Guilherme Mesquita de Almeida

Aplicação de *tuned-mass dampers* para controle de vibrações em
lajes

São Paulo

2016

Guilherme Mesquita de Almeida

Aplicação de *tuned-mass dampers* para controle de vibrações em lajes

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, como parte dos requisitos para a obtenção do Título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração: Engenharia de Estruturas

Orientador: Prof. Dr. Carlos Eduardo Nigro Mazzilli

São Paulo

2016

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Almeida, Guilherme Mesquita de

Aplicação de tuned-mass dampers para controle de vibrações em lajes / G. M. Almeida -- versão corr. -- São Paulo, 2016.
90 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Vibrações 2.Lajes 3.Conforto Ambiental I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Dedico este trabalho a meus pais e meu irmão,
que sempre estiveram ao meu lado.

RESUMO

Esta dissertação propõe uma solução padronizada de aplicação de *Tuned-Mass Dampers* (TMD) para controle de vibrações em lajes baseada na análise das características de carregamentos associados à utilização humana e nas características estruturais mais comuns à engenharia contemporânea. De modo a simplificar sua aplicação técnica, a sintonização é proposta por meio da escolha de componentes pré-determinados para a montagem do TMD e pela distribuição e posicionamento dos mecanismos. A eficácia do sistema é então verificada em um estudo de caso, usando um modelo de elementos finitos de uma laje, antes e depois da aplicação dos mecanismos.

Palavras-chave: *Tuned-Mass Damper*, TMD, Vibrações, Lajes, Conforto.

ABSTRACT

This thesis proposes a standardized solution for the application of Tuned-Mass Dampers to the control of floor vibrations based on the characteristics of the acting loads associated to human usage and the characteristics of the most common structures of the contemporary engineering practice. In order to simplify its usage by the technical community, the tuning is proposed through the selection of pre-determined components for the assembly of the TMD and the choice of disposition and spacing of the mechanisms. The system efficacy is then verified in a computational case study, by means of a finite-element model of a floor, before and after the application of the mechanisms.

Keywords: Tuned-Mass Damper, TMD, Vibrations, Floor, Comfort.

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	1
2. EMBASAMENTO TEÓRICO	2
2.1. CARACTERÍSTICAS ESSENCIAIS DE UM PROBLEMA DINÂMICO	2
2.2. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO	3
2.3. MODELOS MATEMÁTICOS E MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO	15
2.4. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS	18
2.5. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS	36
3. METODOLOGIA.....	42
3.1. DEFINIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO TMD PADRONIZADO.....	42
3.2. DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE ESCOLHA DO <i>TUNED-MASS DAMPER</i>	51
4. ANÁLISES DE CASO	53
4.1. DESCRIÇÃO GERAL	53
4.2. ESTUDO DE CASO 1	55
DADOS GEOMÉTRICOS:	55
CARREGAMENTOS ATUANTES:.....	55
VERIFICAÇÃO ESTATICA CONFORME A ABNT NBR 6118:2013:	55
DEFINIÇÃO DOS <i>TUNED-MASS DAMPERS</i> :	57
AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH:	58
RESULTADOS E DISCUSSÃO:	59
4.3. ESTUDO DE CASO 2	61
DADOS GEOMÉTRICOS:	61
CARREGAMENTOS ATUANTES:.....	61
VERIFICAÇÃO ESTATICA CONFORME A ABNT NBR 6118:2013:	62
DEFINIÇÃO DOS <i>TUNED-MASS DAMPERS</i> :	64
AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH:	64
RESULTADOS E DISCUSSÃO:	65
4.4. ESTUDO DE CASO 3	68
DADOS GEOMÉTRICOS:	68
CARREGAMENTOS ATUANTES:.....	68
VERIFICAÇÃO ESTATICA CONFORME A ABNT NBR 6118:2013:	68
DEFINIÇÃO DOS <i>TUNED-MASS DAMPERS</i> :	70
AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH:	71

RESULTADOS E DISCUSSÃO:	72
4.5. ESTUDO DE CASO 4	74
DADOS GEOMÉTRICOS:	74
CARREGAMENTOS ATUANTES:	74
VERIFICAÇÃO ESTATICA CONFORME A ABNT NBR 6118:2013:	75
DEFINIÇÃO DOS <i>TUNED-MASS DAMPERS</i> :	77
AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH:	77
RESULTADOS E DISCUSSÃO:	78
4.6. ESTUDO DE CASO 5	81
DADOS GEOMÉTRICOS:	81
CARREGAMENTOS ATUANTES:	81
VERIFICAÇÃO ESTATICA CONFORME A ABNT NBR 6118:2013:	81
DEFINIÇÃO DOS <i>TUNED-MASS DAMPERS</i> :	83
AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH:	84
RESULTADOS E DISCUSSÃO:	85
5. CONCLUSÕES	87
6. REFERÊNCIAS	89

1. INTRODUÇÃO

Tuned-Mass Dampers ou TMD's são sistemas altamente eficazes utilizados para o controle passivo de vibrações em estruturas. Consistem basicamente de um elemento inercial conectado por meio de um elemento restaurador e um dissipador ao sistema estrutural cujas vibrações pretende-se controlar, de forma a alterar suas características dinâmicas. Seu princípio de operação baseia-se na ideia de que o TMD entra em ressonância com excitações cuja frequência, por sua vez, é ressonante com algum modo de vibração da estrutura, vindo a dissipar a energia que, caso contrário, atuaria desimpedida sobre a estrutura.

A utilização de TMD's para o controle de vibrações tem sido estudado há décadas, de modo que sua aplicação e comportamento básicos são profundamente conhecidos. Assim, as pesquisas mais recentes sobre o tema possuem como foco a eficácia de sua utilização para diferentes distribuições, funcionalidade em estruturas para as quais sua aplicação é pouco convencional e a otimização dos seus parâmetros, como é o caso do estudo de Daniel e Lavan (2014), que apresentou uma metodologia de otimização de múltiplos *Tuned-Mass Dampers* para o controle passivo de vibrações sísmicas sobre construções tridimensionais irregulares, buscando minimizar a massa adicional utilizada. Outro estudo sobre a utilização de múltiplos TMD's foi de Sakr (2015), que propôs a utilização de vários *Tuned-Mass Dampers* distribuídos por um número limitado de pavimentos de grandes prédios, buscando eliminar as complicações resultantes da grande massa necessária para a utilização de um único mecanismo no topo do edifício. Já Hoang et al (2016), estudou os efeitos da utilização de TMD's para mitigar o impacto de navios em pilares de pontes, reduzindo o risco de colapso. Neste estudo, os mecanismos foram sintonizados de modo a minimizar o impacto e deslocamento da superestrutura por meio dos dados obtidos de testes de impacto em diversas situações com pilares de concreto armado em escala reduzida.

Entretanto, a utilização de *Tuned-Mass Dampers* para o controle passivo de vibrações exige que eles sejam “sintonizados” para cada sistema, dificultando sua empregabilidade na engenharia civil contemporânea, a qual permanece relutante em adotar conceitos

dinâmicos para a verificação e dimensionamento de estruturas tradicionais. Apresenta-se, assim, a possibilidade de desenvolvimento de uma solução padronizada para problemas recorrentes de vibrações para os quais a aplicação de soluções estáticas tradicionais, como o aumento da rigidez estrutural, seja ineficiente ou de custo proibitivo. Tratando do caso particular de vibrações em lajes, a situação é ainda mais crítica devido às exigências arquitetônicas de maiores vãos livres e utilização cada vez mais comum de divisórias leves, que pouco contribuem para a rigidez estrutural e para o amortecimento do sistema, ao contrário dos fechamentos constituídos por alvenaria. Deste modo, propõe-se o desenvolvimento de um conjunto de *Tuned-Mass Dampers* padronizados, assim como de um roteiro de cálculo simples que permita sua adequação para lajes de diferentes dimensões, espessuras e funções visando a uma maior utilização desta tecnologia pelo meio técnico profissional.

A justificativa para o estudo é propor a utilização de componentes pré-definidos para o desenvolvimento do TMD, de modo a minimizar os custos de fabricação e facilitar sua aplicação. Optou-se pela solução por elementos padronizados devido às vantagens que tal abordagem oferece. Mais especificamente, este método apresenta a capacidade de sintonização para uma grande gama de casos devido às várias possibilidades de combinação dos componentes e sua distribuição pela laje, além de facilitar a produção industrial, já que cada elemento poderia ser construído em grande quantidade e sem grandes variações entre si.

2. EMBASAMENTO TEÓRICO

2.1. CARACTERÍSTICAS ESSENCIAIS DE UM PROBLEMA DINÂMICO

De acordo com Clough e Penzien (1982) problemas estruturais dinâmicos se diferenciam daqueles de carregamento estático em dois aspectos importantes. A primeira diferença que deve ser notada é a natureza variável no tempo do problema dinâmico que ocorre devido ao fato de as próprias solicitações variarem no tempo. Desse modo, não existe uma

solução constante como nos problemas estáticos, e em seu lugar cabe ao engenheiro encontrar uma sucessão de soluções correspondentes aos instantes de interesse, o que torna a análise dinâmica mais complexa e vagarosa. Entretanto, a distinção fundamental entre ambos os tipos de análise está no fato de que, enquanto para problemas estáticos a estrutura precisa equilibrar somente os esforços de origem externa, nos problemas dinâmicos torna-se necessário, também, que a estrutura resista aos esforços de inércia gerados pela aceleração. Estas forças inerciais que resistem à aceleração da estrutura são a característica decisiva com relação à categorização dos problemas de análise estrutural entre dinâmicos ou estáticos. Em geral, se as forças de inércia representam uma porção significativa dos carregamentos totais equilibrados pela estrutura, então o caráter dinâmico do carregamento deve ser considerado na solução. Porém, se a variação das deformações e deslocamentos for tão lenta que as forças de inércia sejam desprezíveis, a análise pode ser realizada para o instante desejado de maneira quase-estática, mesmo com o carregamento variando no tempo.

2.2. FORMULAÇÃO DAS EQUAÇÕES DE MOVIMENTO

O objetivo inicial para a realização da análise dinâmica de uma estrutura é a obtenção de seu histórico de deslocamentos quando submetida a uma determinada carga variável no tempo, o qual é utilizado como base para a obtenção das acelerações, esforços solicitantes e tensões da estrutura. São chamados de número de graus dinâmicos de liberdade o número de componentes de deslocamento que devem ser considerados para representar adequadamente o efeito de todas as forças de inércia e elásticas da estrutura. Consequentemente, como as forças inerciais se desenvolvem ao longo de toda a massa do sistema, o número de graus de liberdade é infinito para sistemas com massa continuamente distribuída. Na maioria dos casos, entretanto, a consideração de um número finito de graus de liberdade gera um modelo simplificado cuja precisão é suficiente para as aplicações desejadas, reduzindo o problema à definição do histórico de deslocamentos destas componentes. As equações de movimento, e sua formulação por

equações diferenciais, podem ser obtidas, dentre outras maneiras, por meio da aplicação do Princípio de D'Alembert, do Princípio dos Trabalhos Virtuais ou do Princípio de Hamilton.

O Princípio de D'Alembert, para um ponto material, propõe o equilíbrio dinâmico por meio do fechamento do polígono de forças atuantes em um ponto material, utilizando a força de inércia, e é a maneira mais direta e conveniente de obter as equações de movimento para sistemas simples. A formulação pode ser desenvolvida aplicando-se este princípio ao equilíbrio direto por meio da segunda lei de Newton, indicada na equação 2.2.1, a qual declara que a força resultante em um ponto material ($\vec{P}$) é proporcional à sua aceleração ($\vec{a}$), definida em relação a um referencial inercial, sendo a constante de proporcionalidade uma propriedade do ponto material chamada massa (m).

$$\vec{P} = m\vec{a} \quad (2.2.1)$$

A equação 2.2.1 também pode ser expressa matematicamente como uma equação diferencial, 2.2.2, a qual pode ser reescrita na forma das equações 2.2.3 e 2.2.4 devido ao fato de a massa não variar em função do tempo para a grande maioria dos casos de análise dinâmica.

$$\vec{P}(t) = \frac{d}{dt} \left(m \frac{d\vec{u}}{dt} \right) \quad (2.2.2)$$

$$\vec{P}(t) = m \frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} \equiv m\ddot{\vec{u}}(t) \quad (2.2.3)$$

$$\vec{P}(t) - m\ddot{\vec{u}}(t) = 0 \quad (2.2.4)$$

em que:

$\vec{u}$ é o vetor posição do ponto de massa m ;

os pontos representam a diferenciação com relação ao tempo;

$\vec{P}(t)$ engloba os diversos tipos de força atuantes sobre a massa, sejam forças elásticas, que se opõem aos deslocamentos, forças viscosas lineares, que resistem proporcionalmente à velocidade, ou forças ativas;

$-m\ddot{u}(t)$ é a chamada força de inércia, é responsável por resistir à aceleração.

Supõe-se um oscilador linear de um grau de liberdade sujeito a uma força dinâmica; suas propriedades físicas essenciais são massa (m), rigidez (k), amortecimento viscoso linear (c) e o carregamento excitante $\vec{P}(t)$, todas supostamente concentradas em um único ponto, conforme representação das figuras 1 e 2.

FIGURA 1 - REPRESENTAÇÃO DE UM MODELO DINÂMICO LINEAR ELÁSTICO DE UM GRAU DE LIBERDADE

FIGURA 2 – FORÇAS DE UM MODELO DINÂMICO LINEAR ELÁSTICO DE UM GRAU DE LIBERDADE

Neste caso, a equação de movimento pode ser facilmente obtida do equilíbrio direto de todas as forças que atuam sobre a massa, ou seja, a força externa resultante, as forças de inércia, amortecimento e força elástica, conforme equação 2.2.5.

$$-\vec{f}_m + \vec{f}_c + \vec{f}_k = \vec{P}(t) \quad (2.2.5)$$

sendo:

$\vec{f}_m = -m\ddot{\vec{u}}(t)$, a força de inércia, obtida por meio do princípio de D'Alembert;

$\vec{f}_c = c\dot{\vec{u}}(t)$, o amortecimento viscoso, dependente do coeficiente de amortecimento, c , e da velocidade do corpo;

$\vec{f}_k = k\vec{u}(t)$, a força elástica, obtida a partir da rigidez e do deslocamento;

$\vec{P}(t)$ a resultante das forças externas atuantes.

A equação 2.2.5 pode, portanto, ser reescrita no formato 2.2.6, que representa a equação de movimento de um sistema de um grau de liberdade.

$$m\ddot{\vec{u}}(t) + c\dot{\vec{u}}(t) + k\vec{u}(t) = \vec{P}(t) \quad (2.2.6)$$

Caso o sistema seja razoavelmente complexo e possua diversos pontos de massa ou corpos contínuos interconectados, pode ser difícil realizar o equilíbrio direto de todas as forças atuantes. Nesses casos, uma boa alternativa pode ser a utilização do Princípio dos Trabalhos Virtuais, segundo o qual é nula a soma dos trabalhos realizados pelo conjunto de forças, inclusive as de inércia, que agem sobre um sistema submetido a um deslocamento virtual, ou seja, um deslocamento que satisfaz as equações de vínculo para um dado instante t . Assim, as equações de movimento correspondentes podem ser obtidas por meio da identificação de todos os esforços atuantes, inclusive os esforços internos definidos de acordo com o Princípio de D'Alembert, para, em seguida, introduzir os deslocamentos virtuais correspondentes a cada grau de liberdade e igualar o trabalho realizado a zero. Esta abordagem apresenta como vantagem principal o trabalho virtual ser uma grandeza escalar, podendo ser somado algebricamente, enquanto no Princípio Restrito de D'Alembert as forças atuantes são grandezas vetoriais, de modo que todas as operações devem ser realizadas vetorialmente.

Supondo a aplicação do princípio dos trabalhos virtuais para o caso anterior de um modelo dinâmico elástico linear amortecido de um grau de liberdade e lembrando que as forças atuantes estão identificadas na figura 2, com seu equilíbrio descrito pela equação 2.2.5, têm-se que para um deslocamento virtual $\delta \vec{u}$ não nulo qualquer, o somatório do trabalho realizado por cada uma das forças é dado pelas equações 2.2.7, podendo ser reescrita nas formas 2.2.8 e 2.2.9.

$$\vec{f}_m \cdot \delta \vec{u} - \vec{f}_c \cdot \delta \vec{u} - \vec{f}_k \cdot \delta \vec{u} + \vec{P}(t) \cdot \delta \vec{u} = 0 \quad (2.2.7)$$

$$\left[\vec{f}_m - \vec{f}_c - \vec{f}_k + \vec{P}(t) \right] \cdot \delta \vec{u} = 0 \quad (2.2.8)$$

$$\left[-m\ddot{\vec{u}}(t) - c\dot{\vec{u}}(t) - k\vec{u}(t) + \vec{P}(t) \right] \cdot \delta \vec{u} = 0 \quad (2.2.9)$$

Como $\delta \vec{u}$ é não nulo por definição, a única maneira de a equação 2.2.9 ser verdadeira é se o membro entre colchetes for igual a zero. Obtém-se, desse modo, a equação de movimento 2.2.6 do sistema dinâmico de um grau de liberdade.

O Princípio de Hamilton é outra maneira de obter as equações de equilíbrio. Este método afirma que a soma da variação do trabalho realizado pelas forças não conservativas com a variação do Lagrangeano (energia cinética menos energia potencial) entre dois instantes quaisquer t_1 e t_2 deve ser igual a zero, como expresso pela equação 2.2.10. Ele difere do Princípio dos Trabalhos Virtuais pelo fato de as forças elásticas e inerciais não estarem explicitamente presentes em sua formulação, sendo substituídas pelos termos de variação da energia cinética e potencial. Esta abordagem apresenta como vantagem o fato de lidar exclusivamente com termos escalares, enquanto o princípio dos trabalhos virtuais, apesar de também apresentar formulação exclusivamente escalar, ainda é desenvolvido por meio da utilização de deslocamentos e forças vetoriais.

$$\int_{t_1}^{t_2} (\delta T - \delta V + \delta W_{nc}) dt = 0 \quad (2.2.10)$$

em que:

δT é a variação virtual da energia cinética.

δV é a variação virtual da energia potencial.

δW_{nc} é o trabalho virtual das forças não conservativas.

Aplicando o princípio de Hamilton para o mesmo caso de um grau de liberdade dos exemplos anteriores, temos que a energia cinética total do sistema (T), a energia potencial total (V), e o trabalho das forças não conservativas (δW_{nc}), que neste caso são as forças de amortecimento e a força ativa, são definidos respectivamente pelas equações 2.2.11 a 2.2.13.

$$T = \frac{1}{2} m [\dot{\vec{u}}(t) \cdot \dot{\vec{u}}(t)] \quad (2.2.11)$$

$$V = \frac{1}{2} k [\vec{u}(t) \cdot \vec{u}(t)] \quad (2.2.12)$$

$$\delta W_{nc} = \vec{P}(t) \cdot \delta \vec{u} - c \dot{\vec{u}}(t) \cdot \delta \vec{u} \quad (2.2.13)$$

Substituindo-as na equação 2.2.10, obtém-se a equação 2.2.14.

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{\vec{u}}(t) \cdot \delta \vec{u} - c \dot{\vec{u}}(t) \cdot \delta \vec{u} - k \vec{u}(t) \cdot \delta \vec{u} + \vec{P}(t) \cdot \delta \vec{u}] dt = 0 \quad (2.2.14)$$

Integrando seu primeiro termo por partes, conforme demonstrado na equação 2.2.15, e tratando-se de um problema variacional com extremos fixos, $\delta \vec{u}$ é nulo nos limites de integração t_1 e t_2 , desenvolve-se a equação 2.2.16.

$$\int_{t_1}^{t_2} [m \ddot{\vec{u}}(t) \cdot \delta \vec{u}] dt = m \vec{u}(t) \cdot \delta \vec{u} \Big|_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} [m \dot{\vec{u}}(t) \cdot \delta \dot{\vec{u}}] dt \quad (2.2.15)$$

$$\int_{t_1}^{t_2} \left[-m\ddot{u}(t) - c\dot{u}(t) - k\bar{u}(t) + \bar{P}(t) \right] \cdot \delta \bar{u} \, dt = 0 \quad (2.2.16)$$

Sendo $\delta \bar{u}$ uma variação arbitrária por definição, conclui-se que a única maneira de a equação 2.2.16 ser sempre verdadeira é se o termo entre colchetes for igual a zero, ou seja, mediante a equação 2.2.6 obtida também por meio do equilíbrio direto e do princípio dos trabalhos virtuais.

A excitação de um sistema, entretanto, não precisa ser induzida necessariamente por meio de um carregamento variável no tempo, como no exemplo anterior das figuras 1 e 2. Ela também pode ser gerada por meio da movimentação do suporte. A figura 3 indica um sistema linear elástico amortecido de um grau de liberdade, com um corpo de massa m , uma mola elástica linear de rigidez k , um amortecedor viscoso linear com coeficiente de amortecimento c e excitação gerada pela oscilação $\vec{s}(t)$ do apoio.

FIGURA 3 - MODELO ELÁSTICO LINEAR DE UM GRAU DE LIBERDADE COM EXCITAÇÃO DE SUPORTE

Ou seja, neste caso, a equação de movimento do sistema pode ser descrita por equilíbrio direto de forças segundo a equação 2.2.17.

$$-\vec{f}_m + \vec{f}_c + \vec{f}_k = 0 \quad (2.2.17)$$

em que $\vec{f}_m = -m\ddot{\vec{u}}_T(t)$

Sendo $\vec{u}(t)$ o deslocamento total da massa com relação ao eixo de referência, obtida da soma do deslocamento do apoio $\vec{s}(t)$ e do deslocamento entre a massa e o apoio $\vec{u}(t)$, as equações 2.2.18 e 2.2.19 podem ser obtidas.

$$m[\ddot{\vec{s}}(t) + \ddot{\vec{u}}(t)] + c\dot{\vec{u}}(t) + k\vec{u}(t) = 0 \quad (2.2.18)$$

$$m\ddot{\vec{u}}(t) + c\dot{\vec{u}}(t) + k\vec{u}(t) = -m\ddot{\vec{s}}(t) \equiv \vec{P}_{eq}(t) \quad (2.2.19)$$

Ou seja, a excitação de suporte causa o mesmo comportamento ao sistema que uma força externa atuante. Esta força é igual ao produto da massa pela aceleração, com o sinal negativo indicando que o carregamento equivalente possui sentido oposto ao da aceleração do suporte.

Outra influência comum a sistemas dinâmicos, principalmente TMD's, é a da força da gravidade quando não perpendicular ao movimento. Considerando o caso do sistema dinâmico das figuras 1 e 2, porém com a massa apoiada em um plano inclinado de ângulo γ em relação à aceleração da gravidade, conforme desenho da figura 4, sua equação de movimento obtida por equilíbrio direto pode ser expressa pela equação 2.2.20.

FIGURA 4 - MODELO ELÁSTICO LINEAR DE UM GRAU DE LIBERDADE EM PLANO INCLINADO

$$m\ddot{\vec{u}}_T(t) + c\dot{\vec{u}}_T(t) + k\vec{u}_T(t) = \vec{P}(t) + m\vec{g}_u \quad (2.2.20)$$

Em que $m\vec{g}_u$ corresponde à componente do peso na direção de $\vec{u}$, cujo módulo é dado por $m\|\vec{g}\|\cos\gamma$

Neste caso, o deslocamento total $\vec{u}_T(t)$ é obtido da soma de duas componentes. Uma delas, $\vec{u}_p(t)$, é o deslocamento resultante da força atuante de excitação, $\vec{P}(t)$; enquanto a segunda, $\vec{u}_g$, é o deslocamento resultante da ação da gravidade, cujo módulo é constante e igual a $\frac{m\vec{g}_u}{k}$. Consequentemente, a equação 2.2.20 pode ser reescrita resultando na equação 2.2.21.

$$\vec{u}_T(t) = \vec{u}_p(t) + \vec{u}_g$$

$$m\ddot{\vec{u}}(t) + c\dot{\vec{u}}(t) + k[\vec{u}(t) + \vec{u}_g] = \vec{P}(t) + m\vec{g}_u \rightarrow m\ddot{\vec{u}}(t) + c\dot{\vec{u}}(t) + k\vec{u} - \vec{P}(t) = 0 \quad (2.2.21)$$

Conclui-se, portanto, que o efeito da força gravitacional não afeta o sistema dinâmico desde que as equações de movimento sejam expressas em relação ao ponto de equilíbrio estático do sistema.

Independente de qual método seja utilizado, a formulação das equações de movimento é uma etapa essencial em uma análise dinâmica, pois é da sua solução que se obtém o comportamento da estrutura no tempo. Assim, utilizando como base o sistema elástico linear amortecido de um grau de liberdade dos exemplos anteriores, algumas conclusões podem ser tiradas sobre as possíveis soluções das equações de movimento.

Supondo que não haja uma força atuante de excitação, o problema é chamado de vibrações livres, causado por uma perturbação nas suas condições iniciais cinemáticas, e se divide em duas categorias, sistemas amortecidos ou não. No caso de sistemas não amortecidos, seu comportamento descreve um movimento harmônico simples que obedece à equação 2.2.22.

$$\|\vec{u}(t)\| = \rho \cos(\varpi t - \theta) \quad (2.2.22)$$

sendo:

$\varpi = \sqrt{\frac{k}{m}}$, a velocidade angular do movimento, em radianos por segundo, também chamado de frequência angular natural;

$\rho = \sqrt{\|\vec{u}(0)\|^2 + \left[\frac{\|\dot{\vec{u}}(0)\|}{\varpi} \right]^2}$, a amplitude da oscilação;

$\theta = \text{atan}\left(\frac{\|\vec{u}(0)\|}{\varpi \|\dot{\vec{u}}(0)\|} \right)$, o ângulo de fase.

Caso o problema de vibrações seja amortecido, três soluções são possíveis. A primeira delas é chamada de criticamente amortecida e ocorre quando o amortecimento do sistema é exatamente igual ao chamado amortecimento crítico, $c_c = 2m\varpi$, que corresponde ao mínimo valor para o qual a vibração livre não apresenta nenhuma oscilação. Neste caso, a resposta livre do sistema retorna para a posição zero (estática) seguindo um decaimento de forma exponencial, cujo comportamento é dado pela equação 2.2.23.

$$\|\vec{u}(t)\| = \left[\|\vec{u}(0)\|(1 - \varpi t) + \|\dot{\vec{u}}(0)\|t \right] e^{-\varpi t} \quad (2.2.23)$$

A segunda solução é chamada de sub-amortecida, e ocorre quando o amortecimento do sistema é inferior ao crítico. Ou seja, chamando de taxa de amortecimento ξ a relação entre o amortecimento do sistema e o amortecimento crítico, a solução sub-amortecida ocorre para $0 < \xi < 1$. Nesta solução, o sistema oscila ao redor da posição zero com a amplitude dos deslocamentos diminuindo constantemente, conforme a equação 2.2.24.

$$\|\vec{u}(t)\| = \rho e^{-\xi \varpi t} \cos(\varpi_D t - \theta) \quad (2.2.24)$$

sendo:

$\varpi_D = \varpi \sqrt{1 - \xi^2}$, a velocidade angular amortecida, que pode ser considerada praticamente igual à velocidade angular não amortecida para a maioria dos casos comuns na prática contemporânea da engenharia civil devido às pequenas taxas de amortecimento encontradas;

$$\rho = \sqrt{\left[\frac{\|\dot{\vec{u}}(0)\| + \|\vec{u}(0)\| \xi \varpi}{\varpi_D} \right]^2 + \|\vec{u}(0)\|^2}, \text{ a amplitude da oscilação;}$$

$$\theta = \text{atan} \left[\frac{\|\dot{\vec{u}}(0)\| + \|\vec{u}(0)\| \xi \varpi}{\varpi_D \|\vec{u}(0)\|} \right], \text{ o ângulo de fase.}$$

Por fim, a terceira solução possível é chamada de superamortecida, e acontece quando o amortecimento do sistema é maior que o amortecimento crítico, ou seja $\xi > 1$. Como no caso criticamente amortecido, o sistema não oscila ao redor do ponto zero, porém, sua velocidade de retorno é reduzida devido ao excesso de amortecimento. Esse comportamento é descrito pela equação 2.2.25, em que A e B são coeficientes que dependem das condições iniciais.

$$\|\vec{u}(t)\| = [A \sinh(\hat{\varpi} t) + B \cosh(\hat{\varpi} t)] \quad (2.2.25)$$

em que:

$$\hat{\varpi} = \varpi \sqrt{\xi^2 - 1}, \text{ é a velocidade angular superamortecida do sistema;}$$

Abandonando a ideia de sistemas de vibração livre, e admitindo que as equações de equilíbrio apresentem uma força excitante harmônica de amplitude p_0 e velocidade angular ϖ , a equação de movimento pode ser reescrita como 2.2.26, que descreve o chamado problema de carregamentos harmônicos.

$$m\ddot{u}(t) + c\dot{u}(t) + k\bar{u}(t) = p_0 \sin(\varpi t) \quad (2.2.26)$$

Supondo que o amortecimento seja sub-crítico, como é o caso na quase totalidade de problemas comuns à engenharia civil atual, a sua solução é descrita pela equação 2.2.27 em que A e B dependem das condições iniciais do problema.

$$\begin{aligned} \|\bar{u}(t)\| = & [A \sin(\varpi_d t) + B \cos(\varpi_d t)] e^{-\xi \varpi t} \\ & + \frac{p_0}{k} \frac{1}{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2} [(1 - \beta^2) \sin(\varpi t) - 2\xi\beta \cos(\varpi t)] \end{aligned} \quad (2.2.27)$$

sendo:

$\beta \equiv \frac{\varpi}{\varpi_d}$, a relação entre a frequência excitante e a frequência natural do sistema.

Quando o sistema atinge o estado estacionário, entretanto, a influência das condições iniciais deixa de importar, e a equação 2.2.27 pode ser reescrita como 2.2.28.

$$\|\bar{u}(t)\| = \rho \sin(\varpi t - \theta) \quad (2.2.28)$$

em que:

$\rho = \frac{p_0}{k} \frac{1}{\sqrt{(1 - \beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}}$, é a amplitude do sistema no estado estacionário, cujo valor

máximo ocorre na ressonância, ou seja, para $\beta = 1$;

$\theta = \text{atan}\left(\frac{2\xi\beta}{1 - \beta^2}\right)$, é o ângulo de fase calculado para o primeiro ou segundo quadrante.

Podemos chamar a relação entre a amplitude resultante da resposta dinâmica e o deslocamento estático causado pela força p_0 como fator de magnificação dinâmica, D, cujo valor é dado pela equação 2.2.29. É importante notar que conforme a frequência excitante

se aproxime da frequência natural, D assume valores cada vez maiores, tendendo ao infinito quando $\beta = 1$, se o sistema não possui amortecimento, ou seja, $\xi = 0$. Esse efeito é chamado de ressonância externa clássica.

$$D = \frac{\rho}{p_0/k} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta^2)^2 + (2\xi\beta)^2}} \quad (2.2.29)$$

Considerando agora sistemas de múltiplos graus de liberdade, os mesmos conceitos podem ser aplicados, porém com algumas modificações. Isso, pois cada grau de liberdade de um sistema apresenta um modo de vibração, o qual possui as mesmas características que um sistema de um único grau de liberdade. Desse modo, um sistema de múltiplos graus de liberdade apresenta múltiplas frequências naturais, modos de vibração, taxas de amortecimento e massas modais, obtidos dos seus autovalores e autovetores.

2.3.MODELOS MATEMÁTICOS E MÉTODOS DE DISCRETIZAÇÃO

A descrição analítica de um fenômeno e seus processos por meio de equações ou inequações é chamada de modelo matemático. Ela é desenvolvida por meio de suposições sobre como os processos ocorrem e, em seguida, pela utilização das leis apropriadas que regem seus respectivos comportamentos. Muitas vezes caracterizado por equações diferenciais e/ou integrais em domínios geometricamente complexos, os modelos matemáticos frequentemente se baseiam nas leis fundamentais da física, como os princípios de conservação de massa, de momento linear e de energia, podendo ser simplificados como um conjunto de equações que representam as características essenciais de um fenômeno físico em termos das variáveis que descrevem o sistema.

Ao se tratar do desenvolvimento de um modelo matemático para um problema de análise dinâmica de estruturas, é importante notar que parte considerável da complexidade

provém do fato de as forças de inércia resultarem da aceleração dos deslocamentos estruturais, os quais, por sua vez, são influenciados pelas próprias forças de inércia. Esta dependência mútua pode ser solucionada diretamente por meio da formulação do problema por equações diferenciais, porém as acelerações e deslocamentos devem ser definidos para cada posição ao longo dos elementos devido ao fato de a massa da estrutura distribuir-se continuamente ao longo de suas dimensões. Torna-se necessária, assim, a consideração do problema por meio de equações diferenciais parciais com tempo e posição como variáveis independentes. Consequentemente, de modo a obter soluções analíticas, os vários processos desenvolvidos fazem uso de hipóteses simplificadoras, tal qual a idealização por pontos de materiais, que aborda o modelo dinâmico por meio da suposição de que a massa do sistema esteja distribuída em pontos discretos. Essa idealização facilita a obtenção da solução analítica devido ao fato de as forças de inércia se desenvolverem exclusivamente nesses pontos de massa. A idealização por pontos de massa é simplesmente uma maneira de limitar o número de graus de liberdade que devem ser considerados na análise de problema dinâmicos estruturais, e é mais eficiente quando se tratar de sistemas nos quais uma grande parcela da massa total está realmente concentrada em alguns pontos discretos. Pode-se, assim, considerar sem grande prejuízo que a massa da estrutura está localizada nestes locais e que o restante da estrutura não possui massa nenhuma.

Nos casos em que a massa se distribui de maneira relativamente uniforme pela estrutura, entretanto, uma aproximação alternativa deve ser considerada para limitar o número de graus de liberdade. Uma opção é o método dos deslocamentos generalizados, que se baseia na suposição de que a deformada da estrutura pode ser representada como a combinação linear de uma série de padrões de deslocamento. Esses padrões tornam-se, então, a base de decomposição da solução $u(x)$. Os deslocamentos de uma viga biapoiada, por exemplo, podem ser expressos pela soma de contribuições senoidais indicada pela equação 2.3.1.

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \quad (2.3.1)$$

De um modo geral para a viga biapoiada, qualquer campo de deslocamentos compatível com as condições de vinculação definidas pode ser representado por meio de uma série de infinitos componentes senoidais. Nesta abordagem, as amplitudes das funções de projeção senoidais (aqui com interessante interpretação de ondas estacionárias) representam as coordenadas do sistema enquanto os infinitos coeficientes b_n da série representam os infinitos graus de liberdade do elemento. A vantagem deste modelo é que uma boa representação do formato real de elementos lineares pode ser obtida por meio do conjunto truncado de ondas senoidais, de modo que uma aproximação de três graus de liberdade conteria somente três termos da série, por exemplo. Este conceito pode ser ampliado considerando que a escolha de ondas harmônicas para a representação dos padrões de deslocamento foi arbitrária. Em geral, qualquer função de forma $\psi_n(x)$ que seja compatível com as condições de vinculação geométrica e que possua as propriedades de continuidade necessárias pode ser utilizada. Assim, uma expressão ainda mais genérica para o método é dada pela equação 2.3.2.

$$u(x) = \sum_n Z_n \psi_n(x) \quad (2.3.2)$$

Para qualquer conjunto de funções de deslocamento $\psi_n(x)$, a forma resultante da estrutura deformada dependerá da amplitude dos termos Z_n , os quais serão denominados *coordenadas generalizadas*, com o número adotado de padrões de forma representando o número de graus de liberdade considerados na idealização. Em geral, maior precisão pode ser obtida em análises dinâmicas de estruturas modeladas por funções de forma do que pela aproximação por massas concentradas, porém é necessário notar que o uso de coordenadas generalizadas exige uma capacidade computacional muito maior para cada grau de liberdade empregado.

Uma terceira maneira de expressar os deslocamentos de qualquer estrutura é por meio de um número finito de coordenadas discretas de deslocamento, que combina algumas características de ambos os sistemas de discretização discutidos anteriormente. Esta abordagem, que é a base do método de análise por elementos finitos de uma estrutura,

oferece uma idealização conveniente e confiável de um sistema e é aplicável a estruturas de qualquer tipo (compostas por elementos unidimensionais, em casca ou mesmo tridimensionais quaisquer). Para elementos de barra, este método pode ser aplicado dividindo-os em um número apropriado de segmentos de comprimento arbitrário. As extremidades de cada segmento são chamadas pontos nodais, e o deslocamento destes pontos são as coordenadas generalizadas da estrutura. Desse modo, o campo de deslocamentos da estrutura como um todo pode ser expresso em termos destas coordenadas por meio de um conjunto de funções de forma similares àquelas indicadas previamente, porém definidas localmente, no domínio de cada elemento finito. Neste caso, entretanto, as funções são chamadas de *funções de interpolação* por definirem a forma entre os deslocamentos nodais de dois pontos, sendo possível que este conceito seja estendido para elementos bidimensionais e tridimensionais. Assim, podemos listar as principais vantagens da análise pelo método dos elementos finitos como a possibilidade de introduzir um número qualquer de graus de liberdade simplesmente dividindo a estrutura no número apropriado de elementos finitos; a simplicidade computacional que pode ser obtida ao escolher as mesmas funções de deslocamento para cada elemento; e o fato de que as equações desenvolvidas por esse método serem amplamente desacopladas já que cada elemento influencia somente seus elementos vizinhos, simplificando a solução.

2.4.MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

O método dos elementos finitos é um método numérico amplamente utilizado nos dias atuais devido à sua grande versatilidade e poder de análise para problemas geométrica ou fisicamente complexos. Nele, um domínio Ω , ou seja, a região geométrica sobre a qual as equações são resolvidas, é discretizado como um conjunto de subdomínios Ω_e , cada um deles tendo suas características representadas de maneira aproximada. O motivo por trás desta abordagem é a simplicidade obtida em representar uma função complexa por meio de vários trechos de funções simples, permitindo que a solução total seja representada mediante as equações definidas internamente em cada elemento, as quais são desenvolvidas de modo a capturar os efeitos locais e de apresentar continuidade nas

regiões de contato com os elementos vizinhos. Os resultados de cada elemento são, então, reunidos seguindo regras específicas para que cada subdomínio seja considerado em sua posição original.

É importante notar, entretanto, que aproximações são introduzidas em diversos estágios, gerando erros durante o processo que impedem o método dos elementos finitos de fornecer o resultado exato para o problema analisado. A própria divisão geométrica em elementos finitos pode não ser fiel, de modo que o domínio resultante da união dos subdomínios, Ω_h , não necessariamente coincide com o original Ω . Outra etapa que pode gerar inconsistências é a de representação do fenômeno físico no desenvolvimento das equações internas dos elementos, já que geralmente as variáveis desconhecidas do problema, u_i , são representadas por meio da combinação linear de funções ψ_n e coeficientes Z_n , como previamente mencionado. Neste caso, os valores dos coeficientes não conhecidos são obtidos por meio da resolução das equações de cada elemento. As funções ψ_n são frequentemente escolhidas como polinomiais e chamadas de funções de interpolação. Por fim, erros também podem ocorrer devido a limitações computacionais matemáticas (truncamento e arredondamento) na resolução do sistema completo de equações. O valor destes erros não é simples, mas, em alguns casos particulares, pode ser estimado. Obviamente, a possibilidade de que alguns dos erros mencionados sejam nulos existe, e no caso de todos serem nulos, o modelo oferece a solução exata do problema.

Estas características são exemplificadas pelo modelo da figura 5, que busca calcular o perímetro de um círculo de raio R supondo que a solução exata ($P = 2\pi R$) não seja conhecida. Em primeiro lugar é realizada a discretização do modelo em um conjunto de elementos finitos por meio da divisão do círculo em n de segmentos de reta, os subdomínios, que podem ou não ter o mesmo comprimento. O conjunto destes subdomínios é chamado malha de elementos e os pontos de contato entre eles são chamados de nós.

FIGURA 5 – DETERMINAÇÃO DO PERÍMETRO DE UM CÍRCULO

Definidos os subdomínios, são desenvolvidas as equações para cada elemento isoladamente, de modo a calcular suas variáveis de interesse. No caso, sendo h_e a dimensão dos segmentos de reta Ω_e da malha, seu comprimento típico é dado pela equação 2.4.1, chamada de equação do elemento.

$$h_e = 2R \sin\left(\frac{\theta_e}{2}\right) \quad (2.4.1)$$

Obtidas as variáveis de interesse de todos os elementos, o próximo passo é reunir estes dados de uma maneira lógica, um processo chamado montagem das equações dos elementos. Nesta etapa, o valor aproximado do perímetro do círculo é calculado baseado na ideia de que a soma do perímetro total do polígono Ω_h seja aproximadamente igual à soma dos comprimentos dos segmentos de reta individuais. Chamando P_n a aproximação do perímetro real e supondo que a malha seja uniforme, o perímetro aproximado para um número n de elementos pode ser dado pela equação 2.4.2.

$$P_n = n \left[2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \right] \quad (2.4.2)$$

Neste problema bastante simples, o valor exato é conhecido. Assim, é possível estimar o erro da aproximação e mostrar que a solução P_n converge para o valor exato P quando n tende a infinito. Considerando um elemento típico Ω_e , o erro da aproximação é obtido da diferença entre o comprimento do arco e do segmento de reta correspondente, conforme indicado pela equação 2.4.3, e, conseqüentemente, o erro total é apresentado pela equação 2.4.4. É possível, então, provar que quando n tende a infinito, o erro tende a zero.

$$E_e = \frac{2R\pi}{n} - 2R \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (2.4.3)$$

$$E = nE_e = 2R\pi - 2Rn \sin\left(\frac{\pi}{n}\right) \quad (2.4.4)$$

A substituição $x = 1/n$ na equação 2.4.4 permite a obtenção da equação 2.4.5, a qual quando resolvida prova que o erro no cálculo do perímetro tende a zero quando o número de elementos utilizados tende a infinito.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} E = 2\pi R - \lim_{x \rightarrow 0} \left(2R \frac{\sin \pi x}{x} \right) = 2\pi R - \lim_{x \rightarrow 0} \left(2\pi R \frac{\cos \pi x}{1} \right) = 2\pi R - 2\pi R = 0 \quad (2.4.5)$$

Este exemplo ilustra a importante característica do método dos elementos finitos: o fato de sua precisão poder ser aumentada significativamente por meio do refinamento da malha, que pode ou não conter mais de um tipo de elemento quando necessário, com a condição que a interface de todos os elementos seja compatível e contínua. Neste caso, as equações internas devem ser desenvolvidas para cada tipo de elemento utilizado.

No método dos elementos finitos, duas categorias de modelo são consideradas: modelos de parâmetros concentrados e modelos baseados em mecânica dos meios contínuos, respectivamente chamados de modelos matemáticos de sistemas discretos e de sistemas contínuos. Em um modelo matemático de parâmetros concentrados, a resposta total do sistema é diretamente descrita por um número finito de variáveis de estado, enquanto em um modelo mecânico contínuo a formulação das equações é realizada por meio de

equações diferenciais. A solução exata para as equações diferenciais, que respeita todas as condições de contorno, só pode ser obtida para modelos matemáticos bem simples, de modo que se torna necessária a aplicação de métodos numéricos, os quais basicamente simplificam um sistema matemático contínuo em uma idealização discreta que pode ser resolvida da mesma maneira que um problema de parâmetros concentrados.

Essencialmente, a resolução dos modelos de parâmetros concentrados passa por algumas etapas distintas. A primeira é a idealização do sistema como um conjunto de elementos, para os quais serão estabelecidos os requisitos de equilíbrio dinâmico em função das variáveis de estado. Em seguida, os requerimentos de interconexão dos elementos são utilizados para o desenvolvimento dos conjuntos de equações, permitindo que seja calculada a resposta do sistema mediante a resolução de suas equações. Essas etapas são seguidas independentemente de qual o tipo de problema considerado, sejam estacionários, de propagação ou de autovalores.

Problemas estacionários são definidos como problemas em que a resposta do sistema não muda com o tempo, de modo que as variáveis de estado que a descrevem podem ser obtidas da solução de um conjunto de equações que não envolvem o tempo como variável. Já nos problemas de propagação, a resposta do sistema em análise é variável. A princípio, este tipo de análise respeita os mesmos processos que os problemas estacionários, porém apresentando cargas atuantes, variáveis de estado e, principalmente, relações de equilíbrio dos elementos dependentes do tempo. Caso a influência do tempo nas condições de equilíbrio seja negligenciável, o modelo pode ser resolvido diretamente como um caso de problema estacionário com a substituição da carga variável pela carga atuante no momento de interesse. Esse tipo de análise é chamada de pseudo-estacionária. Porém, caso a dependência do tempo nas relações de equilíbrio gere efeitos significativos, o problema é classificado propriamente como de propagação. Por fim, problemas de autovalores são problemas para os quais não existe uma única solução exata. Eles podem ocorrer tanto em problemas estacionários, quanto em problemas de propagação, e seu objetivo é, portanto, calcular as várias soluções possíveis do sistema.

As etapas básicas da solução de um modelo matemático de sistemas contínuos são bastante similares às empregadas para a análise de características concentradas, com a diferença que, ao invés de lidar com elementos discretos, o foco do processo é em

elementos diferenciais típicos com o objetivo de obter as equações diferenciais que expressem suas relações de equilíbrio. Essas equações diferenciais devem ser válidas para todo o domínio e necessitam das condições de contorno e condições iniciais para que a solução possa ser calculada.

Sejam os sistemas discretos ou contínuos, duas abordagens podem ser utilizadas para gerar o conjunto de equações diferenciais que governam seu comportamento, o método diferencial e o método variacional. No método de formulação diferencial, os requerimentos constituintes e de equilíbrio dinâmico dos elementos típicos são estabelecidos em termos das variáveis de estado, gerando um sistema de equações diferenciais que pode possivelmente apresentar todos os requisitos de compatibilidade, ou seja, de interconectividade dos elementos, devido ao fato de a solução ser necessariamente contínua. Entretanto, na maioria dos casos as reações precisam ser suplementadas pela consideração de outras equações diferenciais que imponham as restrições necessárias às variáveis de estado para que as condições de contorno sejam respeitadas. Já o método variacional de estabelecer as equações de equilíbrio do sistema se baseia em calcular seu potencial total Π e utilizar o fato de que ele é estacionário, ou seja, $\delta\Pi = 0$ com relação às variáveis de estado. Esta abordagem fornece uma poderosa ferramenta para a análise de sistemas contínuos devido ao fato de automaticamente englobar algumas condições de contorno e apresenta algumas vantagens sobre o método diferencial, como por exemplo o fato de as equações de equilíbrio dinâmico serem relativamente fáceis de construir por considerar variáveis escalares ao invés de vetoriais.

Com relação ao método dos elementos finitos propriamente dito, suponha-se um corpo tridimensional qualquer em equilíbrio estático, localizado em um sistema de coordenadas estacionário X , Y e Z . Este corpo é vinculado ao longo da área S_u da superfície com deslocamentos determinados U^{Su} e está sujeito a pressões de superfície f^{Sf} ao longo da área S_f . Além disso, ele se encontra sujeito a forças externas de volume aplicadas f^V e cargas concentradas R^i_C , em que i denota o ponto de aplicação da carga. Em geral, forças externas aplicadas apresentam três componentes correspondentes aos eixos X , Y e Z .

$$\mathbf{f}^V = \begin{bmatrix} f_X^V \\ f_Y^V \\ f_Z^V \end{bmatrix} \quad \mathbf{f}^{Sf} = \begin{bmatrix} f_X^{Sf} \\ f_Y^{Sf} \\ f_Z^{Sf} \end{bmatrix} \quad \mathbf{R}_C^i = \begin{bmatrix} R_{CX}^i \\ R_{CY}^i \\ R_{CZ}^i \end{bmatrix}$$

Já os deslocamentos do corpo em relação à configuração original, descarregada, são chamados de $\mathbf{U}$ e são medidos, também, em relação aos eixos do sistema, sendo $\mathbf{U} = \mathbf{U}^{Su}$ na área de superfície Su e:

$$\mathbf{U}(X, Y, Z) = \begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix}$$

As deformações correspondentes a $\mathbf{U}$ são $\boldsymbol{\varepsilon}^T = [\varepsilon_{xx} \quad \varepsilon_{yy} \quad \varepsilon_{zz} \quad \gamma_{xy} \quad \gamma_{yz} \quad \gamma_{zx}]$ em que as componentes são dadas pelas equações 2.4.6 a 2.4.11.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{\partial U}{\partial X} \quad (2.4.6)$$

$$\varepsilon_{yy} = \frac{\partial V}{\partial Y} \quad (2.4.7)$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{\partial W}{\partial Z} \quad (2.4.8)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial U}{\partial Y} + \frac{\partial V}{\partial X} \quad (2.4.9)$$

$$\gamma_{yz} = \frac{\partial V}{\partial Z} + \frac{\partial W}{\partial Y} \quad (2.4.10)$$

$$\gamma_{zx} = \frac{\partial W}{\partial X} + \frac{\partial U}{\partial Z} \quad (2.4.11)$$

Já o estado de tensões do corpo é dado pela equação 2.4.12.

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{E}\boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\tau}^I \quad (2.4.12)$$

sendo que:

$\boldsymbol{\tau}^I$ denota as tensões iniciais;

$\mathbf{E}$ corresponde à matriz constitutiva do material.

$\boldsymbol{\tau}^T = [\tau_{xx} \quad \tau_{yy} \quad \tau_{zz} \quad \tau_{xy} \quad \tau_{yz} \quad \tau_{zx}]$ e representa as tensões correspondentes a $\boldsymbol{\varepsilon}$.

Dada então a geometria do corpo, os esforços aplicados $\mathbf{f}^{Sf}, \mathbf{f}^V, \mathbf{R}_i^C$, $i=1, 2, \dots$, as condições de apoio em S_u , a lei de comportamento tensão-deformação do material e as tensões iniciais, é possível calcular os deslocamentos $\mathbf{U}$ e suas correspondentes deformações $\boldsymbol{\varepsilon}$ e tensões $\boldsymbol{\tau}$. Neste caso, a solução por meio de elementos finitos é obtida utilizando-se o princípio dos trabalhos virtuais, o qual afirma que o corpo em questão, estando em equilíbrio estático, apresenta trabalho virtual interno total igual ao trabalho virtual externo total para qualquer deslocamento virtual, resultando na equação 2.4.13. Caso o corpo esteja em equilíbrio dinâmico, entretanto, as forças de volume devem conter também as forças de inércia.

$$\int_V \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^T \boldsymbol{\tau} dV = \int_V \bar{\mathbf{U}}^T \mathbf{f}^V dV + \int_{Sf} \bar{\mathbf{U}}^{SfT} \mathbf{f}^{Sf} dS + \sum_i \bar{\mathbf{U}}^{iT} \mathbf{R}_C^i \quad (2.4.13)$$

em que:

$\bar{\mathbf{U}}$ representa os deslocamentos virtuais;

$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}$ denota as correspondentes deformações virtuais.

Estas considerações se baseiam na ideia de que o corpo esteja adequadamente vinculado para que uma única solução de deslocamentos seja possível, porém, o teorema dos trabalhos virtuais também é válido para o caso em que os apoios sejam substituídos por suas respectivas reações. Neste caso a área de superfície Sf na qual atuam pressões conhecidas corresponde à área total de superfície do corpo, de modo que é conceitualmente mais simples e expedito inicialmente desconsiderar as condições de

contorno do deslocamento correspondentes aos apoios no desenvolvimento das equações que governam os elementos finitos, e só impor os deslocamentos correspondentes aos vínculos imediatamente antes da solução do sistema. O método dos elementos finitos, então, representa o corpo tridimensional como um conjunto de elementos finitos discretos interconectados nos pontos nodais de suas divisórias, e considera os deslocamentos como medidos em relação a um sistema local x, y, z convenientemente selecionado em cada elemento em função dos deslocamentos nos seus n pontos nodais. Desse modo, para um elemento m , os deslocamentos locais são dados pela equação 2.4.14.

$$\mathbf{u}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}} \quad (2.4.14)$$

sendo:

$\mathbf{H}^{(m)}$ a matriz de interpolação dos deslocamentos para o elemento m . Sua definição depende da escolha dos elementos finitos, sua geometria e número de nós.

$\hat{\mathbf{U}}$ o vetor dos três deslocamentos globais U_i, V_i e W_i nos pontos nodais, ou seja, é um vetor de dimensão $3N$ na seguinte forma:

$$\hat{\mathbf{U}}^T = [U_1 \ V_1 \ W_1 \quad U_2 \ V_2 \ W_2 \quad \dots \quad U_N \ V_N \ W_N] = [\mathbf{U}_1 \ \mathbf{U}_2 \ \dots \ \mathbf{U}_N]$$

Embora todos os deslocamentos nodais (e rotações) estejam contidos em $\hat{\mathbf{U}}$, cada elemento só possui suas tensões e deformações influenciados pelos deslocamentos dos nós que contém. Desse modo, as deformações dos elementos podem ser obtidas de acordo com a equação 2.4.15.

$$\boldsymbol{\varepsilon}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \hat{\mathbf{U}} \quad (2.4.15)$$

Em que $\mathbf{B}^{(m)}$ corresponde à matriz deformação-deslocamentos, cujas colunas são obtidas a partir da diferenciação e combinação das colunas da matriz $\mathbf{H}^{(m)}$.

Por fim, as tensões dos elementos finitos são relacionadas às suas deformações e tensões iniciais de acordo com a equação 2.4.16.

$$\boldsymbol{\tau}^{(m)} = \mathbf{E}^{(m)} \boldsymbol{\varepsilon}^{(m)} + \boldsymbol{\tau}^{I(m)} \quad (2.4.16)$$

na qual:

$\mathbf{E}^{(m)}$ é a matriz de elasticidade (tensão-deformação) do elemento m , podendo ser isotrópica ou anisotrópica e variar de elemento para elemento;

$\boldsymbol{\tau}^{I(m)}$ corresponde às tensões iniciais do elemento.

As equações de equilíbrio correspondentes ao deslocamento dos pontos nodais do conjunto de elemento podem, então, ser obtidas em função dessas suposições. Em primeiro lugar, a substituição das equações 2.4.14 a 2.4.16 na equação 2.4.13, permite reescrevê-la na equação 2.4.17.

$$\begin{aligned} \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{(m)} dV^{(m)} = & \sum_m \int_{V^{(m)}} \bar{\mathbf{u}}^{(m)T} \mathbf{f}^{V(m)} dV^{(m)} \\ & + \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \bar{\mathbf{u}}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} + \sum_i \bar{\mathbf{u}}^{iT} \mathbf{R}_C^i \end{aligned} \quad (2.4.17)$$

em que

$m=1, 2, \dots, k$, sendo k o número de elementos;

$S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}$ denota as superfícies dos elementos que são parte da superfície do corpo, S . Elementos totalmente cercados por outros elementos não apresentam tais superfícies e, portanto, não são incluídos na integral das forças de superfície.

Notar que a equação 2.4.17 assume que as forças pontuais sempre coincidem com os nós dos elementos. Também, as integrais da equação 2.4.17 são realizadas para a superfície e volume de cada elemento, de modo que é conveniente utilizar um sistema local de coordenadas para cada um, já que para um dado campo de deslocamentos virtuais as somas dos trabalhos virtuais internos e externos são valores escalares e podem ser analisadas por integrais em qualquer sistema de coordenadas. Assume-se, entretanto, que

para cada integral emprega-se apenas um sistema de coordenadas para todas as variáveis. Ou seja, $\bar{\mathbf{u}}^{(m)}$ é definido no mesmo sistema de coordenadas que $\mathbf{f}^{V(m)}$.

Alterando as equações 2.4.14 e 2.4.15, desenvolvidas a partir de deslocamentos reais, para utilização no princípio dos trabalhos virtuais, são geradas as equações 2.4.18 e 2.4.19. Estas equações se baseiam nas mesmas suposições que as anteriores, porém consideram deslocamentos virtuais. Substituindo-as na equação 2.4.17, a equação 2.4.20 pode ser escrita.

$$\bar{\mathbf{u}}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{H}^{(m)}(x, y, z) \bar{\hat{\mathbf{U}}} \quad (2.4.18)$$

$$\bar{\boldsymbol{\varepsilon}}^{(m)}(x, y, z) = \mathbf{B}^{(m)}(x, y, z) \bar{\hat{\mathbf{U}}} \quad (2.4.19)$$

$$\begin{aligned} \bar{\hat{\mathbf{U}}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)} \right] \bar{\hat{\mathbf{U}}} = & \bar{\hat{\mathbf{U}}}^T \left[\sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{V(m)} dV^{(m)} \right. \\ & + \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S(m)T} \mathbf{f}^{S(m)} dS^{(m)} \\ & \left. - \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{I(m)} dV^{(m)} + \mathbf{R}_C \right] \end{aligned} \quad (2.4.20)$$

sendo:

$\mathbf{H}^{S(m)}$ a matriz de interpolação de deslocamentos de superfície, obtida da matriz de interpolação de deslocamentos $\mathbf{H}^{(m)}$ com utilização das coordenadas de superfície apropriadas.

$\mathbf{R}_C$ o vetor de cargas concentradas aplicadas nos nós do conjunto de elementos.

Como os vetores $\hat{\mathbf{U}}$ e $\bar{\hat{\mathbf{U}}}$ representam os deslocamentos reais e deslocamentos virtuais, respectivamente, de todo o conjunto de elementos, eles são independentes do elemento m e podem, portanto, ser retirados das somatórias. Aplicando, então, o princípio dos trabalhos virtuais n vezes por meio da imposição de deslocamentos virtuais unitários para cada grau de liberdade, é possível obter as equações para deslocamentos desconhecidos dos pontos nodais, resultando na equação 2.4.21.

$$\mathbf{K}\hat{\mathbf{U}} = \mathbf{R} \quad (2.4.21)$$

em que:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_V + \mathbf{R}_S + \mathbf{R}_I + \mathbf{R}_C$$

$\mathbf{K}$ é a matriz de rigidez do conjunto de elementos dada pelo primeiro membro da equação 2.4.20 à esquerda da igualdade, ou seja, $\mathbf{K} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \mathbf{C}^{(m)} \mathbf{B}^{(m)} dV^{(m)}$

$\mathbf{R}_V$ é o vetor de carga $\mathbf{R}$ que contém os efeitos das forças de volume, e corresponde ao primeiro termo da equação 2.4.20 do lado direito da igualdade, ou seja,

$$\mathbf{R}_V = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{f}^{V^{(m)}} dV^{(m)}$$

$\mathbf{R}_S$ é o vetor que inclui as pressões atuantes na superfície do corpo, e corresponde ao segundo termo do lado direito da igualdade, ou seja, $\mathbf{R}_S = \sum_m \int_{S_1^{(m)}, \dots, S_q^{(m)}} \mathbf{H}^{S^{(m)T}} \mathbf{f}^{S^{(m)}} dS^{(m)}$

$\mathbf{R}_I$ corresponde ao vetor que contém as tensões iniciais, e equivale ao terceiro termo do lado direito da igualdade da equação 2.4.20. Assim, $\mathbf{R}_I = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{B}^{(m)T} \boldsymbol{\tau}^{I^{(m)}} dV^{(m)}$

$\mathbf{R}_C$ representa as cargas nodais concentradas.

É interessante notar que as somatórias da equação 2.4.20 representam a adição direta da matriz e vetores de todos os elementos de modo a obter a matriz total, ou seja, a matriz de rigidez total $\mathbf{K}$ é obtida da soma da matriz de rigidez de todos os elementos, $\mathbf{K}^{(m)}$; o vetor das forças de volume $\mathbf{R}_V$ é obtido da soma dos vetores das forças de volume de cada elemento $\mathbf{R}_V^{(m)}$; e os vetores $\mathbf{R}_I$ e $\mathbf{R}_S$ também seguem a mesma lógica. Este processo é chamado método da rigidez direta, e sua utilização depende de as matrizes de todos os elementos apresentarem mesmas dimensões e de os graus de liberdade do elemento serem coincidentes com os graus de liberdade do sistema. Entretanto, a equação 2.4.20 representa um equilíbrio estático e, portanto, não é adequada para a análise de sistemas que apresentem esforços inerciais significativos. O princípio de d'Alembert pode, então, ser utilizado para incluir as forças inerciais como uma parte das forças de volume. Assumindo que as acelerações dos elementos sejam aproximadas da mesma maneira que

os deslocamentos para os elementos, a contribuição $\mathbf{R}_V$ das forças de volume se torna como indicado pela equação 2.4.22, de modo que a nova condição de equilíbrio é representada na equação 2.4.23.

$$\mathbf{R}_V = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left(\mathbf{f}^{V(m)} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} \right) dV^{(m)} \quad (2.4.22)$$

sendo:

$\mathbf{f}^{V(m)}$ as forças de volume, sem incluir as forças inerciais.

$\ddot{\mathbf{U}}$ o vetor que lista as acelerações nodais, ou seja, a derivada segunda de $\mathbf{U}$.

$\rho^{(m)}$ a densidade do elemento m.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}\mathbf{U} = \mathbf{R} \quad (2.4.23)$$

em que:

$\mathbf{R}$ e $\mathbf{U}$ variam no tempo

$\mathbf{M}$ é a matriz de massa da estrutura, definida como $\mathbf{M} = \sum_m \int_{V^{(m)}} \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}$

Na realidade, entretanto, sistemas dinâmicos dissipam energia durante a vibração, fato este que é levado em consideração por meio da introdução de forças de amortecimento dependentes da velocidade. Com a introdução destes esforços, as equações 2.4.22 e 2.4.23 se tornam as equações 2.4.24 e 2.4.25, respectivamente.

$$\mathbf{R}_V = \sum_m \int_{V^{(m)}} \mathbf{H}^{(m)T} \left(\mathbf{f}^{V(m)} - \rho^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \ddot{\mathbf{U}} - \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)} \dot{\mathbf{U}} \right) dV^{(m)} \quad (2.4.24)$$

sendo:

$\mathbf{f}^{V(m)}$ as forças de volume, sem incluir as forças inerciais ou de amortecimento;

$\dot{\hat{U}}$ o vetor que lista as acelerações nodais, ou seja, a derivada de $\hat{U}$;

$\kappa^{(m)}$ representa o parâmetro de amortecimento do elemento m .

$$M\ddot{\hat{U}} + C\dot{\hat{U}} + K\hat{U} = R \quad (2.4.25)$$

sendo que:

C é a matriz de amortecimento da estrutura, dada por $C = \sum_m \int_{V^{(m)}} \kappa^{(m)} \mathbf{H}^{(m)T} \mathbf{H}^{(m)} dV^{(m)}$

Na prática, entretanto, é quase impossível determinar os parâmetros de amortecimento para conjuntos de elementos finitos genéricos, de modo que a matriz C é geralmente construída a partir das matrizes de massa e de rigidez do conjunto de elementos completo e calibrada experimentalmente para a quantidade de amortecimento esperado.

Uma análise dinâmica completa, portanto, consiste do cálculo da matriz de rigidez K , de massa M e de amortecimento C , assim como dos vetores de carga R , para só então solucionar as equações de modo a obter $\hat{U}$ e, conseqüentemente, as tensões, velocidades e acelerações correspondentes.

Matematicamente, a equação 2.4.25 representa um sistema linear de equações diferenciais de segunda ordem cujas soluções podem ser obtidas pelos métodos tradicionais de resolução de sistemas de equações diferenciais com coeficientes constantes. Entretanto, os procedimentos propostos para a solução geral de um sistema de equações diferenciais pode ser extremamente custoso do ponto de vista computacional caso a ordem das matrizes K , C e M seja muito grande. No método dos elementos finitos, portanto, faz-se necessária a utilização de uma abordagem mais eficiente, mediante a superposição de modos ou integração direta.

O método de integração direta do sistema de equações representado em 2.4.25 consiste na integração passo a passo, por meio de um procedimento numérico, para todos os instantes de interesse da solução. Neste caso, o termo “direta” se refere ao fato de não ser realizada nenhuma transformação das equações em outra forma. Basicamente, ao invés de tentar resolver 2.2.25 para qualquer instante t , busca-se satisfazê-lo apenas para os

intervalos discretos Δt . Isso significa que o equilíbrio dinâmico, incluindo as forças inerciais e de amortecimento, precisa ser atingido dentro do intervalo da solução somente para alguns pontos discretos no tempo.

Supondo que o deslocamento, velocidade e aceleração sejam todos conhecidos para o instante inicial $t=0$, e denotados respectivamente por ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$; e que o período de interesse seja do instante $t=0$ ao instante $t=T$; o intervalo de tempo em consideração, T , é dividido em n intervalos iguais Δt e o processo de integração estabelece o resultado aproximado para os instantes $t= \Delta t, 2\Delta t, 3\Delta t, \dots, t, t+\Delta t, \dots, T$. O algoritmo calcula o resultado para um instante em função dos instantes anteriores. A solução para o instante $t+\Delta t$ exige que todos os resultados anteriores sejam conhecidos. Sendo a relação de equilíbrio dinâmico descrita em 2.4.25 considerada como um sistema de equações diferenciais ordinárias com coeficientes constantes, conclui-se que qualquer equação do método das diferenças finitas pode ser utilizada para aproximar as acelerações, velocidades e deslocamentos. Dentre as possibilidades, entretanto, somente os métodos mais eficientes são utilizados. Um deles é o método da diferença central, que baseia suas suposições nas equações 2.4.26 e 2.4.27.

$${}^t\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t^2}({}^{t-\Delta t}\mathbf{U} - 2{}^t\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) \quad (2.4.26)$$

$${}^t\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t}(-{}^{t-\Delta t}\mathbf{U} + {}^{t+\Delta t}\mathbf{U}) \quad (2.4.27)$$

A solução dos deslocamentos para o instante t pode ser, então, calculada por meio da relação apresentada na equação 2.4.28.

$$\mathbf{M}{}^t\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}{}^t\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}{}^t\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R} \quad (2.4.28)$$

Substituindo as equações 2.4.26 e 2.4.27 na equação 2.4.28 resulta na equação 2.4.29, que fornece os deslocamentos para o instante $t+\Delta t$.

$$\left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} + \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{R} - \left(\mathbf{K} - \frac{2}{\Delta t^2}\mathbf{M}\right){}^t\mathbf{U} - \left(\frac{1}{\Delta t^2}\mathbf{M} - \frac{1}{2\Delta t}\mathbf{C}\right)^{t-\Delta t}\mathbf{U} \quad (2.4.29)$$

Notar que ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ é calculado em função da equação de equilíbrio no instante t , ou seja, em função da equação 2.4.28 e, portanto, esse procedimento é categorizado como um método de integração explícita.

O método da diferença central calcula ${}^{t+\Delta t}\mathbf{U}$ em função de ${}^t\mathbf{U}$ e ${}^{t-\Delta t}\mathbf{U}$, de modo que para obter a solução para o instante Δt é necessário utilizar um procedimento especial. Como ${}^0\mathbf{U}$, ${}^0\dot{\mathbf{U}}$ e ${}^0\ddot{\mathbf{U}}$ são conhecidos, as equações 2.4.26 e 2.4.27 podem ser utilizadas para obter ${}^{-\Delta t}\mathbf{U}$ a partir da equação 2.4.30.

$${}^{-\Delta t}\mathbf{U}_i = {}^0\mathbf{U}_i + \frac{\Delta t^2}{2}{}^0\ddot{\mathbf{U}}_i \quad (2.4.30)$$

em que o índice i representa o i -ésimo elemento do vetor considerado.

Um outro método de integração direta é o método de Newmark, o qual se baseia em duas suposições, 2.4.31 e 2.4.32.

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left[(1-\delta){}^t\ddot{\mathbf{U}} + \delta{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\right] \Delta t \quad (2.4.31)$$

$${}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + {}^t\dot{\mathbf{U}}\Delta t + \left[\left(\frac{1}{2} - \alpha\right){}^t\ddot{\mathbf{U}} + \alpha{}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}}\right] \Delta t^2 \quad (2.4.32)$$

em que δ e α são parâmetros utilizados para determinar a precisão e estabilidade da integração. Newmark propôs seus valores como $\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{4}$ como uma maneira de garantir que o método fosse incondicionalmente estável, sendo esse caso particular também chamado de regra trapezoidal.

Além das suposições 2.4.31 e 2.4.32, o método ainda precisa de mais uma equação para fornecer os deslocamentos, velocidades e acelerações para o próximo instante; a equação de equilíbrio no instante $t+\Delta t$, dada por 2.4.33.

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{K}^{t+\Delta t}\mathbf{U} = \mathbf{R}^{t+\Delta t} \quad (2.4.33)$$

Assim, o método de Newmark é um método implícito por utilizar as condições de equilíbrio para o instante $t+\Delta t$. Este método é perfeitamente adequado para o estudo de vibrações em lajes, cuja análise é linear, entretanto, o programa Adina 9.1, utilizado para os estudos de caso, recomenda que se utilize o método de Bathe, o qual abrange uma gama maior de problemas.

O Método de Bathe é um método implícito de integração baseado na combinação entre o método trapezoidal e o método de três pontos de Euler. Suponha, como no método das diferenças centrais, que o intervalo de interesse varie de $t=0$ a $t=T$, e que ele está dividido em n intervalos iguais Δt , os quais são divididos novamente em subintervalos de duração $\Delta t/2$. Neste método, o primeiro sub-passo é a solução da equação 2.4.34, a qual dá origem à equação 2.4.35 quando aplicada para o instante $t+\Delta t/2$.

$$\mathbf{M}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}\dot{\mathbf{U}} + \mathbf{F}(\mathbf{U}, t) = \mathbf{R}(t) \quad (2.4.34)$$

$$\mathbf{M}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} = \mathbf{R}^{t+\Delta t/2} - \mathbf{F}^{t+\Delta t/2} \quad (2.4.35)$$

em que $\mathbf{F}$ denota os vetores das forças nodais correspondentes às tensões internas.

Os deslocamentos, velocidades e acelerações nodais para o instante $t+\Delta t/2$ são, então, calculados por meio da aplicação do método trapezoidal, 2.4.36 e 2.4.37, à equação 2.4.35.

$${}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} = {}^t\dot{\mathbf{U}} + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] ({}^t\ddot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t/2}\ddot{\mathbf{U}}) \quad (2.4.36)$$

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U} = {}^t\mathbf{U} + \left[\frac{\Delta t}{4} \right] ({}^t\dot{\mathbf{U}} + {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}}) \quad (2.4.37)$$

Qualquer processo iterativo pode ser utilizado para solucionar o sistema de equações formado pelas equações 2.4.35 a 2.4.37, mas no caso particular da utilização do método iterativo de Newton-Raphson, a resposta é descrita por meio de 2.4.38.

$$\begin{aligned} \left(\frac{16}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{4}{\Delta t} \mathbf{C} + {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{K}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{F}^{(i-1)} \\ - \mathbf{M} \left[\frac{16}{\Delta t^2} ({}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U}^{(i-1)} - {}^t\mathbf{U}) - \frac{8}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - {}^t\ddot{\mathbf{U}} \right] \\ - \mathbf{C} \left[\frac{4}{\Delta t} ({}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U}^{(i-1)} - {}^t\mathbf{U}) - {}^t\dot{\mathbf{U}} \right] \end{aligned} \quad (2.4.38)$$

sendo:

$${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}, \text{ com } i=1,2,3,\dots$$

Uma vez que a solução tenha convergido, ${}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U}$ é utilizada para calcular as acelerações e velocidades no instante $t+\Delta t/2$. O próximo sub-passo, então, consiste na solução da equação 2.4.32 para o instante $t+\Delta t$, que origina a equação 2.4.39, por meio da aplicação do método dos três pontos de Euler, descrito pelas equações 2.4.40 e 2.4.41.

$$\mathbf{M} {}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} + \mathbf{C} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = {}^{t+\Delta t}\mathbf{R} - {}^{t+\Delta t}\mathbf{F} \quad (2.4.39)$$

$${}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t\mathbf{U} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\mathbf{U} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\mathbf{U} \quad (2.4.40)$$

$${}^{t+\Delta t}\ddot{\mathbf{U}} = \frac{1}{\Delta t} {}^t\dot{\mathbf{U}} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2}\dot{\mathbf{U}} + \frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t}\dot{\mathbf{U}} \quad (2.4.41)$$

Usando as equações 2.4.39 a 2.4.41 junto com as soluções obtidas no sub-passo anterior para o instante $t+\Delta t/2$ e aplicando uma vez mais o método iterativo de Newton-Raphson, a resposta para o instante $t=t+\Delta t$ é obtido por 2.4.42.

$$\begin{aligned}
\left(\frac{9}{\Delta t^2} \mathbf{M} + \frac{3}{\Delta t} \mathbf{C} + {}^{t+\Delta t} \mathbf{K}^{(i-1)} \right) \Delta \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{R} - {}^{t+\Delta t} \mathbf{F}^{(i-1)} \\
- \mathbf{M} \left[\frac{9}{\Delta t^2} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} - \frac{12}{\Delta t^2} {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U} \right. \\
\left. + \frac{3}{\Delta t^2} {}^t \mathbf{U} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \dot{\mathbf{U}} - \frac{1}{\Delta t} {}^t \ddot{\mathbf{U}} \right] \\
- \mathbf{C} \left[\frac{3}{\Delta t} {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} - \frac{4}{\Delta t} {}^{t+\Delta t/2} \mathbf{U} + \frac{1}{\Delta t} {}^t \mathbf{U} \right]
\end{aligned} \quad (2.4.42)$$

em que:

$${}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i)} = {}^{t+\Delta t} \mathbf{U}^{(i-1)} + \Delta \mathbf{U}^{(i)}, \text{ com } i=1,2,3...$$

As matrizes ${}^{t+\Delta t/2} \mathbf{K}$ e ${}^{t+\Delta t} \mathbf{K}$ usadas nas equações 2.4.35 e 2.4.39 são as matrizes de rigidez tangentes consistentes, e podem incluir grandes deformações e comportamento inelástico.

2.5. ANÁLISE DO COMPORTAMENTO DINÂMICO DE ESTRUTURAS

De acordo com o AISC Steel Design Guides Series 11: *Floor Vibrations Due to Human Activity* e o Comité Euro-International du Béton: *Bulletin d'Information N209* a resposta humana devido à vibração de um piso corresponde a um fenômeno bastante complexo que depende, entre outros fatores, da amplitude de deslocamentos e acelerações, do local em que o usuário se encontra e da própria sensibilidade da pessoa afetada, além da natureza do esforço que originou a vibração. Também, a reação dos usuários é fortemente ligada às atividades realizadas por eles no ambiente em questão. Usuários em locais como residências e escritórios sentem-se incomodados por qualquer vibração claramente perceptível, ou seja, cuja aceleração supera 0,50% da aceleração da gravidade, enquanto os que estejam em locais nos quais ocorram atividades mais energéticas são capazes de aceitar vibrações de até 5,00% da aceleração da gravidade. Já pessoas em uma situação intermediária como jantando em um ambiente adjacente a um salão de danças, levantando pesos junto à uma sala de aeróbica ou mesmo fazendo compras em um shopping toleram um valor intermediário, de cerca de 1,50% da aceleração da gravidade, com a sensibilidade de cada ambiente também variando de acordo com a duração das vibrações e com a

distância da fonte. Estes limites, entretanto, estão restritos às vibrações cuja frequência varia entre 4,0 e 8,0 Hz, intervalo fora do qual os usuários são capazes de lidar com maiores acelerações.

Ao longo dos anos, vários critérios foram propostos para determinar o nível de conforto humano de um conjunto de pisos sob efeitos dinâmicos, sendo que o AISC os separa com relação ao tipo de excitação analisada: rítmica ou devida ao caminhar. Os critérios atualmente recomendados para excitação devida ao caminhar, os métodos para estimar as propriedades requeridas dos pisos e os procedimentos de dimensionamento diferem consideravelmente das análises prévias baseadas no “teste de impacto de calcanhar” (heel-drop test), no qual as frequências naturais e taxas de amortecimento do sistema são determinadas por meio do impacto causado por uma pessoa de aproximadamente 75,0kg que transfere seu peso para a ponta dos pés e levanta o calcanhar em cerca de 60mm do chão para em seguida relaxar o corpo e deixar seus calcanhares caírem ao piso. Apesar de os critérios utilizados pelo *Design Guide 11* serem relativamente mais complexos que os previamente adotados, eles possuem um conjunto maior de aplicações e resultam em sistemas de pisos aceitáveis e mais econômicos, sendo baseados na resposta dinâmica de um sistema de pisos sustentados por vigas, submetidos às forças de caminhar e podendo ser usados para dimensionar escritórios, shoppings e passarelas, entre outros espaços construídos. As acelerações são limitadas de acordo com as recomendações da Organização Internacional de Padronização (International Standards ISO 2631-2, 1989), ajustados para a ocupação pretendida. São sugeridos limites para o valor quadrático médio da aceleração em função da curva base apresentada na figura 6 obtida do AISC Steel Design Guide Series 11, os quais são propostos para escritórios, shoppings ou passarelas internas e para passarelas externas, definidos pelo valor da curva-base multiplicada respectivamente por 10, 30 ou 100. Para propósitos de dimensionamento, os limites podem ser tomados como variando entre 0,80 e 1,50 vezes os valores recomendados, dependendo da duração e frequência dos esforços causadores.

FIGURA 6 - PICO RECOMENDADO DE ACELERAÇÃO DEVIDO À UTILIZAÇÃO PARA CONFORTO HUMANO

(OBTIDO DE *AISC STEEL DESIGN GUIDES SERIES 11*)

A análise dinâmica de uma estrutura para uma excitação causada pelo caminhar é realizada em função de uma componente de força harmônica em uma frequência que coincida com uma das frequências naturais do piso, dada pela equação 2.5.1.

$$F_i = P\alpha_i \cos(2\pi f_{passo} t) \quad (2.5.1)$$

na qual:

P é o peso de uma pessoa, tomado como 0,70kN para o dimensionamento;

i é o múltiplo harmônico da frequência do caminhar;

f_{passo} denota a frequência do caminhar;

α_i corresponde coeficiente dinâmico para a i -ésima componente harmônica da força. Seus valores recomendados são dados pela Tabela 1, obtida do *Design Guide 11*, porém apenas um único harmônico é utilizado por vez já que todos os outros são pouco representativos em relação ao que apresenta ressonância.

**TABELA 1 - FREQUÊNCIAS COMUNS DE EXCITAÇÃO E SEUS RESPECTIVOS
COEFICIENTES DINÂMICOS
(AISC STEEL DESIGN GUIDES SERIES 11)**

<i>Harmônico i</i>	<i>Pessoa Caminhando</i>		<i>Aula de Aeróbica</i>		<i>Grupo de Dança</i>	
	f, Hz	α_i	f, Hz	α_i	f, Hz	α_i
1	1,60-2,20	0,50	2,00-2,75	1,50	1,50-3,00	0,50
2	3,20-4,40	0,20	4,00-5,55	0,60	-----	-----
3	4,80-6,60	0,10	6,00-8,25	0,10	-----	-----
4	6,40-8,80	0,05	-----	-----	-----	-----

Desse modo, a resposta ressonante possui sua função de forma dada pela equação 2.5.2.

$$\frac{a}{g} = \frac{R\alpha_i P}{\xi W} \cos(2\pi f_{passo} t) \quad (2.5.2)$$

em que:

$\frac{a}{g}$ corresponde à taxa de aceleração do piso em relação à gravidade.

ξ representa a taxa de amortecimento modal.

W indica o peso efetivo do piso.

R é o fator de redução que considera o fato de que o estado permanente pleno de movimento ressonante não é atingido pelo caminhar e que a pessoa que será incomodada pela vibração e a causadora não se encontram simultaneamente na localização de máximo deslocamento modal. O AISC recomenda que seja tomado como 0,7 para passarelas e 0,5 para estruturas de pisos com configurações modais em duas direções.

Para frequências acima de 8Hz, o movimento devido aos deslocamentos quase permanentes e a vibração devida ao impulso do passo podem se tornar mais significativos que a ressonância. De modo a considerar estes efeitos, o *Design Guide 11* recomenda que o limite de aceleração para frequências acima de 8Hz seja mantido o mesmo que no patamar entre 4 e 8Hz, e que a rigidez mínima de 1kN/mm sob cargas concentradas seja introduzida como verificação adicional caso a frequência seja superior a 10Hz. Entretanto, estes critérios não são válidos caso equipamentos sensíveis a vibrações estejam presentes, sendo suas exigências ainda mais restritivas.

Com relação a excitações rítmicas, os critérios para o dimensionamento de estruturas se baseiam na resposta dinâmica estrutural de forças distribuídas ao longo de todo o piso. Eles podem ser utilizados para avaliar sistemas estruturais sujeitos a atividades tais quais ginástica, aeróbica e aulas de dança desde que a função dos carregamentos no tempo seja conhecida. O pico de aceleração no piso devido a excitações harmônicas é determinado a partir da solução clássica ao assumir que a estrutura apresente apenas um modo de vibração, resultando na equação 2.5.3.

$$\frac{a_p}{g} = \frac{1,3\alpha_i \frac{w_p}{w_t}}{\sqrt{\left[\left(\frac{f_n}{f}\right)^2 - 1\right]^2 + \left[\frac{2\xi f_n}{f}\right]^2}} \quad (2.5.3)$$

sendo:

α_i o coeficiente dinâmico (ver tabela 1);

w_p a massa efetiva equivalente por área unitária de usuários participantes distribuídos por toda laje;

w_t a massa efetiva equivalente por área unitária de toda a laje, incluindo todos os participantes;

f_n a frequência natural fundamental do piso em Hz;

f a frequência excitante do carregamento em Hz;

ξ a taxa modal de amortecimento.

A aceleração efetiva máxima, que leva em consideração todos os harmônicos, é então calculada por meio da regra de combinação dada pela equação 2.5.4.

$$a_m = \left[\sum a_i^{1,5} \right]^{0,667} \quad (2.5.4)$$

na qual a_i representa o pico de aceleração para o i-ésimo harmônico.

O amortecimento associado a sistemas de pisos é fornecido principalmente pelos componentes não estruturais, mobiliário e ocupantes. As taxas de amortecimento recomendadas pelo *Design Guide* variam de 0,01 a 0,06. Para passarelas ou pisos com baixa ocupação e que não possuam componentes não estruturais nem mobiliário, recomenda-se a utilização de 0,01; já para pavimentos com elementos não estruturais ou móveis em pequena quantidade, como shoppings ou igrejas, o valor recomendado é de 0,02. Uma taxa de amortecimento de 0,03 é adequado para pisos que possuam componentes não estruturais e mobiliário, com apenas divisórias leves, pequenas e removíveis, tais quais escritórios modulares; enquanto uma taxa de 0,05 é aplicado para escritórios e residências com divisórias fixas que ocupam todo o pé direito; e o valor de 0,06 pode ser utilizado para locais cuja excitação rítmica seja causada pela grande concentração de pessoas, pois os próprios participantes contribuem para o amortecimento.

Outro fator importante para a análise do comportamento dinâmico de uma laje é seu peso distribuído, que deve ser estimado cuidadosamente com seus valores reais, não majorados,

tanto dos carregamentos permanentes quanto variáveis. Segundo o AISC, o carregamento de utilização (sobrecarga) sugerido é de $0,50\text{kN/m}^2$ para escritórios típicos e $0,25\text{kN/m}^2$ para residências, enquanto para passarelas, ginásios e shoppings recomenda-se que não sejam adotadas cargas adicionais de utilização para a análise dinâmica.

A aplicação destes critérios, entretanto, exige a consideração cuidadosa do engenheiro. Por exemplo, a aceleração máxima para passarelas externas é definida para locais com tráfego intenso de pessoas, não para locais mais calmos como átrios de escritórios.

3. METODOLOGIA

3.1.DEFINIÇÃO DAS CARACTERÍSTICAS DO TMD PADRONIZADO

Os elementos básicos do TMD proposto são definidos em função dos critérios e propriedades discutidas anteriormente, dentre os quais alguns serão escolhidos como padrão buscando abranger o maior espectro possível de situações com o menor número possível de peças. Primeiramente, são definidas as massas a serem adotadas para as opções padronizadas de elementos inerciais do sistema. Supondo que a massa do TMD esteja concentrada em seu elemento inercial, ela é definida em função das massas distribuídas tradicionalmente encontradas na engenharia e do espaçamento médio desejado entre cada mecanismo. Considerando lajes com altura 10,0cm, 15,0cm e 20,0cm, revestimentos de 100kg/m^2 ou 200kg/m^2 e massas adicionais associadas às sobrecargas variando de $0,0\text{kg/m}^2$ a $50,0\text{kg/m}^2$, as possibilidades de massa distribuída equivalente são apresentadas na tabela 2.

TABELA 2 – POSSIBILIDADES CONSIDERADAS DE MASSA DISTRIBUÍDA EQUIVALENTE

<i>Sobrecarga</i>	<i>Espessura da laje</i>			<i>Revestimento</i>
	<i>10,0cm</i>	<i>15,0cm</i>	<i>20,0cm</i>	
$0\text{kg}/\text{m}^2$	$250\text{kg}/\text{m}^2$	$375\text{kg}/\text{m}^2$	$500\text{kg}/\text{m}^2$	$0\text{kg}/\text{m}^2$
$25\text{kg}/\text{m}^2$	$275\text{kg}/\text{m}^2$	$400\text{kg}/\text{m}^2$	$525\text{kg}/\text{m}^2$	$0\text{kg}/\text{m}^2$
$50\text{kg}/\text{m}^2$	$300\text{kg}/\text{m}^2$	$425\text{kg}/\text{m}^2$	$550\text{kg}/\text{m}^2$	$0\text{kg}/\text{m}^2$
$0\text{kg}/\text{m}^2$	$350\text{kg}/\text{m}^2$	$475\text{kg}/\text{m}^2$	$600\text{kg}/\text{m}^2$	$100\text{kg}/\text{m}^2$
$25\text{kg}/\text{m}^2$	$375\text{kg}/\text{m}^2$	$500\text{kg}/\text{m}^2$	$625\text{kg}/\text{m}^2$	$100\text{kg}/\text{m}^2$
$50\text{kg}/\text{m}^2$	$400\text{kg}/\text{m}^2$	$525\text{kg}/\text{m}^2$	$650\text{kg}/\text{m}^2$	$100\text{kg}/\text{m}^2$
$0\text{kg}/\text{m}^2$	$450\text{kg}/\text{m}^2$	$575\text{kg}/\text{m}^2$	$700\text{kg}/\text{m}^2$	$200\text{kg}/\text{m}^2$
$25\text{kg}/\text{m}^2$	$475\text{kg}/\text{m}^2$	$600\text{kg}/\text{m}^2$	$725\text{kg}/\text{m}^2$	$200\text{kg}/\text{m}^2$
$50\text{kg}/\text{m}^2$	$500\text{kg}/\text{m}^2$	$625\text{kg}/\text{m}^2$	$750\text{kg}/\text{m}^2$	$200\text{kg}/\text{m}^2$

Para cada valor de massa distribuída equivalente, o valor adequado da massa dos elementos inerciais pode ser calculado em função da distribuição dos mecanismos pela laje e da relação μ , dada pela equação 3.1.1, entre a massa do conjunto de mecanismos adotados e a massa da estrutura.

$$\mu = \frac{M_{\text{conjunto de TMD's}}}{M_{\text{estrutura}}} \quad (3.1.1)$$

O CEB recomenda em seu Bulletin D'Information N209, anexo D, que μ geralmente se encontre no intervalo entre 1,0% e 5,0% enquanto Varela e Battista sugerem que a relação varie entre 0,2% e 1,0%. Supondo, assim, a distribuição dos TMD's de maneira uniforme pela laje conforme representação da figura 7, a área de influência de cada mecanismo é representada por um retângulo de lados Δx e Δy . Desse modo, os elementos inerciais são definidos supondo $\mu=1,0\%$ e espaçamento de 0,50m entre cada mecanismo. Dentre os valores assim obtidos, indicados na tabela 3, são escolhidas as opções 0,75kg, 1,00kg, 1,25kg, 1,50kg e 1,75kg para a massa dos elementos inerciais, buscando abranger o intervalo da melhor maneira possível.

FIGURA 7 - DISTRIBUIÇÃO E ÁREA DE INFLUÊNCIA DOS TMD'S

**TABELA 3 - MASSA CALCULADA DOS ELEMENTOS INERCIAIS DO TMD PARA OS
CARREGAMENTOS DISTRIBUÍDOS CONSIDERADOS**

<i>Massa Distribuída</i>	<i>250kg/m²</i>	<i>275kg/m²</i>	<i>300kg/m²</i>	<i>350kg/m²</i>	<i>375kg/m²</i>	<i>400kg/m²</i>	<i>425kg/m²</i>	<i>450kg/m²</i>	<i>475kg/m²</i>	<i>500kg/m²</i>
<i>M para $\mu=1,0\%$</i>	<i>0,625kg</i>	<i>0,688kg</i>	<i>0,750kg</i>	<i>0,875kg</i>	<i>0,938kg</i>	<i>1,000kg</i>	<i>1,063kg</i>	<i>1,125kg</i>	<i>1,188kg</i>	<i>1,250kg</i>
<i>Massa Distribuída</i>	<i>525kg/m²</i>	<i>550kg/m²</i>	<i>575kg/m²</i>	<i>600kg/m²</i>	<i>625kg/m²</i>	<i>650kg/m²</i>	<i>700kg/m²</i>	<i>725kg/m²</i>	<i>750kg/m²</i>	<i>-----</i>
<i>M para $\mu=1,0\%$</i>	<i>1,313kg</i>	<i>1,375kg</i>	<i>1,438kg</i>	<i>1,500kg</i>	<i>1,563kg</i>	<i>1,625kg</i>	<i>1,750kg</i>	<i>1,813kg</i>	<i>1,875kg</i>	<i>-----</i>

Em seguida, a rigidez das molas-padrão pode ser definida. Sendo o TMD nada mais que um oscilador massa-mola-amortecedor de um grau de liberdade, e lembrando que o efeito da força gravitacional pode ser ignorado, desde que a análise seja realizada para sua posição de equilíbrio, a frequência natural do TMD pode ser facilmente obtida por meio da equação 3.1.2.

$$f_{TMD} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad (3.1.2)$$

em que:

f_{TMD} corresponde a frequência natural do *Tuned-Mass Damper*.

k representa rigidez do sistema, ou seja, da mola.

m representa massa do elemento inercial.

A aplicação do TMD, entretanto, introduz novos graus de liberdade ao sistema, alterando sua matriz de massa e de rigidez, o que causa alterações nas suas frequências naturais. De modo a compensar esse desvio, a sintonização deve ser realizada para uma frequência corrigida. Segundo o CEB, esta frequência pode ser obtida por meio da equação 3.1.3. É

importante notar, entretanto, que esta equação é apenas uma sugestão simplificada e não representa rigorosamente as frequências alteradas exatas. Para tanto seria necessária a execução de uma análise completa das propriedades dinâmicas do sistema como um todo.

$$f_{sintonização} = \frac{1}{1+\mu} f_n \quad (3.1.3)$$

sendo:

$f_{sintonização}$ a frequência natural corrigida do sistema;

f_n a frequência natural original do sistema.

De acordo com o AISC, como visto na tabela 1, as frequências atuantes dos carregamentos gerados pela utilização humana variam entre 1,60-2,20Hz para o caminhar, 2,00-2,75Hz para aulas de aeróbica e 1,50-3,00Hz para grupos de dança. Buscando abranger as excitações mencionadas e seus harmônicos, as molas necessárias são calculadas para cada frequência por meio da aplicação das equações 3.1.2 e 3.1.3 e indicadas na tabela 4. Dentre as rigidezes obtidas, quinze são selecionadas como padrão. São elas: 100N/m, 150N/m, 225N/m, 330N/m, 500N/m, 630N/m, 790N/m, 1000N/m, 1235N/m, 1500N/m, 1780N/m, 2050N/m, 2350N/m, 2700N/m e 3100N/m; que, em conjunto com as cinco massas previamente selecionadas, permitem sintonizar o mecanismo nas frequências exatas indicadas na tabela 5.

TABELA 4 - RIGIDEZ CÁLCULADA PARA AS MOLAS DO TMD EM FUNÇÃO DO ELEMENTO INERCIAL E FREQUÊNCIA SELECIONADOS

f	M		
	$0,750Kg$	$1,250Kg$	$1,750Kg$
$1,50H_{\chi}$	65,31N/m	108,85N/m	152,38N/m
$2,00H_{\chi}$	116,10N/m	193,50N/m	270,90N/m
$2,50H_{\chi}$	181,41N/m	302,35N/m	423,29N/m
$3,00H_{\chi}$	261,23N/m	435,38N/m	609,53N/m
$3,50H_{\chi}$	355,56N/m	592,60N/m	829,64N/m
$4,00H_{\chi}$	464,41N/m	774,01N/m	1083,62N/m
$4,50H_{\chi}$	587,76N/m	979,61N/m	1371,45N/m
$5,00H_{\chi}$	725,64N/m	1209,39N/m	1693,15N/m
$5,50H_{\chi}$	878,02N/m	1463,36N/m	2048,71N/m
$6,00H_{\chi}$	1044,91N/m	1741,52N/m	2438,13N/m
$6,50H_{\chi}$	1226,32N/m	2043,87N/m	2861,42N/m
$7,00H_{\chi}$	1422,24N/m	2370,41N/m	3318,57N/m
$7,50H_{\chi}$	1632,68N/m	2721,13N/m	3809,58N/m
$8,00H_{\chi}$	1857,63N/m	3096,04N/m	4334,46N/m

TABELA 5 - FREQUÊNCIAS NATURAIS CORRIGIDAS POR (3.1.3), POSSÍVEIS PARA AS COMBINAÇÕES MASSA-MOLA DO TMD PADRÃO

k	M				
	$0,750Kg$	$1,000Kg$	$1,250Kg$	$1,500Kg$	$1,750Kg$
$100N/m$	1,86Hz	1,61Hz	1,44Hz	1,31Hz	1,22Hz
$150N/m$	2,27Hz	1,97Hz	1,76Hz	1,61Hz	1,49Hz
$225N/m$	2,78Hz	2,41Hz	2,16Hz	1,97Hz	1,82Hz
$330N/m$	3,37Hz	2,92Hz	2,61Hz	2,38Hz	2,21Hz
$500N/m$	4,15Hz	3,59Hz	3,21Hz	2,93Hz	2,72Hz
$630N/m$	4,66Hz	4,03Hz	3,61Hz	3,29Hz	3,05Hz
$790N/m$	5,22Hz	4,52Hz	4,04Hz	3,69Hz	3,42Hz
$1000N/m$	5,87Hz	5,08Hz	4,55Hz	4,15Hz	3,84Hz
$1235N/m$	6,52Hz	5,65Hz	5,05Hz	4,61Hz	4,27Hz
$1500N/m$	7,19Hz	6,23Hz	5,57Hz	5,08Hz	4,71Hz
$1780N/m$	7,83Hz	6,78Hz	6,07Hz	5,54Hz	5,13Hz
$2050N/m$	8,40Hz	7,28Hz	6,51Hz	5,94Hz	5,50Hz
$2350N/m$	9,00Hz	7,79Hz	6,97Hz	6,36Hz	5,89Hz
$2700N/m$	9,64Hz	8,35Hz	7,47Hz	6,82Hz	6,31Hz
$3100N/m$	10,33Hz	8,95Hz	8,01Hz	7,31Hz	6,77Hz

Resta definir o amortecedor a ser utilizado para o TMD. Todo sistema dinâmico dissipa energia e a taxa de amortecimento é um parâmetro adimensional que descreve o decaimento de suas vibrações após uma perturbação. Esta taxa, cujo valor é obtido por meio da equação 3.1.4 no caso de amortecimento viscoso linear, expressa o nível de amortecimento de um sistema em relação ao seu amortecimento crítico, que é o valor de amortecimento para o qual um sistema converge para zero o mais rápido possível após

perturbado, sem oscilar. Segundo o *Bulletin D'Information N209*, anexo D, a taxa ótima de amortecimento de um *Tuned-Mass Damper* é dada pela equação 3.1.5.

$$\xi = \frac{c}{2m\omega} \quad (3.1.4)$$

$$\xi_{\text{ótimo}} = \left[\frac{3\mu}{8(1+\mu)^3} \right]^{1/2} \quad (3.1.5)$$

nas quais:

ξ é a taxa de amortecimento viscoso linear.

$\xi_{\text{ótimo}}$ é a taxa de amortecimento viscoso linear ideal para o elemento dissipador, ou seja, que permite ao mecanismo dissipar a maior quantidade possível de energia.

c é o coeficiente de amortecimento do elemento dissipador.

m é a massa do elemento inercial.

ω frequência angular natural do TMD.

Estritamente falando, esta fórmula é obtida para um sistema originalmente não amortecido, mas pode também ser usada como uma boa aproximação para sistemas dinâmicos que possuem taxa de amortecimento pequena. É importante notar que a eficácia dos TMD's é muito mais dependente da sintonização da frequência do que do amortecimento adotado, de modo que o cálculo da taxa de amortecimento ótima por meio da equação aproximada 3.1.5, é perfeitamente adequada para a utilização proposta.

Os coeficientes de amortecimento ideais para cada combinação massa e frequência são apresentados na tabela 6. Dentre estes valores, foram escolhidos como padrão os amortecedores com coeficiente 1,00Ns/m, 1,75Ns/m, 2,50Ns/m, 3,25Ns/m, 4,00Ns/m, 4,60Ns/m, 5,20Ns/m, 6,00Ns/m, 7,00Ns/m e 8,00Ns/m, de modo a abranger a maior parte do intervalo considerado.

TABELA 6 – COEFICIENTE DE AMORTECIMENTO IDEAL PARA OS PARES MASSA-FREQUÊNCIA CONSIDERADOS

ω	M					f
	0,750Kg	1,000Kg	1,250Kg	1,500Kg	1,750Kg	
9,42rad/s	0,85Ns/m	1,14Ns/m	1,42Ns/m	1,71Ns/m	1,99Ns/m	1,50Hz
12,57rad/s	1,14Ns/m	1,52Ns/m	1,90Ns/m	2,27Ns/m	2,65Ns/m	2,00Hz
15,71rad/s	1,42Ns/m	1,90Ns/m	2,37Ns/m	2,84Ns/m	3,32Ns/m	2,50Hz
18,85rad/s	1,71Ns/m	2,27Ns/m	2,84Ns/m	3,41Ns/m	3,98Ns/m	3,00Hz
21,99rad/s	1,99Ns/m	2,65Ns/m	3,32Ns/m	3,98Ns/m	4,64Ns/m	3,50Hz
25,13rad/s	2,27Ns/m	3,03Ns/m	3,79Ns/m	4,55Ns/m	5,31Ns/m	4,00Hz
28,27rad/s	2,56Ns/m	3,41Ns/m	4,26Ns/m	5,12Ns/m	5,97Ns/m	4,50Hz
31,42rad/s	2,84Ns/m	3,79Ns/m	4,74Ns/m	5,69Ns/m	6,63Ns/m	5,00Hz
34,56rad/s	3,13Ns/m	4,17Ns/m	5,21Ns/m	6,25Ns/m	7,30Ns/m	5,50Hz
37,70rad/s	3,41Ns/m	4,55Ns/m	5,69Ns/m	6,82Ns/m	7,96Ns/m	6,00Hz
43,98rad/s	3,98Ns/m	5,31Ns/m	6,63Ns/m	7,96Ns/m	9,29Ns/m	7,00Hz
47,12rad/s	4,26Ns/m	5,69Ns/m	7,11Ns/m	8,53Ns/m	9,95Ns/m	7,50Hz
50,27rad/s	4,55Ns/m	6,07Ns/m	7,58Ns/m	9,10Ns/m	10,61Ns/m	8,00Hz

Em resumo, o *Tuned-Mass Damper* a ser aplicado será capaz de cobrir o espectro analisado em praticamente sua totalidade por meio da composição do mecanismo com cinco opções de massas, quinze opções de molas e dez de amortecedores, indicadas respectivamente nas tabelas 7, 8 e 9. Com relação a estes componentes, as molas podem ser encontradas em catálogos comerciais e os elementos inerciais podem ser facilmente construídos. Os amortecedores, entretanto, apresentam coeficiente de amortecimento muitas vezes menor do que os comumente construídos com precisão pela indústria, exigindo uma adaptação dos equipamentos de produção tradicionais.

TABELA 7 – MASSA DOS ELEMENTOS INERCIAIS (GRAVES) PADRONIZADOS

M				
$0,750kg$	$1,000kg$	$1,250kg$	$1,500kg$	$1,750kg$

TABELA 8 – RIGIDEZ DOS ELEMENTOS RESTAURADORES (MOLAS) PADRONIZADOS

k				
$100N/m$	$150N/m$	$225N/m$	$330N/m$	$500N/m$
$630N/m$	$790N/m$	$1000N/m$	$1235N/m$	$1500N/m$
$1780N/m$	$2050N/m$	$2350N/m$	$2700N/m$	$3100N/m$

TABELA 9 - COEFICIENTE DE AMORTECIMENTOS DOS ELEMENTOS DISSIPADORES
(AMORTECEDORES) PADRONIZADOS

C				
$1,00Ns/m$	$1,75Ns/m$	$2,50Ns/m$	$3,25Ns/m$	$4,00Ns/m$
$4,60Ns/m$	$5,20Ns/m$	$6,00Ns/m$	$7,00Ns/m$	$8,00Ns/m$

3.2. DESCRIÇÃO DO PROCESSO DE ESCOLHA DO TUNED-MASS DAMPER

Após constatado o problema de vibração na laje, a definição do TMD a ser aplicado é bastante direta e simples. Em primeiro lugar, a massa distribuída equivalente é calculada, em kg/m^2 , por meio da soma da massa da laje, do revestimento e da massa equivalente da sobrecarga de utilização em seus valores reais. O elemento inercial ideal para o mecanismo pode, assim, ser calculado pela multiplicação do valor obtido por $\mu=1,00\%$ e pela área de influência de cada TMD, ou seja, a área definida pelo espaçamento entre mecanismos adjacentes. Desse modo, o cálculo do elemento inercial ideal é dado pela equação 3.2.1.

$$M_{TMD}^{calculado} = \mu \left[(h_{laje} \rho_{concreto} + h_{rev} \rho_{rev} + Q_{AISC}) \Delta_x \Delta_y \right] \quad (3.2.1)$$

na qual:

μ é adotado como 1,00%;

h_{laje} é a espessura da laje em metros;

h_{rev} é a espessura do revestimento em metros;

$\rho_{concreto}$ é a densidade do concreto armado em kg/m³;

ρ_{rev} é a densidade do revestimento em kg/m³;

Q_{AISC} corresponde à massa equivalente da sobrecarga a ser utilizada para cálculo das características dinâmicas (recomendada pelo *AISC Design Guide 11* como aproximadamente 50kg/m² para escritórios, 25kg/m² para residências e 0kg/m² para passarelas, ginásios e shopping centers);

Δ_x é o espaçamento entre TMD's na direção do vão principal da laje em metros;

Δ_y é o espaçamento entre TMD's na direção do vão secundário da laje em metros;

O elemento inercial padrão será, assim, escolhido como o mais próximo do calculado entre as opções apresentadas na tabela 7. O próximo passo é a definição da rigidez da mola a ser utilizada, a qual deve ser escolhida em função do elemento inercial adotado e da frequência natural que se deseja mitigar, conforme a equação 3.2.2, obtida da manipulação das equações 3.1.2 e 3.1.3. A escolha é realizada dentro das opções da tabela 8.

$$k_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{2\pi}{1 + \mu} f_n \right]^2 M_{TMD}^{adotado} \quad (3.2.2)$$

Por fim, o amortecimento ideal a ser utilizado é calculado pela equação 3.2.3, que resulta das equações 3.1.4 e 3.1.5, permitindo que o amortecedor adotado possa ser escolhido dentre os apresentados na tabela 9.

$$c_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{3\mu M_{TMD}^{adotado} k_{TMD}^{adotado}}{2(1 + \mu)^3} \right]^{1/2} \quad (3.2.3)$$

4. ANÁLISES DE CASO

4.1. DESCRIÇÃO GERAL

Para comprovar a eficácia dos TMD's definidos conforme o processo descrito no item anterior, vários estudos de caso computacionais por meio do método dos elementos finitos foram realizados. As características geométricas dos modelos foram escolhidas de modo a considerar a presença ou não de continuidade nas bordas da laje, assim como diversas proporções entre os vãos, com L_y/L_x variando entre 1 e 2, aproximadamente. Em todos eles as frequências naturais, amplitudes de deslocamentos e acelerações do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's foram obtidos por meio da utilização do *software* Adina 9.1 licença estudantil.

Cada uma das análises de caso inclui dois modelos. O primeiro deles representa o sistema estrutural em sua forma original e consiste de uma malha retangular de elementos de placa, elementos de barra em seu perímetro, apoios fixos nos vértices e travamento da rotação da laje junto a uma ou mais faces quando a laje a ser estudada apresentar "continuidade" no trecho. Este modelo será inicialmente utilizado para a obtenção das frequências naturais da estrutura por meio da análise, ou seja, as frequências de sintonização dos *Tuned-Mass Dampers*. O segundo modelo é criado em seguida, idêntico ao primeiro em todos os aspectos, porém contendo os TMD's sintonizados para a frequência natural obtida do primeiro modelo. Ambos os modelos foram criados em unidades do sistema internacional e apresentam módulo de elasticidade do concreto de 31875MPa, obtido pela equação 4.1.1 para $f_{ck}=40MPa$ conforme recomendação da NBR 6118:2013 para concretos com f_{ck} inferior a 50 MPa.

$$E_{CS} = \alpha_i \alpha_E 5600 \sqrt{f_{ck}} \quad (4.1.1)$$

na qual:

α_E é 1,0 supondo que o agregado utilizado foi granito;

α_i é 0,9 para concreto de $f_{ck} = 40 \text{ MPa}$.

Também, os modelos apresentam a taxa de amortecimento natural da estrutura recomendada pelo AISC em função da utilização, considerada como 0,03 para escritórios e 0,05 para residências. Esta taxa de amortecimento será representada por meio da aplicação de amortecimento de Rayleigh, conforme equação 4.1.2.

$$\xi_n = \frac{1}{2\omega_n} \alpha_{\text{Rayleigh}} + \frac{\omega_n}{2} \beta_{\text{Rayleigh}} \quad (4.1.2)$$

Notar na equação que o amortecimento de Rayleigh só permite a definição exata das taxas de amortecimento modal para duas frequências naturais por apresentar somente duas incógnitas, α_{Rayleigh} e β_{Rayleigh} , de modo que a prática comum consiste em calculá-las para que duas frequências naturais do sistema apresentem o amortecimento correto. Porém, como os estudos de caso analisados supõem uma taxa de amortecimento estrutural constante igual à recomendada pelo AISC, optou-se por uma abordagem diferente. O cálculo das variáveis será realizado visando a garantir que o trecho de maior interesse para a análise, a região ao redor da ressonância, apresente taxa de amortecimento aproximadamente igual a desejada. Para tanto, as duas frequências serão escolhidas como os limites do intervalo de interesse, ao invés dos de duas frequências naturais de vibração.

Aplicando, então, em ambos os modelos uma carga concentrada senoidal de intensidade máxima 700N no ponto central da laje e variando sua frequência de excitação ao longo do intervalo de interesse, obtém-se para cada frequência excitante a amplitude dos deslocamentos e acelerações depois estabilizados. Apesar de os estudos de caso envolverem apenas modelos lineares, para os quais o método de Newmark é incondicionalmente estável, optou-se por realizar a análise dinâmica por integração direta implícita utilizando o método de Bathe. Essa escolha foi baseada em recomendação do programa, o qual afirma que se deve dar preferência ao método de Bathe sempre que possível, por ser efetivo para uma gama maior de problemas. A análise cobriu um intervalo

de 10 segundos, dentre os quais somente os dois últimos são discutidos, buscando garantir que os resultados obtidos sejam para o modelo estabilizado em regime permanente. De modo a respeitar as exigências do AISC, a carga excitante é multiplicada pelo coeficiente α_i , indicado na tabela 1 para cada harmônico. Ou seja, a intensidade máxima da força de excitação varia de um intervalo de harmônicos ao seguinte.

4.2. ESTUDO DE CASO 1

Dados Geométricos:

Este modelo apresenta uma laje retangular de 10,0 cm de espessura, de 5,80m por 6,00m de vão; simplesmente apoiada em suas bordas; vigas de 20x45cm; e cobrimento de 2.0cm e 2.5cm para a laje e as vigas, respectivamente.

Carregamentos Atuantes:

A utilização considerada para esta laje será de escritório, portanto os carregamentos atuantes são peso próprio de 2500N/m², revestimento de 2000N/m² e sobrecarga de 2000N/m².

Verificação Estática Conforme a ABNT NBR 6118:2013:

Os momentos solicitantes obtidos por meio das tabelas de Czerny [8] para lajes com quatro faces simplesmente apoiadas foram $m_{xsd} = 10220Nm/m$ e $m_{ysd} = 9690Nm/m$. Utilizando aço CA-50, a armadura necessária para a laje é de 4,65cm²/m na direção principal e 5,18cm²/m na direção secundária, ambas satisfeitas pelo arranjo de $\Phi 10c/15cm$. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha resulta 19,5mm, que respeita o limite de 1/300 do vão principal.

A viga crítica recebe 6700N/m de carga permanente e 3000N/m de sobrecarga além do peso próprio de 2250N/m ao longo de um vão de 6,00m. Assim, o momento solicitante de cálculo resulta $M_{sd} = 76640Nm$ que necessita de uma armadura positiva de 4,65cm² desprezando-se a mesa contribuinte, satisfeita pela adoção de 4 $\Phi 12,5$. Com relação ao

As figuras 8 e 9 a seguir representam respectivamente imagens simples e *renderizada* do modelo como visto no programa.

MODELO SEM TMD's

FIGURA 9 - ESTUDO DE CASO 1 - *RENDERIZAÇÃO* PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

Definição dos *Tuned-Mass Dampers*:

Da análise do modelo obtêm-se as seguintes frequências naturais: 5,62Hz para o primeiro modo, 11,56Hz para o segundo e 11,86Hz para o terceiro. Destes, apenas o primeiro está dentro da frequência de excitação do caminhar e, portanto, o *Tuned-Mass Damper* foi sintonizado para uma frequência de 5,62Hz.

A escolha do elemento inercial é realizada por meio da aplicação da equação 3.2.1 ao caso, destacando que devido à função da laje como piso de escritório, o *Design Guide* recomenda sobrecarga para cálculo dinâmico de 0,50kN/m², ou seja, aproximadamente 50kgf/m²:

$$M_{TMD}^{calculado} = 0,01[(0,10 \times 2500 + 200 + 50)0,50 \times 0,50] = 1,25kg \longrightarrow M_{TMD}^{adotado} = 1,25kg$$

Em seguida, a rigidez ideal da mola é calculada por meio da equação 3.2.2:

$$k_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{2\pi}{1 + 0,01} 5,62 \right]^2 \times 1,25 = 1528 N / m \longrightarrow k_{TMD}^{adotado} = 1500 N / m$$

Finalmente, o amortecimento ideal a ser utilizado é obtido aplicando-se a equação 3.2.3:

$$c_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{3 \times 0,01 \times 1,25 \times 1500}{2(1 + 0,01)^3} \right]^{\frac{1}{2}} = 5,22 \text{Ns} / \text{m} \longrightarrow c_{TMD}^{adotado} = 5,20 \text{Ns} / \text{m}$$

O segundo modelo é criado, então, considerando a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* sob a laje, com os elementos previamente definidos e espaçamento de 0,50m entre si. Neste novo modelo, a frequência natural do primeiro modo foi de 5,30Hz.

Amortecimento de Rayleigh:

Conforme recomendação do AISC para escritórios, a taxa de amortecimento natural da estrutura considerada é de 0,03. Assim, as incógnitas $\alpha_{Rayleigh}$ e $\beta_{Rayleigh}$ são definidas para que as frequências 4,00Hz e 7,00Hz apresentem o amortecimento exato desejado, o que leva aos coeficientes $\alpha_{Rayleigh} = 0,9596 \text{ s}^{-1}$ e $\beta_{Rayleigh} = 8,68 \times 10^{-4} \text{ s}$ e resulta na taxa indicada no gráfico da figura 10. Notar que o gráfico indica taxa de amortecimento de 0,03 para excitações de 4,00Hz e 7,00Hz, com as frequências intermediárias apresentando um valor bastante próximo do desejado.

FIGURA 10 - ESTUDO DE CASO 1 -AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH RESULTANTE

Resultados e Discussão:

A diferença de comportamento entre os sistemas estruturais com e sem a aplicação dos TMD's pode ser visualizada nos gráficos das figuras 11 e 12 que apresentam respectivamente os valores quadráticos médios do deslocamento e da aceleração no ponto central da laje para o sistema harmônico estabilizado. Com base nestes resultados, é clara a redução tanto da amplitude do deslocamento quanto da aceleração na ressonância. Os valores quadráticos médios de ambos diminuem em cerca de 65% para a frequência de 5,6Hz, com o deslocamento caindo de 0,165mm para 0,057mm; enquanto a aceleração cai de 0,204m/s² para 0,070m/s². É importante notar que embora estes valores aparentem ser inicialmente desprezíveis, o deslocamento só considera a força pontual de 700N, muito inferior à carga real da laje, cujo deslocamento estático corresponde a 0,109mm; e as acelerações da estrutura sem e com a aplicação dos TMD's representam respectivamente 2,06% e 0,71% da aceleração da gravidade, sendo o limite aceitável para escritórios entre 0,4% e 0,75%. Notar nos gráficos das figuras 11 e 12 as quebras de continuidade nas frequências excitantes 2,20Hz, 4,40Hz e 6,60Hz, causadas pela mudança do coeficiente α_i de cada harmônico.

Com relação à diferença no comportamento do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's, fica clara não só a redução da resposta dinâmica do sistema na frequência de sintonização como também o surgimento de dois novos picos nos resultados para os quais o sistema com a aplicação dos mecanismos apresenta um comportamento dinâmico inferior ao sistema original. A presença desses picos, entretanto é comum e esperada devido à aplicação de *Tuned-Mass Dampers*, e é mitigada pelo fato de que as duas novas respostas máximas geradas continuam muito inferiores à original. Para facilitar a visualização deste comportamento, o gráfico da figura 13 apresenta a eficácia da aplicação dos TMD's por meio da relação dos resultados com e sem a aplicação dos mecanismos para todo o espectro de frequências excitantes analisadas.

FIGURA 11 - ESTUDO DE CASO 1 - DESLOCAMENTO QUADRÁTICO MÉDIO X FREQUÊNCIA

FIGURA 12 - ESTUDO DE CASO 1 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

FIGURA 13 - ESTUDO DE CASO 1 -RELAÇÃO ENTRE A AMPLITUDE DOS SISTEMAS COM E SEM A APLICAÇÃO DOS TMD'S

4.3. ESTUDO DE CASO 2

Dados Geométricos:

Este modelo apresenta uma laje retangular de 10,0 cm de espessura 7,00m por 8,75m de vão; continuidade em ambas as faces da direção principal; vigas de 20x50cm e cobrimento de 2.0cm e 2.5cm para a laje e as vigas, respectivamente.

Carregamentos Atuantes:

A ocupação considerada para esta laje será residencial, portanto os carregamentos atuantes são peso próprio de 2500N/m^2 , revestimento de 2000N/m^2 e sobrecarga de 1500N/m^2 .

Verificação Estática Conforme a ABNT NBR 6118:2013:

Os momentos solicitantes obtidos por meio das tabelas de Czerny para lajes com continuidade em duas faces na direção principal foram $m_{x\text{sd}} = 15596\text{Nm/m}$, $m_{y\text{sd}} = 8960\text{Nm/m}$ e $m'_{x\text{sd}} = -32410\text{Nm/m}$. Utilizando aço CA-50, a área de aço necessária para a laje na direção principal é $5,09\text{cm}^2/\text{m}$ de armadura positiva e $11,52\text{cm}^2/\text{m}$ de armadura negativa. Já na direção secundária, é necessária uma armadura positiva de $3,16\text{cm}^2/\text{m}$. A área de aço é satisfeita por meio da distribuição de $\Phi 10\text{c}/15\text{cm}$ de armadura positiva principal, $\Phi 12.5\text{c}/10\text{cm}$ de armadura negativa principal, e $\Phi 8\text{c}/15\text{cm}$ de armadura positiva secundária. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha resulta $21,1\text{mm}$, que respeita o limite de $1/300$ do vão principal.

A viga crítica recebe 9500N/m de carga permanente e 3200N/m de sobrecarga além do peso próprio de 2500N/m ao longo de um vão de $8,75\text{m}$. Assim, o momento solicitante de cálculo resulta $M_{\text{sd}} = 202300\text{Nm}$ que necessita de uma armadura positiva de $11,7\text{cm}^2$ desprezando-se a mesa contribuinte, satisfeita pela adoção de $6\Phi 16$. Com relação ao estado limite de serviço a abertura máxima de fissura seria de $0,124\text{mm}$, menor que os valores de norma. Já a flecha de longa duração seria de $76,5\text{mm}$, muito maior que o valor limite de $29,2\text{mm}$. Entretanto, este problema pode ser mitigado mediante a aplicação de uma contra-flecha de $50,0\text{mm}$ à viga. A estrutura é, portanto, estaticamente compatível com as exigências da ABNT.

As figuras 14 e 15 a seguir representam respectivamente imagens simples e *renderizada* do modelo como visto no programa.

FIGURA 14 - ESTUDO DE CASO 2 - MODELAGEM PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

FIGURA 15 - ESTUDO DE CASO 2 - RENDERIZAÇÃO PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

Definição dos *Tuned-Mass Dampers*:

Da análise do modelo obtêm-se as seguintes frequências naturais: 3,65Hz para o primeiro modo, 6,37Hz para o segundo e 9,35Hz para o terceiro. Destes, os dois primeiros estão dentro da frequência de excitação do caminhar, de modo que o *Tuned-Mass Damper* foi sintonizado para uma frequência de 3,65Hz, a mais crítica das duas.

A escolha do elemento inercial é realizada por meio da aplicação da equação 3.2.1 ao caso, destacando que devido à função da laje como piso residencial o *Design Guide* recomenda sobrecarga para cálculo dinâmico de 0,25kN/m², ou seja, aproximadamente 25kgf/m²:

$$M_{TMD}^{calculado} = 0,01[(0,10 \times 2500 + 200 + 25)0,50 \times 0,50] = 1,19kg \longrightarrow M_{TMD}^{adotado} = 1,25kg$$

Em seguida, a rigidez ideal da mola é calculada por meio da equação 3.2.2:

$$k_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{2\pi}{1 + 0,011} 3,65 \right]^2 \times 1,25 = 643,2N / m \longrightarrow k_{TMD}^{adotado} = 630N / m$$

Finalmente, o amortecimento ideal a ser utilizado é obtido aplicando-se a equação 3.2.3:

$$c_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{3 \times 0,011 \times 1,25 \times 630}{2(1 + 0,011)^3} \right]^{1/2} = 3,55Ns / m \longrightarrow c_{TMD}^{adotado} = 3,25Ns / m$$

O segundo modelo é criado, então, considerando a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* sob a laje, com os elementos previamente definidos e espaçamento de 0,50m entre si. Neste novo modelo a frequência natural do primeiro modo foi de 3,43Hz.

Amortecimento de Rayleigh:

Conforme recomendação do AISC para residências, a taxa de amortecimento natural da estrutura considerada é de 0,05. Assim, as incógnitas $\alpha_{Rayleigh}$ e $\beta_{Rayleigh}$ são definidas para que as frequências 3,50Hz e 6,50Hz apresentem o amortecimento exato desejado, o que leva aos coeficientes $\alpha_{Rayleigh} = 0,7147 s^{-1}$ e $\beta_{Rayleigh} = 3,18 \times 10^{-3} s$ e resulta na taxa indicada no gráfico da figura 16.

FIGURA 16 - ESTUDO DE CASO 2 -AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH RESULTANTE

Resultados e Discussão:

A diferença de comportamento entre os sistemas estruturais com e sem a aplicação dos TMD's, representados nos dois modelos, pode ser visualizada nos gráficos das figuras 17 e 18 que apresentam respectivamente os valores quadráticos médios do deslocamento e da aceleração no ponto central da laje para o sistema harmônico estabilizado em regime permanente. Com base nestes resultados, é clara a redução tanto da amplitude do deslocamento quanto da aceleração na ressonância. Os valores quadráticos médios de ambos diminuem em cerca de 59% para a frequência de 3,65Hz, com o deslocamento caindo de 0,320mm para 0,132mm; enquanto a aceleração cai de 0,168m/s² para 0,069m/s².

FIGURA 17 - ESTUDO DE CASO 2 - DESLOCAMENTO QUADRÁTICO MÉDIO X FREQUÊNCIA

FIGURA 18 - ESTUDO DE CASO 2 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

Como no estudo de caso 1, apesar de os valores aparentarem ser negligenciáveis, deve-se lembrar de que o deslocamento só considera a força pontual de 700N e as acelerações da estrutura sem e com a aplicação dos TMD's representam respectivamente 1,71% e 0,70% da aceleração da gravidade, sendo o intervalo aceitável para residências entre 0,4% e 0,75%. Com relação à diferença no comportamento do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's, a redução da resposta dinâmica do sistema na frequência de sintonização é óbvia, assim como também o surgimento de dois novos picos nos resultados para os quais o sistema com a aplicação dos mecanismos apresenta um comportamento dinâmico inferior ao sistema original. A relação entre o comportamento com e sem a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* é representada no gráfico da figura 19, porém é importante notar que como as medidas foram tiradas para o ponto central da laje, o segundo modo de vibração não é capturado pelos gráficos das figuras 17 a 19. Diferentemente do caso anterior, é possível notar uma melhora dinâmica da estrutura também para as frequências próximas a 7,00Hz, ou seja, na região com ao redor de duas vezes a frequência de sintonização dos TMD's. Sendo assim, conclui-se que o mecanismo também opera em frequências próximas aos múltiplos das frequências de sintonização.

FIGURA 19 - ESTUDO DE CASO 2 -RELAÇÃO ENTRE A AMPLITUDE DOS SISTEMAS COM E SEM A APLICAÇÃO DOS TMD's

4.4. ESTUDO DE CASO 3

Dados Geométricos:

Este modelo apresenta uma laje retangular de 10,0 cm de espessura; 6,75m por 10,15m de vão; continuidade em ambas as faces da direção principal; vigas de 20x75cm; e revestimento de 2.0cm e 2.5cm para a laje e as vigas, respectivamente.

Carregamentos Atuantes:

A ocupação considerada para esta laje será residencial, portanto os carregamentos atuantes são peso próprio de 2500N/m², revestimento de 2000N/m² e sobrecarga de 1500N/m².

Verificação Estática Conforme a ABNT NBR 6118:2013:

Os momentos solicitantes obtidos por meio das tabelas de Czerny para lajes com continuidade em duas faces na direção principal foram $m_{xsd} = 15820Nm/m$, $m_{ysd} = 8036Nm/m$ e $m'_{xsd} = -31388Nm/m$. Utilizando aço CA-50, a área de aço necessária para a laje na direção principal é 5,17cm²/m de armadura positiva e 11,10cm²/m de armadura negativa. Já na direção secundária, é necessária uma armadura positiva de 2,97cm²/m. Esta área de aço é satisfeita por meio da distribuição de $\Phi 10c/15cm$ de armadura positiva principal, $\Phi 12.5c/10cm$ de armadura negativa principal, e $\Phi 8c/15cm$ de armadura positiva secundária. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha resulta 19,8mm, que respeita o limite de 1/300 do vão principal.

A viga crítica recebe 10100N/m de carga permanente e 3400N/m de sobrecarga além do peso próprio de 3750N/m ao longo de um vão de 10,15m. Assim, o momento solicitante de cálculo resulta $M_{sd} = 311100Nm$ que necessita de uma armadura positiva de 10,9cm² desprezando-se a mesa contribuinte, satisfeita pela adoção de $6\Phi 16$. Com relação ao estado limite de serviço a abertura máxima de fissura seria de 0,120mm, dentro dos valores

de norma. Já a flecha de longa duração seria de 50,2mm, maior que o valor limite de 33,8mm, porém este problema pode ser solucionado através da aplicação de uma contra-flecha à viga. A estrutura é, portanto, estaticamente compatível com as exigências da ABNT.

As figuras 20 e 21 a seguir representam respectivamente imagens simples e *renderizada* do modelo como visto no programa.

FIGURA 20 - ESTUDO DE CASO 3 - MODELAGEM PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

FIGURA 21 - ESTUDO DE CASO 3 - RENDERIZAÇÃO PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

Definição dos *Tuned-Mass Dampers*:

Da análise do modelo obtêm-se as seguintes frequências naturais: 4,38Hz para o primeiro modo, 7,37Hz para o segundo e 9,39Hz para o terceiro. Destes, os dois primeiros estão dentro da frequência de excitação do caminhar, de modo que o *Tuned-Mass Damper* foi sintonizado para uma frequência de 4,38Hz, a mais crítica das duas.

A escolha do elemento inercial é realizada por meio da aplicação da equação 3.2.1 ao caso, destacando que devido à função da laje como piso residencial o *Design Guide* recomenda sobrecarga para cálculo dinâmico de 0,25kN/m², ou seja, aproximadamente 25kgf/m²:

$$M_{TMD}^{calculado} = 0,01[(0,10 \times 2500 + 200 + 25)0,50 \times 0,50] = 1,19kg \longrightarrow M_{TMD}^{adotado} = 1,25kg$$

Em seguida, a rigidez ideal da mola é calculada por meio da equação 3.2.2:

$$k_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{2\pi}{1 + 0,011} 4,38 \right]^2 \times 1,25 = 926,2N / m \longrightarrow k_{TMD}^{adotado} = 1000N / m$$

Finalmente, o amortecimento ideal a ser utilizado é obtido aplicando-se a equação 3.2.3:

$$c_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{3 \times 0,011 \times 1,25 \times 1000}{2(1 + 0,011)^3} \right]^{\frac{1}{2}} = 4,47 \text{Ns} / m \longrightarrow c_{TMD}^{adotado} = 4,60 \text{Ns} / m$$

O segundo modelo é criado, então, considerando a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* sob a laje, com os elementos previamente definidos e espaçamento de 0,50m entre si. Neste novo modelo a frequência natural do primeiro modo foi de 4,22Hz.

Amortecimento de Rayleigh:

Conforme recomendação do AISC para residências, a taxa de amortecimento natural da estrutura considerada é de 0,05. Assim, as incógnitas $\alpha_{Rayleigh}$ e $\beta_{Rayleigh}$ são definidas para que as frequências 4.00Hz e 7,50Hz apresentem o amortecimento exato desejado, o que leva aos coeficientes $\alpha_{Rayleigh} = 0,8195s^{-1}$ e $\beta_{Rayleigh} = 2,77 \times 10^{-3}s$ e resulta na taxa indicada no gráfico da figura 22.

FIGURA 22 - ESTUDO DE CASO 3 -AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH RESULTANTE

Resultados e Discussão:

A diferença de comportamento entre os sistemas estruturais com e sem a aplicação dos TMD's, representados nos dois modelos, pode ser visualizada nos gráficos das figuras 23 e 24 que apresentam respectivamente os valores quadráticos médios do deslocamento e da aceleração no ponto central da laje para o sistema harmônico estabilizado. Com base nestes resultados, é clara a redução tanto da amplitude do deslocamento quanto da aceleração na ressonância. Os valores quadráticos médios de ambos diminuem em cerca de 55% para a frequência de 4,38Hz, com o deslocamento caindo de 0,221mm para 0,099mm; enquanto a aceleração cai de 0,169m/s² para 0,075m/s².

FIGURA 23 - ESTUDO DE CASO 3 - DESLOCAMENTO QUADRÁTICO MÉDIA X FREQUÊNCIA

FIGURA 24 - ESTUDO DE CASO 3 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

As acelerações da estrutura sem e com a aplicação dos TMD's representam respectivamente 1,72% e 0,76% da aceleração da gravidade, sendo o intervalo aceitável para residências entre 0,4% e 0,75%. Com relação à diferença no comportamento do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's, a redução da resposta dinâmica do sistema na frequência de sintonização é óbvia, assim como também o surgimento de dois novos picos nos resultados para os quais o sistema com a aplicação dos mecanismos apresenta um comportamento dinâmico inferior ao sistema original. A relação entre o comportamento com e sem a aplicação dos Tuned-Mass Dampers é representada no gráfico da figura 25. É importante notar que os dados são obtidos do ponto central da laje e, portanto, são incapazes de capturar o segundo modo de vibração. Como no caso anterior, é possível notar uma melhora dinâmica da estrutura também para as frequências próximas a 8,00Hz, ou seja, na região do segundo harmônico da frequência de sintonização dos TMD.

FIGURA 25 - ESTUDO DE CASO 3 -RELAÇÃO ENTRE A AMPLITUDE DOS SISTEMAS COM E SEM A APLICAÇÃO DOS TMD's

4.5. ESTUDO DE CASO 4

Dados Geométricos:

Este modelo apresenta uma laje retangular de 10,0 cm de espessura; de 5,00m por 6,25m de vão; simplesmente apoiada em suas bordas; vigas de 20x50cm; e cobrimento de 2.0cm e 2.5cm para a laje e as vigas, respectivamente.

Carregamentos Atuantes:

A ocupação considerada para esta laje será residencial, portanto os carregamentos atuantes são peso próprio de 2500N/m^2 , revestimento de 2000N/m^2 e sobrecarga de 1500N/m^2 .

Verificação Estática Conforme a ABNT NBR 6118:2013:

Os momentos solicitantes obtidos por meio das tabelas de Czerny para lajes com as bordas simplesmente apoiadas foram $m_{x\text{sd}} = 13210/m$ e $m_{y\text{sd}} = 9375Nm/m$. Utilizando aço CA-50, a área de aço necessária para a laje é $4,27\text{cm}^2/m$ na direção principal e $3,48\text{cm}^2/m$ na direção secundária. Está área de aço é satisfeita por meio da distribuição de $\Phi 8c/10cm$ de armadura principal e $\Phi 8c/12,5cm$ de armadura secundária. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha resulta $14,6\text{mm}$, que respeita o limite de $1/300$ do vão principal.

A viga crítica recebe 6800N/m de carga permanente e 2300N/m de sobrecarga além do peso próprio de 2500N/m ao longo de um vão de $6,25\text{m}$. Assim, o momento solicitante de cálculo resulta $M_{\text{sd}} = 79300Nm$ que necessita de uma armadura positiva de $4,24\text{cm}^2$ desprezando-se a mesa contribuinte, satisfeita pela adoção de $4\Phi 12,5$. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha seria de $9,3\text{mm}$ e a abertura máxima de fissura seria de $0,158\text{mm}$, ambos dentro dos valores de norma. A estrutura é, portanto, estaticamente compatível com as exigências da ABNT.

As figuras 26 e 27 a seguir representam respectivamente imagens simples e *renderizada* do modelo como visto no programa.

FIGURA 26 - ESTUDO DE CASO 4 -MODELAGEM PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

FIGURA 27 - ESTUDO DE CASO 4 - RENDERIZAÇÃO PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

Definição dos *Tuned-Massa Dampers*:

Da análise do modelo obtêm-se as seguintes frequências naturais: 6,87Hz para o primeiro modo, 13,36Hz para o segundo e 15,42Hz para o terceiro. Destes, somente o primeiro está dentro da frequência de excitação do caminhar, de modo que o *Tuned-Massa Damper* foi sintonizado para a frequência de 6,87Hz.

A escolha do elemento inercial é realizada por meio da aplicação da equação 3.2.1 ao caso, destacando que devido à função da laje como piso residencial o *Design Guide* recomenda sobrecarga para cálculo dinâmico de 0,25kN/m², ou seja, aproximadamente 25kgf/m²:

$$M_{TMD}^{calculado} = 0,01[(0,10 \times 2500 + 200 + 25)0,50 \times 0,50] = 1,19kg \longrightarrow M_{TMD}^{adotado} = 1,25kg$$

Em seguida, a rigidez ideal da mola é calculada por meio da equação 3.2.2:

$$k_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{2\pi}{1 + 0,011} 6,87 \right]^2 \times 1,25 = 2279 N / m \longrightarrow k_{TMD}^{adotado} = 2350 N / m$$

Finalmente, o amortecimento ideal a ser utilizado é obtido aplicando-se a equação 3.2.3:

$$c_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{3 \times 0,011 \times 1,25 \times 2350}{2(1 + 0,011)^3} \right]^{1/2} = 6,85 Ns / m \longrightarrow c_{TMD}^{adotado} = 7,00 Ns / m$$

O segundo modelo é criado, então, considerando a aplicação dos *Tuned-Massa Dampers* sob a laje, com os elementos previamente definidos e espaçamento de 0,50m entre si. Neste novo modelo a frequência natural do primeiro modo foi de 6,56Hz.

Amortecimento de Rayleigh:

Conforme recomendação do AISC para residências, a taxa de amortecimento natural da estrutura considerada é de 0,05. Assim, as incógnitas $\alpha_{Rayleigh}$ e $\beta_{Rayleigh}$ são definidas para que as frequências 4,00Hz e 7,50Hz apresentem o amortecimento exato desejado, o que leva aos coeficientes $\alpha_{Rayleigh} = 0,8835s^{-1}$ e $\beta_{Rayleigh} = 2,65 \times 10^{-3}s$ e resulta na taxa indicada no gráfico da figura 28.

FIGURA 28 - ESTUDO DE CASO 4 -AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH RESULTANTE

Resultados e Discussão:

A diferença de comportamento entre os sistemas estruturais com e sem a aplicação dos TMD's, representados nos dois modelos, pode ser visualizada nos gráficos das figuras 29 e 30 que apresentam respectivamente os valores quadráticos médios do deslocamento e da aceleração no ponto central da laje para o sistema harmônico estabilizado. Com base nestes resultados, é clara a redução tanto da amplitude do deslocamento quanto da aceleração na ressonância. Os valores quadráticos médios de ambos diminuem em cerca de 55% para a frequência de 6,87Hz, com o deslocamento caindo de 0,039mm para 0,018mm; enquanto a aceleração cai de 0,074m/s² para 0,034m/s².

FIGURA 29 - ESTUDO DE CASO 4 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

FIGURA 30 - ESTUDO DE CASO 4 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

As acelerações da estrutura sem e com a aplicação dos TMD's representam respectivamente 0,74% e 0,35% da aceleração da gravidade, sendo o intervalo aceitável para residências entre 0,4% e 0,75%. Neste caso em particular, a solução sem TMD's apresenta dois picos. Essa irregularidade é causada pela redução do α_i de 0,10 a 0,05 a partir da frequência 6,6Hz, que causa a redução das amplitudes e resulta no aparecimento do primeiro pico. Conforme a frequência excitante se aproxima da ressonante, 6,87Hz, as amplitudes continuam crescendo, causando o surgimento do segundo pico. Com relação à diferença no comportamento do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's, a redução da resposta dinâmica do sistema na frequência de sintonização é óbvia, assim como também o surgimento de dois novos picos nos resultados para os quais o sistema com a aplicação dos mecanismos apresenta um comportamento dinâmico inferior ao sistema original. A relação entre o comportamento com e sem a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* é representada no gráfico da figura 31.

FIGURA 31 - ESTUDO DE CASO 4 -RELAÇÃO ENTRE A AMPLITUDE DOS SISTEMAS COM E SEM A APLICAÇÃO DOS TMD's

4.6. ESTUDO DE CASO 5

Dados Geométricos:

Este modelo apresenta uma laje retangular de 10,0 cm de espessura; de 4,75m por 7,25m de vão; simplesmente apoiada em suas bordas; vigas de 20x50cm; e cobrimento de 2.0cm e 2.5cm para a laje e as vigas, respectivamente.

Carregamentos Atuantes:

A ocupação considerada para esta laje será residencial, portanto os carregamentos atuantes são peso próprio de 2500N/m², revestimento de 2000N/m² e sobrecarga de 1500N/m².

Verificação Estática Conforme a ABNT NBR 6118:2013:

Os momentos solicitantes obtidos por meio das tabelas de Czerny para lajes com as bordas simplesmente apoiadas foram $m_{xsd} = 15175\text{Nm/m}$ e $m_{ysd} = 8065\text{Nm/m}$. Utilizando aço CA-50, a área de aço necessária para a laje é 4,95cm²/m na direção principal e 2,98cm²/m na direção secundária. Esta área de aço é satisfeita mediante a distribuição de $\Phi 8c/10cm$ de armadura principal e $\Phi 8c/15cm$ de armadura secundária. Com relação ao estado limite de serviço, a flecha resulta 15,5mm, que respeita o limite de 1/300 do vão principal.

A viga crítica recebe 7200N/m de carga permanente e 2400N/m de sobrecarga além do peso próprio de 2500N/m ao longo de um vão de 7,25m. Assim, o momento solicitante de cálculo resulta $M_{sd} = 111300\text{Nm}$ que necessita de uma armadura positiva de 6,05cm² desprezando-se a mesa contribuinte, satisfeita pela adoção de 3 $\Phi 16$. Com relação ao estado limite de serviço, a abertura máxima de fissura seria de 0,226mm, dentro dos valores de norma. Já a flecha de longa duração seria de 30,4mm, maior que o valor limite de 24,2mm, porém este problema pode ser solucionado por meio da aplicação de uma contra-flecha à viga. A estrutura é, portanto, estaticamente compatível com as exigências da ABNT.

As figuras 32 e 33 a seguir representam respectivamente imagens simples e *renderizada* do modelo como visto no programa.

FIGURA 32 - ESTUDO DE CASO 5 – MODELAGEM PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

FIGURA 33 - ESTUDO DE CASO 5 - RENDERIZAÇÃO PELO PROGRAMA ADINA 9.1 DO MODELO SEM TMD's

Definição dos Tuned-Mass Dampers:

Da análise do modelo obtêm-se as seguintes frequências naturais: 5,77Hz para o primeiro modo, 10,90Hz para o segundo e 14,11Hz para o terceiro. Destes, somente o primeiro está dentro da frequência de excitação do caminhar, de modo que o *Tuned-Mass Damper* foi sintonizado para a frequência de 5,77Hz.

A escolha do elemento inercial é realizada por meio da aplicação da equação 3.2.1 ao caso, destacando que devido à função da laje como piso residencial o *Design Guide* recomenda sobrecarga para cálculo dinâmico de 0,25kN/m², ou seja, aproximadamente 25kgf/m²:

$$M_{TMD}^{calculado} = 0,01[(0,10 \times 2500 + 200 + 25)0,50 \times 0,50] = 1,19kg \longrightarrow M_{TMD}^{adotado} = 1,25kg$$

Em seguida, a rigidez ideal da mola é calculada por meio da equação 3.2.2:

$$k_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{2\pi}{1 + 0,011} 5,77 \right]^2 \times 1,25 = 1607 N / m \longrightarrow k_{TMD}^{adotado} = 1500 N / m$$

Finalmente, o amortecimento ideal a ser utilizado é obtido aplicando-se a equação 3.2.3:

$$c_{TMD}^{calculado} = \left[\frac{3 \times 0,011 \times 1,25 \times 1500}{2(1 + 0,011)^3} \right]^{\frac{1}{2}} = 5,47 \text{Ns} / m \longrightarrow c_{TMD}^{adotado} = 5,20 \text{Ns} / m$$

O segundo modelo é criado, então, considerando a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* sob a laje, com os elementos previamente definidos e espaçamento de 0,50m entre si. Neste novo modelo a frequência natural do primeiro modo foi de 5,32Hz.

Amortecimento de Rayleigh:

Conforme recomendação do AISC para residências, a taxa de amortecimento natural da estrutura considerada é de 0,05. Assim, as incógnitas $\alpha_{Rayleigh}$ e $\beta_{Rayleigh}$ são definidas para que as frequências 4,50Hz e 6,50Hz apresentem o amortecimento exato desejado, o que leva aos coeficientes $\alpha_{Rayleigh} = 0,8353s$ e $\beta_{Rayleigh} = 2,59 \times 10^{-3}$ e resulta na taxa indicada no gráfico da figura 34.

FIGURA 34 - ESTUDO DE CASO 4 -AMORTECIMENTO DE RAYLEIGH RESULTANTE

Resultados e Discussão:

A diferença de comportamento entre os sistemas estruturais com e sem a aplicação dos TMD's pode ser visualizada nos gráficos das figuras 35 e 36 que apresentam respectivamente os valores quadráticos médios do deslocamento e da aceleração no ponto central da laje para o sistema harmônico estabilizado em regime permanente. Com base nestes resultados, é clara a redução tanto da amplitude do deslocamento quanto da aceleração na ressonância. Os valores quadráticos médios de ambos diminuem em cerca de 52% para a frequência de 5,77Hz, com o deslocamento caindo de 0,107mm para 0,054mm; enquanto a aceleração cai de 0,141m/s² para 0,071m/s².

FIGURA 35 - ESTUDO DE CASO 5 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

FIGURA 36 - ESTUDO DE CASO 5 - ACELERAÇÃO QUADRÁTICA MÉDIA X FREQUÊNCIA

As acelerações da estrutura sem e com a aplicação dos TMD's representam respectivamente 1,4% e 0,72% da aceleração da gravidade, sendo o intervalo aceitável para residências entre 0,4% e 0,75%. Com relação à diferença no comportamento do sistema estrutural antes e depois da instalação dos TMD's, a redução da resposta dinâmica do sistema na frequência de sintonização é óbvia, assim como também o surgimento de dois novos picos nos resultados para os quais o sistema com a aplicação dos mecanismos apresenta um comportamento dinâmico inferior ao sistema original. A relação entre o comportamento com e sem a aplicação dos *Tuned-Mass Dampers* é representada no gráfico da figura 37.

FIGURA 37 - ESTUDO DE CASO 5 - RELAÇÃO ENTRE A AMPLITUDE DOS SISTEMAS COM E SEM A APLICAÇÃO DOS TMD'S

5. CONCLUSÕES

O objetivo desta dissertação consistiu na proposta de uma solução padronizada para a aplicação de *Tuned-Mass Dampers* para o controle de vibração em lajes. Conforme planejado, um conjunto de elementos pré-definidos foi escolhido com cinco opções de elementos inerciais, quinze opções de molas e dez opções de amortecedores. Este conjunto foi, então, testado em uma gama de estudos de caso escolhidos de modo a levar em consideração diversas proporções entre lados de lajes retangulares, com e sem continuidade em sua direção principal. Apesar de o estudo não incluir lajes de formatos irregulares, ainda assim se pode argumentar que a análise cobriu uma gama representativa de geometrias. Ficou claro nos casos estudados a significativa redução, entre 60% e 50%, do valor quadrático médio da aceleração, provando a eficácia da solução proposta.

Com relação aos elementos padronizados, as molas com a rigidez desejada podem ser facilmente encontradas em catálogos comerciais e os elementos inerciais podem ser facilmente construídos. Apenas os elementos dissipadores originaram um desafio de

produção, pois os amortecedores selecionados apresentaram um coeficiente de amortecimento muito menor do que os comumente produzidos com precisão pela indústria. Sua produção, portanto, não seria imediata, necessitando adaptação.

Considerando, então, que o método proposto apresenta relativa facilidade de utilização, proveniente de sua simples definição, montagem e instalação, além de apresentar a eficácia desejada, podemos concluir que a solução proposta apresenta viabilidade para o meio técnico contemporâneo. O estudo desprezou, entretanto, a análise dos outros modos de vibração com exceção do primeiro e de lajes de formatos irregulares, de modo que se faz necessária sua verificação em futuros estudos. Propõe-se, também, a análise da aplicação de múltiplos conjuntos de TMD's com diferentes frequências de sintonização distribuídos de modo a otimizar a atenuação em sistemas que apresentem mais de um modo de vibração cuja frequência natural esteja dentro do espectro de frequências excitantes. Por fim, faz-se necessário o desenvolvimento de protótipos e a realização de ensaios para certificar o comportamento da solução proposta.

6. REFERÊNCIAS

- [1]. ADINA, RD. "Inc., 2012." ADINA Theory and Modeling Guide. ADINA R&D Inc., Watertown, Massachusetts (2012).
- [2]. AMERICAN INSTITUTE OF STEEL CONSTRUCTION, INC. STEEL DESIGN GUIDE SERIES 11: Floor Vibrations Due to Human Activity. 2003.
- [3]. ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. NBR 6118: Projeto de estruturas de concreto - Procedimento. 2013.
- [4]. BATHE, Klaus-Jürgen. Conserving energy and momentum in nonlinear dynamics: A simple implicit time integration scheme. Computers and Structures, Massachusetts Institute of Technology, Department of Mechanical Engineering, 77 Massachusetts Avenue, Cambridge, MA 02139, United States, v. 85, p. 437-445, nov. 2006.
- [5]. BATHE, Klaus-Jürgen. Finite Element Procedures. 14. ed. :Prentice Hall, 1996.
- [6]. CLOUGH, Ray W.; PENZIEN, Joseph. Dynamics of Structures. McGraw-Hill International Book Company, 1982.
- [7]. COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BÉTON. BULLETIN D'INFORMATION N209: Vibration Problems in Structures. 1991.
- [8]. CZERNY, F., Tafeln für gleichmässig vollbelastete Rechteckplatten – Beton Kalender 1958.
- [9]. DANIEL, Y.; LAVAN, O.. Gradient based optimal seismic retrofitting of 3D irregular buildings using multiple tuned mass dampers. Computers and Structures, [S.L], v. 139, p. 84-97, jul. 2014.
- [10]. ELIAS, Said; MATSAGAR, Vasant; DATTA, T.K.. Effectiveness of distributed tuned mass dampers for multi-mode control of chimney under earthquakes. Engineering Structures, [S.L], v. 124, p. 1-16, out. 2016.
- [11]. HOANG, T. et al. Structural impact mitigation of bridge piers using tuned mass damper. Engineering Structures, [S.L], v. 112, p. 287-294, set. 2016.
- [12]. INTERNATIONAL STANDARDS ORGANIZATION. INTERNATIONAL STANDARD ISO 2631-2: Evaluation of Human Exposure to Whole-Body Vibration-Part 2: Human Exposure to Continuous and Shock-Induced Vibrations in Buildings (1 to 80 Hz). 1989.
- [13]. REDDY, Junuthula N.. An introduction to the finite element method. 3 ed. Department of Mechanical Engineering, Texas A&M University. College Station, Texas, USA 77843: McGraw-Hill, 2006.

- [14]. SAKR, Tharwat A.. Vibration control of buildings by using partial floor loads as multiple tuned mass dampers. Hbrc journal (2015), . Disponível em: < <http://dx.doi.org/10.1016/j.hbrcj.2015.04.004>
- [15]. VARELA, Wendell D.; BATTISTA, Ronaldo C.. Control of vibrations induced by people walking on large span composite floor decks. Engineering Structures. p. 2485-2494. set. 2011.