Hudson Chagas dos Santos

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
SOB O EFEITO DO TEMPO:**

**Uma abordagem consistente com consideração da
viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração,
da protensão e de etapas construtivas.**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Civil.

São Paulo
2006

Hudson Chagas dos Santos

**ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE CONCRETO
SOB O EFEITO DO TEMPO:**

**Uma abordagem consistente com consideração da
viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração,
da protensão e de etapas construtivas.**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
título de Doutor em Engenharia Civil.

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo
2006

FICHA CATALOGRÁFICA

Santos, Hudson Chagas dos

Análise de estruturas de concreto sob o efeito do tempo: uma abordagem consistente com a consideração da viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração, da protensão e de etapas construtivas / H.C. dos Santos. - São Paulo, 2006. 132p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

1.Estruturas de concreto 2.Concreto protendido 3.Fluência 4.Viscoelasticidade das estruturas 5.Deformação estrutural I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.

Dedicatória

... a minha família, ...a minha esposa, ... ao trio TJJ.

“Viver trabalhando e estudando, agindo e construindo, no próprio burilamento e na própria corrigenda, de tal modo que não se veja capaz de encontrar as falhas prováveis e os erros possíveis dos outros.”

André Luiz

Agradecimentos

A Deus... sinto-me na plenitude de agradecer-Te por Tua generosidade e benevolência e, sobretudo Pai, por auxiliar-me a reconhecer que a minha felicidade mais alta é, invariavelmente, aquela de cumprir-Te os desígnios onde e como queiras, a qualquer momento de minha vida.

Aos meus pais e familiares, pelo amor e apoio que tenho recebido durante todos os anos de minha vida.

A minha esposa Adrianna, deixo-te meu mais feliz agradecimento:

“Eu te agradeço tanto por este amor bonito, que entrou na minha vida. Entrou... e foi ficando... e me envolveu. Trouxe um novo encanto, me fazendo mais feliz.”

Ao meu orientador Prof. Dr-Ing. Paulo de Mattos Pimenta, meu muito obrigado pelas descobertas do essencial que registrei ao longo desses anos, compartilhando e usufruindo de teus ensinamentos e orientações.

Aos meus amigos da FEG/UNESP... irmãos por afeto que sempre me apoiaram incondicionalmente sempre está presente... em especial a Suzimeire, Fernando Bardi, Cecília e Flávio pelo incentivo, palavras amigas e apoio nas minhas decisões.

Aos meus colegas, amigos e professores... deixo aqui minha mais sincera gratidão a estes, que por amor, amizade, cooperação e respeito compartilharam pacientemente dessa jornada.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo - FAPESP pela concessão e suporte proporcionado através da bolsa de doutoramento durante esses três anos e sete meses de trabalho.

Ao Centro Federal de Educação Tecnológica do Piauí - CEFET-PI e a Faculdade Santo Agostinho - FSA, pelo apoio financeiro durante o final do meu processo de doutoramento.

“Por muitas sejam as dores que te aflijam a alma, asserena-te na oração e pacifica os quadros da própria luta.”

Emmanuel

Índice

Lista de Tabelas

Lista de Figuras

Capítulo 1	1
1.1. Linha de pesquisa	1
1.2. Objetivos	3
1.3. Justificativa	4
1.4. Motivação	5
1.4.1. Plano de pesquisa	5
1.5. Organização da tese	6
Capítulo 2	9
2.1. Deformação Imediata segundo a NBR-6118:2003	10
2.2. Fluência do concreto segundo a NBR-6118:2003	11
2.3. Retração do concreto segundo a NBR 6118:2003	17
2.4. Protensão do aço segundo a NBR 6118:2003	18
2.4.1. Perdas da força de protensão	18
Capítulo 3	20
3.1. Deformações do concreto	21
3.2. Algoritmo Geral de Integração de Tensões	28
Capítulo 4	31
4.1. Modelo de Três Parâmetros com Coeficientes Constantes	32
4.1.1. Algoritmo de Integração de Tensões	34
4.1.2. Estabilidade Numérica	34
4.1.3. Ensaio de Carga e Descarga	35
4.2. Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt com Coeficientes Constantes	35
4.2.1. Algoritmo de Integração de Tensões	37
4.2.2. Estabilidade Numérica	38
4.2.3. Ensaio de Carga e Descarga	38

4.3. Função de Dischinger.....	39
4.3.1. Algoritmo de Integração de Tensões.....	41
4.3.2. Estabilidade Numérica	41
4.3.3. Ensaio de Carga e Descarga.....	42
4.4. Função de Dischinger Generalizada.....	42
4.4.1. Algoritmo de Integração de Tensões.....	44
4.4.2. Estabilidade Numérica	45
4.4.3. Ensaio de Carga e Descarga.....	45
4.5. Função Geral de Fluência.....	45
4.5.1. Ensaio de Carga e Descarga.....	49
4.6. Proposta de uma Função Simplificada de Fluência.....	49
4.6.1. Calibração com a NBR 6118:2003.....	51
Capítulo 5.....	55
5.1. Método da Colocação.....	56
5.2. Exemplos de Calibração.....	58
5.2.1. Exemplo 1 - ISHITANI[25]	60
5.2.2. Exemplo 2 - viga de perfil I	63
5.2.3. Exemplo 3 - viga com laje de colaboração.....	65
5.2.4. Exemplo 4 - viga com laje de colaboração em duas etapas	68
Capítulo 6.....	76
6.1. Formulação do elemento de cabo.....	76
6.1.1. Cinemática.....	76
6.1.2. Estática	79
6.1.3. Cabo não escorregando	81
6.1.4. Cabo escorregando sem atrito	82
6.1.5. Cabo escorregando com atrito.....	82
6.2. Algoritmo de integração de tensões	84
6.2.1. Previsor	84
6.2.2. Corretor 1	85
6.2.3. Corretor 2	86
6.3. Relaxação do cabo.....	88
6.4. Elemento de macaco.....	89
6.4.1. Perda por acomodação das cunhas de ancoragem.....	90
6.5. Exemplos numéricos	90
6.5.1. Exemplo 1: cabo sem escorregamento	90
6.5.2. Exemplo 2: Cabo com escorregamento e sem atrito	92
6.5.3. Exemplo 3: Cabo com escorregamento e com atrito.....	93
6.5.3.1. CASO 1: viga com carga concentrada	93
6.5.3.2. CASO 2: viga com carga distribuída.....	94
Capítulo 7.....	97
7.1. Formulação do MEF para elementos de barras	97
7.1.1. Elemento isoparamétrico de viga	97
7.1.2. Trabalho virtual externo	98
7.1.3. Trabalho virtual interno.....	99
7.2. Análise matricial das estruturas planas de concreto armado e protendido.....	101
7.2.1. Caso Linear	101

7.2.2. Caso Não-Linear	104
7.3. Programas Comerciais de Elementos Finitos.....	108
7.3.1. CASO A: Programas que aceitam $S^c \neq 0$ ou “off-set” de eixo	111
7.3.2. CASO B: Programas que supõem $S^c = 0$	111
Capítulo 8	113
8.1. Estudo da calibração da FSF	113
8.1.1. Variação da umidade relativa do ambiente	114
8.1.2. Variação da espessura fictícia	115
8.1.3. Variação do instante de carregamento.....	116
8.1.4. Variação do tipo de cimento.....	119
8.1.5. Variação do tipo de abatimento ou “slump test”	121
8.1.6. Variação da temperatura média.....	122
8.2. Testes do elemento de cabo.....	123
8.2.1. Ensaio de escorregamento.....	123
8.2.2. Teste do macaqueamento	123
8.2.3. Teste das perdas por atrito.....	124
8.2.3.1. Cilindro com atrito	124
8.2.3.2. Cabo reto	126
8.2.3.3. Cabo parabólico.....	126
8.2.3.4. Composição de cabo parabólico e reto.....	127
8.3. Exemplos de vigas de concreto protendido	127
Capítulo 9	129
Referência Bibliográfica	
Anexos	

Lista de Tabelas

<i>Tabela 1: Valores do coeficiente de atrito μ.....</i>	<i>19</i>
<i>Tabela 2: Valores do coeficiente ψ_{1000} em %.....</i>	<i>19</i>
<i>Tabela 3: Definições relativas ao tempo.....</i>	<i>20</i>
<i>Tabela 4: Fatores que influenciam a deformação do concreto ao longo do tempo.</i>	<i>22</i>
<i>Tabela 5: Funções de $E(\zeta)$ retirado de normas.</i>	<i>25</i>
<i>Tabela 6: Valores de s para cada tipo de Cimento Portland.</i>	<i>26</i>
<i>Tabela 7: Funções de $F(\zeta_0)$ e $f(t-t_0)$ retirado de normas.....</i>	<i>28</i>
<i>Tabela 8: Parâmetros para obtenção e calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118.</i>	<i>51</i>
<i>Tabela 9: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - ISHITANI[25].</i>	<i>61</i>
<i>Tabela 10: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - perfil I.</i>	<i>64</i>
<i>Tabela 11: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - viga e laje.....</i>	<i>66</i>
<i>Tabela 12: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - 2 etapas (viga).</i>	<i>70</i>
<i>Tabela 13: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - 2 etapas (laje).</i>	<i>71</i>
<i>Tabela 14: Parâmetros para obtenção da função de fluência - seção homogênea.....</i>	<i>73</i>
<i>Tabela 15: Características geométricas e físicas para a viga da figura 47.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabela 16: Deslocamentos e deformações na viga da figura 47.....</i>	<i>91</i>
<i>Tabela 17: Características geométricas e físicas para a viga da figura 49.....</i>	<i>92</i>
<i>Tabela 18: Deslocamentos e deformações na viga da figura 49.....</i>	<i>92</i>
<i>Tabela 19: Características geométricas e físicas para a viga do exemplo 3 - CASO 1.....</i>	<i>93</i>
<i>Tabela 20: Deslocamentos e deformações na viga do exemplo 3 - CASO 1.....</i>	<i>94</i>
<i>Tabela 21: Características geométricas e físicas para a viga do exemplo 3 - CASO 2.....</i>	<i>95</i>
<i>Tabela 22: Deslocamentos e deformações na viga do exemplo 3 - CASO 2.....</i>	<i>95</i>
<i>Tabela 23: Parâmetros para obtenção e calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118.</i>	<i>113</i>

Lista de Figuras

Figura 1: Variação de $\varphi^a(t)$ no tempo.	12
Figura 2: Variação do coeficiente φ^{1c}	13
Figura 3: Variação do coeficiente φ^{2c}	14
Figura 4: Variação do coeficiente $\beta^f(t)$ no tempo - representação logarítmica do tempo.	14
Figura 5: Variação do coeficiente $\beta^f(t)$ no tempo - representação linear do tempo.	15
Figura 6: Figura A.1 - Variação de $\varepsilon_{cef}(t)$ retirada da NBR-6118:2003.	16
Figura 7: Variação de $\varepsilon^f(t)$ no tempo.	16
Figura 8: Variação do coeficiente $\beta^d(t)$ no tempo.	16
Figura 9: Comparação entre os coeficientes $\beta^d(t)$ e $\beta^f(t)$	17
Figura 10: Variação de $\beta_s(t)$	18
Figura 11: Ensaio de carregamento de vários corpos-de-prova de concreto.	23
Figura 12: Ensaio de descarregamento de vários corpos-de-prova de concreto.	23
Figura 13: Variação de $\beta^l(\zeta)$ do concreto com a idade efetiva segundo a NBR 6118:2003.	26
Figura 14: Ensaio de carga e descarga.	27
Figura 15: Hipótese básica de integração numérica no tempo.	29
Figura 16: Algoritmo Geral de Integração de Tensões.	30
Figura 17: Modelo de Três Parâmetros.	32
Figura 18: Algoritmo de Integração de Tensões - Modelo de Três Parâmetros.	34
Figura 19: Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt.	35
Figura 20: Algoritmo de Integração de Tensões - Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt.	37
Figura 21: Algoritmo de Integração de Tensões - Função de Dischinger.	41
Figura 22: Algoritmo de Integração de Tensões - Função de Dischinger generalizada.	44
Figura 23: Algoritmo de Integração de Tensões - Função Geral de Fluência.	48

Figura 24: AIT - Função Simplificada de Fluência (FSF).....	50
Figura 25: Parcelas de deformação irreversível (φ^f e φ^a) da função de fluência da NBR 6118.....	52
Figura 26: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a função de fluência da NBR 6118.	53
Figura 27: Calibração da FSF segundo a função de fluência da NBR-6118.	53
Figura 28: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - ISHITANI[25].....	60
Figura 29: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - ISHITANI[25].	62
Figura 30: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a NBR 6118 - ISHITANI[25].	63
Figura 31: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - perfil I.	63
Figura 32: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - perfil I.....	65
Figura 33: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a NBR 6118 - perfil I.....	65
Figura 34: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - viga e laje.	66
Figura 35: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - viga e laje.	67
Figura 36: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a NBR 6118 - viga e laje.	67
Figura 37: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - 2 etapas.....	68
Figura 38: Histórico de carregamento e previsão aproximada da fluência para 2 etapas.....	69
Figura 39: Histórico de carregamento e previsão da fluência para 2 etapas.	70
Figura 40: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - viga e laje em 2 etapas.	72
Figura 41: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - seção homogênea.	74
Figura 42: Histórico de carregamento e comparação da previsão da fluência para 2 etapas.	74
Figura 43: (a) modelo de cabo e polia; (b) elemento de cabo.	76
Figura 44: Posicionamento do elemento de cabo.	77
Figura 45: (a) cabo e polia; (b) polia com atrito; (c) comprimento infinitesimal.....	83
Figura 46: Sistema de coordenadas e seção transversal.	90
Figura 47: Viga do exemplo 1.	91
Figura 48: Deslocamento na viga do exemplo 1.	91
Figura 49: Viga do exemplo 2.	92
Figura 50: Deslocamento na viga do exemplo 2.	93
Figura 51: Carregamento aplicado na viga do exemplo 3 - CASO 1.	93
Figura 52: Deslocamento na viga do exemplo 3 - CASO 1.....	94
Figura 53: Carregamento aplicado na viga do exemplo 3 - CASO 2.	94
Figura 54: Deslocamento na viga do exemplo 3 - CASO 2.....	95
Figura 55: Elementos isoparamétricos de barra.....	98
Figura 56: Seção transversal genérica.....	100
Figura 57: Seção transversal com concreto totalmente comprimido e de mesma idade.....	101
Figura 58: Seções transversais com concretos diferentes e totalmente comprimidos.	103
Figura 59: Seções transversais com concretos sob tração.	105
Figura 60: Concretos de diferentes idades divididos em várias faixas.....	108
Figura 61: Representação genérica de elementos finitos de barras.	111
Figura 62: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de U.	114
Figura 63: Variação de γ em função de U.	116
Figura 64: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de h^{fict}	116

Figura 65: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de t_0	118
Figura 66: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de α e s	120
Figura 67: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação do abatimento ou “slump test”.	121
Figura 68: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação da temperatura média.	122
Figura 69: Configuração inicial e resultados do ensaio de escorregamento do elemento de cabo.	123
Figura 70: Configuração inicial para problema de teste de macaqueamento.	124
Figura 71: Configuração inicial do ensaio de escorregamento do elemento de cabo - cilindro.	125
Figura 72: Resultados do ensaio de escorregamento do elemento de cabo - cilindro.	125
Figura 73: Configuração inicial de um cabo reto.	126
Figura 74: Perdas da força de protensão de um cabo reto.	126
Figura 75: Configuração inicial de um cabo parabólico.	126
Figura 76: Perdas da força de protensão de um cabo parabólico.	127
Figura 77: Configuração inicial de um cabo parabólico.	127
Figura 78: Configuração inicial de um cabo parabólico.	128

Lista de Símbolos

Letras romanas maiúsculas

A^c	- Seção transversal de concreto;
A^s	- Seção transversal de aço de armadura passiva;
A^p	- Seção transversal de aço de armadura ativa;
E^c	- Módulo de elasticidade do concreto;
E^s	- Módulo de elasticidade do aço de armadura passiva;
E^p	- Módulo de elasticidade do aço de armadura ativa;
J	- Função de fluência;
C	- Função de fluência específica ou parcela viscosa da função de fluência;
E_{c28}	- Módulo de elasticidade a 28 dias;

Letras romanas minúsculas

t	- Instante qualquer;
t_c	- Instante de concretagem;
t_0	- Instante de carregamento inicial;
$t_d = t_0 + \delta$	- Instante de descarregamento;
f_{cm}	- Resistência média à compressão a 28 dias;
f_{ptk}	- Valor característico da resistência do aço de protensão;
u	- Perímetro da peça em contato com a atmosfera;
h	- Espessura média;
h^{fict}	- Espessura fictícia;

Letras gregas minúsculas

$\zeta = t - t_c$	- Idade do concreto;
$\zeta_0 = t_0 - t_c$	- Idade do concreto no carregamento inicial;
σ	- Tensão;

σ_i	- Tensão no instante i ;
ε	- Deformação;
η	- Coeficiente de viscoelasticidade;
θ	- Índice de fluência;
φ	- Coeficiente de fluência;
ε_{ci}	- Deformação inicial no carregamento no concreto;
ε_{cc}	- Deformação por fluência no concreto;
ε_{cs}	- Deformação por retração por secagem no concreto;
ε_{cT}	- Deformação térmica no concreto;
$\varepsilon_{c\sigma}$	- Deformação dependente da tensão no concreto;
ε_{cn}	- Deformação independente da tensão no concreto;

Índices sobrescritos

$\square^0$	- Índice relativo à parcela elástica;
$\square^k$	- Índice relativo à parcela viscosa de Kelvin;
$\square^g$	- Índice relativo à parcela viscosa de Dischinger;
$\square^c$	- Índice relativo à fluência;
$\square^s$	- Índice relativo à retração.
$\square^e$	- Índice relativo à parcela elástica da função geral de fluência;
$\square^v$	- Índice relativo parcela viscosa da função geral de fluência.

Índices subscritos

$\square_i$	- Índice de tempo;
$\square_j$	- Índice de iterações;

Resumo

Apresenta-se neste trabalho uma metodologia consistente e eficiente para análise de estruturas de concreto sob o efeito do tempo. A metodologia exposta é baseada no Método dos Elementos Finitos (MEF). É mostrado como se analisar estruturas de concreto através do MEF, considerando na equação constitutiva dos elementos, os fenômenos viscoelásticos. A solução para este problema, denominado análise incremental quase-estática, pode ser obtida determinando os campos de tensões, deslocamentos e deformações num dado instante a partir de seus valores conhecidos no instante anterior. Aqui, efetua-se a análise incremental através de um Algoritmo de Integração de Tensões (AIT) com a ajuda de uma rotina computacional baseada no MEF. A Função de Fluência utilizada neste trabalho, além de ser muito eficiente segundo uma metodologia através do MEF, permite facilmente o seu ajuste a quaisquer dados experimentais, ou mesmo aproximar qualquer função de fluência de normas ou códigos. Outra característica crucial é que a integração das tensões não exige o armazenamento computacional de todas as variáveis dependentes do histórico de tensão em um determinado instante, facilitando significativamente a análise ou a retro-análise de estruturas de concreto. Vale ressaltar que ao longo do texto são feitas algumas discussões e comparações do emprego da Função de Fluência proposta com a função da NBR-6118:2003. Também é apresentada uma outra consistente metodologia para a análise de um elemento finito de cabo com escorregamento, onde são discutidas uma formulação geometricamente exata e a implementação computacional de um elemento finito de cabo através do MEF, que permite o escorregamento em presença de atrito. Este elemento fornece procedimentos naturais para simular o processo de montagem e a resposta aos carregamentos de estruturas de cabos em geral, além de ter campos promissores de aplicação no modelamento de estruturas de concreto protendido, das tenso-estruturas e das estruturas de pontes. Também, ao longo do texto são discutidos e apresentados resultados de exemplos elementares com a finalidade de verificar a eficiência da metodologia abordada.

Abstract

In this work, an efficient and accurate methodology to analyze the effects of time in concrete structures is presented. This methodology is based on the Finite Elements Method (FEM), and it is shown how to perform the finite element analysis on concrete framed structures taking into account the viscoelasticity phenomenon in the formulation of the constitutive equation. The solution for such problem, called quasi-static incremental analysis, may be resolved by establishing the stresses, displacements and deformations fields at specific time from their known values on the previous moment. In this work, the incremental analysis is performed by using an algorithm of stresses integration written into a computational procedure based on the FEM. The Creep Function used in this work, besides being very efficient according to the methodology based on the MEF, it may be, easily, adjusted to any real experiment data or to any creep function presented on codes. Another important characteristic is that such creep function does not demand the computational storage of all the history of stresses variables in a specified time, resulting in an effortless analysis and back-analysis of concrete framed structures. Needless to write that some discussions and judgments against the creep function presented on the NBR-6118:2003 will be performed in order to justify the efficiency of the creep function proposed. Another consistent methodology for the analysis of a fully nonlinear sliding cable element with friction is also presented. It is discussed an accurate geometrically nonlinear formulation and the computational implementation of cable elements based on FEM that incorporates sliding with friction in a simple manner. The cable element may furnish natural procedures to simulate the process of construction assembly, and the results of time-dependent loads on such structures. Furthermore, the presented methodology has promising fields of application in modeling pre-stressed concrete, tensioned cables structures, membranes, stayed and suspended bridges. Along the text, it is presented some examples analysis in order to verify the methodology efficiency.

Capítulo 1

Introdução

A análise não-linear de estruturas de concreto armado e protendido vem sendo objeto de estudo há vários anos. Dentro da não-linearidade estrutural, ainda costuma-se, lamentavelmente, analisar separadamente dois tipos de abordagens: a) as referentes à não-linearidade geométricas, e b) as referentes à não-linearidade físicas. Muitos trabalhos foram desenvolvidos e publicados sem que, no entanto, as análises chegassem a se tornar ferramentas eficazes e robustas para o cálculo prático. Entretanto, percebe-se que esta realidade está mudando, mesmo que lentamente se comparada às mudanças tecnológicas e ao avanço dos conhecimentos atuais. Por conseguinte, impulsionado pelo avanço tecnológico, pelo surgimento de novos materiais, pela globalização e difusão de conhecimentos de profissionais e da comunidade científica (entre outros), surgem, a cada instante, novas teorias que forcem a análise concomitante, desses dois tipos de abordagens.

Sem dúvida há certa dificuldade teórica na abordagem consistente de um assunto, que embora considerado complexo é no mínimo fascinante. Além do mais, há também, obstáculos inseridos em outros recursos - materiais, tempo, conhecimento...

Para que este tipo de abordagem torne-se realmente uma ferramenta crucial de análise estrutural, é preciso, entre outros fatores talvez menos relevantes, que se tenha acesso mais rapidamente e de uma forma mais coerente e profunda, aos estudos de métodos computacionais mais robustos e eficazes, como é o caso do Método dos Elementos Finitos - MEF. Ademais, deve haver uma maior e melhor difusão do conhecimento sobre o assunto e, também, a disponibilidade de comunidades comprometidas em discutir as atuais dificuldades e desafios ou que por ventura, ainda, venham a existir, fato este que vem a cada dia crescendo impulsionado pelos recursos computacionais.

1.1. Linha de pesquisa

Este projeto de doutoramento faz parte da linha de pesquisa sobre Análise Não-Linear do Prof. Dr.-Ing. Paulo de Mattos Pimenta, Professor Titular da Escola Politécnica da Universidade de São

Paulo (EPUSP), e foi desenvolvido junto ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações e vinculado ao Programa de Estruturas e Fundações (PEF) da Escola Politécnica da USP. Tal pesquisa pode ser considerada uma continuação do Projeto Temático “Análise Não-linear de Estruturas” realizado com apoio da FAPESP nos anos 1995 a 1999 e desenvolvido por professores e alunos de pós-graduação do PEF/EPUSP, sendo também uma continuação natural da dissertação de mestrado do autor (SANTOS[41]). Pode-se dizer ainda, que o Projeto Interdisciplinar desenvolvido pelo autor para obtenção do título de Engenheiro Civil (SANTOS[40]), junto a Universidade Estadual Paulista (UNESP) já marcava o início do seu interesse na linha de pesquisa sobre não-linearidade de estruturas.

No projeto inicial de pesquisa de doutorado foi proposto um trabalho de desenvolvimento de metodologias consistentes e eficientes de forma a adequar os conceitos de viscoelasticidade, plasticidade, fissuração e etapas construtivas para análise de estruturas de concreto, obtendo desta forma métodos computacionalmente eficazes que pudessem analisar tais estruturas através de recursos mais modernos como o Método dos Elementos Finitos (MEF). Uma das propostas deste trabalho seria a aplicação das idéias nele expostas a um caso prático real, relatando minuciosamente os aspectos abordados, como, por exemplo, a idéia de se acoplar à análise estrutural de uma ponte com diferentes etapas construtivas.

No entanto, o projeto de pesquisa de doutorado sofreu algumas alterações decorrentes ora de sugestões dos relatores da Fundação e Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), ora do autor e do seu orientador e que serão comentadas nos próximos parágrafos. Contudo, este projeto representa uma proposta de trabalho para o desenvolvimento de uma metodologia consistente e bastante eficiente para análise de estruturas de concreto sob efeito do tempo. Levando-se em consideração os efeitos de deformação lenta, retração e fissuração do concreto, a perda de protensão e relaxação da armadura de protensão e a eventual plastificação dos aços (tanto os aços de armadura passiva quanto os aços de armadura ativa). Ainda dentro deste contexto, busca-se analisar tais fenômenos concomitantemente com a finalidade de melhor caracterizar o comportamento mecânico das estruturas sob efeito do tempo e sob condições de contorno impostas pelos sistemas construtivos, ou seja, construções por etapas.

Apesar dos estudos e das grandes produções teóricas acerca do “Efeito do Tempo no Concreto Estrutural” - anexo A da nova NBR-6118:2003, somente algumas delas procuram analisar tais problemas isoladamente a partir de processos computacionais mais modernos. Todavia, nesta tese de doutorado todos os fenômenos serão analisados concomitantemente com a ajuda do programa computacional PEFSYS, que segue em sua implementação a metodologia aqui proposta baseada no MEF. Nesta metodologia, ainda será possível, de forma eficiente e com facilidade, abordar dois outros fenômenos que perturbam o concreto estrutural ao longo do tempo: a) o fenômeno da retração do concreto; e b) o fenômeno da relaxação do aço de protensão (levando-se em consideração, tanto as perdas iniciais, isto é, na pré-tração ou “macaqueamento”; as perdas imediatas; como as perdas progressivas, ou perdas ao longo do tempo), com será discutido a seguir.

É de fundamental importância comentar que esta tese também, está fazendo parte do programa PEFSYS, que é um programa computacional que usa elementos finitos em análise não-linear, estática e dinâmica, de estruturas. Três cinemáticas são permitidas na teoria implementada: abordagem linear do problema, consideração de efeitos de segunda ordem e uma análise geometricamente exata da estrutura. As propriedades do concreto, armado ou protendido, são verificadas de acordo com a norma brasileira NBR-6118:2003. O método de resolução de sistemas implementado no PEFSYS é o método de Newton. O carregamento da estrutura pode ser feito em diversas etapas. Em cada etapa, as cargas são aplicadas de uma forma incremental. A estrutura é resolvida para cada incremento de carga e de tempo, através de um processo iterativo e o número de iterações depende da taxa de convergência da solução do problema. O PEFSYS é parte do projeto temático “Análise Não-Linear de Estruturas” realizado com apoio da FAPESP, e vem sendo desenvolvido por professores e alunos de pós-graduação do PEF/EPUSP sob orientação do Prof. Dr.-Ing. Paulo de Mattos Pimenta.

1.2. Objetivos

O objetivo deste trabalho é apresentar metodologias consistentes e eficientes para a análise estrutural sob efeito do tempo, ou seja, a análise linear e não-linear de estruturas de concreto armado e protendido considerando os efeitos do tempo, e poder compará-los com os critérios da NBR 6118:2003. De fato, esta tese de doutoramento, que não tem a pretensão de um discurso de livro texto, nem mesmo a intenção de abordar todos os aspectos relativos ao tema, propõe uma metodologia para adequar os conceitos da viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração e de construções por etapas para análise de estruturas de concreto armado e protendido, obtendo desta forma métodos computacionalmente eficazes através de uma abordagem mais moderna baseada no MEF.

No presente trabalho busca-se analisar estruturas de concreto sob efeito do tempo, de modo que se possam solucionar os seguintes problemas típicos de engenharia:

- Prever a evolução dos fenômenos relacionados com o efeito do tempo no concreto estrutural;
- Análise de estruturas de concreto com a consideração do efeito do tempo.
- Cálculo automático de flechas (deslocamentos) devido aos fenômenos viscoelásticos do concreto e da relaxação do aço;
- Cálculo da perda de protensão em estruturas de concreto protendido;
- Verificação automática do comportamento conjunto dos materiais estruturais.

Ainda como objetivos secundários desta tese de doutoramento, têm-se:

- Melhor entendimento das teorias relacionadas com o efeito do tempo no concreto estrutural;
- Estudo dos Algoritmos de Integração de Tensões para a análise de estruturas de concreto armado e protendido baseado no MEF;
- Elaboração de rotinas computacionais, inseridas em um programa de elementos finitos e;
- Formulação de exemplos de validação para o programa computacional baseado na metodologia exposta.

1.3. Justificativa

Normas internacionais e mesmo a norma brasileira já vêm se preocupando com problemas apresentados pelo concreto estrutural sob efeito do tempo. Há pouco tempo foi proposta uma mudança e reformulação da *Norma Brasileira sobre Projeto de Estruturas de Concreto* (NBR-6118:2003), onde textos foram revisados. Estudos apresentados por diversos pesquisadores mostraram uma preocupação em conhecer melhor, os fenômenos acima citados, mas ainda não muito bem estudados, pois na verdade, ainda deve haver estudos mais aprofundados nas várias linhas de pesquisa do concreto (Modelação Experimental e Numérica do Comportamento do Concreto; Métodos Construtivos em Concreto, Projetos e Análises de Estruturas de Concreto, Materiais e Tecnologia, etc.) aplicados aos efeitos do tempo no concreto estrutural para que haja uma alteração (modificação) significativa no procedimento apresentado pela NBR-6118:2003.

Impulsionado por esses motivos, esta tese de doutorado tem o intuito de apresentar e discutir a relevância do conhecimento da fluência e dos fenômenos viscoelásticos que acontecem em estruturas de concreto armado e protendido, principalmente o efeito de dois fatores numa única condição de contorno: a) o efeito da protensão em concretos jovens; e b) a mudança dos sistemas estruturais provocadas pelas construções por etapas, como é o caso particular de algumas situações onde se empregam estruturas pré-moldadas, muito comuns hoje em dia, devido à sua praticidade, levando sempre em considerações as condições de contorno impostas pelos sistemas construtivos.

Tendo em vista a utilidade do estudo do tempo no concreto estrutural, foi crucial a proposta de continuação do trabalho de mestrado do autor (SANTOS[41]). Portanto, justifica-se essa pesquisa, pela consolidação dos fenômenos viscoelásticos no concreto estrutural, uma vez que naquele trabalho de mestrado, somente foi estudada a deformação lenta, deixando-se para um outro momento o estudo da relaxação do aço de protensão, das perdas de protensão, da retração e da adaptação por fluência.

No trabalho de mestrado mencionado, a deformação devido à perda de protensão e todo o processo de inserção de dados das características geométricas e físicas na modelagem da protensão foram computados manualmente através da interface gráfica e de banco de dados implementada para aquele trabalho. Nesta tese, para se evitar tal procedimento, todos os processos (perda de protensão nos trechos retos e curvos; as perdas de protensão imediata devido ao encunhamento; a simulação da introdução da protensão ou “macaqueamento”; as perdas progressivas; a fluência e a retração do concreto; a plastificação dos aços; e simulação de construções por etapas) são automatizados e implementados no programa PEFSYS.

Apesar destes assuntos estarem atraindo a atenção de muitos pesquisadores, poucos trabalhos foram encontrados, onde os fenômenos fossem trabalhados em conjunto. Isto, no entanto, se deve à complexa abordagem matemática dos mesmos, além de apresentarem diversos aspectos difíceis de serem quantificados e também da complicada abordagem que é dada pelas normas, principalmente pela NBR-6118:2003. Vale ressaltar que um grande esforço foi inserido no intuito de adequar tais

assuntos em uma única metodologia. Eis porque se julga de interesse esta tese de doutorado, levando-se em conta a inter-relação dos efeitos acima mencionados.

1.4. Motivação

O interesse pela análise não-linear começou durante o curso de graduação ministrado na Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, da Universidade Estadual Paulista (FEG-UNESP). Naquela época houve um oferecimento de uma bolsa de estágio junto ao Departamento de Engenharia Civil visando à implementação de um programa computacional para análise não-linear de estruturas de barras. A continuidade da bolsa de estágio ocorreu com a confecção do Projeto Civil Interdisciplinar apresentado como trabalho de graduação (veja SANTOS[40]).

Durante este trabalho, o levantamento bibliográfico impulsionou a leitura das obras do Prof. Dr-Ing. Paulo de Mattos Pimenta. E assim motivado, no ano seguinte iniciou-se o mestrado junto ao Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, na linha de pesquisa sobre Análise Não-Linear do Prof. Dr.-Ing. Paulo de Mattos Pimenta, onde se desenvolveu uma pesquisa para análise de estruturas de concreto com a consideração da deformação lenta.

A principal motivação, para elaboração da dissertação de mestrado (SANTOS[41]) foi tentar analisar o fenômeno da fluência de forma mais simples, com a ajuda de recursos e de ferramentas computacionais disponíveis. A questão central ou problema motivador era analisar o comportamento de uma viga hiperestática baseada no seguinte método construtivo: duas vigas isostáticas, uma concretada em um instante t_1 e a outra em um tempo t_2 , ou seja, duas vigas com concretos diferentes, e depois em um instante t_3 , uní-las, ou seja, fazer a consolidação estrutural tornando assim uma única viga hiperestática com seção transversal heterogênea, para se analisar o comportamento viscoelástico desta viga e a adaptação por fluência.

Após o término deste mestrado, com as publicações de artigos técnicos (SANTOS[42]-[43] e SANTOS e PIMENTA[44]-[53]) surgiu a necessidade de continuar esta linha de pesquisa através de um projeto de doutorado, desenvolvido conforme apresentado a seguir.

1.4.1. Plano de pesquisa

Apresenta-se a seguir uma breve descrição das atividades básicas desenvolvidas no projeto de pesquisa de doutorado, e que serviram de motivação para esta tese.

- **Viscoelasticidade:** Consolidação dos fenômenos viscoelásticos no concreto estrutural, uma vez que na dissertação de mestrado (SANTOS[41]), somente foi analisada a deformação lenta, não tendo sido discutidos o fenômeno da relaxação do aço de protensão, as perdas de protensão, a retração e a adaptação por fluência, como nesta tese;

- **Simulação da Protensão:** Formulação de um elemento de cabo com escorregamento para simular a protensão em estruturas de concreto protendido;
- **Construção por Etapas:** Validação da Função Geral de Fluência (FGF) proposta no trabalho de mestrado do bolsista (SANTOS[41]) e da Função Simplificada de Fluência (FSF), proposta nesta tese.

1.5. Organização da tese

O presente trabalho está organizado da seguinte forma:

No capítulo 2, discute-se sobre o efeito do tempo no concreto estrutural seguindo a mesma abordagem do Anexo A da NBR 6118:2003. Também são feitas algumas considerações relevantes de caráter físico e/ou prático para um melhor entendimento da metodologia abordada nesta tese. Este capítulo é de fundamental importância para a revisão teórica dos assuntos relativos ao tema da tese.

O propósito do capítulo 3 é apresentar alguns conceitos fundamentais do fenômeno viscoelástico do concreto, assim como a nomenclatura e notação empregada. Neste capítulo apresentam-se certas discussões que visam à compreensão dos mecanismos básicos de viscoelasticidade.

Ainda no capítulo 3, discute-se sobre os efeitos das deformações no concreto, e os parâmetros importantes que influenciam a fluência através de um estudo da viscoelasticidade com envelhecimento.

Os procedimentos para geração de Algoritmos de Integração de Tensões (AIT) na viscoelasticidade do concreto são apresentados no capítulo 4. As idéias expostas neste capítulo são de fundamental importância para se formular um algoritmo consistente, de simples implementação computacional, e que facilite a análise de estruturas de concreto sob o efeito do tempo.

Uma grande importância se dá para os algoritmos de integração de tensão, que são apresentados no capítulo 4, onde é proposto um AIT que permite aproximar qualquer função de fluência determinada empiricamente, e que na integração de tensões não exige o armazenamento computacional de todas as variáveis envolvidas no histórico de tensões em um determinado ponto. Neste capítulo discute-se ainda sobre uma Função Simplificada de Fluência (FSF). Com esta função, a integração de tensões em um incremento de tempo depende apenas do conhecimento de parâmetros do início do incremento. Isto é crucial para uma análise eficiente de estruturas de concreto. Caso contrário, as necessidades de armazenamento de variáveis internas ficariam incontáveis durante a análise através do MEF. Este capítulo e sua interferência na análise estrutural ao longo do tempo é de fundamental importância para o entendimento da metodologia abordada nesta tese.

No capítulo 5 apresenta-se exemplos numéricos para a calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118:2003. São discutidos e exemplificados vários casos de calibração através de um procedimento simples utilizando-se do Método de Colocação. Este tipo de procedimento evita integrações complexas, problemas de minimização e gera bons resultados. Destaca-se que o entendimento deste capítulo também será usado em uma bateria de ensaios numéricos de calibração que será apresentado no capítulo 8.

Já no capítulo 6 discute-se sobre a formulação geral de um elemento de cabo escorregando com atrito, que permite a análise não-linear de estruturas tensionadas com cabos de forma simples e eficiente através do MEF. A metodologia empregada para o elemento de cabo é apresentada neste capítulo é muito poderosa e gera muitas vantagens:

- Não apresenta singularidade funcional apresentando excelente estabilidade numérica e computacional;
- Usa uma nova abordagem matemática, como a análise tensorial que raramente é empregada para esse tipo de estrutura;
- Devido ao elemento ser modelado através do MEF por compatibilidade de deformação, se torna uma poderosa ferramenta de apoio aos estudos viscoelásticos do concreto estrutural, como, por exemplo, uma simples viga de concreto protendido, ou até mesmo possibilitando a complexa simulação de modelo computacional de uma ponte com balanços sucessivos;
- Possibilita a simulação tanto das perdas de protensão por atrito, quanto à relaxação do aço, além de facilitar a introdução da protensão e encunhamento através de um elemento de macaco.

Apresenta-se no capítulo 7 uma breve introdução sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF), fazendo-se em seguida, uma análise das equações constitutivas da fluência, da retração, da fissuração, de eventuais plastificações das armaduras de aço, e de construções por etapas, para análise de estruturas de concreto armado e protendido, levando-se em conta a concomitância de todos os fenômenos envolvidos. Mostra-se também o algoritmo de integração de tensões utilizado.

No capítulo 7 é mostrado também que o AIT tem profundas conseqüências na metodologia de análise. No caso da viscoelasticidade linear do concreto, não se considerando os efeitos da plastificação da armadura e da fissuração do concreto, o algoritmo proposto, associado ao MEF leva a um sistema de equações lineares em cada incremento de tempo. Por outro lado, se estes efeitos forem considerados, o algoritmo proposto leva a um sistema de equações não-lineares em cada incremento de tempo. Destaca-se que a metodologia apresentada neste capítulo é a mesma implementada no programa computacional de elementos finitos PEFSYS.

Vale ressaltar que, diferentemente do analisado na dissertação de mestrado de SANTOS[41], na qual os exemplos numéricos se encontravam no Estádio I, a metodologia abordada nesse capítulo permite que também se trabalhe no Estádio II. É importante comentar, que as idéias de não linearidade aqui contidas geram a possibilidade de simulação de fissuras da estrutura de concreto e plastificação dos aços. No entanto, como se emprega a linearidade da função de fluência da NBR 6118:2003, as

análises e aplicações estarão em regime de serviço, ou seja, considera-se a estrutura no Estádio II, que admite comportamento linear dos materiais e despreza a resistência à tração do concreto.

No capítulo 8 é realizada uma bateria de ensaios de calibração para validar a FSF. O procedimento utilizado é o mesmo apresentado capítulo 5, onde também é exemplificado como se calibrar a FSF com funções empiricamente determinadas ou estabelecidas por normas técnicas. Ainda neste capítulo são analisados outros exemplos numéricos utilizando a FSF e seu respectivo AIT. Vale ressaltar que os resultados das simulações numéricas foram obtidos com auxílio de um programa computacional baseado na metodologia desta tese.

E finalmente, no capítulo 9, são apresentadas algumas conclusões obtidas a partir do desenvolvimento deste trabalho.

Capítulo 2

Sobre o efeito do tempo no concreto estrutural

Antes de iniciar qualquer tipo de análise ou discussão, são muito úteis as seguintes notações usadas ao longo de todo o texto: letras gregas ou latinas em itálico ($a, b, \dots, A, B, \dots, \alpha, \beta, \dots, A, B, \dots$) indicam grandezas escalares, letras gregas ou latinas em itálico e negrito ($\mathbf{a}, \mathbf{b}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots, \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}, \dots, \mathbf{A}, \mathbf{B}, \dots$) representam vetores ou matrizes. Será adotada a conversão $(\bullet)_j$, para iterações temporais, $(\bullet)_k$ e $(\bullet)_g$ quando houver laço de repetições nas iterações temporais, $(\bullet)_m$ para camadas de concreto e $(\bullet)_i$ para quaisquer iterações. Cabe aqui comentar que, embora em desacordo com algumas normas de estruturas de concreto, serão utilizados subscritos para identificar iterações ou instantes, e sobrescritos para caracterizar grandezas físicas ou geométricas, pois isto facilita significativamente o entendimento da metodologia discutida neste trabalho.

Concorda-se com o texto descrito na seção A.2.1. do Anexo A da norma NBR 6118:2003, que descreve:

“Quando não há impedimento à livre deformação do concreto, e a ele é aplicada, no tempo t_0 , uma tensão constante no intervalo $t - t_0$ sua deformação total, no tempo t , vale:

$$\varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t),$$

onde: $\varepsilon_c(t_0) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E_{ci}(t_0)}$ é a deformação imediata, por ocasião do carregamento, com $E_{ci}(t_0)$ calculado, para $j = t_0$, pela expressão: $E_{ci}(t_0) = 5600(f_{ckj})^{\frac{1}{2}}$; $\varepsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E_{ci28}}\varphi(t, t_0)$ é a deformação por fluência, no intervalo de tempo (t, t_0) , com E_{ci28} calculado pela mesma expressão para $j = 28$ dias; $\varepsilon_{cs}(t)$ é a deformação por retração, no intervalo de tempo (t, t_0) .”

No entanto, vale ressaltar que o concreto¹ tem como características apresentar deformações elásticas e inelásticas quando solicitado a cargas, sejam elas de longa ou curta duração, e/ou

¹ Aqui o termo “concreto” se refere ao concreto de cimento portland, a não ser que seja definido de outra forma.

deformação de retração na secagem ou resfriamento. Quando restringidas, as deformações de contração resultam em complexos padrões de tensão que freqüentemente levam à fissuração.

Não obstante, também, as variações volumétricas do concreto podem ocorrer quando este ainda está fresco, ou após o seu endurecimento. Observa-se que o volume do concreto endurecido é menor que o volume do concreto fresco, devido à perda parcial de ar incorporado e, principalmente, à perda de água, como se comentará mais detalhadamente a seguir. Com isso, pode-se dizer, resumidamente, que o concreto se apresenta como um material sólido contendo no seu interior poros capilares tomados em parte ora por água, ora por ar. A existência desses poros é inevitável, porque o volume de água empregado no preparo do concreto, a fim de torná-lo moldável, é sempre maior que a quantidade necessária para as reações químicas de pega. Desta forma, durante o endurecimento o excesso de água permanece no interior do concreto, dando lugar ao aparecimento de uma rede capilar de poros muito finos. Logo após o endurecimento, estes poros estão saturados e posteriormente, quando a cura for finalizada, parte do excesso de água evapora, surgindo então fenômenos associados à perda de água capilar, responsáveis por determinadas deformações do concreto. Como essas deformações podem ser maiores que as deformações logo após o instante do carregamento, este fenômeno tem considerável importância nas análises estruturais.

Por motivos, a serem apresentados e analisados no decorrer deste texto, é desejável discutir o comportamento do concreto estrutural sob o efeito do tempo. Entretanto, é importante que antes de qualquer análise matemática e/ou computacional, sejam feitas algumas considerações relevantes, de caráter físico e/ou prático para um melhor entendimento da metodologia aqui abordada.

2.1. Deformação Imediata segundo a NBR-6118:2003

Assumindo-se a notação empregada neste texto, e lembrando-se que, não havendo impedimento da livre deformação, o concreto ao ser submetido a uma tensão constante σ_0 no instante t_0 apresenta deformações elásticas e inelásticas ao longo do tempo t . Imediatamente após a aplicação da tensão é observada a deformação imediata, aqui denotada por

$$\epsilon^e(t_0) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E^e(t_0)} \quad (2.1)$$

com $E^e(t_0)$ calculado no instante de aplicação da carga, ou seja, em $t = t_0$, pela expressão

$$\begin{aligned} E^e(t_0) &= 5600\sqrt{f_c(t_0)} \\ &= 5600\sqrt{f_c(28)\beta^1(t_0)} \end{aligned} \quad (2.2)$$

onde $f_c(t_0)$ é a resistência do concreto na idade de aplicação da carga, ou melhor, no tempo t_0 em dias, $f_c(28)$ é a resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias, e $\beta^1(t_0)$ é a função que rege o crescimento do módulo de elasticidade ao longo do tempo. $\beta^1(t_0)$ vale

$$\beta^1(t_0) = e^{s\left(1-\sqrt{\frac{28}{t_0}}\right)} \quad (2.3)$$

onde s depende do tipo de cimento. Para concretos de cimento CP-I e CP-II, ou seja, cimentos de endurecimento normal têm-se $s = 0,25$. Os valores de s serão mostrados no próximo capítulo através da tabela 6, bem como a análise da variação da função $\beta^1(t)$ ao longo do tempo.

2.2. Fluência do concreto segundo a NBR-6118:2003

Segundo a NBR-6118:2003, a deformação por fluência do concreto $\varepsilon^c(t)$ compõe-se de duas partes, uma rápida e outra lenta. A fluência rápida ε^a é irreversível e ocorre durante as primeiras 24h após a aplicação da carga que a originou. Já a deformação lenta é por sua vez composta por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível ε^f e a deformação lenta reversível ε^d . Deste modo, a deformação por fluência é escrita como:

$$\begin{aligned}\varepsilon^c(t) &= \varepsilon^a(t) + \varepsilon^f(t) + \varepsilon^d(t) = \frac{\sigma}{E_{28}^e} \varphi(t) \quad \text{com} \\ \varphi(t) &= \varphi^a(t) + \varphi^f(t) + \varphi^d(t),\end{aligned}\tag{2.4}$$

sendo $\varphi^a(t)$, $\varphi^f(t)$ e $\varphi^d(t)$ os coeficientes de fluência rápida, de deformação lenta irreversível, e de deformação lenta reversível, respectivamente. Vale ressaltar que (2.4) é idêntica à segunda parcela do lado direito da igualdade da expressão (3.16) que será definida e discutida no capítulo 3.

O coeficiente de fluência rápida é irreversível e é dado por:

$$\varphi^a(\zeta_0) = \varphi_\infty^a \left(1 - \frac{f_c(\zeta_0)}{f_c(\infty)} \right) = 0,8 \left(1 - \frac{\beta_1(\zeta_0)}{\beta_1(\infty)} \right) = 0,8 \left(1 - e^{-s\sqrt{\frac{28}{\zeta_0}}} \right).\tag{2.5}$$

onde $\frac{f_c(\zeta_0)}{f_c(\infty)}$ é a função do crescimento da resistência do concreto com a idade, que está diretamente relacionada com a função $\beta_1(\zeta)$ representada pela expressão (2.3), mas que será melhor discutida no capítulo 3 pela definição de (3.13). Observe-se que este coeficiente de fluência depende do momento de aplicação da carga, ou melhor, depende da idade do concreto no instante de aplicação da carga ζ_0 e se mantém constante durante todo o intervalo de tempo t . A figura 1 ilustra a variação do coeficiente $\varphi^a(t)$ ao longo do tempo.

Cabe comentar que esta função provoca um salto (de valor constante) na função de fluência. Na verdade, esta parcela de deformação por fluência procura compensar deformações imediatas não incluídas na definição de deformação imediata, assim como introduzir deformações viscosas irreversíveis para concretos com idades jovens. Nas hipóteses da seção A.2.2.2 do Anexo A da NBR 6118:2003 convém ressaltar que:

“c) a deformação rápida produz deformações constantes ao longo do tempo; os valores do coeficiente φ^a são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final;”

Figura 1: Variação de $\varphi^a(t)$ no tempo.

Não obstante o esforço de alterar a denominação de fluência imediata para fluência rápida no texto da norma², esta terminologia era confusa. Uma deformação lenta ou viscosa não pode ser imediata. Vale antecipar uma discussão encontrada no capítulo 3. Se ela for imediata, então deverá ser incorporada à parcela de deformação imediata dada por (3.10). E, além disso, se for irreversível, ela deverá ter comportamento plástico, não satisfazendo assim ao Princípio da Superposição de McHENRY[28], e não podendo ser incorporada às deformações viscosas de (3.10), cuja integral depende da validade deste Princípio, com se analisará no capítulo 3.

Para o coeficiente de deformação lenta irreversível $\varphi^f(t)$, tem-se

$$\varphi^f(t) = \varphi_\infty^f (\beta^f(t) - \beta^f(t_0)), \quad (2.6)$$

sendo

$$\varphi_\infty^f = \varphi^{1c} \cdot \varphi^{2c} \quad (2.7)$$

o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível, e

$$\beta^f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} \text{ e } \beta^f(t_0) = \frac{t_0^2 + At_0 + B}{t_0^2 + Ct_0 + D}. \quad (2.8)$$

os coeficientes relativos à deformação lenta irreversível e função da idade do concreto, onde

$$\begin{cases} A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113 \\ B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23 \\ C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183 \\ D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931 \end{cases} \quad (2.10)$$

com

$$h = h^{fict} = \gamma \frac{2 \cdot A^c}{\mu^{ar}} \quad (2.12)$$

representando a espessura fictícia em metros [m], cujo domínio é o intervalo [0,05;1,60]. Para valores de h fora do intervalo ($0,05 \leq h \leq 1,6$), adotam-se os extremos correspondentes. Nesta

² Em alguns parágrafos do ANEXO A, ainda se empregam a terminologia de fluência imediata.

equação A^c é a área da seção transversal do concreto, μ^{ar} é o perímetro molhado ou a parte do perímetro externo da seção transversal em contato com o ar, e

$$\gamma = 1 + e^{-7,8+0,1U} \quad (2.14)$$

é o coeficiente de umidade relativa, com U denotando a umidade relativa em porcentagem (%).

Ainda, na expressão (2.7), para determinar o valor φ_{∞}^f , primeiramente deve-se obter

$$\varphi^{1c} = b^{1c} (4,45 - 0,035U), \quad U \leq 90\% \quad \text{com} \quad \begin{cases} b^{1c} = 0,75 & (0 \leq \text{abatimento} \leq 4) \\ b^{1c} = 1,00 & (5 \leq \text{abatimento} \leq 9) \\ b^{1c} = 1,25 & (10 \leq \text{abatimento} \leq 15) \end{cases}, \quad \text{e} \quad (2.15)$$

$$\varphi^{2c} = \frac{0,42 + h^{fict}}{0,20 + h^{fict}}.$$

Note-se a influência da umidade média do ar no valor básico da parcela φ^{1c} do valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível definido em (2.7) e mostrado na figura 2. Para as faixas de consistência entre os intervalos $(0 \leq \text{abatimento} \leq 4)$ e $(10 \leq \text{abatimento} \leq 15)$, os valores já estão minorados e majorados de 25%, respectivamente, pelo coeficiente b^{1c} .

Figura 2: Variação do coeficiente φ^{1c} .

Outra influência, de caráter prático, é a variação do coeficiente de deformação lenta irreversível com a espessura fictícia da peça estrutural através da parcela de φ^{2c} . Observe-se que a função racional de φ^{2c} em (2.15) reproduz de forma aproximada uma função exponencial. Note-se ainda que $\varphi^{2c} = \varphi^{2c}(h^{fict})$, e como para a NBR 6118:2003 a espessura fictícia tem como domínio o intervalo $[0,05; 1,60]$, então φ^{2c} tem valores na faixa de $1,880 \leq \varphi^{2c} \leq 1,122$.

Figura 3: Variação do coeficiente φ^{2c} .

Então, finalmente, pode-se escrever

$$\varphi^f(t) = b^{1c} (4,45 - 0,035U) \frac{0,42 + h^{fict}}{0,20 + h^{fict}} \left(\frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} - \frac{t_0^2 + At_0 + B}{t_0^2 + Ct_0 + D} \right). \quad (2.16)$$

Figura 4: Variação do coeficiente $\beta^f(t)$ no tempo - representação logarítmica do tempo.

Observe-se que a parcela $\varphi^f(t)$ não obedece ao formato de uma função $f = f(t - t_0)$ e sim $f = f(t, t_0)$. Uma explicação para este fato foi dada em PIMENTA e SANTOS[38] e em SANTOS[41]. Note-se a variação de $\beta^f(t)$, dada por (2.8) e mostrada na figura 4 e que é a mesma contida no anexo A da NBR-6118:2003. Uma outra abordagem que será discutida no capítulo 3, é a semelhança da função racional $\beta^f(t)$ com a função exponencial proposta por DISCHINGER[16]. Entretanto, através da figura 4 não se consegue perceber que a função racional $\beta^f(t)$ é uma aproximação da função exponencial de DISCHINGER[16], dada por (3.19).

Segundo o Professor Augusto Carlos de Vasconcelos, essa função racional foi uma aproximação muito bem feita da função de Dischinger, visto que na época de sua formulação não se

dispunha de calculadoras científicas de bolso, nem de computadores pessoais com os recursos disponíveis na atualidade. A maioria dos engenheiros calculistas só possuía a régua de cálculo, que realizava com precisão satisfatória, as quatro operações básicas da matemática (adição, subtração, multiplicação e divisão). Por tal motivo, optou-se pela função racional de (2.8). Todavia, percebe-se na figura 5 a mesma tendência da função exponencial de Dischinger que será discutida no capítulo seguinte pela formulação da expressão (3.19).

Figura 5: Variação do coeficiente $\beta^f(t)$ no tempo - representação linear do tempo.

Através da expressão (2.16), pode-se perceber a recomendação da NBR-6118:2003, no Anexo A, seção A.2.2.2 Hipóteses, item e), o seguinte:

“e) o coeficiente de deformação lenta irreversível φ^f depende de:

- umidade relativa do ambiente (U);
- consistência do concreto no lançamento;
- espessura fictícia da peça h^{fict} (ver A.2.4);
- idade fictícia do concreto (ver A.2.4) no instante (t_0) da aplicação da carga;
- idade fictícia do concreto no instante considerado (t). ”

e também no item f), cuja a figura A.1 da norma NBR 6118:2003 é, aqui, reproduzida pela figura 7.

“f) para o mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível em função do tempo, correspondentes a diferentes idades do concreto no momento do carregamento, são obtidas, umas em relação às outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações conforme a figura A.1.”

Figura 6: Figura A.1 - Variação de $\varepsilon_{ccf}(t)$ retirada da NBR-6118:2003.

Figura 7: Variação de $\varepsilon^f(t)$ no tempo.

Para a última parcela de $\varphi(t)$ em (2.4) tem-se

$$\begin{aligned} \varphi^d(t) &= \varphi_{\infty}^d \beta^d(t - t_0) = 0,4\beta^d(t - t_0), \\ \text{com } \beta^d(t - t_0) &= \left(\frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \right). \end{aligned} \quad (2.17)$$

Figura 8: Variação do coeficiente $\beta^d(t)$ no tempo.

Note-se, novamente, através da figura 8 que a função racional de β^d em (2.17) tem a tendência da função exponencial de Dischinger. Observe-se, também, que o coeficiente β^d de deformação lenta reversível se desenvolve com uma rapidez consideravelmente maior que o coeficiente β^f de deformação lenta irreversível. Pode-se comprovar através de ensaios que depois de meio ano, aproximadamente 90% desta parcela tenha surgido. E ainda, que o valor final do coeficiente de deformação lenta reversível é considerado igual a 0,4, isto é, a hipótese de $\varphi_\infty^d = 0,4$ reproduz esta influência com precisão prática satisfatória.

Figura 9: Comparação entre os coeficientes $\beta^d(t)$ e $\beta^f(t)$.

O coeficiente de deformação lenta reversível, ao contrário do coeficiente de deformação lenta irreversível, é bastante independente da maturidade do concreto no instante de aplicação da carga. A parcela de (2.17) é uma função $f = f(t - t_0)$, diferente de (2.16). Isto advém da utilização de uma função racional. Entretanto, para $t = t_0 = 0$ já existe um valor inicial para β^d . Portanto, obtém-se

$$\varphi^d(0) = 0,4 \cdot \frac{20}{70} = 0,4 \cdot 0,2857 = 0,1143. \quad (2.18)$$

A NBR-6118:2003 no Anexo A, seção A.2.2.2 Hipóteses, item d, assim se manifesta:

“d) o coeficiente de deformação lenta reversível φ^d depende apenas da duração do carregamento; o seu valor final e o seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento da aplicação da carga;”

2.3. Retração do concreto segundo a NBR 6118:2003

A retração é determinada pela seguinte expressão:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)], \text{ onde} \quad (2.19)$$

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s}$$

é o valor final da retração, sendo ε_{1s} o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto, ε_{2s} o coeficiente dependente da espessura fictícia da peça:

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20,8 + 3h_{fic}} \quad (2.20)$$

$\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ o coeficiente relativo à retração, no instante t ou t_0 , t a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dia, e t_0 a idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias.

Na NBR-6118:2003, tem-se

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E} \quad (2.21)$$

onde

$$\begin{cases} A = 40 \\ B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8 \\ C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7 \\ D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8 \\ E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8 \end{cases}, \quad (2.22)$$

com h denotando a espessura fictícia, em metros. Para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,60)$, adotam-se os extremos correspondentes, sendo t o tempo, em dias ($t \geq 3$).

Figura 10: Variação de $\beta_s(t)$.

2.4. Protensão do aço segundo a NBR 6118:2003

2.4.1. Perdas da força de protensão

Segundo a NBR 6118:2003, no capítulo 9 (comportamento conjunto dos materiais), afirma-se:

“O projeto deve prever as perdas da força de protensão em relação ao valor inicial aplicado pelo aparelho tensor, ocorridas antes da transferência da protensão ao concreto (perdas iniciais, na pré-tração), durante essa transferência (perdas imediatas) e ao longo do tempo (perdas progressivas).”

São consideradas como perdas iniciais, as ocorridas na pré-tração antes da liberação do dispositivo de tração (“macaco hidráulico”). Estudos das perdas iniciais podem ser encontrados em FRANÇA e ISHITANI[23].

As perdas por atrito, segundo a NBR 6118:2003 nos elemento de pós-tração, podem ser determinadas pela expressão:

$$\Delta P(x) = P_i (1 - e^{-(\mu \sum \alpha + kx)}) , \quad (2.23)$$

onde P_i é o valor da força inicial de protensão; x é a abscissa do ponto onde se calcula ΔP ; $\sum \alpha$ é a soma dos ângulos de desvios, em radianos; μ é o coeficiente de atrito no trecho curvo; k é o coeficiente de atrito no trecho reto.

Os valores dos coeficientes de atrito μ são apresentados na tabela 1. Na falta de dados experimentais, tem-se que $k = 0,01\mu$. Destaca-se que esse estudo também pode ser encontrado em FRANÇA e ISHITANI[23].

Tabela 1: Valores do coeficiente de atrito μ .

coeficiente	aplicação
$\mu = 0,50$	Entre cabo e concreto (sem bainha)
$\mu = 0,30$	Entre barras ou fios com mossas ou saliência e bainha metálica
$\mu = 0,20$	Entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica
$\mu = 0,10$	Entre fios lisos ou cordoalhas e bainha metálica lubrificada
$\mu = 0,05$	Entre cordoalha e bainha de polipropileno lubrificada

Para NBR 6118:2003, a relaxação na armadura de protensão pode ser estimada através de

$$\sigma_{j+1}^p = \psi(t, t_0) \sigma_j^p , \quad (2.24)$$

com o coeficiente de relaxação do aço no instante t dado por

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left(\frac{t - t_0}{(41,67)} \right)^{0,15} , \quad (2.25)$$

onde ψ_{1000} é o coeficiente de relaxação de fios e cordoalhas, após 1000h a uma temperatura de $20^\circ C$, para tensões variando $0,5f_{ptk} \leq \sigma_j \leq 0,8f_{ptk}$, o que é bastante comum nos projetos estruturais de concreto protendido. Os valores de ψ_{1000} são mostrados na tabela 2 retirada de FRANÇA e ISHITANI[23].

Tabela 2: Valores do coeficiente ψ_{1000} em %.

Grupos	Cordoalhas		Fios		Barras
σ_{po}	RN	RB	RN	RB	
$0,5f_{ptk}$	0	0	0	0	0
$0,6f_{ptk}$	3,5	1,3	2,5	1,0	1,5
$0,7f_{ptk}$	7,0	2,5	5,0	2,0	4
$0,8f_{ptk}$	12,0	3,5	8,5	3,0	7

Capítulo 3

Estudo da viscoelasticidade com envelhecimento

Para uma melhor compreensão das discussões deste capítulo, convém que sejam feitas as seguintes definições relativas ao tempo. Seja t um instante qualquer, e seja t_c o instante de concretagem. Define-se a idade do concreto como $\zeta = t - t_c$. Sendo t_0 o instante de carregamento, a idade do concreto por ocasião do carregamento é definida como $\zeta_0 = t_0 - t_c$. Note-se que o tempo ou idade do carregamento é dado por $t - t_0 = \zeta - \zeta_0$. Portanto, é crucial para o entendimento deste texto, as seguintes representações relativas ao tempo:

Tabela 3: Definições relativas ao tempo.

Instante qualquer	t
Instante de carregamento	t_0
Instante de descarregamento	$t_d = t_0 + \delta$
Instante de concretagem	t_c
Idade do concreto	$\zeta = t - t_c$
Idade do concreto no instante de carregamento	$\zeta_0 = t_0 - t_c$
Idade do concreto no instante de análise	$\zeta^e = t_e - t_c$
Duração ou idade de carregamento	$t - t_0 = \zeta - \zeta_0$
Duração ou idade de descarregamento	$t - t_d, t > t_d$

No entanto, é importante comentar que as propriedades do concreto em uma idade ζ dependem do tipo de cimento e das condições de cura (temperatura e umidade). Portanto, para se levar em consideração o tipo de cimento e a história de temperatura a que o concreto é submetido durante o período de envelhecimento, deve-se considerar sua maturidade em vez de sua idade real. A NBR-6118:2003 define este termo como sendo uma idade fictícia, aqui simplesmente denominada de instante equivalente, dada por

$$t_e = \alpha \sum_{i=1}^n \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i}, \quad (3.1)$$

onde t_e representa a idade fictícia³ da NBR-6118:2003 ou o tempo equivalente, em dias; α o coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; T_i a temperatura média diária do ambiente, em graus Celsius ($^{\circ}C$); $\Delta t_{ef,i}$ o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente, T_i , pode ser admitida constante. Note-se que a expressão (3.1) pode ser considerada nas definições da tabela 3 ao se admitir $t = t_e$.

3.1. Deformações do concreto

Quando o concreto é submetido a um carregamento ao longo do tempo, primeiramente nota-se uma deformação instantânea, a qual é seguida por um acréscimo de deformação no decorrer do tempo chamado de *fluência*. Além disso, submetido ou não a carregamento, o concreto se contrai quando perde umidade, sofrendo uma *retração*. As intensidades da retração e da fluência são da mesma ordem de grandeza da deformação elástica devida a tensões usuais, de modo que os diversos tipos de deformações sempre devem ser levados em conta. Percebe-se, na verdade, que as deformações nas estruturas reais de concreto, que freqüentemente levam à fissuração, ocorrem devido, principalmente, à resposta do material a cargas externas, ao tipo de concreto ou material empregado, à forma da estrutura e ao meio ambiente.

Portanto, vale ressaltar que a deformação do concreto observada ao longo do tempo $\varepsilon(t)$ depende de diversos fatores físicos e geométricos, agrupados na tabela 4 retirada de SANTOS[41]. Os fatores ambientais e geométricos têm relação com os problemas de difusão de umidade e calor no concreto. Os fatores ambientais ainda podem ser considerados funções do tempo, isto é, $A = A(t)$. Note-se que em construções por etapas, os fatores materiais e geométricos, também são dependentes do tempo, $M = M(t)$ e $G = G(t)$. Todavia, é comum nas análises do efeito do tempo no concreto estrutural não se levar em consideração esta importante hipótese para que se realize uma análise mais realista e precisa.

Para se compreender a razão pela qual um elemento de concreto pode não fissurar ou pode fissurar somente após certo tempo de exposição ao ambiente, deve-se considerar como o concreto responderia a tensões constantes ou a deformações constantes. As relações *tensão-deformação* no concreto são complexas. Primeiro, o concreto não é um material verdadeiramente elástico; segundo, nem as deformações nem as restrições são uniformes ao longo da estrutura de concreto, portanto, as distribuições de tensão resultantes tendem a variar de ponto a ponto. Não obstante, é importante conhecer as propriedades elásticas, de retração, de fluência do concreto, e os fatores que as afetam.

³ Esta nomenclatura se encontra no anexo A da NBR-6118:2003, no entanto, seria mais apropriado o uso de idade equivalente. Ressalta-se que esta terminologia é utilizada na Norma, no capítulo 12 quando se define a variação de resistência do concreto ao longo do tempo.

Tabela 4: Fatores que influenciam a deformação do concreto ao longo do tempo.

Grupos	Fatores	Símbolos
Fatores ambientais	Umidade relativa do ar, temperatura do ar, ventilação e radiação solar	$A(t)$
Fatores materiais	Tipo de cimento, relação A/C, % de pasta, aditivos, agregados e f_{ck}	M
Fatores geométricos	Forma, espessura média, área específica da peça (área não fissurada)	G
Fatores mecânicos	Intensidade do carregamento e velocidade do carregamento	σ_0
Fatores temporais	Idade do concreto	$\zeta = t - t_c$
	Idade do concreto no instante carregamento	$\zeta_0 = t_0 - t_c$
	Idade do concreto no instante de análise	$\zeta^e = t_e \cdot \zeta$
	Tempo ou duração do carregamento	$t - t_0 = \zeta - \zeta_0$

No intuito de se entender como a deformação no concreto $\varepsilon(t)$ varia ao longo do tempo, suponha-se o já conhecido pela literatura⁴, *Ensaio de Fluência do Concreto*, que consiste em submeter um corpo-de-prova de concreto fabricado no instante t_c , a uma tensão constante σ_0 a partir do instante t_0 . Imediatamente após a aplicação da tensão é observada a deformação imediata, aqui denotada por ε_0^e , e ao longo do tempo são observadas deformações indicadas por $\varepsilon(t)$. Estas tendem assintoticamente para ε_∞ quando $t \rightarrow \infty$.

É importante comentar que o ensaio de fluência só mostra como se desenvolve a deformação $\varepsilon(t)$ ao longo do tempo. Nada é dito a respeito de como se comporta $\varepsilon(t)$ e ε_0^e quando se varia t_c ou t_0 . Desta forma, discute-se a seguir, dois ensaios que são cruciais para o entendimento do fenômeno da fluência. Porém, lembrando-se que a deformação do concreto $\varepsilon(t)$ observada no ensaio de fluência depende dos fatores agrupados na tabela 4, pode-se escrever que, em geral, a deformação no concreto ao longo do tempo é dada por

$$\varepsilon(t) = \varepsilon(A, M, G, \zeta, \zeta_0, \zeta^e, t - t_0, \sigma_0). \quad (3.2)$$

Suponha-se, agora, o mesmo Ensaio de Fluência descrito anteriormente para vários corpos-de-prova. Isto é, seja um *Ensaio de Carregamento* de vários corpos-de-prova, todos com a mesma composição, considerando-se o mesmo instante de t_c , obtendo-se assim concretos de mesma idade ζ , com mesma geometria e sujeitos aos mesmos fatores ambientais. Como pode ser visto na figura 11, a resposta da fluência é função da duração do carregamento $t - t_0 = \zeta - \zeta_0$ e da idade do concreto no instante de aplicação da carga $\zeta_0 = t_0 - t_c$, já mostrados na tabela 4. Assim, quanto maior a duração de carregamento $t - t_0$, maior a deformação do concreto $\varepsilon(t)$, e quanto maior a idade do concreto no instante de carregamento ζ_0 , menor será a deformação $\varepsilon(t)$ do concreto ao longo do tempo. Outro fato relevante neste ensaio de carregamento: quanto menor o instante de carregamento, maior a deformação imediata, ou seja, $\varepsilon_1^e > \varepsilon_2^e > \varepsilon_3^e$ com $t_1 < t_2 < t_3$. Desta forma, é esperado que a parcela

⁴ O *Ensaio de Fluência do Concreto* é apresentado em vários textos da referência bibliográfica desta tese. Todavia, de forma sucinta, apresenta-se a *Teoria da Viscoelasticidade com Envelhecimento* discutida em SANTOS[41].

correspondente à deformação imediata do concreto, também seja função da idade do concreto $\varepsilon^e = \varepsilon^e(\zeta)$.

Figura 11: Ensaio de carregamento de vários corpos-de-prova de concreto.

Seja um outro ensaio chamado de *Ensaio de Descarregamento* de vários corpos-de-prova com as mesmas condições do Ensaio de Carregamento descrito anteriormente. Porém, com todos os corpos-de-prova carregados no mesmo instante t_0 e descarregados em instantes diferentes, como mostra a figura 12. Como pode ser visto, a resposta da reversibilidade da fluência também é função da duração do carregamento $\delta = t_d - t_0$, da idade do concreto no instante de descarregamento ζ_d , e da duração ou tempo de descarregamento $t - t_d$, $t > t_d$. Perceba que quanto maior a duração do carregamento, menor a parcela de reversibilidade da fluência, quando $t \rightarrow \infty$. Note-se também, que as deformações imediatas de descarregamento em qualquer instante $(\varepsilon_1^d, \varepsilon_2^d, \varepsilon_3^d, \dots, \varepsilon_j^d, \dots)$, são menores que a deformação imediata no instante de carregamento ε_0^e . Observe-se ainda que quanto maior a idade do concreto no instante de descarregamento ζ_j^d , menor a deformação imediata de descarregamento no concreto ε_j^d , isto é, $\varepsilon_0^e > \varepsilon_1^d > \varepsilon_2^d > \varepsilon_3^d$ com $t_0 < t_1^d < t_2^d < t_3^d$. Por conseguinte, também, é esperado que a parcela correspondente à deformação imediata do concreto no instante de descarregamento seja função da idade do concreto $\varepsilon^d = \varepsilon^d(\zeta)$.

Figura 12: Ensaio de descarregamento de vários corpos-de-prova de concreto.

Este comportamento, mostrado tanto no Ensaio de Carregamento como no Ensaio de Descarregamento, permite classificar o concreto como um material viscoelástico que se altera com a idade, o que é esperado porque as reações de hidratação se processam com o tempo. De fato, SANTOS[41] mostra que a maioria das propriedades mecânicas do concreto são dependentes da idade,

ou dos tempos mostrados na tabela 3. A formulação matemática para se analisar materiais que se modificam com a idade é mais complexa que para aqueles que não se modificam.

Uma hipótese básica comumente utilizada é admitir que a expressão (3.2) seja linear na intensidade do carregamento. Dela resulta a seguinte decomposição aditiva

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \varepsilon^c(A, M, G, \zeta, \zeta_0, \zeta - \zeta_0, \sigma_0) + \varepsilon^s(A, M, G, \zeta), \text{ onde} \\ \varepsilon^c(t) &= J(A, M, G, \zeta, \zeta_0, \zeta - \zeta_0) \sigma_0 \text{ e } \varepsilon^s(t) = \varepsilon^s(A, M, G, \zeta)\end{aligned}\quad (3.3)$$

são as parcelas de *deformação por fluência* no concreto devido ao carregamento e a parcela de *deformação por retração*, respectivamente. Note-se a linearidade de $\varepsilon^c(t)$ em (3.3), na qual foi introduzida a seguinte *função de fluência* linearizada

$$J(A, M, G, \zeta, \zeta_0, \zeta - \zeta_0) \sigma_0 = J(A(t), M, G, t - t_c, t_0 - t_c, t - t_0, \sigma_0). \quad (3.4)$$

A hipótese de linearidade acima é considerada razoável para carregamentos da ordem de 40% da resistência média do concreto. Em (3.3), $\varepsilon^s(t)$ segue a mesma hipótese de (3.4), pois

$$\varepsilon^s(t) = \varepsilon^s(A, M, G, \zeta) = \varepsilon^s(A(t), M, G, t - t_c). \quad (3.5)$$

Outra hipótese útil na análise do efeito do tempo nas estruturas de concreto é o *Princípio da Superposição* de McHENRY[28], que afirma que as deformações devidas a diversos carregamentos podem ser superpostas. Matematicamente isto significa que o acréscimo de deformação $d\varepsilon^c(t, \xi)$ em um instante t devido a um carregamento $d\sigma$ no instante $\xi < t$ é dado por

$$d\varepsilon^c(t, \xi) = J(A, M, G, t - t_c, \xi - t_c, t - \xi) d\sigma(\xi). \quad (3.6)$$

Supondo-se uma variação das tensões contínua no tempo e integrando-se (3.6), tem-se

$$\varepsilon^c(t) = \int_{t_c}^t J(A, M, G, t - t_c, \xi - t_c, t - \xi) \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi, \quad (3.7)$$

que permite determinar a deformação do concreto no tempo devido a um carregamento geral contínuo no tempo. A expressão (3.7) pode ser generalizada para carregamentos descontínuos. Para isso, suponha que nos instantes $\xi_i, i = 1, \dots, m$, com $\xi_i < t$, sejam aplicados os carregamentos súbitos $\Delta\sigma_i, i = 1, \dots, m$ respectivamente, portanto, obtém-se:

$$\varepsilon^c(t) = \int_{t_c}^t J(A, M, G, t - t_c, \xi - t_c, t - \xi) \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi + \sum_{i=1}^m J(A, M, G, t - t_c, \xi_i - t_c, t - \xi_i) \Delta\sigma_i. \quad (3.8)$$

Uma forma usual para a função de fluência é

$$J(A, M, G, \zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^e(A, M, G, \zeta)} + C(A, M, G, \zeta_0, t - t_0). \quad (3.9)$$

Esta expressão permite escrever

$$\begin{aligned}\varepsilon^c(t) &= \varepsilon^e(t) + \varepsilon^v(t), \text{ onde} \\ \varepsilon^e(t) &= \frac{1}{E^e(\zeta)} \sigma(t) \text{ e } \varepsilon^v(t) = \int_{t_c}^t C(\xi - t_c, t - \xi) \frac{d\sigma}{d\xi} d\xi + \sum_{i=1}^m C(\xi_i - t_c, t - \xi_i) \Delta\sigma_i\end{aligned}\quad (3.10)$$

são as parcelas de deformação imediata e de deformação lenta ou viscosa, respectivamente. Em (3.10), para não se sobrecarregar a notação, não se expressou a dependência dos fatores ambientais, materiais e geométricos. Esta simplificação da notação será adotada doravante. Note-se que a expressão (3.9)

separa aditivamente a parte relacionada à deformação imediata ε^e , na qual $E^e(\zeta)$ é o módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial⁵ (imediate) do concreto na idade ζ , da parcela que contribui para a deformação viscosa ε^v , ambas definidas em (3.10). Observe-se, também, que a deformação imediata no instante t é aqui definida como a tensão no instante t dividida pelo módulo de deformação imediata do concreto na idade ζ . Logo, $\varepsilon^e = \varepsilon^e(\zeta)$ varia mesmo para carregamentos constantes.

Tabela 5: Funções de $E(\zeta)$ retirado de normas.

$E(\zeta)$		
$E(\zeta) = E_{\infty} (1 - e^{-a\zeta})$	$E(\zeta) = E_0 \sqrt{\frac{\zeta}{a + b\zeta}}$	$E(\zeta) = a \left(\frac{f_c(\zeta) + c}{d} \right)^{\frac{1}{b}}$

É comum encontrar outras definições para a deformação imediata. SANTOS[41] mostra algumas delas. Exemplos de formas gerais adotadas em diversas normas para a deformação imediata são mostradas na tabela 5, onde a , b , c e d são coeficientes. No entanto, é bom lembrar a expressão para o módulo de elasticidade ou módulo de deformação inicial (imediate) dada pela NBR-6118:2003 que pode ser considerada derivada do ACI-318⁶, que é

$$E_{28}^e = 5600 \sqrt{f_c k}, \quad (3.11)$$

e quando o concreto estiver numa idade $\zeta \geq 7$ dias este módulo de elasticidade também pode ser avaliado através de

$$E^e(\zeta) = E_{28}^e \cdot \sqrt{\beta^1(\zeta)}, \quad \text{onde} \quad \beta^1(\zeta) = \frac{f_c(\zeta)}{f_c(28)}, \quad (3.12)$$

com $f_c(28)$ sendo a resistência característica à compressão do concreto aos 28 dias. Observe-se que em (3.12) E_{28}^e é o módulo de elasticidade do concreto na idade de 28 dias, $f_c(\zeta)$ é a resistência do concreto na idade ζ dias e $E^e(\zeta)$ representa o crescimento do módulo de elasticidade do concreto. Na NBR-6118:2003 $\beta^1(\zeta)$ vale

$$\beta^1(\zeta) = e^{s \left(1 - \sqrt{\frac{28}{\zeta}} \right)} \quad (3.13)$$

onde s depende do tipo de cimento, como mostrado na tabela 6. As funções de (3.13) são plotadas na figura 13, onde se mostra a variação de β^1 no intervalo $7 \leq \zeta \leq 10000$ dias, bem como um prolongamento para o intervalo $3 \leq \zeta \leq 7$.

Vale ressaltar que as propriedades do módulo de elasticidade do concreto em uma idade ζ também dependem de alguns dos fatores mostrados na tabela 4. Entretanto, a expressão (3.12),

⁵ Embora na literatura ainda se use a terminologia *módulo de deformação inicial*, o autor não emprega tal terminologia, pois em construções por etapas, fica confuso seu emprego. Aqui sugere-se e emprega-se o termo *módulo de deformação imediata*.

⁶ Na verdade, a NBR-6118 adota a mesma expressão do ACI-318, fazendo apenas um arredondamento no coeficiente 5565 para 5600.

basicamente, depende do tipo de cimento mostrado na tabela 6 e das condições de cura (temperatura e umidade).

Tabela 6: Valores de s para cada tipo de Cimento Portland.

Valores de s	Tipo de Cimento Portland
$s = 0,38$	Concretos de cimento CP III e CP IV - (cimentos de endurecimento lento)
$s = 0,25$	Concretos de cimento CP I e CP II - (cimentos de endurecimento normal)
$s = 0,20$	Concretos de cimento CP V-ARI - (cimentos de endurecimento rápido)

Dentro de todo o contexto até agora abordado, é de fundamental importância discutir um outro ensaio chamado de *Ensaio de Carga e Descarga*, descrito na figura 14. Nele um corpo-de-prova é carregado em t_0 com uma tensão σ_0 e mantido sob carregamento até o instante t_d , quando a carga é totalmente retirada. As deformações imediatas nos instantes de carga e descarga são dadas por $\varepsilon_0^e = \frac{1}{E^e(\zeta_0)}\sigma_0$ e $\varepsilon_d^e = \frac{1}{E^e(\zeta_d)}\sigma_0$, respectivamente. Para $t \rightarrow \infty$ é observada uma deformação viscosa permanente. Ela é chamada de *deformação viscosa irreversível* e é expressa por

$$\varepsilon^i = [C(\zeta_0, \infty) - C(\zeta_d, \infty)]\sigma_0. \quad (3.14)$$

Figura 13: Variação de $\beta^1(\zeta)$ do concreto com a idade efetiva segundo a NBR 6118:2003.

Figura 14: Ensaio de carga e descarga.

Observe-se que com a definição de deformação imediata aqui adotada, a deformação viscosa irreversível não depende de $E^e(\zeta)$, e que a deformação viscosa irreversível depende de dois instantes. Em SANTOS[41] conclui-se que a deformação viscosa irreversível decresce com a idade do concreto por ocasião do carregamento ζ_d e cresce com o tempo de carregamento $t_d - t_0 = \zeta_d - \zeta_0$. Finalmente, a *deformação viscosa reversível* ao longo do tempo pode ser definida por

$$\varepsilon^r(t) = [C(\zeta_0, \infty) - C(\zeta_d, \infty)] \sigma_0 - \varepsilon^i, \quad (3.15)$$

onde ε^i é dado por (3.14). Em PIMENTA e SANTOS[38], SANTOS e PIMENTA[47] e SANTOS e PIMENTA[50] comenta-se sobre a antiga NBR-7197, que agora se encontra no anexo A (efeito do tempo no concreto estrutural) da NBR-6118:2003, e sua expressão para deformação total considerando a deformação por fluência do concreto dada por

$$\varepsilon(t) = \frac{\sigma}{E^e(\zeta_0)} + \frac{\sigma}{E_{28}^e} \varphi(\zeta_0, t - t_0), \quad (3.16)$$

onde E_{28}^e é o módulo de deformação imediata do concreto na idade de 28 dias, que pode ser escrita na forma de (3.9). Então, não sendo exaustivo, com a ajuda de (3.16) e de seus termos na NBR-6118:2003, a segunda parcela de (3.9) pode ser escrita como

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E_{28}^e} \varphi(\zeta_0, t - t_0), \quad \text{onde} \quad (3.17)$$

$$\varphi(\zeta_0, t - t_0) = \varphi_\infty^a \left(1 - \frac{\beta(\zeta_0)}{\beta(\infty)} \right) + \varphi_\infty^f \left(\frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} - \frac{t_0^2 + At_0 + B}{t_0^2 + Ct_0 + D} \right) + \varphi_\infty^d \left(\frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70} \right).$$

Uma forma geral usual para $C(\zeta_0, t - t_0)$ é

$$C(\zeta_0, t - t_0) = F(\zeta_0) f(t - t_0). \quad (3.18)$$

Exemplos de formas gerais adotadas em diversas normas para as funções $F(\zeta_0)$ e $f(t - t_0)$ são mostradas na tabela 7, onde a, b e c são coeficientes. Note-se que algumas das expressões de $f(t - t_0)$ acima não são assintóticas, levando a deformação lenta em um ensaio de fluência a crescer indefinidamente no tempo. DISCHINGER[16], em particular, propôs

$$F(\zeta_0) = Be^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta}} \text{ e } f(t-t_0) = 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta}} \text{ donde resulta} \quad (3.19)$$

$$C(\zeta_0, t-t_0) = Be^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta}} \right) = B \left(e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta}} - e^{-\frac{\zeta}{\vartheta}} \right) = F(\zeta_0) - F(\zeta).$$

Note-se que a segunda parcela de $\varphi(\zeta_0, t-t_0)$ na expressão (3.17) é semelhante a (3.19) com exponenciais substituídas por funções racionais.

Tabela 7: Funções de $F(\zeta_0)$ e $f(t-t_0)$ retirado de normas.

$F(\zeta_0)$	$f(t-t_0)$
$F(\zeta_0) = a + b\zeta_0^{-c}$	$f(t-t_0) = a + b \log(1 + t - t_0)$
$F(\zeta_0) = a + be^{-c\zeta_0}$	$f(t-t_0) = a(t-t_0)^c$
$F(\zeta_0) = a + \frac{b}{c + \zeta_0}$	$f(t-t_0) = \frac{t-t_0}{a + b(t-t_0)}$
	$f(t-t_0) = a(1 - e^{-b(t-t_0)})$

Resta agora discutir qual seria a melhor forma da função de fluência. Aqui se defende que a melhor forma geral da função de fluência é a dada por (3.9) com as suas parcelas definidas por funções gerais que facilitem as seguintes tarefas: a) Calibração com dados experimentais; b) Calibração com funções especificadas em normas; c) Análise de estruturas por meio do MEF ou mesmo de forma manual; d) Retro-análise com estruturas instrumentadas; e) Possibilidade de modelagem para concretos jovens; e f) Facilidade de integração das tensões com baixo custo de armazenamento de variáveis computacionais.

Uma resposta a esta questão é delineada ao longo dos capítulos seguintes, através de uma nova abordagem com o uso da Função Simplificada de Fluência (FSF) calibrada pela função de fluência da NBR-6118:2003. Esta FSF é uma simplificação da FGF proposta por PIMENTA e SANTOS[38] e SANTOS[41], sendo analisada e utilizada, pelos autores, em diversos trabalhos (veja SANTOS[41]-[43] e SANTOS e PIMENTA[44]-[51]).

Portanto, a deformação total do concreto ao longo do tempo pode ser escrita como

$$\varepsilon(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^v(t) + \varepsilon^s(t), \quad (3.20)$$

onde $\varepsilon^e(t)$ denota a parcela de deformação imediata, por ocasião do carregamento (ou descarregamento), $\varepsilon^v(t)$ representa a parcela de deformação viscosa, e $\varepsilon^s(t)$ é a parcela de deformação por retração no intervalo de tempo considerado. Note-se que a expressão (3.10) mostra que $\varepsilon^c(t) = \varepsilon^e(t) + \varepsilon^v(t)$, ou seja, a deformação por fluência é a soma de uma parcela de deformação imediata e uma parcela de deformação viscosa, variando no intervalo de tempo.

3.2. Algoritmo Geral de Integração de Tensões

Apresenta-se nesta seção um procedimento para a formulação de um *Algoritmo Geral de Integração de Tensões* na viscoelasticidade do concreto retirado de SANTOS[41] e usado em

SANTOS e PIMENTA[44]. As idéias aqui expostas são de fundamental importância para se formular um algoritmo consistente, de simples implementação computacional, e que facilite a análise e retro-análise de estruturas de concreto armado e protendido.

A determinação das tensões, deslocamentos e deformações ao longo do tempo em uma estrutura reticulada de concreto sujeita à deformação lenta pode ser resolvida de forma “aproximada” através de uma análise incremental⁷. Esta é uma análise discreta no tempo, na qual as tensões, deslocamentos e deformações são determinados em instantes pré-selecionados dados por $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_j, t_{j+1}, \dots\}$. Nos instantes $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_j\}$ o estado de tensões, deslocamentos e deformações é supostamente conhecido. De forma recursiva busca-se então determinar o estado no instante t_{j+1} .

Figura 15: Hipótese básica de integração numérica no tempo.

Admite-se, portanto, que as tensões variem linearmente dentro de um intervalo de tempo. Esta hipótese implica em continuidade das tensões ao longo do tempo. Variações súbitas de tensão devidas a variações súbitas de carregamento podem ser simuladas por pequenos intervalos de tempo e, assim, não oferecem problemas. Analiticamente a hipótese numérica da figura 15 implica em

$$\sigma(t) = \sigma_j \left(1 - \frac{t - t_j}{\Delta t_{j+1}}\right) + \sigma_{j+1} \left(\frac{t - t_j}{\Delta t_{j+1}}\right) \quad \text{e} \quad \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{\Delta t_{j+1}}, \quad t_j \leq t \leq t_{j+1} \quad (3.21)$$

onde se introduziu o incremento de tempo $\Delta t_{j+1} = t_{j+1} - t_j$. Logo, com a ajuda de (3.8), que é uma generalização de (3.7) para carregamentos descontínuos, e considerando-se a decomposição aditiva de (3.10), tem-se no instante $j + 1$

$$\begin{aligned} \varepsilon_{j+1} = & \frac{\sigma_{j+1} - \sigma_j}{\Delta t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} J(t_{j+1} - t_c, \xi - t_c, t_{j+1} - \xi) d\xi + \\ & \sum_{i=1}^j \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\Delta t_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} J(t_{j+1} - t_c, \xi - t_c, t_{j+1} - \xi) d\xi + \varepsilon_{j+1}^s. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Resolvendo-se (3.22) para σ_{j+1} , obtém-se o seguinte *Algoritmo Geral de Integração de Tensões*.

⁷ Vale ressaltar que para a hipótese numérica proposta, a análise incremental ao longo do tempo fornece resultados “exatos” desde que se tenha somente variação linear de carregamentos, o que é bastante comum nesse tipo de análise.

$$\begin{aligned}
1. \sigma_{j+1} &= D_{j+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_{j+1}^s - \alpha_{j+1}) \\
2. D_{j+1}^{\text{alg}} &= \frac{\Delta t_{j+1}}{\int_{t_j}^{t_{j+1}} J(t_{j+1} - t_c, \xi - t_c, t_{j+1} - \xi) d\xi} \\
3. \alpha_{j+1} &= -\frac{\sigma_j}{\Delta t_{j+1}} \int_{t_j}^{t_{j+1}} J(t_{j+1} - t_c, \xi - t_c, t_{j+1} - \xi) d\xi \\
&\quad + \sum_{i=1}^j \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{\Delta t_j} \int_{t_{j-1}}^{t_j} J(t_{i+1} - t_c, \xi - t_c, t_{i+1} - \xi) d\xi
\end{aligned}$$

Figura 16: Algoritmo Geral de Integração de Tensões.

Note-se que com a hipótese numérica, a análise incremental implica em resultados “exatos” quando se têm somente carregamentos lineares no tempo. Observe-se que o *Algoritmo Geral de Integração de Tensões* resulta em uma relação linear entre σ_{j+1} e ε_{j+1} . D_{j+1}^{alg} depende da função de fluência J e, portanto, dos fatores ambientais, materiais e geométricos apresentados na tabela 3. D_{j+1}^{alg} , é óbvio, varia ao longo dos incrementos de tempo. No entanto, para um concreto submetido a um conjunto de fatores ambientais, ele não depende da posição na seção transversal, o que facilita algumas das integrações mostradas nos próximos capítulos. α_{j+1} é, por sua vez, uma espécie de deformação inicial e depende da função de fluência J e de $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j\}$, ou seja, de todos os estados de tensão nos instantes anteriores a t_{j+1} . Este fato pode prejudicar imensamente a análise incremental pois as necessidades de armazenamento computacional de dados podem crescer de forma incontrollável, impossibilitando-a. Por isso é desejável que J seja de tal forma que o armazenamento de $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_j\}$ não seja necessário na integração de tensões. É desejável, também, que a função de fluência seja analiticamente integrável, de forma a facilitar o cálculo das expressões na qual ela aparece dentro de uma integral. Todavia, no trabalho de SANTOS e PIMENTA[44], onde se discute esta questão minuciosamente, nem todas as funções de fluência então analisadas permitem isso. Vale comentar que SANTOS[41] aborda uma grande variedade de funções de fluência obtidas de modelos reológicos ou de normas ou código.

Capítulo 4

Modelos de função de fluência e consideração da retração

Apresenta-se neste capítulo, os procedimentos para geração de Algoritmos de Integração de Tensões (AIT) na viscoelasticidade do concreto. As idéias aqui expostas são de fundamental importância para se formular um algoritmo consistente, de simples implementação computacional, e que facilita a análise de estruturas de concreto sob o efeito do tempo.

Lembre-se que a determinação das tensões, deslocamentos e deformações ao longo do tempo em estruturas de concreto sujeitas à fluência pode ser resolvida de forma “aproximada” através de uma análise incremental, que nada mais é que uma análise discreta no tempo, na qual as tensões, deslocamentos e deformações são determinadas em instantes pré-selecionados dados por $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_i, t_{i+1}, \dots\}$. Nos instantes $\{t_0, t_1, t_2, t_3, \dots, t_i\}$ o estado de tensões, deslocamentos e deformações é suposto conhecido. De forma recursiva busca-se então determinar o estado no instante t_{i+1} . Vale ressaltar que para a hipótese numérica proposta, a análise incremental ao longo do tempo fornece resultados “exatos” desde que se tenha somente variação linear de carregamentos, o que é bastante comum nesse tipo de análise.

A primeira hipótese de caráter numérico que se introduzirá e será adotada ao longo de todo o texto, considera a tensão normal $\sigma(t)$ linear no intervalo de tempo, como foi ilustrado na figura 15, do capítulo anterior. Esta hipótese é expressa por

$$\sigma(t) = \sigma_i \left(1 - \frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right) + \sigma_{i+1} \left(\frac{t - t_i}{t_{i+1} - t_i} \right), \quad (4.1)$$

com $\sigma(t_i) = \sigma_i$ e $\sigma(t_{i+1}) = \sigma_{i+1}$, ou seja,

$$\sigma(t) = \sigma_i \left(1 - \frac{t - t_i}{\Delta t_{i+1}} \right) + \sigma_{i+1} \left(\frac{t - t_i}{\Delta t_{i+1}} \right) \text{ e } \frac{d\sigma}{dt} = \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\Delta t_{i+1}}, t_i \leq t \leq t_{i+1}, \quad (4.2)$$

onde se introduziu o incremento de tempo $\Delta t_{i+1} = t_{i+1} - t_i$. Admite-se, portanto, que as tensões variem linearmente dentro de um intervalo de tempo. Esta hipótese implica em continuidade das

tensões ao longo do tempo. Variações súbitas de tensão devidas a variações súbitas de carregamento podem ser simuladas por pequenos intervalos de tempo e, assim, não oferecem problemas.

Portanto, os Algoritmos de Integração de Tensões, baseados na teoria da viscoelasticidade com envelhecimento e com a consideração da retração, serão construídos supondo-se um histórico de tensões contínuo e linear, isto é, um carregamento contínuo e segmentadamente linear descrito pelos pontos

$$\{(\sigma_0 = 0, t_0), (\sigma_1, t_1), (\sigma_2, t_2), \dots, (\sigma_i, t_i), (\sigma_{i+1}, t_{i+1})\}. \quad (4.3)$$

4.1. Modelo de Três Parâmetros com Coeficientes Constantes

Figura 17: Modelo de Três Parâmetros.

Seja o modelo de uma associação em série de um elemento de Kelvin-Voigt e de um elemento elástico com envelhecimento, como mostra a *Figura 17*, chamado de *Modelo de Três Parâmetros com coeficientes de Kelvin-Voigt Constantes*, porém com o elemento elástico mudando com o tempo conforme a primeira parcela de (4.4), e sujeito a um carregamento contínuo e segmentadamente linear dado por (4.3), com a condição inicial $\varepsilon(t_i) = \varepsilon_i$. A função de fluência para este modelo se escreve como

$$J(\zeta_{i+1}, t_{i+1} - \xi) = \frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - \xi}{\theta}} \right) \quad (4.4)$$

onde o índice $(\bullet)^e$ indica o elemento elástico com envelhecimento e $(\bullet)^v$ o elemento viscoelástico de Kelvin-Voigt. Com a ajuda de (4.4), a equação (3.22) pode ser escrita como

$$\varepsilon_{i+1}^c = \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - \xi}{\theta}} \right) d\xi \quad (4.5)$$

onde se define $\theta = \frac{\eta}{E^v}$ como sendo o índice de fluência. Resolvendo-se a integral obtém-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{E^v} \left(1 - \frac{\theta}{t_j - t_{j-1}} \left(e^{-\frac{t_{i+1} - t_j}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1} - t_{j-1}}{\theta}} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{E^v} \left(1 - \frac{\theta}{t_j - t_{j-1}} \left(1 - e^{-\frac{t_j - t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_{i+1} - t_j}{\theta}} \right) \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{\sigma_{i+1}}{E^v} - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_j - t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_{i+1} - t_j}{\theta}}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Note-se que

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{\sigma_{i+1}}{E^v} - \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_j - t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_{i+1} - t_j}{\theta}} \\
&\quad - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta}} \right) \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{\sigma_{i+1}}{E^v} - \left[\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_j - t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_i - t_j}{\theta}} \right] e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta}} \\
&\quad - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\Delta t_{i+1}} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta}} \right).
\end{aligned} \tag{4.7}$$

Da mesma forma, obtém-se para o instante t_i

$$\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_j - t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_i - t_j}{\theta}} = \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} + \frac{\sigma_i}{E^v} - \varepsilon_i^c. \tag{4.8}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{\sigma_{i+1}}{E^v} + \left[\varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} - \frac{\sigma_i}{E^v} \right] e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta}} - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\Delta t_{i+1}} \frac{\theta}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta}} \right) \\
&= \varepsilon_i^c e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} + \sigma_i \left[\frac{1}{E^v} \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) - \left(\frac{1}{E^e(\zeta_i)} + \frac{1}{E^v} \right) e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{1}{E^v} \left(1 - \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) \right) \right].
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Observe-se também que com

$$\varepsilon_i^v = \varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} \quad \text{e} \quad \varepsilon_{i+1}^v = \varepsilon_{i+1}^c - \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} \tag{4.10}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^v &= \varepsilon_i^v e^{-\frac{\Delta t}{\theta}} + \sigma_i \left[\frac{1}{E^v} \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) - \frac{1}{E^v} e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^v} \left(1 - \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) \right) \right] \\
&= \varepsilon_i^v e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} + \sigma_i \frac{1}{E^v} \left[\left(1 + \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) - 1 \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \frac{1}{E^v} \left[\left(1 - \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) \right) \right]
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Portanto, a deformação no final do incremento, onde se leva em consideração a retração, é

$$\varepsilon_{i+1} = \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \left(\varepsilon_i^v e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} + \sigma_i \Psi_i + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1} \right) + \varepsilon_{i+1}^s, \tag{4.12}$$

sendo ε_{i+1}^s a deformação por retração e Ψ_i e Ψ_{i+1} coeficientes viscoelásticos dado por

$$\Psi_i = \frac{1}{E^v} \left[\left(1 + \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) - 1 \right] \quad \text{e} \quad \Psi_{i+1} = \frac{1}{E^v} \left[\left(1 - \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) \right) \right]. \tag{4.13}$$

4.1.1. Algoritmo de Integração de Tensões

O algoritmo de integrações de tensões está apresentado na figura 18. Observe-se que este algoritmo também não necessita armazenar o histórico completo de tensões, mas agora, além de σ é necessário também armazenar ε^v em cada incremento de tempo i .

$$\begin{array}{l}
 1. \sigma_i = E^e(\zeta_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^s - \varepsilon_i^v) \\
 2. \Psi_i = \frac{1}{E^v} \left(\left(1 + \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) - 1 \right) \\
 3. \Psi_{i+1} = \frac{1}{E^v} \left(1 - \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) \right) \\
 4. \alpha_{i+1} = \varepsilon_i^v e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} + \sigma_i \Psi_i \\
 5. \varepsilon_{i+1}^v = \alpha_{i+1} + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1} \\
 6. D_{i+1}^{\text{alg}} = \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \Psi_{i+1}} \\
 7. \sigma_{i+1} = D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1})
 \end{array}$$

Figura 18: Algoritmo de Integração de Tensões - Modelo de Três Parâmetros.

4.1.2. Estabilidade Numérica

Observa-se que

$$\begin{aligned}
 e^{-x} &= 1 - x + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{24}x^4 + O(x^5); \\
 \left(1 - \frac{1}{x}\right)(1 - e^{-x}) - 1 &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{3}x^2 + \frac{1}{8}x^3 + O(x^4); \\
 1 - \frac{1}{x}(1 - e^{-x}) &= \frac{1}{2}x - \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{24}x^3 + O(x^4).
 \end{aligned} \tag{4.14}$$

Portanto, até a primeira ordem em $\frac{\Delta t}{\theta}$, tem-se

$$\alpha_{i+1} = \varepsilon_i^c \left(1 - \frac{\Delta t}{\theta} \right) + \sigma_i \left[\frac{1}{E^v} \frac{\Delta t}{2\theta} - \frac{1}{E^e(\zeta_i)} \left(1 - \frac{\Delta t}{\theta} \right) \right] \quad \text{e} \quad D_{i+1}^{\text{alg}} = \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \frac{1}{E^v} \frac{\Delta t}{2\theta}}. \tag{4.15}$$

Essas fórmulas⁸ são úteis quando $\Delta t \rightarrow 0$, pois não apresentam singularidade. Delas decorrem que

$$\begin{aligned}
 \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D_{i+1}^{\text{alg}} &= E^e(\zeta_{i+1}), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma_{i+1} = E^e(\zeta_{i+1})(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^v), \\
 \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} D_{i+1}^{\text{alg}} &= \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{\infty})} + \frac{1}{E^v}} = E_{\infty} \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \sigma_{i+1} = E_{\infty} \varepsilon_{i+1}
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

⁸ Vale ressaltar que, daqui em diante, para todas as **verificações de estabilidade numérica**, considera-se somente o efeito da fluência, isto é, não se computa a deformação ε_{i+1}^s devido ao fenômeno da retração.

onde ε_i^v dada por (4.10) pode ser definida como a deformação viscosa do elemento de Kelvin-Voigt.

4.1.3. Ensaio de Carga e Descarga

Seja um ensaio⁹ de carregamento e descarregamento ilustrado pela figura 14, com carga em t_0 e descarga em $t_d = t_0 + \delta$. Para $t > t_d$, tem-se

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \sigma_0 \left(\frac{1}{E^e(\zeta_0)} + \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta}} \right) \right) - \sigma_0 \left(\frac{1}{E^e(\zeta_d)} + \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\theta}} \right) \right) \\ &= \sigma_0 \left[\frac{1}{E^e(\zeta_0)} - \frac{1}{E^e(\zeta_d)} + \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta}} \right) - \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\theta}} \right) \right] = \Delta\varepsilon^e + \varepsilon^c(t) \end{aligned} \quad (4.17)$$

onde $\Delta\varepsilon^e$ representa a variação da deformação elástica e $\varepsilon^c(t)$ a deformação devido à fluência, ou seja,

$$\Delta\varepsilon^e = \frac{\sigma_0}{E^e(\zeta_0)} - \frac{\sigma_0}{E^e(\zeta_d)} \quad \text{e} \quad \varepsilon^c(t) = \sigma_0 \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta}} \right) e^{-\frac{t-t_d}{\theta}} = \sigma_0 \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\theta}} \right) e^{-\frac{t-t_d}{\theta}}. \quad (4.18)$$

Então, para $t = t_d^+$ e para $t \rightarrow \infty$ obtém-se

$$\varepsilon^c(t_d^+) = \sigma_0 \frac{1}{E^v} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\theta}} \right) \quad \text{e} \quad \varepsilon^c(\infty) = 0. \quad (4.19)$$

Note-se que há uma contribuição de E^e para a parcela de deformação irreversível dada pela variação da parcela de deformação elástica, porém este modelo não apresenta, por definição, fluência irreversível.

4.2. Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt com Coeficientes Constantes

Figura 19: Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt.

Seja o modelo, conforme mostra a figura 19, representado por uma cadeia em série de n elementos de Kelvin-Voigt ($k = 1, \dots, n$) com coeficientes constantes representados por $(\bullet)^k$, associada a um elemento elástico com envelhecimento, ou seja, que muda com o tempo segundo a primeira parcela da função de fluência $J(\zeta_{i+1}, t_{i+1} - \xi)$ em (4.20), e sujeito a um carregamento linear no intervalo de tempo dado por (4.3), com a condição inicial $\varepsilon(t_i) = \varepsilon_i$. A função de fluência para este modelo se escreve como

⁹ Para todos os ensaios de carga e descarga, considere-se também, somente o efeito da fluência sem o efeito da retração.

$$J(\zeta_{i+1}, t_{i+1} - \xi) = \frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-\xi}{\theta}} \right), \quad (4.20)$$

com $\theta = \frac{\eta^1}{E^1} = \frac{\eta^2}{E^2} = \dots = \frac{\eta^k}{E^k} = \dots = \frac{\eta^n}{E^n},$

com os índices de fluência θ constantes. Com a ajuda de (4.4), a equação (3.22) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^c &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-\xi}{\theta}} \right) \right] d\xi \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-\xi}{\theta}} \right) d\xi \end{aligned} \quad (4.21)$$

e resolvendo-se a integral obtém-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{E^k} \left(1 - \frac{\theta}{t_j - t_{j-1}} \left(e^{-\frac{t_{i+1}-t_j}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1}-t_{j-1}}{\theta}} \right) \right) \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{j=1}^{i+1} \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{E^k} \left(1 - \frac{\theta}{t_j - t_{j-1}} \left(1 - e^{-\frac{t_j-t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_{i+1}-t_j}{\theta}} \right) \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{i+1}}{E^k} - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_j-t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_{i+1}-t_j}{\theta}}. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Note-se que

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{i+1}}{E^k} - \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_j-t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_{i+1}-t_j}{\theta}} \\ &\quad - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right) \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{i+1}}{E^k} - \left[\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_j-t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_i-t_j}{\theta}} \right] e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \\ &\quad - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\Delta t_{i+1}} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right). \end{aligned} \quad (4.23)$$

Da mesma forma, tem-se para o instante t_i

$$\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_j-t_{j-1}}{\theta}} \right) e^{-\frac{t_i-t_j}{\theta}} = \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_i}{E^k} - \varepsilon_i^c. \quad (4.24)$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_{i+1}}{E^k} \\ &\quad - \left[\varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} - \sum_{k=1}^n \frac{\sigma_i}{E^k} \right] e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} - \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{\Delta t_{i+1}} \sum_{k=1}^n \frac{\theta}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right) \\ &= \varepsilon_i^c e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} + \sigma_i \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) - \left(\frac{1}{E^e(\zeta_i)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \right) e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right] \\ &\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - \frac{\theta}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta}} \right) \right) \right]. \end{aligned} \quad (4.25)$$

Note-se a analogia com a expressão (4.9) do *Modelo de Três Parâmetros* descrito anteriormente. Levando-se em conta (4.10), onde ε_{i+1}^v representa a parcela de deformação viscosa devida ao modelo de Kelvin-Voigt em t_{i+1} , ou seja, $\varepsilon_{i+1}^k \doteq \varepsilon_{i+1}^v$. Logo, por analogia, considerando-se (4.11) e a retração, obtém-se a deformação no final do incremento dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon_{i+1} &= \varepsilon_{i+1}^c + \varepsilon_{i+1}^s \\ &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i+1}^k + \varepsilon_{i+1}^s = \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_i^k + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k \right] + \varepsilon_{i+1}^s, \quad (4.26)\end{aligned}$$

onde

$$\begin{aligned}\Psi_i^k &= \frac{1}{E^k} \left(\left(1 + \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) - 1 \right) \quad \text{e} \\ \Psi_{i+1}^k &= \frac{1}{E^k} \left(1 - \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) \right), \quad k = 1, 2, \dots, n\end{aligned} \quad (4.27)$$

4.2.1. Algoritmo de Integração de Tensões

1. $\sigma_i = E^e(\zeta_i) \left(\varepsilon_i - \varepsilon_i^s - \sum_{k=1}^n \varepsilon_i^k \right)$
2. $\Psi_i^k = \frac{1}{E^k} \left(\left(1 + \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) - 1 \right), k = 1, 2, \dots, n$
3. $\Psi_{i+1}^k = \frac{1}{E^k} \left(1 - \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) \right), k = 1, 2, \dots, n$
4. $\alpha_{i+1} = \sum_{k=1}^n \left(\varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_{i+1}^k \right)$
5. $\varepsilon_{i+1}^k = \alpha_{i+1} + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k, k = 1, 2, \dots, n$
6. $D_{i+1}^{\text{alg}} = \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \Psi_{i+1}^k}$
7. $\sigma_{i+1} = D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1})$

Figura 20: Algoritmo de Integração de Tensões - Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt.

O algoritmo de integração de tensões é então dado pela figura 20. Observa-se, também, que este algoritmo não necessita armazenar o histórico completo de tensões, mas é necessário armazenar σ e $\varepsilon^k, k = 1, 2, \dots, n$ em cada incremento i . Note-se agora que os índices de fluência

$$\theta^k = \frac{\eta^k}{E^k} (k = 1, 2, \dots, n) \quad (4.28)$$

não apresentam uma relação constante entre si como definidos em (4.20), no entanto, a expressão dada por (4.28) apresenta uma relação constante para cada valor de $\theta^k, k = 1, 2, \dots, n$.

Considerando-se (4.28) ao invés de (4.20), não se conseguiria deduzir a expressão (4.25), via (4.21), pois seria impossível introduzir o resultado de (4.24) na expressão (4.23). Para se obter (4.26) seria necessário usar de um algebrismo mais complexo e extensivo, o qual fugiria ao escopo deste trabalho. Em SANTOS[41] enfatiza essa observação e mostra, também, a preocupação em se chegar aos mesmos resultados obtidos em (4.26) pela solução da equação diferencial da *Cadeia de Elementos de Kelvin-Voigt em Série*.

4.2.2. Estabilidade Numérica

Portanto, com o auxílio das expressões dadas em (4.14), até a primeira ordem em $\frac{\Delta t}{\theta}$, obtém-se

$$\begin{aligned}\alpha_{i+1}^k &= \varepsilon_i^k \left(1 - \frac{\Delta t}{\theta^k}\right) + \frac{\sigma_i}{E^k} \frac{\Delta t}{2\theta^k}, \\ D_{i+1}^{alg} &= \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \frac{\Delta t}{2\theta^k}} \quad \text{e} \\ \varepsilon_{i+1}^k &= \alpha_{i+1}^k + \frac{\sigma_{i+1}}{E^k} \frac{\Delta t}{2\theta^k}.\end{aligned}\tag{4.29}$$

Note-se que com a ajuda de

$$\varepsilon_{i+1}^a = \varepsilon_{i+1}^c - \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i+1}^k = \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_i^k + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k \right] \tag{4.30}$$

quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow \infty$, chega-se a

$$\begin{aligned}\lim_{\Delta t \rightarrow 0} D_{i+1}^{alg} &= E^e(\zeta_{i+1}), \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma_{i+1} = E^e(\zeta_{i+1})(\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i^a), \\ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} D_{i+1}^{alg} &= \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_\infty)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k}} = E_\infty \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \sigma_{i+1} = E_\infty \varepsilon_{i+1}.\end{aligned}\tag{4.31}$$

4.2.3. Ensaio de Carga e Descarga

Seja o mesmo ensaio de carga e descarga descrito na seção anterior. A deformação para $t > t_d$ é dada por

$$\begin{aligned}
\varepsilon(t) &= \sigma_0 \left(\frac{1}{E^e(\zeta_0)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) \right) - \sigma_0 \left(\frac{1}{E^e(\zeta_d)} + \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\theta^k}} \right) \right) \\
&= \Delta\varepsilon^e + \varepsilon^c(t), \quad \text{então} \\
\varepsilon^c(t) &= \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) - \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\theta^k}} \right) \right] \\
&= \sigma_0 \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{t_d-t_0}{\theta}} \right) e^{-\frac{t-t_d}{\theta}} \\
&= \sigma_0 \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\theta}} \right) e^{-\frac{t-t_d}{\theta}}
\end{aligned} \tag{4.32}$$

e com parcela de variação da deformação elástica $\Delta\varepsilon^e$ expressa por (4.18). Então, para $t = t_d^+$ e para $t \rightarrow \infty$ obtém-se

$$\varepsilon^c(t_d^+) = \sigma_0 \sum_{k=1}^n \frac{1}{E^k} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\theta}} \right) \quad \text{e} \quad \varepsilon^c(\infty) = 0. \tag{4.33}$$

Note-se que, como no modelo anterior, este também não apresenta, por definição, fluência irreversível.

4.3. Função de Dischinger

Dischinger, por exemplo, sugeriu para (3.9) a seguinte expressão

$$J(\zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^0} + C(\zeta_0, t - t_0) \tag{4.34}$$

onde E^0 é uma constante, que representa o módulo de deformação imediata no instante t_0 , e a parcela lenta $C(\zeta_0, t - t_0)$ pode ser escrita como em (3.19), com

$$F(\zeta_0) = B e^{-\frac{t_0-t_c}{\theta}} \quad \text{e} \quad f(t - t_0) = 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta}}. \tag{4.35}$$

Note-se que

$$\begin{aligned}
C(\zeta_0, t - t_0) &= F(\zeta_0) f(t - t_0) \\
&= B e^{-\frac{t_0-t_c}{\theta}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta}} \right) = B \left(e^{-\frac{t_0-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t-t_0}{\theta}} \right) \\
&= F(t_0 - t_c) - F(t - t_c) = F(\zeta_0) - F(\zeta)
\end{aligned} \tag{4.36}$$

No caso da *Função de Dischinger* não é necessária a integração numérica como se pode verificar abaixo. Logo, com a ajuda de (4.34), a equação (3.22) é escrita como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^c &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\frac{1}{E^0} + Be^{-\frac{\xi-t_c}{\theta}} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-\xi}{\theta}} \right) \right] d\xi \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} B \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(e^{-\frac{\xi-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1}-\xi}{\theta}} \right) d\xi \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(e^{\frac{t_{i+1}-\xi}{\theta}} - 1 \right) d\xi \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \left[\theta \left(e^{-\frac{t_j-t_{i+1}}{\theta}} - e^{-\frac{t_{j-1}-t_{i+1}}{\theta}} \right) + (t_j - t_{j-1}) \right] \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sum_{j=1}^{i+1} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} B\theta e^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \left(e^{-\frac{t_j-t_{i+1}}{\theta}} - e^{-\frac{t_{j-1}-t_{i+1}}{\theta}} \right) \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sigma_{i+1} Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} B\theta \left(e^{-\frac{t_{j-1}-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_j-t_c}{\theta}} \right) \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sigma_{i+1} Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} + \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} B\theta \left(e^{-\frac{t_{j-1}-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_j-t_c}{\theta}} \right) \\
&\quad + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} B\theta \left(e^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \right). \tag{4.37}
\end{aligned}$$

Da mesma forma para o instante t_i chega-se em (4.38). Então, no final do incremento (4.37) se escreve como (4.39)

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} B\theta \left(e^{-\frac{t_{j-1}-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_j-t_c}{\theta}} \right) &= \varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^0} + \sigma_i Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} \tag{4.38} \\
\varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sigma_{i+1} Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} + \varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^0} + \sigma_i Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} B\theta \left(e^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \right) \\
&= \varepsilon_i^c - \sigma_i \left[\frac{1}{E^0} - Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} + \frac{B\theta}{t_{i+1} - t_i} \left(e^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \right) \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^0} - Be^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} + \frac{B\theta}{t_{i+1} - t_i} \left(e^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} - e^{-\frac{t_{i+1}-t_c}{\theta}} \right) \right] \tag{4.39} \\
&= \varepsilon_i^c - \sigma_i \left[\frac{1}{E^0} - Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} \left(1 - \frac{\theta}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right) \right) \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^0} - Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} \left(e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} - \frac{\theta}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right) \right) \right]
\end{aligned}$$

ou como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^b &= \varepsilon_i^b + \sigma_i \left[Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} \left(1 - \frac{\theta}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right) \right) \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[Be^{-\frac{t_i-t_c}{\theta}} \left(-e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} + \frac{\theta}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta}} \right) \right) \right] \\
&= \varepsilon_i^b + \sigma_i \left[B^g e^{-\frac{t_i-t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta^g}} \right) \right) \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[B^g e^{-\frac{t_i-t_c}{\theta^g}} \left(\left(1 + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1}-t_i}{\theta^g}} \right) - 1 \right) \right]. \tag{4.40}
\end{aligned}$$

Portanto, com a ajuda de

$$\varepsilon^b = \varepsilon - \frac{\sigma}{E^0} \quad (4.41)$$

a equação (4.40) pode ser escrita da seguinte forma

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^b &= \varepsilon_i^b + \sigma_i \Phi_i + \sigma_{i+1} \Phi_{i+1} \quad \text{onde} \\ \Phi_i &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \quad \text{e} \\ \Phi_{i+1} &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(\left(1 + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) - 1 \right). \end{aligned} \quad (4.42)$$

4.3.1. Algoritmo de Integração de Tensões

Através de (4.42) pode-se formular o AIT dado pela figura 21. Note-se que este algoritmo também não necessita armazenar computacionalmente o histórico completo de tensões, mas é necessário armazenar σ e ε^b em cada incremento i . Para outras funções de fluência pode-se não encontrar fórmulas tão simples.

$$\begin{aligned} 1. \sigma_i &= E^0 (\varepsilon_i - \varepsilon_i^s - \varepsilon_i^b) \\ 2. \Phi_i^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \\ 3. \Phi_{i+1}^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(\left(1 + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) - 1 \right) \\ 4. \alpha_{i+1} &= \varepsilon_i^b + \sigma_i \left(\Phi_i^g - \frac{1}{E^0} \right) \\ 5. \varepsilon_{i+1}^b &= \varepsilon_{i+1} - \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} \\ 6. D_{i+1}^{\text{alg}} &= \frac{1}{\frac{1}{E^0} + \Phi_{i+1}^g} \\ 7. \sigma_{i+1} &= D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1}) \end{aligned}$$

Figura 21: Algoritmo de Integração de Tensões - Função de Dischinger.

4.3.2. Estabilidade Numérica

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ e $\Delta t \rightarrow \infty$, tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} D_{i+1}^{\text{alg}} &= E^0, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \sigma_{i+1} = E^0 (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) + \sigma_i, \quad \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \alpha_{i+1} = \varepsilon_i - \sigma_i \left[\frac{1}{E^0} - B e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta}} \right] \\ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} D_{i+1}^{\text{alg}} &= E^0 \quad \text{e} \quad \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \sigma_{i+1} = E^0 (\varepsilon_{i+1} - \alpha_{i+1}) = E^0 (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) + \sigma_i \left(1 - E^0 B e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta}} \right) \end{aligned} \quad (4.43)$$

4.3.3. Ensaio de Carga e Descarga

Seja o mesmo ensaio de carga e descarga. A deformação para $t > t_d$ agora é dada por

$$\begin{aligned}\varepsilon(t) &= \sigma_0 \left(\frac{1}{E^0} + C(\zeta_0, t - t_0) \right) - \sigma_0 \left(\frac{1}{E^0} + C(\zeta_d, t - t_d) \right) \\ &= \sigma_0 \left[\frac{1}{E^0} - \frac{1}{E^0} + C(\zeta_0, t - t_0) - C(\zeta_d, t - t_d) \right].\end{aligned}\quad (4.44)$$

Logo, para $t = t_d^+$ e para $t \rightarrow \infty$ obtém-se

$$\varepsilon(t_d^+) = \sigma_0 [C(\zeta_0, \delta) - C(\zeta_0 + \delta, 0)] \quad \text{e} \quad \varepsilon(\infty) = \sigma_0 [C(\zeta_0, \infty) - C(\zeta_0 + \delta, \infty)] \quad (4.45)$$

onde se chega a

$$\varepsilon(t_d^+) = \varepsilon(\infty) = \sigma_0 \left[B \left(e^{-\frac{\zeta_0}{\theta}} - e^{-\frac{\zeta_d}{\theta}} \right) \right] = \sigma_0 B e^{-\frac{\zeta_0}{\theta}} \left(e^{-\frac{\delta}{\theta}} \right). \quad (4.46)$$

Note-se que não há uma contribuição de E^0 no envelhecimento do módulo de elasticidade. No entanto, para este modelo, há uma parcela de fluência irreversível dada por (3.14) que depende somente de C . Observe-se também que a fluência irreversível decresce com a idade do concreto no carregamento e cresce com o tempo de carregamento.

4.4. Função de Dischinger Generalizada

Uma generalização da função de Dischinger pode ser dada pela mesma expressão (4.34), porém com

$$\begin{aligned}C(\zeta_0, t - t_0) &= \sum_{g=1}^n F^g(\zeta_0) f^g(t - t_0) = \sum_{g=1}^n F^g(\zeta_0) - F^g(\zeta) \quad \text{onde} \\ F^g(\zeta_0) &= B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\theta^g}} \quad \text{e} \quad f^g(t - t_0) = 1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^g}}, \quad \text{com } g = 1, 2, \dots, n.\end{aligned}\quad (4.47)$$

Neste caso a equação (3.22) é escrita como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^c &= \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left[\sum_{g=1}^n \frac{1}{E^0} + B^g e^{-\frac{\xi - t_c}{\theta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - \xi}{\theta^g}} \right) \right] d\xi \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(e^{-\frac{\xi - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{i+1} - \xi}{\theta^g}} \right) d\xi \right] \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \int_{t_{j-1}}^{t_j} \left(e^{-\frac{t_{i+1} - \xi}{\theta^g}} - 1 \right) d\xi \right] \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \left[\theta^g \left(e^{-\frac{t_j - t_{i+1}}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{j-1} - t_{i+1}}{\theta^g}} \right) + (t_j - t_{j-1}) \right] \right] \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sum_{j=1}^{i+1} (\sigma_j - \sigma_{j-1}) \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right] \\
&\quad - \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g \theta^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \left(e^{-\frac{t_j - t_{i+1}}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{j-1} - t_{i+1}}{\theta^g}} \right) \right] \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sigma_{i+1} \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right] + \sum_{j=1}^{i+1} \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g \theta^g \left(e^{-\frac{t_{j-1} - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_j - t_c}{\theta^g}} \right) \right] \\
&= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sigma_{i+1} \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right] + \sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g \theta^g \left(e^{-\frac{t_{j-1} - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_j - t_c}{\theta^g}} \right) \right] \\
&\quad + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} \sum_{g=1}^n B^g \theta^g \left(e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right). \tag{4.48}
\end{aligned}$$

Considerando-se a obtenção de (4.38). Para o instante t_i , tem-se

$$\sum_{j=1}^i \frac{\sigma_j - \sigma_{j-1}}{t_j - t_{j-1}} \sum_{g=1}^n \left[B^g \theta^g \left(e^{-\frac{t_{j-1} - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_j - t_c}{\theta^g}} \right) \right] = \varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^0} + \sigma_i \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \right]. \tag{4.49}$$

Logo, analogamente ao resultado de (4.39), a expressão (4.48) no final do incremento é escrita como

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^c &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^0} - \sigma_{i+1} \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right] + \varepsilon_i^c - \frac{\sigma_i}{E^0} + \sigma_i \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \right] \\
&\quad + \frac{\sigma_{i+1} - \sigma_i}{t_{i+1} - t_i} \sum_{g=1}^n \left[B^g \theta^g \left(e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right) \right] \\
&= \varepsilon_i^c - \sigma_i \left[\frac{1}{E^0} - \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \right] \right] + \sum_{g=1}^n \left[\frac{B^g \theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right) \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^0} - \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right] \right] + \sum_{g=1}^n \left[\frac{B^g \theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} - e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} \right) \right] \\
&= \varepsilon_i^c - \sigma_i \left[\frac{1}{E^0} - \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \right] \right] \\
&\quad + \sigma_{i+1} \left[\frac{1}{E^0} - \sum_{g=1}^n \left[B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \right] \right] \tag{4.50}
\end{aligned}$$

Note-se que de (4.50) obtém-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^c - \frac{1}{E^0} \sigma_{i+1} = \varepsilon_i^c - \frac{1}{E^0} \sigma_i - \sigma_i \left[-\sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} + \sum_{g=1}^n B^g \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right] \\ + \sigma_{i+1} \left[-\sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_{i+1} - t_c}{\theta^g}} + \sum_{g=1}^n B^g \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Portanto, como na seção anterior e com a ajuda de (4.41) chega-se

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^b = \varepsilon_i^b - \sigma_i \left[\sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \right] \\ + \sigma_{i+1} \left[\sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(-e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \right] \\ = \varepsilon_i^b + \sigma_i \left[\sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \right] \\ + \sigma_{i+1} \left[\sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(\left(1 + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Logo, a equação (4.52) pode ser escrita da seguinte

$$\begin{aligned} \varepsilon_{i+1}^b = \varepsilon_i^b + \sigma_i \sum_{g=1}^n \Phi_i^g + \sigma_{i+1} \sum_{g=1}^n \Phi_{i+1}^g \quad \text{onde} \\ \Phi_i^g = B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right) \quad \text{e} \\ \Phi_{i+1}^g = B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(\left(1 + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) - 1 \right) \end{aligned} \quad (4.53)$$

4.4.1. Algoritmo de Integração de Tensões

<ol style="list-style-type: none"> 1. $\sigma_i = E^0 (\varepsilon_i - \varepsilon_i^s - \varepsilon_i^b)$ 2. $\Phi_i^g = B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(1 - \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) \right), g = 1, 2, \dots, n$ 3. $\Phi_{i+1}^g = B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \left(\left(1 + \frac{\theta^g}{t_{i+1} - t_i} \right) \left(1 - e^{-\frac{t_{i+1} - t_i}{\theta^g}} \right) - 1 \right), g = 1, 2, \dots, n$ 4. $\alpha_{i+1} = \varepsilon_i^b + \sigma_i \left[\sum_{g=1}^n \Phi_i^g - \frac{1}{E^0} \right]$ 5. $\varepsilon_{i+1}^b = \varepsilon_{i+1} - \frac{\sigma_{i+1}}{E^0}$ 6. $D_{i+1}^{\text{alg}} = \frac{1}{\frac{1}{E^0} + \sum_{g=1}^n \Phi_{i+1}^g}$ 7. $\sigma_{i+1} = D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1})$

Figura 22: Algoritmo de Integração de Tensões - Função de Dischinger generalizada.

Note-se que este algoritmo novamente não necessita armazenar computacionalmente o histórico completo de tensões, mas é necessário armazenar σ e ε^b , em cada incremento de tempo i .

4.4.2. Estabilidade Numérica

Quando $\Delta t \rightarrow 0$ obtém-se D_{i+1}^{alg} e σ_{i+1} da mesma forma que em (4.43). Isto é válido também, quando $\Delta t \rightarrow \infty$ para D_{i+1}^{alg} . Porém para α_{i+1} e σ_{i+1} tem-se

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \alpha_{i+1} &= \varepsilon_i^c - \sigma_i \left[\frac{1}{E^0} - \sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \right] \quad \text{e} \\ \lim_{\Delta t \rightarrow \infty} \sigma_{i+1} &= E^0 (\varepsilon_{i+1} - \alpha_{i+1}) = E^0 (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_i) + \sigma_i \left(1 - E^0 \sum_{g=1}^n B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\theta^g}} \right). \end{aligned} \quad (4.54)$$

4.4.3. Ensaio de Carga e Descarga

Seja o mesmo ensaio de fluência descrito para a função de Dischinger. A deformação para $t > t_d$ é dada por (4.44). Para a função de Dischinger generalizada e para $t \rightarrow \infty$ chega-se facilmente a

$$\varepsilon(\infty) = \sigma_0 \left[\frac{1}{E^0} - \frac{1}{E^0} + \sum_{k=1}^n B^k \left(e^{-\frac{\zeta_0}{\theta^k}} - e^{-\frac{\zeta_d}{\theta^k}} \right) \right] = \sigma_0 \sum_{k=1}^n B^k e^{-\frac{\zeta_0}{\theta^k}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\theta^k}} \right). \quad (4.55)$$

Note-se que a fluência é irreversível, decresce com a idade do concreto no carregamento, cresce com o tempo de carregamento, e não há contribuição da parte elástica para a fluência irreversível porque E^0 foi admitido constante.

4.5. Função Geral de Fluência

Todos os Algoritmos de Integração de Tensões apresentados na seção anterior mostram uma dependência de α_{i+1} , que representa uma espécie de deformação inicial da função de fluência J e de todos os estados de tensão $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$ nos instantes anteriores a t_{i+1} . Este fato pode prejudicar imensamente a análise incremental, pois as necessidades de armazenamento de dados podem crescer de forma incontrollável, impossibilitando-a. Por isso é desejável que a função de fluência seja de tal forma que o armazenamento do histórico de tensões não seja necessário na integração de tensões. É também desejável que a função de fluência seja analiticamente integrável, de forma a facilitar o cálculo das expressões na qual ela aparece. No entanto, nem todas as funções de fluência mostradas nesta seção permitem isso. É esperado que a função de fluência facilite a calibração com dados experimentais e com funções especificadas em normas, possibilite uma análise e retro-análise com estruturas instrumentadas e a modelagem para concretos jovens, além do Algoritmo de Integração de Tensões (AIT) gerar um código computacional de baixo custo de armazenamento e de fácil implementação. Para isso apresenta-se a seguir, a *Função Geral de Fluência* (FGF) proposta por SANTOS[41] que realiza todas essas tarefas de forma muito eficiente.

Seja uma outra forma geral, aqui representada pela sigla FGF, na qual a parcela elástica com envelhecimento de deformação tem a mesma interpretação das funções derivadas de modelos viscoelásticos. Ela pode ser escrita de forma análoga a (3.9) como

$$J(\zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^e(\zeta)} + C(\zeta_0, t - t_0). \quad (4.56)$$

onde em SANTOS[41] se escreveu $C(\zeta_0, t - t_0)$ como

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right). \quad (4.57)$$

Ela corresponde à soma de $C(\zeta_0, t - t_0)$ da *Cadeia Generalizada em Série de Kelvin com Coeficientes Constantes* com $C(\zeta_0, t - t_0)$ da *Função de Dischinger Generalizada*. Ela exige a determinação de $2(n + m)$ parâmetros, A^k , B^g , θ^k , $k = 1, 2, \dots, n$ e ϑ^g , $g = 1, 2, \dots, m$, além da função $E^e(\zeta)$.

As funções de fluência expressas em série como acima facilitam a integração de tensões com um mínimo de variáveis armazenadas, e permitem a calibração com dados experimentais e retro-análises com leituras obtidas em estruturas reais. Termos com θ e ϑ pequenos possibilitam a modelagem da fluência para concretos jovens, o que é importante nos projetos atuais, nos quais a protensão tem sido efetuada em pequenas idades do concreto. Termos com θ e ϑ maiores possibilitam a modelagem e previsão da fluência ao longo do tempo. Em SANTOS[41] são discutidas as grandes vantagens da utilização da FGF proposta com uma metodologia consistente e eficiente baseada no MEF. O emprego desta também será defendido ao longo deste trabalho.

Note-se que a fluência dada por primeira parcela depois da igualdade de (4.57) é totalmente reversível e a expressa pela segunda parcela é parcialmente irreversível. Quando se adota $n = m$ e $\theta^k = \vartheta^g$, (4.57) simplifica-se para

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \sum_{k=1}^n \left(A^k + B^k e^{-\frac{\zeta_0}{\theta^k}} \right) \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) \quad (4.58)$$

que exige a determinação de apenas $3n$ parâmetros. Quando os parâmetros temporais θ^k , $k = 1, 2, \dots, n$ são fixados a priori, a equação (4.58) exige a determinação de $2n$ parâmetros.

Para a função de fluência

$$J(\zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^e(\zeta)} + \sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right) \quad (4.59)$$

tem-se, não se considerando a deformação por retração ε_{i+1}^s , a deformação total escrita como

$$\varepsilon_{i+1} = \varepsilon_{i+1}^e + \varepsilon_{i+1}^a + \varepsilon_{i+1}^b \quad (4.60)$$

e com a ajuda do que foi apresentado ao longo da seção anterior, obtém-se

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1}^e &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})}, \quad \varepsilon_{i+1}^a = \sum_{k=1}^n \varepsilon_{i+1}^k = \sum_{k=1}^n \left(\varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_i^k + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k \right) \text{ e} \\
\varepsilon_{i+1}^b &= \varepsilon_i^b + \sigma_i \sum_{g=1}^m \Phi_i^g + \sigma_{i+1} \sum_{g=1}^m \Phi_{i+1}^g \quad \text{sendo} \\
\Psi_i^k &= A^k \left(\left(1 + \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) - 1 \right), \\
\Psi_{i+1}^k &= A^k \left(1 - \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) \right), \\
\Phi_i^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\vartheta^g}} \left(\left(1 - \frac{\vartheta^g}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\vartheta^g}} \right) \right) \text{ e} \\
\Phi_{i+1}^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\vartheta^g}} \left(\left(1 - \frac{\vartheta^g}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\vartheta^g}} \right) - 1 \right)
\end{aligned} \tag{4.61}$$

onde ε_{i+1}^e é a parcela da deformação elástica com envelhecimento, ε_{i+1}^a e ε_{i+1}^b são as parcelas da deformação viscosa que correspondem, respectivamente, a

$$\begin{aligned}
J^e(\zeta) &= \frac{1}{E^e(\zeta)}, \quad J^a(t - t_0) = \sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) \text{ e} \\
J^b(\zeta_0, t - t_0) &= \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right)
\end{aligned} \tag{4.62}$$

Note-se que

$$\varepsilon_i^b = \varepsilon_i - \varepsilon_i^e - \varepsilon_i^a = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} - \sum_{k=1}^n \varepsilon_i^k. \tag{4.63}$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\varepsilon_{i+1} &= \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \left[\varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_i^k + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k \right] \\
&+ \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E^e(\zeta_i)} - \sum_{k=1}^n \varepsilon_i^k + \sigma_i \sum_{g=1}^m \Phi_i^g + \sigma_{i+1} \sum_{g=1}^m \Phi_{i+1}^g \\
&= \varepsilon_i - \sum_{k=1}^n \varepsilon_i^k \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} \right) + \sigma_i \left(\sum_{k=1}^n \Psi_i^k + \sum_{g=1}^m \Phi_i^g - \frac{1}{E^e(\zeta_i)} \right) \\
&+ \sigma_{i+1} \left(\sum_{k=1}^n \Psi_{i+1}^k + \sum_{g=1}^m \Phi_{i+1}^g + \frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} \right)
\end{aligned} \tag{4.64}$$

Portanto, com a ajuda de

$$\varepsilon^{ve}(t) = \varepsilon(t) - \varepsilon^e(t) = \varepsilon(t) - \frac{\sigma(t)}{E^e(t)}, \tag{4.65}$$

e agora, considerando-se a deformação por retração ε_{i+1}^s , pode-se formular o AIT da figura 23.

$$\begin{aligned}
1. \sigma_i &= E^e(\zeta_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^{ve} - \varepsilon_i^s) \\
2. \Psi_i^k &= A^k \left(\left(1 + \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) - 1 \right), k = 1, 2, \dots, n \\
3. \Psi_{i+1}^k &= A^k \left(1 - \frac{\theta^k}{\Delta t_{i+1}} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\theta^k}} \right) \right), k = 1, 2, \dots, n \\
4. \Phi_i^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\vartheta^g}} \left(\left(1 - \frac{\vartheta^g}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\vartheta^g}} \right) \right), g = 1, 2, \dots, m \\
5. \Phi_{i+1}^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\vartheta^g}} \left(\left(1 - \frac{\vartheta^g}{\Delta t_{i+1}} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t_{i+1}}{\vartheta^g}} \right) - 1 \right), g = 1, 2, \dots, m \\
6. \alpha_{i+1} &= \varepsilon_i - \sum_{k=1}^n \varepsilon_i^k \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} \right) + \sigma_i \left(\sum_{k=1}^n \Psi_i^k + \sum_{g=1}^m \Phi_i^g - \frac{1}{E^e(\zeta_i)} \right) \\
7. D_{i+1}^{\text{alg}} &= \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \sum_{k=1}^n \Psi_{i+1}^k + \sum_{g=1}^m \Phi_{i+1}^g} \\
8. \sigma_{i+1} &= D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1}) \\
9. \varepsilon_{i+1}^k &= \varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_i^k + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k, k = 1, 2, \dots, n \\
10. \varepsilon_{i+1}^{ve} &= \varepsilon_{i+1} - \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})}
\end{aligned}$$

Figura 23: Algoritmo de Integração de Tensões - Função Geral de Fluência.

Note-se que este algoritmo exige que ε^{ve} e ε^k , $k = 1, 2, \dots, n$, sejam armazenados em cada incremento i , isto é, $n+1$ variáveis. A FGF proposta não exige na integração de tensões o armazenamento de todas as variáveis computacionais que caracterizam o histórico de tensões em um determinado ponto do processamento, assim como permite a integração analítica das expressões envolvidas. O algoritmo mostrado acima é incondicionalmente estável, isto é, não colapsa quando $\Delta t \rightarrow \infty$, e sim fornece resultados exatos quando isto acontece, facilitando a integração de longo prazo. Além disso, não oferece problemas quando $\Delta t \rightarrow 0$, pois as singularidades são facilmente removeis por *Séries de Taylor*.

Observe-se que para a obtenção de Ψ_i^k , Ψ_{i+1}^k , Φ_i^g e Φ_{i+1}^g uma somatória de funções exponenciais deve ser computada, e dependendo da expressão da função de fluência a ser ajustada obtém-se poucos termos dessa somatória, isto é, com $n < 6$ e $m < 6$. O AIT da figura 23 resulta em uma relação linear entre σ_{i+1} e ε_{i+1} . Note-se que D_{i+1}^{alg} depende da função de fluência e, portanto, dos fatores ambientais, materiais e geométricos. D_{i+1}^{alg} , é óbvio, varia ao longo dos incrementos de tempo. No entanto, para um concreto submetido a um conjunto de fatores ambientais, ele não depende da posição na seção transversal, o que facilita algumas das integrações que serão mostradas e discutidas nos capítulos seguintes.

4.5.1. Ensaio de Carga e Descarga

Considere-se somente (4.57) com carga em t_0 e descarga em $t_d = t_0 + \delta$. A deformação para $t > t_d$ é dada por

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^c(t) &= \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) - \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right) \right] \\
 &\quad - \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\theta^k}} \right) - \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_d}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\vartheta^g}} \right) \right] \\
 &= \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k \left(e^{-\frac{t-t_d}{\theta^k}} - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g \left(e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right) - e^{-\frac{\zeta_d}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_d}{\vartheta^g}} \right) \right) \right] \quad (4.66) \\
 &= \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \left(e^{\frac{\delta}{\theta^k}} - 1 \right) + \sum_{g=1}^m B^g \left(e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} - e^{-\frac{\zeta_d}{\vartheta^g}} \right) \right] \\
 &= \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \left(e^{\frac{\delta}{\theta^k}} - 1 \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\vartheta^g}} \right) \right]
 \end{aligned}$$

Logo, para $t = t_d^+$ e para $t \rightarrow \infty$, obtém-se

$$\begin{aligned}
 \varepsilon^c(t_d^+) &= \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\vartheta^g}} \right) \right] \quad \text{e} \\
 \varepsilon^c(\infty) &= \sigma_0 \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\vartheta^g}} \right) \quad (4.67)
 \end{aligned}$$

Note-se que o termo para $\varepsilon^c(\infty)$ representa a fluência irreversível. Lembre-se também que a deformação viscosa irreversível decresce com a idade do concreto por ocasião do carregamento t_d e cresce com o tempo de carregamento $t_d - t_0 = \zeta_d - \zeta_0$. Finalmente, a deformação viscosa reversível ao longo do tempo pode ser definida por

$$\varepsilon^r(t) = \sigma_0 \left[\sum_{k=1}^n A^k e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \left(e^{\frac{\delta}{\theta^k}} - 1 \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\delta}{\vartheta^g}} \right) \right] - \varepsilon^i(t) \quad (4.68)$$

onde $\varepsilon^i(t)$ é a deformação viscosa irreversível ao longo do tempo definida por

$$\varepsilon^i(t) = \sigma_0 \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right) \quad (4.69)$$

4.6. Proposta de uma Função Simplificada de Fluência

Propõe-se agora uma simplificação da FGF dada por (4.59), chamada de *Função Simplificada de Fluência* (FSF), na qual se combina somente um único elemento da *Cadeia Generalizada em Série de Kelvin-Voigt* com um elemento da parte viscosa da *Cadeia Generalizada em Série de Funções de Dischinger* dada por

$$J(\zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^e(\zeta)} + A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) + B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right) \quad (4.70)$$

$$\begin{aligned}
1. \sigma_i &= E^e(\zeta_i)(\varepsilon_i - \varepsilon_i^s - \varepsilon_i^{ve}) \\
2. \Psi_i^k &= A^k \left(\left(1 + \frac{\theta^k}{\Delta t} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} \right) - 1 \right) \\
3. \Psi_{i+1}^k &= A^k \left(1 - \frac{\theta^k}{\Delta t} \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} \right) \right) \\
4. \Phi_i^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\vartheta^g}} \left(\left(1 - \frac{\vartheta^g}{\Delta t} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\vartheta^g}} \right) \right) \\
5. \Phi_{i+1}^g &= B^g e^{-\frac{t_i - t_c}{\vartheta^g}} \left(\left(1 - \frac{\vartheta^g}{\Delta t} \right) \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\vartheta^g}} \right) - 1 \right) \\
6. \alpha_{i+1} &= \varepsilon_i - \varepsilon_i^k \left(1 - e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} \right) + \sigma_i \left(\Psi_i^k + \Phi_i^g - \frac{1}{E^e(\zeta_i)} \right) \\
7. D_{i+1}^{\text{alg}} &= \frac{1}{\frac{1}{E^e(\zeta_{i+1})} + \Psi_{i+1}^k + \Phi_{i+1}^g} \\
8. \sigma_{i+1} &= D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1}) \\
9. \varepsilon_{i+1}^k &= \varepsilon_i^k e^{-\frac{\Delta t}{\theta^k}} + \sigma_i \Psi_i^k + \sigma_{i+1} \Psi_{i+1}^k \\
10. \varepsilon_{i+1}^{ve} &= \varepsilon_{i+1} - \frac{\sigma_{i+1}}{E^e(\zeta_{i+1})}
\end{aligned}$$

Figura 24: AIT - Função Simplificada de Fluência (FSF).

Note-se a simplicidade de (4.70) que computa: a) a contribuição para a parcela de deformação imediata¹⁰ alterando-se ao longo do tempo; b) a contribuição para as parcelas de deformação viscosa, tanto a reversível, quanto a irreversível. Perceba também, que o AIT da FSF exige que ε^{ve} e ε_i^k sejam armazenados em cada incremento i , porém, o histórico de tensões não precisa ter todas as suas variáveis armazenadas computacionalmente. α_{i+1} trabalha como uma espécie de deformação inicial e depende da função de fluência J , de ε_i^k e de σ_i . Note-se também que α_{i+1} , ao contrário de D_{i+1}^{alg} , depende da posição na seção transversal através de ε_i^k e σ_i . Entretanto, para um mesmo concreto submetido a um conjunto de fatores ambientais, ele tem a mesma distribuição de σ , isto é, α_{i+1} tem uma distribuição linear, o que facilita as integrações de (7.14).

Observe-se que a FSF proposta exige baixo custo computacional e permite a integração analítica das suas expressões. O algoritmo mostrado acima é incondicionalmente estável, isto é, não colapsa quando $\Delta t \rightarrow \infty$, e sim fornece resultados exatos quando isto acontece, facilitando a integração de longo prazo. Além disso, não oferece problemas de singularidades¹¹ quando $\Delta t \rightarrow 0$.

¹⁰ Observe que este termo é consistentemente bem definido, pois apenas ele contribui com deformações imediatas.

¹¹ SANTOS[41] mostra que as singularidades são facilmente removíveis por Séries de Taylor, e resultados mostram que a metodologia abordada aqui, além de permitir uma análise consistente, facilita também às tarefas de calibração e retro-análise.

4.6.1. Calibração com a NBR 6118:2003

Seja a parcela viscosa da função de fluência adotada como referência dada por $C^{ref}(\zeta_0, t - t_0)$ retirada da NBR 6118:2003, e com a qual se deseja calibrar a parcela viscosa de (4.70). É importante destacar que a função expressa como função de referência C^{ref} pode ser uma função obtida experimentalmente ou prescrita por alguma norma técnica. E para parcela de deformação imediata de (4.70), pode-se utilizar a mesma adotada pela NBR 6118:2003.

No capítulo 5 será discutido e exemplificado um procedimento simplificado para calibração da função de fluência proposta com a função de fluência da NBR 6118:2003. No entanto, para o entendimento e discussão dos resultados apresentados doravante, utilizou-se um método simples baseado no *Método da Colocação*, que evita integrações complexas, problemas de minimização trabalhosos, e que tem dado bons resultados. Conforme se verifica em SANTOS[41] e em SANTOS e PIMENTA[44].

Resumidamente, uma das formas de calibração consiste em adotar-se, a priori, valores para θ^k e ϑ^g e utilizar 2 pares (ζ_r, ξ_r) , $r = 1, 2$, como pontos de colocação. Fazendo-se

$$A \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta^k}} \right) + B e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \right) = F(\zeta_r) f(\xi_r) = C(\zeta_0, t - t_0)_r, \quad r = 1, 2. \quad (4.71)$$

obtem-se um sistema de 2 equações lineares nas 2 incógnitas A e B . Este sistema pode ser expresso por

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{\xi_1}{\theta^k}} & e^{-\frac{\xi_1}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_1}{\vartheta^g}} \right) \\ 1 - e^{-\frac{\xi_2}{\theta^k}} & e^{-\frac{\xi_2}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_2}{\vartheta^g}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\zeta_1) f(\xi_1) \\ F(\zeta_2) f(\xi_2) \end{bmatrix}. \quad (4.72)$$

Para exemplificar a força da metodologia aqui exposta considere-se os parâmetros da tabela 8 para obtenção e ajuste da FSF com a função de fluência da NBR 6118. No entanto, antes de mostrar os resultados de calibração, perceba na figura 25-a a recomendação da norma NBR 6118:2003.

“para diversos instantes de carregamento inicial, porém, para um mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível em função do tempo, correspondente a diferentes idades do concreto no momento de carregamento, são obtidas, umas em relação a outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações.”

Tabela 8: Parâmetros para obtenção e calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118.

Parâmetros		
$\alpha = 2 ; s = 2$ (CP II)	$T_{med} = 25^0\text{C}$	$U = 75 \%$
$f_{ck} = 30 \text{ MPa}$	$u_{ar} = 7,380 \text{ m}$	$h_{fic} = 0,621929718$
$t_c = 7 \text{ dias}$	$t_0 = 56 \text{ dias}$	$t_d = 1000 \text{ dias}$
$t_\infty = 10000 \text{ dias}$	$\zeta_0 = 114 \text{ dias}$	$\zeta_\infty = 23317 \text{ dias}$
$\gamma = 1,740818221$	$A_c = 1,3183 \text{ m}^2$	slump test = 10 cm

Realmente, a segunda parcela de (3.17) é uma aproximação por funções racionais complicadas da função de DISCHINGER[16], dada por (3.19). Contudo, seria mais vantajoso trabalhar com uma função exponencial durante o processo de integração da função de fluência. Pois integrais de funções exponenciais conforme as de DISCHINGER[16], resultam nas mesmas funções exponenciais.

Figura 25: Parcelas de deformação irreversível (φ^f e φ^a) da função de fluência da NBR 6118

Outro fato relevante, é que esta norma apresenta uma parcela de deformação rápida irreversível. Lembrando-se dos conceitos de mecânica dos sólidos, se ela é rápida então ela deve ser computada na deformação imediata, e se ela é irreversível então é plástica. Esse fato vem historicamente sendo repetido, porque na época em que DISCHINGER[16] resolveu a equação diferencial da deformação lenta, ainda não se sabia que uma parte da mesma não provém de uma deformação plástica, mas sim de uma deformação elástica retardada. Essa parcela deve ser considerada na deformação elástica. Segundo esta metodologia ela é consistentemente computada na parcela de deformação elástica com envelhecimento do módulo de elasticidade.

Como primeiros resultados desta calibração, têm-se:

Figura 26: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a função de fluência da NBR 6118.

Note-se que pela NBR 6118:2003 a parcela de deformação lenta reversível não começa do zero, pois quando $\zeta = \zeta_0$ já existe um valor para $\beta_d(t = t_0) = 20/70$, ou seja, o coeficiente φ_d já começa com um valor de 0,1143. No entanto, percebe-se a boa calibração da FSF para as duas parcelas de deformação (figura 27).

Figura 27: Calibração da FSF segundo a função de fluência da NBR-6118.

Note-se também, os bons ajustes para uma duração de carregamento de 10.000 dias e 1.000 dias indicados na figura 27. A calibração pode ser considerada muito boa, mesmo para idades jovens do concreto. Em nossas aplicações temos utilizado pesos que ajudam a minorar o efeito de más medidas experimentais ou a majorar medidas experimentais consideradas mais relevantes. Medidas experimentais são também filtradas de modo a se extrair o comportamento oscilatório muitas vezes registrado.

Os algoritmos de integração de tensão apresentados no presente capítulo têm grande importância na metodologia abordada nesta tese, pois permitem aproximar qualquer função de fluência determinada empiricamente ou dada por normas (ou códigos). Um destaque especial deve ser dado a FSF, pois seu AIT não exige o armazenamento computacional de todas as variáveis envolvidas no histórico de tensões em um determinado ponto.

Observe-se que para a FSF a integração de tensões em um incremento de tempo depende apenas do conhecimento de parâmetros do início do incremento. Isto é crucial para uma análise eficiente de estruturas de concreto, caso contrário, as necessidades de armazenamento computacional das variáveis internas (do histórico de carregamento) ficariam incontroláveis durante a análise através do MEF com se analisará no capítulo 7 e no capítulo 8.

Convém destacar a relevante interferência que a FSF proporciona não só na análise estrutural ao longo do tempo, mas também no processo de calibração com a função da NBR 6118:2003, como será discutido no próximo capítulo.

Capítulo 5

Calibração da função de fluência proposta

Tanto no Algoritmo de Integração de Tensões (AIT) ilustrado na figura 23, quanto no AIT da figura 24 mostram uma dependência de α_{i+1} , que representa uma espécie de deformação inicial da função de fluência J e de todos os estados de tensão $\{\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_i\}$ nos instantes anteriores a t_{i+1} . Este fato pode prejudicar imensamente a análise incremental, pois as necessidades de armazenamento de dados podem crescer de forma incontrolável, impossibilitando-a. Por isso, é desejável que a função de fluência permita um fácil controle do armazenamento de todo o histórico de tensões e que este não prejudique o algoritmo durante o processo computacional. Na verdade, esta é a função da variável α , que guarda todas as contribuições de deformações anteriores ao instante t_{i+1} .

Ainda no processo de integração, é desejável que a função de fluência seja analiticamente integrável, de forma a facilitar o cálculo das expressões na qual ela aparece. É esperado, também, que a função de fluência facilite a calibração com dados experimentais e com funções especificadas em normas, possibilitando, assim, tanto uma análise e retro-análise com estruturas instrumentadas, quanto a modelagem computacional para concretos jovens. Dentro de todo esse contexto, ainda espera-se que o AIT gere um código computacional de baixo custo de armazenamento e de fácil implementação.

Vale ressaltar, que a *Função Geral de Fluência* (FGF) realiza todas essas tarefas de forma muito eficiente. Contudo, uma simplificação desta função, também, permite a realização de todas essas tarefas sem perda significativa da eficiência, como será discutido a seguir.

É importante comentar que a FSF permite um fácil ajuste a dados experimentais ou com funções especificadas por normas ou códigos internacionais. Isto é bastante relevante tanto na análise, quanto na retro-análise de estruturas instrumentadas, ou até mesmo nos ensaios ou testes para modelagem de concretos jovens.

5.1. Método da Colocação

Considere a forma geral da função de fluência proposta, isto é, seja a FGF dada por (4.56) na qual a parcela elástica com envelhecimento de deformação tem a mesma interpretação das funções derivadas de modelos viscoelásticos. Lembre-se, que a FGF é escrita como

$$J(\zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^e(\zeta)} + \sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right), \quad (5.1)$$

que exige a determinação de $2(n + m)$ parâmetros, A^k , B^g , θ^k , $k = 1, 2, \dots, n$ e ϑ^g , $g = 1, 2, \dots, m$, além da função $E^e(\zeta)$.

Funções de fluência expressas em série, como acima, facilitam a integração de tensões com um mínimo de variáveis armazenadas, e permitem a calibração com dados experimentais e retro-análises com leituras obtidas em estruturas reais. Ressalta-se ainda que termos com θ e ϑ pequenos possibilitam a modelagem da fluência para concretos jovens, o que é importante nos projetos atuais, nos quais a protensão tem sido efetuada em pequenas idades do concreto. Termos com θ e ϑ maiores possibilitam a modelagem e previsão da fluência ao longo do tempo.

Como já discutido, percebe-se que a fluência dada por primeira parcela depois da igualdade de (5.1) é totalmente reversível ao passo que a fluência expressa pela segunda parcela é parcialmente irreversível. Note-se, ainda, que quando se adota $n = m$ e $\theta^k = \vartheta^g$, (5.1) simplifica-se para

$$J(\zeta, \zeta_0, t - t_0) = \frac{1}{E^e(\zeta)} + \sum_{k=1}^n \left(A^k + B^k e^{-\frac{\zeta_0}{\theta^k}} \right) \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right), \quad (5.2)$$

que exige a determinação de apenas $3n$ parâmetros. Quando os parâmetros temporais θ^k , $k = 1, 2, \dots, n$ são fixados *a priori*, a equação (5.2) exige a determinação somente de $2n$ parâmetros.

Portanto, considere somente a parcela viscosa da função de fluência adotada como referência dada por

$$C^{ref}(\zeta_0, t - t_0), \quad (5.3)$$

retirada da NBR 6118:2003, e com a qual se deseja calibrar a parcela viscosa de (5.1), ou seja,

$$C(\zeta_0, t - t_0) = \sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\zeta_0}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\vartheta^g}} \right). \quad (5.4)$$

Lembre-se, também, que (5.4) pode ser qualquer função obtida experimentalmente ou prescrita por alguma norma técnica, ou até mesmo dados experimentais ou curvas de tendências retiradas de normas técnicas como as do CEB ou de ensaios instrumentados.

Agora, para a parte imediata, qualquer função pode ser utilizada, sem consequências para a análise incremental, e, por isso, não se descreve aqui a sua calibração. No entanto, neste trabalho adota-se tanto para a calibração quanto para a simulação numérica a parcela de deformação imediata da NBR 6118:2003, já comentado anteriormente, com $E^e(\zeta)$ comportando-se segundo (3.12).

Por conseguinte, a calibração da FGF com funções *ad-hoc* ou empiricamente determinadas em um intervalo de tempo pode ser elaborada por diversos métodos. Um método bastante geral comumente usado é o Método dos Mínimos Quadrados. Aqui, entretanto, propõe-se um método bem simples de calibração baseado no *Método da Colocação* que evita integrações complexas, problemas de minimização trabalhosos e que tem dado bons resultados.

Uma das formas de calibração consiste em adotar-se, *a priori*, valores para n , m , $\theta^k (k = 1, 2, \dots, n)$ e $\vartheta^g (g = 1, 2, \dots, m)$; e utilizar $n + m$ pares (ζ_r, ξ_r) , $r = 1, 2, \dots, n + m$, como pontos de colocação. Portanto, fazendo-se

$$\sum_{k=1}^n A^k \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta^k}} \right) + \sum_{g=1}^m B^g e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \right) = F(\zeta_r) f(\xi_r), \quad (5.5)$$

obtem-se um sistema de $n + m$ equações lineares nas $n + m$ incógnitas $A^k (k = 1, 2, \dots, n)$, e $B^g (g = 1, 2, \dots, m)$. Este sistema pode ser expresso por

$$\begin{bmatrix} a_1^1 & \cdots & a_1^n & b_1^1 & \cdots & b_1^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n^1 & \cdots & a_n^n & b_n^1 & \cdots & b_n^m \\ a_{n+1}^1 & \cdots & a_{n+1}^n & b_{n+1}^1 & \cdots & b_{n+1}^m \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n+m}^1 & \cdots & a_{n+m}^n & b_{n+m}^1 & \cdots & b_{n+m}^m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A^1 \\ \vdots \\ A^n \\ B^1 \\ \vdots \\ B^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \\ c_{n+1} \\ \vdots \\ c_{n+m} \end{bmatrix} \quad (5.6)$$

onde $\begin{cases} a_r^k = 1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta^k}} \\ b_r^g = e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \right) \\ c_r = F(\zeta_r) f(\xi_r) \end{cases}, \quad \text{com} \quad \begin{cases} k = 1, 2, \dots, n \\ g = 1, 2, \dots, m \\ r = 1, 2, \dots, n + m \end{cases}$

Quando $n = m$ e os parâmetros $\theta^k, k = 1, 2, \dots, n$ são fixados *a priori*, (5.5) se reduz a

$$\sum_{k=1}^n \left(A^k + B^k e^{-\frac{\zeta_0}{\theta^k}} \right) \left(1 - e^{-\frac{t-t_0}{\theta^k}} \right) = F(\zeta_r) f(\xi_r), \quad (5.7)$$

que exige a determinação somente de $2n$ parâmetros. Esta expressão foi proposta e usada pela primeira vez por PIMENTA e SANTOS[38] tendo sido profundamente discutida e defendida na dissertação de mestrado do autor(SANTOS[41]).

Considere-se agora, a Função Simplificada de Fluência (FSF) analisada no capítulo anterior e expressa por (4.70). Note-se que esta função resulta em $n = m = 1$, portanto, novamente para a calibração segundo os critérios da NBR 6118:2003 adota-se, *a priori*, valores para θ^k e ϑ^g ; e utilizam-se 2 pares (ζ_r, ξ_r) , $r = 1, 2$, como pontos de colocação, resultando em

$$A \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta^k}} \right) + B e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\vartheta^g}} \right) = F(\zeta_r) f(\xi_r) = C(\zeta_0, t - t_0)_r, \quad r = 1, 2, \quad (5.8)$$

com a qual se obtém um sistema de 2 equações lineares nas 2 incógnitas A e B . Este sistema pode ser expresso por

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{\xi_1}{\theta^k}} & e^{-\frac{\xi_1}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_1}{\vartheta^g}} \right) \\ 1 - e^{-\frac{\xi_2}{\theta^k}} & e^{-\frac{\xi_2}{\vartheta^g}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_2}{\vartheta^g}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F(\xi_1) f(\xi_1) \\ F(\xi_2) f(\xi_2) \end{bmatrix}. \quad (5.9)$$

Vale ressaltar que os valores dos pontos de colocação da função de referência $C^{ref}(\zeta_0, t - t_0)_r = F(\zeta_r) f(\xi_r)$, $r = 1, 2$ devem ser escolhidos de modo a suavizar as oscilações comumente observadas em leituras reais caso esses dados sejam experimentais, ou que melhor calibrem a expressão em (5.8) com as funções das normas técnicas. Ainda, no caso de dados experimentais, SANTOS[41] propõe pesos que ajudam a minorar o efeito de más medidas experimentais ou a majorar medidas experimentais consideradas mais relevantes, e sugere, que nas aplicações, estes dados sejam também filtrados de modo a se extrair o comportamento oscilatório muitas vezes registrado.

É importante comentar que nas calibrações de (5.5), (5.7) e (5.9) é considerada a hipótese do concreto ser homogêneo, no que diz respeito à equação constitutiva da fluência. Consequentemente, caso haja diferentes materiais a serem considerados em instantes distintos, ou seja, mais de um tipo de concreto ou concretos com idades diferentes, deve-se arbitrar para cada tipo de concreto os parâmetros A_r^k , $k = 1, 2, \dots, n$ e B_r^g , $g = 1, 2, \dots, m$, com $r = 1, 2, \dots, n_c$, onde n_c é o número de diferentes materiais considerados (diferentes concretos). Neste caso o sistema de equações lineares a ser solucionado terá $n_c(n + m)$ incógnitas a serem determinadas.

Para as aplicações a seguir, o *Método da Colocação* é um método considerado tão simples quanto eficaz, e que tem dado bons resultados. Justifica-se o emprego deste método, por evitar integrações árduas, problemas de minimização trabalhosos, curvas de tendências complexas, como o apresentado por outros métodos de calibração. Uma tentativa de buscar representações ótimas para estas calibrações já foi realizada no trabalho de mestrado de PINTO[39], no qual foram realizadas aplicações dos Algoritmos Genéticos (AGs) na calibração de uma função de fluência e na retro-análise de uma estrutura de concreto.

5.2. Exemplos de Calibração

Antes de mostrar os resultados de calibração, considere-se o seguinte procedimento que será utilizado em todos os passos de calibração apresentados doravante. Seja a parcela referente ao coeficiente de deformação lenta reversível

$$C_d^{ref} = \varphi^d(t) = \varphi_\infty^d \beta^d (\zeta - \zeta_0) = 0,4 \left(\frac{\zeta - \zeta_0 + 20}{\zeta - \zeta_0 + 70} \right), \quad (5.10)$$

com a qual se deseja calibrar a respectiva parcela de (5.8). Logo, tem-se

$$A \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta_1}} \right) = C_d^{ref}, \quad \text{logo} \quad A \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta_1}} \right) = 0,4 \left(\frac{\zeta - \zeta_0 + 20}{\zeta - \zeta_0 + 70} \right). \quad (5.11)$$

Deve-se agora, arbitrar um valor para θ_1 ¹². Um intervalo que tem dado bons resultados é

$$\left(0,4 \frac{20}{70} \right) 1000 \leq \theta_1 \leq \left(0,4 \frac{20}{70} \right) 2000, \quad (5.12)$$

desta forma, facilmente deduz-se o ponto de colocação quando $t \rightarrow t_\infty$ por

$$A = \frac{C_d^{ref}(\zeta_\infty)}{1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta_1}}}. \quad (5.13)$$

onde ζ_∞ é o valor da idade do concreto no maior instante de tempo a ser considerado na calibração, ou seja, supondo a idade do concreto quando $t \rightarrow t_\infty$.

Resta agora, determinar o valor de B em (5.9). Para tanto, realiza-se um processo análogo à determinação de A , que se levando em conta a parcela referente ao coeficiente de deformação lenta irreversível

$$C_f^{ref} = \varphi^f(t) = b^{1c} (4,45 - 0,035U) \frac{0,42 + h^{fict}}{0,20 + h^{fict}} \left(\frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D} - \frac{t_0^2 + At_0 + B}{t_0^2 + Ct_0 + D} \right), \quad (5.14)$$

com a qual se deseja calibrar a respectiva parcela de (5.8), obtém-se

$$C_f^{ref} = B e^{-\frac{\xi_r}{\theta_2}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_r}{\theta_3}} \right). \quad (5.15)$$

Assim, sugere-se que

$$\theta_2 = \frac{-\zeta_0}{\ln(\beta_f(\zeta_0))} \quad \text{e} \quad \theta_3 = 3000 \cdot \left(e^{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{h^{fict}}} \right)} + \frac{\varphi_{2c}}{1000} \right) \cdot (k_2 \cdot \theta_2), \quad (5.16)$$

onde $0,3 \leq k_2 \leq 0,7$ tem gerado bons intervalos de calibração. Logo, desta forma, facilmente, deduz-se o segundo ponto de colocação quando $t \rightarrow t_\infty$ por

$$B = \frac{C_f^{ref}(\zeta_\infty)}{e^{-\frac{\zeta_0}{\theta_2}} \left(1 - e^{-\frac{\zeta - \zeta_0}{\theta_3}} \right)}. \quad (5.17)$$

Embora este procedimento não tenha se utilizado da resolução do sistema de equações lineares em (5.9), ele se faz necessário neste momento, pois ainda não foi computada no coeficiente de deformação por fluência, a parcela devido à fluência rápida $\varphi^a(\zeta_0)$. E como esta parcela também é irreversível, sugere-se que se atualize o coeficiente B , levando-se em consideração o valor de $\varphi^a(\zeta_0)$, que agora deve ser computado no sistema em (5.9).

¹² Para não se confundir índices com potências nas próximas variáveis θ , adota-se, aqui e doravante, para estas variáveis subscritos no lugar de sobrescritos.

Vários pontos de colocação podem ser escolhidos como pontos de referência, contudo, neste trabalho escolhem-se, para efeito de calibração, os pontos extremos do intervalo $[\zeta_0, \zeta_\infty]$. Essa escolha tem gerado bons resultados de calibração. Portanto, com a ajuda de

$$C_a^{ref} = 0,8 \left(1 - e^{-s\sqrt{\frac{28}{\zeta_0}}} \right), \quad (5.18)$$

atualiza-se (5.9), que se reescreve como

$$\begin{bmatrix} 1 - e^{-\frac{\xi_1}{\theta_1}} & e^{-\frac{\xi_1}{\theta_2}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_1}{\theta_3}} \right) \\ 1 - e^{-\frac{\xi_2}{\theta_1}} & e^{-\frac{\xi_2}{\theta_2}} \left(1 - e^{-\frac{\xi_2}{\theta_3}} \right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^{ref}(\zeta_0) \\ C^{ref}(\zeta_\infty) \end{bmatrix}, \quad (5.19)$$

agora com

$$C_f^{ref} = \varphi^a(t) + \varphi^f(t) + \varphi^d(t). \quad (5.20)$$

Partindo-se da hipótese de que A seja conhecido por (5.13), pois é desejável que a parcela de deformação lenta reversível já calibrada, não sofra mais alterações, determina-se facilmente o novo valor de B através de (5.19).

5.2.1. Exemplo 1 - ISHITANI[25]

Considere-se a seção transversal da figura 28 e os parâmetros para obtenção da função de fluência segundo a NBR 6118:2003 mostrados na tabela 9. Os cálculos para previsão da fluência, ou seja, da equação de fluência da norma são baseados conforme foi analisado no capítulo 2, e a calibração segundo os procedimentos apresentados anteriormente.

Figura 28: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - ISHITANI[25].

Este exemplo de determinação da função de fluência da NBR 6118:2003 foi retirado de ISHITANI[25], e também se encontra em SANTOS[41]. Observa-se nesta última obra, uma excelente calibração com as funções, praticamente, sobrepostas uma a outra, na qual se utilizou $m = n = 7$

parâmetros com $\theta^k = \vartheta^k = 5.10^{k-3}$, $k = 1, \dots, 7$, na FGF proposta por PIMENTA e SANTOS[38] e aqui representada pela expressão (5.2).

Tabela 9: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - ISHITANI[25].

Área da seção de concreto (Ac)	1,3183	[m²]
Perímetro em contato com o ar (uar)	7,3801	[m]
Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]
Temperatura média (Tmed)	20	[°C]
Abatimento (Slump Test)		
0 - 4 → Cc1=0,75	Cc1 =	
5 - 9 → Cc1=1,00		1,00
10-15 → Cc1=1,25		
Tipo de Cimento		
1 - CP III e CP IV (endurecimento lento)	1	
2 - CP I e CP II (endurecimento normal)		
3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)		
CP III ; CP IV → α=1; s=0,38	α=	1
CP I ; CP II → α=2; s=0,25		
CP V-ARI → α=3; s=0,20		0,38
Instante de concretagem (tc)	7	[dias]
Instante de carregamento (to)	35	[dias]
Instante de descarregamento (td)	1000	[dias]
Tempo (duração) de indefinição (di)	3	[dias]
Instante final a ser considerado (t∞)	10957	[dias]

Seguindo o procedimento descrito na seção anterior, com a ajuda das expressões (5.10) e (5.13), e admitindo-se

$$\theta_1 = \left(0,4 \frac{20}{70}\right) 1000 = 114,2857143 \quad (5.21)$$

para $\zeta_0 = 28$ dias, $\zeta_\infty = 10950$ dias e com o ponto de colocação em $\zeta = \zeta_\infty$, obtém-se

$$A = \frac{C_d^{ref}(\zeta_\infty)}{1 - e^{-\frac{\zeta_r}{\theta_1}}} = \frac{0,4 \left(\frac{\zeta - \zeta_0 + 20}{\zeta - \zeta_0 + 70} \right)}{1 - e^{-\frac{(\zeta - \zeta_0)}{\theta_1}}} = \frac{0,4 \left(\frac{10950 - 28 + 20}{10950 - 28 + 70} \right)}{1 - e^{-\frac{(10950 - 28)}{114,2857143}}} = 0,398180495. \quad (5.22)$$

Resta agora, determinar o valor de B . Para isso, com (5.14) e (5.15), e atribuindo-se

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{-28}{\ln(\beta_f(28))} = 24,86274228 \\ \theta_3 = 3000 \cdot \left(e^{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{0,517762354}}\right)} + \frac{1,3065}{1000} \right) \cdot (0,5 \cdot 24,86274228) = 1017,805237 \end{cases} \quad (5.23)$$

obtém-se facilmente o parâmetro

$$B = \frac{C_f^{ref}(\zeta_\infty)}{e^{-\frac{\zeta_0}{\theta_2}} \left(1 - e^{-\frac{\zeta - \zeta_0}{\theta_3}} \right)} = \frac{1,677348941}{e^{-\frac{28}{24,86274228}} \left(1 - e^{-\frac{(10950 - 28)}{1017,805237}} \right)} = 5,172827723. \quad (5.24)$$

Ainda assim, falta corrigir o parâmetro de calibração B pela consideração da parcela devida à fluência rápida $\varphi^a(\zeta_0)$, como descrito na seção anterior. Portanto, considerando agora o sistema de equações lineares em (5.19), tem-se

$$\begin{bmatrix} 0,217295462 & 0,010961310 \\ 1,000000000 & 0,324261705 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,252910873 \\ 2,320353572 \end{bmatrix}. \quad (5.25)$$

Logo, como já se conhece o valor de A , isto é, $A = 0,398180495$, então fica determinado o valor de B por qualquer uma das equações do sistema acima. Por exemplo, considere a 2ª equação, então

$$\begin{aligned} A + 0,324261705B &= 2,320353572 \\ 0,398180495 + 0,324261705B &= 2,320353572 \\ B &= \frac{2,320353572 - 0,398180495}{0,324261705} \\ B &= 5,92784485 \end{aligned} \quad (5.26)$$

Note-se ainda na 2ª equação de (5.25), o valor do ponto de colocação $C^{ref}(\zeta_\infty) = 2,320353572$ que se encontra totalmente de acordo com ISHITANI[25] e SANTOS[41].

Portanto, para a calibração da FSF, os parâmetros obtidos são mostrados na figura 29-a. Tanto a FSF, quanto a função de fluência da NBR 6118:2003 tida como função de referência estão ilustrados na figura 29-b. Observe-se a calibração da FSF, que pode ser considerada muito boa, mesmo para idades jovens do concreto.

Figura 29: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - ISHITANI[25].

Note-se ainda a calibração da parcela de deformação lenta reversível, que na NBR 6118:2003 não começa do zero, pois quando $\zeta = \zeta_0$ já existe um valor para $\beta_d(t = t_0) = 20/70$, ou seja, o coeficiente φ_d já começa com um valor de 0,1143, como foi discutido no final do capítulo 4. Mesmo assim há uma boa calibração desta parcela como mostra a figura 30-a, na qual a FSF calibrada inicia-se do zero.

Adicionalmente, mostra-se também o bom ajuste da parcela de deformação irreversível devido ao coeficiente φ^f , que também se inicia do zero. Este fato é muito importante na modelagem da

fluência para concretos jovens, o que é uma preocupação relevante nos projetos estruturais atuais, pois a protensão tem sido efetuada em pequenas idades do concreto.

Figura 30: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a NBR 6118 - ISHITANI[25].

5.2.2. Exemplo 2 - viga de perfil I

Considere-se a seção transversal da figura 31 e os parâmetros para obtenção da função de fluência segundo a NBR 6118:2003 mostrados na tabela 10. Os cálculos para previsão da fluência e para a calibração seguem o mesmo procedimento do exemplo anterior.

Figura 31: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - perfil I.

Note-se, que em relação ao problema anterior, mudou-se somente o tipo de cimento, que agora está sendo considerado de endurecimento normal. É obvio que as variáveis A_c (área da seção transversal de concreto) e u_{ar} (perímetro em contato com o ar, ou perímetro exposto, ou perímetro molhado) foram alteradas devido às características da seção transversal apresentadas na figura 31.

Portanto, considerando-se

$$\theta_1 = \left(0,4 \frac{20}{70}\right) 1500 = 171,4285714, \quad (5.27)$$

e para $t = 28$ e $t \rightarrow \infty$, isto é, $\zeta_0 = 56$ dias, $\zeta_\infty = 21900$ dias determina-se

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{-56}{\ln(\beta_f(56))} = 66,20854985 \\ \theta_3 = 3000 \cdot \left(e^{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{0,360948265}}\right)} + \frac{1,3922}{1000} \right) \cdot (0,7 \cdot 66,20854985) = 1083,464137 \end{cases} \quad (5.28)$$

Então, com os pontos de colocação $\zeta_1 = \zeta_0$ e $\zeta_2 = \zeta_\infty$, obtém-se

$$\begin{cases} A = \frac{0,4 \left(\frac{\zeta_\infty - \zeta_0 + 20}{\zeta_\infty - \zeta_0 + 70} \right)}{1 - e^{-\frac{(\zeta_\infty - \zeta_0)}{\theta_1}}} = \frac{0,4 \left(\frac{21900 - 56 + 20}{21900 - 56 + 70} \right)}{1 - e^{-\frac{(21900 - 56)}{171,4285714}}} = 0,399087341 \\ B = \frac{C_f^{ref}(\zeta_\infty)}{e^{-\frac{\zeta_0}{\theta_2}} \left(1 - e^{-\frac{\zeta_\infty - \zeta_0}{\theta_3}} \right)} = \frac{1,553667893}{e^{-\frac{56}{66,20854985}} \left(1 - e^{-\frac{(21900 - 56)}{1083,464137}} \right)} = 3,61984328 \end{cases} \quad (5.29)$$

Tabela 10: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - perfil I.

Área da seção de concreto (Ac)	0,6000	[m²]
Perímetro em contato com o ar (u _{ar})	4,8184	[m]
Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]
Temperatura média (T _{med})	20	[°C]
Abatimento (Slump Test)		
0 - 4 → Cc1=0,75	Cc1 =	
5 - 9 → Cc1=1,00		
10-15 → Cc1=1,25		
	1,00	[cm]
Tipo de Cimento		
1 - CP III e CP IV (endurecimento lento) 2 - CP I e CP II (endurecimento normal) 3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)	2	
CP III ; CP IV → α=1; s=0,38	α=	2
CP I ; CP II → α=2; s=0,25		
CP V-ARI → α=3; s=0,20		
	s=	0,25
Instante de concretagem (tc)	7	[dias]
Instante de carregamento (to)	35	[dias]
Instante de descarregamento (td)	1000	[dias]
Tempo (duração) de indefinição (di)	3	[dias]
Instante final a ser considerado (t∞)	10957	[dias]

Porém, ainda assim, corrigindo o parâmetro de calibração B pela consideração da parcela devida à fluência rápida $\varphi^a(\zeta_0)$, obtém-se

$$\begin{bmatrix} 0,278675856 & 0,013643511 \\ 1,000000000 & 0,429208608 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,129626492 \\ 2,078970270 \end{bmatrix} \quad (5.30)$$

Logo, partindo-se do princípio de que A seja conhecido por (5.29), então fica determinado o valor de B por qualquer uma das equações do sistema acima. Assim, considerando-se a 2ª equação de (5.30), chega-se em

$$\begin{cases} A = 0,399087341 \\ B = 3,913907827 \end{cases} \quad (5.31)$$

Por conseguinte, obteve-se como resultado os parâmetros mostrados figura 32-a para a calibração da FSF que é mostrada juntamente com a função de fluência da NBR 6118:2003, ilustrada na figura 32-b. A calibração da FSF, que pode ser considerada muito boa, mesmo para idades jovens do concreto e que a curva na figura 32-b tende assintoticamente para um valor limite próximo a $C^{ref}(\zeta_{\infty}) = 2,078970270$.

Figura 32: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - perfil I.

Note-se ainda a boa calibração tanto da parcela de deformação lenta reversível, quanto à parcela de deformação lenta irreversível da FSF com as respectivas parcelas da função de fluência da NBR 6118:2003 ilustradas na figura 33-a e na figura 33-b, respectivamente.

Figura 33: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a NBR 6118 - perfil I.

5.2.3. Exemplo 3 - viga com laje de colaboração

Considere-se a seção transversal da figura 34 e os parâmetros para obtenção da função de fluência segundo a NBR 6118:2003 mostrados na tabela 11. Observe-se que esta seção é típica de uma seção transversal de viga de ponte em grelha, onde a viga de concreto protendido de perfil I recebe uma contribuição de uma laje de colaboração de concreto armado.

Para a previsão da fluência segundo a NBR 6118:2003, suponha que todo o concreto seja homogêneo na seção transversal, ou seja, o mesmo concreto com a mesma idade sendo utilizado tanto

na viga de perfil I, quanto na laje de colaboração, conforme ilustrado na figura 34. Este problema é análogo ao do exemplo 1.

Figura 34: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - viga e laje.

Novamente pode-se perceber que houve alterações nas variáveis A_c e u_{ar} devido às características da seção transversal, apresentadas na figura 34.

Tabela 11: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - viga e laje.

Área da seção de concreto (Ac)	1,1200	[m²]
Perímetro em contato com o ar (u _{ar})	6,4384	[m]
Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]
Temperatura média (Tmed)	20	[°C]
Abatimento (Slump Test)		
0 - 4 → Cc1=0,75	Cc1 =	
5 - 9 → Cc1=1,00		1,00
10-15 → Cc1=1,25		
Tipo de Cimento		
1 - CP III e CP IV (endurecimento lento) 2 - CP I e CP II (endurecimento normal) 3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)	2	
CP III ; CP IV → α=1; s=0,38	α= s=	2
CP I ; CP II → α=2; s=0,25		
CP V-ARI → α=3; s=0,20		0,25
Instante de concretagem (tc)	0	[dias]
Instante de carregamento (to)	28	[dias]
Instante de descarregamento (td)	1000	[dias]
Tempo (duração) de indefinição (di)	3	[dias]
Instante final a ser considerado (t∞)	10957	[dias]

Logo, seguindo o procedimento apresentado neste capítulo, e levando-se em conta

$$\theta_1 = \left(0,4 \frac{20}{70}\right) 1200 = 137,1428571, \quad (5.32)$$

e para $t = 28$ e $t \rightarrow \infty$, isto é, $\zeta_0 = 56$ dias, $\zeta_\infty = 21900$ dias determina-se

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{-56}{\ln(\beta_f(56))} = 61,43342146 \\ \theta_3 = 3000 \cdot \left(e^{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{0,504239344}}\right)} + \frac{1,3124}{1000} \right) \cdot (0,6 \cdot 61,43342146) = 1199,01781 \end{cases} \quad (5.33)$$

Então, com os pontos de colocação $\zeta_1 = \zeta_0$ e $\zeta_2 = \zeta_\infty$, e já corrigindo o parâmetro de calibração B , obtém-se

$$\begin{cases} A = 0,399087341 \\ B = 4,107021213 \end{cases} \quad (5.34)$$

Portanto, os parâmetros mostrados na figura 35-a permitem uma boa calibração da FSF como ilustrado na figura 35-b.

Figura 35: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - viga e laje.

Note-se ainda que tanto a parcela de deformação lenta reversível, quanto a parcela de deformação lenta irreversível da FSF apresentam uma boa calibração com as respectivas parcelas da função de fluência da NBR 6118:2003 como ilustrado na figura 36-a e na figura 36-b, respectivamente.

Figura 36: Calibração das parcelas viscoelásticas da FSF com a NBR 6118 - viga e laje.

5.2.4. Exemplo 4 - viga com laje de colaboração em duas etapas

Suponha uma viga construída em duas etapas. Na primeira etapa, a viga de concreto tem como seção transversal o perfil I (figura 37-b), e na segunda etapa, a viga tem uma laje de colaboração (figura 37-a). A consolidação estrutural das duas seções está representada na figura 37-c. Todavia, mesmo levando-se em conta os mesmos parâmetros ambientais e tipo de cimento, na etapa 2 há o aparecimento de dois concretos diferentes, pois eles vão ter idades distintas.

Note-se que na etapa 1, o problema é semelhante ao do 5.2.2. e na etapa 2 ao problema 5.2.3. contudo pode-se dizer que este modelo é mais realista que os outros dois anteriores, pois será considerado dois tipos de concreto, como se discutirá a seguir.

Figura 37: Seção transversal usada para calibração dos índices de fluência - 2 etapas.

Considere-se o tempo $t_0 = 0$ como o tempo inicial, e suponha que a viga seja concretada em $t_1 = 3$ dias e solicitada em $t_2 = 10$ dias, portanto, a idade do concreto neste momento é de $\zeta_c = 10 - 3 = 7$ dias. No instante $t_3 = 31$ dias a viga recebe a concretagem da laje de colaboração, que neste momento só atua como “peso morto”. Porém, imagine que após 3 dias subsequentes, ou seja, quando $t = 34$ dias a laje passe a contribuir com a resistência da estrutura consolidada. Assim, em $t = 34$ dias a laje tem a idade de $\zeta_c^{laje} = 3$ dias, ao passo que a viga tem idade de $\zeta_c^{viga} = 34 - 3 = 31$ dias, ou seja, a estrutura em certo momento passa a ter dois concretos diferentes, caracterizando uma seção transversal heterogênea.

Então, qual seria a previsão da fluência para este modelo? Para tanto, imagine-se o histórico de carregamento mostrado na figura 38-a com duas etapas de carregamento, e a previsão “aproximada” da fluência ilustrada na figura 38-b. Para problemas práticos, é conveniente admitir somente uma equação de fluência nas duas etapas como na figura 38-b. Note-se que imediatamente após a aplicação do carregamento em $t_2 = 10$ dias é observada uma deformação imediata indicada por ε_1^e . Entretanto, a deformação total, ao longo do tempo, cresce de forma exponencial para esse único carregamento constante até $t_3 = 31$ dias, quando devido à aplicação de outro carregamento constante no tempo

(laje de colaboração) há um aparecimento de uma segunda deformação imediata, aqui, denotada por ε_2^e . Observe-se que a deformação total continua crescendo de forma exponencial tendendo assintoticamente para ε_∞ quando $t \rightarrow \infty$.

Figura 38: Histórico de carregamento e previsão aproximada da fluência para 2 etapas.

Para um mesmo concreto na seção transversal, ou seja, admitindo-se uma seção transversal homogênea como mostrado na figura 34 (página 66) é válida essa hipótese. Note-se que após a aplicação do segundo carregamento, há um deslocamento paralelo ao eixo dos tempos da função de fluência, ou seja, se houvesse um único carregamento a evolução das deformações seguiriam a linha traço-ponto após $t_3 = 31$. Porém, como houve outro carregamento neste momento, houve um salto correspondente a ε_2^e e um deslocamento da função de fluência (linha contínua). Vale ressaltar que esse procedimento é muito comum entre os engenheiros estruturais, e o exemplo de ISHITANI[25], apresentado na seção 5.2.1. (página 60) poderia ter sido calculado desta maneira. Lembre-se que esses fatos já foram discutidos anteriormente no capítulo 2, no capítulo 3 e no capítulo 4.

Portanto, a calibração da FSF deveria seguir os mesmos procedimentos da seção 5.2.3. resultando como função de fluência o gráfico mostrado na figura 35-b (página 67), diferenciada somente por uma característica essencial, haveria um trecho de descontinuidade para $t_3 = 31$ dias.

Considere-se agora a etapa construtiva descrita no início desta seção. Lembre-se que tanto o concreto da viga, quanto o concreto da laje de colaboração têm as mesmas características de composição, no entanto, ao longo do tempo, vão apresentar idades diferentes, pois o concreto da viga será sempre mais velho que o concreto da laje. Então como fazer a previsão de fluência quando se deseja considerar, em um determinado momento, concretos diferentes na mesma seção transversal? A resposta a essa pergunta será delineada e justificada a seguir, porém vale ressaltar que esta abordagem já foi introduzida no capítulo 3 e no capítulo 4, e ainda será discutida novamente no capítulo 7.

Supondo-se que em certo momento a seção transversal seja heterogênea, como mostrado na figura 37-c (página 68). Admite-se para cada tipo de concreto uma função distinta de fluência, ou seja, a viga terá uma função de fluência e a laje de colaboração terá outra função de fluência como ilustrado na figura 39. Portanto, neste caso, para a viga há um aparecimento de descontinuidade da função de fluência semelhante ao descrito anteriormente, ao passo que na laje não há. Logo, deve-se calibrar a FSF para os dois casos como segue.

Figura 39: Histórico de carregamento e previsão da fluência para 2 etapas.

Tabela 12: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - 2 etapas (viga).

Área da seção de concreto (A_c)	0,6000	[m²]
Perímetro em contato com o ar (u_{ar})	4,7384	[m]
Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]
Temperatura média (T_{med})	20	[°C]
Abatimento (Slump Test)		
0 - 4 → $Cc1=0,75$	} $Cc1 =$	
5 - 9 → $Cc1=1,00$		
10-15 → $Cc1=1,25$		
	1,00	[cm]
Tipo de Cimento		
1 - CP III e CP IV (endurecimento lento)	2	
2 - CP I e CP II (endurecimento normal)		
3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)		
CP III ; CP IV → $\alpha=1$; $s=0,38$	} $\alpha=$	2
CP I ; CP II → $\alpha=2$; $s=0,25$		
CP V-ARI → $\alpha=3$; $s=0,20$		0,25
Instante de concretagem (t_c)	3	[dias]
Instante de carregamento (t_o)	10	[dias]
Instante de descarregamento (t_d)	1000	[dias]
Tempo (duração) de indefinição (d_i)	3	[dias]
Instante final a ser considerado (t_∞)	10950	[dias]

Considere-se a seção transversal da figura 37-b e os parâmetros para obtenção da função de fluência segundo a NBR 6118:2003 mostrados na tabela 12 e baseado no histórico de carregamento da figura 39-a. Os cálculos para a previsão de fluência são mostrados a seguir.

Logo, levando-se em conta

$$\theta_1 = \left(0,4 \frac{20}{70}\right) 2000 = 228,5714286, \quad (5.35)$$

e para $t_1 = 3$, $t_2 = 10$, e $t \rightarrow \infty$, isto é, $\zeta_0 = 14$ dias, $\zeta_\infty = 21894$ dias determina-se

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{-14}{\ln(\beta_f(14))} = 10,33137274 \\ \theta_3 = 3000 \cdot \left(e^{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{0,36704227}}\right)} + \frac{1,3880}{1000} \right) \cdot (0,5 \cdot 10,33137274) = 784,6805805 \end{cases} \quad (5.36)$$

Então, com os pontos de colocação $\zeta_1 = \zeta_0$ e $\zeta_2 = \zeta_\infty$, e já corrigindo o parâmetro de calibração B , obtém-se

$$\begin{cases} A = 0,399089087 \\ B = 8,757552149 \end{cases} \quad (5.37)$$

Tabela 13: Parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 - 2 etapas (laje).

Área da seção de concreto (A_c)	0,5200	[m²]
Perímetro em contato com o ar (u_{ar})	1,6800	[m]
Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]
Temperatura média (T_{med})	20	[°C]
Abatimento (Slump Test)		
0 - 4 → $Cc1=0,75$	Cc1 =	
5 - 9 → $Cc1=1,00$		
10-15 → $Cc1=1,25$		
	1,00	[cm]
Tipo de Cimento		
1 - CP III e CP IV (endurecimento lento)	2	
2 - CP I e CP II (endurecimento normal)		
3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)		
CP III ; CP IV → $\alpha=1$; $s=0,38$	$\alpha=$	2
CP I ; CP II → $\alpha=2$; $s=0,25$		
CP V-ARI → $\alpha=3$; $s=0,20$		0,25
Instante de concretagem (t_c)	31	[dias]
Instante de carregamento (t_o)	34	[dias]
Instante de descarregamento (t_d)	1000	[dias]
Tempo (duração) de indefinição (d_i)	3	[dias]
Instante final a ser considerado (t_∞)	10950	[dias]

Agora, considerando a seção transversal da figura 37-a, os parâmetros para obtenção da função de fluência da NBR 6118:2003 (tabela 13), o histórico de carregamento (figura 39-a), e levando-se em conta $\theta_1 = 228,5714286$. Para $t_3 = 31$, $t_4 = 34$, e $t \rightarrow \infty$, isto é, $\zeta_0 = 6$ dias, $\zeta_\infty = 21838$ dias determina-se

$$\begin{cases} \theta_2 = \frac{-6}{\ln(\beta_f(6))} = 3,389148505 \\ \theta_3 = 3000 \cdot \left(e^{\left(1 - \sqrt{\frac{1}{0,897201221}}\right)} + \frac{1,2005}{1000} \right) \cdot (0,5 \cdot 3,389148505) = 1420,484846 \end{cases} \quad (5.38)$$

Então, com os pontos de colocação $\zeta_1 = \zeta_0$ e $\zeta_2 = \zeta_\infty$, e já corrigindo o parâmetro de calibração B , obtém-se

$$\begin{cases} A = 0,399086841 \\ B = 13,23069318 \end{cases} \quad (5.39)$$

Os parâmetros mostrados tanto na figura 40-a, quanto na figura 40-c permitem uma boa calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118:2003. É obvio que a calibração ilustrada na figura 40-b não mostra a descontinuidade provocada pelo histórico de carregamento apresentado na figura 39-a, pois se trata de uma simples calibração. Não obstante este fato será, ainda, discutido e computado na análise de estruturas no capítulo 7.

Figura 40: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - viga e laje em 2 etapas.

Note-se a tendência do valor de $C^{ref}(\zeta_\infty)$, que é o mesmo do coeficiente de fluência φ , comentado no início deste trabalho pela expressão (2.4). Para a primeira calibração, isto é, para os parâmetros da figura 40-a obtém-se $C_1^{ref}(\zeta_\infty) = 2,6579$, e para a segunda calibração, ou seja, para os parâmetros da figura 40-c chega-se em $C_2^{ref}(\zeta_\infty) = 2,6519$. Há uma tendência no segundo caso

do coeficiente ser maior, quando considerados as mesmas áreas de seção transversal e os mesmos perímetros expostos ao ar. Entretanto, as áreas são muito próximas ($A_1^c = 0,60\text{m}^2$ e $A_2^c = 0,52\text{m}^2$), o que não acontece com o perímetro molhado que na primeira calibração vale $u_1^{ar} = 4,7384\text{m}$ e na segunda vale $u_2^{ar} = 1,6800\text{m}$. Para a viga o perímetro exposto ao ar para troca de umidade é cerca de três vezes maior que o perímetro exposto da laje, tendo assim uma contribuição significativa para aumento de C_1^{ref} . Vale ressaltar, que em situações práticas, seria razoável admitir para o coeficiente de fluência um valor de $\varphi = 2,65$ para os dois concretos.

Resta ainda uma curiosidade de calibração. Se fosse considerada uma seção transversal homogênea para este problema, ou seja, um único concreto na seção transversal, quais seriam os resultados? Levando-se em conta o intervalo do primeiro carregamento, ou seja, para $t_1 = 3$, $t_2 = 10$, e $t \rightarrow \infty$, isto é, $\zeta_0 = 14$ dias, $\zeta_\infty = 21894$ dias e considerando ainda os parâmetros da tabela 14-a, obtém-se a calibração mostrada na figura 41-b.

Admitindo-se, somente para efeito de calibração, que o carregamento seja aplicado no segundo intervalo do histórico de carregamento. Para $t_1 = 3$, $t_2 = 10$, $t \rightarrow \infty$, $\zeta_0 = 14$ dias, $\zeta_\infty = 21894$ dias e considerando os parâmetros da tabela 14-b, obtém-se o resultado de calibração mostrado na figura 41-d.

A tendência do valor de $C^{ref}(\zeta_\infty) = \varphi$. Para a primeira calibração (figura 41-a) $C_1^{ref}(\zeta_\infty) = 2,5562$ e para a segunda calibração (figura 41-c) $C_2^{ref}(\zeta_\infty) = 2,0495$. Este fato advém da idade do concreto no tempo de aplicação do carregamento, que é diferente nas duas calibrações.

Tabela 14: Parâmetros para obtenção da função de fluência - seção homogênea.

Área da seção de concreto (A_c)	1,1200	[m²]	Área da seção de concreto (A_c)	1,1200	[m²]
Perímetro em contato com o ar (u_{ar})	6,4184	[m]	Perímetro em contato com o ar (u_{ar})	6,4184	[m]
Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]	Umidade relativa do ambiente (U)	70	[%]
Temperatura média (Tmed)	20	[°C]	Temperatura média (Tmed)	20	[°C]
Abatimento (Slump Test)			Abatimento (Slump Test)		
0 - 4 → Cc1=0,75	Cc1 =		0 - 4 → Cc1=0,75	Cc1 =	
5 - 9 → Cc1=1,00			5 - 9 → Cc1=1,00		
10-15 → Cc1=1,25			10-15 → Cc1=1,25		
	1,00	[cm]		1,00	[cm]
Tipo de Cimento			Tipo de Cimento		
1 - CP III e CP IV (endurecimento lento)	2		1 - CP III e CP IV (endurecimento lento)	2	
2 - CP I e CP II (endurecimento normal)			2 - CP I e CP II (endurecimento normal)		
3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)			3 - CP V-ARI (endurecimento rápido)		
CP III ; CP IV → $\alpha=1$; $s=0,38$	$\alpha=$		CP III ; CP IV → $\alpha=1$; $s=0,38$	$\alpha=$	
CP I ; CP II → $\alpha=2$; $s=0,25$			CP I ; CP II → $\alpha=2$; $s=0,25$		
CP V-ARI → $\alpha=3$; $s=0,20$			CP V-ARI → $\alpha=3$; $s=0,20$		
	s=	0,25		s=	0,25
Instante de concretagem (t_c)	3	[dias]	Instante de concretagem (t_c)	3	[dias]
Instante de carregamento (t_o)	10	[dias]	Instante de carregamento (t_o)	31	[dias]
Instante de descarregamento (t_d)	1000	[dias]	Instante de descarregamento (t_d)	1000	[dias]
Tempo (duração) de indefinição (d_i)	3	[dias]	Tempo (duração) de indefinição (d_i)	3	[dias]
Instante final a ser considerado (t_∞)	10950	[dias]	Instante final a ser considerado (t_∞)	10950	[dias]

(a) primeiro intervalo de carregamento

(b) segundo intervalo de carregamento

Observe-se que tanto $C_1^{ref}(\zeta_\infty) = 2,5562$, quanto $C_2^{ref}(\zeta_\infty) = 2,0495$, estão abaixo dos valores obtidos quando se considerou a seção de concreto heterogênea. Alterações significativas na

área da seção transversal e no perímetro exposto geram mudanças relevantes no coeficiente de fluência φ , como será analisado no capítulo 8.

Figura 41: Calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118 - seção homogênea.

Figura 42: Histórico de carregamento e comparação da previsão da fluência para 2 etapas.

Note-se que ao se considerar a seção transversal homogênea, obteve-se uma única função de fluência, representada na figura 42 pela linha traço-ponto. Ao passo que, ao se admitir a seção transversal heterogênea, foram consideradas duas funções de fluência, representadas na figura 42 por linhas contínuas. Como os parâmetros de previsão são diferentes para as duas hipóteses, as curvas não se sobrepõem em nenhum dos carregamentos. A hipótese de seção homogênea pode gerar tanto deformações imediatas, quanto valores finais para os coeficientes de fluência imprecisos, como será abordado no capítulo 7 e analisado no capítulo 8.

Vale justificar ainda o que foi discutido no capítulo 2. Lembrando-se que tanto o coeficiente de deformação rápida φ^a , que é função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final, quanto o coeficiente de deformação lenta reversível φ^d , que depende apenas da duração do carregamento, não dependem de A^c nem de u^{ar} como pode ser visto em (2.5) e (2.17), respectivamente.

Porém, o coeficiente de deformação lenta irreversível φ^f pode ser considerado como $\varphi^f = \varphi^f(\varphi^{1c}, \varphi^{2c}, \beta^f)$, e retirando a dependência de φ^{1c} , pois $\varphi^{1c} = \varphi^{1c}(U)$, pode-se reescrever que $\varphi^f = \varphi^f(\varphi^{2c}, \beta^f)$. Como, tanto $\varphi^{2c} = \varphi^{2c}(h^{fict})$, quanto $\beta^f = \beta^f(h^{fict})$, e $h^{fict} = h^{fict}(A^c, u^{ar})$, ou melhor, h^{fict} é função da relação direta de $\frac{A^c}{u^{ar}}$, isto é, $h^{fict} = h^{fict}\left(\frac{A^c}{u^{ar}}\right)$, então, conclui-se que $\varphi^f = \varphi^f\left(\frac{A^c}{u^{ar}}\right)$. Desta forma, quaisquer alterações na relação $\frac{A^c}{u^{ar}}$ conduzem a mudanças significativas de φ^f .

Note-se através da metodologia abordada, que os exemplos analisados de calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118:2003 geraram bons resultados. O procedimento empregado é muito simples e evita processos de integrações complexos ou problemas de minimização, como os da análise por outros métodos. Destaca-se que o entendimento deste capítulo também será usado em uma bateria de ensaios numéricos de calibração que será apresentado no capítulo 8.

Ademais, a grande contribuição da utilização da FSF na análise de estruturas de concreto sob o efeito do tempo, será justificada (capítulo 7) por uma metodologia através do MEF. A FGF é bastante eficaz para a realização das seguintes tarefas:

- Permite um fácil processo de integração de tensões com o mínimo de variáveis de controle, gerando assim um baixo custo computacional e de armazenagem de todo o histórico de tensões;
- Modelagem da fluência para concretos jovens, o que é importante, pois a protensão tem sido efetuada em pequenas idades do concreto;
- Facilidade de calibração com normas ou códigos internacionais, ou com dados experimentais facilitando assim a retro-análise com leituras obtidas em estruturas reais;
- Apresenta uma parcela de deformação viscosa reversível e outra irreversível, além de computar a parcela elástica com envelhecimento da deformação.

Capítulo 6

Elemento de cabo escorregando com atrito

Na Engenharia Civil, não só as estruturas de concreto protendido utilizam-se do emprego de cabos tensionados, mas também outros sistemas estruturais como, por exemplo: estruturas de membranas (tenso-estruturas), estruturas atirantadas (arcos, lajes, placas,...), treliças, cascas, pontes pênséis, pontes estaiadas, etc. Os avanços da ciência dos materiais e tecnologias têm possibilitado a construção cada vez mais arrojada desses tipos de estruturas. Conseqüentemente, a análise de cabos se torna essencial em muitas aplicações do cálculo estrutural.

Neste capítulo, discute-se sobre a formulação geral de um elemento de cabo escorregando com atrito, que permite a análise não-linear de estruturas tensionadas com cabos de forma simples e eficiente através do MEF. Especificamente, dentro do contexto desta tese de doutorado, o elemento de cabo escorregando com atrito, tem a vantagem de facilitar as seguintes tarefas: aplicação da força de protensão (“macaqueamento”); encunhamento da ancoragem; e perdas de protensão.

6.1. Formulação do elemento de cabo

6.1.1. Cinemática

Figura 43: (a) modelo de cabo e polia; (b) elemento de cabo.

Considere-se o modelo físico da figura 43-a, que representa um cabo passando por uma polia. A representação do elemento para este modelo na configuração atual está mostrada na figura 43-b. A este elemento de cabo, associam-se os vetores unitários, $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, e definem-se os comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 . O ângulo α indicado na figura 43-b é dado por:

$$\alpha = \arccos(\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2). \quad (6.1)$$

As deformações em cada lado do elemento são definidas por

$$\varepsilon_m = \frac{\ell_m}{\ell_m^r} - 1, \quad m = 1, 2, \quad (6.2)$$

onde ℓ_m , $m = 1, 2$ representa o comprimento atual de cada lado do elemento e ℓ_m^r , $m = 1, 2$ indica os respectivos comprimentos de cada lado na configuração de referência. A posição atual da polia pode ser determinada na configuração de referência pelos seguintes parâmetros adimensionais:

$$\lambda_m = \frac{\ell_m^r}{\ell^r}, \quad m = 1, 2, \quad (6.3)$$

onde $\ell^r = \ell_1^r + \ell_2^r$ é o comprimento total do elemento na configuração de referência, o qual possui um valor constante. Note-se que $\lambda_m \in (0, 1)$ e

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 1. \quad (6.4)$$

Introduzindo (6.3) em (6.2) pode-se obter as deformações em cada lado do elemento dadas por

$$\varepsilon_m = \frac{\ell_m - \lambda_m \ell^r}{\lambda_m \ell^r}, \quad m = 1, 2. \quad (6.5)$$

Quando $\lambda_1 \rightarrow 0$, os nós 1 e 2 colapsam, e conseqüentemente, $\ell_1 \rightarrow 0$. Por outro lado, quando $\lambda_2 \rightarrow 0$, os nós 2 e 3 colapsam, e, por conseguinte $\ell_2 \rightarrow 0$.

Figura 44: Posicionamento do elemento de cabo.

Definindo-se $\mathbf{x}_i$, $i = 1, 2, 3$ como sendo a vetores posição dos nós do elemento, como mostra a figura 44, pode-se escrever os comprimentos ℓ_1 e ℓ_2 pelas seguintes expressões

$$\begin{cases} \ell_1 = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| = \sqrt{(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \cdot (\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1)} \\ \ell_2 = \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\| = \sqrt{(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2) \cdot (\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2)} \end{cases}, \quad (6.6)$$

como também, os vetores unitários ao longo dos lados do elemento podem ser dados por

$$\mathbf{v}_1 = \frac{1}{\ell_1}(\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1) \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = \frac{1}{\ell_2}(\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2). \quad (6.7)$$

Os deslocamentos nodais do elemento são expressos por

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{x}_i - \mathbf{x}_i^0, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.8)$$

onde o índice $(\bullet)^0$ denota, aqui e doravante, a configuração inicial do elemento. Considerando-se (6.8) em (6.7) pode-se obter facilmente os resultados das seguintes derivadas:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_1} &= -\mathbf{v}_1, & \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_2} &= \mathbf{v}_1, & \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_3} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_2} &= -\mathbf{v}_2, & \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_3} &= \mathbf{v}_2, \end{aligned} \quad (6.9)$$

assim como

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_1} &= -\frac{1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T), & \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_2} &= \frac{1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \mathbf{v}_1^T), & \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_3} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_2} &= -\frac{1}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T) & \text{e} & \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_3} = \frac{1}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \mathbf{v}_2^T). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Considerando-se o produto tensorial ou produto diático em (6.10), pode-se ainda escrever

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_1} &= -\frac{1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1), & \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_2} &= \frac{1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1), & \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_3} &= \mathbf{0}, \\ \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_1} &= \mathbf{0}, & \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_2} &= -\frac{1}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) & \text{e} & \frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_3} = \frac{1}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2). \end{aligned} \quad (6.11)$$

A derivação de $\cos \alpha = \mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2$ resulta em

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} = -\frac{1}{\sin \alpha} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_2}{\partial \mathbf{u}_i} \cdot \mathbf{v}_1 + \frac{\partial \mathbf{v}_1}{\partial \mathbf{u}_i} \cdot \mathbf{v}_2 \right), \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.12)$$

Introduzindo-se (6.10) na expressão acima e levando-se em conta que $\mathbf{v}_1 \cdot \mathbf{v}_2 = \cos \alpha$, chega-se a

$$\begin{aligned} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_1} &= \frac{1}{\ell_1 \sin \alpha}(\mathbf{v}_2 - \cos \alpha \mathbf{v}_1), \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_2} &= -\frac{1}{\ell_1 \sin \alpha}(\mathbf{v}_2 - \cos \alpha \mathbf{v}_1) - \frac{1}{\ell_2 \sin \alpha}(\cos \alpha \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1) \quad \text{e} \\ \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_3} &= \frac{1}{\ell_2 \sin \alpha}(\cos \alpha \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \end{aligned} \quad (6.13)$$

Agora, definindo-se os seguintes vetores unitários:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_3 &= \frac{1}{\sin \alpha} \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1) = \frac{1}{\sin \alpha}(\mathbf{v}_2 - \cos \alpha \mathbf{v}_1) \quad \text{e} \\ \mathbf{v}_4 &= \frac{1}{\sin \alpha} \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_1) = \frac{1}{\sin \alpha}(\cos \alpha \mathbf{v}_2 - \mathbf{v}_1). \end{aligned} \quad (6.14)$$

Vale ressaltar que $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ estão no mesmo plano definido pelos vetores unitários $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, com $\mathbf{v}_3$ e $\mathbf{v}_4$ ortogonais a $\mathbf{v}_1$ e $\mathbf{v}_2$, respectivamente. Portanto, pode-se escrever (6.13) como

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_1} = \frac{1}{\ell_1} \mathbf{v}_3, \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_2} = -\left(\frac{1}{\ell_1} \mathbf{v}_3 + \frac{1}{\ell_2} \mathbf{v}_4 \right) \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_3} = \frac{1}{\ell_2} \mathbf{v}_4. \quad (6.15)$$

Note-se que (6.14) apresenta uma singularidade quando $\alpha \rightarrow 0$. Note-se também, que as expressões (6.9) e (6.15) mostram que

$$\frac{\partial \ell_m}{\partial \mathbf{u}_2} = -\left(\frac{\partial \ell_m}{\partial \mathbf{u}_1} + \frac{\partial \ell_m}{\partial \mathbf{u}_3} \right), \quad m = 1, 2, \quad \text{e} \quad \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_2} = -\left(\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_1} + \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_3} \right). \quad (6.16)$$

Lembrando-se de (6.2), onde as deformações em cada lado do elemento ε_m , $m = 1, 2$ são funções de ℓ_m e λ_m , por conseguinte, pode-se escrever que

$$\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \ell_m} \frac{\partial \ell_m}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda_m} \frac{\partial \lambda_m}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3. \quad (6.17)$$

Introduzindo-se a expressão (6.9), a notação

$$\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \mathbf{u}_i} = \mathbf{w}_{mi}, \quad m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.18)$$

e as derivadas

$$\frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \ell_m} = \frac{1}{\lambda_m \ell^r} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \varepsilon_m}{\partial \lambda_m} = -\frac{\ell_m}{\lambda_m^2 \ell^r}, \quad m = 1, 2 \quad (6.19)$$

na expressão (6.17), pode-se facilmente chegar a

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{11} &= -\frac{1}{\lambda_1 \ell^r} \left(\mathbf{v}_1 + \frac{\ell_1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_1} \right), \quad \mathbf{w}_{12} = \frac{1}{\lambda_1 \ell^r} \left(\mathbf{v}_1 - \frac{\ell_1}{\lambda_1} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_2} \right), \quad \mathbf{w}_{13} = -\frac{\ell_1}{\lambda_1^2 \ell^r} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_3}, \\ \mathbf{w}_{21} &= -\frac{\ell_2}{\lambda_2^2 \ell^r} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_1}, \quad \mathbf{w}_{22} = -\frac{1}{\lambda_2 \ell^r} \left(\mathbf{v}_2 + \frac{\ell_2}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_2} \right) \quad \text{e} \quad \mathbf{w}_{23} = \frac{1}{\lambda_2 \ell^r} \left(\mathbf{v}_2 - \frac{\ell_2}{\lambda_2} \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_3} \right). \end{aligned} \quad (6.20)$$

Levando-se em conta (6.16), se $\lambda_m = \lambda_m(\ell_1, \ell_2, \alpha)$, então se pode concluir que

$$\mathbf{w}_{m2} = -(\mathbf{w}_{m1} + \mathbf{w}_{m3}), \quad m = 1, 2. \quad (6.21)$$

6.1.2. Estática

Quando o material constituinte do cabo é elástico não-linear, o valor da tensão normal é uma função da deformação, aqui representada por $\sigma(\varepsilon)$. As forças normais N_m , $m = 1, 2$ são dadas por

$$N_m = A^r \sigma_m, \quad m = 1, 2, \quad (6.22)$$

onde A^r denota a área da seção transversal do cabo na configuração de referência, e a tensão normal σ_m , $m = 1, 2$ é obtida por

$$\sigma_m = \sigma(\varepsilon_m). \quad (6.23)$$

Quando esta relação é elástica linear, pode-se ter no lugar de (6.22) a seguinte relação

$$N_m = EA^r \varepsilon_m, \quad m = 1, 2, \quad (6.24)$$

onde E é o módulo de elasticidade. Por conseguinte, ainda adicionalmente, define-se o módulo de elasticidade tangente do cabo como sendo

$$D(\varepsilon) = A^r \frac{d\sigma}{d\varepsilon}(\varepsilon). \quad (6.25)$$

E quando esta relação é linear, (6.25) se transforma em uma expressão de valor constante dada por

$$D = EA^r. \quad (6.26)$$

Na configuração inicial, as forças normais em cada lado do elemento são expressas por

$$N_m^0 = A^r \sigma(\varepsilon_m^0), \quad m = 1, 2, \quad (6.27)$$

onde

$$\varepsilon_m^0 = \frac{\ell_m^0 - \lambda_m^0 \ell^r}{\lambda_m^0 \ell^r}, \quad m = 1, 2. \quad (6.28)$$

Quando, na configuração inicial, o comprimento de cada lado do elemento de cabo, ℓ_m^0 , $m = 1, 2$, for conhecido e a protensão inicial, suposta igual nos dois lados do elemento

$$N_1^0 = N_2^0 = N^0, \quad (6.29)$$

for aplicada. Então, será necessário solucionar a equação

$$N^0 = A^r \sigma(\varepsilon^0) \quad (6.30)$$

para ℓ^r , sendo

$$\varepsilon^0 = \varepsilon_1^0 = \varepsilon_2^0 = \frac{\ell_1^0 + \ell_2^0}{\ell^r} - 1 = \frac{\ell^0}{\ell^r} - 1. \quad (6.31)$$

Onde $\ell^0 = \ell_1^0 + \ell_2^0$. Como consequência obtém-se

$$\lambda_1^0 = \frac{\ell_1^0}{\ell_1^0 + \ell_2^0} \quad \text{e} \quad \lambda_2^0 = \frac{\ell_2^0}{\ell_1^0 + \ell_2^0}. \quad (6.32)$$

Se o material constituinte do cabo for elástico linear e dado por (6.24), a solução explícita de (6.30) é

$$\ell^r = \frac{\ell_1^0 + \ell_2^0}{1 + \frac{N^0}{EA^r}} = \frac{\ell^0}{1 + \frac{N^0}{EA^r}}. \quad (6.33)$$

O vetor dos esforços nodais internos e o vetor dos deslocamentos nodais do elemento são, respectivamente, definidos por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} -N_1 \mathbf{v}_1 \\ N_1 \mathbf{v}_1 - N_2 \mathbf{v}_2 \\ N_2 \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \mathbf{u}_2 \\ \mathbf{u}_3 \end{bmatrix}. \quad (6.34)$$

A matriz de rigidez tangente do elemento é, por sua vez, dada por

$$\mathbf{k} = \frac{\partial \mathbf{P}}{\partial \mathbf{p}}. \quad (6.35)$$

Com o auxílio de (6.25), (6.11), (6.20) e da seguinte notação

$$D_m = D(\varepsilon_m), \quad m = 1, 2, \quad (6.36)$$

pode-se facilmente expressar (6.35) como uma soma de duas matrizes mostradas abaixo:

$$\mathbf{k} = \mathbf{k}_c + \mathbf{k}_g, \quad (6.37)$$

onde

$$\mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} -D_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_{11} & -D_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_{12} & -D_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_{13} \\ D_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_{11} - D_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_{21} & D_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_{12} - D_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_{22} & D_1 \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{w}_{13} - D_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_{23} \\ D_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_{21} & D_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_{22} & D_2 \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{w}_{23} \end{bmatrix} \quad (6.38)$$

é a matriz de rigidez constitutiva e

$$\mathbf{k}_g = \begin{bmatrix} -\frac{N_1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) & -\frac{N_1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) & \mathbf{O} \\ \cdot & \frac{N_1}{\ell_1}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1) + \frac{N_2}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) & -\frac{N_2}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) \\ \text{sim.} & \cdot & \frac{N_2}{\ell_2}(\mathbf{I} - \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2) \end{bmatrix} \quad (6.39)$$

é a matriz de rigidez geométrica do elemento. Note-se que a matriz $\mathbf{k}_g$ é sempre simétrica, ao passo que $\mathbf{k}_c$ pode não ser. E ainda $\mathbf{k}_g$, como mostrado em (6.39), é equivalente a matriz de rigidez geométrica de um elemento duplo de treliça e apresenta singularidades quando $\lambda_m \rightarrow 0$, ou seja, quando dois nós colapsam. Quando isto ocorre é necessário que haja uma redefinição da malha.

6.1.3. Cabo não escorregando

Quando a polia não escorrega, λ_m , $m = 1, 2$ não varia com o tempo. Logo,

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial \mathbf{u}_i} = \mathbf{0}. \quad (6.40)$$

Conseqüentemente, com a ajuda de (6.3), a expressão (6.20) resulta em

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{11} &= -\frac{1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1, & \mathbf{w}_{12} &= \frac{1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1, & \mathbf{w}_{13} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{w}_{21} &= \mathbf{0}, & \mathbf{w}_{22} &= -\frac{1}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2 & \text{e} & \mathbf{w}_{23} = \frac{1}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (6.41)$$

Agora, levando-se em conta (6.41) nas expressões de (6.38), obtém-se a seguinte matriz simétrica

$$\mathbf{k}_c = \begin{bmatrix} \frac{D_1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & -\frac{D_1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \mathbf{O} \\ -\frac{D_1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & \frac{D_1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 + \frac{D_2}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 & -\frac{D_2}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 \\ \text{sim} & -\frac{D_2}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 & \frac{D_2}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}. \quad (6.42)$$

Note-se que há singularidade na matriz $\mathbf{k}_c$ acima quando $\lambda_m \rightarrow 0$. Por outro lado, $\mathbf{k}_c$ não apresenta singularidade quando $\alpha \rightarrow 0$. Vale ressaltar que a matriz $\mathbf{k}_c$ em (6.42) é equivalente à matriz de rigidez tangente ou matriz de rigidez constitutiva de um elemento duplo de treliça.

6.1.4. Cabo escorregando sem atrito

Quando a polia escorrega sem atrito, tem-se necessariamente $N_1 = N_2$. Portanto, pode-se concluir que

$$\lambda_1 = \frac{\ell_1}{\ell_1 + \ell_2} \quad \text{e} \quad \lambda_2 = \frac{\ell_2}{\ell_1 + \ell_2}, \quad (6.43)$$

pelo fato de conduzirem a $\varepsilon_1 = \varepsilon_2$ e a $N_1 = N_2$, como podem ser facilmente verificadas. As derivadas das expressões em (6.43) resultam em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \ell_1} &= \frac{\lambda_2}{\ell_1 + \ell_2}, & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \ell_2} &= -\frac{\lambda_1}{\ell_1 + \ell_2}, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \ell_1} &= -\frac{\lambda_2}{\ell_1 + \ell_2} & \text{e} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \ell_2} = \frac{\lambda_1}{\ell_1 + \ell_2}. \end{aligned} \quad (6.44)$$

De

$$\frac{\partial \lambda_m}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial \lambda_m}{\partial \ell_1} \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial \lambda_m}{\partial \ell_2} \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad m = 1, 2, \quad i = 1, 2, 3, \quad (6.45)$$

pode-se chegar, com a ajuda de (6.9) e de (6.44), em

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_1} &= -\frac{\lambda_2}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_1, & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_2} &= \frac{\lambda_2}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_1 + \frac{\lambda_1}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_2, & \frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_3} &= -\frac{\lambda_1}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_2, \\ \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_1} &= \frac{\lambda_2}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_1, & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_2} &= -\frac{\lambda_2}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_1 - \frac{\lambda_1}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_2 & \text{e} & \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_3} = \frac{\lambda_1}{\ell_1 + \ell_2} \mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (6.46)$$

Introduzindo-se (6.46) em (6.20), obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{11} &= -\frac{1}{\ell^r} \mathbf{v}_1, & \mathbf{w}_{12} &= \frac{1}{\ell^r} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2), & \mathbf{w}_{13} &= \frac{1}{\ell^r} \mathbf{v}_2, \\ \mathbf{w}_{21} &= -\frac{1}{\ell^r} \mathbf{v}_1, & \mathbf{w}_{22} &= \frac{1}{\ell^r} (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) & \text{e} & \mathbf{w}_{23} = \frac{1}{\ell^r} \mathbf{v}_2. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Por conseguinte, as expressões (6.47) e (6.38) resultam na seguinte matriz simétrica:

$$\mathbf{k}_c = \frac{D}{\ell^r} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_1 & -\mathbf{v}_1 \otimes (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) & -\mathbf{v}_1 \otimes \mathbf{v}_2 \\ -(\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v}_1 & (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \otimes (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) & (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) \otimes \mathbf{v}_2 \\ -\mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 & \mathbf{v}_2 \otimes (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2) & \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_2 \end{bmatrix}, \quad (6.48)$$

onde

$$D = D_1 = D_2. \quad (6.49)$$

Note-se que não há singularidades em (6.48) quando $\lambda_m \rightarrow 0$ ou $\alpha \rightarrow 0$. No entanto, $\mathbf{k}$ ainda apresenta singularidades quando $\lambda_m \rightarrow 0$ por causa da parcela de $\mathbf{k}_g$, como mostrado em (6.39).

6.1.5. Cabo escorregando com atrito

Considerando-se o problema em que o cabo passa por uma polia com uma força N_1 , na presença de atrito. Se um comprimento infinitesimal do elemento de cabo for isolado como um

infinitesimal de corpo-livre como mostra a figura 45, e assumindo-se μ como coeficiente de atrito devido ao trecho curvo, ou seja, como coeficiente de atrito entre a polia e o cabo, conclui-se que

$$dN_1 = -\mu N_1 d\alpha \quad \text{ou} \quad \frac{dN_1}{d\alpha} = -\mu N_1 \quad \text{ou ainda} \quad \frac{dN_1}{N_1} = -\mu d\alpha. \quad (6.50)$$

A solução desta equação diferencial ordinária se dá pela integração de ambos os lados de (6.50). Logo,

$$\ln N_1 = -\mu\alpha, \quad (6.51)$$

então,

$$N_1 = N_2 e^{\mu\alpha}. \quad (6.52)$$

Figura 45: (a) cabo e polia; (b) polia com atrito; (c) comprimento infinitesimal.

A perda por atrito também é causada pelas imperfeições e atrito com a bainha no trecho reto. Logo, supondo-se κ o coeficiente de atrito devido ao trecho reto, e, portanto, baseado no mesmo raciocínio anteriormente exposto para o trecho curvo, pode-se, analogamente obter

$$\ln N_1 = -\kappa \ell^r, \quad (6.53)$$

então,

$$N_1 = N_2 e^{\kappa \ell^r}. \quad (6.54)$$

Conseqüentemente, superpondo-se os dois efeitos, tem-se

$$N_1 = N_2 e^{\mu\alpha + \kappa \ell^r}. \quad (6.55)$$

Definindo-se agora

$$\eta = e^{\mu\alpha + \kappa \ell^r}. \quad (6.56)$$

Se o cabo está escorregando com atrito, então

$$\eta = \begin{cases} \frac{N_1}{N_2}, & \text{se } N_1 > N_2, \\ \frac{N_2}{N_1}, & \text{se } N_2 > N_1. \end{cases} \quad (6.57)$$

E propondo-se a seguinte lei de atrito, o coeficiente β_L pode ser definido como

$$\beta_L = \ln(1 + k_L \ell^r), \quad (6.58)$$

onde β_L denota o coeficiente de atrito devido ao trecho reto do cabo. Neste caso, η é dada por

$$\eta = (1 + k_L \ell^r) e^{\mu\alpha}. \quad (6.59)$$

Sendo

$$\frac{\partial \eta}{\partial \mathbf{u}_i} = \mu \eta \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i}, \quad (6.60)$$

onde as derivadas $\frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i}$, $i = 1, 2, 3$ são dadas por (6.13). Paralelamente, lembrando-se da expressão

(6.4) e introduzindo-se o coeficiente λ , de forma que

$$\lambda_1 = \lambda \quad \text{e} \quad \lambda_2 = 1 - \lambda, \quad (6.61)$$

chega-se a

$$\frac{\partial \lambda_1}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} \quad \text{e} \quad \frac{\partial \lambda_2}{\partial \mathbf{u}_i} = -\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i}. \quad (6.62)$$

6.2. Algoritmo de integração de tensões

Considere-se agora dois instantes, t_j e t_{j+1} , nos quais o elemento de cabo se encontra em equilíbrio. No instante t_j a geometria é conhecida, ou seja, as coordenadas dos nós do elemento e os parâmetros $\lambda(t_j)$ são considerados conhecidos. No instante t_{j+1} assume-se conhecer a geometria, isto é, as coordenadas dos nós do elemento e busca-se as forças normais e o parâmetro $\lambda(t_{j+1})$ para que o elemento esteja em equilíbrio. Portanto, deve-se solucionar as equações de equilíbrio para o parâmetro $\lambda(t_{j+1})$. Dentro deste contexto formula-se o seguinte algoritmo.

6.2.1. Previsor

Primeiramente, assume-se o comportamento da polia sem escorregamento, e define-se o seguinte estado teste ou tentativa, indicado pela notação $(\bullet)^t$ abaixo, para os campos de tensão e deformação a seguir:

$$N_m^t = A^r \sigma(\varepsilon_m^t) \quad \text{e} \quad \varepsilon_m^t = \frac{\ell_{m,j+1}^t - \lambda_{m,j} \ell^r}{\lambda_{m,j} \ell^r}, \quad m = 1, 2. \quad (6.63)$$

onde a introdução da nova notação $(\bullet)_j$ representa o instante j . Ainda na expressão de ε_m^t em (6.63) os parâmetros $\lambda_{m,j} = \lambda_m(t_j)$, $m = 1, 2$ são dados por (6.61). Se

$$\frac{1}{\eta_{j+1}} < \frac{N_1^t}{N_2^t} < \eta_{j+1}, \quad (6.64)$$

onde

$$\eta_{j+1} = e^{\mu\alpha_{j+1} + \beta_L}, \quad (6.65)$$

então a polia está realmente sem escorregamento. Como consequência, tem-se

$$\lambda_{j+1} = \lambda_j \text{ e } N_{m,j+1} = N_m^t. \quad (6.66)$$

A matriz de rigidez constitutiva $\mathbf{k}_c$ é dada pela expressão (6.42).

6.2.2. Corretor 1

Se

$$\frac{N_1^t}{N_2^t} \geq \eta_{j+1}, \quad (6.67)$$

então a seguinte equação deve ser solucionada para λ_{j+1}

$$f(\lambda_{j+1}) = N_{1,j+1} - \eta_{j+1} N_{2,j+1} = 0, \quad (6.68)$$

onde

$$N_{m,j+1} = A^r \sigma(\varepsilon_{m,j+1}) \text{ e } \varepsilon_{m,j+1} = \frac{\ell_{m,j+1} - \lambda_{m,j+1} \ell^r}{\lambda_{m,j+1} \ell^r}, \quad m = 1, 2. \quad (6.69)$$

Ressalta-se que (6.68) pode ser resolvida pelo Método de Newton, como descrito na expressão

$$\lambda_{k+1,j+1} = \lambda_{k,j+1} - \frac{1}{f'(\lambda_{k,j+1})} f(\lambda_{k,j+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \lambda_{0,j+1} = \lambda_j, \quad (6.70)$$

na qual

$$f'(\lambda_{k,j+1}) = -\frac{1}{\ell^r} \left[\frac{\ell_{1,j+1} D_{1,j+1}}{(\lambda_{k,j+1})^2} + \eta_{j+1} \frac{\ell_{2,j+1} D_{2,j+1}}{(1 - \lambda_{k,j+1})^2} \right]. \quad (6.71)$$

Portanto, (6.68) pode ser reformulada da seguinte forma:

$$\lambda_{k+1,j+1} = \lambda_{k,j+1} + \frac{1}{G_{j+1}} (\lambda_{k,j+1})^2 (1 - \lambda_{k,j+1})^2 \ell^r f(\lambda_{k,j+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \lambda_{0,j+1} = \lambda_j \quad (6.72)$$

onde

$$G_{j+1} = (1 - \lambda_{k,j+1})^2 \ell_{1,j+1} D_{1,j+1} + \eta_{j+1} (\lambda_{k,j+1})^2 \ell_{2,j} D_{2,j+1}. \quad (6.73)$$

As derivadas $\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i}$ no instante t_{j+1} devem ser subseqüentemente determinadas. Considere que

$$g(\lambda, \ell_1, \ell_2, \alpha) = N_1 - \eta N_2 = 0. \quad (6.74)$$

onde, para melhor clareza na explanação, suprimiu-se a notação subscrita relativa ao tempo $j + 1$. Por diferenciação, obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \ell_1} \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \ell_2} \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} = 0. \quad (6.75)$$

De (6.75) chega-se em

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} = - \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \ell_1} \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \ell_2} \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} \right). \quad (6.76)$$

Introduzindo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \lambda} &= \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} = - \left(\frac{\ell_1}{\lambda_1^2 \ell^r} D_1 + \eta \frac{\ell_2}{\lambda_2^2 \ell^r} D_2 \right), \\ \frac{\partial g}{\partial \ell_1} &= \frac{1}{\lambda_1 \ell^r} D_1, \quad \frac{\partial g}{\partial \ell_2} = -\eta \frac{1}{\lambda_2 \ell^r} D_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = -\mu \eta N_2 \end{aligned} \quad (6.77)$$

na expressão (6.76), obtém-se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{1}{G} \left[\lambda_1 \lambda_2^2 D_1 \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} - \eta \lambda_1^2 \lambda_2 D_2 \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i} - \mu \eta \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ell^r N_2 \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} \right], \quad (6.78)$$

onde

$$G = \lambda_2^2 \ell_1 D_1 + \eta \lambda_1^2 \ell_2 D_2. \quad (6.79)$$

Com a consideração das expressões (6.9) e (6.15) na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_1} &= -\frac{1}{G} \left(\lambda_1 \lambda_2^2 D_1 \mathbf{v}_1 + \mu \eta \lambda_1^2 \lambda_2^2 N_2 \frac{\ell^r}{\ell_1} \mathbf{v}_3 \right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_2} &= - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_3} \right) \quad \text{e} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_3} &= -\frac{1}{G} \left(\eta \lambda_1^2 \lambda_2 D_2 \mathbf{v}_2 + \mu \eta \lambda_1^2 \lambda_2^2 N_2 \frac{\ell^r}{\ell_2} \mathbf{v}_4 \right). \end{aligned} \quad (6.80)$$

Introduzindo-se (6.80) em (6.62), e esta na expressão (6.20), chega-se facilmente em

$$\begin{aligned} \mathbf{w}_{11} &= -\frac{1}{\ell_1^r} \mathbf{v}_1 + \frac{\lambda_2^2 \ell_1}{G \ell_1^r} D_1 \mathbf{v}_1 + \frac{\mu \eta \lambda_2^2}{G} N_2 \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{w}_{12} &= -(\mathbf{w}_{11} + \mathbf{w}_{13}), \\ \mathbf{w}_{13} &= \frac{\eta \lambda_1 \lambda_2 \ell_1}{G \ell_1^r} D_2 \mathbf{v}_2 + \frac{\mu \eta \lambda_2^2 \ell_1}{G \ell_2} N_2 \mathbf{v}_4, \\ \mathbf{w}_{21} &= -\frac{\lambda_1 \lambda_2 \ell_2}{G \ell_2^r} D_1 \mathbf{v}_1 - \frac{\mu \eta \lambda_1^2 \ell_2}{G \ell_1} N_2 \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{w}_{22} &= -(\mathbf{w}_{13} + \mathbf{w}_{23}) \quad \text{e} \\ \mathbf{w}_{23} &= \frac{1}{\ell_2^r} \mathbf{v}_2 - \frac{\eta \lambda_1^2 \ell_2}{G \ell_2^r} D_2 \mathbf{v}_2 - \frac{\mu \eta \lambda_1^2}{G} N_2 \mathbf{v}_4. \end{aligned} \quad (6.81)$$

Note-se que se deve aplicar $\mu = 0$ e $\eta = e^\beta$ nas expressões (6.81) quando $\alpha = 0$.

6.2.3. Corretor 2

Se, por outro lado, tem-se

$$\frac{N_2^t}{N_1^t} \geq \eta^{i+1}, \quad (6.82)$$

então a seguinte equação deve ser solucionada para λ_{j+1}

$$f(\lambda_{j+1}) = N_{2,j+1} - \eta_{j+1} N_{1,j+1} = 0, \quad (6.83)$$

onde $N_{m,j+1}$ e $\varepsilon_{m,j+1}$, $m = 1, 2$ são dadas por (6.69). Analogamente, (6.83) pode ser resolvida pelo Método de Newton, como descrito na expressão

$$\lambda_{k+1,j+1} = \lambda_{k,j+1} - \frac{1}{f'(\lambda_{k,j+1})} f(\lambda_{k,j+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \lambda_{0,j+1} = \lambda_j, \quad (6.84)$$

na qual

$$f'(\lambda_{k,j+1}) = -\frac{1}{\ell^r} \left[\frac{\ell_{2,j+1} D_{2,j+1}}{(\lambda_{k,j+1})^2} + \eta_{j+1} \frac{\ell_{1,j+1} D_{1,j+1}}{(1 - \lambda_{k,j+1})^2} \right]. \quad (6.85)$$

Portanto, (6.84) pode ser reformulada da seguinte forma:

$$\lambda_{k+1,j+1} = \lambda_{k,j+1} + \frac{1}{G_{j+1}} (\lambda_{k,j+1})^2 (1 - \lambda_{k,j+1})^2 \ell^r f(\lambda_{k,j+1}), \quad k = 1, 2, \dots, \lambda_{0,j+1} = \lambda_j \quad (6.86)$$

onde

$$G_{j+1} = (\lambda_{k,j+1})^2 \ell_{2,j+1} D_{2,j+1} + \eta_{j+1} (1 - \lambda_{k,j+1})^2 \ell_{1,j+1} D_{1,j+1}. \quad (6.87)$$

Analogamente, as derivadas $\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i}$ no instante t_{j+1} devem ser subsequentemente determinadas.

Considere-se que

$$g(\lambda, \ell_1, \ell_2, \alpha) = N_2 - \eta N_1 = 0. \quad (6.88)$$

Novamente, para melhor clareza na explanação, suprimiu-se a notação subscrita relativa ao tempo $j + 1$. Por diferenciação, obtém-se

$$\frac{\partial g}{\partial \lambda} \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \ell_1} \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \ell_2} \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} = 0. \quad (6.89)$$

De (6.89) chega-se em

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} = - \left(\frac{\partial g}{\partial \lambda} \right)^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \ell_1} \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \ell_2} \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i} + \frac{\partial g}{\partial \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} \right). \quad (6.90)$$

Introduzindo-se

$$\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial \lambda} &= \frac{\partial g}{\partial \lambda_1} - \frac{\partial g}{\partial \lambda_2} = \frac{\ell_2}{\lambda_2^2 \ell^r} D_2 + \eta \frac{\ell_1}{\lambda_1^2 \ell^r} D_1, \\ \frac{\partial g}{\partial \ell_1} &= -\eta \frac{1}{\lambda_1 \ell^r} D_1, \quad \frac{\partial g}{\partial \ell_2} = \frac{1}{\lambda_2 \ell^r} D_2 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial \alpha} = -\mu \eta N_1 \end{aligned} \quad (6.91)$$

na expressão (6.90), obtém-se

$$\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_i} = \frac{1}{G} \left[\lambda_1 \lambda_2^2 D_1 \frac{\partial \ell_1}{\partial \mathbf{u}_i} - \eta \lambda_1^2 \lambda_2 D_2 \frac{\partial \ell_2}{\partial \mathbf{u}_i} + \mu \eta \lambda_1^2 \lambda_2^2 \ell^r N_1 \frac{\partial \alpha}{\partial \mathbf{u}_i} \right], \quad (6.92)$$

onde

$$G = \lambda_1^2 \ell_2 D_2 + \eta \lambda_2^2 \ell_1 D_1. \quad (6.93)$$

Analogamente, com a consideração das expressões (6.9) e (6.15) na equação acima, tem-se

$$\begin{aligned}\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_1} &= -\frac{1}{G} \left(\eta \lambda_1 \lambda_2^2 D_1 \mathbf{v}_1 - \mu \eta \lambda_1^2 \lambda_2^2 N_1 \frac{\ell^r}{\ell_1} \mathbf{v}_3 \right), \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_2} &= - \left(\frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_1} + \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_3} \right) \text{ e} \\ \frac{\partial \lambda}{\partial \mathbf{u}_3} &= -\frac{1}{G} \left(\lambda_1^2 \lambda_2 D_2 \mathbf{v}_2 - \mu \eta \lambda_1^2 \lambda_2^2 N_1 \frac{\ell^r}{\ell_2} \mathbf{v}_4 \right).\end{aligned}\quad (6.94)$$

Introduzindo-se agora (6.94) em (6.62), e esta na expressão (6.20), determina-se facilmente

$$\begin{aligned}\mathbf{w}_{11} &= -\frac{\eta \lambda_1 \lambda_2}{G \ell^r} D_2 \mathbf{v}_1 - \frac{\mu \eta \lambda_2^2}{G} N_1 \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{w}_{12} &= -(\mathbf{w}_{11} + \mathbf{w}_{13}), \\ \mathbf{w}_{13} &= \frac{\lambda_2 \ell_1}{G \ell^r} D_2 \mathbf{v}_2 - \frac{\mu \eta \lambda_2^2 \ell_1}{G \ell_2} N_1 \mathbf{v}_4, \\ \mathbf{w}_{21} &= -\frac{\eta \lambda_1 \ell_2}{G \ell^r} D_1 \mathbf{v}_1 + \frac{\mu \eta \lambda_1^2 \ell_2}{G \ell_1} N_1 \mathbf{v}_3, \\ \mathbf{w}_{22} &= -(\mathbf{w}_{21} + \mathbf{w}_{23}) \text{ e} \\ \mathbf{w}_{23} &= \frac{\eta \lambda_2 \ell_1}{G \ell^r} D_1 \mathbf{v}_2 + \frac{\mu \eta \lambda_1^2}{G} N_1 \mathbf{v}_4.\end{aligned}\quad (6.95)$$

Note-se que se deve aplicar $\mu = 0$ e $\eta = e^\beta$ nas expressões (6.95) quando $\alpha = 0$.

6.3. Relaxação do cabo

Segundo FRANÇA e ISHITANI[23], a relaxação do cabo é a perda da força de protensão quando os fios ou cordoalhas estão sujeitos essencialmente a deformações constantes ao longo do tempo. Por simplificação, pode-se dizer que a relaxação é a diminuição da tensão com o tempo. Conforme a NBR 6118:2003, a relaxação na armadura de protensão pode ser estimada através de

$$\sigma_{j+1}^p = \psi(t, t_0) \sigma_j^p, \quad (6.96)$$

com o coeficiente de relaxação do aço no instante t dado por

$$\psi(t, t_0) = \psi_{1000} \left(\frac{t - t_0}{(1000/24)} \right)^{0,15}, \quad (6.97)$$

onde ψ_{1000} é o coeficiente de relaxação de fios e cordoalhas, após 1000h a uma temperatura de $20^\circ C$, para tensões variando $0,5 f_{ptk} \leq \sigma_j \leq 0,8 f_{ptk}$ o que é bastante comum nos projetos estruturais de concreto protendido. Os valores de ψ_{1000} já foram mostrados na tabela 2 do capítulo 2.

Considerando-se para o elemento de cabo a expressão dada por (6.22) $N_m = A^r \sigma_m$, $m = 1, 2$, pode-se escrever (6.96) em cada incremento de tempo t por

$$N_{m,j+1} = \psi(t, t_0) N_{m,j}, \quad m = 1, 2, \quad (6.98)$$

corrigindo assim o valor da força de protensão ao longo do tempo.

6.4. Elemento de macaco

Definido o elemento de cabo, e para tomar partido da implementação computacional já disponível no programa PEFSYS, adapta-se um elemento de macaco baseado em um elemento de barra sob não linearidade geométrica sem a consideração do empenamento, proposto por PIMENTA[36] e utilizado em DEIFELD[15]. Através deste elemento é possível não só simular a aplicação de uma força na extremidade do cabo, mas também garantir que o deslocamento relativo entre o ponto material da estrutura onde é feita a ancoragem e o ponto material do cabo ligado a estrutura seja zero, ou suficientemente desprezível no instante final de aplicação da força de protensão.

Resumidamente, este elemento de cabo é capaz de simular, num primeiro momento, a ação de um macaco hidráulico e, num segundo instante, a ancoragem do cabo. Portanto, concorda-se com DEIFELD[15] quando afirma que para que um elemento possa satisfazer estas diferentes condições, deve-se apresentar comportamento distintos como segue: a) na primeira etapa, enquanto aplica a força de protensão, o elemento deve deforma-se ao longo de seu eixo sem restrições; b) na segunda etapa (simulação da ancoragem) o elemento deve ser rígido o suficiente para apresentar deformações suficientemente desprezíveis.

Tais condições são satisfatoriamente atendidas por um elemento de treliça, considerando-se a rigidez axial do elemento variável. Entretanto, o elemento adaptado de PIMENTA[36] também considera o giro que a estrutura pode sofrer no ponto de macaqueamento, seja esse giro causado pela aplicação da força de protensão ou não. Portanto, a apresentação da formulação deste elemento foge ao escopo deste trabalho, pois se encontra consolidada em PIMENTA[36] e também utilizada na dissertação de mestrado de DEIFELD[15].

Todavia, uma representação sucinta, mas satisfatória desta formulação no processo de protensão é representada pela seguinte matriz constitutiva:

$$(\mathbf{k}_c)_k = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{C} \\ & \mathbb{C} & 0 & 0 & 0 & -\mathbb{C} \\ & & \mathbb{N}_k & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 0 \\ & & & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 0 \\ \text{sim.} & & & & \mathbb{C} & 0 \\ & & & & & \mathbb{C} \end{bmatrix}, k = 1, 2, \quad (6.99)$$

onde $\mathbb{N}_k = (EA)_k$, $k = 1, 2$ é o coeficiente de rigidez axial arbitrariamente pequeno quando o elemento estiver aplicando a força de protensão na etapa $k = 1$, e supostamente grande quando sua função for de ancoragem na etapa $k = 2$; e $\mathbb{C}$ é o coeficiente de rigidez arbitrariamente grande incidindo sobre os efeito de flexão, distorção e a torção do elemento.

6.4.1. Perda por acomodação das cunhas de ancoragem

Durante o processo de protensão, existe a necessidade de simular a perda de encunhamento por acomodação da ancoragem pelo recuo δ , de alguns milímetros, do cabo de protensão, gerando uma redução na força inicial de protensão, ou seja, na força aplicada pelo macaco no cabo. Este processo pode ser facilmente simulado, adicionando-se mais uma etapa ao procedimento descrito anteriormente.

Com a ajuda da matriz constitutiva do elemento de macaco expressa por (6.99), uma nova etapa deve ser considerada para corrigir o elemento $\mathbb{N}_k = (EA)_k$, $k = 1, 2, 3$ (agora com três fases) no final da etapa 2. Como a deformação do elemento de macaco deve ser a mesma para o elemento de cabo na simulação do encunhamento, pela R.M, tem-se que

$$\delta = \frac{N\ell}{EA}. \quad (6.100)$$

Portanto, para se simular o encunhamento dado por δ , deve-se corrigir na terceira etapa, a rigidez axial elemento de macaco na matriz constitutiva de $(\mathbf{k}_c)_k$, $k = 1, 2, 3$, fazendo-se

$$(EA)_3 = \frac{N\ell}{\delta}. \quad (6.101)$$

Outros critérios para simulação e previsão deste tipo de perda de protensão, utilizado na dissertação de mestrado do autor (SANTOS[41]) podem ser didaticamente compreendidos através de ISHITANI[25] e FRANÇA e ISHITANI[23].

6.5. Exemplos numéricos

Seja o sistema de coordenada cartesiano adotado para todos os exemplos doravante, mostrado na figura 46. Vale ressaltar que todas as vigas dos exemplos apresentados a seguir terão as mesmas seções transversais e o mesmo sistema de coordenada mostrada na figura 46. Para os exemplos numéricos tem-se:

Figura 46: Sistema de coordenadas e seção transversal.

6.5.1. Exemplo 1: cabo sem escorregamento

Agora, supondo-se o seguinte problema: Seja a viga da figura 47, com características geométricas e físicas apresentadas na tabela 15. Obtém-se para este carregamento, os deslocamentos mostrados na tabela 16.

Figura 47: Viga do exemplo 1.

Tabela 15: Características geométricas e físicas para a viga da figura 47.

VIGA	CABO	CONECTOR
$b_{viga} = 0,1m$ e $h_{viga} = 0,3m$	$\phi_{cabo} = 0,025m$	$A_{conector} = 30,0m^2$
$A_{viga} = 0,03m^2$	$A_{cabo} = 4,91.10^{-4}m^2$	$I_{conector} = 0,225m^4$
$I_{viga} = 0,000225m^4$	$\mu = 0,0$	
$E_{viga} = 2,83.10^{+10} N/m^2$	$E_{cabo} = 2,10.10^{+11} N/m^2$	CARREGAMENTO
$\nu_{viga} = 0,2$	$\varepsilon_{0,cabo} = 1,0 \text{ } ^0/_{00}$	$P = 200000N$
$G_{viga} = 1,18.10^{+10} N/m^2$	$F_{0,cabo} = 1,03.10^{+5} N$	

Tabela 16: Deslocamentos e deformações na viga da figura 47.

Nó	X _{indef}	Y _{indef}	X _{def}	Y _{def}
1	0,00E+00	0,00E+00	2,0036550E-04	0,0000000E+00
2	1,00E+00	0,00E+00	0,0000000E+00	-3,5119780E-03
3	2,00E+00	0,00E+00	-2,0036550E-04	0,0000000E+00
4	1,00E+00	-1,00E-01	-4,2256330E-20	-3,5119780E-03

Note-se que graficamente o deslocamento pode ser mostrado pelo esquema da figura 48.

Figura 48: Deslocamento na viga do exemplo 1.

6.5.2. Exemplo 2: Cabo com escorregamento e sem atrito

Imagine-se a mesma viga mostrada na figura 47, com a mesma carga aplicada, porém é imposta uma deformação inicial no cabo, através de um macaco, conforme mostra o esquema da figura 49 a seguir. Obtém-se para este carregamento, os deslocamentos mostrados na tabela 18.

Figura 49: Viga do exemplo 2.

Tabela 17: Características geométricas e físicas para a viga da figura 49.

VIGA	CABO	CONECTOR
$b_{viga} = 0,1m$ e $h_{viga} = 0,3m$	$\phi_{cabo} = 0,025m$	$A_{conector} = 30,0m^2$
$A_{viga} = 0,03m^2$	$A_{cabo} = 4,91.10^{-4}m^2$	$I_{conector} = 0,225m^4$
$I_{viga} = 0,000225m^4$	$\mu = 0,0$	
$E_{viga} = 2,83.10^{+10} N/m^2$	$E_{cabo} = 2,10.10^{+11} N/m^2$	CARREGAMENTO
$\nu_{viga} = 0,2$	$\varepsilon_{0,cabo} = 1,0^0/_{00}$	$P = 200000N$
$G_{viga} = 1,18.10^{+10} N/m^2$	$F_{0,cabo} = 1,03.10^{+5} N$	

Tabela 18: Deslocamentos e deformações na viga da figura 49.

Nó	X _{indef}	Y _{indef}	X _{def}	Y _{def}
1	0,00E+00	0,00E+00	2,0036550E-04	0,0000000E+00
2	1,00E+00	0,00E+00	0,0000000E+00	-3,5119780E-03
3	2,00E+00	0,00E+00	-2,0036550E-04	0,0000000E+00
4	1,00E+00	-1,00E-01	-4,2256330E-20	-3,5119780E-03

Note-se que graficamente o deslocamento pode ser mostrado pelo esquema da figura 50, e devido ao cabo não ter atrito, este problema apresenta os mesmos resultados do exemplo 1, discutido anteriormente.

Figura 50: Deslocamento na viga do exemplo 2.

6.5.3. Exemplo 3: Cabo com escorregamento e com atrito

Imagine-se a mesma viga mostrada na figura 49, com as mesmas condições iniciais, entretanto, agora o cabo tem atrito de $\mu = 0,30$ como mostra a tabela 19.

Note-se que agora, existem dois elementos de cabo, um que passa pela polia e outro por dentro do macaco. O elemento de cabo (5) é sem atrito ao passo que no elemento de cabo (4) o atrito fica todo na polia, representada pelo nó 4 na figura 49. Serão analisados dois casos a seguir.

6.5.3.1. CASO 1: viga com carga concentrada

Seja a viga da figura 51, com as características geométricas e físicas mostradas na tabela 19. Obtém-se, para este caso, os deslocamentos mostrados na figura 52.

Figura 51: Carregamento aplicado na viga do exemplo 3 - CASO 1.

Tabela 19: Características geométricas e físicas para a viga do exemplo 3 - CASO 1.

VIGA	CABO	CONECTOR
$b_{viga} = 0,1m$ e $h_{viga} = 0,3m$	$\phi_{cabo} = 0,025m$	$A_{conector} = 30,0m^2$
$A_{viga} = 0,03m^2$	$A_{cabo} = 4,91.10^{-4}m^2$	$I_{conector} = 0,225m^4$
$I_{viga} = 0,000225m^4$	$\mu = 0,30$	
$E_{viga} = 2,83.10^{+10} N/m^2$	$E_{cabo} = 2,10.10^{+11} N/m^2$	CARREGAMENTO
$\nu_{viga} = 0,2$	$\varepsilon_{0,cabo} = 1,0^0/00$	$P = 200000N$
$G_{viga} = 1,18.10^{+10} N/m^2$	$F_{0,cabo} = 1,03.10^{+5} N$	

Tabela 20: Deslocamentos e deformações na viga do exemplo 3 - CASO 1.

Nó	X_{indef}	Y_{indef}	X_{def}	Y_{def}
1	0,00E+00	0,00E+00	3,1427380E-04	0,0000000E+00
2	1,00E+00	0,00E+00	1,0000000E+00	-3,1339810E-03
3	2,00E+00	0,00E+00	1,9997043E+00	0,0000000E+00
4	1,00E+00	-1,00E-01	9,9999665E-01	-1,0313398E-01
5	2,10E+00	1,00E-02	2,1020864E+00	1,1883678E-02
6	1,50E+00	-5,00E-02	1,5015822E+00	-5,1388337E-02

Note-se que graficamente o deslocamento pode ser mostrado pelo esquema da figura 52, com deslocamentos menores que no caso anterior.

Figura 52: Deslocamento na viga do exemplo 3 - CASO 1.

6.5.3.2. CASO 2: viga com carga distribuída

Seja a viga da figura 53, com as características geométricas e físicas mostradas na tabela 19. Obtém-se para este caso, os deslocamentos mostrados na figura 54.

Figura 53: Carregamento aplicado na viga do exemplo 3 - CASO 2.

Tabela 21: Características geométricas e físicas para a viga do exemplo 3 - CASO 2.

VIGA	CABO	CONECTOR
$b_{viga} = 0,1m$ e $h_{viga} = 0,3m$	$\phi_{cabo} = 0,025m$	$A_{conector} = 30,0m^2$
$A_{viga} = 0,03m^2$	$A_{cabo} = 4,91.10^{-4}m^2$	$I_{conector} = 0,225m^4$
$I_{viga} = 0,000225m^4$	$\mu = 0,30$	
$E_{viga} = 2,83.10^{+10} N/m^2$	$E_{cabo} = 2,10.10^{+11} N/m^2$	CARREGAMENTO
$\nu_{viga} = 0,2$	$\varepsilon_{0,cabo} = 1,0 \frac{0}{00}$	$Q = 200000 N/m$
$G_{viga} = 1,18.10^{+10} N/m^2$	$F_{0,cabo} = 1,03.10^{+5} N$	

Para este caso, os deslocamentos são mostrados na tabela 22.

Tabela 22: Deslocamentos e deformações na viga do exemplo 3 - CASO 2.

Nó	X _{indef}	Y _{indef}	X _{def}	Y _{def}
1	0,00E+00	0,00E+00	2,8756050E-04	0,0000000E+00
2	1,00E+00	0,00E+00	1,0000000E+00	-1,1088420E-03
3	2,00E+00	0,00E+00	1,9997293E+00	0,0000000E+00
4	1,00E+00	-1,00E-01	9,9999696E-01	-1,0110884E-01
5	2,10E+00	1,00E-02	2,1021311E+00	1,1694484E-02
6	1,50E+00	-5,00E-02	1,5016097E+00	-5,0377776E-02

Note-se que graficamente o deslocamento pode ser mostrado pelo esquema da figura 54.

Figura 54: Deslocamento na viga do exemplo 3 - CASO 2.

Note-se que agora, devido à carga ser distribuída no trecho do elemento (2), os deslocamentos são menores que no caso da carga concentrada, descrito anteriormente.

Muitos sistemas estruturais utilizam-se, em concepções, de estruturas de cabos, que têm o uso nobre e freqüente na Engenharia. O modelamento matemático deste tipo de estrutura desperta interesse de muitos pesquisadores, por envolver, com complexidade, relações geometricamente não-lineares. Segundo a NBR-6118:2003 no anexo A - Efeito do Tempo no Concreto Estrutural, a influência de

fenômenos de relaxação do aço da armadura de protensão é importante em uma série de casos, tais como:

- Deslocamentos;
- Encunhamentos;
- Perda de Protensão (Perdas imediatas e perdas progressivas);
- Redistribuição de tensões internas (adaptação por fluência);
- Verificação das exigências relativas ao Estado Limite de Formação de Fissuras e ao Estado Limite de Descompressão.

Dentro deste contexto, a metodologia que será empregada no capítulo 7 através do MEF para o elemento de cabo com escorregamento fornece procedimentos naturais para simular o processo de montagem e a resposta aos carregamentos de estruturas de cabos em geral, além de ter campos promissores de aplicação no modelamento de estruturas de concreto protendido, das tenso-estruturas e das estruturas de pontes.

As dificuldades encontradas na abordagem da NBR-6118:2003 para simular numericamente a aplicação da força de protensão, e posteriormente a ancoragem do cabo de protensão, juntamente com as perdas provocadas pelo encunhamento, “macaqueamento” e relaxação, justificou a implementação e formulação de um elemento de macaco que será utilizado nos próximos capítulos. Esse elemento é capaz de simular, num primeiro instante, a ação de um macaco hidráulico e, num segundo momento, a ancoragem do cabo e as perdas de protensão iniciais devido ao encunhamento. Já o elemento finito de cabo, além de simular a protensão, também, é capaz de computar em um dado instante, as perdas progressivas provocadas pelo fenômeno da relaxação do aço de protensão.

Especificamente, dentro do contexto da análise de estruturas de concreto protendido sob efeito do tempo, o elemento de cabo escorregando com atrito, tem a vantagem de facilitar as seguintes tarefas:

- Simulação do cabo de protensão ou do sistema de protensão;
- Aplicação da força inicial de protensão através de uma simulação de “macaqueamento”;
- Simulação do encunhamento e perdas imediatas de protensão;
- Simulação das perdas progressivas através da relaxação do aço.

Capítulo 7

Estudo das estruturas de barras de concreto armado e protendido

Apresenta-se a seguir uma breve introdução sobre o Método dos Elementos Finitos (MEF), fazendo-se em seguida, uma análise das equações constitutivas da fluência, da retração, da fissuração, de eventuais plastificações das armaduras de aço, e de construções por etapas, para análise de estruturas de concreto armado e protendido, levando-se em conta a concomitância de todos os fenômenos envolvidos.

Ainda neste capítulo, será levado em conta o AIT obtido da FSF no processo de integração de tensões. Devido à consideração da linearidade da função de fluência da NBR 6118:2003, as análises aqui realizadas levam a estrutura a trabalhar no Estádio II, que admite comportamento linear dos materiais e despreza a resistência à tração do concreto. Destaca-se que esta metodologia foi implementada no programa computacional PEFSYS.

7.1. Formulação do MEF para elementos de barras

7.1.1. Elemento isoparamétrico de viga

Para elementos isoparamétricos de barra, como mostra a *Figura 55*, obtém-se as seguintes interpolações dos deslocamentos e rotações:

$$u = \sum_{i=1}^h N_i u_i, \quad v = \sum_{i=1}^h N_i v_i, \quad \text{e} \quad \theta = \sum_{i=1}^h N_i \theta_i \quad (7.1)$$

onde h representa o número de nós do elemento e N_i são funções de x da matriz de interpolação dos deslocamentos e geometria N .

Figura 55: Elementos isoparamétricos de barra.

Para elementos de barra de 2 nós ou elementos de barras de 3 nós as funções de interpolações e os pontos de Gauss podem ser encontrados em ZIENKIEWICZ[59], chegando-se a funções de interpolações conforme (7.1).

7.1.2. Trabalho virtual externo

Considerando-se na análise através do MEF, define-se o vetor deslocamento $\mathbf{d}$ e o vetor dos deslocamentos nodais do elemento, respectivamente, por

$$\mathbf{d} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ \theta \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{p} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^h \end{bmatrix}. \quad (7.2)$$

sendo h o numero de nós do elemento. Portanto, pode-se escrever que

$$\mathbf{d} = \mathbf{N}\mathbf{p}. \quad (7.3)$$

Chamando-se de $\mathbf{q}$ o vetor dos esforços na estrutura, o trabalho externo em cada elemento pode ser representado pela integral ao longo de todo o comprimento L da estrutura, dado por

$$\delta W_{ext}^e = \int_L \mathbf{q}^T \delta \mathbf{d} \, dx. \quad (7.4)$$

Substituindo-se (7.3) em (7.4), obtém-se

$$\delta W_{ext}^e = \int_L \mathbf{q}^T \mathbf{N} \delta \mathbf{p} \, dx = \int_L \mathbf{q}^T \mathbf{N} \, dx \, \delta \mathbf{p}, \quad (7.5)$$

e definindo-se o vetor dos esforços nodais externos do elemento por

$$\mathbf{P}_{ext} = \int_L \mathbf{N}^T \mathbf{q} \, dx \quad \text{ou} \quad \mathbf{P}_{ext}^T = \int_L \mathbf{q}^T \mathbf{N} \, dx, \quad (7.6)$$

finalmente, pode-se determinar o trabalho externo em cada elemento por

$$\delta W_{ext}^e = \mathbf{P}_{ext}^T \delta \mathbf{p}. \quad (7.7)$$

Assumindo-se que $\mathbf{A}_e$ seja a matriz de conectividade, ou matriz de incidência, que relaciona os nós dos elementos com os nós da estrutura, o deslocamento nodal de cada elemento finito de barra é obtido por

$$\mathbf{p}_e = \mathbf{A}_e \mathbf{r}, \quad \text{com} \quad \mathbf{r} = \begin{bmatrix} d^1 \\ d^2 \\ \vdots \\ d^{Nno} \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

sendo o vetor dos deslocamentos nodais na estrutura e definido de forma análoga ao vetor $\mathbf{p}$, onde Nno é o número de nós na estrutura.

Portanto, o trabalho externo para a estrutura pode ser escrito como

$$\delta W_{ext} = \sum_{e=1}^{Nel} \delta W_{ext}^e, \quad (7.9)$$

onde Nel é o número de elementos. Com a ajuda de (7.7) e (7.8), é fácil obter

$$\delta W_{ext} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{P}_{ext}^T \mathbf{A}_e \delta \mathbf{r}. \quad (7.10)$$

Chamando o vetor dos esforços nodais externos da estrutura de

$$\mathbf{R}_{ext} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^T \mathbf{P}_{ext} + (\mathbf{R}_c)_e \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_{ext}^T = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{P}_{ext}^T \mathbf{A}_e + (\mathbf{R}_c^T)_e, \quad (7.11)$$

onde $\mathbf{R}_c$ é o vetor das forças concentradas nos nós da estrutura.

Até o presente momento, as forças concentradas nos nós da estrutura não estavam sendo computadas. Se houver alguma força concentrada nos nós da estrutura, o vetor $\mathbf{R}_c$ deve ser considerado. Portanto, finalmente pode-se escrever que

$$\delta W_{ext} = \mathbf{R}_{ext}^T \delta \mathbf{r}. \quad (7.12)$$

7.1.3. Trabalho virtual interno

Na análise de estruturas planas de barras por meio do MEF utiliza-se ou a teoria estrutural de Bernoulli-Euler ou a de Timoshenko. Em ambas as teorias as deformações específicas nas seções transversais são dadas por

$$\varepsilon(x, y) = \bar{\varepsilon}(x) - y\kappa(x) \quad (7.13)$$

onde x é a coordenada ao longo do eixo da barra, y é a coordenada ao longo da altura da seção transversal, $\bar{\varepsilon}(x)$ é deformação específica no eixo da barra e $\kappa(x)$ é a rotação específica das seções transversais. Na opinião do autor a teoria de Timoshenko é preferível na análise por meio do MEF, pois leva a elementos finitos mais simples e no caso tridimensional não depende da posição do eixo das barras. Em SANTOS[41] se faz uma abordagem mais detalhada sobre a análise da viscoelasticidade do concreto sob o ponto de vista da aplicação do MEF através da teoria de Timoshenko para solução de problemas em estruturas aporticadas planas de concreto armado e protendido.

Pode-se então construir, para uma seção transversal qualquer, dois vetores energeticamente conjugados: o vetor das deformações generalizadas; e o vetor dos esforços internos, definidos respectivamente por

$$\varepsilon = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon} \\ \kappa \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \sigma = \begin{bmatrix} N \\ M \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \int_A \sigma dA \\ -\int_A \sigma y dA \end{bmatrix}, \quad (7.14)$$

onde A é a seção transversal; N e M são os esforços solicitantes normais de uma seção transversal, ou seja, o esforço normal e o momento fletor totais, respectivamente. Observe-se que $\sigma = \sigma(y)$ e $dA = b(y)dy$, onde $b(y)$ é a largura da seção transversal na coordenada y . Note-se que, em geral, a seção transversal é heterogênea, como ilustrado na figura 56, composta por concreto, aço passivo e aço de protensão. A seção de concreto pode ser, por sua vez, também heterogênea, composta por concretos de diversos tipos e idades submetidos a ambientes diferentes.

Figura 56: Seção transversal genérica.

Adicionalmente, pode-se escrever que $\varepsilon = \mathbf{D} \mathbf{d}$, onde

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} \frac{d}{dx} & 0 \\ 0 & \frac{d}{dx} \end{bmatrix}, \quad (7.15)$$

e com a ajuda de (7.3), facilmente obtém-se

$$\varepsilon = \mathbf{B} \mathbf{p}, \quad (7.16)$$

sendo $\mathbf{B} = \mathbf{D} \mathbf{N}$. Então, pode-se escrever que

$$\delta \varepsilon = \mathbf{B} \delta \mathbf{p}. \quad (7.17)$$

Portanto, agora se pode escrever o princípio dos trabalhos virtuais para os esforços internos para cada elemento, usando os dois vetores energeticamente conjugados em (7.14) como

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_L \sigma^T \delta \varepsilon \, dx. \quad (7.18)$$

Esta expressão ainda pode ser escrita como

$$\delta W_{\text{int}}^e = \int_L \sigma^T \mathbf{B} \delta \mathbf{p} \, dx = \int_L \sigma^T \mathbf{B} \, dx \, \delta \mathbf{p}. \quad (7.19)$$

Chamando o vetor dos esforços nodais internos do elemento de

$$\mathbf{P}_{\text{int}} = \int_L \mathbf{B}^T \sigma \, dx = \int_L \sigma^T \mathbf{B} \, dx, \quad (7.20)$$

pode-se escrever que o trabalho interno para cada elemento da estrutura seja dado por

$$\delta W_{\text{int}}^e = \mathbf{P}_{\text{int}}^T \delta \mathbf{p}. \quad (7.21)$$

O trabalho interno para a estrutura pode ser escrito como

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{Nel} \delta W_{\text{int}}^{el} = \delta W_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{P}_{\text{int}}^T \delta \mathbf{p}. \quad (7.22)$$

Com a ajuda da matriz de incidência ou matriz de conectividade $\mathbf{A}_e$, obtém-se

$$\delta W_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{P}_{\text{int}}^T \mathbf{A}_e \delta \mathbf{r}. \quad (7.23)$$

Chamando o vetor dos esforços nodais internos da estrutura de

$$\mathbf{R}_{\text{int}} = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{A}_e^T \mathbf{P}_{\text{int}} \quad \text{ou} \quad \mathbf{R}_{\text{int}}^T = \sum_{e=1}^{Nel} \mathbf{P}_{\text{int}}^T \mathbf{A}_e \quad (7.24)$$

a expressão (7.23) pode ser reescrita como

$$\delta W_{\text{int}} = \mathbf{R}_{\text{int}}^T \delta \mathbf{r}. \quad (7.25)$$

Definindo-se o vetor dos esforços nodais residuais como

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_{\text{ext}} - \mathbf{R}_{\text{int}}, \quad (7.26)$$

a condição de equilíbrio se estabelece quando

$$\mathbf{R} = \mathbf{0}. \quad (7.27)$$

7.2. Análise matricial das estruturas planas de concreto armado e protendido

Lembrando-se que a tensão no algoritmo de integração de tensões resultante da função de fluência é atualizada a cada incremento de tempo t_{i+1} por meio de

$$\sigma_{i+1} = D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1}). \quad (7.28)$$

A solução de (7.14), a cada incremento de tempo, é obtida através de dois procedimentos, um linear, e outro não-linear, como segue.

7.2.1. Caso Linear

Considere-se uma seção transversal qualquer, conforme a figura 57, constituída de concreto de mesma idade, sob compressão ao longo de toda seção, e os aços da armadura passiva e de protensão trabalhando em regime elástico, ou seja, supondo-se o comportamento elástico linear, para os aços ativos e passivos e para o concreto de (7.14).

Figura 57: Seção transversal com concreto totalmente comprimido e de mesma idade.

Agora com a ajuda do AIT, isto é, considerando-se (7.28), e por compatibilidade de deformação da seção transversal, a força normal N de (7.14), em t_{i+1} , se escreve como

$$N_{i+1} = \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1}) dA + \int_{A^s} E^s \varepsilon_{i+1} dA + \int_{A^p} E^p (\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^p) dA, \quad (7.29)$$

onde a primeira integral representa a parcela devido à contribuição do concreto sendo A^c a área da seção de concreto; a segunda integral representa a parcela devido à contribuição do aço da armadura passiva sendo A^s a área de armadura passiva e E^s o módulo de elasticidade da armadura passiva; e finalmente a terceira integral representa a parcela devido à contribuição do aço de protensão sendo A^p a área de armadura de protensão, E^p o módulo de elasticidade da armadura de protensão. Note-se que $\varepsilon_{i+1}^p = \varepsilon_0^p + \varepsilon_{i+1}^r$ computa a deformação inicial e as perdas da armadura ativa devida somente a armadura de protensão, isto é, imaginando-se a viga de concreto infinitamente rígida, atribui-se a ε_0^p as deformações de pré-alongamento e efeito do atrito e de outras perdas imediatas, e a ε_{i+1}^r as perdas devido ao fenômeno da relaxação do aço de protensão.

Sendo os alongamentos numa seção transversal dados por (7.13), é fácil obter

$$\begin{aligned} N_{i+1} = & \bar{\varepsilon}_{i+1} \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} dA - \kappa_{i+1} \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} y dA - \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA \\ & + \bar{\varepsilon}_{i+1} \int_{A^s} E^s dA + \kappa_{i+1} \int_{A^s} E^s y dA \\ & + \bar{\varepsilon}_{i+1} \int_{A^p} E^p dA - \kappa_{i+1} \int_{A^p} E^p y dA + \int_{A^p} E^p \varepsilon_{i+1}^p dA \end{aligned} \quad (7.30)$$

Vale lembrar que, para um melhor entendimento deste trabalho, estão sendo utilizados subscritos para se identificar instantes e sobrescritos para se caracterizar as grandezas físicas.

Analogamente à obtenção de (7.29), o momento fletor M de (7.14) no intervalo de tempo t_{i+1} pode ser escrito como

$$M_{i+1} = - \int_{A^c} y D_{i+1}^{\text{alg}} (\varepsilon_{i+1} - \varepsilon_{i+1}^s - \alpha_{i+1}) dA - \int_{A^s} y E^s \varepsilon_{i+1} dA - \int_{A^p} y E^p (\varepsilon_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^p) dA, \quad (7.31)$$

donde, levando-se em conta (7.13), facilmente obtém-se

$$\begin{aligned} M_{i+1} = & -\bar{\varepsilon}_{i+1} \int_{A^c} y D_{i+1}^{\text{alg}} dA + \kappa_{i+1} \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} y^2 dA + \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA \\ & - \bar{\varepsilon}_{i+1} \int_{A^s} y E^s dA + \kappa_{i+1} \int_{A^s} E^s y^2 dA \\ & - \bar{\varepsilon}_{i+1} \int_{A^p} y E^p dA - \kappa_{i+1} \int_{A^p} E^p y^2 dA - \int_{A^p} E^p \varepsilon_{i+1}^p y dA \end{aligned} \quad (7.32)$$

Pode-se escrever o vetor das tensões generalizadas, dado em (7.14), da seguinte forma matricial

$$\sigma_{i+1} = D_{i+1} \varepsilon_{i+1} + \sigma_{i+1}^0, \text{ onde} \quad (7.33)$$

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} dA + \int_{A^s} E^s dA + \int_{A^p} E^p dA & - \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} y dA - \int_{A^s} E^s y dA - \int_{A^p} E^p y dA \\ \text{sim.} & \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} y^2 dA + \int_{A^s} E^s y^2 dA + \int_{A^p} E^p y^2 dA \end{bmatrix} \quad (7.34)$$

$$\varepsilon_{i+1} = \begin{bmatrix} \bar{\varepsilon}_{i+1} \\ \kappa_{i+1} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} - \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA + \int_{A^p} E^p \varepsilon_{i+1}^p dA \\ \int_{A^c} D_{i+1}^{\text{alg}} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA - \int_{A^p} E^p \varepsilon_{i+1}^p y dA \end{bmatrix}$$

Note-se que D_{i+1} é simétrica, e que a heterogeneidade da seção acopla os esforços normais com os momentos fletores. Observe-se que D_{i+1}^{alg} , ε_{i+1}^s e ε_{i+1}^p são homogêneos dentro da seção transversal. Já α_{i+1} tem distribuição linear. Observe-se também que σ_{i+1}^0 computa todas as deformações anteriores ao instante $i + 1$ (fluência; retração; pré-alongamento, perdas imediatas e a relaxação do aço de protensão), e que as integrais sobre as armaduras em (7.34) podem ser substituídas por somatórias, como será discutido a seguir.

Figura 58: Seções transversais com concretos diferentes e totalmente comprimidos.

Considere-se, agora, uma seção transversal qualquer como mostra a figura 58-a, onde o concreto apresenta-se totalmente comprimido, porém com idades diferentes, isto é, concretos diferentes na mesma seção, o que significa dizer, concretos com resistência diferentes, ou submetidos a diferentes fatores ambientais. Suponha-se, também, comportamento elástico linear, e que a seção transversal seja formada por NC partes de concreto diferentes, por NS camadas de armadura passiva e por NP camadas de armadura de protensão. Então, é fácil observar que se pode escrever a expressão (7.33) em cada seção do concreto. Logo, obtém-se

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{11} & D_{i+1}^{12} \\ \text{sim.} & D_{i+1}^{22} \end{bmatrix}, \quad \sigma_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} - \sum_{m=1}^{NC} \left(D_{i+1}^{\text{alg}} \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA \right)_m + \sum_{m=1}^{NP} (E^p \varepsilon_{i+1}^p A^p)_m \\ \sum_{m=1}^{NC} \left(D_{i+1}^{\text{alg}} \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA \right)_m - \sum_{m=1}^{NP} (E^p \varepsilon_{i+1}^p y A^p)_m \end{bmatrix},$$

$$\text{sendo} \begin{cases} D_{i+1}^{11} = \sum_{m=1}^{NC} (D_{i+1}^{\text{alg}} A^c)_m + \sum_{m=1}^{NS} (E^s A^s)_m + \sum_{m=1}^{NP} (E^p A^p)_m \\ D_{i+1}^{21} = - \sum_{m=1}^{NC} (D_{i+1}^{\text{alg}} S^c)_m - \sum_{m=1}^{NS} (E^s y A^s)_m - \sum_{m=1}^{NP} (E^p y A^p)_m \\ D_{i+1}^{22} = \sum_{m=1}^{NC} (D_{i+1}^{\text{alg}} I^c)_m + \sum_{m=1}^{NS} (E^s y^2 A^s)_m + \sum_{m=1}^{NP} (E^p y^2 A^p)_m \end{cases} \quad (7.35)$$

com $(\bullet)_m$ definindo cada camada, assim como $(S^c)_m = \left(\int_{A^c} y dA \right)_m$ e $(I^c)_m = \left(\int_{A^c} y^2 dA \right)_m$ são os momentos estáticos de segunda ordem e o momento de inércia para cada camada de concreto respectivamente.

Note-se que D_{i+1} é simétrica, e que a heterogeneidade da seção, também, acopla os esforços normais com os momentos fletores. Observe-se também, que em (7.35) $(D_{i+1}^{\text{alg}})_m$ e $(\varepsilon_{i+1}^s)_m$ são homogêneos dentro da seção transversal para concretos de mesma idade e submetidos aos mesmos fatores ambientais. $(\varepsilon_{i+1}^p)_m$ também é homogêneo, a não ser que protensão seja feita em instantes diferentes em cada uma destas seções transversais. Já $(\alpha_{i+1})_m$ é linear em $(y)_m$, dentro de cada parte da seção de concreto, o que facilita bastante a integração em (7.35). Em análises mais simples pode-se utilizar (7.35), desprezando-se a contribuição das armaduras à rigidez.

Admite-se ainda, o caso de uma seção transversal, concretada em duas etapas, como mostra a figura 58-b, onde o concreto nas duas camadas apresenta-se comprimido, porém com idades diferentes, ou seja, a camada m_1 foi concretada em um tempo t_1 e a camada m_2 em t_2 . É fácil observar que quando for concretada a camada m_2 , já vai existir deformação na camada m_1 . Portanto, a deformação ao longo do tempo quando ainda não existe a camada m_2 é escrita análoga a (7.13) e vale $\varepsilon(t) = \bar{\varepsilon}(t) - y\kappa(t)$, que para a camada m_2 se escreve como $(\varepsilon(t))_{m=2} = [\bar{\varepsilon}(t) - y_{m=2}\kappa(t)] - [\bar{\varepsilon}(t_2) - y_{m=2}\kappa(t_2)]$, ou seja, $(\varepsilon(t))_{m=2} = \varepsilon_{\text{total}} - \varepsilon(t_2)$ onde $\varepsilon_{\text{total}}$ é a deformação ao longo do tempo na estrutura, e $\varepsilon(t_2)$ é a deformação até o tempo t_2 na camada m_2 , imaginado que ela existisse. Genericamente, para m camadas pode-se escrever que $(\varepsilon(t))_m = [\bar{\varepsilon}(t) - y_m\kappa(t)] - [\bar{\varepsilon}(t_2) - y_m\kappa(t_2)]$, isto é, $(\varepsilon(t))_m = \varepsilon_{\text{total}} - \varepsilon(t_c)_m$, sendo t_c o instante de concretagem. Assim a deformação na parte m da seção transversal é dada por

$$(\varepsilon(t))_m = \begin{cases} 0 & \text{se } t < (t_c)_m \\ (\varepsilon(t))_m = \varepsilon_{\text{total}} - \varepsilon(t_c)_m & \text{se } t \geq (t_c)_m \end{cases} \quad (7.36)$$

7.2.2. Caso Não-Linear

Seja uma seção qualquer, conforme a figura 59-a, constituída de concreto de mesma idade, porém apresentando uma zona tracionada, ou mesmo, com os aços passivos e de protensão trabalhando em regime plástico, isto é, supondo-se o comportamento não-linear para (7.14), pode-se escrever que $\sigma_{i+1}^c = 0$, $\sigma_{i+1}^s = \pm f_{yk}$, e $\sigma_{i+1}^p = \pm f_{pyk}$. No entanto, para uma seção genérica, tem-se para o concreto e para os aços as seguintes condições:

Figura 59: Seções transversais com concretos sob tração.

$$\begin{aligned}
 \sigma_{i+1}^c &= \begin{cases} D_{i+1} (\varepsilon_{i+1} - \alpha_{i+1}) & \text{se } \sigma_{i+1}^c \leq 0 \\ 0 & \text{se } \sigma_{i+1}^c > 0 \end{cases} \\
 \sigma_{i+1}^s &= \begin{cases} E_s \varepsilon_{i+1} & \text{se } |\sigma_{i+1}| \leq f^{yk} \\ \pm f^{yk} & \text{se } |\sigma_{i+1}| > f^{yk} \end{cases}, \\
 \sigma_{i+1}^p &= \begin{cases} E^p (\varepsilon_{i+1} + \varepsilon^p) & \text{se } |\sigma_{i+1}| \leq f^{pyk} \\ \pm f^{pyk} & \text{se } |\sigma_{i+1}| > f^{pyk} \end{cases}
 \end{aligned} \quad (7.37)$$

onde f^{yk} e f^{pyk} são, respectivamente, os valores característicos da resistência do aço de armadura passiva e armadura ativa ou de protensão.

Observe-se que (7.37) indica que o concreto contribui para a rigidez da seção, somente, quando este está comprimido, e que não há contribuição da parcela de concreto sob tração. Já para os aços, quer sejam de armadura passiva ou ativa, estes trabalham segundo a lei de Hooke no regime elástico, e apresentam um patamar de escoamento quando em regime plástico. Portanto, quando há uma região de concreto sob tração, ou quando o aço está no regime plástico, a análise se torna não-linear, pois não se tem a posição da linha neutra, e assim não se consegue montar o vetor das tensões generalizadas σ_{i+1} dado em (7.33). No entanto, utilizando-se o processo iterativo de Newton, este problema pode ser solucionado facilmente. Para isso, define-se uma grandeza muito importante para esse processo, a matriz dos módulos tangentes de rigidez elástica da seção transversal, dada por

$$\hat{D} = \frac{\partial \sigma}{\partial \varepsilon}. \quad (7.38)$$

Suponha-se agora, que no instante t_{i+1} a deformação dada por (7.13) possa ser escrita como $\varepsilon_{i+1} = \hat{\varepsilon}_{i+1}(\bar{\varepsilon}, \kappa)$. Então, como a tensão é função da deformação, tem-se que $\sigma_{i+1}(\varepsilon_{i+1}) = \hat{\sigma}_{i+1}(\bar{\varepsilon}_{i+1}, \kappa_{i+1})$. Isto é, o vetor das tensões generalizadas pode ser escrito como $\sigma_{i+1} = \hat{\sigma}_{i+1}(\bar{\varepsilon}_{i+1}, \kappa_{i+1})$. Logo, com a ajuda de (7.13) e (7.14) tem-se

$$\hat{D}_{i+1} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{i+1}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial N_{i+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{i+1}} & \frac{\partial N_{i+1}}{\partial \kappa_{i+1}} \\ \frac{\partial M_{i+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{i+1}} & \frac{\partial M_{i+1}}{\partial \kappa_{i+1}} \end{bmatrix}. \quad (7.39)$$

Considerando-se (7.30), e lembrando-se que a tensão é função da deformação $\bar{\varepsilon}$ e da rotação específica κ , ou seja, $\sigma_{i+1} = \hat{\sigma}_{i+1}(\bar{\varepsilon}_{i+1}, \kappa_{i+1})$, pela regra da cadeia, obtém-se

$$\begin{cases} \frac{\partial N_{i+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{i+1}} = \int_{A^c} \frac{\partial \sigma_{i+1}^c}{\partial \varepsilon_{i+1}} dA + \int_{A^s} \frac{\partial \sigma_{i+1}^s}{\partial \varepsilon_{i+1}} dA + \int_{A^p} \frac{\partial \sigma_{i+1}^p}{\partial \varepsilon_{i+1}} dA \\ \frac{\partial N_{i+1}}{\partial \kappa_{i+1}} = - \int_{A^c} \frac{\partial \sigma_{i+1}^c}{\partial \kappa_{i+1}} y dA - \int_{A^s} \frac{\partial \sigma_{i+1}^s}{\partial \kappa_{i+1}} y dA - \int_{A^p} \frac{\partial \sigma_{i+1}^p}{\partial \kappa_{i+1}} y dA \end{cases}, \quad (7.40)$$

onde se levou em conta a fácil verificação de

$$\frac{\partial \varepsilon_{i+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{i+1}} = 1 \text{ e } \frac{\partial \varepsilon_{i+1}}{\partial \kappa_{i+1}} = -y. \quad (7.41)$$

Agora para a parcela do momento de (7.32), e como já se sabe que a tensão é função da deformação $\bar{\varepsilon}$ e da rotação específica κ , pela regra da cadeia, com a ajuda de (7.41) facilmente chega-se a

$$\begin{cases} \frac{\partial M_{i+1}}{\partial \bar{\varepsilon}_{i+1}} = - \int_{A^c} \frac{\partial \sigma_{i+1}^c}{\partial \varepsilon_{i+1}} y dA - \int_{A^s} \frac{\partial \sigma_{i+1}^s}{\partial \varepsilon_{i+1}} y dA - \int_{A^p} \frac{\partial \sigma_{i+1}^p}{\partial \varepsilon_{i+1}} y dA \\ \frac{\partial M_{i+1}}{\partial \kappa_{i+1}} = \int_{A^c} \frac{\partial \sigma_{i+1}^c}{\partial \varepsilon_{i+1}} y^2 dA + \int_{A^s} \frac{\partial \sigma_{i+1}^s}{\partial \varepsilon_{i+1}} y^2 dA + \int_{A^p} \frac{\partial \sigma_{i+1}^p}{\partial \varepsilon_{i+1}} y^2 dA \end{cases}. \quad (7.42)$$

Logo, é fácil atualizar cada parcela da matriz (7.39) onde as tensões devem satisfazer as condições expressas em (7.37), ou seja,

$$\hat{D}_{i+1} = \begin{bmatrix} \int_{A^c} D_{i+1}^{alg} dA + \begin{bmatrix} \int_{A^s} E^s dA \\ \pm f^{yk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{A^p} E^p dA \\ \pm f^{pyk} \end{bmatrix} & - \begin{bmatrix} \int_{A^c} D_{i+1}^{alg} y dA \\ 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_{A^s} E^s y dA \\ \pm f^{yk} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \int_{A^p} E^p y dA \\ \pm f^{pyk} \end{bmatrix} \\ \text{sim.} & \begin{bmatrix} \int_{A^c} D_{i+1}^{alg} y^2 dA \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{A^s} E^s y^2 dA \\ \pm f^{yk} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \int_{A^p} E^p y^2 dA \\ \pm f^{pyk} \end{bmatrix} \end{bmatrix}. \quad (7.43)$$

Note-se que esta matriz é simétrica e semelhante à (7.34). Observe-se que em (7.43) D_{i+1}^{alg} , também, é homogêneo dentro da seção transversal de concreto não fissurado, isto é, a seção não tracionada. $\hat{D}_{i+1}$ indica que o concreto contribui para a rigidez da seção, somente quando este está comprimido, e que não há contribuição da parcela de concreto sob tração.

Considere-se, agora, uma seção transversal qualquer como mostra a figura 59-b. Esta seção é formada por NC partes de diferentes concretos, isto é, concreto com resistências diferentes, ou submetidos a diferentes fatores ambientais, e com pelo menos uma das partes de concreto sob tração. Admite-se NS camadas de armadura passiva, apresentado alguns dos aços em escoamento, ou seja, em regime plástico. Considere-se, também, pelo menos uma parte das NP camadas de armadura de protensão em regime plástico. Logo, é fácil observar que análogo ao caso descrito para a expressão

(7.35), pode-se escrever (7.43) para cada seção de concreto, e cada camada de aço. Logo, utilizando-se o processo iterativo de Newton, este problema pode ser resolvido, obtendo-se uma matriz similar a (7.43) que pode ser escrita como

$$\hat{D}_{i+1} = \frac{\partial \sigma_{i+1}}{\partial \varepsilon_{i+1}} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{11} & D_{i+1}^{12} \\ \text{sim.} & D_{i+1}^{22} \end{bmatrix},$$

$$\text{sendo} \begin{cases} D_{i+1}^{11} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{NC} (D_{i+1}^{alg} A^c)_m + \begin{cases} \sum_{m=1}^{NS} (E^s A^s)_m + \begin{cases} \sum_{m=1}^{NP} (E^p A^p)_m \\ \pm f^{yk} \end{cases} \\ 0 \end{cases} \\ D_{i+1}^{21} = \begin{cases} -\sum_{m=1}^{NC} (D_{i+1}^{alg} S^c)_m + \begin{cases} -\sum_{m=1}^{NS} (E^s y A^s)_m + \begin{cases} -\sum_{m=1}^{NP} (E^p y A^p)_m \\ \pm f^{pyk} \end{cases} \\ 0 \end{cases} \\ D_{i+1}^{22} = \begin{cases} \sum_{m=1}^{NC} (D_{i+1}^{alg} I^c)_m + \begin{cases} \sum_{m=1}^{NS} (E^s y^2 A^s)_m + \begin{cases} \sum_{m=1}^{NP} (E^p y^2 A^p)_m \\ \pm f^{pyk} \end{cases} \\ 0 \end{cases} \end{cases}, \quad (7.44)$$

onde $(S^c)_m$ é o momento estático de segunda ordem e $(I^c)_m$ é o momento de inércia da seção transversal de concreto, já definidos anteriormente.

Note-se que esta matriz é simétrica, e também, semelhante à matriz (7.35). Portanto, considerando-se diferentes concretos na mesma seção, apresentando uma zona de concreto tracionado, ou tanto o aço da armadura passiva, como o aço de protensão, trabalhando em regime plástico, o problema não-linear pode ser resolvido pelo processo iterativo de Newton. $\hat{D}_{i+1}$ indica que o concreto contribui para a rigidez da seção, somente, quando este está comprimido, e que não há contribuição da parcela de concreto sob tração. Já para o aço da armadura passiva, ou o aço de protensão, estes trabalham segundo a lei de Hooke no regime elástico e apresentam um patamar de escoamento quando em regime plástico. Observe-se também, que no caso de não-linearidade, a expressão (7.33) se escreve como

$$\sigma_{i+1} = \hat{D}_{i+1} \varepsilon_{i+1}. \quad (7.45)$$

Então, onde foi parar o vetor das tensões iniciais σ_{i+1}^0 , que guarda os esforços iniciais de protensão juntamente com aqueles provocados por α_{i+1} na iteração anterior? Esta resposta é clara, pois, como na primeira iteração de Newton, deve-se fazer uma análise linear, esse tensor já foi computado em $\sigma_{i=1}$. E durante a análise não-linear, cada vez que ocorrer a atualização de $\hat{D}_{i+1}$ será também computado α_{i+1} , deixando assim essa análise consistente com o que foi apresentado no caso linear.

Resta agora discutir de que forma não considerar a parcela de concreto tracionado no cálculo através do MEF, ou seja, admita-se que a segunda seção $(A^c)_2$ de concreto, mostrada na figura 60, apresente tanto concreto sob compressão, como concreto tracionado, e não se sabe ao certo a posição da linha neutra. Para esta seção, a parte de concreto comprimida contribui para a rigidez da seção, porém a parte tracionada não. Como levar em consideração a parte de concreto tracionada? Bem, para

isso, vai-se imaginar esta seção transversal, com cada uma das NC partes de concretos diferentes, subdivididas em NF faixas como mostra a figura 60. Então em cada faixa, verifica-se se a mesma esta sob tração ou compressão. Se ela estiver sob tração, simplesmente é ignorada no cálculo. Note-se que, quanto menos espessas forem as faixas em uma determinada seção de concreto, mais refinado será o resultado, pois a linha neutra passará por uma dessas faixas, isto é, a quantidade NF de faixas deve ser tal, que não prejudique os resultados obtidos pelo Algoritmo de Integração de Tensões.

Vale ressaltar que as mesmas considerações, devem ser levadas em contas para os aços, porém, com a seguinte diferença: se uma das camadas de aço estiver em regime plástico, deve-se considerar f_y^k e f_{py}^k , respectivamente, para os aços de armadura passiva e ativa, ao invés de desprezá-los como acontece para o concreto.

Figura 60: Concretos de diferentes idades divididos em várias faixas.

7.3. Programas Comerciais de Elementos Finitos

Para se usufruir de programas comerciais de elementos finitos ou de análise matricial, deve-se limitar o cálculo ao caso linear, isto é, ainda não se pode usar um programa comercial linear como, por exemplo, o SAP, TQS, STRAP para se calcular a adaptação por fluência proposta através de uma metodologia consistente, como se analisou anteriormente na seção 7.2.2. (página 104). No entanto, o caso linear analisado na seção 7.2.1. (página 101) permite ser inserido dentro de um procedimento que utilize de programas comerciais, tais quais os citados acima. Para isso, suponha o comportamento elástico linear de (7.37). Em uma análise elástica convencional, tem-se no lugar de (7.34) para uma análise incremental

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} \int_{A^c} E^c dA + \int_{A^s} E^s dA + \int_{A^p} E^p dA & -\int_{A^c} E^c y dA - \int_{A^s} E^s y dA - \int_{A^p} E^p y dA \\ \text{sim.} & \int_{A^c} E^c y^2 dA + \int_{A^s} E^s y^2 dA + \int_{A^p} E^p y^2 dA \end{bmatrix}, \quad (7.46)$$

$$\text{e } \sigma_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} -E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA + N_0^p \\ E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA + M_0^p \end{bmatrix}$$

onde E^c é o módulo de elasticidade do concreto, assim como $N_0^p = \int_{A^p} E^p \varepsilon_0^p dA$ e

$M_0^p = -\int_{A^p} E^p \varepsilon_0^p y dA$ são os esforços iniciais devidos à protensão. Isto é, imaginando a estrutura de

concreto infinitamente rígida e já incluído o efeito do atrito e de outras perdas imediatas. Note-se que a heterogeneidade da seção acopla os esforços normais com os momentos fletores. Em cada incremento o problema a ser resolvido, ou pelo MEF, ou pela análise matricial, é linear e muito semelhante à análise elástica convencional. Esta linearidade é, todavia, perdida se for admitida fissuração do concreto na tração, plastificação do concreto na compressão ou plastificação nos aços. Observe-se também, que o módulo de elasticidade do concreto E^c em (7.46) toma o lugar de D_{i+1}^{alg} , que é uma variável que computa a alteração do módulo de elasticidade do concreto em cada incremento de tempo.

Ainda dentro deste contexto, uma outra aproximação pode ser feita em (7.46), que é desprezar a rigidez da armadura, mas não os esforços iniciais de protensão, ou seja, N_0^p e M_0^p no cálculo de σ_{i+1}^0 . Esta hipótese simplificadora é muito usual entre os engenheiros calculistas, pois estes admitem que o aço contribui com cerca de 2% a 4% da área da seção transversal na matriz de rigidez da estrutura. Todavia, é importante ressaltar que essa hipótese leva a superestimar a fluência, pois os aços podem contribuir entre 20% a 40% das tensões de σ_{i+1}^0 . Observe-se também, que pela metodologia apresentada, tanto os aços de armadura ativa quanto os aços da armadura passiva, fazem o papel de “inibidores” da fluência.

Caso se considere uma seção transversal qualquer, como a que se mostrou na figura 58-a, ou seja, concretos diferentes e totalmente comprimidos na mesma seção, ou submetidos a diferentes fatores ambientais. No lugar de (7.35), em uma análise convencional, seja por meio de um programa de elementos finitos ou de um programa de análise matricial qualquer, pode-se escrever as seguintes expressões

$$D_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{11} & D_{i+1}^{12} \\ sim. & D_{i+1}^{22} \end{bmatrix}, e \quad \sigma_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} -\sum_{m=1}^{NC} \left(E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA \right)_m + \sum_{m=1}^{NP} (E^p \varepsilon_{i+1}^p A^p)_m \\ \sum_{m=1}^{NC} \left(E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA \right)_m - \sum_{m=1}^{NP} (E^p \varepsilon_{i+1}^p y A^p)_m \end{bmatrix},$$

$$\text{sendo} \begin{cases} D_{i+1}^{11} = \sum_{m=1}^{NC} (E^c A^c)_m + \sum_{m=1}^{NS} (E^s A^s)_m + \sum_{m=1}^{NP} (E^p A^p)_m \\ D_{i+1}^{21} = -\sum_{m=1}^{NC} (E^c S^c)_m - \sum_{m=1}^{NS} (E^s y A^s)_m - \sum_{m=1}^{NP} (E^p y A^p)_m \\ D_{i+1}^{22} = \sum_{m=1}^{NC} (E^c I^c)_m + \sum_{m=1}^{NS} (E^s y^2 A^s)_m + \sum_{m=1}^{NP} (E^p y^2 A^p)_m \end{cases} \quad (7.47)$$

e caso se despreze a contribuição das armaduras à rigidez (7.47) se escreve como

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_{i+1} &= \begin{bmatrix} \sum_{m=1}^{NC} (E^c A^c)_m & -\sum_{m=1}^{NC} (E^c S^c)_m \\ \text{sim.} & \sum_{m=1}^{NC} (E^c I^c)_m \end{bmatrix} \mathbf{e} \\
\boldsymbol{\sigma}_{i+1}^0 &= \begin{bmatrix} -\sum_{m=1}^{NC} \left(E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA \right)_m + \sum_{m=1}^{NP} (N_0^p)_m \\ \sum_{m=1}^{NC} \left(E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA \right)_m - \sum_{m=1}^{NP} (M_0^p)_m \end{bmatrix}.
\end{aligned} \quad (7.48)$$

Suponha-se agora que a seção de concreto seja homogênea, isto é, composta por um só concreto submetido aos mesmos fatores ambientais, então, chega-se a

$$\mathbf{D}_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{\text{alg}} A & D_{i+1}^{\text{alg}} S^c \\ \text{sim.} & D_{i+1}^{\text{alg}} I \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} -D_{i+1}^{\text{alg}} \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA + N_0^p \\ D_{i+1}^{\text{alg}} \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA + M_0^p \end{bmatrix}. \quad (7.49)$$

Nestas condições, colocando-se o eixo no centro de gravidade da seção transversal, tem-se no lugar de (7.49) para uma análise incremental as seguintes expressões

$$\mathbf{D}_{i+1} = \begin{bmatrix} D_{i+1}^{\text{alg}} A & 0 \\ \text{sim.} & D_{i+1}^{\text{alg}} I \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} -D_{i+1}^{\text{alg}} \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA + N_0^p \\ D_{i+1}^{\text{alg}} \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA + M_0^p \end{bmatrix}, \quad (7.50)$$

onde A e I são a área e o momento de inércia da seção transversal. Em uma análise pelo MEF ou pela análise matricial, pode-se utilizar as expressões acima. Isto significa, que a cada incremento de tempo, deve-se fazer uma análise linear alterando-se a cada passo o módulo de elasticidade D_{i+1}^{alg} , ou seja, deve-se atualizar o módulo de elasticidade do concreto ($E_{i+1}^c = D_{i+1}^{\text{alg}}$) em cada incremento de tempo. Note-se que este tipo de análise pode ser realizada por qualquer programa comercial de elementos finitos ou de análise matricial, desde que seja atualizada a expressão (7.49) ou a expressão (7.50).

Note-se que em uma análise convencional através de um programa comercial baseado no MEF ou na análise matricial, se o concreto fosse elástico linear, a derivada do diagrama tensão-deformação seria constante e igual ao módulo de elasticidade, isto é, a expressão dada por (7.38) resultaria numa forma semelhante a (7.50) e expressa por

$$\mathbf{D}_{i+1} = \begin{bmatrix} E^c A & 0 \\ \text{sim.} & E^c I \end{bmatrix} \mathbf{e} \quad \boldsymbol{\sigma}_{i+1}^0 = \begin{bmatrix} -E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) dA + N_0^p \\ E^c \int_{A^c} (\alpha_{i+1} + \varepsilon_{i+1}^s) y dA + M_0^p \end{bmatrix}, \quad (7.51)$$

ou seja, em cada incremento de tempo, D_{i+1}^{alg} assumiria o valor de E^c . Observe-se também que por se tratar de um valor constante E^c pode ser retirado da integral em (7.51). Vale ressaltar que a maioria desses programas comerciais apresenta a matriz $\mathbf{D}_{i+1}$ escrita como em (7.51) e sempre é possível mudar o sistema de coordenadas sem mudar fisicamente o problema. Com isso, é possível sempre

atualizar a matriz D_{i+1} de (7.51) em cada incremento de tempo. Isto é, a cada instante deve-se atualizar o módulo de elasticidade através do AIT de forma semi-automática, por exemplo, com uso de uma planilha Excel ou até mesmo de forma automática através de uma rotina computacional. No entanto, não basta somente atualizar o módulo de elasticidade E^c em cada instante, é preciso também mudar o sistema de coordenadas da matriz D_{i+1} em (7.49) escrevendo-se de forma semelhante a (7.51). Note-se, porém, que se o programa comercial aceitar a matriz D_{i+1} da forma de (7.49), o problema resulta em um procedimento mais simples, como será discutido nos dois casos a seguir.

7.3.1. CASO A: Programas que aceitam $S^c \neq 0$ ou “off-set” de eixo

Suponha-se que o programa comercial de elementos finitos ou de análise matricial, como por exemplo, o ANSYS ou o ADINA, tenha a possibilidade de se computar $S^c \neq 0$, ou de se fazer uma translação de eixo, ou seja, um “off-set”. A atualização de (7.49) é direta, isto é, não seria necessário modificar a forma de D_{i+1} de (7.49) para (7.50) ou (7.51).

Figura 61: Representação genérica de elementos finitos de barras.

Note-se que com a utilização desses tipos de programas comerciais, a atualização de D_{i+1} se torna muito simples e de fácil implementação, pois é possível, em cada incremento de tempo, atualizar a matriz D_{i+1} através do AIT. Observe-se também que a geometria do problema original não se altera, isto é, não é necessária a mudança de eixo como mostra a figura 61-a.

7.3.2. CASO B: Programas que supõem $S^c = 0$

Seja um programa comercial que só admita $S^c = 0$, como é o caso, por exemplo, do SAP, TQS e STRAP. Então para se calcular a adaptação por fluência deve-se simular a mudança de eixo ou o “off-set” da matriz D_{i+1} de (7.49) em cada incremento de tempo para se escrever de forma

semelhante a (7.50). Para isso, suponha-se que S^c se encontra no eixo original, como mostrado na figura 61-a. Em cada elemento j deve-se calcular de translação de eixo, ou seja, y^{off} por

$$y^{off} = \frac{S^c}{A}, \quad (7.52)$$

com y^{off} deve-se também transladar o momento de inércia pela regra de Steiner. Logo, tem-se

$$I^{off} = I - \left(\frac{S^c}{A} \right)^2 = I - (y^{off})^2, \quad (7.53)$$

onde I^{off} é o momento de inércia com o “off-set”. Note-se que é preciso ainda criar um elemento infinitamente rígido para ligar cada elemento finito j , como apresentado na figura 61-b. Observe-se que cada elemento j apresenta seu par de (y^{off}, I^{off}) e a análise incremental também pode ser atualizada pelo Algoritmo de Integração de Tensões de forma semi-automática, como por exemplo, com uso de uma planilha Excel ou até mesmo de forma automática através de uma rotina computacional.

Na modelagem computacional deste problema, tanto por elementos finitos, quanto pela análise matricial, considerou-se um trecho de viga dividida em vários elementos, com características geométricas de cada seção transversal de concreto e o posicionamento do aço da armadura ativa e passiva. A calibração da FSF deve ser realizada com base na função de fluência da NBR-6118:2003 com a ajuda, por exemplo, do método da colocação apresentado no capítulo 5. Note-se também, que através da metodologia aqui exposta o crescimento do módulo de elasticidade $E(\zeta)$ e o efeito da relaxação no aço de protensão podem seguir os mesmos critérios recomendados pela NBR-6118:2003.

Um fato crucial neste problema é que em um determinado momento, as seções transversais apresentam concretos diferentes, ou seja, com diferentes idades. Com isso, a deformação por fluência tem funções distintas para cada concreto. Lembre-se que concretos mais velhos apresentam menos deformação por fluência que concretos mais novos. Destaca-se também a importância de se considerar a estrutura no Estádio II, que admite comportamento linear dos materiais e despreza a resistência à tração do aço. Segundo a NBR-6118:2003, esta hipótese é considerada razoável para carregamentos da ordem de 40% da resistência média do concreto e permitem o emprego do Princípio da Superposição de McHENRY[28].

No caso de haver plastificação das armaduras ou do concreto por compressão, e fissuração do concreto sob tração, o AIT proposto associado ao MEF ou a análise matricial leva a um sistema de equações não-lineares em cada incremento de tempo. Isto é, quando há uma região de concreto sob tração, ou quando tanto o aço quanto o concreto sob compressão estão no regime plástico, a análise se torna não-linear, pois não se tem a posição da linha neutra, e assim não se consegue montar o vetor das tensões generalizadas σ_{i+1} dado em (7.14). No entanto, utilizando-se do *Processo Iterativo de Newton*, este problema pode ser solucionado facilmente, como foi mostrado em SANTOS[41]. Destaca-se que esta metodologia foi implementada no programa computacional PEFSYS.

Capítulo 8

Simulação Numérica

Neste capítulo, apresenta-se simulações numéricas dos fenômenos abordados nesta tese. Apesar de se verificar a resposta do comportamento de cada fenômeno isoladamente, todos foram implementados no programa PEFSYS, de modo a poder atuar concomitantemente. Neste programa, duas classes de cabos foram implementadas: a) uma “nl_cable” que representa o cabo não-linear escorregando com atrito e; b) “tendon” que é baseado no “nl_cable” incorporando-se o efeito da relaxação. Também foi adaptado o elemento de macaco para simular as perdas por encunhamento (“jack_loss”).

Ainda neste programa, foi implementado uma classe de elemento “creep” que leva em consideração: a) “creep1” baseia-se no AIT da função de fluência proposta por PIMENTA e SANTOS[38]; b) “creep2” baseia-se no AIT da FGF de SANTOS[41] e; c) “creep3” leva em consideração o AIT da FSF proposta nesta tese e que será usada nos exemplos a seguir.

8.1. Estudo da calibração da FSF

Para exemplificar a força da metodologia aqui exposta, considere-se as hipóteses e os procedimentos apresentados no capítulo 5. Dentro deste contexto, propõe-se estudar o efeito da calibração da FSF (Função Simplificada de Fluência) proposta neste trabalho em função das suas variáveis. Para tanto, admite-se os parâmetros da tabela 23 para obtenção e ajuste da FSF com a função de fluência da NBR 6118:2003. Os estudos serão apresentados nas seções seguintes.

Tabela 23: Parâmetros para obtenção e calibração da FSF com a função de fluência da NBR 6118.

Parâmetros		
$t_c = 0$ dias	$A_c = 1,3183 \text{ m}^2$	$T_{med} = 20^0 \text{ C}$
$t_0 = 28$ dias	$u_{ar} = 7,3801 \text{ m}$	$\alpha = 1 ; s = 1 \text{ (CP II)}$
$t_{\infty} = 10950$ dias	$U = 70 \%$	slump test = 8 cm

8.1.1. Variação da umidade relativa do ambiente

Figura 62: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de U .

Este problema é o mesmo apresentado no capítulo 5, seção 5.2.1. (página 60) para uma umidade relativa do ambiente $U = 70\%$. Contudo, considere a variação da umidade no intervalo $20\% \leq U \leq 90\%$. Note-se na figura 62 que, quando a umidade relativa do ar aumenta o coeficiente de referência no instante final $C(\zeta_\infty)$ diminui, ou vice-versa. Lembre-se que o coeficiente de referência quando $t \rightarrow \infty$ é igual ao valor do coeficiente de fluência definido em (2.4), isto é, $C(\zeta_\infty) = \varphi$. Logo, considerando-se constantes os demais parâmetros, é de se esperar que quanto maior a umidade relativa do ar, menor a difusão de água da estrutura de concreto, implicando assim numa redução do índice de fluência φ .

Em SANTOS[42] comenta-se que um dos fatores mais importantes que atuam sobre a fluência e a retração por secagem é a umidade relativa do ar que envolve o concreto. Em linhas gerais, pode-se dizer que, para um mesmo concreto, quanto menor a umidade relativa, maior a fluência. A difusão da água adsorvida e da água mantida por tensão capilar nos pequenos poros (abaixo de $50nm$) da pasta

endurecida de cimento para grandes vazios capilares dentro do sistema ou para a atmosfera, é um processo dependente do tempo, que acontece ao longo de grandes períodos.

Espera-se que um aumento na umidade atmosférica torne mais lenta a taxa relativa do fluxo de umidade do interior para as superfícies externas do concreto. Concorde-se com NEVILLE[31] (veja também NEVILLE[32]) quando este afirma que a influência da umidade relativa é menor, no caso de elementos que tenham atingido equilíbrio higroscópico com o meio antes da aplicação da carga. Assim, na realidade, não é a umidade relativa que tem grande efeito sobre a fluência, mas o processo de secagem. Comentário neste sentido também é feito por MEHTA[27].

8.1.2. Variação da espessura fictícia

Devido à resistência a difusão de água do interior do concreto para a atmosfera, a taxa de perda de água seria controlada, obviamente, pelo comprimento do caminho percorrido pela água, que está sendo expelida tanto durante a retração por secagem quanto pela fluência. Portanto, considerando a umidade relativa do ar constante ($U = cte$), o tamanho e a forma da peça de concreto determinam a magnitude da retração e da fluência. Conforme descrito no capítulo 2, é conveniente expressar os parâmetros geométricos em termos da espessura fictícia ou efetiva, dada por

$$h = h^{fict} = \gamma \frac{2 \cdot A^c}{\mu^{ar}} \quad (7.55)$$

em metros $[m]$, cujo domínio é o intervalo $[0,05;1,60]$. Lembre-se que para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes. Nesta equação A^c é a área da seção transversal do concreto, μ^{ar} é o perímetro molhado ou a parte do perímetro externo da seção transversal em contato com o ar, e γ é o coeficiente de umidade relativa. Portanto, suponha-se que

$$\begin{cases} h^{\min} = 2 \cdot \gamma \left(\frac{A^c}{\mu^{ar}} \right)^{\min} = 0,05 \\ h^{\max} = 2 \cdot \gamma \left(\frac{A^c}{\mu^{ar}} \right)^{\max} = 1,60 \end{cases} \quad \text{com } \gamma = 1 + e^{-7,8+0,1U} \quad (7.57)$$

sendo U a umidade relativa em porcentagem (%). Para um intervalo de $20\% \leq U \leq 90\%$, γ varia exponencialmente como mostra a figura 63. Entretanto, para efeito de ensaio, suponha-se $U = 70\%$ como parâmetro de referência utilizado na tabela 23. Logo, tem-se

$$\begin{aligned} h^{fict} &= 2 \cdot 1,44933 \left(\frac{A^c}{\mu^{ar}} \right) \\ \left(\frac{A^c}{\mu^{ar}} \right) &= \frac{h^{fict}}{2 \cdot 1,44933} \\ \left(\frac{A^c}{\mu^{ar}} \right) &= 0,345 h^{fict} \end{aligned} \quad (7.59)$$

Figura 63: Variação de γ em função de U .

Figura 64: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de h^{fict} .

Supondo-se $A_c = 1,3183 \text{ m}^2$ constante e fazendo-se variar h^{fict} , obtêm-se os resultados da figura 64. Note-se que quando a espessura fictícia aumenta, o coeficiente de referência no instante final $C(\zeta_\infty)$ diminui, ou vice-versa. Portanto, considerando-se os parâmetros apresentados na tabela 23 como referência, é fácil perceber através de (7.55), que a diminuição de h^{fict} implica no aumento de u^{ar} , ou seja, no aumento do perímetro exposto ao ar, aumentando assim a possibilidade da difusão da água da estrutura e, conseqüentemente o índice de fluência φ .

8.1.3. Variação do instante de carregamento

Considerando-se um elemento de concreto num ensaio de fluência proposto no capítulo 3 (seção 3.1. - página 21). Dependendo da magnitude e duração da tensão aplicada, o silicato de cálcio

hidratado¹³ na pasta endurecida de cimento, que na química do cimento é escrito como $C - S - H$, perderá uma grande quantidade de água adsorvida e até mesmo em certos casos perderá água capilar e a pasta apresentará uma deformação ao longo do tempo, ou seja, uma deformação por fluência. Isto não é para sugerir que não existam outras causas contribuindo para a fluência no concreto, entretanto a perda de água adsorvida sob pressão constante parece ser a causa mais importante. Essa difusão de água adsorvida¹⁴ também ocorre na retração por secagem, com a diferença que na retração não há solicitação externa de tensões e a água em questão é de hidratação em excesso da reação química exotérmica de endurecimento do cimento.

Pela própria definição de fluência, é fácil perceber que existe uma proporcionalidade direta entre a fluência e a tensão aplicada, exceção feita para elementos carregados em idades muito pequenas. Não existe um limite inferior da proporcionalidade porque o concreto é passível da fluência mesmo sob tensões muito pequenas. O limite superior de proporcionalidade é alcançado quando surgem, no concreto, microfissuras sérias, o que ocorre a uma tensão expressa com fração da resistência, a qual é menor para materiais mais heterogêneos.

Pode-se concluir com segurança que, dentro do intervalo das tensões nas estruturas em serviço, é válida a proporcionalidade entre a fluência e a tensão, e as expressões da fluência partem dessa idéia. A recuperação da fluência também é proporcional à tensão aplicada previamente. Acima do limite de proporcionalidade, a fluência aumenta com o aumento da tensão a uma razão crescente e existe uma relação tensão/resistência acima da qual a fluência produz a *ruptura por fluência*. Segundo NEVILLE[31], essa relação tensão/resistência está no intervalo de 0,80 a 0,90 da resistência estática a curto prazo. A fluência aumenta a deformação total até que seja atingido um valor limite que corresponde à deformação admissível máxima para o concreto dado. Essa afirmativa implica num conceito de ruptura baseado na deformação limite, pelo menos na pasta de cimento hidratada endurecida.

A resistência do concreto afeta consideravelmente o comportamento da deformação por fluência. Dentro de um grande intervalo de tempo, a deformação por fluência é inversamente proporcional à resistência do concreto no momento da aplicação da carga. Vale ressaltar que os códigos ou normas¹⁵ mostram direta ou indiretamente que é possível representar esta deformação como sendo uma função linear da relação tensão/resistência. Essa proporcionalidade foi confirmada por SANTOS[41], que ainda afirma que essa relação pode não ser uma relação fundamental, mas é

¹³ O *Silicato de Cálcio Hidratado*, $C-S-H$, constitui cerca de 50% a 60% do volume do sólido de uma pasta endurecida de cimento portland completamente hidratado e é, conseqüentemente, a mais importante na determinação das propriedades da pasta. O fato do termo $C-S-H$ ser hifenizado significa que o $C-S-H$ não é um composto bem definido. A relação C/S varia entre 1,5 e 2,0 e o teor de água estrutural varia ainda mais, dificultando extremamente uma quantificação de água adsorvida na pasta de cimento.

¹⁴ Conforme MEHTA[27], considera-se *água adsorvida* a água que está próxima do sólido, isto é, sob a influência de forças de atração as moléculas estão fisicamente adsorvidas na superfície do sólido na pasta. Define-se *água capilar* como a água nos vazios maiores do que 50Å. Pode ser descrita como sendo o volume de água que está livre da influência das forças de atração exercidas pela superfície sólida. Em resumo, presume-se que a deformação por fluência no concreto esteja relacionada principalmente à *remoção da água adsorvida* da pasta endurecida de cimento e a retração por secagem com a remoção da água próxima dos bordos, isto é, da superfície externa do elemento estrutural.

¹⁵ Aqui os códigos ou normas se referem aos estudados por SANTOS[41].

muito conveniente pois, na prática, a resistência do concreto é especificada e a tensão sob carga mantida é calculada pelo projetista.

Figura 65: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de t_0 .

Portanto, como a resistência do concreto cresce com o tempo, ou seja, sofre o fenômeno do envelhecimento, é preciso levar em consideração, então, a idade do concreto no instante de carregamento. Talvez por essa razão, a abordagem a partir da relação tensão/resistência é tida como mais prática do que a consideração, por exemplo, do tipo de cimento, da relação água/cimento e da idade do concreto, embora os códigos e normas também os leve em conta. De modo semelhante, não se considera a idade propriamente dita, sendo sua influência levada em conta através da resistência do concreto. É oportuno lembrar que mesmo os concretos bem antigos, ou seja, de idades avançadas, apresentam deformação por fluência.

Note-se na figura 65 o Ensaio de Fluência descrito capítulo 3, pois vários corpos-de-prova, todos com a mesma composição, mesmo instante de t_c , mesma geometria e sujeitos aos mesmos fatores ambientais foram submetidos a tensão em idades deferentes. Observe-se que a resposta da fluência é função da duração do carregamento $t - t_0 = \zeta - \zeta_0$ e da idade do concreto no instante de aplicação da carga $\zeta_0 = t_0 - t_c$. Isto é, quanto maior a duração de carregamento $t - t_0$, maior a deformação do concreto $\varepsilon(t)$, e quanto maior a idade do concreto no instante de carregamento ζ_0 , menor será a deformação $\varepsilon(t)$ do concreto ao longo do tempo.

8.1.4. Variação do tipo de cimento

O tipo de cimento tem efeito sobre a fluência através da interferência sobre a resistência do concreto logo após a aplicação da carga. Desta forma, qualquer comparação de concretos feitos com diferentes tipos de cimento deveria considerar a influência do tipo de cimento sobre a resistência no momento da solicitação. Portanto, os diversos tipos de cimento resultam sensivelmente em valores iguais de fluência. Porém, chama-se a atenção para o fato de que a velocidade de aumento da resistência tem considerável efeito na previsão da deformação por fluência, principalmente nos dias de hoje com a utilização de aditivos aceleradores de cura que aumentam significativamente a resistência do concreto nas primeiras idades.

A finura do cimento tem efeito sobre a evolução da resistência nas primeiras idades e, portanto, também sobre a fluência e retração por secagem. No entanto, não parece que a finura propriamente dita seja um fator de fluência ou retração por secagem. Resultados contraditórios podem ser atribuídos à influência direta do gesso. Quanto mais fino o cimento, maior a quantidade de gesso necessária, de modo que a remoagem de um cimento no laboratório sem adição de gesso produz um cimento inadequadamente retardado, que apresenta retração e fluência elevadas.

Atualmente, grande parte dos pesquisadores da química do cimento está interessada nos chamados “cimentos com pós-ativos”, isto é, a mistura ao cimento, de compostos muito finos, como a micro-sílica, com a finalidade de reduzir os espaços vazios deixados pela perda de água durante a reação exotérmica de cura da pasta. Esses pós são capazes de iniciar a reação pós-cura e assim diminuir os poros capilares da estrutura de concreto evitando ou dificultando a difusão da água adsorvida e, conseqüentemente diminuindo de forma significativa a fluência e a retração por secagem.

Em estudos feitos por NEVILLE[31], cimentos extremamente finos apresentam uma fluência inicial maior, mas, depois de carregados durante um ou dois anos, uma fluência menor. Isso talvez se deva ao aumento rápido de resistência do cimento mais fino resultando em uma redução da relação tensão/resistência efetiva. Vale comentar que no Anexo A da NBR 6118:2003, em seu item A. 2.4.1., há um coeficiente que depende da velocidade de endurecimento do cimento, para correção da idade do concreto, para diversos tipos de cimento. Porém, este coeficiente é um fator de correção da idade fictícia do concreto e não um fator propriamente de fluência.

Considerando-se os três valores possíveis da velocidade de endurecimento do cimento, para as três classes de Cimento Portland, obtém-se os resultados mostrados na figura 66.

Vale ressaltar que a variação da resistência do concreto é crucial na avaliação da afirmativa precedente de que o tipo de cimento não tem efeito sobre a fluência. Para uma mesma relação tensão/resistência, no momento de aplicação da carga, a fluência é tanto menor quanto maior o aumento relativo da resistência além desse momento. Na prática, percebe-se que a fluência aumenta, nesta ordem para os diversos tipos de cimento: a) de baixo calor de hidratação; b) comuns; e c) alta resistência inicial. No entanto, não existe dúvida de que para uma tensão constante a uma mesma idade inicial, a fluência aumenta para os cimentos nesta ordem: a) de alta resistência inicial; b) comuns; e c)

de baixo calor de hidratação. Essas duas constatações justificam a necessidade de uma completa qualificação das informações sobre os fatores de fluência.

Figura 66: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação de α e s .

8.1.5. Variação do tipo de abatimento ou “slump test”

O ensaio de abatimento ou “slump test” influencia diretamente na expressão (2.15), que por sua vez influencia diretamente no valor do coeficiente de deformação lenta irreversível φ^f através do coeficiente

$$\varphi^{1c} = b^{1c} (4,45 - 0,035U), \quad U \leq 90\% \quad \text{com} \quad \begin{cases} b^{1c} = 0,75 & (0 \leq \text{abatimento} \leq 4) \\ b^{1c} = 1,00 & (5 \leq \text{abatimento} \leq 9) \\ b^{1c} = 1,25 & (10 \leq \text{abatimento} \leq 15) \end{cases} \quad (7.60)$$

Note-se que para as faixas de consistência entre os intervalos $(0 \leq \text{abatimento} \leq 4)$ e $(10 \leq \text{abatimento} \leq 15)$, os valores já estão minorados e majorados de 25%, respectivamente, pelo coeficiente b^{1c} , e os resultados da influência no coeficiente de fluência estão ilustrados na figura 67.

Figura 67: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação do abatimento ou “slump test”.

8.1.6. Variação da temperatura média

Um fator relevante no comportamento da evolução da fluência ao longo do tempo é a temperatura média (T_{med}). No entanto, deve-se distinguir entre: a) o calor de hidratação que, basicamente influencia a retração por secagem, porém em certos casos também a fluência, e b) a variação de temperatura, uniforme ou não, produzida por fatores externos. O calor de hidratação produz um aumento de temperatura no concreto novo, que cresce com o aumento da qualidade do cimento, com o aumento do teor de cimento e com a diminuição da relação entre a superfície de resfriamento e o volume. Na prática, procura-se manter pequeno o aumento de temperatura devido ao calor de hidratação. Entretanto, as deformações devidas à temperatura, quando produzida no concreto endurecido por influência externa, afetam tanto os esforços solicitantes, dilatação térmica, por exemplo, quanto à deformação por fluência.

A temperatura à qual o concreto é exposto pode ter dois efeitos opostos sobre a fluência. Se uma peça de concreto é exposta a uma temperatura maior que a normal como parte do processo de cura, antes de ser carregada, a resistência aumentará e a deformação por fluência será menor que aquela de um concreto correspondente armazenado a uma temperatura mais baixa, como pode ser comprovado nos ensaios realizados na figura 68, para uma temperatura média variando entre $15^0C \leq T_{med} \leq 30^0C$. Por outro lado, a exposição à alta temperatura, durante o período em que está carregada, pode aumentar a fluência.

Figura 68: Calibração da FSF com a NBR 6118 - variação da temperatura média.

8.2. Testes do elemento de cabo

8.2.1. Ensaio de escorregamento

Considere-se um elemento de cabo, fixado nas extremidades, como mostra a figura 69-a. Aplica-se inicialmente uma força F_X no nó central do elemento (polia). Logo em seguida, aplica-se uma outra força F_Z , perpendicularmente à primeira. A direção e sentido das forças estão mostrados na figura 69-a, que representa a configuração inicial do elemento, ou a configuração de referência.

Figura 69: Configuração inicial e resultados do ensaio de escorregamento do elemento de cabo.

Admitindo-se as seguintes características físicas e geométricas: a) coeficiente de atrito variando $0 \leq \mu \leq 0,30$; b) área da seção transversal do cabo $A = 1,0 \cdot 10^{-2} m^2$; c) módulo de elasticidade longitudinal $E = 200 GPa$; d) intensidade da força $F_X = 1,0 \cdot 10^5 N$. Pode-se estudar o deslocamento do nó 2 à medida que se aumenta a força F_Z , e verificar computacionalmente para qual valor de F_Z o elemento começa a escorregar quando se varia o coeficiente de atrito μ .

Os resultados obtidos pelo programa computacional PEFSSYS são mostrados figura 69-b e comparados com os resultados analíticos. Portanto, verifica-se a validade entre os valores obtidos e os calculados analiticamente. Este problema foi retirado da dissertação de mestrado de DEIFELD[15].

8.2.2. Teste do macaqueamento

O elemento de macaco já estava programado no PEFSSYS, no entanto, fez-se uma adaptação para simular as perdas por encunhamento. Portanto, seja a estrutura composta por uma viga, um elemento de barra extremamente rígido, um elemento de cabo e um elemento de macaco, como ilustrado na figura 70, por sua configuração inicial. A viga tem uma seção transversal de $0,20 \times 0,30 m^2$, módulo de elasticidade longitudinal $E = 1,86 \cdot 10^8 N / m^2$, módulo de elasticidade transversal $G = 7,75 \cdot 10^8 N / m^2$, e comprimento de $\ell = 10,0 m$. O cabo tem uma seção transversal

de $A = 1,0 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$ e módulo de elasticidade $E = 2,10 \cdot 10^{11} \text{ N/m}^2$. O elemento rígido tem comprimento $\ell = 5,0 \text{ m}$, e a força de protensão a ser aplicada no macaco é $F_p = 700 \text{ kN}$.

Figura 70: Configuração inicial para problema de teste de macaqueamento.

Apesar de não se mostra os resultados computacionais. Este problema pode ser encontrado em DEIFELD[15], que pela aplicação da força de protensão a perpendicularidade entre o elemento rígido e a extremidade da viga é mantida, pois tal elemento sofre apenas movimento de corpo rígido. O elemento de macaco permanece perpendicular ao eixo do elemento rígido e sofre alongamento linear ao longo do eixo. No PEFSYS também se verifica o comportamento esperado para o elemento de macaco, mesmo para grandes deslocamentos e grandes deformações.

8.2.3. Teste das perdas por atrito

8.2.3.1. Cilindro com atrito

O objetivo deste exemplo é estudar a variação da força de protensão ao longo do cabo. Para tanto, considere-se o cilindro como ilustrado na figura 71. Admitindo-se as seguintes características físicas e geométricas: a) coeficiente de atrito variando $\mu = 0,30$; b) área da seção transversal do cabo $A = 1,0 \cdot 10^{-2} \text{ m}^2$; c) módulo de elasticidade longitudinal $E = 200 \text{ GPa}$; d) intensidade da força $F = 1,0 \cdot 10^5 \text{ N}$, pode-se estudar a variação da perda por atrito ao longo do cabo.

Suponha-se que o cilindro seja rígido e o cabo seja enrolado em volta dele. Na modelagem computacional, foram criados apoios fixos, nos nós de polia do cabo, para impedir seu deslocamento. Os resultados obtidos pelo programa computacional PEFSYS são mostrados figura 72. Portanto, verifica-se a validade dos valores obtidos.

Figura 71: Configuração inicial do ensaio de escorregamento do elemento de cabo - cilindro.

Figura 72: Resultados do ensaio de escorregamento do elemento de cabo - cilindro.

Note-se que o cabo enrolado no cilindro, apresenta uma configuração de perda exponencial ao longo de seu comprimento.

8.2.3.2. Cabo reto

Considere-se um cabo reto fixado nos nós de polias como mostra a figura 73. Aplica-se uma força F de protensão através do elemento de macaco. Supondo-se as seguintes características físicas e geométricas: a) coeficiente de atrito variando $k = 0,02$; b) área da seção transversal do cabo $A = 1,0 \cdot 10^{-2} m^2$; c) módulo de elasticidade longitudinal $E = 200 GPa$; d) intensidade da força $F = 1,0 \cdot 10^5 N$, pode-se então estudar a variação das perdas por atrito ao longo do cabo. Os resultados obtidos pelo programa PEFSYS são apresentados na figura 74.

Figura 73: Configuração inicial de um cabo reto.

Figura 74: Perdas da força de protensão de um cabo reto.

Note-se que o cabo reto apresenta agora uma perda linear ao longo de seu comprimento.

8.2.3.3. Cabo parabólico

Caso se queira, agora simular o mesmo cabo do exemplo anterior, com uma configuração inicial parabólica, conforme a figura 75 e com $\mu = 0,02$, obtém-se os resultados da figura 76, que embora pareça uma reta, a curva tem configuração de uma função exponencial.

Figura 75: Configuração inicial de um cabo parabólico.

Figura 76: Perdas da força de protensão de um cabo parabólico.

Observe-se que a curva da figura 76 foi plotada pela metade, ou seja, considerou-se no processamento somente o lado direito do eixo de simetria da parábola da figura 75.

8.2.3.4. Composição de cabo parabólico e reto

Ao se estuda os dois exemplos anteriores, sugere-se então analisar uma composição de cabo conforme ilustrado na figura 77. Esse processamento produziria uma perda exponencial nos primeiro 5,0 metros de cabo a partir do macaco, depois uma perda linear nos próximos 10,0 metros, e logo em seguida outra perda exponencial nos 5,0 metros restantes, como se fosse uma composição dos resultados dos dois problemas anteriores.

Figura 77: Configuração inicial de um cabo parabólico.

8.3. Exemplos de vigas de concreto protendido

A modelagem de um exemplo de viga de concreto protendido usando esse elemento de cabo, poderia ser conforme o esquema da figura 78. Primeiramente, modela-se o elemento de viga conforme -figura 78-a, depois de inserir os pontos dos elementos de cabo figura 78c, liga-se por elementos rígidos os nós de polia ao elemento de viga.

Figura 78: Configuração inicial de um cabo parabólico.

Capítulo 9

Considerações Finais

Nesta tese de doutorado procurou-se discutir e fixar tópicos relacionados à não-linearidade física e geométrica através do desenvolvimento de uma metodologia consistente e eficiente para análise de estruturas de concreto sob o efeito do tempo, levando-se em consideração os efeitos de deformação lenta, retração e fissuração do concreto, a perda de protensão e relaxação da armadura de protensão e a eventual plastificação dos aços (tanto os aços de armadura passiva quanto os aços de armadura ativa). Tais fenômenos foram analisados concomitantemente com a finalidade de melhor caracterizar o comportamento mecânico das estruturas sob efeito do tempo e sob condições de contorno impostas pelos sistemas construtivos, ou seja, construções por etapas.

Basicamente, dentro do contexto desta metodologia, quatro tipos de análise foram realizados: o primeiro tipo de abordagem foi relacionado com os materiais e suas constituições, onde se mostrou os efeitos do tempo no concreto estrutural; na segunda análise, procurou-se discutir fisicamente os tópicos relacionados aos fenômenos viscoelásticos no concreto estrutural (fluência e retração do concreto, e relaxação do aço); numa terceira abordagem representou-se, matematicamente, a descrição evolutiva dos fenômenos físicos acima citados, com o intuito de inseri-las numa metodologia computacional; e finalmente, o último tipo de análise desenvolvida constituiu em uma abordagem de linguagem mais moderna, utilizando-se do MEF e de recursos computacionais.

Destaca-se que esta tese de doutorado é uma continuação natural do trabalho de mestrado do autor (SANTOS[41]). Todavia, nesse trabalho de mestrado só levou-se em consideração o estudo da deformação lenta, deixando-se para um outro momento o estudo da relaxação do aço de protensão, das perdas de protensão, da retração e da adaptação por fluência, como os realizados aqui.

Pode-se dizer que o objetivo desta tese de apresentar metodologias consistentes e eficientes para a análise estrutural sob efeito do tempo, e poder compará-los com os critérios da NBR 6118:2003 foi atingido, pois buscou-se analisar estruturas de concreto sob efeito do tempo, de modo a solucionar os seguintes problemas típicos de engenharia:

- Prever a evolução dos fenômenos relacionados com o efeito do tempo no concreto estrutural;

- Analisar estruturas de concreto com a consideração do efeito do tempo;
- Calcular automaticamente flechas (deslocamentos) devido aos fenômenos viscoelásticos do concreto e da relaxação do aço;
- Cálculo da perda de protensão em estruturas de concreto protendido;
- Verificação automática do comportamento conjunto dos materiais estruturais.

Contudo, discutiu-se neste trabalho, uma metodologia baseada no MEF e bastante eficaz para a realização das seguintes tarefas: integração de tensões na seção transversal da estrutura com o mínimo de variáveis armazenadas tendo um baixo custo computacional sem a necessidade de se armazenar computacionalmente as variáveis internas envolvidas no controle e armazenagem de todo o histórico de tensões em um determinado ponto do processamento e, modelagem da fluência para concretos jovens, o que é importante, pois a protensão tem sido efetuada em pequenas idades do concreto. A Função Simplificada de Fluência - FSF, foi derivada da Função Geral de Fluência - FGF, proposta por SANTOS[41].

Mostrou-se também que o AIT da FSF possibilita a integração numericamente estável das tensões nas seções transversais da estrutura. Este algoritmo de integração de tensões teve profundas conseqüências na metodologia de análise apresentada nesta tese. No caso da viscoelasticidade linear do concreto, isto é, não se considerando os efeitos da plastificação das armaduras e da fissuração do concreto, o algoritmo proposto associado ao MEF, levou a um sistema de equações lineares em cada incremento de tempo. De outra forma, quando esses efeitos foram considerados, ou seja, no caso da viscoelasticidade não-linear, o algoritmo proposto resultou em um sistema de equações não-lineares em cada incremento de tempo.

Apresentou-se como se calibrar a FSF, com dados experimentais ou com funções empiricamente determinadas ou estabelecidas por normas técnicas ou códigos (nacionais e internacionais), exemplificado-se como se calibrar a FSF com a função de fluência da NBR 6118:2003.

Um problema freqüente nos dias de hoje e de grande importância na análise estrutural, é a possibilidade de num dado instante da análise, as seções transversais apresentarem concretos diferentes, ou seja, deformações por fluência com funções distintas para cada concreto. Outros fatos relevantes são: a questão de mudança do sistema estrutural em certo instante do processamento, possibilitando assim o estudo e a análise da adaptação por fluência e a consideração da contribuição do concreto tracionado no cálculo da rigidez da estrutura, assim como a não-contribuição deste para a deformação lenta. Note-se que a metodologia abordada neste trabalho permitiu a inserção destas idéias, possibilitando o uso de uma nova metodologia no emprego de estruturas pré-moldadas.

Nesta tese, apresentou-se uma discussão sobre a formulação geral de um elemento de cabo escorregando com atrito, que permite a análise não-linear de estruturas tensionadas com cabos de forma simples e eficiente através do MEF. As dificuldades encontradas na abordagem da NBR-6118:2003 para simular numericamente a aplicação da força de protensão, e posteriormente a ancoragem do cabo de protensão, juntamente com as perdas provocadas pelo encunhamento,

“macaqueamento” e relaxação, justificou a implementação e formulação de um elemento de macaco. Esse elemento foi capaz de simular, num primeiro instante, a ação de um macaco hidráulico e, num segundo momento, a ancoragem do cabo e as perdas de protensão iniciais devido ao encunhamento. Já o elemento finito de cabo, além de simular a protensão, também, foi capaz de computar em um dado instante, as perdas progressivas provocadas pelo fenômeno da relaxação do aço de protensão. Destaca-se que as formulações deste elemento foram implementadas no programa PEFSYS.

Dentro deste contexto, a formulação do elemento de cabo com escorregamento forneceu procedimentos naturais para simular o processo de montagem e a resposta aos carregamentos de estruturas de cabos em geral, além de ter campos promissores de aplicação no modelamento de estruturas de concreto protendido, das tenso-estruturas e das estruturas de pontes. A finalização deste trabalho foi através de simulações numéricas nas quais foram considerados os fenômenos abordados nesta tese.

Seguindo a metodologia aqui discutida e apresentada foram também publicados os artigos técnicos relacionados abaixo:

1. **Alterações das tensões e deformações nas vigas de concreto protendido: uma abordagem consistente através do método dos elementos finitos com a consideração da viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração, da protensão e de etapas construtivas.** Revista Engenharia: Estudo e Pesquisa, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Editora Interciência, Volume 5 - No 2, p. 53-67, Rio de Janeiro-RJ, julho-dezembro de 2002.
2. **Algoritmos de integração de tensões baseados em modelos reológicos viscoelásticos com envelhecimento.** Revista Engenharia: Estudo e Pesquisa, Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Editora Interciência, Volume 6 - Nº 1, p. 12-26, Rio de Janeiro-RJ, janeiro-julho de 2003.
3. **A maneira correta de se calcular a adaptação por fluência utilizando-se de programas comerciais de análise linear de estruturas reticuladas.** V SIMPÓSIO EPUSP sobre ESTRUTURAS de CONCRETO, Escola Politécnica da USP, São Paulo-SP, 7-10 de julho de 2003.
4. **Vigas planas de concreto protendido: uma abordagem eficiente para as alterações das tensões e deformações ao longo do tempo através do método dos elementos finitos.** 46º Congresso Brasileiro do Concreto - IBRACON, sessão Projeto de Estruturas de Concreto, Florianópolis-SC, agosto, 2004.
5. **Análise linear e não-linear de estruturas aporticadas de concreto armado e protendido: uma abordagem consistente através do método dos elementos finitos (MEF) com a consideração da viscoelasticidade, da plasticidade, da fissuração, da protensão e de etapas construtivas.** II SIMPÓSIO INTERNACIONAL SOBRE CONCRETOS ESPECIAIS - UVA - Universidade Estadual Vale do Acaraú e IEMAC - Instituto de Estudo dos Materiais de Construção, Sobral-CE, setembro de 2004.
6. **Algorithms of stress integration based on creep functions obtained from aging rheological viscoelastic models and applied to concrete structures.** XXVI Iberian Latin-American Congress

on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2005. Brazilian Assoc. for Comp. Mechanics (ABMEC) & Latin American Assoc. of Comp. Methods in Engineering (AMC), Guarapari, Espírito Santo, Brazil, 19th - 21st October 2005.

7. **Uma maneira consistente, eficiente e simples de se calcular a fluência através do MEF adaptando-se o procedimento da NBR-6118:2003.** VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 8-11 de abril de 2006.
8. **Algoritmo de integração de tensões para um elemento não-linear de cabo escorregando com atrito.** VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo-SP, 08-11 de abril 2006.

Acredita-se, baseado no que foi discutido e apresentado, que este trabalho contribuiu para o fornecimento de conhecimentos técnicos estruturados tanto para pesquisadores como para profissionais da área de construção civil. Em especial, as teorias que foram abordadas nesta tese encontram um campo vasto de aplicações na prática de projetos estruturais. Espera-se assim poder contribuir positivamente com o aumento na eficiência e rapidez dos métodos de dimensionamento e verificação, que atualmente são feitos por programas computacionais nos escritórios de cálculo, reduzindo desta forma o custo total dos projetos.

Referência Bibliográfica

- [1] ABNT - Associação Brasileira de Normas Técnicas. **NBR - 6118: Projeto e Execução de Obras de Concreto Armado**. São Paulo, 2003.
- [2] ACI, American Concrete Institute: **ACI 209-92. Prediction of Creep, Shrinkage, and Temperature Effects in Concrete Structures**. - ACI, 1992.
- [3] ANDRADE, W.P., ed., **Concretos massa, estrutural, projetado e compactado com rolo**. Ensaios e propriedades. São Paulo, Pini, 1997.
- [4] BATHE, K.J. **Finite Element Procedures**. New Jersey, Prentice Hall, Inc., 1996.
- [5] BAZANT, Z.P. **Creep and Shrinkage in Concrete Structure**. s.l. John Wiley & Sons Ltd., 1982.
- [6] BAZANT, Z.P. and PANULA, L. **Practical prediction of creep and shrinkage of concrete: Materials and Structure (Rilem, Paris) - Part I and II No. 69, 1978; Parts VI No. 72, 1979**
- [7] BRAGA, W.A. **Pontes Construídas por Balanços Sucessivos: Alguns Problemas Particulares**. São Paulo, Instituto de Engenharia - Publicação Técnica PT1, 1996.
- [8] CASTANHO, J.L.B.A. **Perdas Progressivas: Comentários aos itens 7 e 8.5.2 da NBR 7197 (Norma de Projeto de Estruturas de Concreto Protendido) - Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto - Adendo, 1989.**
- [9] CASTANHO, J.L.B.A. **Exemplo de aplicação da NBR-7197 no cálculo das variações de tensão no aço e no concreto, devido às perdas diferidas - Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto - Adendo, 1989.**
- [10] CASTANHO, J.L.B.A. **Métodos simplificados de cálculo, para a solução de problemas ligados as variações de tensão, ao longo do tempo, em peças de concreto protendido, exemplos - Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto - Adendo, 1989.**
- [11] CEB-FIP, **Comité Euro-International du Béton: International Recommendation for the Design and Construction of Concrete Structures**, 1976.
- [12] CEB-FIP: **Comité Euro-International du Béton - International Federation for Prestressing: Bulletin d'Information No 203 - Model Code 1990 - Final Draft, Chapters 1-3, July 1991.**

- [13] CHRISTENSEN, R.M. **Theory of Viscoelasticity**: An Introduction. 2.ed. New York, Academic Press Inc., 1982.
- [14] CREUS, G.J. **Viscoelasticity**: Basic Theory and Applications to Concrete Structures. Springer-Verlag, 1975.
- [15] DEIFELD, T.E.C.: **Aplicação de um elemento finito de cabo à modelagem numérica da protensão sem aderência**. Dissertação de mestrado. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. São Paulo, 2001.
- [16] DISCHINGER F. **Der Bauningeniur**. vol. 18, p. 487-520, 539-562, 595-621, 1937.
- [17] FERRAZ, J.C.F. **Vigas protendidas**: alterações das tensões, deformações e deslocamentos ao longo do tempo. BT/PEF-8616, 1986.
- [18] FERRAZ J.C.F. **A relação do concreto e a redistribuição das tensões nas peças de concreto armado**. BT/PEF 8603, 1986.
- [19] FERRAZ J.C.F. **Cômputo das deformações imediatas e lentas no comportamento das estruturas de concreto armado** - Associação Brasileira de Pontes e Estruturas, outubro, 1983.
- [20] FERRAZ J.C.F. **Contribuição da fluência do aço, da fluência e retração do concreto nos deslocamentos devido à flexão, nas peças de concreto armado e protendido**. BT/PEF - 8609, 1986.
- [21] FERRAZ J.C.F. **Evolução ao longo do tempo das tensões de cisalhamento nas vigas de concreto protendido**. BT/PEF 8606, 1986.
- [22] FERRAZ J.C.F. **Método dos mínimos quadrados no exame de alguns casos de instabilidade, computada a fluência do material**. BT/PEF 8808, 1988.
- [23] FRANÇA, R.L.S. e ISHITANI, H. **Concreto protendido - conceitos fundamentais**. Notas de aulas, PEF-317 - Estruturas de concreto III. Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2002.
- [24] GIMSING, N.J. **Cable Supported Bridges**: Concept & Design. John Wiley & Sons Ltd., 1983.
- [25] ISHITANI, H. PEF 313. **Concreto Protendido**. Notas de aula, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1997.
- [26] MASUERO, J.R.; CREUS, G.J. **Crack Growth initiation in Concrete**: like materials in the presence of Creep. Nuclear Engineering and Design. v. 156, p. 209-218, 1996.
- [27] MEHTA, P.K.; MONTEIRO, P.J.M. **Concreto**: Estrutura, Propriedades e Materiais. São Paulo, PINI, 1994.
- [28] McHENRY, D.A. **A new aspect of creep in concrete and its application to design**. ASTM Proceedings, 43, 1943.
- [29] NAWY, E.G. **Prestressed Concrete**: A Fundamental Approach. 2 ed. New Jersey, Prentice Hall Inc., 1996.
- [30] NEVILLE A.M., DILGER, W.H. and BROOKS, J.J.: **Creep of Plain and Structural Concrete** - Construction Press, Longman Group, London, 1983.
- [31] NEVILLE, A.M. **Propriedades do Concreto**. 2 ed. São Paulo, PINI, 1997.
- [32] NEVILLE, A. M. **Properties of Concrete**. 4 ed. India, Pearson Education, 2004.

- [33] PFEIL, W. **Concreto Protendido: Processos Construtivos, Perdas de Protensão**. Rio de Janeiro, EDC Ed. Didática e Científica, 1991.
- [34] PAULETTI, R.M.O; PIMENTA, P.M.; SANTOS, H.C. **Algoritmo de integração de tensões para um elemento não-Linear de cabo escorregando com atrito**, VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 08 a 11 de abril, São Paulo-SP, 2006.
- [35] PIMENTA, P.M. **On the analysis of viscoelasticity plane frames, Structural Design, Analysis and Testing**. New York, American Society of Civil Engineers, 1989.
- [36] PIMENTA, P.M.: **Análise não-linear geometricamente exata de pórticos espaciais**. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações. Escola Politécnica. Universidade de São Paulo. São Paulo, 1999.
- [37] PIMENTA, P.M. PEF 742: **Fundamentos da Mecânica das Estruturas II**. Notas de aulas, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, vol. 1 e 2, 1996.
- [38] PIMENTA, P.M.; SANTOS, H.C. **Análise e Retro-análise de Estruturas de Concreto sujeitas à Deformação Lenta**. In: IV SIMPÓSIO EPUSP sobre ESTRUTURAS de CONCRETO, São Paulo, 2000.
- [39] PINTO, C.M. **Algoritmos genéticos aplicados à engenharia de estruturas**. São Paulo, 2001. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [40] SANTOS, H.C. **Cálculo automático de estruturas reticuladas com não-linearidade geométrica**. São Paulo, 1995. Projeto Civil Interdisciplinar (Monografia) - Faculdade de Engenharia de Guaratinguetá, Universidade Estadual Paulista.
- [41] SANTOS, H.C. **Análise de estruturas aporticadas de concreto armado e protendido com a consideração da deformação lenta**. São Paulo, 2001. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo.
- [42] SANTOS, H.C. **Fluência e Retração por Secagem no Concreto: Representação Matemática de suas Causas e Efeitos**. In: 46º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO - IBRACON, Sessão: Projeto de Estruturas de Concreto, Florianópolis, 2004.
- [43] SANTOS, H.C. **Análise Linear e Não-linear de Estruturas Aporticadas de Concreto Armado e Protendido: Uma Abordagem Consistente através do Método dos Elementos Finitos (MEF) com a consideração da Viscoelasticidade, da Plasticidade, da Fissuração, da Protensão e de Etapas Construtivas**. II In: SIMPÓSIO INTERNACIONAL SOBRE CONCRETOS ESPECIAIS, UVA - Universidade Estadual Vale do Acaraú, IEMAC - Instituto de Estudo dos Materiais de Construção, Sobral (CE), 2004.
- [44] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Algoritmos de Integração de Tensões na Viscoelasticidade do Concreto**. In: XXX JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, Brasília, 2002.
- [45] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Análise e Retro-análise de Vigas de Concreto Armado e Protendido sujeitas aos Fenômenos Viscoelásticos**. In: XXX JORNADAS SUL-AMERICANAS DE ENGENHARIA ESTRUTURAL, Brasília, 2002. **Anais**. Brasília, 2002.
- [46] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Análise Não-Linear Geometricamente Exata de Treliças em Regime Viscoelástico**. In: V CONGRESSO DE ENGENHARIA CIVIL, Juiz de Fora-MG, 2002. **Anais**. Juiz de Fora, 2002.

- [47] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Um Modelo Consistente para Representação da Deformação Lenta do Concreto**. In: V CONGRESSO DE ENGENHARIA CIVIL, Juiz de Fora-MG, 2002. **Anais**. Juiz de Fora, 2002.
- [48] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Alterações das Tensões e Deformações nas Vigas de Concreto Protendido: Uma Abordagem Consistente através do Método dos Elementos Finitos com a consideração da Viscoelasticidade, da Plasticidade, da Fissuração, da Protensão e de Etapas Construtivas**. Revista Engenharia: Estudo e Pesquisa, nº 2, p. 53-67, 2002. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Editora Interciência, Rio de Janeiro, julho-dezembro.
- [49] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Algoritmos de Integração de Tensões baseados em Modelos Reológicos Viscoelásticos com Envelhecimento**. Revista Engenharia: Estudo e Pesquisa, v. 6, nº 1, p. 12-26, 2003. Universidade Federal de Juiz de Fora (UFJF), Editora Interciência, Rio de Janeiro-RJ, janeiro-julho de 2003.
- [50] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **A maneira correta de se calcular a Adaptação por Fluência utilizando-se de Programas comerciais de Análise Linear de estruturas reticuladas**. In: V SIMPÓSIO EPUSP sobre ESTRUTURAS de CONCRETO, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 2003. **Anais**. São Paulo, 2003.
- [51] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Vigas Planas de Concreto Protendido: Uma abordagem eficiente para as Alterações das Tensões e Deformações ao longo do tempo através do Método dos Elementos Finitos**. In: 46º CONGRESSO BRASILEIRO DO CONCRETO - IBRACON, Sessão: Projeto de Estruturas de Concreto, Florianópolis, 2004. **Anais**, Florianópolis, 2004.
- [52] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Algorithms of stress integration based on creep functions obtained from aging rheological viscoelastic models and applied to concrete structures**, XXVI Iberian Latin-American Congress on Computational Methods in Engineering - CILAMCE 2005. Brazilian Assoc. for Comp. Mechanics (ABMEC) & Latin American Assoc. of Comp. Methods in Engineering (AMC), Guarapari, Espírito Santo, Brazil, 19th - 21st October 2005.
- [53] SANTOS, H.C.; PIMENTA, P.M. **Uma maneira consistente, eficiente e simples de se calcular a fluência através do MEF adaptando-se o procedimento da NBR-6118:2003**, VI Simpósio EPUSP sobre Estruturas de Concreto, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 08 a 11 de abril, São Paulo-SP, 2006.
- [54] SOLER, J. G. M.: **Análise não-linear de pórticos planos de concreto armado** - Dissertação de mestrado, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 1989.
- [55] SOLER, J. G. M.: **Análise não-linear de pórticos espaciais de concreto armado** - Tese de Doutorado, Escola Politécnica da USP, São Paulo, 1995.
- [56] SKRZYPEK J.J.; HETNARSKI, R.B. **Plasticity and Creep: Theory, Examples and Problems**. CRC Press, LLC, 1999.
- [57] STUCCHI, F.R. PEF 407 - **Pontes e Grandes Estruturas**. Notas de aulas, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 1989.
- [58] YOJO, T. **Treliças espaciais de madeira em regime viscoelástico sob não linearidade geométrica**. São Paulo, 1988. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo
- [59] ZIENKIEWICZ, O.C. **The Finite Element Method**. 3 ed. expanded and revised edition. London, McGraw Hill, 1977.

Anexos

Anexo A (informativo)

Efeito do tempo no concreto estrutural

A.1 Generalidades

As prescrições deste anexo têm caráter informativo que podem, na falta de dados melhores, ser usados no projeto de estruturas com concretos do grupo I da NBR 8953 cobertos por esta Norma. Outros valores podem ser usados, desde que comprovados experimentalmente, por meio de ensaios realizados de acordo com Normas Brasileiras específicas, levando em conta variações nas características e propriedades dos componentes do concreto, ou ainda desde que respaldados por normas internacionais ou literatura técnica.

A.2 Deformações do concreto

A.2.1 Introdução

Quando não há impedimento à livre deformação do concreto, e a ele é aplicada, no tempo t_0 , uma tensão constante no intervalo $t - t_0$ sua deformação total, no tempo t , vale:

$$\varepsilon_c(t_0) + \varepsilon_{cc}(t) + \varepsilon_{cs}(t)$$

onde:

$\varepsilon_c(t_0) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E_{ci}(t_0)}$ é a deformação imediata, por ocasião do carregamento, com $E_{ci}(t_0)$ calculado, para

$j = t_0$, pela expressão: $E_{ci}(t_0) = 5600(f_{ckj})^{\frac{1}{2}}$;

$\varepsilon_{cc}(t) = \frac{\sigma_0(t_0)}{E_{ci28}}\varphi(t, t_0)$ é a deformação por fluência, no intervalo de tempo (t, t_0) , com E_{ci28} calculado pela mesma expressão para $j = 28$ dias;

$\varepsilon_{cs}(t)$ é a deformação por retração, no intervalo de tempo (t, t_0) .

A.2.2 Fluência do concreto

A.2.2.1 Generalidades

A deformação por fluência do concreto (ε_{cc}) compõe-se de duas partes, uma rápida e outra lenta. A fluência rápida (ε_{cca}) é irreversível e ocorre durante as primeiras 24h após a aplicação da carga que a originou. A deformação lenta é por sua vez composta por duas outras parcelas: a deformação lenta irreversível (ε_{ccf}) e a deformação lenta reversível (ε_{ccd}).

$$\varepsilon_{cc} = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccf} + \varepsilon_{ccd}$$

$$\varepsilon_{c,tot} = \varepsilon_c + \varepsilon_{cc} = \varepsilon_c(1 + \varphi)$$

$$\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d$$

onde:

φ_a é o coeficiente de fluência rápida;

φ_f é o coeficiente de deformação lenta irreversível;

φ_d é o coeficiente de deformação lenta reversível.

A.2.2.2 Hipóteses

Para o cálculo dos efeitos da fluência, quando as tensões no concreto são as de serviço, admitem-se as seguintes hipóteses:

- a deformação por fluência ε_{cc} varia linearmente com a tensão aplicada;
- para acréscimos de tensão aplicados em instantes distintos, os respectivos efeitos de fluência se superpõem;
- a deformação rápida produz deformações constantes ao longo do tempo; os valores do coeficiente φ_a são função da relação entre a resistência do concreto no momento da aplicação da carga e a sua resistência final;

- d) o coeficiente de deformação lenta reversível φ_d depende apenas da duração do carregamento; o seu valor final e o seu desenvolvimento ao longo do tempo são independentes da idade do concreto no momento da aplicação da carga;
- e) o coeficiente de deformação lenta irreversível φ_f depende de:
- umidade relativa do ambiente (U);
 - consistência do concreto no lançamento;
 - espessura fictícia da peça h_{fic} (ver A.2.4);
 - idade fictícia do concreto (ver A.2.4) no instante (t_0) da aplicação da carga;
 - idade fictícia do concreto no instante considerado (t).
- f) para o mesmo concreto, as curvas de deformação lenta irreversível em função do tempo, correspondentes a diferentes idades do concreto no momento do carregamento, são obtidas, umas em relação às outras, por deslocamento paralelo ao eixo das deformações conforme a Figura A.1.

Figura A.1 - Variação de $\varepsilon_{ccf}(t)$.

A.2.2.3 Valor da fluência

No instante t a deformação devida á fluência é dada por:

$$\varepsilon_{cc}(t, t_0) = \varepsilon_{cca} + \varepsilon_{ccd} + \varepsilon_{ccf} = \frac{\sigma_c}{E_{c28}} \varphi(t, t_0)$$

com E_{c28} calculado, para $j = 28$ dias, pela expressão: $E_{c28} = E_{ci,28} = 5600 (f_{ck})^{\frac{1}{2}}$.

O coeficiente de fluência $\varphi(t, t_0)$, válido também para a tração, é dado por:

$$\varphi(t, t_0) = \varphi_a + \varphi_{f_\infty} [\beta_f(t) - \beta_f(t_0)] + \varphi_{d_\infty} \beta_d$$

onde:

- t é a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;
- t_0 é a idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento único, em dias;
- t_{0i} é a idade fictícia do concreto ao ser feito o carregamento, em dias;
- φ_a é o coeficiente de fluência rápida, determinado pela expressão:

$$\varphi_a = 0,8 \left[1 - \frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)} \right]$$

onde:

$\frac{f_c(t_0)}{f_c(t_\infty)}$ é a função do crescimento da resistência do concreto com a idade, definida em 12.3;

$\varphi_{f_\infty} = \varphi_{1c} \varphi_{2c}$ é o valor final do coeficiente de deformação lenta irreversível;

φ_{1c} é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente U , em porcentagem, e da consistência do concreto dado pela Tabela A.1;

φ_{2c} é o coeficiente dependente da espessura fictícia h_{fic} da peça, definida em 8.4 ⁽¹⁾.

$$\varphi_{2c} = \frac{42 + h_{fic}}{20 + h_{fic}}$$

onde:

h_{fic} é a espessura fictícia, em centímetros (A.2.4)

$\beta_f(t)$ ou $\beta_f(t_0)$ é o coeficiente relativo à deformação lenta irreversível, função da idade do concreto (ver Figura A.2)

$\varphi_{d\infty}$ é o valor final do coeficiente de deformação lenta reversível, considerado igual a 0,4;

$\beta_d(t)$ é o coeficiente relativo à deformação lenta reversível função do tempo $(t - t_0)$ decorrido após o carregamento,

$$\beta_d(t) = \frac{t - t_0 + 20}{t - t_0 + 70}$$

$$\beta_f(t) = \frac{t^2 + At + B}{t^2 + Ct + D}$$

onde:

$$A = 42h^3 - 350h^2 + 588h + 113;$$

$$B = 768h^3 - 3060h^2 + 3234h - 23;$$

$$C = -200h^3 + 13h^2 + 1090h + 183;$$

$$D = 7579h^3 - 31916h^2 + 35343h + 1931;$$

h é a espessura fictícia, em metros; para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes;

t é o tempo, em dias $(t \geq 3)$.

Figura A.2 - Variação de $\beta_f(t)$.

⁽¹⁾ Item 8.2 e não o item 8.4, ou seja, mas precisamente o item 8.2.11 Fluência e Retração, página 21 da NBR 6118:2003.

A.2.3 Retração do concreto

A.2.3.1 Hipóteses básicas

O valor da retração do concreto depende da:

- umidade relativa do ambiente;
- consistência do concreto no lançamento;
- espessura fictícia da peça.

A.2.3.2 Valor da retração

Entre os instantes t_0 e t a retração é dada por:

$$\varepsilon_{cs}(t, t_0) = \varepsilon_{cs\infty} [\beta_s(t) - \beta_s(t_0)]$$

onde:

$$\varepsilon_{cs\infty} = \varepsilon_{1s} \varepsilon_{2s}$$

$\varepsilon_{cs\infty}$ é o valor final da retração;

ε_{1s} é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente e da consistência do concreto (ver Tabela A.1)

ε_{2s} é o coeficiente dependente da espessura fictícia da peça:

$$\varepsilon_{2s} = \frac{33 + 2h_{fic}}{20,8 + 3h_{fic}}$$

onde:

h_{fic} é a espessura fictícia, em centímetros (A.2.4)

$\beta_s(t)$ ou $\beta_s(t_0)$ é o coeficiente relativo à retração, no instante t ou t_0 (Figura A.3)

t é a idade fictícia do concreto no instante considerado, em dias;

t_0 é a idade fictícia do concreto no instante em que o efeito da retração na peça começa a ser considerado, em dias.

Tabela A.1 - Valores numéricos usuais para a determinação da fluência e da retração

Ambiente	Umidade U %	Fluência φ_{1c} ¹⁾			Retração $10^4 \varepsilon_{1s}$ ²⁾			γ ⁴⁾
		Abatimento de acordo com a NBR NM 67 ³⁾						
		cm						
		0 - 4	5 - 9	10 - 15	0 - 4	5 - 9	10 - 15	
Na água	-	0,6	0,8	1,0	+1,0	+1,0	+1,0	30,0
Em ambiente muito úmido imediatamente acima da água	90	1,0	1,3	1,6	-1,0	-1,3	-1,6	5,0
Ao ar livre, em geral	70	1,5	2,0	2,5	-2,5	-3,2	-4,0	1,5
Em ambiente seco	40	2,3	3,0	3,8	-4,0	-5,2	-6,5	1,0

¹⁾ $\varphi_{1c} = 4,45 - 0,035U$ para abatimentos 5cm a 9cm e $U \leq 90\%$.

²⁾ $10^4 \varepsilon_{1s} = -6,16 - \frac{U}{484} + \frac{U^2}{1590}$ para abatimentos de 5cm a 9cm e $U \leq 90\%$.

³⁾ Os valores para $U \leq 90\%$ e abatimentos entre 0cm e 4cm são 25% menores e para abatimentos entre 10cm e 15cm são 25% maiores.

⁴⁾ $\gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1U)}$ para $U \leq 90\%$.

NOTA - Para efeito de cálculo, as mesmas expressões e os mesmos valores numéricos podem ser empregados no caso de tração. Para o cálculo dos valores de fluência e retração, a consistência do concreto é aquela correspondente à obtida com o mesmo traço sem a adição de superplastificantes e superfluidificantes.

$$\beta_s(t) = \frac{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + A\left(\frac{t}{100}\right)^2 + B\left(\frac{t}{100}\right)}{\left(\frac{t}{100}\right)^3 + C\left(\frac{t}{100}\right)^2 + D\left(\frac{t}{100}\right) + E}$$

onde:

$$A = 40$$

$$B = 116h^3 - 282h^2 + 220h - 4,8$$

$$C = 2,5h^3 - 8,8h + 40,7$$

$$D = -75h^3 + 585h^2 + 496h - 6,8$$

$$E = -169h^4 + 88h^3 + 584h^2 - 39h + 0,8$$

h é a espessura fictícia, em metros; para valores de h fora do intervalo $(0,05 \leq h \leq 1,6)$, adotam-se os extremos correspondentes;

t é o tempo, em dias ($t \geq 3$).

Figura A.3 - Variação de $\beta_s(t)$.

A.2.4 Idade e espessura fictícias

A.2.4.1 Idade fictícia do concreto

A idade a considerar é a idade fictícia (αt_{ef}) , em dias, quando o endurecimento se faz à temperatura ambiente de $20^\circ C$ e, nos demais casos, quando não houver cura a vapor, a idade a considerar é a idade fictícia dada por:

$$t = \alpha \sum_i \frac{T_i + 10}{30} \Delta t_{ef,i}$$

onde:

t é a idade fictícia, em dias

α é o coeficiente dependente da velocidade de endurecimento do cimento; na falta de dados experimentais, permite-se o emprego dos valores constantes da Tabela A.2;

T_i é a temperatura média diária do ambiente, em graus Celsius;

$\Delta t_{ef,i}$ é o período, em dias, durante o qual a temperatura média diária do ambiente, T_i , pode ser admitida constante

NOTA – Essa expressão não se aplica à cura a vapor.

Tabela A.2 - Valores da fluência e da retração em função da velocidade de endurecimento do cimento

Cimento Portland (CP)	α	
	Fluência	Retração
De endurecimento lento (CP III e CP IV, todas as classes de resistência)	1	1
De endurecimento normal (CP I e CP II, todas as classes de resistência)	2	
De endurecimento rápido (CP V-ARI)	3	
Onde: CP I e CP I-S – Cimento Portland comum; CP II-E, CP II-F e CP II-Z – Cimento Portland composto; CP III – Cimento Portland de alto forno; CP IV – Cimento Portland de pozolânico; CP V-ARI – Cimento Portland de alta resistência inicial; RS – Cimento Portland resistente a sulfatos (propriedade específica de alguns dos tipos de cimentos citados)		

A.2.4.2 Espessura fictícia da peça

Define-se como espessura fictícia o seguinte valor:

$$h_{fic} = \gamma \frac{2A_c}{u_{ar}}$$

onde:

γ é o coeficiente dependente da umidade relativa do ambiente ($U\%$) (ver Tabela A.1), onde:

$$\gamma = 1 + e^{(-7,8+0,1U)};$$

A_c é a área da seção transversal da peça;

u_{ar} é a parte do perímetro externo da seção transversal da peça em contato com o ar.

A.2.5 Deformação total do concreto

Quando há variação de tensão ao longo do intervalo, induzidas por ações externas ou agentes de diferentes propriedades reológicas (incluindo-se armadura, concretos de diferentes idades, etc), a deformação total no concreto pode ser calculada por:

$$\varepsilon_c(t) = \frac{\sigma_c(t_0)}{E_c(t_0)} + \frac{\sigma_c(t_0)}{E_{c28}} \varphi(t, t_0) + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \int_{\tau=t_0}^t \frac{\partial \sigma_c}{\partial \tau} \left(\frac{1}{E_{c\tau}} + \frac{\alpha \varphi(\tau, t_0)}{E_{c28}} \right) d\tau$$

em que os três primeiros termos representam a deformação não impedida e a integral, os efeitos da variação de tensões ocorridas no intervalo.

Permite-se substituir essa expressão por:

$$\varepsilon_c(t) = \sigma_c(t_0) \left[\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right] + \varepsilon_{cs}(t, t_0) + \Delta \sigma_c(t, t_0) \left(\frac{1}{E_c(t_0)} + \frac{\varphi(t, t_0)}{E_{c28}} \right).$$

Nas expressões de $\varepsilon_c(t)$:

$\Delta \sigma_c(t, t_0)$ é a variação total de tensão no concreto, no intervalo (t, t_0) ;

α é o coeficiente característico que tem valor variável conforme o caso.

No cálculo de perdas de protensão, em casos usuais onde a peça pode ser considerada como concretada de uma só vez e a protensão como aplicada de uma só vez, pode-se adotar $\alpha = 0,5$ e admitir $E_c(t_0) = E_{c28}$, como foi feito em 9.6.3.4.2 ⁽²⁾. Observar que aquela subseção considera que o coeficiente de fluência do concreto: $\varphi = \varphi_a + \varphi_f + \varphi_d$ é um coeficiente de deformação lenta irreversível, com as propriedades definidas para φ_f .

Nos outros casos usuais pode-se considerar $\alpha = 0,8$, mantendo $E_c(t_0) \neq E_{c28}$ sempre que significativo.

Essa aproximação tem a vantagem de tratar α como uma única função, sem separar φ_a , φ_f e φ_d .

É possível separar φ_a , φ_f e φ_d , mas para isso é necessário aplicar a expressão integral ao problema em estudo. A expressão simplificada não se aplica nesse caso.

⁽²⁾ Item 9.6.3.4.2 Processo simplificado para o caso de fases únicas de operação, página 38 da NBR 6118:2003.

Especial atenção deve ser dada aos casos em que as fundações são deformáveis ou parte da estrutura não apresenta deformação lenta, como o caso de tirantes metálicos.

A.3 Deformações na armadura

A.3.1 Quando a armadura é solicitada em situação análoga à descrita em A.2.1, sua deformação vale:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0)$$

onde:

$\frac{\sigma_s(t_0)}{E_s}$ é a deformação imediata, por ocasião do carregamento;

$\frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0)$ é a deformação por fluência, ocorrida no intervalo de tempo (t, t_0) e considerada sempre que $\sigma_s(t_0) > 0,5f_{ptk}$.

A.3.2 Quando a livre deformação por fluência é impedida, em situação análoga à descrita em A.2.5 para o concreto, a deformação total pode ser calculada por:

$$\varepsilon_s(t) = \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} + \frac{\sigma_s(t_0)}{E_s} \chi(t, t_0) + \frac{\Delta\sigma_s(t, t_0)}{E_s} [1 + \chi(t, t_0)]$$

onde:

$\Delta\sigma_s(t, t_0)$ é a variação total de tensão na armadura, no intervalo (t, t_0) .