LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCOURT JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UMA PLATAFORMA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL E
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

**São Paulo
2009**

LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCOURT JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UMA PLATAFORMA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL E
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia.

**São Paulo
2009**

LUÍS ANTÔNIO GUIMARÃES BITENCOURT JÚNIOR

**DESENVOLVIMENTO DE UMA PLATAFORMA COMPUTACIONAL
PARA ANÁLISE VIA MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS DE
ESTRUTURAS DE CONCRETO ARMADO CONVENCIONAL E
REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO**

Dissertação apresentada à Escola Politécnica
da Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Mestre em Engenharia.

Área de Concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador:
Prof. Dr. Túlio Nogueira Bittencourt

**São Paulo
2009**

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 16 de julho de 2009.

Assinatura do autor Luís Bitencourt Jr.

Assinatura do orientador

FICHA CATALOGRÁFICA

Bitencourt Júnior, Luís Antônio Guimarães

Desenvolvimento de uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço / L. A.G. Bitencourt Júnior. -- ed.rev. -- São Paulo, 2009. 156p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1.Análise numérica 2.Método dos elementos finitos 3.Concreto reforçado com fibras I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica II.t.

*Aos meus pais pela educação.
À minha esposa Gleicy pelo amor, incentivo e
companhia ao longo destes anos.*

AGRADECIMENTOS

A Deus pela vida, pela família maravilhosa e por sempre estar ao meu lado.

Aos meus pais Luiz e Maria Benedita pelo apoio, confiança, ajuda e acima de tudo pela educação. Sem eles nada seria possível.

À minha esposa Gleicy por ter dividido os momentos mais difíceis e ter presença marcante ao longo destes anos. Sua participação foi fundamental para o término deste trabalho.

Ao amigo e orientador Prof. Túlio N. Bittencourt, pelas oportunidades, orientação, conselhos, incentivo e confiança em meu trabalho.

Ao amigo André Luís Gamino pela companhia nas programações efetuadas nos programas FEMOOP e GiD e sempre estar disposto a ajudar.

Aos professores Antonio Domingues de Figueiredo e João Carlos Della Bella por todas as contribuições no decorrer deste trabalho, especialmente no exame de qualificação.

A todos os docentes que contribuíram para minha formação, em especial ao Prof. Remo Magalhães de Souza, por ter me despertado para a pesquisa ainda na graduação e ter feito eu descobrir caminhos interessantes a serem traçados.

À Universidade de São Paulo (USP) e ao Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) por todo o suporte dado.

Aos amigos do Laboratório de Mecânica Computacional (LMC), e do Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto (GMEC) pela amizade e companhia durante todo esse período.

Aos meus sogros Jorge e Hélia, queridos pais que a vida me deu de presente.

Ao meu avô Manoel Neri Batista por todo apoio dado até hoje em minha formação e sempre acreditar em mim.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo auxílio financeiro.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS	III
LISTA DE TABELAS.....	VII
LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS	VIII
RESUMO	IX
ABSTRACT	X
1 INTRODUÇÃO.....	11
1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA	16
1.2 OBJETIVOS	18
1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO	19
2 O CONCRETO CONVENCIONAL E O REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO E ARMADURA PASSIVA.....	21
2.1 O CONCRETO	21
2.2 AS ARMADURAS PASSIVAS	24
2.3 A INTERAÇÃO AÇO-CONCRETO	26
2.4 A FISSURAÇÃO DO CONCRETO.....	27
2.5 O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO	28
2.5.1 Aplicações do CRFA.....	31
2.5.2 Fatores Influentes no Comportamento do CRFA.....	33
2.5.2.1 Interação Fibra-Matriz.....	35
2.5.2.2 Comprimento Crítico	38
2.5.2.3 Volume Crítico.....	39
2.5.3 Comportamento Mecânico do CRFA.....	40
3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À ANÁLISE NÃO-LINEAR	48
3.1 FORMULAÇÃO BÁSICA.....	50
3.2 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR	54
3.2.1 Método de Newton-Raphson	55
3.2.2 Critério de Convergência	57
3.3 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO E ARMADURA	58
3.3.1 Integração Numérica	60
3.4 REPRESENTAÇÃO DAS ARMADURAS VIA MEF.....	61
4 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO ARMADO E REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO.....	63
4.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO.....	64
4.1.1 Concreto Íntegro.....	64

4.1.2	<i>Critérios de Resistência para o Concreto</i>	66
4.1.2.1	<i>Critério de Resistência de Ottosen (1977)</i>	68
4.1.2.2	<i>Critério de Resistência de Willam-Warnke (1974)</i>	71
4.1.3	<i>Concreto Fissurado</i>	74
4.2	MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO.....	76
4.2.1	<i>Critério de Resistência de Willam-Warnke Modificado</i>	76
4.2.2	<i>Concreto Reforçado com Fibras de Aço Fissurado</i>	80
4.3	MODELO CONSTITUTIVO PARA AS ARMADURAS.....	81
5	PROGRAMAS COMPUTACIONAIS GID & FEMOOP: IMPLEMENTAÇÕES E CUSTOMIZAÇÃO	83
5.1	FEMOOP	84
5.1.1	<i>Abordagem Orientada a Objetos</i>	89
5.1.2	<i>Implementações no FEMOOP</i>	92
5.2	GID	96
5.3	CUSTOMIZAÇÃO GID & FEMOOP	98
5.3.1	<i>Diálogo de Análise</i>	101
5.3.2	<i>Diálogo de Materiais</i>	102
5.3.3	<i>Diálogo de Condições de Contorno</i>	104
5.3.4	<i>Utilizando a Customização</i>	105
5.3.4.1	<i>Etapas de Pré-Processamento</i>	106
5.3.4.2	<i>Disparando o Solver</i>	108
5.3.4.3	<i>Etapas de Pós-Processamento</i>	109
6	MODELAGEM COMPUTACIONAL	113
6.1	VIGAS DE CONCRETO ARMADO ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS	114
6.2	VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO ENSAIADAS POR LIM E OH	129
6.3	VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI	139
7	CONSIDERAÇÕES FINAIS	147
7.1	CONCLUSÕES	148
7.2	SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	150
	REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	152

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – TIPOS DE FIBRAS.....	12
FIGURA 2 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO UNIAXIAL TÍPICA PARA O CONCRETO SOB COMPRESSÃO UNIAXIAL.....	22
FIGURA 3 – CURVA TENSÃO-DESLOCAMENTO UNIAXIAL PARA O CONCRETO SOB TRAÇÃO UNIAXIAL.....	22
FIGURA 4 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO SOB COMPRESSÃO BIAXIAL.	23
FIGURA 5 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO SOB TRAÇÃO-COMPRESSÃO BIAXIAL.	23
FIGURA 6 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA O CONCRETO SOB TRAÇÃO BIAXIAL.	24
FIGURA 7 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA AÇO COM PATAMAR DE ESCOAMENTO.	25
FIGURA 8 – DIAGRAMA TENSÃO-DEFORMAÇÃO PARA AÇO SEM PATAMAR DE ESCOAMENTO.....	25
FIGURA 9 – MODELO DE “BOND-SLIP” PROPOSTO PELO CEB.	26
FIGURA 10 – DIAGRAMA DE TENSÃO-DEFORMAÇÃO ELÁSTICA DE MATRIZ E FIBRAS DE ALTO E BAIXO MÓDULO DE ELASTICIDADE TRABALHANDO EM CONJUNTO.....	30
FIGURA 11 – APLICAÇÕES PRÁTICAS DE CRFA.....	32
FIGURA 12 – ESQUEMA DE CONCENTRAÇÃO DE TENSÕES PARA UM CONCRETO SEM E COM REFORÇO DE FIBRAS.	34
FIGURA 13 – ENSAIO DE “PULL-OUT” EM ANDAMENTO.....	35
FIGURA 14 – (A) ESQUEMA DE DEFORMAÇÕES; (B) DISTRIBUIÇÃO DE TENSÕES DE CISLHAMENTO AO LONGO DA INTERFACE FIBRA-MATRIZ.	36
FIGURA 15 – REPRESENTAÇÃO DAS TENSÕES TANGENCIAIS (CISLHANTE) NA INTERFACE FIBRA-MATRIZ.	37
FIGURA 16 – DIAGRAMA SIMPLIFICADO DE FORÇA DE ARRANCAMENTO POR ESCORREGAMENTO PROPOSTO POR BASTOS, 1981.	38
FIGURA 17 – DISTRIBUIÇÕES POSSÍVEIS DE TENSÃO AO LONGO DE UMA FIBRA EM FUNÇÃO DO COMPRIMENTO CRÍTICO.	39
FIGURA 18 – COMPÓSITOS REFORÇADOS COM FIBRAS SUBMETIDOS A ENSAIO DE TRAÇÃO NA FLEXÃO. (A) COM TEORES ABAIXO DO VOLUME CRÍTICO; (B) ACIMA DO VOLUME CRÍTICO; (C) IGUAL AO VOLUME CRÍTICO.....	39
FIGURA 19 – RELAÇÃO ENTRE O TEOR DE FIBRAS E A RESISTÊNCIA À TRAÇÃO PARA CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS COM DIFERENTES FATORES DE FORMA.	40
FIGURA 20 – FATORES INFLUENTES NA CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO. (A) VOLUME DE FIBRAS; (B) FATOR DE FORMA.	41
FIGURA 21 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO. (A) PARA DIFERENTES TIPOS DE FIBRAS ADICIONADAS; (B) CRFA COM DIFERENTES ADIÇÕES EM VOLUME DE FIBRAS.....	42
FIGURA 22 – CURVA TENSÃO-DEFORMAÇÃO NA COMPRESSÃO DE CRFA DE 50MM E COM GANCHOS. (A) CONCRETOS DE ALTA RESISTÊNCIA; (B) CONCRETOS CONVENCIONAIS.	42
FIGURA 23 – ENVOLTÓRIA DE RESISTÊNCIA BIAXIAL PARA O CONCRETO CONVENCIONAL E PARA O CONCRETO COM FIBRAS.	43

FIGURA 24 – ENVOLTÓRIA DE RESISTÊNCIA BIAXIAL PARA O CONCRETO CONVENCIONAL E PARA O CONCRETO COM FIBRAS.	44
FIGURA 25 – CURVAS TENSÃO DE CISALHAMENTO-DESLOCAMENTO PARA CONCRETOS SEM FIBRAS E COM ADIÇÃO DE 0,4% E 0,8%. (A) TENSÃO DE CISALHAMENTO-DESLOCAMENTO VERTICAL; (B) TENSÃO DE CISALHAMENTO-DESLOCAMENTO LATERAL.	45
FIGURA 26 – CURVA CARGA-DEFLEXÃO DE CRF.	46
FIGURA 27 – DISCRETIZAÇÃO DO MEIO CONTÍNUO EM ELEMENTOS FINITOS - MALHA DE ELEMENTOS FINITOS.	48
FIGURA 28 – REPRESENTAÇÃO GRÁFICA DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON “ <i>STANDARD</i> ” PARA PROBLEMAS UNIDIMENSIONAIS.	56
FIGURA 29 – MODELOS DE REPRESENTAÇÃO DE ARMADURA (A) DISTRIBUÍDA; (B) DISCRETA; (C) INCORPORADA.	61
FIGURA 30 – REPRESENTAÇÃO DISCRETA DAS ARMADURAS NA PLATAFORMA GiD & FEMOOP.	61
FIGURA 31 – SUPERFÍCIE DE RUPTURA EM FUNÇÃO DAS COORDENADAS DE “ <i>HAIGH-WESTERGAARD</i> ”.	65
FIGURA 32 – SUPERFÍCIE DE RUPTURA. (A) SEÇÕES ANTI-ESFÉRICAS; (B) SEÇÕES MERIDIANAS.	66
FIGURA 33 - SUPERFÍCIE DE RUPTURA DE OTTOSEN. (A) SEÇÃO ANTI-ESFÉRICA; (B) SEÇÕES MERIDIANAS.	68
FIGURA 34 - SUPERFÍCIE DE RUPTURA DE WILLAM-WARNKE DE CINCO PARÂMETROS.	73
FIGURA 35 – MODELO DE AMOLECIMENTO LINEAR.	75
FIGURA 36 – ESTADO DE TENSÕES NA RUPTURA PARA CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS E PARA UM CONCRETO SIMPLES ANÁLOGO.	78
FIGURA 37 – MODELO PARA CONCRETO FISSURADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO.	80
FIGURA 38 – MODELO ELASTO-PLÁSTICO COM ENCRUAMENTO LINEAR PARA AS ARMADURAS.	81
FIGURA 39 – MODELO ELASTO-PLÁSTICO PERFEITO PARA AS ARMADURAS.	81
FIGURA 40 – VISUALIZAÇÃO DO PROGRAMA FEMOOP.	84
FIGURA 41 – DIAGRAMA DE “ <i>SUPERCLASSES</i> ” DO PROGRAMA FEMOOP.	85
FIGURA 42 – DIAGRAMA DE CLASSES DA “ <i>SUPERCLASSE</i> ” CMATERIAL.	93
FIGURA 43 – DIAGRAMA DE CLASSES DA “ <i>SUPERCLASSE</i> ” CCONSTMODEL.	95
FIGURA 44 – INTERFACE GiD. (A) PRÉ-PROCESSADOR; (B) PÓS-PROCESSADOR.	96
FIGURA 45 – INTEGRAÇÃO GiD & FEMOOP.	98
FIGURA 46 – DIAGRAMA COM OS ARQUIVOS CUSTOMIZADOS.	100
FIGURA 47 – CAIXA DE DIÁLOGO PARA A ENTRADA DE DADOS DO TIPO DE ANÁLISE DO PROBLEMA.	101
FIGURA 48 – CAIXA DE DIÁLOGO PARA APLICAR O MODELO DE WILLAM E WARNKE DE 5 PARÂMETROS.	102
FIGURA 49 – CAIXA DE DIÁLOGO PARA APLICAR O MODELO DE OTTOSEN.	103
FIGURA 50 – CAIXA DE DIÁLOGO PARA APLICAR O MODELO PARA CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO.	103
FIGURA 51 – CAIXA DE DIÁLOGO PARA APLICAR O MODELO ELASTO-PLÁSTICO BILINEAR PARA AS ARMADURAS.	104
FIGURA 52 – CAIXA DE DIÁLOGO PARA APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO.	104
FIGURA 53 - PROPRIEDADES GEOMÉTRICAS (VALORES EM MM) E ESQUEMA DE ENSAIO EM QUATRO PONTOS.	105

FIGURA 54 – DEFINIÇÃO DA GEOMETRIA DA VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962) UTILIZANDO AS FERRAMENTAS DE DESENHO DO GiD.	106
FIGURA 55 – GERAÇÃO DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DA VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	107
FIGURA 56 – APLICAÇÃO DOS MATERIAIS NO DOMÍNIO DO PROBLEMA – VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	108
FIGURA 57 – APLICAÇÃO DAS CONDIÇÕES DE CONTORNO AO PROBLEMA - VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	108
FIGURA 58 – DISPARANDO A ANÁLISE DA VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	109
FIGURA 59 – CARGA APLICADA- DESLOCAMENTOS NO CENTRO DO VÃO - VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	110
FIGURA 60 - TENSÃO AXIAL EM MPA NA ARMADURA PARA $P=72,25\text{kN}$.	110
FIGURA 61 – TENSÕES PRINCIPAIS NO CONCRETO EM MPA – VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	111
FIGURA 62 – TENSÕES DE CISALHAMENTO NO CONCRETO EM MPA – VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	111
FIGURA 63 – REPRESENTAÇÃO DO QUADRO DE FISSURAÇÃO EM MM DA VIGA DE LEONHARDT E WALTHER (1962).	112
FIGURA 64 - VIGAS ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS (1963).	115
FIGURA 65 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA OA1.	119
FIGURA 66 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA OA2.	119
FIGURA 67 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA OA3.	119
FIGURA 68 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA A1.	120
FIGURA 69 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA A2.	120
FIGURA 70 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA A3.	120
FIGURA 71 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA B1.	121
FIGURA 72 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA B2.	121
FIGURA 73 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA B3.	121
FIGURA 74 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA C1.	122
FIGURA 75 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA C2.	122
FIGURA 76 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO OBTIDAS PARA A VIGA C3.	122
FIGURA 77 – TENSÕES NORMAIS σ_{xx} NO CONCRETO OBTIDAS PARA A VIGA OA1 (VALORES EM MPA).	126
FIGURA 78 – TENSÕES NORMAIS σ_{xx} NA ARMADURA OBTIDAS PARA A VIGA OA1 (VALORES EM MPA).	126
FIGURA 79 – TENSÕES DE CISALHAMENTO σ_{xy} NO CONCRETO OBTIDAS PARA A VIGA OA1 (VALORES EM MPA). (A) PLATAFORMA FEMOOP & GiD; (B) VECtor2.	127
FIGURA 80 – ABERTURAS DE FISSURA OBTIDAS PARA A VIGA OA1. (VALORES EM MM).	128
FIGURA 81 – QUADRO DE FISSURAÇÃO OBTIDO PARA A VIGA OA1.	128
FIGURA 82 – CONFIGURAÇÃO DE ENSAIO DO GRUPO 1 DE VIGAS ENSAIADAS POR LIM E OH (1999) COM 75% DA ÁREA DE ARMADURA NECESSÁRIA PARA O REFORÇO AO CORTE (VIGAS S0.75-0 E S0.75-1 - COTAS EM CM).	130

FIGURA 83 – CONFIGURAÇÃO DE ENSAIO DO GRUPO 2 DE VIGAS ENSAIADAS POR LIM E OH (1999) COM 50% DA ÁREA DE ARMADURA NECESSÁRIA PARA O REFORÇO AO CORTE (VIGAS S0.50-0, S0.50-1 E S0.50-2 - COTAS EM CM).....	130
FIGURA 84 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS VIGAS DE LIM E OH (1999). (A) CAIXA DE DIÁLOGO COM OS “LAYERS” DE CADA MATERIAL A SER APLICADO NOS CORRESPONDENTES ELEMENTOS FINITOS; (B) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS VIGAS DA SÉRIE S0.75; (C) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS VIGAS DA SÉRIE S0.50.....	131
FIGURA 85 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA DA SÉRIE S0.75-0.....	132
FIGURA 86 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA DA SÉRIE S0.75-1.....	132
FIGURA 87 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA DA SÉRIE S0.50-0.....	133
FIGURA 88 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA DA SÉRIE S0.50-1.....	133
FIGURA 89 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA A VIGA DA SÉRIE S0.50-2.....	133
FIGURA 90 – CAMPO DE TENSÕES PARA A VIGA S0.50-1 QUANDO SUBMETIDA A CARREGAMENTO DE 12kN.	137
FIGURA 91 – CAMPO DE TENSÕES PARA A VIGA S0.50-1 QUANDO SUBMETIDA A CARGA DE 30kN.....	137
FIGURA 92 – CAMPO DE TENSÕES PARA A VIGA S0.50-1 QUANDO SUBMETIDA A CARGA DE 96kN.....	138
FIGURA 93 – CONFIGURAÇÃO DAS VIGAS ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI (1997) - (COTAS EM MM).	139
FIGURA 94 – MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS DUAS SÉRIES DE VIGAS ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI (1997). (A) CAIXA DE DIÁLOGO COM OS “LAYERS” DE CADA MATERIAL A SER APLICADO NOS CORRESPONDENTES ELEMENTOS FINITOS; (B) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS VIGAS DA SÉRIE A; (C) MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA AS VIGAS DA SÉRIE B	141
FIGURA 95 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA AS VIGAS DA SÉRIE A ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI (1997).....	142
FIGURA 96 – CURVAS CARGA APLICADA-DESLOCAMENTO PARA AS VIGAS DA SÉRIE B ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI (1997).....	142
FIGURA 97 – VIGA P4B SUBMETIDA À CARGA DE 45kN. (A) TENSÕES σ_{xx} NO CONCRETO (MPa); (B) TENSÕES σ_{xx} NA ARMADURA (MPa); (C) TENSÕES σ_{xy} NO CONCRETO (MPa); (D) DESLOCAMENTOS NA DIREÇÃO Y (MM)	145
FIGURA 98 – QUADRO DE FISSURAÇÃO PARA A VIGA P4B QUANDO SUBMETIDA À CARGA DE 45kN. (A) ABERTURA DE FISSURAS (MM); (B) DISTRIBUIÇÃO DE FISSURAS (MODELO DE FISSURAS DISTRIBUÍDO ROTACIONAL); (C) QUADRO DE FISSURAÇÃO EXPERIMENTAL.....	146

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – VALORES DE RESISTÊNCIA MECÂNICA E MÓDULO DE ELASTICIDADE PARA DIVERSOS TIPOS DE FIBRA E MATRIZES.	29
TABELA 2 – ELEMENTOS FINITOS PARA A REPRESENTAÇÃO DAS ARMADURAS.	58
TABELA 3 – ELEMENTOS FINITOS PARA A REPRESENTAÇÃO DO CONCRETO.	59
TABELA 4 – COORDENADAS E PESOS DOS PONTOS DE GAUSS DOS ELEMENTOS FINITOS IMPLEMENTADOS PARA AS ARMADURAS.	60
TABELA 5 – COORDENADAS E PESOS DOS PONTOS DE GAUSS DOS ELEMENTOS FINITOS IMPLEMENTADOS PARA O CONCRETO.	60
TABELA 6 – DETALHES DAS VIGAS ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS (1963).	116
TABELA 7 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS UTILIZADOS NAS VIGAS ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS (1963).	116
TABELA 8 – RESULTADOS OBTIDOS NAS MODELAGENS COMPUTACIONAIS DAS VIGAS ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS (1963).	123
TABELA 9 – RESULTADOS OBTIDOS PARA AS ABERTURAS DE FISSURAS NAS VIGAS ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS (1963).	124
TABELA 10 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS UTILIZADOS NOS DOIS GRUPOS DE VIGAS ENSAIADAS POR LIM E OH (1999).	130
TABELA 11 – RESULTADOS OBTIDOS NAS MODELAGENS COMPUTACIONAIS DAS VIGAS ENSAIADAS POR LIM E OH (1999).	136
TABELA 12 – PROPRIEDADES DOS MATERIAIS UTILIZADOS NAS DUAS SÉRIES DE VIGAS ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI (1997).	140
TABELA 13 – RESULTADOS OBTIDOS NAS MODELAGENS COMPUTACIONAIS DAS VIGAS ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI (1997).	143

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

ACI – American Concrete Institute

ASTM – American Society for Testing and Materials

CIMNE – International Center for Numerical Methods in Engineering

CRFA – Concreto Reforçado com Fibras de Aço

FEMOOP – Finite Element Method – Object Oriented Program

GFRC – Glass Fiber Reinforced Concrete

GMEC – Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto

JSCE – Japan Society of Civil Engineers

LMC – Laboratório de Mecânica Computacional

MEF – Método dos Elementos Finitos

NFRC – Natural Fiber Reinforced Concrete

OOA – Object Oriented Analysis

OOD – Object Oriented Design

OOP – Object Oriented Programming

PUC-Rio – Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro

RILEM – Réunion Internationale des Laboratoires et Experts des Matériaux, Systèmes de
Constructions et Ouvrages

SFRC – Steel Fiber Reinforced Concrete

SNFRC – Synthetic Fiber Reinforced Concrete

UML – Unified Modeling Language

USP – Universidade de São Paulo

RESUMO

Neste trabalho foi desenvolvida uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço. A ferramenta numérica desenvolvida foi obtida por meio do acoplamento do programa FEMOOP, denominado “*solver*” com o “*pré e pós-processador*” GiD. Esse acoplamento foi possibilitado por meio da programação de um conjunto de arquivos denominados arquivos de customização, responsáveis pelo trabalho conjunto dos programas. Utiliza-se uma única interface gráfica com caixas de diálogo vinculadas ao código do “*solver*”, responsáveis por aplicar as condições de contorno do problema, tipo de análise, e aplicação dos materiais nos seus respectivos elementos finitos. Para a representação do concreto, foram implementados elementos finitos planos isoparamétricos quadrilaterais e triangulares e para as armaduras elementos finitos isoparamétricos unifilares lineares e quadráticos representados por meio do modelo discreto. Para o comportamento do concreto, foi considerado um modelo elástico não-linear com comportamento isotrópico até o limite de ruptura, acoplado a um modelo de amolecimento linear na tração. As fissuras são representadas pelo modelo de fissuração distribuída do tipo rotacional. Como critério de resistência para o concreto podem-se usar o modelo de Ottosen ou o modelo de Willam e Warnke de cinco parâmetros implementados na plataforma. Especificamente para considerar a presença de fibras de aço descontínuas na matriz de concreto, é utilizado o critério de ruptura proposto por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005), que é uma alteração no meridiano de tração do critério proposto por Willam e Warnke. Para o concreto reforçado com fibras de aço fissurado considera-se o trecho pós-fissuração proposto no modelo de tração de LIM *et. al* (1987). As armaduras têm seu comportamento descrito através de um modelo elasto-plástico bilinear. A interação entre as armaduras e o concreto foi considerada como de aderência perfeita. Como se trata da modelagem de um material com comportamento não-linear, foi implementado para resolução das equações de equilíbrio o método de Newton-Raphson. Por fim, a plataforma final obtida foi avaliada por meio da simulação de vigas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço disponíveis na literatura, que confirmaram a eficiência das implementações efetuadas.

Palavras-Chave: Estruturas de Concreto, Concreto Reforçado com Fibras de Aço, Análise Numérica, Análise Não-Linear, Método dos Elementos Finitos.

ABSTRACT

In this work a computational platform for the analysis of reinforced concrete structures reinforced or not with steel fibers has been developed. This tool is based on the finite element method and has been obtained by the coupling of FEMOOP, denominated “solver”, with the “pre and post-processor” program GiD. The coupling has been possible by programming a set of customization files responsible for the communication between the two base programs. A single graphical interface with particular dialog boxes which are linked to the solver facilities is used to apply the boundary conditions, type of analysis, and material properties in the finite element model. For the geometrical representation of concrete elements, plane isoparametric quadrilateral and triangular finite elements have been implemented, while for the steel reinforcement bars, discrete isoparametric truss finite elements with linear end quadratic interpolation have been used. In order to model the mechanical behavior of concrete materials, a nonlinear isotropic elastic model together with a tension softening linear model has been adapted. Cracks are represented through a rotational smeared crack model. Both Ottosen and 5 parameters Willam-Warnke models can be used as the strength criterion of concrete. A failure model proposed by SEOW and SWADDIWUDHIPONG (2005), based on an adaptation of the Willam-Warnke model where a modification of the tension meridian is introduced, is used to consider the discontinuous steel fibers dispersed into the concrete mass. The post-cracking behavior of the steel fiber reinforced concrete considers the tension model proposed by LIM *et. al* (1987). The steel rebars have their behavior described by a bilinear elastoplastic model. A perfect bond between concrete and the reinforcing bars is assumed. For the solution of the nonlinear equations the Newton-Raphson method is used. The developed computational platform has been evaluated through a set of numerical simulations of tests performed in conventionally reinforced and steel fiber reinforced concrete beams available on the literature. These simulations confirm the efficiency of the current implementation.

Keywords: Concrete Structures, Steel Fiber Reinforced Concrete, Numerical Analysis, Nonlinear Analysis, Finite Element Method.

1 INTRODUÇÃO

O concreto é o material mais utilizado na construção civil e seu uso nas obras de engenharia se dá desde a antiguidade, como ocorria nas civilizações grega e romana, o qual era usado para suprir as necessidades de edificações e obras de infra-estrutura. Elementos estruturais feitos de concreto com barras de aço convenientemente dispostas em seu interior são denominados de peças de concreto armado. A principal função das barras de aço é absorver os esforços de tração atuantes nas estruturas.

As primeiras estruturas de concreto armado foram produzidas por volta da metade do século XIX, coincidindo com o crescimento acelerado da indústria, comércio e transporte, quando houve a necessidade de construção de portos, pontes, fábricas, etc. Até hoje a vasta utilização do concreto em elementos estruturais é justificada pelas suas características como boa resistência à maioria dos esforços solicitantes, baixo custo dos materiais empregados e mão-de-obra, durável e moldável, permitindo com que elementos estruturais possam ser executados em uma grande variedade de formas e tamanhos.

O material concreto ao longo dos últimos anos vem sofrendo algumas alterações com as constantes mudanças na proporção e adição de novos materiais para conferir algumas características desejadas e suprir as atuais exigências de desempenho. Como resultado das últimas pesquisas com esses objetivos surgiram o concreto estrutural leve, concreto com adições minerais, concreto colorido, concreto de alta resistência, concreto massa e o concreto reforçado com fibras.

Segundo METHA e MONTEIRO (2008), denomina-se concreto reforçado com fibras aquele que contém em sua composição cimento hidráulico, água, agregado e fibras discretas descontínuas. A adição de fibras ao concreto surgiu como uma alternativa bastante promissora, principalmente para combater seu comportamento frágil quando solicitado por esforços de tração (cerca de 7 a 10% da resistência à compressão). Segundo FIGUEIREDO (2000), a adição de fibras de aço ao concreto faz com que este material passe a apresentar um comportamento pseudo-dúctil, ou seja, continue apresentando uma resistência residual a esforços nele aplicados mesmo após sua fissuração.

De acordo com a terminologia adotada pelo “*American Concrete Institute*” (ACI), “*Committee 544 – Fiber Reinforced Concrete*” existem quatro categorias de concreto reforçado com fibras: concreto reforçado com fibras de aço (*SFRC* – “*Steel Fiber Reinforced Concrete*”), concreto reforçado com fibras de vidro (*GFRC* – “*Glass Fiber Reinforced Concrete*”), concreto reforçado com fibras sintéticas (*SFRC* – “*Synthetic Fiber Reinforced Concrete*”) e concreto reforçado com fibras naturais (*NFRC* – “*Natural Fiber Reinforced Concrete*”). A **Figura 1** ilustra alguns dos principais tipos de fibras que são atualmente adicionados ao concreto, como as de aço, vidro, sintéticas (polipropileno) e naturais (sisal).

Figura 1 – Tipos de Fibras.

(a) Fibras de aço (<http://misungsteel.com> - acessado em 15/04/2008), (b) Fibras de vidro (<http://www.rtpcompany.com> - acessado em 15/04/2008), (c) Fibras de polipropileno (RESENDE, 2003) e (d) Fibras de sisal (RESENDE, 2003)

As fibras de vidro convencionais quando adicionadas a uma matriz cimentícia, sofrem degradação das propriedades físicas com o tempo devido ao ataque do meio alcalino, afetando principalmente sua tenacidade, diminuindo progressivamente sua flexibilidade e a tornando frágil. Para tentar combater essa deficiência, foi desenvolvida nos últimos anos a fibra de vidro álcalis-resistente, apresentando-se mais durável em meios alcalinos, se comparada à fibra de vidro convencional. Entretanto a utilização desta última é quase inviável

economicamente, sendo cerca de três vezes o custo da fibra de vidro convencional (PERUZZI, 2002).

Segundo FIGUEIREDO (2000), o reforço com fibras sintéticas de polipropileno e “nylon” se restringe ao reforço secundário do concreto devido ao baixo módulo de elasticidade dessas fibras. Isto vem sendo constatado nos últimos anos com o uso dessas fibras para o controle da fissuração devido à retração plástica.

A adição de fibras naturais de sisal, bambu, bagaço da cana-de-açúcar, entre outras, em matrizes cimentícias, apresentam problemas de garantia de durabilidade satisfatória devido o meio alcalino. Uma boa alternativa para seu uso seria em construções no meio rural e habitações populares, na qual as exigências de desempenho não são elevadas (FIGUEIREDO, 2000).

Neste trabalho, além de estruturas de concreto armado convencional, será dado também enfoque ao concreto reforçado com fibras de aço, quem vem sendo cada vez mais utilizado nos últimos anos devido ao maior conhecimento dos benefícios da adição dessas fibras na matriz cimentícia. O alto módulo de elasticidade das fibras de aço, implica que elas atuem como reforço primário do concreto, ou seja, do concreto endurecido, podendo até substituir a armadura convencional em algumas aplicações. Entre as aplicações mais consolidadas deste material, estão as estruturas hidráulicas, pisos industriais, pavimentos de aeroportos e rodovias e concreto projetado para túneis (FIGUEIREDO, 2005).

Recentemente a utilização de fibras de aço no Brasil teve duas grandes contribuições, que certamente irão impulsionar ainda mais a sua utilização, que foi a publicação da norma NBR 15530 (2007) que especifica as fibras de aço para concreto e a revisão da NBR 8890 que agora prevê a utilização de fibras de aço em tubos de concreto de seção circular para águas pluviais e esgotos sanitários.

Pelo exposto acima a grande utilização do concreto armado em obras de engenharia e seu aperfeiçoamento nos últimos anos, com a adição de fibras, faz com que o interesse pela simulação computacional desse material se torne cada vez mais importante. Os programas computacionais ajudam a compreender alguns fenômenos antes desconhecidos e obter um maior número de resultados em um menor período de tempo frente a diversos tipos de

solicitações quando comparado aos ensaios experimentais. Cabe destacar que as análises computacionais não substituem os resultados experimentais, e sim as complementam nas análises estruturais, ajudando no entendimento do comportamento das estruturas através de um maior número de resultados obtidos devido à maior facilidade em variar os parâmetros de projeto e avaliar sua influência no projeto estrutural.

A quase totalidade dos programas computacionais disponíveis para análise de estruturas de concreto armado é baseada no método dos elementos finitos. O desenvolvimento de programas para simulação de estruturas de concreto armado é algo muito complexo, uma vez que são muitos os fenômenos que influenciam no seu comportamento. Por se tratar de um material composto de concreto ou concreto com fibras e armaduras de aço, além de modelos constitutivos para representar os materiais sob diversos tipos de solicitação, os sistemas computacionais devem conter modelos de representação de fissuras, modelos de representação de armadura, além de modelos que considerem o deslizamento entre as barras de aço e o concreto. Atualmente alguns programas já incorporam em seu código fenômenos como a fluência e retração.

Na literatura o trabalho publicado por NGO e SCORDELIS (1967) consta como a primeira publicação sobre análise de estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos. Neste foram utilizados elementos finitos planos triangulares para representar o concreto e a armadura e um modelo constitutivo elástico-linear para representar o comportamento desses materiais (relação tensão-deformação). A aderência entre concreto e armadura foi considerada com o uso de elementos finitos de interface e as fissuras foram representadas através da separação das arestas dos elementos de concreto, sendo uma aproximação do que hoje se considera como fissuras discretas.

Com o passar dos anos as primeiras simulações que utilizavam elementos finitos planos nas análises foram sendo aperfeiçoadas com o uso de elementos tridimensionais sólidos, elementos de placa e de casca. Foram também surgindo diversos modelos de representação de armadura, como o incorporado e distribuído, além de outros modelos de fissuras como, por exemplo, o distribuído rotacional.

O desenvolvimento de uma plataforma computacional para análise via método dos elementos finitos pode ser dividida em três partes: “*pré-processador*”, “*solver*” e “*pós-processador*”. O

primeiro é o responsável pelos dados de entrada da análise, como geometria do problema, malha de elementos finitos, condições de contorno, tipo de análise como linear ou não-linear, entre outros dados. O “*solver*” é o programa onde a formulação básica do método dos elementos finitos deve estar toda implementada. Geralmente é gerado um executável do “*solver*” (*.exe) que é o arquivo que lê o arquivo de entrada (geralmente chamado de arquivo neutro) gerado pelo “*pré-processador*” e que após resolver o problema, emite um arquivo de saída com os resultados do problema. O “*pós-processador*” é o programa responsável em ler o arquivo de saída e fazer o tratamento e visualização dos resultados da análise.

Devido às dificuldades de desenvolvimento de “*pré e pós-processadores*”, muitos grupos de pesquisas geram um arquivo de texto para entrada de dados em seus programas e coletam os resultados obtidos no arquivo de texto emitido pelo solver contendo os resultados da análise. Esses resultados geralmente se resumem no caso de problemas mecânicos a curvas carga-deslocamento ou tensão-deformação, não sendo explorado um dos maiores recursos da análise numérica que é a visualização dos resultados em termos de distribuição de tensões, deformações, entre outros. Essa dificuldade é devida principalmente ao uso de programas de computação gráfica, que além de serem assuntos avançados da área de computação, necessitariam de estudos específicos que demandam um grande tempo para serem desenvolvidos e acoplados com os seus respectivos “*solvers*”.

Outra grande dificuldade encontrada pelos grupos de pesquisa é conseguir desenvolver um “*solver*” de forma contínua, na qual cada pesquisador, implemente suas formulações reaproveitando todos os recursos já implementados anteriormente por outros pesquisadores, sem que haja a necessidade de começar um programa do início. Nos últimos anos essa dificuldade vem sendo superada através do uso do paradigma da programação orientada a objetos para desenvolver seus “*solvers*” a qual permite uma completa reutilização de código e a implementação de novas formulações sem nenhum ou pouco impacto na formulação existente.

1.1 MOTIVAÇÃO E JUSTIFICATIVA

Devido às inúmeras aplicações do concreto, percebe-se a grande importância em estudar o comportamento desse material frente a diversos tipos de solicitações, devido a sua grande importância como material estrutural, estando presente nas mais importantes e maioria das obras de engenharia civil. Percebe-se também a grande importância em estudar o comportamento do concreto reforçado com fibras de aço, por se mostrar muito promissor em diversas aplicações futuras, podendo até mesmo substituir parte das armaduras convencionais, principalmente em aplicações como estruturas restringidas cujo confinamento, dificulta a colocação das armaduras convencionais e a posterior concretagem dessas estruturas.

Atualmente a análise computacional de estruturas de concreto é obrigatória em todos os grandes projetos estruturais que utilizam esse material, os quais devem atender o nível de desempenho exigido atualmente. Uma plataforma computacional que possa realizar uma análise eficiente de estruturas de concreto em todas as suas etapas deve possuir um “*pré-processador*” que permita a fácil entrada de dados de análise, incluindo aqueles com geometria irregular, possua ferramentas que auxiliem na discretização do problema em elementos finitos e que possa auxiliar na aplicação dos parâmetros do problema, como por exemplo, o modelo constitutivo de cada material. Essa plataforma deve possuir um “*solver*” com uma extensa biblioteca de elementos finitos disponíveis e tipos de análise, que permita a implementação de novos modelos quando necessário e por fim tenha um “*pós-processador*” com ferramentas que façam todo o tratamento dos resultados da análise em termos de gráficos e visualização dos campos de deformações, tensões, deslocamentos, entre outros.

O exposto acima serviu de justificativa e grande motivação do desenvolvimento desta pesquisa que é a de acoplar um “*pré e pós-processador*” que possua todas as características citadas anteriormente com um “*solver*” que faz análise numérica por elementos finitos de estruturas cuja formulação básica está implementada e organizada obedecendo aos paradigmas da programação orientada a objetos. A utilização deste paradigma de programação facilita a futura expansão do programa com modelos cada vez mais refinados, sem a necessidade de ter que reprogramar a parte existente.

Especificamente para o CRFA, embora este venha aumentando seu espectro de aplicação, o seu uso em elementos estruturais ainda é dado de forma muito tímida, principalmente pela

falta de referências normativas de cálculo e à caracterização ainda incompleta deste material, apesar de já existirem alguns esforços pioneiros para mudar essa realidade (BEKAERT, 1995; ACI, Committee 544; DBV, 2001; RILEM TC 162, 2003). O Brasil contribuiu recentemente para aplicação das fibras de aço, com a publicação da norma NBR 15530 (2007) e a atualização da NBR 8890.

Quanto à modelagem computacional de estruturas de CRFA, esta ainda se encontra muito tímida, com poucos trabalhos disponíveis na literatura que abordam o assunto, sendo este talvez o fator que falta para impulsionar uma maior aplicação desse material em elementos estruturais. Dentre os fatores que podem justificar estudos voltados à modelagem computacional desse material, pode-se citar:

- ✓ Resultados experimentais têm demonstrado que o uso do CRFA é muito viável em determinadas aplicações, inclusive em elementos estruturais, podendo até mesmo substituir parte das armaduras resistentes, tornando os elementos estruturais mais resistentes a diversos tipos de solicitações e aumentando sua segurança pelo aumento de sua ductilidade;
- ✓ Avaliar o CRFA utilizando apenas resultados experimentais demanda a realização de um grande número de experimentos, o que implica numa grande demanda de recurso técnico e financeiro, somado ao considerável tempo na sua preparação e execução dos ensaios;
- ✓ A modelagem computacional pode contribuir para um maior conhecimento do comportamento do CRFA sob diversos tipos solicitações, através da simulação de um maior número de elementos estruturais, compostos de diversos tipos de fibras e volumes;
- ✓ O conhecimento obtido pela modelagem computacional proporcionará um aumento da aplicação do CRFA em outros elementos estruturais além daqueles que já vem sendo aplicados;

- ✓ Os dados obtidos pela modelagem computacional, aliados aos resultados de ensaios experimentais, impulsionarão a criação de referências normativas e diretivas de projetos para a aplicação de CRFA em elementos estruturais.

1.2 OBJETIVOS

O objetivo geral deste trabalho é desenvolver uma plataforma computacional através do acoplamento do “*pré e pós-processador*” denominado GiD com o “*solver*” FEMOOP para realizar simulações computacionais via método dos elementos finitos de estruturas de concreto armado convencionais e reforçado com fibras de aço.

Os objetivos específicos deste trabalho são:

- ✓ Desenvolver uma plataforma computacional que utilize uma única interface gráfica em todas as etapas da análise (entrada de dados, resolução do problema e tratamento de resultados);
- ✓ Desenvolver uma plataforma computacional utilizando o paradigma da programação orientada a objetos para que novas implementações sejam feitas com nenhum impacto sobre a formulação já existente;
- ✓ Fazer caixas de diálogos para facilitar a entrada de dados, como condições de contorno, aplicação dos materiais, e tipos de análises, como linear e não-linear;
- ✓ Implementar na plataforma para serem utilizados elementos finitos isoparamétricos planos para representar o concreto e elementos finitos unifilares lineares e quadrático para representar as armaduras, além do método de Newton-Raphson Padrão “*Standard*” para resolução de equações de equilíbrio não-lineares;
- ✓ Implementação de um modelo constitutivo que considere a presença de fibras de aço dispersas na matriz cimentícia, para simulação bidimensional de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço;

- ✓ Avaliar a plataforma desenvolvida por meio da simulação computacional de algumas vigas de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço, cujas respostas experimentais estão disponíveis na literatura;
- ✓ Comparar os resultados obtidos com modelagens computacionais realizadas por outros pesquisadores, programas comerciais e os seus respectivos resultados experimentais;
- ✓ Contribuir para o maior entendimento do comportamento de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço, através da simulação de estruturas com várias porcentagens de fibras adicionadas, contribuindo para futuras referências normativas.

1.3 ORGANIZAÇÃO DO TRABALHO

Este trabalho está dividido em sete capítulos, complementados no final pelas referências bibliográficas. Neste primeiro capítulo é feita uma introdução geral do trabalho, descrevendo seus objetivos, justificativa e principais motivações que levaram ao seu desenvolvimento.

O segundo capítulo consiste em fazer uma breve revisão acerca do comportamento dos materiais constituintes do concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço, quando submetidos a solicitações estáticas de curta duração e os fatores que influenciam no seu comportamento.

No terceiro capítulo é descrito a formulação básica do método dos elementos finitos, bem como os elementos finitos utilizados na plataforma para representar o concreto e as armaduras através do modelo discreto. Apresenta-se também o método de Newton-Raphson padrão utilizado para resolução das equações de equilíbrio não-lineares.

Os modelos constitutivos utilizados para representar o concreto e as armaduras são descritos no quarto capítulo, incluindo a estratégia adotada para considerar a presença de fibras de aço dispersas na matriz de concreto.

No quinto capítulo são apresentados os programas FEMOOP e GiD e os arquivos desenvolvidos para que os dois trabalhem em conjunto utilizando uma única interface gráfica.

Para o melhor entendimento das implementações efetuadas, é feita uma breve descrição dos principais conceitos envolvidos no paradigma da programação orientada a objetos e as respectivas classes criadas para receber estas implementações. No final deste capítulo é apresentado um exemplo que ilustra alguns dos recursos disponíveis pela plataforma desenvolvida.

O sexto capítulo apresenta as modelagens computacionais realizadas pela plataforma para concreto armado convencional e reforçado com fibras para avaliar as implementações efetuadas.

Por fim no sétimo capítulo são feitas as principais conclusões obtidas neste trabalho, bem como sugestões para trabalhos futuros.

2 O CONCRETO CONVENCIONAL E O REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO E ARMADURA PASSIVA

Este capítulo aborda os principais comportamentos dos materiais constituintes de peças de concreto armado convencional e reforçado com fibras de aço, quando submetidos a solicitações estáticas de curta duração e os fatores que influenciam em seu comportamento, como aderência aço-concreto e fissuração do material. Faz-se também uma revisão acerca da influência da adição de fibras de aço na matriz de concreto, e as principais variáveis que influenciam no comportamento deste compósito.

2.1 O CONCRETO

O concreto é um material que apresenta boa resistência a esforços de compressão e baixa resistência a esforços de tração, com ruptura frágil. Um dos fatores que mais influenciam no comportamento distinto deste material sob diferentes estados de tensões, é o fato do mesmo possuir um grande número de microfissuras na zona de transição na interface, isto é, na região entre a matriz e o agregado graúdo, mesmo antes que qualquer carregamento seja aplicado.

Em laboratórios são feitos os principais ensaios que caracterizam o concreto frente a diversos tipos de solicitações, como compressão e tração uniaxiais, esforços biaxiais e multiaxiais. Quando submetido a esforços de compressão uniaxial, o concreto apresenta o comportamento típico de curva tensão-deformação ilustrada na **Figura 2**, caracterizada por três trechos. No primeiro trecho, que corresponde a até aproximadamente 30% da resistência à compressão, é observado um comportamento elástico-linear, a partir de onde as microfissuras começam a se propagar e o material começa a apresentar um comportamento não-linear a até aproximadamente 75% da resistência à compressão. No último trecho, que vai até a carga de ruptura, o comportamento não-linear do material é ainda mais acentuado.

Figura 2 – Curva tensão-deformação uniaxial típica para o concreto sob compressão uniaxial.
(Adaptado de CHEN; SALEEB, 1994)

Sob esforços de tração uniaxial, o concreto só começa a apresentar um comportamento não-linear próximo a sua resistência à tração e após um trecho inicial de comportamento elástico linear que varia de 60% a 80% de sua resistência à tração. A **Figura 3** ilustra o comportamento do concreto submetido a um ensaio de tração, no qual pode ser observado o comportamento elástico-linear do material até próximo a carga de ruptura.

Figura 3 – Curva tensão-deslocamento uniaxial para o concreto sob tração uniaxial.
(adaptado de KUPFER *et. al*, 1969)

A resposta do concreto sob solicitações biaxiais é distinta da resposta obtida em ensaios uniaxiais. KUPFER *et. al* (1969) investigaram a resistência biaxial do concreto. A **Figura 4** ilustra os resultados de ensaios de compressão biaxial com $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1}{-1}$ e $\frac{\sigma_1}{\sigma_2} = \frac{-1}{-0,52}$, nos quais foi

obtido um aumento de resistência em relação à compressão uniaxial de 16% e 27% respectivamente.

Figura 4 – Curva tensão-deformação para o concreto sob compressão biaxial.
(adaptado de KUPFER *et. al*, 1969)

Quando submetido a esforços biaxiais de tração-compressão, a resistência do material diminui proporcionalmente ao aumento da tensão de tração (**Figura 5**). Ensaios de tração biaxiais demonstram uma resistência semelhante às obtidas nos esforços de tração uniaxiais, como ilustra a **Figura 6**.

Figura 5 – Curva tensão-deformação para o concreto sob tração-compressão biaxial.
(adaptado de KUPFER *et. al*, 1969)

Figura 6 – Curva tensão-deformação para o concreto sob tração biaxial.
(adaptado de KUPFER *et. al*, 1969)

2.2 AS ARMADURAS PASSIVAS

As armaduras utilizadas em estruturas de concreto armado são denominadas armaduras passivas por combaterem os esforços somente quando solicitadas, em contraste com as armaduras ativas, usadas em estruturas de concreto protendido, que são tensionadas antes mesmo da estrutura estar submetida ao carregamento de serviço.

A utilização de armaduras em estruturas de concreto armado tem por objetivo absorver os esforços na direção axial das barras, tendo pouca influência no combate aos esforços perpendiculares a mesma. Desta forma a caracterização do comportamento tensão-deformação das barras de aço é feito através de ensaios uniaxiais de tração. A resposta obtida neste ensaio é função do processo de fabricação, que poderá ser por laminação a quente ou por trefilação. No primeiro processo as armaduras apresentam patamar de escoamento no diagrama tensão-deformação (**Figura 7**), enquanto que aquelas obtidas por trefilação não apresentam um patamar de escoamento bem definido, como ilustra a **Figura 8**.

Figura 7 – Diagrama tensão-deformação para aço com patamar de escoamento.

Figura 8 – Diagrama tensão-deformação para aço sem patamar de escoamento.

2.3 A INTERAÇÃO AÇO-CONCRETO

Um dos fatores que influenciam no comportamento das estruturas de concreto armado é a aderência entre o concreto e o aço, região na qual ocorre a transferência de esforços longitudinais das barras por aderência. Diversos modelos de aderência (*bond-slip*) estão disponíveis na literatura com o objetivo de simular o mecanismo de ligação entre o concreto e as armaduras. A **Figura 9** ilustra o modelo de “*bond-slip*” proposto pelo CEB.

Figura 9 – Modelo de “*bond-slip*” proposto pelo CEB.

Via método dos elementos finitos, geralmente são usados elementos de mola e de contato (também chamados de elementos de interface) nos quais são aplicados modelos constitutivos de “*bond-slip*” para simular a aderência entre esses materiais. No modelo de perda de aderência de molas, a perda de aderência pode ser tratada através da introdução de duas molas ortogonais ligando os nós do concreto e do aço. O comportamento da região da interface concreto-aço é representado através de relações tensão-escorregamento apropriadamente associados a cada uma das molas. No modelo de perda de aderência de contato é feito com elementos de interface isoparamétricos ligando cada nó aos correspondentes nós da armadura e concreto, mantendo uma conexão contínua entre os dois materiais. Neste trabalho não foi utilizado modelo de aderência, sendo considerada a interação aço-concreto como de aderência perfeita.

2.4 A FISSURAÇÃO DO CONCRETO

O concreto, mesmo antes de ser submetido a carregamento externo, já apresenta microfissuras, que se propagam à medida que as peças estruturais vão sendo solicitadas, sendo as principais responsáveis pelo comportamento não-linear apresentado por esse material.

Existem basicamente três modelos para a modelagem das fissuras via método dos elementos finitos: discreta, distribuída e incorporada. O modelo discreto modela a fissura através da separação das arestas dos elementos finitos, adaptando-se a malha em função da trajetória de propagação. Essa necessidade de readaptação de malha faz com que o método tenha um custo computacional muito alto, quando não se conhece o caminho de propagação da fissura, principalmente em estruturas de concreto armado, as quais possuem várias fissuras espalhadas ao longo da peça.

O modelo de fissuração distribuída tem sido bastante aplicado em modelagens de estruturas de concreto armado, devido a sua simplicidade de aplicação. Neste modelo o concreto fissurado permanece contínuo e as propriedades do material são modificadas para considerar o dano devido à fissuração. Neste trabalho implementou-se um modelo de fissuras distribuídas do tipo rotacional, no qual as fissuras giram em função das tensões principais.

Os modelos de fissura incorporada possuem aspectos favoráveis das duas técnicas anteriores, não sendo necessário fazer readaptação de malha e não é função da malha de elementos finitos. Estes modelos se baseiam no conceito de descontinuidades incorporadas dentro de elementos finitos padrão.

2.5 O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Segundo FIGUEIREDO (2005), o concreto reforçado com fibras pode ser definido como um compósito cujas fases principais são o concreto, denominado matriz, e as fibras, que podem ser de aço, vidro, polipropileno, “nylon”, etc. O próprio concreto endurecido sem fibras já é um compósito cujas fases principais são a pasta, os poros e os agregados.

Segundo BENTUR e MINDESS (1990), a utilização de compósitos é antiga, tendo sido retratada nas Sagradas Escrituras com o emprego de palha no fabrico de tijolos pelo povo egípcio. A utilização de compósitos até hoje vem crescendo demasiadamente, com aplicações em várias áreas, como a construção civil e aeroespacial. Na construção civil, pode-se citar a utilização de telhas de fibrocimento, telhas de plásticos reforçadas com fibras de vidro, concreto reforçado com fibras dispersas e a utilização de fibras de carbono principalmente para aumentar a capacidade resistente da estrutura.

A utilização de concreto reforçado com fibras de aço vem crescendo nos últimos anos devido ao maior conhecimento dos benefícios da utilização dessas fibras. Entre as aplicações mais consolidadas deste material, estão as estruturas hidráulicas, pisos industriais, pavimentos de aeroportos e rodovias e concreto projetado para túneis. Segundo MINDESS (1995), a utilização de fibras no concreto é de grande interesse tecnológico, mesmo quando aplicado em estruturas convencionais de concreto armado, pois o desempenho proporcionado pela adição de fibras aumenta a competitividade do material quando comparado com outras tecnologias como as estruturas de aço.

O tipo de fibra a ser adicionado ao concreto depende das propriedades que se deseja conferir ao mesmo e do tipo de aplicação. Segundo FIGUEIREDO (2000), deve haver compatibilidade entre fibra e matriz para obter durabilidade e desempenho satisfatório do conjunto. A capacidade de reforço que determinado tipo de fibra pode proporcionar ao concreto pode ser avaliada através de duas de suas propriedades: o módulo de elasticidade e sua resistência mecânica (FIGUEIREDO, 2005). Os valores do módulo de elasticidade e resistência mecânica dos principais tipos de fibras são mostrados na **Tabela 1**. Para efeito de comparação, são também colocadas as propriedades de uma matriz de cimento.

Tabela 1 - Valores de resistência mecânica e módulo de elasticidade para diversos tipos de fibra e matrizes cimentícias. (BENTUR; MINDESS, 1990)

Material	Diâmetro (μm)	Densidade (g/cm^3)	Módulo de Elasticidade (GPa)	Resistência à tração (GPa)	Deformação na ruptura (%)
Aço	5-500	7,84	190-210	0,5-2,0	0,5-3,5
Vidro	9-15	2,60	70-80	2-4	2-3,5
Amianto	0,02-0,4	2,6	160-200	3-3,5	2-3
Polipropileno	20-200	0,9	1-7,7	0,5-0,75	8,0
Kevlar	10	1,45	65-133	3,6	2,1-4,0
Carbono	9	1,9	230	2,6	1,0
Nylon	-	1,1	4,0	0,9	13-15
Celulose	-	1,2	10	0,3-0,5	-
Acrílico	18	1,18	14-19,5	0,4-1,0	3
Polietileno	-	0,95	0,3	$0,7 \times 10^{-3}$	10
Fibra de madeira	-	1,5	71	0,9	-
Sisal	10-50	1-50	-	0,8	3,0
Matriz de cimento (para comparação)	-	2,50	10-45	3,7	0,02

A **Tabela 1**, mostra que alguns tipos de fibras apresentam módulo de elasticidade inferior que a matriz de cimento, sendo chamadas por esse motivo de fibras de baixo módulo, entre elas, as fibras de polipropileno e “nylon”. Algumas fibras possuem módulo de elasticidade superior ao da matriz de concreto, sendo classificadas como fibras de alto módulo, como por exemplo, as fibras de aço. Entretanto, além do módulo de elasticidade, a capacidade de deformação da fibra, quando comparada com a deformação da matriz de cimento, também deve ser analisada para avaliar qual a capacidade de reforço a fibra pode proporcionar à matriz.

Uma forma de explicar a capacidade de reforço proporcionada pela adição de fibras ao concreto é apresentada por FIGUEIREDO (2005), na qual uma matriz hipotética é reforçada com três tipos de fibras, uma de baixo módulo de elasticidade e duas de alto módulo, sendo uma de baixa e outra de alta resistência mecânica (**Figura 10**). Todas as fases foram consideradas como de comportamento elástico perfeito. A linha O-A representa a relação tensão por deformação específica da matriz hipotética, as linhas O-B e O-C representam o comportamento elástico com as fibras de alto módulo com alta e baixa resistência, respectivamente, e a linha O-D o comportamento com a fibra de baixo módulo.

Figura 10 – Diagrama de tensão-deformação elástica de matriz e fibras de alto e baixo módulo de elasticidade trabalhando em conjunto. (adaptado de FIGUEIREDO, 2005)

No instante em que a matriz se rompe (PONTO A) e transfere a tensão para a fibra de baixo módulo (PONTO D), esta apresenta uma tensão muito baixa nesse nível de deformação (σ_{FIBRA} de E baixo), resultando numa baixa capacidade de reforço pós-fissuração pela fibra. Para que a fibra de baixo módulo atue como reforço da matriz, esta deveria ser deformada até atingir o nível de tensão que causou o rompimento da matriz (σ_{MATRIZ}). No entanto, isto causaria uma grande deformação do compósito, com elevado nível de fissuração, além do que, normalmente, fibras de baixo módulo também apresentam menor resistência mecânica (**Tabela 1**), o que acarretaria na necessidade de se ter que usar um grande volume de fibra para possibilitar o reforço da matriz, o que pode inviabilizar a aplicação do material. Por outro lado, a fibra de alto módulo de elasticidade e alta resistência já apresentará um elevado nível de tensão (σ_{FIBRA} de E alto e alta resistência) no momento da ruptura da matriz, o que lhe permitirá atuar como um reforço já a partir do PONTO B, caso sua resistência não seja superada, o que é muito freqüente quando se utiliza um baixo consumo de fibras. No entanto, mesmo que uma fibra tenha elevado módulo de elasticidade, mas tenha uma baixa resistência à tração ou ao cisalhamento, sua capacidade de reforço pós-fissuração será reduzida ou até inexistente. Esse caso ocorre na linha O-C, na qual pode-se constatar que, no momento em que ocorre a ruptura da matriz (PONTO A), as tensões resistentes das fibras já foram superadas ou o limite último de deformação das fibras já foi ultrapassado, ou seja, quando a matriz romper, as fibras já terão sido rompidas e não conferirão nenhum tipo de reforço. Essa preocupação é importante, pois a base do desempenho dos concretos reforçados com fibras está no papel exercido pelas fibras de ponte de transferência de tensões pelas fissuras.

Quanto à capacidade de reforço proporcionada pela adição de fibras, pode-se concluir que as de baixo módulo de elasticidade, como por exemplo, as de polipropileno, “nylon” e polietileno, só serão efetivas nas primeiras idades, quando o concreto possui baixa resistência e módulo de elasticidade, ficando restringida sua aplicação ao controle de fissuração devido à retração plástica. Já as fibras de aço, que possuem alta resistência e alto módulo de elasticidade, atuam como reforço do concreto endurecido, podendo até substituir a armadura convencional em algumas aplicações (FIGUEIREDO, 2005).

2.5.1 APLICAÇÕES DO CRFA

Em algumas aplicações o concreto reforçado com fibras apresenta vantagens tecnológicas e econômicas em relação ao concreto convencional (FIGUEIREDO, 2000). Entre as aplicações atuais do CRFA, estão os revestimentos de túneis, estabilização de taludes, elementos pré-moldados, pisos industriais e pavimentos de aeroportos e portos. As vantagens de utilização do CRFA em tubos de esgoto foram comprovadas por CHAMA NETO e FIGUEIREDO (2003), sendo esta uma das mais promissoras utilizações do CRFA.

No Brasil, as principais aplicações do CRFA se concentram nos pavimentos e nos revestimentos de túneis. O interesse pelo primeiro se dá por algumas vantagens tecnológicas, como a eliminação da etapa de colocação da armadura, proporcionando um menor tempo de execução da obra e menor número de operários, além de economia de espaço na obra por não necessitar a estocagem de armaduras. As vantagens de utilização em túneis são, principalmente, pelo fato do concreto projetado com fibras poder ser aplicado imediatamente após a escavação, diminuindo o risco de acidentes por desprendimento de parte do maciço, além de aumentar a velocidade de execução do túnel devido a eliminação da fase de instalação da tela metálica (FIGUEIREDO, 2005).

A **Figura 11** ilustra algumas aplicações práticas do CRFA, destacando-se sua utilização em elementos pré-moldados, concreto projetado, pisos e pavimentos.

Figura 11 – Aplicações práticas de CRFA.

(a) Anéis pré-moldados para revestimento de túneis (<http://www.maccaferri.com.br> – acessado em 17/08/2007); (b) Blocos de fundação pré-moldados (adaptado de Lambrechts, 1999, *apud* PASA, 2007); (c) Tubos de esgoto (<http://www.belgo.com.br> - acessado em 17/08/2007); (d) Concreto projetado em túneis (doação do Prof. Antônio D. Figueiredo – POLI-USP); (e) Recuperação de estruturas; (f) Revestimento de taludes (doação do Prof. Antônio D. Figueiredo – POLI-USP); (g) Pisos industriais (<http://www.maccaferri.com.br> – acessado em 17/08/2008); (h) Novas construções; (i) Radier (<http://www.belgo.com.br> – acessado em 17/08/2007)

2.5.2 FATORES INFLUENTES NO COMPORTAMENTO DO CRFA

O alto módulo de elasticidade e resistência à tração das fibras de aço faz com que sua adição ao concreto tenha por objetivo o seu reforço primário, ou seja, essas fibras não são adicionadas apenas para reduzir a fissuração do concreto, mas objetivam aumentar sua capacidade resistente frente a diversos tipos de esforços solicitantes e, principalmente, aumentar a sua ductilidade, conforme já foi observado em diversos trabalhos disponíveis na literatura.

O aumento da ductilidade ocasionada pela introdução de fibras de aço é devido a sua atuação pós-fissuração, onde as fibras servem como pontes de transferência de tensões através das fissuras, diminuindo a concentração de tensões em suas extremidades, ocasionando uma menor velocidade de propagação e, conseqüentemente, uma maior deformabilidade desse material.

Segundo BARROS (1996), melhorias decorrentes da adição de fibras ao concreto são funções das propriedades dos elementos constituintes da matriz, das propriedades mecânicas e características geométricas das fibras, do processo de fabricação do material compósito e da interação fibra-matriz. Essas variáveis que definem o comportamento do compósito fazem com que esse material passe a ter exigências específicas para o seu controle de qualidade, dosagem e aplicação diferentes do concreto convencional (FIGUEIREDO, 2000). Deve também ser exigida, no caso do uso de fibras dispersas, uma adequada mistura e dispersão das fibras na matriz do concreto, pois a ocorrência de falhas na distribuição das mesmas permite a criação de regiões frágeis que favorecem a formação de fissuras.

A diferença entre um campo de distribuição de tensões atuando num concreto sem fibras de aço e outro com fibra adicionada pode ser vista na **Figura 12**. O concreto sem fibras, por ser um material marcadamente frágil, apresenta-se suscetível à concentração de tensões quando do surgimento e propagação de uma fissura a partir do aumento de tensão a ele imposta. Neste caso a fissura representa uma barreira à propagação de tensões, representada simplifiadamente pelas linhas de tensão. Este desvio irá implicar numa concentração de tensões na extremidade da fissura e, no caso desta tensão superar a resistência da matriz, teremos a ruptura abrupta do material. Caso o esforço seja cíclico, pode-se interpretar a ruptura por fadiga da mesma forma, ou seja, para cada ciclo há uma pequena propagação das

microfissuras e, conseqüentemente, um aumento progressivo da concentração de tensões em sua extremidade até o momento da ruptura do material. Logo, a partir do momento que se abre a fissura no concreto, este rompe abruptamente, caracterizando um comportamento tipicamente frágil, ou seja, não se pode contar com nenhuma capacidade resistente do concreto fissurado (FIGUEIREDO, 2005).

Figura 12 – Esquema de concentração de tensões para um concreto sem e com reforço de fibras. (FIGUEIREDO, 2005)

Com a adição de fibras de aço com resistência e módulo adequado ao concreto num teor apropriado, este deixa de apresentar um comportamento frágil. Isso ocorre pelo fato da fibra atuar como ponte de transferência de tensões pelas fissuras, minimizando a concentração de tensões nas extremidades das mesmas, conforme ilustra a **Figura 12**. Desta a forma as fibras são recomendadas inclusive para serem adicionadas a concretos convencionalmente armados, como uma armadura complementar para diminuir a fissuração do material (FIGUEIREDO, 2005).

2.5.2.1 INTERAÇÃO FIBRA-MATRIZ

Segundo PASA (2007) o comportamento do concreto com adição de fibras é controlado por processos de transferência de tensão da matriz para as fibras. Em matrizes frágeis, como o concreto, o efeito da transferência de tensão é influenciado por uma série de fatores, tais como: a condição da matriz, ou seja, antes da fissuração ou após a fissuração; propriedades mecânicas da matriz e da fibra; a geometria da fibra, ou seja, o seu comprimento, forma, diâmetro e mecanismo de ancoragem e o teor de fibras no compósito.

Para tentar simular a interação fibra-matriz, os vários modelos propostos na literatura técnica produzem uma solução analítica, as quais geralmente são baseadas em resultados obtidos com ensaios de arrancamento “*pull-out*” (**Figura 13**). Esses modelos constituem uma base para a compreensão e para o estabelecimento do mecanismo de interação que influenciam significativamente o desempenho de um material de características frágeis. Os processos envolvidos na interação fibra-matriz ocorrem num volume bastante reduzido da matriz, localizado em torno da fibra. A micro-estrutura da matriz nesta zona é bastante diferente do restante da matriz e por isso pode ser considerada como uma terceira fase com propriedades próprias. O completo entendimento do mecanismo responsável pela transferência de tensão é de fundamental importância para a determinação da lei constitutiva em termos da relação tensão-deformação do compósito. Em materiais frágeis o processo de transferência de tensão pode ser dividido em duas fases, a primeira chamada de pré-fissuração e a segunda de pós-fissuração (SANT’ANA, 2005).

Figura 13 – Ensaio de “*pull-out*” em andamento.
(BANTHIA; TROTTIER, 1994)

Segundo BENTUR e MINDESS (1990), antes da fissuração o mecanismo dominante de transferência de tensão é o elástico e os deslocamentos longitudinais na interface da fibra e da matriz são geometricamente compatíveis. Em função da diferença entre os módulos de elasticidade da fibra e da matriz, tensões tangenciais são desenvolvidas na interface, distribuindo a carga externa entre a fibra e a matriz. Segundo esses autores a distribuição das tensões tangenciais ao longo da interface fibra-matriz não é uniforme, conforme se observa na **Figura 14**.

Figura 14 – (a) Esquema de deformações; (b) Distribuição de tensões de cisalhamento ao longo da interface fibra-matriz. (adaptado de BENTUR; MINDESS, 1990)

Em avançados estágios de carga, ocorrem descolamentos entre a fibra e a matriz e o mecanismo de transferência de tensão entre ambas passa a ser por atrito, ocorrendo deslocamentos relativos entre a fibra e a matriz. A tensão de atrito desenvolvida é uma tensão tangencial, sendo agora considerada como uniformemente distribuída ao longo da interface. Esse processo tem maior importância na pós-fissuração, onde as fibras atuam como pontes de ligação através das fissuras, controlando, inclusive, propriedades como a resistência e a deformação específica últimas do compósito (BENTUR; MINDESS, 1990).

Na **Figura 15** pode ser observada a representação das tensões tangenciais na interface fibra-matriz durante o processo de arrancamento. Nela percebe-se que a transição do mecanismo de transferência de tensão elástico para transferência de tensão por atrito ocorre quando as tensões tangenciais na interface fibra-matriz excedem o limite de resistência ao cisalhamento “ τ_{au} ”, a partir do qual o deslocamento entre fibra e matriz é iniciado, fazendo com que as tensões de atrito passem a atuar na superfície. “ τ_{fu} ” é denominada a máxima tensão tangencial de atrito que pode ocorrer na interface.

Figura 15 – Representação das tensões tangenciais (cisalhante) na interface fibra-matriz.
(adaptado de BENTUR; MINDESS, 1990)

Além da transferência de tensões por cisalhamento, também devem ser considerados os efeitos das tensões e deformações específicas normais que surgem na interface. As tensões normais são resultantes do efeito de Poisson, de alterações de volume e de carregamentos biaxiais e triaxiais, podendo causar enfraquecimento da interface e um desligamento prematuro das fibras e alterando a resistência ao atrito, que é sensível a este tipo de tensão.

Quando da adição de fibras de aço com ancoragem, também devem ser levados em conta, além do que já foi citado anteriormente, a transferência mecânica de tensões proporcionadas pela ancoragem.

Um exemplo de modelo de transferência de tensões fibra-matriz para fibras retas obtido por ensaios de arrancamento de fibras (*“pull-out test”*) é apresentado por BARTOS (1981, *apud* BENTUR; MINDESS, 1990). Na **Figura 16** pode-se observar a curva carga de arrancamento por escorregamento da fibra proposto no modelo. O trecho (A-B) da curva demonstra a transferência de tensões por aderência, enquanto o trecho (B-C) caracteriza o descolamento gradual da fibra. A queda súbita da curva no trecho (C-D) marca a ocorrência do descolamento total da fibra. A partir do ponto D a curva decresce gradualmente e indica a ação do mecanismo de transferência de tensões por atrito.

Figura 16 – Diagrama simplificado de força de arrancamento por escorregamento proposto por BASTOS, 1981. (adaptado de BENTUR; MINDESS, 1990)

2.5.2.2 COMPRIMENTO CRÍTICO

Comprimento crítico é aquele que quando da ocorrência de uma fissura perpendicular à fibra, e posicionada na região média do seu comprimento, proporciona uma tensão no seu centro igual à sua tensão de ruptura (BENTUR; MINDESS, 1990). Ainda segundo estes autores a definição do comprimento crítico está baseada no modelo que descreve a transferência de tensão entre a matriz e a fibra como aumentando linearmente dos extremos para o centro da fibra.

A **Figura 17** ilustra todas as possibilidades de distribuição de tensões nas fibras em relação ao comprimento crítico. Quando a fibra tem um comprimento menor que o crítico ($L_f < L_c$), a carga de arrancamento proporcionada pelo comprimento embutido na matriz não é suficiente para produzir uma tensão que supere a resistência da fibra. Este é o caso normalmente encontrado para as fibras de aço no concreto de baixa e moderada resistência. Nessa situação, com o aumento da deformação e, conseqüentemente, da abertura da fissura, a fibra, que está atuando como ponte de transferência de tensões pela fissura, será arrancada do lado que possuir menor comprimento embutido. Quando o comprimento da fibra é maior ($L_f > L_c$) ou igual ($L_f = L_c$) ao comprimento crítico, é possível desenvolver na fibra uma tensão de tração igual à sua resistência e, no caso de um comprimento de fibra maior do que o comprimento crítico, a ruptura do compósito será predominante por ruptura da fibra. Uma forma de

ultrapassar o comprimento crítico, causando a ruptura de algumas fibras, é aumentando a resistência mecânica do concreto, melhorando desta forma a aderência entre fibra e matriz.

Figura 17 – Distribuições possíveis de tensão ao longo de uma fibra em função do comprimento crítico. (adaptado de BENTUR; MINDESS, 1990)

2.5.2.3 VOLUME CRÍTICO

Volume crítico é aquele que corresponde ao teor de fibras que mantém a mesma capacidade portante para o compósito a partir da ruptura da matriz (BENTUR; MINDESS, 1990). Esse conceito se encontra ilustrado na **Figura 18**, onde se encontram apresentadas curvas de carga por deflexão em prismas de concretos com fibras rompidos à flexão. Existe um trecho linear inicial correspondente ao estágio pré-fissurado da matriz do compósito e outro, similar a um patamar de escoamento, onde se pode diferenciar o comportamento do concreto reforçado com teores abaixo, acima e igual ao volume crítico. Quando o volume de fibras adicionado está abaixo do volume crítico, no momento em que haja a ruptura da matriz, ocorre necessariamente uma queda na carga que o material tem capacidade de suportar. Quando há um volume de fibras acima do volume crítico, o compósito continua aceitando níveis de carregamento crescentes mesmo após a ruptura da matriz.

Figura 18 – Compósitos reforçados com fibras submetidos a ensaio de tração na flexão. (a) Com teores abaixo do volume crítico; (b) Acima do volume crítico; (c) Igual ao volume crítico. (adaptado de BENTUR; MINDESS, 1990)

2.5.3 COMPORTAMENTO MECÂNICO DO CRFA

Segundo BARROS (1996), a correta adição de fibras em materiais de matriz cimentícia melhora algumas propriedades do compósito, como a ductilidade, capacidade de absorção de energia, comportamento sob fissuração e resistência sob ações estáticas e dinâmicas.

Para avaliar o comportamento à tração do CRFA, alguns pesquisadores têm utilizado o ensaio de tração direta. No entanto, segundo o ACI 544.4R-88 (2004) não existe padrão deste ensaio que determine a curva tensão-deformação de concretos com fibras, além do que, essas curvas seriam dependentes do tamanho do corpo-de-prova, método de ensaio, rigidez da máquina de ensaio e aparelhagem utilizada.

Resultados dos ensaios de tração direta realizados por MINDESS (1990, *apud* VILLARES, 2001) em espécimes de CRFA podem ser vistos na **Figura 19**. Foram utilizadas fibras com diferentes fatores de forma e volume adicionado, calculado pelos autores como abaixo do volume crítico.

Figura 19 – Relação entre o teor de fibras e a resistência à tração para concreto reforçado com fibras com diferentes fatores de forma. (adaptado de MINDESS, 1990, *apud* VILLARES, 2001)

Com os resultados obtidos, MINDESS (1990) concluiu que apesar da resistência à tração se apresentar diretamente proporcional ao fator de forma e ao volume das fibras adicionadas na mistura, seu incremento quando da utilização de um volume de fibras abaixo do volume crítico não altera significativamente esta propriedade mecânica. Segundo SHAH *et al.* (1972, *apud* ACI 544.4R-88, 2004) na maioria das vezes é utilizado menos de

2% em volume de fibras, o que não acarreta num aumento significativo na resistência à tração. Entretanto, quando da utilização de fibras de aço com alto módulo de elasticidade a resistência à tração pode ser bastante aumentada.

Devido a adição de fibras de aço ao concreto não ter como objetivo principal a otimização da resistência à compressão deste material, sua utilização faz com que este fenômeno seja avaliado de forma secundária na maioria das pesquisas. Os resultados obtidos por diferentes autores apresentam discordâncias. BENTUR e MINDESS (1990) apontam que a adição de fibras produz pouco ou nenhum aumento na resistência à compressão do concreto. Alguns trabalhos relatam até uma diminuição da resistência à compressão com a adição de fibras, justificando-a com uma má compactação obtida com o material. No entanto, estudos conduzidos por WILLIAMSON (1974, *apud* ACI 544.4R-88, 1988) obtiveram um aumento de resistência à compressão de 23% para uma adição de 2% de fibra em volume.

Quanto à tenacidade, principal efeito a ser avaliado quando da adição de fibras, foi observado um aumento deste fenômeno com o aumento do teor de fibras utilizado, ou mesmo com o aumento do fator de forma (**Figura 20**). Segundo FIGUEIREDO (2000) este ganho de tenacidade à compressão é devido à atuação das fibras como ponte de transferência de tensões pelas fissuras oriundas de esforços de tração ou cisalhamento que ocorrem no ensaio de compressão.

Figura 20 – Fatores Influente na curva tensão-deformação. (a) Volume de fibras; (b) Fator de forma.
(adaptado de ACI 544.4R-88, 2000)

Nos estudos conduzidos por FANELLA e NAAMAN (1985) foi comparada a resistência à compressão de concreto reforçado com adição de 1% em volume de diferentes tipos de fibras (**Figura 21 - a**) e, posteriormente, do CRFA com diferentes volumes de fibras (**Figura 21 - b**). O CRFA obteve uma maior resistência à compressão quando comparado com o concreto

sem fibras e aqueles reforçados com fibras de vidro e polipropileno. No entanto, pode-se observar novamente que o principal efeito da adição das fibras foi o aumento da tenacidade do compósito, obtendo curvas com declividades mais suaves a partir da carga de pico, sendo estas diretamente proporcionais à quantidade de fibras adicionada na mistura.

Figura 21 – Curva tensão-deformação. (a) Para diferentes tipos de fibras adicionadas; (b) CRFA com diferentes adições em volume de fibras. (adaptado de FANELLA; NAAMAN, 1985)

Com o intuito de avaliar a influência da matriz cimentícia no comportamento do CRFA, BALAGURU (1992) estudou a influência da adição de fibras de aço em concretos convencionais e de alta resistência, submetidos a esforços de compressão. Concluiu que os concretos de alta resistência, por serem mais frágeis que os convencionais, acabam demandando um maior volume de fibras para aumentar sua ductilidade (**Figura 22**).

Figura 22 – Curva tensão-deformação na compressão de CRFA de 50mm e com ganchos. (a) Concretos de Alta Resistência; (b) Concretos Convencionais. (adaptado de BALAGURU, 1992)

Os poucos trabalhos existentes na literatura que analisam o comportamento do CRFA submetido a esforços biaxiais relatam que é bastante significativa a influência das fibras na resistência do concreto quando submetido a este tipo de solicitação. Para ilustrar esse

comportamento pode-se citar os ensaios realizados por YIN *et al.* (1989) e por SWADDIWUDHIPONG e SEOW (2006).

Yin *et al.* (1989) obtiveram um aumento considerável de resistência a esforços biaxiais de CRFA quando comparados a concretos sem fibras. A **Figura 23** ilustra os resultados obtidos pelos autores, nos quais foi observado um aumento de 35% para o caso de adição de fibras de 2% em volume, para uma razão entre as tensões principais $\frac{\sigma_2}{\sigma_3} = \frac{-0,2}{-1}$ e comprimento da fibra de 25,4mm.

Figura 23 – Envolvória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibras.
(adaptado de YIN *et al.*, 1989)

A **Figura 24** mostra os resultados recentes obtidos por SWADDIWUDHIPONG e SEOW (2006) para concretos com adições de 0,5%, 1% e 2% submetidos a ensaios de compressão biaxial. Também observa-se um aumento de resistência à compressão biaxial com o aumento de adição de fibras.

Figura 24 – Envoltória de resistência biaxial para o concreto convencional e para o concreto com fibras. (adaptado de SWADDIWUDHIPONG; SEOW, 2006)

Há um grande número de trabalhos disponíveis na literatura que avaliam a influência da adição de fibras de aço ao concreto sob esforços cisalhantes (FURLAN JR.; HANAI, 1997; ARAÚZ, 2002; LIM; OH, 1999). Os pesquisadores justificam o interesse em estudar a influência da fibra sob este tipo de solicitação devido à ruptura causada por este esforço ocorrer de forma repentina e catastrófica. Alguns pesquisadores avaliam até mesmo a possibilidade de substituir, pelo menos parcialmente, os estribos por fibras de aço. Segundo BARROS (1996), o principal interesse em substituir armaduras de cisalhamento por fibras seriam em casos como em estruturas de parede delgada, onde há grande dificuldade de colocação dos estribos sem dificultar a concretagem; zonas de elevada densidade de armadura, onde a concretagem é difícil, e em elementos de reduzida altura, em que os estribos são poucos eficazes.

Nas estruturas de concreto armado, usualmente são utilizados estribos para combater os esforços cisalhantes. No entanto, segundo o ACI 544.4R-88 (1988), a utilização de fibras de aço juntamente com estribos apresentaria as seguintes vantagens: a aleatoriedade da distribuição dessas fibras, com pequeno espaço entre as mesmas, por todo o volume do concreto, o que não pode ser obtido através do reforço convencional, proporcionando um aumento da resistência à tração para a primeira fissura (*“first-crack tensile strength”*), da resistência à tração do concreto e da sua resistência ao corte (*“shear-friction strength”*).

A **Figura 25** mostra os resultados dos ensaios de cisalhamento direto em corpos-de-prova semelhantes de CRFA obtidos por SWAMY *et al.* (1987, apud SIMÕES, 1998) para diferentes volumes de fibras. São traçadas as curvas “tensão cisalhante-deslocamento vertical” e “tensão cisalhante-deslocamento horizontal”. Os pesquisadores observaram um aumento no desempenho do material para um aumento do teor de fibras, além de uma diminuição do deslocamento lateral dos corpos-de-prova acompanhado de aumento substancial na sua capacidade de carga.

Figura 25 – Curvas tensão de cisalhamento-deslocamento para concretos sem fibras e com adição de 0,4% e 0,8%. **(a)** Tensão de cisalhamento-deslocamento vertical; **(b)** Tensão de cisalhamento-deslocamento lateral. (adaptado de SWAMY *et al.*, 1987, apud SIMÕES, 1998)

Segundo BARROS (1996) a resistência residual à tração do CRF fissurado é o principal fator que deve ser levado em conta na situação da contribuição das fibras na resistência ao cisalhamento de vigas de concreto armado. Ainda segundo este pesquisador o aumento da resistência ao cisalhamento proporcionado pela adição das fibras se deve fundamentalmente à maior resistência residual à tração do CRFA fissurado.

Segundo BENTUR e MINDESS (1990) a adição de fibras de aço no concreto tem muito mais influência na resistência à flexão que nas resistências à tração direta e compressão. JOHNSTON (1974, apud SANT’ANA, 2005) relata casos em que a resistência à flexão sofre acréscimo de até 150% devido à adição de fibras de aço.

Segundo LOPES (2005) a curva carga-deflexão obtida no ensaio de flexão é função do volume de fibras empregado e das características dessas fibras, como tipo de ancoragem e

fator de forma. A influência do volume de fibra empregado, bem como o comportamento característico à flexão do CRFA podem ser observados na **Figura 26**.

Figura 26 – Curva carga-deflexão de CRF.
(adaptado de ZIA *et al.*, 1996, apud SANT'ANA, 2005)

Percebe-se na figura acima três trechos característicos do comportamento à flexão para concreto reforçado com fibras de aço. No primeiro trecho a carga submetida ao material é compartilhada entre a matriz e as fibras, sendo caracterizado por um comportamento aproximadamente linear até o limite de proporcionalidade ou resistência inicial de fissuração. No segundo trecho começa a aparecer um comportamento não-linear, com transferência progressiva de tensão da matriz fissurada para as fibras, com tendência de arrancamento crescente das fibras até a resistência última à flexão. Para casos em que se utiliza baixo volume de fibras ($V_f < 0,5\%$) este trecho não existe, uma vez que a resistência última à flexão coincide com a resistência inicial de fissuração. O terceiro trecho inicia da resistência última à flexão, a partir da qual a carga reduz gradativamente em função da não contribuição de resistência da matriz e do arrancamento das fibras.

Dentre outros trabalhos desenvolvidos visando avaliar o comportamento à flexão do CRFA podem ser citados os realizados por JONES (1998); LOK e PEI (1998); LOK e XIAO (1999) e LIM *et al.* (1987).

As dificuldades inerentes ao ensaio de tração direta para avaliar a capacidade de absorção de energia provocada pelas fibras (tenacidade), aliada ao fato de que a grande maioria das aplicações do concreto reforçado com fibras envolve fenômenos de flexão (mais especificamente tração na flexão) e não simplesmente tração direta, fizeram com que diversos

métodos baseados em ensaios de flexão fossem desenvolvidos com o objetivo de avaliar a tenacidade através da obtenção de parâmetros obtidos na curva carga-deflexão nesse tipo de ensaio. Dentre os mais utilizados estão o proposto pela “*AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS*” - ASTM C1018 (1994) e o método japonês instituído pela “*JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS*” - JSCE (1984). Segundo FIGUEIREDO (2000), de uma forma geral, o ganho em tenacidade pode ser quantificado pela área sob a curva tensão-deformação. No caso do concreto com fibras, costuma-se adotar a recomendação do ACI (ACI 544.4R-88, 2004), medindo-se a área sob a curva carga-flecha, que representa o trabalho dissipado durante a deformação da estrutura até um determinado nível de deslocamento vertical. Outro método que vem sendo utilizado para a medição da tenacidade de CRFA foi o desenvolvido pela “*RÉUNION INTERNATIONALE DES LABORATOIRES ET EXPERTS DES MATÉRIAUX, SYSTÈMES DE CONSTRUCTIONS ET OUVRAGES*” – RILEM TC 162.

3 MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS APLICADO À ANÁLISE NÃO-LINEAR

Neste capítulo é apresentada a formulação básica do método dos elementos finitos já implementada no programa FEMOOP e uma breve descrição dos elementos finitos planos e unidimensionais utilizados na plataforma FEMOOP & GID para representar respectivamente o concreto e a armadura. Algumas características do modelo discreto utilizado para a representação das armaduras são apresentadas. Por fim é apresentado o método de Newton-Raphson padrão que foi implementado na plataforma desenvolvida para resolução das equações de equilíbrio não-lineares.

O método dos elementos finitos é um dos métodos numéricos mais utilizados para resolução de problemas da mecânica do contínuo, entre eles de mecânica das estruturas. A concepção do método consiste na divisão do domínio de integração, contínuo, em número finito de pequenas regiões denominadas de elementos finitos, que são interligados através de seus nós, como ilustra a **Figura 27**.

Figura 27 – Discretização do meio contínuo em elementos finitos - malha de elementos finitos.

A essa divisão do domínio dá-se o nome de malha ou rede de elementos finitos. A solução obtida via método dos elementos finitos é tão mais precisa quanto mais refinada for a malha de elementos finitos e maior o número de nós. A discretização do modelo deve ser realizada visando uma solução satisfatória dentro da precisão desejada e do tempo esperado.

No método dos elementos finitos, ao invés de se buscar uma função admissível que satisfaça as condições de contorno para todo o domínio do problema, as funções admissíveis são definidas no domínio de cada elemento finito. Para cada elemento finito “ i ”, é montado um funcional “ Π_i ” que, somado aos dos demais elementos finitos, formam o funcional “ Π ” para todo o domínio:

$$\Pi = \sum_{i=1}^n \Pi_i \quad (3.1)$$

A função aproximadora de cada elemento finito “ i ” é formada por variáveis referidas aos nós do elemento (parâmetros nodais) e por funções de interpolação, também denominadas de funções de forma. Desta forma uma função aproximadora “ v ” deve ser escrita como:

$$v = \sum_{j=1}^m a_j \phi_j \quad (3.2)$$

onde “ a_j ” são os parâmetros nodais e “ ϕ_j ” as funções de forma.

Desta forma o funcional “ Π ” fica sendo expresso em função dos parâmetros nodais:

$$\Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \Pi_i(a_j) \quad (3.3)$$

A condição de estacionariedade (condição de equilíbrio) gera, como no método de Rayleigh-Ritz, um sistema de equações algébricas lineares (eq. 3.4), cuja solução fornece os valores dos parâmetros nodais “ a_j ” que podem ser deslocamentos, forças internas, ou ambos, dependendo da formulação do método dos elementos finitos que se utiliza.

$$\delta \Pi(a_j) = \sum_{i=1}^n \partial \Pi_i(a_j) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \frac{\partial \Pi_i(a_j)}{\partial a_j} = 0 \quad (3.4)$$

No método dos elementos finitos as formulações mais comuns são: o *modelo de deslocamentos* também denominado de *modelo da rigidez*, no qual o campo de deslocamento é descrito por funções aproximadoras e as incógnitas são as componentes dos deslocamentos nodais, sendo utilizado o princípio da mínima energia potencial; *modelo das forças* também denominado de *modelo da flexibilidade*, no qual o campo de tensões ou esforços internos é representado por funções aproximadoras e as incógnitas são as tensões ou esforços internos nodais, sendo utilizado o princípio da mínima energia complementar. Por fim os *métodos mistos*, cujas funções aproximadoras são expressas em termos de deslocamentos e forças internas ou tensões e são derivados de princípios generalizados, como o “*princípio de Reissner*” (ASSAN, 2003).

A seguir é apresentada a formulação básica do método dos elementos finitos baseada no *modelo de deslocamentos* ou *modelo da rigidez*. Maiores detalhes podem ser vistos em BATHE (1996).

3.1 FORMULAÇÃO BÁSICA

O funcional energia potencial total, “ Π ”, de um sólido é obtido pela soma da energia potencial dos esforços internos “ Π_{int} ” com a energia potencial dos esforços externos “ Π_{ext} ”:

$$\Pi(u) = \Pi_{int}(u) + \Pi_{ext}(u) \quad (3.5)$$

A energia potencial dos esforços internos, também denominada energia de deformação do sólido, é dada pela eq. (3.6), na qual “ σ ” e “ σ_0 ”, são, respectivamente, a tensão e a tensão inicial.

$$\Pi_{int} = \frac{1}{2} \int_V \epsilon^T (\sigma + \sigma_0) \quad (3.6)$$

Quando o carregamento externo não depende dos deslocamentos, a energia potencial dos esforços externos é dada por:

$$\Pi_{ext} = - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} dV - \int_S \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.7)$$

onde, “ $\bar{\mathbf{b}}$ ” e “ $\bar{\mathbf{t}}$ ” são, respectivamente, as forças de volume e de superfície prescritas.

Desta forma, o funcional energia potencial total de um sólido pode ser escrito como:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_V \boldsymbol{\varepsilon}^T (\boldsymbol{\sigma} + \boldsymbol{\sigma}_0) - \int_V \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{b}} dV - \int_S \mathbf{u}^T \bar{\mathbf{t}} dS \quad (3.8)$$

Utilizando os conceitos de discretização e interpolação do método dos elementos finitos, o deslocamento em um ponto qualquer no interior de um elemento finito pode ser obtido interpolando-se os deslocamentos nodais desse elemento da seguinte forma:

$$\mathbf{u} = \mathbf{N} \mathbf{u}^e \quad (3.9)$$

onde, “ $\mathbf{u}$ ”, é o vetor campo de deslocamento no interior do elemento, “ $\mathbf{u}^e$ ” é o vetor de deslocamentos nodais do elemento, e “ $\mathbf{N}$ ” é a matriz que coleciona as funções de interpolação “ N_i ”. Essas funções possuem valor unitário no nó “ i ” ($N_i = 1$) e zero nos demais pontos nodais ($N_j = 0$).

O campo de deformações específicas, “ $\boldsymbol{\varepsilon}$ ”, no interior de um elemento finito é obtido por:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{B} \mathbf{u}^e \quad (3.10)$$

onde, “ $\mathbf{B}$ ” é a matriz que relaciona o campo de deformações específicas com os deslocamentos nodais do elemento, obtida através da aplicação do operador diferencial “ ∇ ”, sobre a matriz “ $\mathbf{N}$ ”, conforme a equação abaixo:

$$\mathbf{B} = \nabla \mathbf{N} \quad (3.11)$$

O campo de tensões no interior do elemento finito é obtido através da seguinte forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{C}\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.12)$$

na qual “ $\mathbf{C}$ ” é a matriz constitutiva do material, que coleciona as propriedades correntes do material.

Introduzindo as eqs. (3.9), (3.10) e (3.12) na eq. (3.8), o funcional energia potencial total de um elemento finito pode ser escrito como:

$$\Pi_e = \frac{1}{2} \int_{V_e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{B}^T (\mathbf{C} \mathbf{B} \mathbf{u}^e + \boldsymbol{\sigma}_0) dV_e - \int_{V_e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV_e - \int_{S_e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS_e \quad (3.13)$$

onde, “ V_e ” é o volume do elemento finito e “ S_e ” a superfície do elemento finito na qual as forças de superfície são prescritas.

Pelo Teorema da Energia Potencial, o campo de deslocamentos correspondente a uma configuração de equilíbrio estático de um sólido conservativo é um ponto estacionário da energia potencial, ou seja:

$$\delta \Pi = 0, \quad \forall \delta \mathbf{u} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \text{div } \boldsymbol{\sigma} + \bar{\mathbf{b}} = 0 \text{ em } V \\ \bar{\mathbf{t}} = \boldsymbol{\sigma} \hat{\mathbf{n}} \text{ em } S \end{cases} \quad (3.14)$$

esse resultado é equivalente ao Teorema dos Trabalhos Virtuais.

As equações básicas do método dos elementos finitos são obtidas aplicando o Teorema da Energia Potencial na eq. (3.13):

$$\delta \Pi_e = \delta \mathbf{u}^{eT} \left(\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \right) \mathbf{u}^e - \delta \mathbf{u}^{eT} \left(\int_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e \right) = 0 \quad (3.15)$$

Como $\delta \Pi_e = 0, \forall \delta \mathbf{u}^e$, a eq. (3.15) resulta em:

$$\int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \mathbf{u}^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV_e + \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS_e - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e = 0 \quad (3.16)$$

Adotando,

$$\mathbf{K}^e = \int_{V_e} \mathbf{B}^T \mathbf{C} \mathbf{B} dV_e \quad (3.17)$$

$$\mathbf{f}_b^e = \int_{V_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{b}} dV_e \quad (3.18)$$

$$\mathbf{f}_t^e = \int_{S_e} \mathbf{N}^T \bar{\mathbf{t}} dS_e \quad (3.19)$$

$$\mathbf{f}_{\sigma_0}^e = - \int_{V_e} \mathbf{B}^T \boldsymbol{\sigma}_0 dV_e \quad (3.20)$$

$$\mathbf{f}^e = \mathbf{f}_b^e + \mathbf{f}_t^e + \mathbf{f}_{\sigma_0}^e \quad (3.21)$$

onde, “ $\mathbf{f}^e$ ” é o vetor de forças nodais dado pela somatório dos vetores das forças nodais equivalentes às forças de volume “ $\mathbf{f}_b^e$ ”, às forças de superfície “ $\mathbf{f}_t^e$ ”, e às tensões iniciais “ $\mathbf{f}_{\sigma_0}^e$ ”, conforme eq. (3.21) e “ $\mathbf{K}^e$ ” é a matriz de rigidez simétrica de um elemento finito.

Desta forma a eq. (3.16) pode ser escrita de forma compacta como na eq. (3.22), resultando num sistema de equações algébricas de equilíbrio de um elemento genérico.

$$\mathbf{K}^e \mathbf{u}^e = \mathbf{f}^e \quad (3.22)$$

Estendendo o sistema de equações para o problema todo, acumulando as contribuições de rigidez e de forças nodais que ocorrem no sistema de equações de equilíbrio dos diversos elementos da malha, juntamente com as forças nodais externas, obtêm-se o sistema global de equações:

$$\mathbf{K} \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad (3.23)$$

onde, “**K**” é a matriz de rigidez global, “**u**” é vetor de deslocamentos nodais da malha (incluindo os deslocamentos restringidos ou de apoio) e “**f**” o vetor das cargas nodais equivalentes.

Aplicando-se as condições geométricas de contorno do problema, obtêm-se a partir da solução do sistema de equações dada pela eq. (3.23) os deslocamentos “**u**”, com os quais é possível calcular o campo de deformações em cada elemento, conforme eq. (3.10). Finalmente através da relação constitutiva dada pela eq. (3.12) obtêm-se as tensões correspondentes às deformações específicas resultantes.

3.2 ESTRATÉGIAS DE SOLUÇÃO PARA A ANÁLISE NÃO-LINEAR

A formulação do método dos elementos finitos apresentada no item 3.1 foi formulada com base em um material com comportamento linear. A eq. (3.23) obtida no desenvolvimento dessa formulação pode ser escrita como:

$$\Delta \mathbf{Q} = \mathbf{f} - \mathbf{f}_i = \mathbf{0} \quad (3.24)$$

onde, “**f**” é o vetor das forças externas nodais, “**f_i = Ku**” é o vetor das forças internas ou equilibrantes e “**ΔQ**” é o vetor das forças desbalanceadas.

No entanto, como o objetivo deste trabalho envolve a modelagem computacional de estruturas de concreto armado, na qual a matriz constitutiva “**C**” é alterada ao longo da história do carregamento devido a fenômenos como a fissuração, esmagamento, perda de encaixe do agregado, escoamento do aço, e outras particularidades desse material, para a resolução da eq. (3.24), há a necessidade de se aplicar um processo incremental iterativo, devido à matriz de rigidez “**K**” possuir uma dependência não-linear do vetor de deslocamentos “**u**”.

Neste trabalho foi implementado para resolução de sistemas não-lineares o método de Newton-Raphson padrão. Mais detalhes sobre análise não-linear por elementos finitos podem ser vistos em CRISFIELD (1997) e REDDY (2004).

3.2.1 MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON

Para a resolução de problemas que envolvem equações de equilíbrio não-lineares, o método de Newton-Raphson é um dos métodos mais utilizados, aproximando a trajetória de equilíbrio da estrutura por tangentes à mesma até a convergência, limitada por um critério adotado pelo analista.

Há duas formas de abordagem na formulação do método de Newton-Raphson, uma através do controle de deslocamentos e a outra pelo controle de carga. Na primeira o controle de deslocamentos é definido pelo analista, obtendo-se os correspondentes incrementos de carga por processo iterativo. Neste trabalho a formulação customizada do método, utiliza a segunda abordagem, correspondente ao controle de carga, no qual, os incrementos de carga são previamente definidos pelo analista e os correspondentes deslocamentos são obtidos por processos iterativos.

A **Figura 28** ilustra a abordagem por incrementos de carga, na qual, para uma iteração típica de um passo de solução de “ $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ ”, pode-se obter o incremento de deslocamentos através de sucessivas aproximações da forma:

$$\mathbf{K}_T^{i-1} \Delta \mathbf{u}^i = \Delta \mathbf{Q}^{i-1} \quad (3.25)$$

onde “ $\mathbf{K}_T^{i-1}$ ” é a matriz de rigidez tangente na iteração “ $i - 1$ ”, “ $\Delta \mathbf{u}^i$ ” é o vetor de incremento de deslocamento e “ $\Delta \mathbf{Q}^{i-1}$ ” é o vetor de forças não balanceadas, obtido pela diferença entre as forças externas e internas, conforme a equação abaixo:

$$\Delta \mathbf{Q}^{i-1} = \varphi^b \mathbf{f}_0 - \mathbf{f}_i \quad (3.26)$$

na qual o vetor das forças externas é dado pelo produto do vetor de cargas de referência “ $\mathbf{f}_0$ ” por um fator de carga “ φ^b ”, associado ao passo de solução “ $\mathbf{a} \rightarrow \mathbf{b}$ ” e “ $\mathbf{f}_i$ ” é o vetor de forças internas.

Figura 28 – Representação gráfica do método de Newton-Raphson “Standard” para problemas unidimensionais.

Calculado o vetor de incrementos de deslocamento “ $\Delta \mathbf{u}^i$ ”, este é utilizado no final de cada iteração para corrigir o vetor de deslocamentos corrente “ $\mathbf{u}^i$ ”, da seguinte forma:

$$\mathbf{u}^i = \mathbf{u}^{i-1} + \Delta \mathbf{u}^i \quad (3.27)$$

As expressões expostas até aqui estão sujeitas às seguintes condições iniciais:

$$\mathbf{K}_T^0 = \mathbf{K}_T^a \quad (3.28)$$

$$\mathbf{f}_i^0 = \mathbf{f}_i^a \quad (3.29)$$

$$\mathbf{u}^0 = \mathbf{u}^a \quad (3.30)$$

O método de Newton-Raphson descrito acima é denominado na literatura como método de Newton-Raphson padrão - “*standard*”, sendo caracterizado pela atualização da matriz de rigidez tangente a cada iteração.

Na literatura há outras duas variações do método de Newton-Raphson, diferenciados pela forma como atualizam a matriz de rigidez. Uma denominada de método de Newton-Raphson modificado, no qual a matriz de rigidez da estrutura não é atualizada a cada iteração, mas

apenas no início de cada passo de carga e a outra denominada de método de Newton-Raphson com rigidez inicial, a qual prevê o emprego da mesma matriz de rigidez, previamente calculada, em todas as iterações de sucessivos passos de carga.

Os métodos alternativos de Newton-Raphson apresentam como vantagem o menor esforço computacional associado a cada iteração executada, pois a matriz de rigidez da estrutura não precisa ser calculada a cada iteração, reduzida e armazenada ao final de cada uma dessas etapas. No entanto, a escolha de se implementar primeiramente o método de Newton-Raphson padrão, foi devida à convergência mais rápida apresentada ao ponto de equilíbrio.

3.2.2 CRITÉRIO DE CONVERGÊNCIA

O critério de convergência adotado neste trabalho para limitar o método de Newton-Raphson é função do cálculo dos deslocamentos. O critério de convergência para deslocamentos é obtido pela razão entre a norma euclidiana do incremento de deslocamento na iteração “ i ” e a norma euclidiana dos incrementos de deslocamentos acumulados – da primeira à “ i -ésima” iteração, como mostra a equação abaixo:

$$\frac{\|\Delta \mathbf{u}^i\|}{\|\sum_{j=1}^i \Delta \mathbf{u}^j\|} \leq \mathbf{u}_T \quad (3.31)$$

sendo, “ $\mathbf{u}_T$ ” a tolerância arbitrada para os deslocamentos.

3.3 ELEMENTOS FINITOS PARA O CONCRETO E ARMADURA

O programa FEMOOP possui uma biblioteca de elementos finitos isoparamétricos planos e unidimensionais que foram disponibilizados na plataforma FEMOOP & GiD para representar respectivamente o concreto e as armaduras. Para a representação do concreto foram customizados elementos finitos planos triangulares de 3 e 6 nós e quadriláteros de 4 e 8 nós e para a representação das armaduras foram customizados elementos finitos de treliça linear e quadrático de 2 e 3 nós, respectivamente. A **Tabela 2** e a **Tabela 3** descrevem esses elementos e suas respectivas funções de forma.

Tabela 2 – Elementos finitos para a representação das armaduras.

Elementos Finitos para as Armaduras	Funções de Forma
<p>%ELEMENT.L2</p>	$N_1 = \frac{1}{2}(1 - r)$ $N_2 = \frac{1}{2}(1 + r)$
<p>%ELEMENT.L3</p>	$N_1 = \frac{1}{2}(r^2 - r)$ $N_2 = 1 - r^2$ $N_3 = \frac{1}{2}(r^2 + r)$

Tabela 3 – Elementos Finitos para a representação do concreto.

Elementos Finitos para o Concreto	Funções de Forma
<p>%ELEMENT.T3</p>	$N_1 = 1 - r - s$ $N_2 = r$ $N_3 = s$
<p>%ELEMENT.T6</p>	$N_1 = (1 - r - s)(1 - 2r - 2s)$ $N_2 = 4r(1 - r - s)$ $N_3 = r(2r - 1)$ $N_4 = 4rs$ $N_5 = s(2s - 1)$ $N_6 = 4s(1 - r - s)$
<p>%ELEMENT.Q4</p>	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s)$ $N_2 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s)$ $N_3 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s)$ $N_4 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)$
<p>%ELEMENT.Q8</p>	$N_1 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 - s)(-1 - r - s)$ $N_2 = \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 - s)$ $N_3 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 - s)(-1 + r - s)$ $N_4 = \frac{1}{2}(1 + r)(1 - s^2)$ $N_5 = \frac{1}{4}(1 + r)(1 + s)(-1 + r + s)$ $N_6 = \frac{1}{2}(1 - r^2)(1 + s)$ $N_7 = \frac{1}{4}(1 - r)(1 + s)(-1 - r + s)$ $N_8 = \frac{1}{2}(1 - r)(1 - s^2)$

3.3.1 INTEGRAÇÃO NUMÉRICA

Neste trabalho o cálculo das matrizes e dos vetores de carregamento, foi realizado utilizando-se o método de integração numérica de Gauss-Legendre. Os dois elementos de armadura implementados “L2” e “L3” utilizam três pontos de Gauss para a integração numérica como mostra a **Tabela 4**. Os elementos triangulares “T3” e “T6” para a representação do concreto utilizam três pontos de Gauss e os elementos quadrilaterais “Q4” e “Q8” utilizam nove pontos de Gauss (**Tabela 5**).

Tabela 4 – Coordenadas e pesos dos pontos de Gauss dos elementos finitos implementados para as armaduras.

Elementos Finitos	Quantidade de pontos de Gauss	Coordenadas dos Pontos de Gauss	Coefficientes de Ponderação (Peso)
%ELEMENT.L2 e %ELEMENT.L3	3	$\pm 0,77459\ 66692\ 41483$ 0,00000 00000 00000	0,55555 55555 55555 0,88888 88888 88889

Tabela 5 – Coordenadas e pesos dos pontos de Gauss dos elementos finitos implementados para o concreto.

Elementos Finitos	Quantidade de pontos de Gauss	Coordenada r	Coordenada s	Coefficientes de Ponderação (Peso)
%ELEMENT.T3 e %ELEMENT.T6	3	0,16666 66666 667 0,66666 66666 667 0,16666 66666 667	0,16666 66666 667 0,16666 66666 667 0,66666 66666 667	0,16666 66666 667 0,16666 66666 667 0,16666 66666 667
%ELEMENT.Q4 e %ELEMENT.Q8	9	-0,77459 66692 41483 0,00000 00000 00000 0,77459 66692 41483 -0,77459 66692 41483 0,00000 00000 00000 0,77459 66692 41483 -0,77459 66692 41483 0,00000 00000 00000 0,77459 66692 41483	-0,77459 66692 41483 -0,77459 66692 41483 -0,77459 66692 41483 0,00000 00000 00000 0,00000 00000 00000 0,00000 00000 00000 0,77459 66692 41483 0,77459 66692 41483 0,77459 66692 41483	0,30864 19750 00000 0,49382 71600 00000 0,30864 19750 00000 0,49382 71600 00000 0,79012 34560 00000 0,49382 71600 00000 0,30864 19750 00000 0,49382 71600 00000 0,30864 19750 00000

3.4 REPRESENTAÇÃO DAS ARMADURAS VIA MEF

Em análise numérica de estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos, são três os tipos mais comuns de representar as armaduras: discreta, incorporada e distribuída (**Figura 29**). Há ainda na literatura uma quarta forma de representação denominada axissimétrica pontual, que muitos autores classificam esse tipo de representação dentro do modelo discreto, pelo fato da armadura ser introduzida diretamente sobre um nó do elemento representativo do concreto.

Figura 29 – Modelos de Representação de armadura (a) Distribuída; (b) Discreta; (c) Incorporada. (adaptado de SIMÃO, 2003)

Neste trabalho as armaduras foram representadas através do modelo discreto, no qual há uma dependência da malha de elementos finitos para posicionar os elementos de armadura, uma vez que estes devem ser posicionados nas arestas dos elementos de concreto. Essa dependência de haver uma conectividade dos nós dos elementos de concreto com os elementos de aço, fez com que o uso dos elementos finitos utilizados na plataforma tivesse que obedecer a seguinte regra de combinação dos elementos finitos de concreto e armadura: quando a representação do concreto for feita por elementos “T3” ou “Q4” devem ser utilizados para a armadura elementos “L2”, e quando da utilização de elementos “T6” e “Q8” devem ser utilizados elementos “L3” para as armaduras. Com esta combinação a compatibilidade entre os nós dos elementos de concreto e armadura ficam assegurados. A **Figura 30** ilustra o uso da representação discreta das armaduras na plataforma customizada FEMOOP & GiD.

Figura 30 – Representação discreta das armaduras na plataforma GiD & FEMOOP.

A representação incorporada apresenta a vantagem da independência entre a malha de elementos finitos e o posicionamento das armaduras. Segundo HARTL (2002), esta abordagem leva em consideração a presença discreta das barras dentro do elemento a qual está incorporada, podendo interceptar o elemento em qualquer direção, além de poder mudar livremente de direção dentro do elemento.

A representação distribuída possui todos os atributos da representação incorporada, porém com a vantagem de poder atribuir taxa de armadura constante, em uma determinada direção definida por " θ ". Este tipo de representação é bastante vantajosa para o lançamento de armaduras de lajes, estribos de vigas e outros elementos estruturais que possuem armaduras com espaçamentos constantes.

A formulação axissimétrica pontual é indicada para representar armaduras de confinamento ou cisalhamento tais como estribos circulares e espirais.

4 MODELOS CONSTITUTIVOS PARA O CONCRETO ARMADO E REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Leis, equações, modelos materiais ou ainda “equações constitutivas” são relações entre grandezas físicas com as quais a “Teoria dos Materiais” procura introduzir as propriedades dos materiais num modelo mecânico. Em uma teoria puramente mecânica utilizam-se equações constitutivas que relacionam as tensões atuantes num sólido num determinado instante com a configuração do sólido até aquele instante.

Numa análise envolvendo um material composto, como o concreto armado, o comportamento da estrutura é função do comportamento dos seus constituintes (aço e concreto), da interação entre estes materiais, do nível do carregamento, da propagação de fissuras, etc., sendo tão mais realista o modelo, quanto maior o número de incógnitas peculiares ao comportamento do material forem consideradas.

Neste trabalho utilizou-se para o concreto um modelo elástico não-linear com comportamento isotrópico até o limite de ruptura, que pode ser definido utilizando o modelo de Willam e Warnke de 5 parâmetros ou o modelo de Ottosen. Para o concreto fissurado adotou-se um modelo de fissuração distribuída do tipo rotacional, com uma lei de amolecimento linear. As armaduras têm seu comportamento descrito através de um modelo elasto-plástico bilinear. A interação entre as armaduras e o concreto foi considerada como de aderência perfeita.

Especificamente para considerar a presença de fibras de aço descontínuas na matriz de concreto, é utilizado o critério de ruptura proposto por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005), que é uma alteração no meridiano de tração do critério proposto por Willam e Warnke. Para o concreto reforçado com fibras de aço fissurado considera-se o trecho pós-fissuração proposto no modelo de tração de LIM *et. al* (1987).

Descreve-se a seguir os modelos implementados na plataforma desenvolvida para o concreto simples, reforçado com fibras de aço, critérios de resistência empregados, e o modelo empregado para as armaduras.

4.1 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO

Foi considerado para a representação do concreto na plataforma desenvolvida um modelo elástico não-linear com comportamento isotrópico até o limite de ruptura, acoplado a um modelo de amolecimento para a região fissurada, cuja representação é feita através do modelo de fissuras distribuídas do tipo rotacional. No entanto diversos outros modelos para o concreto, como modelos de microplanos, modelos de dano de Mazars, etc., estão disponíveis no FEMOOP e podem ser incluídos futuramente na customização para aproveitarem todos os recursos disponíveis pela plataforma desenvolvida.

4.1.1 CONCRETO ÍNTEGRO

O concreto íntegro apresenta comportamento elástico não-linear com comportamento isotrópico até o limite de ruptura ao qual pode ser definida utilizando os critérios de resistência de Willam e Warnke de 5 parâmetros ou modelo de Ottosen.

Para um material com comportamento isotrópico, o funcional que define a superfície de ruptura do material pode ser escrito de três formas:

$$F(I_1, J_2, J_3) = 0 \quad , \quad F(\xi, \rho, \theta) = 0 \quad , \quad F(\sigma_{oct}, \tau_{oct}, \theta) = 0 \quad (4.1)$$

Na primeira o funcional é definido em função dos invariantes “ I_1 ”, primeiro invariante do tensor das tensões, “ J_2 ” e “ J_3 ” o segundo e terceiro invariantes respectivamente do tensor anti-esférico das tensões. Na segunda o funcional é expresso no espaço das tensões de “Haigh-Westergaard” em função das coordenadas “ ξ ”, “ ρ ” e “ θ ” e na terceira forma o funcional é expresso em função das tensões normal “ σ_{oct} ” e cisalhante “ τ_{oct} ” octaédricas.

Ordenando as tensões principais em “ $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$ ”, os invariantes podem ser calculados da seguinte forma:

$$I_1 = \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \sigma_{zz} \quad (4.2)$$

$$J_2 = \frac{1}{2} \left[(\sigma_{xx} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{yy} - \sigma_m)^2 + (\sigma_{zz} - \sigma_m)^2 \right] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \quad (4.3)$$

$$J_3 = (\sigma_{xx} - \sigma_m) \left[(\sigma_{yy} - \sigma_m)(\sigma_{zz} - \sigma_m) - \tau_{xz}^2 \right] + \tau_{xy} \left[\tau_{xy}(\sigma_{zz} - \sigma_m) - \tau_{yz}\tau_{xz} \right] + \tau_{xz} \left[\tau_{xy}\tau_{yz} - (\sigma_{yy} - \sigma_m)\tau_{xz} \right] \quad (4.4)$$

sendo, “ σ_m ”, a tensão normal média de acordo com a eq. (4.5) e “ σ_{xx} ”, “ σ_{yy} ”, “ σ_{zz} ”, “ τ_{xy} ”, “ τ_{xz} ” e “ τ_{yz} ” as tensões totais.

$$\sigma_m = \frac{I_1}{3} \quad (4.5)$$

A **Figura 31** ilustra a superfície de ruptura em função das coordenadas de “Haigh-Westergaard”, que podem ser obtidas por:

$$\xi = \frac{1}{\sqrt{3}} I_1 = \sqrt{3} \sigma_{oct} = \sqrt{3} \sigma_m \quad (4.6)$$

$$\rho = \sqrt{2J_2} = \sqrt{3} \tau_{oct} = \sqrt{5} \tau_m \quad (4.7)$$

$$\cos \theta = \left[\frac{2\sigma_1 - \sigma_2 - \sigma_3}{\sqrt{2} \sqrt{(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2}} \right] \quad (4.8)$$

Figura 31 – Superfície de ruptura em função das coordenadas de “Haigh-Westergaard”.

A superfície de ruptura também pode ser visualizada através de sua seção transversal (**Figura 32**) nos planos anti-esféricos ou octaédricos, bem como seus meridianos para “ $\theta = 0^\circ$ ” (meridiano de tração), “ $\theta = 30^\circ$ ” (meridiano de cisalhamento) e “ $\theta = 60^\circ$ ” (meridiano de compressão). Esses três meridianos satisfazem a relação $\rho_c \geq \rho_s \geq \rho_t$.

Figura 32 – Superfície de ruptura. (a) seções anti-esféricas; (b) seções meridianas.

As seções transversais são definidas como curvas de interseção entre a superfície de ruptura e o plano anti-esférico, que é um plano perpendicular ao eixo hidrostático, considerando “ ξ ” constante. Essas seções apresentam setores de simetria, sendo necessário analisar somente o intervalo $0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$. Os meridianos das superfícies de ruptura são curvas de interseção entre esta superfície e um plano meridiano, que contém o eixo hidrostático, considerando “ θ ” constante (CHEN e SALEEB, 1994).

4.1.2 CRITÉRIOS DE RESISTÊNCIA PARA O CONCRETO

Diversos critérios de resistência para o concreto estão disponíveis na literatura. Segundo CHEN e SALEEB (1994), os primeiros critérios de resistência eram compostos por um ou dois parâmetros, os quais eram satisfatórios para cálculos manuais. Ainda segundo os autores, com o surgimento dos computadores e a divulgação de uma maior quantidade de dados de ensaios, estes modelos mais simples foram sendo refinados e generalizados com a adição de mais parâmetros, fazendo com que fossem formulados vários modelos de três, quatro e cinco parâmetros para representar a superfície de ruptura do concreto. Detalhes sobre diversos

critérios de resistência para o concreto podem ser vistos em CHEN e HAN (1988), CHEN e SALEEB (1994).

Segundo CHEN e HAN (1988), evidências experimentais mostram que a superfície de ruptura para o concreto apresenta como suas principais características:

- ✓ Superfície suave e convexa, com exceção do seu vértice;
- ✓ Possui meridianos parabólicos, que abrem no sentido do eixo hidrostático negativo;
- ✓ Possui plano anti-esférico aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando aproximadamente circular para altas tensões de compressão.

Dois critérios de resistência que tem sido amplamente utilizados para representar a superfície de ruptura do concreto são o modelo de quatro parâmetros proposto por OTTOSEN (1977) e o de cinco parâmetros proposto por WILLAM e WARNKE (1974). Isto é devido a estes modelos apresentarem valores muito próximos aos experimentais, e que atendem as principais características descritas acima.

A seguir são descritas as formulações do critério de resistência de Ottosen, customizado na plataforma FEMOOP & GiD, e do critério de Willam e Warnke, implementado e customizado na plataforma, e que serão utilizados no exemplos numéricos deste trabalho.

4.1.2.1 CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA DE OTTOSEN (1977)

O critério de resistência proposto por OTTOSEN (1977) é um critério de quatro parâmetros (“A”, “B”, “K₁”, “K₂”), cujo funcional que define a superfície de ruptura é dado por:

$$F(I_1, J_2, \cos(3\theta)) = A \frac{J_2}{f_{cm}^2} + \lambda \frac{\sqrt{J_2}}{f_{cm}} + B \frac{I_1}{f_{cm}} - 1 = 0 \quad (4.9)$$

sendo, “I₁”, o primeiro invariante do tensor das tensões (eq. 4.2), “J₂”, o segundo invariante do tensor anti-esférico das tensões (eq. 4.3), “f_{cm}”, a resistência à compressão média do concreto e “λ” calculado conforme eq. (4.10) e (4.11) em função dos parâmetros “K₁”, “K₂” e do invariante “cos(3θ)” (eq. 4.12).

$$\lambda = K_1 \cdot \cos \left\{ \frac{1}{3} \arccos[K_2 \cdot \cos(3\theta)] \right\} \quad \therefore \text{ para } \cos(3\theta) \geq 0 \quad (4.10)$$

$$\lambda = K_1 \cdot \cos \left\{ \frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \arccos[-K_2 \cdot \cos(3\theta)] \right\} \quad \therefore \text{ para } \cos(3\theta) < 0 \quad (4.11)$$

$$\cos(3\theta) = \frac{3\sqrt{3}}{2} \frac{J_3}{J_2^{3/2}} \quad (4.12)$$

A **Figura 33** ilustra a seção transversal da superfície de Ottosen nos planos anti-esféricos ou octaédricos, bem como seus meridianos para “θ = 0°” e “θ = 60°”. Note-se que a superfície é suave, convexa com setores de simetria a cada “60°”.

Figura 33 - Superfície de ruptura de Ottosen. (a) seção anti-esférica; (b) seções meridianas.

Para “ $\theta = 0^\circ$ ” têm-se o meridiano de tração, para o qual “ λ ” resulta em:

$$\lambda = \lambda_t = K_1 \cdot \cos \left[\frac{\pi}{3} - \frac{1}{3} \cdot \arccos(K_2) \right] \quad (4.13)$$

Para “ $\theta = 60^\circ$ ” têm-se o meridiano de compressão, para o qual “ λ ” resulta em:

$$\lambda = \lambda_c = K_1 \cdot \cos \left[\frac{1}{3} \cdot \arccos(K_2) \right] \quad (4.14)$$

Os quatro parâmetros (“ A ”, “ B ”, “ K_1 ”, “ K_2 ”) do modelo podem ser determinados a partir das seguintes situações de ruptura:

- ✓ f_c - resistência à compressão uniaxial “ $\theta = 60^\circ$ ”;
- ✓ f_t - resistência à tração uniaxial “ $\theta = 0^\circ$ ”;
- ✓ $f_{cc} \cong 1,16f_c$ - resistência à compressão biaxial “ $\theta = 0^\circ$ ”;
- ✓ $(\xi, \rho) = (-5f_c; 4f_c)$ - estado triaxial no meridiano de compressão “ $\theta = 60^\circ$ ”.

A partir destes estados de ruptura os quatro parâmetros obtidos foram:

$$A = 1,2759 ; B = 3,1962 ; K_1 = 11,7365 ; K_2 = 0,9801$$

Dentre as proposições para a obtenção dos parâmetros do modelo de Ottosen, estão a proposta de OTTOSEN (1977) e do código modelo CEB-FIP 1990 (1993), cujos parâmetros são obtidos a partir da relação entre as resistências médias à tração e compressão do concreto (f_{ctm}/f_{cm}). Cabe destacar que o modelo proposto pelo código modelo CEB-FIP 1990 (1993) é válido até o limite estipulado pela norma de 80MPa. Partindo da observação de que o modelo proposto pelo código modelo CEB-FIP 1990 (1993) estava de acordo somente com resultados experimentais para concretos de baixa resistência, DAHL (1992), propôs uma alternativa para obtenção dos parâmetros do modelo de Ottosen, calculados somente como funções da resistência à compressão do material (eq. 4.15):

$$\begin{aligned}
x &= \frac{f_{cm}}{100[MPa]} \\
A &= -1,66x^2 + 3,49x + 0,73 \\
B &= -0,19x^2 + 0,41x + 3,13 \\
K_1 &= 0,46x^2 - 0,97x + 11,89 \\
K_2 &= -0,02x^2 + 0,04x + 0,974
\end{aligned} \tag{4.15}$$

Uma comparação entre essas três alternativas de calibração dos parâmetros do modelo de OTTOSEN (1997) podem ser visto com detalhes em HARTL (2002). Neste estudo o pesquisador traçou envoltórias de resistências biaxiais para três situações: a primeira para um concreto com $f_{cm} = 38MPa$ e $f_{ctm} = 3,04MPa$; a segunda para $f_{cm} = 24MPa$ e $f_{ctm} = 4,56MPa$ e a terceira para um concreto com $f_{ctm} = 98MPa$ e $f_{ctm} = 5MPa$. Para as duas primeiras situações as envoltórias obtidas segundo a proposta de OTTOSEN (1997) e DAHL (1992) foram idênticas, enquanto que a obtida pela proposta do código modelo CEB-FIP 1990 (1993) apresentou pontos no ramo compressão-compressão além das envoltórias anteriormente citadas, exceto no limite de bicompressão, que apresentou valores mais elevados.

Para a terceira situação, que se tratava de um concreto de alta resistência, foram comparadas as propostas de DAHL (1992) e CEB-FIP 1990 (1993). Neste caso houve um distanciamento entre as envoltórias em todas as situações de solicitações, sendo mais acentuado no limite de bicompressão, com maior valor apresentado pelo código modelo CEB-FIP 1990 (1993). No entanto a interpretação deste resultado deve levar em consideração que a proposta feita por esse modelo é válida para concretos com resistência de até 80MPa.

Neste trabalho os exemplos que utilizaram o critério de ruptura de Ottosen, os parâmetros do modelo foram calibrados de acordo com a proposta de DAHL (1992) (eq. 4.15).

4.1.2.2 CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA DE WILLAM-WARNKE (1974)

O critério de resistência proposto por WILLAN e WARNKE (1974) é um critério de cinco parâmetros (“ a_0 ”=“ b_0 ”, “ a_1 ”, “ b_1 ”, “ a_2 ”, “ b_2 ”), no qual o funcional que define a superfície de ruptura pode ser definido como:

$$F(\sigma_m, \tau_m, \theta) = \sqrt{5} \frac{\tau_m}{\rho(\sigma_m, \theta)} - 1 = 0 \quad (4.16)$$

onde a tensão cisalhante média “ τ_m ” pode ser obtida a partir da eq. (4.7) e $\rho(\sigma_m, \theta)$ pode ser obtido a partir da eq. (4.17) em função de “ ρ_c ”, “ ρ_t ” e “ θ ”, com “ ρ_c ” e “ ρ_t ” expressos conforme eqs. (4.18) e (4.19), respectivamente, em função da tensão normal média “ σ_m ” (eq. 4.6).

$$\rho(\sigma_m, \theta) = \frac{2\rho_c(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos\theta + \rho_c(2\rho_t - \rho_c)[4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + 5\rho_t^2 - 4\rho_t\rho_c]^{1/2}}{4(\rho_c^2 - \rho_t^2)\cos^2\theta + (\rho_c - 2\rho_t)^2} \quad (4.17)$$

$$\frac{\rho_t}{\sqrt{5}f_c} = a_0 + a_1 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right) + a_2 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2 \quad \text{para } \theta = 0^\circ \quad (4.18)$$

$$\frac{\rho_c}{\sqrt{5}f_c} = b_0 + b_1 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right) + b_2 \left(\frac{\sigma_m}{f_c} \right)^2 \quad \text{para } \theta = 60^\circ \quad (4.19)$$

As principais características do critério de WILLAM-WARNKE (1974) descrito pela eq. (4.16) são:

- ✓ É um critério de cinco parâmetros, logo necessita de cinco situações de ruptura em ensaios experimentais;
- ✓ Envolve todos os invariantes de tensão na forma $F(\sigma_m, \tau_m, \theta)$ ou $F(I_1, J_2, \theta)$;
- ✓ Possui superfície suave com derivada contínua em todos os pontos $\left(\frac{\rho_t}{\rho_c} > \frac{1}{2} \right)$;

- ✓ Seu plano anti-esférico é periódico com período a cada 120° ($-60^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$);
- ✓ Possui plano anti-esférico não-circular, com forma variando de aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão, ficando aproximadamente circular, para altas tensões de compressão;
- ✓ Seus meridianos são descritos por parábolas (eqs. 4.18 e 4.19);
- ✓ A superfície de ruptura no plano anti-esférico é dada por uma curva elíptica para ($0^\circ \leq \theta \leq 60^\circ$)(eq. 4.16);
- ✓ Possui convexidade garantida no plano anti-esférico e ao longo de seus meridianos, se forem atendidas as seguintes condições:

$$a_0, b_0 > 0, a_1, b_1, a_2, b_2 \leq 0 \text{ e } \left(\frac{\rho_t(\sigma_m)}{\rho_c(\sigma_m)} > \frac{1}{2} \right)$$

- ✓ Outros critérios podem ser facilmente obtidos como casos particulares, como por exemplo: fazendo $a_0 = b_0$, e $a_1 = b_1 = a_2 = b_2 = 0$, obtemos o critério de ruptura de Von Mises; fazendo $a_0 = b_0, a_1 = b_1$, e $a_2 = b_2 = 0$, obtemos o critério de ruptura de Drucker-Prager e fazendo $\frac{a_0}{b_0} = \frac{a_1}{b_1}$ e $a_2 = b_2 = 0$, obtemos o critério de ruptura de Willam e Warnke de três parâmetros;

A **Figura 34** mostra a seção transversal da superfície de Willam-Warnke nos planos anti-esféricos ou octaédricos, bem como seus meridianos para “ $\theta = 0^\circ$ ” e “ $\theta = 60^\circ$ ”.

Figura 34 - Superfície de ruptura de Willam-Warnke de cinco parâmetros.
(a) seção anti-esférica; (b) seções meridianas

Os cinco parâmetros (“ a_0 ”=“ b_0 ”, “ a_1 ”, “ b_1 ”, “ a_2 ”, “ b_2 ”) do modelo podem ser determinados com base nos ensaios biaxiais realizados por KUPFER *et al.* (1969) e outros ensaios triaxiais (CHEN e HAN, 1988), a partir dos seguintes valores na superfície de ruptura):

- ✓ f_c - resistência à compressão uniaxial “ $\theta = 60^\circ$ ”;
- ✓ $f_t = 0,1f_c$ - resistência à tração uniaxial “ $\theta = 0^\circ$ ”;
- ✓ $f_{cc} \cong 1,15f_c$ - resistência à compressão biaxial “ $\theta = 0^\circ$ ”;
- ✓ $(\sigma_{mc}, \rho_c) = (-1,95f_c; 2,77f_c)$ - resistência à compressão biaxial confinada com “ $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ”;
- ✓ $(\sigma_{mt}, \rho_t) = (-3,9f_c; 3,461f_c)$ - resistência à compressão biaxial confinada com “ $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ ”;

A partir destes estados de ruptura, podem-se determinar os cinco parâmetros usados nos meridianos de compressão “ ρ_c ” e tração “ ρ_t ”. Como os dois meridianos devem interceptar o eixo hidrostático no mesmo ponto, implica em $a_0 = b_0$. A calibração dos parâmetros deste modelo pode ser obtida em função da relação entre a resistência à tração e compressão do concreto ($\alpha_u = \frac{f_t}{f_c}$) (BONO, 2008):

$$a_0 = b_0 = -\frac{19,68\alpha_u + 1,82\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \quad (4.20)$$

$$a_1 = \frac{1,52 + 0,95\alpha_u + 0,54\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} \quad (4.21)$$

$$a_2 = -\frac{-2,73 + 8,73\alpha_u}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \quad (4.22)$$

$$b_1 = \frac{0,62 + 2,44\alpha_u + 0,42\alpha_u^2}{-1,26 + 1,35\alpha_u - 0,25\alpha_u^2} \quad (4.23)$$

$$b_2 = -\frac{-2,86 + 10,76\alpha_u + 0,017\alpha_u^2}{-12,62 + 13,49\alpha_u - 2,48\alpha_u^2} \quad (4.24)$$

4.1.3 CONCRETO FISSURADO

Acoplado ao modelo de integridade física, acoplou-se o modelo de fissuração distribuída do tipo rotacional cujo critério de aparecimento de fissuras está relacionado com as tensões de tração nos pontos de integração dos elementos finitos, comparadas com a resistência à tração do material. Caso a tensão em algum ponto de Gauss atinja a resistência à tração do concreto uma fissura é plotada no centro do elemento finito, perpendicular à direção da tensão principal.

A **Figura 35** ilustra o modelo de amolecimento linear adotado para o comportamento do concreto, cuja formulação é dada pela eq. (4.25).

Figura 35 – Modelo de amolecimento linear.

$$\frac{\sigma_{nn}^{cr}}{f_t} = \begin{cases} 1 - \frac{\varepsilon_{nn}^{cr}}{\varepsilon_{nn,ult}^{cr}} \rightarrow 0 < \varepsilon_{nn}^{cr} < \varepsilon_{nn,ult}^{cr} \\ 0 \rightarrow \varepsilon_{nn,ult}^{cr} < \varepsilon_{nn}^{cr} < \infty \end{cases} \quad (4.25)$$

Com o modelo linear de amolecimento na tração, as aberturas das fissuras podem ser obtidas por:

$$w^{cr} = \frac{2G_f}{f_t} \quad \text{ou} \quad w^{cr} = \varepsilon^{cr} \cdot h^{cr} \quad (4.26)$$

Sendo “ w^{cr} ” a abertura das fissuras, “ G_f ” a energia de fratura no modo I, “ ε^{cr} ” a deformação da fissura e “ h^{cr} ” a largura de banda da fissura, obtida pela raiz quadrada da área do elemento finito utilizado na modelagem.

4.2 MODELO CONSTITUTIVO PARA O CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO

Para o concreto reforçado com fibras de aço foi utilizado o mesmo modelo elástico não-linear utilizado para o concreto convencional. A presença das fibras de aço na matriz cimentícia foi considerada através de uma proposta feita por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005), os quais desenvolveram uma variante da superfície de ruptura de WILLAM e WARNKE (1974) de cinco parâmetros, alterando o meridiano de tração do critério de resistência original para considerar a presença das fibras. Para o concreto reforçado com fibras de aço fissurado considera-se o trecho pós-fissuração proposto no modelo de tração de LIM *et. al* (1987).

4.2.1 CRITÉRIO DE RESISTÊNCIA DE WILLAM-WARNKE MODIFICADO

O critério de resistência proposto por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005) para o CRFA é uma variante do critério de WILLAM e WARNKE (1974) de cinco parâmetros apresentado no *item 4.1.2.2*. Portanto as principais características do modelo descritas anteriormente continuam válidas, ou seja, ainda se terá uma superfície de ruptura suave e convexa, com exceção de seu vértice, seus meridianos continuam parabólicos e abrem no sentido do seu eixo hidrostático negativo, é aproximadamente triangular para tensões de tração e baixas tensões de compressão e fica aproximadamente circular para altas tensões de compressão.

Os estados de ruptura descritos para a determinação dos parâmetros do modelo, assim como as equações apresentada por BONO (2008) (eqs. 4.20 a 4.24) para cálculo dos parâmetros em função da relação entre a resistência à tração e compressão do material, também continuam válidas. Estas equações permitem a consideração do aumento da resistência à tração provocada pela adição das fibras.

A presença das fibras de aço na matriz cimentícia foi considerada por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005) no critério de resistência através da introdução de um coeficiente “*k*” na função quadrática que define o meridiano de tração do critério de resistência. Desta forma, as funções que definem os meridianos de tração e compressão ficam definidas como:

$$\frac{\xi}{f_c} = a_0 + a_1 \left(\frac{k\rho_t}{f_c} \right) + a_2 \left(\frac{k\rho_t}{f_c} \right)^2 \quad \therefore \quad k \leq 1 \quad (4.27)$$

$$\frac{\xi}{f_c} = b_0 + b_1 \left(\frac{\rho_c}{f_c} \right) + b_2 \left(\frac{\rho_c}{f_c} \right)^2 \quad (4.28)$$

sendo “ a_0 ”=“ b_0 ”, “ a_1 ”, “ b_1 ”, “ a_2 ”, “ b_2 ” os parâmetros do critério de resistência e “ k ” o parâmetro utilizado para considerar a presença das fibras. Para o concreto sem fibras, implica em “ $k = 1$ ”. Neste caso o critério de resistência se torna o modelo original proposto por WILLAM e WARNKE (1974). Para o CRFA, o coeficiente “ k ” é calculado pela eq. (4.29) (SEOW e SWADDIWUDHIPONG, 2005).

$$k = \frac{-a_1 - \sqrt{a_1^2 - 4a_2 \left[a_0 + \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{f_{cc}}{f_c} \right) \right]}}{a_2 \sqrt{\frac{8}{3}} \left(\frac{f_{cc}}{f_c} \right)} \quad (4.29)$$

sendo “ f_c ” e “ f_{cc} ” a resistência à compressão uniaxial e biaxial do concreto com fibras, respectivamente. Segundo SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005), devido a restrições no equipamento de ensaios e os poucos resultados disponíveis na literatura sobre a resistência à compressão biaxial do concreto com fibras, foi necessário fazer uma previsão do valor da “ f_{cc} ”, baseando-se na constatação de que a presença das fibras fornece uma tensão de confinamento “ σ_{tu} ” na direção de “ σ_3 ” quando o material é submetido a tensões nas direções de “ σ_1 ” e “ σ_2 ”. LIM (1987, *apud* SEOW e SWADDIWUDHIPONG, 2005), propôs uma equação para cálculo de “ σ_{tu} ” dada por:

$$\sigma_{tu} = \frac{\eta_l \eta_o V_f L_f \tau_u}{2r} \quad (4.30)$$

Sendo, “ η_l ” o fator de comprimento eficiente; “ η_o ” o fator de orientação; “ V_f ” a fração de volume; “ L_f ” o comprimento da fibra; “ τ_u ” a resistência última de aderência da fibra e “ r ” a razão entre a área da seção transversal da fibra e o seu perímetro.

MURUGAPPAN *et al.* (1993, *apud* SEOW e SWADDIWUDHIPONG, 2005), sugere que o estado de tensão em um corpo de prova de CRFA ao longo do meridiano de tração, “ $\rho_{t(CRFA)}$ ”, com uma tensão de confinamento interna “ σ_{tu} ” é análogo ao concreto simples com um estado de tensão similar e uma pressão adicional de confinamento externa “ σ_{tu} ” na direção de “ σ_3 ”. Portanto, para um corpo-de-prova de CRFA sob compressão biaxial, com uma razão unitária de tensões (1:1), o estado de tensões observado na ruptura é dado por $(-f_{cc}, -f_{cc}, 0)$ e o correspondente estado de tensões na ruptura para um corpo-de-prova análogo de concreto simples é $(-f_{cc}, -f_{cc}, -\sigma_{tu})$, conforme ilustra a **Figura 36**.

Figura 36 – Estado de tensões na ruptura para concreto reforçado com fibras e para um concreto simples análogo. (adaptado de SEOW; SWADDIWUDHIPONG, 2005)

Determinar a resistência à compressão biaxial “ f_{cc} ” do CRFA é análogo a determinar o valor da tensão de ruptura no concreto simples nas direções “ σ_1 ” e “ σ_2 ”, quando uma tensão de confinamento externa, “ σ_{tu} ”, é aplicada na direção de “ σ_3 ”. Os valores de “ $\rho_{t(simples)}$ ” e “ $\xi_{(simples)}$ ” quando o estado de tensão no concreto simples é $(-f_{cc}, -f_{cc}, -\sigma_{tu})$ podem ser calculados por:

$$\rho_{t(simples)} = \sqrt{\frac{2}{3}}(f_{cc} - \sigma_{tu}) \quad (4.31)$$

$$\xi_{(simples)} = \frac{-2f_{cc} - \sigma_{tu}}{\sqrt{3}} \quad (4.32)$$

Substituindo as eqs. (4.31) e (4.32) na eq. (4.27) com “ $k = 1$ ”, um valor de “ f_{cc} ” pode ser determinado. Esse valor de “ f_{cc} ” pode ser usado para calcular “ k ” na eq. (4.29) para CRFA.

Os parâmetros “ η_l ” e “ η_0 ” da eq. (4.30) podem ser calculados para concreto com fibras dispersas, conforme proposta apresentada por LIM *et. al* (1987), na qual:

$$\eta_l = 0,5 \quad \text{para } L_f \leq L_c \quad (4.33)$$

$$\eta_l = 1 - \frac{L_c}{2L_f} \quad \text{para } L_f > L_c \quad (4.34)$$

$$\eta_0 = 0,405 \text{ (fibras dispersas aleatoriamente)} \quad (4.35)$$

sendo, “ L_f ” e “ L_c ” o comprimento e o comprimento crítico das fibras, respectivamente. O comprimento crítico é o comprimento requerido para o desenvolvimento da tensão de ruptura na fibra, “ F_{ftu} ”, quando da ocorrência da tensão de aderência última, “ τ_u ”, na interface da fibra-matriz, sendo determinado por:

$$L_c = \frac{0,5F_{ftu} \cdot D_f}{\tau_u} \quad (4.36)$$

onde, “ D_f ” é o diâmetro da fibra e “ F_{ftu} ” é a resistência última da fibra à tração.

Como não é comum na literatura encontrarmos o valor de “ τ_u ” oriundo do ensaio de arrancamento de fibras, foi utilizada a eq. (4.37) para estimar seu valor, uma proposição de SOROUSIAN e BAYASI (1997, *apud* HOLANDA, 2002) baseada nas leis dos compósitos.

$$\tau_u = \frac{F_{ctu} - \gamma F_t (1 - V_f)}{2\alpha\beta \left(\frac{L_f}{D_f}\right) V_f} \quad (4.37)$$

sendo “ F_{ctu} ” a resistência última do compósito à tração direta; “ F_t ” a resistência da matriz à tração direta; “ V_f ” a fração de volume de fibras adicionadas; “ $\frac{L_f}{D_f}$ ” o fator de forma da fibra ou relação de aspecto; “ α ” e “ β ” os fatores de eficiência que consideram a distribuição aleatória das fibras, e o fato de que a fissura cruza a fibra em um local aleatório do seu comprimento.

Nessas condições esses dois parâmetros são tomados como 0,41. O parâmetro “ γ ” representa a fração da resistência da matriz que contribui para a resistência à tração do compósito, sendo adotado como igual a 1.

4.2.2 CONCRETO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO FISSURADO

Para o concreto reforçado com fibras de aço fissurado considera-se o trecho pós-fissuração proposto no modelo de tração de LIM *et. al* (1987), como mostra a **Figura 37**.

Figura 37 – Modelo para concreto fissurado reforçado com fibras de aço.

A relação constitutiva neste caso é constante com “ $\sigma = \sigma_{tu}$ ”, onde “ σ_{tu} ” depende das propriedades e quantidades de fibras de concreto, sendo calculado pela eq. (4.30).

4.3 MODELO CONSTITUTIVO PARA AS ARMADURAS

As armaduras de aço neste trabalho foram modeladas utilizando um modelo constitutivo elasto-plástico com comportamento idêntico à tração e compressão. A representação deste modelo é caracterizada por um diagrama tensão-deformação bilinear, composta por um trecho inicial elástico seguido de um patamar de escoamento com encruamento linear em sua forma mais genérica (**Figura 38**). A partir deste modelo mais genérico pode-se adotar um comportamento elasto-plástico perfeito para as armaduras (**Figura 39**).

Figura 38 – Modelo elasto-plástico com encruamento linear para as armaduras.

Figura 39 – Modelo elasto-plástico perfeito para as armaduras.

Para o caso genérico tem-se:

✓ Para $\sigma < \sigma_0$

$$\varepsilon < \varepsilon_e$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} \quad (4.38)$$

✓ Para $\sigma > \sigma_0$

$$\varepsilon = \varepsilon_e + \varepsilon_p$$

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{E} + \frac{(\sigma - \sigma_0)}{H} \quad (4.39)$$

5 PROGRAMAS COMPUTACIONAIS GiD & FEMOOP: IMPLEMENTAÇÕES E CUSTOMIZAÇÃO

Neste capítulo são apresentados os programas computacionais FEMOOP denominado “*solver*” e GiD denominado “*pré e pós-processador*” utilizados nas modelagens computacionais, assim como as implementações e customizações efetuadas. O termo customização se refere ao acoplamento dos programas que é feito através da programação de um conjunto de arquivos denominados arquivos de customização.

O FEMOOP é um programa que vem sendo desenvolvido utilizando-se o paradigma da programação orientada a objetos (POO). Para facilitar o entendimento das principais implementações efetuadas neste programa, e a forma com que foram concebidas estas implementações, precede-se este item com um resumo dos principais conceitos envolvidos nesse paradigma de programação.

As principais características do programa GiD são apresentadas, justificando sua escolha como pré e pós-processador. Na sequência é apresentado o desenvolvimento dos arquivos de customização, responsáveis pelo acoplamento dos programas FEMOOP & GiD, e pela interface criada para a análise numérica. Esta interface contém caixas de diálogo para a aplicação das condições de contorno e materiais e outros dados de entrada do problema. A criação desta interface teve o objetivo de facilitar a interação do usuário com o programa durante a análise numérica.

Para ilustrar todas as etapas necessárias em uma análise utilizando a plataforma desenvolvida, foi modelada uma viga ensaiada por LEONHARDT e WALTHER (1962), apresentando também os principais resultados obtidos da análise.

5.1 FEMOOP

O FEMOOP – (“*Finite Element Method – Object Oriented Program*”) (**Figura 40**) é um programa para análise computacional de estruturas baseado no método dos elementos finitos (MEF), na qual toda a formulação básica desse método numérico já se encontra implementada. Esse programa vem sendo desenvolvido em parceria pelo Grupo de Modelagem de Estruturas de Concreto (GMEC) do Laboratório de Mecânica Computacional (LMC) da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo (EPUSP) e o Tecgraf da Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro (PUC-Rio).

Figura 40 – Visualização do Programa FEMOOP

A **Figura 41** ilustra a estrutura principal de classes do FEMOOP, também denominada de “*superclasses*” ou “*classes mãe*” por ocuparem o nível mais alto na estruturação e todas as outras classes serem derivada das mesmas.

Figura 41 – Diagrama de “*Superclasses*” do programa FEMOOP.

Esse diagrama de classes não apresenta uma hierarquia de classes derivadas, apenas ilustra a comunicação existente entre as “*superclasses*”. Essa comunicação é feita através dos objetos das respectivas classes, que contêm em seus dados locais ponteiros de dados abstratos para objetos de outras classes, ou seja, os ponteiros representam o elo de comunicação dos objetos das diferentes classes.

Dependendo do tipo de análise, e os recursos que serão utilizados, objetos pertencentes às classes derivadas, também denominadas de “*subclasses*”, serão chamados. Maiores detalhes sobre a estruturação básica e do programa FEMOOP pode ser consultado em MARTHA *et al.* (1996).

De forma resumida a principal função de cada “*superclasse*” pode ser descrita como:

- ✓ **classe *cCtrl***: é a responsável por gerenciar a solução global da análise. Duas classes derivadas dessa classe são muito importantes. A primeira denomina de ***cPath***, que é a responsável em uma análise não-linear pelo controle de algoritmo passo à passo que segue a trajetória de equilíbrio utilizando, por exemplo, o método de “*Newton-Raphson*” e a segunda é a classe ***cTDP*** “*Time Domain Problem*” utilizada em uma análise transiente para controlar a integração numérica ao longo da história do tempo;
- ✓ **classe *cDrv***: nela é definido o tipo de análise a ser realizado, como mecânica estática, mecânica dinâmica, térmica, fluxo, etc. Aqui também é feita a numeração dos graus de liberdade da estrutura, montagem da matriz de rigidez, montagem do vetor de esforços da estrutura, montagem do vetor de esforços internos, montagem do vetor de deformações e resolução do problema;
- ✓ **classe *cFem***: é a responsável pela discretização do modelo estudado em elementos finitos, funcionando como um gerenciador do método, fazendo as chamadas necessárias para a montagem da equação de equilíbrio do problema. Esta classe contém referências para objetos das cinco maiores classes da organização: para uma lista de objetos da classe ***cNode*** (nós da malha de elementos finitos), para uma lista de objetos da classe ***cElement*** (elementos da malha de elementos finitos), para uma lista de objetos da classe ***cMaterial*** (grupo de materiais distintos utilizados), para uma lista de objetos da classe ***cLoadElement*** (são elementos fictícios que transferem as condições de contorno naturais dos elementos para os nós) e uma referência para um objeto da classe ***cAnModel*** (características específicas do tipo de análise);
- ✓ **classe *cElement***: contém todas as informações inerentes aos elementos finitos. Cada objeto dessa classe contém referências para buscar informações em objetos das classes ***cShape***, ***cNode***, ***cIntPt*** e ***cAnModel***;
- ✓ **classe *cLoadElement***: contém todos os dados relacionados aos tipos de carregamento dos elementos (concentrado, uniforme, variável, etc.). Isso é feito através de elementos fictícios que transferem as condições de contorno naturais dos elementos para os nós.

Assim como os objetos da classe *cElement*, objetos dessa classe também possuem referência para objetos das classes *cShape*, *cNode*, *cIntPt* e *cAnModel*;

- ✓ **classe *cNode*:** é a responsável pelas informações dos nós da malha de elementos finitos, como por exemplo: coordenadas nodais, condições de vinculação do nó, graus de liberdade da estrutura associados a cada um dos nós, deslocamentos e restrições nodais;
- ✓ **classe *cAnModel*:** contém as informações associadas ao modelo de análise escolhido. O modelo de análise associa cada um dos elementos ao tipo de análise ao qual ele será submetido (viga, treliça, estado plano de tensões, estado plano de deformações, placa, casca, sólido, etc.);
- ✓ **classe *cShape*:** um objeto dessa classe possui como atributos as características geométricas e o campo de interpolações de um elemento finito;
- ✓ **classe *cIntPt*:** um objeto desta classe contém como atributos todos os dados necessários para os métodos de integração numérica. Uma das classes derivadas é a classe *cGauss* que contém todos os atributos e métodos da integração numérica por Quadratura de Gauss, como por exemplo: coordenadas naturais dos pontos de integração, coeficientes de ponderação associados a cada ponto de integração, ordem de integração, número de pontos de Gauss, cálculo das tensões em cada ponto de Gauss, etc;
- ✓ **classe *cConstModel*:** contém informações do modelo constitutivo adotado (elástico linear, elasto-plástico, (Von Mises, Tresca, Drucker-Prager e Mohr-Coulomb), dano (linear e bilinear), etc. Objetos desta classe estão intimamente ligados a objetos das classes *cIntPt* e *cMaterial*. Na primeira a relação é devido a necessidade de associar cada ponto de integração da malha de elementos finitos há um modelo constitutivo, sendo muito importante principalmente em uma análise não-linear, na qual, a tensão é função não somente da deformação atual, mas de toda a história de deformação, sendo obrigatório que o ponto de integração deva armazenar todos esses dados. Com a segunda classe a relação é a leitura dos dados de entrada de cada modelo, lido pela classe *cMaterial* do arquivo neutro. Os principais métodos destas classes são: dado o

campo de deformações, retorna o campo de tensões, modificação da matriz constitutiva conforme o modelo, realização e controle de iterações para a análise não-linear;

- ✓ **classe *cMaterial***: é a responsável pela leitura no arquivo neutro dos parâmetros dos materiais utilizados na análise. É nesta classe que os objetos da classe ***cConstModel*** vem buscar essas informações.

Ao longo dos últimos anos vários projetos de pesquisa de mestrado e doutorado desenvolvidos na EPUSP-GMEC orientados pelo professor Dr. Túlio Nogueira Bittencourt tiveram como objetivo principal a extensão do código do FEMOOP para análises estruturais específicas, como por exemplo: FUJII (1997) – “*Análise de Estruturas Tridimensionais*”; MORETTI (1997) – “*Análise de Estruturas Utilizando Técnicas de Processamento Paralelo Distribuído*”; BUENO (1999) – “*Simulação Bidimensional de Fraturamento Coesivo por meio do Método dos Elementos Finitos*”; MORETTI (2001) – “*Um Sistema Computacional Paralelo Aplicado à Simulação de Propagação Tridimensional de Fissuras*”; GUELLO (2002) – “*Simulação Computacional de Estruturas de Concreto por Meio da Mecânica do Dano*”; PRADO (2004) – “*A influência da Estrutura Interna do Material na Simulação Computacional de Elementos Estruturais de Concreto*”; e GAMINO (2007) – “*Modelagem Computacional de Estruturas de Concreto Reforçadas com CFRP*”.

O desenvolvimento de várias pesquisas envolvendo o estudo de diferentes abordagens dentro da análise estrutural e ao mesmo tempo aproveitando o arcabouço comum que é a formulação básica do método dos elementos finitos é possível graças à forma com que vem sendo desenvolvido o programa.

Desde a fase de concepção do programa, o principal requisito exigido era que o mesmo permitisse a reutilização de parte do programa já implementado, com nenhuma ou pouca influência no código existente, não sendo necessária a reprogramação destas etapas, uma vez que o código seria constantemente expandido, com a implementação de novos elementos finitos, modelos constitutivos, tipos de análises, métodos de resolução de equações não-lineares, e outras características inerentes a modelagem computacional.

A solução adotada para atender este requisito foi utilizar uma abordagem orientada a objetos, na qual, através do uso de conceitos como classes, objetos, encapsulamento, herança, polimorfismo, abstração, etc., este requisito é facilmente atendido. O próximo item descreve os conceitos básicos envolvidos nesse paradigma de programação, para elucidar a forma com que foram concebidas e realizadas as novas implementações deste trabalho.

5.1.1 Abordagem Orientada a Objetos

A abordagem orientada a objetos é uma forma de escrever programas de computador. Esta abordagem contemporânea vem substituindo a abordagem algorítmica tradicional, na qual os blocos de construção do sistema são as funções, focadas em ações (verbos). Sistemas construídos sobre esta última abordagem apresentam-se frágeis, sob a constante necessidade de atualização, sendo comum que programadores “comecem do zero” em cada novo projeto e acabem escrevendo software muito similar a outro, “a partir de nada”.

A construção de sistemas computacionais cada vez mais robustos e complexos, fez com que a abordagem orientada a objetos se tornasse quase que unânime entre os desenvolvedores de softwares, devido à possibilidade de reutilizar partes de seu bloco de construção (objetos ou as classes) para desenvolver novos sistemas. Além do benefício de reutilização de parte do software, a principal característica de uma abordagem orientada a objetos é a compreensão do sistema desenvolvido, maior organização, e facilidade de modificação e depuração. Estas características foram determinantes para a escolha desse paradigma de programação para o desenvolvimento do programa FEMOOP.

Numa abordagem orientada a objetos o bloco de construção é o objeto ou a classe, que interagem de uma maneira organizada. Esta abordagem é um esquema de empacotamento que ajuda a criar unidades de software com significado próprio, altamente focado em áreas de aplicação particulares, e vem sendo bastante utilizado no desenvolvimento de pesquisas.

Para desenvolver um sistema computacional orientado a objetos, deve-se pensar em resolver o problema em três etapas. Na primeira etapa denominada Análise Orientada a Objetos (*OOA* – “*object-oriented analysis*”) devem ser identificadas as classes e os objetos do sistema, na segunda, denominada Projeto Orientado a Objetos (*OOD* – “*object-oriented design*”) devem

ser identificadas as relações entre objetos, e na terceira e última etapa denominada Programação Orientada a Objetos (*OOP* – “*object-oriented programming*”) consiste na implementação do sistema baseado nas duas etapas anteriores.

A seguir são descritos de forma resumida alguns conceitos básicos fundamentais envolvidos numa abordagem orientada a objetos e que constituem as palavras-chave usadas nesse paradigma de programação:

- ✓ **classe:** é um protótipo que reúne um conjunto de objetos com características afins. É a classe que define o comportamento dos objetos, através de procedimentos (métodos), e quais estados ela é capaz de manter (atributos). O empacotamento de um software em classes permite que estas classes sejam reutilizadas em sistemas de softwares futuros;
- ✓ **objeto:** é uma instância de uma classe, esses elementos do programa possuem dados (atributos) e procedimentos (métodos) que operam sobre esses dados, são geralmente usados para modelar objetos do mundo real;
- ✓ **encapsulamento:** este mecanismo é utilizado amplamente para impedir o acesso direto ao estado de um objeto (seus atributos), disponibilizando externamente apenas os métodos que alteram estes estados. As declarações “*private*” (privado), “*public*” (público) e “*protected*” (protegido) limitam o acesso ao interior de um objeto;
- ✓ **herança:** possibilita que uma classe herde a definição do estado e do comportamento de sua “*superclasse*” ou “*classe mãe*”. Quando uma classe herda as características de mais de uma “*superclasse*”, dizemos neste caso que há herança múltipla;
- ✓ **polimorfismo:** é o mecanismo que permite que duas ou mais classes herdeiras da mesma superclasse possuam versões diferentes para a definição de um mesmo comportamento, ou seja, invocam métodos que têm a mesma assinatura (lista de parâmetros e retorno), mas apresentam comportamentos diferentes.

Diversas são as ferramentas utilizadas para desenvolver as duas primeiras etapas (*OOA* e *OOD*), entretanto a tendência vem sendo de uma padronização utilizando a ferramenta de modelagem UML – “*Unified Modeling Language*”, desenvolvida em meados

da década de 90, sob a direção inicial de um trio de metodologistas de software: Grady Booch, James Rumbaugh e Ivan Jacobson (BOOCH *et. al*, 1999). A utilização dessa ferramenta de modelagem faz com que os programas sejam desenvolvidos de forma rápida, eficiente e efetiva, para revelar a estrutura desejada e o comportamento do sistema, para visualizar e controlar a arquitetura do sistema, para melhor entender o sistema que está sendo construído e para gerenciar riscos.

Na terceira etapa, denominada programação orientada a objetos, que consiste na programação propriamente dita, o programa FEMOOP vem sendo desenvolvido utilizando-se a linguagem de programação C++, por ser robusta, apresentar ferramentas de desenvolvimento de um programa baseado numa abordagem orientada a objetos e por possuir compiladores para diversos sistemas operacionais. Maiores detalhes sobre essa linguagem de programação pode ser consultado em DEITEL e DEITEL (2001).

5.1.2 Implementações no FEMOOP

As implementações no programa FEMOOP se concentraram nas “*superclasses*” *cMaterial* e *cConstModel*. Nestas classes foram implementados o modelo de Willam e Warnke de cinco parâmetros para o concreto convencional e o modelo de Willam e Warnke modificado por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005) para considerar a presença de fibras aço descontínuas na matriz de concreto. Ambos os modelos foram acoplados ao modelo de fissuração distribuída rotacional. O restante das implementações se concentraram em fazer “chamadas” aos elementos finitos utilizados para representar o concreto e a armadura, ao método de Newton-Raphson utilizado para resolução das equações de equilíbrio, ao modelo constitutivo elastoplástico utilizado para representar o comportamento das armaduras e ao modelo de Ottosen implementado por GAMINO (2007), e que também foi disponibilizado na plataforma desenvolvida.

A classe *cMaterial* é a responsável pela listagem de atributos de cada modelo constitutivo, sendo nela descritos os procedimentos de “*label*” de cada modelo constitutivo a ser lido do arquivo neutro. Logo a descrição deste “*label*” de cada material no arquivo neutro dispara automaticamente o modelo implementado sendo nesta “*superclasse*” também verificados o número de parâmetros, ou seja, se o número de parâmetros descritos no arquivo neutro, condizem com o material implementado. A ordem em que os parâmetros estão dispostos também são definidos nesta superclasse.

A **Figura 42** ilustra as classes contidas nesta superclasse, assim como as classes criadas *cMatWillamFP* para o modelo de Willam e Warnke de cinco parâmetros e a classe *cMatSFRC* para o concreto reforçado com fibras de aço.

Figura 42 – Diagrama de classes da “superclasse” cMaterial.

A implementação desses modelos seguiram a seguinte diretiva:

%MATERIAL.WILLAMFP
E, Nu, Fcm, Ft, Bbeta, Gf, Hcrack
%MATERIAL.SFRC
E, Nu, Fcm, Ft, K, Vf, Lf, Df, Fctu, Fftu, Bbeta, Gf, Hcrack

É na superclasse **cConstModel** que ocorre a implementação dos materiais propriamente dito. Essa superclasse lê na superclasse **cMaterial** as informações sobre os parâmetros e número de parâmetros de cada modelo e seu respectivo “label”. Nela encontram-se os funcionais (que dependem dos parâmetros e dos invariantes dos tensores de tensão), ocorre a montagem da matriz constitutiva (**CMatrix**), além das variáveis de saída no arquivo já processado (tensões, deformações específicas, etc.) e demais métodos particulares de cada modelo constitutivo. A **Figura 43** ilustra as classes contidas nesta superclasse, assim como as classes criadas **cWillamFP** para o modelo de Willam e Warnke de cinco parâmetros e a classe **cSFRC** para o concreto reforçado com fibras de aço.

Figura 43 – Diagrama de classes da “superclasse” cConstModel.

5.2 GiD

O GiD é um programa computacional desenvolvido pelo CIMNE – “*International Center for Numerical Methods in Engineering*” da “*Universitat Politècnica de Catalunya*” (Barcelona-Espanha) para atuar como “*pré e pós-processador*” (**Figura 44**) para determinado “*solver*” após serem customizados, podendo ser adaptado para um módulo de análise específica, como por exemplo, mecânica dos sólidos e das estruturas, dinâmica dos fluidos, eletromagnetismo, transferência de calor, geomecânica, etc.

(a)

(b)

Figura 44 – Interface GiD. (a) pré-processador; (b) pós-processador.

Esse programa foi escolhido para trabalhar em conjunto com o FEMOOP devido aos inúmeros recursos disponíveis para as etapas de pré e pós-processamento de simulações numéricas, além de possuir uma interface gráfica amigável com o usuário, com opções de comandos via mouse e teclado. A vantagem de acoplá-lo com o “*solver*” é obter uma plataforma com uma única interface gráfica, pois tanto o arquivo de entrada de dados “*arquivo neutro*”, como o de saída de resultados da análise “**.pos*” são lidos automaticamente pelo programa. Outro motivo para sua utilização é o fato de que novas implementações no ocasionam apenas a adição de novos recursos no arquivo de customização, não sendo necessário haver reprogramação desses arquivos.

Na etapa de pré-processamento a geometria do modelo a ser analisado pode ser feita usando as ferramentas de desenho do próprio programa ou importando de outros formatos, como por exemplo “**.dxf*” do AutoCAD. A geração da malha de elementos finitos tem como opções as formas “*estruturada*”, “*semi-estruturada*” e “*não-estruturada*”, podendo ser usadas opções diferentes em domínios distintos do mesmo problema. Após essas duas etapas (geração da geometria e malha de elementos finitos) deve-se utilizar a customização feita, disponível na própria interface para a aplicação dos materiais, condições de contorno e dados da análise, como linear ou não-linear, espessura dos elementos finitos, etc.

Após a execução do modelo numérico o programa direciona para uma interface de pós-processamento, na qual inúmeros recursos estão disponíveis como a visualização do campo de deslocamentos, tensões, deformações específicas e fissuração. Outros recursos são o traçado de gráficos de acordo com a necessidade do usuário, como por exemplo, carga-deslocamento ou tensão-deformação em um ponto específico. Há também opções pra criar figuras dinâmicas que ilustram todo o histórico de carregamento, distribuição de tensões, deformações específicas, etc.

No próximo item será feito um exemplo utilizando a customização, no qual uma viga será analisada passo a passo para ilustrar todos os recursos disponíveis no programa GiD e a customização realizada. Para mais informações sobre os recursos disponíveis e uma descrição completa de todas as funcionalidades do programa GiD, consultar REFERENCE MANUAL (2008) e USER MANUAL (2008).

5.3 CUSTOMIZAÇÃO GiD & FEMOOP

Esta etapa compreende a fase de integração dos programas GiD e FEMOOP (**Figura 45**), para que eles possam trabalhar de forma conjunta, na qual todas as etapas da análise numérica serão realizadas utilizando uma única interface. A customização compreende a etapa de criação de um conjunto de arquivos responsáveis pela criação das caixas de diálogo para a entrada de dados da análise, disparar o solver dentro da interface e por fim coletar os resultados obtidos para serem utilizados pelas ferramentas de pós-processamento do programa GiD.

Figura 45 – Integração GiD & FEMOOP.

Os arquivos customizados neste trabalho são específicos para o programa FEMOOP, com caixas de diálogo que contém referências para dados contidos em seu código. Esses arquivos devem ser capazes de fazer com que o arquivo de entrada de dados gerado na etapa de pré-processamento seja gerado em um formato igual ao arquivo de entrada de dados (arquivo neutro) lido pelo FEMOOP e que após a execução da análise, o arquivo de saída de dados gerado pelo FEMOOP esteja em formato compatível com a leitura feita pelo pós-processador.

Neste trabalho as caixas de diálogo desenvolvidas contém referências no FEMOOP para dados como tipo de análise, incidência nodal, condições de contorno (carregamentos nodais e deslocamentos prescritos), materiais (modelos constitutivos), métodos de integração e

conectividade de elementos finitos (1D e 2D). A seguir são descritos todos os arquivos referentes à customização dos programas, bem como a função de cada um na plataforma computacional FEMOOP & GiD desenvolvida.

- ✓ **femoop_2D.bas**: é o principal arquivo de customização, configura a forma com que os dados devem ser salvos no arquivo neutro “*.dat” que irá ser utilizado pelo solver;
- ✓ **femoop_2D.prb**: configura os parâmetros gerais do problema, ou seja, nele constrói-se a janela principal da análise do problema de elementos finitos, definindo o método de análise, o tipo de análise (linear ou não-linear), os parâmetros de análise não-linear, o tipo de algoritmo de análise não-linear, a espessura dos elementos finitos planos e as áreas das seções transversais das armaduras de aço;
- ✓ **femoop_2D.mat**: configura os materiais e suas propriedades, ou seja, contém as especificações quanto ao “*label*” dos materiais e seus respectivos atributos;
- ✓ **femoop_2D.cnd**: configura as condições de contorno impostas no problema (carregamento e deslocamentos prescritos);
- ✓ **femoop_2D.bat**: responsável por disparar o solver dentro da interface do GiD, a partir do comando “*calculate*”.

Na pasta que contém os arquivos de customização deve haver também o arquivo “**femoop.exe**” que é arquivo executável do programa FEMOOP. É obrigatório que esses arquivos estejam localizados dentro de uma pasta dentro de “*problem types*” gerado no diretório de instalação do programa GiD.

Durante o uso da plataforma computacional desenvolvida para uma análise numérica e após o uso do comando “*calculate*” para resolver o problema por elementos finitos utilizando o FEMOOP é gerado na pasta que contém os arquivos de customização um arquivo denominado “*nome_do_projeto.res*”. Este arquivo é lido na etapa de pós-processamento do GiD juntamente com o arquivo “*nome_do_projeto.msh*” que contém os dados da malha de elementos finitos gerado pelo próprio GiD para a visualização e análise dos resultados

obtidos. Na **Figura 46**, é ilustrada a chamada dos arquivos envolvidos na customização durante uma análise numérica utilizando a plataforma GiD & FEMOOP.

Figura 46 – Diagrama com os arquivos customizados.

5.3.1 Diálogo de Análise

Esta caixa de diálogo foi construída a partir do arquivo “*femoop_2D.prb*”. Ela é a janela principal da entrada de dados do problema, sendo nela definidos o tipo de análise a ser realizada (linear ou não-linear), envolvendo estados planos de tensões ou deformações e os parâmetros de entrada de uma análise não-linear, quando selecionada esta opção (**Figura 47**).

The image shows a screenshot of the 'Problem Data' dialog box. The dialog box has a title bar with a close button. The main area contains several fields and options, some of which are highlighted with red boxes and labeled with text on the left and right sides of the dialog. The labels on the left are: 'Tipo de Análise: Linear ou Não-Linear', 'Título do problema', 'Parâmetros para Análise Não-Linear', and 'Área da Seção transversal das armaduras'. The labels on the right are: 'Opção de Análise: EPT e EPD', 'Espessura dos elementos finitos 2D', and 'Problema em concreto simples ou armado'. The fields and options in the dialog are: 'ANALYSIS TYPE: Linear', 'ANALYSIS OPTION: Plane Stress', 'TITLE: Title_name', 'UNITS: SI', 'SOLVER: Femoop', 'POSTPROCESS: GID', 'THICKNESS: 1', 'Non Linear Algorithm: Newton Raphson', 'Number of Analysis Steps: 10', 'Step Factor: 0.1', 'Analysis Tolerance: 0.01', 'Number of Iterations per Step: 50', 'Print Steps: 1', 'Update: Standard', 'Type of Structure: Plain Concrete', 'Type of Reinforcements: Discrete', 'Steel Bars Cross Sectional Area 1: 1.0', 'Steel Bars Cross Sectional Area 2: 1.0', 'Steel Bars Cross Sectional Area 3: 1.0', and 'Steel Bars Cross Sectional Area 4: 1.0'. At the bottom of the dialog are 'Accept' and 'Close' buttons.

Figura 47 – Caixa de diálogo para a entrada de dados do tipo de análise do problema.

5.3.2 Diálogo de Materiais

Foram criadas quatro caixas de diálogo a partir do arquivo “*femoop_2D.mat*” para aplicação das propriedades dos materiais. A partir destas caixas de diálogo e com o auxílio de “*layers*” associados aos seus respectivos elementos finitos, podem ser aplicados diferentes materiais em elementos finitos distintos de uma mesma malha. Para o concreto foram criadas caixas de diálogo para o modelo de Willam e Warke de 5 parâmetros (**Figura 48**) e para o modelo de Ottosen (**Figura 49**). Para simulação de estruturas com concreto reforçado com fibras de aço, foi construída uma caixa de diálogo para aplicar o modelo de Seow e Swaddiwudhipong para considerar a presença de fibras descontínuas na matriz de concreto (**Figura 50**). Para as armaduras a **Figura 51** ilustra a caixa de diálogo para aplicar os parâmetros do modelo elasto-plástico bilinear.

Figura 48 – Caixa de diálogo para aplicar o modelo de Willam e Warke de 5 parâmetros.

Figura 49 – Caixa de diálogo para aplicar o modelo de Ottosen.

Figura 50 – Caixa de diálogo para aplicar o modelo para Concreto Reforçado com Fibras de Aço.

Figura 51 – Caixa de diálogo para aplicar o modelo elasto-plástico bilinear para as armaduras.

5.3.3 Diálogo de Condições de Contorno

Foi criado a partir do arquivo “*femoop_2D.cnd*” a caixa de diálogo responsável por aplicar as condições de contorno do problema (**Figura 52**) como carregamento e deslocamentos prescritos. Para restrição de pontos nodais utiliza-se o índice “1”, enquanto que “0” significa sem restrições.

Aplicação das condições de contorno:
vinculação, cargas externas e
deslocamentos prescritos

Figura 52 – Caixa de diálogo para aplicação das condições de contorno.

5.3.4 Utilizando a Customização

O objetivo deste item é descrever as principais funcionalidades e recursos disponíveis na plataforma FEMOOP & GiD após a etapa de customização e ilustrar com um exemplo passo a passo as principais características da plataforma nas etapas de pré-processamento, análise e pós-processamento. Será usado como referência uma das vigas apresentadas no trabalho de LEONHARDT e WALTHER (1962) sobre o estudo do comportamento ao cisalhamento de peças de concreto armado. A **Figura 53** ilustra as propriedades geométricas da viga utilizada bem como o esquema de ensaio em quatro pontos.

Figura 53 - Propriedades geométricas (valores em mm) e esquema de ensaio em quatro pontos. (LEONHARDT; WALTHER, 1962)

As propriedades dos materiais utilizados na simulação deste exemplo foram:

✓ **Concreto:** módulo de elasticidade de 28GPa; coeficiente de Poisson de 0,20; resistência à compressão de 28,5MPa; fator de retenção ao cisalhamento $\beta = 0,01$; resistência à tração de 3,42MPa; energia de fratura de 0,0015N/mm; largura de banda de fissura de 10mm; critério de ruptura de Ottosen ($A=1,58$; $B=3,23$; $K1=11,65$ e $K2=0,98$).

✓ **Armadura:** módulo de elasticidade de 210GPa; coeficiente de Poisson de 0,30; tensão de escoamento de 555MPa; modelo bilinear.

5.3.4.1 ETAPA DE PRÉ-PROCESSAMENTO

O primeiro passo desta etapa consiste em definir a geometria do problema que poderá ser feita utilizando-se as ferramentas de desenho do próprio GiD ou importando-a de programas específicos de desenhos como AutoCAD (extensão *.dxf). A **Figura 54** ilustra a geometria da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962) construída com as ferramentas de desenho do próprio GiD. Devido à simetria do problema foi construída apenas a metade da viga. Nesta figura pode-se notar que foram criadas duas sub-regiões, para que a “primitiva de linha” que divide essas regiões pudesse ser mapeada para receber uma camada de armadura. Nesta etapa também é importante que seja criado um “layer” para o concreto e um “layer” para cada grupo de armaduras com área de seção transversal distinta. Na plataforma desenvolvida há a opção de se usar até quatro tipos de armadura com áreas de seção transversal distintas (**Figura 47**), valendo a regra que relaciona, por exemplo, a “Área1” ao “layer 1”.

Figura 54 – Definição da geometria da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962) utilizando as ferramentas de desenho do GiD.

O segundo passo da etapa de pré-processamento consiste em definir a malha de elementos finitos que será usada na análise, sendo obrigatório usar somente os elementos finitos customizados na plataforma. Quando for usado para o concreto elementos finitos “T3” ou “Q4” deve-se usar para as armaduras elementos “L2”, e quando for usado elementos “T6” ou “Q8” deve-se usar elementos “L3” para as armaduras, atendendo desta forma a compatibilidade na conectividade dos nós dos elementos exigido no modelo discreto de representação de armaduras. O mapeamento da primitiva de linha como elementos lineares é feita utilizando a opção **Mesh** ⇒ **Mesh Criteria** ⇒ **Mesh** ⇒ **Lines** e selecionando as

“primitivas de linha” que receberão os elementos lineares. A **Figura 55** ilustra a malha de elementos finitos criada para a viga de LEONHARDT e WALTHER (1962) com 600 elementos finitos T3 para o concreto e 25 elementos L2 para as armaduras e 332 nós.

Figura 55 – Geração da malha de elementos finitos da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

Após essas duas etapas, caso ainda não estejam ativadas as opções de customização, esta deve ser feita através da opção **Data** ⇒ **Problem type** ⇒ **femoop** ⇒ **femoop2D**, fazendo com que todas as janelas de diálogos criadas estejam disponíveis para a aplicação dos dados do problema. A **Figura 56** ilustra aplicação dos materiais, que pode ser feito selecionando cada elemento com o mouse, ou selecionando o “layer” que deverá receber determinado material e desativando os restantes. A **Figura 57** ilustra as condições de contorno imposta ao problema, aproveitando sua simetria.

Figura 56 – Aplicação dos materiais no domínio do problema – Viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

Figura 57 – Aplicação das condições de contorno ao problema - Viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

5.3.4.2 DISPARANDO O SOLVER

A customização facilitou muito a etapa de análise pelo solver, não sendo mais necessário o usuário se preocupar com o local em que o arquivo foi salvo ou em ter que executar manualmente o executável do programa para digitar o nome do arquivo de entrada “*.dat”. Para executar o programa basta acessar o comando **Calculate** ⇒ **Calculate** na mesma interface que vinha sendo utilizada. No término da análise é ativada uma janela com a opção de pós-processamento instantâneo pelo usuário (Figura 58).

Figura 58 – Disparando a análise da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

5.3.4.3 ETAPA DE PÓS-PROCESSAMENTO

Esta etapa da plataforma foi desenvolvida para que a partir do momento que o usuário selecione a opção de pós-processamento “*postprocess*”, automaticamente são lidos os arquivos “*nome_do_projeto.res*” e “*nome_do_projeto.msh*” que contém respectivamente os dados de saída já processado pelo solver e os dados da malha de elementos finitos utilizada. A partir daí todos os recursos de pós-processamento do programa GiD estarão disponíveis para que o usuário explore os resultados de seu interesse. Para ilustrar alguns dos recursos disponíveis foram coletados alguns resultados oriundos da análise da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962). A **Figura 59** compara o resultado experimental e numérico de carga-deslocamento no centro do vão. As respostas numéricas apresentam boa correlação com os resultados experimentais.

Figura 59 – Carga Aplicada- deslocamentos no centro do vão - Viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

Outro item disponível é a visualização da distribuição de tensões normais nas armaduras. A **Figura 60** ilustra a configuração final da distribuição de tensões na armadura para a carga última de $P=72,25\text{kN}$.

Figura 60 - Tensão axial em MPa na armadura para $P=72,25\text{kN}$.

Pode-se também solicitar a distribuição de tensões atuantes no concreto. A **Figura 61** ilustra o campo de tensões principais e a **Figura 62** as tensões de cisalhamento.

Figura 61 – Tensões principais no concreto em MPa – Viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

Figura 62 – Tensões de cisalhamento no concreto em MPa – Viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).

Para estruturas de concreto armado o quadro de fissuração obtido é muito importante, uma vez que esse é um dos principais fatores que influenciam no comportamento não-linear do material. Na plataforma desenvolvida está disponível o modelo de fissuração distribuído rotacional, sendo possível obter a configuração de fissuração e a abertura de fissuras em todo o histórico de carregamento. A **Figura 63 - a e b** ilustra o quadro de fissuração para a viga de LEONHARDT e WALTHER (1962) para a carga de 72,25kN.

(a)

(b)

Figura 63 – Representação do quadro de fissuração em mm da viga de LEONHARDT e WALTHER (1962).
(a) Abertura de fissuras por cores; **(b)** Quadro de fissuração via modelo distribuído rotacional

6 MODELAGEM COMPUTACIONAL

Neste capítulo a eficiência das implementações efetuadas no programa FEMOOP e sua customização com o programa GiD são avaliadas. No primeiro exemplo, são analisadas doze vigas de concreto armado utilizando os modelos descritos no capítulo 4. Nesse exemplo foram comparados os resultados experimentais com os obtidos pela plataforma desenvolvida utilizando-se o critério de resistência de Ottosen e o critério de Willam e Warnke. Essas vigas também foram modeladas utilizando o programa VecTor2 desenvolvido na Universidade de Toronto para fins de comparação.

No segundo e terceiro exemplos é avaliado o modelo implementado para concreto reforçado com fibras de aço. Nas vigas de CRFA ensaiadas por LIM e OH (1999) os resultados também são comparados com os resultados numéricos obtidos por PASA (2007), que utilizou a mesma estratégia para considerar a presença de fibras de aço descontínuas na matriz de concreto. Nas vigas ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997) é avaliado a possibilidade de substituição total dos estribos por fibras de aço. Neste exemplo também é analisado o quadro de fissuração obtido pela viga sem estribos e com 2% de adição de fibras.

Para ilustrar os recursos de tratamento de dados obtidos pela plataforma desenvolvida, foi escolhida uma viga de cada exemplo para ser analisada a distribuição de tensões, campo de deslocamentos, abertura de fissuras, etc.

6.1 VIGAS DE CONCRETO ARMADO ENSAIADAS POR BRESLER E SCORDELIS

Neste exemplo são comparados os resultados dos ensaios experimentais de uma série de doze vigas de concreto armado conduzidos por BRESLER e SCORDELIS (1963) com os obtidos pela plataforma computacional desenvolvida (FEMOOP & GiD) e a plataforma desenvolvida na “*University of Toronto - Canada*” pelo grupo coordenado pelo Prof. Frank Vecchio: FormWorks (*pré-processador*), VecTor2D (*solver*) e Augustus (*pós-processador*). Estes ensaios têm sido bastante utilizados em pesquisas para calibração e validação da modelagem de estruturas de concreto armado via método dos elementos finitos, principalmente devido à qualidade e descrição detalhada dos ensaios.

As doze vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963) consistem de quatro séries de três vigas de seção retangular, biapoiadas, ensaiadas em três pontos submetidas a carregamento monotônico no centro do vão. A **Figura 64** ilustra o esquema de ensaio, bem como os detalhes das seções transversais das quatro séries. As séries apresentam distintas taxas de armadura longitudinal e transversal, comprimento do vão, dimensões da seção transversal e resistência do concreto. A **Tabela 6** e a **Tabela 7** fornecem respectivamente as principais características das vigas ensaiadas e as propriedades dos materiais utilizados.

Figura 64 - Vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963).

(a) Esquema ilustrativo do ensaio em três pontos com carregamento monotônico no centro do vão; (b) Detalhe das seções transversais das quatro séries de vigas (valores em mm)

Tabela 6 – Detalhes das vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963).

Viga n°	b (mm)	h (mm)	d (mm)	L (mm)	Vão (mm)	A _s	A _s '	A _{sw/s}
OA1	310	556	461	4100	3660	4 n° 9	---	---
OA2	305	561	466	5010	4570	5 n° 9	---	---
OA3	307	556	462	6840	6400	6 n° 9	---	---
A1	307	561	466	4100	3660	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
A2	305	559	464	5010	4570	5 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
A3	307	561	466	6840	6400	6 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
B1	231	556	461	4100	3660	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 190
B2	229	561	466	5010	4570	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 190
B3	229	556	461	6840	6400	5 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 190
C1	155	559	464	4100	3660	2 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
C2	152	559	464	5010	4570	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210
C3	155	554	459	6840	6400	4 n° 9	2 n° 4	n° 2 c/ 210

Tabela 7 – Propriedades dos materiais utilizados nas vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963).

Armadura					
Barra	Diâmetro (mm)	Área (mm²)	f _y (MPa)	f _u (MPa)	E _s (MPa)
n° 2	6,4	32,2	325	430	190000
n° 4	12,7	127	345	542	201000
n° 9	28,7	645	555	933	218000
Concreto					
Viga n°	f _c (MPa)		f _t (MPa)		
OA1	22,6		3,97		
OA2	23,7		4,34		
OA3	37,6		4,14		
A1	24,1		3,86		
A2	24,3		3,73		
A3	35,1		4,34		
B1	24,8		3,99		
B2	23,2		3,76		
B3	38,8		4,22		
C1	29,6		4,22		
C2	23,8		3,93		
C3	35,1		3,86		

Para todas as vigas descritas, comparou-se os resultados experimentais carga-deslocamento com os resultados numéricos obtidos pelas plataformas. (**Figura 65 a Figura 76**).

Aproveitando as características de simetria, as vigas foram modeladas pela metade. Foram utilizados para a representação do concreto, elementos finitos quadrilaterais de oito nós (Q8) e para as armaduras elementos finitos de treliça de três nós (L3). Para a resolução das equações de equilíbrio não-lineares foi utilizado o método de Newton-Raphson padrão com controle de carga. As armaduras foram representadas através do modelo discreto.

A **Tabela 8** contém os resultados obtidos das cargas de ruptura e deslocamentos das doze vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963), utilizando a plataforma FEMOOP & GiD e o programa VecTor2. Na plataforma FEMOOP & GiD essas vigas foram simuladas utilizando os critérios de ruptura de Ottosen e Willam e Warnke. Os resultados obtidos por esses dois critérios se mostraram praticamente equivalentes. Quando da utilização do critério de Willam e Warnke a simulação se apresentava um pouco mais rígida e com uma carga de ruptura ligeiramente maior.

A carga de ruptura obtida pela plataforma desenvolvida obteve valores muito próximos aos resultados experimentais. A viga C3 foi a que apresentou o valor mais distinto, com uma diferença de aproximadamente 15%.

Os deslocamento obtidos pela plataforma FEMOOP & GiD também apresentaram valores bem próximos dos resultados experimentais, com exceção da viga A1, na qual a diferença foi de aproximadamente 40%.

Os resultados obtidos pelo programa VecTor2, em geral foram muito parecidos aos obtidos pela plataforma desenvolvida, com exceção da viga A1. Nessa viga o programa VecTor2 conseguiu um valor mais aproximado de deslocamento quando comparado aos resultados experimentais que a plataforma FEMOOP & GiD. No entanto, a carga de ruptura foi 14% maior que a experimental.

Em geral a rigidez apresentada pelas vigas nas simulações numéricas utilizando os dois programas foi muito próxima dos ensaios experimentais.

A **Tabela 9** contém os resultados de abertura de fissura obtidos pela plataforma FEMOOP & GiD, utilizando os critérios de resistência de Ottosen e Willam e Warnke de 5 parâmetros e pelo programa VecTor2.

Em geral os resultados de abertura de fissuras obtidos pelos dois programas foram inferiores aos resultados experimentais. Essa talvez seja a justificativa dos resultados numéricos se apresentarem um pouco mais rígidos que os experimentais.

Na plataforma desenvolvida as aberturas de fissuras obtidas, quando da utilização do modelo de Willam e Warnke de cinco parâmetros, foram menores que as obtidas quando da utilização do modelo de Ottosen. Isso talvez justifique o primeiro modelo se apresentar ligeiramente mais rígido que o de Ottosen.

Figura 71 – Curvas carga aplicada-deslocamento obtidas para a viga B1.

Figura 72 – Curvas carga aplicada-deslocamento obtidas para a viga B2.

Figura 73 – Curvas carga aplicada-deslocamento obtidas para a viga B3.

Figura 74 – Curvas carga aplicada-deslocamento obtidas para a viga C1.

Figura 75 – Curvas carga aplicada-deslocamento obtidas para a viga C2.

Figura 76 – Curvas carga aplicada-deslocamento obtidas para a viga C3.

Tabela 8 – Resultados obtidos nas modelagens computacionais das vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963).

Viga n°	Pu (KN)					Δ (%)		δu (mm)					Δ (%)	
	Exper.	VecTor2	FEMOOP Ottosen	FEMOOP Willam-Warnke	VecTor2	FEMOOP Ottosen	FEMOOP Willam-Warnke	Exper.	VecTor2	FEMOOP Ottosen	FEMOOP Willam-Warnke	VecTor2	FEMOOP Ottosen	FEMOOP Willam-Warnke
OA1	334	343	345	360	2,69	3,29	7,78	6,6	6,88	6,7	6,85	4,24	1,52	3,79
OA2	356	344	362	382	-3,37	1,69	7,30	11,7	11,6	10,5	10,8	-0,85	-10,26	-7,69
OA3	378	359	380	390	-5,03	0,53	3,17	27,9	26,92	26,5	25,5	-3,51	-5,02	-8,60
A1	467	533	424	425	14,13	-9,21	-8,99	14,2	14,9	8,1	8,05	4,93	-42,96	-43,31
A2	489	529	500	475	8,18	2,25	-2,86	22,9	21,4	20,8	19	-6,55	-9,17	-17,03
A3	467	430	435	462	-7,92	-6,85	-1,07	35,8	35,9	35,62	37,2	0,28	-0,50	3,91
B1	445	506	416	412	13,71	-6,52	-7,42	13,7	14,66	10,85	9,5	7,01	-20,80	-30,66
B2	400	346	409	409	-13,50	2,25	2,25	20,8	22,83	22,33	21	9,76	7,36	0,96
B3	356	358	362	362	0,56	1,69	1,69	35,3	35,89	35,27	35,87	1,67	-0,08	1,61
C1	311	332	318	325	6,75	2,25	4,50	17,8	17,77	17	15,40	-0,17	-4,49	-13,48
C2	325	287	315	319	-11,69	-3,08	-1,85	20,1	19,55	17,69	17,64	-2,74	-11,99	-12,24
C3	269	256	222	227	-4,83	-17,47	-15,61	36,8	37,39	31,9	33	1,60	-13,32	-10,33

Tabela 9 – Resultados obtidos para as aberturas de fissuras nas vigas ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963).

Viga nº	w^{cr} (mm)				Δ (%)		
	Experimental	VecTor2	FEMOOP Ottosen	FEMOOP Willam-Warnke	VecTor2	FEMOOP Ottosen	FEMOOP Willam-Warnke
OA1	0,40	0,26	0,33	0,34	-35,00	-17,50	-15,00
OA2	0,30	0,25	0,19	0,22	-16,67	-36,67	-26,67
OA3	0,35	0,27	0,54	0,48	-22,86	54,29	37,14
A1	0,50	0,51	0,59	0,59	2,00	18,00	18,00
A2	1,40	0,79	0,71	0,55	-43,57	-49,29	-60,71
A3	1,60	0,49	0,46	0,50	-69,38	-71,25	-68,75
B1	0,75	0,88	0,52	0,44	17,33	-30,67	-41,33
B2	1,60	0,83	0,69	0,67	-48,13	-56,88	-58,13
B3	1,60	0,58	0,63	0,70	-63,75	-60,63	-56,25
C1	2,50	3,11	1,89	1,62	24,40	-24,40	-35,20
C2	0,40	0,70	0,38	0,38	75,00	-5,00	-5,00
C3	0,90	0,37	0,62	0,73	-58,89	-31,11	-18,89

Para avaliar e validar a visualização gráfica da distribuição de tensões no concreto e armadura e o quadro de fissuração apresentado pela plataforma FEMOOP & GID, foi feito um estudo comparativo dos resultados obtidos para a viga OA1 com os resultados obtidos pela plataforma de Toronto.

Na plataforma FEMOOP & GiD, além das propriedades já mencionadas para a viga OA1, foram utilizados na simulação numérica: módulo de elasticidade do concreto de 26GPa; coeficiente de Poisson de 0,20; fator de retenção ao cisalhamento “ β ” de 0,02; $A = 1,43$; $B=3,21$, $K_1=11,69$; $K_2=0,98$; energia de fratura de 0,0075N/mm e largura de banda de fissura igual a 15mm.

Foi utilizando o método de Newton-Raphson para resolução das equações de equilíbrio não-lineares e as armaduras foram representadas através do modelo discreto.

Para a simulação numérica da viga OA1, utilizando-se o programa VecTor2, o concreto foi modelado utilizando-se a parábola de “*Hognestad*” no comportamento pré-pico de compressão; amolecimento na compressão conforme o modelo definido em VECCHIO (1992) e o modelo linear de amolecimento na tração com fissuração distribuída segundo o modelo rotacional.

A **Figura 77** e a **Figura 78** ilustram a distribuição de tensões σ_{xx} obtida para a viga OA1 no concreto e armadura respectivamente. Os resultados obtidos pelos dois programas foram muito semelhantes. Percebe-se que a plataforma desenvolvida apresentou valores de distribuição de tensões de acordo com as condições de contorno impostas. Para a carga última, a linha neutra se deslocou para cima ficando as fibras superiores sob altas tensões de compressão e as fibras inferiores tracionadas.

Figura 77 – Tensões normais σ_{xx} no concreto obtidas para a viga OA1 (valores em MPa).
(a) Plataforma FEMOOP & GiD; (b) VecTor2

Figura 78 – Tensões normais σ_{xx} na armadura obtidas para a viga OA1 (valores em MPa).
(a) Plataforma FEMOOP & GiD; (b) VecTor2

A distribuição de tensões de cisalhamento σ_{xy} no concreto, obtida nos dois programas é ilustrada na **Figura 79**. Na região próxima ao apoio, a plataforma FEMOOP & GiD obteve uma tensão de cisalhamento de 2,52MPa, contra 2,70MPa obtida pelo programa VecTor2. O campo de tensões obtidos mais uma vez foram similares.

Figura 79 – Tensões de cisalhamento σ_{xy} no concreto obtidas para a viga OA1 (valores em MPa).
(a) Plataforma FEMOOP & GiD; (b) VecTor2

A **Figura 80** e a **Figura 81** ilustram a abertura de fissuras e o quadro de fissuração da viga OA1. Na plataforma FEMOOP & GiD foi obtida uma abertura máxima de fissura de 0,33mm, enquanto que o programa VecTor2 obteve uma abertura máxima de 0,26mm. Os dois programas utilizaram o modelo de fissuração distribuída rotacional para representar as fissuras e apresentaram quadro de fissuração semelhante.

Figura 80 – Aberturas de fissura obtidas para a Viga OA1. (Valores em mm).
(a) Plataforma FEMOOP & GiD; (b) VecTor2

Figura 81 – Quadro de fissuração obtido para a viga OA1.
(a) Plataforma FEMOOP & GiD; (b) VecTor2

Em geral os resultados obtidos pela plataforma FEMOOP & GiD foram muito próximos dos obtidos pelo programa VecTor2, o que garante a eficiência das implementações efetuadas.

6.2 VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO ENSAIADAS POR LIM E OH

O modelo implementado para concreto reforçado com fibras de aço é avaliado neste exemplo por meio da simulação numérica de vigas de concreto reforçado com diferentes taxas de armadura transversal e adição de fibras ensaiadas por LIM e OH (1999). Os resultados também são comparados com os obtidos numericamente por PASA (2007), que considerou o comportamento dos materiais por meio de um modelo elasto-plástico, e a presença das fibras de aço descontínuas na matriz de concreto utilizando a mesma variante da superfície de ruptura de Willam-Warnke de cinco parâmetros proposta por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005) e implementada neste trabalho (ver *item 4.2*).

Os ensaios conduzidos por LIM e OH (1999) tiveram o objetivo de avaliar o aumento da resistência ao corte de vigas com diferentes taxas de estribos e fibras de aço e a possibilidade de substituição parcial das armaduras transversais por essas fibras. Essas vigas foram divididas em dois grupos de acordo com a taxa de armadura transversal utilizada. As vigas do primeiro grupo contêm 75% dos estribos necessários para resistir ao corte, com distância entre estribos de 6 cm e taxa de adição de fibras em volume de 0% e 1% (vigas S0.75-0 e S0.75-1). No segundo grupo as vigas contêm 50% dos estribos necessários para o reforço ao corte, com distância entre estribos de 8 cm e taxa de adição de fibras em volume de 0%, 1% e 2% (vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2).

A **Figura 82** e a **Figura 83** ilustram a configuração de ensaio em quatro pontos dos dois grupos de vigas ensaiadas, assim como a geometria, disposição das armaduras, seção transversal e posição do carregamento estático aplicado. As propriedades dos materiais utilizados nos dois grupos de vigas estão listadas na **Tabela 10**.

Figura 82 – Configuração de ensaio do Grupo 1 de vigas ensaiadas por LIM e OH (1999) com 75% da área de armadura necessária para o reforço ao corte (vigas S0.75-0 e S0.75-1 - cotas em cm).

Figura 83 – Configuração de ensaio do Grupo 2 de vigas ensaiadas por LIM e OH (1999) com 50% da área de armadura necessária para o reforço ao corte (vigas S0.50-0, S0.50-1 e S0.50-2 - cotas em cm).

Tabela 10 – Propriedades dos materiais utilizados nos dois grupos de vigas ensaiadas por LIM e OH (1999).

Armadura			
Tipo	Diâmetro (mm)	f_v (MPa)	E_s (MPa)
Longitudinal Superior	2 ϕ 10mm	420	210000
Longitudinal Inferior	2 ϕ 16mm	420	210000
Transversal	ϕ 6mm	359	210000
Fibras de Aço			
Tipo	L_f (mm)	D_f (mm)	f_{fu} (MPa)
Lisa com seção transversal circular	42	0,7	1784
Concreto Reforçado com Fibras de Aço			
Taxa de Fibra (%)	f_{cm} (MPa)	f_{tm} (MPa)	k
0	34	2,5	1
1	38,69	4	0,954
2	42,40	5,1	0,936

Os outros parâmetros utilizados foram o coeficiente de Poisson “ ν ” de 0,20 para o concreto e 0,30 para as armaduras; fator de retenção ao cisalhamento “ β ” de 0,01; energia de fratura de 0,0015N/mm e largura de banda de fissura de 10mm.

Para a modelagem computacional dessas vigas foram utilizadas as malhas de elementos finitos ilustradas na **Figura 84**, bem como as condições de contorno aplicadas. As vigas foram modeladas apenas pela metade, aproveitando-se das características de simetria do carregamento aplicado e propriedades geométricas. Ainda nesta figura a caixa de diálogo mostra os “layers” criados para aplicar as propriedades dos materiais descritos acima nos seus respectivos elementos finitos.

Figura 84 – Malha de elementos finitos para as vigas de LIM e OH (1999). **(a)** Caixa de diálogo com os “layers” de cada material a ser aplicado nos correspondentes elementos finitos; **(b)** Malha de elementos finitos para as vigas da série S0.75; **(c)** Malha de elementos finitos para as vigas da série S0.50

Para o concreto foram utilizados elementos finitos triangulares de seis nós (T6) e para a armadura elementos finitos de treliça de três nós (L3), posicionados nas arestas dos elementos de concreto por necessidade do modelo discreto de representação das armaduras utilizado

neste trabalho. Em todos os exemplos foi utilizado incremento de carga e o Método de Newton Raphson Padrão para a resolução das equações de equilíbrio não-lineares.

A **Figura 85** e a **Figura 86** ilustram as curvas carga aplicada-deslocamentos obtidas no centro do vão para as vigas da série S0.75 e a **Figura 87**, **Figura 88** e **Figura 89**, para as vigas da série S0.50. Para averiguar os resultados obtidos pela plataforma desenvolvida, comparou-se com aqueles obtidos numericamente por PASA (2007) e os resultados experimentais.

Figura 85 – Curvas carga aplicada-deslocamento para a viga da série S0.75-0.

Figura 86 – Curvas carga aplicada-deslocamento para a viga da série S0.75-1.

A **Tabela 11** resume os valores de cargas de ruptura e deslocamentos no centro do vão obtidos experimentalmente e numericamente pela plataforma desenvolvida e por PASA (2007). De um modo geral os resultados obtidos com a plataforma desenvolvida apresentaram-se coerentes com os resultados experimentais, demonstrando a eficácia das implementações efetuadas.

As cargas de ruptura nas duas séries de vigas apresentaram valores muito próximos das obtidas nos ensaios experimentais e numericamente por PASA (2007). Nesses exemplos as fibras de aço conseguiram substituir parcialmente a armadura transversal, inclusive naquelas que possuíam apenas 50% da quantidade de estribos necessários para resistir aos esforços de corte. Nessas vigas, o modelo numérico obteve um incremento de aproximadamente 17% da carga de ruptura, com uma adição de 2% em volume de fibras, próximo aos 15% que havia obtido o ensaio experimental.

Quanto aos deslocamentos obtidos na plataforma desenvolvida, estes se comportaram bem próximos dos obtidos por PASA (2007), e ambos são inferiores aos resultados experimentais em todos os exemplos, ficando mais distintos com a adição de fibras de aço.

Além das curvas carga-deslocamentos outros resultados foram avaliados para a viga S0.50-1, como a distribuição de tensões σ_{xx} nas armaduras e no concreto, além das distribuições de tensões cisalhantes σ_{xy} no concreto, para melhor avaliar a plataforma desenvolvida. Para ilustrar o histórico de tensões nesse exemplo, esses campos de tensões foram obtidos para três níveis de carga, $P = 12\text{kN}$ (**Figura 90**), $P = 30\text{kN}$ (**Figura 91**) e $P = 96\text{kN}$ (**Figura 92**). Foi utilizado um fator de escala 25 para melhor visualizar a configuração deformada da viga em cada passo de carga analisado.

A distribuição de tensões σ_{xy} obtido pela plataforma desenvolvida reflete o campo de tensões de cisalhamento esperado para as condições de contorno impostas ao problema.

A distribuição de tensões σ_{xx} demonstra as fibras inferiores da viga sendo tracionadas, e as superiores comprimidas. Para a carga de 12kN a tensão atuante na região tracionada está atingindo a tensão de ruptura do concreto. Com o aumento do carregamento, percebe-se que a

linha neutra vai subindo, ficando as fibras superiores submetidas a tensões de compressão cada vez maiores. As tensões normais σ_{xx} obtidas nas armaduras também são coerentes com o carregamento e restrições aplicados, validando desta forma todas as variáveis analisadas nesse exemplo.

Tabela 11 – Resultados obtidos nas modelagens computacionais das vigas ensaiadas por LIM e OH (1999).

Viga nº	Pu (KN)			Δ (%)		δu (cm)			Δ (%)	
	Exper.	PASA	FEMOOP	PASA	FEMOOP	Exper.	PASA	FEMOOP	PASA	FEMOOP
S0.75-0	108	107	114	-0,93	5,56	1,20	1,10	1,13	-8,33	-5,83
S0.75-1	115	116	118	0,87	2,61	1,62	1,15	1,09	-29,01	-32,72
S0.50-0	95	98	98	3,16	3,16	0,90	1,00	0,85	11,11	-5,56
S0.50-1	106	105	112	-0,94	5,66	1,50	1,25	1,20	-16,67	-20,00
S0.50-2	110	112	115	1,82	4,55	1,28	0,98	1,05	-23,44	-17,97

Figura 90 – Campo de tensões para a viga S0.50-1 quando submetida a carregamento de 12kN.
(a) Tensões σ_{xy} no concreto; **(b)** Tensões σ_{xx} no concreto; **(c)** Tensões σ_{xx} nas armaduras

Figura 91 – Campo de tensões para a viga S0.50-1 quando submetida a carga de 30kN.
(a) Tensões σ_{xy} no concreto; **(b)** Tensões σ_{xx} no concreto; **(c)** Tensões σ_{xx} nas armaduras

Figura 92 – Campo de tensões para a viga S0.50-1 quando submetida a carga de 96kN.
(a) Tensões σ_{xy} no concreto; **(b)** Tensões σ_{xx} no concreto; **(c)** Tensões σ_{xx} nas armaduras

6.3 VIGAS DE CONCRETO ARMADO REFORÇADO COM FIBRAS DE AÇO ENSAIADAS POR FURLAN JR. E HANAI

Neste exemplo o modelo para concreto reforçado com fibras de aço é mais uma vez testado por meio da simulação computacional de algumas das vigas de concreto reforçado com fibras de aço ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997). O objetivo destes pesquisadores foi avaliar a influência da adição de fibras de aço na resistência ao cisalhamento de vigas, com armadura de cisalhamento (série A) e sem armadura de cisalhamento (série B). A **Figura 93** ilustra a configuração de ensaio em quatro pontos das duas séries de vigas ensaiadas, assim como a geometria, disposição das armaduras, seção transversal e posição do carregamento estático aplicado. As propriedades dos materiais utilizados nas duas séries de vigas estão listadas na **Tabela 12**.

Figura 93 – Configuração das vigas ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997) - (cotas em mm).
(a) vigas da série A - com estribos; (b) vigas da série B - sem estribos

Tabela 12 – Propriedades dos materiais utilizados nas duas séries de vigas ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997).

Armadura					
Tipo	Diâmetro (mm)	f _y (MPa)	E _s (MPa)		
Longitudinal Superior	2 ϕ 6,3mm	410	210000		
Longitudinal Inferior	2 ϕ 9,5mm	410	210000		
Transversal	ϕ 3,4mm	350	210000		
Fibras de Aço					
Tipo	L _f (mm)	D _f (mm)	f _{ftu} (MPa)		
Lisa com seção transversal retangular	25,4	0,8	1100		
Concreto Reforçado com Fibras de Aço					
Vigas	Taxa de Fibra (%)	f _{cm} (MPa)	f _{tm} (MPa)	E _c (MPa)	k
P1A / P1B	0	43,8	3,4	29000	1
P3A / P3B	1	54,8	3,3	38720	0,983
P4A / P4B	2	50	4,2	41490	0,961

Os outros parâmetros utilizados foram o coeficiente de Poisson “ ν ” de 0,20 para o concreto e 0,30 para as armaduras; fator de retenção ao cisalhamento “ β ” de 0,01; energia de fratura de 0,0015N/mm e largura de banda de fissura de 10mm.

Para a modelagem computacional dessas vigas foram utilizadas as malhas de elementos finitos e condições de contorno ilustradas na **Figura 94**. As vigas foram modeladas apenas pela metade, aproveitando-se das características de simetria do carregamento aplicado e propriedades geométricas. Ainda nesta figura a caixa de diálogo mostra os “*layers*” criados para aplicar as propriedades dos materiais descritos acima nos seus respectivos elementos finitos.

Figura 94 – Malha de elementos finitos para as duas séries de vigas ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997). **(a)** Caixa de diálogo com os “layers” de cada material a ser aplicado nos correspondentes elementos finitos; **(b)** Malha de elementos finitos para as vigas da série A; **(c)** Malha de elementos finitos para as vigas da série B

Para o concreto foram utilizados elementos finitos triangulares de seis nós (T6) e para a armadura elementos finitos de treliça de três nós (L3), posicionados nas arestas dos elementos de concreto por necessidade do modelo discreto de representação das armaduras utilizado neste trabalho. Em todos os exemplos foram utilizados incrementos de carga e o Método de Newton Raphson Padrão para a resolução das equações de equilíbrio não-lineares.

A **Figura 95** e a **Figura 96** ilustram as curvas carga aplicada-deslocamento obtidas no centro do vão para as vigas da série A e B respectivamente.

Figura 95 – Curvas carga aplicada-deslocamento para as vigas da série A ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997).

Figura 96 – Curvas carga aplicada-deslocamento para as vigas da série B ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997).

Os valores obtidos de cargas de ruptura e deslocamentos no centro do vão encontram-se resumidos na **Tabela 13**. De um modo geral os resultados obtidos com a plataforma de desenvolvimento apresentaram-se coerentes com os resultados experimentais.

As cargas de ruptura nas duas séries de vigas apresentaram valores compatíveis com os ensaios experimentais, conseguindo as fibras, a exemplo do que tinha ocorrido nas vigas

ensaiadas por LIM e OH (1999), substituir os estribos. Na viga P4B sem estribos e com 2% de adição de fibras em volume, a análise numérica proporcionou um incremento de 7% na carga de ruptura quando comparada à viga P1A com estribos e sem adição de fibras. Esse incremento tinha sido de 10% no ensaio experimental.

Os deslocamentos obtidos na plataforma desenvolvida foram em geral inferiores aos resultados experimentais, com exceção da viga P3B. Nessa viga houve um incremento de 31% do deslocamento quando comparado ao resultado experimental. Uma possível explicação seria uma má distribuição das fibras de aço na matriz cimentícia durante a concretagem dessa viga, deixando a mesma com um ponto de ruptura frágil.

Tabela 13 – Resultados obtidos nas modelagens computacionais das vigas ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997).

Viga n°	Pu (KN)		Δ (%)	δu (mm)		Δ (%)
	Experimental	FEMOOP		Experimental	FEMOOP	
P1A	40	42	5,00	12,8	12	-6,25
P3A	45,5	45	-1,10	22,7	17,29	-23,83
P4A	44,6	48	7,62	29	18,1	-37,59
P1B	32	30	-6,25	6,6	5,6	-15,15
P3B	40	43	7,50	6	7,86	31
P4B	44	45	2,27	12,2	11,33	-7,13

Além das curvas carga-deslocamentos avaliou-se a distribuição de tensões σ_{xx} nas armaduras e no concreto, além das distribuições de tensões σ_{xy} no concreto, para a carga de ruptura de 45kN atuante na viga P4B, para avaliar o comportamento da plataforma desenvolvida. Foi utilizado um fator de escala 25 para melhor visualizar a configuração deformada dessa viga.

A distribuição de tensões σ_{xx} no concreto (**Figura 97 - a**) demonstra as fibras inferiores da viga sendo tracionadas, e as superiores submetidas a altas tensões de tração, conforme o esperado. Para as armaduras as tensões normais atuantes (**Figura 97 - b**) também se mostraram de acordo com as condições de contorno impostas ao problema, ficando submetidas a altas tensões de tração.

A distribuição de tensões σ_{xy} obtido pela plataforma desenvolvida (**Figura 97 - c**) reflete o campo de tensões de cisalhamento esperado para as condições de contorno de carregamento e restrições de deslocamento impostas na análise.

A **Figura 97 - d** ilustra o campo de deslocamentos para a carga de ruptura de 45kN. Nela pode-se ver o deslocamento de 11,32mm obtido no centro do vão, confirmando a resposta plotada na **Figura 96**.

Neste exemplo também foi avaliado o quadro de fissuração obtido pelo modelo de fissuras distribuída rotacional implementada. A **Figura 98 - a**, ilustra a abertura máxima da fissura obtida de 0,25mm. O quadro de fissuração (**Figura 98 - b**) obtido pelo modelo numérico está de acordo com o modelo apresentado, plotando as fissuras no centro dos elementos finitos que tiveram a resistência à tração atingida. O quadro de fissuração obtido no ensaio experimental (**Figura 98 - c**) é caracterizado por fissuras mais espaçadas e concentradas.

Figura 97 – Viga P4B submetida à carga de 45kN. **(a)** Tensões σ_{xx} no concreto (MPa); **(b)** Tensões σ_{xx} na armadura (MPa); **(c)** Tensões σ_{xy} no concreto (MPa); **(d)** Deslocamentos na direção Y (mm)

Figura 98 – Quadro de fissuração para a viga P4B quando submetida à carga de 45kN. **(a)** Abertura de fissuras (mm); **(b)** Distribuição de fissuras (modelo de fissuras distribuído rotacional); **(c)** Quadro de fissuração experimental

7 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Neste trabalho foram acoplados os programas FEMOOP e GiD para trabalharem em conjunto proporcionando uma única interface gráfica ao usuário. O objetivo desse acoplamento foi obter uma plataforma computacional que reunisse todas as características de um “*solver*” robusto, que permitisse facilmente novas implementações, com um “*pré e pós-processador*” que tivesse uma interface gráfica amigável para o usuário, facilitando a construção de modelos numéricos e disponibilizando várias ferramentas para tratamento dos resultados das análises.

O acoplamento foi possível através da customização do programa GiD através de um conjunto de arquivos, denominados arquivos de customização, que permitem que o “*solver*” seja executado dentro do programa GiD automaticamente. Nesses arquivos também foram implementadas caixas de diálogo que contém vínculos para alguns modelos constitutivos do “*solver*”, condições de contorno, e outros dados da análise para facilitar a entrada de dados na fase de “*pré-processamento*”.

O acoplamento desenvolvido nesse trabalho foi feito apenas para análises planas. Elementos finitos quadrilaterais de quatro e oito nós e elementos triangulares de três e seis nós foram customizados para representação do concreto. Para as armaduras foram considerados elementos finitos de treliça de dois e três nós. A representação das armaduras via método dos elementos finitos é feita utilizando o modelo discreto. Há a opção de se usar até quatro tipos de armaduras com diferentes áreas de seções transversais. Para a resolução das equações de equilíbrio não-lineares foi utilizado o método de Newton-Raphson padrão.

Foi considerado um modelo constitutivo elástico não-linear para o concreto, acoplado a um modelo de fissuração distribuída rotacional, com uma lei de amolecimento linear na tração. Para as armaduras foi utilizado um modelo constitutivo elasto-plástico. Especificamente para considerar a presença de fibras de aço descontínuas na matriz de concreto, foi utilizado o critério de ruptura proposto por SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005), que consiste em alterar o meridiano de tração no critério de ruptura de cinco parâmetros proposto por Willam e Warnke em função dos parâmetros da fibra. Para o concreto reforçado com fibras de aço

fissurado foi considerado o trecho pós-fissuração proposto no modelo de tração de LIM *et. al* (1987).

Para validar as implementações efetuadas, foram analisadas doze vigas de concreto armado ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963), com diferentes dimensões e taxas de armaduras. Para o concreto reforçado com fibras de aço, foram analisadas vigas ensaiadas por LIM e OH (1999) e as ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997).

A seguir são descritas as principais conclusões obtidas e sugestões para a continuidade desse trabalho.

7.1 Conclusões

A plataforma FEMOOP & GiD desenvolvida neste trabalho, correspondeu às expectativas esperadas. Modelos numéricos são facilmente construídos utilizando as ferramentas de desenho, na qual são aplicados os materiais e dados de análise utilizando as caixas de diálogo construídas. A plataforma desenvolvida permitiu que além das curvas carga-deslocamento que eram obtidas em trabalhos anteriores utilizando o FEMOOP, fosse realizada análise gráfica da distribuição de tensões no concreto e armadura, campo de deslocamentos e quadro de fissuração.

De um modo geral, todos os exemplos numéricos analisados pela plataforma desenvolvida obtiveram valores muito próximos aos resultados experimentais, tanto as vigas de concreto armado convencional quanto as reforçadas com fibras de aço.

Para as vigas de concreto armado ensaiadas por BRESLER e SCORDELIS (1963), foram obtidas cargas de ruptura e deslocamentos muito próximos aos resultados experimentais e aqueles obtidos pelo programa VecTor2. A plataforma desenvolvida apresentou valores muito semelhantes quando da utilização dos critérios de OTTOSEN (1977) e WILLAM e WARNKE (1974). Este último se mostrou ligeiramente mais rígido, com uma carga de ruptura um pouco maior que o obtido utilizando o critério de Ottosen.

A viga C3 foi a que apresentou o valor mais distinto de carga de ruptura obtido pela plataforma desenvolvida e o resultado experimental. A diferença obtida nessa simulação foi de aproximadamente 15%. Quanto aos deslocamentos, a maior diferença entre o resultado experimental e o numérico foi obtido pela viga A1, de aproximadamente 40%.

Os resultados obtidos pelo programa VecTor2, em geral foram muito próximos dos obtidos pela plataforma FEMOOP & GiD. Para a viga A1, esse programa obteve um valor mais aproximado de deslocamento que a plataforma desenvolvida. No entanto a carga de ruptura obtida foi 14% maior que a experimental. Em geral tanto o programa VecTor2 quanto a plataforma FEMOOP & GiD apresentaram rigidez semelhante aos resultados experimentais.

As aberturas de fissuras obtidas pela plataforma FEMOOP & GiD foram na maioria dos casos muito menores que as obtidas nos ensaios experimentais. Em geral, as aberturas de fissuras obtidas quando da utilização do modelo de Ottosen foram ligeiramente maiores que as obtidas utilizando o modelo de Willam e Warnke. Talvez por isso o modelo de Willam e Warnke tenha se mostrado mais rígido que o modelo de Ottosen.

As simulações numéricas das vigas de concreto reforçado com fibras de aço demonstraram que o modelo de SEOW e SWADDIWUDHIPONG (2005), consegue considerar a presença de fibras de aço descontínuas na matriz de concreto através do parâmetro k . No entanto mais verificações devem ser feitas para melhor avaliar a variação deste parâmetro.

Nas simulações das vigas de LIM e OH (1999) os resultados da plataforma desenvolvida foram muito próximos aos obtidos por PASA (2007) que também utilizou a mesma estratégia para considerar a presença das fibras. As cargas de ruptura obtida foram muito próximas aos resultados experimentais, enquanto que os deslocamentos, em todos os exemplos foram menores que obtidos experimentalmente, ficando ainda maiores quando da adição de fibras. Para a viga S.050-2 contento 50% da quantidade de estribos necessários a resistir aos esforços de corte, e 2%, a simulação numérica obteve um incremento de aproximadamente 17% da carga de ruptura, com uma adição de 2% em volume de fibras, chegando próximo aos 15% que havia obtido o ensaio experimental.

Nas simulações das vigas ensaiadas por FURLAN JR. e HANAI (1997), as fibras de aço conseguiram substituir os estribos. Para a viga P4B sem estribos e com 2% de adição de fibras

em volume, a análise numérica proporcionou um incremento de 7% na carga de ruptura quando comparada a viga P1A com estribos e sem adição de fibras. Esse incremento tinha sido de 10% no ensaio experimental. Os deslocamentos obtidos na plataforma desenvolvida foram em geral inferiores aos resultados experimentais, com exceção da viga P3B. Nessa viga houve um incremento de 31% do deslocamento quando comparado ao resultado experimental. Uma possível explicação seria uma má distribuição das fibras de aço na matriz cimentícia durante a concretagem dessa viga, deixando a mesma com um ponto de ruptura frágil. Esse talvez seja o maior argumento em utilizar fibras de aço em conjunto com armaduras passivas, o que evitaria catástrofes devido à ruptura frágil do concreto em um ponto localizado de falha.

A visualização gráfica obtida pela plataforma desenvolvida foi muito importante para um maior entendimento dos resultados obtidos, confirmando a eficiência das implementações efetuadas através da visualização do campo de tensões no concreto e armaduras, tensões de cisalhamento no concreto e quadro de fissuração. Todos os resultados obtidos na plataforma FEMOP & GiD, se mostraram coerentes com as condições de contorno impostas nas análises.

7.2 Sugestões para Trabalhos Futuros

Dentre as diversas possibilidades para trabalhos futuros são sugeridos:

- ✓ Extensão para o caso 3D da plataforma FEMOOP & GiD, incluindo a implementação de novos elementos finitos, como de cascas e placas, para a simulação de lajes e tubos de concreto;
- ✓ Implementação de elementos de interface aço-concreto e modelos de aderência;
- ✓ Implementação de novos modelos de representação de armadura como incorporada e distribuída;
- ✓ Incorporar novos modelos constitutivos para o concreto convencional e reforçado com fibras de aço na plataforma desenvolvida, como por exemplo, os baseados na mecânica da fratura e do dano;

- ✓ Simular estruturas de concreto reforçadas com fibras de aço que possuem atualmente grande interesse comercial, como elementos estruturais restringidos, tubulações e elementos de cascas;
- ✓ Implementar na plataforma algoritmos para análise dinâmica de estruturas.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Design considerations for steel fiber reinforced concrete** (ACI 544-4R-88). In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v.85, 1988.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Design considerations for steel fiber reinforced concrete** (ACI 544-4R-88). In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v.5, 2000.

AMERICAN CONCRETE INSTITUTE. **Design considerations for steel fiber reinforced concrete** (ACI 544-4R-88). In: Manual of concrete Practice. Detroit, Michigan, v.5, 2004.

ARAÚZ, A. C. **Resistência ao cisalhamento em vigas de concreto armado reforçado com fibras de aço**. 2002. Dissertação (Mestrado) – Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2002.

ASSAN, A. E. **Método dos elementos finitos: primeiros passos**. Editora Unicamp. 2ª Ed., 2003.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Tubos de concreto, de seção circular, para águas pluviais e esgotos sanitários**. NBR 8890, ABNT, Rio de Janeiro.

ASSOCIAÇÃO BRASILEIRA DE NORMAS TÉCNICAS. **Fibras de aço para concreto – Especificação**. NBR 15530:07, ABNT, Rio de Janeiro.

AMERICAN SOCIETY FOR TESTING AND MATERIALS. **Standard test method for flexural toughness and first crack strength of fiber reinforced concrete**. ASTM C1018. Book of ASTM Standards, Parte 04.02. ASTM, Philadelphia, 1994.

BALAGURU, P. N.; SHAH, S. P. **Fiber reinforced cement composites**. USA. McGraw-Hill. 1992.

BANTHIA, N.; TROTTIER, J. F. Concrete reinforced with deformed steel fibers, Part 1: bond-slip mechanisms. **ACI Materials Journals**, v.91, n.5, Sep.-Oct., p.435-446, 1994.

BARROS, J. A. O. Estado-de-arte dos betões reforçados com fibras. **Eng. Civil UM, Departamento de Eng. Civil, Universidade do Minho, Guimarães, Portugal**, n.3, p.29-47, 1996.

BATHE, K. J. **Finite element procedures**. Englewood Cliffs, USA: Prentice Hall, 1996.

BEKAERT. Dramix Guideline: Design of steel wire fiber reinforced concrete structures with or without ordinarizing reinforcement, **Infrastructuur in Het Leefmilieu** 4, Belgium, p.227-259, 1995.

BENTUR, A.; MINDESS, S. **Fibre reinforced cementitious composites**. United Kingdom. Barking, Elsevier, 1990.

BONO, G. F. F. **Modelos constitutivos para análise tridimensional de estruturas de concreto armado através do método dos elementos finitos**. 2008. 181p. Tese (Doutorado) – Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2008.

BOOCH, G.; RUMBAUGH, J.; JACOBSON, I. **The unified modeling language: user guide**. Boston: Addison Wesley, 1999.

BRESLER, B.; SCORDELIS, A. C. Shear strength reinforced concrete beams. **Journal of American Concrete Institute**, v.60, n.1, p.51-72, 1963.

BUENO, E. M. R. **Simulação bidimensional de fraturamento coesivo por meio do método dos elementos finitos**. 1999. 136p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1999.

CHAMA NETO, P. J.; FIGUEIREDO, A. D. **Avaliação do desempenho de tubos de concreto reforçados com fibras de aço**. In: 45º Congresso Brasileiro do Concreto do Instituto Brasileiro do Concreto (IBRACON), 2003, Vitória. 2003.

CHEN, W. F.; HAN, D. J. **Plasticity for structural engineers**. New York: Springer-Verlag, 1988.

CHEN, W. F.; SALEEB, A. F. **Constitutive equations for engineering materials**. John Wiley & Sons, 1994.

COMITÉ EURO-INTERNATIONAL DU BETON. **CEB-FIP Model Code 1990: Design Code**. London: Thomas Telford Services, 1993.

CRISFIELD, M. A. **Non-linear finite element analysis of solids and structures**, v.1, John Wiley & Sons, 1997.

DAHL, K. K. B. **A failure criterion for normal and high strength concrete**. Technical University of Denmark, Lyngby, 1992.

DBV - **DEUTSCHER BETON-UND-BAUTECHNIK-VEREIN**. DBV-Merkblatt: Stahlfaserbeton. Oktober, 2001.

DEITEL, H. M.; DEITEL, P. J. **C++ How to program**. 4th edition. Prentice-Hall, Inc., 2004.

FANELLA, D. A; NAAMAN, A. E. Stress-strain properties of fiber reinforced mortar in compression. **Journal of American Concrete Institute**, v.82, n.4, Jul.-Aug., p.475-483, 1985.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto com fibras de aço**. Boletim Técnico BT/PCC/260. 69p. Departamento de Engenharia de Construção Civil, Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2000.

FIGUEIREDO, A. D. **Concreto com fibras. Concreto: ensino, pesquisa e realizações**. IBRACON, v.2. São Paulo: Iphis Gráfica e Editora, cap.39, p.1195-1225, 2005.

FUJII, G. **Análise de estruturas tridimensionais: desenvolvimento de uma ferramenta computacional orientada para objetos.** 1997. 96p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

FURLAN JR., S.; HANAI, J. B. Shear behaviour of fiber reinforced concrete beams. **Cement and Concrete Composites.** v.19, n.4, p.359-66, Jul.-Aug., 1997.

GAMINO, A. L. **Modelagem física e computacional de estruturas de concreto reforçadas com CFRP.** 2007. 259p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2007.

GUELLO, G. A. **Simulação computacional de estruturas de concreto por meio da mecânica do dano.** 2002. 105p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2002.

HARTL, H. **Development of a continuum-mechanics-based for 3D finite element analysis of reinforced concrete structures and application to problems of soil-structure interaction.** 2002. 250p. Doctoral Thesis. Technische Universität Graz, Áustria, 2002.

HOLANDA, K. M. A. **Análise dos mecanismos resistentes e das similaridades de efeitos da adição de fibras de aço na resistência e na ductilidade à punção de lajes-cogumelo e ao cisalhamento de vigas de concreto.** 2002. 278p. Tese (Doutorado) – Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

JAPAN SOCIETY OF CIVIL ENGINEERS. **Method of tests for flexural strength and flexural toughness of steel fiber reinforced concrete.** JSCE-SF4. Concrete Library of JSCE. Part III-2 Method of tests for steel fiber reinforced concrete. n.3, June, p.58-61, 1984.

JONES, P. A. **Flexural modelling of steel fibre reinforced sprayed concrete.** 1998. 343 p. Ph.D thesis. Loughborough University. Loughborough, England, 1998.

KUPFER, H. B.; HILSDORF, H. K.; RUSCH, H. Behavior of concrete under biaxial stress. **Journal of American Concrete Institute**, v.66, n.8, p.656-666, 1969.

LEONHARDT, F.; WALTHER, R. **Schubversuche an einfeldrigen stahlbetonbalken mit und ohne schubbewehrung.** Deutscher Ausschuss für Stahlbeton, 151, Berlin, West Germany. 1962.

LIM, T. Y. *et al.* Analytical model for tensile behavior of steel-fiber concrete. **ACI Materials Journal**, p.286-298, Jul.-Aug., 1987.

LIM, D. H.; OH, B. H. Experimental and theoretical investigation on the shear of steel fibre reinforced concrete beams. **Engineering Structures**, 1999. v.21, p.937-44.

LIM, T. Y. *et al.* Bending behaviour of steel-fiber concrete beams. **ACI Structural Journal**, 84-S54, Nov.-Dec., 1987.

LOK, T. S.; PEI, J. S. Flexural behavior of steel fiber reinforced concrete. **Journals of Materials in Civil Engineering**, May, p.86-97, 1998.

LOK, T. S.; XIAO, J. R. Flexural strength assessment of steel fiber reinforced concrete. **Journals of Materials in Civil Engineering**, Aug., p.188-196, 1999.

LOPES, M. M. **Substituição parcial de armadura de flexão por fibras de aço em vigas de concreto**. 2005. 130p. Dissertação (Mestrado) – COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2005.

MARTHA *et al.* **An OOP Class Organization for Materially Nonlinear Finite Element Analysis**. In: Join Conference of Italian Group of Computational Mechanics and Ibero-Latin American Association of Computational Methods in Engineering, Padova, 1996. p.429-440.

MEHTA, P. K. ; MONTEIRO, P. J. M. **Concreto: estrutura, propriedades e materiais**. 3ª.Ed. São Paulo: PINI, 2008.

MINDESS, S. **Fibre reinforced concrete: challenges and prospects**. In: Second University-Industry Workshop on Fiber Reinforced Concrete and Other Advanced Materials. Toronto, Canada, p.1-12, 1995.

MORETTI, C. O. **Análise de estruturas utilizando técnicas de processamento paralelo distribuído**. 1997. 122p. Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1997.

MORETTI, C. O. **Um sistema computacional paralelo aplicado à simulação tridimensional de fissuras**. 2001. 184p. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2001.

NGO, D.; SCORDELIS, A. C. Finite element analysis of reinforced concrete beams. **Journal of American Concrete Institute**, v.65, n.3, p.152-163, 1967.

OTTOSEN, N. S. A failure criterion for concrete. **Journal of Engineering Mechanics Division**, ASCE, v.103, n.EM4, p.527-627, 1977.

PASA, V. P. **Análise do comportamento de estruturas de concreto reforçado com fibras de aço via método dos elementos finitos**. 2007. 158p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Federal do Rio Grande do Sul, Porto Alegre, 2007.

PERUZZI, A. P. **Comportamento das fibras de vidro convencionais em matriz de cimento portland modificada com látex e adição de sílica ativa**. 2002, 96p. Dissertação (Mestrado) - Escola de Engenharia de São Carlos, Universidade de São Paulo, São Carlos, 2002.

PRADO, E. P. **A Influência da estrutura interna do material na simulação computacional de elementos estruturais de concreto**. 2004. 253p. Tese (Doutorado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2004.

REDDY, J. N. **An introduction to nonlinear finite element analysis**. Oxford University Press, 2004.

Reference Manual version 8. GID THE PERSONAL PRE AND POSTPROCESSOR – disponível em (<http://www.gidhome.com/>), acesso em 03/10/2007.

RESENDE, F. M. **Influência das fibras de aço, polipropileno e sisal no amortecimento de concretos de resistência normal e de alto desempenho.** 2003. 98p. Dissertação (Mestrado) - COPPE, Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2003.

RILEM TC 162 / 2003. TECHNICAL COMMITTEE 162. **Test and design methods for steel fibre reinforced concrete - σ - ϵ design method - final recommendation.** Materials and Structures 36 (262): 560-567 Oct, 2003.

SANT'ANA, M. V. P. **Modelo numérico para concreto reforçado com fibras.** 2005. 105p. Dissertação (Mestrado) - Universidade Estadual do Norte Fluminense, Campos dos Goytacazes, 2005.

SEOW P. E. C.; SWADDIWUDHIPONG, S. Failure surface for concrete under multiaxial load - a unified approach. **Journal of Materials in Civil Engineering** - ASCE, v.17, n.2, Mar.-Apr., p.219-228, 2005.

SIMÃO, W. I. S. **Modelos de armadura e aderência para análise não-linear de estruturas de concreto armado.** 2003. 112p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2003.

SIMÕES, L. C. **Um modelo constitutivo para concreto com fibras.** 1998. 111p. Dissertação (Mestrado) - Departamento de Engenharia Civil, Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 1998.

SWADDIWUDHIPONG, S.; SEOW P. E. C. **Modelling of steel fiber-reinforced concrete under multi-axial loads.** Cement and Concrete Research, v.36, n.7, p.1354-1361, 2006.

User Manual version 8. GID THE PERSONAL PRE AND POSTPROCESSOR - disponível em (<http://www.gidhome.com/>), acesso em 03/10/2007.

VECCHIO, F. J. Finite Element Modeling of Concrete Expansion and Confinement. **ASCE Journal of Structural Engineering**, v.18, n.9, p.2390-2406, 1992.

VILLARES, A. M. O. **Influência da largura do corpo-de-prova na medida da tenacidade do concreto reforçado com fibras de aço.** 2001. 128p. Dissertação (Mestrado) - Faculdade de Engenharia Civil, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 2001.

WILLAM, K. J.; WARNKE, E. P. Constitutive models for the triaxial behavior of concrete. **International Association of Bridge Structures**, v.19, p.1-30, 1975.

YIN, W. S. *et al.* Biaxial tests of plain and fiber concrete. **ACI Materials Journal**. v.86, n.3, p.236–243, May-Jun., 1989.