Os dados adotados são mostrados na Tabela (9.6.1).

Tabela 9.6.1 – Seções transversais analisadas

Projeto	$B \text{ (cm)}$	$H \text{ (cm)}$	$A_s \text{ (cm}^2\text{)}$	$c \text{ (cm)}$
126	86	53	22,79	2,5
130	61	91	8,33	2,5
135	119	124	22,13	2,5
141	123	134	24,72	2,5
144	91	39	17,75	2,5

9.6.2 Resultados para a otimização sem restrições

Os exemplos foram resolvidos considerando ambas as equações (9.4.3) e (9.4.6) como função objetivo (erro global de aproximação). Os resultados obtidos com a Equação (9.4.3) não foram satisfatórios. Por exemplo, para o projeto 126 obteve-se em alguns pontos um erro de até 150% contra a segurança. Devido a isto, os resultados obtidos com esta formulação não serão mostrados aqui. Utilizando a Equação (9.4.6) como função objetivo, os resultados os erros foram menores. Os resultados obtidos considerando então esta equação são mostrados nas Tabelas (9.6.2) à (9.6.4).

Tabela 9.6.2 – Resultados obtidos utilizando o método da reta de máximo declive

Projeto	$f(c)$	c_1	c_2	c_3	c_4	Iterações
126	0,7656	1,327	1,589	1,507	1,077	78
130	0,7958	1,426	1,530	1,529	1,119	85

135	0,6292	1,392	1,469	1,568	1,152	101
141	0,6581	1,402	1,477	1,560	1,144	98
144	1,6267	1,492	1,769	1,417	0,994	72

Tabela 9.6.3 – Resultados obtidos utilizando o método dos gradientes conjugados

Projeto	$f(c)$	c_1	c_2	c_3	c_4	Iterações
126	0,7656	1,326	1,589	1,506	1,077	24
130	0,7958	1,425	1,530	1,529	1,120	26
135	0,6292	1,392	1,469	1,569	1,152	32
141	0,6581	1,402	1,477	1,559	1,144	34
144	1,6267	1,492	1,769	1,417	0,993	26

Tabela 9.6.4 – Resultados obtidos utilizando o método de Gauss-Newton

Projeto	$f(c)$	c_1	c_2	c_3	c_4	Iterações
126	0,8597	1,423	1,587	1,309	0,939	13
130	0,8789	1,535	1,547	1,309	0,978	13
135	0,7199	1,493	1,545	1,303	0,976	13
141	0,7435	1,495	1,552	1,305	0,975	13
144	1,7308	1,482	1,689	1,326	0,964	10

De uma maneira geral, pode-se notar que os menores valores para a função objetivo foram obtidos com a utilização do método da reta de máximo declive e o método dos gradientes conjugados (os resultados desses métodos praticamente coincidiram) para o cálculo da direção de busca. Quanto ao número de iterações, o método de Gauss-Newton

obteve um melhor desempenho, porém os valores da função objetivo obtidos através deste método foram relativamente altos, comparados com os resultados dos outros dois. Pode-se dizer, com base nestes exemplos, que o método dos gradientes conjugados, dentro dos métodos analisados, é o mais apropriado para o cálculo da direção de busca neste tipo de problema. Para o projeto 126, considerando os resultados obtidos com o método dos gradientes conjugados, foram criados os Gráficos 9.6.1 e 9.6.2 e a Figura 9.6.1.

Figura 9.6.1 – Superfície de ruptura obtida para o projeto 126 utilizando o método dos gradientes conjugados– otimização sem restrições

Pode-se notar, analisando os Gráficos 9.6.1 e 9.6.2, que alguns pontos da aproximação são conservativos e outros não. O valor médio dos erros locais para este projeto foi $-3,2\%$ e o desvio padrão foi de $7,6\%$. O método foi conservativo em um valor máximo de $14,7\%$ e não conservativo em $35,4\%$. Os valores extremos para o erro local geralmente ocorrem em pontos onde o momento resistente é pequeno e, nestes pontos, qualquer variação na aproximação

produz um grande erro percentual. Analisando os resultados, verifica-se que o procedimento tenta distribuir os erros locais de forma que o erro global seja mínimo.

Gráfico 9.6.1 – M_a^* como a aproximação de M_a utilizando o método dos gradientes conjugados para diversos valores do ângulo $\xi=a$ – otimização sem restrições

9.6.3 Resultados para a otimização com restrições

O problema definido pelas Equações (9.4.8) e (9.4.9) foi resolvido utilizando-se a função objetivo (erro global de aproximação) definida pela Equação (9.4.6) e também foi considerado $\varepsilon_{\max} = 0$ na Equação (9.4.9). Para a otimização sem restrições no passo do algoritmo do Lagrangiano aumentado, foram adotados dois diferentes métodos para o cálculo da direção de busca: o método da reta de máximo declive e o método dos gradientes conjugados. Os resultados previamente obtidos na Seção 9.6.2 motivaram a não adoção do método de Gauss-Newton para a determinação da direção de busca e também da equação

(9.4.3) para computar a função objetivo. Os resultados obtidos são mostrados nas Tabelas 9.6.5 e 9.6.6, e nos Gráficos 9.6.3 e 9.6.4.

Gráfico 9.6.2 - M_b^* como aproximação de M_b utilizando o método dos gradientes conjugados para diversos valores do ângulo $\xi=a$ – otimização sem restrições

Tabela 9.6.5 – Resultados obtidos utilizando o método da reta de máximo declive – otimização com restrições

Projeto	$f(c)$	c_1	c_2	c_3	c_4	Iterações [#]
126	3,3871	1,198	1,298	1,167	1,019	285
130	2,7776	1,334	1,350	1,165	0,962	369
135	2,3165	1,323	1,349	1,199	0,962	451
141	2,3821	1,324	1,353	1,198	0,957	443
144	5,7290	1,126	1,163	1,292	1,249	441

Tabela 9.6.6 – Resultados obtidos utilizando o método dos gradientes conjugados – otimização com restrições

Projeto	$f(c)$	c_1	c_2	c_3	c_4	Iterações [#]
126	3,3859	1,198	1,298	1,167	1,019	121
130	2,7746	1,337	1,353	1,160	0,957	97
135	2,3141	1,324	1,351	1,197	0,959	111
141	2,3822	1,327	1,355	1,194	0,953	105
144	5,7291	1,128	1,164	1,288	1,247	150

Analisando as Tabelas 9.6.5 e 9.6.6, pode-se notar que os projetos obtidos para ambos os métodos adotados são extremamente parecidos, o que já não ocorre com o número de iterações. O símbolo ([#]) significa o número de vezes que o gradiente do funcional Lagrangiano aumentado foi calculado. Considerando estas informações, pode-se concluir que nos problemas analisados o método dos gradientes conjugados é mais eficiente que o método da reta de máximo declive para o cálculo da direção de busca.

Comparando os valores da Tabela 9.6.5 e 9.6.6 com aqueles mostrados nas Tabelas 9.6.2 e 9.6.3, pode-se notar que o valor da função objetivo (erro global de aproximação) é maior quando os erros locais são restringidos. Outro resultado deste trabalho é que quando o problema de otimização com restrições foi resolvido para um valor relativamente grande de $\varepsilon_{\max}$, os resultados obtidos foram exatamente aqueles dos problemas de otimização sem restrições.

Gráfico 9.6.3 – M_a^* como a aproximação de M_a utilizando o método dos gradientes conjugados para diversos valores do ângulo $\xi=a$ – otimização com restrições

Gráfico 9.6.4 – M_b^* como a aproximação de M_b utilizando o método dos gradientes conjugados para diversos valores do ângulo $\xi=a$ – otimização com restrições

Para o projeto 126, considerando os resultados obtidos utilizando o método dos gradientes conjugados, foram plotados os Gráficos 9.6.3 e 9.6.4. Pode-se notar que a aproximação nunca é contra a segurança. O erro local de aproximação médio para este projeto foi $-16,8\%$ e o desvio padrão foi $12,2\%$. A superfície de aproximação obtida foi conservativa em um valor máximo de $40,2\%$ e, em nenhum ponto, como imposto pelas restrições, foi não conservativa. Os valores extremos para o erro local geralmente ocorrem em pontos onde o momento resistente é pequeno e, nestes pontos, qualquer variação na aproximação produz um grande erro percentual.

9.7 Comentários

Apesar das dificuldades para se definir uma nova superfície e um novo critério de ruptura, bem como um procedimento viável para estimar os coeficientes exponenciais de sua equação, os resultados obtidos aqui mostram que este método é interessante pelas seguintes razões:

- a) somente alguns métodos de otimização e algoritmos bastante usuais são necessários para computar os coeficientes exponenciais (variáveis de projeto);
- b) não é computacionalmente caro o cálculo dos coeficientes exponenciais;
- c) o procedimento proposto permite ao projetista definir limites para os erros locais de aproximação;
- d) os resultados obtidos aqui podem ser utilizados para substituir a Equação (9.5.a).

O método de integração de tensões no concreto tem, como se esperaria, reflexo sobre o tempo de processamento. O método das poligonais é muito mais eficiente que o das malhas (Santos, 1994). Esse tempo quando se usa o primeiro pode chegar a ser de um oitavo do gasto

quando se utiliza o segundo. Essa operação é apenas uma etapa dentro do procedimento global de otimização de uma estrutura de concreto armado. Estudos sobre a influência deste processo no tempo total de solução são deixados para pesquisa futura.

Capítulo 10

Otimização de uma fundação aporticada para máquinas vibratórias

10.1 Introdução

O objetivo deste capítulo é descrever um procedimento para a otimização e análise integrada de estruturas e fundações sob esforços vibratórios. Como fator importante para viabilizar a solução do problema está a aplicação do critério de ruína descrito no Capítulo 9.

A estrutura/fundação a ser otimizada é mostrada na Figura 10.1.1a e sua discretização, na Figura 10.1.1b. A estrutura é composta por vigas, colunas e uma sapata. Para as vigas e colunas, B é a largura e H é a altura da seção transversal e L é o comprimento, enquanto que para a sapata, os lados são $2l_x$ e $2l_y$, e a espessura é h .

Figura 10.1.1 – Fundação aporticada de máquina a ser otimizada e a respectiva discretização adotada

A função objetivo considerada é o custo de construção da estrutura, incluindo o custo do concreto, do aço, da forma e do escoramento. O carregamento estático é o peso próprio do motor e também da estrutura, enquanto que o carregamento dinâmico é devido às vibrações provocadas pelo funcionamento do motor. As verificações adotadas na solução deste problema são as relacionadas com a Norma de concreto armado (incluídas no critério de ruína apresentado no Capítulo 9), com a interação solo-estrutura, e também com o conforto humano. O problema é resolvido de duas maneiras distintas: uma definindo a superfície de ruptura empírica de maneira tal que os erros sejam simplesmente minimizados; a outra maneira seria impondo que a superfície empírica obtida nunca apresente erros locais de aproximação contra a segurança. Um dos objetivos é verificar a influência das duas formulações no projeto final.

10.2 Formulação do problema de otimização

O problema consiste em minimizar o custo de construção da estrutura mostrada na Figura 10.1.1. A sapata é discretizada em $n_{no} = 80$ nós e $n_e = 126$ elementos, e o pórtico é discretizado em $n_{pe} = 20$ elementos e $n_{pno} = 13$ nós. Os elementos triangulares utilizados na discretização da sapata possuem três graus de liberdade por nó, os deslocamentos na direção de z e rotações em torno de x e y . Além disso, a sapata possui mais três graus de liberdade relacionados com os movimentos de corpo rígido nas direções de x e y , e rotação em torno do eixo z . Para a análise da iteração solo-estrutura foram adotadas as expressões (8.2.26) à (8.2.38). Cada nó do pórtico possui 6 graus de liberdade, três deslocamentos e três rotações em relação aos eixos de x , y e z . O sistema de equações diferenciais do movimento possui então $n_{gl} = 3n_{no} + 3 + 6n_{pno} = 321$ graus de liberdade. A sapata é excitada com carregamento harmônico devido o funcionamento de um motor com frequência Ω .

As variáveis de projeto relacionadas com a sapata são $\mathbf{b}_f^t = [h \ A_{sx} \ A_{sy} \ l_x \ l_y]$. Já o dimensionamento do e -ésimo elemento de barra é realizado considerando o vetor das variáveis de projeto $\mathbf{b}_{le}^t = [B_e \ H_e \ A_{se} \ A_{sse}]$, onde B_e e H_e são, respectivamente, a base e a altura da seção transversal do elemento, e A_{se} e A_{sse} são, respectivamente, as armaduras longitudinal e transversal do elemento. Então o vetor das variáveis de projeto é

$$\mathbf{b}^t = [\mathbf{b}_f^t \ \mathbf{b}_{11}^t \ \cdots \ \mathbf{b}_{l_{npe}}^t].$$

O problema de otimização é então minimizar a função custo:

$$f(\mathbf{b}) = C_c + C_s + C_f + C_{pf} \quad (10.2.1)$$

onde C_c , C_s , C_f e C_{pf} são respectivamente os custos do concreto, do aço, da forma e do escoramento. Pode-se escrever:

$$C_c = \begin{cases} \text{sapata : } 4l_x l_y h c_c \\ \text{elemento linear } e : B_e H_e L_e c_c \end{cases} \quad (10.2.2)$$

$$C_s = \begin{cases} \text{sapata : } [2(l_x A_{sx} + l_y A_{sy}) \rho_s] c_s \\ \text{elemento linear } e : [A_{se} + 2A_{sse} (B_e - 2c + H_e - 2c)] L_e \rho_s c_s \end{cases} \quad (10.2.3)$$

$$C_f = \begin{cases} \text{sapata : } [4l_x l_y + 4h(l_x + l_y)] c_f \\ \text{viga } e : (B_e + 2H_e) L_e c_f \\ \text{coluna } e : (B_e + H_e) 2L_e c_f \end{cases} \quad \text{e} \quad (10.2.4)$$

$$C_{pf} = \begin{cases} \text{viga } e : B_e L_e c_{pf} \end{cases} \quad (10.2.5)$$

Nas Equações (10.2.2) à (10.2.5) c_c é o custo por unidade de volume de concreto, ρ_s é a densidade do aço, c_s é o custo por unidade de massa do aço, c_f é o custo por unidade de área de forma, c_{pf} é o custo por unidade de área de escoramento e L_e é o comprimento do e -ésimo elemento.

O problema é sujeito às restrições estáticas:

- a espessura mínima da sapata

$$- h + h_l \leq 0 \quad (10.2.6)$$

- o valor mínimo de A_{sx}

$$- A_{sx} + 0,0015h \leq 0 \quad (10.2.7)$$

- o valor mínimo de A_{sy}

$$- A_{sy} + 0,0015h \leq 0 \quad (10.2.8)$$

- o valor máximo de A_{sx}

$$A_{sx} - 0,04h \leq 0 \quad (10.2.9)$$

- o valor máximo de A_{sy}

$$A_{sy} - 0,04h \leq 0 \quad (10.2.10)$$

- o valor mínimo de l_x

$$- l_x + l_{x \min} \leq 0 \quad (10.2.11)$$

- o valor mínimo de l_y

$$- l_y + l_{y \min} \leq 0 \quad (10.2.12)$$

- a principal frequência natural de vibração

$$0,5 \geq \frac{\Omega}{\omega_1} \geq 1,5 \quad (10.2.13)$$

- o máximo deslocamento estático da sapata

$$|w_{si}| - z_{su} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (10.2.14)$$

- o máximo deslocamento diferencial da sapata

$$|w_{si} - w_{sj}| - d_{su} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no}; j = i + 1, \dots, n_{no} \quad (10.2.15)$$

- a máxima tensão estática no solo

$$\eta |w_{si}| - \sigma_s / \gamma_{ss} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (10.2.16)$$

- o valor mínimo para a armadura longitudinal das vigas e colunas

$$\begin{cases} \text{viga } e: -A_{se} + 0,15\% B_e H_e \leq 0 \\ \text{coluna } e: -A_{se} + 0,5\% B_e H_e \leq 0 \end{cases}; e=1, \dots, n_{pe} \quad (10.2.17)$$

- o valor máximo para a armadura longitudinal das vigas e colunas

$$\text{elemento } e: A_{se} + 4\% B_e H_e \leq 0; e=1, \dots, n_{pe} \quad (10.2.18)$$

- o valor mínimo para a armadura transversal das vigas e colunas

$$\text{elemento } e: -A_{se} + \frac{0,07\% B_e H_e}{B_e + H_e - 4c} \leq 0; e=1, \dots, n_{pe} \quad (10.2.19)$$

Além destas restrições, é necessário impor as restrições sobre os deslocamentos estáticos apresentados pelas vigas e colunas:

- um viga não pode apresentar um deslocamento lateral relativo aos apoios maior que $D^l/300$, onde D^l é o vão livre coberto pela viga;
- uma coluna não pode apresentar um deslocamento lateral relativo aos apoios maior que $L/150$, onde L é o comprimento da coluna.

O problema é sujeito às restrições dinâmicas, $\forall t \in [0, T]$:

- o máximo deslocamento da sapata

$$|w_{di}| - z_{du} \leq 0; i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.20)$$

$$|u_{dp}| - z_{du} \leq 0 \quad (\text{corpo rígido}) \quad (10.2.21)$$

$$|v_{dp}| - z_{du} \leq 0 \quad (\text{corpo rígido}) \quad (10.2.22)$$

- a máxima velocidade da sapata

$$|\dot{w}_{di}| - v_u \leq 0; i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.23)$$

$$|\dot{u}_{dp}| - v_u \leq 0 \quad (\text{corpo rígido}) \quad (10.2.24)$$

$$|\dot{v}_{dp}| - v_u \leq 0 \quad (\text{corpo rígido}) \quad (10.2.25)$$

- a máxima aceleração da sapata

$$|\ddot{w}_{di}| - a_u \leq 0, i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.26)$$

$$|\ddot{u}_{dp}| - a_u \leq 0 \quad (\text{corpo rígido}) \quad (10.2.27)$$

$$|\ddot{v}_{dp}| - a_u \leq 0 \quad (\text{corpo rígido}) \quad (10.2.28)$$

- a verificação da altura útil da sapata

$$-[(h-c)/\beta_1]^2 + \gamma_f |M_{xi}| \leq 0, i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.29)$$

- a verificação da altura útil da sapata

$$-[(h-c)/\beta_1]^2 + \gamma_f |M_{yi}| \leq 0, i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.30)$$

- a verificação da área de aço da sapata

$$\gamma_f |M_{xi}| - \beta_2 A_{sx} (h-c) \leq 0, i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.31)$$

- a verificação da área de aço da sapata

$$\gamma_f |M_{yi}| - \beta_2 A_{sy} (h-c) \leq 0, i=1, \dots, n_{no} \quad (10.2.32)$$

- a máxima tensão dinâmica no solo

$$\eta |w_{di}| - \sigma_s / \gamma_{ds} \leq 0; i = 1, \dots, n_{no} \quad (10.2.33)$$

- máximo deslocamento do pórtico

$$|w_{di}| - z_{du} \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.34)$$

$$|u_{di}| - z_{du} \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.35)$$

$$|v_{di}| - z_{du} \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.36)$$

- máxima velocidade do pórtico

$$|\dot{w}_{di}| - v_u \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.37)$$

$$|\dot{u}_{di}| - v_u \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.38)$$

$$|\dot{v}_{di}| - v_u \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.39)$$

- máxima aceleração do pórtico

$$|\ddot{w}_{di}| - a_u \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.40)$$

$$|\ddot{u}_{di}| - a_u \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.41)$$

$$|\ddot{v}_{di}| - a_u \leq 0; i = n_{no} + 1, \dots, n_{no} + n_{pno} \quad (10.2.42)$$

- verificação da armadura transversal para todos os elementos lineares

$$-A_{sse} + (A_{ss}^V + A_{ss}^T)_e \leq 0; e = 1, \dots, n_{pe} \quad (10.2.43)$$

- verificação da tensão de cisalhamento para todos os elementos lineares

$$\left(\frac{\tau_{td}}{\tau_{tu}} + \frac{\tau_{wd}}{\tau_{wu}} \right)_e - 1 \leq 0; e = 1, \dots, n_{pe} \quad (10.2.44)$$

- procedimento para se evitar superposição de armadura longitudinal nos elementos lineares

$$-A_{se} + (A_s^T)_e \leq 0; e = 1, \dots, n_{pe} \quad (10.2.45)$$

- verificação da flexão oblíqua composta para os dois nós de todos elementos lineares

$$\left(\frac{M_a}{M_{ua}} \right)^{\alpha_1} + \left(\frac{M_b}{M_{ub}} \right)^{\alpha_2} + \left(\frac{N - N_c}{N_r} \right)^{\alpha_3, \alpha_4} - 1 \leq 0 \quad (10.2.46)$$

- verificação da torção na sapata – superfície de ruína de Johansen

$$M_{xyi}^2 - (M_{px}^+ - M_{xi})(M_{py}^+ - M_{yi}) \leq 0, i = 1, \dots, n_{no} \quad (10.2.47)$$

$$M_{xyi}^2 - (M_{px}^- + M_{xi})(M_{py}^- + M_{yi}) \leq 0, i = 1, \dots, n_{no} \quad (10.2.48)$$

Os subscritos $(*)_s$ e $(*)_d$ representam as parcelas estática e dinâmica do campo $(*)$. O valor mínimo da espessura da sapata e os valores limites para as armaduras são dados por Norma. As dimensões do motor a ser instalado bem como o espaço necessário para a sua operação e manutenção definem os valores de $l_{x \min}$ e $l_{y \min}$. As constantes γ_{ss} e γ_{ds} são os coeficientes de segurança adotados sobre as tensões resistidas pelo solo. A restrição (10.2.13) está relacionada com as condições de ressonância do sistema fundação-máquina, enquanto que as (10.2.14) à (10.2.16) dependem dos requerimentos da máquina e do solo sob a sapata. O máximo deslocamento estático permitido é $z_{su} = \min(b_4; b_5)/10$ e o máximo deslocamento diferencial permitido é $d_{su} = \min(b_4; b_5)/100$. As restrições (10.2.20) à (10.2.28) e (10.2.34) à (10.2.42) contemplam a sensibilidade dos seres humanos e da estrutura em relação às vibrações. O nível de conforto considerado não contempla a presença de seres humanos trabalhando nas proximidades da máquina, mas apenas limites de vibração relacionados com a estrutura. As equações (10.2.29) à (10.2.32), (10.2.43), (10.2.44) e (10.2.46) são necessárias para a verificação da equivalência entre os esforços internos e os externos, enquanto que (10.2.33) impõe um limite máximo para as tensões dinâmicas de compressão no solo. A_{ss}^V e A_{ss}^T são, respectivamente, as armaduras transversais de combate à força cortante e o momento de torção, enquanto que A_s^T é a parcela da armadura longitudinal de combate à torção. A restrição (10.2.45) representa uma certa economia de armadura longitudinal, visto que, de acordo com Sussekind (1979), pode-se desprezar A_s^T caso A_s seja maior que A_s^T . As restrições

(10.2.46) referem-se ao critério de ruína descrito no Capítulo 9, enquanto que (10.2.47) e (10.2.48) representam o critério de ruína de Johansen para lajes submetidas à torção.

10.3 Dados numéricos

O número total de variáveis de projeto relacionadas com a sapata é de 85, e de 80 as relacionadas com o pórtico. Para solução do problema de otimização foi adotado o método do Lagrangiano aumentado e para o cálculo do gradiente do funcional Lagrangiano o método das diferenças finitas com perturbação adiante.

A carga externa estática é devido aos pesos da estrutura e do motor. O peso da estrutura é distribuído sobre os nós de acordo com a influência de cada nó. O peso próprio do motor é aplicado como: nó 81, $p_{sz} = 120251 \text{ N}$; nó 83, $p_{sz} = 120251 \text{ N}$; nó 87, $p_{sz} = 202645 \text{ N}$; nó 89, $p_{sz} = 48991 \text{ N}$; nó 90, $p_{sz} = 48991 \text{ N}$; e nó 92, $p_{sz} = 126932 \text{ N}$. A carga externa dinâmica é devida à excitação dinâmica harmônica do motor, a qual possui frequência Ω . Esta carga é aplicada ao longo do eixo do motor como: nó 82, $p_{dz}(t) = 636,35 \sin(\Omega t)$ e $p_{dx}(t) = 636,35 \cos(\Omega t)$; nó 87, $p_{dz}(t) = 17978 \sin(\Omega t)$ e $p_{dx}(t) = 17978 \cos(\Omega t)$; e nó 92, $p_{dz}(t) = 17341,65 \sin(\Omega t)$ e $p_{dx}(t) = 17341,65 \cos(\Omega t)$.

O problema é resolvido de duas maneiras distintas: a primeira impondo que a superfície empírica (Capítulo 9) nunca esteja contra a segurança, i.e., fazendo $\varepsilon_{\max} = 0$ em (9.4.9); a segunda definindo a superfície de ruptura empírica de maneira tal que os erros sejam simplesmente minimizados. A determinação dos parâmetros exponenciais da superfície de ruptura empírica foram obtidos utilizando-se os procedimentos de otimização descritos no Capítulo 9. Para minimizar o erro global de aproximação e impor as restrições aos erros locais, quando for o caso, utilizou-se $m = 79$ pontos $P_i \equiv (N_i, M_{uai}, M_{ubi})$ sobre um quadrante da

superfície (no quadrante onde M_a e M_b são positivos). Outros dados adotados são: $\beta_1 = 0,0699$, $\beta_2 = 39100$, $f_{ck} = 18 \text{ MPa}$, $\gamma_c = 1,4$; $f_y = 490,5 \text{ MPa}$, $\gamma_s = 1,15$, $\rho_s = 7850 \text{ kg/m}^3$, $\rho = 2500 \text{ kg/m}^3$, $E = 21,55 \text{ GPa}$, $E_s = 206,01 \text{ GPa}$, $c_p = 3,0 \text{ cm}$, $c = 2,5 \text{ cm}$, $h_l = 0,50 \text{ m}$, $l_{x \min} = 3,0 \text{ m}$, $l_{y \min} = 4,0 \text{ m}$, $\Omega = 727,7 \text{ rad/s}$, $\gamma_f = 1,4$, $\gamma_{ss} = 2,0$, $\gamma_{ds} = 4/3$, $G_s = 44833839,7 \text{ Pa}$, $\nu_s = 0,45$, $\sigma_s = 95760 \text{ Pa}$, $z_{du} = 0,006 \text{ mm}$ $v_u = 0,0127 \text{ m/s}$ e $a_u = 3,92 \text{ m/s}^2$. A altura das colunas é $5,18 \text{ m}$. Para se obter a matriz de amortecimento de Rayleigh foi considerado uma taxa de amortecimento de 15% para o primeiro modo de vibração e de 5% para o quarto modo de vibração. O tempo de análise é $T = 0,0863 \text{ s}$, o qual foi dividido em 120 intervalos. Para computar a função custo foi considerado $c_c = \text{R\$ } 190,00 / \text{m}^3$, $c_s = \text{R\$ } 2,60 / \text{kg}$, $c_f = \text{R\$ } 50,00 / \text{m}^2$ e $c_{pf} = \text{R\$ } 35,00 / \text{m}^2$. Estes custos incluem o material utilizado e sua aplicação.

O projeto inicial adotado para resolver o problema é mostrado nas Tabelas 10.3.1 e 10.3.2. Este projeto apresenta um custo de R\$ 35528,94.

Tabela 10.3.1 – Projeto inicial para a sapata

$h \text{ (cm)}$	$A_{sx} \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_{sy} \text{ (cm}^2\text{)}$	$l_x \text{ (dm)}$	$l_y \text{ (dm)}$
91,44	13,72	13,72	36,58	45,72

Tabela 2 – Projeto inicial para os elementos de barra

Elemento	$B_e \text{ (cm)}$	$H_e \text{ (cm)}$	$A_{se} \text{ (cm}^2\text{)}$	$A_{sse} \text{ (cm}^2/\text{m)}$
127	91,44	60,96	27,87	2,00
128	91,44	60,96	27,87	2,00
129	91,44	60,96	8,36	2,00
130	91,44	60,96	8,36	2,00
131	60,96	91,44	8,36	2,00
132	60,96	91,44	8,36	2,00
133	60,96	91,44	8,36	2,00
134	60,96	91,44	8,36	2,00

135	91,44	91,44	12,54	2,00
136	91,44	91,44	12,54	2,00
137	91,44	91,44	12,54	2,00
138	91,44	91,44	12,54	2,00
139	91,44	91,44	12,54	2,00
140	91,44	91,44	12,54	2,00
141	91,44	91,44	12,54	2,00
142	91,44	91,44	12,54	2,00
143	91,44	91,44	41,81	2,00
144	91,44	91,44	41,81	2,00
145	91,44	45,72	20,90	2,00
146	91,44	45,72	20,90	2,00

10.4 Resultados numéricos

Os resultados mostrados nas Tabelas 10.4.1 e 10.4.2 foram obtidos fazendo com que a aproximação da superfície de ruptura do Capítulo 9 nunca fosse contra a segurança, enquanto que os resultados das Tabelas 10.4.3 e 10.4.4 foram obtidos com otimização sem restrições aos erros de aproximação.

Tabela 10.4.1 – Projeto ótimo para a sapata – aproximação da superfície de ruptura nunca é contra a segurança

h (cm)	A_{sx} (cm ²)	A_{sy} (cm ²)	l_x (dm)	l_y (dm)
76,15	11,50	11,57	52,69	48,17

Tabela 10.4.2 – Projeto ótimo para os elementos de barra – aproximação da superfície de ruptura nunca é contra a segurança

Elemento	B_e (cm)	H_e (cm)	A_{se} (cm ²)	A_{sse} (cm ² /m)
127	85,27	51,46	22,02	2,61

128	85,06	51,47	22,02	2,62
129	86,19	53,61	51,32	3,14
130	86,11	52,81	48,69	3,13
131	54,82	86,65	48,85	2,91
132	54,98	86,74	48,86	2,72
133	56,13	87,41	48,07	2,70
134	56,21	87,45	48,06	3,28
135	113,29	124,86	83,66	12,80
136	113,62	119,24	72,48	5,49
137	88,37	86,96	48,65	5,92
138	88,44	87,07	48,63	5,93
139	88,18	87,19	48,44	3,48
140	88,04	87,05	48,45	18,86
141	110,49	130,95	84,8	11,38
142	113,71	129,17	74,34	7,86
143	82,20	81,50	35,72	9,79
144	83,43	82,14	37,26	20,78
145	91,13	37,77	23,56	2,97
146	93,31	40,58	27,15	4,06

Os resultados mostrados nas Tabelas 10.4.1 e 10.4.2 foram obtidos em 13 iterações com um tempo computacional de 330312 s. O custo deste projeto ótimo é R\$ 46620,01.

Tabela 10.4.3 – Projeto ótimo para a sapata – aproximação da superfície de ruptura deixando os erros se espalharem livremente

h (cm)	A_{sx} (cm ²)	A_{sy} (cm ²)	l_x (dm)	l_y (dm)
73,94	20,03	13,82	47,49	45,75

Tabela 10.4.4 – Projeto ótimo para os elementos de barra – aproximação da superfície de ruptura deixando os erros se espalharem livremente

Elemento	B_e (cm)	H_e (cm)	A_{se} (cm ²)	A_{sse} (cm ² /m)
127	85,25	50,78	22,01	6,02
128	85,02	51,00	22,01	4,42
129	75,70	37,53	62,99	1,93
130	75,96	36,72	61,09	1,90
131	39,37	77,08	62,30	2,13
132	39,49	77,09	62,40	2,13
133	42,36	78,76	63,13	2,29
134	42,62	78,92	63,16	2,16
135	105,95	138,56	196,83	4,63
136	122,12	141,51	162,20	7,19
137	76,73	73,64	79,61	3,06
138	77,15	74,05	79,61	2,85
139	75,57	73,38	78,74	3,77
140	76,22	73,93	78,75	3,28
141	99,04	146,37	175,98	4,70
142	111,41	148,07	151,48	6,05
143	89,30	81,84	50,68	3,44
144	95,13	86,46	45,47	5,59
145	102,87	48,54	25,73	5,17
146	110,26	54,92	31,11	10,00

Os resultados mostrados nas Tabelas 10.4.3 e 10.4.4 foram obtidos em 13 iterações com um tempo computacional de 291107 s. O custo deste projeto ótimo é R\$ 44303,53.

10.5 Comentários

O conjunto superestrutura/fundação de uma fundação elevada para máquinas vibratórias foi otimizado e analisado de uma maneira integrada. O critério de ruína proposto no Capítulo 9 foi aplicado com sucesso, visando melhorar o tempo computacional necessário para se obter a solução. Observa-se, dos resultados obtidos, que a adoção das duas formulações não resulta em custos muito diferentes, porém leva a diferentes projetos. Caso o problema de otimização aqui proposto fosse resolvido considerando o processo tradicional de verificação da capacidade de trabalho dos elementos lineares submetidos à flexão oblíqua composta, a obtenção de um projeto ótimo para este simples exemplo demoraria mais de 40 dias, utilizando um PC de 500 *MHz*. Com a adoção do critério proposto no Capítulo 9 os resultados foram obtidos em menos de 4 dias. Demonstra-se, assim, que é possível resolver problemas de otimização de grande porte, onde estruturas e fundações são otimizadas e analisadas simultaneamente com um custo computacional relativamente baixo.

Capítulo 11

Algumas conclusões e sugestões para futuros trabalhos

11.1 Algumas conclusões

O principal objetivo deste trabalho de pesquisa foi desenvolver e investigar formulações para aplicações práticas dos métodos de otimização em estruturas civis de grande porte submetidas à esforços dinâmicos. Para atingir tal propósito, estruturas e fundações bastante usuais na prática da engenharia civil foram otimizadas. Foram adotados diferentes métodos de análise, carregamentos e formulações, buscando-se obter praticidade, eficiência e precisão. O método do Lagrangiano aumentado foi implementado e utilizado para a determinação dos projetos ótimo. Uma variante do método das variáveis adjuntas (Arora, 1999) foi desenvolvida para que este método também pudesse ser aplicado em problemas

com restrições envolvendo as acelerações nodais. Um critério de ruína foi proposto e aplicado em um problema de otimização de grande porte visando minimizar o tempo computacional envolvido nas verificações da resistência à flexão oblíqua composta de elementos de barra em concreto armado. Nesse mesmo problema, a estrutura e a fundação foram otimizadas e analisadas de forma integrada. Além dos comentários específicos para cada problema, algumas conclusões são a seguir enumeradas.

- 1) É possível se diminuir drasticamente o número de restrições de um determinado problema apenas mudando a formulação adotada para as restrições.
- 2) Nos exemplos analisados, o método das variáveis adjuntas para o cálculo do gradiente do Lagrangiano aumentado é mais eficiente do que o método das diferenças finitas em termos de tempo computacional.
- 3) A otimização de estruturas aporricadas em concreto armado (como a resolvida neste trabalho) submetidas à esforços dinâmicos, sendo formulada com as restrições envolvendo a resistência à flexão oblíqua composta baseada no método dos estados limites, demandam um enorme tempo computacional, podendo tornarem-se inviável do ponto de vista de tempo computacional, com os recursos hoje disponíveis. Métodos alternativos para a computação destas restrições, tais como o critério de ruína proposto neste trabalho, precisam ser utilizados.
- 4) A solução ótima de um problema depende de sua formulação. Diferentes formulações de restrições envolvendo critérios de ruínas levam a diferentes projetos ótimos, por exemplo.

11.2 Algumas sugestões para futuros trabalhos

Enumeram-se, a seguir alguns trabalhos adicionais de pesquisa que podem a seguir ser realizados para atingir a total potencialidade dos métodos aqui utilizados e propostos.

- 1) Analisar funções custo mais realistas. Incorporar também funções objetivo múltiplas nas formulações apresentadas, ou seja, utilizar processos de otimização multicriterial.
- 2) Realizar a análise de sensibilidade utilizando o método das variáveis adjuntas em todos os problemas otimizados neste trabalho, visando comparar o seu desempenho com o do método das diferenças finitas.
- 3) Utilizar o algoritmo genético para a solução de todos os problemas de otimização aqui analisados, visando comparar os seus resultados com os obtidos com o método do Lagrangiano aumentado.

Referências Bibliográficas

- Almeida Neto, E. S., (1989), Introdução a Análise Dinâmica de Fundações de Máquinas, *Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Arora, J. S., (1989), *Introduction to Optimal Design*, McGraw-Hill.
- Arora, J. S., (1999), Optimization of Structures Subjected to Dynamic Loads, *Structural Dynamic Systems, Computational Techniques and Optimization; Optimization Techniques*, Gordon and Breach Science Publishers, pp. 1-72.
- Arora, J. S., Burns, S. A. and Huang, M., (1997), What is Optimization, *Guide to Structural Optimization*, ASCE, 90, pp. 1-24.
- Arora, J. S., Chahande, A. I. and Paeng, J. K., (1991), Multiplier methods for engineering optimization, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 32, pp. 1485-1525.
- Arora, J. S., Huang, M. W. and Hsieh, C. C., (1994), Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review, *Structural Optimization*, 90, pp. 69-85, Springer-Verlag.
- Arya, S., O'Neill, M. and Pincus, G., (1979), *Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines*, Gulf Publishing Company.
- Atkinson, K., (1993), *Elementary Numerical Analysis*, Wiley.
- Balling, R. J. and Yao, X., (1997), How to Optimize a Reinforced Concrete Frame, *Guide to Structural Optimization*, ASCE, 90, pp. 123-138.
- Balling, R. J., Gallup, S. S. and McGrath, C. S., (1997), How to Optimize a Reinforced Concrete Column or Beam, *Guide to Structural Optimization*, ASCE, 90, pp. 55-73.

- Bandeira, A. A., (1997), Uma Introdução ao Problema de Contato, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Bowles, J.E., (1996), *Foundation Analysis and Design*, 5th Ed., McGraw Hill, New York.
- Bresler, B., (1960), Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending, *J. ACI*, 32, pp. 481-490.
- Chahande, A. I. and Arora, J. S., (1994), Optimization of large structures subjected to dynamic loads with the multiplier method, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 413-430.
- Das, B. M., (1990), *Principles of Foundation Engineering*, PWS-KENT Publishing Company.
- Ferguson, P. M., Breen, J. E. and Jirsa, J. O., (1988), *Reinforced Concrete Fundamentals*, John Wiley & Sons, Inc.
- Fletcher, R., (1985), *Practical Methods of Optimization*, Wiley.
- Fusco, P. B., (1981), *Estruturas de concreto - Solicitações normais*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Fusco, P. B. e Almeida, P. A. O., (1997), Efeito das Vibrações Sobre os Seres Humanos, *Boletim Técnico BT/PEF/9714 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H., (1981), *Practical Optimization*, Academic Press.
- Goldenberg, P., Silva, M. A., Pimenta, P. M. and Brasil, R. M. L. R. F., (1997a), Augmented Lagrangian Optimization of a Portal Frame with Elastoplastic Behavior under Dynamic Loading, *Fifth Pan-American Congress on Applied Mechanics*, pp. 373-376.
- Goldenberg, P., Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F. e Pimenta, P. M., (1997b), Otimização de Placa Metálica no Regime Dinâmico, *XVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, Brasília.

- Goldenberg, P., Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F. and Pimenta, P. M., (1997c), Otimização de Coluna em Concreto com Restrições Dinâmicas, *COBEM – Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Bauru.
- Haug, E. J. and Arora, J. S., (1979), *Applied Optimal Design*, Wiley-Interscience.
- Herskovits, J., (1995), A View on Nonlinear Optimization, *Advances in Structural Optimization*, pp.71-116.
- Hsu, C. T., (1988), Analysis and Design of Square and Rectangular Columns by Equation of Failure Surface, *ACI Structural Journal*, ACI, Vol. 85, No. 2, pp. 167-179.
- Kocer, F. and Arora, J. S., (1999), Optimal Design of Nonlinear Structures Subjected to Dynamic Loads with Application to Transmission Line Structures, University of Iowa, Optimal Design Laboratory, Technical Report No. ODL-910.02.
- Leet, K., (1991), *Reinforced Concrete Design*, McGraw-Hill, Inc.
- Luenberger, D. G., (1984), *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company.
- McCormac, J. C., (1988), *Design of Reinforced Concrete*, Addison Wesley Longman, Inc.
- McGregor, J. G., (1992), *Reinforced Concrete, Mechanics & Design*, Prentice Hall.
- Mont'alverne, A. M., (1999), Optimum Design at Points of Reinforced Concrete Slabs Using Mathematical Programming, *XV COBEM – Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia-SP.
- Muñoz, P. R. e Hsu, C. T., (1997), Biaxially Loaded Concrete-Encased Composite Columns: Design Equation, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 12, pp. 1576-1585.
- Nawy, E. G., (1990), *Reinforced Concrete, a Fundamental Approach*, Pretence Hall.

- NB-1, (1978), Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado, ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- NBR-8800, (1986), Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (Método dos Estados Limites), ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- Nilson, A. H. and Winter, G., (1986), *Design of Concrete Structures*, McGraw-Hill Book Company.
- Pannell, F. N., (1963), Failure Surfaces for Members in Compression and Biaxial Bending, *J. ACI*, 60, pp. 129-140.
- Pimenta, P. M., Goldenberg, P., Brasil, R. M. L. R. F. e Silva, M. A., (1995a), Aplicações do Lagrangeano Aumentado em Otimização Estrutural com Restrições Dinâmicas, *Jornadas Internacionales de Mecanica Computacional y CAD/CAM*, Anais, pp. 185-193, Concepcion, Chile.
- Pimenta, P. M., Goldenberg, P., Brasil, R. M. L. R. F. e Silva, M. A., (1995b), Otimização Estrutural com Restrições Dinâmicas pelo Método do Lagrangiano Aumentado, *XVI CILAMCE - 16th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Anais, pp. 1264-1272, Curitiba.
- Put, B. M., Pi, Y. and Trahair, N. S., (1999), Biaxial bending of Cold-Formed Z-Beams, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 125/11, pp. 1284-1290.
- Roddis, W. M. K. and Chunnanonond, V., (1996), Genetic Algorithms Applied to Single-Criteria Optimization of Reinforced Concrete Design and Detailing, *SL Report 96-1*, University of Kansas Center for Research, Lawrence, KS.
- Roddis, W. M. K., Lucas, W. K. and Chunnanonond, V., (1996), Single-Criteria Genetic Optimization for Design and Detailing of Concrete Structures, *Proceedings Computing Congress III*, ASCE, Anaheim, CA.

- Santos, L. M., (1994), *Sub-rotinas Básicas do Dimensionamento de Concreto Armado*, São Paulo, Thot Editora Ltda.
- Shigueme, P., (1995), *Análise de Vibrações Livres em Torno de Configurações Deformadas em Placas de Comportamento Geometricamente Não-linear pelo Método dos Elementos Finitos*, *Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A., (1997), *Aplicação do Lagrangiano Aumentado em Otimização Estrutural com Restrições Dinâmicas*, *Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A. and Brasil, R. M. L. R. F., (1998), *Augmented Lagrangian Optimization of Plates Under Dynamic Loading*, *Boletim Técnico BT/PEF/9810 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A. and Brasil, R. M. L. R. F., (1999a), *Augmented Lagrangian Optimization of Steel Plates Under Dynamic Loading*, *Boletim Técnico BT/PEF/9906 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A. e Brasil, R. M. L. R. F., (1999b), *Otimização Lagrangiana de Placas Metálicas sob Esforços Dinâmicos*, *I Jornada Científica da Universidade Camilo Castelo Branco, Anais*, São Paulo.
- Silva, M. A. and Brasil, R. M. L. R. F., (1999c), *Optimization of Concrete Plates under Dynamic Loading*, *XX CILAMCE - 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, *Anais*, São Paulo.
- Silva, M. A., Arora, J. S., Swan, C. C. and Brasil, R. M. L. R. F., (1999), *Optimization of Footing Under Vibratory Loading*, *The University of Iowa, Optimal Design Laboratory, Technical Report No. ODL-910.11*.

- Silva, M. A., Arora, J. S., Swan, C. C. and Brasil, R. M. L. R. F., (2000a), Optimization of Elevated Concrete Foundations for Vibrating Machines, *The University of Iowa, Optimal Design Laboratory, Technical Report No. ODL-00.01*.
- Silva, M. A., Swan, C. C., Arora, J. S. and Brasil, R. M. L. R. F., (2000b), A New Failure Criterion for RC Members Under Biaxial Bending and Axial Load, aceito para publicação no Journal of Structural Engineering da ASCE.
- Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F., Arora, J. S. e Swan, C. C., (2000c), Otimização de Fundações Apoiadas de Máquinas Desbalanceadas, IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, São Paulo.
- Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F., Arora, J. S. e Swan, C. C., (2000d), Um Novo Critério de Ruína Para Barras de Concreto Armado Sujeitas à Flexão Oblíqua Composta Visando Otimização Computacional, IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, São Paulo.
- Sussekind, J. C., (1979), *Curso de Concreto*, Editora Globo, Rio de Janeiro.
- Tedesco, J. W., McDougal, W. G. and Ross, C. A., (1999), *Structural Dynamics: Theory and Applications*, Addison Wesley Longman, Inc.
- Velasco, M. S. L., Vaz, L. E. e Afonso, S. M. B., (1994), Avaliação da Superfície de Colapso de Johansen Através de um Modelo Numérico, *XV CILAMCE - 15th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Anais*, pp. 1376-1385, Belo Horizonte.
- Velasco, M. S. L., Elobi, C. R. e Vaz, L. E., (1995), Dimensionamento Ótimo em Pontos de Lajes de Concreto Armado, *XVI CILAMCE - 16th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Anais*, pp. 1246-1255, Curitiba.

Referências Bibliográficas

- Almeida Neto, E. S., (1989), Introdução a Análise Dinâmica de Fundações de Máquinas, *Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Arora, J. S., (1989), *Introduction to Optimal Design*, McGraw-Hill.
- Arora, J. S., (1999), Optimization of Structures Subjected to Dynamic Loads, *Structural Dynamic Systems, Computational Techniques and Optimization; Optimization Techniques*, Gordon and Breach Science Publishers, pp. 1-72.
- Arora, J. S., Burns, S. A. and Huang, M., (1997), What is Optimization, *Guide to Structural Optimization*, ASCE, 90, pp. 1-24.
- Arora, J. S., Chahande, A. I. and Paeng, J. K., (1991), Multiplier methods for engineering optimization, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 32, pp. 1485-1525.
- Arora, J. S., Huang, M. W. and Hsieh, C. C., (1994), Methods for optimization of nonlinear problems with discrete variables: a review, *Structural Optimization*, 90, pp. 69-85, Springer-Verlag.
- Arya, S., O'Neill, M. and Pincus, G., (1979), *Design of Structures and Foundations for Vibrating Machines*, Gulf Publishing Company.
- Atkinson, K., (1993), *Elementary Numerical Analysis*, Wiley.
- Balling, R. J. and Yao, X., (1997), How to Optimize a Reinforced Concrete Frame, *Guide to Structural Optimization*, ASCE, 90, pp. 123-138.
- Balling, R. J., Gallup, S. S. and McGrath, C. S., (1997), How to Optimize a Reinforced Concrete Column or Beam, *Guide to Structural Optimization*, ASCE, 90, pp. 55-73.

- Bandeira, A. A., (1997), Uma Introdução ao Problema de Contato, Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.
- Bowles, J.E., (1996), *Foundation Analysis and Design*, 5th Ed., McGraw Hill, New York.
- Bresler, B., (1960), Design Criteria for Reinforced Columns under Axial Load and Biaxial Bending, *J. ACI*, 32, pp. 481-490.
- Chahande, A. I. and Arora, J. S., (1994), Optimization of large structures subjected to dynamic loads with the multiplier method, *International Journal For Numerical Methods in Engineering*, 37, pp. 413-430.
- Das, B. M., (1990), *Principles of Foundation Engineering*, PWS-KENT Publishing Company.
- Ferguson, P. M., Breen, J. E. and Jirsa, J. O., (1988), *Reinforced Concrete Fundamentals*, John Wiley & Sons, Inc.
- Fletcher, R., (1985), *Practical Methods of Optimization*, Wiley.
- Fusco, P. B., (1981), *Estruturas de concreto - Solicitações normais*, Guanabara Dois, Rio de Janeiro.
- Fusco, P. B. e Almeida, P. A. O., (1997), Efeito das Vibrações Sobre os Seres Humanos, *Boletim Técnico BT/PEF/9714 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Gill, P. E., Murray, W. and Wright, M. H., (1981), *Practical Optimization*, Academic Press.
- Goldenberg, P., Silva, M. A., Pimenta, P. M. and Brasil, R. M. L. R. F., (1997a), Augmented Lagrangian Optimization of a Portal Frame with Elastoplastic Behavior under Dynamic Loading, *Fifth Pan-American Congress on Applied Mechanics*, pp. 373-376.
- Goldenberg, P., Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F. e Pimenta, P. M., (1997b), Otimização de Placa Metálica no Regime Dinâmico, *XVIII CILAMCE - Congresso Ibero Latino Americano sobre Métodos Computacionais em Engenharia*, Brasília.

- Goldenberg, P., Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F. and Pimenta, P. M., (1997c), Otimização de Coluna em Concreto com Restrições Dinâmicas, *COBEM – Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Bauru.
- Haug, E. J. and Arora, J. S., (1979), *Applied Optimal Design*, Wiley-Interscience.
- Herskovits, J., (1995), A View on Nonlinear Optimization, *Advances in Structural Optimization*, pp.71-116.
- Hsu, C. T., (1988), Analysis and Design of Square and Rectangular Columns by Equation of Failure Surface, *ACI Structural Journal*, ACI, Vol. 85, No. 2, pp. 167-179.
- Kocer, F. and Arora, J. S., (1999), Optimal Design of Nonlinear Structures Subjected to Dynamic Loads with Application to Transmission Line Structures, University of Iowa, Optimal Design Laboratory, Technical Report No. ODL-910.02.
- Leet, K., (1991), *Reinforced Concrete Design*, McGraw-Hill, Inc.
- Luenberger, D. G., (1984), *Linear and Nonlinear Programming*, Addison-Wesley Publishing Company.
- McCormac, J. C., (1988), *Design of Reinforced Concrete*, Addison Wesley Longman, Inc.
- McGregor, J. G., (1992), *Reinforced Concrete, Mechanics & Design*, Prentice Hall.
- Mont'alverne, A. M., (1999), Optimum Design at Points of Reinforced Concrete Slabs Using Mathematical Programming, *XV COBEM – Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica*, Águas de Lindóia-SP.
- Muñoz, P. R. e Hsu, C. T., (1997), Biaxially Loaded Concrete-Encased Composite Columns: Design Equation, *Journal of Structural Engineering*, ASCE, Vol. 123, No. 12, pp. 1576-1585.
- Nawy, E. G., (1990), *Reinforced Concrete, a Fundamental Approach*, Pretence Hall.
- NB-1, (1978), Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado, ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.

- NBR-8800, (1986), Projeto e execução de estruturas de aço de edifícios (Método dos Estados Limites), ABNT – Associação Brasileira de Normas Técnicas.
- Nilson, A. H. and Winter, G., (1986), *Design of Concrete Structures*, McGraw-Hill Book Company.
- Pannell, F. N., (1963), Failure Surfaces for Members in Compression and Biaxial Bending, *J. ACI*, 60, pp. 129-140.
- Pimenta, P. M., Goldenberg, P., Brasil, R. M. L. R. F. e Silva, M. A., (1995a), Aplicações do Lagrangeano Aumentado em Otimização Estrutural com Restrições Dinâmicas, *Jornadas Internacionales de Mecanica Computacional y CAD/CAM*, Anais, pp. 185-193, Concepcion, Chile.
- Pimenta, P. M., Goldenberg, P., Brasil, R. M. L. R. F. e Silva, M. A., (1995b), Otimização Estrutural com Restrições Dinâmicas pelo Método do Lagrangiano Aumentado, *XVI CILAMCE - 16th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering*, Anais, pp. 1264-1272, Curitiba.
- Put, B. M., Pi, Y. and Trahair, N. S., (1999), Biaxial bending of Cold-Formed Z-Beams, *Journal of Structural Engineering, ASCE*, 125/11, pp. 1284-1290.
- Roddis, W. M. K. and Chunnanond, V., (1996), Genetic Algorithms Applied to Single-Criteria Optimization of Reinforced Concrete Design and Detailing, *SL Report 96-1*, University of Kansas Center for Research, Lawrence, KS.
- Roddis, W. M. K., Lucas, W. K. and Chunnonond, V., (1996), Single-Criteria Genetic Optimization for Design and Detailing of Concrete Structures, *Proceedings Computing Congress III*, ASCE, Anaheim, CA.
- Santos, L. M., (1994), *Sub-rotinas Básicas do Dimensionamento de Concreto Armado*, São Paulo, Thot Editora Ltda.

- Shigueme, P., (1995), Análise de Vibrações Livres em Torno de Configurações Deformadas em Placas de Comportamento Geometricamente Não-linear pelo Método dos Elementos Finitos, *Tese de Doutorado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A., (1997), Aplicação do Lagrangiano Aumentado em Otimização Estrutural com Restrições Dinâmicas, *Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A. and Brasil, R. M. L. R. F., (1998), Augmented Lagrangian Optimization of Plates Under Dynamic Loading, *Boletim Técnico BT/PEF/9810 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A. and Brasil, R. M. L. R. F., (1999a), Augmented Lagrangian Optimization of Steel Plates Under Dynamic Loading, *Boletim Técnico BT/PEF/9906 da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo*.
- Silva, M. A. e Brasil, R. M. L. R. F., (1999b), Otimização Lagrangiana de Placas Metálicas sob Esforços Dinâmicos, *I Jornada Científica da Universidade Camilo Castelo Branco, Anais*, São Paulo.
- Silva, M. A. and Brasil, R. M. L. R. F., (1999c), Optimization of Concrete Plates under Dynamic Loading, *XX CILAMCE - 20th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Anais*, São Paulo.
- Silva, M. A., Arora, J. S., Swan, C. C. and Brasil, R. M. L. R. F., (1999), Optimization of Footing Under Vibratory Loading, *The University of Iowa, Optimal Design Laboratory, Technical Report No. ODL-910.11*.
- Silva, M. A., Arora, J. S., Swan, C. C. and Brasil, R. M. L. R. F., (2000a), Optimization of Elevated Concrete Foundations for Vibrating Machines, *The University of Iowa, Optimal Design Laboratory, Technical Report No. ODL-00.01*.

- Silva, M. A., Swan, C. C., Arora, J. S. and Brasil, R. M. L. R. F., (2000b), A New Failure Criterion for RC Members Under Biaxial Bending and Axial Load, aceito para publicação no Journal of Structural Engineering da ASCE.
- Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F., Arora, J. S. e Swan, C. C., (2000c), Otimização de Fundações Aporticadas de Máquinas Desbalanceadas, IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, São Paulo.
- Silva, M. A., Brasil, R. M. L. R. F., Arora, J. S. e Swan, C. C., (2000d), Um Novo Critério de Ruína Para Barras de Concreto Armado Sujeitas à Flexão Oblíqua Composta Visando Otimização Computacional, IV SIMPÓSIO EPUSP SOBRE ESTRUTURAS DE CONCRETO, São Paulo.
- Sussekind, J. C., (1979), *Curso de Concreto*, Editora Globo, Rio de Janeiro.
- Tedesco, J. W., McDougal, W. G. and Ross, C. A., (1999), *Structural Dynamics: Theory and Applications*, Addison Wesley Longman, Inc.
- Velasco, M. S. L., Vaz, L. E. e Afonso, S. M. B., (1994), Avaliação da Superfície de Colapso de Johansen Através de um Modelo Numérico, *XV CILAMCE - 15th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Anais*, pp. 1376-1385, Belo Horizonte.
- Velasco, M. S. L., Elobi, C. R. e Vaz, L. E., (1995), Dimensionamento Ótimo em Pontos de Lajes de Concreto Armado, *XVI CILAMCE - 16th Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering, Anais*, pp. 1246-1255, Curitiba.