URUBATAN DE SOUZA DIAS JÚNIOR

**DETERMINAÇÃO DOS PADRÕES DE CORTE EM ESTRUTURAS DE
MEMBRANA POR LINHAS GEODÉSICAS**

SÃO PAULO

2006

URUBATAN DE SOUZA DIAS JÚNIOR

**DETERMINAÇÃO DOS PADRÕES DE CORTE EM ESTRUTURAS DE
MEMBRANA POR LINHAS GEODÉSICAS**

**Dissertação apresentada à
Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo
para obtenção do título de
Mestre em Engenharia.**

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Ruy Marcelo de
Oliveira Pauletti

**SÃO PAULO
2006**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com anuência de seu orientador.

São Paulo, dede 2006.

FICHA CATALOGRÁFICA

Dias Junior, Urubatan de Souza
Determinação de padrões de corte em estruturas de
membrana
por linhas geodésicas / U. de S. Dias Junior. – São Paulo, 2006.
110 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade
de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e
Fundações.

1.Estruturas de membranas 2.Padrões de corte 3.Linhas geo-
désicas I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica.
Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações II.t.

À minha família, com orgulho.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por tudo!

Ao Prof. Dr. Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti, pelo incentivo, confiança e orientação.

Ao Prof. Dr. Reyolando M. L. R. F. Brasil e ao Prof. Vinícius Fernando Arcaro, pelas contribuições.

À Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, pela oportunidade de realização de um sonho.

Aos Prof. Drs. Remo Magalhães de Souza e Alcebíades Negrão Macedo, pelas recomendações ao curso de Mestrado.

A todos os amigos da sala S-25, dos Laboratórios de Mecânica Computacional LMC's e do Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações.

À secretária de pós-graduação (Marly Coimbra), pelos recados e lembretes.

Aos amigos Daniel Mariani Guirardi e Alex Neves Junior, pelas alegrias compartilhadas. Alex pelos conselhos e incentivos e Daniel, grande amigo nos momentos alegres e grande irmão pra todo o restante, compartilhou comigo as quedas e as vitórias durante mais de três anos, e ainda por ter me dado a honra de conhecer seus pais Artur e Márcia.

À minha irmã Lílian, que se passou por pai, mãe e tudo mais, no tempo em que estive em São Paulo. Irmã que sempre admirei e com ela muito aprendi.

Ao Marcelo pelo incentivo.

À Isabela pelo sorriso.

Aos meus pais Urubatan e Vitória Regina, que sempre estiveram presentes em minha vida, sempre dispostos a fazer de tudo para que eu consiga vencer.

Ao meu irmão Léo, que torce o tempo todo por mim, a quem devo toda a admiração do mundo.

Aos meus sogros Edson e Dilma, por terem depositado em mim esperança.

À minha esposa Darlen, a quem devo parte desta conquista. Darlen que esteve sempre me apoiando, em todos os sentidos, te amo!

Ao meu filho Kauan, que se tornou um “talismã” da sorte nesta conquista.

Resumo

Propõe-se neste trabalho a determinação dos padrões de corte em estruturas de membrana por meio de linhas geodésicas, sendo as membranas obrigatoriamente discretizadas em facetas triangulares (elementos finitos de membrana triangulares). Com base em procedimentos geometricamente simples, formulou-se o caminhamento das linhas geodésicas sobre malhas de facetas triangulares, indicando-se um vértice inicial, uma direção inicial de busca e um vértice final (vértice que se quer alcançar). Contudo, na grande maioria dos casos, o vértice de busca não é alcançado em uma primeira tentativa, tendo-se que introduzir correções para a direção inicial. Depois de alcançado o vértice de busca, tem-se uma malha composta por novas facetas triangulares e outras quadrangulares que devem ser reformuladas, a fim de se ter uma malha formada apenas por triângulos. Por consequência das linhas geodésicas traçadas na malha, deve-se proceder da planificação das faixas encontradas; desta forma, necessita-se transferir/transformar as tensões das facetas originais para as facetas resultantes do corte por linhas geodésicas. Em seguida, faz-se a planificação das faixas determinadas, onde se podem comparar faixas cortadas a partir das arestas das facetas com aquelas resultantes do traçado das linhas geodésicas.

Abstract

This work proposes the determination of the cutting patterns in membrane structures with geodesic lines, being the membranes obligatorily divided in triangular facets (triangular finite elements of membrane). For this, basing on procedures geometrically simple, the progress of the geodesic lines was formulated in meshes of triangular facets, being indicated an initial vertex, an initial direction of search and a final vertex (vertex that one want to reach). However, in the great majority of the cases the search vertex is not reached in a first attempt, so we need to introduce corrections for the initial direction. After having reached the search vertex, a mesh is had composed by new triangular facets and other square ones that should be reformulated, with the purpose to have a mesh just formed by triangle. For consequence of the geodesic lines drawn in the mesh, it should be come from the planning of the found strips, for this it is needed to transfer (to transform) the stresses of the original facets for the resulting facets of the cut for geodesic lines. Soon afterwards is done to the planning of the certain strips, to compare cut strips on the edges of the facets with resulting strips of the geodesic lines

SUMÁRIO

RESUMO	<i>iii</i>
ABSTRACT	<i>iv</i>
LISTA DE FIGURAS	<i>viii</i>
INTRODUÇÃO	1
Capítulo 1 – CONTEXTO	5
1.1 – FASES DE PROJETO E ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE MEMBRANA.....	7
1.2 – MODELOS E MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DOS PADRÕES DE CORTE.....	10
1.3 – LINHAS DE CORTE GEODÉSICAS.....	13
1.4- CURVATURA.....	15
Capítulo 2 - GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS E ADJACÊNCIAS ENTRE FACETAS	21
2.1 - USO DO SOFTWARE GID PARA A GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS.....	21
2.2 – ADJACÊNCIAS ENTRE FACETAS.....	23
2.2.1 - MONTAGEM DA MATRIZ E DO VETOR DE INCIDÊNCIAS DOS VÉRTICES.....	26
2.2.2 - MONTAGEM DA MATRIZ E DO VETOR DE ADJACÊNCIAS DAS FACETAS.....	29
Capítulo 3 - CAMINHAMENTO DA LINHA GEODÉSICA SOBRE SUPERFÍCIES FACETADAS POR TRIÂNGULOS	33
3.1 - IDÉIA BÁSICA PARA SE FORMULAR O CAMINHAMENTO DE LINHAS GEODÉSICAS SOBRE MALHAS DE FACETAS TRIANGULARES.....	33
3.2- CONSIDERAÇÕES SOBRE A FORMULAÇÃO DE LINHAS GEODÉSICAS.....	35
3.3 - REQUISITOS PARA A FORMULAÇÃO DE LINHAS GEODÉSICAS.....	35
3.4 – CONVENÇÃO PARA A NUMERAÇÃO DE VÉRTICES.....	36
3.4.1 - LINHA GEODÉSICA INCIDINDO EM VÉRTICES DA FACETA <i>i</i>	38
3.4.2 - LINHA GEODÉSICA INCIDINDO EM ARESTAS DA FACETA.....	39

3.5 - FACETA TRIANGULAR DE REFERÊNCIA.....	40
3.6 - VÉRTICES DE PARTIDA, CHEGADA E DIREÇÃO INICIAL DE CAMINHAMENTO DA LINHA GEODÉSICA.....	42
3.6.1 – VÉRTICES DE PARTIDA E VÉRTICE DE CHEGADA DA LINHA GEODÉSICA.....	42
3.6.2 - DIREÇÃO INICIAL “ $\vec{S}_0$ ” DE CAMINHAMENTO DA LINHA GEODÉSICA.....	42
3.7 - ESCOLHA DO CAMINHO GEODÉSICO DENTRO DAS FACETAS.....	45
3.7.1 - INTERSECÇÃO ENTRE AS RETAS s , y e w	48
3.8 - PASSAGEM DA LINHA GEODÉSICA ENTRE FACETAS.....	50
3.8.1 – TRANSFERÊNCIA DA LINHA GEODÉSICA ENTRE ARESTAS DE FACETAS ADJACENTES.....	50
3.8.2 – TRANSFERÊNCIA DA LINHA GEODÉSICA ENTRE VÉRTICES DE FACETAS.....	52
3.9 – CORREÇÃO DA DIREÇÃO INICIAL.....	54
3.10 – REFORMULAÇÃO DA MALHA DE FACETAS TRIANGULARES.....	56
3.11 - TRANSFORMAÇÃO DAS TENSÕES ENTRE FACETAS “MÃES” E “FILHAS”.....	60
3.12 - PLANIFICAÇÃO DAS FAIXAS OBTIDAS PELAS LINHAS DE CORTE GEODÉSICAS.....	62
3.13 - ALGORITMOS DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA FORMULAÇÃO DESCRITA.....	63
3.13.1 – ALGORITMO PARA O 1º PASSO.....	64
3.13.2 – ALGORITMO PARA O 2º PASSO.....	64
3.13.3 – ALGORITMO PARA O 3º PASSO.....	65
3.13.4 – ALGORITMO PARA O 4º PASSO.....	65
3.13.5 – ALGORITMO PARA O 5º PASSO.....	66
3.13.6 – ALGORITMO PARA O 6º PASSO.....	67
 Capítulo 4 - DISCUSSÃO DOS RESULTADOS	 70
4.1 – ANÁLISE DE UM EXEMPLO SIMPLES, COM SETE FACETAS.....	70
4.1.1 – CASO PLANO.....	70
4.1.2 – CASO ESPACIAL.....	71
4.2 – CORREÇÕES NAS DIREÇÕES INICIAIS E REFORMULAÇÃO DA MALHA.....	72
4.3 – ESTRUTURA DO MEMORIAL DOS POVOS.....	80
4.3.1 – MALHA MODELADA EM ANSYS E ANALISADA EM SATS.....	80
4.3.2 – TRAÇADO DA LINHA GEODÉSICA E REFORMULAÇÃO DA MALHA.....	81
4.3.3 – ANÁLISE DA ESTRUTURA CORTADA PELAS LINHAS GEODÉSICAS.....	82
4.3.4 – ANÁLISE DAS FAIXAS.....	86

CONCLUSÕES.....	90
REFERÊNCIA BIBLIOGRÁFICAS.....	92

LISTA DE FIGURAS

Introdução

FIGURA I -1 – Semi-Esfera, e padrões de corte.....	2
--	---

Capítulo 1

FIGURA 1-1 - Fases características de projeto e análise de estruturas de membrana.....	6
FIGURA 1-2 - Emendas com aspecto visual e estrutural comprometido.....	9
FIGURA 1-3 – Geração de um modelo físico.....	11
FIGURA 1-4 – Maquete de estruturas de membrana.....	12
FIGURA 1-5 – Igreja Batista (Fortaleza – CE).....	13
FIGURA 1-6 – Linhas geodésicas sobre uma esfera.	14
FIGURA 1-7 – Curva em duas dimensões.....	16
FIGURA 1-8 – Curvatura em uma superfície seccionada.....	16
FIGURA 1-9 - Formas de equilíbrio e curvaturas gaussianas.....	17
FIGURA 1-10 – Forma de Equilíbrio Inicial, malha 3-D de elementos finitos.....	18
FIGURA 1-11 – Cortes facetando os elementos da malha.....	18
FIGURA 1-12 – Cortes utilizando linhas geodésicas.....	19
FIGURA 1-13 – Efeito estético comprometido, por falta de variação nas espessuras de algumas faixas.....	20

Capítulo 2

FIGURA 2-1 – Interface GID (Versão 7).....	22
FIGURA 2-2 – Modelo de rotina para a exportação de dados.....	23
FIGURA 2-3 – Formas de Adjacências.....	24
FIGURA 2-4 – Exemplo 1. (Malha com quatro facetas e seis vértices).....	25

FIGURA 2-5 – Matriz de conectividades da estrutura ilustrada na FIGURA 3.4.....	25
Capítulo 3	
FIGURA 3-1 - Folha de Papel dobrada sobre as arestas dos triângulos.....	34
FIGURA 3-2 - Risco à caneta ligando dois pontos distintos na folha.....	34
FIGURA 3-3 - Folha de papel no plano, após “esticada” por dois vértices extremos.....	34
FIGURA 3-4 - Elemento Triangular de Membrana.....	35
FIGURA 3-5 - Superfície com facetas triangulares.....	36
FIGURA 3-6 - Posições relativas entre conectividades locais e globais.....	37
FIGURA 3-7 - Linha i da matriz de conectividades referente a uma faceta i qualquer, conectada pelos vértices: 2, 4 e 5.....	38
FIGURA 3-8 – Incidência da linha geodésica sobre vértices da faceta i	39
FIGURA 3-9 – Formas de incidências das linhas geodésicas sobre arestas da faceta i	40
FIGURA 3-10 - <i>Iésima</i> faceta triangular de Referência.....	41
FIGURA 3-11.a - Pontos x_0 e x_t	43
FIGURA 3-11.b - Versor $\vec{u}_t$ e vetor $\vec{l}_t$	43
FIGURA 3-11.c - Versor médio $\vec{n}_{av}$	44
FIGURA 3-11.d - Intersecção entre os planos Π e Ω	44
FIGURA 3-12- Traçado da <i>reta s (Linha Geodésica)</i> sobre a <i>iésima</i> faceta de uma malha.....	46
FIGURA 3-13 - Ângulos internos α , β e γ	46
FIGURA 3-14 – Passagem da linha geodésica entre arestas de facetas adjacentes.....	51
FIGURA 3-15 – Passagem da linha geodésica entre vértices de facetas adjacentes.....	52
FIGURA 3-16 – Versores $\vec{u}_*^{i+1}$, $\vec{t}_*^{i+1}$ e $\vec{n}^{i+1}$, no plano Ω^{i+1} da faceta $i+1$	53

FIGURA 3-17 – Estrutura de membrana com cinco facetas.....	57
FIGURA 3-18 – Traçado da linha geodésica dividindo as facetas da estrutura.....	57
FIGURA 3-19 – Estrutura com sua malha reformulada.....	57
FIGURA 3-20 – Rotação de eixos, transformando as tensões.....	61
FIGURA 3.21 – Vértices a, b, c e o versor $\vec{v}_c$, da faceta “mãe”.....	62
FIGURA 3-22 – Ângulos ρ entre os versores $\vec{v}_c$ das facetas “mãe” e “filhas”.....	62
FIGURA 3-23 – Condição de pertinência da direção $\vec{s}_0$ à faceta j	66
FIGURA 3-24 – Posições relativas entre x' e x_t	68
 Capítulo 4	
FIGURA 4-1 – Malha com facetas triangulares no mesmo plano, com a linha geodésica cruzando o vértice central.....	70
FIGURA 4-2 – Segundo exemplo de malha plana.....	71
FIGURA 4-3 – Linha Geodésica sobre uma malha espacial teórica.....	72
FIGURA 4-4 – Malha com sete facetas após a primeira iteração.....	72
FIGURA 4-5 – Malha com sete facetas após a segunda iteração.....	72
FIGURA 4-6 – Malha com sete facetas. L.Geodésica com a malha reformulada.....	73
FIGURA 4-7 – Malha Reformulada de sete para doze facetas.....	73
FIGURA 4-8 – Malha com 32 facetas, após o traçado da linha geodésica.....	73
FIGURA 4-9 – Malha com 32 facetas, em uma vista plana.....	73
FIGURA 4-10 – Malha reformulada de 32 para 40 facetas geodésicas.....	74
FIGURA 4-11 – Linha geodésica sobre uma “crista”.....	74
FIGURA 4-12 – Linha geodésica sobre um “talvegue”.....	74
FIGURA 4-13 – Malha da pirâmide cortada pela linha geodésica após a primeira iteração.....	75

FIGURA 4-14 – Malha da pirâmide cortada pela linha geodésica após a segunda iteração. Onde o vértice final foi alcançado.....	75
FIGURA 4-15 – Malha da pirâmide cortada pela linha geodésica.....	75
FIGURA 4-16 – Malha da pirâmide reformulada.....	75
FIGURA 4-17 – Vértice do cume da pirâmide cortado pela linha geodésica.....	76
FIGURA 4-18 – Vértice do cume da pirâmide cortado pela linha geodésica, com outro caminho.....	76
FIGURA 4-19 – Pirâmide modificada. Ponto mais alto sendo cortado pela linha geodésica.....	76
FIGURA 4-20 – Estrutura modelada em GID.....	77
FIGURA 4-21 – Malha gerada em GID. Vértice de busca não alcançado na primeira iteração.	77
FIGURA 4-22 – Malha gerada em GID. Vértice de busca alcançado após sete iterações.....	77
FIGURA 4-23 – Malha gerada em GID. Vértice de busca não alcançado na primeira tentativa.....	78
FIGURA 4-24 – Malha gerada em GID. Vértice de busca alcançado após sete tentativas.....	78
FIGURA 4-25 – Malha gerada em GID. Vértice inicial (1) e vértice final (14). Primeira iteração.....	78
FIGURA 4-26 – Malha gerada em GID. Vértice inicial (1) e vértice final (14). Quinta iteração.	78
FIGURA 4-27 – Malha gerada em GID. Após o vértice final ser alcançado reformula-se a malha.....	79
FIGURA 4-28 – Memorial dos Povos, Belém – Pa.	80
FIGURA 4-29 – Malha Gerada em ANSYS.....	81
FIGURA 4-30 – Malha reproduzida em MATLAB.....	81
FIGURA 4-31 – Linha Geodésica atravessando a superfície da membrana e a malha sendo reformulada.....	81
FIGURA 4-32 – Vista superior da malha reformulada.....	81
FIGURA 4-33 – Vista em 3-D da estrutura cortada pelas linhas geodésicas.....	82

FIGURA 4-34 – Vista Superior da estrutura cortada pelas linhas geodésicas.....	82
FIGURA 4-35 – Tensões na direção “x”, por elemento.....	83
FIGURA 4-36 – Tensões na direção “y”, por elemento.....	84
FIGURA 4-37 – Tensões principais, por elemento.....	85
FIGURA 4-37 – Tensões principais, por nó.....	85
FIGURA 4-38 – Numeração das Faixas.....	86
FIGURA 4-39 – Faixa 2. Tensões principais residuais nodais nas faixas.....	87
FIGURA 4-40 – Faixas da estrutura. Tensões principais residuais nodais.....	88

INTRODUÇÃO

Neste trabalho utilizam-se linhas geodésicas para a determinação dos padrões de corte em estruturas de membrana que, segundo Phelan (1986), é uma das fases que caracterizam o projeto e análise desse tipo de estruturas.

Desta forma, querem-se encontrar padrões de corte que, quando planificados apresentem lados aproximadamente retos, evitando o desperdício de material durante a fabricação e facilitando a soldagem das faixas.

Em geral, para se obterem as faixas, os cortes são determinados e as superfícies curvas resultantes são conduzidas a faixas planas, Kim (2001).

No entanto, apenas uma pequena parte das superfícies pode ser planificada de forma exata, por exemplo, um cone. Já a outra parte das estruturas de membrana não é exatamente planificável como, por exemplo, uma semi-esfera (FIGURA I -1) pois, por mais precisos que sejam os cortes, nunca se alcançarão tiras planas que se encaixem perfeitamente na superfície tridimensional. Este fato se dá pela presença de dupla curvatura existente em grande parte das estruturas de membrana.

FIGURA I -1 – Semi-Esfera, e padrões de corte (WAGNER et al., 2004).

A definição dos padrões de corte, por ser quase sempre aproximada, pode apresentar aspectos negativos, tanto na fabricação quanto na montagem da estrutura, como por exemplo: demasiados enrugamentos no tecido ou rasgos, perda excessiva de material componente da membrana, má aparência e estado de tensões diferentes daqueles previstos no modelo inicial.

Com o intuito de se tentar obter padrões de corte mais regulares, ou seja, com lados mais retos, evitando, entre outros aspectos relevantes, o desperdício de material, formula-se a obtenção de linhas de corte geodésicas sobre superfícies de membrana discretizadas em facetas triangulares.

Entretanto, cabe salientar que devido à escassez de informações a respeito do assunto, empregaram-se algumas idéias inéditas para o que se propõe neste trabalho.

Esta dissertação está dividida em quatro capítulos.

No Capítulo 1 apresenta-se breve discussão sobre as fases de projeto e análise de estruturas de membrana, dando ênfase à definição dos padrões de corte mostrando modelos e métodos para sua obtenção. Além de definições para linhas

geodésicas bem como algumas propriedades e aspectos relevantes ao tema proposto.

No Capítulo 2 mostra-se como gerar automaticamente matrizes de conectividades entre as facetas e coordenadas dos vértices por meio do *software* “GID” e como extraí-las deste para serem utilizadas em linguagem de programação MATLAB. Além disto, encontram-se matrizes que relacionam as adjacências entre facetas da malha e incidências das mesmas nos vértices.

No capítulo 3 comenta-se dentre as propriedades das linhas geodésicas, qual delas será de vital importância para o desenvolvimento deste trabalho, além da apresentação da formulação para o traçado de linhas geodésicas sobre malhas de facetas triangulares.

Além do que já se citou, neste capítulo faz-se a reformulação da malha, pois em alguns casos, com traçado da linha geodésica, algumas facetas resultam de quatro arestas, necessitando que sejam reconduzidas à facetas triangulares.

Ainda no Capítulo 3, faz-se a transformação de tensões das facetas resultantes do procedimento de corte por linhas geodésicas, com o intuito de que o campo de tensões das facetas que foram cortadas não seja modificado.

No Capítulo 4 mostram-se exemplos simples para comprovar a eficiência da formulação aplicada.

Contudo, para demonstrar a aplicação prática do que se propõe neste trabalho, obtêm-se faixas para a estrutura de cobertura do Memorial dos Povos (Belém–PA), com uma malha pouco refinada, que possibilite a visualização da linha geodésica traçada sobre sua superfície. Além de se reformular a malha e planificar as faixas.

Enfim, parte-se para as considerações finais sobre as especificidades do tema em questão e resultados obtidos.

Capítulo 1

CONTEXTO

Leveza, translucidez e variedade de formas são características físicas comumente encontradas nas estruturas de membrana, (OLIVEIRA, 2003), ou seja, não é “à toa” que arquitetos e engenheiros vem se especializando cada vez mais no estudo destas estruturas, motivados o suficiente na busca pelo entendimento e domínio das etapas de análise, projeto e fabricação. Contudo estas etapas são extremamente dependentes de procedimentos computacionais; segundo Campbell (1991, apud Pauletti, 2003), nenhum outro tipo de estrutura é tão dependente de computadores quanto às de membrana.

Por esse motivo, a busca por ferramentas computacionais mais eficientes vem se acentuando, para que se possa fazer um estudo mais minucioso das etapas intrínsecas ao projeto e análise de estruturas de membrana. Segundo Campbell (1991), Moncrieff e Topping (1990), a maior parte dos avanços em tecnologias de estruturas de membranas ocorreram nas últimas três décadas, devido à acessibilidade relativa ao poder dos computadores digitais.

Entretanto, para que se comece a discussão sobre a padronização dos cortes de estruturas de membrana por linhas geodésicas, é necessário que se discorra

brevemente sobre as etapas de projeto e análise de estruturas de membrana. A figura 1-1, mostra a seqüência entre essas fases necessariamente integralizadas.

INTENÇÃO ARQUITETÔNICA:

PROJETO / ANÁLISE:

SOLUÇÃO DE PROJETO:

FIGURA 1-1 - Fases características de projeto e análise de estruturas de membrana (PAULETTI, 1999).

1.1 – FASES DE PROJETO E ANÁLISE DE ESTRUTURAS DE MEMBRANA

Segundo Gründig e Moncrief (1995), há três processos principais no projeto de estruturas de membranas, que são: Busca de Forma; Resposta do Comportamento da Estrutura submetida a Carregamentos; Determinação dos Padrões de corte. Estes procedimentos são discutidos com maiores detalhes por Pauletti (2003).

Alguns autores discutem em separado estes processos, como por exemplo, Campbell (1991), que explica a *busca da forma* para o caso de estruturas de membrana pré-tensionadas internamente pelo ar (formando um domo esférico). Maurin e Motro (1997), referem-se à *busca da forma* fazendo a opção por usar o método da densidade das forças, a fim de se ter uma forma equilibrada entre a superfície da membrana e seu estado interno de tensões. Ainda pode-se citar Barnes (1988), que demonstra um procedimento de busca de forma para a estrutura usando o método da relaxação dinâmica, embutindo parâmetros viscoelásticos. Além de Gründig e Moncrief (1993a), que discutem a busca da forma usando o método da densidade das forças.

Já a padronização de cortes em estruturas de membrana pode ser tratada por diferentes teorias, sendo de grande abrangência os cortes feitos a partir das arestas dos elementos finitos formados na malha, como é caso estudado por Pauletti (2003).

Enfim, as fases características para projeto e análise de estruturas de membranas podem ser definidas, de maneira breve, da seguinte forma:

- BUSCA DA FORMA

As estruturas de membrana não apresentam rigidez à flexão ou à compressão, com isso é difícil de se admitir uma forma inicial para este tipo de

estruturas. O que se procura é um estado interno de tensões, puramente de tração, que deva interagir e equilibrar o carregamento externo.

- RESPOSTA AOS CARREGAMENTOS

Encontrada a forma de equilíbrio inicial, que corresponde à resposta da estrutura de membrana às forças de retesamento (ou “pré-tensão”), e possivelmente o peso próprio, deve-se proceder ao estudo do comportamento da estrutura sujeita a uma variedade de carregamentos, para garantir que a estrutura suportará todas as solicitações que encontrará em serviço.

A falta de rigidez à flexão torna as estruturas de membrana suscetíveis a grandes variações geométricas, mesmo sob carregamentos moderados, isto é, tais estruturas tendem a se adaptar aos carregamentos, sofrendo grandes deflexões. Torna-se necessário proceder-se a uma análise não-linear para incluir estes efeitos na análise de resposta aos carregamentos. Segundo Pauletti (2003) devem ser considerados critérios de aceitação para as análises de carregamentos, que incluem a segurança mecânica a curto e longo prazo, a limitação das vibrações e a perda de retesamento, que pode levar ao enrugamento da membrana.

- DEFINIÇÃO DOS PADRÕES DE CORTE

Encontrada a forma da estrutura, deve-se então converter a estrutura tridimensional em um conjunto de peças planas para a fabricação.

A definição dos padrões de corte foi estudada anteriormente com maiores detalhes por Barnes (1988), Moncrieff (1990), Grundig (1993) e Pauletti (2003).

Para que se determinem os cortes, há especificidades estruturais e construtivas que merecem atenção.

A primeira delas é a largura das faixas que serão planificadas para a fabricação, pois se quer utilizar ao máximo a largura do tecido que comporá a membrana, por motivos econômicos. O ideal é se fabricarem faixas mais largas, para que se reduzam as interfaces a serem soldadas. Outro aspecto, que resulta das linhas de corte, são os lados retos das faixas. Além de facilitarem na soldagem entre estas, também são economicamente melhores que os curvos, pois se pode economizar material ao enquadrá-los de forma mais adequada à largura dos rolos de tecido.

O direcionamento das fibras do tecido da membrana é um fator de caráter estrutural que merece atenção, pois os tecidos comumente utilizados em estruturas de membrana não suportam grandes esforços de cisalhamento. Desta forma deve-se ter cuidado para que as tensões de maior intensidade se direcionem às fibras mais longas do tecido.

Pode-se ainda citar o aspecto estético das estruturas de membrana. Pois se deve ter cuidado com as emendas (união das faixas), pois se feitos cortes imprecisos facilmente serão notados.

Devem-se, quando possível, evitar emendas de canto, com várias faixas coincidindo em um mesmo ponto, pois são mais passíveis de imperfeições, como se pode notar na figura 1-2.

FIGURA 1-2 - Emendas com aspecto visual e estrutural comprometido, (MOLLAERT, 1996).

No que diz respeito à montagem, as estruturas de membrana tem procedimentos específicos para cada etapa. Os materiais devem ser inspecionados antes da montagem, além do que, deve-se ter cuidado para não aplicar esforço acima do previsto no projeto. Tomados os devidos cuidados, deve ser previsto o tempo de retesamento das membranas, a fim de evitar enrugamentos, acúmulo de água e sujeira que danifiquem o material.

1.2 – MODELOS E MÉTODOS PARA A OBTENÇÃO DOS PADRÕES DE CORTE

Frei Otto foi pioneiro no uso de modelos físicos, que foram bastante usados há alguns anos para a determinação dos padrões de corte, mas vem caindo em desuso com a ascensão dos métodos computacionais. Segundo Moncrief e Topping (1990), a competitividade dos modelos físicos deve durar algum tempo, mas apenas para pequenas estruturas. Com isso, os modelos físicos vêm sendo utilizados, para grandes estruturas, como referência da estrutura real, isto é, faz-se um modelo físico para estimar intuitivamente o que acontecerá no modelo numérico e também para observar efeitos estéticos que virão a acontecer na estrutura real.

O procedimento usado nos modelos físicos é simples: em síntese fazem-se montagens de tiras sobre pequenos suportes, onde se tem idéia da geometria das faixas planas que serão formadas, (FIGURA 1-3). Ou ainda, caso já se tenha analisado a estrutura e determinado seus padrões de corte, pode-se fazer a impressão das faixas em escala reduzida e montar uma miniatura da estrutura. Este procedimento foi descrito por Pauletti, Brasil e Alvim (2003).

FIGURA 1-3 – Geração de um modelo físico. TensiNews (2002).

Gründig e Moncrieff (1993), preocupam-se em mostrar procedimentos de geração de cortes por modelos físicos para estruturas em formatos de tendas (por exemplo, estruturas de circos), onde se faz a obtenção de faixas por cortes iniciados no ponto mais alto da estrutura e segue-se em direções radiais aos pontos mais baixos, colando as faixas umas às outras no sentido anti-horário. Pode-se citar também Gründig e Bäuerle (1992), que demonstram o procedimento de geração de modelos físicos para a definição dos padrões de corte.

Técnicas de determinação dos padrões de corte, utilizando modelos físicos podem ser encontradas com maior abrangência em Otto (1958) e (1982), que trata com detalhes as técnicas empregadas para estes tipos de modelos.

Além dos modelos físicos propriamente ditos, há modelos em escala, as maquetes, que são de grande valia para a análise e projeto de estruturas de membrana, pois possibilitam obter visualmente aspectos relevantes na confecção deste tipo de estruturas. Atualmente, os protótipos de estruturas vêm sendo utilizados no meio acadêmico durante o curso de disciplinas relacionadas às estruturas de membrana. Um exemplo dessa disposição acadêmica acontece na

disciplina: “*Estruturas Leves para Grandes Vãos*”¹, com o intuito de disseminar o uso e aplicabilidade das estruturas de membrana. Na figura 1-4 têm-se estruturas de membrana representadas em forma de maquete.

FIGURA 1-4 – Maquete de estruturas de membrana. TensiNews (2003).

Alguns outros métodos para determinação dos padrões de corte foram estudados por vários autores. Phelan (1986), apresenta o método numérico de padronização dos cortes conhecido como procedimento de projeto integrado, composto por três fases: configuração de referência, determinada pelo equilíbrio inicial; análise de carregamentos da estrutura equilibrada e determinação da geometria dos cortes. Moncrieff (1990), demonstra técnicas computacionais de geração de padrões de corte e Tabarrok (1993), apresenta um método de padronização dos cortes usando a análise por elementos finitos.

Atualmente, os modelos e métodos utilizados para a confecção dos cortes em estruturas de membrana são espelhados em ferramentas computacionais, não descartando a hipótese de serem usados conjuntamente aos modelos físico e

¹. Disciplina disposta na grade curricular dos estudantes de pós-graduação do curso de Engenharia de Estruturas da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Ministrada pelos Professores: Reyolando M.L.R.F.Brasil e Ruy M. O. Pauletti.

maquetes, a fim de se conseguir cada vez mais detalhes do funcionamento geral da estrutura.

Pode-se citar o projeto da igreja batista em Fortaleza, construída em 2003 (Figura 1-5), onde foram utilizados modelos físicos, maquetes e ferramentas computacionais para projeto, análise e construção. Essa estrutura foi discutida com detalhes por Pauletti, Brasil e Alvim (2003).

FIGURA 1-5 – Igreja Batista (Fortaleza – CE).

1.3 – LINHAS DE CORTE GEODÉSICAS

Em geral o conceito de linhas geodésicas é entendido como “a linha que liga dois pontos de uma superfície na menor distância possível”, apesar de alguns autores contestarem esta definição, pois em alguns casos podem existir infinitas linhas geodésicas e não apenas uma (como se definiu), por exemplo, uma esfera quando ligada de um pólo a outro, (FIGURA 1-6). No entanto, essa definição ainda é

bastante utilizada. Têm-se como exemplos clássicos de linhas geodésicas as curvas de nível e a linha do equador.

FIGURA 1-6 – Linhas geodésicas sobre uma esfera. (COHEN et al. 1999).

O conceito de linhas geodésicas pode ser estendido e usado em estruturas de membrana. Neste trabalho faz-se uso de uma das propriedades das linhas geodésicas, para a determinação de padrões de corte, que será discutida em detalhes no Capítulo 3.

Neste trabalho, querem-se implementar procedimentos geométricos simples para encontrar linhas geodésicas sobre superfícies de membrana.

Anteriormente, Ayyildiz et al. (1996), Lovelock (1989) e Weinstock (1974) propuseram interpretações para as linhas geodésicas, com uma linguagem matemática razoavelmente abrangente em termos de conceitos abstratos. Em Caselles (1996), tem-se a solução para contornos de superfícies com linhas geodésicas, por meios de funcionais de energia. Pode-se ainda citar Kimmel (1998), que propôs um algoritmo baseado na geometria *Riemanniana*, e minimizações de equações diferenciais de segunda ordem.

Para a determinação de linhas geodésicas foi proposto por Noakes (1997) um algoritmo geral, admitindo um “chute” inicial e resolvendo equações diferenciais até se encontrar a linha geodésica em uma superfície, porém bastante complexo matematicamente; Novotni e Reinhard (1998), discutem linhas geodésicas em malhas de superfícies triangulares, mas sem muitos detalhes e Kirsanov (2004), propõe o algoritmo de *Dijkstra* para solucionar o problema das menores distâncias, porém ambos com um critério matemático bastante rigoroso. Ainda pode-se citar o algoritmo do “*caixeiro viajante*”, construído para a determinação do caminho crítico entre cidades, a fim de se evitar desperdício de tempo de transporte de mercadorias.

Já o estudo de linhas geodésicas para a padronização dos cortes foi anteriormente proposto de forma sucinta por Meek (1991).

Zhang e Luo (2006), mostram um procedimento de traçado de linhas geodésicas baseado na rigidez e na força interna dos elementos de membrana e ainda comentam a dificuldade de se transpor vértices de malhas de facetas triangulares usando procedimentos geométricos.

Para a formulação que se apresenta neste trabalho, baseia-se em Meek (1991), que formula o caminhamento de linhas geodésicas sobre triângulos, também em Zhang (2002), que mostra a linha geodésica sendo transferida entre arestas de facetas adjacentes e Kirsanov (2004), que demonstra algoritmos de minimização de distâncias em triângulos.

Neste trabalho, devido à escassez de referências específicas para o que se formula, necessitou-se de idéias inéditas, obtidas por meio de procedimentos geométricos e grandezas vetoriais, como é o caso de se conseguir transpor vértices de malhas entre facetas incidentes neste.

Antes de se referir à formulação para a determinação dos padrões de corte por linhas geodésicas precisa-se recorrer a algumas definições importantes, as quais serão discutidas brevemente a seguir.

1.4- CURVATURA

A curvatura média k de uma curva no plano pode ser definida pela razão (em módulo) entre w e $\widehat{MM'}$ (Equação 1.1). Onde w é o ângulo formado entre as duas retas tangentes à curva nos pontos M e M' e $\widehat{MM'}$ é a distância entre os dois pontos medida sobre a curva (Figura 1-7).

$$k = \left| \frac{w}{\widehat{MM'}} \right| \quad 1.1$$

FIGURA 1-7 – Curva no plano.

Desta forma defini-se curvatura no ponto M como sendo o limite do ponto M tendendo ao ponto M' (Equação 1.2).

$$k(\text{média}) = \lim_{M \rightarrow M'} \left| \frac{w}{\widehat{MM'}} \right| \quad 1.2$$

No caso de três dimensões, pode-se ter a *Curva Normal* que é a intersecção entre a superfície e um plano contendo o vetor normal em um ponto.

Desta, surge *curvatura seccional*. A figura 1-8 ilustra a curvatura em uma seção sobre uma superfície.

FIGURA 1-8 – Curvatura em uma superfície seccionada (Zhang 2002).

Em geral há dois importantes tipos de curvatura, a extrínseca e a intrínseca. Exemplos de curvaturas extrínsecas incluem a curvatura média de uma superfície.

A curvatura gaussiana é um exemplo de curvatura intrínseca. A figura 1-9 ilustra formas de equilíbrio de estruturas com carregamento aplicado sobre a superfície; onde se podem observar curvaturas gaussianas (WAGNER et al. 2004). Estas formas são modificadas com restrições diferentes nas bordas.

FIGURA 1-9 - Formas de equilíbrio e curvaturas gaussianas (WAGNER et al., 2004).

Outro tipo importante de curvatura a ser citada é a curvatura geodésica, e pode-se defini-la, segundo Zhang e Luo (2002), da seguinte maneira:

“A curvatura geodésica em cada ponto da superfície é definida como a projeção ortogonal do raio de curvatura sobre o plano tangente à superfície, no ponto considerado. Quando a superfície puder ser desenvolvida sobre um plano, a linha geodésica torna-se uma reta. Retomando os padrões de corte, tem-se que, peças com as bordas definidas conforme linhas geodésicas, na configuração de equilíbrio, tornam-se retângulos, quando planificadas, possibilitando um melhor aproveitamento de material”.

Como, porém, as superfícies das membranas protendidas geralmente não são desenvolvíveis, as bordas das peças planificadas apresentam por via de regra algum arqueamento, e os ângulos alguma discrepância em relação ao ângulo reto (PAULETTI, 2003).

Pode-se encontrar uma definição cinemática para curvaturas geodésicas em Mathworld (2005), na qual, tem-se que: “para um ponto material caminhando sobre uma superfície, com velocidade unitária, o comprimento da componente da aceleração tangencial à superfície é a curvatura geodésica. Curvas com curvatura geodésica nula são chamadas de geodésicas”.

As linhas geodésicas depois de planificadas apresentam cortes mais retos, o que se dá devido à curvatura geodésica nula.

Tiras de tecido com arestas mais retas, além de facilitarem a montagem, desperdiçam menos materiais, e ainda, se as larguras das faixas forem limitadas pela largura máxima do tecido disposto pelas fábricas, a redução de desperdício se acentua. Nas figuras 1-11 e 1-12, podem-se notar a diferença entre padrões de cortes feitos por linhas geodésicas e cortes feitos a partir das arestas dos elementos finitos em uma malha; a forma inicial da estrutura pode ser vista na figura 1-10.

FIGURA 1-10 – Forma de Equilíbrio Inicial, malha 3-D de elementos finitos. Grundig, Ekert e Moncrief (1993).

FIGURA1-11 – Cortes facetando os elementos da malha, Grundig, Ekert e Moncrief (1993).

FIGURA 1-12 – Cortes utilizando linhas geodésicas. Grundig, Ekert e Moncrief (1993).

Segundo Gründig e Moncrief (1995), as linhas geodésicas preservam um efeito estético favorável no qual as espessuras das faixas vão variando gradualmente, dependendo do arranjo geométrico da estrutura, sendo que, quando não se tem essa variação, o impacto estético é visível, como é o caso mostrado na

figura 1-13, onde cortes sem variação na espessura das faixas prejudicam o efeito estético.

FIGURA 1-13 – Efeito estético comprometido, por falta de variação nas espessuras de algumas faixas. (TENSINET, 2005)

Capítulo 2

GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS E ADJACÊNCIAS ENTRE FACETAS

2.1 - USO DO SOFTWARE GID PARA A GERAÇÃO AUTOMÁTICA DE MALHAS

Existem várias formas de se montar matrizes de conectividades entre facetas e de coordenadas de vértices em uma malha, porém cabe salientar o uso da ferramenta GID - *The personal pre and post processor* – (CIMNE, 2006), para a geração automática de malhas. O GID (FIGURA 2-1) pode ser usado livremente, na sua versão restrita, para pré e pós-processamento de análises estruturais, sem qualquer ônus para sua utilização. Propõe-se que o GID seja utilizado como “máscara”, justamente para os casos onde se quer importar/exportar argumentos de análises estruturais. Desta forma o GID, deve ser adaptado para interagir com outros *softwares*. Neste trabalho utilizou-se o MATLAB 6.5.

FIGURA 2-1 – Interface GID (Versão 7).

Pensando-se apenas no traçado de linhas geodésicas sobre superfícies de membrana, será necessária a coleta de informações da estrutura, representada por uma malha de facetas triangulares. Logo, precisar-se-á das matrizes de conectividades (CON) das facetas e coordenadas dos vértices (COORD), que poderão ser importadas do GID. Para isto, precisa-se modificar a estrutura interna do *software*, para que este possa exportar os dados que se desejam para o MATLAB. Pode-se notar na figura 2-2, um modelo de rotina, em linguagem GID, para a exportação de matrizes de conectividades das facetas e coordenadas dos vértices para o MATLAB (por meio do GID, onde as linhas iniciadas por * são entendidas pela linguagem GID).

Pode-se descrever o seguinte: faz-se uma varredura em todos os vértices da estrutura em questão; no caso da matriz de coordenadas é feita a varredura nos vértices da estrutura e, por conseguinte montam-se as linhas, no formato do número desejado. Em seguida, são inseridas à matriz, linhas com três colunas até se completarem as varreduras por todos os vértices da estrutura. Para a montagem da matriz de conectividades, procede-se da varredura de todas as facetas da estrutura e coletam-se suas conectividades.

```
COORD= [  
*loop nodes  
*format "%10.3g %10.3g %10.3g"  
*NodesCoord(1) *NodesCoord(2) *NodesCoord(3);  
*end nodes  
];%%%% coordenadas dos nós  
  
CON= [  
*loop elems  
    *elemsConec (swap);  
*end elems  
];%%%% conectividade
```

FIGURA 2-2 – Modelo de rotina para a exportação de dados.

2.2 – ADJACÊNCIAS ENTRE FACETAS

Dentre as várias formas de armazenamento de dados em programação, escolheu-se a forma matricial, por ser uma forma lógica e bastante usual em engenharia.

Definem-se então duas prováveis formas de adjacências derivadas do caminhamento da linha geodésica em uma malha composta por facetas triangulares.

1º Caso - A linha geodésica incidindo em um vértice. (FIGURA 2-3 – Caso 1)

Neste caso é necessário saber quais facetas estão conectadas àquele vértice.

A esta situação designa-se por *Adjacência de Primeira Ordem (A.P.O.)*.

2º Caso - A linha geodésica incidindo em uma aresta. (FIGURA 2-3 – Caso 2)

Logo, se precisa saber quais facetas compartilham a mesma aresta. O que se define por *Adjacência de Segunda Ordem (A.S.O.)*.

Caso 1

Caso 2

FIGURA 2-3 – Formas de Adjacências. Adaptado de (NOVOTINI e KLEIN).

Para que fique clara a idéia de adjacências entre facetas, faz-se uso de exemplos, a fim de elucidar quaisquer dúvidas provenientes do processo de obtenção das matrizes de adjacências.

Seja a estrutura ilustrada na figura 2-4, onde a matriz de conectividades (CON), entre as facetas e a matriz de coordenadas dos vértices (COORD), já haviam sido anteriormente geradas (por exemplo, em GID). De posse da matriz de conectividades, pode-se encontrar o número de vértices (n_v) e o número de facetas da malha (n_f).

A malha, ilustrada na figura 2-4, é representada pela matriz de conectividades da figura 2-5, onde se pode notar que o número de facetas é igual ao número de linhas da matriz CON; contudo, para que se consiga encontrar o número de vértices (n_v) é necessário que se percorram todas as linhas e colunas da matriz CON, a fim de descobrir qual o maior valor entre todos os elementos desta.

FIGURA 2-4 – Exemplo 1. (Malha com quatro facetas e seis vértices).

Na figura 2-5 tem-se a matriz CON, onde as linhas ordenadas de cima para baixo representam as facetas em ordem crescente (assim a linha 1 representa a faceta de número 1, a linha 2 representa a faceta de número 2 e assim sucessivamente). As colunas representam os vértices de cada faceta em sentido anti-horário.

$$\text{CON} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$$

FIGURA 2-5 – Matriz de conectividades da estrutura ilustrada na FIGURA 3.4

Objetiva-se, a partir da matriz de conectividades, montar matrizes nas quais possam-se “coletar” as facetas que compartilham o mesmo vértice ou as que partilham das mesmas arestas. Logo, para melhor compreensão, separam-se os dois casos como já se havia feito antes.

Para o caso em que a linha geodésica intercepta um vértice (A.P.O.), surge a matriz de incidência dos vértices (M_INC) e um vetor que guarda o número de facetas incidentes nos vértices (N_INC).

2.2.1 - Montagem da Matriz e do Vetor de Incidências dos Vértices

Tomando-se a malha da figura 2-4, imagina-se a linha geodésica caminhando em direção ao vértice 4. Graficamente é fácil observar que as facetas de número 1, 2 e 4 incidem no vértice 4, logo o número de facetas incidentes nele é igual 3. Então, se fez um procedimento automático para a obtenção de matrizes que guardem todas as facetas incidentes em cada vértice da malha, e por consequência vetores que armazenem o número de facetas incidentes nos vértices.

Seja a matriz de conectividades, da figura 2-5, referente à malha da figura 2-4. Começando pela primeira linha da matriz CON, toma-se o vértice 1, e compara-se este a todos os vértices daquela linha; a busca é interrompida na linha quando o vértice de busca for encontrado. Caso o vértice não seja encontrado, a busca parte para a linha seguinte. No caso em questão, a primeira linha da matriz de incidências é preenchida apenas com a faceta 1, pois as demais linhas da matriz (CON) não contêm o vértice 1. Esta mesma idéia é seguida em forma de algoritmo e consequentemente em rotinas computacionais.

Ainda para efeito de entendimento, obter-se-á a segunda linha de (M_INC). Como o vértice de número 1 já foi procurado automaticamente ele é eliminado da busca, portanto parte-se para o segundo vértice, que representa a segunda linha da matriz de incidências; por intermédio de “laços” (*loops*) busca-se em cada linha da matriz de conectividades, quais delas contêm o vértice 2. Como resultado tem-se, para a primeira e segunda linha da matriz M_INC:

Primeira linha

$$M_INC = (1)$$

Segunda Linha

$$M_INC = (1 \ 2 \ 3)$$

Tem-se que, para a primeira linha da matriz de incidências apenas a faceta de número 1 é incidente no vértice 1, enquanto que para a segunda linha têm-se as facetas 1, 2 e 3 incidentes no vértice 2. Para as demais linhas da matriz procede-se da mesma forma.

Preenchida a matriz de incidências, pode-se construir o vetor coluna (N_INC), que tem em cada linha o número de facetas que incidem nos vértices. Desta forma, tem-se para a primeira e segunda linha do vetor de incidências (N_INC):

Primeira linha

$$N_INC = (1)$$

Segunda Linha

$$N_INC = (3)$$

A matriz de incidências pode ter ordem variável nas colunas de cada linha separadamente, ou seja, algumas linhas podem ser preenchidas em apenas uma de suas posições, para isto basta haver apenas uma faceta incidindo em um vértice. Ressalta-se que o número de linhas da matriz de incidências é igual ao número de vértices da malha.

É importante demonstrar os algoritmos de obtenção das matrizes e vetores de incidência, para que fique clara a idéia aplicada.

1º Passo	Declara-se M_INC nula e esparsa
2º Passo	Declara-se N_INC nulo
3º Passo	Laço <i>for</i> variando de 1 até no número de vértices
4º Passo	Laço <i>for</i> variando de 1 até no número de facetas
5º Passo	Laço <i>for</i> variando de 1 a 3
6º Passo	Condição <i>if</i> , caso tenha o vértice de busca esteja em alguma linha da matriz CON Então, $N_INC = N_INC + 1$

	e M_INC = número da linha em que a condição foi aceita. <i>break</i> , devolva os valores.
7º Passo	<i>end</i> . Fim dos laços

De posse do algoritmo, implementou-se uma rotina computacional em linguagem de programação MATLAB, que pode ser vista a seguir:

Sejam:

n_v - número de vértices;

n_f - número de facetas;

in, ie, je - índices de variação, podendo ser “batizados” com outros nomes.

```
M_INC=sparse(nv,nf,0);
NINC(1:nv,1)=0;
for in=1:nv
    for ie=1:nf
        for jn=1:3
            if CON(ie,jn)==in
                NINC(in)=NINC(in)+1;
                M_INC(in,NINC(in))=ie;
                break
            end
        end
    end
end
end
```

2.2.2 - Montagem da Matriz e do Vetor de Adjacências das Facetas

Caso a linha geodésica, em seu caminhamento sobre a malha, intercepte uma aresta (A.S.O.), é necessário que se saibam quais facetas compartilham a mesma aresta; caso alguma faceta não compartilhe qualquer de suas arestas, então se deve identificar que esta é uma faceta de borda (localizada nos extremos da malha). Para isso criaram-se as matrizes de adjacências entre as facetas (M_ADJ),

bem como o vetor (N_ADJ), para guardar, em cada coluna, o número total de arestas compartilhadas pela mesma faceta, sendo este no mínimo zero, caso haja apenas uma faceta em toda a malha, e no máximo três, caso as três arestas sejam compartilhadas com facetas vizinhas.

Para que se possa visualizar a montagem de M_ADJ, opta-se por usar como exemplo a malha da figura 2-4. Desta forma pode-se notar que a faceta 2 compartilha suas três arestas, logo ela é adjacente às facetas 1,3 e 4 e tem número de adjacências igual a 3. No caso da faceta de número 3, esta é apenas adjacente a 2 e tem número de adjacências igual a 1.

No entanto, em programação, não se trabalham com os segmentos “arestas” e sim com variáveis determinantes destas, os vértices. Isto é, uma aresta é determinada pela conexão de dois vértices, logo para que se saibam quais facetas compartilham arestas, basta verificar na matriz de conectividades, quais facetas tem dois vértices iguais.

Para a malha da figura 2-4 tem-se a primeira linha da matriz de adjacências:

$$M_ADJ(\text{linha } 1) = (2 \quad 0 \quad 0)$$

Tomam-se os vértices da linha 1 da matriz de conectividades, primeiramente o vértice que ocupa a posição CON(1,1), ou seja, o termo da linha 1 e da coluna 1 da matriz. Este é o vértice de número 1, porém o vértice 1 não compõe nenhuma outra linha da matriz de conectividades, então a busca passa para a posição CON(1,2) = vértice 2, o qual compões a posição CON(2,1) e CON(3,1); logo se pode dizer que as facetas 2 e 3 são “candidatas” a adjacentes da faceta 1. Contudo, o que se consuma no seguinte passo, é que apenas a faceta 2 é adjacentes a 1, pois CON(1,3) é igual a CON(2,3). Enquanto que a faceta 3, que era candidata, não

tem dois vértices iguais a faceta 1, portanto não atinge o critério necessário para determinar a adjacência entre as facetas.

A idéia que se baseou para implementar computacionalmente matrizes e vetores de adjacências segue-se no seguinte algoritmo:

1º Passo	Declara-se M_ADJ nula
2º Passo	Declara-se N_ADJ nulo
3º Passo	Laço <i>for</i> variando da 1ª faceta até o (número de facetas) -1
4º Passo	Laço <i>for</i> variando da <i>faceta posterior ao 3º Passo</i> até o número de facetas
5º Passo	Laço <i>for</i> variando de 1 a 3 (laço de variação das colunas de CON)
6º Passo	Laço <i>for</i> variando de 1 a 3 (laço de variação das colunas de CON)
7º Passo	Condição <i>if</i> , caso haja dois vértices coincidentes em duas linhas da matriz CON Então, N_ADJ recebe 1, como número de adjacências, e M_ADJ recebe o valor da faceta adjacente <i>break</i> , devolva os valores.
8º Passo	<i>end</i> . Fim dos laços

A implementação computacional segue a mesma linha de raciocínio do algoritmo e pode ser vista a seguir.

Onde:

n_f - número de facetas;

ie, je, kie, kje - índices de variação dos *laços for*.

guess – contador (caso guess seja igual a 2, duas facetas são adjacentes)

1º Passo	M_ADJ (1:nf, 1:3) = 0;
2º Passo	NADJ (1:nf, 1) = 0; guess=0;
3º Passo	<i>for</i> ie=1:nf-1

4° Passo	<code>for je=ie+1:nf</code>
5° Passo	<code>for kie=1:3</code>
6° Passo	<code>for kje=1:3</code>
7° Passo	<pre> if CON(ie,kie)==CON(je,kje) guess=guess+1; break, end end if guess==2 NADJ(ie)=NADJ(ie)+1; NADJ(je)=NADJ(je)+1; M_ADJ(ie,NADJ(ie))=je; M_ADJ(je,NADJ(je))=ie; guess=0; break, end end guess=0; if NADJ(ie)>=3 break, end </pre>
8° Passo	<pre> end end </pre>

As matrizes e vetores de incidências e adjacências, mencionados anteriormente, serão utilizados várias vezes dentro da programação escolhida neste trabalho, porém serão calculados uma única vez, tendo seus valores guardados em células para serem usados quando necessário.

Imaginando-se situações de malhas com milhares de facetas, onde a linha geodésica no seu percurso sobre a malha possa incidir em um vértice ou faceta. A tarefa torna-se simples, quando se querem encontrar quais e quantas facetas incidem em um vértice, bem como quais facetas são adjacentes caso a linha geodésica cruze uma aresta.

A utilidade de matrizes de adjacências não para por aí; pode-se citar ainda o caso onde exista uma malha qualquer de elementos finitos e se queira saber qual o contorno de uma faixa de elementos. Neste caso pode-se selecionar entre quais

facetas se quer o contorno, e ter-se-á como resultado as arestas de contorno, sendo que para isto basta consultar a matriz de adjacências.

Capítulo 3

CAMINHAMENTO DA LINHA GEODÉSICA SOBRE SUPERFÍCIES FACETADAS POR TRIÂNGULOS

Sabe-se, por definição, que a linha que liga dois pontos sobre uma superfície em menor distância é a geodésica. Porém, há propriedades, derivadas das definições destas linhas, que podem ser úteis e aplicáveis em estruturas de membrana.

Neste capítulo precisar-se-á trabalhar com grandezas geométricas, necessitando-se distinguir notações utilizadas na formulação de elementos finitos às utilizadas em aplicações puramente geométricas. Logo, em se tratando de geometria, ao em vez de usarem-se elementos finitos triangulares e nós, usar-se-ão, respectivamente, facetas triangulares e vértices, além de outras grandezas que ocorrerão durante o desenvolver deste trabalho.

3.1 - IDÉIA BÁSICA PARA SE FORMULAR O CAMINHAMENTO DE LINHAS GEODÉSICAS SOBRE MALHAS DE FACETAS TRIANGULARES

Expandiu-se a idéia usada em um caso geometricamente simples para o uso desta em casos mais gerais. Logo, ao imaginar-se um plano, sabe-se que a menor distância entre dois pontos é uma reta. Então para que a idéia usada nesta formulação fique mais clara, toma-se o seguinte exemplo:

Imagina-se uma folha de papel com sua superfície recoberta por triângulos,

de tal forma que se possa dobrá-la exatamente sobre as arestas dos triângulos, como mostra a figura 3-1. Em seguida desenha-se uma linha que interligue dois vértices extremos na menor distância possível (definição de linha geodésica), (FIGURA 3-2). Após o traçado da linha geodésica, planifica-se a folha e pode-se ver o resultado na figura 3-3.

FIGURA 3-1 - Folha de Papel dobrada sobre as arestas dos triângulos.

FIGURA 3-2 - Risco à caneta ligando dois pontos distintos na folha.

FIGURA 3-3 - Folha de papel no plano, após “esticada” por dois vértices extremos.

Na grande maioria dos casos de estruturas de membrana, com a existência de dupla curvatura, não se pode ter uma planificação exata, como já discutido anteriormente, mas espera-se que as faixas obtidas por linhas geodésicas apresentem lados aproximadamente retos, fazendo com isso que se tenha menos desperdício de material componente das membranas, além de melhorar o acabamento e facilitar a montagem.

O comportamento das linhas geodésicas dentro das facetas e a transferência destas entre facetas será discutido em detalhes posteriormente.

A teoria desenvolvida neste trabalho foi embasada na formulação de linhas geodésicas sobre elementos triangulares planos (facetas triangulares). A formulação e método aplicados estão descritos a seguir.

3.2- CONSIDERAÇÕES SOBRE A FORMULAÇÃO DE LINHAS GEODÉSICAS

Com base na geometria de um elemento triangular de membrana, (FIGURA 3-4), proposto por Pauletti (2003), que por sua vez baseou-se em Meek (1991) e Argyris (1974, 1981, 1982), desenvolveu-se a formulação matemática embasada na teoria de mínimas distâncias - linhas geodésicas - para a *determinação de padrões de corte* de estruturas de membrana.

FIGURA 3-4 - Elemento Triangular de Membrana.

Neste trabalho, implementou-se o procedimento de traçado de linhas geodésicas em malhas de facetas triangulares, além da elaboração de algoritmos e conseqüentemente a implementação destes em rotinas computacionais.

3.3 - REQUISITOS PARA A FORMULAÇÃO DE LINHAS GEODÉSICAS

Seja uma estrutura de membrana qualquer cuja malha de facetas triangulares, ligadas por vértices e arestas, conforme mostra a figura 3-5. Quer-se, então, percorrer a superfície da malha por linhas geodésicas, com a escolha do **vértice inicial**, a **direção** que se deseja percorrer inicialmente e o **vértice final**.

FIGURA 3-5 - Superfície com facetas triangulares.

3.4 – CONVENÇÃO PARA A NUMERAÇÃO DE VÉRTICES

Como visto no Capítulo 2, há dois caminhos possíveis para o caminhamento da linha geodésica sobre uma malha de facetas triangulares: ou a linha geodésica incide sobre um vértice ou sobre uma aresta.

No traçado de uma linha geodésica sobre uma malha, em que são dados o *vértice inicial* o *final* e a *direção inicial* de busca da linha geodésica, pode-se imaginar que esta incida sobre uma faceta triangular qualquer; portanto, sabe-se que esta incidência pode-se dar de duas formas. O que se adota como convenção para a aplicabilidade da formulação é que, caso a linha geodésica incida em um vértice,

automaticamente este será batizado por vértice “a”. Porém, caso a linha incida em uma aresta, automaticamente esta será definida entre os vértices “a” e “b”, ou segmento “ab”, ou apenas aresta “ab”.

Para a coerência da formulação precisou-se estabelecer uma seqüência cíclica para os três vértices de cada faceta, a fim de que em uma malha, com n vértices, pudesse-se distinguir qual a seqüência ($a \rightarrow b \rightarrow c$) dos vértices de cada faceta. Esse artifício matemático segue a idéia mostrada na figura 3-6.

Quer-se, com isso, forçar uma numeração de conectividades ordenada, que sempre se enquadre na formulação proposta.

FIGURA 3-6 - Posições relativas entre conectividades locais e globais.

Pelo arranjo ilustrado na figura 3-6 pode-se observar que a numeração global (1, 2 e 3) pode assumir 3 posições distintas diante à numeração local (a, b, c), sendo estas determinadas pelo cruzamento da linha geodésica com arestas ou vértices durante o seu caminhamento sobre a malha. Por exemplo, dada a matriz de conectividades (CON), indicando as conectividades de uma faceta triangular i (FIGURA 3-7), em que as posições globais assumem seguintes valores mostrados: $CON(i, 1) = 2$, $CON(i, 2) = 5$ e $CON(i, 3) = 4$;

$$\text{CON} = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ 2 & 4 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

FIGURA 3-7 - Linha i da matriz de conectividades referente a uma faceta i qualquer, conectada pelos vértices: 2, 4 e 5.

A fim de elucidar ainda mais a idéia, opta-se por mostrar as três possibilidades de incidências da linha geodésica nos vértices da faceta i , (FIGURA 3-7). Com isso, para cada caso de incidência da linha geodésica sobre um vértice, relaciona-se de acordo com a figura 3-6, como ficariam as correlações entre as conectividades globais e locais.

3.4.1 - Linha Geodésica Incidindo em Vértices da Faceta i

1º Caso - A linha geodésica incidindo na posição global 1, (FIGURA 3-8.a).

De acordo com a figura 3-6, a correlação entre as conectividades local e global fica da seguinte forma: $\text{CON}(i, 1) = \text{Posição Local a}$, $\text{CON}(i, 2) = \text{Posição Local b}$, $\text{CON}(i, 3) = \text{Posição Local c}$;

2º Caso - A linha geodésica incidindo na posição global 2, (FIGURA 3-8.b).

Tem-se a seguinte correlação entre as conectividades globais e locais: $\text{CON}(i, 1) = \text{Posição Local c}$, $\text{CON}(i, 2) = \text{Posição Local a}$, $\text{CON}(i, 3) = \text{Posição Local b}$;

3º Caso - A linha geodésica incidindo na posição global 3, (FIGURA 3-8.c).

Neste caso a correlação entre as conectividades globais e locais ficam da seguinte forma: $\text{CON}(i, 1) = \text{Posição Local b}$, $\text{CON}(i, 2) = \text{Posição Local c}$, $\text{CON}(i, 3) = \text{Posição Local a}$.

FIGURA 3-8 – Incidência da linha geodésica sobre vértices da faceta i .

Portanto, para o caminhamento da linha geodésica sobre a malha, as posições locais se adaptarão às globais, seguindo a sequência ilustrada na figura 3-6.

3.4.2 - Linha Geodésica Incidindo em Arestas da Faceta

Há três possibilidades da linha geodésica incidir nas arestas de uma faceta triangular.

1º Caso - A linha geodésica incide na aresta definida pelas posições globais 1 e 2. (FIGURA 3-9.a).

Neste caso a correlação entre as posições globais e locais se dispõe da seguinte forma: $CON(i, 1) = \text{Posição Local a}$, $CON(i, 2) = \text{Posição Local b}$, $CON(i, 3) = \text{Posição Local c}$;

2º Caso - A linha geodésica incide na aresta definida pelas posições globais 2 e 3. (FIGURA 3-9.b).

As relações entre as conectividades globais e locais para este caso ficam da seguinte forma: $CON(i, 1) = \text{Posição Local c}$, $CON(i, 2) = \text{Posição Local a}$, $CON(i, 3) = \text{Posição Local b}$;

3º Caso - A linha geodésica incide na aresta definida pelas posições globais

3 e 1. (FIGURA 3-9.c).

Para este caso tem-se a seguinte correlação entre as conectividades locais e globais: $CON(i, 1) = \text{Posição Local } b$, $CON(i, 2) = \text{Posição Local } c$, $CON(i, 3) = \text{Posição Local } a$.

a – Incidência sobre a aresta definida pelas posições globais 1 e 2. b - Incidência sobre a aresta definida pelas posições globais 2 e 3. c - Incidência sobre a aresta definida pelas posições globais 3 e 1.

FIGURA 3-9 – Formas de incidências das linhas geodésicas sobre arestas da faceta i .

Com estas condições, o caminhamento da linha geodésica sobre a malha, independente do cruzamento desta com vértices ou arestas, se resume a duas possibilidades: ou a linha cruza o vértice “a” ou a aresta “ab”.

3.5 - FACETA TRIANGULAR DE REFERÊNCIA

Por analogia ao elemento de membrana da figura 3-4, tem-se uma faceta triangular ilustrada na figura 3-10, que servirá de referência para a formulação posterior.

FIGURA 3-10 - *Iésima* faceta triangular de Referência.

Com referência à geometria de faceta ilustrada na figura 3-10, pode-se definir uma série de grandezas geométricas.

Na equação 3.1 tem-se o versor direção $\vec{v}^i$ de uma aresta da faceta i , que indica a direção de cada lado da faceta triangular, em relação ao sistema local de coordenadas $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$ da faceta. Onde $\vec{l}^i$ é o vetor direção do lado da *iésima* faceta.

$$\vec{v}^i = \frac{\vec{l}^i}{|\vec{l}^i|} = \frac{\vec{l}^i}{l^i} \quad (3.1)$$

Surge a necessidade de se encontrar um vetor normal $\vec{n}^i$ ao plano Ω da *iésima* faceta, o qual pode ser visto na equação 3.2. Em que $\vec{v}_a^i$ é o versor direção do lado ab da *iésima* faceta e $\vec{v}_b^i$ o versor direção do lado ac da *iésima* faceta.

$$\vec{n}^i = \frac{\vec{v}_a^i \times \vec{v}_b^i}{\|\vec{v}_a^i \times \vec{v}_b^i\|} \quad (3.2)$$

Defini-se o vetor posição $\vec{x}^i$ do ponto por meio da equação 3.3. Onde $\vec{x}_a^i$ indica a posição do vértice a da *iésima* faceta; r é um coeficiente de parametrização

e $\vec{l}_c^i$ é o vetor direção do lado definido pelos vértices a e b da i ésima faceta.

$$\vec{x}^i = \vec{x}_a^i + r \cdot \vec{l}_c^i \quad (3.3)$$

Sendo que $\vec{x}^i$ pode ser qualquer ponto de cruzamento da linha geodésica com a faceta. Em alguns casos $\vec{x}^i$ pode coincidir com os vértices das facetas geodésicas.

3.6 - VÉRTICES DE PARTIDA, CHEGADA E DIREÇÃO INICIAL DE CAMINHAMENTO DA LINHA GEODÉSICA.

3.6.1 – Vértices de Partida e Vértice de Chegada da Linha Geodésica

Visando o aspecto prático, a escolha de pontos visíveis sobre a malha (vértices) é vantajosa sobre a escolha de pontos não visíveis (seria o caso de se escolher pontos sobre as arestas de facetas). Logo, escolhe-se um ponto de partida “ x_0 ” (vértice inicial), e um ponto que se quer alcançar “ x_t ” (vértice final) , ambos coincidindo com os vértices de uma malha de facetas triangulares, sendo estes obrigatoriamente distintos um do outro (FIGURA 3-11.a).

Os pontos de saída e chegada em geral, se localizarão nas extremidades das malhas, pois o que se procuram são linhas de corte que atravessarão (de ponta a ponta) toda superfície da membrana.

3.6.2 - Direção Inicial “ $\vec{s}_0$ ” de Caminhamento da Linha Geodésica

Em malhas planas, pode-se chegar exatamente ao ponto que se quer alcançar x_t , basta definir a direção $\vec{s}_0$ pelo versor $v = \frac{x_t - x_0}{\|x_t - x_0\|}$. Porém, na grande

maioria das estruturas de membrana, em virtude da existência de dupla curvatura, o ponto x_t não deverá ser alcançado em uma primeira escolha da direção $\vec{s}_0$, deve-se iterar algumas vezes, modificando $\vec{s}_0$, até que se aproxime o suficiente de x_t .

Há também situações de malhas com furos centrais, em que x_t pode não ser alcançado, caso a linha geodésica “esbarre” em uma borda do furo. Neste caso sugere-se a tomada da direção $\vec{s}_0$ por meio de uma “varredura”, escolhendo a direção que mais se aproximar de x_t .

Entretanto há dificuldades de se definir uma direção $\vec{s}_0$ que pertença ao plano da faceta. Desta forma, neste trabalho, fez-se a escolha de uma direção inicial $\vec{s}_0$, fazendo-se a intersecção entre um plano Π e o plano Ω da faceta, sendo o plano Π formado pela direção “ $\vec{u}_t$ ” (EQUAÇÃO 3.5) e um versor médio “ $\vec{n}_{av}$ ” (FIGURA 3-11.c). Na figura 3-11.d, ilustra-se a intersecção entre os planos Π e Ω , bem como as variáveis $\vec{s}_0$, $\vec{u}_t$ e $\vec{n}_{av}$, estando todas contidas no plano Π e apenas $\vec{s}_0$ contida em ambos os planos.

O vetor $\vec{n}_{av}$ (FIGURA 3-11.c) é o vetor médio entre os vetores normais $\vec{n}$ das facetas de borda incidentes no vértice inicial, as quais só podem ser em número de uma ou duas facetas.

 FIGURA 3-11.a - Pontos x_0 e x_t

 FIGURA 3-11.b - Versor $\vec{u}_t$ e vetor $\vec{l}_t$

 FIGURA 3-11.c - Versor médio $\vec{n}_{av}$

 FIGURA 3-11.d - Intersecção entre os planos Π e Ω .

Nota-se pela figura 3-11.d, que $\vec{s}_0$ é um vetor diretor da intersecção entre os planos Π e Ω . Desta forma elimina-se o risco de a direção $\vec{s}_0$ não pertencer ao plano Ω da faceta.

Seja $\vec{n}_\Omega$ o vetor normal ao plano da faceta cortada pelo plano Π (Equação 3.2) e as demais variáveis antes definidas, chega-se à direção $\vec{s}_0$ da seguinte forma:

$$\vec{l}_t = \vec{x}_t - \vec{x}_0 \quad (3.4)$$

$$\vec{u}_t = \frac{\vec{l}_t}{\|\vec{l}_t\|} \quad (3.5)$$

$$\vec{n}_{\Pi} = \vec{u}_t \times \vec{n}_{av} \quad (3.6)$$

$$\vec{s}_0 = \vec{n}_{\Omega} \times \vec{n}_{\Pi} \quad (3.7)$$

3.7 - ESCOLHA DO CAMINHO GEODÉSICO DENTRO DAS FACETAS

De posse dos pontos x_0 , x_t e a direção inicial $\vec{s}_0$, pode-se imaginar uma faceta geodésica i pertencente a uma malha de facetas triangulares, de tal forma que a linha geodésica possa interceptá-la tanto pelas arestas quanto pelos vértices. A figura 3-12 ilustra um caso onde a linha geodésica, após ter interceptado uma aresta, percorre-a em direção a outra aresta da mesma faceta. Contudo, há outras formas da linha geodésica percorrer uma faceta, portanto, quer-se, a partir deste caso, expandir a idéia para as demais situações possíveis de ocorrência, como, por exemplo, o caso em que a linha ao interceptar uma aresta, caminha em direção a um vértice.

Ilustram-se na figura 3-13, os ângulos α , β e γ internos a uma faceta geodésica de referência. As variáveis mostradas nas figuras 3-12 e 3-13 estão contidas no plano Ω da faceta i .

Entretanto, para que se comece o procedimento de busca do caminho geodésico, necessita-se que sejam definidas as seguintes retas: “s” definida pelo versor direção $\vec{s}^i$ e o ponto x^i - o versor $\vec{s}^i$ indica a direção de propagação da linha geodésica; “y” definida pelo versor $\vec{v}_a^i$ e o ponto x_b^i (coordenadas do vértice b); “w” definida pelo versor $\vec{v}_b^i$ e o ponto x_c^i (coordenadas do vértice c).

FIGURA 3-12- Traçado da reta s (Linha Geodésica) sobre a i ésima faceta de uma malha. FIGURA 3-13 - Ângulos internos α , β e γ .

Para a escolha do menor caminho em que a linha geodésica deve percorrer dentro de facetas, faz-se intersecção entre as retas s , y e w . Para isso necessitam-se definir as variáveis ilustradas nas figuras 3-12 e 3-13, pois estas serão utilizadas durante a formulação.

Por meio da equação 3.8 define-se um versor $\vec{t}^i$ ortogonal à $\vec{v}_c^i$:

$$\vec{t}^i = \frac{\vec{n}^i \times \vec{v}_c^i}{\|\vec{n}^i \times \vec{v}_c^i\|} \quad (3.8)$$

O ângulo ϕ^i formado entre os versores $\vec{s}^i$ e $\vec{t}^i$, é definido conforme a equação 3.9. E o ângulo θ^i entre os versores $-\vec{v}_c^i$ e $\vec{s}^i$ é dado pela equação 3.10.

$$\phi^i = \arcsen(-\vec{v}_c^i \cdot \vec{s}^i) \quad (3.9)$$

$$\phi^i + \theta^i = \pi / 2 \quad (3.10)$$

Desta forma, a direção $\vec{s}^i$ pode ser definida segundo a equação 3.11.

$$\vec{s}^i = \vec{t}^i \cdot \cos(\phi^i) - \vec{v}_c^i \cdot \sin(\phi^i) \quad (3.11)$$

Porém, como pode-se definir o ângulo ϕ^i sem ter $\vec{s}^i$? Na verdade, $\vec{s}^i$ existe e é encontrado pela transferência da direção $\vec{s}^i$ da faceta anterior para a atual. Caso a faceta seja a primeira a ser cortada pela linha geodésica, então $\vec{s}^i$ é igual a $\vec{s}_0$.

Antes que se comece o procedimento de passagem das linhas geodésicas entre facetas, a fim de se ter uma visão global do problema, expressa-se matricialmente os versores: $\vec{n}^i$, $\vec{t}^i$, $\vec{s}^i$, $\vec{v}_a^i$, $\vec{v}_b^i$ e $\vec{v}_c^i$, no sistema $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$ de coordenadas locais da faceta i (EQUAÇÕES 3.12).

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \vec{n}^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vec{t}^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vec{s}^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\sin(\phi^i) \\ \cos(\phi^i) \\ 0 \end{bmatrix} \\ & & & & (3.12) \\ \begin{bmatrix} \vec{v}_a^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\gamma^i) \\ \sin(\gamma^i) \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vec{v}_b^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\cos(\beta^i) \\ -\sin(\beta^i) \\ 0 \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vec{v}_c^i \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Pode-se ainda expressar matricialmente os vetores-posição dos pontos: $\vec{x}_a^i$,

$\vec{x}_b^i$ e $\vec{x}_c^i$ no sistema $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$ de coordenadas locais da faceta i . Onde L_c^i é o comprimento da aresta oposta ao vértice c^i e L_b^i o comprimento da aresta oposta ao vértice b^i .

$$\begin{bmatrix} \vec{x}_a^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vec{x}_b^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_c^i \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} \vec{x}_c^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L_b^i \cos(\beta^i) \\ L_b^i \sin(\beta^i) \\ 0 \end{bmatrix}$$

3.7.1 - Intersecção entre as Retas s, y e w.

Independentemente, do cruzamento da linha geodésica com vértices ou arestas de facetas, a reta s cruzará, a reta y e a reta w , a menos que uma destas seja paralela àquela. O caminho geodésico será aquele em que a distância entre x^i e x^{i+1} (FIGURA 3-12), for a menor entre as intersecções de s com y ou s com w .

Para formular as intersecções, e escolher o caminho geodésico, opta-se por trabalhar com equações das retas s , y e w parametrizadas. Onde r_1 , r_2 , λ_1 e λ_2 são constantes geométricas de parametrização das retas, o estudo de retas parametrizadas pode ser estudado com detalhes, por exemplo, em Santos (2004).

Para que se tenha idéia do valor a ser tomado para as constantes de parametrização, faz-se o seguinte exemplo: na figura 3-12, caso a reta s (linha geodésica) interceptasse a reta w , dividindo o vetor da direção do lado $\vec{l}_b^i$ ao meio, r_2 seria igual a 0,5. Enquanto que o mesmo r_2 seria 0 (zero), se a reta s interceptasse a reta w sobre o vértice c^i .

Necessita-se, na verdade, encontrar o ponto x^{i+1} , então definem-se as retas

parametrizadas e fazem-se suas intersecções afim de encontrar o caminho geodésico.

Equação parametrizada para a reta y :

$$\vec{x} = \vec{x}_b^i + r_1 \cdot \vec{v}_a^i \quad (3.13)$$

Equação parametrizada para a reta w :

$$\vec{x} = \vec{x}_c^i + r_2 \cdot \vec{v}_b^i \quad (3.14)$$

Equação parametrizada para a reta s :

$$\vec{x} = \vec{x}^i + \lambda_1 \cdot \vec{s}^i \quad (3.15)$$

ou

$$\vec{x} = \vec{x}^i + \lambda_2 \cdot \vec{s}^i \quad (3.16)$$

O ponto x^{i+1} é encontrado fazendo-se a intersecção entre as retas, dispostas nas equações 3.13, 3.14, 3.15 e 3.16.

Assim, faz-se a intersecção entre as retas s e y (Equação 3.17), e encontra-se uma opção para o ponto x^{i+1} .

$$(x^{i+1}) \approx s \cap y \therefore x^i + \lambda_1 \vec{s}^i = x_b^i + r_1 \vec{v}_a^i \quad (3.17)$$

Além de se encontrar o ponto x^{i+1} por meio da equação 3.18, faz-se a intersecção entre as retas s e w e encontra-se um novo x^{i+1} (Equação 3.19).

$$(x^{i+1}) \approx s \cap w \therefore x^i + \lambda_2 \vec{s}^i = x_c^i + r_2 \vec{v}_b^i \quad (3.18)$$

De posse das equações já desenvolvidas, pode-se então resolver os sistemas (3.17) e (3.18), e encontrar x^{i+1} , sempre com a condição, de que a distância (λ_1 e λ_2) entre o x^i (ponto inicial) e x^{i+1} deve ser a de menor valor.

Ou seja,

Se $\lambda_1 \leq \lambda_2$ então,

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \lambda_1 \cdot \vec{s}^i \quad (3.19)$$

Se $\lambda_1 > \lambda_2$ então,

$$\vec{x}^{i+1} = \vec{x}^i + \lambda_2 \cdot \vec{s}^i \quad (3.20)$$

Ao se encontrar o ponto x^{i+1} , dá-se o primeiro passo para traçar a linha geodésica sobre malhas de facetas triangulares. Porém, várias etapas ainda devem ser vencidas, pois o problema está resolvido apenas para facetas isoladas; precisa-se então, para um segundo passo, transferir a linha geodésica entre facetas adjacentes.

3.8 - PASSAGEM DA LINHA GEODÉSICA ENTRE FACETAS

Há duas maneiras de se transferir linhas geodésicas entre facetas adjacentes. A primeira delas é quando a linha geodésica incide sobre vértices. A segunda quando a linha cruza arestas.

Opta-se por trabalhar primeiramente com a segunda maneira, por se tratar de procedimento mais simples, além do que a mesma idéia pode ser expandida para o caso da linha geodésica incidir sobre vértices.

3.8.1 – Transferência da Linha Geodésica entre Arestas de Facetas Adjacentes

Este procedimento geométrico foi baseado na idéia proposta por Meek (1991) e Zhang (2002), onde se transferem ângulos opostos pelo vértice de uma faceta para outra. É claro que se atenta para casos de facetas adjacentes em planos distintos, porém, se planificadas, a propriedade de igualdade de ângulos opostos

pelo vértice preserva-se. A figura 3-14, ilustra a passagem da linha geodésica de uma faceta à outra em planos diferentes, onde se transmite o ângulo θ^{i+1} , da direção $\vec{s}^i$ para a direção $\vec{s}^{i+1}$.

FIGURA 3-14 – Passagem da linha geodésica entre arestas de facetas adjacentes.

Por analogia às equações 3.09 e 3.11, tem-se as seguintes expressões para o cálculo de θ^{i+1} , ϕ^{i+1} e para a nova direção $\vec{s}^{i+1}$.

$$\theta^{i+1} + \phi^{i+1} = \pi / 2 \quad (3.21)$$

$$\phi^{i+1} = \arcsen(-\vec{v}_c^{i+1} \cdot \vec{s}^i) \quad (3.22)$$

$$\vec{s}^{i+1} = \vec{t}^{i+1} \cdot \cos(\phi^{i+1}) - \vec{v}_c^{i+1} \cdot \sin(\phi^{i+1}) \quad (3.23)$$

De posse da nova direção $\vec{s}^{i+1}$, pode-se encontrar o ponto x^{i+2} (FIGURA 3-14). Com isso a mesma idéia deve ser seguida para todas as facetas consecutivas da malha.

No entanto, devido à dupla curvatura encontrada em grande parte das estruturas de membrana, ao final de todos os passos, o ponto x_t pode não ser alcançado. Logo, a direção inicial deve sofrer correções até que se chegue próximo o suficiente de x_t .

3.8.2 – Transferência da Linha Geodésica entre Vértices de Facetas

O rebatimento de ângulos opostos pelo vértice, entre facetas, é possível devido à existência de uma aresta comum entre duas facetas adjacentes. Caso a linha geodésica incida em um vértice de duas facetas que não compartilhem nenhuma aresta, então não haverá de fato uma aresta entre as duas facetas incidentes no mesmo vértice. Porém, esta na verdade existe, basta encontrar a intersecção entre os planos das duas facetas incidentes no mesmo vértice. A FIGURA 3-15 ilustra a aresta imaginária criada pela intersecção entre planos Ω^i e Ω^{i+1} de duas facetas distintas e incidentes no mesmo vértice.

FIGURA 3-15 – Passagem da linha geodésica entre vértices de facetas adjacentes.

Observa-se na figura 3-15, o versor direção $\vec{u}_*^{i+1}$, paralelo à intersecção dos planos Ω^i e Ω^{i+1} . Entende-se por Ω^i o plano que contém a faceta antiga e por Ω^i o plano que contém a faceta de busca ou nova faceta.

Segue-se então que, de acordo com Santos (2004, p. 255), um versor diretor $\vec{u}_*^{i+1}$ da reta de intersecção é encontrado pelo produto vetorial entre o versor normal $\vec{n}^{i+1}$ da faceta de busca e $\vec{n}^i$ da faceta antiga. Pode-se encontrar o versor $\vec{u}_*^{i+1}$ por meio da equação 3.24.

$$\vec{u}_*^{i+1} = \vec{n}^{i+1} \times \vec{n}^i \quad (3.24)$$

Para que se possa transferir o ângulo de uma faceta à outra, precisa-se de um versor ortogonal $\vec{t}_*^{i+1}$ ao versor $\vec{u}_*^{i+1}$, ambos contidos no plano Ω^{i+1} da nova faceta (FIGURA 3-16). Encontra-se $\vec{t}_*^{i+1}$ por meio da equação 3.25.

$$\vec{t}_*^{i+1} = \vec{n}^{i+1} \times \vec{u}_*^{i+1} \quad (3.25)$$

FIGURA 3-16 – Versores $\vec{u}_*^{i+1}$, $\vec{t}_*^{i+1}$ e $\vec{n}^{i+1}$, no plano Ω^{i+1} da faceta $i+1$.

De posse da direção percorrida pela linha geodésica na faceta antiga $\vec{s}^i$ e dos versores $\vec{u}_*^{i+1}$ e $\vec{t}_*^{i+1}$, pode-se determinar a nova direção $\vec{s}^{i+1}$. Para isso basta

encontrar o ângulo ϕ^{i+1} formado entre a direção $\vec{s}^i$ e o versor $\vec{u}_*^{i+1}$ e rebatê-lo para nova faceta, determinando a nova direção $\vec{s}^{i+1}$. Opta-se simplesmente por rotacionar o versor $\vec{u}_*^{i+1}$, por meio de uma matriz de rotação Θ (Equação 3.27), que é dada em função do ângulo ϕ^{i+1} encontrado na faceta antiga. Para calcular o valor do ângulo ϕ^{i+1} , usa-se a equação 3.26.

$$\phi^{i+1} = \arccos(\vec{u}_*^{i+1} \cdot \vec{s}^i) \quad (3.26)$$

Pela equação 3.26, encontra-se ϕ^{i+1} , porém há situações em que os versores $\vec{u}_*^{i+1}$ e $\vec{s}^i$ poderão diferir de mais de 180° (ou π radianos), neste caso encontrar ϕ^{i+1} usando apenas o *coseno* do ângulo entre os versores não resolve o problema, logo necessita-se do valor do *seno*. Isto é, caso o valor *seno do ângulo* entre os versores seja negativo é preciso somar 180° ou π radianos ao ângulo.

$$\Theta = \begin{bmatrix} \cos(\phi) & -\sin(\phi) & 0 \\ \sin(\phi) & \cos(\phi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Ao final o versor $\vec{u}_*^{i+1}$ rotacionado é igual à nova direção de caminhada da linha geodésica $\vec{s}^{i+1}$.

O versor $\vec{u}_*^{i+1}$ rotacionado é expresso na equação 3.28.

$$\vec{u}_{rotacionado} = \vec{s}^{i+1} = \vec{u}_*^{i+1} \cdot \cos(\phi^{i+1}) + \vec{t}_*^{i+1} \cdot \sin(\phi^{i+1}) \quad (3.28)$$

3.9 – CORREÇÃO DA DIREÇÃO INICIAL

Vencidas as etapas anteriores, consegue-se traçar uma linha geodésica sobre qualquer superfície de membrana. Porém, esbarra-se novamente no problema da

dupla curvatura, intrínseco a estruturas espaciais. O resultado é que devido a este fato, não se conseguirá, exceto em casos planos, alcançar o ponto que se deseja x_t .

Caso no caminhamento da linha geodésica o ponto x_t não seja alcançado, acha-se um ponto x' qualquer ao invés de x_t , então introduzem-se correções para a direção inicial $\vec{s}_0$. Para isso define-se o versor: $\vec{u}'$ por meio da equação 3.29

$$\vec{u}' = \frac{\vec{x}' - \vec{x}_0}{|\vec{x}' - \vec{x}_0|} \quad (3.29)$$

Discutiu-se anteriormente a escolha da direção inicial $\vec{s}_0$ por intersecção entre planos, a fim de que esta direção esteja sempre contida no plano da primeira faceta de busca.

Desta forma tem-se um novo plano Π' , que é formado pelos versores $\vec{n}_{av}$ e $\vec{u}'$. O plano Π definido por $\vec{n}_{av}$ e $\vec{u}_t$, usado para definir anteriormente a direção inicial $\vec{s}_0$, deve ser corrigido com o intuito de que a linha geodésica chegue o mais próximo possível do ponto x_t .

Uma vez que a diferença entre os planos não paralelos Π e Π' , é apenas um ângulo ξ , faz-se a correção do plano Π por este ângulo, de forma que a linha geodésica se aproxime cada vez mais de x_t .

Para cada caso o número de tentativas (iterações) para que a linha geodésica se aproxime bastante de x_t é extremamente dependente da geometria da malha, ou seja, para malhas próximas a planos tende-se a precisar de um número menor de iterações se comparadas à malhas de geometria complexa.

Para cada iteração, novos planos Π' são encontrados, até que a distância entre x' e x_t esteja dentro de uma tolerância especificada; então o processo é

interrompido pois o ponto de busca foi alcançado.

A formulação para a correção da direção inicial é disposta nas equações abaixo.

Por comparação à equação 3.6, tem-se que o versor $\vec{n}_{\Pi'}$ normal ao plano Π' , é obtido pelo produto dos versores $\vec{u}'$ e $\vec{n}_{av}$. Como visto na equação 3.30.

$$\vec{n}_{\Pi'} = \vec{u}' \times \vec{n}_{av} \quad (3.30)$$

O ângulo ξ formado entre os planos Π e Π' , é o mesmo ângulo formado entre os versores normais aos dois planos. Logo, tem-se:

$$\xi = \arcsen((\vec{n}_{\Pi'} \times \vec{n}_{\Pi}) \cdot \vec{n}_{av}) \quad (3.31)$$

Seguidamente rotaciona-se o plano Π de um ângulo ξ usando a matriz de rotação Θ definida anteriormente e acha-se um novo plano Π'' .

O versor $\vec{n}_{\Pi''}$ normal ao plano Π'' é encontrado pela rotação do versor $\vec{n}_{\Pi}$ (Equação 3.32).

$$\vec{n}_{\Pi''} = \vec{n}_{\Pi} \cdot \cos(\xi) + \vec{u}_t \cdot \sin(\xi) \quad (3.32)$$

Caso a ponto x_t não seja alcançado após a primeira correção, então acha-se um novo ângulo ξ' formado entre os planos Π e Π'' ; então corrige-se novamente o plano Π , até que se chegue perto o suficiente do ponto x_t .

3.10 – REFORMULAÇÃO DA MALHA DE FACETAS TRIANGULARES

Em função do caminhamento da linha geodésica sobre a malha de facetas triangulares, algumas facetas são divididas em duas outras diferentes, (FIGURA 3-18), fazendo com que algumas facetas fiquem com quatro arestas, o que tiraria o mérito de se trabalhar apenas com facetas triangulares. A figura 3-18 ilustra as

facetas “filhas” de número 2 e 3 com quatro arestas. Logo, deve-se fazer com que cada uma destas facetas transforme-se em duas novas, a fim de se recompor a malha apenas com facetas triangulares.

FIGURA 3-17 – Estrutura de membrana com cinco facetas.

FIGURA 3-18 – Traçado da linha geodésica dividindo as facetas da estrutura.

Ilustra-se na figura 3-19, a malha reformulada para conter apenas facetas triangulares.

FIGURA 3-19 – Estrutura com sua malha reformulada.

Portanto, para que a malha seja recomposta apenas de facetas triangulares, cria-se uma nova matriz de conectividades entre as facetas, incluindo aos vértices já existentes e os pontos em que a linha geodésica cruza a malha.

Para que se possa entender com maior amplitude a idéia aplicada, faz-se uso da matriz de conectividades (CON), (EQUAÇÃO 3.33), referente à estrutura ilustrada na figura 3-17.

$$\text{CON} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Devido ao caminhamento da linha geodésica sobre a malha, surgem novos pontos, que se tornarão vértices, com isso deve-se formular uma matriz de conectividades modificada (CON_MOD), que na verdade se tornará a matriz CON da nova malha.

Pode-se ver na equação 3.34, a matriz CON_MOD acrescida dos novos vértices e das novas linhas que representam novas facetas.

$$\text{CON_MOD} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 9 & 2 & 4 \\ 10 & 4 & 5 \\ 10 & 5 & 7 \\ 3 & 7 & 6 \\ 1 & 8 & 3 \\ 2 & 9 & 8 \\ 3 & 8 & 9 \\ 9 & 4 & 10 \\ 3 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 7 \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Este procedimento é indispensável para a consistência da formulação de linhas geodésicas sobre facetas triangulares.

3.11 - TRANSFORMAÇÃO DAS TENSÕES ENTRE FACETAS “MÃES” E “FILHAS”.

Como já citado anteriormente, a formulação referida neste trabalho tem como base o elemento finito de membrana proposto por Meek (1991) e Argyris (1974, 1981, 1982), e estudado com detalhes por Pauletti (2003). Donde se sabe que as tensões dentro de um mesmo elemento são constantes. Sendo esta a condição para que se possam transferir as tensões das facetas “mães” às “filhas”.

A fim de que se complete o procedimento de definição dos padrões de corte, além do traçado das linhas geodésicas e reformulação da malha, como visto no Capítulo 1, devem-se produzir faixas planas para o enquadramento destas à largura dos rolos de material componente das membranas. Entretanto, para o procedimento de planificação é necessário que se tenham tensões atuantes nas faixas cortadas.

Com isso, as facetas “mães” divididas em “filhas” pela linha geodésica devem conter informações do campo de tensões existentes na faceta “mãe”. Para isso, as tensões existentes nas facetas “mães” devem ser transformadas e atribuídas às facetas “filhas”.

Para que esta idéia fique mais clara, mostra-se na figura 3-20, o esquema de rotação dos eixos para que se possa mostrar nas equações 3.35 a formulação que diz respeito à transformação. As direções 1 e x, mostradas na figura 3-20, correspondem à direção do versor $\vec{v}_c$ da faceta à qual as tensões são transferidas.

FIGURA 3-20 – Rotação de eixos, transformando as tensões.

$$\begin{aligned}
 \sigma'_x &= \sigma_x \cos^2(\rho) + \sigma_y \sin^2(\rho) + 2\tau_{xy} \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \\
 \sigma'_y &= \sigma_x \sin^2(\rho) + \sigma_y \cos^2(\rho) - 2\tau_{xy} \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \\
 \tau'_{xy} &= (\sigma_y - \sigma_x) \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) + \tau_{xy} (\cos^2(\rho) - \sin^2(\rho))
 \end{aligned} \tag{3.35}$$

$$\mathbf{M_ROT} = \begin{bmatrix} \cos^2(\rho) & \sin^2(\rho) & 2 \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \\ \sin^2(\rho) & \cos^2(\rho) & -2 \cdot \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) \\ \sin(\rho) \cdot \cos(\rho) & -\sin(\rho) \cdot \cos(\rho) & \cos^2(\rho) - \sin^2(\rho) \end{bmatrix} \tag{3.36}$$

A transformação das tensões é feita por meio da matriz de transformação $\mathbf{M_ROT}$, (EQUAÇÃO 3.36), retirada das equações 3.35, que é dada em função do ângulo ρ . Este é o ângulo formado entre os versores $\vec{v}_c$ das facetas “mãe” e “filha”. A figura 3-21, ilustra o versor $\vec{v}_c$ para a faceta “mãe”.

FIGURA 3.21 – Vértices a, b, c e o vetor $\vec{v}_c$, da faceta “mãe”.

O ângulo ρ é dependente da conectividade local entre as facetas “mãe” e “filhas”, porém não importando a ordem obedecida na matriz de conectividades o ângulo ρ , estará sempre entre os versores $\vec{v}_c$ da mãe e filhas. A ordem entre as conectividades locais e globais foi estudada em detalhes no item 3.4 deste capítulo.

Pode-se notar na figura 3-22, o ângulo ρ , para orientações diferentes do vetor $\vec{v}_c$ das facetas “filhas” derivadas da faceta “mãe” ilustrada na figura 3-21.

FIGURA 3-22 – Ângulos ρ entre os versores $\vec{v}_c$ das facetas “mãe” e “filhas”.

De posse do ângulo ρ , pode-se rotacionar as tensões, antes da faceta “mãe”, para as filhas.

3.12 - PLANIFICAÇÃO DAS FAIXAS OBTIDAS PELAS LINHAS DE CORTE GEODÉSICAS

Todo o procedimento para se encontrar linhas geodésicas, reordenar malhas e transformar tensões não seria possível se antes não fossem coletadas três informações básicas da malha em questão. Ou seja, são pré-requisitos necessários para as etapas mencionadas anteriormente: a matriz (CON) de conectividades entre as facetas da malha, de coordenadas (COORD) dos vértices e uma matriz que guarda as tensões (S_CHAP) em um sistema de coordenadas $\langle \hat{x}, \hat{y}, \hat{z} \rangle$ local de cada faceta.

Para a planificação das faixas encontradas pelas linhas de corte geodésicas, faz-se uso do programa SATS (System for the Analysis of Taut Structures) apresentado com detalhes por Guirardi (2006). Porém é necessário que se forneça para o programa as matrizes (CON), (COORD) e (S_CHAP), modificadas devido ao caminhamento da linha geodésica sobre a malha.

Contempladas todas as etapas de definição dos padrões de corte, parte-se para a análise dos resultados obtidos.

3.13 - ALGORITMOS DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL DA FORMULAÇÃO DESCRITA.

A implementação computacional da formulação descrita anteriormente segue, em linhas gerais, a mesma disposição do que se formulou.

Resumidamente o algoritmo de implementação computacional segue os seguintes passos:

1º Passo	Passar como dados de entrada as matrizes CON, COORD e S_CHAP, da malha em questão. Item 3.12
2º Passo	Informar o vértice inicial (ponto x_0) e o vértice final (ponto x_t).
3º Passo	Traçar a direção inicial $\vec{s}_0$, como visto no item 3.6.2
4º Passo	Encontrar o ponto x^{i+1} , item 3.7
5º Passo	Negociar a passagem da linha geodésica entre facetas. Item 3.8
6º Passo	Caso não se encontre o ponto x_t , corrige-se a direção $\vec{s}_0$, até alcançar x_t . Item 3.9
7º Passo	Reordena-se a malha, a fim de se trabalhar apenas com facetas triangulares. Item 3.10
8º Passo	Transformam-se as tensões das facetas “mães” às “filhas”. Item 3.11
9º Passo	Com o auxílio do SAT's, planificam-se as faixas encontradas pelas linhas de corte geodésicas.

Têm-se várias especificidades para cada um dos passos enumerados no quadro acima. Prefere-se então subdividir cada um deles para que se possa ter a idéia de como a formulação de linhas geodésicas se transformou em rotinas computacionais. Os passos 7º e 8º já foram antes discutidos em forma de algoritmo. Para o 9º passo fez-se uso do programa SATS.

3.13.1 – Algoritmo para o 1º Passo

Precisam-se das matrizes CON, COORD e S_CHAP. Estas podem ser geradas em alguns programas, como por exemplo em Ansys e GID que foi discutido no Capítulo 2.

A matriz de conectividades CON é utilizada para calcular a matriz de incidência dos vértices M_INC e a matriz de adjacência das facetas M_ADJ, ambas discutidas no Capítulo 2. Item 2.2, bem como os vetores de número de incidências N_INC e número de adjacência N_ADJ.

Por meio da matriz CON chega-se ao número de vértices (n_v) e ao número de facetas (n_f) da malha.

3.13.2 – Algoritmo para o 2º Passo

Por intermédio da matriz CON escolhem-se os vértices inicial (ponto x_0) e o vértice que se quer alcançar (ponto x_t).

Com a matriz COORD acham-se as coordenadas dos pontos x_0 e x_t , escolhidos para o caminhamento da linha geodésica.

Encontra-se o versor $\vec{u}_t$, (EQUAÇÃO 3.5).

3.13.3 – Algoritmo para o 3º Passo

De posse das matrizes CON, e M_INC pode-se saber quais facetas são incidentes no vértice inicial (ponto x_0). Logo pode-se calcular um versor médio $\vec{n}_{av}$ entre todos os versores normais das facetas de borda incidentes no vértice inicial.

Com o versor $\vec{n}_{av}$ e $\vec{u}_t$ encontrado no 2º Passo acha-se o plano Π , que ao interceptar o plano Ω da faceta define a direção inicial $\vec{s}_0$. Item 3.6.2

3.13.4 – Algoritmo para o 4º Passo

Obtida a direção inicial $\vec{s}_0$, por meio de um “loop” procura-se qual faceta j incidente no vértice inicial (ponto x_0) contém a direção $\vec{s}_0$. Esta verificação de

pertinência se faz por meio do produto entre a direção $\vec{s}_0$ e os vetores $\vec{l}_b^j$, e $\vec{l}_c^j$ da direção dos lados da faceta j .

Ou seja, cria-se a seguinte condição:

Caso,

$$(\vec{l}_c^j \times \vec{s}_0) \cdot (-\vec{l}_b^j \times \vec{s}_0) \leq 0 \quad (3.37)$$

Então, $\vec{s}_0$ está contida na faceta j .

A figura 3-23 ilustra as três situações possíveis quanto à pertinência de $\vec{s}_0$ na faceta j . Sendo que para as duas situações em que a direção $\vec{s}_0$ não está contida na faceta, a condição disposta na equação 3.37 tem por resultado um valor positivo. Enquanto que apenas a situação em que o versor $\vec{s}_0$ está contido na faceta j a condição é satisfeita.

FIGURA 3-23 – Condição de pertinência da direção $\vec{s}_0$ à faceta j .

Sabendo-se qual faceta será cortada pela linha geodésica, encontra-se o ponto x^{i+1} , como discutido no item 3.7. Para cada ponto x^{i+1} encontrado devem-se modificar as matrizes iniciais CON, COORD e S_CHAP, salvo para os casos em que

a linha geodésica cruza a malha exatamente sobre uma aresta, pois nesta situação as facetas que contêm a linha geodésica não sofrem alteração, pois continuam com o mesmo número de vértices, facetas e mesma distribuição de tensões.

3.13.5 – Algoritmo para o 5º Passo

Anteriormente viram-se as duas formas de passagem da linha geodésica de faceta a faceta. Em um primeiro caso, tem-se que a linha intercepta um vértice, enquanto que em outra hipótese a linha cruza uma aresta, para ambos os casos deve-se transferir a direção $\vec{s}^i$ de uma faceta para outra, como visto no item 3.8.

Caso o ponto x^{i+1} coincida com um vértice, retiram-se da matriz de incidências nodais M_INC quais facetas incidem naquele vértice. Sabendo-se quais facetas compartilham o mesmo vértice, usam-se apenas estas para saber a qual delas será transferida a direção $\vec{s}^i$ da faceta anterior.

Para tanto, por meio de um “loop” (que “varrerá” todas as facetas incidentes no vértice), encontram-se os versores $\vec{u}_*^{i+1}$ (EQUAÇÃO 3.24), $\vec{t}_*^{i+1}$ (EQUAÇÃO 3.25), seguidamente o ângulo ϕ^{i+1} (EQUAÇÃO 3.26). Em seguida faz-se a rotação do versor $\vec{u}_*^{i+1}$ (EQUAÇÃO 3.28). Este versor ao sofrer rotação dá origem à nova direção $\vec{s}^{i+1}$. Usando o mesmo critério de pertinência, utilizado na equação 3.37, escolhe-se qual faceta contém a direção $\vec{s}^{i+1}$. Então repete-se o 4º Passo, que encontra o próximo x^{i+1} .

Caso o ponto x^{i+1} esteja sobre uma aresta, retira-se da matriz de adjacência entre facetas M_ADJ, quais facetas são adjacentes à faceta que está sendo atravessada pela linha geodésica, batizada de faceta antiga. Dentre estas, seleccionar apenas a faceta que compartilhar a aresta em que se encontrou o ponto

x^{i+1} . Secionada a faceta certa encontra-se o ângulo ϕ^{i+1} e a nova direção $\vec{s}^{i+1}$ (EQUAÇÃO 3.23). Em seqüência, parte-se para se descobrir novamente o ponto x^{i+1} nas facetas consecutivas da busca. Este procedimento é repetido até se encontrar o ponto x_t ou se chegar em uma faceta de borda, o que interrompe o processo.

3.13.6 – Algoritmo para o 6º Passo

Ao final do caminhamento da linha geodésica encontra-se o ponto x' que pode coincidir com o ponto procurado x_t . Caso isso não aconteça deve-se corrigir a direção inicial, a fim de se chegar o mais próximo possível de x_t .

Como a direção inicial $\vec{s}_0$ é definida pela intersecção entre o plano Π e o plano Ω da faceta (Item 3.9). Deve-se definir uma nova direção inicial em função da rotação, de um ângulo ξ (EQUAÇÃO 3.32), do novo plano com eixo $\vec{n}_{av}$. Mas como saber se a rotação do plano se dará no sentido horário ou anti-horário?

Há duas posições possíveis, do ponto x' em relação ao ponto x_t , à direita ou à esquerda. A figura 3-24 ilustra, em uma malha qualquer, estas duas possibilidades de ocorrência do posicionamento entre x' e x_t .

 FIGURA 3-24 – Posições relativas entre x' e x_t .

Caso o ponto encontrado seja x'_1 (à esquerda de x_t), deve-se corrigir a posição do plano Π girando-o de ξ , para o sentido anti-horário. Se o ponto encontrado for x'_2 , o giro do plano Π se dará no sentido horário.

Para que se saiba em qual posição relativa à x_t está o ponto x' , basta encontrar o ângulo ξ por meio da equação 3.31. Quando ξ for negativo, significa que o ponto x' está à esquerda de x_t , ou seja, a correção deve ser feita com o giro do plano Π no sentido horário. Enquanto que, se x' estiver à direita de x_t , o ângulo ξ terá sinal positivo e o giro do plano Π será dado no sentido anti-horário.

A correção da direção inicial $\vec{s}_0$ se fará quantas vezes for necessária para que

o ponto x_t seja alcançado. Para isso usa-se um “*loop*” a fim de que todo o procedimento de traçado da linha geodésica seja repetido a cada mudança na direção inicial.

Capítulo 4

DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

4.1 – ANÁLISE DE UM EXEMPLO SIMPLES, COM SETE FACETAS.

4.1.1 – CASO PLANO

É evidente que as estruturas de membrana, quase que na sua totalidade, são superfícies com três dimensões. Porém os casos de estruturas planas também devem ser englobados pela formulação proposta neste trabalho.

Portanto, mostram-se primeiramente alguns resultados de linhas geodésicas cruzando malhas de facetas triangulares no mesmo plano.

FIGURA 4-1 – Malha com facetas triangulares no mesmo plano, com a linha geodésica cruzando o vértice central.

Na figura 4-1, pode-se observar a linha geodésica cruzando uma malha plana; além disso, nota-se que a linha cruza um vértice, ultrapassando as facetas sem problemas de desvio da linha geodésica da sua direção de busca do ponto que se quer alcançar.

FIGURA 4-2 – Segundo exemplo de malha plana

Como se pode observar na figura 4-2, a linha geodésica cruza arestas de facetas adjacentes (que se sugeriu na formulação como adjacências de segunda ordem). Onde o ângulo de incidência nas arestas de facetas adjacentes foi transferido de forma correta de umas para as outras, resultando de uma linha reta que já era esperada, comprovando a existência da linha geodésica. No entanto, pode-se notar que, para esse caso, mostra-se somente o traçado da linha geodésica, não se preocupando com a reformulação da malha.

4.1.2 – CASO ESPACIAL

Mostra-se o comportamento da linha geodésica no caso espacial, em que o ponto que se quer alcançar não deve ser alcançado em uma primeira iteração, necessitando de correções para a direção inicial de caminamento da linha geodésica.

FIGURA 4-3 – Linha Geodésica sobre uma malha espacial teórica.

Pode-se observar na figura 4-3, o caminhamento da linha geodésica sobre uma malha em três dimensões. Nota-se que os seguimentos da linha geodésica em cada faceta são retos, mas a linha não alcançou o vértice procurado.

4.2 – CORREÇÕES NAS DIREÇÕES INICIAIS E REFORMULAÇÃO DA MALHA.

A mesma malha mostrada no item anterior é utilizada, a fim de que se possa ter a malha reformulada após o traçado da linha geodésica sobre suas facetas.

FIGURA 4-4 – Malha com sete facetas após a primeira iteração.

FIGURA 4-5 – Malha com sete facetas após a segunda iteração.

Na figura 4-4, observa-se a linha geodésica caminhando sobre a malha e incidindo em um ponto diferente do vértice final; faz-se então a correção na direção inicial, e após a segunda iteração alcança-se o vértice que se deseja (FIGURA 4-5).

Nas figuras 4-6 e 4-7 pode-se observar a malha reformulada após o caminhamento da linha geodésica sobre esta.

Com o traçado da linha geodésica há uma nova configuração para a estrutura, com isso há novas matrizes de coordenadas dos vértices e conectividades das facetas, além de novas tensões para as facetas criadas, graus de liberdade prescritos e forças aplicadas nos novos vértices.

FIGURA 4-6 – Malha com sete facetas.
L.Geodésica com a malha reformulada.

FIGURA 4-7 – Malha Reformulada de sete para doze facetas.

A figura 4-8, ilustra a linha geodésica atravessando um malha dividida em 32 elementos triangulares idênticos, a fim de forçar a passagem da mesma por vértices da malha.

FIGURA 4-8 – Malha com 32 facetas, após o traçado da linha geodésica.

FIGURA 4-9 – Malha com 32 facetas, em uma vista plana.

Após o caminhamento da linha geodésica sobre a malha da figura 4-8, ilustra-se na figura 4-10 a malha reformulada.

FIGURA 4-10 – Malha reformulada de 32 para 40 facetas geodésicas.

Pode-se ainda observar, para a mesma malha, o caminhamento da linha geodésica por uma “crista” (FIGURA 4-11) e outra por um “talvegue” (FIGURA 4-12) da malha.

FIGURA 4-11 – Linha geodésica sobre uma “crista”.

FIGURA 4-12 – Linha geodésica sobre um “talvegue”.

A fim de se comprovar a passagem da linha geodésica entre facetas e entre vértices da malha, usa-se um outro exemplo, no qual se possa forçar a linha geodésica a incidir em vértices.

Ilustra-se na figura 4-13 a linha geodésica percorrendo a superfície de uma pirâmide, tentando, em uma primeira iteração, chegar ao vértice de busca, porém não obtendo sucesso. Logo, faz-se a correção na direção inicial. Desta forma, como se observa na figura 4-14 o vértice procurado é alcançado na segunda iteração.

FIGURA 4-13 – Malha da pirâmide cortada pela linha geodésica após a primeira iteração.

FIGURA 4-14 – Malha da pirâmide cortada pela linha geodésica após a segunda iteração. Onde o vértice final foi alcançado

Nas figuras 4-15 e 4-16, pode-se notar o traçado da linha e a superfície da malha reformulada.

FIGURA 4-15 – Malha da pirâmide cortada pela linha geodésica.

FIGURA 4-16 – Malha da pirâmide reformulada.

Pode-se ainda mostrar a linha geodésica incidindo no vértice central da mesma pirâmide, (FIGURAS 4-17, 4-18 e 4-19).

FIGURA 4-17 – Vértice do cume da pirâmide cortado pela linha geodésica.

FIGURA 4-18 – Vértice do cume da pirâmide cortado pela linha geodésica, com outro caminho.

FIGURA 4-19 – Pirâmide modificada. Ponto mais alto sendo cortado pela linha geodésica.

Até este ponto fizeram-se uso de exemplos simples, com o objetivo de direcionar o caminhamento da linha geodésica para onde fosse possível, podendo-se com isso avaliar o seu traçado sobre malhas em diversas situações.

Viu-se, no Capítulo 2, que o uso do GID é uma das formas de se gerarem dados de entrada para a programação referente à formulação apresentada. Portanto, fez-se uso de uma malha sem qualquer simetria, com o intuito de se estudarem os demais casos, não englobados por malhas simétricas.

Na figura 4-20 ilustra-se a estrutura hipotética criada para que se tracem linhas geodésicas entre seus vértices extremos.

FIGURA 4-20 – Estrutura modelada em GiD.

Na figura 4-21 pode-se ver o caminhamento da linha geodésica tentando alcançar o vértice final, porém não obtendo sucesso. Então se corrige a direção inicial até atingir o vértice de busca, que é alcançado e a malha é reformulada após sete iterações, com um intervalo de tempo aproximadamente de um segundo (FIGURA 4-22).

FIGURA 4-21 – Malha gerada em GiD.
Vértice de busca não alcançado na primeira iteração.

FIGURA 4-22 – Malha gerada em GiD.
Vértice de busca alcançado após sete iterações.

Para a mesma estrutura pode-se ver, na figura 4-23, a linha geodésica novamente tentando alcançar o vértice de busca, não obtendo sucesso. Logo, procede-se à correção da direção inicial e o vértice de busca é alcançado após sete iterações (FIGURA 4-24).

FIGURA 4-23 – Malha gerada em GID.
Vértice de busca não alcançado na primeira tentativa.

FIGURA 4-24 – Malha gerada em GID.
Vértice de busca alcançado após sete tentativas.

Novamente para a malha ilustrada na figura 4-20, procura-se a linha geodésica. Após a primeira iteração o vértice de busca não é alcançado (FIGURA 4-25). Logo, faz-se a correção na direção inicial e após cinco iterações o vértice final é alcançado (FIGURA 4-26).

FIGURA 4-25 – Malha gerada em GID.
Linha geodésica depois da primeira iteração.

FIGURA 4-26 – Malha gerada em GID.
Linha geodésica depois da quinta iteração.

Em seguida na figura 4-27 pode-se ver a malha reformulada.

FIGURA 4-27 – Malha gerada em GID. Após o vértice final ser alcançado reformula-se a malha.

4.3 – ESTRUTURA DO MEMORIAL DOS POVOS

Para contemplar todas as etapas de implementação da formulação proposta neste trabalho, faz-se uso da estrutura de membrana de cobertura do Memorial dos Povos de Belém-PA, com aproximadamente 400m² (Figura 4-28), na qual se poderá observar o traçado de linhas geodésicas sobre sua superfície além da reorganização da malha em triângulos. Uma descrição detalhada dessa estrutura é dada em Pauletti e Brasil (2005).

FIGURA 4-28 – Memorial dos Povos, Belém – PA. (PAULETTI e BRASIL, 2005)

4.3.1 – MALHA MODELADA EM ANSYS E ANALISADA EM SATS.

Opta-se por utilizar uma malha de elementos finitos, modelada em Ansys, com baixo grau de discretização, a fim de que se possa perceber tanto o traçado das linhas geodésicas quanto à reformulação da malha. Além disso, necessita-se mostrar a transformação nas tensões das novas facetas, geradas pelas linhas de corte geodésicas. Desta forma, uma malha com discretização baixa permitirá observar todos os aspectos relevantes do caminhamento da linha geodésica sobre a superfície da membrana.

4.3.2 – TRAÇADO DA LINHA GEODÉSICA E REFORMULAÇÃO DA MALHA.

As figuras 4-29 e 4-30 mostram a malha de elementos finitos que se vai trabalhar.

FIGURA 4-29 – Malha Gerada em ANSYS.

FIGURA 4-30 – Malha reproduzida em MATLAB.

Nas figuras 4-31 e 4-32, pode-se ver o traçado da linha geodésica sobre a superfície da membrana, com a malha reformulada.

FIGURA 4-31 – Linha Geodésica atravessando a superfície da membrana e a malha sendo reformulada.

FIGURA 4-32 – Vista superior da malha reformulada.

Pode-se observar nas figuras 4-33 e 4-34, as linhas geodésicas traçadas para a determinação das faixas que serão cortadas e planificadas posteriormente.

FIGURA 4-33 – Vista em 3-D da estrutura cortada pelas linhas geodésicas.

FIGURA 4-34 – Vista Superior da estrutura cortada pelas linhas geodésicas.

4.3.3 – ANÁLISE DA ESTRUTURA CORTADA PELAS LINHAS GEODÉSICAS.

Após conseguir-se traçar as linhas geodésicas sobre a malha partindo do vértice inicial ao vértice final e reformulá-la, parte-se para a etapa de planificação das faixas.

Como discutido no Capítulo 3, as facetas resultantes do corte por linhas geodésicas (facetas filhas), recebem as intensidades de tensões das facetas originais (facetas mães), sendo que, caso o sistema de coordenadas locais das facetas “filhas” seja diferente do sistema de coordenadas locais das facetas mães, as tensões devem ser transformadas, a fim de que o campo de tensões seja o mesmo.

Até este ponto, para o traçado de linhas geodésicas e reformulação da malha, referiu-se sempre à facetas triangulares e vértices. Porém, torna-se necessário substituir o termo facetas triangulares por elementos finitos e vértices por nós. Desta forma, não se comete nenhuma inconsistência quando se for referir aos campos de tensões que serão apresentados posteriormente.

Retomando-se a idéia sobre transformação de tensões, analisam-se tensões em uma direção, para que se possa notar a transformação destas nos elementos cortados pelas linhas geodésicas. Espera-se que as tensões se alterem, caso o

sistema local de coordenadas seja diferente, entre os elementos finitos originais e originados pelo corte das linhas geodésicas.

Mostra-se na figura 4-35, a distribuição das intensidades de tensões na direção “x”, para a malha original de elementos finitos em comparação à malha cortada pelas linhas geodésicas, onde a distribuição se dá nos elementos, sendo que os valores de tensões são representados no sistema internacional de unidades (S. I).

(a) Malha Original.

(b) Malha cortada pelas geodésicas.

FIGURA 4-35 – Tensões na direção “x”, nos elementos.

Como já era esperado, na figura 4-35 observa-se a mudança nas intensidades de tensões, por elemento, para elementos cortados pelas linhas geodésicas.

A distribuição das tensões na direção “y” para a malha original e para a malha cortada pela linha geodésica pode ser observada na figura 4-36, onde se pode esperar um comportamento análogo ao caso das tensões na direção “x”.

(a) Malha Original.

(b) Malha cortada pelas geodésicas.

FIGURA 4-36 – Tensões na direção “y”, nos elementos.

Tensões em apenas uma direção não nos revelam se o campo de tensões foi acertadamente transportado dos elementos finitos originais aos cortados pela linha geodésica. Desta forma, faz-se a análise das intensidades de tensões principais.

Pode-se observar na figura 4-37, a distribuição das intensidades de tensões principais, nos elementos, para a malha original de elementos finitos e para a malha cortada pelas linhas geodésicas.

(a) Malha Original.

(b) Malha cortada pelas geodésicas.

FIGURA 4-37 – Tensões principais, nos elementos.

Fazendo-se a comparação na figura 4-37 observa-se que as duas distribuições de tensões principais, por elemento, são as mesmas, o que comprova a validade do que se formulou.

Na figura 4-38, observa-se a disposição das tensões principais nodais, para a malha original de elementos finitos e para a malha cortada pelas linhas geodésicas.

(a) Malha Original.

(b) Malha cortada pelas geodésicas.

FIGURA 4-37 – Tensões principais nodais.

Nota-se pela figura 4-37, que há uma pequena diferença entre as intensidades de tensões nodais, comparando-se os dois casos. Este fato é devido ao baixo grau de discretização da malha. Com malhas melhor discretizadas, as diferenças tendem a diminuir.

4.3.4 – ANÁLISE DAS FAIXAS.

Após o traçado das linhas geodésicas, definindo a posição dos cortes, para que se formulem as faixas de material que comporá a membrana, parte-se para a etapa de planificação destas.

O procedimento de planificação das faixas é feito deslocando-se os nós para um plano XY, ou seja, impõe-se um deslocamento contrário à coordenada do nó em Z.

Pode-se ver na figura 4-38, as linhas de corte sobre as arestas dos elementos e as linhas de corte geodésicas, traçadas sobre a superfície da estrutura de membrana. Logo, as faixas devem ser separadas da estrutura global, a fim de planificá-las. Porém, ao se planificarem as faixas, restam tensões residuais, que se perderão no processo de fabricação uma vez que as faixas são fabricadas frouxas (sem tensão). O procedimento de planificação foi desenvolvido com o auxílio do programa SATS.

Na figura 4-38, pode-se ver a numeração escolhida para as faixas, que serão cortadas e planificadas, para os dois casos.

FIGURA 4-38 – Numeração das Faixas.

Pode-se ver na figura 4-39, a faixa de número 2 planificada, referente à malha original e à malha geodésica, onde se podem ver as tensões principais nodais atuantes na faixa.

FIGURA 4-39 – Faixa 2. Tensões principais residuais nodais nas faixas.

A comparação direta entre as duas situações da figura 4-39 é prejudicada pelo baixo grau de discretização da malha. Pois novos elementos e nós foram criados pela intersecção da linha geodésica com a malha, inserindo imprecisões nos resultados.

A figura 4.40 ilustra as tensões principais residuais nodais nas faixas para ambos os casos, sendo que por simetria as faixas 7, 6 e 5 são iguais às faixas 1, 2 e 3 respectivamente.

FIGURA 4-40 – Faixas da estrutura. Tensões principais residuais nodais.

Em linguagem Matlab a plotagem dos valores de tensões para as faixas, utilizando cores, é feita atribuindo a cor vermelha para o maior valor de tensão de compressão e azul para o maior valor de tensão de tração. Desta forma, se I_1 é o intervalo entre a maior e menor tensão na faixa 1, I_2 da faixa 2, I_3 da faixa 3 e I_4 da faixa 4, então $I_1 \neq I_2 \neq I_3 \neq I_4$, pois em cada faixa os maiores e menores valores de tensão são diferentes. Este fato faz com que as cores da intersecção entre duas faixas adjacentes sejam diferentes, dificultando a inspeção visual, como se pode ver na figura 4-40.

Na figura 4-40, pode-se notar que as faixas obtidas por meio das linhas geodésicas apresentam arestas de faixas aproximadamente retas se comparadas às faixas obtidas por meio das arestas dos elementos finitos.

Após a etapa de planificação há uma outra etapa, conhecida como: “pull-back” (reversão da planificação), que consiste em impor de volta os deslocamentos feitos no procedimento de planificação, e ainda anular as tensões iniciais, uma vez que as faixas são fabricadas sem tensão. Este procedimento é descrito com detalhes por Pauletti, Guirardi e Deifeld (2005) e por Pauletti (2006).

Pôde-se notar, para a estrutura do Memorial dos Povos, que as faixas cortadas por meio das linhas geodésicas, depois de planificadas, apresentaram arestas próximas de retas. Este aspecto economiza material das membranas, pois, no processo de fabricação, as faixas são enquadradas em material proveniente de rolos, que tem geometria retangular; logo, as faixas com arestas retas desperdiçam menos material. Além disso, o processo de montagem (colagem das faixas), é mais simples de ser feito com arestas retas, evitando enrugamentos, que possibilitem problemas futuros à estrutura.

CONCLUSÕES

Embora a idéia básica empregada neste trabalho para a busca de linhas geodésicas sobre superfícies compostas de facetas triangulares não seja nova, sendo, por exemplo, brevemente descrita por Meek (1991), é difícil encontrar referências em que se apresente a implementação completa dessas idéias.

Como decorrência da escassez de informações, o esforço de implementação computacional apresentado neste trabalho redundou no desenvolvimento de uma série de elementos originais, ligados à superação dos diversos casos particulares em que a idéia básica se desdobra. Entre esses elementos originais, apontam-se os critérios de definição da direção inicial da linha geodésica e de sua correção (em função da diferença entre o ponto alvo e o ponto de chegada), e negociação da passagem, de faceta para faceta, quando se atinge um vértice.

Além disso, tendo em vista o uso do procedimento de definição de linhas geodésicas em associação com programas de elementos finitos, dedicados à análise e ao projeto de estruturas de membrana, implementou-se um algoritmo de reorganização da malha e transformação das tensões das facetas cortadas em função das linhas geodésicas definidas.

O procedimento de busca por linhas geodésicas proposto foi desenvolvido no ambiente Matlab, e foi testado com sucesso em diversos casos, conforme se mostrou neste estudo.

Há situações, por exemplo, a faixa 3 da figura 4-38-b, em que a linha geodésica, ao cortar a malha e reformulá-la, resulta de uma nova malha com facetas muito distorcidas. Logo, para que isto se reduza, cabe a possibilidade de se usar uma faixa mista, ou seja, com uma de suas arestas cortada pela linha geodésica e com a outra cortada sobre as arestas dos elementos finitos.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ARGYRIS, J. H. et. al. **A general method for the shape finding of lightweight tension structures.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. v. 4(2), p. 219–278, 1974.

ARGYRIS, J. H.; DOLTSINIS, J. St. **On the natural formulation and analysis of large deformation coupled thermomechanical problems.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. v. 32(1/3), p. 3–57, 1982.

ARGYRIS, J. H.; DOLTSINIS, J. St.; PIMENTA, P. M.; WÜSTENBERG, H. **Thermomechanical response of solids at high strains – natural approach.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering. v.32(2), p. 195–253, 1981.

AYYILDIZ, N.; ÇÖKEN, A. C.; YÜCESAN, A. **Differential-Geometrical Conditions Between Geodesic Curves and Ruled Surfaces in the Lorentz Space.** 1996.

BARNES, M. R. **Form-finding and analysis of prestressed nets and membranes.** Computer & Structures v.30 (3), p. 685–695, 1988.

CAMPBELL, D. et al. **The Unique Role of Computing in the Design and Construction of Tensile Membrane Structures.** American Society of Civil Engineers Second Civil Engineering Automation Conference. Proceedings. New York, NY, 1991.

CASELLES, V. Geometric Models for Active Contours. Department of Mathematics and Computer Science. Palma de Mallorca, Spain, 1996.

CIMNE, 2006. <http://gid.cimne.upc.es/>, acesso em janeiro de 2006.

COHEN, I; HUOT, E; YAHIA, H.; HERLIN, I. **Mise en correspondance de surfaces parchemins geodesiques**. Institut National de Recherche en Informatique et en Automatique. Decembre 1999.

GRÜNDIG, L.; BÄUERLE, J. **Automated Cutting Pattern Determination and Control for Prestressed Membranes**. Proceedings of Textile Composites in Building Construction, Part 2, Pluralis, Lyon, 1990.

GRÜNDIG, L.; BÄUERLE, J. **Cutting Pattern of Structural Membranes – Precise Physical Modelling**. Proceedings of the IASS- Symposium, Toronto, 1992.

GRÜNDIG, L.; MONCRIEFF, E. **Form Finding of Textile Structures**. Studiedag-Seminaire Textielstukturen – Architecture Textile. Vrije Universiteit Brussel, 25th May, 1993a.

GRÜNDIG, L.; MONCRIEFF, E. **Cutting Pattern Generation of Textile Structures**. in Proc. Studiedag-Seminaire Textielstrukturen Architecture Textile, Vrije Universiteit Brussel, 25th May 1993b.

GRÜNDIG, L.; MONCRIEFF, E. **On the Optimal Layout of Cutting Patterns for Architectural Textile Structures**. Obrebski, Jan B. (Ed.), Lightweight Structures in Civil Engineering, Proceedings of the International Conference on Lightweight Structures in Civil Engineering, 25-29th September, 1995, Warsaw, Poland.

GUIRARDI, D. M. **Implementação de um Elemento de Membrana baseado na Formulação Natural de Argyris**. Dissertação de Mestrado, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

KAPOOR, S. **Efficient Computation of Geodesic Shortest Paths**. Journal Title: ACM Symposium on Theory of Computing.

KIM, J. Y.; LEE, J. B. **A new technique for optimum cutting pattern generation of membrane structures**. Engineering Structures. December, 2001.

KIMMEL, R.; SETHIAN, J. A. **Computing geodesic paths on manifolds**. Proceedings of National Academy of Sciences, v.95(15), p. 8431–8435, 1998.

KIRSANOV, D.; GORTLER, S. J. **Fast Exact and Aproximate Geodesic Paths on Meshes**. Computer Science Group, Harvard University. Cambridge, Massachusetts , 2004.

LOVELOCK, D.; RUND, H. **Tensor, Differential Forms and Variational Principles**. Dover Pub., New York, 1989.

MATHWORLD. <http://mathworld.wolfram.com>, acesso em Agosto de 2005.

MAURIN, B.; MOTRO, R. **The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes**. Université Montpellier 2, Montpellier, France, 1997.

MEEK, J. L. **Computer Methods in Structural Analysis**. EF & Spon, London, 1991.

MOLLAERT, M. **Membrane structures: understanding their forms**. Department of Architecture, Vrije Universiteit Brussel, 1996.

MONCRIEFF, E.; TOPPING, B. H. V. **Computer Methods for the Generation of Membrane Cutting Patterns**. Computers and Structures, v.37 (4), 1990. p. 441-450.

MORERA, D. M. **Computing Geodesic Paths on Manifolds**. 3D Graphic Systems IMPA, March–June, 2003.

NOAKES, L. **A global Algorithm for Geodesics**. Department of Mathematics, The University of Western Australia, 1997. email: lyle@maths.uwa.edu.au.

NOVOTNI, M.; REINHARD, K. **Computing Geodesic Distances on Triangular Meshes**. Insitut für Informatik II. Bonn, Germany, 1998.

OLIVEIRA, V. M. B. **Análise e Projeto de Tenso-Estruturas Têxteis para Coberturas**. Tese de Doutorado, COPPE/UFRJ. Rio de Janeiro, 2003.

OTTO, F. **Cubiertas Colgantes**. Editorial Labor, Barcelona, 1958. Tradução de *Das Hängende Dach*, Bauwelt Verlag, Berlim, 1958.

OTTO, F. **Lufthallenhandbuch - Air Hall Handbook**. Instituts für leiche Flächentragwerke, Universität Suttgart, 15 (1982). Edição bilíngue.

PAULETTI, R. M. O. **Historia, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas**. Tese de Livre Docência, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2003.

PAULETTI, R. M. O.; BRASIL, R. M. L. R. F.; ALVIM, R. A. A. **Large Membrane Roof for the Baptist Church of Fortaleza: From Models to Realization**. Montpellier – France: ASS 2004 – International Association for Shell and Spatial Structures, September 20-24, 2004.

PAULETTI, R. M. O.; BRASIL, R. M. L. R. F. **Structural Analysis and Construction of the Membrane Roof of the Memorial dos Povos de Belém do Pará**. Caracas – Venezuela: II SLATE – II Simposio Latinoamericano de Tensoestructuras, May 4-5, 2005.

PAULETTI, R. M. O.; GUIRARDI, D. M.; DEIFELD, T. E. C. **Argyris' Natural Membrane Finite Element Revisited**. Stuttgart: In: Structural Membranes 2005, Proceeding of Structural Membranes, 2005.

PAULETTI, R. M. O. **Static Analisis of Taut Structures**. In: Recent Advances in Membrane and Pneumatic Structures, E. Oñate and B. Kröpling (Eds.), 2006. em vias de publicação.

PHELAN, D. G; HARBER, R. B. **An integrated design method for cable-reinforced membrane structures**. In: Proceedings of IASS Symposium, vol. 2. 1986. p. 119-26.

ROYLANCE, D. **Transformation of Stresses and Strains**. Department of Materials Science and Engineering, Massachusetts Institute of Technology Cambridge, May 14, 2001. p. 15.

SANTOS, R. J. **Matrizes Vetores e Geometria Analítica**. Departamento de Matemática – ICEX, Universidade Federal de Minas Gerais, Julho, 2004. p. 697.

TABARROK, B.; QIN, Z. **Form fiding and cutting pattern generation for fabric tension structures**. In: Microcomputer in civil engineering, vol. 8. Amsterdam: Elsevier Publishers Ltd; 1993. p. 377-84.

TENSINET. <http://www.tensinet.com/> . acesso em Agosto de 2005.

ZHANG, Z. **Curvature and Geodesics, Discrete Laplacian and related smoothing methods**. Topics in Computer Graphics: Geometric modeling, New York University. New York, 2002.

ZHANG, Z.; LUO, X. Q. **A FEM Model for Finding Geodesic on Discrete Surfaces Composed of Triangles**. College of Engineering, Tongji University, Shanghai, China, February, 2006.

WAGNER, R.; RIEMANN, K.; ALBER, JENTSCH, R. M.; KRÖPLIN, B. **Computation of Tailored Membranes**. ECCOMAS, 2004.

WEINSTOCK, R. **Calculus of Variations**. Dover Pub., New York, 1974.