FAGNER LOPES FERNANDES

**UMA EXTENSÃO DO MÉTODO DAS DENSIDADES DE FORÇA
NATURAL PARA ELEMENTOS QUADRANGULARES**

SÃO PAULO/SP
2017

FAGNER LOPES FERNANDES

**UMA EXTENSÃO DO MÉTODO DAS DENSIDADES DE FORÇA
NATURAL PARA ELEMENTOS QUADRANGULARES**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Mestre em
Ciências.

SÃO PAULO/SP
2017

FAGNER LOPES FERNANDES

**UMA EXTENSÃO DO MÉTODO DAS DENSIDADES DE FORÇA
NATURAL PARA ELEMENTOS QUADRANGULARES**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo,
para obtenção do título de Mestre em
Ciências.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti.

SÃO PAULO/SP
2017

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catlogação-na-publicação

Fernandes, Fagner Lopes

Uma extensão do Método das Densidades de Força Natural para elementos quadrangulares / F. L. Fernandes -- versão corr. -- São Paulo, 2017. 88 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Estruturas de membranas 2.Busca de formas de estruturas 3.Método das Densidades de Força Natural I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

Aos meus pais, minha esposa, meus
avós e meus irmãos.

AGRADECIMENTOS

A Deus, pelo dom da vida, por me abençoar sempre com muitas oportunidades e por estar sempre ao meu lado em todos os momentos.

Aos meus pais e avós, por sempre me apoiarem e me incentivarem a continuar minha vida acadêmica.

À minha esposa Isa, por todo amor, compreensão e carinho, por todo apoio e pelo incentivo em todos os momentos, até mesmo nas madrugadas mal dormidas nas quais tive que me dedicar ao meu trabalho.

Aos meus irmãos, Fran e Flávio, com os quais posso sempre contar em todas as ocasiões.

À toda minha família, em especial aos meus primos e primas pela parceria de sempre.

Ao Prof. Ruy Pauletti, por toda paciência e dedicação no desenvolvimento deste trabalho. Agradeço pelos conhecimentos a mim transmitidos e por ser sempre tão solícito. Foi muito bom trabalhar com ele.

Aos meus colegas da Graduação da PUC Poços de Caldas e do Mestrado no PPGECE da EPUSP pelas longas horas de estudos durante todo o período de curso.

Aos professores da Graduação e do Mestrado, em especial ao professor José Gabriel Maluf Soler e a professora Ana Paula Brescancini Rabelo, por sempre me incentivarem na vida acadêmica.

A todos os meus amigos que de alguma forma contribuíram para realização deste objetivo.

RESUMO

O Método das Densidades de Força (MDF), proposto primeiramente por Linkwitz (1971) e depois por Scheck (1974), é uma alternativa conveniente para encontrar configurações de redes de cabos e membranas, uma vez que fornece geometrias viáveis com uma única análise linear de equilíbrio. O Método das Densidades de Força Natural (MDFN) é uma extensão do MDF para busca de formas de estruturas de membranas, que preserva a linearidade do método original e supera suas dificuldades em lidar com malhas irregulares. Foi primeiramente sugerido por Pauletti em 2006, baseado no elemento triangular de membrana introduzido por Argyris em 1974. O Método tem sido aplicado com sucesso em vários projetos.

O MDFN original requer o uso de malhas compostas exclusivamente por elementos triangulares. Esta dissertação apresenta uma extensão do método para elementos quadrangulares, considerando um elemento composto por quatro subelementos triangulares. Mesmo que a ideia básica seja muito simples, algumas dificuldades surgem do fato de que nesta abordagem, o elemento de quatro nós pode não conter todos os nós em um mesmo plano, especialmente no caso de superfícies anticlásticas, sendo que não existe um campo de tensões bem definido para o interior do elemento. O trabalho compara alguns resultados obtidos com malhas exclusivamente triangulares, como requerido pelo método original, com os resultados obtidos com o elemento quadrangular proposto, discutindo a forma de combinar as tensões dos subelementos triangulares para originar as tensões atuantes no elemento quadrangular. Os modelos obtidos no MDFN são inseridos no programa Ansys, e os resultados são comparados para analisar a viabilidade da solução proposta e dos resultados obtidos por meio desta.

Palavras-chave: Método das Densidades de Força Natural, Estruturas de Membrana, Busca de formas.

ABSTRACT

The Force Density Method (FDM), first proposed by Linkwitz(1971) and after by Scheck(1974), is a convenient alternative for finding configurations of cable nets and membranes, since it provides viable geometries in a single linear equilibrium analysis. The Natural Force Density Method (NFDM) is an extension of the FDM to the shape finding of membrane structures, which preserves the linearity of the original method and overcomes the difficulties of the original method to deal with irregular meshes. It was first suggested by Pauletti in 2006, based on a triangular membrane element introduced by Argyris in 1974. The method has been successfully applied to several design cases. The original NFDM required the use of meshes composed exclusively of triangular elements. This text presents an extension of the method to quadrangular elements, considering an equivalent assemblage of flat triangular elements. Even if the basic idea is very simple, some difficulties arise from the fact that in this approach, the quadrangular element can have a non-flat configuration, especially in the anticlastic shape, and there is not a know stress field into the interior of the element. The text compares several results obtained with fully triangulated meshes, as required by the original NFDM, to those obtained with the proposed quadrangular element, discussing the different strategies that have been explored to map stresses from the internal triangular mesh to the four nodes of the element. The models obtained in the NFDM are inserted in software Ansys and the results compared to approve the solution and the results obtained.

Keywords: Natural Force Density Method, membrane structure, shape finding.

ÍNDICE DE ILUSTRAÇÕES

Figura 1.1: Fases do projeto de uma estrutura retesada (PAULETTI 1999).....	11
Figura 1.2: Alguns tipos de estruturas de membrana tracionada, mostrando a sua curvatura anticlástica (SILVA 2006).	12
Figura 1.3:(a) Empire City Casino Yonkers, Nova York-EUA; (b)Pavilhão Alemão na exposição de 1967 - Montreal Canadá; (c) Aeroporto Internacional de Denver.	13
Figura 1.4: (a) Igreja Batista Central - Fortaleza/CE; (b) Memorial dos povos - Belém/PA; (c) Morro da urca - Rio de Janeiro/RJ; (d) Mercado Aberto de Goiânia - Goiânia/GO.	15
Figura 2.1: Diversas formas de superfícies encontradas na natureza.	18
Figura 2.2: Tipos de tenda: (a)tenda cônica; (b)tenda "kibitka"; e (c)tenda negra (SILVA 2006).....	19
Figura 2.3: Tenda de circo ("Chapiteu") (PAULETTI 2003)	19
Figura 2.4: Foto da Arena de Raleigh.	20
Figura 2.5: Complexo Olímpico de Munique (SILVA 2006).	21
Figura 2.6:(a) Restaurante "Los mantiales" (Felix Candela - México 1956); (b) Mannheim Multihalle (Frei Otto/Buro Happold - Alemanha 1974); (c) Palazzetto dello sport (Pier Luigi - Itália 1960); (d) Heimberg Tennis Center (Heinz Isler - Suíça 1978); (e) Tensegrity - (Buckminster Fuller - EUA).....	22
Figura 2.7:Superfícies mínimas (a) Conóide; (b) Helicóide; (c) Superfície de Costa.....	24
Figura 2.8: Analogia de filmes de sabão: (a) Conóide (SOUZA 2008); (b) Helicoide	24
Figura 2.9: Modelo Suspenso de Gaudí para a igreja Colónia Güell (WENDLAND 2000)	26
Figura 2.10 - Cobertura do posto de gasolina em Deitingen Suíça	26
Figura 2.11 - Conóide - Analogia de filmes de sabão (GOLDSMITH 2016).....	27
Figura 2.12 - Modelo Suspenso, King's Office	28
Figura 2.13 - Multihalle - Alemanha 1975.....	29
Figura 3.1 - Sistema reticulado articulado com n nós e b elementos, cada nó é sujeito a forças centrais de interação.	33
Figura 3.2 - Elemento de treliça com índices locais e globais.....	35
Figura 3.3 - Formas diferentes obtidas com MDF para o mesmo tipo de estrutura, alterando-se os pontos de fixação e as tensões aplicadas nos cabos internos e externos. (Extraída de SCHEK 1974).....	38
Figura 3.4 - Busca de forma através do MDF, considerando a mesma malha inicial e diferentes proporções entre a densidade de força dos cabos de borda (n_b) e os cabos internos (n_i). (Extraída de PAULETTI 2006).	38
Figura 3.5 - Elemento triangular em duas configurações diferentes.	40

Figura 3.6 - Elemento Finito Triangular de Argyris: Vetores unitários e vetores normais aos lados do elemento.....	40
Figura 3.7 - Determinação da Força Natural N_3	41
Figura 3.8 - Equilíbrio do estado plano de Tensões.....	44
Figura 3.9 - Definição das direções principais através do plano diretor Π (PAULETTI 2011).....	45
Figura 3.10 - Forças nodais internas.....	46
Figura 4.1 - Camadas do elemento quadrangular.....	49
Figura 4.2 - (a)Eixos locais do elemento quadrangular (b)Eixos locais do elemento SHELL181.....	50
Figura 4.3 - Não conformidade no elemento quadrangular.....	50
Figura 4.4 - Partes do elemento quadrangular.....	51
Tabela 4.1- Relação entre os nós do elementos e dos subelementos.....	51
Figura 4.5 - Sistemas de coordenadas locais dos subelementos do elemento quadrangular.....	52
Figura 4.6 - Forças internas nodais dos subelementos e vetores unitários do elemento.....	53
Figura 4.7 - Forças nodais internas.....	55
Figura 5.1 - Formas diversas geradas a partir de uma malha genérica via MDFN.....	59
Figura 5.2 - (a)Malha com elementos triangulares (modelo 1); (b)Malha com elementos triangulares (modelo 2); (c)Malha de elementos quadrangulares(modelo 3).....	60
Figura 5.3 - (a)Configuração viável para o Modelo 1; (b)Configuração Viável para o Modelo 2; (c)Configuração viável para o Modelo 3.....	61
Figura 5.4 - Resultados para o campo das normas dos deslocamentos nodais no Ansys (unidade em metros): (a)Modelo 1; (b)Modelo 2;(c)Modelo 3.....	62
Figura 5.5 - Comparação entre os Campos Primeira Tensão Principal: Resultados MDFN/Resultados Ansys - (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.....	64
Figura 5.6 - Configurações viáveis: (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.....	65
Figura 5.7 - Resultados para o campo das normas do deslocamento. Ansys (unidade em metros): (a)Modelo 1; (b) Modelo 2;(c) Modelo 3.....	66
Figura 5.8 - Primeira Tensão Principal: Resultados MDFN/Resultados Ansys - (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.....	68
Figura 5.9 - Configurações viáveis: (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.....	70
Figura 5.10 - Resultados para o campo das normas dos deslocamentos nodais no Ansys (unidade em metro): (a)Modelo 1; (b)Modelo 2;(c)Modelo 3.....	71
Figura 5.11 - Campo de tensões: Primeira tensão Principal - Comparação entre modelos do MDFN e do Ansys: (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.....	72
Figura 5.12 - Campo de tensões: Razão entre as tensões Principais - Modelos do MDFN (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.....	73

Figura 5.13 - (a)Vista 3D - Conóide; (b)Elevação Conóide.....	74
Figura 5.14 - (a)Geometria inicial - Conóide;(b)Formas obtidas e tensões σ_1 / σ_2 para o modelo 1 e modelo 2 após algumas iterações do MDFN.....	75
Figura 5.15 - Campo da norma dos deslocamentos nodais - conóide minimal.	76
Figura 5.16 - Primeira Tensão Principal (S1).	76
Figura 5.17 - Conoides: (a) $h = 1.5 R$;(b) $h = 2.0 R$	77
Figura 5.18 - (a)Conóide não-minimal (S1); (b)Conoide não-minimal (S1/S2); (c)Conóide minimal (S1); (d)Conoide minimal (S1/S2).	78
Figura 5.19 - Resultados Ansys (a)Conóide não-minimal; (b)Conoide minimal.	79
Figura 5.20 - (a) Configuração inicial para a Superfície de Costa; (b)Configuração Viável para a Superfície de Costa.	80
Figura 5.21 - Razão entre as Tensões Principais; (a)1ª Iteração; (b)6ª Iteração; (c)10ª Iteração; (d)Resultados do Ansys (S1).	80

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	10
1.1. JUSTIFICATIVA	16
1.2. OBJETIVOS	16
2. REVISÃO DA LITERATURA	17
2.1. BUSCA DE FORMAS MÍNIMAS	23
2.2. MODELOS FÍSICOS PARA A BUSCA DE FORMAS DE ESTRUTURAS	25
2.3. MODELOS NUMÉRICOS PARA A BUSCA DE FORMAS DE MEMBRANAS	29
3. MÉTODO DAS DENSIDADES DE FORÇA.....	32
3.1. MÉTODO DAS DENSIDADES DE FORÇA NATURAL (MDFN).....	39
4. ELEMENTO QUADRANGULAR	49
5. APLICAÇÕES PARA O ELEMENTO QUADRANGULAR	59
5.1. BUSCA DE FORMAS	59
5.2. ANÁLISE DE TENSÕES	59
5.2.1.MEMBRANA ANTICLÁSTICA COM TENSÕES ISÓTROPAS	60
5.2.2.MEMBRANA ANTICLÁSTICA COM TENSÕES ORTÓTROPAS.....	65
5.3. BUSCA DE SUPERFÍCIES MÍNIMAS	69
5.3.1.MEMBRANA ANTICLÁSTICA.....	70
5.3.2.CONÓIDES - LIMITE DE GOLDSCHMIDT	74
5.3.3.CONÓIDE MINIMAL E NÃO-MINIMAL	77
5.3.4.SUPERFÍCIE DE COSTA.....	79
6. CONCLUSÕES	81
7. REFERÊNCIAS	82

1. INTRODUÇÃO

As estruturas retesadas podem assumir uma grande variedade de formas geométricas, sendo que o processo pela busca de uma forma que atenda às necessidades estruturais e as intenções arquitetônicas não é tão simples. Como a forma de uma superfície afeta diretamente a distribuição de tensões, o projeto arquitetônico deve caminhar em conjunto com o projeto estrutural.

Os elementos estruturais utilizados são basicamente cabos e membranas trabalhando com esforços axiais de tração (as membranas também resistem a esforços de cisalhamento atuantes no plano tangente à superfície). As estruturas retesadas são ditas então flexíveis, sendo que sofrem grandes mudanças na sua geometria quando existe uma variação de carregamentos. Estão sujeitas basicamente às ações de peso próprio e outras ações permanentes, cargas de retesamento, esforços devido às variações de temperatura e ações do vento. A resposta de uma estrutura retesada aos carregamentos se dá em torno de uma configuração de equilíbrio inicial, ou configuração viável, onde a estrutura encontra-se enrijecida pelo efeito dos carregamentos permanentes. Visto que as estruturas de cabos e membranas não resistem aos esforços de compressão, toda vez que as ações externas anulam as tensões iniciais de tração ocorre enrugamento e consequentemente redistribuição de tensões, o que impõe sérias dificuldades para a análise numérica, especialmente nos casos de carregamentos transitórios de grande intensidade (PAULETTI 2003).

O processo do projeto de uma estrutura retesada de membrana, apresentado na figura 1.1, compreende basicamente três etapas:

- Busca de forma;
- Resposta aos carregamentos;
- Padrões de corte.

Figura 1.1: Fases do projeto de uma estrutura retesada (PAULETTI 1999).

Este trabalho trata apenas das análises para busca de forma, revisando o Método das Densidade de Força Natural (MDFN) e o comportamento do elemento que será proposto para o tratamento de malhas formadas com elementos quadrangulares.

No processo de busca de forma, determina-se uma forma geométrica inicial, com base nas intenções arquitetônicas e nos requisitos estruturais de estabilidade e resistência, define-se a forma final da membrana determinando-se também o campo de tensões iniciais. É importante ressaltar que este tipo de estrutura deve possuir curvatura anticlástica, ou seja, com dupla curvatura, como mostra a figura 1.2 (SILVA 2006).

Figura 1.2: Alguns tipos de estruturas de membrana tracionada, mostrando a sua curvatura anticlástica (SILVA 2006).

Antes do advento dos computadores, as formas das estruturas retesadas eram simuladas através de modelos físicos ou das restritas formas com equacionamento analítico existente (PAULETTI 2003). Com o desenvolvimento das técnicas de cálculo e dos softwares as análises numéricas ganharam força sendo que os procedimentos mais utilizados hoje são baseados em modelos numéricos, aplicando-se métodos lineares e não lineares para resolução das equações de equilíbrio. Para sistemas não lineares utiliza-se o Método de Newton ou o Método da Relaxação Dinâmica e para sistemas lineares os métodos que tratam da *Densidade de Força*.

Na figura 1.3 são apresentadas algumas estruturas retesadas de membranas, mostrando a variedade de soluções e formas que podem ser utilizadas. Dos engenheiros e arquitetos que lideraram o desenvolvimento das estruturas retesadas modernas, devem ser citados Frei Otto, que teve ideias pioneiras nas estruturas de cabos, membranas e estruturas pneumáticas, Eero Saarinen e Kenzo Tange, no campo de estruturas de cabos e Walter Bird, no campo de estruturas pneumáticas. Já o pioneirismo da modelagem computacional de estruturas retesadas coube a J. H. Argyris. (PAULETTI 2003).

Figura 1.3:(a) Empire City Casino Yonkers, Nova York-EUA¹; (b)Pavilhão Alemão na exposição de 1967 - Montreal Canadá²; (c) Aeroporto Internacional de Denver³.

A utilização de estruturas retesadas no Brasil se dá em sua maioria nas pontes pênséis e estaiadas, sendo que as estruturas de membrana não são muito utilizadas, o que acontece devido principalmente a uma questão cultural de conhecimento dos projetistas sobre a durabilidade e manutenção das estruturas. Os materiais utilizados

¹ Imagem de Internet, retirada no site <http://www.birdair.com/projects/empire-city-casino-yonkers-raceway> - acesso em 01-2017

² Imagem de Internet, retirada no site http://expo67.ncf.ca/expo_german_p1.html - acesso em 01-2017

³ Imagem de Internet, retirada no site https://pt.wikipedia.org/wiki/Aeroporto_Internacional_de_Denver#/media/File:DIA_Airport_Roof.jpg - acesso em 04-2016.

também não têm muitos fabricantes no Brasil, o que dificulta a utilização de coberturas de membranas. (ASSIS 2012)

A figura 1.4 apresenta algumas estruturas de destaque no cenário nacional.

(a)

(b)

Figura 1.4: (a) Igreja Batista Central - Fortaleza/CE⁴; (b) Memorial dos povos - Belém/PA⁵; (c) Morro da urca - Rio de Janeiro/RJ⁶; (d) Mercado Aberto de Goiânia - Goiânia/GO⁷.

⁴ Fonte: Acervo da Tecno Staff Estruturas e Engenharia - Disponível em <http://www.tecnostaff.com.br/fototensiog02.htm>. Acesso em 04/06/2015.

⁵ Disponível em <http://wwwo.metalica.com.br/cobertura-tensionada-do-anfiteatro-memorial-dos-povos>. Acesso em 04/06/2015. (As análises estruturais deste projeto foram realizadas pelos Professores Ruy Marcelo de Oliveira Pauletti e Reyolando M.L.R.F. Brasil. Ver mais em (PAULETTI e BRASIL 2005).

⁶ Disponível em <http://wwwo.metalica.com.br/cobertura-no-morro-da-urca-rio-de-janeiro>. Acesso em 04/06/2015

⁷ Disponível em <http://www.camara.go.gov.br/noticia.aspx?tipo=NOTICIA&ID=1673>. Acesso em 04/06/2015

1.1. Justificativa

O Método das Densidades de Força Natural é uma grande ferramenta para a busca de formas em superfícies contínuas, no entanto requer o uso exclusivo de uma malha de elementos triangulares. Considerando-se que uma malha de elementos quadrangulares é mais uniforme e reduz assimetrias da malha de elementos, torna-se muito importante para o MDFN a capacidade de representar também um elemento quadrangular, expandindo sua versatilidade.

Na abordagem que será proposta, os elementos quadrangulares são modelados através da composição de partes triangulares planas. Quando os quatro nós do elemento não estão em um mesmo plano, ou seja, a superfície superior não coincide com a inferior, existe uma incompatibilidade na definição do campo de tensões. É portanto necessário avaliar o comportamento das tensões nos subelementos e verificar se as médias a serem consideradas consistem em resultados satisfatórios.

1.2. Objetivos

O trabalho tem como objetivo apresentar as considerações para o elemento quadrangular proposto, analisando as formas geradas e o campo de tensões encontrado. São avaliados também os resultados para malhas compostas exclusivamente por elementos triangulares, verificando que para determinadas situações os elementos triangulares apresentam uma assimetria no campo de tensões que está relacionada à maneira como os elementos são posicionados na malha, o que torna interessante a aplicação de elementos quadrangulares em algumas situações. Para validação dos resultados, as formas encontradas são implementadas no programa Ansys, verificando e avaliando o deslocamento dos nós e as tensões principais nos elementos, confirmando que as formas obtidas são formas viáveis. Sabendo-se que o MDFN converge para uma superfície mínima após algumas iterações, são verificadas algumas superfícies mínimas, mostrando a versatilidade do método e do elemento proposto.

2. REVISÃO DA LITERATURA

O processo de *busca de forma* consiste em encontrar uma representação estrutural adequada para um desejo arquitetônico. Várias são as inspirações para as formas que uma obra de arte pode assumir, mas sem dúvida a principal delas é a natureza. Observar os processos naturais e os formatos que a própria natureza traçou ao longo dos anos é uma inspiração tanto do ponto de vista arquitetônico, quanto do ponto de vista estrutural. Conforme GOLDSMITH (2016), observar as formas naturais é uma maneira de descobrir uma forma ótima. No processo de busca de forma o projetista olha o processo na natureza para descobrir maneiras de organizar seu projeto. A beleza da obra, portanto, muitas vezes não precisa ser projetada, pois torna-se uma propriedade emergente das formas naturais.

No século XVIII, naturalistas começaram um movimento que surgiu da vontade de entender as *leis universais da forma*, buscando observar e explicar as formas presentes nos organismos vivos. Mais tarde, já no início do século XX, Pioneiros como D'Arcy Wentworth Thompson expandiram essas noções para criar uma compreensão moderna de que existem leis universais que surgem da matemática e física e que refletem o crescimento e a forma em sistemas biológicos.

Thompson trabalhou na correlação entre formas naturais e modelos matemáticos e mostrou semelhanças entre coisas como água viva e gotas de líquido. Seu livro "Growth and Form" tornou-se um importante instrumento do estudo de formas na natureza. A partir dos estudos de Thompson, surgem ideias de como os padrões da natureza seguem fórmulas matemáticas simples, como exemplo, os estudos de filmes de sabão são feitos para estruturas de membranas mínimas, colmeias de abelhas nos deram um entendimento sobre as estruturas do favo de mel, usadas em sistemas de painéis leves e o estudo da fotossíntese tem ajudado a fotovoltaica a se desenvolver e tornar-se um sistema sustentável importante (GOLDSMITH 2014).

No campo das estruturas retesadas, um dos principais engenheiros a iniciar a busca de formas variadas, primeiramente sem representação analítica, foi Frei Otto, que começou a desenvolver modelos empíricos, primeiramente a partir de cabos e correntes tracionadas, e depois de membranas elásticas, de malhas de filó e de filmes

de sabão. Segundo GOLDSMITH (2016), os trabalhos de Thompson foram grande influência para Frei Otto, pois ele viu que a criação de modelos permitia a possibilidade de obter uma apreciação direta das equações científicas que descrevem a natureza e desenvolver uma compreensão dos materiais, estrutura e forma, possibilitando a criação de novas estruturas.

Segundo WENDLAND (2000), Frei Otto afirma que suas estruturas são *estruturas naturais*, porém o termo não faz analogia formal com a natureza, mas sim com o fato de que as estruturas são concebidas de forma natural.

De fato, na natureza podem ser encontradas diversas estruturas com formas geométricas diferenciadas e de grande estabilidade, como exemplo podem ser citadas as estruturas de árvores, teias de aranhas, conchas, rochas, dentre outras várias formações, como mostra a figura 2.1.

Figura 2.1⁸: Diversas formas de superfícies encontradas na natureza.

⁸ Imagem de Internet, retirada no site

<http://personal.strath.ac.uk/j.wood/Biomimetics/Engineering%20Areas/structures/STRUCTURES.htm> - acesso em 01-2017

De modo geral, o homem em sua evolução sempre buscou utilizar e compreender as ferramentas e conceitos apresentados na natureza. Ao tratar-se de estruturas de engenharia e arquitetura, pensando primeiramente nas formas geométricas utilizadas em estruturas retesadas, destaca-se a arquitetura nômade, que necessitava de estruturas flexíveis e fáceis de serem transportadas, geralmente com formas geométricas simples (circulares ou quadradas). As tendas podem ser consideradas como uma das formas de habitação mais antiga, depois das cavernas. Alguns vestígios de tendas datam de 40 mil anos e eram feitas com ossos de mamutes e peles de animais (PAULETTI 2003).

A figura 2.2 traz alguns dos tipos de tendas utilizados pelos povos antigos, como as tendas utilizadas pelas tribos nativas americanas (2.2a), os abrigos mongóis (2.2b) e a tenda negra (2.2c) utilizada pelos povos nômades do Saara, Arábia e Irã. (SILVA 2006).

Figura 2.2: Tipos de tenda: (a)tenda cônica; (b)tenda “kibitka”; e (c)tenda negra (SILVA 2006)

As tendas também foram muito utilizadas em acampamentos militares e posteriormente, já no século XIX, em circos, como mostra a figura 2.3.

Figura 2.3: Tenda de circo (“Chapiteu”) (PAULETTI 2003)

Segundo PAULETTI (2003), apesar das formas retesadas serem muito antigas, talvez o mais antigo sistema estrutural, o estudo de suas formas atuais é recente, pois elas dependiam de materiais, técnicas de construção e teorias mais sofisticadas do que as existentes na época.

Inspirado nos grandes circos itinerantes, Shookov apresentou 4 tendas de aço na exibição Pan-Russa de Nijny-Novgorod, em 1896, que eram constituídas de redes flexíveis, feitas com fitas metálicas, sobre as quais eram montadas outras finas chapas metálicas, formando superfícies anticlásticas não retesadas. Alguns autores apontam os pavilhões de Shookov como o início das aplicações modernas das coberturas suspensas. Outro grande marco para as estruturas retesadas atuais é a Arena de Raleigh na Carolina do Norte, em 1952, pois foi introduzido o conceito de retesamento de superfície anticlástica, em uma época onde a maioria dos projetos eram com coberturas simplesmente suspensas. A cobertura da Arena de Raleigh, apresentada na figura 2.4, possui 95m de vão e consiste de dois conjuntos de cabos de aço, praticamente ortogonais entre si, formando uma superfície parabolóide hiperbólica. (PAULETTI 2003).

Figura 2.4⁹: Foto da Arena de Raleigh.

Após a Arena de Raleigh, onde constatou-se que as superfícies anticlásticas retesadas possuíam grande estabilidade frente aos carregamentos aerodinâmicos, os

⁹Imagem de Internet, retirada no site <http://www.masterbuilder.co.in/analysis-design-and-construction-of-fabric-structures/> - acesso em 06-2015

projetistas do mundo todo foram motivados a trabalhar com este tipo de estrutura durante as décadas seguintes. No entanto a dificuldade da representação matemática para as análises restringia a utilização de formas variadas, sendo que exceto em casos isolados, as primeiras estruturas retesadas restringiram-se às formas catenárias e aos paraboloides hiperbólicos.

A Arena de Raleigh foi também uma grande inspiração para Frei Otto. Nos anos 50, suas obras consistiam de pavilhões de lonas para exposições em feiras europeias, sendo que o pavilhão Alemão da EXPO de Montreal em 1967 foi seu primeiro trabalho de grande escala. O Complexo Olímpico de Munique, projetado também por Frei Otto e construído para os jogos olímpicos de 1972, é considerado também um dos marcos para ensaios com maquete e programas de computador na busca de formas e análise do comportamento de tenso estruturas (figura 2.5).

Figura 2.5: Complexo Olímpico de Munique (SILVA 2006).

Também neste mesmo período os avanços da engenharia estrutural foram muito grandes, à medida que os computadores começaram a ser utilizados para solucionar problemas que necessitavam de uma análise numérica (como acontece com as estruturas retesadas).

Além das estruturas retesadas de Frei Otto, podem ser citados como outros exemplos históricos da busca de formas em estruturas, as cascas de Felix Candela, Heinz Isler e Pier Luigi Nervi, além das obras Edmund Happold e Buckminster Fuller. Alguns exemplos são apresentados na figura 2.6 (OLSON 2012 e GOLDSMITH 2014).

Figura 2.6:(a) Restaurante "Los mantiales" (Felix Candela - México 1956); (b) Mannheim Multihalle (Frei Otto/Buro Happold - Alemanha 1974); (c) Palazzetto dello sport¹⁰ (Pier Luigi - Itália 1960); (d) Heimberg Tennis Center (Heinz Isler - Suíça 1978); (e) Tensegrity - (Buckminster Fuller - EUA).

¹⁰Imagem de Internet, retirada no site <http://theredlist.com/wiki-2-19-879-605-224910-view-nervi-pier-luigi-profile-nervi-pier-luigi-palazzetto-dello-sport.html> - acesso em 01-2017

2.1. Busca de formas mínimas

Dentre as várias formas que uma superfície pode assumir, existe um grupo especial conhecido como superfícies mínimas. Estas superfícies apresentam a menor área e também a menor energia de deformação para um dado contorno, bem como campos uniformes e isotrópicos de tensões. As formas mínimas são uma alternativa interessante de projeto pois propiciam economia de material e consequentemente economia financeira (SOUZA 2008).

As superfícies mínimas são objeto antigo de estudo dos matemáticos. O primeiro a introduzir a ideia de minimização, ainda no século XVII, foi Pierre de Fermat que apresentou o *princípio do tempo mínimo*. Anos mais tarde, Pierre-Louis Moreau de Maupertuis definiu o *princípio da ação mínima*, afirmando que tudo que acontecia na natureza era uma minimização da ação, mostrando que a natureza era econômica.

No século XVIII Leonhard Euler e seu mestre Johann Bernoulli começaram a aplicar métodos de cálculo para a solução de problemas de minimização de área. Euler conseguiu descrever uma catenária de revolução, também conhecida como catenóide (figura 2.7a), utilizando sua equação que seria fundamento para o cálculo das variações. Anos mais tarde, Joseph-Louis Lagrange estendeu para integrais duplas os teoremas de Euler sobre integrais simples no cálculo das variações, a generalização ficou conhecida como *equação de Euler-Lagrange* (SOUZA 2008).

Ainda no século XVIII, o matemático Jean Baptiste Marie Charles Meusnier, mostrou que a solução apresentada por Lagrange correspondia a anular a curvatura Gaussiana média da superfície, tal propriedade passou a ser uma definição de superfície mínima. Meusnier também descobriu uma superfície mínima denominada Helicoide (figura 2.7b), que juntamente com a catenóide de Euler e o plano foram as primeiras superfícies mínimas definidas.

Em 1982 o matemático brasileiro Celso José da Costa (COSTA 1982), em sua tese de doutorado no IMPA, descobriu uma nova superfície mínima, que ficou conhecida como *Superfície de Costa* (*Costa's Surface*). Costa quebrou um paradigma de mais de 200 anos, onde acreditava-se que as únicas superfícies mínimas eram o

plano, o conóide e o helicóide. Na *Superfície de Costa*, o plano flui suavemente entre os furos, não havendo intersecções, conforme figura 2.7c.

Figura 2.7: Superfícies mínimas (a) Conóide; (b) Helicóide; (c) Superfície de Costa

O estudo sistemático de superfícies mínimas teve início apenas no século XIX com o físico Joseph Antoine Ferdinand Plateau, que introduziu a *analogia dos filmes de sabão*, mostrando respostas análogas entre os resultados de minimização de superfícies e as formas geométricas obtidas na imersão de um determinado contorno em uma solução de sabão, conforme mostra a figura 2.8.

Figura 2.8: Analogia de filmes de sabão: (a) Conóide (SOUZA 2008); (b) Helicóide ¹¹

A analogia dos filmes de sabão foi então expandida para outras áreas como a engenharia civil, mais especificamente para membranas, conforme citado anteriormente nos trabalhos de Frei Otto.

¹¹ Imagem de Internet, retirada no site https://designontopic.files.wordpress.com/2014/01/img_1770-bw1.jpg - acesso em 01-2017

2.2. Modelos físicos para a busca de formas de estruturas

Muitas das formas pretendidas para fins estruturais não são passíveis de uma representação analítica simples, sendo portanto, necessária uma análise numérica. Primeiramente quando esta análise não era possível, os modelos físicos atendiam às necessidades dos arquitetos e engenheiros, pois além da capacidade de gerar uma gama muito maior de formas, diferente dos procedimentos geométricos conhecidos, permitiam um controle intuitivo do projeto.

Antoni Gaudí provavelmente foi o primeiro que adotou o processo de utilizar um modelo físico (modelo em escala reduzida) para determinar a forma de uma estrutura, em seu projeto para a igreja da Colônia Güell (1898), situada ao sul de Barcelona, usou uma forma funicular tridimensional com cerca de 6 m de comprimento e 4 m de altura (correspondente a uma escala de 1:10) feita de cordas. O carregamento foi simulado por sacos contendo chumbo.

Este modelo serviu para criar uma figura de equilíbrio que determina uma estrutura resistente através de sua forma. O modelo suspenso simula o fluxo de forças no elemento como colunas nervuradas, apresentando apenas tensão nas cordas. Assim, ao virar de cabeça para baixo o modelo, obtém-se uma estrutura que sob seu peso próprio está sujeita apenas à carga de compressão axial em cada elemento, sem momentos fletores. Gaudí transpõe o princípio da catenária a uma estrutura espacial complexa (WENDLAND 2000).

Gaudí captou suas visões com fotografia e pintou sobre as placas fotográficas, desenvolvendo as seções e perspectivas, construindo diretamente a partir do levantamento do modelo. O modelo foi destruído durante a guerra civil espanhola e apenas um conjunto de fotografias sobrevive (figura 2.9).

Figura 2.9: Modelo Suspenso de Gaudí para a igreja Colónia Güell (WENDLAND 2000)

Outra figura importante no estudo dos modelos físicos foi Heinz Isler, que desde os anos 50 já construía várias estruturas em casca de concreto, usando modelos físicos para a descoberta da forma. A figura 2.10 apresenta uma de suas coberturas, o Posto de gasolina em Deitingen- Suíça (1968). A casca tem bordas livres sem qualquer suporte de vigas ou elementos estruturais na fachada, devido à forma otimizada da casca de concreto.

Figura 2.10 - Cobertura do posto de gasolina em Deitingen Suíça¹²

Conforme mencionado anteriormente, estas formas não podem ser encontradas por processos geométricos clássicos. Isto ocorre devido à relação entre a força e a

¹²Imagem de Internet, retirada no site <http://anengineersaspect.blogspot.com.br/2009/10/27-heinz-isler-concrete-thin-shells-on.html> - acesso em 01-2017

forma, ou seja, cada mudança na forma só pode ocorrer se foram alteradas as condições de contorno e as forças, deixando a determinação da forma ao processo físico.

Os modelos físicos utilizados nas estruturas de membranas tiveram seu pioneirismo com Frei Otto, inúmeros projetos foram desenvolvidos baseando-se em modelos físicos, dentre eles, o Pavilhão de Montreal (1967), o Parque Olímpico de Munique (1972), as suas estruturas leves de *grid-shell* como o Multihalle de Mannheim (1975), as suas estruturas ramificadas e o seus projetos de estruturas pneumáticas. Conforme WENDLAND (2000), os modelos físicos determinavam a forma da estrutura e eram usados para elaborar o esquema estrutural.

A primeira aproximação para a concepção de tendas e estruturas retesadas, como os telhados de Montreal, consistiram em grandes superfícies mínimas obtidas através de filmes de sabão. As formas mínimas são, de fato, formas naturais das estruturas de membrana. O Instituto de Estruturas Leves, na Universidade de Stuttgart - Alemanha, chegou a construir um dispositivo para gerar e medir filmes de sabão (WENDLAND 2000).

A figura 2.11 apresenta o modelo de um conóide gerado por Frei Otto através da analogia de filmes de sabão.

Figura 2.11 - Conóide - Analogia de filmes de sabão (GOLDSMITH 2016)

Frei Otto também desenvolveu muitos modelos suspensos. Um exemplo de seus trabalhos foi o complexo governamental na Arábia Saudita, em Riyadh, chamado de King's Office, (figura 2.12).

Figura 2.12 - Modelo Suspenso, King's Office¹³

Outro exemplo de uma estrutura de grande porte projetada por Frei Otto através de modelos suspensos é o *Multihalle*, construído em Manheim em 1975. A estrutura é uma grelha feita de uma malha dupla de ripas de madeira (5x5cm) coberta por uma membrana de poliéster, cobrindo 7400m² e seu peso é de 14 kg/m². É constituída por duas cascas com uma configuração curvada, ligadas por uma passagem coberta. Foi projetada para ser temporária e por isso não atende aos padrões normais de carga e segurança, entretanto durou até hoje e recentemente foi declarada um monumento.

Depois de esboçar o projeto em um modelo de malha de arame, o desenvolvimento da grelha foi em um modelo funicular em escala 1/100, feito de elementos de arame representando cada um deles três elementos da malha real. O modelo suspenso representou, ainda que virtualmente, os dados para construir o *Grid-shell*. (WENDLAND 2000).

A figura 2.13 apresenta o modelo idealizado e algumas etapas de construções da obra.

¹³Imagem de Internet, retirada no site <https://br.pinterest.com/pin/365847169705710883>
acesso em 01-2017

Figura 2.13 - Multihalle - Alemanha 1975¹⁴

2.3. Modelos numéricos para a busca de formas de membranas

Conforme discutido anteriormente, a busca por uma forma que não tenha uma representação analítica e que atenda aos requisitos arquitetônicos não é tão simples. Tradicionalmente as dificuldades de se encontrar soluções analíticas eram contornadas

¹⁴Imagem de Internet, retirada no site <http://www.smdarq.net/case-study-mannheim-multihalle/>
acesso em 01-2017

com o emprego de modelos em escala reduzida, produzidos com materiais flexíveis ou filmes de sabão, técnicas finalmente suplantadas por modelos numéricos.

As estruturas retesadas possuem comportamento basicamente não linear, portanto a análise computacional das tensões e dos deslocamentos da membrana, sujeita à carregamentos externos, tornou-se viável após a implementações do método dos elementos finitos.

Nos últimos 50 anos vários métodos de busca de forma foram desenvolvidos, alguns métodos anteriores aplicados somente a redes de cabos foram estendidos para métodos que analisam elementos de superfície, como os elementos de uma membrana. VEENENDAAL (2012) classifica os métodos atuais em três categorias, semelhante ao trabalho de BLETZINGER (2011):

- ✓ Métodos baseados na matriz de rigidez: São mais populares pois são adaptados da análise estrutural, tratam então da rigidez elástica e geométrica, utilizando o Método de Newton-Raphson para solução do problema não-linear.
- ✓ Métodos baseados exclusivamente na rigidez geométrica: São independentes do material e do tipo do elemento. Iniciados a partir do método das densidades de força. HABER e ABEL (1982); BLETZINGER e RAMM (1999); PAULETTI (2006).
- ✓ Métodos baseados no equilíbrio dinâmico: Resolvem o problema do equilíbrio para chegar em uma solução estacionária equivalente a solução estática do problema.

Podem ser encontradas revisões dos métodos de busca de forma em HABER e ABEL (1982), BASSO e DEL GROSSO (2011), LINKWITZ (1976); BARNES (1977); TAN (1989), MEEK e XIA (1999), TIBERT e PELLEGRINO (2003), NOURI-BARANGER (2004), LEWIS (2008).

Basicamente todos os pesquisadores remetem-se à HAUG et al., publicado no período de 1970-1974 (como exemplo HAUG e POWELL, 1972) e ARGYRIS, ANGELOPOULOS et al., publicado no período de 1970-1974 (ARGYRIS et al., 1974).

VEENENDAAL (2012) também descreve as principais críticas aos métodos:

Os métodos de matriz de rigidez incluem propriedades de material, que são desnecessárias, computacionalmente dispendiosas e podem introduzir dificuldades no controle da convergência.

Os métodos de rigidez geométrica, aplicados na sua forma linear, podem resultar em modelos que não são construtivamente praticáveis (BARNES 1977) e podem servir apenas como um resultado preliminar. Em alguns métodos são necessárias iterações adicionais, tornando o método não linear. (BARNES 1977, HABER e ABEL 1982, LEWIS 2008). Como será visto no capítulo 3, PAULETTI (2006) apresenta o Método das Densidades de Força Natural (MDFN), conciliando o MDF e o elemento de membrana de Argyris, conseguindo desta forma, estender o MDF para membranas contínuas, sem perder seu caráter linear.

Os métodos de equilíbrio dinâmico requerem muitos parâmetros, como o passo do tempo para controlar a estabilidade e a convergência. Os parâmetros de massa e amortecimento também são fictícios, e não têm representação física.

Poucos autores comparam o desempenho dos métodos, BARNES (1977) comparou os requisitos de armazenamento e operação do Método de Relaxação Dinâmica e dos métodos de matriz de rigidez por iteração e as cotações necessárias, concluindo que o relaxamento dinâmico é favorável no caso de redes de cabo. Isto foi ainda demonstrado por LEWIS (2003, 1989) que comparou várias configurações de redes de cabo e concluiu que o método da matriz de rigidez não converge para um dos exemplos e que o relaxamento dinâmico tem menor custo computacional total para exemplos com muitos graus de liberdade (VEENENDAAL 2012).

Este trabalho compara resultados obtidos por meio do MDFN aplicados ao programa Ansys, mostrando que os resultados obtidos através do método são satisfatórios.

3. Método das Densidades de Força

O conceito de *Densidade de Força* para análises de redes de cabos foi proposto inicialmente por LINKWITZ (1971) e também por SCHEK (1974), como alternativa às análises não-lineares existentes para a busca de formas de estruturas retesadas (Método de Newton e Método da Relaxação Dinâmica). O Método das Densidades de Força (MDF) foi apresentado em sua forma inicial para análises de redes de cabos, onde a Densidade de Força é dada pela razão entre a força e o comprimento do cabo.

Segundo MONTES (2006), o MDF foi uma grande melhoria, comparada ao *Grid Method*, proposto por SIEV e EIDELMAN (1964). O método estabelece uma grelha horizontal e o equilíbrio é resolvido no plano, o equilíbrio vertical para cada nó é resolvido por um sistema de equações. HABER e ABEL (1982) apresentaram o *smoothing concept*, que permite resolver a forma através de uma distribuição assumida de pré-tensão, com este método as equações são não-lineares. LEVY e SPILLERS (1998) usaram o MDF e o *Grid Method* como uma abordagem simples por meio de uma análise geométrica não-linear. MAURIN e MOTRO (1998) introduziram o conceito de *surface stress density*, que usa um elemento triangular com tensões isotrópicas e usa um procedimento iterativo não-linear. O procedimento converge em uma configuração que satisfaz o equilíbrio estático. PAULETTI (2006,2011) e PAULETTI e PIMENTA (2008), introduziram o MDFN, que preserva a linearidade do MDF e supera suas dificuldades em lidar com malhas irregulares. BASSO e DEL GROSSO(2009) apresentaram *The virtual Force Density Method*.

Considerando todos os métodos e as particularidades de cada pesquisador, cada um dos métodos é apresentado com notações diferentes. Para a descrição do MDF, neste trabalho, a notação apresentada será a mesma utilizada em PAULETTI (2006), considerando-se esta como uma formulação mais prática e direta do método, que servirá também como base para a descrição do MDFN.

O MDF baseia-se na consideração de equilíbrio de cada um dos nós de uma malha de cabos, para o qual convergem cabos partindo dos demais nós, como mostra a figura 3.1.

Figura 3.1 - Sistema reticulado articulado com n nós e b elementos, cada nó é sujeito a forças centrais de interação.

Na figura 3.1, a força interna resultante agindo sobre o i -ésimo nó do sistema é dada por:

$$\mathbf{P}_i = \sum_{j=1}^n \mathbf{P}_{ij} = \sum_{j=1}^n N_{ij} \mathbf{v}_{ij} \quad (3.1)$$

Onde cada N_{ij} é a intensidade da força de interação entre os nós i e j , $\mathbf{v}_{ij}$ é o versor da reta que passa por estes dois nós, orientado do nó i para o nó j , ou seja:

$$\mathbf{v}_{ij} = \frac{\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} = \frac{\ell_{ij}}{\|\ell_{ij}\|} \quad (3.2)$$

Onde $\mathbf{x}_i$ e $\mathbf{x}_j$ são os vetores posição dos nós i e j e ℓ_{ij} é o comprimento do cabo. Cada nó i do sistema fica sujeito às forças externas $\mathbf{F}_i$ e o equilíbrio do sistema fica expresso por:

$$\mathbf{F}_i = \sum_{j=1}^n N_{ij} \mathbf{v}_{ij}, \quad i = 1, 2, 3, \dots, n \quad (3.3)$$

Ou seja, um sistema com $3n$ equações e até $n(n-1)/2$ incógnitas, pois $N_{ii} = 0$ e $N_{ij} = N_{ji}$. Trata-se então de um sistema de equações não-lineares em termos das coordenadas nodais, uma vez que os versores $\mathbf{v}_{ij}$ e possivelmente as forças de interação nodal N_{ij} são em geral função dessas coordenadas.

O problema poderia então ser resolvido pelos métodos não-lineares Método de Newton e Método da Relaxação Dinâmica, no entanto, pode-se impor para cada segmento de cabo uma nova grandeza denominada por densidade de força (n_{ij}), definida como:

$$n_{ij} = \frac{N_{ij}}{\|\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i\|} \quad (3.4)$$

Obtém-se um sistema de $3n$ equações lineares:

$$\sum_{j=1}^m n_{ij} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) = \mathbf{F}_i, \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.5)$$

Após a imposição de um número suficiente de condições de contorno o sistema pode ser facilmente resolvido, o que torna o MDF uma boa alternativa às análises não lineares de equilíbrio, para os procedimentos de busca de forma das estruturas retesadas.

Para implementação computacional, é interessante reescrever o problema em uma notação matricial. Considerando que o i -ésimo nó do sistema seja caracterizado pelo vetor posição $\mathbf{x}_i$, suas coordenadas cartesianas podem ser escritas como $\mathbf{x}_i = [\mathbf{x}_i]_{3 \times 1}$, assim como as componentes cartesianas das forças externas agindo sobre o mesmo nó, podem ser armazenadas em $\mathbf{F}_i = [\mathbf{F}_i]_{3 \times 1}$. Para as forças internas, são consideradas as forças agindo sobre os elementos $\mathbf{P}_i = [-\mathbf{P}_i]_{3 \times 1}$. Estas 3 matrizes

podem ser agrupadas em 3 matrizes globais denominadas, respectivamente, por '*vetor posição*', '*vetor das forças externas*' e '*vetor das forças internas*', dados por:

$$\mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} ; \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_1 \\ \mathbf{F}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{F}_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} ; \mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_1 \\ \mathbf{P}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{P}_n \end{bmatrix}_{3n \times 1} \quad (3.6)$$

Onde,

$$\mathbf{P}_i = \sum_{j=1}^m n_{ij} (\mathbf{x}_j - \mathbf{x}_i) \quad , \quad i = 1, 2, 3 \dots n \quad (3.7)$$

O equilíbrio do sistema é dada por:

$$\mathbf{P} - \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (3.8)$$

É conveniente substituir o somatório que aparece na definição de $\mathbf{P}$ (que varre os nós da estrutura), por um somatório varrendo os elementos 'b' que são conectados aos nós. Consideram-se então os vetores das coordenadas nodais e o vetor das forças internas do (e)-ésimo elemento, como mostra a figura 3.2.

Figura 3.2 - Elemento de treliça com índices locais e globais.

Conectando os nós i e j , definidos respectivamente por:

$$\mathbf{x}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^e \\ \mathbf{x}_2^e \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i \\ \mathbf{x}_j \end{bmatrix}_{6 \times 1} ; \quad \mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \end{bmatrix}_{6 \times 1} = N^e \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^e \\ \mathbf{v}^e \end{bmatrix}_{6 \times 1} = N_{ij}^e \begin{bmatrix} -\mathbf{v}_{ij} \\ \mathbf{v}_{ij} \end{bmatrix}_{6 \times 1} \quad (3.9)$$

Onde, $\mathbf{v}^e = [\mathbf{v}_{ij}]_{3 \times 1}$ expressa os cossenos diretores do (e)-ésimo elemento em relação ao sistema de eixos globais. Verifica-se que os vetores das coordenadas e das forças internas do (e)-ésimo elemento relacionam-se com os vetores globais de posição e de forças internas, respectivamente através de:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{x} ; \quad \mathbf{P} = \sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} \mathbf{p}^e \quad (3.10)$$

Onde, $\mathbf{A}^e$ é a matriz de conectividade do (e)-ésimo elemento, dada por:

$$\mathbf{A}^e = \begin{bmatrix} 1 & \dots & i & \dots & j & \dots & n \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \dots & \mathbf{0} & \dots & \mathbf{I}_3 & \dots & \mathbf{0} \end{bmatrix}_{6 \times 3n} \quad (3.11)$$

Onde, $\mathbf{0}$ e $\mathbf{I}_3$ são respectivamente as matrizes nula e de identidade de ordem 3.

Substituindo-se as equações (3.9) e (3.10) na equação de equilíbrio (3.8), obtém-se:

$$\sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} \mathbf{p}^e = \sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} N^e \begin{bmatrix} -\mathbf{v}^e \\ \mathbf{v}^e \end{bmatrix}_{6 \times 1} = \sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} \begin{bmatrix} -\mathbf{x}_j^e + \mathbf{x}_i^e \\ \mathbf{x}_j^e - \mathbf{x}_i^e \end{bmatrix}_{6 \times 1} \frac{N^e}{\|\mathbf{x}_j^e - \mathbf{x}_i^e\|} = \mathbf{F} \quad (3.12)$$

Reconhecendo-se na equação (3.12) a densidade de força do (e)-ésimo elemento e considerando-se a equação (3.10), obtém-se:

$$\sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} n^e \begin{bmatrix} \mathbf{x}_i^e - \mathbf{x}_j^e \\ -\mathbf{x}_i^e + \mathbf{x}_j^e \end{bmatrix} = \left(\sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} n^e \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \mathbf{A}^e \right) \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (3.13)$$

Pode-se então expor o problema, como um problema clássico para um sistema de equações lineares:

$$\mathbf{K}_d \mathbf{x} = \mathbf{F} \quad (3.14)$$

Sendo $\mathbf{K}_d$ a matriz de rigidez positiva definida da estrutura, dada por:

$$\mathbf{K}_d = \sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} \mathbf{k}_d^e \mathbf{A}^e \quad (3.15)$$

Onde $\mathbf{k}_d$ é considerada como uma matriz de rigidez do (e)-ésimo elemento, dependendo somente da densidade de força sobre ele atuante, dada por:

$$\mathbf{k}_d^e = n^e \begin{bmatrix} \mathbf{I}_3 & -\mathbf{I}_3 \\ -\mathbf{I}_3 & \mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

A figura 3.3 e a figura 3.4 mostram formas geradas através do MDF.

Figura 3.3 - Formas diferentes obtidas com MDF para o mesmo tipo de estrutura, alterando-se os pontos de fixação e as tensões aplicadas nos cabos internos e externos. (Extraída de SCHEK 1974).

Figura 3.4 - Busca de forma através do MDF, considerando a mesma malha inicial e diferentes proporções entre a densidade de força dos cabos de borda (n_b) e os cabos internos (n_i). (Extraída de PAULETTI 2006).

3.1. Método das Densidades de Força Natural (MDFN)

O MDF passou a ser utilizado então para busca de formas de membranas contínuas, primeiramente substituindo a membrana por uma rede de cabos equivalentes e depois por métodos que propuseram uma análise da membrana de forma contínua.

Em seus estudos Pauletti conseguiu estender o MDF para membranas contínuas, mantendo sua linearidade original. Para isto, conciliou o MDF com o elemento finito de membrana, que já havia sido proposto por ARGYRIS (1974), MEEK(1991) e PAULETTI(2003). Este novo método foi denominado de *Método das Densidades de Força Natural* (MDFN) e foi apresentado pela primeira vez em PAULETTI(2006). Constata-se que o método também supera as dificuldades do MDF em lidar com malhas irregulares, típicas da modelagem de membranas de formas livres.

Recentemente o MDFN foi incorporado ao programa Ix-cube 4-10 da empresa Ix-Ray, utilizado para cálculo e projeto de estruturas retesadas. (TAN e PAULETTI 2016).

Em SOUZA e PAULETTI (2016) pode-se verificar a implementação para ambiente Rhino/Grasshopper, que permite a geração paramétrica de formas livres.

São encontrados estudos do MDFN aplicado a conóides em GELLIN e PAULETTI (2010) e GELLIN e PAULETTI (2011).

Para descrição do MDFN, a formulação aqui apresentada é igual à formulação original descrita em PAULETTI (2006), com incrementos que foram apresentados em PAULETTI e PIMENTA (2008) e PAULETTI (2011).

Considera-se primeiramente o elemento triangular apresentado na Figura 3.5, descrito em duas configurações: uma configuração inicial Ω_0 e uma configuração final Ω , viável para a solução da superfície.

Figura 3.5 - Elemento triangular em duas configurações diferentes.

Para descrição do elemento triangular, considera-se então o elemento triangular de Argyris, apresentado na figura 3.6, onde os nós e os lados do elemento são numerados no sentido anti-horário (para um observador que esteja observando no sentido negativo do eixo z), com os lados virados para os nós de mesmo número. As coordenadas nodais são referentes a um sistema global cartesiano e o sistema local é indicado por um "chapéu" superior. O eixo $\hat{x}$ é sempre alinhado com o lado 3, orientado do nó 1 para o nó 2. O eixo $\hat{z}$ é sempre perpendicular ao plano do elemento.

Figura 3.6 - Elemento Finito Triangular de Argyris: Vetores unitários e vetores normais aos lados do elemento

Os comprimentos dos lados do elemento são dados por $\ell_i = \|\mathbf{l}_i\| = \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_j\|$, onde os índices $i, j, k = 1, 2, 3$ são permutados ciclicamente. Os vetores unitários paralelos aos lados do elemento são dados por $\mathbf{v}_i = \mathbf{l}_i / \|\mathbf{l}_i\|$. Para calcular o vetor de forças internas, é conveniente definir as Forças Naturais N_i , paralelas aos lados do elemento. Como exemplo é demonstrada a Força Natural do lado 3, conforme Figura 3.7 e equação (3.17).

Figura 3.7 - Determinação da Força Natural N_3 .

$$N_3 = \frac{\sigma_3 t h_3}{2} = \ell_3^{-1} \sigma_3 A t = \ell_3^{-1} \sigma_3 V \quad (3.17)$$

Onde, σ_3 é a tensão normal paralela ao lado 3, A é a área do elemento na configuração corrente, t é a espessura e V é o volume. As expressões para os demais lados são análogas, criando-se então o vetor de Forças Naturais, definido por:

$$\mathbf{N} = \begin{bmatrix} N_1 \\ N_2 \\ N_3 \end{bmatrix} = V \mathbf{L}^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n \quad (3.18)$$

Com:

$$\mathcal{L} = \begin{bmatrix} \ell_1 & 0 & 0 \\ 0 & \ell_2 & 0 \\ 0 & 0 & \ell_3 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

$$\boldsymbol{\sigma}_n = [\sigma_1 \quad \sigma_2 \quad \sigma_3]^T \quad (3.20)$$

Onde $\boldsymbol{\sigma}_n$ é o vetor de Tensões Naturais, que contém as tensões normais paralelas aos três lados do elemento.

Considerando-se o vetor de deformações naturais ao longo dos lados do elemento como $\boldsymbol{\varepsilon}_n = [\varepsilon_1 \quad \varepsilon_2 \quad \varepsilon_3]^T$, onde $\varepsilon_i = (\ell_i - \ell_i^0)(\ell_i^0)^{-1}$, sendo ℓ_i e ℓ_i^0 os comprimentos dos lados do elemento na configuração viável e inicial respectivamente. A relação entre $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ e o vetor das deformações lineares de Green ($\boldsymbol{\varepsilon}$), é dada por:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_n = \mathbf{T}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.21)$$

Onde:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} \cos^2 \gamma & \sin^2 \gamma & -\sin \gamma \cos \gamma \\ \cos^2 \beta & \sin^2 \beta & \sin \beta \cos \beta \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Os elementos da matriz $\mathbf{T}$ são os cossenos diretores dos vetores que formam os lados do elemento de membrana e os ângulos γ e β são os apresentados na Figura 3.6.

Pode-se demonstrar que $\boldsymbol{\varepsilon}_n$ e $\boldsymbol{\sigma}_n$ são energeticamente conjugados (PAULETTI 2003). Para esta constatação, aplica-se o *Teorema dos Deslocamentos Virtuais*, ou seja, para qualquer campo de deslocamentos virtuais $\delta \mathbf{u}$ e correspondentes deformações virtuais $\delta \boldsymbol{\varepsilon}$, tem-se sempre:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} = \delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n \quad (3.23)$$

Introduzindo a equação (3.21) em (3.23), obtém-se:

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon}_n^T \boldsymbol{\sigma}_n = (\mathbf{T} \delta \boldsymbol{\varepsilon})^T \boldsymbol{\sigma}_n = \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}_n, \forall \delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.24)$$

Logo:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma}_n \quad (3.25)$$

Estabelecendo portanto a relação entre o vetor das tensões naturais $\boldsymbol{\sigma}_n$ e o vetor das tensões $\boldsymbol{\sigma}$. No MDFN as tensões $\boldsymbol{\sigma}$ são as tensões que são pretendidas como resultado, portanto são as tensões que devem ser impostas à superfície para busca da forma, então é conveniente reescrever a equação (3.25) em função de $\boldsymbol{\sigma}$, sendo:

$$\boldsymbol{\sigma}_n = \mathbf{T}^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (3.26)$$

PAULETTI e PIMENTA (2008) reconhecem que a imposição de $\boldsymbol{\sigma}$ é equivalente a imposição do Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff.

O vetor de tensões $\boldsymbol{\sigma}$ é obtido através do equilíbrio do estado plano de tensões, como mostra a figura 3.8 e a equação (3.27).

Figura 3.8 - Equilíbrio do estado plano de Tensões.

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta)^2 & (\sin \theta)^2 & \sin \theta \cos \theta \\ (\sin \theta)^2 & (\cos \theta)^2 & -\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

Por simplicidade, impõe-se as tensões principais na superfície. Pode-se então reescrever a equação (3.27) como sendo:

$$\begin{bmatrix} \bar{\sigma}_x \\ \bar{\sigma}_y \\ \bar{\tau}_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\cos \theta)^2 & (\sin \theta)^2 \\ (\sin \theta)^2 & (\cos \theta)^2 \\ -\sin \theta \cos \theta & \sin \theta \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sigma_I \\ \sigma_{II} \end{bmatrix} \quad (3.28)$$

O ângulo θ é definido através da escolha apropriada de um plano diretor Π que intercepta a superfície da membrana Ω^e , conforme figura 3.9.

Figura 3.9 - Definição das direções principais através do plano diretor Π (PAULETTI 2011).

Considerando-se um vetor $\mathbf{n} \perp \Pi$ e o vetor unitário das coordenadas do sistema local do elemento $(\hat{\mathbf{i}}, \hat{\mathbf{j}}, \hat{\mathbf{k}})$, com $\hat{\mathbf{k}} \perp \Omega$, as direções principais são dadas pelos vetores unitários descritos nas equações (3.29) e (3.30) e o ângulo de rotação θ é apresentado na equação (3.31).

$$\hat{\mathbf{i}}' = \hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n} / \|\hat{\mathbf{k}} \times \mathbf{n}\| \quad (3.29)$$

$$\hat{\mathbf{j}}' = \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}}' \quad (3.30)$$

$$\theta = \arcsin\left(\left(\hat{\mathbf{i}}' \times \hat{\mathbf{i}}\right) \cdot \hat{\mathbf{k}}\right) \quad (3.31)$$

Observa-se que para um campo isótopo de tensões, ou seja, $\sigma_I = \sigma_{II}$ o ângulo θ não tem influência, portanto, as tensões impostas serão diretamente as tensões principais.

Para determinar a matriz de rigidez dos elementos é conveniente reescrever o vetor das forças internas em termos das Forças Naturais N_i . A Figura 3.10 e a equação (3.32) apresentam o equilíbrio das forças Naturais nos nós do elemento. Cada força Natural é relacionada ao respectivo vetor $\mathbf{v}_i$, conforme os lados do elemento.

Figura 3.10 - Forças nodais internas.

$$\mathbf{p}^e = \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \\ \mathbf{p}_3^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_2 \mathbf{v}_2^e - N_3 \mathbf{v}_3^e \\ N_3 \mathbf{v}_3^e - N_1 \mathbf{v}_1^e \\ N_1 \mathbf{v}_1^e - N_2 \mathbf{v}_2^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_3^e) - \frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) \\ \frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) - \frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) \\ \frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) - \frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_3^e) \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

Define-se então o vetor das Densidades de Força Natural, dado por:

$$\mathbf{n} = \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{N_1}{\ell_1} & \frac{N_2}{\ell_2} & \frac{N_3}{\ell_3} \end{bmatrix}^T = \mathcal{L}^{-1} \mathbf{N} \quad (3.33)$$

Considerando-se a equação (3.26) e a equação $N_i = n_i \ell_i$, reescreve-se a equação (3.18) como sendo:

$$n = V \mathcal{L}^{-2} \mathbf{T}^T \boldsymbol{\sigma} \quad (3.34)$$

Onde o vetor das densidades de força natural n depende somente das características geométricas do elemento e da tensão aplicada.

A equação (3.32) pode então ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}^e &= \begin{bmatrix} n_2(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_3^e) - n_3(\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) \\ n_3(\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) - n_1(\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) \\ n_1(\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) - n_2(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_3^e) \end{bmatrix} = \\ &= \begin{bmatrix} (n_2 + n_3)\mathbf{I}_3 & -n_3\mathbf{I}_3 & -n_2\mathbf{I}_3 \\ -n_3\mathbf{I}_3 & (n_1 + n_3)\mathbf{I}_3 & -n_1\mathbf{I}_3 \\ -n_2\mathbf{I}_3 & -n_1\mathbf{I}_3 & (n_1 + n_2)\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^e \\ \mathbf{x}_2^e \\ \mathbf{x}_3^e \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.35)$$

Reconhecendo-se em (3.35) a matriz de rigidez do elemento triangular para o MDFN, dada por:

$$\mathbf{k}_d^e = \begin{bmatrix} (n_2 + n_3)\mathbf{I}_3 & -n_3\mathbf{I}_3 & -n_2\mathbf{I}_3 \\ -n_3\mathbf{I}_3 & (n_1 + n_3)\mathbf{I}_3 & -n_1\mathbf{I}_3 \\ -n_2\mathbf{I}_3 & -n_1\mathbf{I}_3 & (n_1 + n_2)\mathbf{I}_3 \end{bmatrix} \quad (3.36)$$

Com o MDFN, a busca de forma de uma estrutura retesada torna-se um problema de ordem linear. Considerando-se um elemento genérico de uma estrutura, tem-se:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{k}_d^e \mathbf{x}^e \quad (3.37)$$

Como no método dos elementos finitos, as incidências nodais de cada elemento contribuem para formação da matriz de rigidez global. Considerando a relação do vetor das coordenadas nodais de cada elemento e do vetor de coordenadas globais da estrutura, tem-se:

$$\mathbf{x}^e = \mathbf{A}^e \mathbf{x} \quad (3.38)$$

Onde, $\mathbf{A}^e$ é o Operador Booleano que extrai as coordenadas de cada elemento, do vetor de coordenadas globais $\mathbf{x}$.

$$\mathbf{F} = \sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} \mathbf{p}^e = \mathbf{K}_d \mathbf{x} \quad (3.39)$$

$\mathbf{F}$ é o vetor de carregamentos, que inclui as reações dos nós com deslocamentos prescritos e as ações externas atuantes. $\mathbf{K}_d$ é a matriz de rigidez da estrutura para o MDFN, dada por:

$$\mathbf{K}_d = \sum_{e=1}^b \mathbf{A}^{eT} \mathbf{k}_d^e \mathbf{A}^e \quad (3.40)$$

A resolução da equação (3.39) fornece a posição dos nós na configuração viável. Como a matriz de rigidez de cada elemento depende somente da posição inicial de seus nós, a configuração de referência pode ser bastante arbitrária.

4. ELEMENTO QUADRANGULAR

O elemento quadrangular que será utilizado neste trabalho é baseado no elemento triangular do MDFN, proposto por PAULETTI (2006), compreendendo duas camadas de elementos triangulares, que serão denominados "subelementos" do elemento quadrangular, sendo que cada camada tem metade da espessura do elemento.

As coordenadas nodais, os lados e as diagonais consideradas para o elemento são definidas na figura 4.1 e na equação (4.1).

$$\begin{aligned}
 \ell_1 &= \|\mathbf{l}_1\| = \|\mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1\| \\
 \ell_2 &= \|\mathbf{l}_2\| = \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2\| \\
 \ell_3 &= \|\mathbf{l}_3\| = \|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_3\| \\
 \ell_4 &= \|\mathbf{l}_4\| = \|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_4\| \\
 \ell_5 &= \|\mathbf{l}_5\| = \|\mathbf{x}_4 - \mathbf{x}_2\| \\
 \ell_6 &= \|\mathbf{l}_6\| = \|\mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1\|
 \end{aligned} \tag{4.1}$$

Figura 4.1 - Camadas do elemento quadrangular.

Os vetores unitários paralelos aos lados do elemento são dados por $\mathbf{v}_i = \mathbf{l}_i / \|\mathbf{l}_i\|$, com $i = 1, 2, 3, 4, 5, 6$.

O sistema local do elemento é definido por um chapéu superior, a direção do eixo $\hat{x}$ é definida pela reta que liga o centroide do elemento ao ponto central do lado 2. O

eixo $\hat{z}$ é perpendicular à superfície no ponto do centroide e é definido pela regra da mão direita, considerando-se o eixo $\hat{x}$ e a reta definida entre o centroide e o ponto central do lado 3. O eixo $\hat{y}$ é ortonormal aos eixos $\hat{x}$ e $\hat{z}$.

A figura 4.2 apresenta os eixos locais descritos acima. Por conveniência, estes eixos foram definidos conforme os eixos locais padrões do elemento SHELL181, que é um elemento finito quadrangular do programa Ansys muito utilizado na modelagem de estruturas retesadas.

Figura 4.2 - (a)Eixos locais do elemento quadrangular (b)Eixos locais do elemento SHELL181.

Usando o elemento dividido em quatro partes, cada uma das partes é formada por um plano diferente e as tensões são impostas separadamente em cada subelemento. Um dos problemas de simular o elemento composto por quatro nós utilizando esta abordagem, é que os quatro nós do elemento podem não estar no mesmo plano, ou seja, a superfície formada pela camada superior pode não ser a mesma formada pela camada inferior, como mostra a figura 4.3.

Figura 4.3 - Não conformidade no elemento quadrangular.

Esta não conformidade cria uma dificuldade na definição do campo de tensões no interior do elemento. Neste trabalho demonstra-se que os resultados numéricos são satisfatórios quando se adota a tensão resultante no elemento quadrangular como uma média entre as tensões resultantes de cada subelemento.

Os subelementos são então tratados individualmente como elementos triangulares do MDFN. Os nós e os lados de cada subelemento são numerados conforme o método original, sendo os lados virados para os nós de mesmo número, conforme mostra a figura 4.4.

Figura 4.4 - Partes do elemento quadrangular.

Na figura 4.4 os nós do elemento quadrangular são relacionados com os nós dos subelementos conforme descrito na tabela 4.1.

Nós	Subelementos			
	a	b	c	d
1	3	-	2	1
2	1	2	3	-
3	-	3	1	2
4	2	1	-	3

Tabela 4.1- Relação entre os nós do elementos e dos subelementos.

Os lados são relacionados conforme as igualdades (4.2).

$$\begin{aligned}
 \ell_1 &= \ell_{2a} = \ell_{1c} \\
 \ell_2 &= \ell_{1b} = \ell_{2c} \\
 \ell_3 &= \ell_{2b} = \ell_{1d} \\
 \ell_4 &= \ell_{1a} = \ell_{2d} \\
 \ell_5 &= \ell_{3a} = \ell_{3b} \\
 \ell_6 &= \ell_{3c} = \ell_{3d}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

Cada subelemento tem seu próprio sistema de coordenada local, conforme mostra a figura 4.5. Os eixos locais $\tilde{x}_\alpha$ são paralelos às diagonais do elemento quadrangular e orientados do nó 1_α para o nó 2_α , o índice α representa cada um dos subelementos, ou seja $\alpha = a, b, c, d$. Os eixos $\tilde{z}_\alpha$ são perpendiculares à superfície do subelemento.

Figura 4.5 - Sistemas de coordenadas locais dos subelementos do elemento quadrangular.

As forças naturais $N_{i\alpha}$, paralelas aos lados dos subelemento, são determinadas da mesma forma que no MDFN original, portanto a equação (3.18) pode ser reescrita como:

$$\mathbf{N}_\alpha = V_\alpha (\mathcal{L}_\alpha)^{-1} \boldsymbol{\sigma}_n = V_\alpha (\mathcal{L}_\alpha)^{-1} (\mathbf{T}_\alpha)^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.3)$$

Onde V_α é o volume, $\mathbf{T}_\alpha$ é a matriz de transformação dada na equação (3.22) e $\mathcal{L}_\alpha$ é a matriz diagonal que contém o comprimento dos lados para cada subelemento.

As forças internas nodais dos subelementos e sua relação com os vetores unitários do elemento é apresentada na figura 4.6.

Figura 4.6 - Forças internas nodais dos subelementos e vetores unitários do elemento.

A equação (3.34) que descreve as densidades de força natural, pode ser reescrita como:

$$\mathbf{n}_\alpha = [\mathbf{n}_{1\alpha} \quad \mathbf{n}_{2\alpha} \quad \mathbf{n}_{3\alpha}] = V_\alpha (\mathcal{L}_\alpha)^{-2} (\mathbf{T}_\alpha)^{-T} \boldsymbol{\sigma} \quad (4.4)$$

São encontradas portanto 3 densidades de força para cada subelemento, totalizando 12 densidades de força. Cada lado do elemento quadrangular é repetido duas vezes para formação dos subelementos, portanto, cada lado está associada a 2 densidades de força, que devem ser somadas para formulação da densidade total do lado. Considera-se então a contribuição de cada um dos subelementos, obtendo-se o vetor das densidades de força natural para o elemento quadrangular, dado por:

$$\mathbf{n} = [n_1 \quad n_2 \quad n_3 \quad n_4 \quad n_5 \quad n_6]^T \quad (4.5)$$

Onde:

$$\begin{aligned} n_1 &= n_{2a} + n_{1c} \\ n_2 &= n_{1b} + n_{2c} \\ n_3 &= n_{2b} + n_{1d} \\ n_4 &= n_{1a} + n_{2d} \\ n_5 &= n_{3a} + n_{3b} \\ n_6 &= n_{3c} + n_{3d} \end{aligned} \quad (4.6)$$

Para formulação da matriz de rigidez, toma-se os vetores unitários e as forças nodais resultantes no elemento quadrangular, apresentadas na figura 4.7 e na equação (4.7).

Figura 4.7 - Forças nodais internas.

$$\begin{aligned}
 \mathbf{p}^e &= \begin{bmatrix} \mathbf{p}_1^e \\ \mathbf{p}_2^e \\ \mathbf{p}_3^e \\ \mathbf{p}_4^e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} N_4 \mathbf{v}_4^e - N_1 \mathbf{v}_1^e - N_6 \mathbf{v}_6^e \\ N_1 \mathbf{v}_1^e - N_2 \mathbf{v}_2^e - N_5 \mathbf{v}_5^e \\ N_6 \mathbf{v}_6^e + N_2 \mathbf{v}_2^e - N_3 \mathbf{v}_3^e \\ N_5 \mathbf{v}_5^e + N_3 \mathbf{v}_3^e - N_4 \mathbf{v}_4^e \end{bmatrix} = \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{N_4}{\ell_4} (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_4^e) - \frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) - \frac{N_6}{\ell_6} (\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_1^e) \\ \frac{N_1}{\ell_1} (\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) - \frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) - \frac{N_5}{\ell_5} (\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_2^e) \\ \frac{N_6}{\ell_6} (\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_1^e) + \frac{N_2}{\ell_2} (\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) - \frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_3^e) \\ \frac{N_5}{\ell_5} (\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_2^e) + \frac{N_3}{\ell_3} (\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_3^e) - \frac{N_4}{\ell_4} (\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_4^e) \end{bmatrix} \quad (4.7)
 \end{aligned}$$

Considerando que $N_i = n_i \ell_i$, pode-se reescrever a equação (4.7) como sendo:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}^e &= \begin{bmatrix} n_4(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_4^e) - n_1(\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) - n_6(\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_1^e) \\ n_1(\mathbf{x}_2^e - \mathbf{x}_1^e) - n_2(\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) - n_5(\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_2^e) \\ n_6(\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_1^e) + n_2(\mathbf{x}_3^e - \mathbf{x}_2^e) - n_3(\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_3^e) \\ n_5(\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_2^e) + n_3(\mathbf{x}_4^e - \mathbf{x}_3^e) - n_4(\mathbf{x}_1^e - \mathbf{x}_4^e) \end{bmatrix} = \\
&= \begin{bmatrix} (n_1 + n_4 + n_6)\mathbf{I} & -n_1\mathbf{I} & -n_4\mathbf{I} & -n_6\mathbf{I} \\ -n_1\mathbf{I} & (n_1 + n_2 + n_5)\mathbf{I} & -n_2\mathbf{I} & -n_5\mathbf{I} \\ -n_2\mathbf{I} & -n_3\mathbf{I} & (n_2 + n_3 + n_6)\mathbf{I} & -n_6\mathbf{I} \\ -n_3\mathbf{I} & -n_4\mathbf{I} & -n_5\mathbf{I} & (n_3 + n_4 + n_5)\mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1^e \\ \mathbf{x}_2^e \\ \mathbf{x}_3^e \\ \mathbf{x}_4^e \end{bmatrix} \quad (4.8)
\end{aligned}$$

Reconhecendo em (4.8) a matriz de rigidez do elemento quadrangular para o MDFN, dada por:

$$\mathbf{k}_d^e = \begin{bmatrix} (n_1 + n_4 + n_6)\mathbf{I} & -n_1\mathbf{I} & -n_4\mathbf{I} & -n_6\mathbf{I} \\ -n_1\mathbf{I} & (n_1 + n_2 + n_5)\mathbf{I} & -n_2\mathbf{I} & -n_5\mathbf{I} \\ -n_2\mathbf{I} & -n_3\mathbf{I} & (n_2 + n_3 + n_6)\mathbf{I} & -n_6\mathbf{I} \\ -n_3\mathbf{I} & -n_4\mathbf{I} & -n_5\mathbf{I} & (n_3 + n_4 + n_5)\mathbf{I} \end{bmatrix} \quad (4.9)$$

Recordando (3.37), existe uma relação linear entre o vetor de forças naturais $\mathbf{p}^e$ e as coordenadas do elemento $\mathbf{x}^e = [\mathbf{x}_1 \quad \mathbf{x}_2 \quad \mathbf{x}_3 \quad \mathbf{x}_4]^T$, dada por:

$$\mathbf{p}^e = \mathbf{k}_d^e \mathbf{x}^e \quad (4.10)$$

O restante do procedimento é análogo ao MDFN original, criando-se uma matriz de rigidez global e um vetor de carregamentos para toda a estrutura. A resolução deste sistema linear fornece a posição dos nós na configuração viável.

Para determinação das tensões resultantes no elemento quadrangular, toma-se a configuração viável obtida, calculando-se o Tensor das Tensões de Cauchy atuantes em cada subelemento, dado por:

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = (\mathbf{T}_\alpha)^T (\mathcal{L}_\alpha)^2 (V_\alpha)^{-1} [\mathbf{n}_{1\alpha} \quad \mathbf{n}_{2\alpha} \quad \mathbf{n}_{3\alpha}]^T \quad (4.11)$$

Obtendo-se os vetores $\boldsymbol{\sigma}_a$, $\boldsymbol{\sigma}_b$, $\boldsymbol{\sigma}_c$ e $\boldsymbol{\sigma}_d$. Todos os vetores encontrados estão descritos da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = [\sigma_x^\alpha \quad \sigma_y^\alpha \quad \tau_{xy}^\alpha]^T \quad (4.12)$$

Os vetores do estado plano são reescritos conforme equação (4.13).

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha = \begin{bmatrix} \sigma_x^\alpha & \tau_{xy}^\alpha & 0 \\ \tau_{xy}^\alpha & \sigma_y^\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (4.13)$$

As tensões encontradas são transformadas para o sistema local do elemento, descrito na figura 4.2. Realiza-se então uma média entre as tensões, como descrito na equação (4.14).

$$\boldsymbol{\sigma} = \sum \left(A_\alpha (\mathbf{R}_\alpha)^T \boldsymbol{\sigma}_\alpha \mathbf{R}_\alpha \right) / (A^e) \quad (4.14)$$

Onde:

$$\mathbf{R}_\alpha = [\tilde{\mathbf{e}}_1^\alpha \quad \tilde{\mathbf{e}}_2^\alpha \quad \tilde{\mathbf{e}}_3^\alpha]^T [\hat{\mathbf{e}}_1 \quad \hat{\mathbf{e}}_2 \quad \hat{\mathbf{e}}_3] \quad (4.15)$$

$$A^e = \sum A_\alpha \quad (4.16)$$

Na equação (4.15), $\tilde{\mathbf{e}}_i^\alpha$ e $\hat{\mathbf{e}}_i$ são os versores dos eixos dos sistemas locais dos subelementos e do elemento quadrangular respectivamente, com $i = 1, 2, 3$ e o índice α que representa os quatro subelementos.

O Tensor encontrado é uma boa aproximação da tensão que deve ser aplicada ao elemento para o equilíbrio da superfície analisada. No próximo capítulo são apresentados exemplos que mostram, conforme esperado, que ao se importar para o software Ansys a geometria encontrada através do MDFN, aplicando-se a tensão definida na equação (4.14), os deslocamento encontrados em relação à geometria importada são muito pequenos, bem como o valor encontrado para as tensões principais são praticamente os mesmos dos valores iniciais impostos.

5. APLICAÇÕES PARA O ELEMENTO QUADRANGULAR

Para implementação da teoria apresentada no capítulo 4, desenvolveu-se uma sub-rotina de programação em linguagem Matlab, partindo da rotina de programação já existente para o MDFN. Os resultados encontrados através desta programação, são tratados neste capítulo como resultados do MDFN. As coordenadas dos nós e as tensões nos elementos obtidas via MDFN são inseridas no software Ansys para comparação e validação dos resultados.

5.1. Busca de formas

A principal aplicação do MDFN é a busca de formas de estruturas. A figura 5.1 apresenta alguns exemplos de superfícies geradas através do MDFN utilizando elementos quadrangulares partindo de uma mesma malha, apenas deslocando diferentes nós como apoio e impondo diferentes campos de tensão.

Figura 5.1 - Formas diversas geradas a partir de uma malha genérica via MDFN.

5.2. Análise de tensões

Para análise das tensões serão utilizados exemplos simples de membranas com solução conhecida. O primeiro exemplo analisa essencialmente o comportamento do elemento quadrangular e da formulação proposta pra descrevê-lo. Aplica-se um campo

isótopo de tensões a uma malha de elementos, analisando os resultados para a primeira iteração do MDFN. É importante ressaltar que como o MDFN é linear, a solução encontrada para qualquer iteração é uma solução de equilíbrio.

Nos três primeiros exemplos modela-se a mesma membrana para 3 diferentes malhas (todas com 10x10m), avaliando o comportamento de cada uma delas e as diferentes respostas obtidas. As duas primeiras malhas são compostas por elementos triangulares dispostos de maneira diferente e a terceira malha é composta por elementos quadrangulares, conforme descrito na figura 5.2.

Figura 5.2 - (a)Malha com elementos triangulares (modelo 1); (b)Malha com elementos triangulares (modelo 2); (c)Malha de elementos quadrangulares(modelo 3).

5.2.1. Membrana anticlástica com tensões isotrópicas

O primeiro exemplo é uma membrana anticlástica com ponto de sela, sendo as bordas formadas por cabos de aço flexíveis. A fixação da estrutura dá-se pelos quatro vértices da membrana, onde dois apoios são deslocados para cota $z=3\text{m}$ e dois apoios são mantidos na cota $z=0$. Os demais pontos estão inicialmente no plano xy (cota $z=0$).

É aplicada à membrana da figura 5.2, uma distribuição isotrópica e uniforme de tensões, sendo o Segundo Tensor de Piola-Kirchhoff dado por $\sigma_0 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \text{MPa}$. A curvatura da borda é equivalente à tensão de retesamento aplicada ao cabo, ou seja, à densidade de força.

O modelo utilizado pelo MDFN é um modelo imaterial, portanto a forma a ser obtida não depende das propriedades dos materiais, sendo vinculada totalmente à matriz de rigidez geométrica da superfície, contudo, ao se importar a geometria resultante para o programa Ansys é necessário que os materiais do modelo sejam definidos.

Considera-se então uma membrana de 1mm de espessura, material isótropo linear com Módulo de Young $E = 3 \times 10^3 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\mu = 0$. O cabo de borda tem diâmetro $\varphi = 25,4 \text{ mm}$, $E = 1.8 \times 10^8 \text{ MPa}$ e $\mu = 0,3$ sendo também um material elástico linear.

Como esperado, a distribuição de tensões conduz o ponto central da membrana à uma altura média entre os apoios superiores e inferiores. Os resultados apresentados na figura 5.3 são referentes à primeira iteração do método, ressaltando-se que quando as tensões são sucessivamente aplicadas de maneira isótropa em uma superfície, o MDFN converge para uma superfície mínima, como será visto no exemplo 3.

Figura 5.3 - (a)Configuração viável para o Modelo 1; (b)Configuração Viável para o Modelo 2; (c)Configuração viável para o Modelo 3.

As geometrias obtidas foram inseridas no Ansys e o resultado para o campo das normas dos deslocamentos nodais é apresentado na figura 5.4.

Figura 5.4 - Resultados para o campo das normas dos deslocamentos nodais no Ansys (unidade em metros): (a)Modelo 1; (b)Modelo 2;(c)Modelo 3.

Considera-se que o campo dos deslocamentos é pequeno em relação à superfície da membrana (aproximadamente 1cm) e portanto é aceitável. Todas as 3 malhas tem comportamento parecido e os resultados são muito próximos, portanto não haveria empecilhos na utilização do elemento quadrangular.

As tensões encontradas via MDFN também foram inseridas no programa Ansys e os resultados são apresentados na figura 5.5. Os valores demonstrados, são referentes a Primeira Tensão Principal atuante nos elementos, para cada um dos modelos. Na primeira coluna são apresentados os resultados obtidos via MDFN e na segunda coluna os resultados obtidos via Ansys após o equilíbrio da superfície. Conforme esperado, os resultados para as tensões encontradas em cada modelo são muito próximos aos respectivos valores obtidos via Ansys. Existem algumas pequenas diferenças ligados ao fato do Ansys considerar a rigidez dos materiais que é desprezada no MDFN.

No entanto, ao comparar os diferentes modelos entre si, nota-se que existem algumas diferenças nas regiões de máxima tensão. O modelo 1 tem $\sigma_1 = 1,39MPa$ para os apoios superiores e $\sigma_1 = 1,43MPa$ para os apoios inferiores, enquanto no modelo 2 ocorre o contrário, isto acontece pois os elementos chegam de forma diferente no nó do apoio, onde ocorre a máxima tensão, existindo uma assimetria no comportamento das tensões conforme a escolha da malha quando composta por elementos triangulares. O modelo 3 apresenta $\sigma_1 = 1,39MPa$ para os 4 apoios, pois como todos os elementos estão disposto de maneira igual nos apoios, o valor das tensões nos elementos iguala-se. Além das regiões de máxima tensão, ainda que os valores de tensão sejam muito próximos, é possível verificar uma tendência de comportamento para as malhas de elementos triangulares, enquanto a malha de elementos quadrangulares apresenta-se simétrica.

Figura 5.5 - Comparação entre os Campos Primeira Tensão Principal: Resultados MDFN/Resultados Ansys - (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3

5.2.2. Membrana anticlástica com tensões ortótropas

Para o segundo exemplo, considerando uma aplicação prática da membrana do exemplo 1, muitas vezes é interessante que a mesma tenha um pé-direito maior, criando um espaço interno maior, além do fato de reduzir a região de pouca declividade no centro da membrana (característica de superfícies mínimas), evitando possíveis acúmulos de água. Para obter-se uma configuração viável com tais características é necessária a imposição de um campo ortótropo de tensões na membrana.

O exemplo 2 traz a mesma membrana submetida à um campo de tensões com $\sigma_0 = [3 \ 1 \ 0]^T MPa$. A figura 5.6 apresenta os resultados obtidos para as configurações viáveis nos 3 modelos, para a primeira iteração do MDFN.

Figura 5.6 - Configurações viáveis: (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.

As geometrias obtidas foram inseridas no programa Ansys e os resultados são apresentados na figura 5.7.

Figura 5.7 - Resultados para o campo das normas do deslocamento. Ansys (unidade em metros):
(a)Modelo 1; (b) Modelo 2;(c) Modelo 3.

Pela figura 5.7, nota-se que os deslocamentos para as malhas de elementos triangulares (0,65cm) são menores que os deslocamentos para a malha de elementos quadrangulares (7,5cm no pior caso), no entanto este deslocamento maior ocorre em somente duas regiões da membrana, sendo que no restante da superfície os deslocamentos são de ordem de grandeza 10 vez menor (0,8cm). Esta dificuldade no ajuste da malha está associada à região da membrana que tem uma não conformidade maior na superfície do elemento, com o refinamento da malha nesta região a tendência é que estas divergências diminuam. Além disto, o Ansys é um modelo material, possuindo variáveis relacionadas à escolha do material, o que não é previsto pelo MDFN. Como exemplo, para um mesmo campo de tensões com um cabo de borda mais rígido, os resultados seriam diferentes para o campo de deslocamentos.

Ao analisar a aplicação prática da membrana, considera-se que os valores encontrados para o campo de deslocamentos são pequenos e portanto aceitáveis.

A figura 5.8 mostra que os resultados para a Primeira Tensão Principal (na primeira coluna resultados via MDFN e na segunda coluna resultados via Ansys), obtidos nos modelos do Ansys são muito próximos aos modelos do MDFN. Neste exemplo também aparece a assimetria no comportamento das tensões para as malhas de elementos triangulares modeladas de formas diferentes, observa-se que o modelo 1, tem dois elementos próximos à cada apoio superior, e ambos tem $\sigma_I = 4,49MPa$, já o modelo 2 tem somente um elemento fixo ao nó do apoio e este apresenta $\sigma_I = 5,10MPa$. O elemento quadrangular por sua vez, acaba sendo uma média entre esses 4 elementos triangulares (através de seus subelementos) e possui $\sigma_I = 4,54MPa$. Ao trabalhar-se portanto com uma malha triangular, torna-se importante analisar como serão dispostos os elementos a fim de reduzir estas assimetrias.

Figura 5.8 - Primeira Tensão Principal: Resultados MDFN/Resultados Ansys - (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.

Por fim, conclui-se que o elemento quadrangular proposto gera boas formas para membranas e a maneira de estimar as tensões conduz a bons resultados, visto que são resultados muito parecidos com os resultados apresentados nos modelos simulados no programa Ansys.

5.3. Busca de superfícies mínimas

Sabendo-se que o MDFN resulta em uma superfície mínima após algumas iterações, para o terceiro exemplo utiliza-se a mesma membrana dos exemplos anteriores e aplica-se sucessivamente um campo isótropo de tensões, atualizando a geometria obtida em cada iteração. Os resultados são apresentados para a décima iteração do MDFN, a partir da qual entende-se que o objetivo de buscar uma superfície mínima foi atingido, visto que o campo de tensões resultantes é um campo isótropo e uniforme, característico das superfícies mínimas.

No quarto exemplo, estuda-se o limite de Goldschmidt para a altura de conóides. Mostra-se que o elemento quadrangular atende bem a uma referência da literatura, na qual para uma determinada superfície do conóide existe um limite de altura, a partir do qual não é possível encontrar uma superfície mínima. São analisados dois modelos de conóides com alturas muito próximas, porém uma delas ultrapassa o limite de Goldschmidt não sendo possível encontrar uma solução para a superfície. No entanto, se o valor adotado para a relação entre a altura e o raio do conóide é muito próxima ao limite de Goldschmidt, são necessárias muitas iterações para mostrar que o modelo não conduz à uma superfície mínima, porém se o valor desta relação é alto, como será visto, rapidamente o modelo tende à tensões infinitas.

O quinto exemplo reproduz o estudo feito em PAULETTI (2011) (com elementos triangulares), comparando as diferentes geometrias para conóides minimais e não-minimais, bem como a relação existente para as tensões principais.

O último exemplo apresenta a *Superfície de Costa*, modelada com uma malha composta de elementos quadrangulares e triangulares. Mostra-se então a possibilidade de trabalhar com elementos diferentes no MDFN. O mesmo exemplo pode ser

encontrado em PAULETTI (2011) para uma malha composta exclusivamente de elementos triangulares.

5.3.1. Membrana anticlástica

A figura 5.9 apresenta os resultados da mesma membrana do exemplo 1, após 10 iterações do MDFN. Mostra-se que os três modelos convergem para uma superfície mínima.

Figura 5.9 - Configurações viáveis: (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.

A figura 5.10 apresenta os resultados para a norma dos deslocamentos da estrutura no programa Ansys. Em todos os modelos o campo dos deslocamentos é muito pequeno, sendo os valores máximos de 0,87cm.

Figura 5.10 - Resultados para o campo das normas dos deslocamentos nodais no Ansys (unidade em metro): (a)Modelo 1; (b)Modelo 2;(c)Modelo 3.

As tensões resultantes nos três modelos são apresentadas na figura 5.11. Os valores máximos e mínimos obtidos para a Primeira Tensão Principal são praticamente os mesmos em todos os modelos $\sigma_1 \cong 1MPa$, no entanto, observa-se certa assimetria nos modelos 1 e 2, enquanto o modelo 3 apresenta tensões uniformes.

Figura 5.11 - Campo de tensões: Primeira tensão Principal - Comparação entre modelos do MDFN e do Ansys: (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.

O valor da razão entre as Tensões Principais ($S1/S2$), apresentado na figura 5.12, é de $\sigma_I/\sigma_{II} \cong 1$, o que caracteriza que todos os modelos resultam em uma superfície mínima. Observa-se também a assimetria de comportamento das tensões nos modelos com elementos triangulares.

Figura 5.12 - Campo de tensões: Razão entre as tensões Principais - Modelos do MDFN (a)Modelo 1; (b)Modelo 2; (c)Modelo 3.

O elemento quadrangular mostra-se eficiente na busca de uma membrana mínima, visto que apresenta um campo uniforme e isótropo de tensões.

5.3.2. Conóides - Limite de Goldschmidt

No próximo exemplo, realiza-se a busca da superfície mínima de um conóide com anéis de diâmetros iguais. A geometria do conóide é formado pela geratriz da catenóide dada por:

$$y = a \cosh\left(\frac{z}{a}\right) \quad (5.1)$$

Para que seja possível obter-se uma superfície mínima em um conóide, o limite de Goldschmidt (GOLDSCHMIDT 1831) estabelece que a relação entre a altura e o raio do conóide (figura 5.13), não pode ser superior à apresentada na equação (5.2).

Figura 5.13 - (a)Vista 3D - Conóide; (b)Elevação Conóide.

$$h \leq h_{\lim} \cong 1,3255r \quad (5.2)$$

São modelados dois exemplos de conóides com 5m de raio. O modelo 1 tem uma altura de 6,6m ($h = 1,32r$) e o modelo 2 tem uma altura de 6,65m ($h = 1,33r$).

Conforme esperado o modelo 1 converge para uma superfície mínima e para o modelo 2 não existe solução mínima.

A figura 5.14 apresenta os resultados obtidos na geometria do conóide para algumas iterações do MDFN, acompanhando as modificações que ocorrem em sua forma.

Figura 5.14 - (a)Geometria inicial - Conóide;(b)Formas obtidas e tensões σ_1 / σ_2 para o modelo 1 e modelo 2 após algumas iterações do MDFN.

Observa-se que para o modelo 2, a medida que as iterações aumentam, o conóide tem uma grande variação em sua geometria e as tensões tendem ao infinito, não sendo possível uma solução minimal. O modelo 1 converge para uma superfície mínima, visto que o campo de tensões é isótropo e uniforme.

A geometria do modelo 1 é então inserida no programa Ansys, verificando-se o deslocamento das coordenadas nodais e as Tensões Principais. Considera-se uma membrana de 1mm de espessura, material isótropo linear com Módulo de Young $E = 1 \times 10^3 \text{ MPa}$ e coeficiente de Poisson $\mu = 0$.

A figura 5.15 mostra que os deslocamentos nodais são muito pequenos e praticamente não há alteração da geometria encontrada no MDFN.

Figura 5.15 - Campo da norma dos deslocamentos nodais - conóide minimal.

A figura 5.16 apresenta a primeira tensão principal, confirmando que a superfície encontrada é uma superfície mínima, visto que apresenta um campo isotrópico de tensões.

Figura 5.16 - Primeira Tensão Principal (S1).

Como mencionado anteriormente, apesar da conclusão de que o modelo 2 diverge de uma superfície mínima, são necessárias muitas iterações para esta constatação (66 iterações no total), isto ocorre pois o valor da relação entre a altura e o raio do conóide é muita próxima ao limite de Goldschmidt. A Figura 5.17 apresenta dois conóides com

raio de 5m, o primeiro exemplo possui altura de 7,5m ($h = 1,5r$) e o segundo exemplo possui altura de 10m ($h = 2,0r$). No primeiro exemplo após 13 iterações, as tensões tendem ao infinito e no segundo exemplo, com apenas 6 iterações.

Figura 5.17 - Conóides: (a) $h = 1.5R$;(b) $h = 2.0R$.

5.3.3. Conóide minimal e não-minimal

O exemplo repete um modelo apresentado em PAULETTI (2011) para uma malha composta exclusivamente de elementos triangulares. Considerando um conóide com anel superior (1,5m) e inferior (5m) com uma altura de 3m. Comparam-se dois modelos de conóides, no primeiro aplica-se tensões principais que tenham uma relação de ($\sigma_I/\sigma_{II} = 3$) e no segundo modelo ($\sigma_I/\sigma_{II} = 1$). A figura 5.18 apresenta os resultados obtidos através do MDFN.

Figura 5.18 - (a)Conóide não-minimal (S1); (b)Conoide não-minimal (S1/S2); (c)Conóide minimal (S1); (d)Conoide minimal (S1/S2).

A figura 5.19 apresenta os resultados do Ansys para os modelos, mostrando que os resultados encontrados através do MDFN são satisfatórios. Os dados de entrada do modelo no Ansys são os mesmo utilizados no exemplo 4.

Figura 5.19 - Resultados Ansys (a)Conóide não-minimal; (b)Conoide minimal.

5.3.4. Superfície de Costa

No próximo exemplo é feita a busca de forma da Superfície de Costa, que é uma superfície mínima descoberta pelo brasileiro Celso Costa em 1982, como parte de sua tese de doutorado no IMPA. (COSTA 1982).

A malha é composta por elementos quadrangulares e triangulares, mostrando a possibilidade de utilizar os dois tipos de elementos em um mesmo modelo. Este exemplo já havia sido resolvido através do MDFN para uma malha composta exclusivamente por elementos triangulares, os resultados são apresentados em PAULETTI(2011).

Para busca da superfície mínima de Costa, impõe-se ao modelo um campo isotrópico de tensões $\sigma_0 = [1 \ 1 \ 0]^T MPa$. Foram analisados os resultados até a 10ª Iteração do MDFN, como a variação da geometria é pequena a figura 5.20 apresenta

somente a configuração viável para a 10ª Iteração, no entanto após a 6ª Iteração já é possível considerar que a solução convergiu, como mostra a figura 5.21.

Figura 5.20 - (a) Configuração inicial para a Superfície de Costa; (b)Configuração Viável para a Superfície de Costa.

Primeira Tensão Principal: min 1.0308 max 1.7824 Primeira Tensão Principal: min 1.0003 max 1.0135

Figura 5.21 - Razão entre as Tensões Principais; (a)1ª Iteração; (b)6ª Iteração; (c)10ª Iteração; (d)Resultados do Ansys (S1).

6. CONCLUSÕES

No trabalho realizou-se uma revisão sobre a busca de formas de superfícies através do Método de Densidades de Força (MDF) e do Método das Densidades de Força Natural (MDFN). As formulações apresentadas serviram como base para o objetivo do trabalho que é a extensão do MDFN para estruturas modeladas com malhas de elementos quadrangulares, visto que o método original restringia-se ao uso de malhas compostas exclusivamente por elementos triangulares.

Para a análise do elemento quadrangular proposto, foram realizados alguns exemplos comparativos entre malhas compostas por elementos quadrangulares e malhas compostas por elementos triangulares. Dentre os exemplos avaliados, realizou-se a busca de formas para membranas anticlásticas, submetidas a campos isótropos e ortótropos de tensões. Verificou-se que através do MDFN, após a imposição sucessiva de um campo isótropo de tensões, é possível encontrar uma superfície mínima. Foram verificados outros exemplos de superfície, dentre eles, conóides minimais e não-minimais e a superfície de Costa. Em alguns modelos comparativos, observou-se uma assimetria no comportamento das malhas de elementos triangulares, referentes à disposição dos elementos na superfície. As malhas de elementos quadrangulares apresentaram um comportamento homogêneo, o que torna a utilização do elemento quadrangular muito interessante. Para validação dos resultados, os modelos gerados via MDFN foram inseridos no programas Ansys, comparando-se os resultados para o campo de deslocamentos e o campo de tensões. Os resultados encontrados mostram que o MDFN gera superfícies viáveis com uma análise linear de equilíbrio sendo uma grande ferramenta para a busca de formas de superfícies e o elemento quadrangular proposto apresenta bons resultados, tanto para a forma da superfície, quanto para as tensões encontradas através do MDFN.

Por fim, conclui-se que o elemento proposto é uma boa alternativa para o tratamento de malhas formadas por elementos quadrangulares, sendo que atende muito bem ao principal requisito do MDFN que é a busca de formas para membranas contínuas.

Em continuidade a esta pesquisa, propõem-se alguns temas para trabalhos futuros:

- ✓ Procedimentos para o controle das distorções da malha;
- ✓ Refinamento da malha nas zonas de concentração de tensões;
- ✓ Extensão do MDFN para elementos tridimensionais, aproveitando a analogia com os elementos de minimização de volume propostos por ARCARO et al. (2013).

7. REFERÊNCIAS

ANSYS® Mechanical™ Student. Ansys, Inc. Release 15.0. 2013.

ARCARO, V.F. et. al. Finite elements for geometrical minimal shape. *Forma - Society for Science on Form*. Vol 28 (No. 1), pp 7-16, 2013.

ARGYRIS, J.H. et. al. Large natural strains and some special difficulties due to non-linearity and incompressibility in finite elements. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 4 p. 219–278, 1974.

ASSIS, Regina Guidon de. Um estudo sobre arquitetura Têxtil no Brasil: o segmento de mercado das estruturas tensionadas feitas com membranas de poliéster/PVC. 130f Dissertação (Mestrado em Ciências) - Programa de Pós Graduação Têxtil e Moda, Escola de Artes, Ciências e Humanidades da Universidade de São Paulo, 2012.

BARNES, M.R. Form-finding and analysis of tension space structures by dynamic relaxation, Ph.D. thesis, City University London, United Kingdom, 1977.

BASSO, P.; DEL GROSSO, A. Applications of a "Virtual" Force Density Method: Proceedings of the International Association of Shells and Spatial Structures (IASS), Valencia, 2009.

BASSO, P.; DEL GROSSO, A. Form-finding methods for structural frameworks: a review. In: Proceedings of the International Association of Shells and Spatial Structures, London, 2011.

BLETZINGER, K.-U.; RAMM, E. A general finite element approach to the form finding of tensile structures by the updated reference strategy. *International Journal of Space Structures* 14, p. 131–145, 1999.

BLETZINGER, K.-U. Section 12.2: Form finding and morphogenesis. In: I. Munga, J.F. Abel (Eds.), Fifty Years of Progress for Shell and Spatial Structures, Multi-Science, p. 459–482, 2011.

COSTA, C., Imersões minimais completas *em R^3 de gênero um e curvatura total finita*. Ph.D. Thesis (In Portuguese), IMPA, Rio de Janeiro, Brazil (1982).

FORSTER, B. Cable and membrane roofs-a historical survey. Structural Engineering Review 6 (3/4) 145-174, 1994.

GELLIN, S.; PAULETTI, R.M.O. Form finding of tensioned fabric cone structures using the natural force density method. IASS Symposium 2010 – Spatial Structures, Permanent and Temporary, Shanghai, 2010.

GELLIN, S. ; PAULETTI, R. M. O. Form Finding of Tensioned Fabric Cone Structures with Bi-Planar Symmetry using the Natural Force Density Method. In: IABSE-IASS Symposium - Taller, Longer, Lighter, Londres, 2011.

GOLDSCHMIDT C.W.B., Determinatio superficiei minimae rotatione curvae data duo puncta jungentis circa datum axem ortae, Gottingae, MDCCCXXXI. (1831).

GOLDSMITH, Nicholas S. Shape Finding or Form Finding, Proceeding of the IASS-SLSTE 2014 Symposium "Shells, Membranes and Spatial Structures: Footprints", Brasília, 2014.

GOLDSMITH, Nicholas S. The physical modeling legacy of Frei Otto, International Journal of Space Structures, 2016.

HABER, R.B.; ABEL, J.F. Initial equilibrium solution methods for cable reinforced membranes. Part I – Formulations. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering* 30, 263–284, 1982.

HAUG, E.; POWELL, G.H. Analytical shape finding for cable nets. In: *Proceedings of the IASS Pacific Symposium Part II on Tension Structures and Space Frames*, 1–5, Tokyo and Kyoto, Japan, pp. 83–92, 1972.

LEVY, R.; SPILLERS, W. R. Practical Methods of Shape-Finding for Membranes and Cable Nets. *Journal of Structural Engineering*, vol. 124, Issue 4, 1998.

LEWIS, W.J. The efficiency of numerical methods for the analysis of prestressed nets and pin-jointed frame structures. *Computers and Structures* 33, 791–800, 1989.

LEWIS, W.J. Computational form-finding methods for fabric structures. *Proceedings of the ICE – Engineering and Computational Mechanics* 161, 139–149, 2008.

LEWIS, W.J. *Tension structures. Form and Behaviour*. Thomas Telford, London, 2003.

LINKWITZ, K. New methods for the determination of cutting pattern of prestressed cable nets and their application to the Olympic Roofs Munich; *IASS Pacific Symposium on Tension Structures and Space Frames*, Tokyo, 1971.

LINKWITZ, K. Combined use of computation techniques and models for the process of form finding for prestressed nets, grid shells and membranes. In: *Proceedings of Internationalen Symposium Weitgespannte Flächentragwerke*, 1976.

MATLAB® Student. The MathWorks, Inc., version R2014b. 2014

MAURIN, B.; MOTRO, R. The surface stress density method as a form-finding tool for tensile membranes, *Engineering Structures* 20 p. 712-719, 1998.

MEEK, J. L. Computer Methods in Structural Analysis. E&FN Spon, London, 1991.

MEEK, J. L.; XIA, X. Computer shape finding of form structures. International Journal of Space Structures 14, 35–55, 1999.

MONTES Hernández E.; JURADAO-PINA, R.; Bayo, E. Topological Mapping for Tension Structures. Journal of Structural Engineering, 132(6), 970–977, 2006.

NOURI-BARANGER, T. Computational methods for tension-loaded structures. Archives of Computational Methods in Engineering 11, 143–186, 2004.

OLSSON, J. Form finding and size optimization: Implementation of beam elements and size optimization in real time form finding using dynamic relaxation, Chalmers University of Technology, Master's thesis, 2012.

PAULETTI, R.M.O. Tensoestruturas – Idéias Básicas. Escola Politécnica da USP, BT/PEF/9909, 1999.

PAULETTI, R. M. O. História, Análise e Projeto das Estruturas Retesadas. 2003. 257 p. Tese (Livre-Docência) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, SP, 2003.

PAULETTI, R. M. O.; BRASIL, Reyolando M L R F . Structural Analysis and construction of the Membrane roof of the Memorial dos Povos de Belém do Pará. In: II Simposio latinoamericano de tensoestruturas, 2005, Caracas.

PAULETTI, R.M.O. An extension of the force density procedure to membrane structures, in: Proceedings of the IASS Symposium/APCS Conference – New Olympics, New Shell and Spatial Structures, Beijing, 2006.

PAULETTI, R. M. O. and PIMENTA, P. M. The natural force density method for the shape finding of taut structures. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 2008.

PAULETTI, R. M. O., The Natural Force Density Method. In: IABSEIASS Symposium - Taller, Longer, Lighter, 2011, Londres. IABSEIASS Symposium - Taller, Longer, Kighter, 2011.

SCHEK, H.-J. The force density method for form finding and computation of general networks, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 3 (1974) 115–134.

SIEV, A.; EIDELMAN, J. Stress analysis of prestressed suspended roofs. Proc. American Society Civil Engineers 90(4), 103-101. 1964.

SILVA, C.A.B. Modelo computacional para análise da tensoestrutura de cobertura do Centro Comunitário da Universidade de Brasília. Dissertação de Mestrado em Estruturas e Construção Civil, Publicação E.DM-009A/06, Departamento de Engenharia Civil e Ambiental, Universidade de Brasília. Brasília : 2006. 79 p.

SOUZA, Diogo Carlos Bernardes de. Sobre a busca de superfícies minimais e seu emprego nas estruturas de membrana/D.C.B de Souza. - São Paulo, 2008. 116p.

SOUZA, M. S. V. ; PAULETTI, R. M. O. . Parametric design and optimization of shell structures using the Natural Force Density Method. In: IASS 2016 Tokyo Symposium: Spatial Structures in the 21st Century, 2016, Tokio. IASS 2016 Tokyo Symposium: Spatial Structures in the 21st Century. Madrid : IASS, 2016.

TAN, K.Y. The Computer Design of Tensile Membrane Structures, Ph.D. thesis, University of Queensland, Brisbane, Australia, 1989.

TAN, R. P. ; PAULETTI, R. M. O. . A comparison of alternative form finding methods in ixCube 4.10 program. In: ASS 2016 Tokyo Symposium: Spatial Structures in the 21st Century, 2016, Tokio. ASS 2016 Tokyo Symposium: Spatial Structures in the 21st Century. Madrid : IASS, 2016.

TIBERT, A.G.; PELLEGRINO, S. Review of form-finding methods for tensegrity structures. International Journal of Space Structures 18, 209–223, 2003.

VEENENDALL, D.; BLOCK, P. An overview and comparison of structural form finding methods for general networks. International Journal of Solids and Structures, 49, 3741-3753, 2012.

WENDLAND, David. Model-based form finding processes: Free Forms in Structural and Architectural Design, Stuttgart, 2000.