MARIA DE LOURDES TEIXEIRA MOREIRA

Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas

São Paulo
2009

MARIA DE LOURDES TEIXEIRA MOREIRA

Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas

Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia de Estruturas

Área de concentração:
Engenharia de Estruturas

Orientador
Prof. Dr. Paulo de Mattos Pimenta

São Paulo
2009

AUTORIZO A REPRODUÇÃO E DIVULGAÇÃO TOTAL OU PARCIAL DESTE TRABALHO, POR QUALQUER MEIO CONVENCIONAL OU ELETRÔNICO, PARA FINS DE ESTUDO E PESQUISA, DESDE QUE CITADA A FONTE.

FICHA CATALOGRÁFICA

Moreira, Maria de Lourdes Teixeira
Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas / M.L.T. Moreira. -- São Paulo, 2009.
190 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica.

1. Barras 2. Cascas (Engenharia) 3. Método dos elementos finitos 4. Análise não linear de estruturas I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica. II. t.

A meu pai e minha mãe,
com todo o meu amor.

AGRADECIMENTOS

Sinceros agradecimentos a todos que tornaram este trabalho possível:

Ao Prof. Pimenta, pela generosa e competente orientação e pela sua suave inflexibilidade, impulsionando-me a aprofundar sempre mais este trabalho, indiferente a meus rogos para considerá-lo completo.

Ao Prof. Campello, pela disponibilidade e generosidade, sempre pronto a sentar comigo e ajudar-me a superar os obstáculos que encontrei pelo caminho (e não foram poucos).

À Wanda, por compartilhar comigo o exílio em São Paulo.

Ao Vicente por todo apoio que me deu, às vezes como especialista em informática, às vezes como motorista, mas sempre como o melhor irmão do mundo.

Ao Paulo, pela amizade e companhia nesta cansativa mas compensadora jornada.

Aos colegas da AADP – Hudson, João de Deus, Henrique, Marcelo – pela ajuda quando precisei e pela atenção que sempre me dispensaram.

Aos colegas do Departamento de Estruturas da UFPI, que, sobrecarregando-se, permitiram que eu me afastasse de minhas atividades docentes para realizar o Doutorado.

À UFPI e à CAPES, pelo apoio durante o tempo que durou meu afastamento.

“Na verdade, é tudo muito simples...”

Paulo de Mattos Pimenta

RESUMO

MOREIRA, M. L. T. **Parametrização das rotações em teorias de barras e cascas**. 2009. 190f. Tese (Doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

Este trabalho apresenta uma formulação tensorial genérica para parametrização das rotações do tipo vetorial destinada ao estudo de grandes rotações no espaço tridimensional. Esta formulação é compatível com as parametrizações de Euler e de Rodrigues. É dada ênfase aos que aqui se denominou "parâmetros generalizados de Rodrigues", que fornecem expressões simples, computacionalmente mais eficientes que a parametrização clássica de Euler. A formulação apresentada é adequada para uso em métodos numéricos baseados nas projeções de Galerkin, como o método dos elementos finitos, podendo ser implementada com facilidade em programas já existentes de elementos finitos. Apresentam-se aqui expressões para o tensor das rotações e suas derivadas, bem como os tensores necessários à análise incremental. As formas fracas são construídas tanto com projeção ortogonal como não-ortogonal, correspondentes à aplicação do Teorema dos Trabalhos Virtuais e Teorema das Potências Virtuais, respectivamente. Os modelos propostos foram aplicados em um programa de elementos finitos utilizando formulações cinemáticas Lagrangiana total e Lagrangiana atualizada e foram resolvidos vários exemplos, dentre eles alguns clássicos da literatura, de forma a avaliar sua validade e aplicação.

Palavras-chave: Método dos elementos finitos; Análise não linear de estruturas; Barras; Cascas.

ABSTRACT

MOREIRA, M. L. T. **Rotation parameterization in rod and shell theories**. 2009. 190f. Thesis (Doctoral) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2009.

This work presents a generic formulation of vector-type for the parameterization of large rotations in three-dimensional space. This formulation adapts to the Euler and the Rodrigues parameterization. Special distinction is made to the here named "generalized Rodrigues parameters" which result in very simple and computationally efficient expressions. The attained formulation is convenient for numerical procedures employing Galerkin projection like the finite element method and can be readily implemented in a FE code. The expressions of rotation tensor and its derivatives, which lead to a consistent linearization, are herein derived. The necessary tensor quantities employed in the derivation of the tangent bilinear weak form of incremental analysis are obtained too. The weak forms are constructed here with both orthogonal and non-orthogonal projections, corresponding to the application of the virtual work theorem or virtual power theorem respectively. The formulation is implemented within a finite element code in total Lagrangian and updated Lagrangian framework and assessment of the scheme is made by means of several numerical simulations.

Keywords**:** Nonlinear rod and shell models, finite elements, nonlinear analysis, geometrically exact approach, finite rotation

LISTA DE FIGURAS

Capítulo 2

Fig. 2.1 Rotação de um vetor..... 31

Fig. 2.2 Ângulos de Euler..... 38

Capítulo 4

Fig. 4.1 Descrição da barra e grandezas cinemáticas fundamentais..... 64

Capítulo 5

Fig. 5.1 Descrição da casca e grandezas cinemáticas fundamentais..... 81

Fig. 5.2 Elemento triangular de seis nós..... 91

Capítulo 6

Fig. 6.1 Descrição da barra e grandezas cinemáticas fundamentais..... 95

Fig. 6.2 Descrição da casca e grandezas cinemáticas fundamentais..... 106

Capítulo 7

Fig. 7.1 Modelo de barras atualizado..... 115

Fig. 7.2 Modelo de cascas atualizado..... 124

Capítulo 8

Fig. 8.1 Viga balcão – geometria e propriedades mecânicas..... 132

Fig. 8.2 Viga balcão – diferenças normalizadas tendo como referência a solução Lagrangiana em Trabalhos Virtuais com parametrização de Euler 133

Fig. 8.3 Viga balcão – diferenças normalizadas tendo como referência a solução com parametrização de Euler para cada situação de análise..... 134

Fig. 8.4 Viga balcão – deslocamentos da extremidade da barra..... 135

Fig. 8.5 Viga em balanço – geometria e propriedades mecânicas 137

Fig. 8.6 Viga em balanço – gráfico carga x deslocamentos da extremidade da barra..... 138

Fig. 8.7 Viga em balanço – diferenças normalizadas tendo como referência a solução Lagrangiana em Trabalhos Virtuais com parametrização de Euler 138

Fig. 8.8 Viga em balanço – diferenças normalizadas tendo como referência a solução com parametrização de Euler para cada situação de análise..... 139

Fig. 8.9 Chapa em balanço – geometria e propriedades mecânicas 140

Fig. 8.10 Chapa em balanço – gráfico força x deslocamentos: resultados obtidos

com elementos de casca e barra..... 141
Fig. 8.11 Chapa em balanço – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 142
Fig. 8.12 Chapa em balanço – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total..... 143
Fig. 8.13 Chapa em balanço – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado..... 144
Fig. 8.14 Pórtico biapoiado – geometria e propriedades mecânicas..... 145
Fig. 8.15 Pórtico biapoiado – deslocamentos do vértice..... 146
Fig. 8.16 Pórtico biapoiado – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 146
Fig. 8.17 Pórtico biapoiado – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise..... 147
Fig. 8.18 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (1) – geometria e propriedades mecânicas 148
Fig. 8.19 Gráfico força x deslocamento dos exemplos 8.1.5 e 8.2.3..... 148
Fig. 8.20 Pórtico plano (1) – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 149
Fig. 8.21 Pórtico plano (1) – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise..... 150
Fig. 8.22 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (2) – geometria e propriedades mecânicas 150
Fig. 8.23 Gráfico força x deslocamento dos exemplos 8.1.6 e 8.2.4..... 151
Fig. 8.24 Pórtico plano (2) – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 151
Fig. 8.25 Pórtico plano (2) – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise..... 152
Fig. 8.26 Viga em balanço – geometria e características mecânicas..... 153
Fig. 8.27 Viga em balanço – distribuição dos elementos..... 154
Fig. 8.28 Viga em balanço – curvas força – deslocamento 154
Fig. 8.29 Viga em balanço – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo

Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler análise como placa..... 155
Fig. 8.30 Viga em balanço – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total..... 155
Fig. 8.31 Viga em balanço – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado..... 156
Fig. 8.32 Chapa em L – malha de elementos..... 157
Fig. 8.33 Chapa em L – deformada..... 157
Fig. 8.34 Chapa em L – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 158
Fig. 8.35 Chapa em L – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para a análise com algoritmo Lagrangiano total/ matriz não-simétrica..... 158
Fig. 8.36 Chapa em L – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para análise com algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz simétrica..... 159
Fig. 8.37 Pórtico (1) – distribuição dos elementos de casca..... 160
Fig. 8.38 Pórtico (1) – deformada..... 160
Fig. 8.39 Pórtico (1) – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler na análise como casca..... 160
Fig. 8.40 Pórtico (1) – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise como casca..... 161
Fig. 8.41 Pórtico (2) – distribuição dos elementos de casca..... 161
Fig. 8.42 Pórtico (2) – deformada..... 162
Fig. 8.43 Pórtico (2) – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler na análise como casca..... 162
Fig. 8.44 Pórtico (2) – diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise

como casca..... 163
Fig. 8.45 Geometria do anel circular..... 164
Fig. 8.46 Deformada do anel circular..... 164
Fig. 8.47 Anel circular – deslocamento vertical nos pontos A, B e C..... 165
Fig. 8.48 Anel circular – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 165
Fig. 8.49 Anel circular – diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise 166
Fig. 8.50 Geometria da casca hemisférica..... 166
Fig. 8.51 Deformada da casca hemisférica..... 168
Fig. 8.52 Casca hemisférica – curva força-deslocamento para os pontos A e B 168
Fig. 8.53 Casca hemisférica – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/parametrização de Euler 169
Fig. 8.54 Casca hemisférica – diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total..... 169
Fig. 8.55 Casca hemisférica – diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado..... 170
Fig. 8.56 Geometria da casca cilíndrica aberta..... 170
Fig. 8.57 Casca cilíndrica aberta – curva força-deslocamento para os pontos A, B e C..... 171
Fig. 8.58 Deformada da casca cilíndrica aberta 171
Fig. 8.59 Casca cilíndrica aberta – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler 172
Fig. 8.60 Casca cilíndrica aberta – diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise 172
Fig. 8.61 Geometria da casca cilíndrica com diafragmas nas extremidades 173
Fig. 8.62 Casca cilíndrica com diafragmas – deformada..... 174
Fig. 8.63 Casca cilíndrica com diafragmas – curva força-deslocamento para os pontos A e B (1)..... 175
Fig. 8.64 Casca cilíndrica com diafragmas – curva força-deslocamento para os pontos A e B (2)..... 175

Fig. 8.65 Casca cilíndrica com diafragmas – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler..... 176
Fig. 8.66 Casca cilíndrica com diafragmas – diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total..... 176
Fig. 8.67 Casca cilíndrica com diafragmas – diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado..... 177

LISTA DE TABELAS

Capítulo 3

Tab. 3.1 Valores de g^{-1}, a e b em função do valor n 57

Tab. 3.2 Coeficientes para determinação do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$ 59

Tab. 3.3 Coeficientes necessários à obtenção de $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Gamma}'$ para $n = 1,2,3$ 61

Tab. 3.4 Intervalo de validade das parametrizações de Rodrigues 62

Capítulo 8

Tab. 8.1 Viga balcão - deslocamentos do nó da extremidade 133

Tab. 8.2 Viga balcão – número de iterações e tempo de processamento 135

Tab. 8.3 Viga em balanço - carga crítica de flambagem..... 137

Tab. 8.4 Chapa em balanço - carga crítica de flambagem..... 141

Tab. 8.5 Pórtico biapoiado - carga crítica de flambagem..... 145

Tab. 8.6 Chapa em L - carga crítica de flambagem..... 157

Tab. 8.7 Casca hemisférica – taxa de convergência no último incremento de carga..... 167

LISTA DE SÍMBOLOS

A	Área da seção transversal
$\boldsymbol{A}_j$	Matriz de conectividade do elemento j
$\boldsymbol{A}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{A}_n$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\alpha}_n$
$\boldsymbol{a}$	No modelo de barras é o vetor que localiza os pontos da seção transversal em relação ao seu eixo e, no modelo de cascas, é o diretor da casca em um dado ponto da superfície de referência, ambos na configuração deformada
$\boldsymbol{a}_\alpha$	Coordenadas de um ponto no plano da seção transversal da barra
$\boldsymbol{a}^r$	No modelo de barras é o vetor que localiza os pontos da seção transversal da barra em relação ao seu eixo na configuração de referência e, no modelo de cascas, é o diretor da casca em um dado ponto da superfície de referência
$\bar{\boldsymbol{b}}$	Vetor das forças de volume externas atuantes sobre a barra
$\boldsymbol{d}$	Vetor dos deslocamentos generalizados da barra (graus de liberdade)
$\boldsymbol{D}$	Matriz dos coeficientes de rigidez constitutiva
E	Módulo de elasticidade longitudinal
$\boldsymbol{e}$	Vetor unitário na direção do eixo de rotação
$\boldsymbol{E}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{e}$
$\boldsymbol{E}$	Tensor das deformações de Green-Lagrange
$\boldsymbol{E}_{ij}$	Elementos do tensor das deformações **E**
$\boldsymbol{e}_i^r$	Base ortonormal de vetores na configuração de referência
$\boldsymbol{e}_i$	Base ortonormal de vetores na configuração deformada
$\boldsymbol{F}$	Gradiente da transformação
G	Módulo de elasticidade transversal
$\boldsymbol{G}$	Operador tangente que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos
$\boldsymbol{G}_{ij}$	Submatrizes 3x3 do operador tangente $\boldsymbol{G}$
$g(\alpha)$	Função auxiliar na variável α_n
h_i	Funções auxiliares
$\boldsymbol{I}_p$	Matriz identidade de ordem "p"

$J_{\alpha\beta}$	Momento de inércia da seção transversal em relação a um eixo qualquer
$J^G_{\alpha\beta}$	Momento de inércia da seção transversal em relação a um eixo passando pelo seu centro de gravidade
J_O	Momento polar de inércia da seção transversal em relação a um par de eixos qualquer
J^G_O	Momento polar de inércia da seção transversal em relação a um par de eixos passando pelo seu centro de gravidade
J^S_O	Momento polar de inércia da seção transversal em relação a um par de eixos passando pelo seu centro de cisalhamento
J	Determinante de $\boldsymbol{F}$ ou Jacobiano da transformação
$\boldsymbol{K}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\kappa}$
$\boldsymbol{k}_T$	Matriz de rigidez tangente de um elemento
$\boldsymbol{k}_C$	Matriz de rigidez tangente constitutiva de um elemento
$\boldsymbol{k}_G$	Matriz de rigidez tangente geométrica de um elemento
$\boldsymbol{k}_L$	Matriz de rigidez tangente do carregamento externo de um elemento
$\boldsymbol{K}_T$	Matriz de rigidez tangente da estrutura
ℓ	Comprimento da barra
$\boldsymbol{L}$	Operador tangente que caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos
$\boldsymbol{L}_{ij}$	Submatrizes do operador tangente $\boldsymbol{L}$
$\boldsymbol{m}$	Vetor dos momentos internos atuantes numa seção transversal
$\bar{\boldsymbol{m}}$	Vetor dos momentos externos distribuídos aplicados ao longo da barra, por unidade de comprimento
$\bar{\boldsymbol{m}}^\Gamma$	Vetor dos momentos concentrados atuantes nas extremidades da barra
$\boldsymbol{M}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{m}$
$\boldsymbol{m}^r$	Vetor dos momentos internos da seção transversal retrorrotacionado para a configuração de referência
$\boldsymbol{n}$	Vetor das forças internas atuantes numa seção transversal
$\bar{\boldsymbol{n}}$	Vetor das forças externas distribuídas aplicadas ao longo da barra, por unidade de comprimento
$\bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma$	Vetor das forças concentradas atuantes nas extremidades da barra
$\boldsymbol{n}^r$	Vetor das forças internas da seção transversal retrorrotacionado para a

	configuração de referência
$\boldsymbol{N}_a$	Função de forma (ou de interpolação) para elementos de barra isoparamétricos referentes ao nó *a*
$\boldsymbol{N}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{n}$
$\boldsymbol{N}$	Matriz de interpolação dos elementos finitos da estrutura
$\boldsymbol{P}$	Primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff
$\boldsymbol{p}$	Vetor dos deslocamentos nodais generalizados de um elemento
P_{int}	Potência dos esforços internos
P_{ext}	Potência dos esforços externos
$\boldsymbol{Q}$	Tensor ortogonal das rotações da seção transversal
$\overline{\boldsymbol{q}}$	Vetor dos esforços externos generalizados aplicados ao longo da barra, por unidade de comprimento
$\boldsymbol{q}^*$	Vetor dos esforços generalizados concentrados atuantes nas extremidades da barra
$\boldsymbol{r}$	Vetor dos deslocamentos nodais da estrutura
$\boldsymbol{R}$	Vetor dos esforços nodais residuais da estrutura
S_α	Momentos estáticos da seção transversal em relação a um eixo qualquer
S_α^G	Momentos estáticos da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo seu centro de gravidade
S_α^S	Momentos estáticos da seção transversal em relação a um eixo que passa pelo seu centro de cisalhamento
$\boldsymbol{t}$	Vetor genérico dependente de $\boldsymbol{\alpha}(\boldsymbol{t} = t(\boldsymbol{\alpha}))$
$\boldsymbol{T}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{t}$
$\boldsymbol{T}$	Tensor das tensões de Cauchy
$\boldsymbol{T}_{ij}$	Elementos do tensor das tensões $\boldsymbol{T}$
$\boldsymbol{t}_\alpha$	Vetor das tensões atuantes nos planos cujas normais na configuração de referência são $\boldsymbol{e}_\alpha^r$
$\boldsymbol{t}_{ij}$	Componentes do vetor $\boldsymbol{t}_\alpha$ (na base $\boldsymbol{e}_i$) ou do vetor $\boldsymbol{t}_\alpha^r$ (na base $\boldsymbol{e}_\alpha^r$)
$\boldsymbol{t}_\alpha^r$	Vetor das tensões $\boldsymbol{t}_\alpha$ retrorrotacionado para a configuração de referência
$\overline{\boldsymbol{t}}$	Vetor das forças superficiais externas atuantes sobre a barra
t	Tempo
$\boldsymbol{u}$	Vetor dos deslocamentos dos pontos do eixo da barra

$\boldsymbol{u}^*$	Vetor dos deslocamentos impostos nas extremidades do eixo da barra
$\boldsymbol{u}_i$	Componentes do vetor dos deslocamentos do eixo $\boldsymbol{u}$
$\boldsymbol{U}$	Tensor resultante de determinadas operações algébricas que envolvem $\boldsymbol{\Gamma}$
V_α	Forças cortantes atuantes na seção transversal, nas direções $\boldsymbol{e}_\alpha$
$\boldsymbol{V}$	Tensor resultante de determinadas operações algébricas que envolvem $\boldsymbol{\Gamma}$
$\boldsymbol{x}$	Vetor posição dos pontos da barra ou casca na configuração deformada
$\boldsymbol{Y}$	Operador matricial para cálculo das deformações generalizadas
$\boldsymbol{z}$	Vetor posição dos pontos do eixo da barra, na configuração deformada
α e β	Índices gregos que variam de 1 a 2 apenas
$\boldsymbol{\alpha}$	Vetor das rotações utilizado na parametrização de Rodrigues
α	Norma do vetor $\boldsymbol{\alpha}$
$\boldsymbol{\alpha}_n$	Vetor das rotações utilizado na parametrização generalizada de Rodrigues
α_n	Norma do vetor $\boldsymbol{\alpha}_n$
$\boldsymbol{\gamma}$	Vetor das deformações dos pontos da seção transversal
γ_i	Componentes do vetor $\boldsymbol{\gamma}$
$\boldsymbol{\gamma}^r$	Vetor das deformações retrorrotacionado para a configuração de referência
$\boldsymbol{\gamma}_i^r$	Componentes do vetor $\boldsymbol{\gamma}^r$
$\boldsymbol{\Gamma}$	Tensor que relaciona as velocidades angulares com a derivada temporal das rotações
$\boldsymbol{\delta}$	Vetor dos deslocamentos dos pontos da barra
δ_i	Componentes do vetor $\boldsymbol{\delta}$
δ	Símbolo de grandeza virtual (ou variação de uma grandeza)
$\boldsymbol{\Delta}$	Operador matricial para cálculo das deformações generalizadas
δP_{int}	Potência virtual dos esforços internos
δP_{ext}	Potência virtual dos esforços externos
δW_{int}	Trabalho virtual dos esforços internos
δW_{ext}	Trabalho virtual dos esforços externos
$\boldsymbol{\varepsilon}$	Vetor das deformações generalizadas da barra
$\boldsymbol{\varepsilon}^r$	Vetor das deformações generalizadas retrorrotacionado para a configuração de referência
$\boldsymbol{\zeta}$	No modelo de barras é o vetor posição dos pontos do eixo da barra, na

configuração indeformada e, no modelo de cascas, é o vetor posição de um ponto material na superfície de referência

ζ No modelo de barras é a coordenada ao longo do eixo longitudinal indeformado da barra, isto é, ao longo da direção $\boldsymbol{e}_3^r$ e, no modelo de cascas, a coordenada da espessura da casca

$\boldsymbol{\eta}$ Vetor da parcela das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a $\boldsymbol{n}$

η_i Deformações generalizadas (componentes do vetor $\boldsymbol{\eta}$)

$\boldsymbol{\eta}^r$ Vetor da parcela das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a $\boldsymbol{n}^r$, ou simplesmente $\boldsymbol{\eta}$ retrorrotacionado para a configuração de referência

η_i^r Deformações generalizadas (componentes do vetor $\boldsymbol{\eta}^r$)

$\boldsymbol{\theta}$ Na parametrização de Euler é o vetor cujas componentes são os graus de liberdade da rotação descrita por $\boldsymbol{Q}$

$\boldsymbol{\theta}^*$ Vetor das rotações impostas nas extremidades da barra

$\boldsymbol{\Theta}$ Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\theta}$

θ Norma (ou intensidade) do vetor das rotações $\boldsymbol{\theta}$

θ_i Componentes do vetor das rotações $\boldsymbol{\theta}$

$\boldsymbol{\kappa}$ Vetor da parcela das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a $\boldsymbol{m}$

κ_i Deformações generalizadas (componentes do vetor $\boldsymbol{\kappa}$)

$\boldsymbol{\kappa}^r$ Vetor das deformações generalizadas energeticamente conjugadas a $\boldsymbol{m}^r$ ou simplesmente $\boldsymbol{\kappa}$ retrorrotacionado para a configuração de referência

κ_i^r Deformações generalizadas (componentes do vetor $\boldsymbol{\kappa}^r$)

$\boldsymbol{\Lambda}$ Operador matricial para cálculo das deformações generalizadas

ν Coeficiente de Poisson do material

$\boldsymbol{\xi}$ Nos modelos de barras e cascas é o vetor posição dos pontos da barra ou da casca na configuração de referência

ξ Coordenada natural (normalizada) de um elemento de barra

$\boldsymbol{o}$ Vetor nulo de ordem 3

$\boldsymbol{O}$ Tensor nulo de ordem 3

$\boldsymbol{\sigma}$ Vetor dos esforços internos generalizados da seção transversal

$\boldsymbol{\sigma}^r$	Vetor dos esforços internos generalizados retrorrotacionado para a configuração de referência
σ	Tensão normal atuante numa seção transversal, ou seja, componente do vetor $\boldsymbol{\tau}$ na direção de $\boldsymbol{e}_3$, ou do vetor $\boldsymbol{\tau}^r$ na direção de $\boldsymbol{e}_3^r$
$\boldsymbol{\tau}$	No modelo de barras é o vetor das tensões atuantes nos planos cujas normais na configuração de referência são $\boldsymbol{e}_3^r$
$\boldsymbol{\tau}^r$	No modelo de barras é o vetor das tensões $\boldsymbol{\tau}$ retrorrotacionado para a configuração de referência
τ_α	Tensões de cisalhamento atuantes numa seção transversal, ou seja, componentes do vetor $\boldsymbol{\tau}$ nas direções $\boldsymbol{e}_\alpha$, ou do vetor $\boldsymbol{\tau}^r$ nas direções $\boldsymbol{e}_3^r$
$\boldsymbol{\tau}_i$	No modelo de cascas é o vetor das tensões atuantes nos planos cujas normais são $\boldsymbol{e}_i$ por unidade de área da configuração de referência
$\boldsymbol{\tau}_i^r$	No modelo de cascas é o vetor das tensões $\boldsymbol{\tau}_i$ retrorrotacionado para a configuração de referência
$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i$	É o vetor $\boldsymbol{\tau}_i$ assumindo a hipótese do estado plano de tensões
$\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r$	É o vetor $\boldsymbol{\tau}_i^r$ assumindo a hipótese do estado plano de tensões
$\boldsymbol{\Phi}$	Operador matricial para cálculo das deformações generalizadas
$\boldsymbol{\omega}$	Vetor das velocidades angulares associadas a uma rotação
$\boldsymbol{\Omega}$	Tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\omega}$

SUMÁRIO

1	**INTRODUÇÃO** …….....…....	25
2	**ROTAÇÕES FINITAS**……...	29
2.1	O tensor das rotações…….....	31
2.2	Parametrizações das rotações	32
2.2.1	Parametrizações vetoriais.....	33
2.2.1.1	Parametrização de Euler.....	34
2.2.1.2	Parametrização de Rodrigues.....	35
2.2.1.3	Parametrização generalizada de Rodrigues.....	36
2.2.2	Parametrizações não-vetoriais.....	37
2.2.2.1	Ângulos de Euler.....	37
2.2.2.2	Quatérnions.....	39
3	**NOVAS PARAMETRIZAÇÕES PARA O TENSOR DAS ROTAÇÕES**.....	43
3.1	Expressão geral para o tensor das rotações.....	43
3.2	Expressão geral para uma parametrização vetorial do tensor das rotações.....	44
3.3	Vetor das velocidades angulares.....	46
3.4	Derivadas dos vetores e tensores.....	47
3.5	Parametrizações.....	50
3.5.1	Parametrização de Euler.....	50
3.5.1.1	Singularidades.....	51
3.5.1.2	Obtenção de $\boldsymbol{\theta}$ a partir de $\boldsymbol{Q}$	52
3.5.2	Parametrização de Rodrigues.....	52
3.5.2.1	Obtenção de $\boldsymbol{\alpha}$ a partir de $\boldsymbol{Q}$	54
3.5.2.2	Composição de rotações.....	54
3.5.3	Parametrização generalizada de Rodrigues.....	54
3.5.3.1	Obtenção das potências do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$	57
3.5.3.2	Vetor das velocidades angulares.....	59
3.5.3.3	Singularidades.....	61
3.5.3.4	Obtenção de $\boldsymbol{\alpha}_n$ a partir de $\boldsymbol{Q}$	62
4	**MODELO LAGRANGIANO TOTAL PARA ANÁLISE DE**	

BARRAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA COM FORMULAÇÃO DO EQUILÍBRIO USANDO O TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS..... 63
4.1 Cinemática..... 63
4.1.1 Deformações..... 65
4.2 Estática..... 67
4.2.1 Tensões..... 67
4.2.2 Potência dos esforços internos..... 68
4.2.3 Potência dos esforços externos..... 69
4.3 Equilíbrio e condições de contorno..... 70
4.4 Equações constitutivas elásticas lineares..... 72
4.5 Aplicação em elementos finitos..... 74
4.5.1 Linearização dos trabalhos virtuais: o operador tangente..... 74
4.5.2 Formulação matricial..... 76
4.6 Resolução do sistema de equações não-lineares por meio do método de Newton..... 79
5 MODELO LAGRANGIANO TOTAL PARA ANÁLISE DE CASCAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA COM FORMULAÇÃO DO EQUILÍBRIO USANDO O TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS..... 81
5.1 Cinemática..... 81
5.2 Estática..... 85
5.3 Equilíbrio..... 88
5.4 Equação constitutiva..... 90
5.5 Aplicação em elementos finitos..... 91
6 MODELOS LAGRANGIANOS TOTAIS PARA ANÁLISE DE BARRAS E CASCAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA COM FORMULAÇÃO DO EQULÍBRIO USANDO O TEOREMA DAS POTÊNCIAS VIRTUAIS..... 94
6.1 Modelo de barras..... 94
6.1.1 Cinemática..... 94
6.1.2 Estática..... 98
6.1.2.1 Tensões..... 98

6.1.2.2 Potência dos esforços internos..... 99
6.1.2.3 Potência dos esforços externos..... 100
6.1.3 Equilíbrio e condições de contorno..... 101
6.2 Modelo de casca..... 106
6.2.1 Cinemática..... 106
6.2.2 Estática..... 108
6.2.2.1 Tensões..... 108
6.2.2.2 Potência dos esforços internos e externos..... 108
6.2.3 Equilíbrio..... 109
6.3 Aplicação em elementos finitos..... 110
6.4 Comparação entre formas fracas..... 111
7 MODELOS LAGRANGIANOS ATUALIZADOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA DE BARRAS E CASCAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA..... 113
7.1 Modelo de barras..... 114
7.1.1 Deformações..... 115
7.1.2 Potência dos esforços internos e externos..... 117
7.1.3 Trabalho virtual dos esforços internos e externos..... 118
7.1.4 Formas fracas das equações do movimento..... 119
7.1.4.1 Teorema dos Trabalhos Virtuais..... 119
7.1.4.2 Teorema das Potências Virtuais..... 123
7.2 Modelo de cascas..... 123
7.2.1 Deformações e tensões..... 125
7.2.2 Potência dos esforços internos e externos..... 126
7.2.3 Trabalho virtual dos esforços internos e externos..... 126
7.2.4 Formas fracas das equações de equilíbrio..... 127
7.2.4.1 Teorema dos Trabalhos Virtuais..... 127
7.2.4.2 Teorema das Potências Virtuais..... 128
7.3 Aplicação em elementos finitos..... 128
7.4 Objetividade..... 130
8 AFERIÇÃO DO USO DAS PARAMETRIZAÇÕES EM MODELOS DE BARRAS E CASCAS..... 131
8.1 Exemplos de estruturas analisadas com elementos de barras..... 131

8.1.1 Viga balcão..... 132
8.1.2 Flambagem lateral de viga em balanço..... 136
8.1.3 Flambagem lateral de chapa em L em balanço..... 140
8.1.4 Flambagem lateral de pórtico biapoiado..... 144
8.1.5 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (1)..... 147
8.1.6 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (2)..... 150
8.2 Exemplos de estruturas analisadas com elementos de cascas..... 152
8.2.1 Flambagem lateral de viga em balanço..... 153
8.2.2 Flambagem lateral de chapa em L em balanço..... 156
8.2.3 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (1)..... 159
8.2.4 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (2)..... 161
8.2.5 Anel circular com rasgo radial..... 164
8.2.6 Casca hemisférica submetida a forças radiais..... 166
8.2.7 Casca cilíndrica de extremidades abertas..... 170
8.2.8 Casca cilíndrica com diafragmas rígidos nas extremidades (lata de cerveja)..... 173
9 CONCLUSÕES..... 178
REFERÊNCIAS..... 181

1 INTRODUÇÃO

Rotações são transformações que, aplicadas a um conjunto de três vetores, preservam seus comprimentos, os ângulos existentes entre eles bem como o volume que eles determinam. As rotações têm sido objeto de estudo há vários séculos. Os trabalhos iniciais sobre o assunto são atribuídos a Euler (1775), Gauss (1819), Rodrigues (1840), Hamilton (1843) e Cayley (1845). Informações históricas mais detalhadas podem ser encontradas em [1, 21, 24, 50].

A avaliação das rotações no plano é simples, sendo que uma rotação em um plano é definida apenas por um escalar, o ângulo de rotação em torno do eixo perpendicular a este plano. Neste caso, as rotações, por serem escalares, possuem a propriedade da comutatividade. O estudo das rotações no espaço é mais complexo. Seu comportamento é regido por um teorema fundamental de Euler que garante ser "o movimento geral de um corpo rígido com um ponto fixo é equivalente a uma rotação em torno de algum eixo passando através daquele ponto ".

Para a completa determinação das rotações no espaço é necessário o conhecimento da magnitude da rotação e do eixo em torno do qual esta rotação ocorre, ou seja, o ângulo de rotação e o eixo de rotação. Estes são os mesmos atributos que caracterizam os vetores. Entretanto, as rotações finitas no espaço tridimensional não obedecem às leis do cálculo vetorial. O maior problema refere-se à propriedade da comutatividade, que não é obedecida. Caso se inverta a ocorrência de duas rotações, obter-se-ão resultados distintos, a menos que ambas apresentem o mesmo eixo de rotação.

Para tentar contornar esse problema utilizou-se o recurso de simplificar o tratamento das rotações, sendo a simplificação mais frequente a admissão da hipótese das pequenas rotações, o que permitiu tratá-las como vetores e conduziu à formulação de uma teoria geometricamente linear. Outras teorias e modelos mais elaborados recorrem a uma melhor descrição das rotações utilizando aproximações que incluem termos até a segunda ordem.

Na Mecânica Computacional, o trabalho pioneiro de Argyris [2] abriu caminho para o estudo das rotações finitas, tendo demonstrado não ser necessário adotar aproximações no campo das rotações. Este fato, aliado ao desenvolvimento das teorias estruturais geometricamente exatas, nas quais as rotações são finitas, ampliou a necessidade do

tratamento das rotações de maneira exata. Até então, a dificuldade de representar adequadamente as rotações finitas vinha impedindo o desenvolvimento das teorias cinematicamente exatas.

Apesar de existirem muitos trabalhos tratando da utilização de outros tipos de parametrização para o tensor das rotações, incluindo-se aí parametrizações do tipo não-vetorial, tem se consolidado na prática da Mecânica Computacional o uso da parametrização vetorial conhecida como parametrização de Rodrigues. Entretanto, segundo Cheng; Gupta [21], o primeiro a obter a expressão desta parametrização, ainda que não sob a forma hoje conhecida, foi o matemático suíço Leonhard Euler, em 1775, portanto 65 anos antes da publicação do trabalho de Rodrigues [65]. Em vista deste fato, e em conformidade com o que sugerem os autores citados, ela será tratada neste texto como parametrização de Euler.

A parametrização de Euler apresenta inúmeras vantagens, principalmente no que tange ao tratamento de momentos atuantes em torno de eixos fixos. Entretanto, ressente-se de trabalhar com expressões complexas que envolvem funções trigonométricas, de difícil linearização e que implicam alto custo computacional. Outra parametrização vetorial conhecida, a parametrização de Rodrigues, por outro lado, apresenta formulação bem mais simples e não envolve funções trigonométricas. Entretanto, tem menor intervalo de validade sem a presença de singularidades, sendo válida apenas no intervalo semiaberto $[0,\pi)$. Neste trabalho, propõe-se a generalização da parametrização de Rodrigues, de forma a ampliar seu intervalo de validade igualando-o ao da parametrização de Euler $[0,2\pi)$, e usufruir da sua grande vantagem que é a formulação simplificada.

Com o objetivo de avaliar o desempenho obtido pelas parametrizações propostas frente a várias opções de algoritmos existentes, trabalhou-se com dois tipos de formulação cinemática, Lagrangiana total e Lagrangiana atualizada e com as formas fracas construídas a partir das projeções ortogonal e não-ortogonal, originadas do uso do Teorema dos Trabalhos Virtuais e do Teorema das Potências Virtuais, respectivamente.

A implementação das várias rotinas necessárias à comprovação do desempenho e validade das parametrizações propostas foi feita no programa PEFSYS, de autoria dos Professores Paulo de Mattos Pimenta e Ruy Marcello de Oliveira Pauletti. Este programa está sendo desenvolvido no Departamento de Engenharia de Estruturas e Geotécnica da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, a partir de dissertações e teses orientadas pelos seus autores. Para este trabalho foi feito uso de elementos de barras de dois e três nós, disponíveis no programa e do elemento de casca T6-3i desenvolvido por Campello; Pimenta;

Wriggers [17]. O programa PEFSYS já dispunha de rotinas com algoritmo Lagrangiano total para análise de estruturas sob ações estáticas e dinâmicas e Lagrangiano atualizado para análise de estruturas sob ações dinâmicas. Assim, foi necessário adaptar um algoritmo para análise de estruturas sob solicitações estáticas em formulação cinemática Lagrangiana atualizada. Foram também implantadas as rotinas necessárias ao cálculo do tensor das rotações e suas derivadas segundo as novas parametrizações, bem como rotinas necessárias à montagem da matriz de rigidez tangente nas duas situações estudadas. Foram analisados inúmeros exemplos de barras e cascas existentes na bibliografia para validar as parametrizações propostas.

O texto está organizado em mais oito capítulos, além desta introdução: no Capítulo 2, apresenta-se uma visão geral do problema das rotações finitas, abordando algumas das parametrizações do tensor das rotações mais utilizadas. No Capítulo 3, apresenta-se a formulação genérica proposta para a parametrização das rotações, o tensor de rotações e suas derivadas. Nos Capítulos 4 e 5 aborda-se a teoria geral dos modelos de barras e cascas em uma concepção Lagrangiana total, conforme proposto por Pimenta em [53] e [54]. No Capítulo 6 se desenvolve, para os modelos de barras e cascas apresentados nos capítulos anteriores, a obtenção da rigidez tangente a partir do uso da forma fraca oriunda da utilização do teorema das Potências Virtuais, também em uma formulação Lagrangiana total. No Capítulo 7 é apresentada a formulação Lagrangiana atualizada para modelos de barras e cascas, com a rigidez tangente sendo obtida tanto a partir do uso da forma fraca oriunda do Teorema dos Trabalhos Virtuais como daquela oriunda do Teorema das Potências Virtuais. No Capítulo 8 são apresentados os exemplos resolvidos de estruturas de barras e cascas utilizando as várias parametrizações estudadas nas diferentes formulações apresentadas. Finalmente, no Capítulo 9 são apresentadas as conclusões da pesquisa.

Em todo o texto do trabalho será utilizada a seguinte notação:

Letras minúsculas latinas ou gregas em itálico (a, b,..., α, β,...) representam grandezas escalares.

Letras minúsculas latinas ou gregas em negrito itálico ($\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$, ..., $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$,...) representam grandezas vetoriais.

Letras maiúsculas latinas ou gregas em negrito itálico ($\boldsymbol{A}$, $\boldsymbol{B}$, $\boldsymbol{C}$...) representam tensores de segunda ordem.

Vetores e matrizes construídos com componentes tensoriais são expressos por letras latinas em negrito não-itálico ($\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, ..., $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$,...).

Adota-se a convenção de somatório sobre índices repetidos, ficando subentendido que estes assumem os valores $\{1,2\}$ para letras gregas e $\{1,2,3\}$ para letras latinas.

O produto escalar entre vetores será indicado pelo símbolo $(\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b})$, o produto vetorial, por $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b})$, o produto tensorial ou diádico, por $(\boldsymbol{a} \otimes \boldsymbol{b})$ e o produto escalar entre tensores de segunda ordem, por $(\boldsymbol{A} : \boldsymbol{B})$.

2 ROTAÇÕES FINITAS

Por definição, uma rotação é uma transformação que, dado um conjunto de três vetores, preserva o comprimento destes vetores, o ângulo entre os pares de vetores e o volume (com sinal) gerado por eles. Assim, se três vetores $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{b}$ e $\boldsymbol{c}$ são transformados por uma mesma rotação em $\boldsymbol{a}_1$, $\boldsymbol{b}_1$ e $\boldsymbol{c}_1$, são válidas as propriedades:

a) $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}_1\|;\ \|\boldsymbol{b}\| = \|\boldsymbol{b}_1\|;\ \|\boldsymbol{c}\| = \|\boldsymbol{c}_1\|,$

b) $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \times \boldsymbol{c} = \boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1 \times \boldsymbol{c}_1$ e

c) $\cos\phi_{a,b} = \dfrac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{\|\boldsymbol{a}\|\|\boldsymbol{b}\|} = \dfrac{\boldsymbol{a}_1 \cdot \boldsymbol{b}_1}{\|\boldsymbol{a}_1\|\|\boldsymbol{b}_1\|} = \cos\phi_{a_1,b_1}.$

Onde $\phi_{i,j}$ indica o ângulo entre o vetor $\boldsymbol{i}$ e o vetor $\boldsymbol{j}$.

A avaliação das rotações no plano é simples. Uma rotação em um plano x_1-x_2 é definida por apenas um escalar, o ângulo de rotação em torno do eixo x_3, perpendicular ao plano x_1-x_2. As rotações, por serem escalares, possuem a propriedade da comutatividade: $\theta_1+\theta_2=\theta_2+\theta_1$.

O estudo das rotações no espaço é mais difícil. Seu comportamento é regido por um teorema fundamental de Euler que diz:

"O deslocamento de um corpo rígido com um ponto fixo é uma rotação em torno de um eixo que passa através daquele ponto."

Desta forma, para a determinação das rotações no espaço é necessário o conhecimento da magnitude da rotação e do eixo em torno do qual esta rotação ocorre, ou seja, o ângulo de rotação e o eixo de rotação. Estes são os mesmos atributos que caracterizam os vetores. Entretanto, as rotações finitas no espaço tridimensional não obedecem às leis do cálculo vetorial. O maior problema refere-se à propriedade da comutatividade, que não é obedecida. Rotações finitas não possuem a propriedade da comutatividade e rotações sucessivas em torno de eixos distintos não podem ser adicionadas com o uso da lei do paralelogramo. Caso se inverta a ocorrência de duas rotações, obter-se-ão resultados distintos, a menos que ambas apresentem o mesmo eixo de rotação.

Para tentar contornar esse problema, utilizou-se o recurso de simplificar o tratamento das rotações, sendo a simplificação mais frequente a admissão da hipótese das pequenas rotações, o que permitiu tratá-las como vetores e conduziu à formulação de uma teoria

geometricamente linear. Outras teorias e modelos mais elaborados recorrem a uma melhor descrição das rotações utilizando aproximações que incluem termos até a segunda ordem.

Na Mecânica Computacional o interesse pelas rotações finitas foi despertado pelo trabalho de Argyris [2], quando se tomou consciência do fato de que não era necessário adotar aproximações no campo das rotações. O desenvolvimento das teorias estruturais geometricamente exatas, nas quais as rotações são finitas, ampliou a necessidade do tratamento destas rotações de maneira exata. Este desenvolvimento é relativamente recente, sendo que as primeiras teorias geometricamente exatas devem-se a Reissner (1972) para problemas planos e a Simo [74] para problemas tridimensionais.

O tratamento das rotações tem compreendido o uso de uma ampla gama de parametrizações, conforme abordado em [11, 13, 47, 72 e 83]. Em [31, 96] as rotações são descritas utilizando os ângulos de Euler. Argyris, em seu trabalho fundamental [2], ao divulgar a álgebra dos quatérnions ajudou a introduzir sua utilização na Mecânica Computacional. Entre outros autores que adotaram esta parametrização incluem-se Spring [83] e Crisfield [23]. Simo [74, 80], ao implementar sua generalização para o espaço da formulação desenvolvida por Reissner para problemas planos, utilizou uma parametrização mista, na qual trabalhou com o tensor das rotações definido pela fórmula de Euler e, visando evitar singularidades, utilizou os quatérnions para obter a composição das rotações. Este tratamento das rotações é encontrado também em [79, 81]. Em [18], Cardona e Geradin introduzem o tratamento das rotações utilizando o vetor das rotações com a parametrização de Euler e utilizam a fórmula de Rodrigues para a composição das rotações, por meio da relação do parâmetro de Rodrigues com o parâmetro de Euler. Pimenta, no desenvolvimento da sua teoria estrutural geometricamente exata para barras e cascas [53, 54], utilizou também a parametrização vetorial de Euler.

Ao tratar de cascas, Simo et al. [76-77] propõem uma formulação baseada no vetor de rotações de Euler, dispensando a utilização dos quatérnions. Esta formulação foi adotada por [5, 8, 13 e 14]. Sansour; Bufler [70] também utilizam aplicações alternativas da fórmula de Euler. Ibrahimbegovic et al. em [34, 37-38] apresentam um procedimento misto, parametrizando a rotação com o vetor das rotações de Euler e utilizando os quatérnions para sua atualização. Já em [36] é apresentada a possibilidade de parametrização da rotação utilizando o tensor ou o vetor das rotações, via fórmula de Euler e realizada a atualização via multiplicação de tensores, mas também é sugerida a possibilidade de uso dos quatérnions nesta fase. Trabalhos mais recentes [29, 47, 64, 66 e 94] abordando temas diversos como

linearização do operador tangente, interpolação das rotações e formulação de modelos objetivos e sem singularidades têm adotado a parametrização vetorial de Euler.

2.1 O tensor das rotações

Matematicamente, uma rotação pode ser caracterizada por um tensor ortogonal pertencente ao grupo designado por *SO(3)* (*special orthogonal group*).

$$SO(3) = \left\{ \boldsymbol{Q} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 \middle| \boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I} \wedge \det(\boldsymbol{Q}) = 1 \right\} \tag{2.1}$$

As seis condições de ortogonalidade resultantes da condição $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I}$ permitem que se possa representar $\boldsymbol{Q}$ por apenas três valores independentes. Existem inúmeras formas de representar um tensor ortogonal, algumas envolvendo três parâmetros e outras envolvendo mais de três parâmetros submetidos a algumas restrições. A essas formas de representar o tensor $\boldsymbol{Q}$ se denomina parametrização do tensor das rotações ou, mais resumidamente, parametrização das rotações. Como já foi mencionado, a parametrização do tensor das rotações pode ser feita de diversas formas, seja utilizando o vetor das rotações, os quatérnions, os ângulos clássicos de Euler etc.

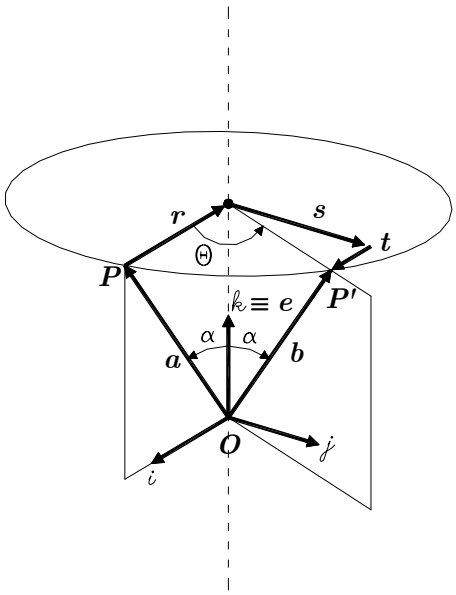


Figura 2.1 Rotação de um vetor

O deslocamento no espaço de um corpo rígido em torno de um ponto fixo *O* pode ser representado sempre como uma rotação qualquer de um ponto *P* descrita pelo vetor posição $\boldsymbol{a}$, como mostrado na figura 2.1. O teorema de Euler garante que é possível representar a rotação do vetor $\boldsymbol{a}$ em termos de parâmetros de rotação: o ângulo de rotação θ e o vetor unitário $\boldsymbol{e}$ na direção do eixo de rotação.

A obtenção do vetor $\boldsymbol{b}$, que representa a nova posição de $\boldsymbol{a}$ após a rotação, a partir de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$ e θ, pode ser feita geometricamente. Para tanto, define-se um sistema de eixos tri-ortogonal com vetores $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ e $\boldsymbol{k}$, com $\boldsymbol{k}$ na direção de $\boldsymbol{e}$. O vetor unitário $\boldsymbol{j}$ é ortogonal ao plano definido pelos vetores $\boldsymbol{a}$ e $\boldsymbol{e}$ e pode ser obtido por

$$\boldsymbol{j} = \frac{\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}}{\|\boldsymbol{a}\| \operatorname{sen}\alpha}, \tag{2.2}$$

sendo α o ângulo entre $\boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{a}$. O vetor $\boldsymbol{i}$ é obtido por

$$\boldsymbol{i} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{k} = \boldsymbol{j} \times \boldsymbol{e}. \tag{2.3}$$

O vetor $\boldsymbol{b}$ pode ser expresso por

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{r} + \boldsymbol{s} + \boldsymbol{t}. \tag{2.4}$$

Os vetores $\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{t}$ são paralelos a $\boldsymbol{i}$ e $\boldsymbol{s}$ é paralelo a $\boldsymbol{j}$. Estes vetores podem ser expressos em função de $\boldsymbol{a}$, $\boldsymbol{e}$ e θ:

$$\boldsymbol{r} = -\|\boldsymbol{a}\| \operatorname{sen}\alpha \boldsymbol{i} = -(\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{e} = \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) \tag{2.5}$$

$$\boldsymbol{s} = \|\boldsymbol{a}\| \operatorname{sen}\alpha \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{j} = \operatorname{sen}\theta (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) \tag{2.6}$$

$$\boldsymbol{t} = \|\boldsymbol{a}\| \operatorname{sen}\alpha \cos\theta \boldsymbol{i} = \cos\theta ((\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) \times \boldsymbol{e}) = -\cos\theta (\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a})). \tag{2.7}$$

Substituindo estes valores em (2.4), obtém-se:

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) + \operatorname{sen}\theta (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) - \cos\theta (\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a})) \tag{2.8}$$

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a} + \operatorname{sen}\theta (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a}) + (1 - \cos\theta)(\boldsymbol{e} \times (\boldsymbol{e} \times \boldsymbol{a})), \tag{2.9}$$

que pode ser escrito na forma

$$\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}, \tag{2.10}$$

sendo

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \operatorname{sen}\theta \boldsymbol{E} + (1 - \cos\theta)\boldsymbol{E}^2, \tag{2.11}$$

onde $\boldsymbol{E}$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{e}$.

A equação (2.11) é conhecida como fórmula de Euler.

2.2 Parametrizações das rotações

A escolha da parametrização a ser utilizada em uma dada aplicação é feita considerando aspectos teóricos e computacionais. Consideram-se também aspectos específicos da aplicação na tentativa de atingir objetivos como evitar singularidades ou reduzir o custo computacional de algumas operações. Embora não seja um critério muito científico, o gosto pessoal ou a maior familiaridade com um tipo de parametrização podem influenciar esta escolha.

Existem duas famílias de parametrizações: as parametrizações ditas vetoriais e as não vetoriais. Este trabalho enfoca as parametrizações vetoriais de Euler e Rodrigues, mas em vista da importância de algumas das parametrizações não-vetoriais, tanto em termos históricos, como no próprio campo da Mecânica Computacional, elas serão abordadas também nesta fase deste trabalho.

2.2.1 Parametrizações vetoriais

As parametrizações vetoriais são uma classe geral de técnicas de parametrização das rotações baseadas em um conjunto mínimo de parâmetros. Elas adotam o menor conjunto possível de parâmetros, visto que a dimensão do grupo especial ortogonal no espaço tridimensional é 3. Este conjunto consiste de um par $(p, \boldsymbol{e})$, onde $p = p(\theta)$ é uma função geratriz da parametrização e $\boldsymbol{e}$ é o vetor unitário da direção em torno da qual ocorre a rotação. Esse conjunto de três parâmetros define as componentes cartesianas de um vetor. Esta característica não está presente nas técnicas não-vetoriais, mesmo aquelas que trabalham com apenas três parâmetros. Os ângulos de Euler, por exemplo, são três escalares que não podem ser entendidos como componentes de um vetor. Além dessas, também entre as parametrizações não vetoriais, existem aquelas que não correspondem a mínimos, como a parametrização do quatérnion unitário, também chamada de Euler, a de Cayley-Klein (4 parâmetros escalares relacionados por uma restrição algébrica) e a parametrização dos cossenos diretores (9 parâmetros escalares relacionados através de 6 restrições).

Entretanto, as parametrizações vetoriais não são livres de singularidades. Em um dos trabalhos pioneiros sobre o assunto, Stuelpnagel [85] afirma que Hopf mostrou em 1940 que cinco é o número mínimo de parâmetros suficientes para representar de maneira biunívoca o grupo das rotações. Assim, é topologicamente impossível ter uma parametrização tri-dimensional global sem pontos de singularidade no grupo das rotações.

Apesar dessa limitação, elas são muito convenientes do ponto de vista computacional, pois permitem tratar as rotações de forma semelhante às translações [63], e podem ser amplamente usadas nos problemas de Engenharia Civil onde as rotações costumam ser moderadas. Desde que se trabalhe com um processo incremental com atualização, as parametrizações vetoriais podem ser utilizadas mesmo em situações onde podem ocorrer rotações ilimitadas, como no caso da dinâmica de mecanismos, pois a limitação incidirá apenas dentro de um incremento.

A representação vetorial consistirá de um vetor, tal que:

$$\boldsymbol{x} = p(\theta)\boldsymbol{e} \tag{2.12}$$

A função geratriz da parametrização deve obedecer a algumas condições. A primeira delas é que:

$$p(0) = 0, \tag{2.13}$$

ou seja, a magnitude do vetor de rotação generalizado deve ser nula, para um ângulo de rotação nulo. Isto garante que se $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}$ e $\theta = 0$ então $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$.

Derivando $\boldsymbol{x}$ no tempo, na origem obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(0) = p_{,\theta}(0)\dot{\theta}\boldsymbol{e} + p(0)\dot{\boldsymbol{e}}. \tag{2.14}$$

A função $p(\theta)$ deve ser tal que

$$p_{,\theta}(0) \neq 0, \tag{2.15}$$

de forma que $\dot{\boldsymbol{x}}(0)$ seja diferente de zero quando $\dot{\theta}$ é diferente de zero.

2.2.1.1 Parametrização de Euler

Esta parametrização, além das características inerentes às parametrizações vetoriais, goza da vantagem adicional de ter um significado geométrico simples no âmbito da própria rotação que visa representar. Ela assume a forma deduzida na equação (2.9).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{r}' &= \boldsymbol{r}\cos\theta + (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r})\mathrm{sen}\theta + \boldsymbol{e}(\boldsymbol{e}\cdot\boldsymbol{r})(1-\cos\theta) \\ &= \boldsymbol{r} + (\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r})\mathrm{sen}\theta + \left[\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r})\right](1-\cos\theta) \end{aligned} \tag{2.16}$$

$\boldsymbol{r}$ e $\boldsymbol{r}'$ são a posição inicial e final do vetor, θ é o ângulo de rotação e $\boldsymbol{e}$ o vetor unitário na direção do eixo de rotação.

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{r}, \tag{2.17}$$

onde o tensor ortogonal das rotações $\boldsymbol{Q}$ pode ser representado por:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \mathrm{sen}\theta\boldsymbol{E} + (1-\cos\theta)\boldsymbol{E}^2 \tag{2.18}$$

Adotando-se um tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Theta}$ cujo vetor axial é $\boldsymbol{\theta}$, com $\|\boldsymbol{\theta}\| = \theta$, $\boldsymbol{Q}$ assume a forma:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \frac{\mathrm{sen}\theta}{\theta}\boldsymbol{\Theta} + \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2}\boldsymbol{\Theta}^2. \tag{2.19}$$

Podemos definir as funções:

$$h_1(\theta) = \frac{\mathrm{sen}\,\theta}{\theta} \quad e \quad h_2(\theta) = \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2} \tag{2.20}$$

As equações (2.20) apresentam singularidades para $\theta = 0$, mas que são facilmente removíveis, já que:

$$h_1(\theta) = \frac{\operatorname{sen}\theta}{\theta} = 1 - \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4 - O\left(\theta^6\right) \tag{2.21}$$

$$h_2(\theta) = \frac{(1-\cos\theta)}{\theta^2} = \frac{1}{2}\frac{\operatorname{sen}^2(\theta/2)}{(\theta/2)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\theta^2 + \frac{1}{720}\theta^4 - O\left(\theta^6\right). \tag{2.22}$$

Esta parametrização é válida no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

2.2.1.2 Parametrização de Rodrigues

Devido às funções trigonométricas envolvidas, a parametrização de Euler pode apresentar elevado custo computacional. Torna-se então interessante trabalhar com os parâmetros de Rodrigues. Esta parametrização, também conhecida como parametrização de Cayley ou de Cayley-Gibbs-Rodrigues, foi primeiramente proposta por Rodrigues. Ela é por vezes atribuída a Euler, entretanto, os semiângulos que são importantes nesta parametrização não são encontrados explicitamente em nenhum dos trabalhos de Euler.

Para a obtenção da forma vetorial desta parametrização, adota-se a variável:

$$\alpha = 2\operatorname{tg}\left(\theta/2\right). \tag{2.23}$$

Temos então:

$$\begin{aligned} \operatorname{sen}\theta &= \operatorname{sen}\left[2\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right] = \frac{4\alpha}{4+\alpha^2} \\ (1-\cos\theta) &= 2\operatorname{sen}^2\left(\frac{\theta}{2}\right) = 2\left\{\operatorname{sen}\left[\operatorname{arctg}\left(\frac{\alpha}{2}\right)\right]\right\}^2 = \frac{2\alpha^2}{4+\alpha^2}. \end{aligned} \tag{2.24}$$

Obtemos então:

$$\boldsymbol{r}' = \boldsymbol{r} + \frac{4\alpha}{4+\alpha^2}(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r}) + \frac{2\alpha^2}{4+\alpha^2}\left[\boldsymbol{e}\times(\boldsymbol{e}\times\boldsymbol{r})\right] \tag{2.25}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \frac{4\alpha}{4+\alpha^2}\boldsymbol{E} + \frac{2\alpha^2}{4+\alpha^2}\boldsymbol{E}^2 \tag{2.26}$$

Adotando:

$$\boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{E} \tag{2.27}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \frac{4}{4+\alpha^2}\boldsymbol{A} + \frac{2}{4+\alpha^2}\boldsymbol{A}^2 \tag{2.28}$$

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \frac{4}{4+\alpha^2}\left(\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right) \tag{2.29}$$

Chamando, para facilitar a notação,

$$g(\alpha) = \frac{4}{4+\alpha^2} \tag{2.30}$$

obtemos para o tensor rotação a expressão:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \mathrm{g}(\alpha)\left(\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right). \tag{2.31}$$

Esta parametrização apresenta singularidades para $\theta = 0$ e $\theta = \pi + 2k\pi$, $\kappa \in \mathrm{Z}$. Para $\theta = 0$ este problema é contornado, pois:

$$\frac{2\mathrm{tg}\left(\theta/2\right)}{\theta} = 1 + \frac{1}{12}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4 + O\left(\theta^6\right). \tag{2.32}$$

A singularidade correspondente a $\theta = \pi + 2k\pi$ impõe como intervalo de validade para esta parametrização o intervalo $0 \leq \theta < \pi$.

2.2.1.3 Parametrização generalizada de Rodrigues

Visando ampliar o intervalo de validade da parametrização de Rodrigues, pode ser definida uma família de parametrizações, oriundas da parametrização de Rodrigues, geradas a partir de:

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \alpha_n \boldsymbol{e}, \text{ onde } \alpha_n = 2n\mathrm{tg}\left(\frac{\theta}{2n}\right), \quad n = 1,2,3... \tag{2.33}$$

O tensor das rotações pode ser obtido a partir da expressão abaixo:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{Q}^{1/n} = \boldsymbol{I} + \frac{4}{4n^2 + \alpha_n^2}\left(n\boldsymbol{A}_n + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}_n^2\right). \text{ Logo,} \\ &\boldsymbol{Q} = \left[\boldsymbol{Q}_n\right]^n. \end{aligned} \tag{2.34}$$

Para $n = 1$ obtemos a parametrização de Rodrigues. A parametrização correspondente a $n = 2$ recebe o nome de parametrização de Wiener/Milenkovic [10]. Esta parametrização é não-singular no intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

2.2.2 Parametrizações não-vetoriais

Compreendem as parametrizações que envolvem mais de três parâmetros associados a restrições ou têm apenas três parâmetros que, entretanto, não podem ser entendidos como componentes de um vetor.

2.2.2.1 Ângulos de Euler

Os ângulos de Euler são uma das formas mais conhecidas de representar as rotações. Estes ângulos definem uma rotação como sendo a composição de três rotações em torno de eixos previamente escolhidos. A escolha destes eixos é arbitrária, sendo em geral função do problema a ser resolvido e há doze combinações possíveis, correspondentes à sequência escolhida de três eixos. Os ângulos ψ, θ e ϕ são chamados de ângulos de Euler e a sequência x_i-x_j-x_k é chamada de sequência de Euler.

A representação clássica dos ângulos de Euler é com a sequência *z-x-z,* mas, como foi mencionado, não é a única opção possível. Em problemas de mecânica quântica é comum utilizar-se a sequência clássica *z-x-z.* No caso de problemas de orientação de aeronaves a escolha recai na seqüência *z-y-x*, e os ângulos de Euler ψ, θ e ϕ correspondem aos parâmetros normalmente utilizados de ângulo de guinada (*yaw*), ângulo de declive (*pitch*) e ângulo de rotação longitudinal (*roll*), respectivamente.

A Figura 2.2, extraída de [28], apresenta a sequência clássica dos ângulos de Euler. A transformação começa com uma rotação do sistema de eixos original, xyz de valor ϕ em torno do eixo z, no sentido anti-horário. O sistema de coordenadas resultante é chamado $\xi\eta\zeta$. Na segunda etapa, os eixos $\xi\eta\zeta$ são girados em torno do eixo ξ de um ângulo θ em sentido anti-horário, produzindo outro sistema intermediário de eixos, desta feita os eixos $\xi'\eta'\zeta'$.

Finalmente, o sistema de eixos $\xi'\eta'\zeta'$ é girado em torno do eixo ζ' de um ângulo de valor ψ no sentido anti-horário, produzindo o sistema de eixos desejado, $x'y'z'$.

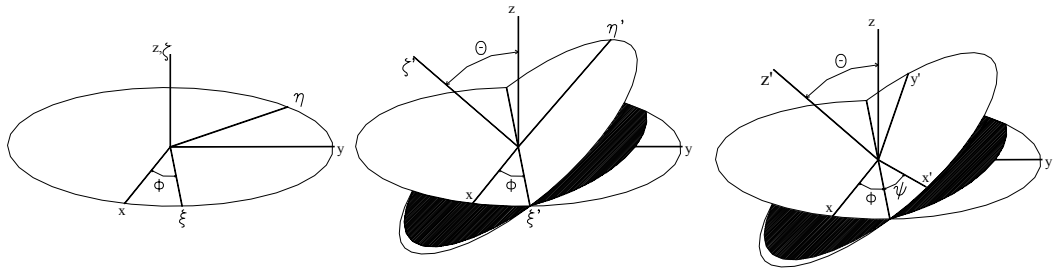


Figura 2. 2 – Ângulos de Euler

Na sequência clássica de Euler, sendo a primeira rotação ϕ em torno de z, θ a segunda rotação em torno do novo eixo x e ψ a rotação final em torno do novo eixo z, se obtém para $\boldsymbol{Q}$ a seguinte expressão:

$$\boldsymbol{Q} = \begin{bmatrix} \cos\psi & \operatorname{sen}\psi & 0 \\ -\operatorname{sen}\psi & \cos\psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \operatorname{sen}\theta \\ 0 & -\operatorname{sen}\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos\phi & \operatorname{sen}\phi & 0 \\ -\operatorname{sen}\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2.35}$$

A representação usando os ângulos de Euler não é isenta de singularidades. Desaparecendo o θ, ψ e ϕ são indeterminados, sendo conhecida apenas a soma de ambos. Segundo Betsch; Menzel; Stein [13], esta singularidade torna os ângulos clássicos de Euler inadequados à implementação computacional, já que $\theta \to 0$ é uma condição frequente em muitos problemas. Como algumas orientações para os corpos rígidos não são possíveis, pois correspondem a essas posições de singularidades, pode-se recorrer ao artifício de posicionar o sistema de coordenadas de forma que a sua orientação corresponda a esses pontos de singularidade. Nesse caso, os ângulos de Euler fornecem um método satisfatório para representar um subconjunto de $\boldsymbol{Q}$. Para evitar ambiguidades, o campo de variação das rotações costuma ser limitado entre -π e π. Assim, $-\pi \le \phi, \theta, \psi \le \pi$, exceto se esta limitação conduzir a atravessar um ponto de singularidade da parametrização.

Segundo Ritto-Corrêa [63], as principais desvantagens da representação das rotações utilizando os ângulos de Euler são:

a) A representação é dependente do sistema de coordenadas escolhido e envolve complicadas expressões trigonométricas;

b) Para cada sequência de rotações escolhida, a representação do tensor ortogonal é diferente, e há doze combinações possíveis correspondentes à sequência de três eixos (excluindo rotações sucessivas sobre o mesmo eixo);
c) Não é simples encontrar a representação de uma rotação em torno de um eixo, se este não for um dos eixos cartesianos;
d) Não há uma forma razoável de compor duas rotações sucessivas diretamente em termos dos respectivos ângulos de Euler;
e) A obtenção dos ângulos de Euler a partir do tensor ortogonal é uma operação muito laboriosa e
f) Dois dos três eixos de rotação podem alinhar-se resultando em perda de um grau de liberdade, como consequência de esta representação ser global, mas singular.

2.2.2.2 Quatérnions

Os quatérnions foram concebidos por Hamilton em 1843, com o objetivo de generalizar os números complexos para três dimensões. Entretanto, segundo Cheng; Gupta [21], seu significado físico no contexto das rotações finitas, utilizando os parâmetros de Rodrigues, foi descoberto por Cayley. São também conhecidos como parâmetros de Euler, embora Cayley, apud Cheng; Gupta [21] os considerasse uma forma alternativa da fórmula de Rodrigues.

Altmann [1] e Dai [24] relatam que em seu trabalho publicado em 1840 sobre seus três parâmetros, Rodrigues define também explicitamente outros quatro parâmetros compostos por um escalar com o cosseno da metade do ângulo de rotação e mais três números compostos pelos cossenos diretores do eixo de rotação e o seno da metade do ângulo de rotação. Ou seja, os chamados parâmetros de Euler ou parâmetros de Euler coincidentes com o quatérnion unitário. Dessa forma, teria sido Rodrigues e não Hamilton o pioneiro na concepção dessa representação para a rotação, embora não a tenha batizado. Segundo Altmann [1], há também registros de que Gauss inventou o quatérnion em 1819, embora nunca haja se preocupado em publicar o tema. Altmann também afirma que não há registros que justifiquem a denominação que é atribuída ao quatérnion de “parâmetros de Euler”.

Euler provou algebricamente que, se aplicarmos rotações sucessivas em torno de diferentes eixos a uma esfera unitária, o resultado é uma rotação da esfera em torno de um único eixo, de um ângulo único [1]. Por outro lado, Rodrigues descreveu em seu trabalho de 1840 [65], sem figuras, uma construção geométrica que, dados os ângulos e eixos de duas

rotações sucessivas, determina a orientação do eixo resultante de rotação e o valor do ângulo de rotação. Esta fórmula de composição de rotações, a produção mais significativa de Rodrigues para o estudo das rotações, é geralmente chamada na literatura de "construção de Euler", apesar de não haver sido concebida por Euler.

A representação de rotações através de quatérnions é muito popular na computação gráfica, vide [73]. Na mecânica computacional, sua divulgação deve-se a Argyris [2]. Seu trabalho pioneiro foi seguido de vários outros, dentre eles Spring [83], Crisfield [23] e Bergweiller [12]. Segundo Altmann [1], a melhor aplicabilidade dos quatérnions é na mecânica quântica, onde seu uso torna o trabalho mais simples e mais eficiente que qualquer outro método. Esta parametrização também é utilizada na aeronáutica e no tratamento de sinais e imagens.

Quando se trabalha com quatérnions é habitual utilizar uma notação tetradimensional, pois isto permite expressões compactas. Assim, um quatérnion será representado por:

$$\hat{\boldsymbol{q}} = q_0 + \boldsymbol{q}, \tag{2.36}$$

onde q_0 representa a componente escalar do quatérnion e $\boldsymbol{q}$ sua componente vetorial. O termo vetor foi criado por Hamilton para representar a parte imaginária do quatérnion, entretanto, segundo [1], com a criação da álgebra vetorial por Gibbs e a apropriação deste termo para designar os vetores, tornou-se mais difícil a ampla aceitação do quatérnion, já que o vetor concebido por Hamilton no âmbito do quatérnion não é realmente um vetor como entendido por nós atualmente, mas um vetor axial.

Segundo Stuelpnagel [85], a parametrização das rotações utilizando os quatérnions, embora use apenas um parâmetro redundante, permite representar o mais geral movimento possível de um corpo e tem a vantagem de conduzir a equações lineares. Os componentes do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$ são obtidos como funções quadráticas dos coeficientes de $\boldsymbol{u}$.

Na utilização para parametrização das rotações, os componentes escalar e vetorial dos quatérnions são definidos como:

$$q_0 = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad \boldsymbol{q} = sen\left(\frac{\theta}{2}\right)\boldsymbol{e}\ , \tag{2.37}$$

sendo θ o ângulo de rotação e $\boldsymbol{e}$ o vetor unitário do eixo em torno do qual ocorre a rotação. A componente vetorial $\boldsymbol{q}$ pode ser interpretada como um caso especial das parametrizações vetoriais com uma função geratriz $f = \text{sen}\left(\theta/2\right)$. A componente escalar e os componentes do vetor são relacionados por uma restrição:

$$q_0^2 + \boldsymbol{q} \cdot \boldsymbol{q} = 1 \tag{2.38}$$

Um quatérnion que satisfaz esta condição é chamado quatérnion unitário e pode ser usado para parametrização das rotações. Embora não haja uma correspondência biunívoca entre os quatérnions e os elementos do tensor ortogonal $\boldsymbol{Q}$, pois a cada tensor das rotações correspondem dois quatérnions, esta condição é suficiente para a maioria dos propósitos práticos.

Um quatérnion unitário pode ser usado para representar uma rotação de duas maneiras. Na primeira forma, um vetor $\boldsymbol{r}$ qualquer pode ser rotacionado para uma nova posição $\boldsymbol{r}'$ por:

$$\boldsymbol{r}' = \hat{\boldsymbol{q}}\boldsymbol{r}\hat{\boldsymbol{q}}^*, \tag{2.39}$$

onde $\hat{\boldsymbol{q}}$ é um quatérnion unitário e $\hat{\boldsymbol{q}}^*$ seu conjugado, que é obtido a partir de $\hat{\boldsymbol{q}}$ pela inversão do sinal da sua componente vetorial mantendo-se o sinal da sua parcela escalar.

Considerando que o vetor a ser rotacionado, $\boldsymbol{r}$, pode ser entendido como um quatérnion cuja componente escalar é nula, o produto presente em (2.39) pode ser obtido com o uso da expressão para multiplicação de quatérnions, desenvolvida por Hamilton

$$\hat{\boldsymbol{c}} = \hat{\boldsymbol{a}}\hat{\boldsymbol{b}} = a_0 b_0 - \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{b} + a_0\boldsymbol{b} + b_0\boldsymbol{a} + \boldsymbol{a}\times\boldsymbol{b} \tag{2.40}$$

Esta operação goza das propriedades associativa e distributiva, mas não é comutativa devido à presença do produto vetorial. Com o uso desta expressão é bastante simples a obtenção da combinação de rotações sucessivas.

A outra maneira de usar o quatérnion para representar a rotação é exprimir o tensor ortogonal de rotação como uma função do quatérnion e usar este tensor para realizar as rotações, como de hábito.

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + 2q_0 skew(\boldsymbol{q}) + 2\left(skew(\boldsymbol{q})\right)^2 \tag{2.41}$$

Esta representação do tensor ortogonal não contém pontos singulares.

As vantagens dos quatérnions são a sua facilidade de implementação computacional e o fato de permitirem lidar com rotações arbitrariamente grandes. Sua principal desvantagem é a existência da restrição representada pela equação (2.38), mas em uma parametrização global esta dificuldade é inevitável. Outra desvantagem é representada pela dificuldade de construir um esquema de interpolação geral, já que ao caso não se aplicam as técnicas de interpolação do tipo vetorial. Existem técnicas desenvolvidas para a interpolação entre apenas dois quatérnions unitários, sendo o resultado bastante bom, entretanto interpolações envolvendo mais de dois pontos ainda são objeto de estudo [63]. Apesar das desvantagens citadas, a complicação de trabalhar com quatro parâmetros e uma equação restritiva pode ser

interessante em algumas aplicações pelo fato de esta parametrização ser livre de singularidades, sendo bem definida para $-\infty \leq \theta \leq \infty$.

3 NOVAS PARAMETRIZAÇÕES PARA O TENSOR DAS ROTAÇÕES

No campo da álgebra matricial, as rotações podem ser expressas na forma de um tensor rotação, que aqui identificaremos pela letra $\boldsymbol{Q}$, o qual goza de algumas propriedades importantes:

a) $\det \boldsymbol{Q} = +1$

b) $\boldsymbol{Q}\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I} \Rightarrow \boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^T$

3.1 Expressão geral para o tensor das rotações

O tensor das rotações pode ser expresso genericamente pela equação:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + b\boldsymbol{E} + (1-a)\boldsymbol{E}^2. \tag{3.1}$$

Em (3.1), $\boldsymbol{E}$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{e}$, sendo $\boldsymbol{e}$ o vetor unitário da direção do eixo de rotação.

Da expressão (3.1) para o tensor das rotações, podemos concluir que:

$$\det \boldsymbol{Q} = a^2 + b^2 \tag{3.2}$$

A partir da representação (3.1) para o tensor das rotações, podemos escrever os tensores transposto e inverso do tensor das rotações, obtendo

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{I} - b\boldsymbol{E} + (1-a)\boldsymbol{E}^2 \text{ e} \\ &\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{I} - \frac{b}{a^2+b^2}\boldsymbol{E} + \left(1 - \frac{a}{a^2+b^2}\right)\boldsymbol{E}^2 \end{aligned} \tag{3.3}$$

Um tensor rotação tem seu determinante de valor +1. Assim, se impusermos a condição

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{3.4}$$

obteremos a partir de (3.3) que

$$\boldsymbol{Q}^{-1} = \boldsymbol{Q}^{T} \tag{3.5}$$

O que implica dizer que a expressão (3.1) de fato representa uma rotação.

3.2 Expressão geral para uma parametrização vetorial do tensor das rotações

Uma parametrização vetorial genérica usará como parâmetro um vetor $\boldsymbol{x}$ de norma x, de direção coincidente com o eixo de rotação, o que nos permitirá escrever:

$$\boldsymbol{x} = x\boldsymbol{e} \tag{3.6}$$

Com o uso do tensor antissimétrico $\boldsymbol{X}$, cujo vetor axial é $\boldsymbol{x}$, podemos reescrever a equação (3.1) na forma:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \frac{b}{x}\boldsymbol{X} + \frac{(1-a)}{x^2}\boldsymbol{X}^2. \tag{3.7}$$

Em (3.7), a e b são funções de x e devem atender à equação (3.4). Explicitamente, escreveremos:

$$a = a(x) \text{ e } b = b(x). \tag{3.8}$$

Para a e b são válidos:

$$aa' + bb' = 0 \text{ e } ab' - ba' = \frac{b'}{a} \tag{3.9}$$

A simbologia presente em (3.9), que também será utilizada nas equações subsequentes é:

$$(.)' = \frac{d(.)}{dx} \tag{3.10}$$

A equação (3.7) pode ser reescrita na forma:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + h_1(x)\boldsymbol{X} + h_2(x)\boldsymbol{X}^2, \tag{3.11}$$

Onde,

$$h_1(x) = \frac{b}{x} \text{ e } h_2(x) = \frac{1-a}{x^2}. \tag{3.12}$$

Como $\boldsymbol{e}$ é o vetor unitário do eixo de rotação e $\boldsymbol{E}$ o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{e}$, ambos são invariantes sob efeito da rotação, ou seja, $\boldsymbol{Qe} = \boldsymbol{e}$ e $\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{EQ} = \boldsymbol{E}$, o que nos permite escrever também:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Qx} = \boldsymbol{x} \\ &\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{XQ} = \boldsymbol{X} \end{aligned} \tag{3.13}$$

Manipulações algébricas nos permitem escrever relações válidas para $h_1(x)$ e $h_2(x)$, a partir daqui referidos apenas como h_1 e h_2:

$$\begin{aligned} &h_1^2 + h_2^2x^2 - h_2 = h_2, \\ &h_1{}' = \left(\frac{b}{x}\right)' = \frac{1}{x^2}\left(b'x - b\right) = x(h_3 - hh_2) \text{ e} \\ &h_2{}' = \left(\frac{1-a}{x}\right)' = -\frac{1}{x^3}\left(a'x + 2(1-a)\right) = \frac{1}{x}(hh_1 - 2h_2) \end{aligned} \tag{3.14}$$

Nas relações (3.14) adotou-se:

$$h = ab' - ba' = \frac{b'}{a} \text{ e } h_3 = \frac{h - h_1}{x^2} \tag{3.15}$$

Realizando algumas manipulações algébricas, podemos escrever também as expressões abaixo:

$$
\begin{aligned}
&h_1 h_2 + \frac{h_1{}'}{x} + h_1 h_2{}' x - h_2 h' x = \frac{1}{x^2}\left(\frac{b'}{a} - \frac{b}{x}\right) = \frac{1}{x^2}(h - h_1) = h_3 \\
&\frac{h_2{}'}{x} - h_2^2 - h_1 \frac{h_1{}'}{x} - h_2 h_2{}' x = -\frac{1}{x^3}\left(aa' + bb'\right) = 0
\end{aligned}
\tag{3.16}
$$

3.3 Vetor das velocidades angulares

Como mencionado anteriormente, x é a norma do vetor $\boldsymbol{x}$, $x = \|\boldsymbol{x}\|$, o que nos permite escrever:

$$x^2 = \boldsymbol{x} \cdot \boldsymbol{x} \tag{3.17}$$

Derivando a equação (3.17) em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{x} = \frac{1}{x}(\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}}) \tag{3.18}$$

Em (3.18) e nas equações subsequentes, a variável encimada por um ponto representa sua derivada em relação ao tempo.

Derivando a expressão do tensor das rotações (3.11) em relação ao tempo, obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = h_1 \dot{\boldsymbol{X}} + h_2\left(\boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{X}} + \dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\right) + \frac{h_1{}'}{x}(\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{X} + \frac{h_2{}'}{x}(\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{X}^2 \tag{3.19}$$

Definindo um novo tensor $\boldsymbol{\Omega}$ como sendo:

$$
\begin{aligned}
&\boldsymbol{\Omega} \doteq \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T \\
&\boldsymbol{\Omega} = h_1 \dot{\boldsymbol{X}} + h_2\left(\boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{X}} - \dot{\boldsymbol{X}}\boldsymbol{X}\right) + (h - h_1)\frac{1}{x^2}(\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{X}
\end{aligned}
\tag{3.20}
$$

Este é o tensor das velocidades angulares. É possível provar que este tensor é antissimétrico, o que nos permite definir:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{\omega} \doteq \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\right) &= h_1 \dot{\boldsymbol{x}} + h_2 \boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{x}} + (h - h_1)\frac{1}{x^2}(\boldsymbol{x} \cdot \dot{\boldsymbol{x}})\boldsymbol{x} = \\
&= h_1 \dot{\boldsymbol{x}} + h_2 \boldsymbol{X}\dot{\boldsymbol{x}} + (h - h_1)\left(\frac{1}{x^2}\boldsymbol{X}^2 + \boldsymbol{I}\right)\dot{\boldsymbol{x}} = \\
&= \left(h\boldsymbol{I} + h_2 \boldsymbol{X} + h_3 \boldsymbol{X}^2\right)\dot{\boldsymbol{x}}.
\end{aligned}
\tag{3.21}
$$

O vetor $\boldsymbol{\omega}$ corresponde ao vetor das velocidades angulares.

A equação $(3.21)_3$ nos permite escrever:

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{x}}, \tag{3.22}$$

onde temos:

$$\boldsymbol{\Gamma} = h(x)\boldsymbol{I} + h_2(x)\boldsymbol{X} + h_3(x)\boldsymbol{X}^2 \tag{3.23}$$

A propriedade expressa pela equação $(3.13)_2$ nos permite obter as seguintes relações válidas para o tensor $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Gamma} \text{ e } \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{Q}^T \tag{3.24}$$

Para um tensor antissimétrico, são válidas as propriedades:

$$\boldsymbol{X}^3 = -x^2\boldsymbol{X} \text{ e } \boldsymbol{X}^4 = -x^2\boldsymbol{X}^2. \tag{3.25}$$

Assim, com a ajuda de (3.25), $(3.14)_1$ e $(3.15)_2$, a partir de (3.24), podemos obter:

$$\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\Gamma} = h\boldsymbol{I} - h_2\boldsymbol{X} + h_3\boldsymbol{X}^2 = \boldsymbol{\Gamma}^T. \tag{3.26}$$

Podemos obter também que:

$$\det\boldsymbol{\Gamma} = h\left(h_1^2 + x^2h_2^2\right) \tag{3.27}$$

3.4 Derivadas dos vetores e tensores

Identificaremos as derivadas do tensor $\boldsymbol{\Gamma}$ e do vetor $\boldsymbol{x}$ em relação a uma variável escalar qualquer pelos símbolos $\boldsymbol{\Gamma}'$ e $\boldsymbol{x}'$, respectivamente.

Assim, pela derivação de $\boldsymbol{\Gamma}$ em relação a uma variável escalar qualquer, obteremos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}' = {} & h_8\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'\right)\boldsymbol{I} + h_4\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'\right)\boldsymbol{X} + h_5\left(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}'\right)\boldsymbol{X}^2 + \\ & + h_2\boldsymbol{X}' + h_3\left(\boldsymbol{X}'\boldsymbol{X} + \boldsymbol{X}\boldsymbol{X}'\right).\end{aligned} \tag{3.28}$$

Em (3.28) as novas variáveis escalares valem:

$$
\begin{aligned}
h_8 &= \frac{1}{x} h' \\
h_4 &= \frac{1}{x} h_2{}' = \frac{1}{x^2}(hh_1 - 2h_2) \\
h_5 &= \frac{1}{x} h_3{}' = \frac{1}{x^2}(h_8 + hh_2 - 3h_3)
\end{aligned}
\tag{3.29}
$$

De forma compacta, podemos reescrever a equação (3.28) sob a forma:

$$
\boldsymbol{\Gamma}' = \boldsymbol{U}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{x}'), \tag{3.30}
$$

definindo $\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y})$ pela equação seguinte:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y}) = {} & (h_8(x)\boldsymbol{I} + h_4(x)\boldsymbol{X} + h_5(x)\boldsymbol{X}^2)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{y}) + \\
& + h_2(\boldsymbol{x})\boldsymbol{Y} + h_3(\boldsymbol{x})(\boldsymbol{YX} + \boldsymbol{XY}),
\end{aligned}
\tag{3.31}
$$

onde $\boldsymbol{Y}$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{y}$.

Sendo $\boldsymbol{t}$ e $\boldsymbol{s}$ vetores genéricos, é válida a propriedade:

$$
\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{t} \tag{3.32}
$$

Definiremos um novo tensor $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$, sendo $\boldsymbol{t}$ um vetor genérico, que é o vetor axial do tensor antissimétrico $\boldsymbol{T}$:

$$
\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{\partial(\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{3.33}
$$

Executando a diferenciação expressa pela equação (3.33) obtemos para $\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})$ a expressão abaixo:

$$
\begin{aligned}
\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = {} & (h_8(x)\boldsymbol{t} - h_4(x)\boldsymbol{Xt} + h_5(x)\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{t}) \otimes \boldsymbol{x} + \\
& + h_2(x)\boldsymbol{T} - h_3(x)(2\boldsymbol{XT} - \boldsymbol{TX})
\end{aligned}
\tag{3.34}
$$

Como consequência da propriedade expressa pela equação (3.32), podemos escrever:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \text{ e}$$
$$\boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \frac{\partial(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{x}} \tag{3.35}$$

Pela comparação de $(3.35)_1$ e (3.33), podemos concluir que

$$\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{U}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \tag{3.36}$$

Com a ajuda das equações (3.32) e (3.36) obtemos:

$$\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{s} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{t} \tag{3.37}$$

De (3.37) podemos concluir que:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s})\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{s}} = \frac{\partial(\boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t})\boldsymbol{s})}{\partial\boldsymbol{s}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) \tag{3.38}$$

Com a ajuda das equações $(3.35)_2$ e (3.36) obtemos também:

$$\frac{\partial(\Gamma\boldsymbol{s}^r)}{\partial\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{U}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{V}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}^r)\boldsymbol{Q}^T = \boldsymbol{V}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}^r) = \boldsymbol{V}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}). \tag{3.39}$$

Em (3.39), $\boldsymbol{t} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}^r$, ou seja, $\boldsymbol{t}^r$ é o vetor $\boldsymbol{t}$ retrorrotacionado.

Outra relação que pode ser obtida, após alguma manipulação algébrica, é:

$$\frac{\partial(\boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{t}^r)}{\partial\boldsymbol{x}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{t})}{\partial\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) + \Gamma^T\frac{\partial(\boldsymbol{Q}\boldsymbol{t}^r)}{\partial\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{t}) - \boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{T}\boldsymbol{\Gamma} \tag{3.40}$$

As relações expressas pelas equações (3.39) e (3.40) nos permitem escrever:

$$\boldsymbol{V}^T(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{s}) - \boldsymbol{\Gamma}^T\boldsymbol{S}\boldsymbol{\Gamma} \tag{3.41}$$

O tensor $\boldsymbol{S}$ é o tensor antissimétrico, cujo vetor axial é $\boldsymbol{s}$.

Utilizando as propriedades expressas pelas equações de (3.35) a (3.41), a diferenciação da equação (3.34) nos conduz a obtermos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{V'}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{t}) = (\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')(h_9(x)\boldsymbol{t} - h_6(x)\boldsymbol{Xt} + h_7(x)\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{t})\otimes\boldsymbol{x} + \\ + (h_8(x)\boldsymbol{t} - h_4(x)\boldsymbol{Xt} + h_5(x)\boldsymbol{X}^2\boldsymbol{t})\otimes\boldsymbol{x'} + \\ + (h_5(x)(\boldsymbol{XX'} + \boldsymbol{X'X})\boldsymbol{t} - h_4(x)\boldsymbol{X't})\otimes\boldsymbol{x} + \\ + h_4(x)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')\boldsymbol{T} - h_5(x)(\boldsymbol{x}\cdot\boldsymbol{x}')(2\boldsymbol{XT} - \boldsymbol{TX}) + \\ - h_3(x)(2\boldsymbol{X'T} - \boldsymbol{TX'})\end{aligned} \tag{3.42}$$

As novas funções de *x* que aparecem nesta equação valem:

$$\begin{aligned}h_9(x) &= \frac{1}{x}h_8' \\ h_6(x) &= \frac{1}{x}h_4' = \frac{1}{x^2}(h_8h_1 + hh_3 - h^2h_2 - 4h_4) \\ h_7(x) &= \frac{1}{x}h_5' = \frac{1}{x^2}(h_9 + h_8h_2 + hh_4 - 5h_5)\end{aligned} \tag{3.43}$$

As funções necessárias à obtenção de $\boldsymbol{V}'(\boldsymbol{x},\boldsymbol{x}',\boldsymbol{t})$, são, portanto:

$$\begin{aligned}h &= \frac{b'}{a} & h_1 &= \frac{b}{x} \\ h_2 &= \frac{1-a}{x^2} & h_3 &= \frac{h-h_1}{x^2} \\ h_4 &= \frac{1}{x^2}(hh_1 - 2h_2) & h_5 &= \frac{1}{x^2}(h_8 + hh_2 - 3h_3) \\ h_6 &= \frac{1}{x^2}(h_8h_1 + hh_3 - h^2h_2 - 4h_4) & h_7 &= \frac{1}{x^2}(h_9 + h_8h_2 + hh_4 - 5h_5) \\ h_8 &= \frac{1}{x}h' & h_9 &= \frac{1}{x}h_8'.\end{aligned} \tag{3.44}$$

3.5 Parametrizações

3.5.1 Parametrização de Euler

A escolha mais evidente para parametrização vetorial é a parametrização de Euler que consiste na seleção dos seguintes parâmetros:

$$
\begin{aligned}
&b = sen\theta \\
&a = cos\,\theta \\
&\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\theta} = \theta\boldsymbol{e} \\
&\text{sendo } x = \theta = \|\boldsymbol{\theta}\|
\end{aligned}
\tag{3.45}
$$

Neste caso, os coeficientes presentes nas equações de $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Gamma}'$ assumem os valores abaixo:

$$
\begin{aligned}
h &= 1 \\
h_1 &= \frac{sen\theta}{\theta} \\
h_2 &= \frac{1-\cos\theta}{\theta^2} \\
h_3 &= \frac{1-\dfrac{sen\theta}{\theta}}{\theta^2} \\
h_4 &= \frac{1}{\theta^2}(h_1 - 2h_2) \\
h_5 &= \frac{1}{\theta^2}(h_2 - 3h_3) \\
h_6 &= \frac{1}{\theta^2}(h_3 - h_2 - 4h_4) \\
h_7 &= \frac{1}{\theta^2}(h_4 - 5h_5) \\
h_8 &= h_9 = 0
\end{aligned}
\tag{3.46}
$$

De posse destes coeficientes, podemos obter os tensores $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$:

$$
\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{I} + \frac{\text{sen}\theta}{\theta}\boldsymbol{\Theta} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\Theta}^2 \tag{3.47}
$$

$$
\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I} + \frac{1-\cos\theta}{\theta^2}\boldsymbol{\Theta} + \frac{1-\left(\dfrac{\text{sen}\theta}{\theta}\right)}{\theta^2}\boldsymbol{\Theta}^2 \tag{3.48}
$$

3.5.1.1 Singularidades

As expressões que definem os tensores $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ apresentam uma singularidade quando $\theta = 0$. Entretanto, essas singularidades são removíveis com o uso de uma expansão em série de Taylor dos coeficientes das funções trigonométricas envolvidas:

$$\frac{\text{sen}\theta}{\theta} = 1 - \frac{1}{6}\theta^2 + \frac{1}{120}\theta^4 - O\left(\theta^6\right)$$
$$\frac{1-\cos\theta}{\theta^2} = \frac{1}{2}\frac{\text{sen}^2\left(\theta/2\right)}{\left(\theta/2\right)^2} = \frac{1}{2} - \frac{1}{24}\theta^2 + \frac{1}{720}\theta^4 - O\left(\theta^6\right) \tag{3.49}$$

Para $\theta = 0,$ os tensores $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ assumem os valores:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I} \tag{3.50}$$

Para $\theta = 2k\pi,\ k = 1,2,\ldots,$ o tensor $\boldsymbol{\Gamma}$ também é singular:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \boldsymbol{I} + \frac{1}{\theta^2}\boldsymbol{\Theta}^2 = \boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} \tag{3.51}$$

Esta singularidade não é removível, o que restringe o uso da parametrização de Euler ao intervalo $0 \leq \theta < 2\pi$.

3.5.1.2 Obtenção de θ a partir de $\boldsymbol{Q}$

Se dispusermos do tensor $\boldsymbol{Q}$ e necessitarmos obter o vetor $\boldsymbol{\theta}$ e sua norma θ podemos fazer uso das expressões:

$$\theta = 2\text{arcsen}\left[\sqrt{\frac{3 - \text{tr}\boldsymbol{Q}}{4}}\right] \text{ e} \tag{3.52}$$

$$\boldsymbol{\theta} = \frac{\theta}{\text{sen}\theta}\text{axial}\left(\text{Skew}\boldsymbol{Q}\right). \tag{3.53}$$

Em (3.52), $\text{tr}\boldsymbol{Q}$ representa o traço do tensor $\boldsymbol{Q}$.

3.5.2 Parametrização de Rodrigues

A parametrização de Rodrigues consiste na escolha de um parâmetro α, vinculado ao ângulo de rotação θ através da relação:

$$\alpha = 2\text{tg}\frac{\theta}{2}, \tag{3.54}$$

ou seja, o ângulo de rotação θ corresponde a:

$$\theta = 2\text{arctg}\frac{\alpha}{2} \tag{3.55}$$

A observação desta equação nos permite verificar que esta parametrização é singular para $\theta = (2k-1)\pi,\ k = 1,2,...,$ o que restringe o seu uso ao intervalo $0 \leq \theta < \pi$.

No seu intervalo de validade, os parâmetros da equação (3.7) assumem os seguintes valores:

$$x = \alpha = 2\text{tg}\frac{\theta}{2} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha} = \alpha \boldsymbol{e}. \tag{3.56}$$

Os demais parâmetros podem ser determinados pela substituição da relação existente entre α e θ em suas respectivas equações:

$$b = sen\theta = \frac{4x}{4+x^2} = \frac{4\alpha}{4+\alpha^2} \quad \text{e} \quad a = cos\,\theta = \frac{4-x^2}{4+x^2} = \frac{4-\alpha^2}{4+\alpha^2} \tag{3.57}$$

Os demais coeficientes estão relacionados a seguir:

$$\begin{aligned}
h &= \frac{b'}{a} = \frac{4}{4+x^2} = \frac{4}{4+\alpha^2} \\
h_1 &= h \\
h_2 &= \frac{1}{2}h \\
h_3 &= 0 \\
h_4 &= -\frac{1}{4}h^2 \\
h_5 &= 0 \\
h_6 &= \frac{1}{4}h^3 \\
h_7 &= 0 \\
h_8 &= -\frac{1}{2}h^2 \\
h_9 &= \frac{1}{2}h^3
\end{aligned} \tag{3.58}$$

Substituindo os coeficientes nas equações que definem os tensores $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{Q} &= \boldsymbol{I} + \frac{4}{4+x^2}\left(\boldsymbol{X} + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}^2\right) = \boldsymbol{I} + \frac{4}{4+\alpha^2}\left(\boldsymbol{A} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}^2\right) \\
\boldsymbol{\Gamma} &= \frac{4}{4+x^2}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{X}\right) = \frac{4}{4+\alpha^2}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2}\boldsymbol{A}\right),
\end{aligned} \tag{3.59}$$

onde $\boldsymbol{A}$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\alpha}$.

Com o uso das expressões que definem h_1 e h_2 e sua aplicação à equação (3.27) nós podemos obter que:

$$\det\boldsymbol{\Gamma} = h^2\,, \tag{3.60}$$

portanto, esta parametrização não apresenta singularidades no intervalo $0 \leq \theta \leq \pi$.

3.5.2.1 Obtenção de α a partir de $\boldsymbol{Q}$

Nesta parametrização, a obtenção de $\boldsymbol{\alpha}$ a partir de $\boldsymbol{Q}$ pode ser feita com a utilização de

$$\alpha = 2\left[\sqrt{\frac{3-\operatorname{tr}\boldsymbol{Q}}{1+\operatorname{tr}\boldsymbol{Q}}}\right] \text{ e} \tag{3.61}$$

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{4+\alpha^2}{4}\operatorname{axial}(\operatorname{Skew}\boldsymbol{Q}) \tag{3.62}$$

3.5.2.2 Composição de rotações

Para a composição de rotações pode ser feito uso da fórmula de Rodrigues. Esta fórmula estabelece que, se temos um tensor rotação tal que

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_a\boldsymbol{Q}_b\,, \tag{3.63}$$

e sendo, $\boldsymbol{\alpha}_a$ e $\boldsymbol{\alpha}_b$ os vetores rotações associados aos tensores $\boldsymbol{Q}_a$ e $\boldsymbol{Q}_b$ na parametrização de Rodrigues, sendo suas normas α_a e α_b, respectivamente, podemos obter o vetor $\boldsymbol{\alpha}$ associado ao tensor $\boldsymbol{Q}$ com o uso da expressão:

$$\boldsymbol{\alpha} = \frac{4}{4-\boldsymbol{\alpha}_a\cdot\boldsymbol{\alpha}_b}\left\{\boldsymbol{\alpha}_a + \boldsymbol{\alpha}_b + \frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_a\times\boldsymbol{\alpha}_b\right\} \tag{3.64}$$

3.5.3 Parametrização Generalizada de Rodrigues

Comparando as equações (3.47) e (3.48) que definem os tensores $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ quando da utilização da parametrização de Euler com as equações (3.59) que os definem na parametrização de Rodrigues, torna-se evidente a maior simplicidade da parametrização de Rodrigues, que não apresenta funções trigonométricas ou singularidades significativas, o que se constitui em grande vantagem para aplicações numéricas. Como desvantagem, apenas o

menor intervalo de validade, que na parametrização de Rodrigues é $0 \leq \theta < \pi$ enquanto na parametrização de Euler é $0 \leq \theta < 2\pi$.

Buscando contornar esta restrição, foram desenvolvidos os parâmetros generalizados de Rodrigues. Em [56] é mencionada uma família de parâmetros modificados de Rodrigues a serem gerados por:

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \alpha_n \boldsymbol{e} \quad \text{onde} \quad \alpha_n = 2n\text{tg}\frac{\theta}{2n}, \quad n = 1,2,3... \tag{3.65}$$

Quando $n = 1$, é obtida a parametrização de Rodrigues na sua forma usual.

A obtenção do tensor das rotações para esses parâmetros é feita a partir da divisão da rotação em parcelas correspondentes a $1/n$ do ângulo de rotação θ. A cada parcela do ângulo de rotação corresponderá um tensor rotação que denominaremos aqui de $\boldsymbol{Q}^{1/n}$. A rotação completa, correspondente ao ângulo total θ, será obtida pela superposição das rotações, ou seja:

$$\boldsymbol{Q} = \left(\boldsymbol{Q}^{1/n}\right)^n \tag{3.66}$$

De maneira genérica, podemos dizer que a raiz k do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$ é fornecida pela expressão:

$$\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{Q}^{\frac{1}{k}} = \boldsymbol{I} + sen\vartheta \boldsymbol{E} + (1 - \cos\vartheta)\boldsymbol{E}^2 \ , \tag{3.67}$$

onde

$$\vartheta = \frac{\theta}{k}. \tag{3.68}$$

A equação (3.67) pode ser escrita na forma:

$$\boldsymbol{Q}_k = \boldsymbol{I} + b\boldsymbol{E} + (1 - a)\boldsymbol{E}^2, \tag{3.69}$$

sendo

$$b = sen\vartheta \ \text{ e } \ a = \cos\vartheta. \tag{3.70}$$

Utilizando a notação α_n para representar os parâmetros generalizados de Rodrigues, estes serão dados pelas expressões:

$$x = \alpha_n = 2n\text{tg}\frac{\theta}{2n} \ \text{ e } \ \boldsymbol{x} = \boldsymbol{\alpha}_n = x\boldsymbol{e} = \alpha_n \boldsymbol{e} \tag{3.71}$$

A expansão em série de $(3.71)_1$ nos permite escrever:

$$x = \alpha_n = 2n\text{tg}\frac{\theta}{2n} = \theta + \frac{1}{12n^2}\theta^3 + \frac{1}{120n^4}\theta^5 + O(\theta^7). \tag{3.72}$$

Podemos obter também:

$$\theta = 2n\text{arctg}\frac{x}{2n} = 2n\text{arctg}\frac{\alpha_n}{2n}. \tag{3.73}$$

Neste caso, o intervalo de validade da parametrização passa a ser $0 \leq \theta < n\pi$, o que nos permite expandir de forma significativa o intervalo de validade da parametrização.

É possível também concluir que:

$$\lim_{n\to\infty} x = \lim_{n\to\infty} \alpha_n = \theta. \tag{3.74}$$

Os coeficientes a e b que aparecem na expressão (3.69) podem ser escritos sob a forma:

$$\begin{aligned} b &= sen\vartheta = 4nxg = 4n\alpha_n g \text{ e} \\ a &= \cos\vartheta = (4n^2 - x^2)g = (4n^2 - \alpha_n^2)g, \end{aligned} \tag{3.75}$$

onde a nova variável g é fornecida pela expressão:

$$g = \frac{1}{4n^2 + x^2} = \frac{1}{4n^2 + \alpha_n^2}, \tag{3.76}$$

De posse destes novos parâmetros, a expressão de $\boldsymbol{Q}_n$ resulta em:

$$\boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{I} + 4ng\left(\boldsymbol{X} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{X}^2\right) = \boldsymbol{I} + \frac{4n}{4n^2 + x^2}\left(\boldsymbol{X} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{X}^2\right), \tag{3.77}$$

ou, utilizando a notação α_n para representar o parâmetro generalizado de Rodrigues:

$$\boldsymbol{Q}_n = \boldsymbol{I} + 4ng\left(\boldsymbol{A}_n + \frac{1}{2n}\boldsymbol{A}_n^2\right) = \boldsymbol{I} + \frac{4n}{4n^2 + \alpha_n^2}\left(\boldsymbol{A}_n + \frac{1}{2n}\boldsymbol{A}_n^2\right), \tag{3.78}$$

onde $\boldsymbol{A}_n$ representa o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\alpha}_n$.

A Tabela 3.1 apresenta valores calculados para g^{-1}, a e b em função do valor n.

Tabela 3.1 - Valores de g^{-1}, a e b em função do valor de n

n	g^{-1}	a	b
1	$4+x^2$	$\left(4-x^2\right)g$	$4xg$
2	$16+x^2$	$\left(16-x^2\right)g$	$8xg$
3	$36+x^2$	$\left(36-x^2\right)g$	$12xg$
4	$64+x^2$	$\left(64-x^2\right)g$	$16xg$
5	$100+x^2$	$\left(100-x^2\right)g$	$20xg$
6	$144+x^2$	$\left(144-x^2\right)g$	$24xg$
7	$196+x^2$	$\left(196-x^2\right)g$	$28xg$
8	$256+x^2$	$\left(256-x^2\right)g$	$32xg$

3.5.3.1 Obtenção das potências do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$

A obtenção do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$ pode ser feita diretamente a partir do produto dos n tensores $\boldsymbol{Q}^{1/n}$ ou, de forma mais expedita, utilizando os recursos decorrentes das propriedades inerentes aos tensores envolvidos. Assim, realizando a sua decomposição espectral, podemos representar um tensor rotação qualquer $\boldsymbol{Q}$ na forma:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{P}^{-1}, \tag{3.79}$$

onde:

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a+ib & 0 \\ 0 & 0 & a-ib \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{P} = \begin{bmatrix} e_1 & -e_1e_3 - ie_2 & -e_1e_3 + ie_2 \\ e_2 & -e_2e_3 + ie_1 & -e_2e_3 - ie_1 \\ e_3 & e_1^2 + e_2^2 & e_1^2 + e_2^2 \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$\boldsymbol{P}^{-1} = \begin{bmatrix} 2e_1 & 2e_2 & 2e_3 \\ \dfrac{-e_1e_3 + ie_2}{e_1^2 + e_2^2} & \dfrac{-e_2e_3 - ie_1}{e_1^2 + e_2^2} & 1 \\ \dfrac{-e_1e_3 - ie_2}{e_1^2 + e_2^2} & \dfrac{-e_2e_3 + ie_1}{e_1^2 + e_2^2} & 1 \end{bmatrix}.$$

(3.80)

Nos tensores representados em (3.80), $i = \sqrt{-1}$ e as variáveis e_i representam as componentes do vetor e, na base ortonormal de referência $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$, sendo obtidos por:

$$e_i = \boldsymbol{e}_i \cdot \boldsymbol{e}, \ i = 1,2,3. \tag{3.81}$$

A equação (3.79) nos permite obter potências do tensor rotação $\boldsymbol{Q}$, utilizando a expressão:

$$\boldsymbol{Q}^n = \boldsymbol{P}\boldsymbol{\Lambda}^n\boldsymbol{P}^{-1}. \tag{3.82}$$

Desta forma, para obtermos uma potência do tensor rotação, necessitamos obter a potência do tensor $\boldsymbol{\Lambda}$, apenas.

Com o auxílio dos coeficientes binomiais, podemos obter:

$$(a + ib)^n = \sum_{k=0}^{n} B_k^n a^{n-k} (ib)^k, \tag{3.83}$$

onde:

$$B_k^n = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!} \tag{3.84}$$

Utilizando as variáveis auxiliares *m* e *l*, podemos escrever a equação (3.83) na forma:

$$(a + ib)^n = \sum_{r=0}^{m} B_{2r}^n (-1)^r a^{n-2r} b^{2r} + i\left[\sum_{r=0}^{l} B_{2r+1}^n (-1)^r a^{n-(2r+1)} b^{2r+1}\right] \tag{3.85}$$

Em (3.85), as variáveis m e l assumem os valores:

Para n par: $m = n/2$ e $l = m - 1$.

Para n ímpar: $m = l = (n-1)/2$.

Podemos escrever $\boldsymbol{Q}$ na forma:

$$\boldsymbol{Q} = \boldsymbol{Q}_n^n = \boldsymbol{I} + q\boldsymbol{E} + (1-p)\boldsymbol{E}^2. \tag{3.86}$$

Utilizando (3.85), p e q assumirão os valores:

$$p = \sum_{r=0}^{m} B_{2r}^n (-1)^r a^{n-2r} b^{2r} \ \text{ e } \ q = \sum_{r=0}^{l} B_{2r+1}^n (-1)^r a^{n-(2r+1)} b^{2r+1}. \tag{3.87}$$

A Tabela 3.2 mostra os valores assumidos por p e q para valores de n entre 1 e 8. Nesta tabela, os valores de a e b são aqueles apresentados na Tabela 3.1.

Tabela 3.2 – Coeficientes para determinação do tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$

n	p	q
1	a	b
2	$a^2 - b^2$	$2ab$
3	$a^3 - 3ab^2$	$3a^2b - b^3$
4	$a^4 - 6a^2b^2 + b^4$	$4a^3b - 4ab^3$
5	$a^5 - 10a^3b^2 + 5ab^4$	$5a^4b - 10a^2b^3 + b^5$
6	$a^6 - 15a^4b^2 + 15a^2b^4 - b^6$	$6a^5b - 20a^3b^3 + 6ab^4$
7	$a^7 - 21a^5b^2 + 35a^3b^4 - 7ab^6$	$7a^6b - 35a^4b^3 + 21a^2b^5 - b^7$
8	$a^8 - 28a^6b^2 + 70a^4b^4 - 28a^2b^6 + b^8$	$8a^7b - 56a^5b^3 + 56a^3b^5 - 8ab^7$

3.5.3.2 Vetor das velocidades angulares

No item 3.3 foi definido o tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$, cujo vetor axial é $\boldsymbol{\omega}$, o vetor das velocidades angulares. Para obtenção da expressão de $\boldsymbol{\omega}$ quando do uso dos parâmetros generalizados de Rodrigues, escreveremos:

$$\begin{aligned}\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T &= \left(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)} + \boldsymbol{Q}_n\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)} + \cdots + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)}\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)}\dot{\boldsymbol{Q}}_n\right)\boldsymbol{Q}_n^{nT} = \\ &= \dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T + \boldsymbol{Q}_n\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{2T} + \cdots + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)}\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)T} + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)}\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{nT}\end{aligned} \tag{3.88}$$

O vetor das velocidades angulares $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor axial de $\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$. Assim, obtemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega} &= \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\right) = \text{axial}(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T + \boldsymbol{Q}_n\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{2T} + \cdots + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)}\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)T} + \\ &\qquad + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)}\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^{nT}) = \\ &= \text{axial}\Big[\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T + \boldsymbol{Q}_n\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T\right)\boldsymbol{Q}_n^T + \cdots + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T\right)\boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)T} + \\ &\qquad + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T\right)\boldsymbol{Q}_n^{(n-1)T}\Big] = \\ &= [\boldsymbol{I} + \boldsymbol{Q}_n + \cdots + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}2)} + \boldsymbol{Q}_n^{(n\text{-}1)}]\,\text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T\right)\end{aligned} \tag{3.89}$$

Assim, podemos escrever para $\boldsymbol{\omega}$ uma expressão análoga àquela expressa pela equação (3.22):

$$\boldsymbol{\omega} = \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_n\boldsymbol{Q}_n^T\right) = \boldsymbol{\Gamma}_n\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{\Gamma}_n\dot{\boldsymbol{\alpha}}_n. \tag{3.90}$$

O tensor $\boldsymbol{\Gamma}_n$ assume o valor:

$$\boldsymbol{\Gamma}_n = \frac{b'}{a}\boldsymbol{I} + \frac{1-a}{x^2}\boldsymbol{X} + \frac{\frac{b'}{a} - \frac{b}{x}}{x^2}\boldsymbol{X}^2 = \frac{b'}{a}\boldsymbol{I} + \frac{1-a}{\alpha_n^2}\boldsymbol{A}_n + \frac{\frac{b'}{a} - \frac{b}{x}}{\alpha_n^2}\boldsymbol{A}_n^2 \tag{3.91}$$

Utilizando as equações (3.75), podemos escrever $\boldsymbol{\Gamma}_n$ na forma:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma}_n &= 4ng\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{X}\right) = \frac{4n}{4n^2 + x^2}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{X}\right) = \\ &= 4ng\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{A}\right) = \frac{4n}{4n^2 + \alpha_n^2}\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{X}\right).\end{aligned} \tag{3.92}$$

A equação (3.89) nos permite obter $\boldsymbol{\Gamma}$ a partir de $\boldsymbol{\Gamma}_n$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\Gamma} &= \left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{Q}_n^{(k-1)}\right)\boldsymbol{\Gamma}_n = \left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{Q}_n^{(k-1)}\right)4ng\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{X}\right) = \\ &= \left(\sum_{k=1}^{n}\boldsymbol{Q}_n^{(k-1)}\right)4ng\left(\boldsymbol{I} + \frac{1}{2n}\boldsymbol{A}_n\right).\end{aligned} \tag{3.93}$$

A equação (3.93) nos permite obter uma expressão geral para os coeficientes necessários à determinação de $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Gamma}'$:

$$\begin{aligned}h &= 4n^2 g = \frac{4n^2}{4n^2 + x^2} = \frac{4n^2}{4n^2 + \alpha_n^2} \\ h_8 &= -8n^2 g^2 = -\frac{8n^2}{(4n^2 + x^2)^2} = -\frac{8n^2}{(4n^2 + \alpha_n^2)^2} \\ h_9 &= \frac{1}{x}h_8' = 32n^2 g^3 = \frac{32n^2}{(4n^2 + x^2)^3} = \frac{32n^2}{(4n^2 + \alpha_n^2)^3}\end{aligned} \tag{3.94}$$

A Tabela 3.3 apresenta os coeficientes necessários à determinação de $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Gamma}'$, para valores de *n* de 1 a 3.

Tabela 3.3- Coeficientes necessários à obtenção de $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ e $\boldsymbol{\Gamma}'$ para $n = 1,2,3$.

n	1	2	3
g^{-1}	$4 + x^2$	$16 + x^2$	$36 + x^2$
h	$4g$	$16g$	$36g$
h_1	$4g$	$(256 - 16x^2)g^2$	$(46656 - 4320x^2 + 36x^4)g^3$
h_2	$2g$	$128g^2$	$2(11664 - 216x^2 + x^4)g^3$
h_3	0	$32g^2$	$6912g^3$
h_4	$-4g^2$	$-512g^3$	$-4(42768 - 504x^2 + x^4)g^4$
h_5	0	$-128g^3$	$-41472g^4$
h_6	$16g^3$	$3072g^4$	$16(94608 - 792x^2 + x^4)g^5$
h_7	0	$768g^4$	$331776g^5$
h_8	$-8g^2$	$-32g^3$	$-72g^2$
h_9	$32g^3$	$128g^3$	$288g^3$

3.5.3.3 Singularidades

Na parametrização generalizada de Rodrigues para valores de $n \geq 3$, para $\theta = 2\pi$ iremos obter:

$$h_1(x) = h_2(x) = 0, \text{ sendo } x = 2n\text{tg}\frac{\pi}{n} \tag{3.95}$$

Em vista disso, para $n \geq 3$ em $\theta = 2\pi$ $\boldsymbol{\Gamma}$ será dado por

$$\boldsymbol{\Gamma} = h\boldsymbol{I} + h_3\boldsymbol{X}^2 = (h - h_3)\boldsymbol{e} \otimes \boldsymbol{e} \tag{3.96}$$

Assim, na parametrização generalizada de Rodrigues, o uso de $n \geq 3$ não remove a singularidade em $\theta = 2\pi$. Desta forma, o intervalo de validade das parametrizações de Rodrigues pode ser resumido a seguir:

Tabela 3.4 – Intervalo de validade das parametrizações de Rodrigues

n	θ
1	$[0,\pi)$
≥ 2	$[0,2\pi)$

3.5.3.4 Obtenção de $\boldsymbol{\alpha}_n$ a partir de $\boldsymbol{Q}$

Na parametrização generalizada de Rodrigues, podemos extrair $\boldsymbol{\alpha}_n$ e α_n de $\boldsymbol{Q}$ utilizando

$$\alpha_n = 2n\mathrm{tg}\left[\frac{\mathrm{arcsen}\sqrt{\dfrac{3-\mathrm{tr}\boldsymbol{Q}}{4}}}{n}\right] \text{ e} \tag{3.97}$$

$$\boldsymbol{\alpha}_n = \frac{1}{h_1(\alpha_n)}\mathrm{axial}(\mathrm{Skew}\boldsymbol{Q}) \tag{3.98}$$

A comparação entre as expressões que definem os tensores $\boldsymbol{Q}$ e $\boldsymbol{\Gamma}$ nas parametrizações de Euler ((3.47) e (3.48)), Rodrigues (3.59) e Rodrigues generalizado ((3.86) e (3.93)) demonstra a simplicidade da parametrização de Rodrigues, que apresenta expressões mais eficientes do ponto de vista computacional que a parametrização de Euler, por não envolver expressões trigonométricas, as quais são menos eficientes em procedimentos computacionais. O fato de a parametrização de Rodrigues apresentar menor intervalo de validade pode ser contornado com o uso das parametrizações generalizadas de Rodrigues, que permitem ampliar o intervalo de validade de $[0,\pi)$ para $[0,2\pi)$.

4 MODELO LAGRANGIANO TOTAL PARA ANÁLISE DE BARRAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA COM FORMULAÇÃO DO EQUILÍBRIO USANDO O TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS

Neste capítulo será apresentada a teoria para barras sob não-linearidade geométrica, cuja formulação foi usada para a aplicação das alterações na parametrização das rotações e formas de obtenção da matriz de rigidez que se apresenta no escopo desta tese.

A teoria a ser apresentada utiliza formulação Lagrangiana total e é consistente com os Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis. Em vista disso, as variáveis utilizadas para o desenvolvimento das equações são grandezas relativas à configuração de referência, formadas por componentes dos vetores dos deslocamentos e das rotações.

Esta teoria foi apresentada por Pimenta [53] e desenvolvida por Pimenta et al. [60, 61, 99].

4.1 Cinemática

A hipótese cinemática fundamental desta teoria, aplicada apenas às barras retas, é que as seções transversais ortogonais ao eixo da barra na configuração de referência permaneçam planas e indeformáveis durante o movimento. A teoria considera o efeito da distorção da barra por força cortante, o alongamento por força normal e as deformações conjugadas dos momentos, mas não considera o empenamento da seção transversal por torção nem tampouco a sua distorção. Cabe aqui observar que trabalhos posteriores [15, 57] apresentaram o desenvolvimento desta teoria para a consideração do empenamento não-uniforme das seções transversais, mas no escopo deste trabalho estas modificações não foram consideradas. A dedução é geometricamente exata e é válida para estruturas que apresentam grandes deformações, rotações e deslocamentos.

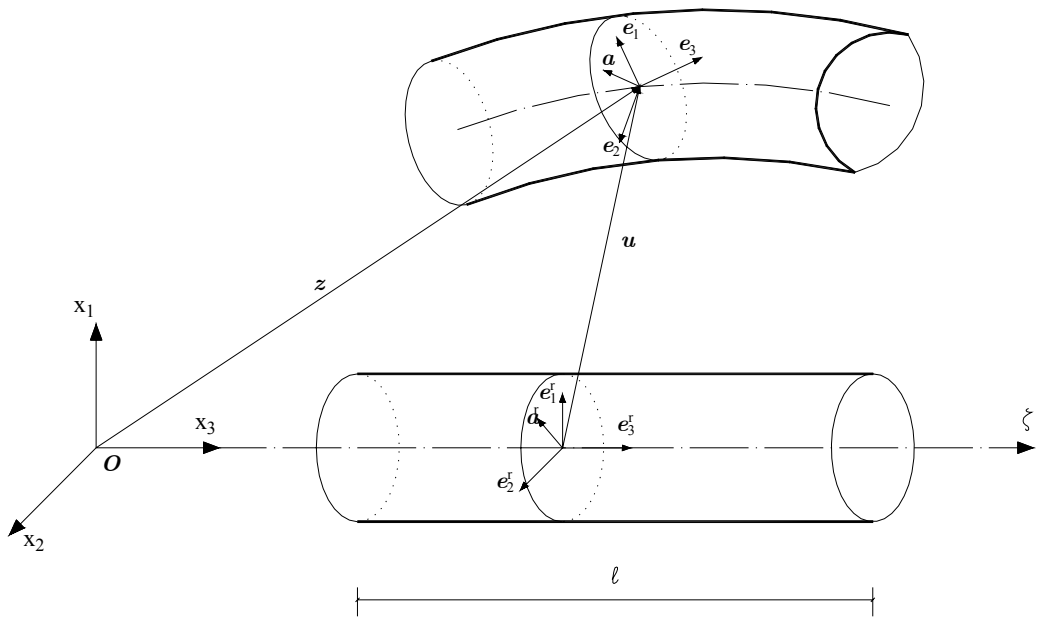


Figura 4.1 – Descrição da barra e grandezas cinemáticas fundamentais

A Figura 4.1 mostra o sistema de representação utilizado. Na configuração indeformada, define-se uma base local ortonormal de vetores $\{\boldsymbol{e}_1^r, \boldsymbol{e}_2^r, \boldsymbol{e}_3^r\}$, com $\boldsymbol{e}_3^r$ coincidente com o eixo da barra. Esta barra é reta e em sua posição indeformada tem comprimento ℓ. O índice "r" sobre uma grandeza será utilizado aqui para indicar que esta grandeza se encontra na configuração de referência.

Os pontos da barra podem ser descritos vetorialmente por:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{a}^r, \tag{4.1}$$

onde:

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta \boldsymbol{e}_3^r, \;\; \zeta \in [0, \ell] \tag{4.2}$$

descreve a posição dos pontos do eixo e

$$\boldsymbol{a}^r = \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r \tag{4.3}$$

descreve a posição dos demais pontos da seção transversal em relação ao eixo.

Após a deformação define-se outra base $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ ortonormal de vetores, chamada de base local móvel com as seções transversais contidas no plano $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2\}$. Da observação da Figura 4.1, podemos notar que $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\zeta}, t)$, que descreve a nova posição dos pontos do eixo da barra, pode ser obtido por:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\zeta} \;. \tag{4.4}$$

Os pontos da barra passam a ser descritos por uma nova função vetorial $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}, t)$ dada por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}, \tag{4.5}$$

onde $\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}, t)$ descreve a posição dos demais pontos da seção em relação ao eixo móvel. O vetor $\boldsymbol{a}$ é dado por

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^r \tag{4.6}$$

$$\boldsymbol{a}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{a}, \tag{4.7}$$

onde $\boldsymbol{Q} = \hat{\boldsymbol{Q}}(\boldsymbol{\zeta}, t)$ é o tensor ortogonal das rotações das seções transversais, conforme tratado no Capítulo 3.

Podemos determinar o vetor dos deslocamentos de um ponto do eixo da barra $(\boldsymbol{u})$ usando a expressão:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta}. \tag{4.8}$$

O vetor dos deslocamentos dos pontos da barra pode ser expresso por

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}. \tag{4.9}$$

A nova posição de um ponto qualquer P será determinada por:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{a}. \tag{4.10}$$

A velocidade de um ponto genérico da barra será dada pela diferenciação de seu deslocamento no tempo. Assim, substituindo (4.10) em (4.9), efetuando a derivação e lembrando que $\dot{(.)}$ representa a derivada de $(.)$ no tempo, se pode chegar a:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \times \boldsymbol{a}. \tag{4.11}$$

4.1.1. Deformações

O gradiente da transformação, para a deformação da barra, com relação a $\boldsymbol{\xi}$, $\boldsymbol{F}$, pode ser avaliado a partir da diferenciação de (4.10) em relação a $\boldsymbol{\xi}$.

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{x}' \otimes \boldsymbol{e}_3^r, \tag{4.12}$$

com $(.)'$ representando a derivada da função em relação a ζ. Utilizando o tensor:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}^T, \tag{4.13}$$

onde $\boldsymbol{K}$ é um tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\kappa}$, e definindo convenientemente o vetor das deformações $\boldsymbol{\eta}$ como sendo:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{z}' - \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{e}_3^r - \boldsymbol{e}_3, \tag{4.14}$$

pode-se obter os equivalentes retrorrotacionados de $\boldsymbol{\kappa}$ e $\boldsymbol{\eta}$:

$$\boldsymbol{\eta}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\eta} \tag{4.15}$$

$$\boldsymbol{\kappa}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\kappa}, \tag{4.16}$$

o que, após alguma manipulação nos permite escrever:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\left\{\boldsymbol{I} + \left[\boldsymbol{\eta}^r + (\boldsymbol{\kappa}^r \times \boldsymbol{a}^r)\right] \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right\}. \tag{4.17}$$

Ou ainda:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_3^r \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right\} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^r, \tag{4.18}$$

onde se definiu o vetor das deformações em um ponto qualquer da seção transversal como:

$$\boldsymbol{\gamma}_3^r = \boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times \boldsymbol{a}^r. \tag{4.19}$$

Em (4.18) $\boldsymbol{F}^r$ é o chamado gradiente da transformação retrorrotacionado, definido por:

$$\boldsymbol{F}^r = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \boldsymbol{e}_3^r \tag{4.20}$$

O gradiente da velocidade é dado pela diferenciação de (4.18) no tempo, o qual resultará em:

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left[\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r\right) \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right]. \tag{4.21}$$

Substituindo (4.14) em (4.15) e realizando a diferenciação no tempo podemos obter:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \dot{\boldsymbol{Q}}^T \boldsymbol{z}' + \boldsymbol{Q}^T \dot{\boldsymbol{z}}' \tag{4.22}$$

Também podemos obter, pela conveniente derivação de (4.4) em relação a ζ e no tempo:

$$\dot{\boldsymbol{z}}' = \dot{\boldsymbol{u}}' \tag{4.23}$$

Sua substituição em (4.22), o uso das propriedades do tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Omega}$ e alguma manipulação algébrica nos permitem escrever:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \boldsymbol{Q}^T\left(-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{z}' + \dot{\boldsymbol{u}}'\right) \tag{4.24}$$

Em (4.24) $\boldsymbol{\omega}$ é o vetor axial de $\boldsymbol{\Omega}$, o denominado vetor das velocidades angulares, conhecido da equação (3.21). Derivando (4.16) no tempo e realizando a substituição das variáveis se chega a:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}' \tag{4.25}$$

Efetuando a derivação de (4.19), obtemos:

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_3^r = \boldsymbol{Q}^T\left(-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{z}' + \dot{\boldsymbol{u}}'\right) + \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\omega}' \times \boldsymbol{a}^r \tag{4.26}$$

De (4.24) e (4.25), após alguma manipulação, se obtém:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \boldsymbol{Q}^T\left(-\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{z}' + \dot{\boldsymbol{u}}'\right) = \boldsymbol{Q}^T\left(\dot{\boldsymbol{u}}' + \boldsymbol{z}'\times(\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}})\right) \tag{4.27}$$

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{Q}^T\left(\boldsymbol{\Gamma}'\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}'\right). \tag{4.28}$$

O vetor das deformações generalizadas da barra foi definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix}\boldsymbol{\eta}^r\\ \boldsymbol{\kappa}^r\end{bmatrix} \tag{4.29}$$

e o vetor dos deslocamentos generalizados como

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix}\boldsymbol{u}\\ \boldsymbol{\alpha}\end{bmatrix}. \tag{4.30}$$

A partir de (4.29), com a substituição de (4.27) e (4.28), pode-se escrever:

$$\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^r = \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}, \tag{4.31}$$

onde $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{\Delta}$ são os operadores definidos por:

$$\boldsymbol{\Lambda} \doteq \begin{bmatrix}\boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}\end{bmatrix},\ \boldsymbol{\Phi} \doteq \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}'\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}, \tag{4.32}$$

$$\boldsymbol{\Delta} \doteq \begin{bmatrix}\boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{Y} \doteq \begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Gamma}'\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}\end{bmatrix}. \tag{4.33}$$

Em (4.32) $\boldsymbol{Z}'$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{z}'$.

As deformações aqui consideradas não pertencem a nenhuma família usual de deformações, vide Pimenta [52], mas possuem a propriedade de serem invariantes perante movimentos superpostos de corpo rígido. Assim sendo, são grandezas objetivas e se prestaram ao uso na formulação das relações constitutivas.

4.2. Estática

4.2.1. Tensões

Para a formulação variacional, o tensor das tensões a ser utilizado deve ser consistente com os Princípios da Mecânica dos Sólidos Deformáveis. A formulação proposta por Pimenta [53] utiliza o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff que é energeticamente conjugado

com o gradiente das velocidades $\dot{\boldsymbol{F}}$. Este tensor, $\boldsymbol{P}$, é não-simétrico e pode ser representado por:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{t}_\alpha \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_3^r \tag{4.34}$$

Em (4.34), $\boldsymbol{\tau}$ é a força superficial na seção transversal que é dada por:

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_3^r, \tag{4.35}$$

e pode ser representado por

$$\boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + \sigma \boldsymbol{e}_3, \tag{4.36}$$

onde σ é a tensão normal na seção transversal e τ_α são as tensões de cisalhamento no plano da seção transversal, na configuração deformada.

Em (4.34) $\boldsymbol{t}_\alpha$ são as tensões atuantes nos planos cujas normais na configuração de referência são $\boldsymbol{e}_\alpha^r$, que podem ser representadas por:

$$\boldsymbol{t}_\alpha = \boldsymbol{P}\boldsymbol{e}_\alpha^r. \tag{4.37}$$

4.2.2 Potência dos Esforços Internos

A potência interna de uma barra é dada por:

$$P_{\text{int}} = \int_0^\ell \int_A \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} dA d\zeta, \tag{4.38}$$

onde A é a área da seção transversal e $\boldsymbol{P}$ é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff. Com a substituição de (4.21), o integrando de (4.38) fica:

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{P} : \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q}\left[\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r\right) \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right]. \tag{4.39}$$

O uso de propriedades do produto escalar entre tensores e da definição de operador transposto, juntamente com a definição dos vetores:

$$\boldsymbol{t}_\alpha^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{t}_\alpha = t_{\beta\alpha}\boldsymbol{e}_\beta^r + t_{3\alpha}\boldsymbol{e}_3^r \tag{4.40}$$

$$\boldsymbol{\tau}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r + \sigma \boldsymbol{e}_3^r, \tag{4.41}$$

permitem-nos reescrever a igualdade presente em (4.39) como:

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\tau}^r . \left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r\right). \tag{4.42}$$

A substituição de (4.42) em (4.38) e alguma manipulação nos permitem escrever a potência dos esforços internos como

$$P_{\text{int}} = \int_0^\ell \left(\boldsymbol{n}^r . \dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \boldsymbol{m}^r . \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r\right) d\zeta, \tag{4.43}$$

onde

$$\boldsymbol{n}^r = \int_A \boldsymbol{\tau}^r dA = V_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r + N\boldsymbol{e}_3^r \text{ e} \tag{4.44}$$

$$\boldsymbol{m}^r = \int_A (\boldsymbol{a}^r \times \boldsymbol{\tau}^r) dA = M_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r + T\boldsymbol{e}_3^r \tag{4.45}$$

Cabe observar que $\boldsymbol{n}^r$ e $\boldsymbol{m}^r$ não são as forças e momentos atuantes na seção transversal da barra. Estes são:

$$\boldsymbol{n} = \int_A \boldsymbol{\tau} dA = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}^r = V_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + N\boldsymbol{e}_3 \tag{4.46}$$

$$\boldsymbol{m} = \int_A (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\tau}) dA = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{m}^r = M_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha + T\boldsymbol{e}_3. \tag{4.47}$$

As componentes de $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{n}^r$, $\boldsymbol{m}$ e $\boldsymbol{m}^r$ são iguais entre si, embora referidas a bases diferentes e correspondem às forças cortantes (V_α), à força normal (N), aos momentos fletores (M_α) e ao momento torçor (T) atuantes na seção. A vantagem de se construir uma formulação com $\boldsymbol{n}^r$ e $\boldsymbol{m}^r$ é que estes não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido, o que não acontece com $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$. Eles são grandezas objetivas, da mesma forma que $\boldsymbol{\gamma}^r$, $\boldsymbol{\eta}^r$ e $\boldsymbol{\kappa}^r$, sendo, portanto, adequadas à definição de relações constitutivas.

Desta forma, podemos definir o vetor dos esforços generalizados de uma seção como:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}^r \\ \boldsymbol{m}^r \end{bmatrix}. \tag{4.48}$$

Com a ajuda de (4.30) e (4.31), podemos escrever a potência dos esforços internos como

$$P_{\text{int}} = \int_0^\ell \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\varepsilon}^r d\zeta = \int_0^\ell \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} d\zeta. \tag{4.49}$$

4.2.3. Potência dos Esforços Externos

A potência dos esforços externos em uma barra de comprimento ℓ é, por definição, igual a

$$P_{\text{ext}} = \int_0^\ell \left[\int_C \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dC + \int_A \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dA \right] d\zeta, \tag{4.50}$$

onde $\overline{\boldsymbol{t}}$ é o vetor das forças superficiais externas atuantes no contorno "C" da seção transversal na configuração deformada por unidade de área da configuração de referência e $\overline{\boldsymbol{b}}$ é o vetor das forças de volume externas na configuração deformada por unidade de volume da configuração de referência atuantes na barra.

A substituição de (4.11) em (4.50) e alguma manipulação nos permitem escrever:

$$P_{\text{ext}} = \int_0^{\ell} \left[\int_C \bar{\boldsymbol{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{m}} \cdot (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \right] d\zeta, \tag{4.51}$$

sendo que os termos $\bar{\boldsymbol{n}}$ e $\bar{\boldsymbol{m}}$ que aparecem em (4.51) são dados por

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \int_C \bar{\boldsymbol{t}} dC + \int_A \bar{\boldsymbol{b}} dA \tag{4.52}$$

$$\bar{\boldsymbol{m}} = \int_C \boldsymbol{a} \times \bar{\boldsymbol{t}} dC + \int_A \boldsymbol{a} \times \bar{\boldsymbol{b}} dA. \tag{4.53}$$

Estas expressões caracterizam exatamente as forças e os momentos externos atuantes ao longo da barra, por unidade de comprimento de referência. O vetor dos esforços externos generalizados aplicados ao longo da barra $\bar{\boldsymbol{q}}$ foi definido como

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix}. \tag{4.54}$$

Com o auxílio de (4.30), pode-se reescrever (4.51)

$$P_{\text{ext}} = \int_0^{\ell} \bar{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{d}} d\zeta. \tag{4.55}$$

Cabe ressaltar, conforme enfatizado em [51], que o que é energeticamente conjugado com o vetor de rotação $\boldsymbol{\alpha}$ é $\boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}}$ e não $\bar{\boldsymbol{m}}$, o que deve ser considerado na definição dos momentos externos conservativos.

4.3 Equilíbrio e condições de contorno

As equações de equilíbrio do problema foram formuladas variacionalmente utilizando o Teorema dos Trabalhos Virtuais. As variações das deformações foram definidas pela linearização consistente das deformações e denominadas deformações virtuais.

Por analogia com (4.27), (4.28) e (4.26), a linearização leva a

$$\delta\boldsymbol{\eta}^r = \boldsymbol{Q}^T \left(\delta\boldsymbol{u}' + \boldsymbol{z}' \times (\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}) \right), \tag{4.56}$$

$$\delta\boldsymbol{\kappa}^r = \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}'\delta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}' \right) \text{ e} \tag{4.57}$$

$$\delta\boldsymbol{\gamma}^r = \delta\boldsymbol{\eta}^r + \delta\boldsymbol{\kappa}^r \times \boldsymbol{a}^r. \tag{4.58}$$

O símbolo $\delta(\cdot)$ indica uma grandeza virtual.

As deformações virtuais podem ser expressas por

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \delta\boldsymbol{\eta}^r \\ \delta\boldsymbol{\kappa}^r \end{bmatrix}. \tag{4.59}$$

Podemos escrever

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}. \tag{4.60}$$

O trabalho virtual dos esforços internos de uma barra é dado por

$$\begin{aligned}\delta W_{\text{int}} &= \int_L \left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}^r\right) d\zeta = \int_L \left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}\right) d\zeta = \\ &= \int_L \left(\boldsymbol{n}^r \cdot \delta\boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{m}^r \cdot \delta\boldsymbol{\kappa}^r\right) d\zeta,\end{aligned} \tag{4.61}$$

que, com a substituição de (4.56) e (4.57), leva a

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^\ell \left[\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{u}' - \left(\boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right) + \boldsymbol{m} \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)'\right] d\zeta. \tag{4.62}$$

O trabalho virtual dos esforços externos de uma barra é dado por

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^\ell \left(\bar{\boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{d}\right) d\zeta = \int_L \left[\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)\right] d\zeta. \tag{4.63}$$

De posse das expressões para os valores dos trabalhos virtuais dos esforços internos e externos pode ser formulado o equilíbrio de uma barra com o uso do Teorema dos Trabalhos Virtuais [53], ou seja,

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0, \;\; \forall \delta\boldsymbol{d} = \delta\hat{\boldsymbol{d}}(\zeta) \,\big|\, \delta\hat{\boldsymbol{d}}(0) = \delta\hat{\boldsymbol{d}}(\ell) = \boldsymbol{o}, \tag{4.64}$$

onde $\boldsymbol{o}$ é o vetor nulo.

Com a substituição de (4.62) e (4.63) em (4.64), obtém-se:

$$\int_0^\ell \left[\boldsymbol{n} \cdot \delta\boldsymbol{u}' - \left(\boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right) + \boldsymbol{m} \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)' - \bar{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} - \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)\right] d\zeta = 0. \tag{4.65}$$

Efetuando integração por partes nos termos com $\delta\boldsymbol{u}'$ e $\left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)'$ chega-se à seguinte equação:

$$\int_L \left[-\left(\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}}\right) \cdot \delta\boldsymbol{u} - \left(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)\right] d\zeta = 0. \tag{4.66}$$

Como os deslocamentos virtuais generalizados são arbitrários, para que a igualdade em (4.66) se cumpra é necessário que sejam atendidas as seguintes condições:

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{o} \\ &\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{o}.\end{aligned} \tag{4.67}$$

As equações (4.67) são as equações locais do equilíbrio da barra.

As condições de contorno serão consideradas através do uso do seguinte funcional:

$$\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \boldsymbol{q}^* \cdot \delta\boldsymbol{d}, \tag{4.68}$$

onde

$$\boldsymbol{q}^{*} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma} \\ \boldsymbol{\Gamma}^{T}\bar{\boldsymbol{m}}^{\Gamma} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma} \\ \bar{\boldsymbol{\mu}}^{\Gamma} \end{bmatrix} \tag{4.69}$$

Em (4.69), $\bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma}$, $\bar{\boldsymbol{m}}^{\Gamma}$ e $\bar{\boldsymbol{\mu}}^{\Gamma}$ são respectivamente os vetores forças, momentos e momentos modificados aplicados nas extremidades da barra.

Substituindo (4.62), (4.63) e (4.69) em (4.68), e efetuando novamente integração por partes nos termos em $\delta\boldsymbol{u}'$ e $(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha})'$ obtém-se

$$\begin{aligned} \int_{L} \left[-\left(\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u} - \left(\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{z}'\times\boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha}\right)\right]d\zeta + \left(\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big|_{0}^{l} + \\ + \left(\boldsymbol{\Gamma}^{T}\boldsymbol{m} - \bar{\boldsymbol{\mu}}^{\Gamma}\right)\delta\boldsymbol{\alpha}\Big|_{0}^{l} = 0 \end{aligned} \tag{4.70}$$

A igualdade acima só se verifica se

$$\begin{aligned} &\left(\boldsymbol{n} - \bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma}\right)\cdot\delta\boldsymbol{u}\Big|_{0}^{l} = 0 \ \text{ e} \\ &\left(\boldsymbol{\Gamma}^{T}\boldsymbol{m} - \bar{\boldsymbol{\mu}}^{\Gamma}\right)\delta\boldsymbol{\alpha}\Big|_{0}^{l} = 0, \end{aligned} \tag{4.71}$$

que caracterizam as condições de contorno do problema. Para que as equações (4.71) sejam atendidas, devem-se ter as seguintes condições de contorno naturais:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n}(0) = \bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma}(0) \qquad && \boldsymbol{n}(\ell) = \bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma}(\ell) \\ &\boldsymbol{\Gamma}^{T}\boldsymbol{m}(0) = \boldsymbol{\Gamma}^{T}\bar{\boldsymbol{m}}^{\Gamma}(0) \qquad && \boldsymbol{\Gamma}^{T}\boldsymbol{m}(\ell) = \boldsymbol{\Gamma}^{T}\bar{\boldsymbol{m}}^{\Gamma}(\ell). \end{aligned} \tag{4.72}$$

E as seguintes condições de contorno essenciais:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{u}(0) = \boldsymbol{u}^{\Gamma}(0) \qquad && \boldsymbol{u}(\ell) = \boldsymbol{u}^{\Gamma}(\ell) \\ &\boldsymbol{\alpha}(0) = \boldsymbol{\alpha}^{\Gamma}(0) \qquad && \boldsymbol{\alpha}(\ell) = \boldsymbol{\alpha}^{\Gamma}(\ell). \end{aligned} \tag{4.73}$$

4.4 Equações constitutivas elásticas lineares

Segundo Pimenta [52], equações constitutivas são relações entre grandezas físicas que visam compatibilizar o modelo mecânico às propriedades do material. Em uma teoria puramente mecânica, as equações constitutivas relacionam as tensões atuantes em um sólido em um dado instante com o movimento do sólido até aquele instante.

As equações constitutivas devem atender a todos os princípios gerais da Física, entre eles os dois princípios da termodinâmica e em particular a três princípios: O Princípio do Determinismo, o Princípio da Localidade e o Princípio da Objetividade. O primeiro princípio garante que as tensões atuantes no sólido devem ser determinadas univocamente a partir do movimento sofrido pelo sólido. O Princípio da Localidade garante que as tensões atuantes em um ponto material de um sólido dependem apenas do movimento relativo de sua vizinhança.

O terceiro princípio, da Objetividade, é o mais recente dos três, segundo Pimenta [52], sendo de 1960 e estabelece que uma equação constitutiva não deve ser afetada por movimentos de corpo rígido superpostos ao movimento do sólido.

Assim, para se formular equações constitutivas em teorias geometricamente não-lineares, as grandezas utilizadas devem atender a estes três princípios.

A maneira mais simples de satisfazer o Princípio da Objetividade é expressar um tensor (ou vetor) de tensões não afetado por movimentos de corpo rígido em função de um tensor (ou vetor) de deformações também não afetado por movimentos de corpo rígido, até um determinado instante [15].

Duas grandezas que atendem a esses requisitos são o segundo tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, $\boldsymbol{S}$ e o tensor das deformações de Green, $\boldsymbol{E}$.

Duas grandezas que também atendem a estes requisitos são os vetores ε^r e $\boldsymbol{\sigma}^r$, definidos pelas equações (4.29) e (4.48), respectivamente. Assim, com a utilização destes vetores podemos formular uma equação constitutiva expressa por:

$$\boldsymbol{\sigma}^r \doteq \boldsymbol{D}\varepsilon^r, \tag{4.74}$$

onde a matriz de rigidez constitutiva $\boldsymbol{D}$ tem os seguintes componentes no sistema local da barra

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} GA & 0 & 0 & 0 & 0 & -GS_1 \\ & GA & 0 & 0 & 0 & GS_2 \\ & & EA & ES_1 & -ES_2 & 0 \\ & & & EJ_{11} & -EJ_{12} & 0 \\ & & & & EJ_{22} & 0 \\ & SIM. & & & & GJ_0 \end{vmatrix} \tag{4.75}$$

A expressão da matriz de rigidez constitutiva apresentada em (4.75) é válida para qualquer eixo da seção transversal. Desde que as propriedades geométricas envolvidas na sua definição sejam coerentemente referidas ao eixo escolhido, as tensões, deformações e deslocamentos serão os mesmos para qualquer eixo. Quando a matriz de rigidez constitutiva é calculada no centro de gravidade da seção transversal da barra, resulta em expressão semelhante à apresentada em [79], excetuando-se os graus de liberdade relativos às variáveis incluídas para consideração do empenamento daquela referência:

$$\boldsymbol{D} = \begin{vmatrix} GA & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & GA & 0 & 0 & 0 & 0 \\ & & EA & 0 & 0 & 0 \\ & & & EJ_{11}^{G} & -EJ_{12}^{G} & 0 \\ & & & & EJ_{22}^{G} & 0 \\ & SIM. & & & & GJ_{0}^{G} \end{vmatrix} \tag{4.76}$$

Maiores detalhes sobre a obtenção destas matrizes podem ser encontrados em [99].

4.5 Aplicação em elementos finitos

A formulação para análise de barras sob não linearidade geométrica aqui apresentada resulta em um sistema de equações diferenciais de equilíbrio cuja solução deve ser obtida por métodos numéricos aproximados. Por se tratar de um método numérico largamente utilizado na solução de problemas da Mecânica dos Sólidos Deformáveis foi escolhido o Método dos Elementos Finitos [27, 100].

4.5.1 Linearização dos trabalhos virtuais: o operador tangente

A aplicação do Método dos Elementos Finitos em estruturas não lineares recai na utilização do método de Newton para solução do sistema, o qual invariavelmente necessita da linearização das expressões que definem o equilíbrio do sistema, que pode ser realizada através da derivada de Fréchet de

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}}, \;\; \forall \delta \boldsymbol{d} = \delta \hat{\boldsymbol{d}}(\zeta) \,|\, \delta \hat{\boldsymbol{d}}(0) = \delta \hat{\boldsymbol{d}}(\ell) = \boldsymbol{o} \tag{4.77}$$

Utilizando (4.62) e (4.63), a diferenciação de (4.77) resulta no operador tangente dado por

$$\begin{aligned} \delta(\delta W) &= \delta\left(\delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}}\right) = \\ &= \int_0^{\ell} \left(\dot{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \left(\boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}\right) + \boldsymbol{\sigma} \cdot \left(\dot{\overline{\boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}}} \right) - \dot{\bar{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta \boldsymbol{d} \right) d\zeta. \end{aligned} \tag{4.78}$$

Manipulações algébricas permitem reescrever (4.78) na forma

$$\delta(\delta W) = \int_0^{\ell} \left[\left(\boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}\right) + \left(\boldsymbol{G} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}\right) \cdot \left(\boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}\right) - \left(\boldsymbol{L} \dot{\boldsymbol{d}}\right) \cdot \delta \boldsymbol{d} \right] d\zeta. \tag{4.79}$$

Dentre as novas grandezas que surgem, $\boldsymbol{D}$ é a matriz dos coeficientes de rigidez tangente da seção transversal e representa a parcela puramente constitutiva do operador.

$$\boldsymbol{D} = \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}}{\partial \boldsymbol{\varepsilon}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \boldsymbol{n}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} & \dfrac{\partial \boldsymbol{n}^r}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} \\ \dfrac{\partial \boldsymbol{m}^r}{\partial \boldsymbol{\eta}^r} & \dfrac{\partial \boldsymbol{m}^r}{\partial \boldsymbol{\kappa}^r} \end{bmatrix}. \tag{4.80}$$

O tensor $\boldsymbol{G}$ caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos e é simétrico.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_{\mathrm{u'}\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_{\alpha'\alpha} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha u'} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha'} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}. \tag{4.81}$$

O tensor $\boldsymbol{L}$ caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{L}_{uu} & \boldsymbol{L}_{\mathrm{u}\alpha} \\ \boldsymbol{L}_{\alpha u} & \boldsymbol{L}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}. \tag{4.82}$$

As submatrizes que aparecem em (4.81) e (4.82) decorrem das operações algébricas realizadas para a obtenção de $\boldsymbol{D}$, $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{L}$. Estas submatrizes podem ser encontradas em [60, 99] e são escritas como:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{u'\alpha} &= G^T_{\alpha u'} = -\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha'} &= G^T_{\alpha'\alpha} = \boldsymbol{V}(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}) \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha} &= \boldsymbol{\Gamma}^T \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma} - \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{n}\right) + \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}', \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{m}\right) - \boldsymbol{\Gamma}'^T \boldsymbol{M}\boldsymbol{\Gamma}. \end{aligned} \tag{4.83}$$

Nas equações de definição das submatrizes de $\boldsymbol{G}$ presentes em (4.83), $\boldsymbol{Z}'$ $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{M}$ são os tensores antissimétricos cujos vetores axiais são $\boldsymbol{z}'$, $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$, respectivamente e os tensores $\boldsymbol{V}$ e $\boldsymbol{V}'$ são aqueles definidos no capítulo 3, pelas equações (3.34) e (3.42).

$$\begin{aligned} \boldsymbol{L}_{uu} &= \frac{\partial \bar{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{u}} \qquad & \boldsymbol{L}_{\alpha\mathrm{u}} &= \frac{\partial\left(\boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}}\right)}{\partial \boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{L}_{u\alpha} &= \frac{\partial \bar{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \qquad & \boldsymbol{L}_{\alpha\alpha} &= \frac{\partial\left(\boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}}\right)}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \end{aligned} \tag{4.84}$$

Como pode ser observado nas equações (4.84) o tensor $\boldsymbol{L}$ depende do tipo de carregamento atuante sobre a barra. Para carregamentos conservativos, ou seja, não dependentes dos deslocamentos, os termos $\boldsymbol{L}_{uu}$, $\boldsymbol{L}_{\alpha u}$ e $\boldsymbol{L}_{u\alpha}$ se anulam sendo não nulo apenas o termo $\boldsymbol{L}_{\alpha\alpha}$. Assim, mesmo para carregamentos conservativos o operador tangente compreende uma parcela de contribuição decorrente do efeito das forças externas.

4.5.2 Formulação matricial

Cada nó de um elemento possui seis graus de liberdade, três translações e três rotações. Os deslocamentos $\boldsymbol{d}$ para toda a estrutura serão obtidos através da interpolação dos valores nodais. Os valores interpolados serão introduzidos nas expressões dos trabalhos virtuais e suas linearizações, dando origem às equações das forças residuais e à matriz de rigidez tangente. Com elas resolver-se-ão os sistemas não-lineares resultantes usando o método de Newton.

Na formulação do Método dos Elementos Finitos, interpolam-se os deslocamentos generalizados $\boldsymbol{d}$ das seções transversais de um elemento de barra utilizando a relação:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{p}, \tag{4.85}$$

onde $\boldsymbol{N} = \hat{\boldsymbol{N}}(\xi)$ é a matriz de interpolação e $\boldsymbol{p}$ é o vetor dos deslocamentos nodais generalizados do elemento, dado por

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix} \tag{4.86}$$

Os valores $\boldsymbol{p}_i$ representam os graus de liberdade do nó i e n é o número de nós do elemento.

A matriz de interpolação $\boldsymbol{N}$, no caso de elementos isoparamétricos, é composta pelas funções de forma dos n nós, ou seja, polinômios de Lagrange [100] do tipo

$$N_a = l_a^{n-1}(\xi) = \frac{(\xi-\xi_1)(\xi-\xi_2)\ldots(\xi-\xi_{a-1})(\xi-\xi_{a+1})\ldots(\xi-\xi_n)}{(\xi_a-\xi_1)(\xi_a-\xi_2)\ldots(\xi_a-\xi_{a-1})(\xi_a-\xi_{a+1})\ldots(\xi_a-\xi_n)}. \tag{4.87}$$

As funções de forma do elemento de barra com n nós podem ser expressas pela equação

$$\boldsymbol{N}_a = l_a^{n-1}\boldsymbol{I}_p = N_a\boldsymbol{I}_p, \tag{4.88}$$

onde $\boldsymbol{I}_p$ é uma matriz identidade com dimensão igual ao número de graus de liberdade por nó.

A matriz de interpolação $\boldsymbol{N}$ é dada por

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 & \dots & \boldsymbol{N}_n \\ \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 & \dots & \boldsymbol{N}_n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \boldsymbol{N}_1 & \boldsymbol{N}_2 & \dots & \boldsymbol{N}_n \end{bmatrix}. \tag{4.89}$$

As componentes da matriz $\boldsymbol{N}$ assumem os seguintes valores para elementos de barras de dois nós:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_1^1(\xi) = \frac{1}{2}(1-\xi) \quad \text{e} \\ N_2(\xi) &= l_2^1(\xi) = \frac{1}{2}(1+\xi). \end{aligned} \tag{4.90}$$

Para elementos de três nós obtém-se:

$$\begin{aligned} N_1(\xi) &= l_1^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(\xi-1), \\ N_2(\xi) &= l_2^2(\xi) = \left(1-\xi^2\right) \quad \text{e} \\ N_3(\xi) &= l_3^2(\xi) = \frac{1}{2}\xi(1+\xi). \end{aligned} \tag{4.91}$$

As coordenadas ξ são normalizadas para o intervalo $[-1,+1]$, no entanto, a coordenada utilizada na barra ζ é válida no intervalo $[0,\ell]$. Como se trata de elementos isoparamétricos, a forma de contornar este fato é imediata. No caso de elementos com dois nós, obtém-se:

$$\zeta = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 N_2 = \ell N_2(\xi) = \frac{\ell}{2}(1+\xi). \tag{4.92}$$

Desta forma, o Jacobiano da transformação de coordenadas é dado por:

$$J_\xi = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \ell \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} = \frac{\ell}{2}. \tag{4.93}$$

No caso do elemento de três nós, com o nó intermediário em uma posição qualquer $\alpha\ell$, com $0 < \alpha < \ell$ obtemos:

$$\zeta = \zeta_1 N_1 + \zeta_2 N_2 + \zeta_3 N_3 = \alpha\ell N_2(\xi) + \ell N_3(\xi). \tag{4.94}$$

Neste caso o Jacobiano será:

$$J_\xi = \frac{\partial \zeta}{\partial \xi} = \alpha\ell \frac{\partial N_2(\xi)}{\partial \xi} + \ell \frac{\partial N_3(\xi)}{\partial \xi}. \tag{4.95}$$

As derivadas dos componentes da função de forma em relação a ζ serão dadas por

$$\frac{\partial N_a}{\partial \zeta} = \frac{\partial N_a}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial \zeta} = \left(J_\xi\right)^{-1}\frac{\partial N_a}{\partial \xi}. \tag{4.96}$$

De (4.85), obtém-se:

$$\delta \boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\delta \boldsymbol{p}, \tag{4.97}$$

onde $\delta \boldsymbol{p}$ é um deslocamento virtual.

Com a utilização de (4.97) e (4.77), pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\delta W &= \int_0^\ell \left[\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}(\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{p}) - \overline{\boldsymbol{q}}\cdot(\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{p})\right]d\zeta - q^*\cdot(\boldsymbol{N}\delta\boldsymbol{p})\Big|_0^\ell = \\
&= \left(\int_0^\ell \left[(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N})^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{N}^T\overline{\boldsymbol{q}}\right]d\zeta\right)\cdot\delta\boldsymbol{p} - \left(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{q}^*\right)\Big|_0^\ell\cdot\delta\boldsymbol{p} = \\
&= \boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{p} - \left(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{q}^*\right)\Big|_0^\ell\cdot\delta\boldsymbol{p}.
\end{aligned} \tag{4.98}$$

Em (4.98), $\boldsymbol{q}^*$ é o vetor dos esforços concentrados atuantes nas extremidades do elemento e $\boldsymbol{R}$ é o vetor dos esforços nodais residuais do elemento. A condição de equilíbrio implica que:

$$\boldsymbol{R}\cdot\delta\boldsymbol{p} = \left(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{q}^*\right)\Big|_0^\ell\cdot\delta\boldsymbol{p}. \tag{4.99}$$

Daí decorre:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{R} &= \left(\boldsymbol{N}^T\boldsymbol{q}^*\right)\Big|_0^\ell \quad \therefore \\
&= \int_0^\ell \left[(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N})^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{N}^T\overline{\boldsymbol{q}}\right]d\zeta,
\end{aligned} \tag{4.100}$$

onde é necessário apenas efetuar a mudança de coordenadas nas integrações, mediante o uso do Jacobiano.

Define-se a matriz de rigidez tangente do elemento como sendo:

$$\boldsymbol{k}_T = \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{p}}. \tag{4.101}$$

Como $\boldsymbol{R}$ é conhecido de (4.100), é possível realizar a diferenciação contida em (4.101), com o que, após alguma manipulação, obtém-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{k}^T &= \int_0^\ell (\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N})^T\boldsymbol{Y}^T\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}^{\boldsymbol{T}}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N})\,d\zeta + \\
&\quad + \int_0^\ell (\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N})^T\boldsymbol{G}(\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{N})\,d\zeta + \\
&\quad - \int_0^\ell \boldsymbol{N}^T\boldsymbol{L}\boldsymbol{N}d\zeta \\
&= \boldsymbol{k}_c + \boldsymbol{k}_G - \boldsymbol{k}_L.
\end{aligned} \tag{4.102}$$

Os tensores $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{L}$ que aparecem nas integrais acima são aqueles expressos pelas equações (4.81) e (4.82), respectivamente. As parcelas $\boldsymbol{k}_C$, $\boldsymbol{k}_G$ e $\boldsymbol{k}_L$ são chamadas de contribuições constitutiva, geométrica e de carregamento na matriz de rigidez.

4.6 Resolução do sistema de equações não-lineares por meio do método de Newton

Os vetores das forças nodais residuais $\boldsymbol{R}$ e dos deslocamentos $\boldsymbol{r}$ da estrutura podem ser obtidos em função dos esforços nodais residuais dos elementos, $\boldsymbol{R}_j$ e dos vetores $\boldsymbol{p}_j$ dos deslocamentos nodais dos elementos através das relações:

$$\boldsymbol{R} = \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j^T \boldsymbol{R}_j \tag{4.103}$$

$$\boldsymbol{p}_j = \boldsymbol{A}_j \boldsymbol{r}, \tag{4.104}$$

onde $\boldsymbol{A}_j$ é a matriz de conectividade que tem a função de localizar os nós de um determinado elemento na estrutura global.

Note-se que $\boldsymbol{R}$, sendo função dos $\boldsymbol{R}_j$, é função de $\boldsymbol{p}_j$, devido a (4.99) e assim, como pode ser visto em (4.104), é uma função dos deslocamentos generalizados $\boldsymbol{r}$ da estrutura.

A estrutura estará em equilíbrio quando a resultante dos esforços residuais globais for nula, isto é, se existir um campo de deslocamentos generalizados que satisfaça:

$$\boldsymbol{R} = \boldsymbol{o} \tag{4.105}$$

A equação (4.105) resulta em um sistema de equações não-lineares, cuja solução pode ser obtida com a utilização do Método de Newton. Assim, arbitra-se uma estimativa inicial para o vetor $\boldsymbol{r}$ e a partir dela ter-se-á:

$$\boldsymbol{r}^{i+1} = \boldsymbol{r}^i - \left(\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{r}} \left(\boldsymbol{r}^i \right) \right)^{-1} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{r}^i \right) \tag{4.106}$$

Sendo $\boldsymbol{r}^i$ e $\boldsymbol{r}^{i+1}$ os deslocamentos nodais generalizados da estrutura nas iterações i e $i+1$, respectivamente. Com o uso de algumas das expressões anteriores, a derivada parcial que surge em (4.106) fica:

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial \boldsymbol{r}} &= \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j^T \boldsymbol{R}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{r}}\left(\boldsymbol{A}_j^T \boldsymbol{R}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j^T \frac{\partial \boldsymbol{R}_j}{\partial \boldsymbol{r}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j^T \frac{\partial \boldsymbol{R}_j}{\partial \boldsymbol{p}_j} \frac{\partial \boldsymbol{p}_j}{\partial \boldsymbol{r}} \\
&= \sum_{j=1}^{n} \boldsymbol{A}_j^T \boldsymbol{k}_{Tj} \boldsymbol{A}_j \\
&= \boldsymbol{K}_T,
\end{aligned}
\tag{4.107}
$$

onde $\boldsymbol{k}_{Tj}$ é a matriz de rigidez tangente do elemento j obtida pela expressão (4.102) e $\boldsymbol{K}_T$, a matriz de rigidez tangente da estrutura, ambas no sistema global. Assim, (4.106) pode ser escrita como

$$
\boldsymbol{r}^{i+1} = \boldsymbol{r}^i - \left(\boldsymbol{K}_T^i\right)^{-1} \boldsymbol{R}\left(\boldsymbol{r}^i\right). \tag{4.108}
$$

Na resolução do sistema (4.108), a matriz não é realmente invertida, mas simplesmente fatorada, por exemplo, pelo processo de Crout, que verifica se a matriz é positivo-definida. Assim, a detecção de um estado crítico é um subproduto da própria análise não-linear pelo Método de Newton.

5 MODELO LAGRANGIANO TOTAL PARA ANÁLISE DE CASCAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA COM FORMULAÇÃO DO EQUILÍBRIO USANDO O TEOREMA DOS TRABALHOS VIRTUAIS

O modelo apresentado a seguir foi proposto por Pimenta [54] e posteriormente desenvolvido por Campello et al. [16, 17]. Este modelo é cinematicamente exato e permite deformações finitas sendo concebido em uma descrição Lagrangiana pura. Ele emprega como grandezas fundamentais o gradiente da deformação e o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff, impondo sobre este o estado plano de tensões. O modelo considera as deformações por cortante, mas não admite variação da espessura da casca durante o movimento.

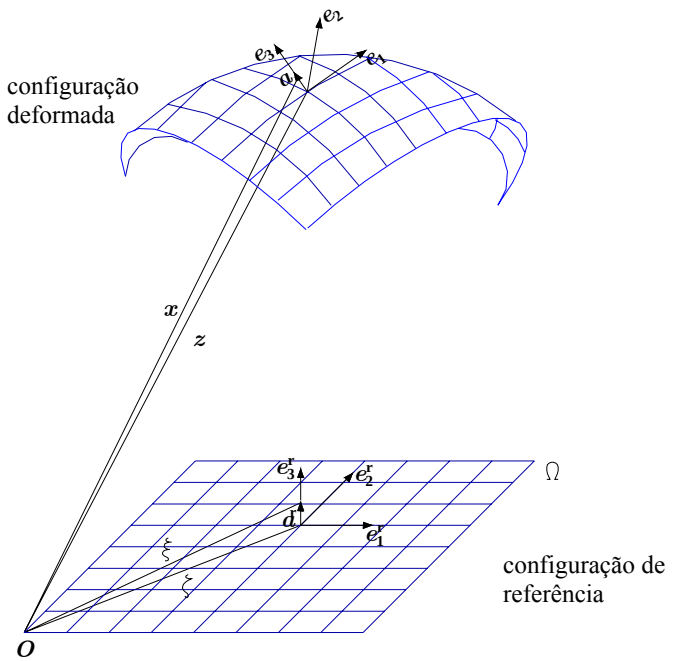


Figura 5.1 – Descrição da casca e grandezas cinemáticas fundamentais

5.1 Cinemática

O modelo foi desenvolvido para uma condição de superfície de referência plana na configuração inicial. Superfícies curvas devem ser aproximadas por sequências de superfícies

planas. Na Figura 5.1 estão representadas as grandezas cinemáticas fundamentais na formulação desenvolvida.

O plano de referência da casca é identificado por $\Omega \subset \mathbb{R}^2$. Adota-se uma base ortonormal na configuração de referência identificada por $\{\boldsymbol{e}_1^r, \boldsymbol{e}_2^r, \boldsymbol{e}_3^r\}$, sendo que as coordenadas nestas direções são $\{\xi_1,\ \xi_2,\ \zeta\}$. O versor $\boldsymbol{e}_3^r$ é normal ao plano de referência da casca Ω e os versores $\boldsymbol{e}_\alpha^r$ estão posicionados neste plano de referência.

Nesta configuração a posição de qualquer ponto material da casca é definida por um campo vetorial $\boldsymbol{\xi} = \hat{\xi}(\xi_1, \xi_2, \zeta)$ que é dado por

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{a}^r, \tag{5.1}$$

com

$$\boldsymbol{\zeta} = \xi_\varepsilon \boldsymbol{e}_\alpha^r \tag{5.2}$$

$$\boldsymbol{a}^r = \zeta \boldsymbol{e}_3^r. \tag{5.3}$$

O vetor $\boldsymbol{\zeta}$ define um ponto sobre o plano médio e $\boldsymbol{a}^r$ é o diretor da casca neste ponto. $\zeta \in \boldsymbol{H} = [-h^b, h^t]$ é a coordenada na espessura da casca, sendo que esta espessura na configuração de referência é dada por $h = h^b + h^t$.

Na configuração deformada a posição $\boldsymbol{x}$ de um ponto material qualquer pode ser expressa pelo campo vetorial

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}, \tag{5.4}$$

onde $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}}(\xi_\alpha)$ descreve a posição atual de um ponto da superfície média e $\boldsymbol{a}$ é a posição atual do diretor neste ponto, obtida a partir de

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^r. \tag{5.5}$$

Em (5.5) $\boldsymbol{Q}$ é o tensor das rotações. Cabe lembrar que de (5.5) resulta que $\|\boldsymbol{a}\| = \|\boldsymbol{a}^r\|$; portanto, não ocorre variação da espessura durante o movimento. Vale observar também que $\boldsymbol{a}$ não é necessariamente normal à superfície deformada o que, segundo [16], corresponde à hipótese clássica de Reissner e Mindlin para incorporar o cisalhamento transversal, admitido constante ao longo da seção.

Na configuração deformada adota-se uma base ortonormal $\{\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3\}$ onde $\boldsymbol{e}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_i^r$. Nesta configuração o versor $\boldsymbol{e}_3$ está alinhado com $\boldsymbol{a}$.

O tensor das rotações $\boldsymbol{Q}$ pode ser escrito em função do vetor rotação $\boldsymbol{\theta}$ por meio da fórmula de Euler, conforme [16] ou em função do vetor $\boldsymbol{\alpha}$ por meio da fórmula de Rodrigues, ou dos vetores generalizados de Rodrigues $\boldsymbol{\alpha}_n$ conforme apresentado nos capítulos 2 e 3.

Definidos $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ podemos determinar o deslocamento de um ponto qualquer da superfície de referência utilizando a expressão

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta}. \tag{5.6}$$

As componentes de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}_n$ no sistema cartesiano global constituem os seis graus de liberdade do modelo.

O gradiente da transformação, para a deformação da casca, $\boldsymbol{F}$, pode ser avaliado a partir da diferenciação de (5.4):

$$\begin{aligned}\boldsymbol{F} &= \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \zeta} \otimes \boldsymbol{e}_3^r \\ &= \left(\boldsymbol{z}_{,\alpha} + \boldsymbol{Q}_{,\alpha}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{a}\right) \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{a}' \otimes \boldsymbol{e}_3^r \\ &= \left(\boldsymbol{\eta}_\alpha + \boldsymbol{K}_\alpha \boldsymbol{a}\right) \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{Q}.\end{aligned} \tag{5.7}$$

Nas equações acima e nas que se seguirão, o índice α assume os valores 1 e 2. Adotou-se para as derivadas a convenção $(\bullet)_{,\alpha} = \partial(\bullet)/\partial\xi_\alpha$ e $(\bullet)' = \partial(\bullet)/\partial\zeta$.

$\boldsymbol{\eta}_\alpha$ e $\boldsymbol{K}_\alpha$ são entendidos como as deformações generalizadas das seções transversais e correspondem a:

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha = \boldsymbol{z}_{,\alpha} - \boldsymbol{e}_\alpha. \tag{5.8}$$

Com $\boldsymbol{z}_{,\alpha} = \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{u}_{,\alpha}$ sendo obtido de (5.6) e (5.2). As componentes de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ nas direções $\boldsymbol{e}_\beta$ representam as deformações de membrana, enquanto que a componente na direção $\boldsymbol{e}_3$ é o cisalhamento transversal.

$$\boldsymbol{K}_\alpha = \boldsymbol{Q}_{,\alpha}\boldsymbol{Q}^T. \tag{5.9}$$

$\boldsymbol{K}_\alpha$ são tensores antissimétricos que descrevem as rotações específicas do diretor e têm seus vetores axiais designados por $\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \text{axial}\left(\boldsymbol{K}_\alpha\right)$.

Pode-se demonstrar que

$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\alpha}_{,\alpha}, \tag{5.10}$$

onde $\boldsymbol{\Gamma}$ é o tensor definido no capítulo 3 e $\boldsymbol{\alpha}$ é o parâmetro utilizado para parametrizar a rotação.

De (5.8) e (5.10) podem-se obter os equivalentes retrorrotacionados de $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$:

$$\boldsymbol{\eta}_\alpha^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\eta}_\alpha = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{z}_{,\alpha} - \boldsymbol{e}_\alpha^r$$
$$\boldsymbol{\kappa}_\alpha^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\kappa}_\alpha = \Gamma^T \boldsymbol{\alpha}_{,\alpha} \tag{5.11}$$

Substituindo (5.11) em (5.7) obtém-se:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\left[\boldsymbol{I} + \left(\boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \times \boldsymbol{a}^r\right) \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right] \tag{5.12}$$

Definindo

$$\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r = \boldsymbol{\eta}_\alpha^r + \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \times \boldsymbol{a}^r, \tag{5.13}$$

obtém-se

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\left[\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right]. \tag{5.14}$$

De (5.14) também podemos escrever

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^r, \tag{5.15}$$

onde $\boldsymbol{F}^r$ é o gradiente retrorrotacionado e é dado por

$$\boldsymbol{F}^r = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r. \tag{5.16}$$

Da diferenciação de (5.14) com relação ao tempo se obtém o gradiente das velocidades:

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right), \tag{5.17}$$

onde o tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T$ representa a velocidade angular do vetor diretor e seu vetor axial é $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}(\boldsymbol{\Omega})$ e é dado por

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{5.18}$$

Para a obtenção do gradiente das velocidades $\dot{\boldsymbol{F}}$ a partir de (5.17) é necessário conhecer as derivadas $\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r$. A partir de (5.13) pode-se escrever

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r = \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r \times \boldsymbol{a}^r. \tag{5.19}$$

Em (5.19) $\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r$ e $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r$ podem ser obtidos pela diferenciação no tempo de (5.11). De $(5.11)_1$ obtém-se:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r = \boldsymbol{Q}^T\left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,\alpha} + \boldsymbol{Z}_{,\alpha}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}\right), \tag{5.20}$$

onde $\boldsymbol{Z}_{,\alpha}$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{z}_{,\alpha}$.

A obtenção de $\dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r$ requer o uso de propriedades dos tensores envolvidos e alguma manipulação algébrica, chegando-se afinal a:

$$\dot{\kappa}_\alpha^r = \boldsymbol{Q}^T\left(\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha}\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,\alpha}\right). \tag{5.21}$$

A derivada do tensor $\boldsymbol{\Gamma}$ pode ser obtida a partir das expressões apresentadas no capítulo 3.

5.2 Estática

Sejam $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{P}^r$ o primeiro tensor de Piola-Kirchhoff e seu equivalente retrorrotacionado. Eles estão relacionados pela equação:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{P}^r, \tag{5.22}$$

onde,

$$\boldsymbol{P}^r = \boldsymbol{\tau}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r. \tag{5.23}$$

Os vetores-coluna $\boldsymbol{\tau}_i^r$ são as tensões retrorrotacionadas por unidade de área da configuração de referência que atuam nos planos cujas normais são $\boldsymbol{e}_i^r$. Na configuração deformada seus equivalentes são $\boldsymbol{\tau}_i = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{\tau}_i^r$. Assumindo a hipótese de estado plano de tensões esses vetores passam a ser designados por $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r$ e $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i$, respectivamente.

Os tensores $\boldsymbol{P}$ e $\boldsymbol{F}$ são energeticamente conjugados e a potência dos esforços internos por unidade de volume de referência vale:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} &= \left[\boldsymbol{Q}\left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r\right)\right] : \left[\boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right)\right] \\ &= \boldsymbol{P} : \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \left(\tilde{\boldsymbol{\tau}}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_i^r\right) : \left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_i^r \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r\right) \\ &= \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\gamma}}_\alpha^r\end{aligned} \tag{5.24}$$

Nesta dedução foi utilizada a propriedade $\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T : \boldsymbol{\Omega} = 0$. Em virtude da hipótese do diretor com magnitude constante, não há potência associada a $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_3^r$. Com a substituição de (5.19) em (5.24) obtém-se

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \left(a^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r\right) \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r. \tag{5.25}$$

Integrando esta expressão ao longo da espessura obtém-se:

$$\int_H \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} d\zeta = \boldsymbol{n}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\eta}}_\alpha^r + \boldsymbol{m}_\alpha^r \cdot \dot{\boldsymbol{\kappa}}_\alpha^r, \tag{5.26}$$

onde

$$\boldsymbol{n}_\alpha^r = \int_H \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta \text{ e } \boldsymbol{m}_\alpha^r = \int_H \boldsymbol{a}^r \times \tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r d\zeta \tag{5.27}$$

representam as forças generalizadas retrorrotacionadas que atuam na seção transversal de normal $\boldsymbol{e}_\alpha^r$ por unidade de comprimento da configuração de referência e seus correspondentes momentos generalizados. Os esforços atuantes nas seções transversais deformadas são:

$$\boldsymbol{n}_\alpha = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{n}_\alpha^r \quad \text{e} \quad \boldsymbol{m}_\alpha = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{m}_\alpha^r. \tag{5.28}$$

Os vetores $\boldsymbol{\tau}_\alpha^r$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r$, $\boldsymbol{\gamma}_\alpha^r$, $\boldsymbol{n}_\alpha^r$, $\boldsymbol{m}_\alpha^r$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha^r$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha^r$ preenchem os requisitos de objetividade, pois não são afetados por movimentos superpostos de corpo rígido. Eles têm na base $\{\boldsymbol{e}_i^r\}$ as mesmas componentes que $\boldsymbol{\tau}_\alpha$, $\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha$, $\boldsymbol{\gamma}_\alpha$, $\boldsymbol{n}_\alpha$, $\boldsymbol{m}_\alpha$, $\boldsymbol{\eta}_\alpha$ e $\boldsymbol{\kappa}_\alpha$ na base $\{\boldsymbol{e}_i\}$.

As grandezas atuantes na seção transversal foram agrupadas nos três vetores abaixo:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^r \\ \boldsymbol{\sigma}_2^r \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^r = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^r \\ \varepsilon_2^r \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{5.29}$$

onde

$$\boldsymbol{\sigma}_\alpha^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_\alpha^r \\ \boldsymbol{m}_\alpha^r \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_\alpha^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_\alpha^r \\ \boldsymbol{\kappa}_\alpha^r \end{bmatrix}. \tag{5.30}$$

A equação (5.26) pode ser reescrita como

$$\int_H \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} d\zeta = \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\varepsilon}^r \tag{5.31}$$

e a derivada temporal $\dot{\varepsilon}^r$ é dada por

$$\dot{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \dot{\varepsilon}_1^r \\ \dot{\varepsilon}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}_1^r \\ \dot{\boldsymbol{\eta}}_2^r \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}_2^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T \left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,1} + \boldsymbol{Z}_{,1} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right) \\ \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}_{,1} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,1} \right) \\ \boldsymbol{Q}^T \left(\dot{\boldsymbol{u}}_{,2} + \boldsymbol{Z}_{,2} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right) \\ \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}_{,2} \dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_{,2} \right) \end{bmatrix}. \tag{5.32}$$

A equação (5.32) pode ser reescrita na forma compacta

$$\dot{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}, \tag{5.33}$$

onde foram introduzidos os operadores

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}, \tag{5.34}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{O}_{6\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{6\times 9} & \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{\Phi}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{,\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \tag{5.35}$$

$$\Delta = \begin{bmatrix} \Delta_1 \\ \Delta_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \Delta_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} \dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \text{ e} \tag{5.36}$$

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix} \text{ com } \boldsymbol{Y}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}. \tag{5.37}$$

Utilizando (5.31) podemos obter a potência dos esforços internos:

$$P_{\text{int}} = \int_\Omega \int_H \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} d\zeta d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\varepsilon}^r d\Omega = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} d\Omega. \tag{5.38}$$

A Potência dos esforços externos será obtida pela expressão:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega \left(\bar{\boldsymbol{t}}^t \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^t + \bar{\boldsymbol{t}}^b \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^b + \int_H \bar{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} d\zeta \right) d\Omega, \tag{5.39}$$

onde $\bar{\boldsymbol{t}}^t$ e $\bar{\boldsymbol{t}}^b$ são os vetores das forças externas distribuídas que atuam nas superfícies superior e inferior da casca por unidade de área da configuração de referência e $\bar{\boldsymbol{b}}$ é o vetor das forças externas distribuídas no volume de referência. $\dot{\boldsymbol{x}}$ é obtido a partir da diferenciação de (5.4):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}. \tag{5.40}$$

Podemos observar que $\dot{\boldsymbol{x}}^t = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}^t$ e $\dot{\boldsymbol{x}}^b = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}^b$. Substituindo sucessivamente (5.18) em (5.40) e esta em (5.39), obtém-se:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega \left(\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \dot{\boldsymbol{\alpha}} \right) d\Omega, \tag{5.41}$$

onde $\bar{\boldsymbol{n}}$ e $\bar{\boldsymbol{m}}$ são, respectivamente, as resultantes externas de forças e momentos por unidade de área da configuração de referência, podendo ser obtidas por:

$$\begin{aligned} \bar{\boldsymbol{n}} &= \bar{\boldsymbol{t}}^t + \bar{\boldsymbol{t}}^b + \int_H \bar{\boldsymbol{b}} d\zeta \quad \text{e} \\ \bar{\boldsymbol{m}} &= \boldsymbol{a}^t \times \bar{\boldsymbol{t}}^t + \boldsymbol{a}^b \times \bar{\boldsymbol{t}}^b + \int_H \boldsymbol{a} \times \bar{\boldsymbol{b}} d\zeta. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Podemos reescrever (5.41) na forma:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{d}} \; d\Omega, \tag{5.43}$$

onde foi definido:

$$\bar{\boldsymbol{q}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}} \\ \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}} \\ \bar{\boldsymbol{\mu}} \end{bmatrix}. \tag{5.44}$$

Vale enfatizar aqui, aquilo que já foi mencionado no capítulo 4 com relação ao vetor $\boldsymbol{\mu} = \boldsymbol{\Gamma}^T \bar{\boldsymbol{m}}$: obtido a partir de (5.41) ele será aqui identificado como *pseudomomento externo distribuído*, em oposição aos momentos externos atuantes $\bar{\boldsymbol{m}}$. Trata-se de $\boldsymbol{\mu}$ que está energeticamente conjugado com os parâmetros de rotação $\boldsymbol{\alpha}$ e não $\bar{\boldsymbol{m}}$ como seria esperado.

Como consequência disso, os momentos externos contribuem com a parcela geométrica do operador tangente.

5.3 Equilíbrio

Na formulação das equações de equilíbrio foi utilizado o método variacional através do Princípio dos Trabalhos Virtuais.

Admite-se que os campos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ satisfazem às condições de contorno essenciais na fronteira do plano médio da casca. Sobre o plano $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ da configuração de referência, definiu-se um campo de deslocamentos virtuais $\delta\boldsymbol{u}$ e um campo de rotações virtuais $\delta\boldsymbol{\alpha}$, com os quais foi construído o vetor $\delta\boldsymbol{d} = [\delta\boldsymbol{u} \;\; \delta\boldsymbol{\alpha}]^T$.

O trabalho virtual dos esforços internos pode ser obtido com o uso da mesma metodologia adotada para obtenção de (5.38):

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \delta\boldsymbol{d} d\Omega, \tag{5.45}$$

onde

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \delta\boldsymbol{d}. \tag{5.46}$$

O trabalho virtual dos esforços externos pode ser obtido com o uso da mesma metodologia adotada para obtenção de (5.41):

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{d} d\Omega. \tag{5.47}$$

O equilíbrio estático da casca com condições de contorno essenciais nas fronteiras pode ser formulado na forma fraca por meio do teorema dos trabalhos virtuais:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = 0, \;\; \forall \delta\boldsymbol{d} \,|\, \delta\boldsymbol{d} = \boldsymbol{o} \text{ em } \Gamma, \tag{5.48}$$

sendo Γ a fronteira de Ω. Substituindo (5.45) e (5.47) em (5.48) obtém-se

$$\begin{aligned} \delta W &= \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta\boldsymbol{\varepsilon}^r d\Omega - \int_{\Omega} \overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{d} d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{n}_{\alpha}^r \cdot \boldsymbol{Q}^T \left(\delta\boldsymbol{u}_{,\alpha} + \boldsymbol{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \delta\boldsymbol{\alpha} \right) + \boldsymbol{m}_{\alpha}^r \cdot \boldsymbol{Q}^T \left(\boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha} \delta\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\Gamma} \delta\boldsymbol{\alpha}_{,\alpha} \right) \right] d\Omega + \\ &- \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\boldsymbol{u} + \boldsymbol{\Gamma}^T \overline{\boldsymbol{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\alpha} \right) d\Omega = 0. \end{aligned} \tag{5.49}$$

Realizando integração por partes nos termos com $\delta\boldsymbol{u}_{,\alpha}$ e $(\boldsymbol{\Gamma}\delta\boldsymbol{\alpha})_{,\alpha}$ a partir do lema fundamental do cálculo variacional são obtidas as equações locais de equilíbrio:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n}_{\alpha,\alpha} + \overline{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{o} \;\text{ e} \\ &\boldsymbol{m}_{\alpha,\alpha} + \boldsymbol{z}_{,\alpha} \times \boldsymbol{n}_{\alpha} + \overline{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{o}. \end{aligned} \tag{5.50}$$

Em (5.48) δW pode ser entendido como um funcional dos campos $\boldsymbol{d}$ e $\delta\boldsymbol{d}$, sendo linear para $\delta\boldsymbol{d}$. A derivada de Gateaux em $\boldsymbol{d}$, segundo uma variação admissível $\delta^*\boldsymbol{d}$ pertencente ao mesmo espaço de $\delta\boldsymbol{d}$, após alguma manipulação algébrica resulta no operador tangente:

$$\begin{aligned}\delta^*(\delta W) = &\int_\Omega \left(\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\delta^*\boldsymbol{d}\right)d\Omega + \\ &+\int_\Omega (\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d})\cdot\left(\boldsymbol{G}\boldsymbol{\Delta}\delta^*\boldsymbol{d}\right)d\Omega - \int_\Omega \left(\delta\boldsymbol{d}\cdot\boldsymbol{L}\delta^*\boldsymbol{d}\right)d\Omega.\end{aligned} \tag{5.51}$$

Dentre os novos tensores que surgem, $\boldsymbol{D}$ representa a parcela puramente constitutiva do operador tangente.

$$\boldsymbol{D} = \frac{\partial\boldsymbol{\sigma}^r}{\partial\boldsymbol{\varepsilon}^r} = \begin{bmatrix} \frac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial\boldsymbol{n}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \\ \frac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial\boldsymbol{m}_1^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \\ \frac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial\boldsymbol{n}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \\ \frac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_1^r} & \frac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_2^r} & \frac{\partial\boldsymbol{m}_2^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_2^r} \end{bmatrix}. \tag{5.52}$$

Para completa definição de $\boldsymbol{D}$, em [16], Campello introduz os tensores tangentes

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial\tilde{\boldsymbol{\tau}}_\alpha^r}{\partial\boldsymbol{\gamma}_\beta^r} \tag{5.53}$$

e com a ajuda das derivadas

$$\frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_\gamma^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_\beta^r} = \delta_{\gamma\beta}\boldsymbol{I} \quad \text{e} \quad \frac{\partial\boldsymbol{\gamma}_\gamma^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_\beta^r} = -\delta_{\gamma\beta}\boldsymbol{A}^r, \tag{5.54}$$

onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o símbolo de Kronecker e $\boldsymbol{A}^r$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{a}$, as submatrizes de $\boldsymbol{D}$ podem ser computadas conforme abaixo:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial\boldsymbol{n}_\alpha^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_\beta^r} = \int_H \tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r d\zeta, && \frac{\partial\boldsymbol{n}_\alpha^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_\beta^r} = -\int_H \tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r\boldsymbol{A}^r d\zeta, \\ &\frac{\partial\boldsymbol{m}_\alpha^r}{\partial\boldsymbol{\eta}_\beta^r} = \int_H \boldsymbol{A}^r\tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r d\zeta \quad \text{e} && \frac{\partial\boldsymbol{m}_\alpha^r}{\partial\boldsymbol{\kappa}_\beta^r} = -\int_H \boldsymbol{A}^r\tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r\boldsymbol{A}^r d\zeta. \end{aligned} \tag{5.55}$$

O tensor $\boldsymbol{G}$ caracteriza os efeitos geométricos dos esforços internos e é sempre simétrico, mesmo para campos $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ que não correspondem ao equilíbrio. Suas submatrizes foram apresentadas pela primeira vez em [54], onde podem ser obtidas.

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{G}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{G}_\beta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_\beta^{u'\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_\beta^{\alpha'\alpha} \\ \boldsymbol{G}_\beta^{\alpha u'} & \boldsymbol{G}_\beta^{\alpha\alpha'} & \boldsymbol{G}_\beta^{\alpha\alpha} \end{bmatrix}. \tag{5.56}$$

O tensor $\boldsymbol{L}$ caracteriza os efeitos geométricos dos esforços externos no operador tangente e suas submatrizes são dependentes do caráter dos esforços externos.

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{n}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \\ \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial \overline{\boldsymbol{\mu}}}{\partial \boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{5.57}$$

O operador tangente (5.51) é uma forma bilinear de $\delta \boldsymbol{d}$ e $\delta^* \boldsymbol{d}$. Para que este operador seja simétrico é necessário que $\boldsymbol{D} = \boldsymbol{D}^T$ e $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}^T$. A primeira igualdade é verdadeira sempre que a lei constitutiva presumir a existência de um potencial, o que ocorre no caso de materiais hiperelásticos ou elastoplásticos com leis associativas. A segunda igualdade é verdadeira se o carregamento externo for localmente conservativo.

5.4 Equação constitutiva

Embora o modelo de casca aqui descrito tenha uma formulação geral que se aplica a qualquer tipo de equação constitutiva, na implementação realizada trabalhou-se apenas com o material elástico isótropo neo-Hookiano, portanto é este tipo de equação constitutiva que se abordará aqui. Segundo [16], este modelo foi sugerido por Ciarlet, sendo, entretanto, geralmente atribuído a Simo e Hughes.

Este material tem sua energia de deformação definida por:

$$\psi\left(I_1, J\right) = \frac{1}{2}\lambda\left[\frac{1}{2}\left(J^2 - 1\right) - \ln J\right] + \frac{1}{2}\mu\left(I_1 - 3 - 2\ln J\right). \tag{5.58}$$

A dedução completa pode ser encontrada em [16]. A imposição do estado plano de tensões permite obter:

$$\left(1 + \gamma_{33}\right)^2 = \frac{\lambda + 2\mu}{\lambda \overline{J}^2 + 2\mu}, \tag{5.59}$$

o que significa que a deformação γ_{33} da espessura é dada por

$$\gamma_{33} = \sqrt{\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda \overline{J}^2 + 2\mu}} - 1. \tag{5.60}$$

As tensões retrorrotacionadas de Piola-Kirchhoff são fornecidas por:

$$\tau_\alpha^r = \left[\frac{1}{2}\lambda\left(J^2-1\right)-\mu\right]\frac{1}{\bar{J}}\boldsymbol{g}_\alpha^r + \mu\boldsymbol{f}_\alpha^r \tag{5.61}$$

e as tensões $\tilde{\tau}_\alpha^r$ são fornecidas pela expressão:

$$\tilde{\tau}_\alpha^r = \varphi\left(\bar{J}\right)\boldsymbol{g}_\alpha^r + \mu\boldsymbol{f}_\alpha^r \tag{5.62}$$

onde

$$\varphi\left(\bar{J}\right) = \left[\frac{1}{2}\lambda\left(J^2-1\right)-\mu\right]\frac{1}{\bar{J}} = -\mu\frac{\lambda+2\mu}{\lambda\bar{J}^3+2\mu\bar{J}}. \tag{5.63}$$

A condição de tensão normal nula na direção da espessura possibilita obter uma equação não linear em γ_{33}. Pode-se encontrar para esta deformação um valor que permite que ela seja eliminada de forma consistente da cinemática da casca, o que conduz à obtenção dos tensores tangentes:

$$\tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r = \boldsymbol{C}_{\alpha\beta}^r - \frac{1}{c^r}\boldsymbol{c}_\alpha^r \otimes \boldsymbol{c}_\beta^r \tag{5.64}$$

onde:

$$\boldsymbol{C}_{\alpha\beta}^r = \frac{\partial\tau_\alpha^r}{\partial\gamma_\beta^r} \qquad \boldsymbol{c}_\alpha^r = \frac{\partial\tau_\alpha^r}{\partial\gamma_{33}} = \frac{\partial\tau_{33}}{\partial\gamma_\alpha^r} \quad \text{e} \quad c^r = \frac{\partial\tau_{33}}{\partial\gamma_{33}} \tag{5.65}$$

Conhecendo τ_α^r por (5.61) é possível computar as grandezas de (5.65) com as quais se obtém os tensores tangentes $\tilde{\boldsymbol{C}}_{\alpha\beta}^r$ por meio de (5.64).

5.5 Aplicação em elementos finitos

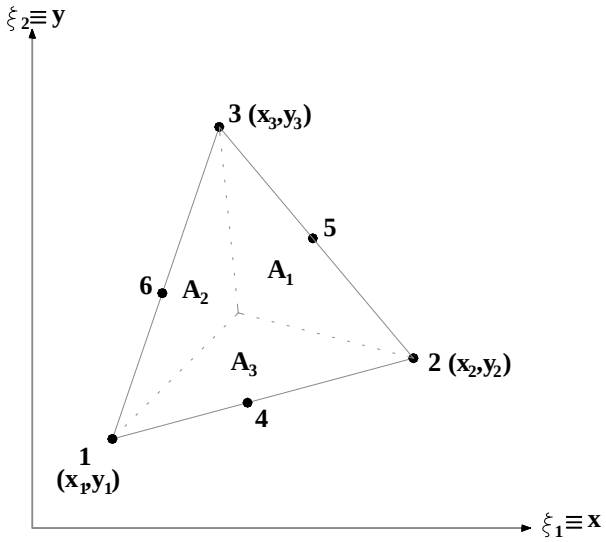


Figura 5.2 – Elemento triangular de seis nós

O elemento de casca que foi utilizado para a aplicação das parametrizações para as rotações propostas nesta tese foi o elemento denominado T6-3i apresentado em [17]. Este elemento tem forma triangular e possui seis nós, dos quais três situados nos vértices do triângulo e três situados nos pontos médios dos lados do triângulo. Os nós situados nos lados possuem seis graus de liberdade, sendo três graus de liberdade de translação e três graus de liberdade de rotação. Os nós situados nos vértices possuem apenas os graus de liberdade relativos à translação. Conforme enfatizado por Campello [16], a ausência dos graus de liberdade relativos à rotação nos vértices faz com que o elemento T6-3i seja incompatível em relação ao campo de rotações. Entretanto, como em sua construção não foi utilizado nenhum outro recurso do Método dos Elementos Finitos, como interpolação mista ou híbrida dos campos de tensão e deformação, ele é um elemento puro de deslocamentos, daí decorrendo que tem garantidas todas as propriedades de convergência e estabilidade. O travamento numérico não é observado, pois a incompatibilidade de $\boldsymbol{\alpha}$ e a interpolação quadrática de $\boldsymbol{u}$ o tornam suficientemente flexível.

A numeração dos nós é feita conforme indicado na figura 5.2. Assim, os vetores dos graus de liberdade $\boldsymbol{p}_i$ $(i = 1,...,6)$ do nó i são definidos por:

$$\boldsymbol{p}_i = \boldsymbol{u}_i \text{ se } i = 1,2,3 \text{ ou } \boldsymbol{p}_i = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{u}_i \\ \boldsymbol{\alpha}_i \end{Bmatrix} \text{ se } i = 4,5,6. \tag{5.66}$$

A interpolação de $\boldsymbol{u}$ no interior do elemento foi feita usando funções quadráticas completas e $\boldsymbol{\alpha}$ é interpolado linearmente a partir dos três nós intermediários.

O vetor que agrupa os graus de liberdade do elemento é:

$$p = \begin{Bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_6 \end{Bmatrix}, \tag{5.67}$$

assim, os campos de deslocamentos e de rotações em seu interior são obtidos por:

$$\boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\boldsymbol{p}, \tag{5.68}$$

$\boldsymbol{N}$ é a matriz de interpolação, cuja obtenção pode ser encontrada em [16] e que apresenta a configuração:

$$\boldsymbol{N} = \begin{bmatrix} N_1^u\boldsymbol{I} & N_2^u\boldsymbol{I} & N_3^u\boldsymbol{I} & N_4^u\boldsymbol{I} & O & N_5^u\boldsymbol{I} & O & N_6^u\boldsymbol{I} & O \\ O & O & O & O & N_4^\alpha\boldsymbol{I} & O & N_5^\alpha\boldsymbol{I} & O & N_6^\alpha\boldsymbol{I} \end{bmatrix}. \tag{5.69}$$

Substituindo (5.68) nas expressões dos trabalhos virtuais obtém-se o vetor dos esforços nodais desbalanceados:

$$P_e = \int_{\Omega_e} \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{N} \right)^T \boldsymbol{\sigma}^r - \boldsymbol{N}^T \overline{\boldsymbol{q}} \right] d\Omega, \tag{5.70}$$

com Ω_e representando o domínio do elemento. Da diferenciação de (5.70) em relação a $\boldsymbol{p}$ obtém-se a matriz de rigidez:

$$\boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega_e} \left[\left(\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{N} \right)^T \boldsymbol{D} \left(\boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{N} \right) + \left(\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{N} \right)^{\mathrm{T}} \boldsymbol{G} \left(\boldsymbol{\Delta} \boldsymbol{N} \right) - \boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L} \boldsymbol{N} \right] d\Omega. \tag{5.71}$$

Como não existe nenhuma rigidez associada à rotação do diretor em torno do seu próprio eixo, o que é típico dos modelos de cascas, foi adotado localmente na equação constitutiva um valor fictício Eh^3 (E é o módulo de elasticidade do material e h é a espessura da casca) somente para evitar que K_e resulte singular. Este valor, da mesma ordem de grandeza da rigidez à flexão, garante o bom condicionamento das matrizes, segundo Chroscielewski, apud [16].

O vetor dos esforços desbalanceados e a matriz de rigidez são calculados com três pontos de integração sobre Ω_e, situados nos meios dos lados e coincidentes com os nós *4, 5* e *6*. Segundo [16] este esquema foi proposto por Cowper e permite a integração de funções quadráticas completas de maneira exata em um domínio triangular. A integração ao longo da espessura é feita com três pontos de Gauss [84].

6 MODELOS LAGRANGIANOS TOTAIS PARA ANÁLISE DE BARRAS E CASCAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA COM FORMULAÇÃO DO EQULÍBRIO USANDO O TEOREMA DAS POTÊNCIAS VIRTUAIS

Os modelos de barras e cascas apresentados nos capítulos anteriores tiveram suas formas fracas construídas a partir do Teorema dos Trabalhos Virtuais. Com o objetivo de melhor avaliar o desempenho das várias parametrizações das rotações estudadas, quando da aplicação com diferentes tipos de matrizes de rigidez e formulações cinemáticas, utilizou-se também o Teorema das Potências Virtuais para construir as formas fracas do equilíbrio.

Em [59] foi apresentado um algoritmo desenvolvido para análise dinâmica que constrói a forma fraca com a projeção não-ortogonal correspondente à aplicação do Teorema das Potências Virtuais, em um modelo do tipo Lagrangiano atualizado, utilizando a parametrização de Rodrigues para tratamento das rotações. A formulação aqui apresentada se distingue daquela por compreender apenas as barras e cascas em um regime de solicitações quase estático em uma formulação cinemática Lagrangiana total.

6.1 Modelo de barras

6.1.1 Cinemática

O modelo admitido para análise de barras foi aquele proposto por Pimenta [53] e já apresentado no capítulo 4. A hipótese cinemática fundamental é que as seções transversais ortogonais ao eixo da barra na configuração de referência permaneçam planas e indeformáveis durante o movimento.

A Figura 6.1 mostra o sistema de representação utilizado. Como já mencionado anteriormente, quando da apresentação do modelo no Capítulo 4, os pontos da barra podem ser descritos vetorialmente por:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{a}^{r}, \tag{6.1}$$

onde

$$\boldsymbol{\zeta} = \zeta \boldsymbol{e}_3^r, \;\; \zeta \in [0,\ell], \tag{6.2}$$

descreve a posição dos pontos do eixo e

$$\boldsymbol{a}^r = \boldsymbol{x}_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r, \tag{6.3}$$

descreve a posição dos demais pontos da seção transversal em relação ao eixo.

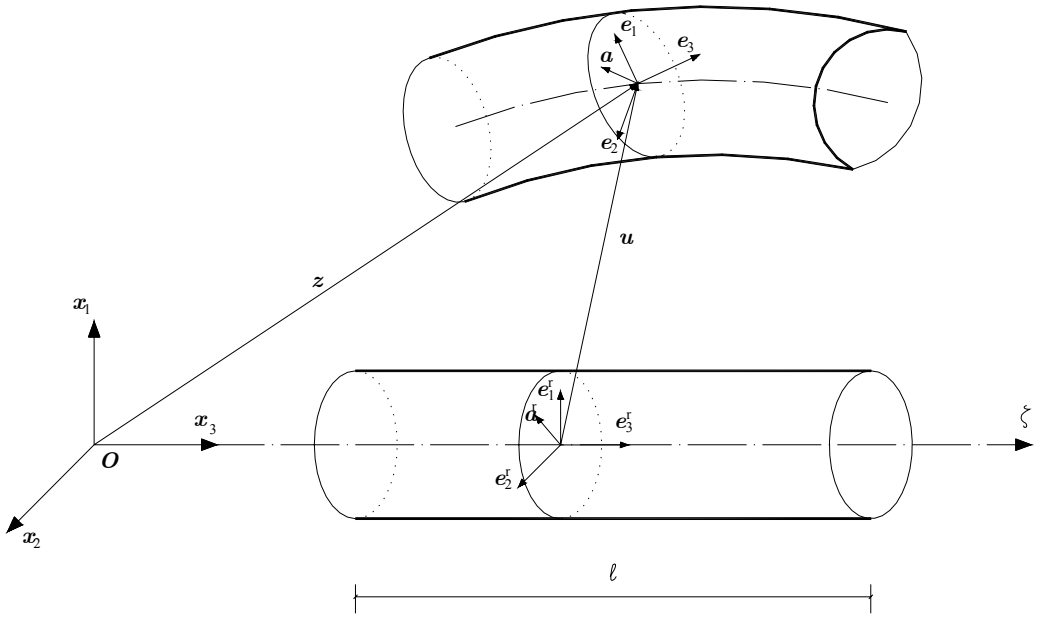


Figura 6.1 – Descrição da barra e grandezas cinemáticas fundamentais

Após a deformação, $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}}(\boldsymbol{\zeta}, t)$ que descreve a nova posição dos pontos do eixo da barra, será obtido por:

$$\boldsymbol{z} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{\zeta} \;. \tag{6.4}$$

Os demais pontos da barra serão descritos por uma nova função vetorial $\boldsymbol{x} = \hat{\boldsymbol{x}}(\boldsymbol{\xi}, t)$ dada por

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}, \tag{6.5}$$

onde $\boldsymbol{a} = \hat{\boldsymbol{a}}(\boldsymbol{\xi}, t)$ descreve a posição dos demais pontos da seção em relação ao eixo móvel e é obtido por:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^r, \text{ sendo que} \\ &\boldsymbol{a}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{6.6}$$

O vetor dos deslocamentos de um ponto do eixo da barra $(\boldsymbol{u})$ será determinado por:

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta}. \tag{6.7}$$

O vetor dos deslocamentos dos pontos da barra situados fora do eixo será expresso por

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}. \tag{6.8}$$

A velocidade de um ponto qualquer da barra será dada pela diferenciação de seu deslocamento no tempo. Assim, de (6.8) se obtém:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{\delta}} &= (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{\xi}) = \dot{\boldsymbol{x}} \\ &= \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{a}. \end{aligned} \tag{6.9}$$

onde, $\boldsymbol{\Omega}$ é definido por

$$\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T. \tag{6.10}$$

Como $\boldsymbol{\Omega}$ tem por vetor axial $\boldsymbol{\omega}$, o vetor das velocidades angulares, $\dot{\boldsymbol{\delta}}$ pode ser escrito como

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}. \tag{6.11}$$

Da equação (3.22), sabemos que

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}. \tag{6.12}$$

Logo, a velocidade de um ponto da barra pode ser expressa também por:

$$\dot{\boldsymbol{\delta}} = \dot{\boldsymbol{u}} + (\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}) \times \boldsymbol{a}. \tag{6.13}$$

Identificaremos por $\boldsymbol{F}$ o gradiente da transformação, para a deformação da barra, com relação a ξ, o qual será avaliado pela diferenciação de (6.5) em relação a ξ.

$$\boldsymbol{F} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} \otimes \boldsymbol{e}_\alpha^r + \boldsymbol{x}' \otimes \boldsymbol{e}_3^r \tag{6.14}$$

Efetuando as diferenciações acima, obtemos:

$$\frac{\partial \boldsymbol{x}}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial (\boldsymbol{z} + \boldsymbol{a})}{\partial \xi_\alpha} = \frac{\partial (\boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^r)}{\partial \xi_\alpha} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{e}_\alpha^r = \boldsymbol{e}_\alpha \tag{6.15}$$

$$\boldsymbol{x}' = \boldsymbol{z}' + \boldsymbol{a}' = \boldsymbol{z}' + \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{a}^r = \boldsymbol{z}' + \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{a}. \tag{6.16}$$

Utilizando a definição de:

$$\boldsymbol{K} = \boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}^T, \tag{6.17}$$

onde $\boldsymbol{K}$ é um tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{\kappa}$ e fazendo uso do vetor das deformações $\boldsymbol{\eta}$ dado por:

$$\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{z}' - \boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{u}' + \boldsymbol{e}_3^r - \boldsymbol{e}_3, \tag{6.18}$$

podemos, utilizando as variáveis definidas pelas equações (6.17) e (6.18), após alguma manipulação algébrica obter o gradiente da transformação na forma expressa pela equação (6.19):

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q} + (\boldsymbol{\eta} + \boldsymbol{\kappa} \times \boldsymbol{a}) \otimes \boldsymbol{e}_3^r. \tag{6.19}$$

Fazendo uso dos vetores:

$$\boldsymbol{\eta}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\eta} \quad \text{e}$$
$$\boldsymbol{\kappa}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\kappa}, \tag{6.20}$$

podemos reescrever (6.19) como:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\left\{\boldsymbol{I} + \left[\boldsymbol{\eta}^r + (\boldsymbol{\kappa}^r \times \boldsymbol{a}^r)\right] \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right\}. \tag{6.21}$$

Definindo $\boldsymbol{\gamma}_3^r$ como o vetor das deformações em um ponto qualquer da seção transversal, a ser expresso por:

$$\boldsymbol{\gamma}_3^r = \boldsymbol{\eta}^r + \boldsymbol{\kappa}^r \times \boldsymbol{a}^r, \tag{6.22}$$

podemos reescrever (6.21) como:

$$\boldsymbol{F} = \boldsymbol{Q}\left\{\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_3^r \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right\} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{F}^r \tag{6.23}$$

$$\boldsymbol{F}^r = \boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}^r \otimes \boldsymbol{e}_3^r. \tag{6.24}$$

Em (6.24), $\boldsymbol{F}^r$ é chamado gradiente da transformação retrorrotacionado.

O gradiente da velocidade é dado pela diferenciação de (6.23) no tempo e será expresso por:

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{Q}\left(\boldsymbol{I} + \boldsymbol{\gamma}_3^r \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right) + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\boldsymbol{\gamma}}_3^r \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right), \tag{6.25}$$

o qual, após alguma manipulação pode ser escrito:

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left[\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r\right) \otimes \boldsymbol{e}_3^r\right]. \tag{6.26}$$

Mas,

$$\boldsymbol{\eta}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\eta} = \boldsymbol{Q}^T(\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{e}_3) = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{e}_3 = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{z}' - \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{e}_3^r. \tag{6.27}$$

Sua derivada em relação ao tempo será dada por:

$$\dot{\boldsymbol{\eta}}^r = \boldsymbol{Q}^T\left(-\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{z}' + \dot{\boldsymbol{u}}'\right). \tag{6.28}$$

A derivada de $\boldsymbol{\kappa}^r$ será obtida da derivação de $(6.20)_2$ no tempo, a qual fornece:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r = \dot{\boldsymbol{Q}}^T\boldsymbol{\kappa} + \boldsymbol{Q}^T\dot{\boldsymbol{\kappa}}. \tag{6.29}$$

Com o uso das variáveis envolvidas, bem como de suas derivadas, pode-se obter, finalmente, para $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r$ a expressão:

$$\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r = \boldsymbol{Q}^T\boldsymbol{\omega}' = \boldsymbol{Q}^T\left(\boldsymbol{\Gamma}'\dot{\boldsymbol{\alpha}} + \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}'\right). \tag{6.30}$$

O vetor das deformações generalizadas da barra foi definido como:

$$\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^r \\ \boldsymbol{\kappa}^r \end{bmatrix} \tag{6.31}$$

e o vetor dos deslocamentos generalizados como

$$\boldsymbol{d} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{6.32}$$

A partir de (6.31), com a substituição de (6.28) e (6.30), pode-se escrever:

$$\dot{\varepsilon}^{r} = \boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}, \tag{6.33}$$

onde $\boldsymbol{\Lambda}$, $\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{Y}$ e $\boldsymbol{\Delta}$ são os operadores definidos por:

$$\boldsymbol{\Lambda} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}, \quad \boldsymbol{\Phi} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}' \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \tag{6.34}$$

$$\boldsymbol{\Delta} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{Y} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Gamma}' \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} \tag{6.35}$$

Em (6.34) $\boldsymbol{Z}'$ é o tensor antissimétrico cujo vetor axial é $\boldsymbol{z}'$. Nesta formulação é interessante trabalhar também com um vetor que inclua as velocidades $\boldsymbol{v}$, o qual será definido por:

$$\boldsymbol{v} \doteq \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}, \tag{6.36}$$

o qual está relacionado com o vetor $\boldsymbol{d}$, pela relação:

$$\boldsymbol{\Delta v} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}. \tag{6.37}$$

6.1.2. Estática

6.1.2.1 Tensões

Como na formulação utilizando o Teorema dos Trabalhos Virtuais, também aqui se utilizou o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff que é energeticamente conjugado com o gradiente das velocidades $\dot{\boldsymbol{F}}$. Este tensor, $\boldsymbol{P}$, é não-simétrico e pode ser representado por:

$$\boldsymbol{P} = \boldsymbol{t}_{\alpha} \otimes \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r} + \boldsymbol{\tau} \otimes \boldsymbol{e}_{3}^{r} \tag{6.38}$$

A integração de $\boldsymbol{\tau}$ na área da seção transversal na configuração de referência fornece as forças e momentos internos atuantes na seção transversal:

$$\boldsymbol{n} = \int_A \boldsymbol{\tau} dA \text{ e}$$
$$\boldsymbol{m} = \int_A (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{\tau}) dA. \tag{6.39}$$

Seus equivalentes retrorrotacionados são:

$$\boldsymbol{n}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{n} = \int_A \boldsymbol{\tau}^r dA \text{ e}$$
$$\boldsymbol{m}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{m} = \int_A (\boldsymbol{a}^r \times \boldsymbol{\tau}^r) dA. \tag{6.40}$$

Desta forma, podemos definir o vetor dos esforços generalizados atuantes em uma seção como:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{m} \end{bmatrix}. \tag{6.41}$$

e o vetor dos esforços generalizados de uma seção, relativos à configuração de referência, como:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}^r \\ \boldsymbol{m}^r \end{bmatrix}. \tag{6.42}$$

De (6.42), com o auxílio de $(6.34)_1$ e (6.40) temos que:

$$\boldsymbol{\sigma}^r = \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\sigma} \text{ e } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^r. \tag{6.43}$$

6.1.2.2 Potência dos Esforços Internos

Como já foi visto no capítulo 4, na equação (4.38), a potência interna de uma barra é dada por:

$$P_{\text{int}} = \int_0^\ell \int_A \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} dA \, d\zeta, \tag{6.44}$$

onde A é a área da seção transversal e $\boldsymbol{P}$ é o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff. Com a substituição de (6.26), o integrando de (6.44) fica:

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{P} : \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{F} + \boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q} \left[\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r \right) \otimes \boldsymbol{e}_3^r \right]. \tag{6.45}$$

Mas,

$$\boldsymbol{P} : \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{P} \boldsymbol{F}^T : \boldsymbol{\Omega}. \tag{6.46}$$

Como $\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T$ é simétrico,

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{F}^T : \boldsymbol{\Omega} = 0. \tag{6.47}$$

Com o auxílio da definição de operador transposto, a partir de (6.45) obtemos

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{P} : \boldsymbol{Q} \left[\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r \right) \otimes \boldsymbol{e}_3^r \right] = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{P} : \left[\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r \right) \otimes \boldsymbol{e}_3^r \right] \tag{6.48}$$

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \left(\boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\tau}\right).\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r\right). \tag{6.49}$$

A partir da expressão acima puderam ser definidos os vetores:

$$\boldsymbol{t}_\alpha^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{t}_\alpha = t_{\beta\alpha} \boldsymbol{e}_\beta^r + t_{3\alpha} \boldsymbol{e}_3^r \tag{6.50}$$

$$\boldsymbol{\tau}^r = \boldsymbol{Q}^T \boldsymbol{\tau} = \tau_\alpha \boldsymbol{e}_\alpha^r + \sigma \boldsymbol{e}_3^r. \tag{6.51}$$

A igualdade de (6.49) pode ser escrita

$$\boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\tau}^r.\left(\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \times \boldsymbol{a}^r\right). \tag{6.52}$$

Substituindo (6.52) em (6.44), após algumas manipulações a expressão da potência dos esforços internos resulta

$$P_{\text{int}} = \int_0^\ell \left(\boldsymbol{n}^r.\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \boldsymbol{m}^r.\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r\right) d\zeta. \tag{6.53}$$

Com a ajuda de (6.31), (6.42) e (6.33), podemos escrever a potência dos esforços internos como

$$P_{\text{int}} = \int_0^\ell \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \dot{\varepsilon}^r d\zeta = \int_0^\ell \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} d\zeta.$$

(6.54)

6.1.2.3. Potência dos Esforços Externos

Conforme visto em (4.50), a potência dos esforços externos em uma barra de comprimento ℓ será dada por

$$P_{\text{ext}} = \int_0^\ell \left[\int_C \overline{\boldsymbol{t}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dC + \int_A \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{\delta}} dA\right] d\zeta, \tag{6.55}$$

sendo que $\overline{\boldsymbol{t}}$ é o vetor das forças superficiais externas atuantes no contorno "C" da seção transversal na configuração deformada por unidade de área da configuração de referência e $\overline{\boldsymbol{b}}$ é o vetor das forças de volume externas na configuração deformada por unidade de volume da configuração de referência atuantes na barra.

Substituindo (6.11) em (6.55), após algumas manipulações, obtém-se

$$P_{\text{ext}} = \int_0^\ell \left[\int_C \overline{\boldsymbol{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{m}} \cdot \left(\boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\alpha}}\right)\right] d\zeta. \tag{6.56}$$

Os termos $\overline{\boldsymbol{n}}$ e $\overline{\boldsymbol{m}}$ que aparecem acima são dados por

$$\bar{\boldsymbol{n}} = \int_C \bar{\boldsymbol{t}} dC + \int_A \bar{\boldsymbol{b}} dA$$
$$\bar{\boldsymbol{m}} = \int_C \boldsymbol{a} \times \bar{\boldsymbol{t}} dC + \int_A \boldsymbol{a} \times \bar{\boldsymbol{b}} dA. \tag{6.57}$$

e caracterizam as forças e momentos externos atuantes ao longo da barra, por unidade de comprimento de referência. Com eles é definido o vetor dos esforços generalizados externos atuantes ao longo da barra:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}} \\ \bar{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix}. \tag{6.58}$$

Utilizando o vetor $\boldsymbol{v}$, definido em (6.36) é possível reescrever (6.56) de forma compacta como:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}) d\Omega. \tag{6.59}$$

A equação (6.59) trata das forças externas distribuídas ao longo da barra. As forças aplicadas na extremidade também podem ser incluídas, como em [59], através da consideração do vetor $\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\Gamma$, definido como:

$$\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\Gamma = \begin{bmatrix} \bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma \\ \bar{\boldsymbol{m}}^\Gamma \end{bmatrix}, \tag{6.60}$$

onde $\bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma$ representa as forças externas concentradas e $\bar{\boldsymbol{m}}^\Gamma$ os momentos externos concentrados atuantes nas extremidades da barra. Neste caso obteremos para P_{ext} a expressão:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega (\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}) d\Omega + \bar{\boldsymbol{\sigma}}^\Gamma \cdot \boldsymbol{v}\big|_\Gamma. \tag{6.61}$$

6.1.3 Equilíbrio e condições de contorno

O equilíbrio de um sólido deformável pode ser estabelecido a partir das Leis de Euler. Se este sólido está em um processo quase estático, temos:

$$\boldsymbol{f}^{\text{ext}} = \boldsymbol{o} \text{ e } \boldsymbol{m}^{\text{ext}} = \boldsymbol{o}, \tag{6.62}$$

onde $\boldsymbol{f}^{\text{ext}}$ representa a resultante das forças externas e $\boldsymbol{m}^{\text{ext}}$ a resultante dos momentos externos. De posse dos esforços externos definidos por (6.57) e (6.60), podemos escrever:

$$\boldsymbol{f}^{\text{ext}} = \int_\Omega \bar{\boldsymbol{n}} d\Omega + \left(\bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma\right)\big|_\Gamma = \boldsymbol{o} \quad \text{e}$$
$$\boldsymbol{m}^{\text{ext}} = \int_\Omega (\boldsymbol{z} \times \bar{\boldsymbol{n}} + \bar{\boldsymbol{m}}) d\Omega + \left(\boldsymbol{z} \times \bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma\right)\big|_\Gamma + \left(\bar{\boldsymbol{m}}^\Gamma\right)\big|_\Gamma = \boldsymbol{o}. \tag{6.63}$$

A integração por partes de $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$, definidos em (6.39), na seção transversal fornece:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{n}' d\Omega = (\boldsymbol{n})|_{\Gamma}, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{m}' d\Omega = (\boldsymbol{m})|_{\Gamma} \quad \text{e}$$
$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{n})' \, d\Omega = \int_{\Omega} (\boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{n}') \, d\Omega = (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{n})|_{\Gamma}, \tag{6.64}$$

o que nos permite escrever:

$$\int_{\Omega} \boldsymbol{n}' d\Omega - (\boldsymbol{n})|_{\Gamma} = 0, \quad \int_{\Omega} \boldsymbol{m}' d\Omega - (\boldsymbol{m})|_{\Gamma} = 0 \quad \text{e}$$
$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n} + \boldsymbol{z} \times \boldsymbol{n}') \, d\Omega - (\boldsymbol{z} \times \boldsymbol{n})|_{\Gamma} = 0. \tag{6.65}$$

Adicionando (6.65) em (6.63), temos:

$$\int_{\Omega} (\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}}) \, d\Omega + (\bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma} - \boldsymbol{n})\big|_{\Gamma} = \boldsymbol{o} \quad \text{e}$$
$$\int_{\Omega} \left[(\boldsymbol{z} \times (\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}}) + (\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}}) \right] d\Omega \tag{6.66}$$
$$+ \left[\boldsymbol{z} \times (\bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma} - \boldsymbol{n}) \right]\big|_{\Gamma} + (\bar{\boldsymbol{m}}^{\Gamma} - \boldsymbol{m})\big|_{\Gamma} = \boldsymbol{o}.$$

A partir de (6.66) podemos concluir que:

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{n}' + \bar{\boldsymbol{n}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } \Omega \\ &\bar{\boldsymbol{n}}^{\Gamma} = \boldsymbol{n} \quad \text{em } \Gamma \\ &\boldsymbol{m}' + \boldsymbol{z}' \times \boldsymbol{n} + \bar{\boldsymbol{m}} = \boldsymbol{o} \quad \text{em } \Omega \\ &\bar{\boldsymbol{m}}^{\Gamma} = \boldsymbol{m} \quad \text{em } \Gamma. \end{aligned} \tag{6.67}$$

As equações $(6.67)_1$ e $(6.67)_3$ são as equações locais do equilíbrio da barra, conforme obtidas anteriormente nas equações (4.67). As equações $(6.67)_2$ e $(6.67)_4$ constituem as condições de contorno naturais do problema.

O Teorema das Potências afirma que, a cada instante, em um sólido deformável é válida a igualdade

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}} + \dot{T}. \tag{6.68}$$

Em um processo quase estático, a energia cinética e sua variação podem ser desprezadas. Neste caso, tem-se

$$P_{\text{ext}} = P_{\text{int}}. \tag{6.69}$$

De maneira análoga, o Teorema das Potências Virtuais nos permite formular o equilíbrio de uma barra como:

$$\delta P_{\text{int}} - \delta P_{\text{ext}} = 0, \quad \forall \delta \boldsymbol{v}. \tag{6.70}$$

Para o modelo de barras, de posse das expressões (6.53) e (6.56), que fornecem os valores das potências dos esforços internos e externos, bem como das expressões (6.28) e

(6.30), que fornecem os valores de $\dot{\boldsymbol{\eta}}^r$ e $\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r$, por analogia, podemos obter as expressões das potências virtuais dos esforços internos e externos:

$$\begin{aligned}\delta P_{\text{int}} &= \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{n}^r.\delta\dot{\boldsymbol{\eta}}^r + \boldsymbol{m}^r.\delta\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r\right) d\Omega = \\ &= \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{n}.\left(\delta\dot{\boldsymbol{u}}' + \boldsymbol{z}' \times \delta\boldsymbol{\omega}\right) + \boldsymbol{m}.\delta\boldsymbol{\omega}'\right) d\Omega\end{aligned} \tag{6.71}$$

$$\delta P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} (\bar{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{u}} + \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}) d\Omega. \tag{6.72}$$

De posse destas expressões, podemos formular o equilíbrio de uma barra usando o Teorema das Potências Virtuais:

$$\begin{aligned}\delta P &= \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{n} \cdot \left(\delta\dot{\boldsymbol{u}}' + \boldsymbol{z}' \times \delta\boldsymbol{\omega}\right) - \bar{\boldsymbol{n}} \cdot \delta\dot{\boldsymbol{u}}\right] d\Omega + \\ &+ \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{m} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}' - \bar{\boldsymbol{m}} \cdot \delta\boldsymbol{\omega}\right] d\Omega = 0, \ \forall \delta\dot{\boldsymbol{u}}, \ \delta\boldsymbol{\omega}.\end{aligned} \tag{6.73}$$

A forma fraca das equações de equilíbrio pode ser escrita de uma forma mais compacta como:

$$\delta P = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{v}) d\Omega = 0, \ \forall \delta\boldsymbol{v}. \tag{6.74}$$

A inclusão dos esforços atuantes nas extremidades da barra nos conduziria a:

$$\delta P = \int_{\Omega} (\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{v}) d\Omega - \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Gamma} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \ \forall \delta\boldsymbol{v}. \tag{6.75}$$

Utilizando a equação $(6.43)_2$, podemos reescrever (6.75) como:

$$\delta P = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right) d\Omega - \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Gamma} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \ \forall \delta\boldsymbol{v} \tag{6.76}$$

ou

$$\delta P = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right) d\Omega - \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Gamma} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \ \forall \delta\boldsymbol{v}. \tag{6.77}$$

Em (6.76) e (6.77), os tensores $\boldsymbol{\Lambda}$ e $\boldsymbol{\Phi}$ são aqueles fornecidos por (6.34) e o operador $\boldsymbol{\Delta}$ é aquele fornecido por $(6.35)_1$.

O operador tangente das equações de equilíbrio será dado pela derivada de Fréchet de (6.77), a qual pode ser obtida por derivação em relação a um escalar qualquer, por exemplo, o tempo. Assim, teremos:

$$\delta\dot{P} = \int_{\Omega} \left(\dot{\overline{\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{\sigma}^r}} \cdot \boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} - \dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right) d\Omega - \left(\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{\Gamma} \cdot \delta\boldsymbol{v}\right)\Big|_{\Gamma} = 0, \tag{6.78}$$

onde

$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}} \cdot \delta \boldsymbol{v} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial \boldsymbol{d}} \dot{\boldsymbol{d}} \cdot \delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{L} \dot{\boldsymbol{d}} \cdot \delta \boldsymbol{v},$$
$$\dot{\bar{\boldsymbol{\sigma}}}^{\Gamma} \cdot \delta \boldsymbol{v} = \frac{\partial \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Gamma}}{\partial \boldsymbol{d}} \dot{\boldsymbol{d}} \cdot \delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{L}^{\Gamma} \dot{\boldsymbol{d}} \cdot \delta \boldsymbol{v} \quad \text{e} \tag{6.79}$$

$$\dot{\overline{\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^r}} = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r + \dot{\overline{\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}}} \boldsymbol{\sigma}^r \tag{6.80}$$

sendo que,

$$\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} \frac{\partial \boldsymbol{\sigma}^r}{\partial \varepsilon^r} \dot{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{D}^r \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} \quad \text{e} \tag{6.81}$$

$$\dot{\overline{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}\right)}} \boldsymbol{\sigma}^r = \left(\dot{\boldsymbol{\Phi}}^T \boldsymbol{\Lambda} + \boldsymbol{\Phi}^T \dot{\boldsymbol{\Lambda}}\right) \boldsymbol{\sigma}^r. \tag{6.82}$$

Temos que:

$$\dot{\boldsymbol{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{Q}} \end{bmatrix} \text{ e } \dot{\boldsymbol{\Phi}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{Z}}' \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}. \tag{6.83}$$

Logo,

$$\dot{\overline{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}\right)}} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{Q}} \\ \dot{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\left(\boldsymbol{Z}' \dot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{Z}}' \boldsymbol{Q}\right) \end{bmatrix}. \tag{6.84}$$

Substituindo (6.84) em (6.82) vamos obter

$$\dot{\overline{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}\right)}} \boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{Q}} \\ \dot{\boldsymbol{Q}} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & -\left(\boldsymbol{Z}' \dot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{Z}}' \boldsymbol{Q}\right) \end{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{n}^r \\ \dot{\boldsymbol{Q}} \boldsymbol{m}^r \\ -\left(\boldsymbol{Z}' \dot{\boldsymbol{Q}} + \dot{\boldsymbol{Z}}' \boldsymbol{Q}\right) \boldsymbol{n}^r \end{bmatrix} \tag{6.85}$$

Mas,

$$\dot{\boldsymbol{Q}} = \Omega \boldsymbol{Q}. \tag{6.86}$$

Assim, obtemos:

$$\dot{\overline{\left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda}\right)}} \boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{n}^r \\ \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{m}^r \\ -\left(\boldsymbol{Z}' \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{Q} \boldsymbol{n}^r + \dot{\boldsymbol{Z}}' \boldsymbol{Q} \boldsymbol{n}^r\right) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{m} \\ -\left(\boldsymbol{Z}' \boldsymbol{\Omega} \boldsymbol{n} + \dot{\boldsymbol{Z}}' \boldsymbol{n}\right) \end{bmatrix} \tag{6.87}$$

$$\dot{\overline{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Lambda}\right)}}\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n} \\ \boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{m} \\ -\boldsymbol{z}'\times(\boldsymbol{\omega}\times\boldsymbol{n})-\dot{\boldsymbol{z}}'\times\boldsymbol{n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{m}\times\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{n}\times\dot{\boldsymbol{u}}'+\boldsymbol{Z}'(\boldsymbol{n}\times\boldsymbol{\omega}) \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} -\boldsymbol{N}\boldsymbol{\omega} \\ -\boldsymbol{M}\boldsymbol{\omega} \\ \boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{u}}'+\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{N}\boldsymbol{\omega} \end{bmatrix},$$

(6.88)

onde $\boldsymbol{N}$ e $\boldsymbol{M}$ são os tensores antissimétricos cujos vetores axiais são $\boldsymbol{n}$ e $\boldsymbol{m}$, respectivamente. Substituindo (6.12) em (6.88), obtemos:

$$\dot{\overline{\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Lambda}\right)}}\boldsymbol{\sigma}^r = \begin{bmatrix} -\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ -\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \\ \boldsymbol{N}\dot{\boldsymbol{u}}'+\boldsymbol{Z}'\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} = \boldsymbol{G}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}, \tag{6.89}$$

Com $\boldsymbol{G}$ sendo definido como:

$$\boldsymbol{G} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{M}\boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{N} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}'\boldsymbol{N}\boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}. \tag{6.90}$$

Com a substituição em (6.78) de (6.79), (6.81) e (6.89), esta assume a forma:

$$\begin{aligned} \delta\dot{P} &= \int_\Omega \left[\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}\right)\cdot\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} + \left(G\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}\right)\cdot\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v}\right]d\Omega + \\ &-\int_\Omega \left[\left(\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{d}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{v}\right]d\Omega - \left(\boldsymbol{L}^\Gamma\cdot\dot{\boldsymbol{d}}\right)\cdot\delta\boldsymbol{v}\Big|_\Gamma \end{aligned} \tag{6.91}$$

e, por similaridade, podemos obter:

$$\begin{aligned} \delta(\delta P) &= \int_\Omega \left[\left(\boldsymbol{\Phi}^T\boldsymbol{\Lambda}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}^T\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} + \left(G\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v}\right]d\Omega + \\ &-\int_\Omega \left[\left(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\delta\boldsymbol{v}\right]d\Omega - \left(\boldsymbol{L}^\Gamma\cdot\delta\boldsymbol{d}\right)\cdot\delta\boldsymbol{v}\Big|_\Gamma . \end{aligned} \tag{6.92}$$

Os tensores $\boldsymbol{L}$ e $\boldsymbol{L}^\Gamma$, que caracterizam os efeitos geométricos dos esforços externos, e suas submatrizes componentes são dependentes do caráter dos esforços externos e poderão ser obtidos de:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}}{\partial\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{n}}}{\partial\boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{n}}}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \\ \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{m}}}{\partial\boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{m}}}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{L}^\Gamma = \frac{\partial\bar{\boldsymbol{\sigma}}^\Gamma}{\partial\boldsymbol{d}} = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma}{\partial\boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{n}}^\Gamma}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \\ \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{m}}^\Gamma}{\partial\boldsymbol{u}} & \dfrac{\partial\bar{\boldsymbol{m}}^\Gamma}{\partial\boldsymbol{\alpha}} \end{bmatrix}. \tag{6.93}$$

A observação de (6.90) e (6.92) nos permite concluir que, mesmo na ausência de esforços externos não conservativos, a rigidez tangente não é simétrica.

6.2 Modelo de casca

6.2.1 Cinemática

O modelo utilizado foi aquele apresentado por Pimenta [54] e desenvolvido em [16,17,58]. A Figura 6.2 apresenta as grandezas cinemáticas fundamentais. Conforme já discutido no Capítulo 5, na configuração de referência a posição de qualquer ponto material da casca é definida por um campo vetorial $\xi = \hat{\xi}(\xi_1, \xi_2, \zeta)$ que é dado por:

$$\boldsymbol{\xi} = \boldsymbol{\zeta} + \boldsymbol{a}^r. \tag{6.94}$$

O vetor ζ define um ponto no plano médio e $\boldsymbol{a}^r$ é o vetor diretor da casca neste ponto.

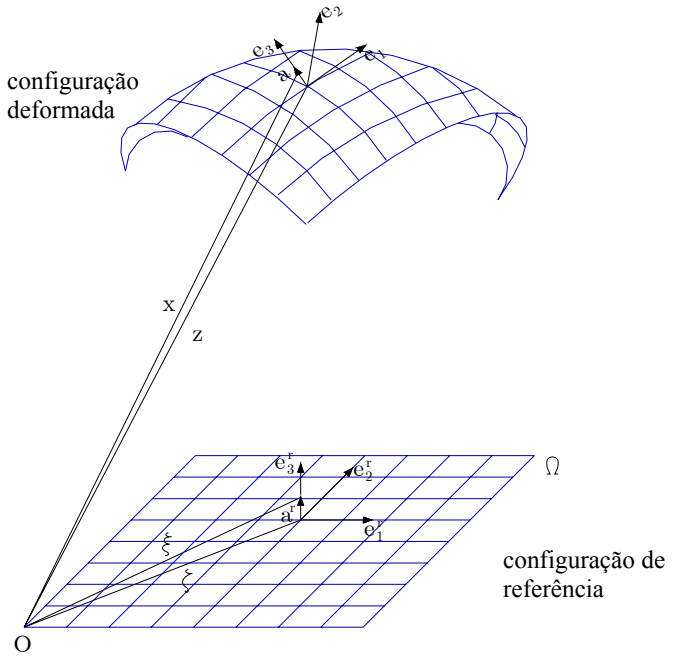


Figura 6.2 – Descrição da casca e grandezas cinemáticas fundamentais

Na configuração deformada a posição $\boldsymbol{x}$ de um ponto material qualquer será expressa pelo campo vetorial

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{z} + \boldsymbol{a}, \tag{6.95}$$

onde $\boldsymbol{z} = \hat{\boldsymbol{z}}(\xi_\alpha)$ descreve a posição atual de um ponto da superfície média e $\boldsymbol{a}$ representa o diretor neste ponto, obtido a partir de

$$\boldsymbol{a} = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{a}^{r}. \tag{6.96}$$

Definidos $\boldsymbol{z}$ e $\boldsymbol{\zeta}$ podemos determinar o deslocamento de um ponto qualquer da superfície média utilizando a expressão

$$\boldsymbol{u} = \boldsymbol{z} - \boldsymbol{\zeta}. \tag{6.97}$$

As componentes de $\boldsymbol{u}$ e $\boldsymbol{\alpha}$ no sistema cartesiano global constituem os seis graus de liberdade do modelo. $\boldsymbol{\alpha}$ é o parâmetro utilizado para parametrizar a rotação (parâmetro de Euler, parâmetro de Rodrigues ou parâmetro generalizado de Rodrigues, conforme discutido no capítulo 3).

O gradiente da transformação, para a deformação da casca, $\boldsymbol{F}$, pode ser avaliado a partir da diferenciação de (6.95), valendo:

$$\boldsymbol{F} = \left(\boldsymbol{\eta}_{\alpha} + \boldsymbol{K}_{\alpha}\boldsymbol{a}\right) \otimes \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r} + \boldsymbol{Q}. \tag{6.98}$$

$\boldsymbol{\eta}_{\alpha}$ e $\boldsymbol{K}_{\alpha}$ são entendidos como as deformações generalizadas das seções transversais e correspondem a:

$$\boldsymbol{\eta}_{\alpha} = \boldsymbol{z}_{,\alpha} - \boldsymbol{e}_{\alpha}, \tag{6.99}$$

com $\boldsymbol{z}_{,\alpha} = \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r} + \boldsymbol{u}_{,\alpha}$ sendo obtido de (6.97).

Assumindo que

$$\boldsymbol{K}_{\alpha} = \boldsymbol{Q}_{,\alpha}\boldsymbol{Q}^{T}, \tag{6.100}$$

em $\boldsymbol{K}_{\alpha}$ tensores antissimétricos descrevem as rotações específicas do diretor e têm seus vetores axiais designados por $\boldsymbol{\kappa}_{\alpha} = \text{axial}\left(\boldsymbol{K}_{\alpha}\right)$.

Pode-se demonstrar que

$$\boldsymbol{\kappa}_{\alpha} = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\alpha}_{,\alpha}, \tag{6.101}$$

onde $\boldsymbol{\Gamma}$ é o tensor definido no capítulo 3.

Da diferenciação de (6.98) com relação ao tempo se obtém o gradiente das velocidades:

$$\dot{\boldsymbol{F}} = \boldsymbol{\Omega}\boldsymbol{F} + \boldsymbol{Q}\left(\dot{\gamma}_{\alpha}^{r} \otimes \boldsymbol{e}_{\alpha}^{r}\right), \tag{6.102}$$

onde o tensor antissimétrico $\boldsymbol{\Omega} = \dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^{T}$ representa a velocidade angular do vetor diretor. O vetor axial de $\boldsymbol{\Omega}$ é $\boldsymbol{\omega} = \text{axial}\left(\boldsymbol{\Omega}\right)$ e é dado por

$$\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{6.103}$$

6.2.2. Estática

6.2.2.1 Tensões

Como no modelo de barras, também aqui se trabalhou com o primeiro tensor das tensões de Piola-Kirchhoff, energeticamente conjugado com o gradiente da velocidade, $\boldsymbol{F}$.

6.2.2.2 Potências dos esforços internos e externos

Procedendo de maneira semelhante àquela apresentada no Capítulo 5, é obtida a expressão da potência dos esforços internos:

$$P_{\text{int}} = \int_{\Omega}\int_{H} \boldsymbol{P} : \dot{\boldsymbol{F}} d\zeta d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \dot{\varepsilon}^{r} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}} d\Omega,$$

(6.104)

onde,

$$\boldsymbol{\sigma}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_1^{r} \\ \boldsymbol{\sigma}_2^{r} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon^{r} = \begin{bmatrix} \varepsilon_1^{r} \\ \varepsilon_2^{r} \end{bmatrix} \text{ e } d = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u} \\ \boldsymbol{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{6.105}$$

$$\boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_{\alpha}^{r} \\ \boldsymbol{m}_{\alpha}^{r} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon_{\alpha}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}_{\alpha}^{r} \\ \boldsymbol{\kappa}_{\alpha}^{r} \end{bmatrix}. \tag{6.106}$$

e os tensores

$$\boldsymbol{\Lambda} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q} \end{bmatrix}, \tag{6.107}$$

$$\boldsymbol{\Phi} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_1 & \boldsymbol{O}_{6\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{6\times 9} & \boldsymbol{\Phi}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{\Phi}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{,\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}. \tag{6.108}$$

O operador $\boldsymbol{\Delta}$ é definido por:

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_1 \\ \boldsymbol{\Delta}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{\Delta}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial \zeta_\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \tag{6.109}$$

e

$$\boldsymbol{Y} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_1 & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{Y}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{Y}_\alpha = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} & \boldsymbol{\Gamma}_{,\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix} \tag{6.110}$$

Para este modelo é válido:

$$\boldsymbol{\Delta v} = \boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}, \tag{6.111}$$

com $\boldsymbol{\Delta}$ e $\boldsymbol{Y}$ assumindo a forma apresentada em (6.109) e (6.110).

Considerando (6.111), (6.104) poderá ser escrita como:

$$P_{\text{int}} = \int_\Omega \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}^T \boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{\Delta v} d\Omega, \tag{6.112}$$

A Potência dos esforços externos será obtida pela expressão:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega \left(\overline{\boldsymbol{t}}^t \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^t + \overline{\boldsymbol{t}}^b \cdot \dot{\boldsymbol{x}}^b + \int_H \overline{\boldsymbol{b}} \cdot \dot{\boldsymbol{x}} d\zeta \right) d\Omega. \tag{6.113}$$

$\dot{\boldsymbol{x}}$ é obtido a partir da diferenciação de (6.95):

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \dot{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{a}. \tag{6.114}$$

Procedendo à substituição das variáveis presentes em (6.113), obtém-se:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega (\overline{\boldsymbol{n}} \cdot \dot{\boldsymbol{u}} + \overline{\boldsymbol{m}} \cdot \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}}) d\Omega, \tag{6.115}$$

onde $\overline{\boldsymbol{n}}$ e $\overline{\boldsymbol{m}}$ são, respectivamente, as resultantes externas de forças e momentos por unidade de área da configuração de referência. Podemos reescrever (6.115) na forma:

$$P_{\text{ext}} = \int_\Omega \overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v} \; d\Omega, \tag{6.116}$$

onde foi definido:

$$\overline{\boldsymbol{\sigma}} = \begin{bmatrix} \overline{\boldsymbol{n}} \\ \overline{\boldsymbol{m}} \end{bmatrix} \qquad \text{e} \qquad \boldsymbol{v} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}} \\ \boldsymbol{\omega} \end{bmatrix}. \tag{6.117}$$

6.2.3 Equilíbrio

Para o modelo de cascas, a forma fraca que corresponde à obtenção do equilíbrio a partir do Teorema das Potências Virtuais pode ser escrita de uma forma compacta como segue:

$$\delta P = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{v} \right) \delta \Omega = 0, \ \forall \delta \boldsymbol{v}. \tag{6.118}$$

O operador tangente das equações de equilíbrio é dado pela derivada de Fréchet de (6.118), a qual pode ser obtida por derivação em relação ao tempo. Procedendo de forma semelhante à realizada com o modelo de barras o resultado obtido é:

$$\begin{aligned} \delta(\delta P) = & \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda}^{T} \boldsymbol{\Phi} \boldsymbol{Y} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d} \right) + \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(G \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d} \right) \right] \delta \Omega + \\ & - \int_{\Omega} \left[\delta \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{L} \delta \boldsymbol{d} \right) \right] \delta \Omega \end{aligned} \tag{6.119}$$

No modelo de cascas, em (6.119) o tensor $\boldsymbol{G}$ assume a forma:

$$\boldsymbol{G} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{G}_2 \end{bmatrix}, \qquad \text{com} \qquad \boldsymbol{G}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{N}_{\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{M}_{\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \\ \boldsymbol{N}_{\alpha} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{,\alpha} \boldsymbol{N}_{\alpha} \boldsymbol{\Gamma} \end{bmatrix}.$$

(6.120)

Da mesma maneira que no caso do modelo de barras, também para o modelo de cascas o operador tangente não é simétrico.

6.3 Aplicação em elementos finitos

Na formulação em elementos finitos interpolam-se os vetores $\boldsymbol{d}$ e $\boldsymbol{v}$ dos pontos das seções transversais de um elemento, utilizando as relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d} &= \boldsymbol{N} \boldsymbol{p} \\ \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{N} \boldsymbol{p}, \end{aligned} \tag{6.121}$$

onde $\boldsymbol{N}$ é a matriz de interpolação e $\boldsymbol{p}$ é o vetor dos deslocamentos nodais generalizados do elemento, dado por:

$$\boldsymbol{p} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{p}_1 \\ \boldsymbol{p}_2 \\ \vdots \\ \boldsymbol{p}_n \end{bmatrix}. \tag{6.122}$$

Sendo n o número de nós do elemento. A partir de (6.121) podem ser obtidos:

$$\delta \boldsymbol{v} = \boldsymbol{N}\delta \boldsymbol{p}$$
$$\delta \boldsymbol{d} = \boldsymbol{N}\delta \boldsymbol{p}. \tag{6.123}$$

Para o modelo de barras, introduzindo (6.123) em (6.74) obtém-se o vetor das forças residuais do elemento, expresso por:

$$R = \int_{\Omega} \left[(\boldsymbol{\Delta N})^T \boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\sigma}^r - \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}} \right] d\Omega - \boldsymbol{N}^T \bar{\boldsymbol{\sigma}}^{\Gamma} \Big|_{\Gamma} . \tag{6.124}$$

A matriz de rigidez do elemento será obtida da derivação de (6.124) em relação a $\boldsymbol{p}$, a qual pode ser obtida pela substituição de (6.121) em (6.92):

$$K_e = \int_{\Omega} \left[(\boldsymbol{\Delta N})^T \left(\boldsymbol{\Phi}^T \boldsymbol{\Lambda D \Lambda}^T \boldsymbol{\Phi Y d} \right) (\boldsymbol{\Delta N}) + (\boldsymbol{\Delta N})^T \boldsymbol{G} (\boldsymbol{\Delta N}) \right] d\Omega + \left(\boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L N} \right). \tag{6.125}$$

Os tensores $\boldsymbol{G}$ e $\boldsymbol{L}$ que aparecem em (6.125) são aqueles expressos pelas equações (6.90) e (6.93), respectivamente. Para o modelo de cascas a matriz de rigidez apresenta-se de forma semelhante, sendo que o tensor $\boldsymbol{G}$ é definido pela equação (6.120). A referência [16] apresenta as submatrizes do tensor $\boldsymbol{L}$ para alguns tipos de carregamentos externos.

6.4 Comparações entre formas fracas

A comparação entre a formulação do equilíbrio usando o Teorema dos Trabalhos Virtuais e o Teorema das Potências Virtuais pode ser feita pela comparação das matrizes de rigidez obtidas quando da aplicação das duas formas fracas decorrentes do estabelecimento do equilíbrio com estes dois Teoremas. A simples inspeção destas matrizes evidencia as principais diferenças existentes entre as duas formulações. A formulação derivada do Teorema dos Trabalhos Virtuais (equações (4.79) para o modelo de barras e (5.51) para o modelo de cascas) tem a simplicidade de apresentar uma matriz de rigidez simétrica. Entretanto, esta matriz apresenta um maior número de submatrizes não nulas, as quais são mais complexas, com seus elementos compostos de expressões grandes, envolvendo grande número de operações. A formulação derivada do Teorema das Potências Virtuais (equações (6.92) para modelo de barras e (6.119) para modelo de cascas) resulta em uma matriz não-simétrica, entretanto, esta matriz possui maior número de submatrizes nulas e as submatrizes não nulas são bem mais simples, com expressões que não incluem derivadas de $\boldsymbol{\Gamma}$.

O campo de deslocamentos correspondente a uma configuração de equilíbrio estático de um sólido conservativo é um ponto estacionário da energia potencial [52]. O princípio da conservação da energia leva a concluir que a matriz de rigidez oriunda da formulação do equilíbrio com o Teorema dos Trabalhos Virtuais corresponde à segunda derivada da energia

potencial. Desta forma, a verificação da estabilidade nesta formulação pode ser feita pela simples verificação do caráter positivo-definido desta matriz de rigidez. Ou seja, a formulação derivada do Teorema dos Trabalhos Virtuais permite a fácil verificação da estabilidade durante o próprio processo de solução. Na formulação oriunda do teorema das Potências Virtuais a verificação da estabilidade mostra-se bem mais complexa. Por outro lado, esta formulação apresenta um tratamento bastante eficiente dos momentos externos, principalmente quando se trabalha com a parametrização de Rodrigues.

7 MODELOS LAGRANGIANOS ATUALIZADOS PARA ANÁLISE ESTÁTICA DE BARRAS E CASCAS SOB NÃO-LINEARIDADE GEOMÉTRICA

Os modelos apresentados nos capítulos anteriores caracterizam-se por uma formulação cinemática Lagrangiana total. Este tipo de formulação, ao nos obrigar a trabalhar com as rotações em sua integralidade, faz com que o uso da parametrização utilizada fique limitado a seu intervalo de aplicação sem singularidades. Com vistas a superar esta limitação, ampliando o campo de aplicação de todas as parametrizações estudadas, foram introduzidas algumas modificações nos modelos apresentados anteriormente nos capítulos 4 e 5. Estas modificações consistiram em alterações na expressão de algumas variáveis, fazendo-as funções dos seus valores no incremento anterior, ou seja, a formulação deixou de ser puramente Lagrangiana, passando a ser Lagrangiana atualizada. O processo de atualização será descrito a seguir.

Admitiu-se um intervalo de tempo arbitrário (t_i, t_{i+1}), para o qual foi adotada a notação $(\cdot)(t_i) = (\cdot)_i$ e $(\cdot)(t_{i+1}) = (\cdot)_{i+1}$. Admitiu-se que são conhecidas todas as variáveis no tempo t_i, como resultado da solução do incremento anterior e todas as variáveis no tempo t_{i+1} serão obtidas a partir dos seus valores neste incremento imediatamente anterior, não mais a partir da configuração inicial.

O tensor rotação no tempo t_{i+1}, que denominaremos $\boldsymbol{Q}_{i+1}$ é obtido por:

$$\boldsymbol{Q}_{i+1} = \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_i, \tag{7.1}$$

onde $\boldsymbol{Q}_{\Delta}$ é o tensor que representa a rotação entre os intervalos de tempo identificados por t_i e t_{i+1} e $\boldsymbol{Q}_i$ é o tensor rotação no tempo t_i.

Se

$$\boldsymbol{\kappa} = \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'\boldsymbol{Q}^T\right) = \boldsymbol{\Gamma}\boldsymbol{\alpha}', \tag{7.2}$$

então nós podemos escrever:

$$\boldsymbol{\kappa}_{i+1} = \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_{i+1}\boldsymbol{Q}^T_{i+1}\right). \tag{7.3}$$

Mas, de (7.1) temos que

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{Q}^T_{i+1} = \boldsymbol{Q}^T_i\boldsymbol{Q}^T_{\Delta} \quad \text{e} \\ &\boldsymbol{Q}'_{i+1} = \boldsymbol{Q}'_{\Delta}\boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}'_i. \end{aligned} \tag{7.4}$$

Assim,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}_{i+1} &= \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_{i+1}\boldsymbol{Q}^T_{i+1}\right) = \text{axial}\left[\left(\boldsymbol{Q}'_{\Delta}\boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}'_i\right)\left(\boldsymbol{Q}^T_i\boldsymbol{Q}^T_{\Delta}\right)\right] = \\ &= \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_{\Delta}\boldsymbol{Q}^T_{\Delta} + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}'_i\boldsymbol{Q}^T_i\boldsymbol{Q}^T_{\Delta}\right) = \\ &= \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_{\Delta}\boldsymbol{Q}^T_{\Delta}\right) + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_i\boldsymbol{Q}^T_i\right).\end{aligned} \tag{7.5}$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_{\Delta}\boldsymbol{Q}^T_{\Delta}\right) = \boldsymbol{\kappa}_{\Delta} = \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}'_{\Delta} \quad \text{e} \\ &\text{axial}\left(\boldsymbol{Q}'_i\boldsymbol{Q}^T_i\right) = \boldsymbol{\kappa}_i\end{aligned} \tag{7.6}$$

Assim, de $(7.5)_3$ nós podemos obter:

$$\boldsymbol{k}_{i+1} = \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}'_{\Delta} + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{k}_i \tag{7.7}$$

e ainda

$$\boldsymbol{k}^r_{i+1} = \boldsymbol{Q}^T_{i+1}\boldsymbol{k}_{i+1} = \boldsymbol{Q}^T_{i+1}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}'_{\Delta} + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{k}_i\right) = \boldsymbol{Q}^T_i\boldsymbol{\Gamma}^T_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}'_{\Delta} + \boldsymbol{k}^r_i. \tag{7.8}$$

A curvatura no tempo t_{i+1} pode ser obtida unicamente a partir da curvatura no intervalo t_i e do incremento do ângulo $\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}$, com o auxílio dos tensores a ele relacionados.

Da mesma forma, se nós temos o vetor das velocidades angulares:

$$\boldsymbol{\omega} = \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}\boldsymbol{Q}^T\right) = \boldsymbol{\Gamma}\dot{\boldsymbol{\alpha}} \tag{7.9}$$

Nós podemos escrever:

$$\boldsymbol{\omega}_{i+1} = \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\boldsymbol{Q}^T_{i+1}\right). \tag{7.10}$$

Como $\boldsymbol{Q}_i$ é constante para o incremento de tempo t_{i+1}, de (7.1) nós podemos obter:

$$\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1} = \dot{\boldsymbol{Q}}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_i \tag{7.11}$$

Introduzindo $(7.4)_1$ e (7.11) em (7.10), encontramos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\omega}_{i+1} &= \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_i\boldsymbol{Q}^T_i\boldsymbol{Q}^T_{\Delta}\right) = \text{axial}\left(\dot{\boldsymbol{Q}}_{\Delta}\boldsymbol{Q}^T_{\Delta}\right) = \\ &= \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta}\end{aligned} \tag{7.12}$$

7.1 Modelo de barras

A hipótese fundamental permanece a mesma: a seção transversal permanece indeformada durante o movimento da barra, podendo apenas girar como um corpo rígido. Permanecem também a referência reta na configuração inicial e o sistema de eixos locais ortonormais de referência na configuração inicial $\left\{\boldsymbol{e}^r_1, \boldsymbol{e}^r_2, \boldsymbol{e}^r_3\right\}$, com o vetor $\boldsymbol{e}^r_3$ situado na

direção do eixo da barra e os eixos $\boldsymbol{e}_{\alpha}^{r}$ definindo o plano da seção transversal. A Figura 7.1 mostra as variáveis.

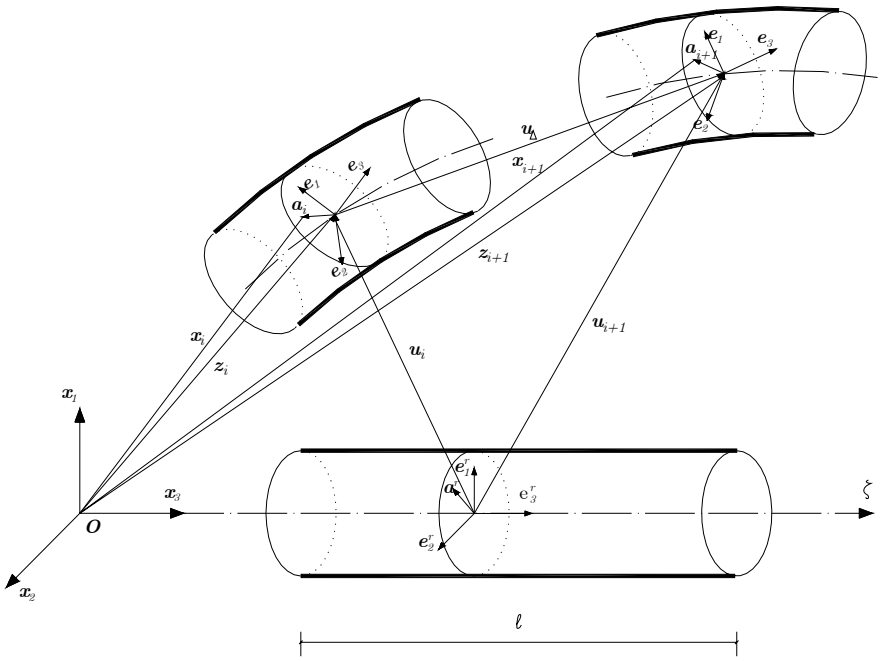


Figura 7.1- Modelo de barras atualizado

A posição dos pontos sobre o eixo da barra é dada por:

$$\boldsymbol{z}_{i+1} = \boldsymbol{z}_i + \boldsymbol{u}_{\Delta}. \tag{7.13}$$

Os demais pontos da seção transversal têm suas posições descritas por

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{z}_{i+1} + \boldsymbol{a}_{i+1}, \tag{7.14}$$

sendo que o vetor $\boldsymbol{a}_{i+1}$ é dado por

$$\boldsymbol{a}_{i+1} = \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{a}_i. \tag{7.15}$$

7.1.1 Deformações

Em (4.14) foi definido o vetor das deformações $\boldsymbol{\eta}$. Pela substituição das variáveis envolvidas podemos obter seu valor nos tempos t_i e t_{i+1} como sendo:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{\iota} &= \boldsymbol{z}_i' - \boldsymbol{e}_{3i} \\ \boldsymbol{\eta}_{\iota+1} &= \boldsymbol{z}_{i+1}' - \boldsymbol{e}_{3i+1}, \end{aligned} \tag{7.16}$$

cujos equivalentes retrorrotacionados serão:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\eta}_{\iota}^{r} &= \boldsymbol{Q}_i^T \boldsymbol{z}_i' - \boldsymbol{e}_3^r \\ \boldsymbol{\eta}_{\iota+1}^{r} &= \boldsymbol{Q}_{i+1}^T \boldsymbol{z}_{i+1}' - \boldsymbol{e}_3^r. \end{aligned} \tag{7.17}$$

O vetor das deformações generalizadas no tempo t_{i+1} será definido como:

$$\varepsilon^r_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^r_{i+1} \\ \boldsymbol{\kappa}^r_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^r_i + \Delta\boldsymbol{\eta}^r \\ \boldsymbol{\kappa}^r_i + \Delta\boldsymbol{\kappa}^r \end{bmatrix}. \tag{7.18}$$

A diferenciação do vetor definido por (7.18) no tempo, nos fornece o vetor das variações das deformações generalizadas:

$$\dot{\varepsilon}^r_{i+1} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{\eta}}^r_{i+1} \\ \dot{\boldsymbol{\kappa}}^r_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\overline{\Delta\boldsymbol{\eta}^r}} \\ \dot{\overline{\Delta\boldsymbol{\kappa}^r}} \end{bmatrix} = \dot{\overline{\Delta\varepsilon^r}}. \tag{7.19}$$

Passaremos a representar

$$\dot{\overline{\Delta\varepsilon^r}} = \Delta\dot{\varepsilon}^r. \tag{7.20}$$

Sabendo que

$$\Delta\varepsilon^r = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\eta}^r \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\eta}^r_{i+1} - \boldsymbol{\eta}^r_i \\ \boldsymbol{\kappa}^r_{i+1} - \boldsymbol{\kappa}^r_i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{Q}^T_\Delta \boldsymbol{z}'_{i+1} - \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{z}'_i \\ \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{\Gamma}^T_\Delta \boldsymbol{\alpha}'_\Delta \end{bmatrix}, \tag{7.21}$$

sua diferenciação no tempo nos fornece o vetor das deformações generalizadas no tempo t_{i+1}, que coincide com o vetor das variações das deformações generalizadas:

$$\dot{\varepsilon}^r_{i+1} = \Delta\dot{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{\eta}}^r \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\kappa}}^r \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T_i \dot{\boldsymbol{Q}}^T_\Delta \boldsymbol{z}'_{i+1} + \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{Q}^T_\Delta \dot{\boldsymbol{z}}'_{i+1} \\ \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{\Gamma}^T_\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}'_\Delta + \boldsymbol{Q}^T_i \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^T_\Delta \boldsymbol{\alpha}'_\Delta \end{bmatrix} \tag{7.22}$$

Em (7.22) sabemos que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\Omega}_\Delta &= \dot{\boldsymbol{Q}}_\Delta \boldsymbol{Q}^T_\Delta, \text{ logo,} \\ \dot{\boldsymbol{Q}}^T_\Delta &= -\boldsymbol{Q}^T_\Delta \boldsymbol{\Omega}_\Delta. \end{aligned} \tag{7.23}$$

De (7.13) temos:

$$\dot{\boldsymbol{z}}'_{i+1} = \dot{\boldsymbol{u}}'_\Delta. \tag{7.24}$$

Assim, podemos escrever:

$$\dot{\varepsilon}^r_{i+1} = \Delta\dot{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{Q}^T_\Delta \boldsymbol{Z}'_{i+1} \boldsymbol{\Gamma} \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\Delta + \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{Q}^T_\Delta \dot{\boldsymbol{u}}'_{i+1} \\ \boldsymbol{Q}^T_i \boldsymbol{\Gamma}^T_\Delta \dot{\boldsymbol{\alpha}}'_\Delta + \boldsymbol{Q}^T_i \dot{\boldsymbol{\Gamma}}^T_\Delta \boldsymbol{\alpha}'_\Delta \end{bmatrix}. \tag{7.25}$$

Se definirmos um vetor $\boldsymbol{d}_\Delta$ tal que

$$\boldsymbol{d}_\Delta = \begin{bmatrix} \boldsymbol{u}_\Delta \\ \boldsymbol{\alpha}_\Delta \end{bmatrix}, \text{ sendo } \dot{\boldsymbol{d}}_\Delta = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_\Delta \\ \dot{\boldsymbol{\alpha}}_\Delta \end{bmatrix}, \tag{7.26}$$

um vetor $\boldsymbol{v}_\Delta$, tal que:

$$\boldsymbol{v}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_{\Delta} \\ \boldsymbol{\omega}_{\Delta} \end{bmatrix}, \tag{7.27}$$

definirmos um tensor $\boldsymbol{Y}_{\Delta}$ como sendo:

$$\boldsymbol{Y}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} & \boldsymbol{\Gamma}'_{\Delta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \end{bmatrix}, \tag{7.28}$$

e um operador $\boldsymbol{\Delta}$

$$\boldsymbol{\Delta} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix}. \tag{7.29}$$

podemos escrever

$$\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{v}_{\Delta} \doteq \boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}. \tag{7.30}$$

O vetor $\dot{\varepsilon}^{r}_{i+1}$ pode ser expresso por:

$$\dot{\varepsilon}^{r}_{i+1} = \Delta\dot{\varepsilon}^{r} = \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{i+1}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}\boldsymbol{\Delta}\boldsymbol{v}_{\Delta}, \tag{7.31}$$

onde:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \doteq \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{i+1} \end{bmatrix} \text{ e } \boldsymbol{\Phi}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}'_{i+1} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}. \tag{7.32}$$

Considerando (7.30), (7.31) pode ser reescrito como

$$\dot{\varepsilon}^{r}_{i+1} = \Delta\dot{\varepsilon}^{r} = \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{i+1}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}. \tag{7.33}$$

7.1.2 Potência dos esforços internos e externos

De (4.49) temos que a Potência dos esforços internos atuantes na barra é dada por:

$$P_{\text{int}} = \int_{0}^{\ell} \sigma^{r} \cdot \dot{\varepsilon}^{r} d\zeta = \int_{0}^{\ell} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{T}\boldsymbol{\Phi}\boldsymbol{Y}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta} d\zeta. \tag{7.34}$$

No tempo t_{i+1} ela será dada por

$$P_{\text{int}} = \int_{0}^{\ell} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \dot{\varepsilon}^{r}_{i+1} d\zeta = \int_{0}^{\ell} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \Delta\dot{\varepsilon}^{r} d\zeta = \int_{0}^{\ell} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{i+1}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta} d\zeta. \tag{7.35}$$

Para o tempo t_{i+1}, de (6.59) temos que a potência virtual dos esforços externos é fornecida por:

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}_{i+1} \right) d\Omega \tag{7.36}$$

mas,

$$\boldsymbol{v}_{i+1} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_{i+1} \\ \boldsymbol{\omega}_{i+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dot{\boldsymbol{u}}_{\Delta} \\ \boldsymbol{\omega}_{\Delta} \end{bmatrix}. \tag{7.37}$$

Logo, a Potência dos esforços externos atuantes ao longo da barra em t_{i+1} será dada por:

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}_{\Delta} \right) d\Omega. \tag{7.38}$$

7.1.3 Trabalho virtual dos esforços internos e externos

Para o intervalo de tempo entre t_i e t_{i+1}, o vetor das deformações virtuais pode ser expresso por:

$$\delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \begin{bmatrix} \delta\Delta\boldsymbol{\eta}^r \\ \delta\Delta\boldsymbol{\kappa}^r \end{bmatrix}, \tag{7.39}$$

o qual, com o uso de (7.33) pode ser escrito como

$$\delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^r = \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \delta\boldsymbol{d}_{\Delta}. \tag{7.40}$$

Para o intervalo de tempo entre t_i e t_{i+1}, utilizando (4.61), o Trabalho Virtual dos esforços internos pode ser expresso por:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_0^{\ell} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^r d\zeta = \int_0^{\ell} \left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \delta\boldsymbol{d}_{\Delta} \right) d\zeta. \tag{7.41}$$

Para o mesmo intervalo de tempo, utilizando (4.63), o Trabalho Virtual dos esforços externos será dado por:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_0^{\ell} \left(\bar{\boldsymbol{q}} \cdot \delta\boldsymbol{d}_{\Delta} \right) d\zeta. \tag{7.42}$$

7.1.4 Formas fracas das equações do movimento

7.1.4.1 Teorema dos Trabalhos Virtuais

Para o intervalo de tempo entre t_i e t_{i+1}, o equilíbrio do elemento de barra pode ser estabelecido variacionalmente através do Teorema dos Trabalhos Virtuais, o qual, com as condições de contorno essenciais nas extremidades permite escrever:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext}, \quad \forall \delta \boldsymbol{d} = \delta \hat{\boldsymbol{d}}(\zeta) \,\big|\, \delta \hat{\boldsymbol{d}}(0) = \delta \hat{\boldsymbol{d}}(\ell) = \boldsymbol{o}, \tag{7.43}$$

que corresponde à forma fraca das equações de equilíbrio.

Pela substituição de (7.41) e (7.42) obtemos

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} = \int_0^{\ell} \left[\left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \delta \Delta \boldsymbol{\varepsilon}^r \right) - \left(\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \right] d\zeta \tag{7.44}$$

que pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}} &= \int_0^{\ell} \left[\left(\boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) - \left(\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \right] d\zeta = \\ &= \int_0^{\ell} \left[\left(\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \boldsymbol{\sigma}^r \cdot \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) - \left(\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \right] d\zeta. \end{aligned} \tag{7.45}$$

O operador tangente das equações de equilíbrio é fornecido pela derivada de Fréchet de (7.45). Ela pode ser obtida por diferenciação de (7.45) no tempo. Assim, teremos,

$$\delta \dot{W} = \int_0^{\ell} \left\{ \left[\left(\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r \right) + \left(\dot{\overline{\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}} \, \boldsymbol{\sigma}^r \right) \right] \cdot \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} - \left(\dot{\overline{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \right\} d\zeta \tag{7.46}$$

mas,

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}}^r = \boldsymbol{D} \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}_{\Delta}^r = \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}. \tag{7.47}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \left(\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \dot{\boldsymbol{\sigma}}^r \right) &= \boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta} = \\ &= \left(\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \right) \boldsymbol{D} \left(\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \right) \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}. \end{aligned} \tag{7.48}$$

$$\dot{\overline{\boldsymbol{q}}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} = \frac{\partial \overline{\boldsymbol{q}}}{\partial \boldsymbol{d}_{\Delta}} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} = \boldsymbol{L} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta}. \tag{7.49}$$

$$\dot{\overline{\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}} \, \boldsymbol{\sigma}^r = \left[\left(\dot{\boldsymbol{Y}}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \dot{\boldsymbol{\Phi}}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} + \boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1} \right) \right] \boldsymbol{\sigma}^r. \tag{7.50}$$

$$\dot{\boldsymbol{Y}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{\iota+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{\prime T} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{Z}_{i+1}^{\prime} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{i+1}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Q}_{i+1}\\ -\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}_{i+1}^{\prime}\boldsymbol{Q}_{i+1} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{\prime T}\boldsymbol{Q}_{i+1}\end{bmatrix}. \tag{7.51}$$

$$\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{\Phi}}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\prime T} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ -\dot{\boldsymbol{Z}}_{i+1}^{\prime} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{i+1}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ -\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Z}}_{i+1}^{\prime}\boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}. \tag{7.52}$$

$$\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\dot{\boldsymbol{\Lambda}}_{i+1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\prime T} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\boldsymbol{I} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\\ -\boldsymbol{Z}_{i+1}^{\prime} & \boldsymbol{O}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\end{bmatrix}=$$
$$=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\\ -\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}_{i+1}^{\prime}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\prime T}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\end{bmatrix}. \tag{7.53}$$

A parcela expressa pela equação (7.50) será escrita como:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{\iota+1}}}\,\boldsymbol{\sigma}^{r}=\begin{bmatrix}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1} & \boldsymbol{O}\\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Q}_{i+1}+\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\\ -\begin{pmatrix}\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}_{i+1}^{\prime}\boldsymbol{Q}_{i+1}+\\ +\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Z}}_{i+1}^{\prime}\boldsymbol{Q}_{i+1}+\\ +\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}_{i+1}^{\prime}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\end{pmatrix} & \left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{\prime T}\boldsymbol{Q}_{i+1}+\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\prime T}\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1}\right)\end{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}^{r}. \tag{7.54}$$

Podemos demonstrar que

$$\dot{\boldsymbol{Q}}_{i+1} = \boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1}. \tag{7.55}$$

Pela substituição de (7.55) em (7.54) e fazendo uso do tensor antissimétrico $\boldsymbol{Z}'_{i+1}$ cujo vetor axial é $\boldsymbol{z}'_{i+1}$ vamos obter

$$\dot{\overline{\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}}\,\boldsymbol{\sigma}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Q}_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1} \\ -\begin{pmatrix} \dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{Q}_{i+1} + \\ +\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Z}}'_{i+1}\boldsymbol{Q}_{i+1} + \\ +\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1} \end{pmatrix} & \left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{Q}_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1}\right) \end{bmatrix}\boldsymbol{\sigma}^{r}. \tag{7.56}$$

Realizando a operação expressa em (7.56), obtemos:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}}\,\boldsymbol{\sigma}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1}^{r} \\ \left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Q}_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1}\right)\boldsymbol{m}_{i+1}^{r} \\ \begin{Bmatrix} -\left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Z}}'_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\right)\boldsymbol{Q}_{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1}^{r} + \\ `+\left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}'^{T} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\right)\boldsymbol{Q}_{i+1}\boldsymbol{m}_{i+1}^{r} \end{Bmatrix} \end{bmatrix}, \tag{7.57}$$

o qual pode ser simplificado para:

$$\dot{\overline{\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}}\,\boldsymbol{\sigma}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{n}_{i+1} \\ \left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Q}_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i+1}\right)\boldsymbol{m}_{i+1} \\ \begin{Bmatrix} -\left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\dot{\boldsymbol{Z}}'_{i+1} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\right)\boldsymbol{n}_{i+1} + \\ `+\left(\dot{\boldsymbol{\Gamma}}_{\Delta}'^{T} + \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{\Omega}_{\Delta}\right)\boldsymbol{m}_{i+1} \end{Bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{7.58}$$

A manipulação algébrica de (7.58) com o auxílio dos tensores antissimétricos $\boldsymbol{N}_{i+1}$ e $\boldsymbol{M}_{i+1}$, cujos vetores axiais são $\boldsymbol{n}_{i+1}$ e $\boldsymbol{m}_{i+1}$, respectivamente, permite obter:

$$\overline{\dot{\boldsymbol{Y}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}\,\boldsymbol{\sigma}^{r}=\begin{bmatrix} -\boldsymbol{N}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta} \\ \left[\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{m}_{i+1}\right)-\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{M}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\right]\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta} \\ \begin{Bmatrix} \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\left(\boldsymbol{n}_{i+1}\times\boldsymbol{z}'_{i+1}\right)\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta}+\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{N}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta}+ \\ -\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{M}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta}+\boldsymbol{V}'\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{\alpha}'_{\Delta},\boldsymbol{m}_{i+1}\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}_{\Delta}+ \\ +\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{m}_{i+1}\right)\dot{\boldsymbol{\alpha}}'_{\Delta}+\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{N}_{i+1}\dot{\boldsymbol{u}}'_{\Delta} \end{Bmatrix} \end{bmatrix}. \tag{7.59}$$

A equação (7.59) pode ser escrita como:

$$\overline{\dot{\boldsymbol{Y}}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}}\,\boldsymbol{\sigma}^{r}=\boldsymbol{G}_{i+1}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}, \tag{7.60}$$

com $\boldsymbol{\Delta}$ definido por (7.29), $\boldsymbol{d}_{\Delta}$ definido por $(7.26)_1$ e $\boldsymbol{G}_{i+1}$, um tensor semelhante a (4.81), com suas submatrizes assumindo valores distintos:

$$\boldsymbol{G}_{i+1}=\begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_{\mathrm{u'}\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha'} \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{u'}\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha'}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix}. \tag{7.61}$$

As submatrizes de $\boldsymbol{G}_{i+1}$ são:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{u'\alpha} &= -\boldsymbol{N}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{G}_{u'\alpha}^{T} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{i+1} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{N}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}-\boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{Z}'_{i+1}\boldsymbol{n}_{i+1}\right)+ \\ &\quad +\boldsymbol{V}'\left(\boldsymbol{\alpha}'_{\Delta},\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{m}_{i+1}\right)-\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{M}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha'} &= \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{m}_{i+1}\right)-\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha'}^{T} &= \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta},\boldsymbol{m}_{i+1}\right). \end{aligned} \tag{7.62}$$

Realizando a substituição de (7.48), (7.49) e (7.60) em (7.46) obtemos:

$$\begin{aligned} \delta\dot{W} = \int_{0}^{\ell}\Big\{&\Big[\Big(\left(\boldsymbol{Y}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}\right)\boldsymbol{D}\left(\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\right)\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}\Big)+\boldsymbol{G}_{i+1}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}\Big]\cdot\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}+ \\ &-\left(\boldsymbol{L}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}\right)\cdot\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\Big\}d\zeta \end{aligned} \tag{7.63}$$

A partir da equação (7.63), por analogia obtemos o operador tangente das equações de equilíbrio, o qual será

$$\delta(\delta W) = \delta\left(\delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext}\right) = \int_0^{\ell}\Big[\left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T\boldsymbol{\Phi}_{\iota+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T\boldsymbol{\Phi}_{\iota+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right) + \\ + \left(\boldsymbol{G}_{\iota+1}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right) - \left(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\cdot\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\Big]d\zeta. \tag{7.64}$$

7.1.4.2 Teorema das Potências Virtuais

Para o intervalo de tempo entre t_i e t_{i+1}, o equilíbrio pode ser formulado utilizando o teorema das potências virtuais, o qual para um regime quase estático nos permite escrever:

$$\delta P = \delta P_{\text{int}} - \delta P_{\text{ext}} = 0,\ \forall\delta\boldsymbol{v}. \tag{7.65}$$

A substituição de (7.35) e (7.38) nos permite reescrever (7.65) como:

$$\delta P = \int_{\Omega}\left(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{\Phi}_{\iota+1}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v} - \bar{\boldsymbol{\sigma}}\cdot\delta\boldsymbol{v}\right)d\Omega = 0,\ \forall\delta\boldsymbol{v}. \tag{7.66}$$

O operador tangente das equações de equilíbrio pode ser obtido de maneira semelhante aos modelos Lagrangianos, conforme apresentado no Capítulo 6. O resultado final é

$$\delta(\delta P) = \int_{\Omega}\Big[\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T\boldsymbol{\Lambda}_{\iota+1}\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T\boldsymbol{\Phi}_{\iota+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right) + \boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{v}\cdot\left(G_{\iota+1}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\Big]\delta\zeta + \\ - \int_{\Omega}\left[\delta\boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\right]\delta\zeta - \delta\boldsymbol{v}\cdot\left(\boldsymbol{L}^{\Gamma}\cdot\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\Big|_{\Gamma}. \tag{7.67}$$

O tensor $\boldsymbol{G}_{i+1}$ assume a forma:

$$\boldsymbol{G}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{N}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{M}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{N}_{i+1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{i+1}'\boldsymbol{N}_{i+1}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \end{bmatrix}. \tag{7.68}$$

Da observação de (7.67) e (7.68), podemos constatar que, como no modelo Lagrangiano total, também no Lagrangiano atualizado a rigidez tangente não é simétrica.

7.2 Modelo de cascas

O modelo assume as mesmas hipóteses do modelo Lagrangiano total. Em relação às variáveis e nomenclatura dos incrementos, foram feitas considerações idênticas às adotadas para o modelo de barras.

A Figura 7.2 mostra as variáveis. Como no caso do modelo de barras, no tempo t_{i+1} a posição de um ponto material qualquer pode ser expressa pelo campo vetorial

$$\boldsymbol{x}_{i+1} = \boldsymbol{z}_{i+1} + \boldsymbol{a}_{i+1}, \tag{7.69}$$

onde

$$\boldsymbol{a}_{i+1} = \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{a}_i \tag{7.70}$$

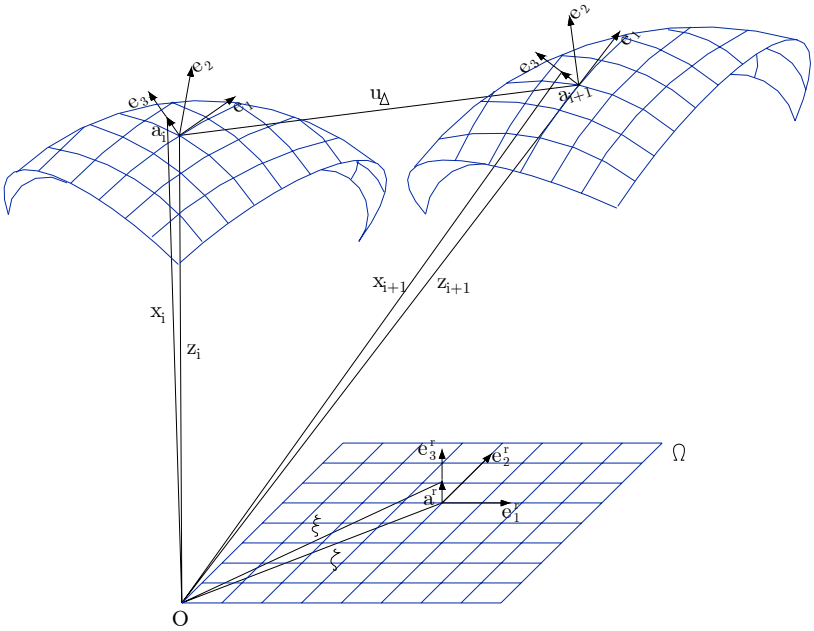


Figura 7.2 – Modelo de cascas atualizado

No modelo de cascas temos:

$$\boldsymbol{\kappa}_{\alpha i+1} = \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{i+1,\alpha}\boldsymbol{Q}_{i+1}^T\right). \tag{7.71}$$

De (7.1) podemos obter

$$\boldsymbol{Q}_{i+1,\alpha} = \boldsymbol{Q}_{\Delta,\alpha}\boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i,\alpha}. \tag{7.72}$$

Substituindo (7.72) e $(7.4)_1$ em (7.71) obtemos:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\kappa}_{\alpha i+1} &= \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{i+1,\alpha}\boldsymbol{Q}_{i+1}^T\right) = \text{axial}\left[\left(\boldsymbol{Q}_{\Delta,\alpha}\boldsymbol{Q}_i + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i,\alpha}\right)\left(\boldsymbol{Q}_i^T\boldsymbol{Q}_{\Delta}^T\right)\right] = \\ &= \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{\Delta,\alpha}\boldsymbol{Q}_{\Delta}^T + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{Q}_{i,\alpha}\boldsymbol{Q}_i^T\boldsymbol{Q}_{\Delta}^T\right) = \\ &= \text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{\Delta,\alpha}\boldsymbol{Q}_{\Delta}^T\right) + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{i,\alpha}\boldsymbol{Q}_i^T\right).\end{aligned} \tag{7.73}$$

Mas,

$$\begin{aligned}&\text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{\Delta,\alpha}\boldsymbol{Q}_{\Delta}^T\right) = \boldsymbol{\kappa}_{\alpha\Delta} = \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}_{\Delta,\alpha} \quad \text{e} \\ &\text{axial}\left(\boldsymbol{Q}_{i,\alpha}\boldsymbol{Q}_i^T\right) = \boldsymbol{\kappa}_{\alpha i}\end{aligned} \tag{7.74}$$

Assim, de $(7.73)_3$ nós podemos obter:

$$\boldsymbol{k}_{\alpha i+1} = \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}_{\Delta,\alpha} + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{k}_{\alpha i}. \tag{7.75}$$

O equivalente retrorrotacionado de $\boldsymbol{k}_{\alpha i+1}$ é:

$$\boldsymbol{k}^{r}_{\alpha i+1} = \boldsymbol{Q}^{T}_{i+1}\boldsymbol{k}_{\alpha i+1} = \boldsymbol{Q}^{T}_{i+1}\left(\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}_{\Delta,\alpha} + \boldsymbol{Q}_{\Delta}\boldsymbol{k}_{\alpha i}\right) = \boldsymbol{Q}^{T}_{i}\boldsymbol{\Gamma}^{T}_{\Delta}\boldsymbol{\alpha}_{\Delta,\alpha} + \boldsymbol{k}^{r}_{\alpha i}. \tag{7.76}$$

7.2.1. Deformações e tensões

De maneira semelhante à realizada com o modelo de barras, pode-se obter o vetor das variações das deformações generalizadas, o qual será expresso:

$$\Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{r} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{r}_{1} \\ \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{r}_{2} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \Delta\boldsymbol{\varepsilon}^{r}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \Delta\boldsymbol{\eta}^{r}_{\alpha} \\ \Delta\boldsymbol{\kappa}^{r}_{\alpha} \end{bmatrix}. \tag{7.77}$$

Sua variação no tempo será expressa por:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}_{1} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}_{2} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \Delta\dot{\boldsymbol{\eta}}^{r}_{\alpha} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{\kappa}}^{r}_{\alpha} \end{bmatrix}, \tag{7.78}$$

o qual pode ser representado por:

$$\Delta\dot{\boldsymbol{\varepsilon}}^{r}_{\alpha} = \boldsymbol{\Lambda}^{T}_{i+1}\boldsymbol{\Phi}_{\iota+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta}, \tag{7.79}$$

onde:

$$\boldsymbol{\Lambda}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{i+1} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Q}_{i+1} \end{bmatrix}, \tag{7.80}$$

$$\boldsymbol{\Phi}_{\iota+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Phi}_{1} & \boldsymbol{O}_{6\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{6\times 9} & \boldsymbol{\Phi}_{2} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\Phi}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{i+1,\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} \end{bmatrix}, \tag{7.81}$$

$$\boldsymbol{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\Delta}_{1} \\ \boldsymbol{\Delta}_{2} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\Delta}_{\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta_{\alpha}} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I}\dfrac{\partial}{\partial\zeta_{\alpha}} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{I} \end{bmatrix} \quad \text{e} \tag{7.82}$$

$$\boldsymbol{Y}_{\Delta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{Y}_{\Delta 1} & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{Y}_{\Delta 2} \end{bmatrix}, \text{ com } \quad \boldsymbol{Y}_{\Delta\alpha} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{I} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta,\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \end{bmatrix} \tag{7.83}$$

As tensões atuantes na seção transversal são:

$$\boldsymbol{\sigma}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{\sigma}_{1}^{r} \\ \boldsymbol{\sigma}_{2}^{r} \end{bmatrix}, \quad \text{com} \quad \boldsymbol{\sigma}_{\alpha}^{r} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{n}_{\alpha}^{r} \\ \boldsymbol{m}_{\alpha}^{r} \end{bmatrix} \tag{7.84}$$

7.2.2 Potência dos esforços internos e externos

De (5.38) temos que a potência dos esforços internos no domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$, relativo ao plano de referência da casca, é dada por:

$$P_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \Delta\dot{\varepsilon}^{r} d\Omega \tag{7.85}$$

Considerando as deduções realizadas quando da análise do modelo de barras, podemos concluir que no tempo t_{i+1} a potência interna será obtida de

$$P_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \Delta\dot{\varepsilon}_{i+1}^{r} d\Omega = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{T} \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \dot{\boldsymbol{d}}_{\Delta} d\Omega. \tag{7.86}$$

A Potência dos esforços externos atuantes no mesmo domínio $\Omega \in \mathbb{R}^2$, de acordo com (5.43), pode ser expressa por:

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \dot{\boldsymbol{d}} \right) d\Omega = \int_{\Omega} (\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}) \, d\Omega. \tag{7.87}$$

Desta forma, no tempo t_{i+1} a potência externa será obtida

$$P_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \boldsymbol{v}_{\Delta} \right) d\Omega. \tag{7.88}$$

7.2.3 Trabalho virtual dos esforços internos e externos

De forma semelhante ao modelo de barras, no modelo de cascas o trabalho virtual dos esforços internos pode ser expresso por:

$$\delta W_{\text{int}} = \int_{\Omega} \boldsymbol{\sigma} \cdot \delta\Delta\varepsilon^{r} d\Omega = \int_{\Omega} \left(\boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{T} \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) d\Omega \tag{7.89}$$

e o trabalho virtual dos esforços externos vale:

$$\delta W_{\text{ext}} = \int_{\Omega} \left(\overline{\boldsymbol{q}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) d\Omega \tag{7.90}$$

Para o modelo de cascas os tensores $\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}$, $\boldsymbol{\Phi}_{i+1}$ e $\boldsymbol{Y}_{\Delta}$ são distintos daqueles apresentados no modelo de barras, sendo aqueles expressos pelas equações (7.80), (7.81) e (7.83), respectivamente. O operador $\boldsymbol{\Delta}$ é expresso pela equação (7.82).

7.2.4 Formas fracas das equações de equilíbrio

7.2.4.1 Teorema dos Trabalhos Virtuais

Para o modelo de cascas a forma fraca das equações de equilíbrio será expressa por:

$$\delta W = \delta W_{\text{int}} - \delta W_{\text{ext}}, \quad \text{em } \Omega \ \forall \delta \boldsymbol{d}. \tag{7.91}$$

O operador tangente das equações de equilíbrio é fornecido pela derivada de Fréchet de (7.91), a qual pode ser obtida pela derivação de (7.91) no tempo. O resultado final será

$$\begin{aligned} \delta(\delta W) = \delta\left(\delta W_{\text{int}} - \delta W_{ext}\right) = \int_{\Omega} \Big[& \left(\boldsymbol{D}\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{T}\boldsymbol{\Phi}_{i+1}\boldsymbol{Y}_{\Delta}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right) + \\ & + \left(\boldsymbol{G}_{i+1}\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\cdot\left(\boldsymbol{\Delta}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right) - \left(\boldsymbol{L}\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\right)\cdot\delta\boldsymbol{d}_{\Delta}\Big] d\Omega \end{aligned} \tag{7.92}$$

As submatrizes de $\boldsymbol{G}_{i+1}$ podem ser obtidas de maneira semelhante à maneira como foram obtidas as submatrizes de $\boldsymbol{G}_{i+1}$ mostradas em (7.68), sendo que, para o modelo de cascas, o tensor $\boldsymbol{G}_{i+1}$ assume a forma:

$$\boldsymbol{G}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{G}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{G}_{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_{\mathrm{u},\beta\alpha} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha,\beta} \\ \boldsymbol{G}_{\mathrm{u},\beta\alpha}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha,\beta}^{\mathrm{T}} & \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha} \end{bmatrix} \tag{7.93}$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{G}_{u,\beta\alpha} &= -\boldsymbol{N}_{\beta_{i+1}}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{G}_{u,\beta\alpha}^{T} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{N}_{\beta_{i+1}} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha} &= \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{T}\boldsymbol{Z}_{i+1,\beta}\boldsymbol{N}_{\beta_{i+1}}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} - \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}, \boldsymbol{Z}_{i+1,\beta}\boldsymbol{n}_{\beta_{i+1}}\right) + \\ & \quad + \boldsymbol{V}'\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}', \boldsymbol{\alpha}_{\Delta}, \boldsymbol{m}_{\beta_{i+1}}\right) - \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}'^{T}\boldsymbol{M}_{\beta_{i+1}}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha,\beta} &= \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}, \boldsymbol{m}_{\beta_{i+1}}\right) - \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{M}_{\beta_{i+1}}\boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{G}_{\alpha\alpha,\beta}^{T} &= \boldsymbol{V}\left(\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}, \boldsymbol{m}_{\beta_{i+1}}\right). \end{aligned} \tag{7.94}$$

7.2.4.2 Teorema das Potências Virtuais

Adotando procedimento semelhante àquele adotado quando da análise do modelo de barras, o teorema das potências virtuais nos permite formular o equilíbrio da casca como:

$$\delta P = \delta P_{\text{int}} - \delta P_{\text{ext}} = 0, \ \ \forall \delta \boldsymbol{v}. \tag{7.95}$$

Pela substituição das potências interna e externa, é possível obter a forma fraca que corresponde à obtenção do equilíbrio a partir do teorema das potências virtuais na forma:

$$\delta P = \int_{\Omega} \left[\left(\boldsymbol{\sigma}^{r} \cdot \boldsymbol{\Lambda}_{\iota+1}^{T} \boldsymbol{\Phi}_{\iota+1} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{v} \right) - \bar{\boldsymbol{\sigma}} \cdot \delta \boldsymbol{v} \right] \delta \Omega. \tag{7.96}$$

O operador tangente do modelo de cascas pode ser obtido de maneira semelhante ao do modelo Lagrangiano total. O resultado final será:

$$\begin{aligned} \delta(\delta P) = & \int_{\Omega} \left[\boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Lambda}_{\iota+1} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^{\boldsymbol{T}} \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) + \boldsymbol{\Delta}_{\alpha} \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(G_{i+1} \boldsymbol{\Delta} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \right] \delta \Omega + \\ & - \int_{\Omega} \left[\delta \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{L} \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \right] \delta \Omega - \delta \boldsymbol{v} \cdot \left(\boldsymbol{L}^{\boldsymbol{T}} \cdot \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} \right) \Big|_{\Gamma} \end{aligned} \tag{7.97}$$

Neste contexto, o tensor $\boldsymbol{G}_{i+1}$ assume a forma:

$$\boldsymbol{G}_{i+1} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{G}_1 & \boldsymbol{O}_{9\times 9} \\ \boldsymbol{O}_{9\times 9} & \boldsymbol{G}_2 \end{bmatrix}, \text{ com } \boldsymbol{G}_{\beta} = \begin{bmatrix} \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{N}_{\beta i+1} \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{O} & \boldsymbol{O} & -\boldsymbol{M}_{\beta i+1} \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \\ \boldsymbol{N}_{\beta i+1} & \boldsymbol{O} & \boldsymbol{Z}_{i+1,\beta} \boldsymbol{N}_{\beta i+1} \boldsymbol{\Gamma}_{\Delta} \end{bmatrix} \tag{7.98}$$

Como no modelo de barras, o operador tangente da forma fraca bilinear não é simétrico.

7.3 Aplicação em elementos finitos

Na formulação em elementos finitos interpolam-se os deslocamentos generalizados $\boldsymbol{d}_{\Delta}$ e suas variações $\delta \boldsymbol{d}_{\Delta}$, utilizando as relações:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{d}_{\Delta} &= \boldsymbol{N} \boldsymbol{p}_{\Delta} \\ \delta \boldsymbol{d}_{\Delta} &= \boldsymbol{N} \delta \boldsymbol{p}_{\Delta} \\ \delta \boldsymbol{v} &= \boldsymbol{N} \delta \boldsymbol{p}, \end{aligned} \tag{7.99}$$

onde $\boldsymbol{N}$ é a matriz de interpolação e $\boldsymbol{p}_{\Delta}$ e $\delta \boldsymbol{p}_{\Delta}$ são os vetores dos graus de liberdade nodais generalizados do elemento e suas variações, respectivamente.

Introduzindo (7.99) nas formas fracas obtidas a partir do Teorema dos trabalhos virtuais ((7.45) para elementos de barras e (7.91) para elementos de cascas) e do Teorema das Potências Virtuais ((7.66) para elementos de barras e (7.96) para elementos de cascas), obtém-

se o vetor das forças residuais do elemento, expresso, no caso da forma fraca oriunda do Teorema dos Trabalhos Virtuais, para elementos de barras, por:

$$R = \int_{\Omega} \left[(\boldsymbol{\Delta N})^T \boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \boldsymbol{\sigma}^r - \boldsymbol{N}^T \overline{\boldsymbol{q}} \right] d\Omega - \boldsymbol{N}^T \overline{\boldsymbol{q}}^{\Gamma} \Big|_{\Gamma} . \tag{7.100}$$

A matriz de rigidez do elemento será obtida da derivação de (7.100) em relação a $\boldsymbol{p}$, a qual pode ser obtida pela substituição de (7.99) em (7.64), resultando em:

$$\begin{aligned} K_e = \int_0^{\ell} \Big\{ \Big[\Big((\boldsymbol{\Delta N})^T \left(\boldsymbol{Y}_{\Delta}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \right) \boldsymbol{D} \left(\boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \right) (\boldsymbol{\Delta N}) \Big) + \\ + (\boldsymbol{\Delta N})^T \boldsymbol{G}_{i+1} (\boldsymbol{\Delta N}) \Big] - \left(\boldsymbol{N}^T \overline{\boldsymbol{L}}_{i+1} \boldsymbol{N} \right) \Big\} d\Omega \end{aligned} \tag{7.101}$$

Idêntico procedimento adotado para a formulação oriunda do uso do Teorema das Potências Virtuais resulta, para o elemento de barra, na matriz de rigidez:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_e = \int_{\Omega} \Big[(\boldsymbol{\Delta N})^T \left(\boldsymbol{\Phi}_{i+1}^T \boldsymbol{\Lambda}_{i+1} \boldsymbol{D} \boldsymbol{\Lambda}_{i+1}^T \boldsymbol{\Phi}_{i+1} \boldsymbol{Y}_{\Delta} \boldsymbol{d} \right) (\boldsymbol{\Delta N}) + (\boldsymbol{\Delta N})^T \boldsymbol{G}_{i+1} (\boldsymbol{\Delta N}) + \\ + \left(\boldsymbol{N}^T \boldsymbol{L}_{i+1} \boldsymbol{N} \right) \Big] d\Omega \end{aligned} \tag{7.102}$$

Para o elemento de cascas, as duas formulações dão origem a matrizes semelhantes às apresentadas nas equações (7.101) e (7.102), diferindo em relação aos valores assumidos pelos tensores e operadores presentes, como já mencionado anteriormente.

No procedimento de solução utilizando o método de Newton, para um dado incremento de carga, a cada nova iteração os valores de $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$ e $\boldsymbol{\kappa}_{i+1}^r$ nos pontos de Gauss devem ser obtidos a partir dos valores no incremento anterior e dos valores obtidos para $\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}$ e $\Delta\boldsymbol{\kappa}^r$. $\boldsymbol{\kappa}_{i+1}^r$ é obtido pela adição de $\Delta\boldsymbol{\kappa}^r$ a $\boldsymbol{\kappa}_i^r$ enquanto os valores de $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$ são obtidos por:

a) Parametrização de Euler: $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$ é extraído de $\boldsymbol{Q}_{i+1}$ utilizando as equações (3.52) e (3.53).
b) Parametrização de Rodrigues: composição entre $\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}$ e $\boldsymbol{\alpha}_i$ utilizando a fórmula de Rodrigues (3.64) e
c) Parametrizações generalizadas de Rodrigues: $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$ é extraído de $\boldsymbol{Q}_{i+1}$ utilizando as expressões (3.97) e (3.98).

Com os valores de $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$ e $\boldsymbol{\kappa}_{i+1}^r$ são calculadas as matrizes de rigidez dos elementos e montada a matriz de rigidez da estrutura. Após a verificação da convergência, para cada nó é feita a atualização dos valores dos deslocamentos e são zerados os vetores que armazenam $\boldsymbol{\alpha}_{\Delta}$ e $\boldsymbol{u}_{\Delta}$. Em cada ponto de integração são armazenados os valores finais obtidos para $\boldsymbol{\kappa}_{i+1}^r$ e $\boldsymbol{\alpha}_{i+1}$, os quais serão os valores de $\boldsymbol{\kappa}_i^r$ e $\boldsymbol{\alpha}_i$ para o próximo incremento de carga.

7.4. Objetividade

Segundo Jelenic e Crisfield [39], na presença de grandes deformações, o conceito de objetividade das deformações não se estende naturalmente da teoria para sua formulação em elementos finitos. Assim, a formulação em elementos finitos deve procurar garantir a objetividade. Em [39] se afirma também que os procedimentos usuais de interpolação da rotação tornam a formulação não-objetiva e por vezes dependente da trajetória.

A formulação aqui adotada é do tipo Lagrangiana atualizada, o que a torna efetivamente dependente da trajetória. Entretanto, a interpolação é feita no incremento de rotação e não na rotação total. Assim, rotações de corpo rígido podem ser superpostas aos elementos deformados em qualquer intervalo de carregamento, pela aplicação em cada nó do elemento de um vetor rotação $\boldsymbol{\alpha}_{\Delta} =$ constante. Além disso, no algoritmo desenvolvido, para cada incremento de carga, após a convergência o vetor rotação e a curvatura são armazenados nos pontos de integração (pontos de Gauss) de forma que não é necessário obtê-los a partir da interpolação das rotações nodais, o que faz com que as tensões e as deformações nestes pontos permaneçam invariantes sem esforço computacional adicional. Convém observar também que, conforme [39, 59], com o refinamento da malha decrescem os efeitos da dependência da trajetória e da não-objetividade das deformações.

8 AFERIÇÃO DO USO DAS PARAMETRIZAÇÕES EM MODELOS DE BARRAS E CASCAS

Nesta etapa do desenvolvimento deste trabalho tinha-se como objetivo testar os modelos teóricos propostos para a parametrização das rotações frente às várias possibilidades de métodos de solução:

a) Dois tipos de algoritmo, um com formulação cinemática Lagrangiana total e outro Lagrangiana atualizada, e

b) Dois tipos de matriz de rigidez, sendo uma simétrica, decorrente da forma fraca obtida a partir da formulação do equilíbrio utilizando o Teorema dos Trabalhos Virtuais e outra não-simétrica, obtida com a formulação do equilíbrio utilizando o Teorema das Potências Virtuais.

Desta forma, para as quatro possibilidades que se apresentaram (algoritmo Lagrangiano total com matriz simétrica e não-simétrica e algoritmo Lagrangiano atualizado com matriz simétrica e não-simétrica) foram calculados vários exemplos clássicos existentes na literatura para verificar a compatibilidade dos resultados obtidos com aqueles já disponíveis. Foi feito uso do Programa PEFSYS, no qual foram incluídas as rotinas destinadas a calcular o tensor das rotações e suas derivadas em uma parametrização genérica, adaptada tanto à parametrização de Euler como à de Rodrigues, sendo implementados os coeficientes relativos aos valores de n de 1 a 6, referindo-se o valor 1 à parametrização de Rodrigues na sua forma padrão e os demais valores à parametrização generalizada de Rodrigues. Foi incluído algoritmo Lagrangiano atualizado para análise de estruturas submetidas a carregamento estático e rotinas para montagem da matriz de rigidez simétrica e não-simétrica com a parametrização genérica para o tensor das rotações.

8.1 Exemplos de estruturas analisadas com elementos de barras

Para análise das estruturas de barras foi feito uso de elementos de 2 e 3 nós, modelados conforme citado no capítulo 4. Todos os exemplos foram analisados nas quatro situações citadas para sete tipos de parametrização do tensor das rotações: parametrização de Euler, parametrização de Rodrigues na sua forma padrão, correspondente a $n = 1$ e parametrização generalizada de Rodrigues com n variando de 2 a 6.

8.1.1 Viga balcão

Segundo Teh [90] este exemplo foi inicialmente analisado por Bathe; Bolourchi [9] e é provavelmente o exemplo mais popular para verificação de formulações de barras não-lineares. Ele já foi analisado por muitos pesquisadores, [18, 19, 23, 25, 29, 37, 42, 44, 45, 47, 62, 64, 66, 67, 80, 86, 90, 99] dentre outros. Trata-se de uma viga em arco de círculo em balanço, de raio 100 cm e ângulo central de 45° no plano $x - y$, conforme a figura 8.1. A viga está submetida a uma força na direção z aplicada em sua extremidade livre. A seção transversal é quadrada de lado 1 cm, o módulo de elasticidade longitudinal (E) é de 10^5 kN/cm^2 e o módulo de elasticidade transversal (G) é de 5×10^4 kN/cm^2. A viga foi discretizada com 10 elementos de dois nós cada, com um total de 11 nós. Na situação de referência a extremidade livre situa-se nas coordenadas $x = 70,71$ cm, $y = 29,29$ cm e $z = 0,0$ cm. Os deslocamentos da extremidade livre encontram-se na tabela 8.1, onde se encontram também os resultados presentes em algumas das referências citadas anteriormente, demonstrando a similaridade entre os resultados obtidos e os constantes das bibliografias consultadas, feitas as adaptações ao sistema de eixos adotado.

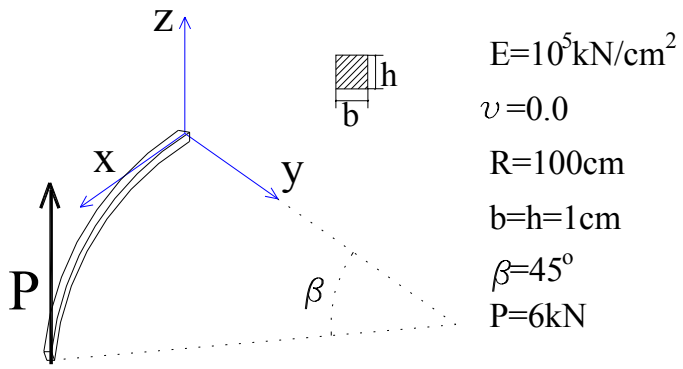


Figura 8.1 – Viga balcão – geometria e propriedades mecânicas

Para este exemplo também foi feita a comparação entre os resultados obtidos nas diversas situações estudadas tendo como referência a solução em que se utilizou a parametrização de Euler, algoritmo Lagrangiano total e matriz de rigidez simétrica (obtida a partir do Teorema dos Trabalhos Virtuais). A Figura 8.2 apresenta a média das diferenças obtidas para os valores dos deslocamentos do nó extremo, para a solução do problema com 10 incrementos de carga de igual valor. Podemos observar que as maiores diferenças não ultrapassam 0.2%.

Tabela 8.1 – viga balcão - deslocamentos do nó da extremidade

Fonte			Deslocamentos		
			x	y	z
Simo; Vu-Quoc [80]			-23,48	-13,50	53,37
Bathe [9]			-23,51	-13,39	53,4
Crisfield [23]			-23,87	-13,63	53,71
Cardona; Geradin [18]			-23,67	-13,73	53,50
Ibrahimbegovic [37]			-23,70	-13,67	53,50
Yojo [99]			-23,73	-13,69	53,53
Lagrangiano total	TV	Euler e Rodrigues generalizado ($2 \leq n \leq 6$)	-23,49	-13,57	53,41
		Rodrigues (n=1)	-23,51	-13,58	53,42
	PV	Euler e Rodrigues generalizado ($2 \leq n \leq 6$)	-23,51	-13,53	53,41
		Rodrigues (n=1)	-23,51	-13,53	53,42
Lagrangiano atualizado	TV	Euler e Rodrigues	-23,51	-13,53	53,41
	PV	Euler e Rodrigues	-23,51	-13,53	53,41

Para melhor visualização dos resultados, foram elaborados os gráficos apresentados nas Figuras 8.3a e 8.3b, nos quais se vê os mesmos resultados presentes na Figura 8.2, tomando agora por referência, em cada série, os valores obtidos para esta mesma série com a parametrização de Euler. Nestes gráficos é possível observar que, como esperado, com o crescimento do valor de n decresce a diferença observada entre o valor obtido com cada parametrização e o valor obtido com a parametrização de Euler.

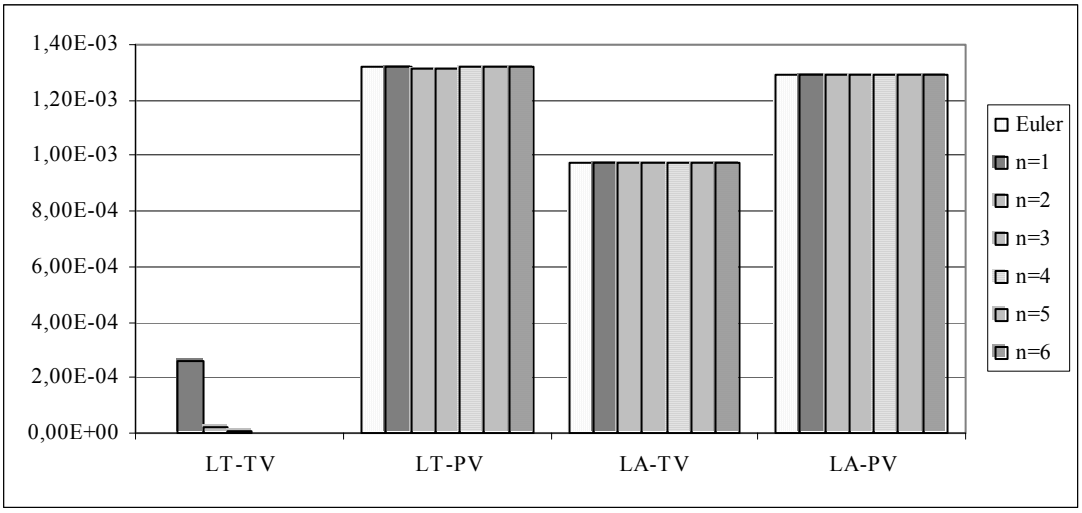
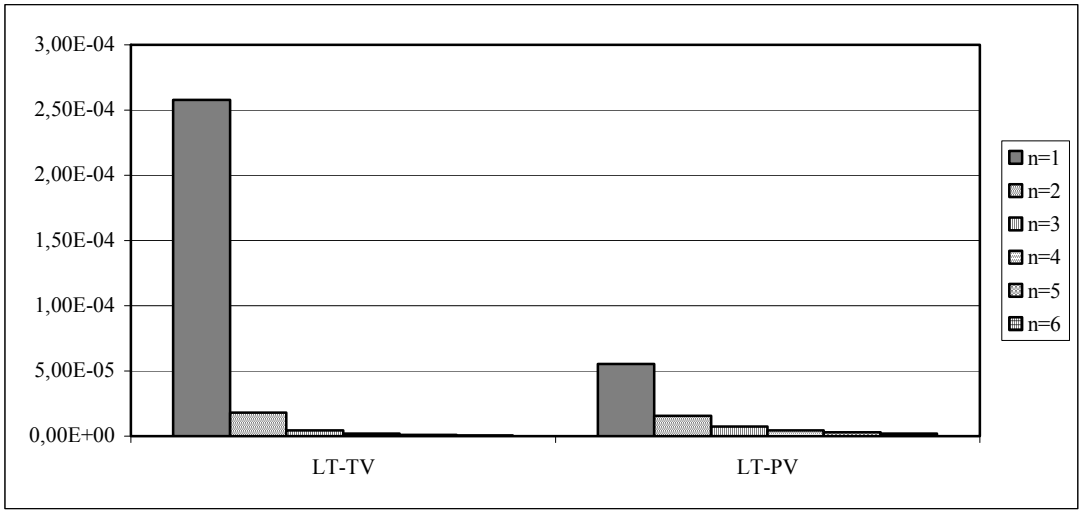
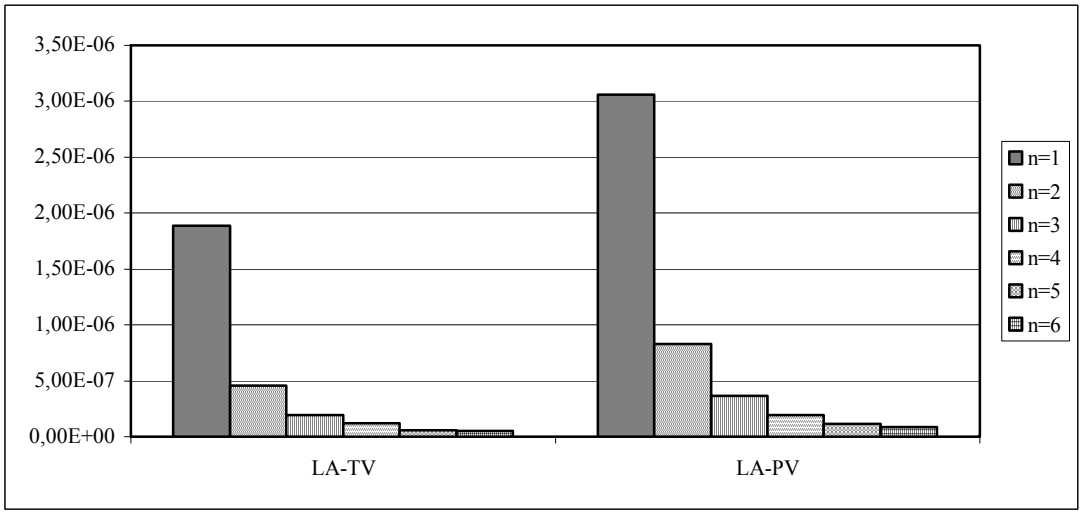


Figura 8.2 – Viga balcão - diferenças normalizadas tendo como referência a solução Lagrangiana em Trabalhos Virtuais com parametrização de Euler



(a)



(b)

Figura 8.3 – Viga balcão - diferenças normalizadas tendo como referência a solução com parametrização de Euler para cada situação de análise

A Figura 8.4 apresenta o gráfico dos deslocamentos do ponto situado na extremidade da barra. Como mostrado nas figuras 8.2 e 8.3, as diferenças existentes entre os vários tipos de solução são muito reduzidas, não sendo perceptíveis em um gráfico. Desta forma, o gráfico apresentado na Figura 8.4 foi elaborado com os dados obtidos pelo algoritmo Lagrangiano atualizado, matriz de rigidez simétrica e parametrização de Rodrigues, coincidente em todos os pontos com os demais gráficos.

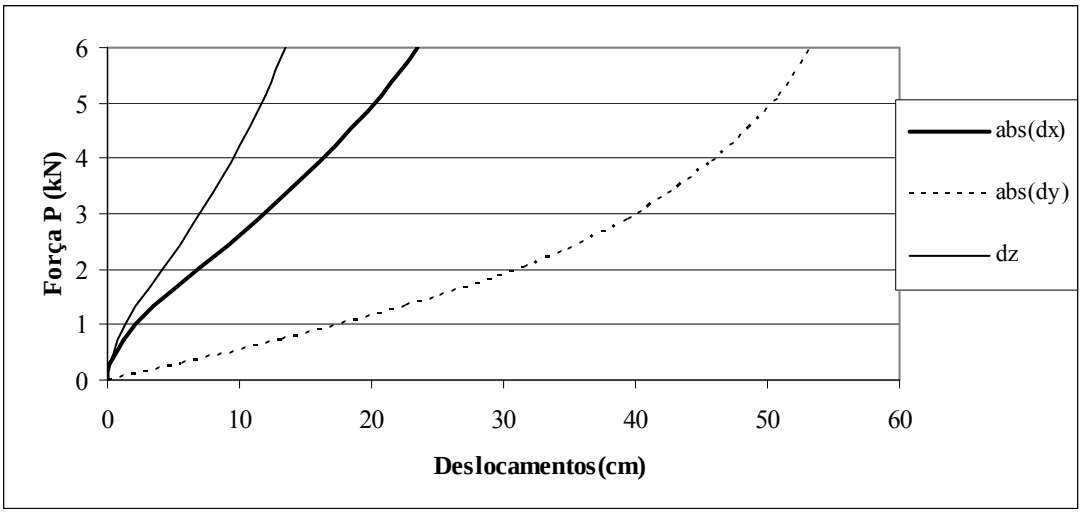


Figura 8.4 – Viga balcão - deslocamentos da extremidade da barra

Tabela 8.2 – Viga balcão - número de iterações e tempo de processamento

Algoritmo	Forma fraca	Parametrização	№ de iterações	Tempo (ms)
LAGRANGIANO TOTAL	Trabalhos Virtuais	Euler	56	219
		Rodrigues n=1	57	140
		Rodrigues n=2	55	219
		Rodrigues n=3	56	203
		Rodrigues n=4	56	203
		Rodrigues n=5	56	219
		Rodrigues n=6	56	219
	Potências Virtuais	Euler	56	188
		Rodrigues n=1	55	188
		Rodrigues n=2	55	188
		Rodrigues n=3	56	203
		Rodrigues n=4	56	203
		Rodrigues n=5	56	203
		Rodrigues n=6	56	203
LAGRANGIANO ATUALIZADO	Trabalhos Virtuais	Euler	55	219
		Rodrigues n=1	54	218
		Rodrigues n=2	55	218
		Rodrigues n=3	55	234
		Rodrigues n=4	55	219
		Rodrigues n=5	55	219
		Rodrigues n=6	55	219
	Potências Virtuais	Euler	56	203
		Rodrigues n=1	55	203
		Rodrigues n=2	56	204
		Rodrigues n=3	56	203
		Rodrigues n=4	56	203
		Rodrigues n=5	56	203
		Rodrigues n=6	56	203

A Tabela 8.2 apresenta o número de iterações necessárias para atingir a convergência considerando uma tolerância de 10^{-6} e o tempo gasto para a solução do problema nas diferentes situações de análise utilizando um microcomputador de clock 1.73GB e 2GB de memória RAM. Cabe observar que estes tempos não são absolutos, havendo variação entre um processamento e outro, servem apenas para dar uma idéia da ordem de grandeza dos tempos gastos. Em relação às parametrizações, devido ao tamanho reduzido do problema, as diferenças observadas foram muito pequenas, apesar da notável diferença existente no número de operações necessárias, principalmente entre a parametrização de Rodrigues e a de Euler.

Tanto com a matriz de rigidez obtida a partir do Teorema dos Trabalhos Virtuais como com a matriz de rigidez obtida a partir do Teorema das Potências Virtuais a adoção do algoritmo Lagrangiano atualizado implicou em um acréscimo do tempo de processamento em relação ao algoritmo Lagrangiano total, acréscimo de tempo que pode ser reduzido com o aperfeiçoamento do algoritmo atualizado. As soluções com matriz de rigidez não-simétrica apresentaram tempo de processamento significativamente inferior ao das soluções com matriz de rigidez simétrica, tanto para o algoritmo Lagrangiano total como para o atualizado. Entretanto, para problemas maiores esta vantagem pode ser perdida, em virtude do acréscimo de tempo de processamento para solução do sistema de equações, tendo em vista a necessidade de trabalhar com a matriz completa, pela inexistência de simetria.

8.1.2 Flambagem lateral de viga em balanço

Este exemplo foi criado em 1978 por Argyris et al [6], sendo posteriormente resolvido por vários pesquisadores, como [19, 68, 77, 96, 99], dentre outros. Dispõe também de solução analítica para a determinação da carga crítica de flambagem, que pode ser encontrada em Timoshenko; Gere [92].

Trata-se de uma viga em balanço com carga concentrada na extremidade livre, conforme mostrado na Figura 8.5. Esta viga possui comprimento de 100 cm, área de 1 cm^2, momentos de inércia à flexão J_z e J_y iguais a 1 cm^4 e $0{,}125$ cm^4, respectivamente e momento de inércia à torção J_t de $0{,}01$ cm^4. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são, respectivamente, 10000 N/cm^2 e 5000 N/cm^2.

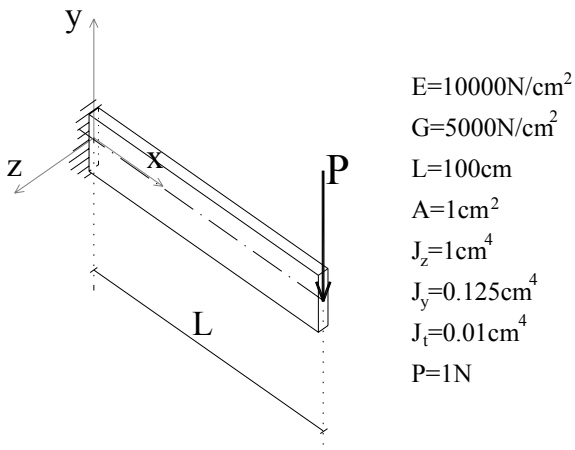


Figura 8.5 – Viga em balanço – geometria e propriedades mecânicas

Esta viga foi discretizada com 5 elementos quadráticos, com um total de 11 nós. Inicialmente foi investigada a estabilidade lateral da viga, sendo obtido o mesmo valor de carga crítica para todas as parametrizações. A tabela 8.3 apresenta os valores da carga de flambagem lateral obtidos neste estudo, bem como os valores obtidos por algumas das referências citadas.

Tabela 8.3 – Viga em balanço - carga crítica de flambagem

FONTE	Valor obtido(N)
Timoshenko; Gere [92]	*0,10033*
Saleeb;Chang;Gendy [68]	*0,1016*
Yojo [99]	*0,10775*
Valor obtido	*0,1077*

Esta viga foi também analisada submetida a uma carga de 1 N e com a presença de uma imperfeição de forma a transpor o ponto de bifurcação. A imperfeição foi simulada pela aplicação de uma carga de pequeno valor na extremidade da barra na direção do eixo *z*, carga esta correspondente a $1/1000$ da carga principal, conforme sugerido por Argyris et al. em [4].

Na Figura 8.6 encontram-se representados os deslocamentos da extremidade da barra em função da carga atuante. O gráfico apresentado foi elaborado com os valores de deslocamentos obtidos para a solução com algoritmo Lagrangiano atualizado, matriz de rigidez não-simétrica e parametrização de Rodrigues para $n = 2$, mas é equivalente aos gráficos obtidos para a parametrização de Euler e os valores de n estudados para a parametrização generalizada de Rodrigues.

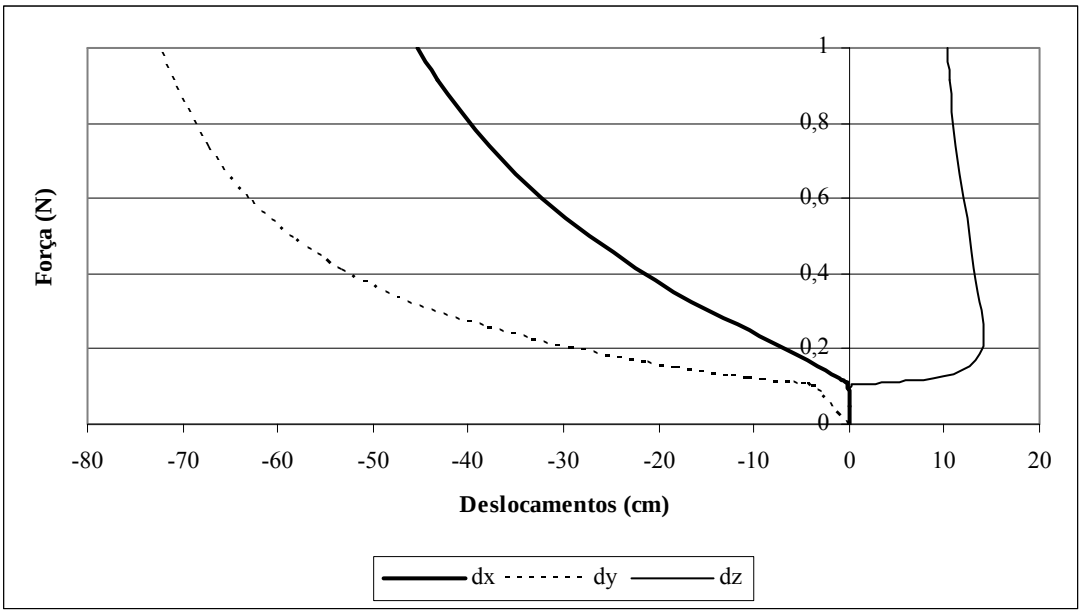


Figura 8.6 – Viga em balanço - gráfico carga x deslocamentos da extremidade da barra

Também para este exemplo foi feita a comparação entre os resultados finais obtidos nas diferentes situações estudadas de algoritmos, matrizes de rigidez e parametrizações. A Figura 8.7 mostra a média das diferenças obtidas para o valor dos deslocamentos finais do nó extremo comparada com a solução obtida com o algoritmo Lagrangiano total, matriz de rigidez simétrica e parametrização de Euler. Podemos observar que as maiores diferenças não ultrapassam 3%.

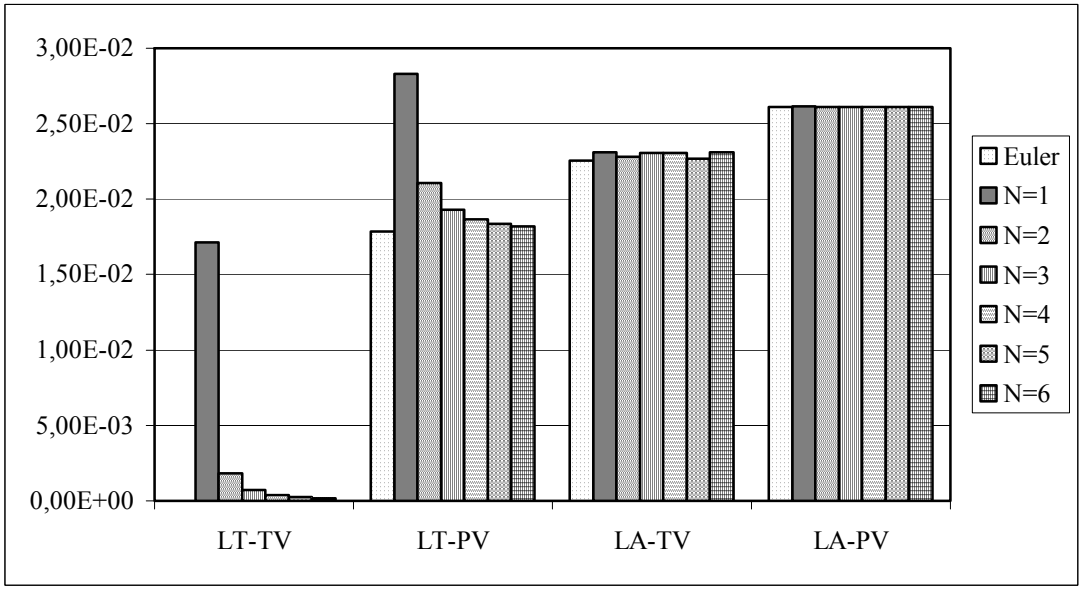
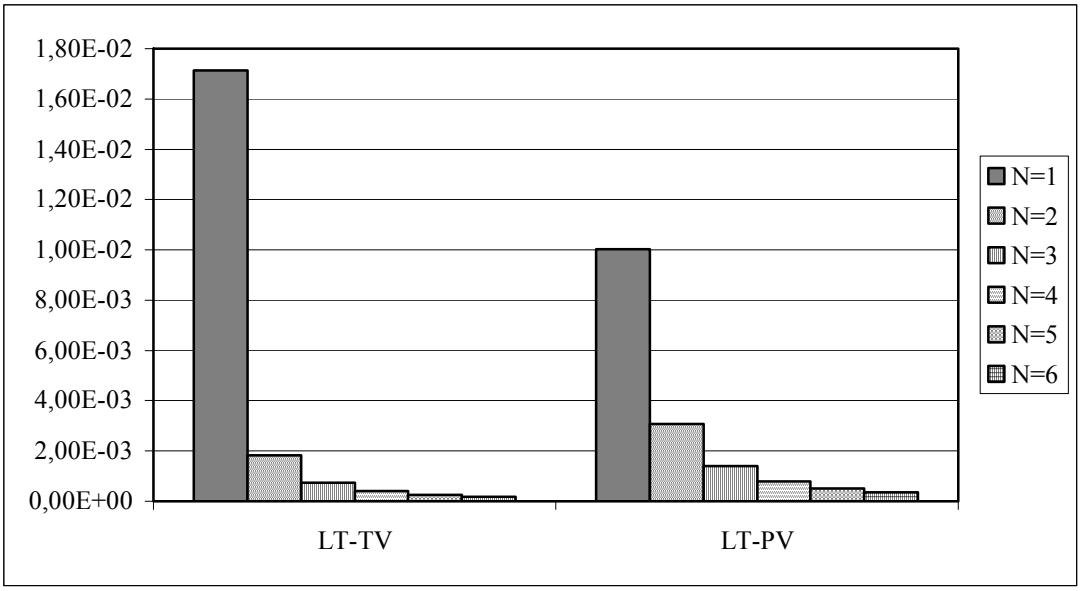


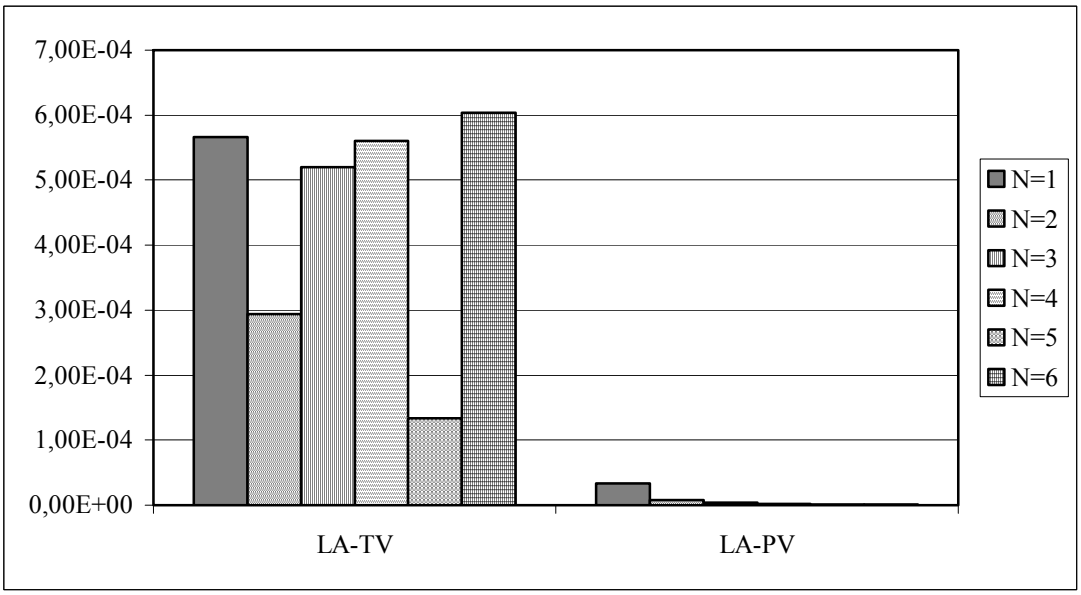
Figura 8.7 – Viga em balanço - diferenças normalizadas tendo como referência a solução Lagrangiana em Trabalhos Virtuais com parametrização de Euler

Para melhor visualização, apresentam-se na Figura 8.8 os mesmos resultados, tomando agora por referência em cada série os valores obtidos para esta mesma série com a

parametrização de Euler. Nestes gráficos, o decréscimo esperado da diferença entre o valor obtido com cada parametrização e o valor obtido com a parametrização de Euler, à medida que cresce o valor de n, só é observado nos resultados colhidos com algoritmo Lagrangiano total (a). Esta tendência não se mantém nos resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano atualizado (b), o que pode ser atribuído à instabilidade existente no problema e ao fato de o processo de atualização tornar o resultado dependente da trajetória. Entretanto é muito maior a uniformidade destes resultados. Nas soluções de algoritmo Lagrangiano atualizado, matriz de rigidez não-simétrica, para todas as parametrizações as diferenças relativas à parametrização de Euler foram inferiores a $3,5 \times 10^{-5}$.



(a)



(b)

Figura 8.8 – Viga em balanço - diferenças normalizadas tendo como referência a solução com parametrização de Euler para cada situação de análise

8.1.3 Flambagem lateral de chapa em L em balanço

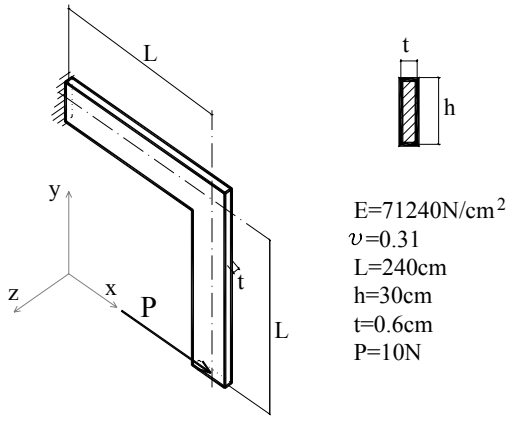


Figura 8.9 – Chapa em balanço – geometria e propriedades mecânicas

O terceiro exemplo foi apresentado por Argyris et al. [3], e pode ser encontrado em diversos autores [4, 20, 23, 45, 60, 68, 80, 90, 91, 98 e 101], dentre outros. Consiste de uma chapa, conforme apresentada na Figura 8.9, que possui uma extremidade engastada e a outra em balanço onde é aplicada, no centro de gravidade da seção, uma força na direção do eixo x. A seção transversal da chapa é retangular e possui dimensões de $0,6$ cm e 30 cm e cada uma das suas barras tem 240 cm de comprimento. Os módulos de elasticidade longitudinal e transversal são, respectivamente, 71240 N/cm^2 e 27400 N/cm^2. Cada barra da chapa foi discretizada com 5 elementos quadráticos apresentando a estrutura um total de 21 nós. Inicialmente foi determinada a carga de flambagem, sendo encontrado um valor de $1,0896$ N em todos os casos estudados. A tabela 8.4 mostra os resultados obtidos, bem como os apresentados por alguns dos trabalhos citados anteriormente.

Como no exemplo anterior, após a determinação da carga que provoca a instabilidade lateral da estrutura, foi acrescentada uma carga de pequeno valor para transpor o ponto de bifurcação. Os resultados obtidos estão apresentados na Figura 8.10, juntamente com os resultados da análise com elementos de casca. O gráfico foi elaborado com os dados oriundos da análise com o algoritmo Lagrangiano atualizado, matriz de rigidez não-simétrica e parametrização de Rodrigues $(n = 1)$, graficamente similar aos gráficos das outras séries de análise, como se pode observar pelos valores obtidos na comparação entre resultados.

Tabela 8.4 – Chapa em balanço - carga crítica de flambagem

FONTE	Valor obtido(N)
Argyris et al [3]	$1,088$
Simo; Vu-Quoc [80]	$1,09$
Crisfield [23]	$1,09$
Saleeb;Chang Gendy [68]	$1,0924$
Yojo [99]	$1,0896$
Valor obtido	$1,0896$

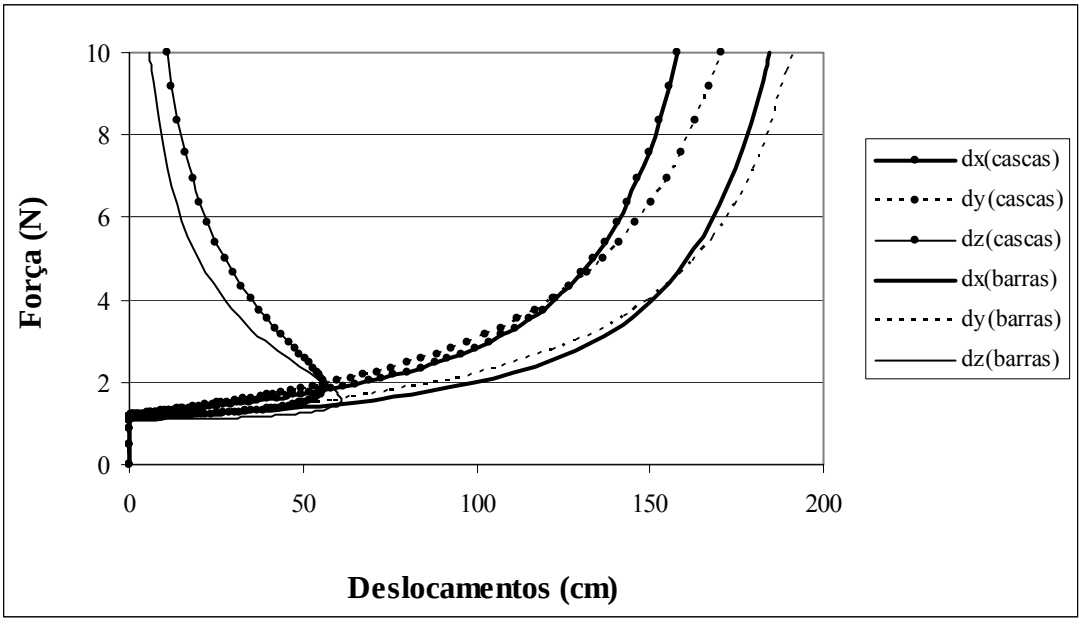


Figura 8.10 – Chapa em balanço - Gráfico força x deslocamento da chapa: resultados obtidos com elementos de casca e barra

A Figura 8.11 mostra o resultado da comparação feita entre as médias dos resultados finais obtidos nas diferentes situações estudadas de algoritmos, matrizes de rigidez e parametrizações e as médias dos resultados obtidos na análise com algoritmo Lagrangiano total, matriz de rigidez simétrica e parametrização de Euler. As maiores diferenças observadas não ultrapassam 2×10^{-3}.

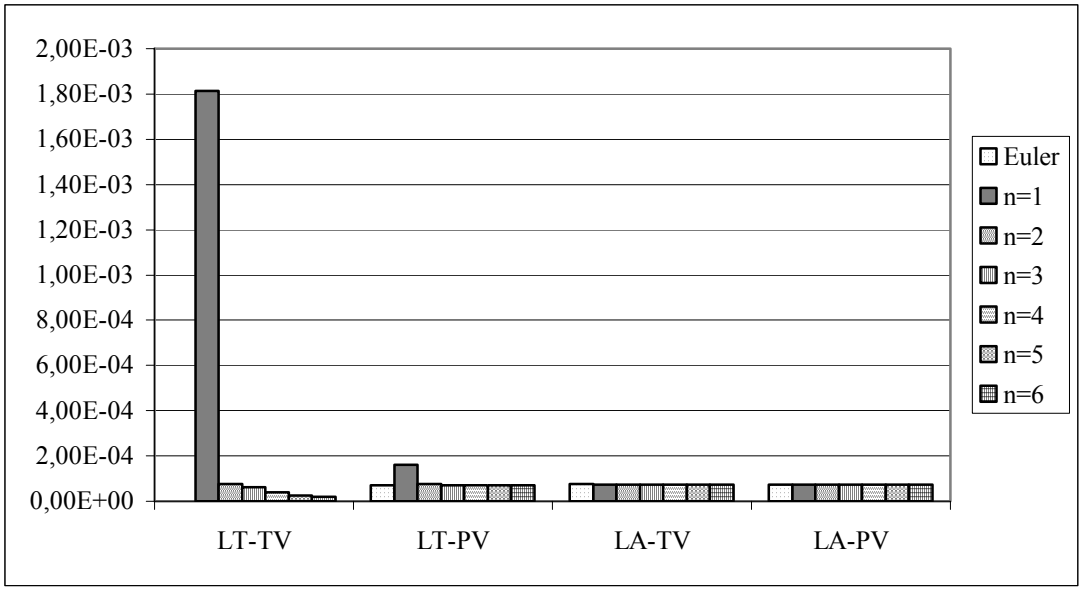
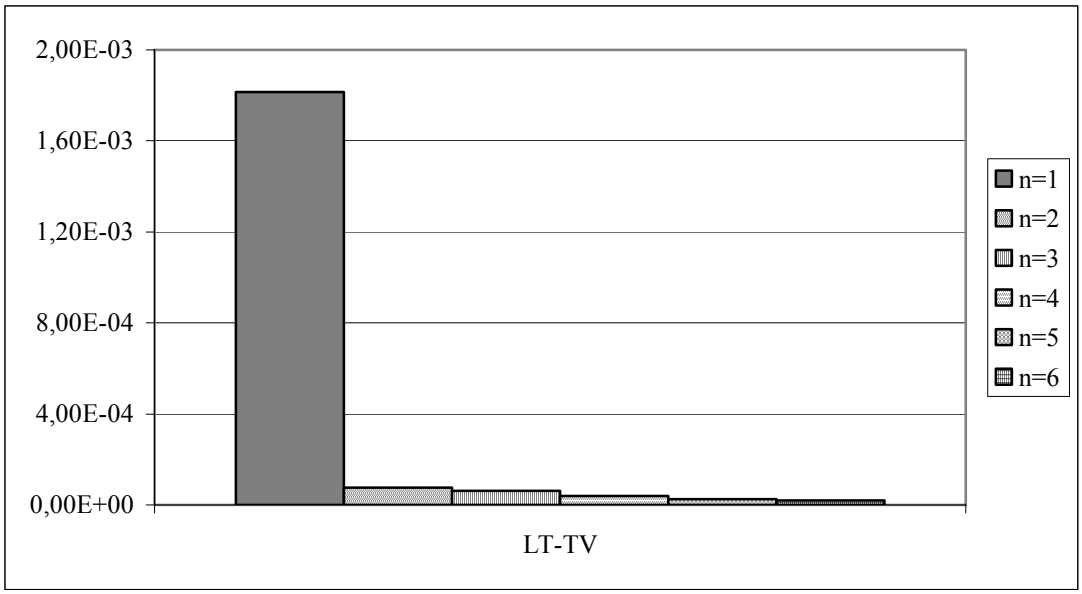
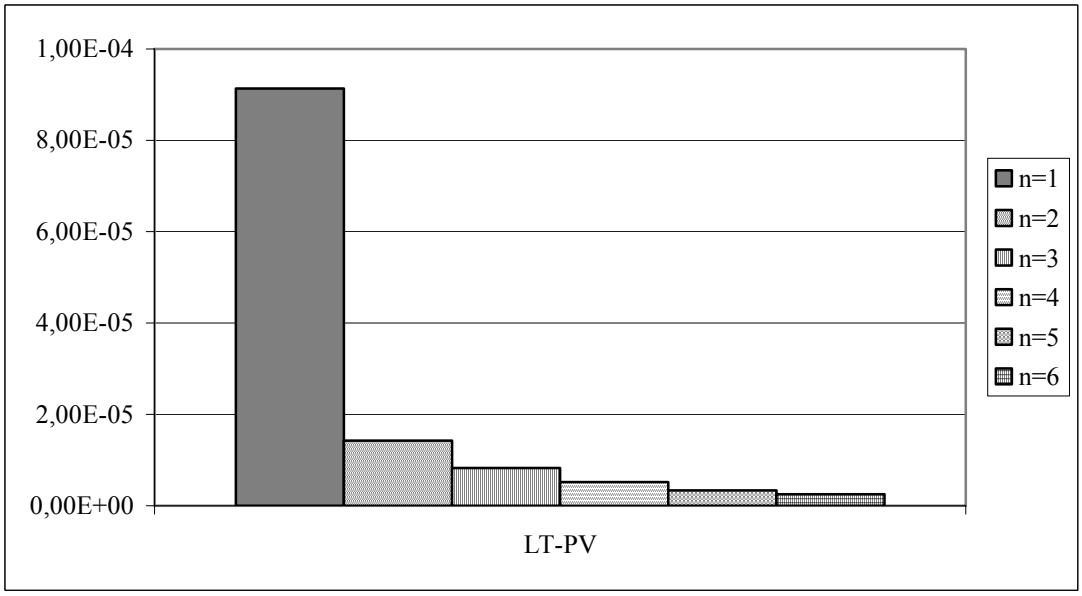


Figura 8.11 – Chapa em balanço - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/matriz simétrica/ parametrização de Euler

Foram construídos também gráficos de cada série nos quais se tomou como referência os valores obtidos utilizando a parametrização de Euler. Estes gráficos podem ser vistos nas Figuras 8.12 e 8.13. Aqui se repetiu o que ocorreu com o exemplo 8.1.2: para o algoritmo Lagrangiano total, com o crescimento do valor de n ocorreu redução da diferença em relação aos valores resultantes do uso da parametrização de Euler, fato que não se observou no algoritmo Lagrangiano atualizado, o que podemos atribuir novamente à existência de ponto crítico no problema em estudo. Estes resultados, entretanto, são bastante próximos, sempre fornecendo diferenças relativas inferiores a 10^{-4} em comparação com o resultado da parametrização de Euler, algoritmo Lagrangiano total e matriz de rigidez simétrica e a 1.2×10^{-6} em relação à parametrização de Euler de sua própria série.

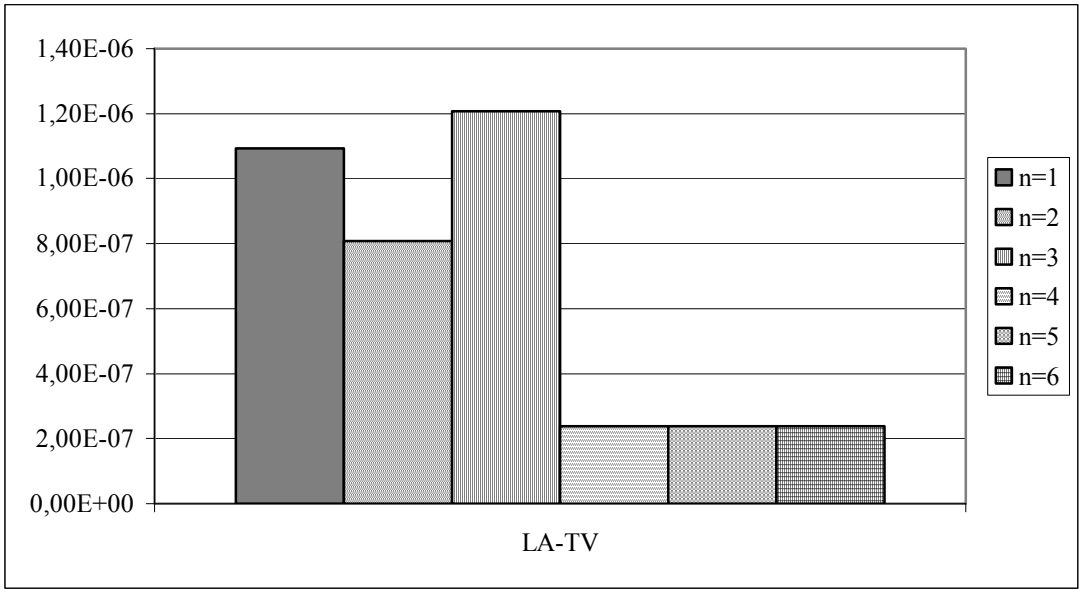


(a)

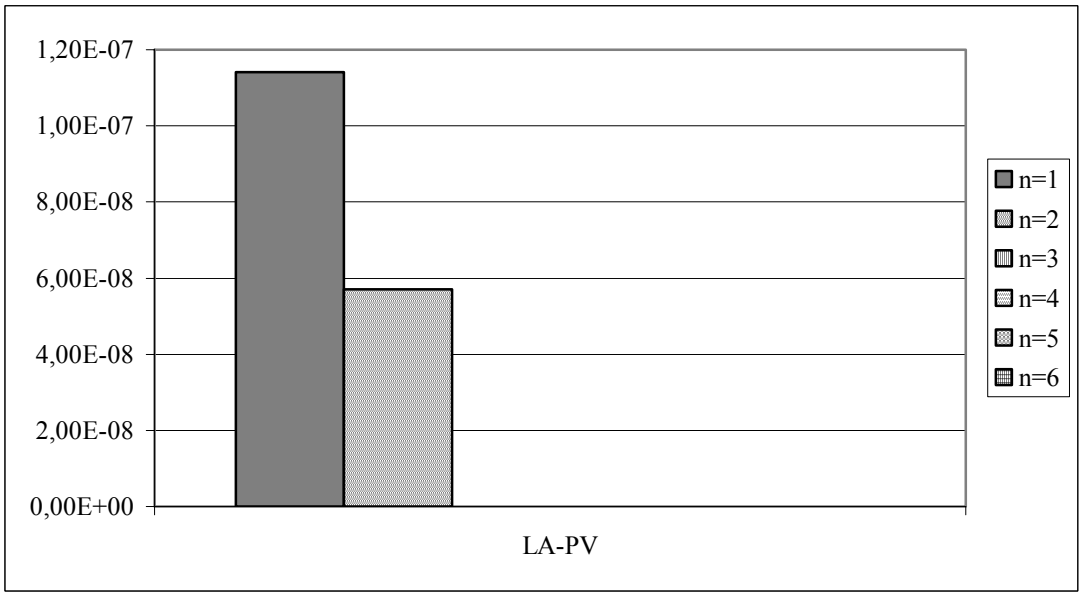


(b)

Figura 8.12 – Chapa em balanço - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total.



(a)



(b)

Figura 8.13 – Chapa em balanço - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado

8.1.4 Flambagem lateral de pórtico biapoiado

O quarto exemplo é apresentado nos trabalhos de Argyris et al. [4], tendo sido estudado também por [3, 30, 68, 80, 99, 101], entre outros. Trata-se do pórtico biapoiado apresentado na figura 8.14, cuja seção transversal e material são idênticos aos do exemplo 8.1.3.

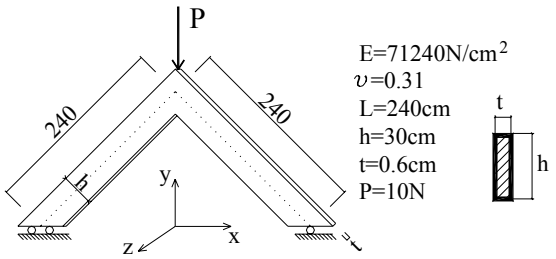


Figura 8.14 – Pórtico biapoiado – geometria e propriedades mecânicas

Este pórtico foi analisado com 5 elementos de três nós em cada barra, apresentando um total de 21 nós. Os apoios foram impedidos de girar em torno dos eixos x e y, sendo que em um deles foram impedidos os deslocamentos nas direções x, y e z e no outro apenas nas direções y e z. Foram aplicadas forças na direção y no centro de gravidade da seção no ápice do pórtico, sendo uma positiva e outra negativa. Os resultados obtidos para a carga crítica de flambagem, idênticos para todas as parametrizações estudadas, bem como os constantes das bibliografias citadas, encontram-se na tabela 8.5.

Tabela 8.5 – Pórtico biapoiado - carga crítica de flambagem

FONTE	P(-) (N)	P(+) (N)
Argyris [3]	$-3,9459$	$12,6943$
Saleeb;Chang;Gendy [68]	$-3,9701$	$11,8153$
Yojo [99]	$-3,96154$	-
VALOR OBTIDO	$-3,9416$	$11,6197$

Após a determinação da carga crítica de flambagem, aplicou-se no ápice do pórtico uma carga de pequeno valor na direção *z*, de forma a simular uma imperfeição e ultrapassar a carga de flambagem. A Figura 8.15 apresenta o gráfico obtido com algoritmo atualizado/matriz de rigidez não-simétrica/parametrização de Rodrigues com $n = 1$, similar aos resultados obtidos com todos os processos de solução adotados e todas as parametrizações estudadas, tendo em vista as diferenças apresentadas entre eles, conforme pode ser visto nas Figuras 8.16 e 8.17.

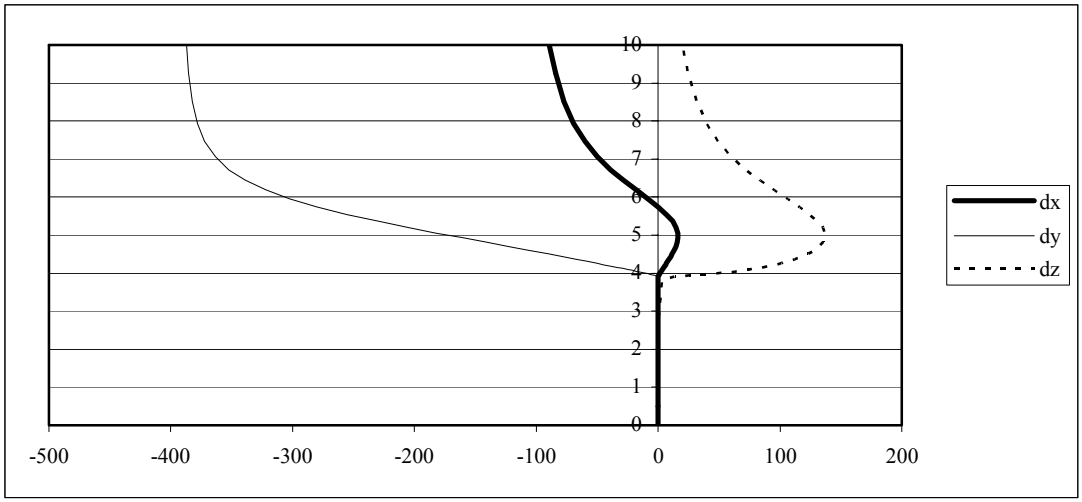


Figura 8.15 – Pórtico biapoiado - deslocamentos do vértice

A Figura 8.16 mostra as diferenças normalizadas resultantes da comparação dos resultados finais obtidos com cada algoritmo/matriz de rigidez/parametrização estudados, tendo como padrão a solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/matriz de rigidez simétrica/parametrização de Euler. A máxima diferença obtida foi de 7.11×10^{-3}, correspondente ao resultado obtido com algoritmo Lagrangiano total/matriz de rigidez simétrica/parametrização de Rodrigues com $n = 1$.

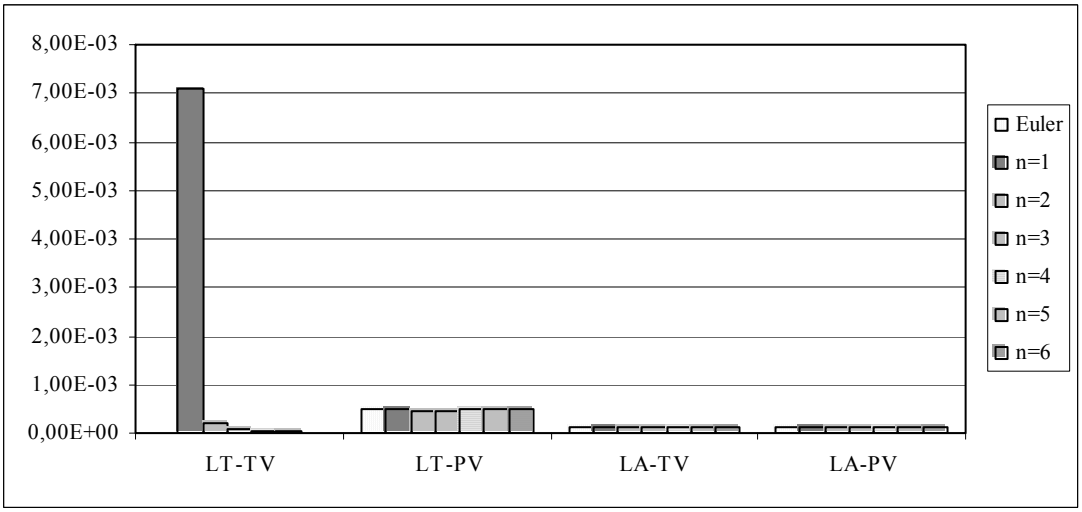
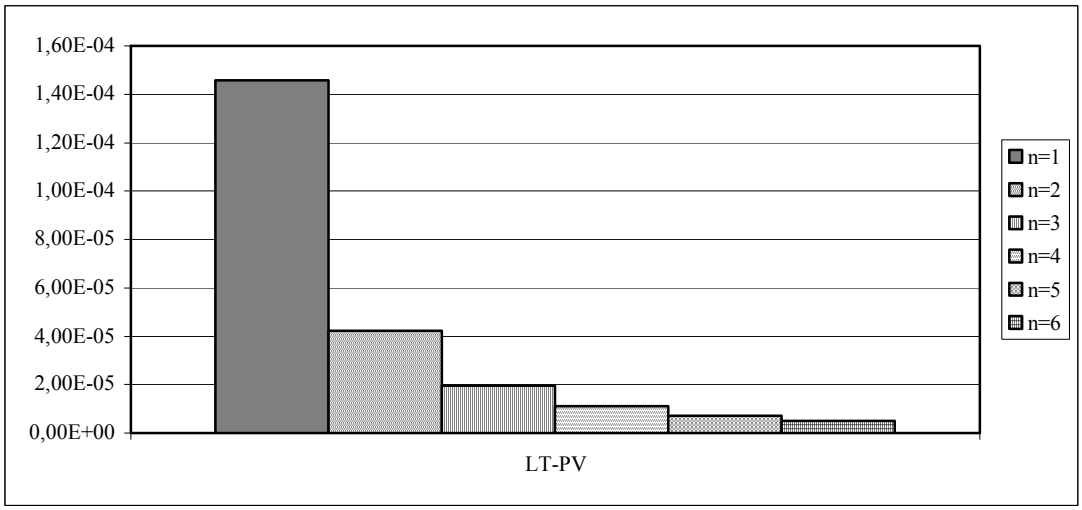


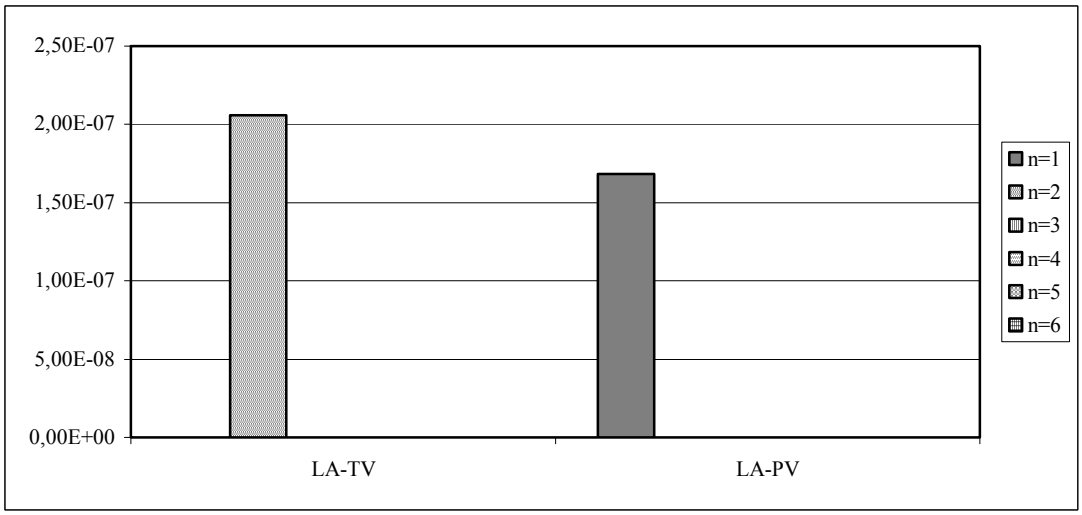
Figura 8.16 – Pórtico biapoiado - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler

Foi feita a comparação, também, para cada situação de análise algoritmo/matriz de rigidez, entre os resultados obtidos com as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler. Os resultados da análise com algoritmo Lagrangiano total/matriz de rigidez simétrica podem ser vistos na Figura 8.16. Na Figura 8.17, em (a) temos os valores obtidos na análise feita com algoritmo Lagrangiano total/matriz de rigidez não-simétrica e em (b) os

valores obtidos nas análises feitas com algoritmo Lagrangiano atualizado, tanto com matriz de rigidez simétrica, como não simétrica. Na Figura 8.17 (a) se observa a tendência da redução da diferença em relação à parametrização de Euler, com o crescimento do valor de n. Tendência que não se observa no caso das análises com algoritmo Lagrangiano atualizado exibidas na Figura 8.17 (b), pelas razões já comentadas quando da apresentação do exemplo 8.1.2.



(a)



(b)

Figura 8.17 – Pórtico biapoiado - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise.

8.1.5 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (1)

Este exemplo foi incluído aqui devido às grandes rotações que apresenta apenas sob efeito de cargas concentradas conservativas. O exemplo consiste de um pórtico constituído por três barras de igual comprimento, todas situadas no plano $x - y$. O pórtico tem uma

extremidade engastada e a outra livre, onde atuam três forças de igual valor $(4\ \mathrm{N})$ aplicadas nas direções x, y e $-z$, conforme mostra a figura 8.18. O módulo de Elasticidade do material é de $E = 71240\, N/cm^2$, o coeficiente de Poisson vale $\nu = 0.3$ e a seção transversal das barras é idêntica à do exemplo anterior. A estrutura foi discretizada com cinco elementos de três nós em cada barra, com um total de 15 barras e 31 nós.

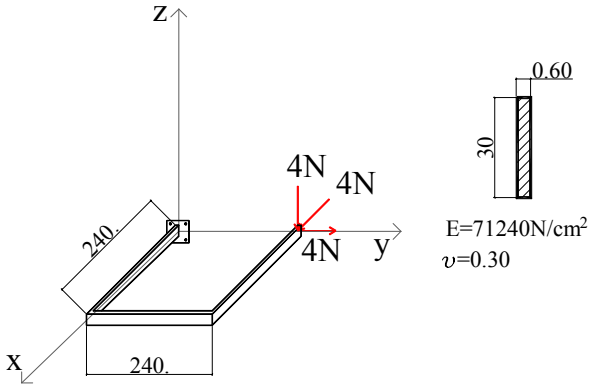


Figura 8.18 – Pórtico plano submetido a carregamento espacial (1) – geometria e propriedades mecânicas

A Figura 8.19 mostra o gráfico força versus deslocamento da extremidade livre, juntamente com os valores obtidos em uma análise feita com elementos de cascas, conforme descrito no exemplo 8.2.3. Na análise, foi obtida uma rotação total máxima de 2.15 radianos no nó extremo.

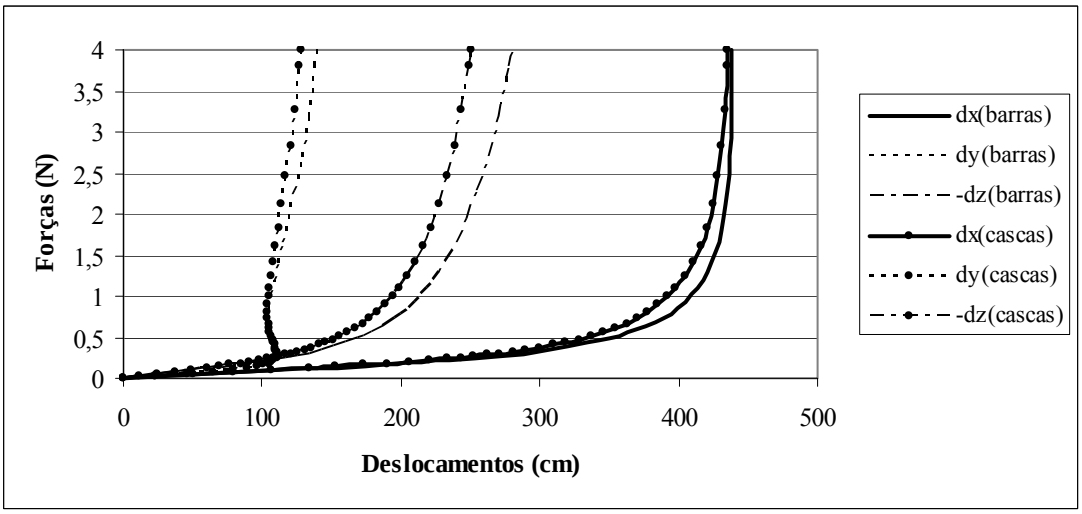


Figura 8.19 – Gráfico força x deslocamento dos exemplos 8.1.5 e 8.2.3

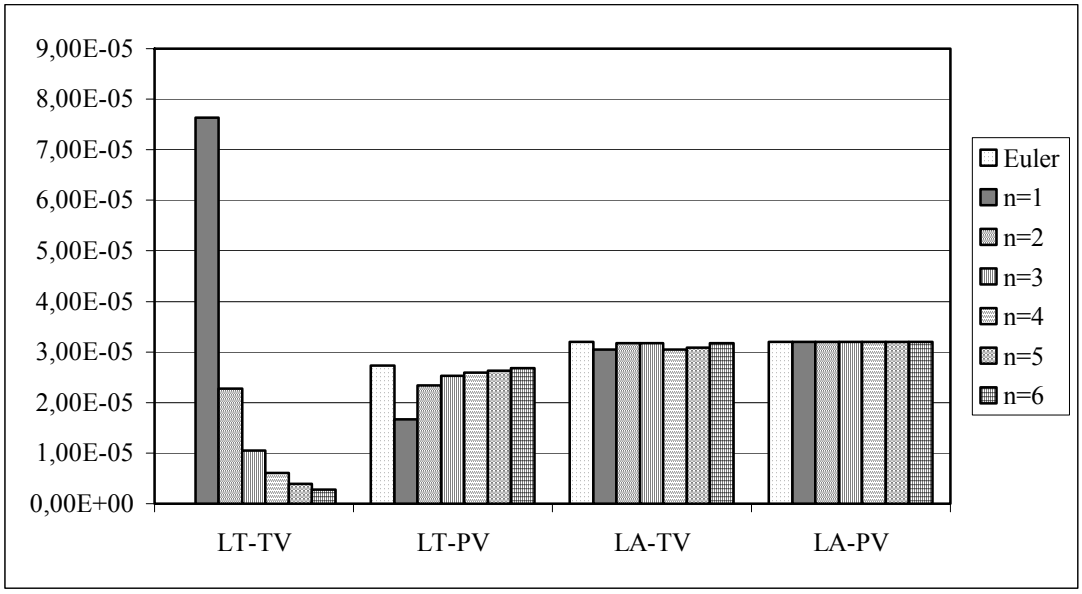


Figura 8.20 – Pórtico plano (1) - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler

A Figura 8.20 mostra as diferenças normalizadas obtidas da comparação dos resultados dos diferentes algoritmos/ matrizes de rigidez/ parametrizações tomando como referência a solução com algoritmo Lagrangiano total/matriz simétrica/ parametrização de Euler. A maior diferença relativa encontrada foi inferior a 8×10^{-5}, obtida com a parametrização de Rodrigues. A figura 8.21 mostra as diferenças relativas tomando como referência a solução obtida com a parametrização de Euler de cada série. Nela é possível observar que, para as soluções com algoritmo Lagrangiano total, se mantém a redução da diferença para a parametrização de Euler à medida que cresce o valor de n da parametrização generalizada de Rodrigues. As soluções com algoritmo Lagrangiano total/ matriz não-simétrica apresentaram diferenças relativas inferiores a 3×10^{-5}, enquanto as soluções em algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz simétrica apresentaram diferenças relativas máximas inferiores a 2×10^{-6}. Todos os resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz não-simétrica coincidiram.

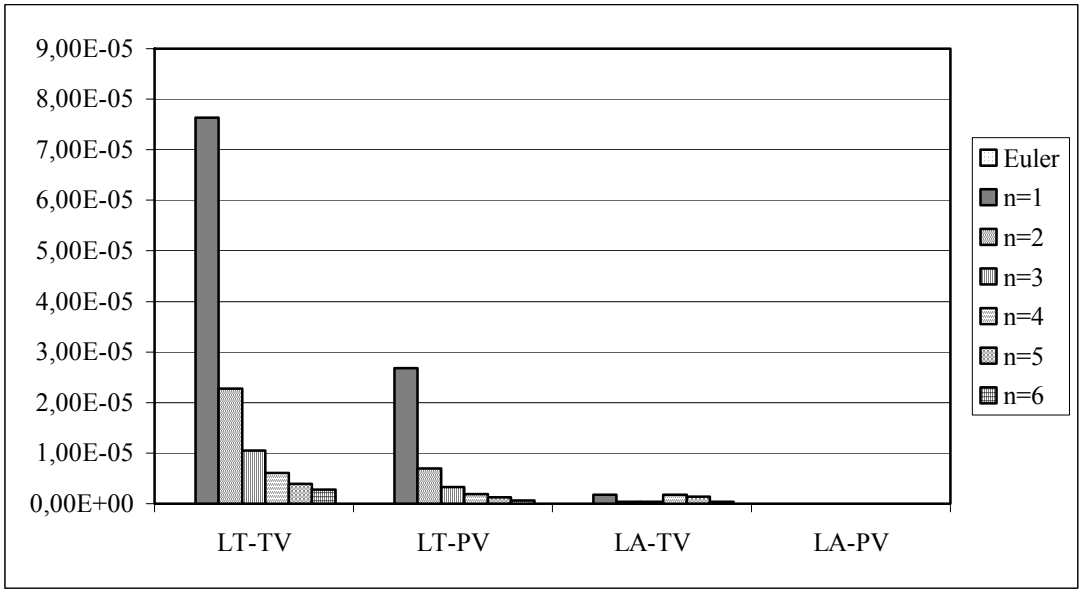


Figura 8.21 – Pórtico plano (1) - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise

8.1.6 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (2)

Este exemplo é semelhante ao Exemplo 8.1.5. Trata-se de uma estrutura de mesmo material, com mesmo número e tamanho das barras e mesmo carregamento, apenas com a seção transversal com dimensões invertidas, conforme se vê na Figura 8.22. A discretização da estrutura foi idêntica à do exemplo anterior, com 15 elementos de três nós, no total. A Figura 8.23 mostra o gráfico força versus deslocamento obtido na análise com elementos de barras e de cascas, conforme descrito no exemplo 8.2.4. Neste caso se obteve rotação total da extremidade de 2.56 radianos.

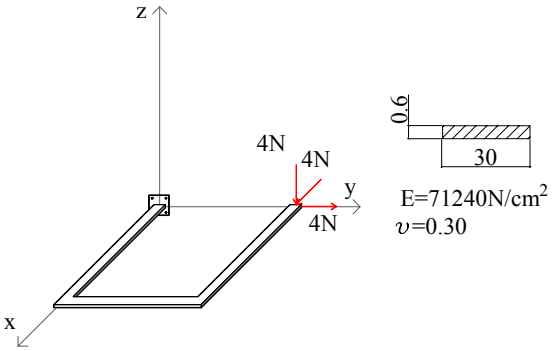


Figura 8.22 – Pórtico plano submetido a carregamento espacial (2) – geometria e propriedades mecânicas

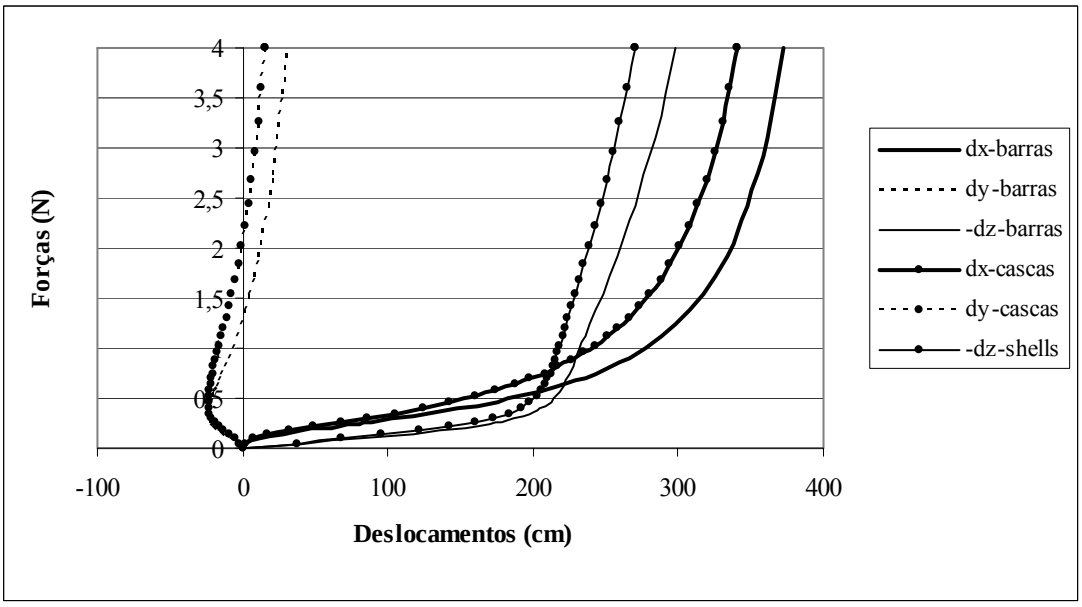


Figura 8.23 – Gráfico força x deslocamento dos exemplos 8.1.6 e 8.2.4

A Figura 8.24 mostra as diferenças normalizadas obtidas da comparação dos resultados dos diferentes algoritmos/ matrizes de rigidez/ parametrizações tomando como referência a solução com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler enquanto na Figura 8.25, a referência adotada foi a solução resultante da análise com a parametrização de Euler de cada série. Na comparação exibida na Figura 8.24 a maior diferença relativa foi inferior a 1.5×10^{-4}, obtida com a parametrização de Rodrigues.

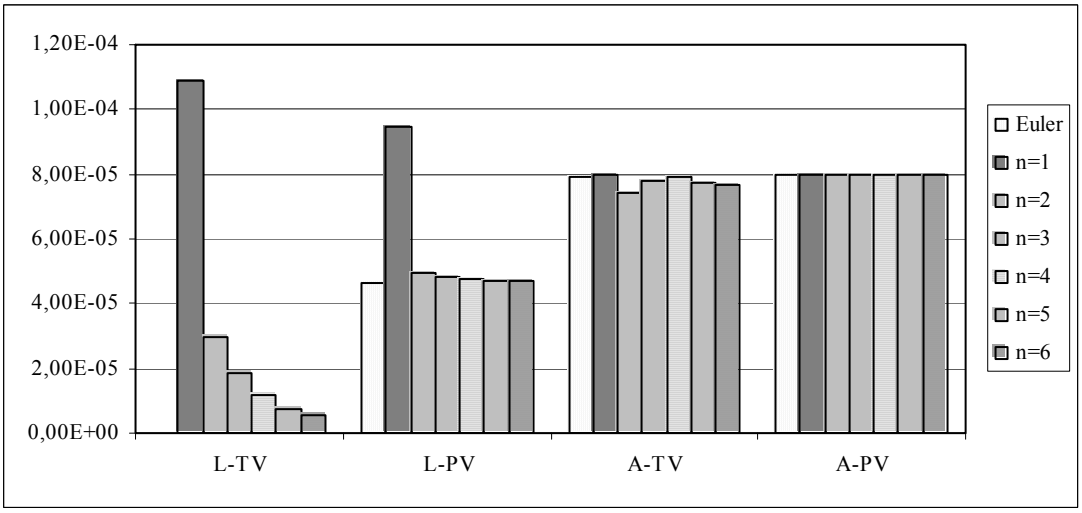
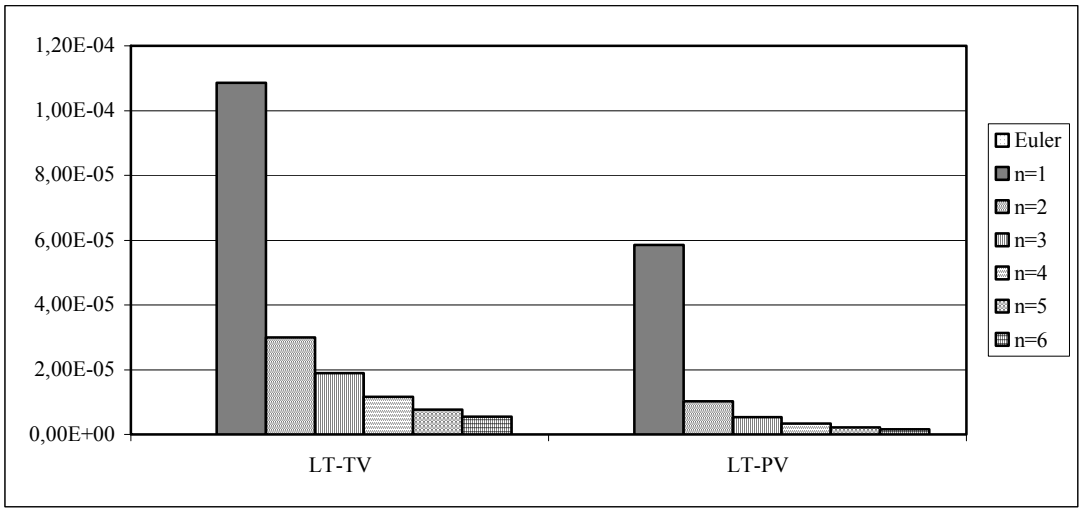


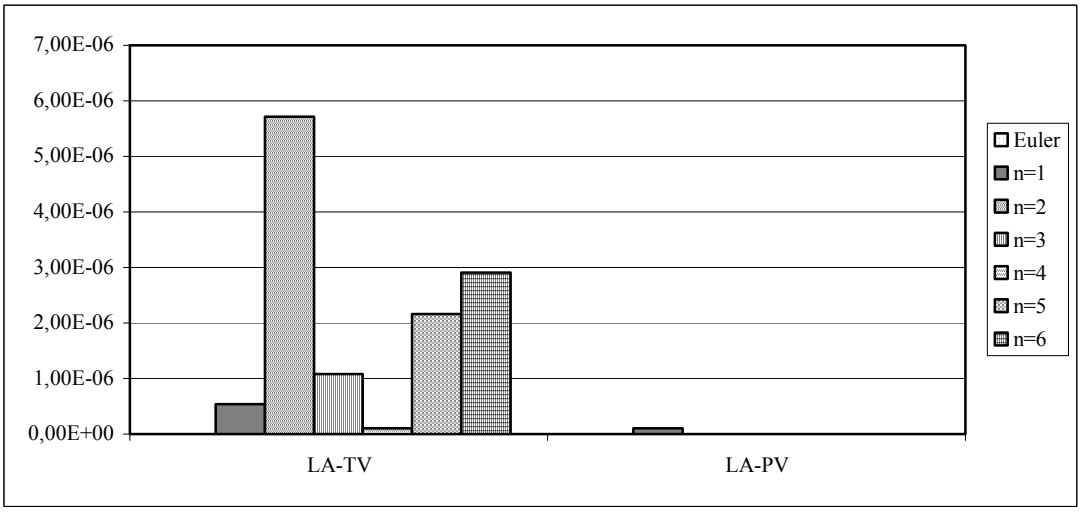
Figura 8.24 – Pórtico plano (2) - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler

A figura 8.25(b) evidencia a similaridade dos resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano atualizado, sendo as diferenças sempre inferiores a 6×10^{-6}. Na solução com

algoritmo Lagrangiano atualizado/matriz não-simétrica, apenas o resultado obtido com a parametrização de Rodrigues apresentou diferença em relação ao resultado obtido com a parametrização de Euler, da ordem de 1.07×10^{-7}. As demais diferenças foram nulas, ou seja, para solução com mesmo algoritmo, mesma matriz de rigidez não-simétrica, os resultados coincidiram com os resultados obtidos com a parametrização de Euler.



(a)



(b)

Figura 8.25 – Pórtico plano (2) - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise

8.2 Exemplos de estruturas analisadas com elementos de cascas

Adotou-se para o modelo de representação das estruturas de cascas o mesmo procedimento adotado para o modelo de estrutura de barras, analisando-se alguns dos

exemplos clássicos presentes na literatura para verificar a compatibilidade dos resultados obtidos com aqueles já disponíveis de forma a verificar o comportamento das parametrizações estudadas. Foram utilizadas as novas rotinas no programa PEFSYS, fazendo-se uso do elemento T6-3i desenvolvido por Campello; Pimenta; Wriggers [17]. Todos os exemplos foram analisados nas quatro combinações possíveis de algoritmo e matriz de rigidez com a parametrização de Euler, a parametrização de Rodrigues e a parametrização generalizada de Rodrigues para valores de n de 2 a 6, sendo realizadas comparações entre os resultados obtidos. Adotou-se para todos os exemplos o material elástico isótropo neo-Hookeano, mencionado no item 5.4 desta tese. Os exemplos aqui apresentados são amplamente conhecidos na literatura sobre o assunto sendo que alguns deles foram considerados paradigmáticos por Sze; Liu; Lo [87].

8.2.1 Flambagem lateral de viga em balanço

Este exemplo foi estudado por [16, 17, 77, 88, 96], dentre outros. Trata-se de uma viga em balanço com carga concentrada de magnitude $\boldsymbol{P}$ na extremidade livre (Figura 8.26). Esta viga possui comprimento de $1,0$ m e seção transversal de $0,1$ m $\times$ $0,1$ m. Admitiu-se módulo de elasticidade longitudinal de $E = 1 \times 10^7$ N/m^2 e coeficiente de Poisson $\nu = 0,3$. A viga foi estudada para o funcionamento como chapa e como placa com os quatro processos previstos, para as sete possibilidades de parametrização estudadas. Na análise como chapa a carga foi aplicada no plano dos elementos e na análise como placa no plano normal aos mesmos, conforme apresentado na Figura 8.27. Em todas as análises foram utilizados 20 elementos.

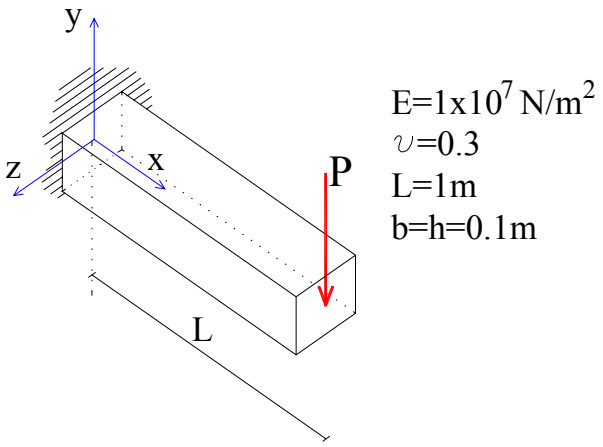


Figura 8.26 – Viga em balanço – geometria e características mecânicas

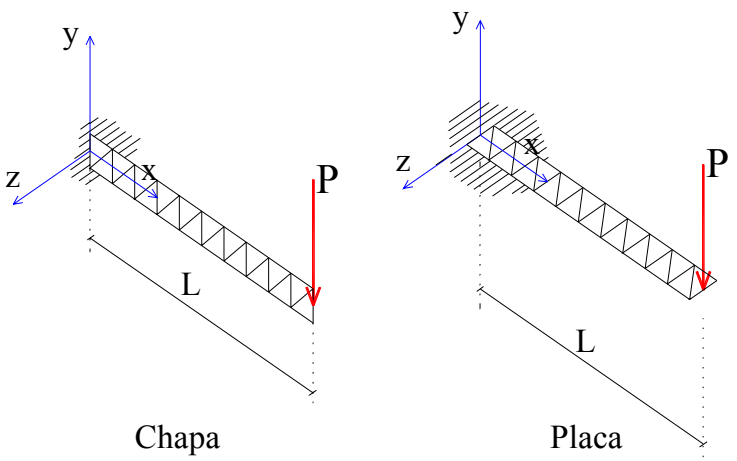


Figura 8.27 – Viga em balanço – distribuição dos elementos

A figura 8.28 apresenta as curvas força-deslocamento obtidas para o ponto médio da extremidade livre, onde se pode observar a similaridade dos resultados obtidos nas duas situações. Estão representados os resultados obtidos na análise como chapa com algoritmo Lagrangiano total, matriz de rigidez simétrica e parametrização generalizada de Rodrigues com $n = 4$ e os resultados da análise como placa com algoritmo Lagrangiano atualizado, matriz de rigidez não-simétrica e parametrização de Rodrigues com $n = 3$. Estão apresentados também os resultados obtidos por Simo; Fox; Rifai [77] e Campello [16], bem como os valores esperados com a teoria linear de Timoshenko [92].

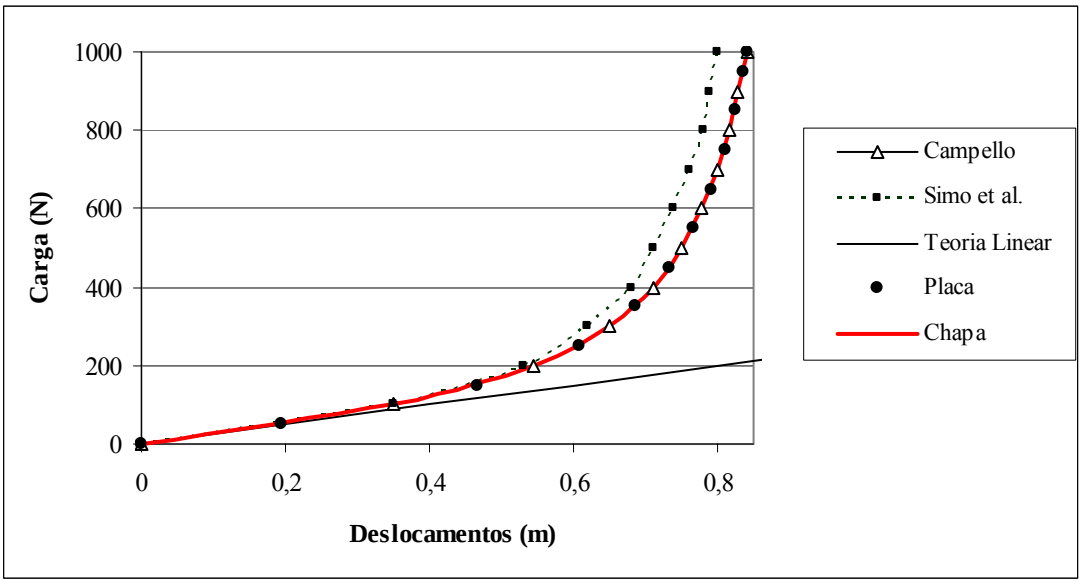


Figura 8.28 – Viga em balanço – curvas força – deslocamento

Foi feito o estudo das diferenças existentes entre as soluções obtidas nas várias análises realizadas e a solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/

parametrização de Euler. Todas as análises supondo o funcionamento como chapa apresentaram resultados idênticos. As análises supondo funcionamento como placa apresentaram os resultados mostrados na Figura 8.29.

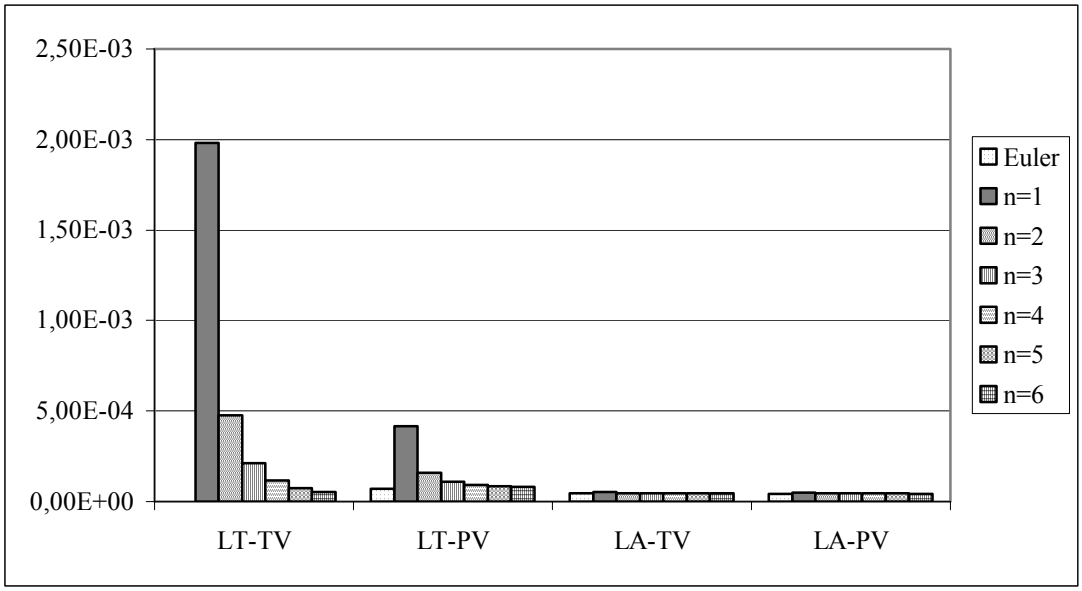


Figura 8.29 – Viga em balanço – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler análise como placa

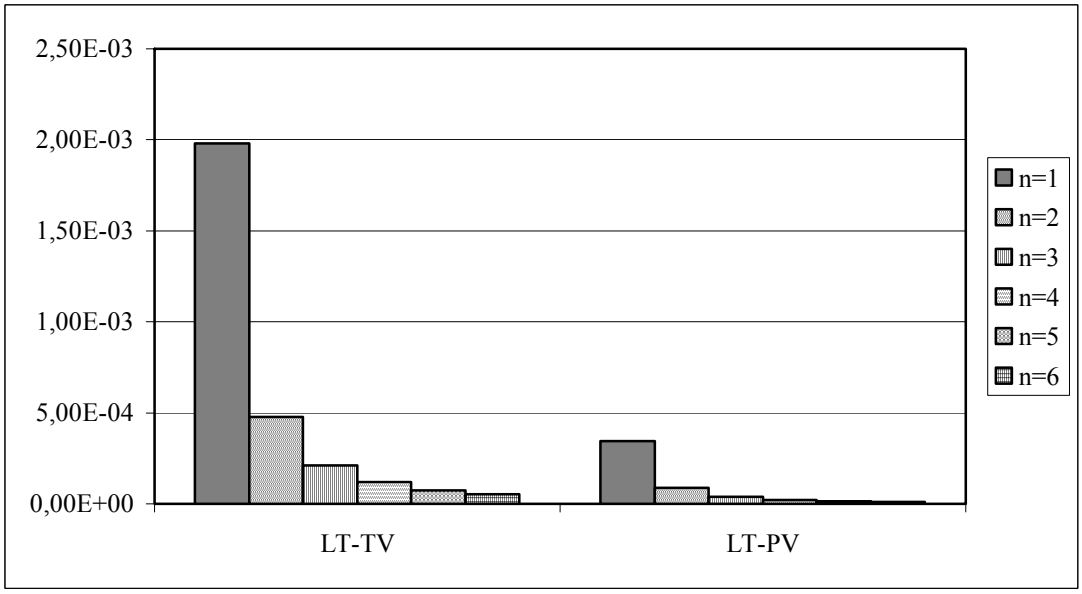


Figura 8.30 – Viga em balanço - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total.

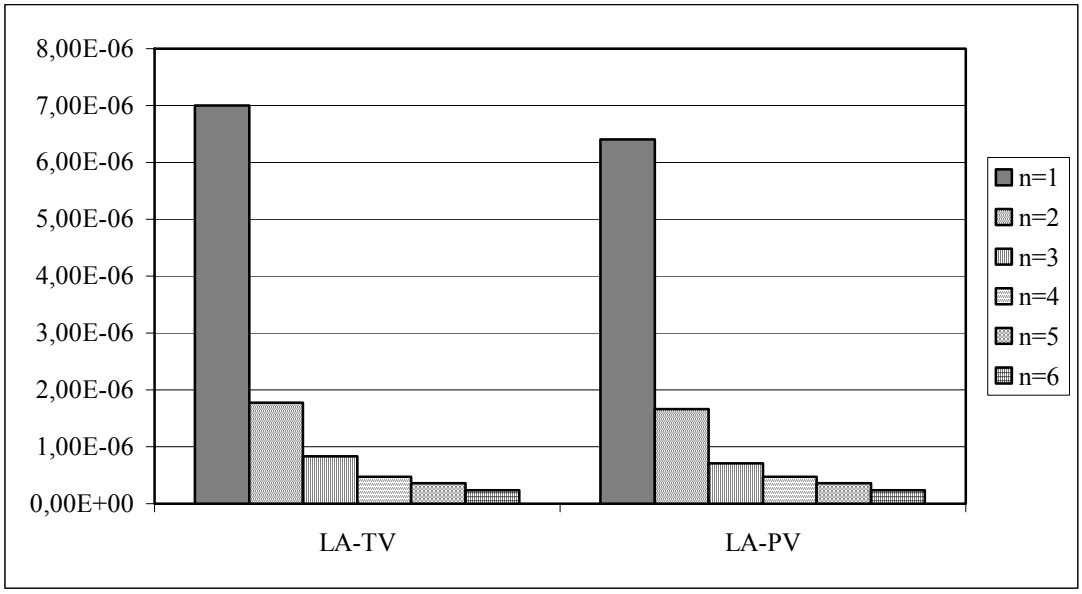


Figura 8.31 – Viga em balanço - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado.

As figuras 8.30 e 8.31 mostram as diferenças normalizadas quando o padrão considerado em cada série é a solução obtida para aquele conjunto formulação cinemática/ matriz de rigidez com a parametrização de Euler. Neste caso se observa que se mantém a tendência de, à medida que cresce o valor de n na parametrização de Rodrigues, decrescer a diferença em relação à parametrização de Euler.

8.2.2 Flambagem lateral de chapa em L em balanço

O mesmo exemplo apresentado no item 8.1.3 deste trabalho, ocasião em que foi analisado utilizando-se elementos de barras, foi também analisado com a utilização de elementos de cascas. Também utilizando elementos de casca ele foi analisado por [3, 17, 31, 77, 96 e 97], dentre outros.

Trata-se de uma chapa em formato de L, com uma extremidade engastada e a outra em balanço, na qual se encontra aplicada uma força concentrada de valor P. Sua geometria e propriedades são aquelas já apresentadas quando da descrição do exemplo 8.1.3, pela figura 8.9. A Figura 8.32 mostra a distribuição de elementos utilizada na análise da chapa, uma malha de elementos triangulares T6-3i de $54 \times 4 \times 2$ e a Figura 8.33 mostra a deformada sob efeito da carga final, em verdadeira grandeza.

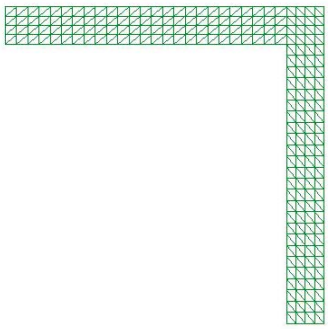


Figura 8.32 – Chapa em L - malha de elementos

Figura 8.33 – Chapa em L - deformada

Foi feita uma análise inicial para determinação da carga de instabilidade lateral, cujo valor obtido está apresentado na Tabela 8.6, juntamente com os resultados de algumas das referências citadas.

Tabela 8.6 – Chapa em L - carga crítica de flambagem

FONTE	P (N)
Argyris [3]	$1{,}1453$
Campello; Pimenta; Wriggers [17]	$1{,}130$
Simo; Fox; Riffai [77]	$1{,}128$
Wriggers; Gruttmann [96]	$1{,}123$
VALOR OBTIDO	$1{,}1877$

Após determinada a carga crítica de flambagem lateral da chapa, foi aplicada uma carga de pequeno valor para simular a imperfeição da estrutura e transpor o ponto de instabilidade. Com os resultados foi construído o gráfico apresentado na Figura 8.10, juntamente com os resultados obtidos na análise feita com elementos de barras. É bem marcante a presença do ponto de instabilidade da estrutura. A curva apresentada foi elaborada a partir dos dados obtidos na solução do problema usando o algoritmo Lagrangiano atualizado, matriz de rigidez não-simétrica e parametrização de Rodrigues $(n = 1)$,

representação gráfica coincidente com as demais soluções. Como esta estrutura apresenta um ponto de bifurcação, e o algoritmo Lagrangiano total/ matriz não-simétrica não dispunha de verificação de estabilidade, quando da solução do problema com esta variante do programa, foi necessário trabalhar com incrementos de carga bastante reduzidos. Sem esta providência, a presença da bifurcação era percebida apenas por um leve ziguezague na curva força x deslocamento, ocorrendo bifurcação apenas para carregamento bastante superior.

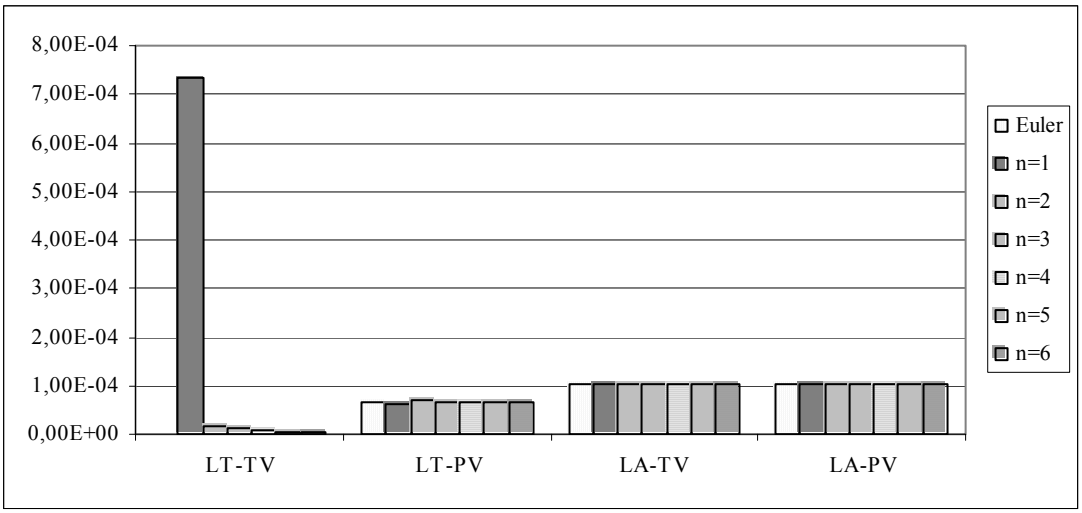


Figura 8.34 – Chapa em L - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler

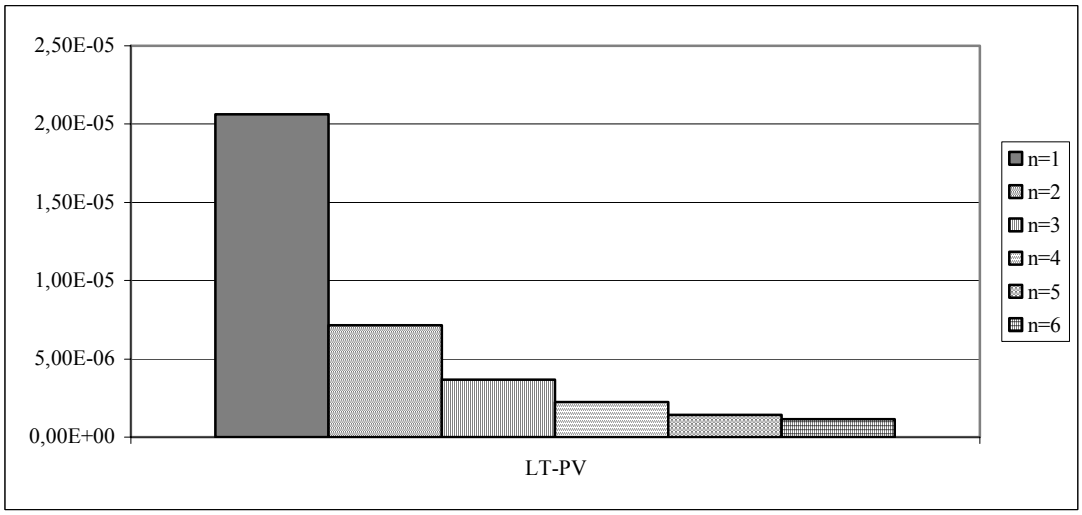


Figura 8.35 – Chapa em L - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para a análise com algoritmo Lagrangiano total/ matriz não-simétrica

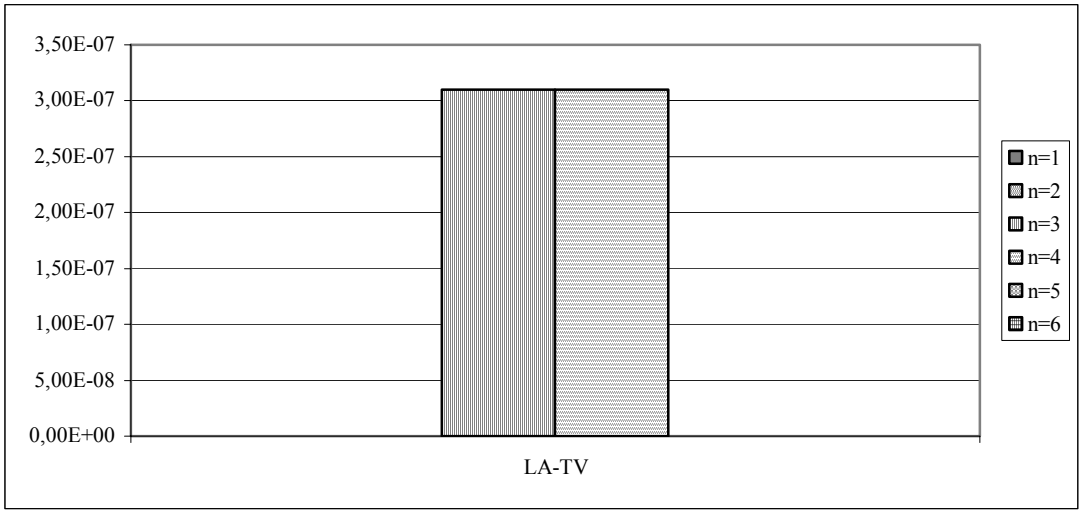


Figura 8.36 – Chapa em L - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para análise com algoritmo lagrangiano atualizado/ matriz simétrica

A Figura 8.34 mostra a diferença relativa média entre as diferentes soluções e a solução com algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler. As Figuras 8.35 e 8.36 mostram a comparação tomando por referência a solução com parametrização de Euler nas séries com algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez não-simétrica e algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz de rigidez simétrica. Para esta última série apenas as análises com os valores de $n = 3$ e $n = 4$ apresentaram diferenças em relação ao resultado obtido com a parametrização de Euler. Não estão apresentados os resultados com algoritmo Lagrangiano total/matriz de rigidez simétrica por já estarem apresentados na Figura 8.34 e os resultados com algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz de rigidez não-simétrica por apresentarem valores nulos para todas as parametrizações, ou seja, todos os resultados coincidiram.

Novamente, como nos demais exemplos, para as soluções com algoritmo Lagrangiano total e para as parametrizações de Rodrigues, com o crescimento do valor de n decresce a diferença relativa à parametrização de Euler.

8.2.3 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (1)

A mesma estrutura estudada no Exemplo 8.1.5 foi também analisada utilizando-se elementos de casca. A malha utilizada consistiu de $30 \times 2 \times 4$ elementos de casca T6-3i, distribuídos conforme pode ser visto na Figura 8.37. Os resultados obtidos na análise podem ser vistos na Figura 8.19, juntamente com os resultados obtidos na análise com elementos de barra.

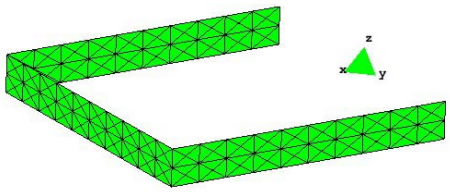


Figura 8.37 – Pórtico (1) - distribuição dos elementos de casca.

A Figura 8.38 mostra a deformada da barra quando submetida ao carregamento total, em verdadeira grandeza.

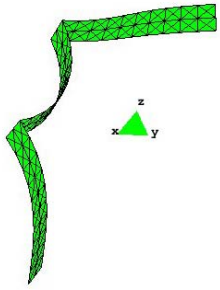


Figura 8.38 – Pórtico (1) - deformada

A figura 8.39 mostra as diferenças relativas em números absolutos das soluções obtidas comparadas com a solução usando algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler. Podemos observar a uniformidade dos resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano atualizado, inferiores a 7×10^{-5}. A maior diferença apresentada é da solução com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Rodrigues e vale 9.28×10^{-5}.

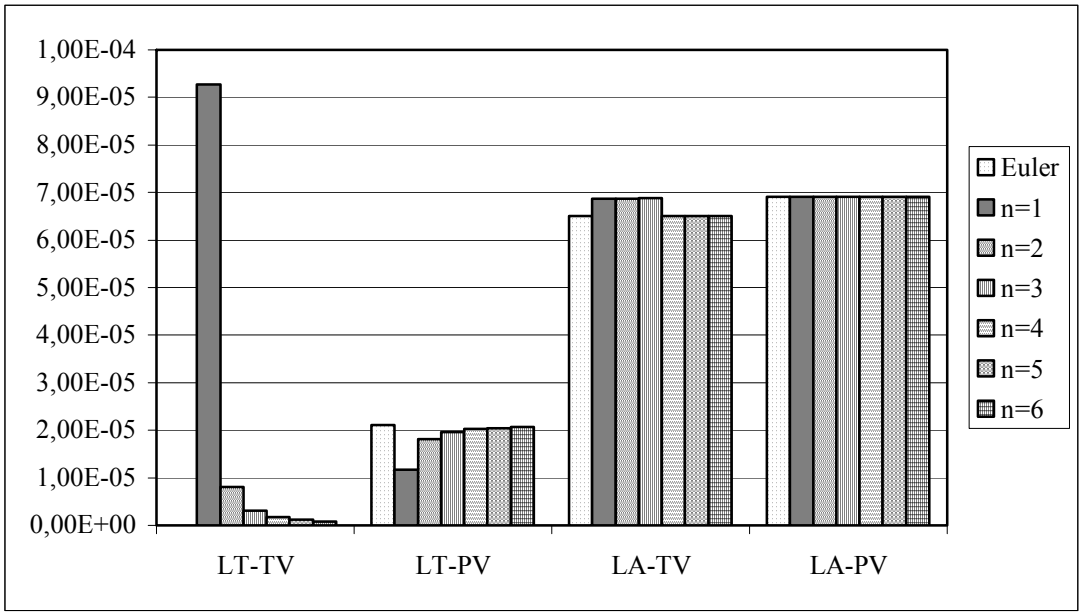


Figura 8.39 – Pórtico (1) - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler na análise como casca

A Figura 8.40 mostra a diferença relativa tomando como referência em cada série a solução obtida com a parametrização de Euler. Das soluções obtidas com algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz simétrica, para $n \geq 4$ as diferenças são nulas, ou seja, os resultados coincidem com os obtidos com a parametrização de Euler. Os demais resultados apresentam diferenças relativas inferiores a 3.7×10^{-6}. Todas as soluções obtidas com algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz não-simétrica apresentaram os mesmos resultados.

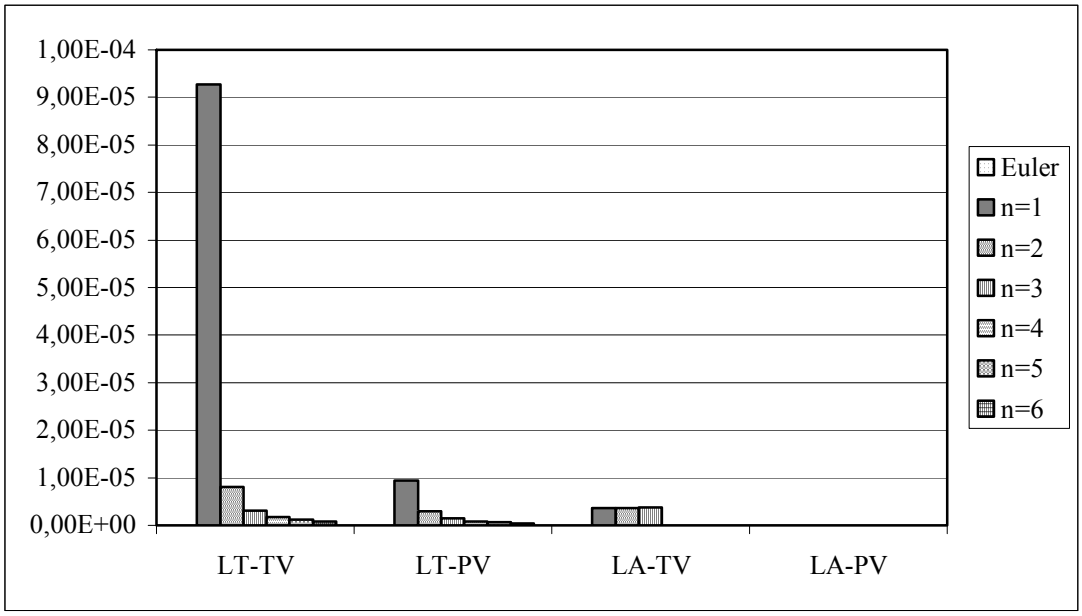


Figura 8.40 – Pórtico (1) - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise como casca

8.2.4 Pórtico plano submetido a carregamento espacial (2)

A mesma estrutura estudada no Exemplo 8.1.6 foi também analisada utilizando-se elementos de casca. A malha utilizada consistiu de $92 \times 4 \times 2$ elementos de casca T6-3i, distribuídos conforme pode ser visto na Figura 8.41. Os resultados da análise podem ser vistos na Figura 8.23, juntamente com os resultados da análise com elementos de barra. A Figura 8.42 mostra a deformada da estrutura para o carregamento máximo, em verdadeira grandeza.

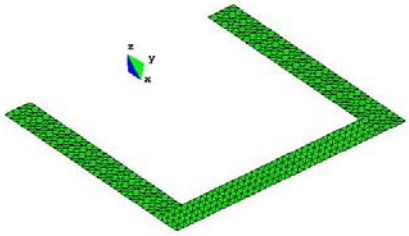


Figura 8.41 – Pórtico (2) - distribuição dos elementos de casca

A figura 8.43 mostra as diferenças relativas encontradas tomando como referência a solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler. Podemos observar que o maior resultado obtido é inferior a 6.5×10^{-4}, fornecido pela parametrização de Rodrigues, para o mesmo tipo de processo de solução da solução de referência.

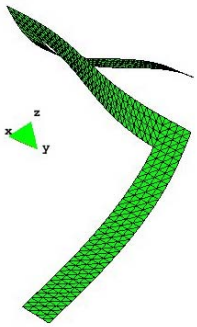


Figura 8.42 – Pórtico (2) - deformada

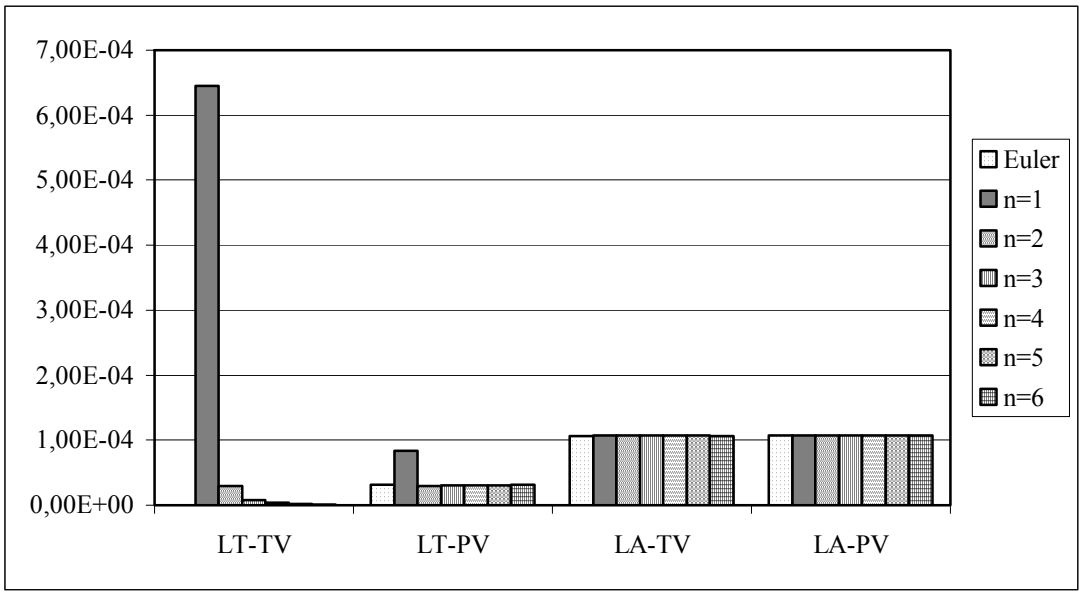
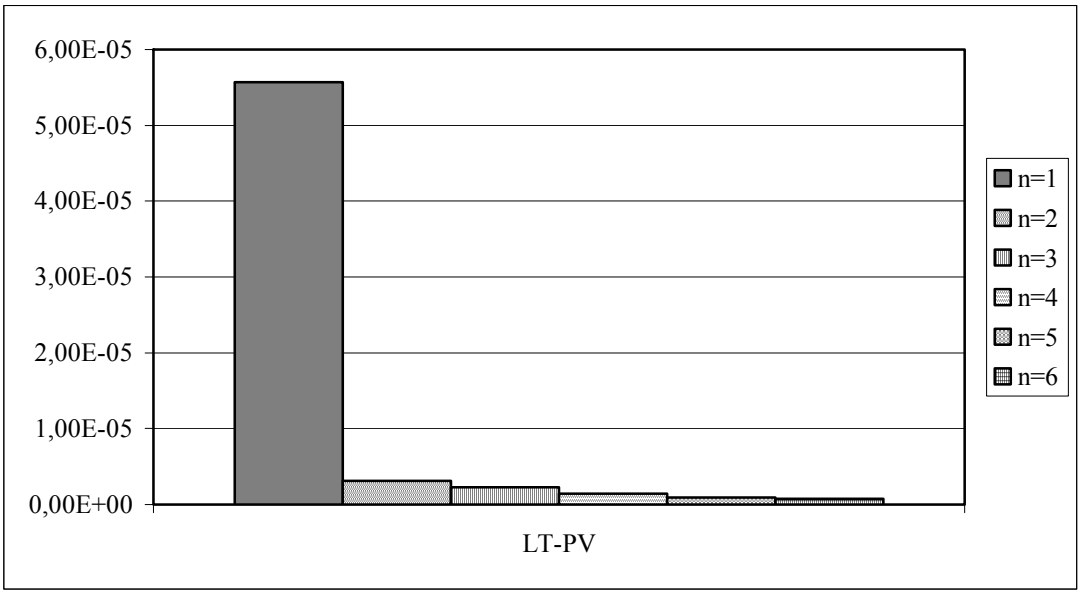


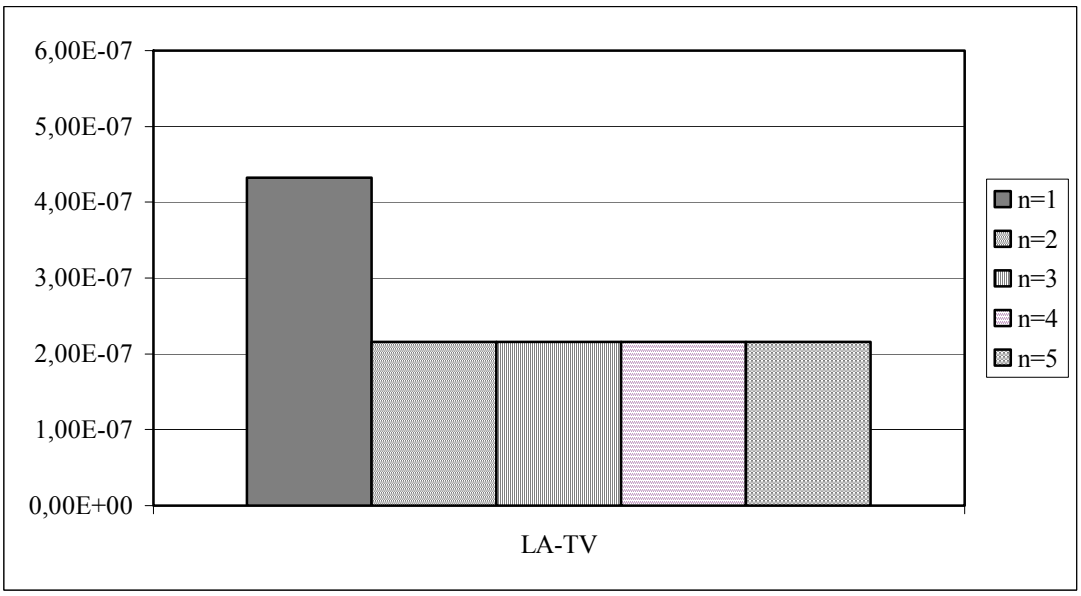
Figura 8.43 – Pórtico (2) - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler na análise como casca

A Figura 8.44 mostra os resultados obtidos para as séries algoritmo Lagrangiano total/ matriz não-simétrica e algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz simétrica, tomando como referência a solução com parametrização de Euler de cada série. Na primeira série, apresentada na Figura 8.44a, se pode observar que se mantém a tendência de queda da diferença relativa com o crescimento do valor de n. Na série apresentada na Figura 8.44b

podemos observar a uniformidade dos resultados obtidos. A comparação feita na série algoritmo Lagrangiano total/matriz simétrica pode ser vista na Figura 8.43 e a série algoritmo Lagrangiano atualizado/matriz não-simétrica não é apresentada por ter todos os valores nulos, ou seja, os resultados foram iguais para todas as parametrizações.



(a)



(b)

Figura 8.44 – Pórtico (2) - diferenças normalizadas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise como casca

8.2.5 Anel circular com rasgo radial

Este exemplo foi proposto por Basar; Ding [7] e citado por Sze et al. [87] como um exemplo adequado para testar formulações para cascas. Além dos já citados, também foi analisado por [14, 16, 17, 32, 43, 71, 88 e 96], dentre outros. Trata-se de um anel circular com um rasgo radial, engastado em uma das bordas do rasgo e carregado com $p = 0{,}1f$ kN/m (sendo f um fator de carregamento) ao longo da outra borda, conforme ilustrado na Figura 8.45. Os raios interno e externo medem $r = 6$ m e $R = 10$ m, respectivamente. A espessura do anel é de $h = 0{,}03$ m, o módulo de elasticidade $E = 2{,}1 \times 10^8$ kN/m^2 e $\nu = 0$. O anel foi modelado com uma malha de $64 \times 8 \times 2$ elementos.

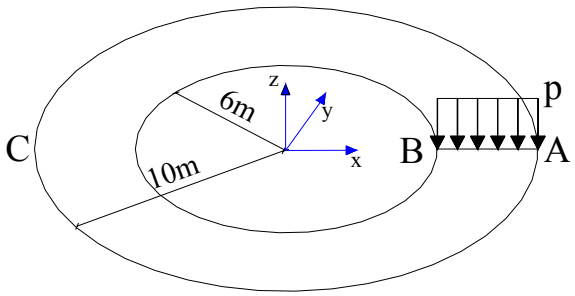


Figura 8.45 – Geometria do anel circular

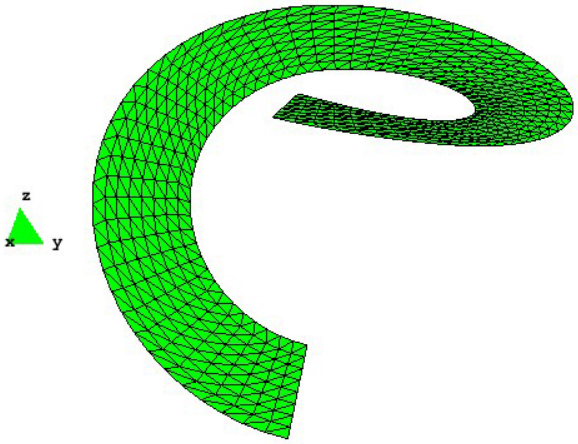


Figura 8.46– Deformada do anel circular

A Figura 8.46 mostra a configuração deformada obtida para $f = 60$. A figura 8.47 mostra o deslocamento vertical dos nós identificados na figura 8.45 pelas letras A, B e C, juntamente com os valores obtidos por [87].

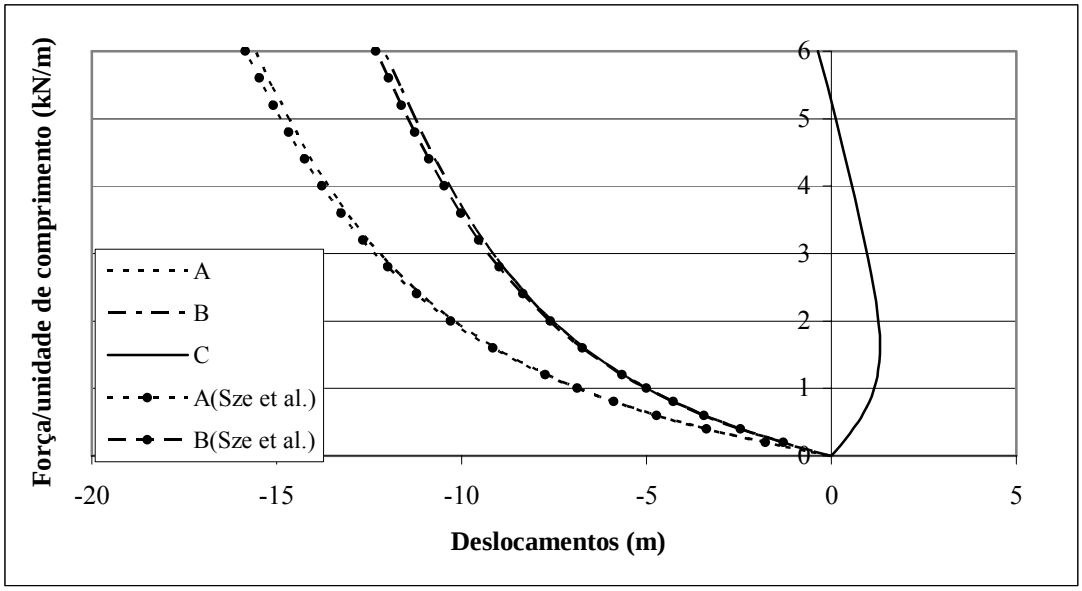


Figura 8.47– Anel circular - deslocamento vertical nos pontos A, B e C

A Figura 8.48 mostra a diferença relativa média entre as diferentes soluções e a solução com algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler. A Figura 8.49 mostra a comparação tomando por referência a solução com parametrização de Euler para cada série. Os resultados com algoritmo Lagrangiano atualizado/ matriz de rigidez não-simétrica são todos nulos para todas as parametrizações, ou seja, todos os resultados coincidiram.

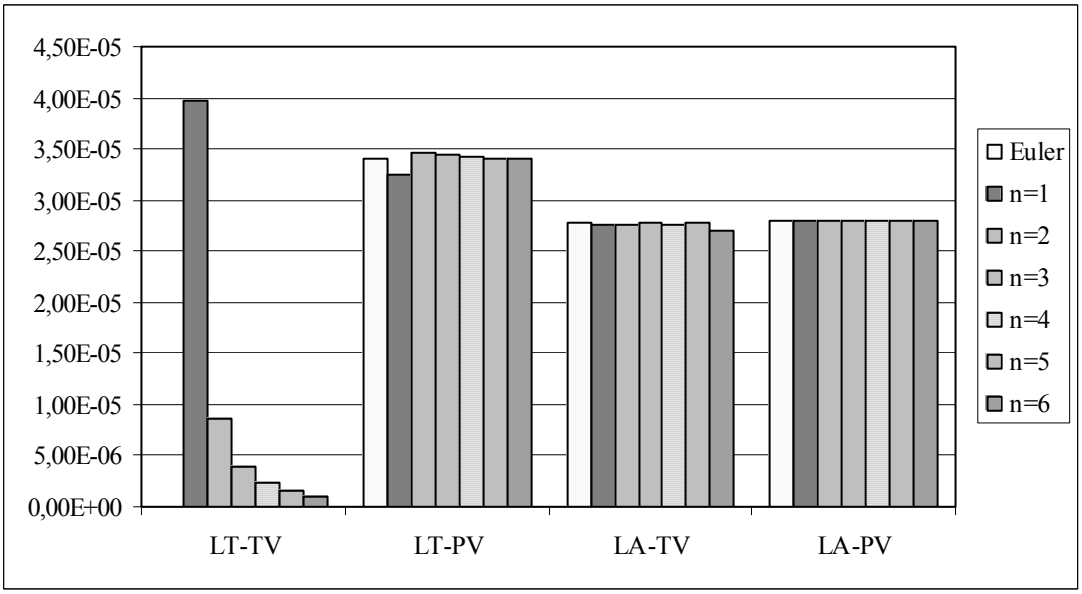


Figura 8.48 – Anel circular - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler

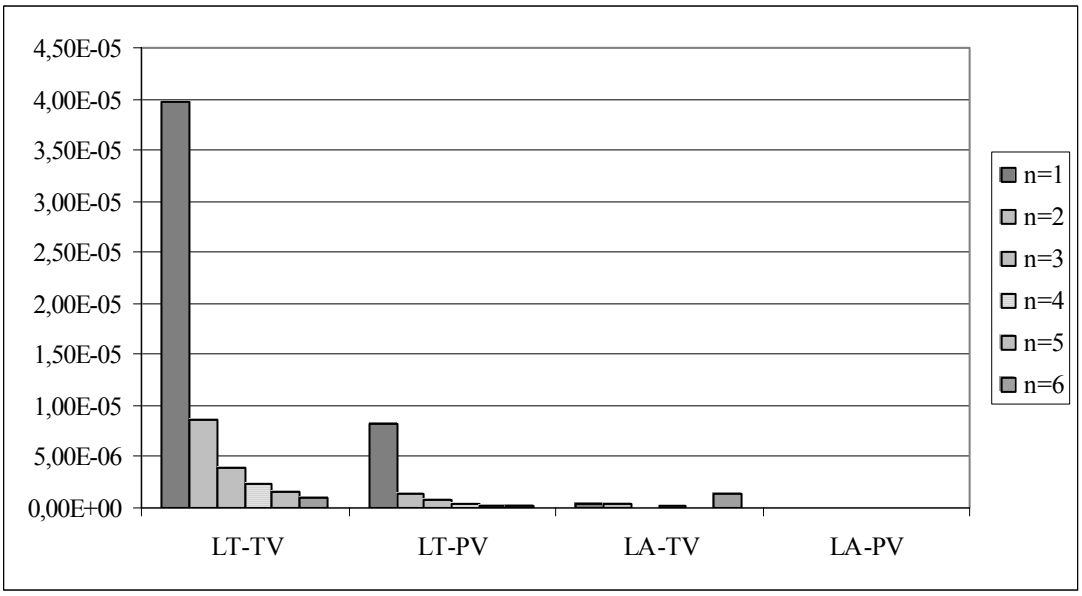


Figura 8.49 – Anel circular - diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise

8.2.6 Casca hemisférica submetida a forças radiais

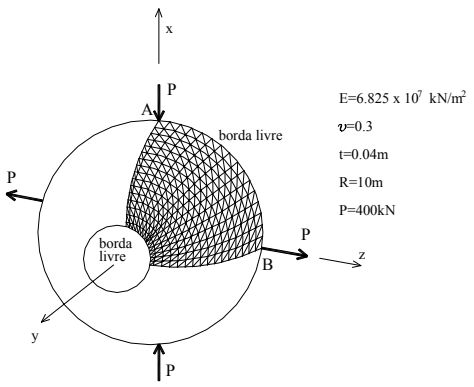


Figura 8.50 – Geometria da casca hemisférica

Este exemplo também é citado por Sze et al. [87] como um clássico adequado para teste de formulações de cascas, já tendo sido estudado por [7, 13, 14, 16, 17, 26, 41, 43, 46, 69-71, 77, 88, 94], dentre outros. Trata-se de uma casca hemisférica dotada de uma abertura de $18°$ no seu pólo. Esta casca está submetida à ação de quatro forças concentradas que se equilibram, conforme pode ser visto na Figura 8.50. Considerando-se as condições de simetria do problema, apenas um quadrante da casca foi modelado com uma malha de $36 \times 36 \times 2$

elementos. O raio mede $R = 10$ m e a espessura $t = 0,04$ m. O módulo de elasticidade foi admitido como $E = 6,825 \times 10^7$ N/m^2 e $\nu = 0,3$.

A tabela 8.7 apresenta as taxas de convergência obtidas no último incremento de carga, variando esta entre 90% e 100% da carga final. Em todos os casos a convergência foi quadrática e ocorreu com o mesmo número de iterações, o que demonstra a equivalência entre as parametrizações estudadas. Este exemplo foi escolhido para mostrar a taxa de convergência por não apresentar instabilidade, o que torna mais justa a comparação entre parametrizações.

Tabela 8.7 – Casca hemisférica - taxa de convergência no último incremento de carga.

Lagrangianos totais							
Matriz de rigidez simétrica							
Iteração	Euler	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	202.2148	210.0541	202.8954	202.4221	202.3129	202.272	202.2525
2	8.553E-02	0.10066	8.666E-02	8.582E-02	8.565E-02	8.559E-02	8.557E-02
3	0.1271183	9.18E-02	0.119924	0.1239011	0.1252991	0.1259506	0.126306
4	1.068E-05	1.327E-05	1.045E-05	1.049E-05	1.055E-05	1.059E-05	1.062E-05
5	1.447E-08	1.378E-08	1.397E-08	1.444E-08	1.473E-08	1.432E-08	1.424E-08
Matriz de rigidez não-simétrica							
Iteração	Euler	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	202.3085	211.1867	202.9573	202.4948	202.3941	202.3577	202.3406
2	8.555E-02	0.1022476	8.668E-02	8.583E-02	8.567E-02	8.562E-02	8.559E-02
3	0.1280095	0.1004662	0.1206842	0.1247157	0.1261493	0.1268167	0.1271803
4	1.071E-05	1.045E-05	1.018E-05	1.044E-05	1.055E-05	1.061E-05	1.064E-05
5	1.406E-08	1.363E-08	1.417E-08	1.449E-08	1.447E-08	1.415E-08	1.464E-08
Lagrangianos atualizados							
Matriz de rigidez simétrica							
Iteração	Euler	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	201.9414	201.9485	201.9431	201.9421	201.9418	201.9417	201.9416
2	8.480E-02	8.480E-02	8.480E-02	8.480E-02	8.480E-02	8.480E-02	8.480E-02
3	0.1276357	0.1273427	0.1275618	0.1276028	0.1276172	0.1276238	0.1276275
4	1.047E-05	1.045E-05	1.046E-05	1.047E-05	1.047E-05	1.047E-05	1.047E-05
5	3.222E-09	3.200E-09	3.234E-09	3.214E-09	3.217E-09	3.228E-09	3.223E-09
Matriz de rigidez não-simétrica							
Iteração	Euler	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$	$n = 6$
1	201.9407	201.95	201.9429	201.9417	201.9412	201.941	201.9409
2	8.477E-02	8.479E-02	8.478E-02	8.478E-02	8.478E-02	8.478E-02	8.477E-02
3	0.1280073	0.1277645	0.1279461	0.12798	0.127992	0.1279975	0.1280005
4	1.052E-05	1.050E-05	1.052E-05	1.052E-05	1.052E-05	1.052E-05	1.052E-05
5	3.270E-09	3.244E-09	3.252E-09	3.260E-09	3.255E-09	3.257E-09	3.262E-09

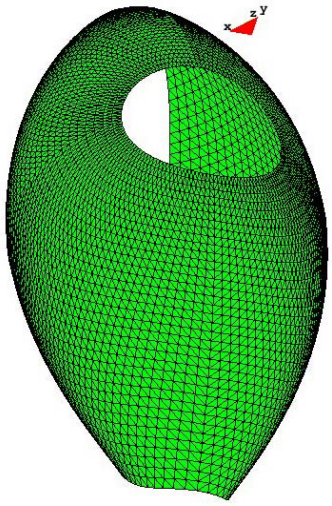


Figura 8.51 – Deformada da casca hemisférica

A figura 8.51 mostra a deformada da peça obtida para a carga de 400 N enquanto a Figura 8.52 mostra as curvas força-deslocamento para os pontos A e B especificados na Figura 8.50, juntamente com os valores apresentados por Sze et al.[87]. No gráfico apresenta-se apenas uma das curvas obtidas, pois, em vista da similaridade de todos os resultados das diferentes análises, graficamente não podem ser percebidas as diferenças, havendo superposição de curvas.

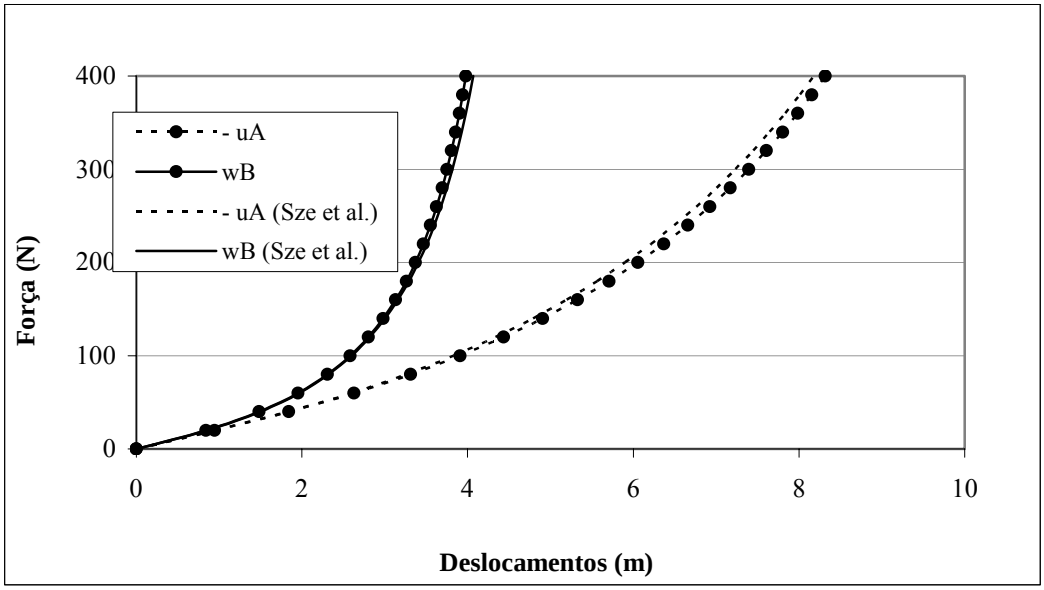


Figura 8.52 – Casca hemisférica - curva força-deslocamento para os pontos A e B

A Figura 8.53 mostra o erro normalizado, admitindo a solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler como referência. As Figuras 8.54 e 8.55 mostram a diferença normalizada tomando como base os resultados

obtidos com a parametrização de Euler em cada série. Como se pode observar na Figura 8.55, neste exemplo, com o crescimento do valor de *n*, decresceu a diferença em relação à solução com a parametrização de Euler, mesmo nas soluções obtidas com algoritmo Lagrangiano atualizado. Isto se deve ao fato de, para este nível de carregamento, não haverem sido identificadas instabilidades neste exemplo.

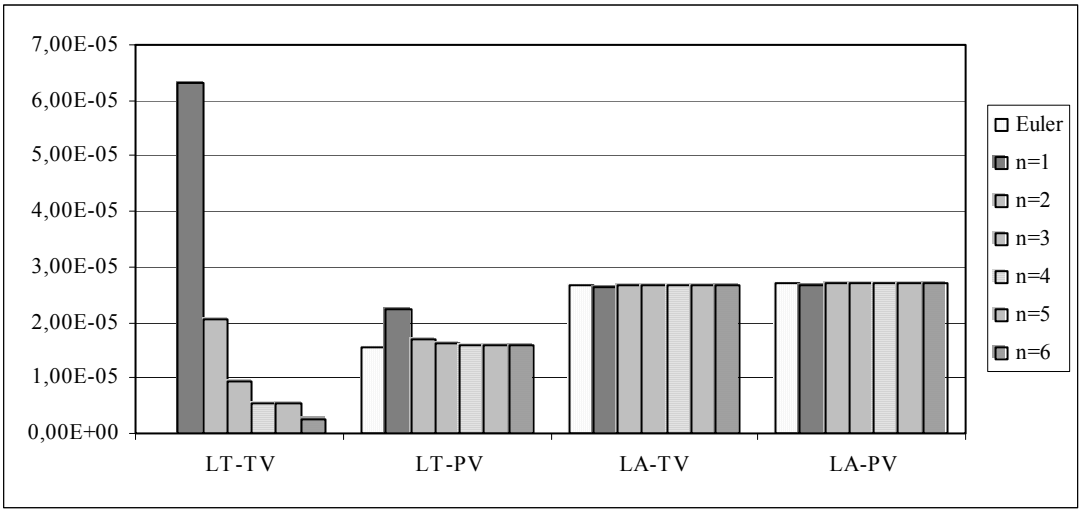


Figura 8.53 – Casca hemisférica - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz simétrica/ parametrização de Euler

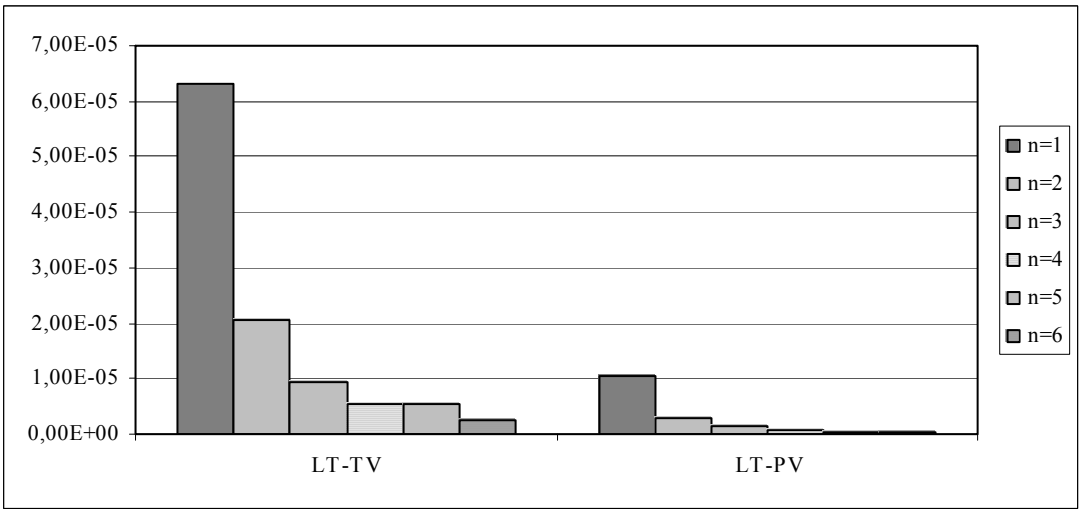


Figura 8.54 – Casca hemisférica - diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total

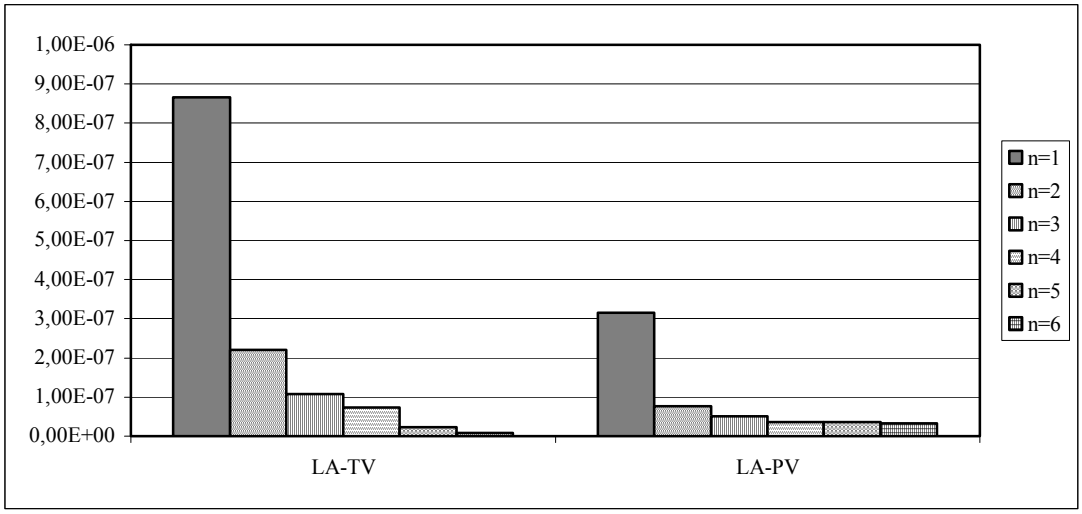


Figura 8.55 – Casca hemisférica - diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado

8.2.7 Casca cilíndrica de extremidades abertas

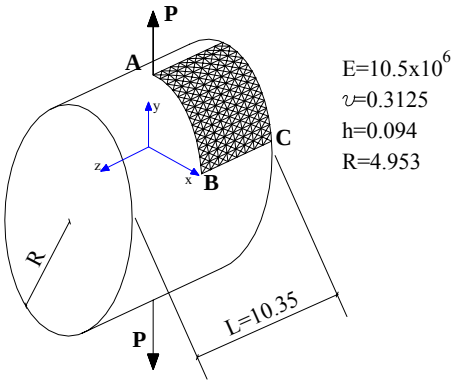


Figura 8.56 – Geometria da casca cilíndrica aberta

A casca cilíndrica apresentada na Figura 8.56 tem as extremidades abertas e é tracionada por duas forças concentradas P diametralmente opostas. O seu raio é $R = 4,953$ cm, seu comprimento $L = 10,35$ cm e a espessura $h = 0,094$ cm. O material tem módulo de elasticidade $E = 10,5 \times 10^6$ N/cm^2 e $\nu = 0,3125$. Com a consideração das condições de simetria foi necessário modelar apenas um oitavo do cilindro, o que foi feito com o uso de uma malha de $14 \times 8 \times 4$ elementos T6-3i. Este exemplo também foi analisado por [14, 16, 17, 31, 43, 71, 87, 88], dentre outros.

O exemplo foi analisado nas quatro situações de algoritmo/ matriz de rigidez com as sete possibilidades de parametrização estudadas. Devido à similaridade de resultados, sendo que graficamente as diferenças não podem ser percebidas, havendo superposição de curvas, representam-se na Figura 8.57 apenas as curvas obtidas em uma das situações estudadas para

representar todos os resultados. Assim, a Figura 8.57 mostra as curvas força-deslocamento para os pontos A (na direção y), B (na direção x) e C (na direção x) fornecidas por [87] e os valores obtidos na análise feita para algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler. Cabe observar que foi percebida a ocorrência de um leve *snap-through* para carga próxima a $P = 2 \times 10^4 N$, mais nítido nas curvas referentes aos deslocamentos dos pontos B e C.

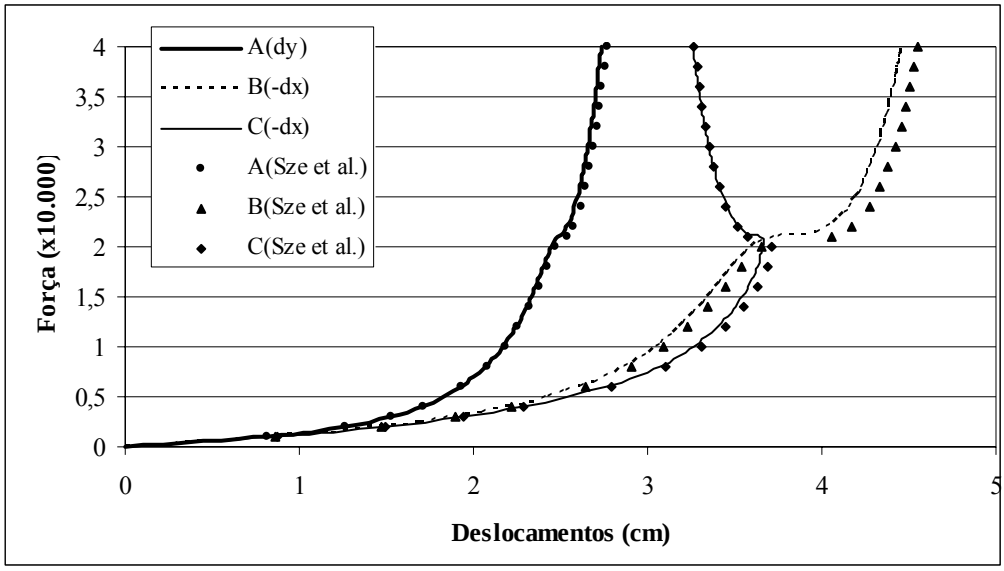


Figura 8.57 – Casca cilíndrica aberta - curva força-deslocamento para os pontos A, B e C

A Figura 8.58 mostra a configuração deformada obtida para a máxima carga aplicada.

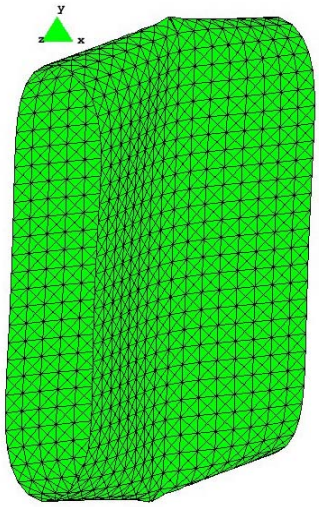


Figura 8.58 – Deformada da casca cilíndrica aberta

A Figura 8.59 mostra o erro normalizado, admitindo a solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler como referência.

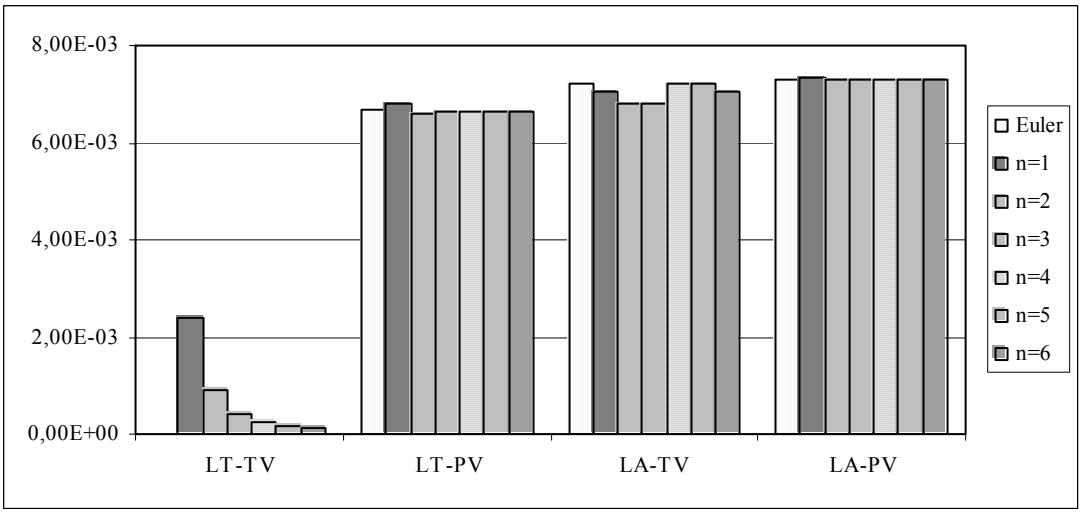


Figura 8.59 – Casca cilíndrica aberta - diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/matriz simétrica/ parametrização de Euler

A diferença observada é da ordem de 7×10^{-3}, para as soluções obtidas com algoritmo Lagrangiano atualizado e Lagrangiano total com matriz não-simétrica. As diferenças encontradas nos resultados com algoritmo Lagrangiano total e matriz simétrica, para as parametrizações de Rodrigues, são decrescentes com o crescimento de n e inferiores a 3×10^{-3}.

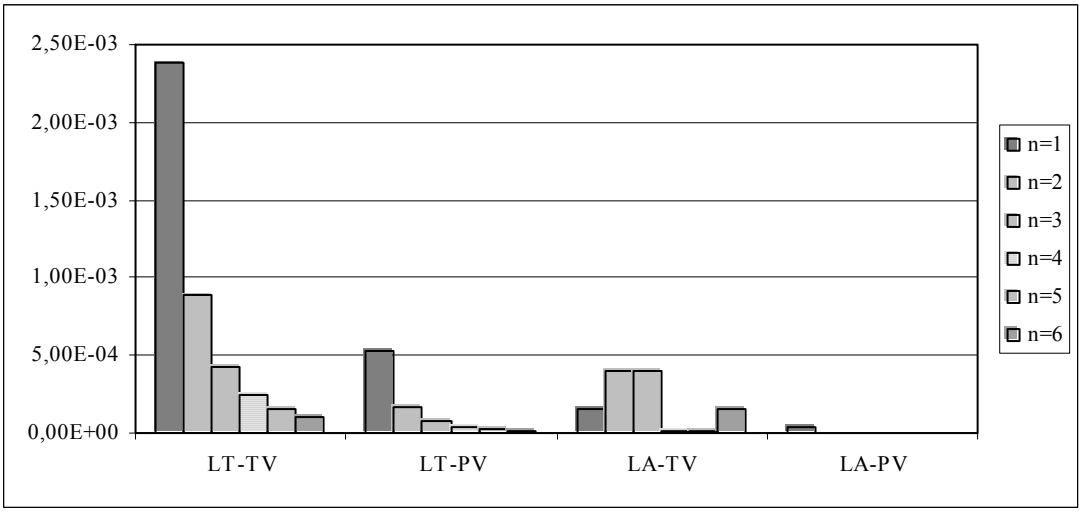


Figura 8.60 – Casca cilíndrica aberta - diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para cada situação de análise

A Figura 8.60 mostra o erro normalizado, admitindo como referência a solução obtida com a parametrização de Euler em cada série. Nota-se que se manteve o padrão de, para o algoritmo Lagrangiano total, com o aumento do valor de n, decrescer a diferença relativa à solução com parametrização de Euler. Pode-se observar também a menor variabilidade dos

resultados obtidos com o algoritmo Lagrangiano atualizado. As soluções com matriz simétrica apresentam máximo erro relativo de 4×10^{-4} e as soluções com matriz não-simétrica, máximo erro relativo inferior a 4×10^{-5}, sendo em sua maioria inferiores a 5×10^{-7}.

8.2.8 Casca cilíndrica com diafragmas rígidos nas extremidades (lata de cerveja)

Uma lata de cerveja é aproximadamente uma casca cilíndrica com diafragmas rígidos nas duas extremidades. Ao amassar uma lata de cerveja uma pessoa aplica com os dedos duas forças concentradas conforme representado na Figura 8.61. Este exemplo é conhecido na literatura como *pinched cylinder,* e, exceto pelas dimensões, simula o que ocorre quando se amassa uma lata de cerveja. O seu raio é $R = 100$ mm, seu comprimento $L = 200$ mm e a espessura $h = 1$ mm. As características geométricas da casca estão representadas na Figura 8.61 e as forças são admitidas como valendo 12000 N. O material tem módulo de elasticidade 3×10^4 N/mm^2 e $\nu = 0$.

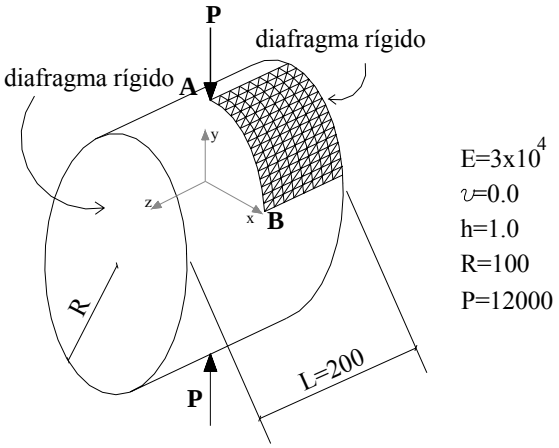


Figura 8.61 – Geometria da casca cilíndrica com diafragmas nas extremidades

Com a consideração das condições de simetria foi necessário modelar apenas um oitavo do cilindro, o que foi feito com o uso de uma malha uniforme de $32 \times 32 \times 2$ elementos. Este exemplo também foi analisado por [16, 17, 26, 69, 71, 87-89].

A Figura 8.62 apresenta a deformada da casca quando submetida ao carregamento total.

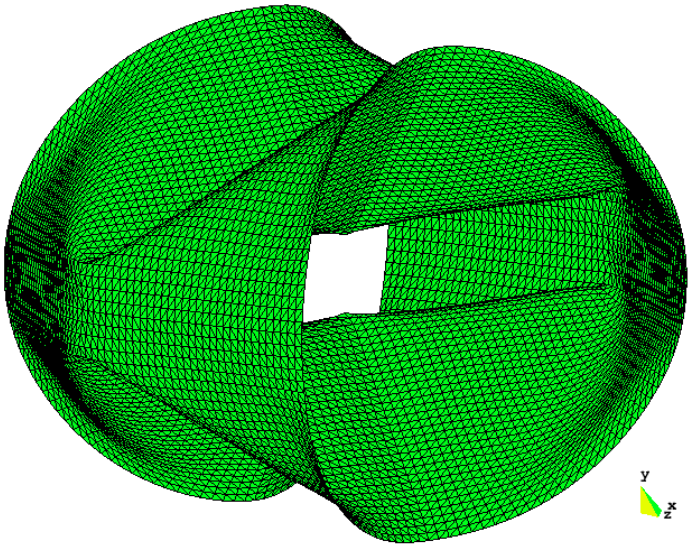


Figura 8.62 – Casca cilíndrica com diafragmas – deformada

A Figura 8.63 apresenta a curva força-deslocamento para os pontos A (na direção vertical) e B (na direção horizontal), juntamente com a solução apresentada por [87]. Podemos observar que, para a mesma malha, os resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano atualizado diferem ligeiramente daqueles obtidos com algoritmo Lagrangiano total, coincidindo com os resultados obtidos pela referência [87]. Entretanto, não há diferença gráfica perceptível, para um mesmo algoritmo, nem quando se varia o tipo de matriz de rigidez (simétrica/não-simétrica), nem quando se varia a parametrização (Euler/ Rodrigues/ Rodrigues generalizada com n de 2 a 6). Sze et al. em [88] também obtiveram diferença entre os resultados obtidos com formulação Lagrangiana total e atualizada. Em comparação feita com os resultados apresentados por [71] eles obtiveram concordância nos resultados da formulação Lagrangiana total, diferindo para menos nos resultados da formulação Lagrangiana atualizada. Nos resultados aqui apresentados, a concordância com os resultados apresentados por [71] ocorreu com os resultados obtidos com formulação Lagrangiana atualizada, conforme pode ser visto na Figura 8.64, a qual apresenta os dados obtidos juntamente com aqueles determinados por Sansour e Kollmann [71].

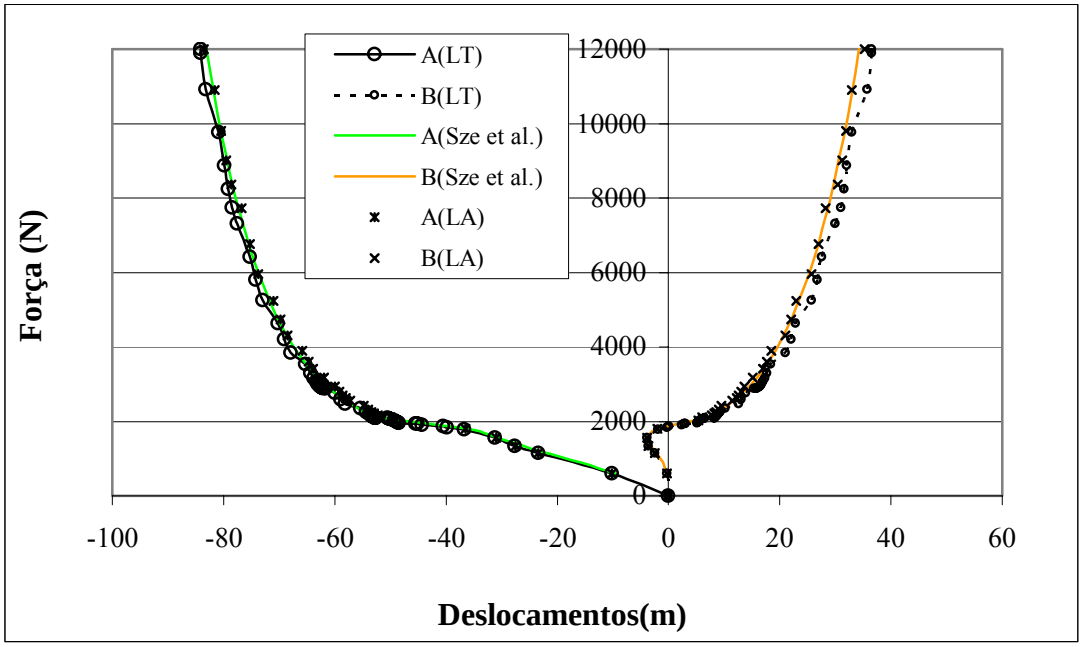


Figura 8.63 – Casca cilíndrica com diafragmas – curva força x deslocamentos para os pontos A e B (1)

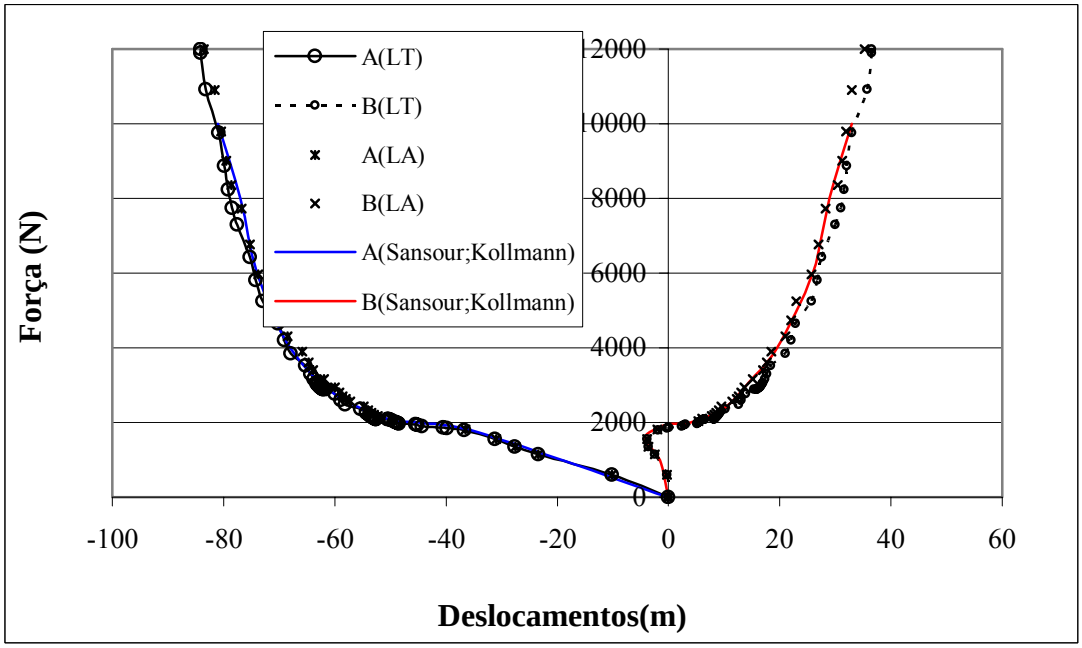


Figura 8.64 – Casca cilíndrica com diafragmas – curva força x deslocamentos para os pontos A e B (2)

A Figura 8.65 mostra as diferenças relativas obtidas na comparação entre os resultados encontrados nas quatro combinações estudadas de algoritmo/ matriz de rigidez com as diferentes parametrizações analisadas. Como nos exemplos anteriores, tomou-se como referência a solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/ matriz de rigidez simétrica/ parametrização de Euler. Para todas as parametrizações os resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano total, seja com matriz simétrica ou não-simétrica, apresentaram erros relativos

inferiores a 3×10^{-4}. Os resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano atualizado, entretanto, como já havia sido evidenciado pelo gráfico exibido na Figura 8.63, apresentaram erros maiores, da ordem de 2%.

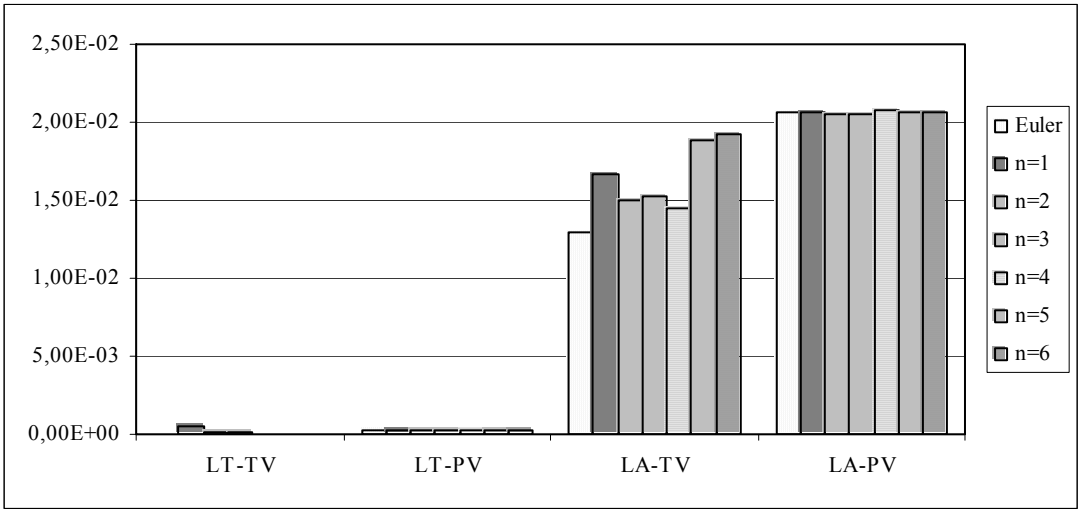


Figura 8.65 – Casca cilíndrica com diafragmas – diferenças relativas à solução obtida com algoritmo Lagrangiano total/matriz simétrica/ parametrização de Euler

As Figuras 8.66 e 8.67 mostram os resultados obtidos quando a comparação é feita, em cada série, com os resultados da análise com parametrização de Euler da própria série. Neste exemplo, nos resultados obtidos com algoritmo Lagrangiano total (Figura 8.66), foi mantida a tendência de redução da diferença relativa à medida que cresce o valor de n, fato que não se observou com os resultados do algoritmo Lagrangiano atualizado (Figura 8.67). Por outro lado, pode-se observar que a uniformidade dos resultados é maior no caso das soluções com algoritmo Lagrangiano atualizado/matriz não-simétrica, caso em que a maior diferença relativa é de cerca de 1×10^{-4}.

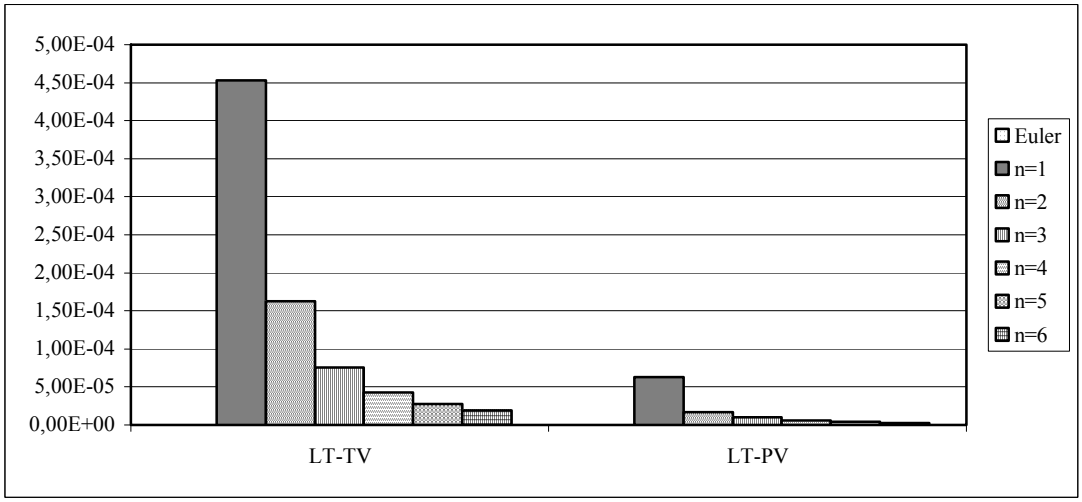


Figura 8.66 – Casca cilíndrica com diafragmas - diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano total

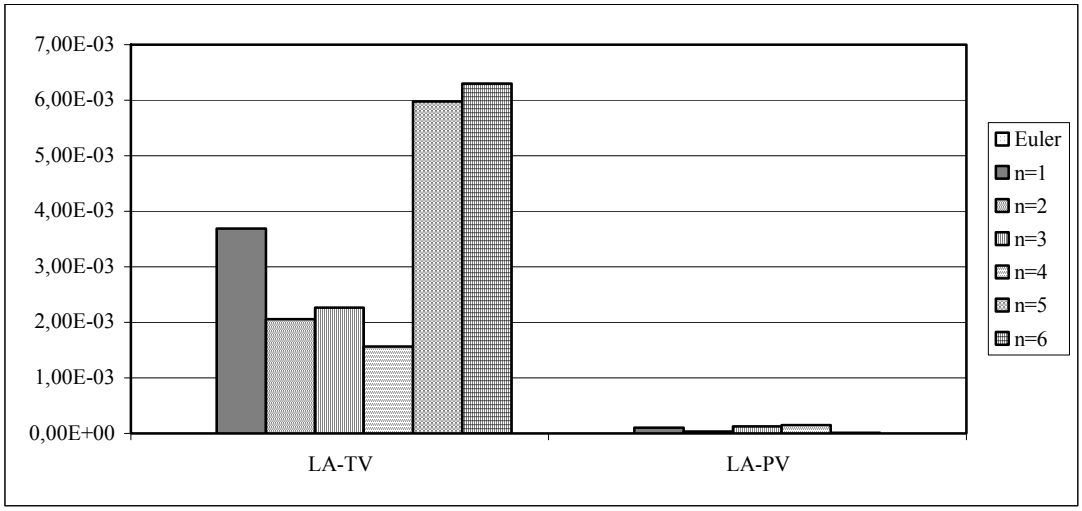


Figura 8.66 – Casca cilíndrica com diafragmas - diferenças relativas entre as parametrizações de Rodrigues e a parametrização de Euler para as análises com algoritmo Lagrangiano atualizado

9 CONCLUSÕES

Neste trabalho foram desenvolvidas as expressões necessárias à implantação em um Programa de Elementos Finitos de uma parametrização genérica das rotações, adaptadas tanto à parametrização de Euler, como à de Rodrigues e às aqui chamadas de parametrizações generalizadas de Rodrigues. Em seguida foi feito um estudo comparativo da utilização destas diferentes parametrizações na solução de problemas estáticos, utilizando algoritmos com formulação cinemática Lagrangiana total e Lagrangiana atualizada e matrizes de rigidez oriundas do uso de formas fracas decorrentes do uso do Teorema dos Trabalhos Virtuais e do Teorema das Potências Virtuais. A análise das expressões obtidas tanto para os diferentes tensores envolvidos como das diferentes matrizes de rigidez e o estudo dos resultados da solução de vários exemplos, dentre eles alguns clássicos da literatura da área, permitem concluir:

a) A parametrização de Rodrigues é bem mais simples e computacionalmente eficiente que a parametrização de Euler por não apresentar funções trigonométricas. Sua desvantagem é seu menor intervalo de validade. Essa parametrização tem também a seu favor a existência de fórmula simples para composição de rotações, a fórmula de Rodrigues;

b) As parametrizações generalizadas de Rodrigues têm em comum com a parametrização de Euler o intervalo de validade $[0;2\pi)$. Assim como a parametrização de Rodrigues na sua forma padrão, também aquelas apresentam em relação à parametrização de Euler a vantagem da maior eficiência computacional, pois não incluem funções trigonométricas em sua formulação;

c) Nas parametrizações generalizadas de Rodrigues o uso de $n > 2$ não amplia o intervalo de validade. Desta forma, exceto para solução de problemas específicos, em que para um dado valor de n seja possível ultrapassar ou evitar pontos de instabilidade, o uso de valores de n superiores a 2 não se mostra vantajoso, pois com o número n crescem as expressões que definem os diferentes coeficientes, o que torna estas parametrizações menos eficientes computacionalmente;

d) Quando se utiliza a forma fraca obtida a partir do Teorema dos Trabalhos Virtuais e as solicitações externas incluem momentos atuando em torno de um eixo fixo, a parametrização de Euler apresenta um tratamento mais eficiente que as parametrizações de Rodrigues, tendo em vista que o tensor $\boldsymbol{\Gamma}$, somente neste caso, se reduz ao tensor unitário. Ao utilizar a forma fraca obtida a partir do Teorema das Potências Virtuais esta vantagem da parametrização de Euler desaparece;

e) A comparação entre as matrizes de rigidez obtidas a partir dos Teoremas dos Trabalhos Virtuais e das Potências Virtuais mostra a maior simplicidade destas últimas, o que permite uma redução significativa no tempo de processamento para sua montagem. Entretanto, como são matrizes não-simétricas, demandam maior tempo de processamento para resolução do sistema. Para problemas envolvendo grande número de nós a redução de tempo obtida durante a montagem da matriz é perdida durante a solução do sistema. Isto se dá porque o tempo de processamento despendido para montagem da matriz de rigidez cresce linearmente com o número de nós, enquanto o tempo gasto para resolução do sistema cresce com o quadrado do número de nós;

f) Ainda em relação à comparação entre as matrizes de rigidez obtidas a partir dos Teoremas dos Trabalhos Virtuais e das Potências Virtuais, é importante observar que, no caso da matriz de rigidez oriunda do uso do Teorema dos Trabalhos Virtuais, durante a solução do sistema é feita a verificação da estabilidade como parte do processo de solução. A verificação da estabilidade é muito mais complexa no caso da matriz de rigidez não-simétrica;

g) Como citado no item 9.6, quando se trabalha com um algoritmo Lagrangiano total com matriz de rigidez simétrica a verificação da estabilidade da estrutura é bastante simples, sendo um subproduto do processo de solução do sistema. Ao trabalhar com algoritmo Lagrangiano atualizado e matriz não-simétrica, podemos igualmente verificar de forma simples a estabilidade da estrutura via simetrização da matriz de rigidez para cada incremento, após a convergência;

h) O algoritmo utilizado para solução com formulação Lagrangiana atualizada aumentou os tempos computacionais tanto quando se trabalhou com matriz de rigidez simétrica como não-simétrica. Entretanto apresentou vantagens significativas por permitir ampliar o intervalo de trabalho para todas as parametrizações, tendo em vista tratar-se com $\boldsymbol{x}_{\Delta}$ e não mais com $\boldsymbol{x}$;

i) Considerando todos os aspectos envolvidos, na comparação entre as parametrizações, aquela que se mostrou mais adequada foi a parametrização de Rodrigues na sua forma canônica, ou seja, com $n = 1$. A parametrização de Rodrigues: i) apresenta fórmulas mais simples e sem a presença de funções trigonométricas para definição dos tensores $\boldsymbol{Q}$, $\boldsymbol{\Gamma}$ e das derivadas necessárias às formulações utilizadas; ii) possui expressão simples para composição de rotações, a fórmula de Rodrigues;

j) Com relação às formas fracas utilizadas para determinação do equilíbrio, a que melhor se apresentou foi a decorrente do Teorema dos Trabalhos Virtuais, pois: i) permite a verificação da estabilidade da estrutura durante a solução do sistema de equações, como subproduto do processo de solução; ii) por fornecer uma matriz de rigidez tangente simétrica demanda menor tempo de processamento para solução do sistema de equações. A solução com o Teorema das Potências Virtuais se mostrará mais vantajosa quando o problema a ser resolvido implicar em matriz de rigidez não-simétrica, seja por se tratar de problema dinâmico, seja por incluir forças não-conservativas. Neste caso, o algoritmo mais eficiente será aquele que utilizar a forma fraca decorrente do Teorema das Potências Virtuais, dada a maior simplicidade da rigidez tangente e

k) No que tange à formulação cinemática, a que se mostrou mais vantajosa foi a Lagrangiana atualizada, pois permite tirar vantagem das características da parametrização de Rodrigues, superando sua deficiência de intervalo de validade menor que a parametrização de Euler. Além disso, esta formulação garante a objetividade das deformações. Sua desvantagem decorrente dos resultados serem dependentes da trajetória pode ser facilmente superada com o refinamento da malha de elementos finitos.

REFERÊNCIAS

[1] ALTMANN, S. L. **Hamilton, Rodrigues, and the Quaternion Scandal**, Mathematics Magazine, Vol. 62, Nº 5, 291-308, 1989.

[2] ARGYRIS, J. H. **An Excursion into Large Rotations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 32, 85-155, 1982.

[3] ARGYRIS, J. H.; BALMER, H.; DOLTSINIS, J. H.; DUNNE, P. C.; HAASE, M.; KLEIBER, M. et al. **Finite element method – the natural approach**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 17/18, 1-106, 1979.

[4] ARGYRIS, J. H.; HILPERT, O.; MALEJANNAKIS, G. A.; SCHARPF, D. W. **On the geometrical stiffness of a beam in space – a consistent v. w. approach**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 20, 105-131, 1979.

[5] ARGYRIS, J. H.; POTERASU, V. F. **Large Rotations Revisited Application of Lie Algebra**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 103, 11-42, 1993.

[6] ARGYRIS, J.H.; DUNNE, P. C.; MALEJANNAKIS, G.; SCHARPF, D. W. **On large displacement-small strain analysis of structures with rotational degrees of freedom**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 15, 99-135, 1978.

[7] BASAR, Y; DING, Y. **Finite-rotation shell elements for the analysis of finite-rotation shell problems**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 34, 165-169,1992.

[8] BASAR, Y; DING, Y.; SCHULTZ, R. **Refined shear-deformation models for composite laminates with finite rotations**. Int. J. Solids Structures, 30, 261 l-2638, 1993.

[9] BATHE, K. J.; BOLOURCHI, S. **Large displacement analysis of three dimensional beam structures**, Int. J. Numer. Meths. Engrg., 14, 961-986,1979.

[10] BAUCHAU, O. A.; TRAINELLI, L. **The Vectorial Parameterization of**

Rotation, Nonlinear Dynamics, 32, 71-92, 2003.

[11] BEATTY, M. F. **Vector Analysis of Finite Rigid Rotations**, Transactions of ASME, Journal of Applied Mechanics, 44, 501-502, 1977.

[12] BERGWEILER, M. G. **Tratamento numérico de rotações finitas e sua aplicação em corpos rígidos e barras**. Tese de Doutorado. 99p, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2000.

[13] BETSCH, P.; MENZEL, A.; STEIN, E. **On the parameterization of finite rotations in computational mechanics. A classification of concepts with application to smooth shells**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 155, 273-305, 1998.

[14] BUECHTER, N.; RAMM, E. **Shell theory versus degeneration – a comparison in large rotation finite element analysis**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 34, 39-59, 1992.

[15] CAMPELLO, E. M. B. **Análise não-linear de perfis metálicos conformados a frio**. Dissertação de Mestrado. 97p, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2000.

[16] CAMPELLO, E. M. B. **Modelos não-lineares de casca em elasticidade e elastoplasticidade com grandes deformações: teoria e implementação em elementos finitos**. Tese de Doutorado. 127p, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 2005.

[17] CAMPELLO, E. M. B.; PIMENTA, P. M.; WRIGGERS, P. **A triangular finite shell element based on a fully nonlinear shell formulation**, Computational Mechanics, 31, 508-518, 2003.

[18] CARDONA, A.; GERADIN, M. **A Beam Finite Element Nonlinear Theory with Finite Rotations**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 26, 2403-38, 1988.

[19] CHAN, S. L. **Large Deflection Kinematics Formulation for Three Dimensional Framed Structures**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 94, 17-36, 1992.

[20] CHEN, H.; BLANDFORD, G. E. **Thin-Walled Space Frames II: Algorithmic Details and Applications**. J. Structural Engrg., ASCE, V 117 (8), 2521-39, 1991.

[21] CHENG, H. H.; GUPTA, K. G. A. **A Historical Note on Finite Rotations**. J. Appl. Mech., ASME, 56, 139-45, 1989.

[22] CHOI, H. I.; HAN, C. Y. **Euler-Rodrigues Frames on Spatial Pythagorean-Hodograph Curves**, Computer Aided Geometric Design, 19, 603-620, 2002.

[23] CRISFIELD, M. A. **A Consistent Corotational Formulation for Nonlinear 3D Beam-Elements**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 81, 131-150, 1990.

[24] DAI, J. S. **An Historical Review of the Theoretical Development of Rigid Body Displacements from Rodrigues Parameters to the Finite Twist**, Mechanism and Machine Theory, 41, 41-52, 2006.

[25] DVORKIN, E. N.; OÑATE, E.; OLIVER, J. **On a non-linear formulation for curved Timoshenko beam elements considering large displacement/rotation increments.** Int. J. Numerical Methods Engng., Vol.26, 1597-1613,1988.

[26] EL-ABBASI, N.; MEGUID, S. A. **A new Shell element accounting for through-thickness deformation**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 189, 841-862, 2000.

[27] FISH, J.; BELYTSCHKO, T. **A First Course in Finite Elements**. John Wiley & Sons, Ltd, Chichester, 2007.

[28] GOLDSTEIN, H. **Classical Mechanics**. Reading, MA: Addison-Wesley, 1980.

[29] GHOSH, S.; ROY, D. **A frame invariant scheme for the geometrically exact beam using rotation vector parameterization**. Computational Mechanics. Disponível em: <http://www.springerlink.com.w10020.dotlib.com.br/content/v341820499t1x365/?p=fe5370a4c42e40969db3ed17f93631d2&pi=0>. Acesso em:06. fev. 2009.

[30] GRUTTMANN, F.; SAUER, R.; WAGNER, W. **A Geometrical Nonlinear Eccentric 3D-Beam Element with Arbitrary Cross Sections**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 160,383-400, 1998.

[31] GRUTTMANN, F.; STEIN, E.; WRIGGERS, P. **Theory and numerics of thin elastic shells with finite rotations**, Ingenieur-Archiv, 59, 54-67, 1989.

[32] IBRAHIMBEGOVIC, A. **Stress Resultant Geometrically Exact Shell Theory for Finite Rotations and its Finite Element Implementation**, ASME, Applied Mechanics Review, Vol.50, Nº4, 199-226, 1997.

[33] IBRAHIMBEGOVIC, A. **On the choice of finite rotation parameters**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 149, 49-71, 1997.

[34] IBRAHIMBEGOVIC, A. **On finite element implementation of geometrically nonlinear Reissner's beam theory: three-dimensional curved beam elements**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 122, 11-26, 1995.

[35] IBRAHIMBEGOVIC, A.; AL MIKDAD, M. **Finite Rotations in Dynamics of Beams and Implicit Time-stepping Schemes**, Int. J. Numer. Meths. Engrg., 41,781-814, 1998.

[36] IBRAHIMBEGOVIC, A.; BRANK, B.; COURTOIS, P. **Stress Resultant Geometrically Exact Form of Classical Shell Model and Vector-like Parameterization of Constrained Finite Rotations**, Int. J. Numer. Meths. Engrg., 52, 1235-1252, 2001.

[37] IBRAHIMBEGOVIC, A.; FREY, F.; KOZAR, I. **Computational Aspects of Vector-like Parameterization of Three-dimensional Finite Rotations**, Int. J. Numerical Methods Engng. Vol.38,Nº21, 3653-3673, 1995.

[38] IBRAHIMBEGOVIC, A.; TAYLOR, R. L. **On the role of frame-invariance in structural mechanics models at finite rotations**, Comput. Methods Appl. Mech. Engrg., 191, 5159-5176, 2002.

[39] JELENIC, G.; CRISFIELD, M. A. **Geometrically exact 3D beam theory: implementation of a strain-invariant finite element for statics and dynamics**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 171, 141-171, 1999.

[40] JELENIC, G.; SAJE, M. **A Kinematically Exact Space Finite Strain Beam Model – Finite Element Formulation by Generalized Virtual Work Principle**, Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 120, 131-161, 1995.

[41] JIANG, L.; CHERNUKA, M. W. **A simple four-noded corotational shell element for arbitrarily large rotations**. Computers and Structures, 53, 1123-1132, 1994.

[42] KAPANIA, R. K.; LI, J. **A Formulation and Implementation of Geometrically Exact Curved Beam Elements Incorporating Finite Strains and Finite Rotations**, Computational Mechanics, 30, 444-459, 2003.

[43] KIM, C. Y.; SZE, K. Y.; KIM, Y. H. **Curved quadratic triangular degenerated - and solid-shell elements for geometric non-linear analysis**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 57, 2077-2097, 2003.

[44] KOUHIA, R.; TUOMALA, M. **Static and dynamic analysis of space frames using simple Timoshenko type elements**. Int. J. Numerical Methods Engng. Vol.36, 1189-1221, 1993.

[45] LEUNG, A. Y. T.; WONG, C. K. **Symmetry Reduction of Structures for Large Rotations**. Advances in Structural Engineering, Vol. 3 N°1, 2000.

[46] MACNEAL, R. H.; HARDER, R. L. **A proposed standard set of problems to test FE accuracy**. Finite Elements in Analysis and Design, 1, 3-20, 1985.

[47] MATA, P.; OLLER, S.; BARBAT, A. H. **Static analysis of beam structures under nonlinear geometric and constitutive behavior**. Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. 196, 4458–4478, 2007.

[48] MÄKINEM, J. **Total Lagrangian Reissner's geometrically exact beam element without singularities**. Int. J. Numer. Meth. Engng. 70, 1009-1048, 2006.

[49] MERLINI, T.; MORANDINI, M. **The helicoidal modeling in computational finite elasticity. Part I: Variational formulation**. International Journal of Solids and Structures, 41, 5351-5381, 2004.

[50] PFISTER, F. **Bernoulli numbers and rotational kinematics**, Journal of Applied Mechanics, Vol. 65, 758-765, 1998.

[51] PIMENTA, P. M. **Constitutive Second Order Effects on a Geometrically Exact Finite Strain Rod Model. Recent Developments in Solid Mechanics**. 79-85, LNCC, Rio de Janeiro, 1996.

[52] PIMENTA, P. M. **Fundamentos da Mecânica das Estruturas**. Notas de aula, Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2003.

[53] PIMENTA, P. M. **On a geometrically-exact finite-strain rod mod**el, proceedings of the 3rd Pan-American Congress on Applied Mechanics, III PACAM, São Paulo, 1993.

[54] PIMENTA, P. M. **On a geometrically-exact finite-strain shell model**, proceedings of the 3rd Pan-American Congress on Applied Mechanics, III PACAM, São Paulo, 1993.

[55] PIMENTA, P. M. **Rotações Finitas**. Bo1etim Técnico BT/PEF-8714. Departamento de Engenharia de Estruturas e Fundações da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 1987.

[56] PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. **Finite Rotation Parameterizations for the Nonlinear Static and Dynamic Analysis of Shells**. Proceedings of the 5th International Conference on Computation of Shell and Spatial Structures, Salzburg, 2005.

[57] PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B. **Geometrically nonlinear analysis of thin-walled space frames**. II ECCM, Proceedings of the Second European Conference on Computational Mechanics, Cracow, Poland, 2001.

[58] PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B.; WRIGGERS P. **A fully nonlinear multi-parameter shell model with thickness variation and a triangular shell finite element**, Comput. Mech., 34 (3), 181-193, 2004.

[59] PIMENTA, P. M.; CAMPELLO, E. M. B.; WRIGGERS, P. **An exact conserving algorithm for nonlinear dynamics with rotational DOFs and general hyperelasticity. Part 1: Rods**, Computational Mechanics, 2008.

[60] PIMENTA, P. M.; YOJO, T. **Geometrically Exact Analysis of Spatial Frames**. Appl. Mech. Reviews, 46(11), Part 2, 1993.

[61] PIMENTA, P. M.; YOJO, T. **Geometrically Exact Analysis of Spatial Frames with Consideration of Torsion Warping**. Proceedings of the XIV Congresso Ibero-Latino-Americano de Métodos Computacionais em Engenharia, IPT, São Paulo, 21-30, 1993.

[62] RHIM, J.; LEE, S. W. **A Vectorial Approach to Computational Modelling of Beams Undergoing Finite Rotations**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 41,527-540, 1998.

[63] RITTO-CORRÊA, M. C. **Análise de estruturas reticuladas: rumo a uma teoria geometricamente exacta, cinematicamente completa e fisicamente não linear**. Tese de Doutorado. 558p, Universidade Técnica de Lisboa. Lisboa, 2003.

[64] RITTO-CORRÊA, M.; CAMOTIM, D. **On the Differentiation of the Rodrigues Formula and its Significance for the Vector-Like Parameterization of Reissner-Simo Beam Theory**, Int. J. Numer. Meth. Engng. 55, 1005-1032, 2002.

[65] RODRIGUES, O. **Des lois géométriques qui régissent les déplacements d'un système solid dans l'espace, et de la variation des coordonnées provenant de ces déplacements considérés indépendamment des causes qui peuvent les produir**", Journal de Mathématiques, 1840.

[66] ROMERO, I. **The Interpolation of Rotations and its Application to Finite Element Models of Geometrically Exact Rods**, Computational Mechanics, 34, 121-133, 2004.

[67] ROMERO, I.; ARMERO, F. **An Objective Finite Element Approximation of the Kinematics of Geometrically Exact Rods and its Use in the Formulation of an Energy-Momentum Conserving Scheme in Dynamics**, Int. J. Numer. Meth. Engng. 54, 1683-1716, 2002.

[68] SALEEB, A. F.; CHANG, T. Y. P.; GENDY, A. S. **Effective Modelling of Spatial Buckling of Beam Assemblages, Accounting for Warping Constraints and Rotation Dependency of Moments**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 33,469 502, 1992.

[69] SALEEB, A. F.; CHANG, T. Y. P.; GRAF, W.; YINGYEUNYONG, S. **A hybrid/mixed model for non-linear shell analysis and its applications to large-rotation problems**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 29, 407-446, 1990.

[70] SANSOUR, C.; BUFLER, H. **An exact finite rotation shell theory, its mixed variational formulation and its finite element implementation**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 34, 73-115,1992.

[71] SANSOUR, C.; KOLLMANN, F. G. **Families of 4-node and 9-node finite elements for a finite deformation shell theory. An assessment of hybrid stress, hybrid strain and enhanced elements**. Computational Mechanics, 24, 435-447, 2000.

[72] SCHAUB, H.; TSIOTRAS, P.; JUNKINS, J. L. **Principal representations of proper n×n orthogonal matrices**. Int. J. Engng. Sci., 33, 2277-2295, 1995.

[73] SHOEMAKE, K. **Animating rotation with quaternion curves**. Computer graphics, 19:245-254.

[74] SIMO, J. C. **A Finite Strain Beam Formulation. The Three-Dimensional Dynamic Problem. Part I**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 49, 55-70, 1985.

[75] SIMO, J. C. **The (symmetric) Hessian for Geometrically Nonlinear models in Solid Mechanics: Intrinsic Definition and Geometric Interpretation**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 96, 189-200, 1992.

[76] SIMO, J. C.; FOX, D. D. **On a stress resultant geometrically exact shell model. Part I: Formulation and optimal parametrization**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 72, 267-304,1989.

[77] SIMO, J. C.; FOX, D. D.; RIFAI, M. S. **On a stress resultant geometrically exact shell model. Part III. Computational aspects of the nonlinear theory**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 79, 21-70, 1990.

[78] SIMO, J. C.; FOX, D. D.; HUGHES, T. J. R. **Formulations of Finite Elasticity with Independent Rotations**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 95, 277-88, 1992.

[79] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. **A Geometrically Exact Rod Model Incorporating Shear and Torsion-Warping Deformation**. Int. J. Solids Structures, 27, 371-393, 1991.

[80] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. **A Three-Dimensional Finite Strain Rod Model. Part II: Computational Aspects.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 58, 79-116, 1986.

[81] SIMO, J. C.; VU-QUOC, L. **On the dynamics in space of rods undergoing large motions: a geometrically exact approach**. Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 66, 125-161, 1988.

[82] SOLER, J. G. M. **Análise Não-Linear de Pórticos Espaciais de Concreto Armado**. Tese de Doutorado. 99p, Escola Politécnica da Universidade de São

Paulo. São Paulo, 1995.

[83] SPRING, K. W. **Euler Parameters and the Use of Quaternion Algebra in the Manipulation of Finite Rotation: a Review.** Mechanism Machine Theory, 21. 365-73, 1986.

[84] STARK, Peter A. **Introdução aos Métodos Numéricos**. Interciência, Rio de Janeiro, 1979.

[85] STUELPNAGEL, J. **On the Parameterization of Three-Dimensional Rotation Group**, *SIAM Revue,* Vol. 6, Nº 4, 422-430, 1964.

[86] SURANA, K. S.; SOREM, R. M. Geometrically non-linear formulation for three dimensional curved beam elements with large rotations. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 28,43-73, 1989.

[87] SZE, K. Y.; LIU, X. H.; LO, S. H. **Popular benchmark problems for geometric nonlinear analysis of shells**. Finite Elements in Analysis and Design, 40, 1551-1569, 2004.

[88] SZE, K. Y.; CHAN, W. K.; PIAN, T. H. H**. An eight-node hybrid-stress solid-shell element for geometric non-linear analysis of elastic shells**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 55,853-878, 2002.

[89] SZE, K. Y.; ZHENG, S-J.. **A hybrid stress nine-node degenerated shell element for geometric nonlinear analysis**. Computational Mechanics 23, 448-456, 1999.

[90] TEH, L. H. **Beam element verification for 3D elastic steel frame analysis**, Computers & Structures, 82, 1167-1179, 2004.

[91] TEH, L. H.; Clarke, M. J. **Co-rotational and Lagrangian Formulations for Elastic Three-dimensional Beam Finite Elements**, Journal of Constructional Steel Research, 48, 123-144, 1998.

[92] TIMOSHENKO, S. P.; GERE, J. M. **Theory of Elastic Stability**. McGraw Hill, New York, 1961.

[93] TRAINELLI, L. **The vectorial parameterization of rotation and motion**. Politecnico di Milano, Dept. of Aerospace Engineering. Scientific Report DIA-SR

02-18, 2002.

[94] WANG, L.; THIERAUF, G. **Finite rotations in non-linear analysis of elastic shells**, Computers & Structures, 79, 2357-2367, 2001.

[95] WEMPNER, G. **Finite elements, finite rotations and small strains of flexible shells**, Int. J. Solids Structures, 5, 117-153, 1969.

[96] WRIGGERS, P.; GRUTTMANN, F. **Thin Shells with Finite Rotations Formulated in Biot Stresses: Theory and Finite Element Formulation**. Int. J. Numer. Meths. Engrg., 36,2049-71, 1993.

[97] YANG, Y. B.; LIN, S. P.; CHEN, C. S. **Rigid body concept for geometric nonlinear analysis of 3D frames, plates and shells based on the updated Lagrangian formulation.** Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering, 196, 1178-1192, 2007.

[98] YANG, Y. B.; McGUIRE, W. **Joint Rotation and Geometric nonlinear analysis**. J. Structural Engrg., ASCE, V 112 (4),879-905, 1986.

[99] YOJO, T. **Análise Não-Linear Geometricamente Exata de Pórticos Espaciais (com aplicação a torres de transmissão de alta tensão).** Tese de Doutorado. 129p, Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. São Paulo, 1993.

[100] ZIENKIEWICZ, O. C. **The Finite Element Method**. Third Edition. McGraw Hill, New York, 1979.

[101] ZUPAN, D.; SAJE, M. **Rotational invariants in finite element formulation of three-dimensional beam theories**. Computers and Structures, 82, 2027–2040, 2004.