LUIS CARLOS TIMANÁ ERASO

ANÁLISE DE MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO
CONSIDERANDO PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

SÃO PAULO
2019

LUIS CARLOS TIMANÁ ERASO

ANÁLISE DE MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO
CONSIDERANDO PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

Dissertação apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do
título de Mestre em Ciências.

SÃO PAULO
2019

LUIS CARLOS TIMANÁ ERASO

ANÁLISE DE MODELOS DE LINHAS DE TRANSMISSÃO
CONSIDERANDO PARÂMETROS DEPENDENTES DA FREQUÊNCIA

Dissertação apresentado à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do
título de Mestre em Ciências.

Área de Concentração:

Sistemas de Potência

Orientador:

Prof. Dr. Luiz Cera Zanetta Junior

SÃO PAULO

2019

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, _____ de _____ de _____

Assinatura do autor: _____

Assinatura do orientador: _____

Catálogo-na-publicação

Eraso, Luis Carlos Timaná

Análise de modelos de linhas de transmissão considerando parâmetros dependentes da frequência / L. C. T. Eraso -- versão corr. -- São Paulo, 2019. 320 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1.Linhas de transmissão de energia elétrica 2.Modelos matemáticos
3.Transmissão de energia elétrica I.Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas II.t.

DEDICATÓRIA

Dedico este trabalho principalmente a Esperanza e Lucía por aprender com vocês a paciência e dedicação. Sempre estarão presentes na minha mente em todos os momentos importantes da minha vida.

A Lizeth pelo seu apoio nas minhas decisões e constante atenção.

A Carlos, Miriam e Graciela pela sua colaboração que possibilitou tomar boas decisões.

A Amparo e Elina pela sua companhia e apoio incondicional nos momentos mais difíceis.

AGRADECIMENTOS

Ao Professor Dr. Luiz Zanetta pela oportunidade de receber a sua orientação, dedicação, paciência e apoio ao longo de todo o período acadêmico, que foi fundamental na realização do mestrado.

Ao Professor Dr. Nelson Kagan, sua ajuda e colaboração na etapa inicial do mestrado, por ter a oportunidade de colaborar no ENERQ.

Ao Professor Dr. Frederico Meschini e Matheus Gemignani pelas suas valiosas orientações e contribuições nas atividades desempenhadas no ENERQ.

Ao meu prezado amigo Edwin pela a sua amizade e companhia no meu período de mestrado, assim como os seus conselhos que expandiram a minha visão do mundo.

A Sara pela sua paciência, simpatia e gentileza.

Aos meus colegas Jonas, Guilherme e Lameu por suas orientações e conselhos que facilitaram o desenvolvimento do trabalho de dissertação e ter uma melhor perspectiva sobre a pesquisa.

Aos meus amigos Verónica, Guido, Jaimis, Vanessa, Carlos, Janeth, Keiser, Fabián, Juan e todos os meus estimados amigos pelos bons momentos compartilhados.

*Sejam quais forem os resultados
com êxito ou não, o importante é
que no final cada um possa
dizer: 'fiz o que pude'.*

(Louis Pasteur)

RESUMO

Neste trabalho são descritos e avaliados diferentes modelos de linhas aéreas de transmissão, considerando a variação dos parâmetros da linha com a frequência. Em geral os modelos apresentados são baseados no uso da matriz de admitâncias nodais, com algumas análises complementares empregando o método das características. São testados casos de circuito-aberto, curto-circuito, linha em carga e manobras com chaves. Os resultados de cálculo são comparados com as respostas simuladas nos programas ATP e PSCAD. Também são apresentadas as formulações para o cálculo de parâmetros da linha de transmissão, considerando o efeito pelicular e a resistividade do solo

São avaliadas as respostas no domínio do tempo para diferentes modelos equivalentes de linha de transmissão, obtidos do modelo polo-resíduo com passividade da matriz de admitâncias nodais, sendo empregados: i) transformação do modelo racional para uma representação em espaço de estados, ii) construção de uma rede elétrica equivalente com resistências, indutores e capacitores e iii) representação por meio de um equivalente de Norton. Também é analisado o equivalente de Norton obtido dos modelos polo-resíduo com passividade de uma linha equivalente dobrada nas condições em curto-circuito e circuito-aberto.

Foi analisada a solução de redes elétricas no domínio da frequência usando uma formulação nodal e sem a necessidade de ajustes intermediários da matriz de admitâncias nodais. As respostas de tensão e corrente são antitransformadas para o domínio do tempo por meio de diferentes formulações baseadas na transformada inversa de Fourier, levando em conta os métodos que mitigam erros de truncamento e discretização. As seguintes formulações foram avaliadas: i) transformada modificada de Fourier, ii) transformada inversa rápida de Fourier e iii) transformada inversa de Fourier com integração semianalítica.

É também apresentado um modelo para linhas de transmissão em paralelo, baseado no domínio modal usando uma matriz de transformação constante, juntamente com a aplicação do método de ajuste *Vector Fitting* com o objetivo de modelar com precisão o efeito de acoplamento mútuo entre linhas.

Palavras-chave: ajuste vetorial, imposição de passividade, linha de transmissão, matriz de admitâncias nodais, transitórios eletromagnéticos, transformada inversa de Fourier.

ABSTRACT

In this work different overhead transmission lines models are described and evaluated, considering the frequency dependence of parameters. In general, the models are based on the nodal admittance matrix, with some complementary analysis using the method of characteristics. Cases of open-circuit, short-circuit, line connected to a load and switching maneuvers are tested. The calculation results are compared with the simulated responses obtained with the ATP and PSCAD. The formulations for the transmission line parameters are also presented, taking into account the skin effect and the ground return.

The time-domain responses for different transmission line models are evaluated. These models are obtained from the passive pole-residue model of the nodal admittance matrix. The equivalent models are: i) state-space representation, ii) electrical network composed of resistors, inductors and capacitors, iii) the Norton's equivalent. In addition, an evaluation is performed for the Norton's equivalent obtained from the pole-residue models for the open-circuit and short-circuit conditions of a folded line equivalent.

On the other hand, the network is solved completely in frequency-domain using a nodal formulation, without the fitting of the nodal admittance matrix. The voltage and current responses are transformed back to the time-domain by different formulations based on the inverse Fourier transform, taking into account methods to minimize errors by truncation and discretization. The formulations investigated are: i) modified Fourier transform, ii) fast Fourier transform, iii) inverse Fourier transform with semianalytic integration.

The model for parallel transmission lines is also evaluated, based on modal domain using a constant transformation matrix and the application of the vector fitting method, with emphasis on accurate representation of mutual coupling effects.

Keywords: electromagnetic transients, inverse Fourier transform, nodal admittance matrix, passivity enforcement, transmission lines, vector fitting.

LISTA DE FIGURAS

1.1 – Sequência dos conteúdos dos capítulos	3
1.2 – Modelos para o cálculo de transitórios em linhas de transmissão	7
1.3 – Classificação dos modelos de linhas de transmissão	10
1.4 – Modelos de linhas de transmissão.....	11
1.5 – Modelamento de linhas de transmissão baseado no ajuste da matriz de admitâncias nodais	19
2.1 – Procedimento de cálculo do VF.....	31
2.2 - Conexão entre um elemento ajustado pelo método VF e uma rede externa.....	39
2.3 - Algoritmo de ajuste usando matriz de transformação constante	40
3.1 - Construção do modelo em espaço de estados (método 1)	44
3.2 - Construção do modelo em espaço de estados (método 2)	45
3.3 - Autovalores de $\mathbf{G}_s$	46
3.4 - Procedimento iterativo para a imposição de passividade	62
4.1 – Aplicação de métodos de solução numérica para o teste da linha de transmissão em curto-circuito (item 5.3.1)	66
4.2 – Equivalente de Norton	68
4.3 – Síntese de uma rede elétrica.....	70
4.4 – Contribuições em curto-circuito e circuito-aberto da linha dobrada.....	74
4.5 – Cálculo do equivalente de Norton para a FLE.....	76
5.1 – Representação geométrica da linha de transmissão	81
5.2 – Simulação da primeira coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$ por meio do método <i>Frequency scan</i> de ATP..	83
5.3 – Módulo e fase no domínio da frequência de $\mathbf{Y}_{nod}$	84
5.4 – Ajuste da matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ pelo método VF	86
5.5 – Autovalores da matriz de condutâncias para os modelos ajustados com e sem passividade	88
5.6 – Elementos para os modelos ajustados passivo e não passivo de $\mathbf{Y}_{nod}$	89

5.7 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 300 m	90
5.8 – Comparação entre modelos de linha de transmissão	93
5.9 – Correntes em uma linha em curto de 14 km em condições de tensão balanceada.....	97
5.10 – Correntes em uma linha em curto de 14 km em condições de tensão desbalanceada ..	98
5.11 – Tensões para uma linha em circuito-aberto de 14 km em condições de tensão balanceada.....	98
5.12 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 14 km em condições de tensão não balanceada.....	99
5.13 –Ajuste da matriz Y_v pelo método VF.....	100
5.14 – Correntes em uma linha em curto de 250 km em condições de tensão balanceada....	101
5.15 – Correntes em uma linha em curto de 250 km em condições de tensão não balanceada.....	102
5.16 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 250 km em condições de tensão balanceada.....	103
5.17 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 250 km em condições de tensão não balanceada.....	104
5.18 – Correntes em uma linha em curto de 14 km	105
5.19 – Representação da indutância e capacitância em um EMTP.....	106
5.20 – Representação do circuito RL monofásico em um EMTP.....	107
5.21 – Representação equivalente da rede da Figura 5.18	107
5.22 – Correntes injetadas no início da linha	109
5.23 – Tensões aplicadas no início da linha.....	109
5.24 – Correntes injetadas no início da linha em curto-circuito	112
5.25 – Tensões no fim da linha em circuito-aberto.....	112
5.26 – Geometria do circuito duplo	114
5.27 – Tensões no fim da linha não energizada	115
6.1 –Linha de transmissão simulada	119
6.2 –Circuito equivalente da Figura 6.1b.....	120
6.3 –Métodos para a modelagem da linha de transmissão	122
6.4 –Módulo e ângulos de fase do elemento (1,1) de $Y_{nod,aj}$, $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$ para a linha de 250 km.....	124
6.5 –Autovalores da matriz de condutâncias para a linha de 250 km.....	125

6.6 –Módulo e ângulos de fase do elemento (1,1) de $Y_{nod,aj,pas}$, $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$ para a linha de 250 km.....	127
6.7 –Curto-circuito trifásico para uma linha de 250 km, com $\Delta t < \tau$ e $\Delta t = 10 \mu s$	130
6.8 –Curto-circuito trifásico para linhas de 5 km e 300 m.....	131
6.9 –Tensões no fim da linha de 250 km em circuito-aberto, com $\Delta t = 10 \mu s$	132
6.10 –Tensões no fim da linha em circuito-aberto, com comprimento de 5 km, $\tau = 16,7 \mu s$	132
6.11 –Tensões no fim da linha em circuito-aberto, com comprimento de 300 m, $\tau \approx 1,0 \mu s$	134
6.12 –Autovalores dos modelos ajustados para a linha de 300 m.....	135
6.13 –Autovalores dos modelos ajustados para a linha de 300 m.....	137
6.14 –Autovalores dos modelos ajustados para a linha de 250 km.....	138
6.15 –Número de condicionamento, κ , de Y_{nod} , Y_{oc} e Y_{sc}	139
7.1 – Disposição espacial dos condutores e as suas imagens.....	142
7.2 – Condutor tubular i	148
7.3 – Linha de transmissão trifásica.....	154
7.4 – Cálculo e simulação de $Y_{reduzida}$ usando Matlab e PSCAD.....	155
7.5 – Cálculo e simulação de $Y_{reduzida}$ usando Matlab e ATP.....	156
7.6 – Cálculo e simulação de $Re\{Z_{reduzida}\}$ usando Matlab e PSCAD	158
7.7 – Cálculo e simulação de $Im\{Z_{reduzida}\}$ usando Matlab e PSCAD	158
7.8 – Resistência interna de um condutor sólido	160
7.9 – Reatância interna de um condutor sólido	160
7.10 – Impedância própria série de um condutor tubular	161
7.11 – Resistência própria série de um condutor sólido e tubular	162
7.12 – Reatância própria série de um condutor sólido e tubular.....	164
7.13 – Impedância de retorno pela terra usando as formulações dos itens 7.1.1.1 e 7.1.1.4.....	166
7.14 – Impedância de retorno pela terra usando as formulações dos itens 7.1.1.1 e 7.1.1.2.....	166
7.15 – Elementos da matriz de admitâncias nodais $Y_{reduzida}$	169
7.16 – Elementos da matriz de impedâncias série $Z_{reduzida}$	170
7.17 – Elementos da matriz de admitâncias nodais	171
7.18 – Elementos da matriz de admitâncias nodais	172

8.1 – Representação equivalente das fontes de tensão.....	175
8.2 – Representação equivalente das fontes de tensão.....	176
8.3 – Representação geral equivalente dos casos de simulação.....	177
8.4 – Simulação do fechamento de chaves	178
8.5 – Simulação da abertura de chaves	179
8.6 – Simulação do fechamento de chaves	180
8.7 – Simulação da abertura de chaves	181
8.8 – Representação das chaves aplicando o princípio de superposição	182
8.9 – Representação geral dos casos de simulação	183
8.10 – Exemplo de simulação de manobras de chaves	186
8.11 – Variação linear de T_{ω}	194
8.12 – Amostras para o cálculo da integral de Simpson no intervalo x_a, x_b	197
8.13 – Cálculo adaptativo de amostras.....	198
8.14 – Excitação arbitrária $u(t)$	200
8.15 – Casos de simulação	202
8.16 – Elemento (1,1) de $\mathbf{Y}_{nod}$	204
8.17 – Elemento (1,3) de $\mathbf{Y}_{nod}$	205
8.18 – Amostragem adaptativa.....	206
8.19 – Obtenção da frequência de ressonância	207
8.20 – Amostragem adaptativa.....	207
8.21 – Métodos de solução do teste da linha em curto-circuito	209
8.22 – Correntes que ingressam nos terminais da linha em curto-circuito usando o método TMF	210
8.23 – Desvio das correntes que ingressam na linha em curto-circuito usando qualquer um dos métodos TMF ou TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	211
8.24 – Desvio das correntes que ingressam nos terminais da linha em curto-circuito usando o método TIRF em relação aos resultados de ATP e PSCAD	212
8.25 – Desvio das correntes que ingressam nos terminais da linha em curto-circuito usando o método TIFIS e o procedimento de integração adaptativo	217
8.26 – Tensões na linha em circuito-aberto usando o método TMF.....	218
8.27 – Desvio das tensões da linha em circuito-aberto usando qualquer um dos métodos TMF ou TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	219
8.28 – Desvio das tensões na linha em circuito-aberto usando o método TIRF em relação aos resultados de ATP e PSCAD	221

8.29 – Desvio das correntes que ingressam nos terminais da linha em circuito-aberto usando o método TIFIS e o procedimento de integração adaptativo	222
8.30 – Tensões no terminal receptor da linha com carga usando o método TMF	224
8.31 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha com carga usando o método TMF ou TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	225
8.32 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha com carga usando o método TIRF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	227
8.33 – Tensões no terminal receptor da linha em vazio usando o método TMF	229
8.34 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha em vazio usando o método TMF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	230
8.35 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha em vazio usando o método TIRF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	231
8.36 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha em vazio usando o método TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD	232
9.1 - Construção do modelo em espaço de estados	236
9.2 – Representação do acoplamento mútuo por meio de fontes de tensão	241
9.3 – Geometria do circuito duplo	242
9.4 – Elementos de $\mathbf{T}_I$ para a linha 1	243
9.5 – Elementos de $\mathbf{T}_I$ para as linhas 1 e 2	244
9.6 – Impedâncias características modais da linha 1	246
9.7 – Impedâncias características modais do conjunto de linhas 1 e 2	246
9.8 – Admitâncias características modais da linha 1	249
9.9 – Admitâncias características modais do conjunto de linhas 1 e 2	250
9.10 – Funções de propagação modais da linha 1	251
9.11 – Detalhe da Figura 9.10 para os ângulos de fase	252
9.12 – Funções de propagação modais do conjunto de linhas 1 e 2	253
9.13 – Detalhe da Figura 9.12 para os ângulos de fase	254
9.14 – Cálculo do τ_0 ótimo de H_0	256
9.15 – Ajuste ótimo das funções de propagação modais da linha 1	257
9.16 – Elementos de $\bar{\mathbf{K}}_{12}$	260
9.17 – Elementos de $\mathbf{K}_{12}$	261
9.18 – Elementos de $\mathbf{K}_{12}$ e $\bar{\mathbf{K}}_{12}$	262
9.19 – Testes no domínio do tempo	263
9.20 – Modelos circuitais dos testes	263

9.21 – Energização em vazio da linha 1.....	268
9.22 – Tensões induzidas na energização de linhas em paralelo	269
9.23 – Correntes injetadas na energização de linhas em paralelo	270
9.24 Energização de linhas em paralelo com excitação degrau unitário, usando a nova abordagem para modelar o acoplamento mútuo	272
9.25 Energização de linhas em paralelo com excitação senoidal, usando a nova abordagem para modelar o acoplamento mútuo	273
A.1 – Efeito do truncamento de frequência	291
A.2 – Efeito da função janela.....	292
A.3 – Efeito da discretização	293
A.4 – Amostragem no DT e DF.....	294
B.1 – Primeiro passo na redução matricial de $\mathbf{Z}$	298
B.2 – Segundo passo na redução matricial de $\mathbf{Z}$	298
B.3 – Terceiro passo na redução matricial de $\mathbf{Z}$	299
B.4 – Redução matricial de $\mathbf{P}$	301
B.5 – Agrupamento simétrico com três subcondutores	303
B.6 – Perfil do condutor entre torres.....	306
C.1 – Segmento de linha de comprimento l	311
C.2 – Modelo de linha no domínio de fase	320

LISTA DE TABELAS

1.1 – Contribuições relevantes na formulação do VF e suas aplicações na modelagem de linhas de transmissão	17
3.1 – Métodos de imposição de passividade	52
5.1 - Dados da linha de transmissão.....	81
5.2 – Simulações no tempo	91
5.3 – Tempos de processamento	92
5.4 - Dados das linhas de transmissão.....	114
6.1 - Dados da linha de transmissão.....	118
6.2 – Tempos de processamento em segundos para uma linha de 250 km.....	123
6.3 – Tempos de processamento em segundos para uma linha de 5 km.....	123
6.4 – Tempos de processamento em segundos para uma linha de 300 m.....	123
6.5 – Tempos de simulação em segundos	128
6.5 – Comparação dos resultados de simulação com o ULM.....	128
7.1 – Dados e configuração da linha de transmissão da Figura 7.3	154
7.2 – Tempos de processamento no cálculo da impedância interna	160
7.3 – Tempos de processamento para o cálculo da impedância de retorno pela terra	167
7.4 – Tempos de processamento no cálculo de Y_{nod}	171
8.1 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste em curto-circuito	215
8.2 – Tempos de processamento em segundos para o cálculo da transformada inversa de Fourier com a TIFIS.....	216
8.3 – Tempos de pré-processamento em segundos para o cálculo das amostras	216
8.4 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste em circuito-aberto	220
8.5 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste em circuito-aberto	226

8.6 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste de simulação de acionamento de chaves.....	233
9.1 - Dados das linhas de transmissão.....	241
A.1 – Equações da função janela	290

SIMBOLOGIA E ABREVIACÕES

Operadores e notação

$*$	convolução
$ \cdot $:	valor absoluto
$\ \cdot\ $:	norma euclidiana vetorial
$\ \cdot\ _2$:	norma euclidiana matricial
$(\cdot)^{-1}$:	inversa de uma matriz
$(\cdot)^T$:	transposta de uma matriz ou vetor
$(\cdot)^{-T}$:	inversa e transposta de uma matriz
$(\cdot)^*$:	conjugação e transposição de uma matriz
$\overline{(\cdot)}$:	conjugado de um número complexo ou matriz
$diag(\cdot)$:	criação de uma matriz diagonal, localizando os elementos do vetor (ou matriz) na diagonal principal
$eig(\cdot)$:	autovalores de uma matriz
$\mathfrak{F}(\cdot)$:	transformada de Fourier
$\mathfrak{F}^{-1}(\cdot)$:	transformada inversa de Fourier
$I_0(\cdot)$:	função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero
$I_1(\cdot)$:	função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem um
$Im(\cdot)$:	parte imaginária de um número complexo
$K_0(\cdot)$:	função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero
$K_1(\cdot)$:	função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem um
$\mathcal{L}(\cdot)$:	transformada de Laplace
$\mathcal{L}^{-1}(\cdot)$:	transformada inversa de Laplace
$max(\cdot)$:	valor máximo do elemento em um vetor
$min(\cdot)$:	valor mínimo do elemento em um vetor
$\rho_m(\cdot)$:	raio espectral de uma matriz

$Re(\cdot)$: parte real de um número complexo

Símbolos gerais

α :	conjunto de polos $\{-a_1, \dots, -a_p\}$
A, B, C, D :	matrizes do modelo em espaço de estados
a_n :	n-ésimo polo
B_r :	matriz de susceptâncias nodais da rede elétrica
c_n :	n-ésimo resíduo da função racional ajustada pelo VF
$c_{i,m}$:	n-ésimo resíduo do i-ésimo autovalor λ_i^{nod}
$\tilde{c}_n$:	n-ésimo resíduo da função $\sigma(s)$
$c_{p,v}$:	resíduo associado à função racional $\phi_p(s, a)$ do macromodelo $H(s)$
$c_{i,m}^\lambda$:	n-ésimo resíduo do i-ésimo autovalor relativo $\lambda_i^{nod}/ \lambda_i^{nod} $
d_{ij} :	distância entre os condutores i e j
D_{ij} :	distância entre o condutor i e a imagem do condutor j
Δr_{ii}^c :	parcela resistiva da correção de Carson para a impedância própria
Δr_{ij}^c :	parcela resistiva da correção de Carson para a impedância mútua
Δx_{ii}^c :	parcela indutiva da correção de Carson para a impedância própria
Δx_{ij}^c :	parcela indutiva da correção de Carson para a impedância mútua
Δz_{ii}^c :	correção de Carson para a impedância própria
Δz_{ij}^c :	correção de Carson para a impedância mútua
$\Delta Y_{r,aj}$:	mudança dos elementos de $Y_{r,aj}$ em relação a $Y_{r,aj,pas}$
f :	frequência em Hz
G :	matriz de condutâncias nodais
G_r :	matriz de condutâncias nodais da rede elétrica
$G_{r,aj}$:	matriz de condutâncias nodais obtida da parte real de $Y_{r,aj}$
G_{nod} :	matriz de condutâncias nodais da linha de transmissão
G_{Norton} :	matriz de condutâncias do equivalente de Norton
H :	função de propagação da linha de transmissão
H_i :	i-ésimo modo da função de propagação modal
h_i :	altura média do i-ésimo condutor em relação ao solo

$H_{mps,i}$:	i-ésimo modo da função de propagação modal de fase mínima
$H_v(s)$:	v-ésimo elemento do macromodelo $\mathbf{H}(s)$
$\mathbf{i}$:	vetor de correntes injetadas nodais
$\bar{\mathbf{I}}$:	vetor de correntes injetadas em componentes modais
$\mathbf{i}_1$:	vetores de correntes injetadas na extremidade emissora da linha de transmissão
$\mathbf{i}_2$:	vetores de correntes injetadas na extremidade receptora da linha de transmissão
$\mathbf{i}_{his,k}$:	vetor de correntes históricas do equivalente de Norton
$\mathbf{I}_k$:	vetor de correntes injetadas na extremidade emissora da linha
$\mathbf{i}_{kh}$:	vetor de correntes históricas do modelo de linha no domínio de fase, na extremidade emissora da linha
$i_{kh,i}$:	fonte de corrente histórica do modelo de linha para o i-ésimo modo, na extremidade emissora da linha
$I_{k,i}$:	i-ésima corrente modal na extremidade emissora da linha
$\mathbf{I}_m$:	vetor de correntes injetadas na extremidade receptora da linha
$\mathbf{i}_{mh}$:	vetor de correntes históricas do modelo de linha no domínio de fase, na extremidade receptora da linha
$i_{mh,i}$:	fonte de corrente histórica do modelo de linha para o i-ésimo modo, na extremidade receptora da linha
$I_{m,i}$:	i-ésima corrente modal na extremidade receptora da linha
$\mathbf{I}_n$:	matriz identidade de dimensão $n \times n$
$\mathbf{i}_{oc}$:	vetor de correntes de fase na condição de circuito-aberto da FLE
$\mathbf{i}_{sc}$:	vetor de correntes de fase na condição de curto-circuito da FLE
κ :	número de condicionamento
λ :	condutividade
λ'_D :	vetor de autovalores de $\mathbf{D}$
λ'_E :	vetor de autovalores de $\mathbf{E}$
λ'_G :	vetor de autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}$
λ_{gi} :	i-ésimo autovalor de $\mathbf{G}_{r,aj}$
λ_i :	i-ésimo autovalor de $\mathbf{Y}_r$
λ_i^{nod} :	i-ésimo autovalor de $\mathbf{Y}_{nod}$

$\lambda_{i,aj}$:	i-ésimo autovalor de $\mathbf{Y}_{r,aj}$
$\mathbf{\Lambda}_n$:	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$
$\mathbf{\Lambda}_Y$:	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{Y}_r$
$\mathbf{\Lambda}_{zy}$:	constantes de propagação da linha de transmissão
l :	comprimento da linha
$\mathbf{M}$:	matriz Hamiltoniana
μ_0 :	permeabilidade magnética do vácuo
N_s :	número de amostras de frequência
$\mathbf{P}$:	matriz de coeficientes de potencias
P_{ij} :	elementos (i,j) de $\mathbf{P}$
R_{CC} :	resistência em corrente contínua por quilômetro de comprimento da linha
r_i :	raio do i-ésimo condutor
r_{i-int} :	resistência interna do i-ésimo condutor
$\mathbf{R}_m$:	matriz de resíduos
ρ :	resistividade
s :	frequência de Laplace
$\mathbf{S}$:	matriz de singularidade
$\sigma(s)$:	função temporal do VF
t_c :	instante de fechamento da chave
$\mathbf{t}_i$:	i-ésimo autovetor de $\mathbf{Y}_r$
$\mathbf{t}_{oc}$:	autovetor de $\mathbf{Y}_{oc}$
$\mathbf{t}_{sc}$:	autovetor de $\mathbf{Y}_{sc}$
t_{zc} :	instante de abertura da chave
$\mathbf{T}$:	matriz de autovetores de $\mathbf{Y}_r$
$\mathbf{T}_C$:	matriz de transformação constante do modelo JMarti
$\mathbf{T}_n$:	matriz de autovetores de $\mathbf{Y}_{nod}$
$\mathbf{T}_{zy}$:	matriz de autovetores de $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}$
τ_i :	tempo de trânsito do i-ésimo modo
$\mathbf{\Gamma}_{R_m}$:	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{R}_m$
$\mathbf{\Gamma}_D$:	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{D}$
$\mathbf{\Gamma}_E$:	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{E}$
$\mathbf{\Gamma}_{zy}$:	matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}$

$\mathbf{v}$:	vetor de tensões de fase nodais
$\bar{\mathbf{V}}$:	vetor de tensões em componentes modais
$\mathbf{v}_1$:	vetores de tensões de fase na extremidade emissora da linha de transmissão
$\mathbf{v}_2$:	vetores de tensões de fase na extremidade receptora da linha de transmissão
$\mathbf{v}_{1,ind}$:	vetor de tensões induzidas na linha 1 por causa do efeito de acoplamento mútuo com a linha 2
$\mathbf{v}_{2,ind}$:	vetor de tensões induzidas na linha 2 por causa do efeito de acoplamento mútuo com a linha 1
$\mathbf{V}_k$:	vetor de tensões na extremidade emissora da linha
$v_{k,a}, v_{k,b}, v_{k,c}$:	tensões no domínio de fase na extremidade emissora da linha
$V_{k,i}$:	i-ésima tensão modal na extremidade emissora da linha
$\mathbf{V}_m$:	vetor de tensões na extremidade receptora da linha
$v_{m,a}, v_{m,b}, v_{m,c}$:	tensões no domínio de fase na extremidade receptora da linha
$V_{m,i}$:	i-ésima tensão modal na extremidade receptora da linha
$\mathbf{v}_{oc}$:	vetor de tensões de fase na condição de circuito-aberto da FLE
$\mathbf{v}_{sc}$:	vetor de tensões de fase na condição de curto-circuito da FLE
vel_i :	i-ésima velocidade modal
$weight$:	coeficiente de ponderação no cálculo de mínimos quadrados
$\phi_{mps,i}$:	ângulo de fase de $H_{mps,i}$
$\Phi_p(s, \mathbf{a})$:	soma de funções racionais associada ao conjunto de polos $\mathbf{a}$
x_{ij} :	distância horizontal entre os condutores i e j
x_{i-int} :	reatância interna do i-ésimo condutor
$\mathbf{Y}$:	matriz de admitâncias shunt da linha de transmissão
$\mathbf{Y}_c$:	admitância característica da linha de transmissão
$Y_{c,i}$:	i-ésimo modo da admitância característica modal
$\mathbf{Y}_{eq}$:	admitância equivalente do modelo de linha no domínio de fase
$Y_{eq,i}$:	admitância equivalente do modelo de linha para o i-ésimo modo
$Y_{r(n,m)}$:	elemento (n,m) de $\mathbf{Y}_r$
$\mathbf{Y}_n$:	matriz de admitâncias nodais para duas linhas em paralelo
$\mathbf{Y}_{nod}$:	matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão

$Y_{nod(i,j)}$:	elemento (i,j) de Y_{nod}
$Y_{nod,aj}$:	modelo ajustado de Y_{nod} , sem imposição de passividade
$Y_{nod,aj,pas}$:	modelo ajustado de Y_{nod} , com imposição de passividade
$Y_{nod,aj,pas(i,j)}$:	elemento (i,j) de $Y_{nod,aj,pas}$
Y_{oc} :	matriz de admitâncias para a condição em circuito-aberto da FLE
$Y_{oc,aj}$:	modelo ajustado de Y_{oc} , sem imposição de passividade
$Y_{oc,aj,pas}$:	modelo ajustado de Y_{oc} , com imposição de passividade
Y_r :	matriz de admitâncias nodais de uma rede elétrica ou sistema linear
$Y_{r,aj}$:	modelo ajustado de Y_r
$Y_{r,aj,pas}$:	modelo ajustado Y_r , com imposição de passividade
Y_{sc} :	matriz de admitâncias para a condição em curto-circuito da FLE
$Y_{sc,aj}$:	modelo ajustado de Y_{sc} , sem imposição de passividade
$Y_{sc,aj,pas}$:	modelo ajustado de Y_{sc} , com imposição de passividade
Z :	matriz de impedâncias série da linha de transmissão
Z_c :	impedância característica da linha de transmissão
$Z_{c,i}$:	i-ésimo modo da impedância característica modal
z_{ii} :	impedância própria de Z
z_{ij} :	impedância mútua de Z
z_{i-int} :	impedância interna do i-ésimo condutor
Z_r :	matriz de impedâncias nodais de uma rede elétrica
Z_{nod} :	matriz de impedâncias nodais da linha de transmissão
$Z_{nod(i,j)}$:	elemento (i,j) de Z_{nod}
$Z_{r(i,j)}$:	elemento (i,j) de Z_r
z_n :	n-ésimo zero
ω :	frequência angular em rad/s

Abreviações e acrônimos

ACSR:	Steel-Reinforced Aluminum Cables
ATP:	Alternative Transients Program
CCM:	Component Connection Method

CGS:	Sistema de unidades centímetro-gramo-segundo
DF:	Domínio da frequência
DT:	Domínio do tempo
EN:	Equivalente de Norton
EMTDC:	ElectroMagnetic Transient Design and Control
EMTP:	Electromagnetic Transients Program
FFT:	Fast Fourier Transform
FLE:	Folded Line Equivalent
FMP:	Fast Modal Perturbation
FRP:	Fast Residue Perturbation
IBSA:	Impedance-Based Stability Analysis
IFFT:	Inverse fast Fourier transform
MEE:	Modelo em Espaço de Estados
MKS:	Sistema de unidades metro-kilograma-segundo
MC:	Método das Características
MFT:	Modified Fourier Transform
MP:	Modal Perturbation
MVF:	Modal Vector Fitting
NLT:	Numerical Laplace Transform
PD:	Positive Definite
PF:	Participation Factor
REE:	Rede Elétrica Equivalente
RMS:	Root Mean Square
RP:	Residue Perturbation
STM:	Singular Test Matrix
TIF:	Transformada Inversa de Fourier
TIFIS:	Transformada Inversa de Fourier com Integração Semianalítica
TIRF:	Transformada Inversa Rápida de Fourier
TMF:	Transformada Modificada de Fourier
ULM:	Modelo de Linha Universal (do inglês <i>Universal Line Model</i>)
VF:	Vector Fitting

SUMÁRIO

1.	Introdução	1
1.1.	Motivação	1
1.2.	Objetivos	4
1.3.	Revisão bibliográfica.....	7
1.3.1.	Modelos de linhas de transmissão no domínio do tempo.....	7
1.3.2.	Método do Vector Fitting e sua aplicação no modelamento de linhas.....	15
1.3.3.	Simulação de linhas de transmissão usando a transformada inversa de Fourier.....	18
1.4.	Estrutura do trabalho	20
2.	Métodos de Aproximação para Respostas no Domínio da Frequência	24
2.1.	Aproximação da resposta no domínio da frequência pelo método <i>Vector Fitting</i>	24
2.1.1.	Cálculo inicial de c_n , d , h , $\tilde{c}_n$	25
2.1.1.1.	Polos de partida reais.....	26
2.1.1.2.	Polos de partida em pares conjugados.....	26
2.1.2.	Cálculo dos zeros de σ_s	27
2.1.3.	Cálculo dos resíduos de f_s	28
2.1.3.1.	Polos reais.....	28
2.1.3.2.	Polos em pares conjugados.....	29
2.1.4.	Polos de partida	30
2.1.5.	Ajuste de vetores	30
2.2.	Aperfeiçoamento na realocação dos polos.....	32
2.3.	Modelagem eficiente de macro-modelos por meio do cálculo rápido do VF.....	33
2.4.	Modal Vector Fitting (MVF)	36

2.4.1.	Considerações de precisão.....	36
2.4.2.	Cálculo do modelo polo-resíduo	37
2.4.3.	Utilizando propriedades do circuito externo	38
2.4.4.	Modelagem por meio de uma matriz de transformação constante.....	39
3.	Avaliação e Imposição de Passividade	42
3.1.	Teste de singularidade para uma avaliação rápida e confiável da passividade de modelos racionais.....	42
3.1.1.	Conversão do modelo polo-resíduo para o modelo de espaço de estados.....	43
3.1.2.	Avaliação da passividade	45
3.1.3.	Matriz de singularidade	47
3.1.3.1.	Relação entre a matriz de singularidade e os zeros de $G_{r,aj}$	49
3.1.3.2.	Relação com a matriz Hamiltoniana	50
3.2.	Imposição rápida da passividade em modelos polo-resíduo por meio da perturbação dos autovalores das matrizes de resíduos.....	51
3.2.1.	Modelo de polo-resíduo.....	52
3.2.2.	Perturbação do modelo $Y_{r,aj}$	53
3.2.2.1.	Perturbação dos resíduos (RP)	53
3.2.2.1.1.	Relação entre a matriz perturbada e seus autovalores	54
3.2.2.1.2.	Linearização.....	55
3.2.2.1.3.	Programação quadrática.....	57
3.2.2.2.	Perturbação rápida dos resíduos (FRP)	57
3.2.2.3.	Perturbação modal (MP) e perturbação modal rápida (FMP)	58
3.2.3.	Esquema iterativo e robusto para a avaliação de passividade	60
3.2.3.1.	Seleção de amostras para a imposição de passividade	60
3.2.3.2.	Frequências “crossover” ou de cruzamento	61
3.2.3.3.	Iterações robustas	61
3.2.3.4.	Amostras de frequência auxiliares	63

4. Modelagem de Linhas de Transmissão usando a Matriz de Admitâncias Nodais ...	64
4.1. Modelagem baseado na matriz de admitâncias nodais	64
4.1.1. Modelos de linhas de transmissão	65
4.1.1.1. Modelo em espaço de estados (MEE)	65
4.1.1.2. Equivalente de Norton (EN).....	67
4.1.1.3. Rede elétrica equivalente (REE)	69
4.1.1.4. Transformada inversa de Fourier (TIF).....	70
4.2. Linha dobrada equivalente (FLE)	72
4.2.1. Dobramento	72
4.2.1.1. Considerações de precisão.....	73
4.2.1.2. Propriedades do FLE	74
4.2.2. Ajuste e imposição da passividade	75
4.2.2.1. Ajuste de matrizes simétricas com controle do erro relativo	75
4.2.2.2. Avaliação rápida da passividade	77
4.2.2.3. Imposição da passividade pelo método FMP	78
4.2.3. Equivalente de Norton.....	78
5. Simulações e Análise Comparativa de Modelos com a Matriz de Admitâncias Nodais	80
5.1. Cálculo da matriz de admitâncias nodais	80
5.2. Ajuste e imposição de passividade	86
5.3. Simulações no domínio do tempo	90
5.3.1. Comparação de modelos de linha de transmissão	92
5.3.2. Avaliação do modelo em espaço de estados	95
5.3.2.1. Linha de transmissão de 14 km	96
5.3.2.2. Linha de transmissão de 250 km	97
5.3.3. Equivalente de Norton.....	105
5.4. Considerações de precisão.....	110

5.4.1.	Linha assimétrica.....	111
5.4.2.	Linhas em paralelo	113
6.	Simulação da Linha Dobrada Equivalente.....	117
6.1.	Introdução	117
6.1.1.	Dados da linha	117
6.1.2.	Metodologia de modelagem	119
6.2.	Resultados de simulações.....	122
6.2.1.	Tempos de processamento.....	123
6.2.2.	Simulações no tempo.....	128
7.	Cálculo de Parâmetros de Linhas de Transmissão Aéreas	141
7.1.	Matriz de impedâncias série.....	141
7.1.1.	Impedância de retorno pela terra	143
7.1.1.1.	Correção de Carson	143
7.1.1.2.	Correção de Carson – fórmula equivalente	145
7.1.1.3.	Correção de Carson – análise em regime permanente senoidal	147
7.1.1.4.	Efeito de retorno pela terra por um plano complexo.....	147
7.1.2.	Impedância interna do condutor	148
7.1.2.1.	Condutor sólido	149
7.1.2.2.	Condutor tubular.....	150
7.2.	Matriz de admitâncias shunt	151
7.3.	Matriz de admitâncias nodais.....	151
7.3.1.	Método 1.....	152
7.3.2.	Método 2.....	152
7.3.3.	Método 3.....	153
7.4.	Cálculo de parâmetros em função da frequência	153
7.4.1.	Matriz de admitâncias shunt.....	155
7.4.2.	Matriz de impedâncias série	157

7.4.3.	Impedância interna do condutor	157
7.4.3.1.	Condutor sólido	159
7.4.3.2.	Condutor tubular.....	161
7.4.4.	Impedância de retorno pela terra	165
7.4.5.	Agrupamento de condutores.....	167
7.4.6.	Matriz de admitâncias nodais	168
8.	Validação de Transitórios em Redes Elétricas	173
8.1.	Modelagem no DF.....	174
8.1.1.	Formulação nodal.....	174
8.1.2.	Representação equivalente de fontes de tensão.....	175
8.1.3.	Simulação de chaves	177
8.1.4.	Exemplo de modelagem da rede	182
8.2.	Métodos de transformada inversa.....	187
8.2.1.	Transformada modificada de Fourier – TMF (BICKFORD et al., 1976)	188
8.2.2.	Transformada inversa rápida de Fourier – TIRF (MORENO & RAMIREZ, 2008)	189
8.2.3.	Transformada inversa de Fourier com integração semianalítica – TIFIS (GUSTAVSEN, 2005)	191
8.2.3.1.	Seleção das amostras de frequência	194
8.2.3.2.	Integração adaptativa de Simpson.....	196
8.2.3.3.	Transitórios para excitações arbitrárias	197
8.3.	Resultados de simulação	201
8.3.1.	Matriz de admitâncias nodais	203
8.3.2.	Amostragem aplicada à integração adaptativa de Simpson	206
8.3.3.	Linha em curto-circuito	208
8.3.3.1.	Cálculos com tensões nodais conhecidas	208
8.3.3.2.	Cálculos com correntes nodais injetadas conhecidas	213
8.3.3.3.	Comparação de tempos de processamento	213

8.3.4.	Linha em circuito-aberto	218
8.3.5.	Linha conectada a uma carga	223
8.3.6.	Simulação de acionamento de chaves	228
9.	Modelagem de Linhas de Transmissão em Paralelo	234
9.1.	Modelagem.....	234
9.1.1.	Acoplamento mútuo	235
9.1.2.	Separação dos efeitos dos acoplamentos capacitivos e indutivos	237
9.1.3.	Transformações modais.....	237
9.1.4.	Modelagem por meio de funções racionais	238
9.1.5.	Representação do modelo de linha	240
9.2.	Simulações	240
9.2.1.	Matrizes de transformação	242
9.2.2.	Impedâncias características modais.....	245
9.2.3.	Admitâncias características modais.....	248
9.2.4.	Funções de propagação modais	251
9.2.5.	Ajuste otimizado das funções de propagação modais	255
9.2.6.	Modelagem do acoplamento mútuo	258
9.2.7.	Simulações no domínio do tempo	262
10.	Conclusões.....	275
10.1.	Modelos equivalentes obtidos do modelo ajustado da matriz de admitâncias nodais	276
10.2.	Equivalente de Norton da linha dobrada equivalente (FLE).....	276
10.3.	Uso de transformada inversa de Fourier.....	277
10.4.	Modelagem de linhas em paralelo	278
10.5.	Cálculo de parâmetros da linha	279
	Referências Bibliográficas	281
A.	Erros Incurridos na Transformada Inversa de Fourier	289

A.1. Erro de truncamento	289
A.2. Erro de discretização	291
B. Parâmetros para Condutores Equivalentes	296
B.1. Agrupamento de condutores	296
B.1.1. Método 1: redução matricial.....	297
B.1.1.1. Matriz de impedâncias série	297
B.1.1.2. Matriz de admitâncias shunt.....	300
B.1.2. Método 2: distância média geométrica.....	302
B.2. Eliminação dos cabos-guarda.....	303
B.2.1. Matriz de impedâncias série	303
B.2.2. Matriz de admitâncias shunt.....	304
B.3. Perfil do condutor.....	305
C. Modelo de Linha e Matrizes de Acoplamento Mútuo	307
C.1. Tensões induzidas pelo efeito de acoplamento mútuo.....	307
C.1.1. Cálculo de K_{21}	307
C.1.2. Cálculo de K_{12}	309
C.2. Modelo de linha dependente da frequência.....	310
C.2.1. Equações do telégrafo	310
C.2.2. Decomposição em componentes modais.....	312
C.2.3. Cálculo da integral de convolução por método recursivo	314
C.2.4. Formulação do modelo de linha	316
C.2.5. Ajuste das funções de propagação modais	320

Capítulo 1

Introdução

Neste capítulo são expostas as motivações e os objetivos que orientam este trabalho (seções 1.1 e 1.2 respectivamente). Também apresenta-se uma visão geral da revisão bibliográfica usada ao longo deste documento e a organização dos seguintes capítulos.

1.1. Motivação

O planejamento e operação de sistemas de potência necessita de simulações precisas dos transitórios eletromagnéticos. O modelamento da linha de transmissão considerando a dependência dos parâmetros com a frequência é de essencial importância na simulação correta de transitórios eletromagnéticos.

Os modelos de linhas de transmissão podem ser implementados no domínio do tempo ou no domínio da frequência. Quando a variação dos parâmetros com a frequência é considerada, não é possível obter uma solução geral e explícita das equações de linha diretamente no domínio do tempo, sendo necessário o uso de técnicas de aproximação numérica para obter soluções práticas. No entanto, o comportamento das funções de linha faz que algumas técnicas numéricas ordinárias sejam susceptíveis a instabilidades e erros de precisão. Por outro lado, a solução das equações da linha no domínio da frequência são bem conhecidas e podem ser obtidas facilmente.

Embora a representação da linha no domínio da frequência seja mais direta, o sistema elétrico possui diversos elementos não lineares que são de difícil representação no domínio da frequência. Assim, os modelos de linha nos programas de transitórios eletromagnéticos são geralmente implementados no domínio do tempo.

A maioria dos modelos dependentes da frequência, como os modelos JMarti e ULM (do inglês *Universal Line Model*) dos programas ATP e PSCAD, usam o método das características (MC) e procedimentos de ajuste com funções racionais, assim como o uso de métodos recursivos para o cálculo da integral de convolução na maioria dos modelos. Não obstante, o uso do MC implica que o passo de tempo de simulação seja menor do que o tempo de trânsito da linha. Isto causa problemas de eficiência na simulação de sistemas compostos por linhas com diferentes comprimentos, porque as linhas mais curtas obrigam o uso de passos de tempo muito pequenos.

Existem modelos de linha alternativos que não fazem uso do MC. No capítulo 4 são apresentadas diferentes abordagens que não usam o MC para modelar a linha. Uma das abordagens é baseada no ajuste da matriz de admitâncias nodais da linha, $\mathbf{Y}_{nod}$, no domínio da frequência usando o método *Vector Fitting* (VF) proposto por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1999) e apresentado no capítulo 2. Após o cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$ usando os parâmetros distribuídos da linha de transmissão é aplicado o VF para aproximar os elementos de $\mathbf{Y}_{nod}$ por meio de funções racionais, para posteriormente modificar levemente o modelo usando o método FMP (do inglês *Fast Modal Perturbation*), apresentado no Capítulo 3, para impor a passividade do modelo e garantir simulações estáveis no tempo. As simulações no domínio do tempo podem ser avaliadas por meio de diversos métodos, sendo empregados neste documento: i) uso da fórmula de inversão da transformada de Fourier, ii) transformação do modelo racional para uma representação em espaço de estados, iii) construção de uma rede elétrica equivalente baseada em resistências, indutores e capacitores e iv) representação através de um equivalente de Norton. A Figura 1.1 mostra a sequência dos conteúdos dos capítulos.

O ajuste de $\mathbf{Y}_{nod}$ pelo método VF pode apresentar problemas na simulação de linhas muito curtas ou em sistemas que apresentam impedâncias elevadas, devido à imprecisão do modelo ajustado na representação dos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ a baixas frequências (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009). No capítulo 4 é mostrada uma segunda abordagem para solucionar este problema baseada na decomposição de $\mathbf{Y}_{nod}$ em duas matrizes, $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$, associadas à representação em curto-circuito e em circuito-aberto, respectivamente, de uma linha dobrada equivalente ou FLE (do inglês *Folded Line Equivalent*). O ajuste de $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$ permite uma representação adequada dos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$. A formulação baseada na FLE permite obter resultados precisos e eficientes para linhas aéreas, com e sem transposição, com geometria simétrica ou assimétrica, também possibilitando a simulação de linhas muito curtas o uso de passos de tempo maiores do que o tempo de trânsito da linha.

Figura 1.1 – Sequência dos conteúdos dos capítulos

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nos capítulos 5 e 6 são avaliadas e comparadas as duas abordagens de modelagem da linha do capítulo 4. Os resultados de cálculo são validados por meio de simulações com os programas ATP e PSCAD. É importante mencionar que a matriz de impedâncias série por unidade de comprimento, $\mathbf{Z}$, e a matriz de admitâncias shunt por unidade de comprimento, $\mathbf{Y}$, são obtidas dos programas ATP e PSCAD. Deste modo é possível fazer uma comparação entre os modelos descritos no capítulo 4 e os modelos de ATP e PSCAD, partindo dos mesmos valores dos parâmetros de linha. Para o cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$ são usadas as formulações apresentadas no capítulo 7, as quais fazem uso de $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$.

O modelo de linha ULM (MORCHED, GUSTAVSEN, & TARTIBI, 1999) pode ser usado para validar transitórios que precisam de uma alta precisão. No entanto, o ULM é fundamentado no MC como a maioria dos modelos de linha disponíveis em EMTP's. Assim, modelos baseados em uma mesma formulação não podem ser comparados porque podem produzir o mesmo tipo de erro associado à formulação empregada. Como solução a este possível inconveniente, no capítulo 8 são apresentadas ferramentas baseadas na transformada inversa de Fourier para a modelagem de transitórios em redes elétricas, este enfoque usa uma abordagem completamente diferente do MC e pode ser usado como referência para análises de precisão dos modelos discutidos no capítulo 4.

Um passo fundamental prévio ao cálculo do modelo de linha dependente da frequência é o cálculo dos parâmetros da linha. Assim, no capítulo 7 são apresentadas e comparadas diferentes abordagens para o cálculo de parâmetros considerando o efeito pelicular e a resistividade do solo, tanto para condutores sólidos quanto tubulares. Como complemento, no anexo B mostram-se diferentes abordagens para o agrupamento de condutores por fase e a eliminação dos cabos-guarda.

A maioria dos modelos de linha são baseados no MC, por sua eficiência, para tratar os tempos de atraso da linha. Um dos modelos mais empregados no programa ATP é o JMarti baseado no uso de uma matriz de transformação constante para converter o modelo do domínio de fase para o domínio modal, obtendo modos desacoplados. O modelo JMarti fornece simulações precisas no caso de linhas aéreas trifásicas (MARTI, 1982). No entanto, este modelo não apresenta bons resultados para simular o acoplamento mútuo de circuitos em paralelo (por exemplo, duas linhas trifásicas em paralelo) porque neste caso as matrizes de transformação variam muito com a frequência e não é possível assumir uma matriz de transformação constante, como mencionado em (GUSTAVSEN, IRWIN, MANGELROD, BRANDT, & KENT, 1999). Em (GUSTAVSEN, 2012) é proposta uma solução para tratar o problema de duas linhas de circuitos diferentes em paralelo, considerando o uso de matrizes de transformação constantes. Esta solução é baseada no desacoplamento das linhas (consideram-se as duas linhas independentes), com cada linha sendo representada por um modelo baseado em uma matriz de transformação constante (JMarti) em série com fontes de tensão nas suas extremidades, que representam o efeito do acoplamento mútuo entre linhas. Os modelos das fontes de tensão que representam o acoplamento mútuo entre linhas são calculados por meio do VF (capítulo 2). A avaliação desta formulação é apresentada no capítulo 9, mostrando com detalhes todos os resultados dos passos de modelamento.

1.2. Objetivos

O objetivo geral do trabalho é descrever e aplicar todos os passos do processo de modelagem e simulação de transitórios em linhas de transmissão aéreas com base no uso da matriz de admitâncias nodais.

Como objetivos gerais têm-se (ver Figura 1.2):

- Apresentar diferentes métodos de modelagem partindo da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, Y_{nod} , para estudar os transitórios em linhas de transmissão
- Apresentar métodos de modelagem para simular transitórios em redes elétricas, partindo da matriz de admitâncias nodais da rede elétrica, Y_r .
- Focar a modelagem da linha ou rede em uma das seguintes abordagens: uma primeira abordagem baseada no ajuste, avaliação e imposição de passividade da matriz de admitâncias nodais por meio de funções racionais e uma segunda abordagem baseada na transformada inversa de Fourier.
- Executar e avaliar os métodos *Vector Fitting* (VF), *Singular Test Matrix* (STM) e *Fast Modal Perturbation* (FMP), para obter um modelo passivo expressado por meio de funções racionais (modelo polo-resíduo), que garanta simulações estáveis no tempo.
- Transformar o modelo polo-resíduo da linha ou rede nos seguintes modelos equivalentes, adaptados à simulação no domínio do tempo: rede elétrica (composta somente por elementos resistivos, capacitivos e indutivos), equivalente de Norton e modelo em espaço de estados.
- Calcular o equivalente de Norton da linha equivalente dobrada (FLE) por meio da combinação dos equivalentes de Norton de Y_{oc} e Y_{sc} .
- Apresentar e avaliar diferentes formulações baseadas na transformada inversa de Fourier para a transformação de tensões e correntes do domínio da frequência para o domínio do tempo.
- Para aplicar a transformada inversa de Fourier, usa-se uma formulação nodal da rede, baseada na representação das fontes de tensão e as chaves como equivalentes de Norton.
- Apresentar e avaliar um modelo baseado no uso do VF e o modelo JMarti para simular com precisão o efeito de acoplamento mútuo de linhas de transmissão (de circuitos diferentes) em paralelo.

Como objetivos específicos têm-se:

- Descrever o método de ajuste VF e as mudanças recentemente desenvolvidas para melhorar sua eficiência de processamento e convergência.

- Calcular um modelo polo-resíduo para a matriz de admitâncias nodais usando o VF.
- Apresentar o método baseado na matriz de singularidade (STM) para avaliar a passividade do modelo.
- Expor os métodos ultimamente desenvolvidos para impor a passividade no modelo: *Residue Perturbation* (RP), *Fast Residue Perturbation* (FRP), *Modal Perturbation* (MP) e *Fast Modal Perturbation* (FMP).
- Avaliar e impor a passividade ao modelo gerado pelo VF para obter um modelo estável no tempo, por meio do uso da STM e o FMP.
- Comparar os modelos baseados na transformação do modelo polo-resíduo da matriz de admitâncias nodais: rede elétrica, equivalente de Norton e espaço de estados, em termos de precisão e eficiência na simulação no domínio do tempo.
- Avaliar a implementação do equivalente de Norton da linha de transmissão junto com outros componentes descritos por (DOMMEL, 1986) atualmente usados pelos programas típicos de transitórios eletromagnéticos.
- Apresentar o procedimento de cálculo do equivalente de Norton da linha dobrada equivalente (FLE) e demonstrar por meio de exemplos numéricos as suas vantagens, em termos de tempo de processamento e precisão, em relação ao modelo equivalente de Norton de Y_{nod} . Sendo avaliados casos em curto-circuito e circuito-aberto para diferentes comprimentos de linha.
- Expor diferentes formulações de inversão do domínio da frequência (DF) para o domínio do tempo (DT), baseadas na transformada inversa de Fourier (TIF): transformada modificada de Fourier (TMF), transformada inversa rápida de Fourier (TIRF) e transformada inversa de Fourier com integração semianálítica (TIFIS).
- Os métodos de inversão do DF para o DT são avaliados em termos de tempo de processamento e precisão para casos em curto-circuito, circuito-aberto, linha conectada a uma carga e simulação de acionamento de chaves.
- Mostrar e avaliar a teoria de cálculo de parâmetros da linha de transmissão considerando o efeito pelicular e a resistividade do solo, tanto para condutores sólidos quanto tubulares.
- Avaliar por meio de simulações e cálculos o modelamento de linhas em paralelo baseado no uso do VF e o modelo JMarti. São apresentados todos os passos do

processo de modelagem: ajuste das admitâncias características modais, ajuste das funções de propagação modais, cálculo do tempo de trânsito da linha, avaliação do modelo JMarti para linhas desacopladas, ajuste do modelo que representa o acoplamento mútuo entre linhas, avaliação do modelo na representação do efeito de acoplamento mútuo de linhas em paralelo.

Figura 1.2 – Modelos para o cálculo de transitórios em linhas de transmissão

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

1.3. Revisão bibliográfica

1.3.1. Modelos de linhas de transmissão no domínio do tempo

Os modelos de linha de transmissão podem ser classificados de acordo com a representação da Figura 1.3. Os modelos podem ser divididos em modelos baseados em

parâmetros concentrados ou em parâmetros distribuídos. Também podem ser classificados em modelos baseados em parâmetros constantes ou parâmetros dependentes da frequência.

Um modelo baseado em parâmetros constantes considera apenas uma frequência. Na modelagem de linhas de transmissão com parâmetros constantes destacam-se os modelos (ver Figura 1.4):

- **Modelo de Bergeron.** Este modelo está intimamente relacionado com o método das características (MC) também conhecido como método de Bergeron (ver Figura 1.4a). Sendo que o MC é usado para modelar os parâmetros distribuídos da indutância série e capacitância shunt de uma linha de transmissão ideal (sem perdas), onde é introduzido o tempo de trânsito, τ , que considera o atraso na propagação das tensões e correntes ao longo da linha (DOMMEL, 1986). No entanto o modelo de Bergeron além do MC também faz uso de resistências concentradas para aproximar as perdas da linha (ver Figura 1.4b). Os resultados de simulação do modelo de Bergeron são úteis em situações onde uma frequência predomina, por exemplo em estudos gerais com impedâncias avaliadas à frequência fundamental, testes de relés ou validar resultados de fluxo de potência.
- **Modelo π :** se apenas deseja-se considerar uma única frequência, por exemplo 60 ou 50 Hz, a linha pode ser representada com razoável precisão por um circuito composto por uma impedância série e uma admitância shunt (ver Figura 1.4c). Sendo que a admitância shunt é dividida ao meio e colocada em cada extremidade do circuito com a impedância série entre as duas extremidades (ZUBIAGA, 2012).
- **Cascata de circuitos π :** é constituído pela conexão em cascata de circuitos π idênticos (ver Figura 1.4d). Este é um modelo de parâmetros concentrados, no entanto, quanto maior é o número de circuitos π , maior é a aproximação a um modelo de parâmetros distribuídos. Sendo que a impedância série e a admitância shunt de cada circuito π são dados pela n -ésima parte da impedância longitudinal total da linha e a n -ésima parte da admitância transversal total da linha, respectivamente, supondo que o modelo é constituído por n circuitos π em cascata (ZUBIAGA, 2012), (KUOKAWA, YAMANAKA, PRADO, BOVOLATO, & PISSOLATO, 2007).

Para obter uma maior precisão que inclua uma ampla faixa de frequências, o modelo precisa considerar os parâmetros distribuídos e dependentes da frequência. Os modelos mais destacados que consideram a variação dos parâmetros com a frequência são:

- Modelo de (MARTI, 1982). Este modelo usa uma matriz de transformação constante para desacoplar o modelo de fase em modos (domínio modal). Os modos são independentes uns dos outros, como se fossem circuitos desacoplados monofásicos (ver Figura 1.4e). A matriz de transformação é dada pela matriz de autovetores do produto YZ , que pode ser assumida como constante para todas as frequências exceto nas situações que envolvem baixas frequências (transmissão em corrente contínua) e no estudo de perturbações em linhas paralelas de diferentes circuitos (GUSTAVSEN, IRWIN, MANGELROD, BRANDT, & KENT, 1999).
- O modelo de linha universal ou ULM (do inglês *Universal Line Model*) proposto por (MORCHED et al., 1999). Está formulado no domínio de fase e pode ser aplicado a qualquer tipo de configuração de linha, mesmo quando a linha está associada a uma matriz de transformação muito dependente da frequência e quando os tempos de propagação modal são amplamente diferentes (ver Figura 1.4f). A admitância característica e a função de propagação são ajustadas no domínio de fase. No entanto, a função de propagação é ajustada primeiro no domínio modal, para posteriormente, usar os polos e tempos propagação resultantes para ajustar a função de propagação no domínio de fase. É o modelo mais geral proposto até agora capaz de representar com precisão tanto linhas aéreas simétricas e assimétricas quanto cabos subterrâneos.

Os Programas de Transitórios Eletromagnéticos (EMTP's) oferecem diferentes modelos, entre os mais usados têm-se: 1) o modelo de Bergeron que é simples e eficiente, mas tende a superestimar o fenômeno transitório por ser baseado em parâmetros constantes. É recomendado quando as linhas estão localizadas em áreas distantes do evento que gera o transitório. 2) O modelo proposto por (MARTI, 1982), desenvolvido no domínio modal, faz uso de uma matriz de transformação constante, levando em consideração os efeitos da dependência dos parâmetros da linha com a frequência. Não obstante, a precisão dos resultados é garantida somente nos casos de linhas aéreas continuamente transpostas e linhas simétricas ou quase simétricas, sendo que no caso de linhas continuamente transpostas a

matriz de transformação é real e constante com a frequência. 3) O Modelo de Linha Universal (ULM) (MORCHED et al., 1999) leva em consideração a dependência em frequência dos parâmetros da linha e trabalha diretamente no domínio de fase. Este modelo evita as transformações modais por meio de matrizes de transformação reais e constantes, sendo que o uso de matrizes de transformação constante não é recomendável nos casos de linhas com assimetrias (GUSTAVSEN et al., 1999). Até agora, é o modelo mais geral e preciso, tanto para linhas aéreas quanto cabos subterrâneos.

Figura 1.3 – Classificação dos modelos de linhas de transmissão

Fonte: Adaptado de ZUBIAGA (2012, p. 57).

Os modelos π , Bergeron e JMarti (MARTI, 1982) estão disponíveis no programa ATP. Os modelos de Bergeron e ULM fazem parte dos modelos de linha do programa PSCAD. As simulações de linhas de transmissão no presente trabalho são focadas nos modelos que consideram os parâmetros dependentes da frequência, sendo usados os modelos JMarti do ATP e o ULM do PSCAD. Não obstante, é importante ter em conta que os modelos que trabalham no domínio modal usando matrizes de transformação constantes, como o modelo JMarti, fornecem resultados precisos nos casos de configurações simétricas e de linhas continuamente transpostas, no entanto, o uso de matrizes de transformação constantes não é

recomendável em linhas não transpostas e cabos (NODA, NAGAOKA, & AMETANI, 1996), nem na simulação do acoplamento mútuo entre linhas que fazem parte de diferentes circuitos (GUSTAVSEN et al., 1999).

Figura 1.4 – Modelos de linhas de transmissão¹

a) Modelo de linha ideal sem perdas (método das características)

b) Modelo de Bergeron

c) Modelo π

d) Cascata de circuitos π

¹ Os termos usados na representação dos modelos serão discutidos em capítulos posteriores.

e) Modelo JMarti

f) Modelo Universal da Linha (ULM)

Fonte: MANITOBA HVDC RESEARCH CENTRE (2018, p. 177, 180, 182), KUROKAWA et al. (2007, p. 339), MARTI (1982, p. 150), RAMOS et al. (2012, p. 279).

Os parâmetros série da linha de transmissão são altamente dependentes da frequência. Para uma simulação precisa é essencial modelar a dependência dos parâmetros com a frequência. Diferentes técnicas numéricas foram propostas para resolver as equações da linha de transmissão dependentes da frequência porque as técnicas numéricas tradicionais levam a soluções instáveis e com erros de precisão por causa da natureza oscilatória que envolve altas frequências. O MC é reconhecido por ser eficiente e abranger uma ampla faixa de frequências. Existem modelos baseados neste método que trabalham com matrizes de transformação constantes (MARTI, 1982) ou diretamente com o domínio de fase (MORCHED et al. 1999). Não obstante, a aplicação do MC precisa que o passo de integração seja menor do que o tempo de trânsito da linha, requerendo passos de integração muito pequenos para linhas curtas, isto leva a um dilema ao modelar um sistema que inclui linhas longas e curtas, além de considerar as exigências do passo de tempo que podem ser dadas pelos parâmetros concentrados da rede.

Em (MARTI, 1988) é apresentado um novo modelo matemático para a simulação de transitórios eletromagnéticos em cabos subterrâneos considerando a dependência dos parâmetros com a frequência. No entanto, este modelo também é útil na simulação de linhas de transmissão aéreas, mesmo para linhas não simétricas e linhas com múltiplos circuitos. Neste modelo é levada em conta a dependência com a frequência das matrizes de

transformação modais, demonstrando ser preciso em relação aos resultados calculados de maneira analítica. Este modelo é desenvolvido no domínio modal, onde as funções de propagação modais, as admitâncias características modais e os elementos da matriz de transformação são ajustados por meio de funções racionais, sendo que as funções racionais das funções de propagação modais são multiplicadas por um fator exponencial que contém os tempos de propagação modais.

As linhas não transpostas e os cabos estão associados a matrizes de transformação muito dependentes da frequência (NODA et al., 1996), no entanto, os modelos que trabalham com matrizes de transformação dependentes da frequência precisam de um grande número de convoluções para cada passo de tempo e podem existir dificuldades no cálculo dos autovetores da matriz de transformação para que os seus elementos sejam funções suaves (sem picos de ressonância) com a frequência (por causa do cruzamento de modos que acontece quando dois ou mais autovalores se tornam iguais). Para diminuir o tempo de processamento e evitar instabilidades, no trabalho de (NODA et al., 1996) foi proposto um método no domínio de fase baseado no modelo ARMA (do inglês *Autoregressive Moving Average*) que faz uso da teoria da transformada Z, o Critério de Informação de Akaike para a determinação da ordem do modelo e o método de Jury para garantir a estabilidade do modelo, no entanto, este modelo é dependente de Δt .

Em (NODA, NAGAOKA, & AMETANI, 1997) foram realizadas melhorias no modelo ARMA de (NODA et al. 1996) em termos de convolução, estabilidade e inicialização do modelo nos casos de simulação que partem de um estado estacionário. A melhoria na convolução permite que cada modelo ARMA use seu próprio passo de tempo. Para permitir um passo de tempo diferente para cada modelo ARMA, foi utilizada uma técnica de interpolação linear para que o modelo ARMA possa interagir com o circuito externo. A integração da operação de interpolação com o modelo ARMA é chamado de modelo IARMA (do inglês *Interpolated ARMA*).

No trabalho de (MORCHED et al. 1999) foi proposto um modelo universal (ULM) para todas as configurações de linhas de transmissão e cabos, demonstrando ser muito preciso. O modelo é baseado no ajuste da matriz de propagação, $\mathbf{H}$, e matriz de admitâncias características, $\mathbf{Y}_c$, ambas matrizes ajustadas no domínio de fase. No ajuste de $\mathbf{H}$ e $\mathbf{Y}_c$ é usado o método *Vector Fitting* (VF) proposto por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1999), que permite aproximar respostas no domínio da frequência por meio de funções racionais (modelo polo-

resíduo). Além disso, ao contrário do modelo de (NODA et al., 1996), o ULM é independente de Δt .

Uma alternativa para simular linhas de transmissão é obter um modelo por meio do ajuste da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, $\mathbf{Y}_{nod}$, no domínio da frequência usando o VF. O modelo resultante pode apresentar problemas de precisão pela coexistência de autovalores grandes e pequenos em $\mathbf{Y}_{nod}$. Este problema pode ser resolvido pela aplicação do *Modal Vector Fitting* (MVF), no entanto o tempo de processamento é substancial. Outra solução alternativa mais eficiente do que o MVF foi proposta por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009), baseada na decomposição de $\mathbf{Y}_{nod}$ nas matrizes $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$, que representam as contribuições em circuito-aberto e curto-circuito, respectivamente, da linha dobrada equivalente ou FLE (do inglês *Folded Line Equivalent*). Este modelo permite obter uma boa precisão dos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ depois do processo de ajuste pelo método VF sobre $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$. Este modelo é aplicável em linhas aéreas (transpostas e não transpostas) e cabos subterrâneos. Para linhas muito curtas, a FLE permite o uso de passos de tempo maiores do que o tempo de trânsito da linha, evitando o problema de uso de passos de tempo muito pequenos associado aos modelos baseados no MC quando deseja-se modelar um sistema que inclua linhas muito curtas, porque um sistema que emprega um tipo de modelo de linha baseado no MC precisa que o passo de tempo seja menor que o tempo de trânsito da linha mais curta do sistema. O modelo da FLE pode substituir o modelo tradicional nas linhas muito curtas, permitindo escolher um passo de tempo maior do que o tempo de trânsito da linha.

O modelo proposto por (MARTI, 1982), conhecido como JMarti, fornece resultados pouco precisos nas simulações que envolvem o acoplamento mútuo de linhas que fazem parte de circuitos diferentes, esta imprecisão nas simulações é causada pelo uso da matriz de transformação constante, usada para transformar o modelo do domínio de fase para o domínio modal, como mencionado por (GUSTAVSEN et al., 1999). Para melhorar a precisão dos resultados fornecidos pelo modelo JMarti, em (GUSTAVSEN, 2012) é proposto tratar cada linha de maneira independente (desacoplada) por meio do modelo JMarti, com o acoplamento mútuo representado por fontes de tensão conectadas em série nas extremidades do modelo JMarti. As fontes de tensão são calculadas por meio de um modelo em espaço de estados, obtido usando o VF.

1.3.2. Método do *Vector Fitting* e sua aplicação no modelamento de linhas

O método de aproximação de respostas no domínio da frequência por meio de funções racionais (modelo polo-resíduo) foi apresentado por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1999). O método conhecido como *Vector Fitting* (VF) está dividido em duas etapas, na primeira etapa são calculados os polos por meio de um processo iterativo e na segunda etapa são identificados os resíduos. Também apresenta uma metodologia para a seleção dos polos iniciais do processo iterativo. Este método mostra excelentes resultados no ajuste de funções com grande número de pontos de ressonância.

Posteriormente, no método VF foram realizadas duas melhorias significativas. A primeira foi proposta por (GUSTAVSEN, 2006), onde é realizada uma modificação no processo iterativo de cálculo dos polos. Esta modificação melhora a convergência no cálculo dos polos e consegue reduzir a importância da especificação dos polos iniciais, especialmente nos casos de ajuste de respostas contaminadas com ruído. A segunda modificação foi proposta por (DESCRIJVER, MROZOWSKI, DHAENE, & ZUTTER, 2008) aproveitando a esparsidade das matrizes envolvidas no processo iterativo de cálculo dos polos por meio da decomposição QR, melhorando o tempo de processamento e a demanda de recursos.

Uma das maiores dificuldades no ajuste de sistemas lineares está na obtenção de modelos não passivos, que levam a simulações instáveis. A passividade destes modelos é usualmente avaliada com o cálculo dos autovalores da matriz Hamiltoniana. Este teste é aplicável somente a modelos simétricos e apresenta dificuldades de precisão pela presença de ruído numérico. Estas deficiências são superadas pela avaliação de uma matriz de singularidade proposta em (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2009). A nova avaliação reduz o tempo de processamento por um fator de oito e é aplicável para modelos simétricos e assimétricos, além de não produzir ruído numérico na avaliação da passividade.

Um componente linear da rede pode ser incluído em uma simulação transitória por meio de uma matriz de admitâncias nodais, $\mathbf{Y}$, definida por funções racionais (modelo polo-resíduo) no domínio da frequência. Para que este componente seja passivo, a parte real de $\mathbf{Y}$ precisa ser definida positiva (PD). Em (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2001) é proposta uma correção da aproximação racional de $\mathbf{Y}$ para impor o critério PD e garantir a passividade do modelo. O modelo racional original de $\mathbf{Y}$ e seu modelo corrigido são muito próximos, considerando que é usada a programação quadrática para minimizar o desvio entre os elementos do modelo

corrigido e do modelo original. Este método é conhecido como RP (do inglês *Residue Perturbation*).

Em (GUSTAVSEN, 2008a) foi proposto um novo método para impor a passividade de modelos polo-resíduo conhecido como MP (do inglês *Modal Perturbation*). É apresentado um método de perturbação que permite que o modelo ajustado represente com precisão os autovalores de $\mathbf{Y}$ porque é baseado na minimização do desvio relativo, $\Delta\lambda/|\lambda|$, entre os autovalores do modelo corrigido e do modelo original de $\mathbf{Y}$. Mais tarde em (GUSTAVSEN, 2008b) é proposta uma abordagem mais rápida conhecida como FMP (do inglês *Fast Modal Perturbation*), cuja diminuição do tempo de processamento é realizada por meio da perturbação dos autovalores das matrizes de resíduos do modelo ajustado de $\mathbf{Y}$, de modo oposto às abordagens anteriores que perturbavam os elementos das matrizes de resíduos do modelo ajustado de $\mathbf{Y}$. Este método reduz o tempo de processamento com um erro pequeno do modelo corrigido. Este método também usa os princípios da técnica da MP para reter a precisão relativa dos autovalores da matriz de admitâncias e propõe um esquema de iteração que combina o FMP com o método de avaliação da passividade usando o Hamiltoniano, garantindo a passividade do modelo.

As ferramentas mencionadas anteriormente de ajuste, com a avaliação e imposição de passividade para respostas no domínio da frequência por meio de funções racionais, foram aplicadas em (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009) para formular um novo modelo de linha de transmissão e cabos subterrâneos, considerando a dependência dos parâmetros com a frequência. Este modelo é baseado em uma linha dobrada equivalente (FLE) que é obtida por meio da decomposição da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão. A aplicação do VF e o FMP às matrizes de admitâncias da FLE trazem consigo uma melhor precisão e uma redução no tempo de processamento. Além disso, para linhas muito curtas pode ser usado um passo de tempo maior do que o tempo de trânsito da linha.

Neste trabalho de dissertação são apresentados e comparados diferentes modelos no domínio do tempo baseados no uso do modelo ajustado com imposição de passividade da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, $\mathbf{Y}_{nod}$. Também é avaliado o modelo da FLE proposto por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009).

O modelo polo-resíduo pode ser representado por meio de outros modelos equivalentes. Em (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2009) e (GUSTAVSEN, 2009) são mostrados procedimentos para a transformação do modelo polo-resíduo para um modelo em espaço de estados, sendo que o modelo em espaço de estados pode ser solucionado por meio da

aplicação da regra de integração trapezoidal, como mostrado em (DOMMEL, 1986). A referência (GUSTAVSEN, 2002) mostra a representação da matriz de admitâncias nodais ajustada na forma de uma rede elétrica composta por resistências, indutâncias e capacitâncias. Em (GUSTAVSEN & SILVA, 2013) é apresentada uma formulação para transformar o modelo em espaço de estados para um equivalente de Norton que pode ser aplicado a programas do tipo EMTP. Este modelo é o resultado de manipulações matemáticas e da aplicação da regra trapezoidal de integração sobre o modelo em espaço de estados de $\mathbf{Y}_{nod}$.

Na figura 1.5 apresenta-se um resumo das ferramentas mencionadas anteriormente para o ajuste de funções no domínio da frequência por meio de funções racionais e a modelagem de linhas de transmissão, sendo estas ferramentas apresentadas e empregadas em capítulos posteriores. A Tabela 1.1 apresenta a sequência das contribuições ao método VF e sua aplicação em modelos de linhas de transmissão baseados no ajuste da matriz de admitâncias nodais.

Tabela 1.1 – Contribuições relevantes na formulação do VF e suas aplicações na modelagem de linhas de transmissão

Ano	Contribuições
(GUSTAVSEN, & SEMLYEN, 1999)	Ajuste de funções no domínio da frequência por meio de um modelo polo-resíduo. Este método é conhecido como <i>Vector Fitting</i> (VF)
(GUSTAVSEN, & SEMLYEN, 2001)	Imposição de passividade para modelos polo-resíduo baseado na perturbação das matrizes de resíduos do modelo ajustado da matriz de admitâncias nodais, minimizando o desvio entre os elementos das matrizes de resíduos do modelo passivo e do modelo ajustado original. Este método é conhecido como <i>Residue Perturbation</i> (RP)
(GUSTAVSEN, 2002)	Representação da matriz de admitâncias nodais por meio de uma rede elétrica equivalente.
(GUSTAVSEN, 2006)	Leve modificação do método VF para uma melhor convergência e menor dependência dos polos iniciais
(GUSTAVSEN, & SEMLYEN, 2008)	Novo procedimento para o cálculo iterativo dos polos no VF. Melhorando o tempo de processamento e a dependência da especificação dos polos iniciais
(DESCRIJVER et al., 2008)	Uso da decomposição QR no cálculo iterativo dos polos no VF, melhorando o tempo de processamento e a demanda de recursos
(GUSTAVSEN, 2008a)	Imposição de passividade baseada na perturbação das matrizes de resíduos, do modelo ajustado da matriz de admitâncias nodais, minimizando o desvio relativo dos autovalores da matriz de admitâncias nodais. Este método é conhecido como <i>Modal Perturbation</i> (MP).

(GUSTAVSEN, 2008b)	Apresenta uma abordagem mais rápida dos procedimentos RP e MP, reduzindo o tempo de processamento por meio da perturbação dos autovalores das matrizes de resíduos do modelo ajustado da matriz de admitâncias nodais. Também foi proposto um esquema iterativo para garantir a passividade do modelo. Os procedimentos que resultam da adoção desta abordagem são conhecidos como <i>Fast Residue Perturbation</i> (FRP) e <i>Fast Modal Perturbation</i> (FMP).
(SEMLYEN, & GUSTAVSEN, 2009)	Novo método para avaliar a passividade do modelo gerado pela aplicação do VF
(GUSTAVSEN, & SEMLYEN, 2009)	Novo modelo para linhas de transmissão e cabos subterrâneos dependentes da frequência baseado no ajuste da matriz de admitâncias nodais pelo método VF.
(GUSTAVSEN, & SILVA, 2013)	Representação de uma linha de transmissão por um modelo equivalente de Norton para sua implementação em um EMTP.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

1.3.3. Simulação de linhas de transmissão usando a transformada inversa de Fourier

Os trabalhos de (DAY, MULLINEUX, & REED, 1965), (DAY, MULLINEUX, & REED, 1966), (DAY, BATTISSON, MULLINEUX, & REED, 1968) e (MULLINEUX & REED, 1973) abordaram o problema de análise de transitórios em sistemas de potência usando a transformada de Fourier. Nestes trabalhos foi percebido que devido ao truncamento (faixa de frequências limitada) do sinal no domínio da frequência, as funções no domínio do tempo calculadas eram afetadas pelo fenômeno de Gibbs. Adicionalmente, a discretização das funções no domínio da frequência gera respostas no tempo periódicas que podem se sobrepor. Para aliviar os erros de Gibbs são introduzidas funções de janela e para diminuir os erros causados pela sobreposição de repostas no tempo periódicas, é proposto o uso de um amortecimento exponencial, para deslocar o caminho de integração (da fórmula de inversão da transformada de Fourier) longe do eixo imaginário. Esta técnica de inversão é conhecida como MFT (do inglês *Modified Fourier Transform*).

O maior problema da MFT está nos elevados tempos de processamento. Em (AMETANI, 1973) é empregado o algoritmo da FFT (do inglês *Fast Fourier Transform*) e a MFT passou a ser uma alternativa muito mais atraente para a análise de transitórios. Mais tarde em (AMETANI, 1979) é usada a transformada numérica de Fourier com amostragem exponencial para sua aplicação em transitórios elétricos onde é requerida uma ampla faixa de frequências ou de tempo.

Figura 1.5 – Modelamento de linhas de transmissão baseado no ajuste da matriz de admitâncias nodais

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Em (WILCOX, 1978) é formulada a MFT em termos da teoria da transformada de Laplace e é aplicada a NLT (do inglês *Numerical Laplace Transform*).

Em (ZANETTA, 2003) também é apresentada a formulação da MFT, que pode ser usada na solução de transitórios em redes elétricas fazendo uso da matriz de admitâncias nodais da rede. As respostas obtidas pela MFT podem servir como uma referência às respostas fornecidas por outros modelos porque não são feitas as aproximações numéricas dos modelos tradicionais. Não obstante, o tempo de processamento é maior do que o dos modelos implementados no domínio do tempo. Também é necessária uma boa resolução de dados da matriz de admitâncias nodais em função da frequência para obter respostas precisas.

Em (GUSTAVSEN, 2005) é proposto um método alternativo para a validação de precisão dos modelos de linhas de transmissão baseado na transformada inversa de Fourier. É usada a matriz de admitâncias nodais da rede, Y_r , considerando que é usada uma formulação

nodal, a rede é modelada representando os curtos-circuitos por meio de resistências de valor pequeno, enquanto as fontes de tensão e as chaves são representadas por meio de equivalentes de Norton. Inicialmente, as respostas são calculadas no domínio da frequência e posteriormente são transformadas para o domínio do tempo por meio da transformada inversa de Fourier, com integração semianalítica entre pontos amostrados para permitir o cálculo em instantes de tempo elevados. O número de amostras de frequência para Y_r é reduzido significativamente por meio de um cálculo adaptativo de amostras baseado no método da integração adaptativa de Simpson, mantendo a precisão no detalhamento de Y_r . As respostas para excitações arbitrárias são calculadas por meio da superposição de respostas ao degrau unitário, ponderadas e atrasadas no tempo.

Em (GOMEZ & URIBE, 2008) é realizada uma descrição detalhada da NLT aplicada ao cálculo de transitórios eletromagnéticos em sistemas de potência, considerando eventos lineares e não lineares. Na NLT são incluídas técnicas para reduzir os erros numéricos de truncamento e discretização. Também é descrita uma técnica baseada no princípio de superposição para incluir condições não lineares no domínio da frequência.

A NLT também é descrita, analisada e avaliada em (MORENO & RAMIREZ, 2008), focando a análise de transitórios em sistemas de potência. Os erros de truncamento e discretização são analisados quando é realizada a inversão do domínio da frequência para o domínio do tempo. Adicionalmente, o uso de uma amostragem linear é discutida. Também é apresentada uma aplicação para a análise de transitórios em linhas de transmissão.

1.4. Estrutura do trabalho

No Capítulo 2 é descrita a metodologia de aplicação do método VF para ajustar respostas no domínio da frequência por meio de um modelo polo-resíduo. Esta metodologia está estruturada em duas etapas: o cálculo iterativo dos polos e o cálculo dos resíduos. Além disso são apresentadas recomendações para a seleção dos polos iniciais. Este método pode ser usado para ajustar tanto escalares quanto vetores. No Capítulo 2 são expostas as duas alterações que foram introduzidas no método VF: a reformulação da função escalar envolvida no processo iterativo de cálculo dos polos (GUSTAVSEN, 2006) e a aplicação da decomposição QR nas equações de mínimos quadrados utilizadas para o cálculo dos polos dentro do processo iterativo (DESCRIJVE, MROZOWSKI, DHAENE, & ZUTTER, 2008). Estas duas modificações permitem uma maior eficiência em termos de processamento, uma

convergência mais rápida no cálculo iterativo dos polos e uma menor dependência na especificação dos polos iniciais. No entanto, a precisão do VF é afetada quando existe uma diferença grande na magnitude dos autovalores. Neste capítulo é apresentado outro método conhecido como MVF (do inglês Modal Vector Fitting) que permite obter uma melhor precisão quando existem autovalores muito dispersos em magnitude. O MVF é focado na representação precisa dos autovalores em vez dos elementos da matriz de admitâncias nodais, ponderando o problema de mínimos quadrados com o inverso da magnitude dos autovalores, desta forma os componentes modais são ajustados com uma maior precisão. O Capítulo 2 faz uma análise detalhada e organiza as principais contribuições que resultam na forma atual do VF.

O Capítulo 3 está dividido basicamente em duas partes. Na primeira parte são apresentados dois métodos para avaliar a passividade do modelo: a matriz de singularidade e a matriz Hamiltoniana. Mostra-se que o melhor método para avaliar a passividade é dado pela matriz de singularidade porque o tempo de processamento é menor, fornece resultados mais confiáveis e abrange um maior número de casos. A segunda parte está focada na imposição rápida da passividade para os modelos polo-resíduo pelos métodos FRP e FMP. Estes métodos são baseados na perturbação dos autovalores das matrizes de resíduos e na formulação de um problema de otimização quadrática. A imposição de passividade a determinadas frequências pode resultar no surgimento de novas violações de passividade em outras frequências. Isso torna necessário a perturbação repetida do modelo para remover todas as violações de passividade. Para evitar a divergência das violações de passividade, é aplicado um procedimento iterativo para garantir a passividade do modelo.

O Capítulo 4 descreve o procedimento de modelagem de linhas de transmissão baseado no ajuste da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão usando o VF, obtendo um modelo polo-resíduo, posteriormente o modelo polo-resíduo é usado para obter os modelos equivalentes: equivalente de Norton, rede elétrica (composta somente por indutâncias, capacitâncias e resistências) e modelo em espaço de estados. Também é apresentada a fórmula de inversão da transformada de Fourier (TIF), usada para simular transitórios em redes elétricas por meio do uso da matriz de admitâncias nodais. Com a TIF é possível transformar os sinais de tensão e corrente do domínio da frequência para o domínio do tempo sem precisar do uso do VF para obter um modelo aproximado da matriz de admitâncias nodais. Também é apresentado o modelo equivalente de Norton baseado no ajuste das matrizes de admitâncias nodais da FLE (Linha Dobrada Equivalente), correspondentes às suas contribuições em curto-circuito e circuito-aberto. São apresentadas algumas propriedades da

FLE e o procedimento de obtenção do modelo baseado na aplicação do VF (Capítulo 2) e a avaliação e imposição de passividade (Capítulo 3).

No Capítulo 5 são aplicados os passos para o ajuste da matriz de admitâncias nodais: ajuste pelo VF, avaliação e imposição de passividade, também são calculados e comparados os modelos equivalentes de linha apresentados no Capítulo 4. Inicialmente é feito o cálculo da matriz de admitâncias nodais, $\mathbf{Y}_{nod}$, com os parâmetros distribuídos da linha, matriz de impedâncias série e matriz de admitâncias shunt, para uma determinada amostragem de frequências. Posteriormente é realizado o ajuste de $\mathbf{Y}_{nod}$ para em seguida impor a passividade. São usados todos os modelos equivalentes do Capítulo 4, exceção feita à transformada inversa de Fourier que faz uso direto das amostras da matriz de admitâncias nodais. Estes métodos são comparados em termos do tempo de processamento e são avaliadas linhas longas e curtas, para as condições operacionais em circuito-aberto e curto-circuito. Como um caso especial é avaliada a efetividade do modelo equivalente de Norton, em conjunto com outros componentes da rede modelados segundo a referência (DOMMEL, 1969).

No Capítulo 6 é avaliado o equivalente de Norton da FLE, sendo comparado com o equivalente de Norton obtido do ajuste de $\mathbf{Y}_{nod}$. A comparação é realizada em termos de precisão nas respostas simuladas e eficiência no tempo de processamento. É discutida a vantagem do equivalente de Norton da FLE em relação ao uso de passos de tempo menores do que o tempo de trânsito da linha para linhas muito curtas. São testadas linhas de diferentes comprimentos para os casos de curto-circuito e circuito-aberto.

No Capítulo 7 são apresentadas as formulações de cálculo de parâmetros da linha de transmissão: matriz de impedâncias série $\mathbf{Z}$, matriz de admitâncias shunt $\mathbf{Y}$, e cálculo da matriz de admitâncias nodais $\mathbf{Y}_{nod}$. São avaliadas diferentes abordagens para o cálculo da impedância interna dos condutores, impedância de retorno pela terra, eliminação dos cabos-guarda, agrupamento de condutores e cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$. São considerados condutores sólidos e tubulares.

No Capítulo 8 são apresentados diferentes métodos baseados na transformada inversa de Fourier, abordada inicialmente no Capítulo 4. Nas formulações apresentadas no Capítulo 8 são usadas ferramentas adicionais para minimizar os erros por truncamento e discretização que melhoram a precisão do cálculo no domínio do tempo. É usada uma formulação nodal para representar a rede, sendo empregados como parte do procedimento de modelagem e simulação, a transformada numérica de Laplace e as propriedades da convolução. O objetivo deste capítulo é apresentar um enfoque complementar para a simulação de transitórios em

redes elétricas, que possa servir de referência para a análise de precisão dos modelos de linha discutidos neste trabalho de dissertação. São avaliadas simulações da energização da linha tanto em circuito-aberto como em curto-circuito, assim como da linha em carga e em manobras com chaves.

Considerando que o modelo JMarti do programa ATP não fornece resultados precisos nos casos que envolvem circuitos em paralelo (GUSTAVSEN et al., 1999), no Capítulo 9 é apresentado o modelo proposto por (GUSTAVSEN, 2012) que faz uso do modelo JMarti e o método VF para solucionar problemas de precisão relacionados com a simulação do efeito de acoplamento mútuo de linhas que fazem parte de circuitos diferentes. São avaliados todos os passos do procedimento de modelagem para um teste de energização da linha.

Capítulo 2

Métodos de Aproximação para Respostas no Domínio da Frequência

Neste capítulo apresenta-se um método de ajuste de respostas no domínio da frequência conhecido como *Vector Fitting* (VF) (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1999), baseado no uso de funções racionais. São apresentadas algumas propostas posteriores para melhorar a convergência e eficiência, como a eliminação do requisito assintótico a altas frequências (GUSTAVSEN, 2006) e a otimização do problema linear de mínimos quadrados associado ao cálculo dos polos (DESCHRIJVER et al. 2008). Também é apresentada uma nova abordagem do método VF conhecida como *Modal Vector Fitting* (MVF) que garante uma maior precisão no caso da coexistência de autovalores grandes e pequenos na matriz de admitâncias nodais, embora o tempo de processamento seja maior (GUSTAVSEN & HEITZ, 2008).

2.1. Aproximação da resposta no domínio da frequência pelo método *Vector Fitting* (VF)

O trabalho de (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1999) descreve uma metodologia geral para o ajuste de uma resposta no domínio da frequência (medida ou calculada) por meio de uma função racional aproximada.

Considera-se uma função racional que vai aproximar-se à resposta em frequência $f(s)$:

$$f(s) \approx \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - a_n} + d + s h \quad (2.1)$$

Os resíduos c_n e os polos a_n podem ser valores reais ou pares de complexos conjugados, enquanto d e h são valores reais. O problema consiste em estimar o valor dos coeficientes c_n , a_n , d e h pelo método dos mínimos quadrados sobre um determinado intervalo de frequência. Inicialmente os polos de partida de $f(s)$, nomeados como $\bar{a}_n$, são conhecidos (ver item 2.1.4).

São introduzidas duas funções desconhecidas: $\sigma(s)$ e $\sigma f(s)$, com seus polos iguais aos polos de partida de $f(s)$:

$$\sigma f(s) = \sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - \bar{a}_n} + d + s h = h \frac{\prod_{n=1}^{N+1} (s - z_n)}{\prod_{n=1}^N (s - \bar{a}_n)} \quad (2.2a)$$

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - \bar{a}_n} + 1 = \frac{\prod_{n=1}^N (s - \tilde{z}_n)}{\prod_{n=1}^N (s - \bar{a}_n)} \quad (2.2b)$$

Podem-se apresentar problemas de solução inexata e de convergência quando não são utilizados os polos de partida adequados. No item 2.1.4 apresenta-se um procedimento para a seleção inicial dos polos.

De (2.2) pode-se observar que as funções $\sigma(s)$ e $\sigma f(s)$ possuem os mesmos polos, e a função $\sigma(s)$ tende à unidade para frequências altas. De (2.1) e (2.2) impõe-se a igualdade:

$$\sigma f(s) = \sigma(s) f(s) \quad (2.3a)$$

Reescrevendo:

$$\left(\sum_{n=1}^N \frac{c_n}{s - \bar{a}_n} + d + s h \right) - \left(\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - \bar{a}_n} \right) f(s) = f(s) \quad (2.3b)$$

Na formulação (2.3b) tem-se as incógnitas: c_n , d , h e $\tilde{c}_n$. As formulações apresentadas a seguir neste item são baseadas nos procedimentos descrito em (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1999).

2.1.1. Cálculo inicial de c_n , d , h , $\tilde{c}_n$

Não existe uma solução exata das incógnitas c_n , d , h e $\tilde{c}_n$ em (2.3b) porque $f(s)$ possui uma contribuição não racional (por exemplo ruído para o caso de dados obtidos de medições), ou o número de polos de partida é menor do que a ordem de $f(s)$. Por esta razão, a expressão (2.3b) é resolvida pelo método dos mínimos quadrados.

2.1.1.1. Polos de partida reais

Para uma determinada frequência s_k e supondo somente polos reais, pode-se reescrever (2.3b) como:

$$\mathbf{A}_k \mathbf{x} = b_k \quad (2.4a)$$

onde

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_k - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{1}{s_k - \bar{a}_N} & 1 & s_k & \frac{-f(s_k)}{s_k - \bar{a}_1} & \cdots & \frac{-f(s_k)}{s_k - \bar{a}_N} \end{bmatrix} \quad (2.4b)$$

$$\mathbf{x}^T = [c_1 \quad \cdots \quad c_N \quad d \quad h \quad \tilde{c}_1 \quad \cdots \quad \tilde{c}_N] \quad , \quad b_k = f(s_k) \quad (2.4c)$$

Fazendo uma extensão de (2.4a) para M diferentes pontos de frequência, obtém-se uma equação matricial linear expressa como:

$$\mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.5a)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_M \end{bmatrix} \quad , \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \quad (2.5b)$$

A equação (2.5a) pode ser resolvida pelo método dos mínimos quadrados:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.6)$$

onde $\mathbf{x}^*$ minimiza a norma euclidiana $\|\mathbf{b} - \mathbf{A} \mathbf{x}^*\|$.

2.1.1.2. Polos de partida em pares conjugados

Quando os polos são complexos conjugados as equações em (2.4) são válidas, mas alguns dos elementos da matriz $\mathbf{A}_k$ e do vetor $\mathbf{x}$ precisam ser modificados. Assumindo que as frações parciais i e $i+1$ de $\sigma f(s)$ e $\sigma(s)$ constituem pares conjugados de polos, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{c_i}{s - \bar{a}_i} + \frac{c_{i+1}}{s - \bar{a}_{i+1}} &= \frac{c_i}{s - \bar{a}_i} + \frac{c_i^*}{s - \bar{a}_i^*} = \frac{c_i' + j c_i''}{s - (\bar{a}_i' + j \bar{a}_i'')} + \frac{c_i' - j c_i''}{s - (\bar{a}_i' - j \bar{a}_i'')} = \\ &= \left(\frac{1}{s - \bar{a}_i} + \frac{1}{s - \bar{a}_i^*} \right) c_i' + \left(\frac{j}{s - \bar{a}_i} - \frac{j}{s - \bar{a}_i^*} \right) c_i'' \end{aligned} \quad (2.7a)$$

$$\begin{aligned}
\frac{\tilde{c}_i}{s - \bar{a}_i} + \frac{\tilde{c}_{i+1}}{s - \bar{a}_{i+1}} &= \frac{\tilde{c}_i}{s - \bar{a}_i} + \frac{\tilde{c}_i^*}{s - \bar{a}_i^*} = \frac{\tilde{c}_i' + j\tilde{c}_i''}{s - (\bar{a}_i' + j\bar{a}_i'')} + \frac{\tilde{c}_i' - j\tilde{c}_i''}{s - (\bar{a}_i' - j\bar{a}_i'')} = \\
&= \left(\frac{1}{s - \bar{a}_i} + \frac{1}{s - \bar{a}_i^*} \right) \tilde{c}_i' + \left(\frac{j}{s - \bar{a}_i} - \frac{j}{s - \bar{a}_i^*} \right) \tilde{c}_i''
\end{aligned} \tag{2.7b}$$

os elementos $A_{k,i}$, $A_{k,i+1}$, $A_{k,N+2+i}$, $A_{k,N+2+i+1}$, x_i , x_{i+1} , x_{N+2+i} e $x_{N+2+i+1}$ são modificados da seguinte maneira:

$$A_{k,i} = A_{k,N+2+i} = \frac{1}{s - \bar{a}_i} + \frac{1}{s - \bar{a}_i^*} \tag{2.8a}$$

$$A_{k,i+1} = A_{k,N+2+i+1} = \frac{j}{s - \bar{a}_i} - \frac{j}{s - \bar{a}_i^*} \tag{2.8b}$$

$$x_i = c_i' \quad , \quad x_{i+1} = c_i'' \quad , \quad x_{N+2+i} = \tilde{c}_i' \quad , \quad x_{N+2+i+1} = \tilde{c}_i'' \tag{2.8c}$$

Agrupando as equações para diferentes pontos de frequência e separando termos reais e imaginários obtém-se a seguinte equação matricial linear:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{A}' \\ \mathbf{A}'' \end{bmatrix} \mathbf{x} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}' \\ \mathbf{b}'' \end{bmatrix} \tag{2.9}$$

A formulação (2.9) é resolvida pelo método dos mínimos quadrados, conforme (2.6).

2.1.2. Cálculo dos zeros de $\sigma(s)$

De (2.2) e (2.3a) mostra-se que os polos de $f(s)$ são iguais aos zeros de $\sigma(s)$:

$$f(s) = \frac{\sigma f(s)}{\sigma(s)} = h \frac{\prod_{n=1}^{N+1} (s - z_n)}{\prod_{n=1}^N (s - \tilde{z}_n)} \tag{2.10}$$

Os zeros de $\sigma(s)$ são obtidos dos autovalores de

$$\{\tilde{z}_n\} = \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\tilde{\mathbf{c}}^T) \tag{2.11}$$

Se os polos de partida são reais tem-se que $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal que contém os polos de partida, $\mathbf{b}$ é um vetor-coluna com valores unitários e $\tilde{\mathbf{c}}^T$ é um vetor-linha que contém os resíduos de σ :

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \bar{a}_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \bar{a}_N \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{\mathbf{c}}^T = [\tilde{c}_1 \quad \cdots \quad \tilde{c}_N] \tag{2.12}$$

No caso de polos complexos conjugados as correspondentes submatrizes de $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$ e $\tilde{\mathbf{c}}^T$ são modificadas:

$$\hat{\mathbf{A}} = \begin{bmatrix} a' & a'' \\ -a'' & a' \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{b}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{c}}^T = [\tilde{c}' \quad \tilde{c}''] \quad (2.13)$$

Observa-se que se os polos de partida forem iguais aos polos de $f(s)$: $\bar{a}_n = a_n$, os zeros de $\sigma(s)$ seriam iguais aos seus polos, e portanto $\sigma(s) = 1$. Para alcançar a convergência $\sigma f(s) \rightarrow f(s)$ e $\sigma(s) \rightarrow 1$, os zeros de $\sigma(s)$ são usados como os novos polos de partida para o item 2.1.1 e procede-se de maneira iterativa.

Supondo que os polos de $f(s)$ calculados neste item sejam suficientemente precisos, em seguida é feito o cálculo dos resíduos de $f(s)$.

2.1.3. Cálculo dos resíduos de $f(s)$

Os resíduos de $f(s)$ podem ser obtidos resolvendo novamente (2.3b) usando os polos calculados anteriormente, no entanto, também é possível calcular os resíduos aplicando (2.1).

Os valores de c_n , d e h são obtidos pelo método dos mínimos quadrados aplicado na equação (2.1), por meio do método apresentado no item 2.1.1 e usando os polos calculados no item anterior. Dependendo se os polos calculados no item anterior são todos reais ou se existem polos complexos conjugados, têm-se as seguintes formulações para o cálculo dos resíduos de $f(s)$:

2.1.3.1. Polos reais

Para uma determinada frequência s_k e supondo que todos os polos de $f(s)$, a_n , calculados no item 2.1.2 são reais, pode-se reescrever (2.1) como:

$$\mathbf{A}_k \mathbf{x} = b_k \quad (2.14a)$$

onde

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_k - a_1} & \cdots & \frac{1}{s_k - a_N} & 1 & s_k \end{bmatrix} \quad (2.14b)$$

$$\mathbf{x}^T = [c_1 \quad \cdots \quad c_N \quad d \quad h] \quad , \quad b_k = f(s_k) \quad (2.14c)$$

Fazendo uma extensão de (2.14a) para M diferentes pontos de frequência, tem-se uma equação matricial linear expressa como:

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.15a)$$

onde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{A}_M \end{bmatrix}, \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{bmatrix} \quad (2.15b)$$

A equação (2.15a) pode ser resolvida pelo método dos mínimos quadrados:

$$\mathbf{x}^* = (\mathbf{A}^T \mathbf{A})^{-1} \mathbf{A}^T \mathbf{b} \quad (2.16)$$

onde $\mathbf{x}^*$ minimiza a norma euclidiana $\|\mathbf{b} - \mathbf{A}\mathbf{x}^*\|$.

2.1.3.2. Polos em pares conjugados

Quando existem polos complexos conjugados em (2.1), as equações em (2.14) permanecem válidas, mas alguns dos elementos da matriz A_k e do vetor $\mathbf{x}$ precisam ser modificados. Assumindo que as frações parciais i e $i+1$ de $f(s)$ constituem pares conjugados de polos, isto é,

$$\begin{aligned} \frac{c_i}{s - a_i} + \frac{c_{i+1}}{s - a_{i+1}} &= \frac{c_i}{s - a_i} + \frac{c_i^*}{s - a_i^*} = \frac{c_i' + jc_i''}{s - (a_i' + ja_i'')} + \frac{c_i' - jc_i''}{s - (a_i' - ja_i'')} = \\ &= \left(\frac{1}{s - a_i} + \frac{1}{s - a_i^*} \right) c_i' + \left(\frac{j}{s - a_i} - \frac{j}{s - a_i^*} \right) c_i'' \end{aligned} \quad (2.17)$$

tem-se que os elementos $A_{k,i}$, $A_{k,i+1}$, x_i e x_{i+1} , são modificados da seguinte maneira:

$$A_{k,i} = \frac{1}{s - a_i} + \frac{1}{s - a_i^*} \quad (2.18a)$$

$$A_{k,i+1} = \frac{j}{s - a_i} - \frac{j}{s - a_i^*} \quad (2.18b)$$

$$x_i = c_i' \quad , \quad x_{i+1} = c_i'' \quad (2.18c)$$

Agrupando equações para diferentes pontos de frequência e separando termos reais e imaginários obtém-se a seguinte equação matricial linear:

$$\begin{bmatrix} A' \\ A'' \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} b' \\ b'' \end{bmatrix} \quad (2.19)$$

A formulação anterior é resolvida pelo método dos mínimos quadrados apresentada em (2.16).

2.1.4. Polos de partida

Os polos de partida mal condicionados podem apresentar os seguintes problemas:

- Se os polos iniciais são todos reais pode-se apresentar um problema de exatidão na solução. Este problema pode ser solucionado usando polos complexos conjugados.
- Se existe uma diferença ampla entre os polos de partida $\bar{a}_n$ e os polos corretos de $f(s)$, a_n , então podem existir grandes variações de $\sigma(s)$ e $\sigma f(s)$ no procedimento iterativo. Este problema é superado usando novos polos de partida.

Os polos de partida devem ser complexos conjugados com a sua parte imaginária β linearmente distribuída sobre a faixa de frequência que vai empregada no ajuste de $f(s)$.

$$a_n = -\alpha + j\beta \quad , \quad a_{n+1} = -\alpha - j\beta \quad , \quad \alpha = \beta/100 \quad (2.20)$$

A parte real é suficientemente pequena para evitar problemas de mau condicionamento. Em algumas aplicações, a resposta em frequência é uma função suave sem picos de ressonância. Por exemplo, a função de propagação e a admitância característica de uma linha de transmissão. Neste caso podem ser usados polos reais, linear ou logaritmicamente espaçados em função da frequência.

Na Figura 2.1 tem-se um diagrama de blocos de todo o procedimento exposto anteriormente.

2.1.5. Ajuste de vetores

Este método pode ser adaptado ao ajuste de vetores, considera-se que $f(s)$ é um vetor em (2.1) e que cada elemento do vetor possui os mesmos polos. A vantagem de usar os mesmos polos para todos os elementos do vetor está na eficiência no tempo de processamento. Neste item mostra-se a formulação para o caso de um vetor com dois elementos, que pode ser generalizada para mais elementos.

Figura 2.1 – Procedimento de cálculo do VF

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

$$\mathbf{f} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.21)$$

Usando os mesmos polos de partida para os dois elementos do vetor, com uma função σ em comum e ignorando os termos d e h , generalizando a equação (2.3b) tem-se:

$$\begin{bmatrix} \sum_{n=1}^N \frac{c_n^1}{s - \bar{a}_n} \\ \sum_{n=1}^N \frac{c_n^2}{s - \bar{a}_n} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} f_1 \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - \bar{a}_n} \\ f_2 \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - \bar{a}_n} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \end{bmatrix} \quad (2.22)$$

onde os índices 1 e 2 fazem referência aos resíduos dos elementos 1 e 2 do vetor $\mathbf{f}$. Para um determinado ponto de frequência e considerando polos reais tem-se:

$$\mathbf{A}_k \mathbf{x} = \mathbf{b}_k \quad (2.23a)$$

onde

$$\mathbf{A}_k = \begin{bmatrix} \frac{1}{s_k - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_k - \bar{a}_N} & 0_{(1 \times N)} & \frac{-f_1(s_k)}{s_k - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f_1(s_k)}{s_k - \bar{a}_N} \\ 0_{(1 \times N)} & \frac{1}{s_k - \bar{a}_1} & \dots & \frac{1}{s_k - \bar{a}_N} & \frac{-f_2(s_k)}{s_k - \bar{a}_1} & \dots & \frac{-f_2(s_k)}{s_k - \bar{a}_N} \end{bmatrix} \quad (2.23b)$$

$$\mathbf{x}^T = [c_1^1 \quad \dots \quad c_N^1 \quad c_1^2 \quad \dots \quad c_N^2 \quad \tilde{c}_1 \quad \dots \quad \tilde{c}_N] \quad , \quad \mathbf{b}_k = \begin{bmatrix} f_1(s_k) \\ f_2(s_k) \end{bmatrix} \quad (2.23c)$$

Para diferentes pontos de frequência é obtida uma equação matricial linear que é resolvida pelo método dos mínimos quadrados. Conhecidos os valores de $\tilde{c}_n$ e $\bar{a}_n$, calculam-se os zeros de σ como foi apresentado no item 2.1.2, que correspondem aos novos polos de cada elemento de f . Finalmente são calculados os resíduos de forma independente para cada elemento de f conforme o item 2.1.3.

2.2. Aperfeiçoamento na realocação dos polos

No trabalho de (GUSTAVSEN, 2006) foi proposta a melhoria da convergência e a redução da importância na especificação dos “polos de partida”, especialmente quando a função a ser ajustada está contaminada com ruído (para o caso de dados obtidos de medições), por meio da modificação da função $\sigma(s)$ em (2.2) para eliminar o seu comportamento assintótico em altas frequências.

A função $\sigma(s)$ em (2.2) está forçada a se aproximar a uma magnitude unitária em altas frequências, isto geralmente provoca uma alta variação da sua magnitude em determinadas faixas de frequência, incrementando o erro no cálculo pelo método dos mínimos quadrados aplicado em (2.3b), causando problemas de convergência porque grandes deslocamentos de polos implicam variações elevadas de $\sigma(s)$ na sua magnitude. No entanto, a existência de ruído em $f(s)$ causa uma menor variação na magnitude de $\sigma(s)$ mas diminui a capacidade de realocação dos polos em cada iteração (GUSTAVSEN, 2006).

A eliminação do comportamento assintótico de $\sigma(s)$ melhora a convergência no cálculo dos polos de $f(s)$. Isto é possível substituindo a expressão (2.3a) com

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - \bar{a}_n} + \tilde{d} = \frac{\prod_{n=1}^N (s - \tilde{z}_n)}{\prod_{n=1}^N (s - \bar{a}_n)} \quad (2.24)$$

onde $\tilde{d}$ é real. Também a equação (2.11) deve ser substituída por

$$\{\tilde{z}_n\} = \text{eig}(\mathbf{A} - \mathbf{b}\tilde{d}^{-1}\tilde{\mathbf{c}}^T) \quad (2.25)$$

Aplicável para um valor de $\tilde{d}$ diferente de zero. Se o valor de $\tilde{d}$ tende a ser menor que um valor de tolerância Tol (por exemplo, $Tol = 10^{-5}$), o problema de mínimos quadrados é resolvido novamente com um valor fixo para $\tilde{d}$, usando $\tilde{d} = Tol$.

Para evitar uma solução nula de $\mathbf{f}(s)$, é incluída a seguinte equação no problema de mínimos quadrados

$$Re \left\{ \sum_{k=1}^{N_s} \sigma(s_k) \right\} = Re \left\{ \sum_{k=1}^{N_s} \left(\sum_{n=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s_k - \bar{a}_n} + \tilde{d} \right) \right\} \cong N_s \quad (2.26)$$

A equação anterior impõe que a soma das parcelas reais de $\sigma(s)$ sobre uma amostra de frequências seja igual a um valor constante, N_s , com o único objetivo de prevenir a convergência de $\sigma(s)$ a zero. Quando este procedimento converge, tem-se que $\tilde{c}_n \rightarrow 0$ e $\tilde{d} \rightarrow 1$ para todas as frequências.

Também é conveniente ponderar (2.26) em relação ao módulo de $\mathbf{f}(s)$:

$$weight = \frac{\|\boldsymbol{\omega}(s) \cdot \mathbf{f}(s)\|}{N_s} \quad (2.27)$$

onde o operador $\|\cdot\|$ designa a norma euclidiana de um vetor, e $\boldsymbol{\omega}(s)$ é a ponderação para o ajuste de $\mathbf{f}(s)$.

2.3. Modelagem eficiente de macro-modelos por meio do cálculo rápido do VF

O sistema de equações $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b}$ pode ser resolvido por meio da decomposição QR:

$$\mathbf{A} = \mathbf{Q}\mathbf{R} \quad (2.28a)$$

$$\mathbf{x} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{Q}^T\mathbf{b} \quad (2.28b)$$

onde $\mathbf{R}$ é uma matriz triangular superior e $\mathbf{Q}$ é uma matriz cujas colunas formam um conjunto ortonormal, portanto a inversa de $\mathbf{Q}$ é dada pela sua transposta, ou seja $\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T$. Como será mostrado a seguir, o sistema de identificação dos parâmetros do macro-modelo ajustado possui a seguinte estrutura:

$$[\mathbf{A}_1 \quad \mathbf{A}_2] \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (2.29a)$$

Tendo em conta que um macro-modelo é um sistema composto por um grande número de nós, por exemplo, uma placa de circuito impresso de 60 portas. Aplicando a decomposição QR à equação anterior, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{R}_{11} & \mathbf{R}_{12} \\ \mathbf{0} & \mathbf{R}_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \mathbf{x}_2 \end{bmatrix} = \mathbf{Q}^T \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \end{bmatrix} \quad (2.29b)$$

A seguir mostra-se o procedimento descrito por (DESCRIJVER et al. 2008) para diminuir o tempo de processamento do método VF por meio da redução do número de incógnitas das equações de mínimos quadrados usando a decomposição QR.

Anteriormente foi mostrado que a função $\mathbf{f}(\mathbf{s})$ pode ser aproximada por meio de uma função racional, resolvendo de maneira iterativa a equação linear (2.3) que permite minimizar a distância entre $\sigma\mathbf{f}(\mathbf{s}_i)/\sigma(\mathbf{s}_i)$ e as amostras de $\mathbf{f}(\mathbf{s}_i)$ em uma faixa de frequências pré-definida $[\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_i, \dots, \mathbf{s}_K]$.

Similarmente, para um macro-modelo com função de transferência $\mathbf{H}$, o objetivo é minimizar a distância entre a amostra $(s_i, H_v(s_i))$, correspondente ao elemento v da matriz $\mathbf{H}$ para $v = 1, \dots, V$, e a função racional desconhecida $R_v(s_i)$ (usada como artifício matemático) para uma faixa de frequências pré-definida $[s_1, \dots, s_i, \dots, s_K]$:

$$R_v(s) = \frac{(\sigma H)_v(s)}{\sigma(s)} = \frac{\sum_{p=1}^P c_{p,v} \phi_p(s, \mathbf{a})}{\tilde{c}_0 + \sum_{p=1}^P \tilde{c}_p \phi_p(s, \mathbf{a})} \quad (2.30a)$$

onde $\phi_p(s, \mathbf{a})$ corresponde à soma de funções racionais baseadas no conjunto de polos $\mathbf{a} = \{-a_1, \dots, -a_P\}$:

$$\phi_p(s, \mathbf{a}) = \sum_{n=1}^P \frac{1}{s - a_n} \quad (2.30b)$$

O problema pode ser solucionado de maneira precisa por meio da solução iterativa da aproximação linear:

$$(\sigma H)_v(s) \approx \sigma(s) H_v(s) \quad (2.31)$$

Supondo $\tilde{c}_0 = 1$ e considerando as seguintes definições:

$$\mathbf{H}'_v = [H_v(s_1) \quad \dots \quad H_v(s_K)] \quad (2.32a)$$

$$\mathbf{H}_v = \text{diag}([\text{Re}(\mathbf{H}'_v) \quad \text{Im}(\mathbf{H}'_v)]) \quad (2.32b)$$

$$\hat{\mathbf{1}} = \text{vetor coluna de 1's de dimensão } 2K \times 1 \quad (2.32c)$$

e a matriz $\mathbf{X}$ é definida como

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \text{Re}(\mathbf{X}') \\ \text{Im}(\mathbf{X}') \end{bmatrix} \quad (2.32d)$$

$$\mathbf{X}' = \begin{bmatrix} \phi_1(s_1, \mathbf{a}) & \cdots & \phi_N(s_1, \mathbf{a}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_1(s_k, \mathbf{a}) & \cdots & \phi_N(s_k, \mathbf{a}) \end{bmatrix} \quad (2.32e)$$

a solução de (2.31) equivale a resolver:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X} & 0 & 0 & 0 & -\mathbf{H}_1\mathbf{X} \\ 0 & \mathbf{X} & 0 & 0 & -\mathbf{H}_2\mathbf{X} \\ 0 & 0 & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{X} & -\mathbf{H}_V\mathbf{X} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{C}_1 \\ \mathbf{C}_2 \\ \vdots \\ \mathbf{C}_V \\ \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{H}_1\hat{\mathbf{1}} \\ \mathbf{H}_2\hat{\mathbf{1}} \\ \vdots \\ \mathbf{H}_V\hat{\mathbf{1}} \end{bmatrix} \quad (2.33)$$

onde $\mathbf{C}_v$ é um vetor que contém os resíduos $c_{p,v}$ de $(\sigma H)_v(s)$, e $\tilde{\mathbf{C}}$ é um vetor que contém os resíduos $\tilde{c}_p$ de $\sigma(s)$. Uma vez obtidos os coeficientes $\mathbf{C}_v$ e $\tilde{\mathbf{C}}$, os polos de $R_v(s)$ que equivalem aos zeros de $\sigma(s)$, denotados como $\boldsymbol{\theta}$, são calculados resolvendo um problema de autovalores baseado na realização mínima de espaço de estado $(\mathbf{A}_\sigma, \mathbf{B}_\sigma, \mathbf{C}_\sigma, \mathbf{D}_\sigma)$ de $\sigma(s)$, análogo ao mostrado no item 2.1.2

$$\boldsymbol{\theta} = \{\theta_1, \dots, \theta_P\} = \text{eig}(\mathbf{A}_\sigma - \mathbf{B}_\sigma \mathbf{D}_\sigma^{-1} \mathbf{C}_\sigma) \quad (2.34)$$

Este procedimento é repetido substituindo os polos $\mathbf{a}$ pelos polos calculados $\boldsymbol{\theta}$ até atingir a convergência. Após a convergência, os resíduos de $R_v(s)$ são calculados resolvendo o problema linear considerando $\sigma(s) = 1$ em (2.30).

Para eliminar o comportamento assintótico a altas frequências de $\sigma(s)$ é possível combinar a presente metodologia com a abordagem apresentada no item 2.2.

Existe um esforço computacional desperdiçado no cálculo de $\mathbf{C}_v$ para obter os resíduos $c_{p,v}$ de $(\sigma H)_v(s)$ porque em cada iteração o algoritmo do VF somente precisa de $\tilde{\mathbf{C}}$ para obter os resíduos $\tilde{c}_p$ de $\sigma(s)$, com o fim de calcular os novos polos de $R_v(s)$ para a seguinte iteração. A aplicação da transformação QR às equações de mínimos quadrados em (2.33) permite obter um sistema de equações em que as incógnitas são somente os valores de $\tilde{\mathbf{C}}$, isto melhora o tempo de processamento do VF.

Considerando a seguinte expressão obtida de (2.33):

$$[\mathbf{X} \quad -\mathbf{H}_v\mathbf{X}] \begin{bmatrix} \mathbf{C}_v \\ \tilde{\mathbf{C}} \end{bmatrix} = [\mathbf{H}_v\hat{\mathbf{1}}], \quad v = 1, \dots, V \quad (2.35a)$$

e a posterior transformação QR (ver equação (2.29)):

$$[X \quad -H_v X] \begin{bmatrix} C_v \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = [Q_v] \begin{bmatrix} R_v^{11} & R_v^{12} \\ 0 & R_v^{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} C_v \\ \tilde{C} \end{bmatrix} = [H_v \hat{1}], \quad v = 1, \dots, V \quad (2.35b)$$

que aplicada a todos os elementos v da matriz H em (2.35a), tem-se um conjunto de equações reduzidas onde as incógnitas são somente os coeficientes $\tilde{C}$.

$$\begin{bmatrix} R_1^{22} \\ \vdots \\ R_V^{22} \end{bmatrix} [\tilde{C}] = \begin{bmatrix} Q_1^T H_1 \hat{1} \\ \vdots \\ Q_V^T H_V \hat{1} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

Depois de calcular os coeficientes $\tilde{C}$ pelo método dos mínimos quadrados, os polos de $R_v(s)$, que são comuns entre todos os elementos v da matriz H , são calculados usando a expressão (2.34), e os resíduos de $R_v(s)$ são calculados seguindo de maneira análoga os procedimentos descritos nos itens 2.1.3 e 2.1.5.

2.4. Modal Vector Fitting (MVF)

No trabalho apresentado por (GUSTAVSEN & HEITZ, 2008) é proposta uma reformulação do método VF focado em uma representação precisa dos autovalores da matriz ajustada ao invés do ajuste preciso dos elementos da matriz. Este método conhecido como MVF (do inglês *modal vector fitting*) melhora a precisão nos casos onde existe uma grande diferença de magnitude entre autovalores, em que pese à elevação do esforço computacional em relação ao método VF. Este método não é utilizado neste trabalho, porém é mencionado para mostrar a existência de um método de ajuste alternativo mais preciso, mas menos rápido.

2.4.1. Considerações de precisão

Em uma rede genérica a sua matriz de admitâncias nodais, Y_r , relaciona a resposta das correntes injetadas nodais i quando são aplicadas tensões nodais v . Todos os elementos de Y_r são dependentes da frequência.

$$i(s) = Y_r(s)v(s) \quad (2.37)$$

Quando são aplicadas correntes injetadas nos terminais, a resposta de tensão nos terminais a qualquer frequência calcula-se como

$$v = Z_r i = Y_r^{-1} i = (T_Y \Lambda_Y T_Y^{-1})^{-1} i = T_Y \Lambda_Y^{-1} T_Y^{-1} i \quad (2.38)$$

onde Λ_Y é uma matriz diagonal que contém os autovalores de Y_r , e T_Y é a matriz composta pelos autovetores de Y_r (associados aos autovalores de Y_r).

Observa-se que autovalores pequenos de Y_r geram autovalores grandes de Z_r . Se Y_r possui grandes diferenças de magnitude entre os seus autovalores, no ajuste racional dos elementos de Y_r é provável que resulte em uma pobre representação para os autovalores menores. Portanto, ajustando os elementos de Y_r tem-se um modelo que se adapta melhor para reproduzir respostas de corrente quando são dadas as tensões. No entanto, não oferece bons resultados para reproduzir respostas de tensão quando são dadas as correntes. Analogamente, ajustando os elementos de Z_r resulta em um modelo que é capaz de reproduzir corretamente os resultados de tensão quando são dadas as correntes.

Para obter um modelo que seja preciso nas suas respostas quando são aplicadas tensões ou correntes, o erro associado a cada autovalor está relacionado com a sua magnitude por meio do critério

$$\left| \frac{\lambda_{i,aj}(s) - \lambda_i(s)}{\lambda_i(s)} \right| < \epsilon, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.39)$$

onde $\lambda_{i,aj}$ e λ_i são os autovalores $Y_{r,aj}$ e Y_r , respectivamente. O problema tem como objetivo identificar o modelo polo-resíduo $Y_{aj}(s)$

$$Y_r(s) \cong Y_{r,aj}(s) = \sum_{m=1}^N \frac{R_m}{s - a_m} + D + sE \quad (2.40)$$

de tal maneira que a precisão de $\lambda_{i,aj}$, seja preservada em relação a λ_i , por meio do critério (2.39). Os polos do sistema $\{a_m\}$ são iguais para todos os elementos de $Y_{r,aj}$, a matriz R_m corresponde aos resíduos.

Assume-se que os elementos de $Y_r(s)$ são conhecidos. O processo de ajuste consiste em determinar os parâmetros $\{a_m\}$, R_m , D e E para minimizar o erro associado ao critério (2.39).

Quando é aplicado o método VF para ajustar os elementos da matriz de admitâncias Y_r , os elementos do vetor $f(s)$ em (2.21) (ver item 2.1.5) correspondem aos elementos y_{ij} de Y_r . Se a matriz de admitâncias é simétrica, o tamanho do vetor $f(s)$ é $n(n+1)/2$ ao invés de n^2 .

2.4.2. Cálculo do modelo polo-resíduo

De (2.38) tem-se a seguinte relação entre a matriz de autovetores de Y_r , T , a matriz diagonal que contém os autovalores de Y_r , Λ_Y , e o modelo ajustado de Y_r , $Y_{r,aj}$:

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{T}\mathbf{A}_Y\mathbf{T}^{-1} \cong \mathbf{Y}_{r,aj} \quad (2.41)$$

De (2.41) tem-se que para cada autovalor/autovetor de $\mathbf{Y}_r$, $(\lambda_i, \mathbf{t}_i)$:

$$\mathbf{Y}_r \mathbf{t}_i \cong \lambda_i \mathbf{t}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.42)$$

No problema de mínimos quadrados a precisão relativa dos autovalores pode conservar-se ponderando (2.42) com o recíproco da magnitude do autovalor

$$\frac{1}{|\lambda_i|} (\mathbf{Y}_r \mathbf{t}_i - \lambda_i \mathbf{t}_i) \cong 0, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.43)$$

Combinando (2.43) com o método VF, tem-se

$$\frac{1}{|\lambda_i|} \sigma(s) \mathbf{t}_i \cong \frac{1}{|\lambda_i|} \left[\left(\sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{R}_m}{s - a_m} + \mathbf{D} + s\mathbf{E} \right) \mathbf{t}_i \right], \quad i = 1, \dots, n \quad (2.44a)$$

$$\sigma(s) = \sum_{m=1}^N \frac{\tilde{c}_n}{s - a_m} + \tilde{d} = \frac{\prod_{m=1}^N (s - \tilde{z}_m)}{\prod_{m=1}^N (s - a_m)} \quad (2.44b)$$

Das expressões anteriores observa-se que os termos $\lambda_i, \mathbf{t}_i$ são dependentes da frequência. O termo $\sigma(s)$ de (2.24) é usado (ver item 2.2) em vez do termo em (2.2b), com a finalidade de melhorar a convergência. Usando a equação (2.44) para todos os modos $i = 1, \dots, n$ obtém-se uma equação matricial linear que pode ser resolvida por meio do método dos mínimos quadrados, de maneira similar ao exposto no item 2.1, para obter os valores $a_m, \tilde{c}_n, \tilde{d}, \mathbf{R}_m, \mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$.

Os zeros de $\sigma(s)$, $\{\tilde{z}_n\}$, serão usados como os novos polos $\{a_m\}$ e são calculados usando (2.25). Se os polos $\{a_m\}$ em (2.25) são reais tem-se que $\mathbf{A}$ é uma matriz diagonal que contém os polos $\{a_m\}$, $\mathbf{b}$ é um vetor-coluna com elementos unitários e $\tilde{\mathbf{c}}^T$ é um vetor-linha que contém os resíduos de σ : $\{\tilde{c}_n\}$ (ver item 2.1.2). Os novos polos obtidos da equação anterior são reusados em (2.44), seguindo um procedimento iterativo. Na última iteração, os resíduos do modelo final $\{a_m\}$ são calculados usando (2.44) com $\sigma(s) = 1$. Também é incluída a restrição (2.26) para evitar uma solução nula de $\mathbf{Y}_{r,aj}$.

2.4.3. Utilizando propriedades do circuito externo

Quando precisa-se obter o modelo de um único dispositivo, $\mathbf{Y}_{dis}$, conectado a uma rede externa com matriz de admitâncias $\mathbf{Y}_{ext}$ conhecida (ver Figura 2.2), que não precisa ser

ajustada e é vista desde os terminais do dispositivo, o método MVF pode ser aplicado a todo o sistema, substituindo a equação (2.44) por

$$\frac{1}{|\lambda_i|} \sigma(s) \mathbf{t}_i \cong \frac{1}{|\lambda_i|} \left(\left(\mathbf{Y}_{ext} + \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{R}_m}{s - a_m} + \mathbf{D} + s\mathbf{E} \right) \mathbf{t}_i \right), \quad i = 1, \dots, n \quad (2.45a)$$

com

$$\mathbf{Y}_{dis}(s) \approx \mathbf{Y}_{dis,aj}(s) = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{R}_m}{s - a_m} + \mathbf{D} + s\mathbf{E}, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.45b)$$

onde o autovalor/autovetor $(\lambda_i, \mathbf{t}_i)$ são calculados de $\mathbf{Y}_{tot}$, que representa a admitância total do sistema calculada como

$$\mathbf{Y}_{tot} = \mathbf{Y}_{dis} + \mathbf{Y}_{ext} \quad (2.46)$$

Fazendo uso de (2.45a), o processo de cálculo é igual ao apresentado no item 2.1.

Figura 2.2 - Conexão entre um elemento ajustado pelo método VF e uma rede externa

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN & HEITZ (2008, p. 666).

2.4.4. Modelagem por meio de uma matriz de transformação constante

É possível modelar o sistema com suficiente precisão por meio de uma matriz de transformação constante (ver Figura 2.3). Isto representa uma vantagem no tempo de processamento porque o termo $\mathbf{t}_i$ em (2.44) seria constante.

Por exemplo, para uma linha com dois condutores dispostos de maneira simétrica, tem-se uma matriz de admitâncias

$$\mathbf{Y}_{nod} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix} \quad (2.47)$$

onde as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ são simétricas. Pode-se mostrar que $\mathbf{Y}_{nod}$ pode ser diagonalizada por meio da matriz de transformação constante (GUSTAVSEN & HEITZ, 2008):

Figura 2.3 - Algoritmo de ajuste usando matriz de transformação constante

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN & HEITZ (2008, p. 666).

$$T_n = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \quad (2.48)$$

Com a matriz de transformação T_n , obtém-se a matriz diagonal Λ_n que contém os autovalores (dependentes da frequência) de Y_{nod} .

$$\Lambda_n = T_n^{-1} Y_{nod} T_n \quad (2.49)$$

Observa-se em (2.49) que os elementos da matriz Λ_n , que correspondem aos autovalores λ_i^{nod} de Y_{nod} , são conhecidos, e a matriz Y_{nod} corresponde à equação (2.40). Como a diagonalização é feita por meio de uma matriz de transformação constante, nota-se que cada autovalor λ_i^{nod} é uma combinação dos elementos da matriz Y_{nod} . Portanto, todos os autovalores λ_i^{nod} contêm os mesmos polos de Y_{nod} e podem ser ajustados por meio de funções racionais

$$\lambda_i^{nod}(s) \cong \sum_{m=1}^N \frac{c_{i,m}}{s - a_m} + d_i + se_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.50)$$

Agrupando (2.50) para todos os modos, aplica-se o método VF (ver item 2.1.5). Usando o recíproco da magnitude de λ_i^{nod} para ponderar o problema de mínimos quadrados

$$\frac{\lambda_i^{nod}}{|\lambda_i^{nod}|} \cong \frac{1}{|\lambda_i^{nod}|} \sum_{m=1}^N \frac{c_{i,m}^\lambda}{s - a_m} + d_i^\lambda + se_i^\lambda, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.51)$$

Usando (2.51), é possível ajustar os autovalores com precisão, evitando os problemas descritos no item 2.4.1, e obtendo as mesmas vantagens do método MVF.

Com o modelo ajustado dos autovalores, pode ser obtido o modelo polo-resíduo (2.40) por meio das seguintes transformações:

$$\mathbf{R}_m = \mathbf{T}_n \text{diag}\{c_{1,m}^\lambda, \dots, c_{n,m}^\lambda\} \mathbf{T}_n^{-1} \quad (2.52a)$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{T}_n \text{diag}\{d_1^\lambda, \dots, d_n^\lambda\} \mathbf{T}_n^{-1} \quad (2.52b)$$

$$\mathbf{E} = \mathbf{T}_n \text{diag}\{e_1^\lambda, \dots, e_n^\lambda\} \mathbf{T}_n^{-1} \quad (2.52c)$$

Capítulo 3

Avaliação e Imposição de Passividade

Neste capítulo é apresentado um método para avaliar a estabilidade do modelo polo-resíduo obtido da aplicação do VF sobre os elementos da matriz de admitâncias nodais, para saber se o modelo fornece simulações estáveis no tempo. Também são apresentadas as metodologias: perturbação dos resíduos ou RP (do inglês *residue perturbation*), perturbação modal ou MP (do inglês *modal perturbation*), perturbação rápida dos resíduos ou FRP (do inglês *fast residue perturbation*) e a perturbação rápida modal ou FMP (do inglês *fast modal perturbation*), todas baseadas no uso da programação quadrática para impor a estabilidade do modelo para uma determinada faixa de frequências.

3.1. Teste de singularidade para uma avaliação rápida e confiável da passividade de modelos racionais

Uma das maiores dificuldades no modelamento de sistemas lineares a partir de modelos racionais está na obtenção de modelos não passivos, que levam a simulações instáveis. A passividade do modelo pode ser avaliada por meio dos autovalores da matriz Hamiltoniana $\mathbf{M}$. No entanto, este método somente pode ser aplicado a modelos simétricos e podem existir imprecisões no cálculo dos autovalores de $\mathbf{M}$, com um tempo de processamento excessivo para modelos de ordem elevada. Considerando que os modelos simétricos são aqueles representados por uma matriz de admitâncias nodais, $\mathbf{Y}_T$, caracterizada por ser simétrica para cada valor de frequência. No trabalho de (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2009) foi apresentado um teste de singularidade por meio de uma matriz com a metade do tamanho da matriz Hamiltoniana que pode ser aplicado a modelos simétricos e assimétricos, melhorando a velocidade de processamento por um fator de oito e obtendo resultados mais confiáveis.

3.1.1. Conversão do modelo polo-resíduo para o modelo de espaço de estados

O modelo de um sistema/dispositivo linear pode ser caracterizado por sua matriz de admitâncias $\mathbf{Y}_r$ que relaciona as correntes injetadas $\mathbf{i}$ e as tensões $\mathbf{v}$ nos nós

$$\mathbf{i}(j\omega) = \mathbf{Y}_r(j\omega)\mathbf{v}(j\omega) \quad (3.1)$$

Nota-se que (3.1) é análoga a (2.37), passando do domínio s para o domínio $j\omega$, ou obter a transformada de Fourier a partir da transformada de Laplace. Isto é válido quando a região de convergência no plano complexo de cada termo em $\mathbf{i}(s)$, $\mathbf{Y}_r(s)$ e $\mathbf{v}(s)$ é dada por um semiplano aberto $\text{Re}(s) > \gamma$ com $\gamma < 0$ (PAPOULIS, 1962), como é o caso dos transitórios eletromagnéticos estudados porque os sistemas são amortecidos com polos no semi-plano esquerdo.

A matriz de admitâncias apresenta as seguintes propriedades de simetria e conjugação, onde a barra acima de $\mathbf{Y}_r(-j\omega)$ indica o seu conjugado

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{Y}_r^T \quad (3.2)$$

$$\mathbf{Y}_r(j\omega) = \overline{\mathbf{Y}_r(-j\omega)} \quad (3.3)$$

Os elementos de $\mathbf{Y}_r$ são ajustados pelo método VF apresentado no Capítulo 2. Este modelo ajustado pode ser expandido em um modelo de espaço de estados:

$$\mathbf{Y}_r(j\omega) \cong \mathbf{Y}_{r,aj}(j\omega) = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{R}_m}{j\omega - a_m} + \mathbf{D} \quad (3.4)$$

$$\mathbf{Y}_{r,aj}(j\omega) = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (3.5)$$

Os termos do modelo polo-resíduo (3.4) podem ser expressos como:

$$\frac{1}{j\omega - a_m} \mathbf{R}_m = \mathbf{R}_m \left(\frac{1}{j\omega - a_m} \mathbf{I}_n \right) \mathbf{I}_n \quad (3.6)$$

onde $\mathbf{I}_n$ é a matriz identidade com a mesma dimensão de $\mathbf{R}_m$. Com a comparação de (3.4) com (3.6) é possível a construção das matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ a partir da contribuição de cada termo em (3.6). Por exemplo, na Figura 3.1 tem-se um exemplo da construção destas matrizes com $m = 2$, $n = 3$ e $N = 4$, onde N indica o número de polos, n o número de linhas (ou colunas) da matriz $\mathbf{R}_m$ e m a m -ésima matriz de resíduos ou o m -ésimo polo.

Observa-se que a matriz A é bloco-diagonal, com os sub-blocos contendo os polos $\{a_m\}$ repetidos segundo o número de colunas de Y_r , a matriz C contém as sub-matrizes de resíduos R_m e a matriz B é uma matriz composta por N matrizes identidade I_n .

Figura 3.1 - Construção do modelo em espaço de estados (método 1)

Fonte: SEMLYEN & GUSTAVSEN (2009, p.351).

Também é possível construir o modelo em espaço de estados de acordo com a Figura 3.2 para um sistema de terceira ordem ($N = 3$), e duas entradas/saídas ($n = 2$). A matriz $(j\omega I - A)^{-1}$ é diagonal com os polos repetidos n vezes, a matriz B é composta por colunas de zeros e 1's e a matriz C é constituída pela combinação das colunas das matrizes de resíduos

Para cada par de polos complexos conjugados, as correspondentes submatrizes são modificadas por meio da seguinte transformação de similaridade, para obter um modelo composto por matrizes com elementos reais:

$$\hat{A} = \begin{bmatrix} \text{Re}\{a\} & \text{Im}\{a\} \\ -\text{Im}\{a\} & \text{Re}\{a\} \end{bmatrix}, \quad \hat{B} = \begin{bmatrix} 2\text{Re}\{b^T\} \\ -2\text{Im}\{b^T\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b^T \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \hat{c} = [\text{Re}\{c\} \quad \text{Im}\{c\}] \quad (3.7)$$

Por exemplo, assumindo que nas equações no espaço de estados as submatrizes A_{re} , B_{re} e C_{re} estão associadas aos polos reais e seus correspondentes resíduos, e as submatrizes A_c , B_c e C_c têm relação com polos complexos e seus correspondentes resíduos:

$$j\omega \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{re} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & A_c & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \bar{A}_c \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{re} \\ B_c \\ B_c^* \end{bmatrix} u \quad (3.8a)$$

$$y = [C_{re} \quad C_c \quad \bar{C}_c] \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + Du \quad (3.8b)$$

onde o operador $\overline{(\cdot)}$ denota o complexo conjugado. É introduzida a transformação de similaridade

$$\begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = T \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}, \quad T = \begin{bmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & I \\ 0 & jI & -jI \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Aplicando esta transformação na formulação (3.8), obtem-se:

$$j\omega \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{re} & 0 & 0 \\ 0 & \text{Re}\{A_c\} & \text{Im}\{A_c\} \\ 0 & -\text{Im}\{A_c\} & \text{Re}\{A_c\} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_{re} \\ 2\text{Re}\{B_c^T\} \\ -2\text{Im}\{B_c^T\} \end{bmatrix} u \quad (3.10a)$$

$$y = [C_{re} \quad \text{Re}\{C_c\} \quad \text{Im}\{C_c\}] \begin{bmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \\ \tilde{x}_3 \end{bmatrix} + Du \quad (3.10b)$$

Figura 3.2 - Construção do modelo em espaço de estados (método 2)

Fonte: GUSTAVSEN (2009, p. 37).

3.1.2. Avaliação da passividade

Para qualquer número complexo v tem-se que a potência absorvida pela rede é igual a:

$$P = \text{Re}\{v^* Y_{r,aj} v\} = \text{Re}\{v^* (G_{r,aj} + jB_{r,aj}) v\} = \text{Re}\{v^* G_{r,aj} v\} \quad (3.11)$$

onde o asterisco * denota transposição e conjugação. A passividade implica uma absorção de potência positiva, isto equivale dizer que os autovalores da parte real de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ (condutância $\mathbf{G}_{r,aj}$) são positivos para todas as frequências ou que a matriz $\mathbf{G}_{r,aj} = \text{Re}\{\mathbf{Y}_{r,aj}\}$ é definida positiva (ver Figura 3.3)

$$\text{eig}(\text{Re}\{\mathbf{Y}_{r,aj}(j\omega)\}) = \text{eig}(\mathbf{G}_{r,aj}(j\omega)) > 0 \quad (3.12)$$

A expressão anterior é válida quando $\mathbf{Y}_{r,aj}$ é simétrica, no entanto também pode ser usada para caracterizar $\mathbf{Y}_{r,aj}$ levemente assimétricos. A passividade pode ser identificada avaliando (3.12) para um grande número de frequências (varredura de frequência). No entanto, a experiência tem demonstrado que este método não é seguro porque as violações de passividade podem estar localizadas em faixas de frequência pequenas e podem não ser detectadas.

Figura 3.3 - Autovalores de $\mathbf{G}(s)$

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2008, p. 771).

A passividade também pode ser avaliada por meio dos autovalores da matriz Hamiltoniana $\mathbf{M}$. O sistema é passivo somente se $\mathbf{M}$ não contém autovalores imaginários. Os autovalores puramente imaginários de $\mathbf{M}$ correspondem às frequências onde os autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}$ cruzam o zero, isto é, onde $\mathbf{G}_{r,aj}$ é singular. Isto permite identificar faixas onde acontecem violações de passividade.

$$\mathbf{M} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{C} & \mathbf{B}(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{B}^T \\ -\mathbf{C}^T(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{C} & -\mathbf{A}^T + \mathbf{C}^T(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^{-1}\mathbf{B}^T \end{bmatrix} \quad (3.13)$$

As faixas de violação podem ser detectadas partindo dos autovalores de $\mathbf{M}$ do seguinte modo:

- a) Obter uma lista de frequências dos autovalores puramente imaginários de $\mathbf{M}$

$$\mathbf{s} = \{s_1, s_2, \dots, s_n\} \quad (3.14)$$

- b) Avaliar o critério (3.12) no ponto médio das frequências listadas anteriormente

$$\mathbf{s}' = \left\{ \frac{s_1 + s_2}{2}, \dots, \frac{s_{n-1} + s_n}{2} \right\} \quad (3.15)$$

- c) Se a passividade é violada na amostra $(s_i + s_{i+1})/2$ calculada no item b), então a faixa $[s_i \ s_{i+1}]$ define uma banda de violação de passividade.
- d) Avaliar o critério (3.12) na amostra $s_1/2$ e $2s_n$ para verificar se a passividade tem sido violada entre as faixas $[0 \ s_1]$ e $[s_n \ \infty]$ respectivamente.

3.1.3. Matriz de singularidade

Consideram-se as equações de estado no domínio da frequência

$$j\omega \mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.16a)$$

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.16b)$$

Assume-se que as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$ são reais usando a transformação de similaridade explicada no item anterior.

A matriz de condutância $\mathbf{G}_{r,aj}$ se expressa analiticamente

$$\mathbf{G}_{r,aj} = \frac{1}{2} \left(\mathbf{Y}_{r,aj}(j\omega) + \mathbf{Y}_{r,aj}(-j\omega) \right) = \frac{\mathbf{g}}{\mathbf{u}} \quad (3.17)$$

Para $\mathbf{Y}_{r,aj}(-j\omega)$ tem-se as equações de estado

$$j\omega \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.18a)$$

$$\bar{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{x}} + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.18b)$$

onde a barra acima de $\mathbf{y}$ e $\mathbf{x}$ indica os seus complexos conjugados. A parte real da saída pode ser escrita como

$$\text{Re}\{\mathbf{y}\} = \mathbf{g} = \frac{1}{2}(\mathbf{y} + \bar{\mathbf{y}}) \quad (3.19)$$

Inserindo as expressões (3.16b) e (3.18b) em (3.19) e considerando que $\mathbf{x} = \mathbf{x}' + j\mathbf{x}''$, tem-se

$$\mathbf{g} = \frac{1}{2}\mathbf{C}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) + \mathbf{D}\mathbf{u} = \mathbf{C}\mathbf{x}' + \mathbf{D}\mathbf{u} \quad (3.20)$$

$\mathbf{G}_{r,aj}$ é singular para entradas $\mathbf{u}$ em (3.20) que fazem $\mathbf{g} = \mathbf{G}_{r,aj}\mathbf{u} = \mathbf{0}$, neste caso, a entrada $\mathbf{u}$ corresponde ao autovetor de $\mathbf{G}_{r,aj}$ associado ao autovalor zero. Assim, para uma matriz singular $\mathbf{G}_{r,aj}$ tem-se:

$$\mathbf{u} = -\frac{1}{2}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) = -\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C}\mathbf{x}' \quad (3.21)$$

Inserindo (3.21) em (3.16a) da

$$j\omega\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x} - \frac{1}{2}\mathbf{F}(\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) \quad (3.22a)$$

$$j\omega(\mathbf{x}' + j\mathbf{x}'') = \mathbf{A}(\mathbf{x}' + j\mathbf{x}'') - \mathbf{F}\mathbf{x}' \quad (3.22b)$$

onde

$$\mathbf{F} = \mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} \quad (3.22c)$$

Separando a parte real e imaginária em (3.22b)

$$-\omega\mathbf{x}' + \mathbf{A}\mathbf{x}'' = 0 \quad (3.23a)$$

$$(\mathbf{F} - \mathbf{A})\mathbf{x}' - \omega\mathbf{x}'' = 0 \quad (3.23b)$$

Eliminando $\mathbf{x}'$ ou $\mathbf{x}''$ das duas expressões anteriores obtém-se:

$$[\mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A}) - \omega^2\mathbf{I}]\mathbf{x}' = \mathbf{0} \quad (3.24a)$$

$$[(\mathbf{F} - \mathbf{A})\mathbf{A} - \omega^2\mathbf{I}]\mathbf{x}'' = \mathbf{0} \quad (3.24b)$$

Em (3.24) tem-se que ω^2 é o autovalor e $\mathbf{x}'$ o autovetor, ambos associados à matriz $\mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A})$. Da mesma maneira, tem-se que ω^2 é o autovalor e $\mathbf{x}''$ o autovetor, ambos associados à matriz $(\mathbf{F} - \mathbf{A})\mathbf{A}$. Portanto, pode-se dizer que a frequência ω que gera uma matriz $\mathbf{G}_{r,aj}$ singular, pode ser calculada como a raiz quadrada dos autovalores (reais positivos) das matrizes seguintes (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2009):

$$\mathbf{S} = \mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A}) = \mathbf{A}(\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A}) \quad (3.25a)$$

$$\mathbf{T} = (\mathbf{F} - \mathbf{A})\mathbf{A} = (\mathbf{B}\mathbf{D}^{-1}\mathbf{C} - \mathbf{A})\mathbf{A} \quad (3.25b)$$

A matriz S é conhecida como *matriz de singularidade*. Nota-se que este resultado é aplicável a modelos simétricos e assimétricos, e também que os autovalores das matrizes S e T são idênticos. Em conclusão tem-se o teorema:

Teorema: A raiz quadrada dos autovalores reais-positivos da matriz de singularidade S são as frequências ω onde $\mathbf{G}_{r,aj}$ é singular, e representam as fronteiras de violação de passividade (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2009).

O modelo em espaço de estados usado para calcular a matriz de singularidade S deve ser real, e é gerado por meio da aplicação da transformação de similaridade em (3.12). Assim, os elementos da matriz S também são reais. Isto traz as seguintes vantagens:

- Aumento da velocidade de processamento por um fator de quatro no cálculo dos autovalores de S , em comparação com uma matriz de singularidade S complexa.
- Os autovalores de S que são puramente reais correspondem às frequências nas quais a matriz $\mathbf{G}_{r,aj}(j\omega)$ é singular.

No caso que a matriz $\mathbf{D}$ é singular, a seguinte transformação de variáveis é introduzida (GUSTAVSEN, 2009):

$$\bar{\mathbf{A}} = \mathbf{A}^{-1}, \quad \bar{\mathbf{B}} = -\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B}, \quad \bar{\mathbf{C}} = \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}, \quad \bar{\mathbf{D}} = \mathbf{D} - \mathbf{C}\bar{\mathbf{A}}\mathbf{B} \quad (3.25c)$$

Se a transformação anterior é aplicada a (3.25a), os autovalores reais positivos de $\mathbf{S}$ fornecem os recíprocos das frequências de cruzamento ω^{-2} , com ω representando as frequências onde $\mathbf{G}_{r,aj} = \text{Re}\{\mathbf{Y}_{r,aj}\}$ é singular e são definidas como as frequências de cruzamento onde os autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}$ mudam de sinal.

3.1.3.1. Relação entre a matriz de singularidade e os zeros de $\mathbf{G}_{r,aj}$

Neste item será demonstrado que os autovalores da matriz de singularidade S são iguais aos zeros de $\mathbf{G}_{r,aj}(\omega)$.

A equação (3.16a) pode ser escrita como

$$j\omega(\mathbf{x}' + j\mathbf{x}'') = \mathbf{A}(\mathbf{x}' + j\mathbf{x}'') + \mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.26)$$

Separando a parte real e imaginária

$$\omega\mathbf{x}'' + \mathbf{A}\mathbf{x}' = -\mathbf{B}\mathbf{u} \quad (3.27a)$$

$$\omega \mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{x}'' \quad (3.27b)$$

Em (3.27) multiplica-se a primeira equação por $\mathbf{A}$ e substituí-se a segunda equação na primeira

$$(\mathbf{A}^2 + \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{x}' = -\mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{u} \quad (3.28)$$

Obtendo-se $\mathbf{u}$ em (3.20)

$$\mathbf{u} = -\mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \mathbf{x}' + \mathbf{D}^{-1} \mathbf{g} \quad (3.29)$$

Substituindo (3.29) em (3.28) e organizando os termos

$$(\mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A}) - \omega^2 \mathbf{I}) \mathbf{x}' = \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{g} \quad (3.30)$$

Obtendo-se $\mathbf{x}'$ em (3.30), substituindo-se em (3.29) e sabendo que $\mathbf{u} = (\mathbf{G}_{r,aj})^{-1} \mathbf{g}$, tem-se

$$(\mathbf{G}_{r,aj})^{-1} = \mathbf{D}^{-1} - \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} (\mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A}) - \omega^2 \mathbf{I})^{-1} \mathbf{A} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \quad (3.31)$$

Da inspeção de (3.31) observa-se que os polos da matriz $(\mathbf{G}_{r,aj})^{-1}$ são iguais aos autovalores da matriz $\mathbf{A}(\mathbf{F} - \mathbf{A})$, que é precisamente à matriz de singularidade $\mathbf{S}$, em outras palavras, os autovalores da matriz de singularidade $\mathbf{S}$ são iguais aos zeros de $\mathbf{G}_{r,aj}(\omega)$.

3.1.3.2. Relação com a matriz Hamiltoniana

Substituindo (3.21) em (3.18a) e considerando (3.22) obtém-se

$$-j\omega \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{A} \bar{\mathbf{x}} - \frac{1}{2} \mathbf{F} (\mathbf{x} + \bar{\mathbf{x}}) \quad (3.32)$$

As equações (3.22a) e (3.32) definem um problema de autovalores

$$\left(\begin{bmatrix} \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{F} & \frac{1}{2} \mathbf{F} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{F} & -\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{F} \end{bmatrix} - j\omega \mathbf{I} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ -\bar{\mathbf{x}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

A expressão anterior traz a definição da matriz Hamiltoniana de dimensão dupla

$$\tilde{\mathbf{M}} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{F} & \frac{1}{2} \mathbf{F} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{F} & -\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{F} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} - \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} & \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \\ -\frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} & -\mathbf{A} + \frac{1}{2} \mathbf{B} \mathbf{D}^{-1} \mathbf{C} \end{bmatrix} \quad (3.34)$$

Observa-se que $\tilde{\mathbf{M}}$ corresponde exatamente à matriz Hamiltoniana $\mathbf{M}$ quando é suposto $\mathbf{C} = \mathbf{B}^T$. Isto acontece porque a matriz Hamiltoniana $\mathbf{M}$ é somente válida para modelos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ simétricos (matriz $\mathbf{Y}_{r,aj}$ simétrica para cada valor de frequência), à diferença da matriz Hamiltoniana de dimensão duplicada $\tilde{\mathbf{M}}$ e da matriz de singularidade $\mathbf{S}$, onde são válidos modelos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ simétricos e assimétricos.

3.2. Imposição rápida da passividade em modelos polo-resíduo por meio da perturbação dos autovalores das matrizes de resíduos

Os modelos racionais devem ser passivos para evitar simulações instáveis no domínio do tempo. Em (GUSTAVSEN, 2001), é introduzida a ideia de imposição de passividade em modelos de polo-resíduo por meio da perturbação dos elementos das matrizes $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ do modelo ajustado da matriz de admitâncias nodais $\mathbf{Y}_{r,aj}$, tendo como função objetivo a minimização das perturbações dos elementos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ e usando como restrição o critério de passividade baseado nos autovalores da matriz de condutâncias nodais $\mathbf{G}_{r,aj} = \text{Re}\{\mathbf{Y}_{r,aj}\}$, este procedimento é denominado como perturbação dos resíduos ou RP (do inglês *Residue Perturbation*) e é resolvido usando programação quadrática. Mais tarde, no trabalho de (GUSTAVSEN, 2008a) foi apresentada uma abordagem similar, mas com a função objetivo focada na minimização da perturbação dos autovalores ponderados de $\mathbf{Y}_{r,aj}$, este procedimento é conhecido como perturbação modal ou MP (do inglês *Modal Perturbation*) e permite que o modelo passivo $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}$ represente melhor o comportamento de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ do que o RP. Depois em (GUSTAVSEN, 2008b) é proposto um procedimento baseado na perturbação dos autovalores de $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ em vez dos seus elementos. A introdução desta abordagem no RP leva ao procedimento conhecido como perturbação rápida dos resíduos ou FRP (do inglês *Fast Residue Perturbation*). De maneira similar, o procedimento resultado da combinação desta nova abordagem com o MP é conhecido como perturbação modal rápida ou FMP (do inglês *Fast Modal Perturbation*) proposto por (GUSTAVSEN, 2008b). Os novos procedimentos FRP e FMP são mais eficientes em termos do tempo de processamento embora com um incremento pequeno no erro de $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}$.

Na Tabela 3.1 tem-se os métodos de imposição de passividade classificados pelo tipo de perturbação, focado nos elementos ou autovalores de $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$, e também pela função

objetivo baseada na minimização da perturbação dos elementos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ ou a minimização da mudança relativa dos autovalores de $\mathbf{Y}_{r,aj}$.

Nas seguintes seções deste item são apresentados os procedimentos de perturbação dos métodos de imposição de passividade RP, FRP, MP e FMP.

Tabela 3.1 – Métodos de imposição de passividade

		Tipo de perturbação	
		Elementos de $\mathbf{R}_m, \mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$	Autovalores de $\mathbf{R}_m, \mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$
Função objetivo	minimizar $\Delta \mathbf{Y}_{r,aj}$	RP	FRP
	minimizar $\Delta \lambda_i / \lambda_i $	MP	FMP

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

3.2.1. Modelo de polo-resíduo

Em (3.1) a matriz de admitâncias nodais de uma rede elétrica $\mathbf{Y}_r(s)$, obtida por meio de cálculos ou medições, é ajustada por um modelo polo-resíduo com a estrutura da equação (3.4). Nota-se que este modelo usa o mesmo conjunto de polos para todos os elementos da matriz $\mathbf{Y}_r(s)$. Reescrevendo a equação (3.4) com um zero adicional, tem-se

$$\mathbf{Y}_{r,aj}(s) = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{R}_m}{s - a_m} + \mathbf{D} + s\mathbf{E} \quad (3.35)$$

Fisicamente o modelo precisa atender aos seguintes requisitos:

- $\mathbf{Y}_{r,aj}$ é simétrica. Portanto, $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ também são simétricas.
- $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são reais.
- Os polos e os resíduos são reais ou pares complexos conjugados.
- Os polos estão no semiplano esquerdo.
- O modelo é passivo e, portanto, não pode gerar energia. Isto implica:

$$\text{eig}(\text{Re}\{\mathbf{Y}_{r,aj}(j\omega)\}) = \text{eig}(\mathbf{G}_{r,aj}(j\omega)) > 0 \quad (3.36)$$

$$\text{eig}(\mathbf{D}) > 0 \quad (3.37)$$

f) Os autovalores de $\mathbf{E}$ precisam ser positivos para garantir que $\mathbf{E}$ seja positiva-definida

$$\text{eig}(\mathbf{E}) > 0 \quad (3.38)$$

O método VF apresentado no Capítulo 1 pode atender às condições a)-d). As condições e) e f) são impostas por meio da perturbação do modelo, o que será apresentado nos itens seguintes.

3.2.2. Perturbação do modelo $\mathbf{Y}_{r,aj}$

Neste item são apresentados os métodos de imposição de passividade RP, FRP, MP e FMP aplicados à perturbação do modelo $\mathbf{Y}_{r,aj}$.

3.2.2.1. Perturbação dos resíduos (RP)

Depois de aplicar o método VF, são impostos os critérios de passividade e) e f) do item anterior por meio de um problema de otimização onde são perturbados os elementos da matriz de resíduos $\mathbf{R}_m$ e das matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ por meio das variáveis $\Delta\mathbf{R}_m$, $\Delta\mathbf{D}$ e $\Delta\mathbf{E}$, respectivamente:

$$\text{Minimizar:} \quad \Delta\mathbf{Y}_{r,aj} = \sum_{m=1}^N \frac{\Delta\mathbf{R}_m}{s - a_m} + \Delta\mathbf{D} + s\Delta\mathbf{E} \cong \mathbf{0} \quad (3.39a)$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeito a:} \quad & \text{eig} \left[\text{Re} \left(\mathbf{Y}_{r,aj} + \sum_{m=1}^N \frac{\Delta\mathbf{R}_m}{s - a_m} + \Delta\mathbf{D} + s\Delta\mathbf{E} \right) \right] > 0 \leftrightarrow \lambda_G + \Delta\lambda_G \\ & = \text{eig}(\mathbf{G}_{r,aj} + \Delta\mathbf{G}_{r,aj}) > 0 \end{aligned} \quad (3.39b)$$

$$\lambda_D + \Delta\lambda_D = \text{eig}(\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}) > 0 \quad (3.39c)$$

$$\lambda_E + \Delta\lambda_E = \text{eig}(\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}) > 0 \quad (3.39d)$$

De (3.39) tem-se que a primeira equação (função objetivo) minimiza a perturbação dos elementos da matriz de admitâncias. A segunda equação (restrição) impõe o critério de passividade mostrado em (3.36). A terceira e a quarta equação (restrições) impõem que as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ sejam definidas-positivas de acordo com as condições (3.37) e (3.38). Portanto, o novo modelo resultado da imposição da passividade nas amostras de frequências utilizadas no problema de otimização (3.39) é constituído pelas matrizes $\mathbf{R}_m + \Delta\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D} + \Delta\mathbf{D}$ e $\mathbf{E} + \Delta\mathbf{E}$. O novo modelo pode ter novas violações de passividade, esta formulação é aplicada de maneira iterativa para eliminar todas as violações de passividade (ver item 3.2.3).

3.2.2.1.1. Relação entre a matriz perturbada e seus autovalores

A formulação obtida neste item será útil na etapa de linearização do item seguinte. Considerando para a matriz $\mathbf{P}$, um autovalor particular λ_p e seu correspondente autovetor $\mathbf{v}_p$:

$$(\mathbf{P} - \lambda_p \mathbf{I})\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (3.40)$$

Considerando λ_p e $\mathbf{v}_p$ como variáveis, (3.40) é linearizada

$$(\mathbf{P} - \lambda_p \mathbf{I})\Delta\mathbf{v}_p + (\Delta\mathbf{P} - \Delta\lambda_p \mathbf{I})\mathbf{v}_p = \mathbf{0} \quad (3.41)$$

Multiplicando (3.41) pelo correspondente autovetor à esquerda de $\mathbf{P}$, chamado de $\mathbf{w}$ ($\mathbf{w}^T \mathbf{P} = \lambda_p \mathbf{w}^T$), elimina-se o seu primeiro termo, obtendo

$$\Delta\lambda_p = \frac{\mathbf{w}_p \cdot \Delta\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{w}_p \cdot \mathbf{v}_p} \quad (3.42)$$

Se $\mathbf{P}$ é simétrica tem-se que $\mathbf{w}_p = \mathbf{v}_p^T$

$$\Delta\lambda_p = \frac{\mathbf{v}_p^T \cdot \Delta\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_p}{\mathbf{v}_p^T \cdot \mathbf{v}_p} = \mathbf{v}_p^T \cdot \Delta\mathbf{P} \cdot \mathbf{v}_p \quad (3.43)$$

Agrupando todas as colunas da matriz $\Delta\mathbf{P}$ em um único vetor formando $\Delta\mathbf{P}'$, e todos os autovalores $\Delta\lambda_p$ agrupados no vetor $\Delta\lambda'_p$, tem-se

$$\Delta\lambda'_p = \mathbf{Q} \cdot \Delta\mathbf{P}' \quad (3.44)$$

De (3.43) pode-se obter a expressão $\Delta\lambda_p = \mathbf{Q}_p \Delta\mathbf{P}'$ para cada autovalor, portanto as linhas da matriz $\mathbf{Q}$ são dadas pelos vetores $\mathbf{Q}_p$.

A equação (3.43) pode ser usada quando os autovalores são diferentes. Se a diferença entre os autovalores λ_{p1} e λ_{p2} é menor que um certo valor ε (supondo uma matriz $\mathbf{P}$ de dimensão 2×2), o vetor $\mathbf{v}_p$ em (3.43) é substituído pela matriz $\mathbf{\emptyset}$, sendo que a matriz $\mathbf{\emptyset}$ está formada pelos autovetores associados aos autovalores $\lambda_{p1} = \lambda_{p2}$, resultando:

$$\mathbf{\emptyset}^T \cdot \Delta\mathbf{P} \cdot \mathbf{\emptyset} = \Delta\Lambda = \begin{bmatrix} \Delta\Lambda_{11} & \Delta\Lambda_{12} \\ \Delta\Lambda_{12} & \Delta\Lambda_{22} \end{bmatrix} \quad (3.45)$$

A perturbação destes autovalores $\Delta\lambda_{p1}$ e $\Delta\lambda_{p2}$ é dada pelos autovalores de $\Delta\Lambda$. Para que $\Delta\lambda_{p1}$ e $\Delta\lambda_{p2}$ sejam uma função linear de $\Delta\Lambda_{11}$, $\Delta\Lambda_{12}$ e $\Delta\Lambda_{22}$ adota-se $\Delta\Lambda_{12} = 0$, obtendo

$$\Delta\Lambda_{12} = 0 \quad (3.46a)$$

$$\Delta\lambda_1 = \Delta\Lambda_{11} \quad (3.46b)$$

$$\Delta\lambda_2 = \Delta\Lambda_{22} \quad (3.46c)$$

Generalizando para uma matriz $\mathbf{P}$ de ordem maior, tem-se:

$$\Delta\Lambda_{ij} = 0 \quad (3.46d)$$

$$\Delta\lambda_i = \Delta\Lambda_{ii} \quad (3.46e)$$

3.2.2.1.2. Linearização

Neste item será formulada uma representação linear para o problema de otimização apresentado em (3.39). A função objetivo em (3.39a) pode ser expressa como uma equação matricial linear

$$\Delta\mathbf{Y}'_{r,aj} = \mathbf{M}\Delta\mathbf{x} \quad (3.47)$$

onde os parâmetros das matrizes $\Delta\mathbf{R}_m$, $\Delta\mathbf{D}$ e $\Delta\mathbf{E}$ estão agrupados no vetor $\Delta\mathbf{x}$ e as colunas da matriz $\Delta\mathbf{Y}_{r,aj}$ estão agrupadas no vetor $\Delta\mathbf{Y}'_{r,aj}$. Por exemplo, supondo que $\mathbf{Y}_{r,aj}$ tenha dimensão 2×2 e $N=2$ e expressando cada elemento (i,j) de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ como

$$Y_{r,aj(i,j)} = \sum_{m=1}^N \frac{c_{i,j,m}}{s - a_{i,j,m}} + d_{i,j} + se_{i,j} \quad (3.48)$$

Cada elemento $\Delta Y_{r,aj(i,j)}$ é expresso por meio da expansão em series de Taylor envolvendo termos de primeira ordem de $\Delta c_{i,j,m}$, $\Delta d_{i,j}$ e $\Delta e_{i,j}$, obtendo as matrizes $\mathbf{M}$ e $\Delta\mathbf{x}$:

$$M_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{s-a_{1,1,1}} & \frac{1}{s-a_{1,1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{s-a_{2,1,1}} & \frac{1}{s-a_{2,1,2}} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-a_{1,2,1}} & \frac{1}{s-a_{1,2,2}} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{s-a_{2,2,1}} & \frac{1}{s-a_{2,2,2}} \end{bmatrix} \quad (3.49a)$$

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} \quad M = [M_1 \quad M_2] \quad (3.49b)$$

$$\Delta\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} \Delta c_{1,1,1} & \Delta c_{1,1,2} & \Delta c_{2,1,1} & \Delta c_{2,1,2} & \Delta c_{1,2,1} & \Delta c_{1,2,2} & \Delta c_{2,2,1} & \Delta c_{2,2,2} & \dots \\ \dots & \Delta d_{1,1} & \Delta d_{1,2} & \Delta d_{2,1} & \Delta d_{2,2} & \Delta e_{1,1} & \Delta e_{1,2} & \Delta e_{2,1} & \Delta e_{2,2} \end{bmatrix} \quad (3.49c)$$

Para obter uma expressão linear da equação (3.39b), inicialmente obtém-se a parte real em (3.47)

$$\Delta \mathbf{G}'_{r,aj} = \text{Re}\{\Delta \mathbf{Y}'_{r,aj}\} = \text{Re}\{\mathbf{M}\}\Delta \mathbf{x} = \mathbf{L}_G \Delta \mathbf{x} \quad (3.50)$$

onde as colunas da matriz $\Delta \mathbf{G}_{r,aj}$ são agrupadas no vetor $\Delta \mathbf{G}'_{r,aj}$. Usando a expressão (3.44), obtém-se uma relação linear entre os elementos de $\Delta \mathbf{G}_{r,aj}$ e os seus autovalores.

$$\Delta \lambda'_G = \mathbf{Q}_G \Delta \mathbf{G}'_{r,aj} \quad (3.51)$$

Nota-se que as matrizes $\mathbf{G}$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são reais e simétricas, portanto pode ser usada a expressão (3.43) para obter a relação de cada autovalor com os elementos da matriz. Combinando as duas expressões anteriores obtém-se a relação entre os autovalores de $\Delta \mathbf{G}_{r,aj}$ e o vetor de parâmetros $\Delta \mathbf{x}$.

$$\Delta \lambda'_G = \mathbf{Q}_G \mathbf{L}_G \Delta \mathbf{x} \quad (3.52)$$

A relação de sensibilidade entre os elementos das matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ com seus autovalores é obtida mediante o procedimento mostrado no item anterior, assim de (3.44) tem-se

$$\Delta \lambda'_D = \mathbf{Q}_D \cdot \Delta \mathbf{D}' \quad (3.53a)$$

$$\Delta \lambda'_E = \mathbf{Q}_E \cdot \Delta \mathbf{E}' \quad (3.53b)$$

Como os elementos dos vetores $\Delta \mathbf{D}'$ e $\Delta \mathbf{E}'$ estão contidos no vetor $\Delta \mathbf{x}$, pode-se obter uma relação direta destes vetores

$$\Delta \mathbf{D}' = \mathbf{L}_D \Delta \mathbf{x} \quad (3.54a)$$

$$\Delta \mathbf{E}' = \mathbf{L}_E \Delta \mathbf{x}' \quad (3.54b)$$

Nota-se que as matrizes $\mathbf{L}_D$ e $\mathbf{L}_E$ estão compostas por 0's e 1's. Relacionando as expressões de (3.53) e (3.54), obtém-se

$$\Delta \lambda'_D = \mathbf{Q}_D \mathbf{L}_D \Delta \mathbf{x} \quad (3.55a)$$

$$\Delta \lambda'_E = \mathbf{Q}_E \mathbf{L}_E \Delta \mathbf{x} \quad (3.55b)$$

Usando (3.47), a função objetivo apresentada em (3.39a) é formulada como um problema de mínimos quadrados

$$\Delta \mathbf{Y}'_{r,aj} = \mathbf{M} \Delta \mathbf{x} \rightarrow \mathbf{0} \quad (3.56)$$

Da mesma maneira, as restrições em (3.39) junto com as equações lineares (3.52) e (3.55), permitem obter equações de restrição linear

$$\lambda'_G + \Delta\lambda'_G = \lambda'_G + Q_G L_G \Delta x > 0 \quad (3.57a)$$

$$\lambda'_D + \Delta\lambda'_D = \lambda'_D + Q_D L_D \Delta x > 0 \quad (3.57b)$$

$$\lambda'_E + \Delta\lambda'_E = \lambda'_E + Q_E L_E \Delta x > 0 \quad (3.57c)$$

Nota-se que λ'_G , λ'_D e λ'_E são vetores que agrupam os autovalores de $G_{r,aj}$, D e E , respectivamente.

3.2.2.1.3. Programação quadrática

O problema de mínimos quadrados apresentado em (3.56) e as restrições lineares das equações em (3.57) podem ser organizadas para um problema de programação quadrática:

$$\min_{\Delta x} \frac{1}{2} (\Delta x^T A_{sys}^T A_{sys} \Delta x) \quad (3.58a)$$

sujeito a

$$-Q_G L_G \Delta x < \lambda'_G \quad (3.58b)$$

$$-Q_D L_D \Delta x < \lambda'_D \quad (3.58c)$$

$$-Q_E L_E \Delta x < \lambda'_E \quad (3.58d)$$

onde

$$A_{sys} = M^T M \quad (3.58e)$$

3.2.2.2. Perturbação rápida dos resíduos (FRP)

O número de variáveis pode ser reduzido diagonalizando as matrizes R_m , D e E e perturbando somente os seus autovalores

$$\Delta R_m = S_m \Delta \Gamma_{R_m} S_m^T \quad (3.59a)$$

$$\Delta D = S_D \Delta \Gamma_D S_D^T \quad (3.59b)$$

$$\Delta E = S_E \Delta \Gamma_E S_E^T \quad (3.59c)$$

onde S_m , S_D e S_E são as matrizes de autovetores de R_m , D e E respectivamente. $\Delta \Gamma_{R_m}$, $\Delta \Gamma_D$ e $\Delta \Gamma_E$ são matrizes diagonais que contêm os autovalores de ΔR_m , ΔD e ΔE .

As equações em (3.59) são substituídas em (3.39) e as formulações subsequentes apresentadas no item 3.2.2.1 são realizadas com base na perturbação dos autovalores de R_m , D e E que estão presentes nos elementos das matrizes $\Delta \Gamma_{R_m}$, $\Delta \Gamma_D$ e $\Delta \Gamma_E$. Este procedimento é

conhecido como perturbação rápida dos resíduos (FRP). No caso de matrizes com elementos complexos, as partes reais e imaginárias são diagonalizadas separadamente.

Depois de resolver o problema de programação quadrática, as correções dos autovalores de $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ (que equivale às correções dos elementos das matrizes $\mathbf{\Gamma}_{R_m}$, $\mathbf{\Gamma}_D$ e $\mathbf{\Gamma}_E$) são obtidas e as correções dos elementos de $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ podem ser calculadas usando (3.59).

3.2.2.3. Perturbação modal (MP) e perturbação modal rápida (FMP)

O objetivo da equação (3.39a) é minimizar a perturbação dos elementos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$. Se $\mathbf{Y}_{r,aj}$ possui autovalores grandes e pequenos, a perturbação de um elemento de $\mathbf{Y}_{r,aj}$ afeta em maior proporção os seus autovalores menores.

Pode-se diminuir a degradação do modelo por causa da perturbação dos elementos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$, substituindo a função objetivo em (3.39a) que minimiza a perturbação dos elementos de $\mathbf{Y}_{r,aj}$, por outra que minimize a perturbação dos autovalores ponderados de $\mathbf{Y}_{r,aj}$. Para fazer isto, primeiro é feita a decomposição dos autovalores de $\mathbf{Y}_{r,aj}$

$$\mathbf{Y}_r = \mathbf{T}\mathbf{\Lambda}\mathbf{T}^{-1} \quad (3.60)$$

onde $\mathbf{T}$ é a matriz de autovetores de $\mathbf{Y}_r$ e $\mathbf{\Lambda}$ é uma matriz diagonal que contém os autovalores de $\mathbf{Y}_r$. Após multiplicar (3.60) com $\mathbf{T}$ e escrevendo para cada coluna de $\mathbf{T}$ (autovetor $\mathbf{t}_i$) seu correspondente autovalor λ_i :

$$\mathbf{Y}_r \mathbf{t}_i = \lambda_i \mathbf{t}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.61a)$$

$$\Delta \mathbf{Y}_r \mathbf{t}_i + \mathbf{Y}_r \Delta \mathbf{t}_i = \Delta \lambda_i \mathbf{t}_i + \lambda_i \Delta \mathbf{t}_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.61b)$$

Ignorando os termos $\Delta \mathbf{t}_i$ e substituindo a expressão de $\Delta \mathbf{Y}_r$ em (3.61b), tem-se

$$\left(\sum_{m=1}^N \frac{\Delta \mathbf{R}_m}{s - a_m} + \Delta \mathbf{D} + s \Delta \mathbf{E} \right) \mathbf{t}_i(s) \cong \Delta \lambda_i \mathbf{t}_i \cong \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.61c)$$

Fazendo uma ponderação da equação anterior em relação ao inverso da magnitude do autovalor, tem-se (GUSTAVSEN, 2008b):

$$\left(\sum_{m=1}^N \frac{\Delta \mathbf{R}_m}{s - a_m} + \Delta \mathbf{D} + s \Delta \mathbf{E} \right) \frac{\mathbf{t}_i(s)}{|\lambda_i(s)|} \cong \mathbf{0}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.62)$$

A expressão anterior minimiza a perturbação relativa dos autovalores de $\mathbf{Y}_r$. As vantagens de substituir a expressão (3.39a) pela expressão (3.62) são:

- a) A contribuição de cada autovalor para $\mathbf{Y}_r$ é uma ponderação que é inversamente proporcional ao módulo do autovalor. Assim, os autovalores pequenos são afetados na mesma proporção dos autovalores grandes, obtendo perturbações dos autovalores quase proporcionais às suas magnitudes

$$\frac{\Delta\lambda_i}{|\lambda_i(s)|} \cong cte, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.63)$$

- b) Reduz a probabilidade da aparição de novas violações de passividade quando aplica-se a imposição de passividade.

Por exemplo, seja um problema de mínimos quadrados na abordagem de perturbação modal considerando um ajuste de primeira ordem com $\mathbf{D} = \mathbf{0}$, $\mathbf{E} = \mathbf{0}$ para uma matriz de admitâncias $\mathbf{Y}_r$ de dimensão 2×2 . Para cada par autovalor/autovetor $(\lambda_i, \mathbf{t}_i)$ na frequência s , tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{\Delta R_{11}}{|\lambda_i|(s-a)} & \frac{\Delta R_{12}}{|\lambda_i|(s-a)} \\ \frac{\Delta R_{21}}{|\lambda_i|(s-a)} & \frac{\Delta R_{22}}{|\lambda_i|(s-a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} t_{i1} \\ t_{i2} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.64)$$

Reescrevendo (3.64) como

$$\begin{bmatrix} \frac{t_{i1}}{|\lambda_i|(s-a)} & \frac{t_{i2}}{|\lambda_i|(s-a)} & -0- & 0 \\ 0 & -0- & \frac{t_{i1}}{|\lambda_i|(s-a)} & \frac{t_{i2}}{|\lambda_i|(s-a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_{11} \\ \Delta R_{12} \\ \Delta R_{21} \\ \Delta R_{22} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.65)$$

Considerando a simetria, $\Delta R_{12} = \Delta R_{21}$, tem-se

$$\begin{bmatrix} \frac{t_{i1}}{|\lambda_i|(s-a)} & \frac{t_{i2}}{|\lambda_i|(s-a)} & -0- \\ 0 & \frac{t_{i1}}{|\lambda_i|(s-a)} & \frac{t_{i2}}{|\lambda_i|(s-a)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta R_{11} \\ \Delta R_{12} \\ \Delta R_{22} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.66)$$

As equações lineares para todos os autovalores são agrupadas e encaminhadas a um problema de programação quadrática da mesma maneira como foi apresentado no item 3.2.2.1.3.

Com é explicado no item 3.2.2.2, as equações em (3.59) são introduzidas em (3.39) para diminuir o número de variáveis perturbadas, obtendo depois de um processo de linearização e mínimos quadrados, uma formulação de perturbação rápida de resíduos (FRP).

Substituindo (3.62) como função objetivo em (3.39a), permite-se obter uma formulação de perturbação modal (MP), mas se as equações em (3.59) são introduzidas no problema de otimização inicial do método MP, obtemos o método de perturbação modal rápida (FMP).

Usando as equações em (3.59), o número de variáveis perturbadas diminuem, sendo neste caso perturbados os autovalores das matrizes $\mathbf{R}_m$, $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ que estão presentes nos elementos das matrizes diagonais $\Delta\mathbf{F}_{\mathbf{R}_m}$, $\Delta\mathbf{F}_{\mathbf{D}}$ e $\Delta\mathbf{F}_{\mathbf{E}}$. Isto reduz a dimensão do problema de otimização, diminuindo o tempo de processamento.

Com uma matriz $\mathbf{Y}_r$ simétrica e de dimensão $n \times n$ e um ajuste com N polos, o número de variáveis envolvidas nos métodos RP/MP é de $V = (n(n + 1))N/2$, no entanto, nos métodos rápidos FRP/FMP o número de variáveis diminui para $V = nN$.

3.2.3. Esquema iterativo e robusto para a avaliação de passividade

3.2.3.1. Seleção de amostras para a imposição de passividade

As amostras de frequência usadas para a restrição em (3.39b) são os mínimos globais dos autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}(s) = \text{Re}\{\mathbf{Y}_{r,aj}(s)\}$, sempre e quando estes autovalores forem negativos. Por exemplo, na Figura 3.3 (pág. 46) tem-se que m_1 e m_2 são os mínimos globais dos autovalores $\lambda_{g1}(s)$ e $\lambda_{g2}(s)$ respectivamente.

Para calcular os mínimos globais, as faixas de violação de passividade (explicação no item 3.1.2) que compartilham frequências em comum são concatenadas em uma única faixa. Por exemplo, na Figura 3.3 (pág. 46) tem-se que os autovalores λ_{g1} e λ_{g2} compartilham a faixa de violação $b2$, portanto a faixa em comum destes dois autovalores cobriria as faixas $b1$, $b2$ e $b3$. Dentro de cada faixa concatenada, os autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}(s)$ são calculados por varredura de frequência, para obter os seus mínimos globais. Para fazer a varredura de frequência, precisa-se que os autovalores calculados de $\mathbf{G}_{r,aj}(s)$ sigam um comportamento suave ao longo de toda a faixa de frequências analisada, isto pode ser realizado por meio do procedimento descrito em (WEDEPOHL, NGUYEN, & IRWIN, 1996).

Na maioria das vezes o modelo gerado da imposição de passividade com as primeiras amostras de frequência incluídas em (3.39b) resulta com novas faixas de frequência com

violação de passividade. Isto torna necessário perturbar repetidamente o modelo para eliminar todas as violações de passividade por meio de um procedimento robusto como será mostrado no item 3.1.1.1. Para reduzir o número de iterações é aconselhável modificar (3.39b) para forçar os autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}$ a serem maiores que uma constante positiva de valor pequeno, $\lambda_{min} = 10^{-5}$, em vez de forçar os autovalores a serem maiores que zero.

3.2.3.2. Frequências “crossover” ou de cruzamento

As frequências de cruzamento são aquelas que fazem com que os autovalores de $\mathbf{G}_{r,aj}(s)$ sejam iguais a zero: $\text{eig}(\mathbf{G}_{r,aj}(s)) = \mathbf{0}$, e fazem parte dos limites das faixas de violação da passividade. Podem ser obtidos por meio dos autovalores imaginários puros (e positivos) da matriz Hamiltoniana $\mathbf{M}$ (explicação no item 3.1.2). Na equação (3.13), tem-se que as matrizes $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$ são as matrizes do modelo de espaço de estados associadas a (3.5). O modelo em espaço de estados (ver item 3.1.1) possui somente elementos reais para ter um melhor rendimento computacional, em comparação com o cálculo usando matrizes complexas.

Na realidade, as frequências de cruzamento não correspondem exatamente a autovalores imaginários puros de $\mathbf{M}$, existe uma pequena parcela real, mas o autovalor pode ser considerado imaginário se satisfizer

$$\left| \frac{\text{Re}\{\lambda_{gi}\}}{\text{Im}\{\lambda_{gi}\}} \right| < tol \quad (3.67)$$

onde tol representa uma constante de valor pequeno, como 10^{-5} . Os autovalores de $\mathbf{D}$ são impostos a ser ligeiramente positivos para poder calcular a matriz $(\mathbf{D} + \mathbf{D}^T)^{-1}$ na expressão (3.13), porque é necessário que $\mathbf{D}$ seja não singular.

3.2.3.3. Iterações robustas

Impondo a passividade nas frequências escolhidas no item 3.2.3.1 pode resultar em novas violações de passividade em outras frequências. Isto torna necessário resolver de maneira iterativa o problema de otimização apresentado no item 3.2.2.1.3. Para evitar a divergência, um procedimento iterativo robusto é usado (ver Figura 3.4). Neste procedimento, é realizada uma iteração interna para adicionar novas restrições ao modelo inicial, que

correspondem às novas amostras de frequência calculadas por meio do método do item 3.2.3.1 que vão ser incluídas na restrição (3.39b).

Na Figura 3.4 observa-se que a amostra de frequências do modelo inicial é armazenada na lista s_2 . A iteração interna gera novas amostras de frequência que são armazenadas na lista s_3 . Em cada iteração as frequências das listas s_2 e s_3 são utilizadas nas restrições em (3.39) para prevenir que aconteçam novas violações de passividade. Geralmente fixa-se um máximo de 3 iterações internas. Embora este procedimento forneça ótimos resultados nos casos estudados, não existe garantia de passividade para um determinado número de iterações.

Figura 3.4 - Procedimento iterativo para a imposição de passividade

Para incrementar a eficiência computacional, as matrizes $\Delta \mathbf{D}$ e $\Delta \mathbf{E}$ são eliminadas em (3.39) quando as matrizes $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ tornam-se definidas positivas, e a matriz $\mathbf{A}_{sys}$ em (3.58) é construída apenas uma vez e não é atualizada durante as iterações.

O modelo resultante da aplicação deste procedimento é denominado $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}$.

3.2.3.4. Amostras de frequência auxiliares

O problema de programação quadrática em (3.58) é melhorado quando são adicionadas frequências auxiliares, na função objetivo, fora da faixa de frequências. Essas amostras recebem uma pequena ponderação no problema de mínimos quadrados, por exemplo, 0,001.

Capítulo 4

Modelagem de Linhas de Transmissão usando a Matriz de Admitâncias Nodais

No item 4.1 são apresentados diferentes modelos baseados no uso da matriz de admitâncias nodais para a simulação no domínio do tempo como a transformada inversa de Fourier, modelo em espaço de estados, representação por meio de uma rede elétrica e o equivalente de Norton. Estes métodos podem ser aplicados a qualquer tipo de rede que possa ser representada por meio de uma matriz de admitâncias nodais. Simulações de aplicação desses métodos em alguns casos de linhas de transmissão são apresentadas no Capítulo 5.

No item 4.2 apresenta-se uma nova formulação (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009) que descreve um novo modelo de linha de transmissão dependente da frequência para linhas aéreas com e sem transposição e cabos subterrâneos, conhecido como FLE (do inglês *Folded Line Equivalent*). Testes de avaliação deste modelo são apresentados no Capítulo 6.

4.1. Modelagem baseada na matriz de admitâncias nodais

A matriz de admitâncias nodais de uma rede, $\mathbf{Y}_r$, define a relação entre as correntes injetadas $\mathbf{i}$ e as tensões nodais $\mathbf{v}$, onde todos os seus elementos são dependentes da frequência:

$$\mathbf{i}(s) = \mathbf{Y}_r(s)\mathbf{v}(s) \quad (4.1)$$

No caso particular de uma linha de transmissão com n fases, a matriz de admitâncias nodais considerando somente a linha, $\mathbf{Y}_{nod}$, tem uma dimensão de $2n \times 2n$, levando-se em conta os n terminais do lado receptor da linha e os n terminais do lado emissor, e que a dimensão de $\mathbf{Y}_{nod}$ é igual ao número total de terminais. No item 7.3 apresentam-se diferentes métodos para o cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$. No item 8.1 mostra-se uma metodologia para o cálculo de $\mathbf{Y}_r$.

baseado na formulação modal, que implica o modelamento da rede por meio de equivalentes de Norton para a representação das fontes de tensão e as chaves.

De maneira similar ao exposto no item 2.4.1, um dos problemas na modelagem de linhas de transmissão no domínio da frequência é a coexistência de magnitudes grandes e pequenas dos autovalores da matriz de admitâncias nodais. A solução deste problema pode ser obtida por meio do método MVF, cujos princípios teóricos são apresentados no item 2.4, porém o método não é empregado porque o seu tempo de processamento é elevado.

4.1.1. Modelos de linhas de transmissão

Para o cálculo no domínio do tempo, são apresentados os seguintes métodos de solução numérica que fazem uso da representação da rede ou linha de transmissão por meio da matriz de admitâncias nodais:

- Integração trapezoidal aplicada ao modelo em espaço de estados (MEE).
- Equivalente de Norton (EN).
- Representação equivalente de uma rede elétrica (REE).
- Transformada inversa de Fourier (TIF).

A matriz de impedâncias série $\mathbf{Z}$ e a matriz de admitâncias shunt $\mathbf{Y}$ são obtidas do ATP para uma determinada amostra de frequências, e os procedimentos de ajuste, avaliação e imposição de passividade são executados em Matlab, obtendo como resultado um modelo no domínio do tempo que pode ser expresso da forma polo-resíduo ou como um modelo em espaço de estados. Para passar ao domínio do tempo, são aplicados os métodos de solução numérica mencionados anteriormente (ver Figura 4.1).

4.1.1.1. Modelo em espaço de estados (MEE)

O modelo polo-resíduo passivo de uma matriz de admitâncias nodais de uma rede, $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}$, pode ser transformado em um modelo em espaço de estados usando o método apresentado no item 3.1.1:

$$\mathbf{Y}_r(j\omega) \cong \mathbf{Y}_{r,aj,pas} = \sum_{m=1}^N \frac{\mathbf{R}_m}{j\omega - a_m} + \mathbf{D} = \mathbf{C}(j\omega\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1}\mathbf{B} + \mathbf{D} \quad (4.2)$$

No domínio do tempo, o modelo no espaço de estados associado a $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}(j\omega)$ é

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}\mathbf{x}(t) + \mathbf{B}\mathbf{u}(t) \quad (4.3a)$$

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{C}\mathbf{x}(t) + \mathbf{D}\mathbf{u}(t) \quad (4.3b)$$

Figura 4.1 – Aplicação de métodos de solução numérica para o teste da linha de transmissão em curto-circuito (item 5.3.1)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Para o modelo em espaço de estados de $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}$, a saída $\mathbf{y}$ contém as correntes injetadas $\mathbf{i}$, e a entrada $\mathbf{u}$ contém as tensões nodais $\mathbf{v}$.

Conhecido o estado inicial $\mathbf{x}(0)$ e a entrada $\mathbf{u}(t)$, obtém-se a saída do sistema $\mathbf{y}$ aplicando a regra de integração trapezoidal ao sistema de equações (4.3a)

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - \Delta t) + \int_{t-\Delta t}^t [\mathbf{A}\mathbf{x}(\gamma) + \mathbf{B}\mathbf{u}(\gamma)] d\gamma \quad (4.4a)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \{\mathbf{A}[\mathbf{x}(t - \Delta t) + \mathbf{x}(t)] + \mathbf{B}[\mathbf{u}(t - \Delta t) + \mathbf{u}(t)]\} \quad (4.4b)$$

$$\mathbf{x}(t) = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{I} + \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{x}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(\mathbf{u}(t - \Delta t) + \mathbf{u}(t)) \right] \quad (4.4c)$$

$$\mathbf{x}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{I} + \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{x}_{k-1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(\mathbf{u}_{k-1} + \mathbf{u}_k) \right] \quad (4.4d)$$

onde k denota o k -ésimo passo de tempo. Nota-se que este método implica transformar a matriz de admitâncias nodais de toda a rede em um modelo no espaço de estados, quando as tensões nodais são conhecidas e as correntes injetadas são as incógnitas. No entanto, pode-se usar a matriz de impedâncias nodais quando são conhecidas as correntes injetadas para obter as tensões nodais, sendo necessário o ajuste e imposição de passividade da matriz de impedâncias nodais, considerando que não é possível obter um modelo no espaço de estados da matriz de impedâncias nodais a partir do espaço de estados da matriz de admitâncias nodais. Também é possível resolver o problema quando correntes e tensões são conhecidas, por meio da solução do sistema linear de equações usando $\mathbf{Y}_r$.

4.1.1.2. Equivalente de Norton (EN)

Do modelo ajustado e passivo da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$, obtém-se o modelo em espaço de estados análogo ao resultado (4.3), cuja solução numérica é dada em (4.4d), que também pode ser obtida por meio da aproximação da equação (4.3a) com a equação diferencial central:

$$\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_{k-1}}{\Delta t} = \mathbf{A} \frac{\mathbf{x}_k + \mathbf{x}_{k-1}}{2} + \mathbf{B} \frac{\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}}{2} \quad (4.5a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (4.5b)$$

Resolvendo (4.5) para $\mathbf{x}_k$:

$$\mathbf{x}_k = \left(\mathbf{I} - \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \left[\left(\mathbf{I} + \mathbf{A} \frac{\Delta t}{2} \right) \mathbf{x}_{k-1} + \frac{\Delta t}{2} \mathbf{B}(\mathbf{u}_k + \mathbf{u}_{k-1}) \right] \quad (4.6a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (4.6b)$$

Simplificando a notação tem-se:

$$\mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x}_{k-1} + \lambda \mathbf{B}\mathbf{u}_k + \mu \mathbf{B}\mathbf{u}_{k-1} \quad (4.7a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C}\mathbf{x}_k + \mathbf{D}\mathbf{u}_k \quad (4.7b)$$

com

$$\alpha = \left(I - A \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \left(I + A \frac{\Delta t}{2} \right) \quad (4.8a)$$

$$\lambda = \mu = \left(I - A \frac{\Delta t}{2} \right)^{-1} \frac{\Delta t}{2} \quad (4.8b)$$

onde α , λ e μ são matrizes diagonais assumindo que a matriz A é diagonal, e $\lambda = \mu$.

Aplicando a seguinte mudança de variável em (4.7)

$$\mathbf{x}_k = \mathbf{x}'_k + \lambda \mathbf{B} \mathbf{u}_k \quad (4.9)$$

leva à modificação de (4.7) da seguinte maneira:

$$\mathbf{x}'_k = \alpha \mathbf{x}'_{k-1} + (\alpha \lambda + \mu) \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \quad (4.10a)$$

$$\mathbf{y}_k = \mathbf{C} \mathbf{x}'_k + (\mathbf{D} + \mathbf{C} \lambda \mathbf{B}) \mathbf{u}_k \quad (4.10b)$$

Fazendo a mudança de variável $\mathbf{x}'_k = (\alpha \lambda + \mu) \mathbf{x}''_k$ e renomeando a variável de estado $\mathbf{x}''_k$ como $\mathbf{x}$, obtém-se o resultado final:

$$\mathbf{x}_k = \alpha \mathbf{x}_{k-1} + \mathbf{B} \mathbf{u}_{k-1} \quad (4.11a)$$

$$\mathbf{y}_k = \tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k + \mathbf{G} \mathbf{u}_k \quad (4.11b)$$

onde

$$\tilde{\mathbf{C}} = \mathbf{C}(\alpha \lambda + \mu), \quad \mathbf{G} = \mathbf{D} + \mathbf{C} \lambda \mathbf{B} \quad (4.12)$$

A expressão (4.11) pode ser representada por meio de um equivalente de Norton (ver Figura 4.2) com fonte de corrente histórica $\mathbf{i}_{his,k}$ e matriz de condutâncias $\mathbf{G}_{Norton}$ (GUSTAVSEN & SILVA, 2013):

$$\mathbf{i}_{his,k} = -\tilde{\mathbf{C}} \mathbf{x}_k, \quad \mathbf{G}_{Norton} = \mathbf{G} \quad (4.13)$$

Figura 4.2 – Equivalente de Norton

Fonte: GUSTAVSEN & SEMLYEN (2009, p. 233).

Este modelo da linha segue os padrões estabelecidos por (DOMMEL, 1986), portanto pode ser implementado nos programas de transitórios eletromagnéticos convencionais como ATP e PSCAD.

Quando são usadas as matrizes do modelo em espaço de estados de $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$, o equivalente de Norton obtido é uma representação da linha de transmissão. No entanto, se são usadas as matrizes do modelo em espaço de estados de $\mathbf{Y}_{r,aj,pas}$, obtém-se um equivalente de Norton que representa a rede associada a $\mathbf{Y}_r$.

4.1.1.3. Rede elétrica equivalente (REE)

É possível representar $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$ na forma de uma rede elétrica, que pode ser implementada em um programa do tipo EMTP (GUSTAVSEN, 2002). A rede possui ramos, como mostrado na Figura 4.3, que interconectam os nós incluindo a terra.

O ramo que conecta o nó i e a terra:

$$y_i = \sum_{j=1}^n Y_{nod,aj,pas(i,j)} \quad (4.14)$$

O ramo que conecta o nó i e o nó j :

$$y_{ij} = -Y_{nod,aj,pas(i,j)} \quad (4.15)$$

onde $Y_{nod,aj,pas(i,j)}$ é o elemento (i,j) de $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$. Todos os ramos em (4.14)-(4.15) possuem a estrutura de uma função racional da forma

$$y(s) = \sum_{m=1}^N \frac{c_m}{s - a_m} + d \quad (4.16)$$

Os ramos podem ser representados por meio de uma rede elétrica como mostrado na Figura 4.3. R_0 é calculado como:

$$R_0 = 1/d \quad (4.17a)$$

Cada polo real dá origem a um ramo RL :

$$R_1 = -a/c, \quad L_1 = 1/c \quad (4.17b)$$

Cada par de polos complexos conjugados

$$\frac{c' + jc''}{s - (a' + ja'')} + \frac{c' - jc''}{s - (a' - ja'')} . \quad (4.17c)$$

Dá origem a um ramo RLC :

$$L = 1/(2c'), \quad (4.17d)$$

$$R = (-2a' + 2(c'a' + c''a'')L)L, \quad (4.17e)$$

$$1/C = (a'^2 + a''^2 + 2(c'a' + c''a'')R)L, \quad (4.17f)$$

$$G = -2(c'a' + c''a'')CL. \quad (4.17g)$$

Similarmente ao modelo equivalente de Norton, este modelo da linha pode ser implementado em um simulador convencional dado que está representado por resistências, condutâncias e indutâncias.

Quando são usados os polos e zeros de $Y_{nod,aj,pas}$, a rede elétrica sintetizada é uma representação da linha de transmissão. No entanto, se são usados os polos e zeros de $Y_{r,aj,pas}$, tem-se que a rede elétrica sintetizada representa a rede elétrica considerada no cálculo de Y_r .

Figura 4.3 – Síntese de uma rede elétrica

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2002, p. 1097).

4.1.1.4. Transformada inversa de Fourier (TIF)

Em (BICKFORD, MULLINEAUX, & REED, 1976) é apresentada uma fórmula de inversão da transformada de Fourier que pode ser aplicada diretamente sobre a matriz de admitâncias nodais Y_r sem necessidade de aplicar o VF.

Considerando uma função $f(t)$ igual a zero para $t < 0$, com transformada de Fourier:

$$F(\omega) = R(\omega) + jX(\omega) \quad (4.18)$$

Tem-se que $f(t)$ pode ser calculada para cada instante t usando qualquer uma das seguintes fórmulas de inversão:

$$f(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} R(\omega) \cos(\omega t) d\omega \quad (4.19a)$$

$$f(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} X(\omega) \sin(\omega t) d\omega \quad (4.19b)$$

Em (ZANETTA, 2003) a expressão (4.19a), foi deduzida supondo que $f(t)$ é uma função par, e analogamente pode-se deduzir (4.19b) supondo que $f(t)$ é uma função ímpar. Em (GUSTAVSEN, 2005) estabelece-se uma preferência por (4.19a) porque afirmam que uma função par para $f(t)$ apresentaria menos oscilações de Gibbs do que uma função ímpar obtida da aplicação de (4.19b).

Aplicando a fórmula de inversão (4.19a) sobre a matriz de admitâncias nodais $\mathbf{Y}_r$, pode-se calcular as correntes injetadas nodais para um determinado instante de tempo t :

$$i_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{m=1}^6 Y_{r(n,m)}(\omega) V_m(\omega) \right\} \cos(\omega t) d\omega, \quad n = 1, \dots, 6 \quad (4.20)$$

onde $Y_{r(n,m)}(\omega)$ é o termo (n,m) de $\mathbf{Y}_r$, e $V_m(\omega)$ é a transformada de Fourier da tensão aplicada no terminal m . A tensão $V_m(\omega)$ pode ser obtida imediatamente da transformada de Laplace substituindo s por $j\omega$, sendo isto válido quando a região de convergência no plano complexo da transformada de Laplace é dada por um semiplano aberto $\operatorname{Re}(s) > \gamma$ com $\gamma < 0$, como é o caso dos sistemas estudados.

O uso desta formulação implica representar tanto a rede como as tensões nodais aplicadas no domínio da frequência, portanto as tensões nodais precisam ser conhecidas previamente no domínio da frequência. No caso de conhecer as correntes injetadas e desconhecer as tensões nodais, usa-se uma formulação análoga baseada na matriz de impedâncias nodais. Também é possível obter um sistema linear de equações no domínio da frequência usando $\mathbf{Y}_r$ que permite resolver o problema quando correntes e tensões são conhecidas. No Capítulo 8 são apresentados métodos numéricos mais elaborados baseados em $\mathbf{Y}_r$ e na transformada inversa de Fourier.

As redes estudadas aplicando este método são lineares e invariantes no tempo. Quando a rede apresenta mudanças na sua topologia e/ou possui elementos não lineares, a transformada inversa de Fourier (TIF) não pode ser aplicada diretamente porque este método é por definição linear e invariante no tempo. No entanto, a TIF pode ser aplicada a redes variantes e não lineares por meio do princípio de superposição (Capítulo 8), que permite tratar as discontinuidades (que podem ser causadas por manobras com chaves) como superposição de respostas e consegue modelar os elementos não lineares (por exemplo, para-raios) como uma série de discontinuidades sequenciais.

4.2. Linha dobrada equivalente (FLE)

Este modelo foi proposto por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009), e está baseado na decomposição de Y_{nod} em duas matrizes, Y_{oc} e Y_{sc} , associadas à representação em curto-circuito e circuito-aberto, denominada por linha dobrada equivalente ou FLE (do inglês *Folded Line Equivalent*). O ajuste de Y_{oc} e Y_{sc} permite uma melhor representação dos autovalores de Y_{nod} , do que ajustando diretamente Y_{nod} . A formulação baseada na FLE permite obter resultados precisos e de uma forma eficiente para linhas aéreas não transpostas e assimétricas, possibilitando o uso de passos de tempo maiores que o tempo de trânsito da linha para linhas muito curtas.

4.2.1. Dobramento

Como os dois terminais da linha são intercambiáveis, a matriz de admitâncias nodais da linha, Y_{nod} , possui a seguinte estrutura

$$\begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = Y_{nod} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_m \\ Y_m & Y_s \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} \quad (4.21)$$

além disso, Y_s e Y_m devem ser simétricas. Consideram-se as seguintes transformações de similaridade, (CHEN, GAD, NAKHLA, & ACHAR, 2007)

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} v_{oc} \\ v_{sc} \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} i_{oc} \\ i_{sc} \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} I & I \\ I & -I \end{bmatrix} \quad (4.22)$$

Combinando (4.21) e (4.22), tem-se

$$\begin{bmatrix} i_{oc} \\ i_{sc} \end{bmatrix} = \tilde{Y}_{nod} \begin{bmatrix} v_{oc} \\ v_{sc} \end{bmatrix} \quad (4.23a)$$

$$\tilde{Y}_{nod} = \begin{bmatrix} Y_s + Y_m & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_s - Y_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{oc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_{sc} \end{bmatrix} \quad (4.23b)$$

As abreviações *oc* e *sc* fazem referência às componentes em circuito-aberto e curto-circuito para a linha de transmissão dobrada. Por exemplo, ao se aplicar a mesma tensão $v_1 = v_2 = v$ nas extremidades da linha, as componentes de tensão e corrente em curto-circuito da linha dobrada são nulas $v_{sc} = \mathbf{0}$ e $i_{sc} = \mathbf{0}$, e portanto a tensão v é composta apenas por v_{oc} que é a componente em circuito-aberto $v = v_{oc}$ e a corrente injetada em qualquer extremidade da linha é igual a $i_1 = i_2 = i_{oc} = Y_{oc}v_{oc}$. Por outro lado, quando é aplicada uma mesma tensão nas extremidades da linha mas com as polaridades invertidas $v_1 = -v_2 = v$, as componentes de tensão e corrente em circuito-aberto da linha dobrada são nulas $v_{oc} = \mathbf{0}$ e $i_{oc} = \mathbf{0}$, e portanto a tensão v é composta apenas por v_{sc} que é a componente em curto-circuito $v = v_{sc}$ e as correntes injetadas nas extremidade da linha são iguais a $i_1 = -i_2 = i_{sc} = Y_{sc}v_{sc}$. Em termos gerais, quando são aplicadas as tensões v_1 e v_2 nas extremidades da linha, as correntes e as tensões são determinadas pela superposição das contribuições em curto-circuito e circuito-aberto da linha dobrada. A Figura 4.4 procura fazer uma representação do significado dessa transformação e do termo “linha dobrada” utilizado por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009). Nota-se que a distribuição das tensões ao longo de linha dobrada é simétrica (função par) em relação ao centro da linha para a componente em circuito-aberto e, para a componente em curto-circuito, a distribuição das tensões longitudinais em relação ao centro da linha é uma função ímpar, portanto a tensão no centro da linha dobrada para a componente em curto-circuito é igual a zero.

A formulação (4.23a)-(4.23b) é denominada por FLE (do inglês *Folded Line Equivalent*). A operação necessária para voltar ao domínio de fase é dado por:

$$Y_{nod} = K \begin{bmatrix} Y_{oc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & Y_{sc} \end{bmatrix} K^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} Y_{oc} + Y_{sc} & Y_{oc} - Y_{sc} \\ Y_{oc} - Y_{sc} & Y_{oc} + Y_{sc} \end{bmatrix} \quad (4.24)$$

4.2.1.1. Considerações de precisão

No item 2.4.1 foi comentado que a coexistência de grandes diferenças entre as magnitudes dos autovalores da matriz de admitâncias nodais, Y_{nod} , pode levar a erros elevados no cálculo dos autovalores da matriz de impedâncias nodais, $Z_{nod} = Y_{nod}^{-1}$, quando

os autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ não são obtidos com precisão. No entanto, a formulação da FLE permite obter a matriz $\mathbf{Z}_{nod}$ por meio da inversão de $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$, de acordo com a expressão (4.25) e nesse caso, a relação entre as magnitudes do máximo e mínimo autovalor, correspondentes às condições de circuito-aberto e curto-circuito, é menor, o que permite obter uma precisão maior no cálculo dos autovalores de $\mathbf{Z}_{noda}$. Portanto, aplicar o VF em $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$, ao invés de aplica-lo em $\mathbf{Y}_{nod}$, evita o problema causado pela coexistência de autovalores grandes e pequenos em $\mathbf{Y}_{nod}$.

$$\mathbf{Z}_{nod} = \mathbf{Y}_{nod}^{-1} = \left(\mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{oc} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{sc} \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \right)^{-1} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{oc}^{-1} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Y}_{sc}^{-1} \end{bmatrix} \mathbf{K}^{-1} \quad (4.25)$$

Figura 4.4 – Contribuições em curto-circuito e circuito-aberto da linha dobrada

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

4.2.1.2. Propriedades do FLE

Observam-se as seguintes propriedades da FLE:

- $\tilde{\mathbf{Y}}_{nod}$ é diagonal por blocos. Cada bloco tem a metade da dimensão de $\mathbf{Y}_{nod}$.

- b) Y_{oc} e Y_{sc} são matrizes simétricas
- c) O conjunto união dos autovalores de Y_{oc} e Y_{sc} é igual ao conjunto dos autovalores de Y_{nod} .
- d) Supondo que t_{oc} e t_{sc} sejam os autovetores de Y_{oc} e Y_{sc} , respectivamente, os autovetores correspondentes de Y_{nod} seriam

$$[t_{oc}^T \quad t_{oc}^T]^T \quad e \quad [t_{sc}^T \quad -t_{sc}^T]^T \quad (4.26)$$

- e) A relação entre os módulos do máximo e mínimo autovalor tanto para Y_{oc} como Y_{sc} é pequena, enquanto esta relação é elevada para Y_{nod} . Isto permite que os modelos em espaço de estados ou polo-resíduo de Y_{oc} e Y_{sc} sejam representados com precisão por meio dos seus autovalores, o que não ocorre no caso do ajuste usando apenas Y_{nod} . No Capítulo 5 são apresentadas simulações que confirmam esse fato.

4.2.2. Ajuste e imposição da passividade

A aplicação do ajuste, avaliação e imposição de passividade é realizada de maneira independente para as matrizes Y_{oc} e Y_{sc} , como mostrado na Figura 4.5. Isto representa uma melhoria no tempo de processamento e na precisão para o cálculo do modelo e as respostas no domínio do tempo, em comparação com os modelos apresentados no item 4.1.1. Simulações que validam esta afirmação são apresentados nos Capítulos 5 e 6.

4.2.2.1. Ajuste de matrizes simétricas com controle do erro relativo

As matrizes Y_{oc} e Y_{sc} são ajustadas de maneira independente, cada uma com seu próprio conjunto de polos. As propriedades de simetria de cada matriz, Y_{oc} e Y_{sc} , são levadas em conta com o mesmo procedimento do Capítulo 2.

Para melhorar a precisão do ajuste dos modelos ajustados de Y_{oc} e Y_{sc} em altas frequências, os termos $Y_{oc}(\infty)$ e $Y_{sc}(\infty)$ representam as admitâncias características a uma frequência infinita

$$Y_{oc}(\omega) \cong Y_{oc,aj} = \sum_{m=1}^N \frac{R_{oc,m}}{j\omega - a_{oc,m}} + Y_{oc}(\infty) \quad (4.27)$$

$$Y_{sc}(\omega) \cong Y_{sc,aj} = \sum_{m=1}^N \frac{R_{sc,m}}{j\omega - a_{sc,m}} + Y_{sc}(\infty) \quad (4.28)$$

Figura 4.5 – Cálculo do equivalente de Norton para a FLE

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Pondera-se o problema de mínimos quadrados que resulta da aplicação do VF nas expressões (4.27)-(4.28), usando o recíproco da norma euclidiana das matrizes $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$.

$$weight_{oc}(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{Y}_{oc}(\omega)\|_2} = \frac{1}{\rho_m(\mathbf{Y}_{oc}(\omega))} \quad (4.29)$$

$$weight_{sc}(\omega) = \frac{1}{\|\mathbf{Y}_{sc}(\omega)\|_2} = \frac{1}{\rho_m(\mathbf{Y}_{sc}(\omega))} \quad (4.30)$$

Estas ponderações permitem controlar o erro relativo do ajuste. Em (4.29)-(4.30) usa-se o operador $\rho_m(\mathbf{A})$, que designa o raio espectral da matriz simétrica $\mathbf{A}$, definido como

$$\rho_m(\mathbf{A}) = \max_{i=1,\dots,n} |\lambda_i(\mathbf{A})| \quad (4.31)$$

onde $\lambda_i(\mathbf{A})$ são os autovalores da matriz $\mathbf{A}$. Para uma matriz não simétrica, a norma euclidiana matricial de matrizes é definida como

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \sqrt{\rho_m(\mathbf{A}\mathbf{A}^T)} \quad (4.32)$$

Se $\mathbf{A}$ for simétrica então $\|\mathbf{A}\|_2 = \rho_m(\mathbf{A})$, daí a simplificação realizada em (4.29)-(4.30).

4.2.2.2. Avaliação rápida da passividade

O modelo polo-resíduo obtido pelo método VF deve ser passivo para garantir uma simulação estável. Os métodos de avaliação da passividade foram apresentados no item 3.1. De acordo com a equação (3.12), o modelo é passivo se a matriz de condutâncias $\mathbf{G}(\omega)$ é definida positiva para todas as frequências. Como a combinação dos autovalores de $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$ é igual aos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ (item 4.2.3), a passividade pode ser avaliada de maneira independente por meio das matrizes $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$:

$$\text{eig}(\text{Re}\{\mathbf{Y}_{oc}(\omega)\}) = \text{eig}(\mathbf{G}_{oc}(\omega)) > 0 \quad (4.33a)$$

$$\text{eig}(\text{Re}\{\mathbf{Y}_{sc}(\omega)\}) = \text{eig}(\mathbf{G}_{sc}(\omega)) > 0 \quad (4.33b)$$

No item 3.1 apresenta-se um método de avaliação da passividade usando a matriz de singularidade $\mathbf{S}$ definida em (3.25a). Para avaliar a passividade na FLE têm-se as formulações:

$$\mathbf{S}_{oc} = \mathbf{A}_{oc}(\mathbf{B}_{oc}\mathbf{D}_{oc}^{-1}\mathbf{C}_{oc} - \mathbf{A}_{oc}) \quad (4.34a)$$

$$\mathbf{S}_{sc} = \mathbf{A}_{sc}(\mathbf{B}_{sc}\mathbf{D}_{sc}^{-1}\mathbf{C}_{sc} - \mathbf{A}_{sc}) \quad (4.34b)$$

Para avaliar a passividade usando (4.34), os modelos em espaço de estados de $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$ devem conter somente termos reais (ver item 3.1.1). A raiz quadrada dos autovalores reais positivos da matriz de singularidade $\mathbf{S}$, correspondem às frequências ω nas quais $\mathbf{G}_{nod}$ é singular, $\text{eig}(\mathbf{G}_{nod}(\omega)) = 0$, e são as fronteiras das violações de passividade.

A aplicação de $\mathbf{S}$ a $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$ ao invés de $\mathbf{Y}_{nod}$ permite aumentar a velocidade de processamento por um fator de quatro, porque o tempo de processamento dos autovalores é proporcional ao cubo da dimensão da matriz.

Também é possível avaliar a passividade usando a matriz Hamiltoniana $\mathbf{M}$, não obstante, o tempo de processamento seja maior do que quando se usa a matriz $\mathbf{S}$. Por exemplo, o uso de

S para avaliar a passividade de Y_{oc} e Y_{sc} é 32 vezes mais rápido do que usar M para avaliar a passividade de Y_{nod} (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2009).

4.2.2.3. Imposição da passividade pelo método FMP

As violações de passividade são removidas por meio de uma leve modificação das matrizes $R_{oc,m}$, $R_{sc,m}$, $Y_{oc}(\infty)$ e $Y_{sc}(\infty)$ dos modelos polo-resíduo $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$, por meio da aplicação de maneira independente da FMP (do inglês *Fast Modal Perturbation*). Os modelos passivos de Y_{oc} e Y_{sc} , denominados como $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$, respectivamente, garantem a passividade do modelo equivalente de Norton obtido usando o procedimento apresentado no item 4.2.3.

No item 3.2.2.3 é apresentado um método rápido de imposição da passividade, conhecido como FMP que aplicado neste caso estaria baseado em uma leve modificação dos autovalores das matrizes de resíduos $R_{oc,m}$ e $R_{sc,m}$, e das matrizes $Y_{oc}(\infty)$ e $Y_{sc}(\infty)$ (ver equações (3.60a)-(3.60b) e (3.59b)-(3.59c)), e minimizando o erro relativo dos autovalores das matrizes de admitância $Y_{oc}(\omega)$ e $Y_{sc}(\omega)$ (ver equações (3.63)-(3.59a)), usando programação quadrática. Este procedimento é iterativo (ver Figura 3.4) adicionando novas restrições (equações (3.59b)-(3.59c)) que farão parte de uma formulação mais robusta da programação quadrática a cada iteração, com o intuito de prevenir o surgimento de novas violações de passividade (ver item 3.2.3).

Como o tempo de processamento é proporcional ao valor cúbico do número de variáveis, forçando a passividade de $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$ ao invés de $Y_{nod,aj}$ é possível aumentar a velocidade de processamento por um fator de quatro.

4.2.3. Equivalente de Norton

Os modelos passivos polo-resíduo $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$, podem ser transformados em modelos em espaço de estados de maneira independente usando o método apresentado no item 3.1.1:

$$Y_{oc}(j\omega) \cong Y_{oc,aj,pas}(j\omega) = C_{oc}(j\omega I - A_{oc})^{-1}B_{oc} + D_{oc} \quad (4.35)$$

$$Y_{sc}(j\omega) \cong Y_{oc,aj,pas}(j\omega) = C_{sc}(j\omega I - A_{sc})^{-1}B_{sc} + D_{sc} \quad (4.36)$$

Para o modelo em espaço de estados de $Y_{oc,aj,pas}$ na forma (4.3), a saída y equivale à corrente i_{oc} e a entrada u equivale à tensão v_{oc} . Da mesma forma, a saída e a entrada do modelo em espaço de estados de $Y_{sc,aj,pas}$ são a corrente i_{sc} e a tensão v_{sc} , respectivamente.

O equivalente de Norton para Y_{oc} e Y_{sc} é combinado em um único modelo equivalente por meio da seguinte transformação (ver Figura 4.5):

$$G_{Norton} = K \begin{bmatrix} G_{oc} & 0 \\ 0 & G_{sc} \end{bmatrix} K^{-1} \quad (4.37a)$$

$$i_{his} = \begin{bmatrix} i_{1,his} \\ i_{2,his} \end{bmatrix} = K \begin{bmatrix} i_{oc,his} \\ i_{sc,his} \end{bmatrix} \quad (4.37b)$$

Esta transformação é baseada no método de dobramento apresentado no item 4.2.1. As matrizes G_{oc} e G_{sc} são calculadas de maneira independente por meio do método apresentado no item 4.1.1.2 e os modelos em espaço de estados (4.35)-(4.36). Este modelo pode ser implementado em um programa do tipo EMTP. Para cada passo de tempo, as tensões nodais são transformadas em v_{oc} e v_{sc} usando a transformação da expressão (4.3), para calcular as correntes históricas $i_{oc,his}$ e $i_{sc,his}$ com (4.13).

Capítulo 5

Simulações e Análise Comparativa de Modelos com a Matriz de Admitâncias Nodais

Neste capítulo a linha de transmissão será modelada com base no ajuste da sua matriz de admitâncias nodais Y_{nod} e a aplicação dos modelos do item 4.1.1: modelo em espaço de estados (MEE), transformada inversa de Fourier (TIF), rede elétrica equivalente (REE) e o equivalente de Norton (EN).

As matrizes de admitâncias shunt e impedâncias série são obtidas do programa ATP, o cálculo de Y_{nod} é feito segundo a formulação apresentada no item 7.3.1, o ajuste e imposição de passividade é realizado com os métodos VF (Capítulo 1) e FMP (item 3.2.2.3).

É empregada uma linha de transmissão transposta de 138 kV com diferentes comprimentos. Os testes serão realizados considerando tensões balanceadas e desbalanceadas, e em condições de curto-circuito e circuito-aberto. No Capítulo 6 é avaliado o modelo da FLE do item 4.2 e é comparado com o equivalente de Norton apresentado no Capítulo 4.

No item 5.4 são comparados resultados de simulação fornecidos pelos programas ATP e PSCAD, para linhas assimétricas e circuitos duplos, com a finalidade de verificar a precisão do modelo JMarti do ATP em relação ao modelo ULM do PSCAD.

5.1. Cálculo da matriz de admitâncias nodais

Os dados da linha de transmissão são apresentados na Tabela 5.1, cuja geometria é representada na Figura 5.1. Em todas as simulações a seguir é levado em consideração o efeito pelicular e a resistência do solo ($100 \Omega \cdot m$). Cada uma das colunas da Tabela 5.1 representa:

- Rin: raio interno da seção de alumínio.

- Rout: raio externo do condutor.
- Resis: resistência CC do condutor.
- Horiz: distância horizontal do centro do condutor a alguma referência.
- Vtorre: distância vertical do centro do condutor em relação ao solo.
- Vmid: distância vertical do centro do condutor em relação ao solo no vão entre torres.
- Separ: espaço entre os centros dos condutores adjacentes pertencentes a um mesmo *bundle*.
- Alpha: ângulo dos condutores em relação a uma reta horizontal no centro do *bundle*.
- NB: número de condutores que formam o *bundle*.

Tabela 5.1 - Dados da linha de transmissão

Fase	Rin [cm]	Rout [cm]	Resis [ohm/km]	Horiz [m]	Vtorre [m]	Vmid [m]	Separ [cm]	Alpha [graus]	NB
A	0,3375	0,9157	0,19645	-3	21,8	14,07	40	0	2
B	0,3375	0,9157	0,19645	0	19,9	12,17	40	0	2
C	0,3375	0,9157	0,19645	3	18	10,27	40	0	2
Guarda	0	0,47625	0,47625	0	26,8	19,84	0	0	0

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.1 – Representação geométrica da linha de transmissão

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Y_{nod} pode ser obtida usando os seguintes procedimentos:

- i. Empregando as matrizes de admitâncias shunt $\mathbf{Z}$ e de impedâncias série $\mathbf{Y}$, fornecidas pelo ATP, com a formulação apresentada no item 7.3.1. As matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ não foram calculadas em Matlab com as formulações do Capítulo 7 para não introduzir imprecisões em $\mathbf{Y}_{nod}$, causados pelo cálculo de parâmetros. O objetivo é poder fazer uma comparação dos modelos discutidos no Capítulo 4 com o modelo JMarti do ATP (MARTI, 1982), usando os mesmos parâmetros como base de cálculo dos modelos.
- ii. O programa ATP possui um tipo de simulação denominado *Frequency scan* que permite realizar simulações no domínio da frequência. O modelo de linha usado para este procedimento é o JMarti. Com esta ferramenta é possível obter $\mathbf{Y}_{nod}$ como é explicado a seguir.

$\mathbf{Y}_{nod}$ é uma matriz de 6×6 , considerando que $\mathbf{Y}_{nod}$ está relacionada com uma linha equivalente deduzida a partir dos parâmetros $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ da linha da Figura 5.1. Na linha equivalente da linha da Figura 5.1, os subcondutores do *bundle* são substituídos por um condutor equivalente para cada fase e o cabo-guarda é eliminado por meio da redução de Kron, isto permite para os casos de simulação estudados neste capítulo, obter uma representação equivalente da linha mas com um menor número de terminais do que a linha original (Figura 5.1). Para a linha estudada o número de terminais diminui de 14 na linha da Figura 5.1 (7 terminais no terminal receptor e outros 7 terminais para o terminal emissor) para 6 terminais na linha equivalente. As simulações de linha no programa ATP são baseadas no uso dos parâmetros $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ da linha equivalente, de tal modo que os dados fornecidos pelo ATP para os procedimentos *i* e *ii* pertencem à linha equivalente.

Nos casos de simulação neste capítulo não é necessário representar o cabo-guarda na linha equivalente (o cabo de guarda é eliminado por meio da redução de Kron) porque nos testes é válido assumir um potencial continuamente zero do cabo-guarda (por exemplo, não são realizados testes de descargas atmosféricas).

Para obter a primeira coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$, aplica-se uma tensão com amplitude unitária no terminal 1 e aterram-se os outros terminais, como mostrado na Figura 5.2 para uma linha trifásica. Nota-se que na opção de simulação *Frequency scan* é especificada a faixa de frequências a ser avaliada, o mesmo que o incremento de frequência que pode ser linear ou logarítmico. É usada uma fonte de tensão senoidal, e o ATP de maneira automática avalia a resposta do circuito para cada valor de frequência, sendo que a fonte de tensão conserva a sua amplitude e ângulo de fase, mas com uma frequência igual ao valor especificado que está sendo avaliado. Nesta simulação, as correntes injetadas no domínio da frequência representam os

elementos da primeira coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$, devido à relação entre correntes injetadas e tensões nodais, dada por:

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = [\mathbf{Y}_{nod}(:,1) \ \mathbf{Y}_{nod}(:,2) \ \mathbf{Y}_{nod}(:,3) \ \mathbf{Y}_{nod}(:,4) \ \mathbf{Y}_{nod}(:,5) \ \mathbf{Y}_{nod}(:,6)] \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ V_5 \\ V_6 \end{bmatrix}, \quad (5.1a)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{nod}(:,1)V_1 + \mathbf{Y}_{nod}(:,2)V_2 + \mathbf{Y}_{nod}(:,3)V_3 \\ +\mathbf{Y}_{nod}(:,4)V_4 + \mathbf{Y}_{nod}(:,5)V_5 + \mathbf{Y}_{nod}(:,6)V_6 \end{bmatrix}, \quad (5.1b)$$

onde $\mathbf{Y}_{nod}(:,k)$ representa a k-ésima coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$. Como todas as tensões nodais são iguais a zero, com exceção de v_1 que é igual a $1\angle 0^\circ$ para todas as frequências, as correntes injetadas nas extremidades da linha são iguais a $\mathbf{Y}_{nod}(:,1)$. Em geral, para obter a k-ésima coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$, conecta-se uma fonte de tensão de amplitude unitária no terminal k-ésimo da linha, enquanto os outros terminais são aterrados. Assim, as correntes injetadas em cada terminal da linha representam os valores da k-ésima coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$.

Na Figura 5.3 têm-se os elementos (1,1), (6,2), (3,3) e (4,5) de $\mathbf{Y}_{nod}$, simbolizados como $\mathbf{Y}_{nod}(1,1)$, $\mathbf{Y}_{nod}(6,2)$, $\mathbf{Y}_{nod}(3,3)$ e $\mathbf{Y}_{nod}(4,5)$, obtidos por meio dos procedimentos *i* e *ii* descritos anteriormente, para uma linha de 14 km. É utilizada uma faixa de frequências de 10^{-2} até 10^5 Hz, suficiente para abranger os efeitos oscilatórios em altas frequências para linhas de 14 km como mostrado nas simulações a seguir. Nestas figuras foi usada uma escala linear para poder comparar melhor os resultados obtidos com os procedimentos *i* e *ii*.

Figura 5.2 – Simulação da primeira coluna de $\mathbf{Y}_{nod}$ por meio do método *Frequency scan* de ATP

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.3 – Módulo e fase no domínio da frequência de Y_{nod}

a) Módulo

b) Ângulo de fase

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Observa-se que existe uma diferença nos resultados fornecidos entre os dois procedimentos. Esta discrepância é causada porque os resultados fornecidos pelo procedimento *ii* emprega o modelo JMarti, baseado na transformação do domínio da fase para o domínio modal por meio de uma matriz de transformação constante, e posteriormente ajustando as impedâncias características e as funções de propagação modais com funções racionais (MARTI, 1982). No entanto, como será apresentado no item 5.4, este modelo apresenta problemas para simular linhas não simétricas sem transposição, e circuitos duplos (GUSTAVSEN, IRWIN, MANGELROD, BRANDT, & KENT, 1999).

Considerando que a matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ calculada a partir do procedimento *ii* é menos precisa, a aplicação do VF e as análises subsequentes serão realizadas com base em $\mathbf{Y}_{nod}$ calculada pelo procedimento *i*.

$\mathbf{Y}_{nod}$ é calculada para dois comprimentos de linha, de 14 e 250 km. Para a linha de 250 km são consideradas as frequências de 1 até 10^3 Hz, distribuídas de maneira logarítmica com 999 pontos por década. Para a linha de 14 km são avaliadas as frequências entre 10^{-2} até 10^5 Hz, distribuídas de maneira logarítmica. Na aplicação da transformada inversa de Fourier (ver item 4.1.1.4) é usado o máximo número de amostras que fornece o ATP para as matrizes de admitâncias shunt e impedâncias série, 999 pontos por década, para obter uma boa resolução no comportamento dos picos de ressonância de $\mathbf{Y}_{nod}$ em altas frequências, e estes resultados podem servir de referência para os outros modelos que fazem uso da matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ ajustada.

A Figura 5.4 apresenta o módulo e o ângulo de fase dos elementos (1,1) e (4,5) de $\mathbf{Y}_{nod}$ calculada com o procedimento *i*, junto com os elementos da matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ ajustada, denotada como $\mathbf{Y}_{nod,aj}$. São empregados comprimentos de 14 e 250 km, usando na etapa de ajuste uma

escala logarítmica, porém os resultados são apresentados em uma escala linear para uma melhor visualização.

Na linha de 14 km é usada uma maior faixa de frequências do que na linha de 250 km pois os testes em circuito aberto apresentam tensões com frequências mais elevadas para a linha de 14 km do que para o caso da linha de 250 km.

Observa-se na Figura 5.4 que o número de picos dos elementos de Y_{nod} é maior para a linha de 250 km. Isto implica que as linhas longas precisam de um maior número de polos para serem ajustadas pelo método VF para uma faixa de frequências determinada.

5.2. Ajuste e imposição de passividade

Após o cálculo de Y_{nod} para um conjunto definido de frequências, os seus elementos são ajustados por meio de funções racionais aplicando o VF (Capítulo 2) obtendo $Y_{nod,aj}$, com uma diminuição do tempo de processamento considerando que Y_{nod} é simétrica, por meio do ajuste de 21 dos 36 elementos de Y_{nod} (parte triangular superior ou inferior) usando os mesmos polos.

Os elementos de Y_{nod} na Figura 5.4 correspondem à linha de transmissão da Tabela 5.1 com comprimentos de 14 e 250 km. Nota-se que o VF consegue um ajuste satisfatório, obtendo um erro bem menor do que o módulo das admitâncias para todas as frequências avaliadas. No ajuste são usados 75 e 120 polos para as linhas de 14 e 250 km, respectivamente.

Usando o método FMP (item 3.2.2) para impor a passividade sobre o modelo $Y_{nod,aj}$, obtém-se um novo modelo $Y_{nod,aj,pas}$, que garante simulações estáveis no tempo (Capítulo 3). A imposição de passividade permite que o modelo da linha de transmissão seja passivo, podendo absorver energia, mas não gerá-la.

Figura 5.4 – Ajuste da matriz Y_{nod} pelo método VF

a) Comprimento de 14 km

b) Comprimento de 250 km

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 5.5 mostram-se os autovalores da matriz de condutâncias do modelo da linha antes e depois de impor a passividade. O modelo passivo da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão é denotado como $Y_{nod,aj,pas}$, que é resultado da aplicação da FMP em

$Y_{nod,aj}$ (ver Figura 4.1). Observa-se que no modelo passivo todos os autovalores da matriz de condutâncias são maiores que zero para todas as frequências, como foi destacado no Item 3.1.3.

Na Figura 5.6 tem-se o módulo e o ângulo de fase dos elementos (1,1) e (4,5) dos modelos $Y_{nod,aj,pas}$ e $Y_{nod,aj}$, respectivamente. Quando as simulações apresentam transitórios que envolvem frequências localizadas dentro da faixa adotada para o ajuste, o modelo passivo e modelo não passivo apresentam simulações no tempo similares. No entanto, se o modelo ajustado Y_{nod} apresentar violações de passividade, o modelo deixa de ser estável, fornecendo simulações que podem aumentar exponencialmente no tempo, como mostrado na Figura 5.7 que representa as tensões no lado receptor de uma linha de 300 m em circuito-aberto para o modelo ajustado de Y_{nod} não passivo e com imposição de passividade.

Figura 5.5 – Autovalores da matriz de condutâncias para os modelos ajustados com e sem passividade

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.6 – Elementos para os modelos ajustados passivo e não passivo de Y_{nod}

a) Comprimento de 14 km

b) Comprimento de 250 km

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.7 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 300 m

a) Modelo passivo

b) Modelo não passivo

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

5.3. Simulações no domínio do tempo

Na Tabela 5.2 apresentam-se as simulações no tempo efetuadas. O propósito está em verificar a versatilidade do VF para modelar linhas longas e curtas, em condições balanceadas e desbalanceadas, em curto-circuito e em circuito-aberto. Não obstante, é importante esclarecer que de acordo com outros testes realizados, usando o modelo de linha baseado no uso de Y_{nod} , não são obtidos bons resultados para linhas muito curtas, inferiores a 5 km.

No item 5.3.1 na linha de 250 km são aplicados os modelos apresentados no item 4.1. O propósito está em encontrar diferenças em termos de tempo de processamento e precisão.

No item 5.3.2 é utilizado o modelo em espaço de estados para avaliar o seu desempenho e comparar diferentes condições de operação: tensões balanceadas e desbalanceadas, linha curta e longa, operação em curto-circuito e circuito-aberto.

No item 5.3.3 é utilizado o modelo de linha com o equivalente de Norton do item 4.1.1.2 associado a uma rede simulada por meio da regra de integração trapezoidal (DOMMEL, 1986), para avaliar o desempenho do modelo integrado a outros componentes.

Nas simulações a seguir a linha não está conectada a nenhum componente, exceto pelas fontes de tensão ideais, para que a procedência das atenuações e distorções das respostas sejam causadas somente pelo modelo de linha. Nota-se que para os casos da Tabela 5.2, a matriz de admitâncias da linha, Y_{nod} , é igual à matriz de admitâncias da rede, Y_r .

O processamento foi executado em um computador desktop com um processador Intel Core i7 7700 CPU 3.6 GHz executando Matlab v8.5.0 em Windows 10.

Tabela 5.2 – Simulações no tempo

a) Item 5.3.1

Tensões aplicadas / tipo de simulação	Comprimento (km)	Modelo
Balanceadas / curto trifásico	250	Transformada inversa de Fourier (TIF)
		Modelo em espaço de estados (MEE)
		Rede elétrica equivalente (REE)
		Equivalente de Norton (EM)

b) Item 5.3.2

Tensões aplicadas	Tipo de simulação	Comprimento (km)	
<i>i)</i> Balanceadas	curto-trifásico	14	250
<i>ii)</i> Desbalanceadas			
<i>iii)</i> Balanceadas	circuito-aberto		
<i>iv)</i> Desbalanceadas			

c) Item 5.3.3

Tensões aplicadas	Comprimento (km)	Modelo
Balanceadas	14	EN

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

5.3.1. Comparação de modelos de linha de transmissão

Neste item são avaliados os modelos apresentados no item 4.1.1 (ver Figura 4.1): transformada inversa de Fourier (TIF), modelo em espaço de estados (MEE), rede elétrica equivalente (REE) e equivalente de Norton (EM).

Uma linha de transmissão em curto é alimentada por uma fonte trifásica balanceada de tensão linha-linha de 138 kV no instante $t = 0$. Na Figura 5.8 têm-se as correntes injetadas nos terminais emissores da linha conectados à fonte trifásica, calculadas usando os métodos apresentados no item 4.1.1, mas o método TIF é usado como referência para a comparação de precisão de resultados, por ser independente do ajuste realizado com o VF, considerando que o TIF faz uso direto da matriz Y_{nod} , calculada para cada amostra de frequência, e os outros métodos usam o modelo ajustado passivo $Y_{nod,aj,pas}$ que é uma aproximação de Y_{nod} . Observa-se que todos os métodos fornecem resultados similares. Contudo, o método mais eficiente em termos de processamento é baseado no modelo equivalente de Norton de acordo com a Tabela 5.3, considerando que em todos os métodos foi usado um passo $\Delta t = 100 \mu s$. Para medir os tempos de processamento foi usado o comando *tic toc* de Matlab.

Na Figura 5.8 observa-se a existência de picos nos desvios, localizados nas seções da resposta em corrente onde a pendente é elevada, estes picos são causados pelo deslocamento entre respostas, sendo que o deslocamento é pequeno em todos os casos avaliados nesta figura.

Todos os cálculos foram executados em Matlab, exceto no caso REE do item 4.1.1.3 que foi simulada no programa ATP usando uma linguagem compilada. Neste caso, o tempo de processamento com a REE em uma linguagem interpretada, como a utilizada pelo programa Matlab, seria ainda maior do que o apresentado na tabela 5.3, podendo-se concluir que o método com o EN é mais eficiente.

Tabela 5.3 – Tempos de processamento

Método	Tempo [s]
TIF	2,5516
MEE	0,5225
REE	1,0147
EN	0,0532

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.8 – Comparação entre modelos de linha de transmissão

a) Corrente injetada no terminal da fase A

b) Corrente injetada no terminal da fase B

c) Corrente injetada no terminal da fase C

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

5.3.2. Avaliação do modelo em espaço de estados

A seguir são avaliadas diferentes condições de operação de linhas de transmissão, com alimentação com tensões balanceadas e desbalanceadas, em curto-circuito e circuito-aberto, assim como em casos de linha curta e longa (ver Tabela 5.2b). O propósito é demonstrar a

versatilidade e precisão do modelo de linha estudado, tomando como base de comparação os resultados do programa ATP.

Considerando que todos os modelos fornecem resultados numéricos similares, nas simulações a seguir é usado apenas o MEE.

Nas simulações obtidas do programa ATP são usados os valores predefinidos de ajuste do modelo de linha JMarti, que estabelecem uma tolerância no ajuste racional de 0,3% para as impedâncias características modais e as funções de propagação modais.

5.3.2.1. Linha de transmissão de 14 km

Na Figura 5.9 têm-se as correntes injetadas pelos geradores com tensão de linha de 138 kV conectados a uma linha em curto trifásico aterrado no final de linha (caso *i* da Tabela 5.2.b). Para os cálculos é usado um passo $\Delta t = 10 \mu s$.

A Figura 5.10 representa uma simulação similar à apresentada na Figura 5.9, mas as tensões dos geradores são desbalanceadas, com módulos de 0,8 pu, 1,0 pu, 1,2 pu e ângulos de fase de 0° , -90° , 90° , nas fases *a*, *b* e *c*, respectivamente, na base de $138/\sqrt{3}$ kV (caso *ii* da Tabela 5.2.b). Foi usado um passo $\Delta t = 10 \mu s$.

A Figura 5.11 representa as tensões no fim da linha em circuito-aberto, quando são aplicadas tensões balanceadas de 138 kV no início da linha (caso *iii* da Tabela 5.2.b). Na simulação em ATP e no MEE é usado um passo $\Delta t = 1 \mu s$. Para esta simulação foi usado um menor passo de integração do que nas simulações anteriores devido à presença das oscilações de tensão com altas frequências, como mostrado na Figura 5.11b. Neste caso, a aplicação do VF e os procedimentos subsequentes são baseados na matriz que relaciona as tensões no início e fim da linha, que é calculada aplicando a redução de Kron na expressão (4.21):

$$V_2 = -(Y_s)^{-1} Y_m V_1 = Y_v V_1 \quad (5.2)$$

Na Figura 5.12 tem-se um caso análogo à simulação anterior, nesta figura são representadas as tensões no fim da linha em circuito-aberto, mas aplicando tensões não balanceadas, com módulos de 0,8 pu, 1,0 pu, e 1,2 pu, e ângulos de fase de 0° , -90° e 90° , nas fases *a*, *b* e *c* respectivamente, na base de 138 kV (caso *iv* da Tabela 5.2.b). Para esta simulação foi usado um passo $\Delta t = 1 \mu s$. As oscilações de alta frequência produzidas pelo VF nas curvas de tensão das Figuras 5.11b-5.12b são causadas por uma imprecisão do modelo ajustado de Y_v , denotado como $Y_{v,aj}$, para representar o comportamento de Y_v a frequências maiores do que as

compreendidas pela faixa de frequências usada no VF. Por exemplo, na Figura 5.13 apresenta-se o comportamento do elemento (1,1) de Y_v e do seu modelo ajustado $Y_{v,aj}$ usando no VF uma faixa de frequências de ajuste entre 10^{-2} e $5 * 10^4$ Hz, que mostra como o modelo $Y_{v,aj}$ não é capaz de prever o comportamento de Y_v fora da faixa de frequências de ajuste. Na medida que o comprimento da linha diminui, novos problemas de imprecisão começam a aparecer, como será discutido no Capítulo 6. Uma alternativa para melhorar o ajuste do modelo está no uso da FLE mostrada no item 4.2 e no Capítulo 6.

5.3.2.2. Linha de transmissão de 250 km

A Figura 5.14 é um exemplo análogo ao apresentado na Figura 5.9, mas muda-se o comprimento para 250 km (caso *i* da Tabela 5.2.b). Ao aumentar o comprimento, as correntes injetadas aumentam o seu conteúdo harmônico, mas o modelo permite representar com precisão este comportamento. Para esta simulação foi usado um passo $\Delta t = 100 \mu s$.

Igualmente, as Figuras 5.15-5.17 representam simulações análogas às Figuras 5.10-5.12, mudando somente o comprimento da linha para 250 km (casos *ii*, *iii* e *iv* da Tabela 5.2.b). O passo usado em estas simulações é de $\Delta t = 100 \mu s$ para o caso da Figura 5.15, e de $\Delta t = 1 \mu s$ para as Figuras 5.16-5.17.

Figura 5.9 – Correntes em uma linha em curto de 14 km em condições de tensão balanceada

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.10 – Correntes em uma linha em curto de 14 km em condições de tensão desbalanceada

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os resultados anteriores revelam que o modelo resultante do ajuste aplicando o método VF permite obter simulações precisas no tempo sob diferentes condições: para linhas longas e curtas, quando as tensões aplicadas são balanceadas e desbalanceadas, para linhas solidamente aterradas e em circuito-aberto.

Figura 5.11 – Tensões para uma linha em circuito-aberto de 14 km em condições de tensão balanceada

a) Regime permanente senoidal

b) Detalhe do período transitório para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.12 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 14 km em condições de tensão não balanceada

a) Regime permanente senoidal

b) Detalhe do período transitório para a fase a

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.13 –Ajuste da matriz Y_v pelo método VF

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.14 – Correntes em uma linha em curto de 250 km em condições de tensão balanceada

a) Regime permanente senoidal

b) Detalhe do período transitório para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.15 – Correntes em uma linha em curto de 250 km em condições de tensão não balanceada

a) Período transitório e regime permanente senoidal

b) Período transitório para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.16 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 250 km em condições de tensão balanceada

a) Regime permanente senoidal

b) Período transitório para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.17 – Tensões em uma linha em circuito-aberto de 250 km em condições de tensão não balanceada

a) Regime permanente senoidal

b) Período transitório para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Como será apresentado no item 5.4 e no capítulo 9, em alguns casos os resultados fornecidos pelo ATP não são similares aos obtidos com outros programas como o PSCAD, pois o modelo JMarti do ATP é baseado no uso de uma matriz de transformação constante. O modelo JMarti oferece resultados satisfatórios para situações de transitórios a altas frequências,

mas muitas vezes nas linhas não simétricas a precisão é deteriorada a baixas frequências devido à dependência da frequência da matriz de transformação. Este modelo também às vezes é incapaz de simular os efeitos de acoplamento a baixas frequências com suficiente precisão para o caso de linhas em paralelo (GUSTAVSEN et al., 1999).

5.3.3. Equivalente de Norton

Tendo em conta que o modelo equivalente de Norton é baseado no mesmo procedimento de cálculo proposto por (DOMMEL, 1986), sendo deduzido a partir do modelo em espaço de estados do item 4.1.1.1, este modelo é usado junto com outros componentes de rede para avaliar sua adequação ao cálculo de transitórios eletromagnéticos. Na Figura 5.18 mostra-se a energização de uma linha por uma fonte trifásica com indutância de 110 mH. A linha está conectada na sua extremidade receptora por uma impedância, com uma resistência de $0,9 \Omega$ e uma indutância de 0,53 mH.

Figura 5.18 – Correntes em uma linha em curto de 14 km

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A solução numérica de transitórios eletromagnéticos é baseada no método de integração trapezoidal, apresentada por (DOMMEL, 1969). O modelo da linha está representado pelo equivalente de Norton da Figura 4.2 de acordo com a dedução apresentada no item 4.1.1.2. O modelo para uma indutância percorrida por uma corrente $i_{km}(t)$, com terminais nos nós k e m , está representado por uma resistência em paralelo com um gerador de corrente (ver Figura 5.19a), onde:

$$i_{km}(t) = b_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [v_k(t) - v_m(t)], \quad (5.3a)$$

$$b_{km}(t - \Delta t) = i_{km}(t - \Delta t) + \frac{\Delta t}{2L} [v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)]. \quad (5.3b)$$

O modelo para uma capacitância é calculado aplicando o método de integração trapezoidal, de maneira similar como é deduzido para a indutância. O modelo do capacitor está

representado por uma resistência $R = \Delta t/(2C)$ em paralelo com um gerador de corrente b_{km} que condensa as informações passadas (ver Figura 5.19b), onde:

$$i_{km}(t) = b_{km}(t - \Delta t) + \frac{2C}{\Delta t} [v_k(t) - v_m(t)], \quad (5.4a)$$

$$b_{km}(t - \Delta t) = -i_{km}(t - \Delta t) - \frac{2C}{\Delta t} [v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)]. \quad (5.4b)$$

As relações entre tensões e correntes em resistências não envolvem equações diferenciais, portanto não necessitam da aplicação da regra trapezoidal.

Em cada passo de tempo é resolvida uma rede elétrica composta por resistências e fontes de corrente históricas por meio de um sistema de equações linear. As fontes de corrente históricas condensam as informações passadas, para a atualização de tensões e correntes.

Figura 5.19 – Representação da indutância e capacitância em um EMTP

a) Circuito equivalente da indutância

b) Circuito equivalente da capacitância

Fonte: Adaptado de DOMMEL (1969, p. 390).

Similarmente, aplicando o método de integração trapezoidal, o circuito RL pode ser representado pela expressão 5.3a e pelo circuito equivalente da Figura 5.20:

$$i_{km}(t) = b_{km}(t - \Delta t) + \frac{1}{\left(\frac{2L}{\Delta t} + R\right)} [v_k(t) - v_m(t)], \quad (5.5a)$$

$$b_{km}(t - \Delta t) = \left(\frac{1 - R \frac{\Delta t}{2L}}{1 + R \frac{\Delta t}{2L}} \right) i_{km}(t - \Delta t) + \frac{1}{\left(\frac{2L}{\Delta t} + R \right)} [v_k(t - \Delta t) - v_m(t - \Delta t)]. \quad (5.5b)$$

Figura 5.20 – Representação do circuito RL monofásico em um EMTP

Fonte: Adaptado de ZANETTA (2003, p. 250).

Considerando as representações equivalentes dos elementos que compõem a configuração da Figura 5.18, de acordo com método de (DOMMEL, 1986), esta rede pode ser representada pela Figura 5.21.

Figura 5.21 – Representação equivalente da rede da Figura 5.18

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A relação entre tensões nodais e correntes injetadas nodais é dada por:

$$\begin{bmatrix} I_{L1} + I_{his1} \\ I_{L2} + I_{his2} \\ I_{L3} + I_{his3} \\ I_{his4} - I_{RL1} \\ I_{his5} - I_{RL2} \\ I_{his6} - I_{RL3} \\ i_{f1} - I_{L1} \\ i_{f2} - I_{L2} \\ i_{f3} - I_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_r(1:6,1:6) & Y_r(1:6,7:9) \\ Y_r(7:9,1:6) & Y_r(7:9,7:9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_{f1} \\ v_{f2} \\ v_{f3} \end{bmatrix}, \quad (5.6)$$

onde Y_r é a matriz de admitâncias nodais da rede da Figura 5.21 e portanto Y_r está estruturada conforme à numeração nodal designada à rede, composta por 9 nós. Nota-se que Y_r está dividida em quatro partes; $Y_r(1:6,1:6)$ constituída pelas seis primeiras colunas e linhas de Y_r , $Y_r(7:9,1:6)$ formada pelas três últimas linhas e seis primeiras colunas de Y_r , e assim por diante. Nota-se que pela simetria de Y_r , $Y_r(7:9,1:6) = Y_r^T(1:6,7:9)$, onde o sobrescrito T denota o operador de transposição.

Considerando que as tensões das fontes são conhecidas, as tensões nodais e as correntes injetadas pelas fontes são calculadas por meio das expressões:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = [Y_r(1:6,1:6)]^{-1} \left(\begin{bmatrix} I_{L1} + I_{his1} \\ I_{L2} + I_{his2} \\ I_{L3} + I_{his3} \\ I_{his4} - I_{RL1} \\ I_{his5} - I_{RL2} \\ I_{his6} - I_{RL3} \end{bmatrix} - Y_r(1:6,7:9) \begin{bmatrix} v_{f1} \\ v_{f2} \\ v_{f3} \end{bmatrix} \right), \quad (5.7)$$

$$\begin{bmatrix} i_{f1} \\ i_{f2} \\ i_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} + Y_r(7:9,1:6) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + Y_r(7:9,7:9) \begin{bmatrix} v_{f1} \\ v_{f2} \\ v_{f3} \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

Como mencionado anteriormente, as tensões e correntes em um determinado tempo são empregadas para calcular as fontes de corrente históricas que serão usadas no passo de tempo seguinte, de acordo com as formulações (4.13), (5.3b) e (5.5b).

A Figura 5.22 compara as correntes injetadas no início da linha, calculadas pelos modelos descritos anteriormente e simuladas no ATP. Analogamente, a Figura 5.23 compara as tensões no terminal emissor da linha. Nestas simulações foi usado um passo de integração de 1 μ s. No entanto, nas tensões existe um deslocamento em relação à resposta do ATP nos primeiros instantes do período transitório, como mostrado na Figura 5.23b para a fase a , uma das causas é a assimetria da linha (Figura 5.1) que pode não estar bem representada pelo modelo JMarti (GUSTAVSEN et al., 1999).

Figura 5.22 – Correntes injetadas no início da linha

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.23 – Tensões aplicadas no início da linha

a) Regime permanente senoidal

b) Período transitório para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os resultados mostram que o modelo baseado no equivalente de Norton é adequado para sua implementação em EMTPs, considerando que os cálculos apresentam uma boa aproximação em relação aos resultados de simulação com o ATP, além do modelo ser eficiente em termos do tempo de processamento.

5.4. Considerações de precisão

Neste capítulo todos os resultados das simulações foram comparados com os fornecidos pelo programa ATP usando o modelo JMarti. Este modelo, conforme menção anterior, adota uma matriz de transformação constante com a frequência para desacoplar o modelo de fase em modos que podem ser estudados de maneira independente, como se fossem circuitos desacoplados monofásicos. Este procedimento fornece resultados precisos nos casos de configurações simétricas e de linhas transpostas (MARTI, 1982). No entanto, nas situações que envolvem baixas frequências (por exemplo, a transmissão em corrente contínua) e no estudo de perturbações causadas por linhas paralelas de diferentes circuitos, é necessário o uso de matrizes de transformação variáveis com a frequência (GUSTAVSEN et al., 1999).

A linha simulada neste capítulo (Tabela 5.1) é assimétrica não transposta, portanto os resultados de simulação do ATP apresentados podem apresentar uma certa imprecisão. No entanto, estes resultados ainda guardam uma boa aderência com os resultados de modelos de

linha considerados de maior precisão, como o modelo do programa PSCAD. Este programa implementa o modelo de linha ULM (do inglês *Universal Line Model*) proposto por (MORCHED, GUSTAVSEN, & TARTIBI, 1999) e com melhorias introduzidas por (GUSTAVSEN et al., 1999), (SILVA, GOLE, & WEDEPOHL, 2007), (KOCAR, MAHSEREDJIAN, & OLIVIER, 2010) e (GUSTAVSEN & NORDSTROM, 2008). O ULM não é baseado no uso de matrizes de transformação porque é formulado diretamente no domínio de fase e é conhecido por fornecer resultados muito precisos para linhas aéreas e cabos subterrâneos (GUSTAVSEN, 2012).

Neste item são comparados os resultados de simulação usando os programas ATP e PSCAD por meio de dois casos: uma linha assimétrica e um circuito em paralelo composto por duas linhas trifásicas.

Nas simulações obtidas do programa ATP são usados os valores predefinidos de ajuste do modelo de linha JMarti como mencionado no item 5.3.2. Da mesma forma, no programa PSCAD são usados os seus valores predefinidos de ajuste do modelo ULM, que estabelece uma tolerância no ajuste racional de 0,2% para a matriz de admitâncias características e a matriz da função de propagação.

5.4.1. Linha assimétrica

São avaliados os casos de curto-circuito e circuito-aberto, aplicando as mesmas tensões não balanceadas de itens anteriores para a linha da Tabela 5.1 com comprimento de 14 km, mas considera-se uma flecha de sete metros para todas as fases, incluindo o cabo de guarda, devido ao fato que não é possível usar uma flecha independente para cada fase no programa PSCAD.

Na Figura 5.24 mostram-se as correntes injetadas pelas fontes de tensão para o caso da linha em curto-circuito. As tensões no fim da linha em circuito-aberto são mostradas na Figura 5.25. Observa-se que o modelo JMarti do ATP fornece resultados muito precisos em relação ao modelo ULM do PSCAD para o caso em circuito-aberto, mas isto não acontece no caso das correntes em curto-circuito. Tanto no ATP como no PSCAD é usado um passo $\Delta t = 1 \mu s$.

Figura 5.24 – Correntes injetadas no início da linha em curto-circuito

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.25 – Tensões no fim da linha em circuito-aberto

a) Fase A

b) Fase B

c) Fase C

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

5.4.2. Linhas em paralelo

É avaliado um circuito em paralelo composto por duas linhas trifásicas para estudar o efeito do acoplamento mútuo entre fases. Na Tabela 5.4 tem-se os dados das linhas usando a notação do item 5.1. Na Figura 5.26 mostra-se a representação da distribuição geométrica dos condutores. Nota-se que são empregados condutores de alumínio puro (CA) para todos os condutores de fase e cabos-guarda, pelo qual o raio interno (R_{in}) é zero.

Tabela 5.4 - Dados das linhas de transmissão

Fase	Rin [cm]	Rout [cm]	Resis [ohm/km]	Horiz [m]	Vtorre [m]	Vmid [m]	Separ [cm]	Alpha [graus]	NB
C1	0	1,53	0,03842	-10	20	15	-	-	1
C2	0	1,53	0,03842	0	20	15	-	-	1
C3	0	1,53	0,03842	10	20	15	-	-	1
C4	0	1,53	0,03842	63	15	10	-	-	1
C5	0	1,53	0,03842	70	15	10	-	-	1
C6	0	1,53	0,03842	77	15	10	-	-	1
G1	0	0,55245	0.29474	5	30	25	-	-	1
G2	0	0,55245	0.29474	-5	30	25	-	-	1
G3	0	0,55245	0.29474	73,5	22	17	-	-	1
G4	0	0,55245	0.29474	66,5	22	17	-	-	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 5.26 – Geometria do circuito duplo

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os condutores de fase do circuito duplo são nomeados de C1 a C6 no lado emissor e de C7 a C12 no lado receptor. A Figura 5.26 apresenta o corte transversal no lado emissor e a Figura 5.27a apresenta uma vista superior com os condutores numerados. Da Figura 5.26, nota-se que a distância entre os terminais C2 e C5 é de 70 metros.

Para avaliar o acoplamento entre fases, o condutor C1 é energizado com uma fonte degrau unitário, enquanto que os outros terminais são curto-circuitados exceto os terminais C10, C11 e C12, de acordo como na Figura 5.27a.

As tensões nos terminais C10, C11 e C12 são mostradas nas Figuras 5.27b-5.27d. Observa-se que o modelo JMarti do ATP não conseguiu simular o acoplamento entre linhas com a suposição de uma matriz de transformação constante, considerando que o ULM do PSCAD é usado para obter as respostas de referência para este tipo de simulações (GUSTAVSEN, 2012). Nesta simulação é usado um passo $\Delta t = 1 \mu s$ tanto no ATP como no PSCAD.

Nos capítulos subsequentes usa-se o programa PSCAD para obter as respostas de referência dos resultados calculados em Matlab, considerando que este programa fornece resultados mais confiáveis do que o ATP.

Figura 5.27 – Tensões no fim da linha não energizada

a) Energização da linha com degrau unitário de tensão

b) Tensão no terminal C10

c) Tensão no terminal C11

d) Tensão no terminal C12

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Capítulo 6

Simulação com modelo de Linha Dobrada Equivalente

Neste capítulo é avaliado o modelo da linha de transmissão baseado nas matrizes de admitâncias em circuito-aberto e curto-circuito da linha dobrada equivalente (FLE) do item 4.2. Para simulações no domínio do tempo, os resultados com este modelo são comparados os resultados dos modelos de Linha Universal (ULM) proposto por (MORCHED, GUSTAVSEN, & TARTIBI, 1999), disponível no programa PSCAD e também com os resultados obtidos com o equivalente de Norton baseado na matriz de admitâncias nodais, Y_{nod} , do item 4.1.1.2. Com relação aos tempos de computação, são levados em conta os tempos de processamento nas etapas de cálculo do modelo

São também discutidas as vantagens deste modelo em relação ao uso de passos de integração maiores do que o tempo de trânsito da linha, com especial interesse nas linhas muito curtas. Para esta avaliação são testadas linhas de diferentes comprimentos nos casos de curto-circuito e circuito-aberto.

6.1. Introdução

A seguir são apresentados os dados da linha simulada, a descrição da metodologia usada para a modelagem da linha e as motivações para o uso da FLE.

6.1.1. Dados da linha

Os dados para a linha de transmissão são apresentados na Tabela 6.1, com a sua disposição geométrica representada na Figura 6.1a. Cada fase é conformada por um condutor tubular, sendo levado em consideração o efeito pelicular e o efeito de retorno da corrente pela terra

(correção de Carson), para uma resistividade do solo de $100 \Omega \cdot \text{m}$. A disposição geométrica da linha é representada na Figura 6.1a.

Os parâmetros da matriz de impedâncias série, $\mathbf{Z}$, e matriz de admitâncias shunt, $\mathbf{Y}$, são obtidos do programa PSCAD, mas $\mathbf{Y}_{nod}$ é calculada por meio da formulação do item 7.3.3. As matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ não foram calculadas em Matlab com as formulações do Capítulo 7 para não introduzir imprecisões em $\mathbf{Y}_{nod}$, causados pelo cálculo de parâmetros. O objetivo é fazer uma comparação dos modelos apresentados nos itens 4.1.1.2 e 4.2 com o ULM do PSCAD, usando os mesmos parâmetros como base de cálculo dos modelos.

De maneira similar como no foi mencionado no Capítulo 5, a dimensão da matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ é de 6×6 , considerando que $\mathbf{Y}_{nod}$ está relacionada com uma linha equivalente deduzida a partir dos parâmetros $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ da linha da Figura 6.1. A linha equivalente não possui cabos-guarda e está composta por um condutor por cada fase. As simulações de linha no programa PSCAD são baseados no uso dos parâmetros $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ da linha equivalente, em outras palavras, as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ fornecidas pelo PSCAD pertencem à linha equivalente.

Em todas as simulações apresentadas a seguir, as linhas foram energizadas com fontes de tensão trifásicas balanceadas com tensão de linha de 138 kV em série com reatâncias de 110 mH (ver Figura 6.1b). São simulados os casos em circuito-aberto e curto-circuito para diferentes comprimentos de linha, sendo comparado em termos de precisão e eficiência de cálculo o equivalente de Norton do item 4.1.1.2, o equivalente de Norton da FLE (item 4.2) e o ULM do PSCAD, considerando que as respostas simuladas no PSCAD são usadas como referência para as respostas calculadas em Matlab.

As indutâncias conectadas às fontes de tensão permitem que as respostas de tensão e corrente sejam suaves no tempo, a diferença dos resultados obtidos no Capítulo 5 onde não foram usadas indutâncias e as respostas de tensão e corrente no tempo apresentam maiores oscilações em altas frequências.

Tabela 6.1 - Dados da linha de transmissão

Fase	Raio externo [cm]	Raio interno [cm]	Flecha [m]	Resistência DC [ohm/km]
A, B, C	2,03	0,30	5,00	0,032
Cabos-guarda	0,55	-		2,865

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

6.1.2. Metodologia de modelagem

A maioria dos modelos que dependem da variação dos parâmetros com a frequência como os modelos JMarti e ULM, propostos por (MARTI, 1982) e (MORCHED et al., 1999) e disponibilizados nos programas ATP e PSCAD, respectivamente, fazem uso do método das características, que implica o uso de um passo de tempo de simulação menor do que o tempo de trânsito das linhas. O método apresenta problemas de eficiência em termos de processamento para sistemas de grande porte que possuam linhas com comprimentos muito pequenos, porque obriga o uso de passos de tempo muito pequenos para todas as linhas da rede.

Uma alternativa para este tipo de modelo, sem o uso do método das características, foi apresentado por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 2009), que permite obter resultados precisos com linhas curtas, usando passos de tempo maiores do que o tempo de trânsito da linha, mesmo para linhas não transpostas e assimétricas. Este modelo foi apresentado no item 4.2 e é baseado na decomposição de $\mathbf{Y}_{nod}$ nas matrizes $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$, associadas à representação em curto-circuito e circuito-aberto, denominada Linha Dobrada Equivalente (FLE).

Figura 6.1 –Linha de transmissão simulada

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 6.2 mostra a representação equivalente da rede da Figura 6.1b, baseada nos princípios de modelagem estabelecidos inicialmente por (DOMMEL, 1986) e de acordo com as formulações apresentadas nos itens 4.1.1.2, 4.2.3 para a linha de transmissão, e a equação (5.2) para o elemento indutivo. O curto-circuito é aplicado no final da linha por meio de um circuito resistivo em estrela com valor de resistência muito pequeno. Em cada iteração, as fontes de corrente históricas são atualizadas usando os valores calculados na iteração anterior.

Na Figura 6.3 mostram-se os dois modelos avaliados neste capítulo, o equivalente de Norton da FLE e o modelo do item 4.1.1.2. Primeiro começa-se com o cálculo de Y_{nod} para cada valor de frequência, usando a matriz de impedâncias série, Z , e a matriz de admitâncias shunt, Y , por meio da formulação (7.49) do item 7.3.3. No modelo da FLE, Y_{nod} é transformada em duas matrizes Y_{oc} e Y_{sc} (item 4.2.1), associadas à representação em circuito-aberto e curto-circuito da linha dobrada. A cada matriz de maneira independente são aplicados os procedimentos de ajuste (capítulo 2 e item 4.2.2.1), avaliação/imposição de passividade (capítulo 3 e itens 4.2.2.2 - 4.2.2.3) e o cálculo do equivalente de Norton (itens 4.1.1.2 e 4.2.3) que permite o cálculo no domínio do tempo por meio da regra trapezoidal, conforme os programas de Transitórios Eletromagnéticos (EMTPs). Nota-se que no passo final de cálculo do modelo da FLE, os equivalentes de Norton de Y_{oc} e Y_{sc} são combinados em um único circuito equivalente.

Figura 6.2 –Circuito equivalente da Figura 6.1b

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Para o caso da linha em circuito-aberto, a relação entre tensões nodais e correntes injetadas nodais é dada por:

$$\begin{bmatrix} I_{L1} + I_{his1} \\ I_{L2} + I_{his2} \\ I_{L3} + I_{his3} \\ I_{his4} \\ I_{his5} \\ I_{his6} \\ i_{f1} - I_{L1} \\ i_{f2} - I_{L2} \\ i_{f3} - I_{L3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_r(1:6,1:6) & Y_r(1:6,7:9) \\ Y_r(7:9,1:6) & Y_r(7:9,7:9) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_{f1} \\ v_{f2} \\ v_{f3} \end{bmatrix}, \quad (6.1)$$

onde Y_r é a matriz de admitâncias nodais da rede e está dividida em quatro submatrizes; $Y_r(1:6,1:6)$ é constituída pelas seis primeiras colunas e linhas de Y_r , $Y_r(7:9,1:6)$ é formada pelas três últimas linhas e seis primeiras colunas de Y_r , e assim por diante.

Como as tensões dos nós conectados às fontes são conhecidas, as outras tensões nodais e as correntes injetadas pelas fontes são calculadas por meio das expressões:

$$\begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} = [Y(1:6,1:6)]^{-1} \left(\begin{bmatrix} I_{L1} + I_{his1} \\ I_{L2} + I_{his2} \\ I_{L3} + I_{his3} \\ I_{his4} \\ I_{his5} \\ I_{his6} \end{bmatrix} - Y(1:6,7:9) \begin{bmatrix} v_{f1} \\ v_{f2} \\ v_{f3} \end{bmatrix} \right), \quad (6.2)$$

$$\begin{bmatrix} i_{f1} \\ i_{f2} \\ i_{f3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{L1} \\ I_{L2} \\ I_{L3} \end{bmatrix} + Y(7:9,1:6) \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \end{bmatrix} + Y(7:9,7:9) \begin{bmatrix} v_{f1} \\ v_{f2} \\ v_{f3} \end{bmatrix}. \quad (6.3)$$

Para o caso de energização em curto-circuito, as equações anteriores são válidas mas com a substituição de $Y(1:6,1:6)$ por:

$$Y'(1:6,1:6) = Y(1:6,1:6) + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R \end{bmatrix}, \quad (6.4)$$

onde R representa a resistência de curto-circuito dada por um valor pequeno e arbitrário. Para as simulações a seguir foi usado um valor $R = 0,001 \Omega$.

6.2. Resultados de simulações

São comparados os tempos de processamento na construção do modelo para cada método (Figura 6.3). São também avaliadas simulações no tempo para diferentes eventos e comprimentos de linha.

Figura 6.3 –Métodos para a modelagem da linha de transmissão

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os modelos são implementados em Matlab v8.5.0, usando um computador desktop com processador Intel Core i7 7700 CPU 3.6 GHz e sistema operativo Windows 10, os mesmos recursos computacionais do Capítulo 5.

Nas simulações obtidas do programa PSCAD são usados os valores predefinidos de ajuste do modelo de linha ULM, que estabelecem uma tolerância no ajuste racional de 0,2% para a matriz de admitâncias características e a matriz da função de propagação

6.2.1. Tempos de processamento

Nas Tabelas 6.2-6.4 têm-se os tempos de processamento nas etapas de ajuste, avaliação, imposição de passividade e cálculo dos equivalentes de Norton baseados em $Y_{nod,aj,pas}$ e na FLE (constituída por $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$), para comprimentos de 250 km, 5 km e 300 m. Os tempos são medidos usando o comando *tic toc* de Matlab.

Tabela 6.2 – Tempos de processamento em segundos para uma linha de 250 km

Modelo	Aplicação VF			Avaliação Passividade			Imposição Passividade			Equivalente de Norton
$Y_{nod,aj,pas}$	0,884			0,495			16,483			0,101
FLE	oc	0,245	0,399	oc	0,042	0,162	oc	0,000	2,197	0,018
	sc	0,154		sc	0,120		sc	2,197		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 6.3 – Tempos de processamento em segundos para uma linha de 5 km

Modelo	Aplicação VF			Avaliação Passividade			Imposição Passividade			Equivalente de Norton
$Y_{nod,aj,pas}$	1,042			1,224			25,139			0,184
FLE	oc	0,246	0,401	oc	0,016	0,091	oc	0,000	2,424	0,157
	sc	0,155		sc	0,074		sc	2,424		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 6.4 – Tempos de processamento em segundos para uma linha de 300 m

Modelo	Aplicação VF			Avaliação Passividade			Imposição Passividade			Equivalente de Norton
$Y_{nod,aj,pas}$	1,216			1,538			36,839			0,086
FLE	oc	0,264	0,458	oc	0,260	0,445	oc	3,181	6,178	0,096
	sc	0,194		sc	0,185		sc	2,996		

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 6.4 tem-se o módulo e o ângulo de fase para o elemento da primeira fila e primeira coluna de Y_{nod} , Y_{oc} e Y_{sc} e dos seus modelos ajustados obtidos por meio do VF: $Y_{nod,aj}$, $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$, respectivamente, para uma linha de 250 km e uma faixa de frequências entre 0,5 e 10^4 Hz, suficiente para abranger os efeitos oscilatórios em altas frequências como

mostrado nas simulações do item 6.2.2. Os outros elementos destas matrizes apresentam um comportamento similar, com uma boa representação por parte dos modelos.

Nas Tabelas 6.2-6.4 observa-se que o tempo de processamento em cada etapa no processo de modelagem é menor para a FLE, exceto no tempo de processamento para o cálculo do equivalente de Norton na linha de 300 m. Todas as matrizes Y_{nod} , Y_{oc} e Y_{sc} são ajustadas com 75 polos.

A Figura 6.4 mostra que as matrizes Y_{oc} e Y_{sc} apresentam um menor número de picos de ressonância do que Y_{nod} . Quanto menor o número de picos de ressonância, menor é o número de iterações que precisa o VF para a convergência na realocação dos polos. Assim o tempo de aplicação do VF é menor para as matrizes Y_{oc} e Y_{sc} do que para Y_{nod} .

A maior diferença no tempo de processamento está na imposição de passividade, pois nesta etapa o tempo cresce cubicamente com a dimensão da matriz ajustada e a dimensão das matrizes Y_{oc} e Y_{sc} são a metade da dimensão da matriz Y_{nod} .

Figura 6.4 –Módulo e ângulos de fase do elemento (1,1) de $Y_{nod,aj}$, $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$ para a linha de 250 km

c) Y_{sc}

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na etapa de imposição de passividade os modelos $Y_{nod,aj}$, $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$ são modificados de maneira independente por meio do método *Fast Modal Perturbation* (FMP), para que a restrição (3.12) seja respeitada (item 3.2.2), obtendo nesta etapa os modelos passivos $Y_{nod,aj,pas}$, $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$. A Figura 6.5 mostra os autovalores das matrizes de condutâncias, antes e depois da imposição de passividade no modelo da linha de 250 km, obtendo autovalores maiores que zero para todas as frequências no modelo passivo. Os autovalores de Y_{nod} podem ser melhor representados por meio dos modelos $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$ do que $Y_{nod,aj,pas}$ (ver item 4.2.1.2). Também observa-se que a aplicação do VF em Y_{oc} gera um modelo passivo que não precisa da imposição da passividade.

Figura 6.5 –Autovalores da matriz de condutâncias para a linha de 250 km

a) $Y_{nod,aj}$ b) $Y_{nod,aj,pas}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 6.6 mostra o módulo e o ângulo de fase para o elemento da primeira fila e primeira coluna de Y_{nod} , Y_{oc} e Y_{sc} e dos seus modelos passivos obtidos por meio da FMP: $Y_{nod,aj}$, $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$, respectivamente, para uma linha de 250 km. Os outros elementos de Y_{nod} , Y_{oc} e Y_{sc} também são ajustados com precisão por parte dos modelos passivos.

A Tabela 6.5 mostra os tempos de processamento para os casos de curto-circuito trifásico e circuito-aberto, usando comprimentos de 5 km, 250 km e 300 m, nesta tabela não são considerados os tempos de processamento de cálculo dos modelos. Também são apresentados os passos de integração, o intervalo de tempo calculado e o tempo de trânsito da linha (dado pelo menor tempo de trânsito modal). Na Tabela 6.5 observa-se que não existe uma vantagem sobre qualquer um dos dois modelos avaliados, o modelo da FLE é mais eficiente do que o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$ nos testes em circuito-aberto, mas isto não acontece nos testes em curto-circuito.

Figura 6.6 – Módulo e ângulos de fase do elemento (1,1) de $Y_{nod,aj,pas}$, $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$ para a linha de 250 km

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Em todos os testes foi usado um passo de integração menor do que o tempo de trânsito da linha, obtendo-se resultados muito próximos dos resultados fornecidos pelo Modelo Universal da Linha (ULM). No entanto, nos testes em circuito-aberto com comprimentos de 5 km e 300

m, para o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$ os resultados foram imprecisos em relação ao ULM.

A aplicação da *Singular Test Matrix* (STM) e o *Fast Modal Perturbation* (FMP) em $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$, ao invés de aplicá-los em $Y_{nod,aj}$, melhora o tempo de processamento, porque o número de operações envolvidas na STM e o FMP cresce cubicamente com a dimensão da matriz ajustada. Assim, o tempo de processamento em cada iteração na aplicação da STM e o FMP para $Y_{oc,aj}$ e $Y_{sc,aj}$ é um quarto do tempo para $Y_{nod,aj}$.

Tabela 6.5 – Tempos de processamento em segundos

Modelo	250 km; $\tau=0,8$ ms		5 km; $\tau=16,7$ μ s		300 m; $\tau=0,993$ μ s	
	Curto-circuito $\Delta t=10$ μ s ; $t_{max}=70$ ms	Circuito-aberto $\Delta t=10$ μ s ; $t_{max}=70$ ms	Curto-circuito $\Delta t=10$ μ s ; $t_{max}=70$ ms	Circuito-aberto $\Delta t=1$ μ s ; $t_{max}=25$ ms	Curto-circuito $\Delta t=0,1$ μ s ; $t_{max}=0,03$ s	Circuito-aberto $\Delta t=0,1$ μ s ; $t_{max}=0,003$ s
$Y_{nod,aj,pas}$	0,074	1,107	0,087	3,673	46,744	4,606
FLE	0,601	0,809	0,610	2,868	33,968	2,964

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

6.2.2. Simulações no tempo

A Tabela 6.6 mostra os testes realizados para os eventos de curto-circuito trifásico e circuito-aberto, com comprimentos de 250 km, 5 km e 300 m, usando os equivalentes de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$ e da FLE. Os resultados foram classificados como precisos ($\checkmark$) ou imprecisos (X) em relação aos resultados obtidos com o ULM. As simulações foram realizadas usando passos de tempo, Δt , menores e maiores do que o tempo de trânsito da linha, τ . Na última coluna apresenta-se o modelo com o melhor desempenho, o símbolo “=” significa que os dois modelos apresentam resultados equivalentes.

Tabela 6.6 – Comparação dos resultados de simulação com o ULM

Evento	Comprimento [km]	Modelo	Resultado		FLE vs. $Y_{nod,aj,pas}$
			$\Delta t < \tau$	$\Delta t > \tau$	
Curto-circuito	250	FLE	$\checkmark$	X	=
		$Y_{nod,aj,pas}$	$\checkmark$	X	
	5	FLE	$\checkmark$	$\checkmark$	=
		$Y_{nod,aj,pas}$	$\checkmark$	$\checkmark$	
	0,3	FLE	$\checkmark$	$\checkmark$	=
		$Y_{nod,aj,pas}$	$\checkmark$	$\checkmark$	

Circuito-aberto	250	FLE	√	X	=
		$Y_{nod,aj,pas}$	√	X	
	5	FLE	√	X	FLE
		$Y_{nod,aj,pas}$	X	X	
	0,3	FLE	√	√	FLE
		$Y_{nod,aj,pas}$	X	X	

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nos casos de simulação usando passos de tempo, Δt , maiores do que o tempo de trânsito da linha, foram empregados valores de Δt iguais a 1 ms, 30 μ s e 1,9 μ s nos comprimentos de 250 km, 5 km e 300 m, respectivamente.

Dos resultados da Tabela 6.5 observa-se que existe uma vantagem da FLE sobre o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$ para linhas muito curtas, apresentando ótimos resultados mesmo com passos de tempo maiores do que o tempo de trânsito da linha ($\Delta t > \tau$).

Para linhas muito longas, não é conveniente usar um passo de tempo maior do que o tempo de trânsito da linha porque o valor de τ neste caso pode ser maior do que o período das oscilações de alta frequência do período transitório.

A Figura 6.7a mostra as correntes injetadas em um extremo da linha de 250 km no evento de curto-circuito trifásico. Foram obtidas respostas equivalentes usando o equivalente de Norton da FLE para $\Delta t < \tau$. Realizando o mesmo teste, mas usando o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$, obtém-se resultados muito próximos aos apresentados na Figura 6.7. O desvio da corrente da fase a para a FLE em relação ao ULM é apresentado na Figura 6.7b, sendo este desvio menor do que 0.01 p.u. (valores de base: 100 MVA e 138 kV). Mas quando são empregados passos de tempo Δt maiores do que τ , obtêm-se resultados com erros.

Na Figura 6.8 apresentam-se as correntes de curto-circuito trifásico para as linhas de 5 km e 300 m usando o equivalente de Norton da FLE. Para as linhas de 5 km e 300 m é possível obter resultados precisos com passos de tempo, Δt , duas e cinco vezes maiores do que o tempo de trânsito da linha para os comprimentos de 5 km e 300 m, respectivamente. Resultados muito próximos aos apresentados na Figura 6.8 foram obtidos usando o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$.

Na Figura 6.9 têm-se as tensões no fim da linha de 250 km em circuito-aberto, ambos para $\Delta t < \tau$, usando o equivalente de Norton da FLE. Os resultados de simulação dos equivalentes de Norton da FLE e de $Y_{nod,aj,pas}$ são muito próximos dos fornecidos pelo ULM, mas não é possível usar um $\Delta t > \tau$ em nenhum dos dois equivalentes de Norton.

Figura 6.7 –Curto-circuito trifásico para uma linha de 250 km, com $\Delta t < \tau$ e $\Delta t = 10 \mu s$

a) Correntes calculadas pelos modelos da FLE e ULM

b) Desvio entre os resultados dos modelos da FLE e ULM para a fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

As Figuras 6.10 e 6.11 mostram as tensões no terminal receptor da linha em circuito-aberto para comprimentos de 5 km e 300 m, respectivamente. As Figuras 6.10a e 6.11a mostram as respostas calculadas usando o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$, para $\Delta t < \tau$, mas nas Figuras 6.10b e 6.11b é usado o equivalente de Norton da FLE, igualmente para $\Delta t < \tau$.

Figura 6.8 –Curto-circuito trifásico para linhas de 5 km e 300 m

a) 5 km, $\Delta t = 10 \mu s$

b) 300 m, $\Delta t = 0,1 \mu s$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Para linhas muito curtas em circuito-aberto, o equivalente de Norton de $Y_{nod,aj,pas}$ não consegue fornecer uma resposta precisa, como observado nas Figuras 6.10a e 6.11a. Não obstante, o modelo baseado na FLE fornece resultados precisos, mesmo com passos de tempo maiores do que o tempo de trânsito da linha ($\Delta t > \tau$), ver Figuras 6.10b e 6.11b.

Na Figura 6.11c foi usado um passo de tempo $\Delta t = 1,9 \mu s$ no equivalente de Norton da FLE e o ULM para a linha de 300 m, sendo que Δt é maior do que $\tau = 1 \mu s$, verificando-se que o modelo da FLE conserva a precisão, ao contrário do ULM, que não fornece a resposta esperada. O equivalente de Norton da FLE também consegue conservar a precisão para $\Delta t > \tau$ para a linha de 5 km, como mostrado na Figura 6.10c.

Figura 6.9 – Tensões no fim da linha de 250 km em circuito-aberto, com $\Delta t = 10 \mu s$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 6.10 – Tensões no fim da linha em circuito-aberto, com comprimento de 5 km, $\tau = 16,7 \mu s$

a) $Y_{nod,aj,pas}$, $\Delta t = 1 \mu s$

b) FLE, $\Delta t = 1 \mu s$ c) Tensões na fase α

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 6.12 mostra os autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ e do modelo ajustado $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$. Na Figura 6.12b compara-se os autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ com o conjunto união dos autovalores de $\mathbf{Y}_{oc,aj,pas}$ e $\mathbf{Y}_{sc,aj,pas}$, lembrando que o conjunto união dos autovalores de $\mathbf{Y}_{oc}$ e $\mathbf{Y}_{sc}$ é igual ao conjunto dos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ (item 4.2.1.2). Assim, na Figura 6.12 observa-se que os autovalores do modelo ajustado de $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$ não fornece os resultados esperados nas simulações no tempo para linhas muito curtas porque não consegue representar com precisão os autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$.

No entanto, com o modelo FLE a união dos autovalores das matrizes $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$ fornece um ajuste melhor para os autovalores de Y_{nod} .

Figura 6.11 –Tensões no fim da linha em circuito-aberto, com comprimento de 300 m, $\tau \approx 1,0 \mu s$

a) $Y_{nod,aj,pas}$, $\Delta t = 0,1 \mu s$

b) FLE, $\Delta t = 0,1 \mu s$

c) Tensões na fase *a*

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Analogamente, como apresentado na Figura 6.12a, que mostra a comparação dos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ com os autovalores dos modelos ajustados $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$, na Figura 6.13a mostra-se os autovalores da matriz de impedâncias nodais $\mathbf{Z}_{nod} = \mathbf{Y}_{nod}^{-1}$ e de $\mathbf{Z}_{nod,aj,pas}$. Sendo que os autovalores de $\mathbf{Z}_{nod,aj,pas}$ são calculados, para cada valor de frequência, da matriz inversa do modelo ajustado $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$.

Figura 6.12 – Autovalores dos modelos ajustados para a linha de 300 m.

a) Comparação dos autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ e $\mathbf{Y}_{nod,aj,pas}$.

b) Comparação dos autovalores de Y_{nod} , $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 6.13b mostra-se os autovalores de Z_{nod} , $Z_{oc,aj,pas}$ e $Z_{sc,aj,pas}$. Sendo que os autovalores de $Z_{oc,aj,pas}$ são calculados, para cada valor de frequência, da matriz inversa do modelo ajustado $Y_{oc,aj,pas}$. Da mesma forma são calculados os autovalores de $Z_{sc,aj,pas}$ a partir de $Y_{sc,aj,pas}$. Nota-se que o conjunto união dos autovalores de Z_{oc} e Z_{sc} é igual ao conjunto dos autovalores de Z_{nod} (item 4.2.1.2).

Nota-se nas Figuras 6.12a e 6.13a que na linha de 300 m os autovalores das matrizes $Y_{nod,aj,pas}$ e $Z_{nod,aj,pas}$ não são precisos em relação aos autovalores de Y_{nod} e Z_{nod} , respectivamente.

Para linhas longas, $Y_{nod,aj,pas}$ e $Z_{nod,aj,pas}$ ajustam com precisão os autovalores de Y_{nod} e Z_{nod} , respectivamente, para quase todas as frequências, como mostrado na Figura 6.14 para a linha de 250 km. Em linhas longas é possível obter um bom ajuste para os autovalores de Y_{nod} e Z_{nod} , ao contrário das linhas curtas, onde $Y_{nod,aj,pas}$ e $Z_{nod,aj,pas}$ não fornecem autovalores precisos. A falta de precisão na representação dos autovalores para linhas curtas justifica a imprecisão das simulações no tempo nos testes em circuito-aberto, como mostrado na Tabela 6.5.

Nas Figuras 6.12b e 6.13b observa-se que na linha de 300 m, o conjunto união dos autovalores de $Y_{oc,aj,pas}$ e $Y_{sc,aj,pas}$ ajusta com precisão os autovalores de Y_{nod} . De maneira

similar, os autovalores de $\mathbf{Z}_{nod}$ são representados de maneira precisa pelo conjunto união dos autovalores de $\mathbf{Z}_{oc,aj,pas}$ e $\mathbf{Z}_{sc,aj,pas}$.

Figura 6.13 – Autovalores dos modelos ajustados para a linha de 300 m.

a) Comparação dos autovalores de $\mathbf{Z}_{nod}$ e $\mathbf{Z}_{nod,aj,pas}$.

b) Comparação dos autovalores de $\mathbf{Z}_{nod}$, $\mathbf{Z}_{oc,aj,pas}$ e $\mathbf{Z}_{sc,aj,pas}$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

As matrizes ajustadas $\mathbf{Y}_{oc,aj,pas}$ e $\mathbf{Y}_{sc,aj,pas}$ da FLE também representam com precisão os autovalores de $\mathbf{Y}_{nod}$ para os comprimentos de 250 km e 5 km. Igualmente, os autovalores de $\mathbf{Z}_{nod}$ são representados com precisão pelos autovalores de $\mathbf{Z}_{oc,aj,pas}$ e $\mathbf{Z}_{sc,aj,pas}$.

Figura 6.14 – Autovalores dos modelos ajustados para a linha de 250 km.

a) Comparação dos autovalores de Y_{nod} e $Y_{nod,aj,pas}$.

b) Comparação dos autovalores de Y_{nod} e $Y_{nod,aj,pas}$.

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

O VF consegue ajustar melhor as matrizes Y_{oc} e Y_{sc} do que Y_{nod} porque o número de condicionamento κ de Y_{nod} , dado pela razão entre a magnitude máxima e mínima dos autovalores de Y_{nod} , calculado para cada valor de frequência,

$$\kappa(\omega) = \frac{\max(|\text{eig}(Y_{nod}(j\omega))|)}{\min(|\text{eig}(Y_{nod}(j\omega))|)} \quad (6.1)$$

é maior do que os valores de κ para Y_{oc} e Y_{sc} .

Figura 6.15 – Número de condicionamento, κ , de Y_{nod} , Y_{oc} e Y_{sc} .

a) Linha de 300 m

a) Linha de 250 km

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Um valor de κ muito grande causa problemas de precisão na representação dos autovalores para o modelo ajustado. Na Figura 6.15a observa-se que o valor de κ , para a linha de 300 m, é maior para Y_{nod} do que para Y_{oc} e Y_{sc} , especialmente nas baixas frequências.

Assim, o modelo $Y_{nod,aj,pas}$ não consegue ajustar com precisão os autovalores de Y_{nod} , principalmente nas baixas frequências.

Um comportamento similar à Figura 6.15b é observado na linha de 250 km, com o valor de κ muito maior para Y_{nod} do que para Y_{oc} e Y_{sc} . No entanto, o valor de κ de Y_{nod} é muito maior para o comprimento de 300 m do que na para 250 km, especialmente nas baixas frequências, por esta razão os autovalores de Y_{nod} são representados pelos autovalores de $Y_{nod,aj,pas}$ de maneira mais precisa para a linha de 250 km do que para a linha de 300 m.

Capítulo 7

Cálculo de Parâmetros de Linhas de Transmissão Aéreas

Neste capítulo é apresentada a formulação para o cálculo da matriz de impedâncias série por unidade de comprimento $\mathbf{Z}$, a matriz de admitâncias shunt por unidade de comprimento $\mathbf{Y}$ e a matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão $\mathbf{Y}_{nod}$. O efeito pelicular e a resistividade do solo são levados em conta, sendo apresentadas diversas abordagens para o cálculo da resistência interna e o efeito do retorno da corrente pela terra. São considerados condutores sólidos e tubulares. Os resultados são validados com os valores simulados no programa PSCAD e ATP.

7.1. Matriz de impedâncias série

Os elementos da matriz de impedâncias série $\mathbf{Z}$ são calculados a partir da disposição espacial dos condutores (Figura 7.1) e as suas características dos condutores e do solo. As impedâncias próprias de $\mathbf{Z}$ em $[\Omega/\text{m}]$ são calculadas pela fórmula:

$$z_{ii} = (r_{i-int} + \Delta r_{ii}^c) + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i} + x_{i-int} + \Delta x_{ii}^c \right), \quad (7.1)$$

e as impedâncias mútuas de $\mathbf{Z}$ em $[\Omega/\text{m}]$ são dadas por:

$$z_{ij} = \Delta r_{ij}^c + j \left(\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}} + \Delta x_{ij}^c \right), \quad (7.2)$$

Os termos em (7.1) e (7.2) representam:

- $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7} [\text{H/m}]$: permeabilidade magnética do vácuo.
- $\omega = 2\pi f$: sendo f a frequência em [Hz].

- $\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{2h_i}{r_i}$, $\omega \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}}$: reatância externa própria e mútua, respectivamente, em $[\Omega/\text{m}]$.
- r_{i-int} : resistência interna do condutor i em $[\Omega/\text{m}]$.
- x_{i-int} : reatância interna do condutor i em $[\Omega/\text{m}]$.
- $z_{i-int} = r_{i-int} + jx_{i-int}$: impedância interna do condutor i em $[\Omega/\text{m}]$.
- Δr_{ii}^c , Δx_{ii}^c , Δr_{ij}^c , Δx_{ij}^c : termos de correção para incluir os efeitos de retorno pela terra em $[\Omega/\text{m}]$.
- $\Delta z_{ii}^c = \Delta r_{ii}^c + j\Delta x_{ii}^c$: impedância própria de retorno pela terra para o condutor i em $[\Omega/\text{m}]$.
- $\Delta z_{ij}^c = \Delta r_{ij}^c + j\Delta x_{ij}^c$: impedância mútua de retorno pela terra para os condutores i e j em $[\Omega/\text{m}]$.
- h_i : altura média do condutor i em relação ao solo em $[\text{m}]$ (ver item B.3).
- r_i : raio do condutor i em $[\text{m}]$.
- D_{ij} : distância entre o condutor i e a imagem do condutor j em $[\text{m}]$.
- d_{ij} : distância entre os condutores i e j em $[\text{m}]$.
- x_{ij} : distância horizontal entre os condutores i e j em $[\text{m}]$.

Figura 7.1 – Disposição espacial dos condutores e as suas imagens

Fonte: Adaptado de DOMMEL (1986, p. 4-6).

7.1.1. Impedância de retorno pela terra

A impedância de retorno para a terra Δz^c pode ser formulada por meio de séries infinitas (CARSON, 1926) ou uma expressão aproximada baseada no uso de um plano de retorno para a terra situado a uma profundidade complexa (DERI, TEVAN, SEMLYEN, & CASTANHEIRA, 1981). Mas as séries infinitas da formula de Carson podem ser expressas de uma maneira mais conveniente para a sua implementação em uma rotina computacional (DOMMEL, 1986). Nas formulações apresentadas a seguir neste item não é considerada a estratificação do solo nem a variação da resistividade do solo com a frequência.

7.1.1.1. Correção de Carson

A propagação de onda ao longo de uma linha de transmissão aérea levando em conta o retorno das correntes pela terra é um problema que foi resolvido de maneira satisfatória por (CARSON, 1926), considerando a terra como um plano infinito sólido paralelo aos condutores perfeitamente horizontais.

Outras suposições desta formulação são: I) os condutores são suficientemente longos, podendo os campos elétrico e magnético ser tratados em duas dimensões. II) A flecha do condutor é levada em conta usando a sua altura média (item B.3). III) o espaço aéreo é homogêneo sem perdas, com permeabilidade μ_0 e permitividade ϵ_0 . IV) O solo é homogêneo com resistividade uniforme, permeabilidade μ_0 e permitividade ϵ_0 . Para valores usuais de resistividades, o solo comporta-se como condutor, isto é $1/\rho \gg \omega\epsilon_0$, para toda a faixa de frequências usada nos modelos de linha e, portanto, as correntes de deslocamento não são levadas em consideração. V) A distância entre condutores de fases diferentes, d_{ij} , é pelo menos uma ordem de grandeza maior do que o raio dos condutores, r_i , para poder ignorar a influência na distribuição de corrente dentro de um condutor por causa de um condutor adjacente.

As impedâncias mútuas e próprias de retorno pela terra são dadas por

$$\Delta z_{ii}^c = \Delta r_{ii}^c + j\Delta x_{ii}^c = 4\omega \cdot 10^{-7} J(2h_i', 0), \quad (7.3)$$

$$\Delta z_{ij}^c = \Delta r_{ij}^c + j\Delta x_{ij}^c = 4\omega \cdot 10^{-7} J(h_i' + h_j', x_{ij}'), \quad (7.4)$$

onde

$$J(p, q) = \int_0^\infty (\sqrt{\mu^2 + j} - \mu) e^{-2p\mu} \cos(q\mu) d\mu, \quad (7.5)$$

$$h'_i = h_i \sqrt{\alpha}, \quad (7.6)$$

$$h'_j = h_j \sqrt{\alpha}, \quad (7.7)$$

$$x'_{ij} = x_{ij} \sqrt{\alpha}, \quad (7.8)$$

$$\alpha = 4\pi\omega\lambda. \quad (7.9)$$

Sendo λ a condutividade do solo em abmhos¹ por centímetro. Nesta formulação, Δz_{ii}^c e Δz_{ij}^c são dadas em $[\Omega/\text{m}]$ e h_i, h_j, x_{ij} em $[\text{cm}]$. Para mudar as unidades da condutividade de $[(\Omega \cdot \text{m})^{-1}]$ para abmhos por centímetro, é usada a expressão $10^{-11}/\rho$, onde ρ é a resistividade em $[\Omega \cdot \text{m}]$. Assumindo a terra como um condutor perfeito, os termos Δz_{ii}^c e Δz_{ij}^c seriam iguais a zero.

A solução para $J(p, q) = P + jQ$ é baseada em séries infinitas. Para garantir a convergência destas séries, são propostas diferentes formulações dependendo do valor de $r = \sqrt{p^2 + q^2}$.

Para $r < 5$, tem-se:

$$P = \frac{\pi}{8}(1 - s_4) + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{\gamma r} \right) s_2 + \frac{1}{2} \theta \cdot s'_2 - \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 + \frac{1}{2} \sigma_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_3, \quad (7.10)$$

$$Q = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \left(\ln \frac{2}{\gamma r} \right) (1 - s_4) - \frac{1}{2} \theta \cdot s'_4 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_1 - \frac{\pi}{8} s_2 + \frac{1}{\sqrt{2}} \sigma_3 - \frac{1}{2} \sigma_4, \quad (7.11)$$

onde $\ln \gamma = 0,57722$ é igual à constante de Euler-Mascheroni e

$$\theta = \tan^{-1}(q/p), \quad (7.12a)$$

$$s_2 = \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \cos 2\theta - \frac{1}{3! 4!} \left(\frac{r}{2} \right)^6 \cos 6\theta + \dots, \quad (7.12b)$$

$$s'_2 = \frac{1}{1! 2!} \left(\frac{r}{2} \right)^2 \sin 2\theta - \frac{1}{3! 4!} \left(\frac{r}{2} \right)^6 \sin 6\theta + \dots, \quad (7.12c)$$

$$s_4 = \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{r}{2} \right)^4 \cos 4\theta - \frac{1}{4! 5!} \left(\frac{r}{2} \right)^8 \cos 8\theta + \dots, \quad (7.12d)$$

$$s'_4 = \frac{1}{2! 3!} \left(\frac{r}{2} \right)^4 \sin 4\theta - \frac{1}{4! 5!} \left(\frac{r}{2} \right)^8 \sin 8\theta + \dots, \quad (7.12e)$$

¹ O abmho é uma unidade de condutância elétrica no sistema de unidades CGS (centímetro-gramo-segundo)

$$\sigma_1 = \frac{r \cos \theta}{3} - \frac{r^5 \cos 5\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7} + \frac{r^9 \cos 9\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11} - \dots, \quad (7.12f)$$

$$\sigma_2 = \left(1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) \frac{1}{1!2!} \left(\frac{r}{2}\right)^2 \cos 2\theta - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}\right) \frac{1}{3!4!} \left(\frac{r}{2}\right)^6 \cos 6\theta + \dots, \quad (7.12g)$$

$$\sigma_3 = \frac{r^3 \cos 3\theta}{3^2 \cdot 5} - \frac{r^7 \cos 7\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9} + \frac{r^{11} \cos 11\theta}{3^2 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 9^2 \cdot 11^2 \cdot 13} - \dots, \quad (7.12h)$$

$$\sigma_4 = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6}\right) \frac{1}{2!3!} \left(\frac{r}{2}\right)^4 \cos 4\theta - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10}\right) \frac{1}{4!5!} \left(\frac{r}{2}\right)^8 \cos 8\theta + \dots. \quad (7.12i)$$

Para $r > 5$, tem-se:

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{\cos 2\theta}{r^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 3\theta}{r^3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos 5\theta}{r^5} - \dots, \quad (7.13)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{r} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 3\theta}{r^3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos 5\theta}{r^5} - \dots, \quad (7.14)$$

Para $r > 10$, o cálculo pode-se reduzir a:

$$J = P + jQ = \frac{1 + j \cos \theta}{\sqrt{2}} \frac{1}{r} - \frac{\cos 2\theta}{r^2}, \quad (7.15)$$

7.1.1.2. Correção de Carson – fórmula equivalente

Em (DOMMEL, 1986) as séries do item anterior para o cálculo de J são organizadas para uma maior facilidade de implementação para o cálculo computacional.

$$\Delta z_{ii}^c = \Delta r_{ii}^c + j\Delta x_{ii}^c = 4\omega \cdot 10^{-7} J_2(k_{ii}, \phi_{ii}), \quad (7.16)$$

$$\Delta z_{ij}^c = \Delta r_{ij}^c + j\Delta x_{ij}^c = 4\omega \cdot 10^{-7} J_2(k_{ij}, \phi_{ij}). \quad (7.17)$$

De (7.3)-(7.4) e (7.16)-(7.17) observa-se que $J(2h_i', 0) = J_2(k_{ii}, \phi_{ii})$ e $J(h_i' + h_j', x_{ij}') = J_2(k_{ij}, \phi_{ij})$. Para as impedâncias próprias de retorno pela terra tem-se

$$k_{ii} = 4\pi\sqrt{5} \cdot 10^{-4} (2h_i) \sqrt{\frac{f}{\rho}}, \quad (7.18)$$

$$\phi_{ii} = 0. \quad (7.19)$$

Para as impedâncias mútuas:

$$k_{ij} = 4\pi\sqrt{5} \cdot 10^{-4} D_{ij} \sqrt{\frac{f}{\rho}}, \quad (7.20)$$

$$\phi_{ij} = \cos^{-1} \frac{h_i + h_j}{D_{ij}}. \quad (7.21)$$

Nesta formulação, as unidades de Δz_{ii}^c e Δz_{ij}^c são $[\Omega/\text{m}]$, ρ em $[\Omega \cdot \text{m}]$, h_i , h_j e D_{ij} em $[\text{m}]$ e f em $[\text{Hz}]$.

A expressão de $J_2(k, \phi) = P + jQ$ depende dos parâmetros k e ϕ dados pelas expressões (7.20)-(7.21), respectivamente. Para $k \leq 5$, tem-se:

$$\begin{aligned} P = & \pi/8 - b_1 k \cos \phi + b_2 [(c_2 - \ln k) k^2 \cos 2\phi + \phi k^2 \sin 2\phi] + b_3 k^3 \cos 3\phi \\ & - d_4 k^4 \cos 4\phi - b_5 k^5 \cos 5\phi \\ & + b_6 [(c_6 - \ln k) k^6 \cos 6\phi + \phi k^6 \sin 6\phi] + b_7 k^7 \cos 7\phi \\ & - d_8 k^8 \cos 8\phi - b_9 k^9 \cos 9\phi \\ & + b_{10} [(c_{10} - \ln k) k^{10} \cos 10\phi + \phi k^{10} \sin 10\phi] + b_{11} k^{11} \cos 11\phi \\ & - d_{12} k^{12} \cos 12\phi - \dots, \end{aligned} \quad (7.22)$$

$$\begin{aligned} Q = & 0.5(0,6159315 - \ln k) + b_1 k \cos \phi - d_2 k^2 \cos 2\phi + b_3 k^3 \cos 3\phi \\ & - b_4 [(c_4 - \ln k) k^4 \cos 4\phi + \phi k^4 \sin 4\phi] + b_5 k^5 \cos 5\phi \\ & - d_6 k^6 \cos 6\phi + b_7 k^7 \cos 7\phi \\ & - b_8 [(c_8 - \ln k) k^8 \cos 8\phi + \phi k^8 \sin 8\phi] + b_9 k^9 \cos 9\phi \\ & - d_{10} k^{10} \cos 10\phi + b_{11} k^{11} \cos 11\phi \\ & - b_{12} [(c_{12} - \ln k) k^{12} \cos 12\phi + \phi k^{12} \sin 12\phi] + \dots. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Das expressões (7.22)-(7.23) observa-se que existe um padrão a cada 4 termos. Os coeficientes b_i , c_i e d_i são calculados usando as fórmulas recursivas:

$$b_1 = \sqrt{2}/6, \quad (7.24)$$

$$b_2 = 1/16, \quad (7.25)$$

$$b_i = b_{i-2} \frac{\sin \alpha}{i(i+2)}, \quad (7.26)$$

$$c_i = c_{i-2} + \frac{1}{i} + \frac{1}{i+2}, \quad (7.27)$$

$$c_2 = 1,3659315, \quad (7.28)$$

$$d_i = \frac{\pi}{4} b_i \quad (7.29)$$

O coeficiente $sinal = \pm 1$, mudando de valor a cada quatro termos de maneira sucessiva ($sinal = +1$ para $i = 1,2,3,4$; $sinal = -1$ para $i = 5,6,7,8$; $sinal = +1$ para $i = 9,10,11,12$; etc).

Para $k > 5$, a seguinte série fornece melhores resultados (BUTTERWORTH, 1954):

$$P = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{k} - \frac{\cos 2\theta}{k^2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 3\theta}{k^3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos 5\theta}{k^5} - \frac{45}{\sqrt{2}} \frac{\cos 7\theta}{k^7}, \quad (7.30)$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos \theta}{k} - \frac{1}{\sqrt{2}} \frac{\cos 3\theta}{k^3} + \frac{3}{\sqrt{2}} \frac{\cos 5\theta}{k^5} + \frac{45}{\sqrt{2}} \frac{\cos 7\theta}{k^7}, \quad (7.31)$$

7.1.1.3. Correção de Carson – análise em regime permanente senoidal

As séries infinitas para o cálculo de J podem ser simplificadas para o caso de análise em estado estacionário a 60 [Hz]. Considerando as expressões (7.18)-(7.21), as expressões simplificadas de (7.22)-(7.23) para uma frequência de 60 [Hz] são definidas em (CLARK, 1943) como:

$$P = \frac{\pi}{8} - \frac{1}{3\sqrt{2}} k \cos \phi + \frac{k^2 \cos 2\phi}{16} \left(0,6728 + \ln \frac{2}{k} \right) + \frac{k^2}{16} \phi \sin 2\phi + \frac{k^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\phi - \frac{\pi k^4}{1536} \cos 4\phi, \quad (7.32)$$

$$Q = -0,0386 + \frac{1}{2} \ln \frac{2}{k} + \frac{1}{3\sqrt{2}} k \cos \phi - \frac{\pi k^2}{64} \cos 2\phi + \frac{k^3}{45\sqrt{2}} \cos 3\phi - \frac{k^4 \cos 4\phi}{384} \left(1,0895 + \ln \frac{2}{k} \right) - \frac{k^4}{384} \phi \sin 4\phi. \quad (7.33)$$

Observa-se que (7.32)-(7.33) equivalem aos primeiros termos de (7.22)-(7.23).

7.1.1.4. Efeito de retorno pela terra por um plano complexo

Para o modelamento da corrente de retorno por meio de uma terra homogênea, em (DERI et al., 1981) é introduzido o conceito de um plano de retorno de corrente ideal localizado abaixo da superfície da terra (ver Figura 7.2).

A terra real é substituída por um plano complexo de retorno de correntes com condutividade perfeita, situado a uma distância complexa δ abaixo da superfície da terra:

$$\delta = \frac{1}{\sqrt{j\omega\mu_0\lambda}} \quad (7.34)$$

Onde λ é a condutividade expressada em $[(\Omega \cdot \text{m})^{-1}]$, f em [Hz] e δ em [m] para o sistema de unidades MKS (metro-quilograma-segundo). Assim, as correções que introduzem o efeito de retorno pela terra resultam nas equações:

$$\Delta z_{ii}^c = \frac{j\omega\mu_0}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{\delta}{h_i}\right), \quad (7.35)$$

$$\Delta z_{ij}^c = \frac{j\omega\mu_0}{4\pi} \ln\left[\frac{(h_i + h_j + 2\delta)^2 + x_{ij}^2}{(h_i + h_j)^2 + x_{ij}^2}\right]. \quad (7.36)$$

As distâncias h_i , h_j e x_{ij} são dadas em [m], $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m] e as impedâncias Δz_{ii}^c e Δz_{ij}^c em $[\Omega/\text{m}]$. Estas expressões podem substituir de maneira precisa as equações de Carson (7.3)-(7.4), sendo válida desde baixas frequências até vários [MHz]. As vantagens desta formulação são a sua simplicidade e precisão. Também evita as descontinuidades apresentadas na formulação de Carson, quando são usadas as aproximações assintóticas (7.13)-(7.15) ou (7.30)-(7.31) para altas frequências.

Figura 7.2 – Definição de um plano de retorno de correntes situado a uma distância complexa δ

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.1.2. Impedância interna do condutor

A seguir são apresentadas as formulações para o cálculo da impedância interna tendo em conta o efeito pelicular, que pode causar um aumento considerável da resistência com a frequência. São considerados condutores sólidos e tubulares, sendo que os condutores com alma de aço (ACSR) são usualmente aproximados como condutores tubulares porque a

influência do núcleo de aço é insignificante, especialmente nos casos com um número par de camadas de alumínio, que fazem com que a magnetização do núcleo de aço causada por uma determinada camada, espiraladas em uma direção, seja cancelada pela próxima camada, espiralada na direção contrária (DOMMEL, 1986). As rotinas de programas como o ATP e PSCAD usam esta aproximação dos ACSR como condutores tubulares.

7.1.2.1. Condutor sólido

Para um condutor sólido, a expressão exata que permite calcular a impedância interna do condutor levando em conta o efeito pelicular é dada por:

$$z_{i-int} = r_{i-int} + jx_{i-int} = \frac{\rho_i m_i}{2\pi r_i} \cdot \frac{I_0(m_i r_i)}{I_1(m_i r_i)}, \quad (7.37)$$

onde z_{i-int} é dada em $[\Omega/m]$ e

- ρ_i : resistividade do condutor i em $[\Omega \cdot m]$
- r_i é o raio do condutor i em $[m]$.
- $m_i = \sqrt{(j\omega\mu_i\mu_0)/\rho_i}$: número de onda do condutor i em $[m^{-1}]$.
- μ_i : permeabilidade relativa do condutor i .
- I_0 : função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero.
- I_1 : função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem um.

Uma fórmula aproximada para z_{i-int} foi proposta por (WEDEPOHL & WILCOX, 1973), mais adequada para o cálculo computacional.

$$z_{i-int} = \frac{\rho_i m_i}{2\pi r_i} \coth(0,777 m_i r_i) + \frac{0,356 \rho_i}{\pi r_i^2}, \quad (7.38)$$

O erro máximo na parte (real) resistiva desta impedância é de 4% e ocorre quando $|m_i r_i| = 5$. O erro máximo na componente reativa é 5% e ocorre quando $|m_i r_i| = 3,5$. Esta fórmula é muito precisa e justificada por um menor tempo computacional que (7.37) (WEDEPOHL & WILCOX, 1973).

Em altas frequências, z_{i-int} tende a $(\rho_i m_i)/(2\pi r_i)$, que é conhecida como a fórmula de efeito pelicular, enquanto a baixas frequências, z_{i-int} tende a sua resistência em corrente contínua igual a $\rho_i/(\pi r_i^2)$.

Outra fórmula aproximada para z_{i-int} , apresentada por (RAMOS et al., 2012) é dada por:

$$z_{i-int} = \sqrt{z_{i-cc}^2 + z_{i-ep}^2}, \quad (7.39)$$

onde

- $z_{i-cc} = \rho_i / (\pi r_i^2)$: resistência em corrente contínua do condutor i em $[\Omega/m]$.
- $z_{i-ep} = (\rho_i m_i) / (2\pi r_i)$: fórmula de efeito pelicular em altas frequências do condutor i em $[\Omega/m]$.

7.1.2.2. Condutor tubular

Para um condutor tubular a impedância interna levando em conta o efeito pelicular é dada por (AMETANI, 1980) e (DOMMEL, 1986):

$$z_{i-int} = r_{i-int} + jx_{i-int} = \frac{\rho_i m_i}{2\pi r_i} \cdot \left[\frac{I_0(m_i r_i) \cdot K_1(m_i q_i) + K_0(m_i r_i) \cdot I_1(m_i q_i)}{I_1(m_i r_i) \cdot K_1(m_i q_i) - I_1(m_i q_i) \cdot K_1(m_i r_i)} \right], \quad (7.40)$$

onde z_{i-int} é dada em $[\Omega/m]$ e

- ρ_i : resistividade do condutor i em $[\Omega \cdot m]$
- r_i é o raio externo do condutor i em $[m]$.
- q_i é o raio interno do condutor i em $[m]$.
- $m_i = \sqrt{(j\omega\mu_i\mu_0)/\rho_i}$: recíproco da profundidade de penetração complexa do condutor i ou também conhecida como número de onda do condutor i , em $[m^{-1}]$.
- μ_i : permeabilidade relativa do condutor i .
- I_0 : função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem zero.
- I_1 : função de Bessel modificada de primeira espécie e ordem um.
- K_0 : função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem zero.
- K_1 : função de Bessel modificada de segunda espécie e ordem um.

7.2. Matriz de admitâncias shunt

Os elementos da matriz de admitâncias shunt $\mathbf{Y}$ são calculados a partir da disposição espacial dos condutores (Figura 7.1):

$$\mathbf{Y} = j\omega\mathbf{C} = j\omega\mathbf{P}^{-1}, \quad (7.41)$$

onde $\mathbf{C}$ é a matriz de capacitâncias e $\mathbf{P}$ é a matriz dos coeficientes de potencias de Maxwell. Considerando o sistema de unidades MKS, as unidades de $\mathbf{P}$ e $\mathbf{Y}$ seriam [m/F] e [Ω^{-1} /m], respectivamente. Na matriz de admitâncias shunt a componente real, associada às perdas nas cadeias de isoladores, é desprezada. Os elementos da diagonal de $\mathbf{P}$ são dados por:

$$P_{ii} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{2h_i}{r_i}. \quad (7.42)$$

Os elementos fora da diagonal de $\mathbf{P}$ são calculados como:

$$P_{ij} = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \ln \frac{D_{ij}}{d_{ij}}. \quad (7.43)$$

É suposto uma propagação transversal das ondas de tensão e corrente, porém não existe uma propagação perpendicular à linha. Esta suposição precisa que o efeito pelicular nas capacitâncias seja ignorado, isto implica uma matriz de capacitâncias constante (MARTI & TAVIGHI, 2018).

7.3. Matriz de admitâncias nodais

A seguir são apresentados três métodos para o cálculo da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão $\mathbf{Y}_{nod}$. No item 7.4.6 são comparados estes métodos em termos de precisão e tempo de processamento. Cabe mencionar que neste trabalho de dissertação, $\mathbf{Y}_{nod}$ é a base para o cálculo do modelo da linha no domínio do tempo (Capítulos 4 - 6) e da frequência (Capítulo 8).

Para o cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$ são usadas as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ da linha equivalente resultado da agrupação dos subcondutores para cada fase (cálculo de um condutor equivalente para cada fase) e a eliminação dos cabos-guarda (Anexo B).

7.3.1. Método 1

Em (MORCHED, OTTEVANGERS & MARTI, 1993) é apresentada uma formulação para o cálculo de Y_{nod} empregando os valores dos parâmetros distribuídos da linha de transmissão Z e Y para cada valor de frequência. Para uma linha polifásica, Y_{nod} é simétrica, portanto expressa-se como:

$$\begin{bmatrix} I_i \\ I_j \end{bmatrix} = Y_{nod} \begin{bmatrix} V_i \\ V_j \end{bmatrix}, \quad (7.44)$$

onde

$$Y_{nod} = \begin{bmatrix} Y_s & Y_m \\ Y_m & Y_s \end{bmatrix}, \quad (7.45a)$$

$$Y_s = YT_{zy}\Lambda_{zy}^{-1}\coth(\Lambda_{zy}l)(T_{zy})^{-1}, \quad (7.45b)$$

$$Y_m = -YT_{zy}\Lambda_{zy}^{-1}\operatorname{csch}(\Lambda_{zy}l)(T_{zy})^{-1}, \quad (7.45c)$$

$$\Lambda_{zy}^2 = (T_{zy})^{-1}ZYT_{zy}. \quad (7.45d)$$

A equação (7.44) relaciona as tensões nodais e as correntes injetadas nas extremidades i e j para uma linha polifásica de comprimento l . Nesta formulação tem-se que Z representa a matriz de impedâncias série por unidade de comprimento, Y a matriz de admitâncias shunt por unidade de comprimento, Λ_{zy} a matriz diagonal que contém as constantes de propagação e T_{zy} é a matriz de autovetores de ZY . As constantes de propagação equivalem à raiz quadrada dos autovalores de ZY .

7.3.2. Método 2

A matriz de admitâncias nodais Y_{nod} também pode ser calculada de acordo com a formulação apresentada em (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2012):

$$Y_s = (I - H^2)^{-1}(H^2 + I)Y_c, \quad (7.46a)$$

$$Y_m = -2(I - H^2)^{-1}HY_c, \quad (7.46b)$$

$$Y_c = Z^{-1}\sqrt{ZY} = \sqrt{(YZ)^{-1}}Y, \quad (7.46c)$$

$$H = e^{-\sqrt{YZ}l}. \quad (7.46d)$$

Onde l é o comprimento da linha e as matrizes H e Y_c e I são a função de propagação, admitância característica e matriz identidade, respectivamente.

7.3.3. Método 3

Em (GUSTAVSEN, 2005) é proposto um método de cálculo que tem a vantagem de não fazer uso das funções hiperbólicas do método 1 ou da função exponencial do método 2. O primeiro passo consiste em diagonalizar o produto $\mathbf{ZY}$, de (7.45d) tem-se:

$$\mathbf{ZY} = \mathbf{T}_{zy} \cdot \mathbf{\Gamma}_{zy} \cdot (\mathbf{T}_{zy})^{-1}, \quad (7.47)$$

onde $\mathbf{\Gamma}_{zy} = \mathbf{\Lambda}_{zy}^2$. Para o m-ésimo elemento da diagonal de $\mathbf{\Gamma}_{zy}$, denotado como d_m , calcula-se:

$$a_m = \frac{\sqrt{d_m} \cdot (1 + h_m^2)}{1 - h_m^2}, \quad (7.48a)$$

$$b_m = \frac{-2\sqrt{d_m} \cdot h_m}{1 - h_m^2}, \quad (7.48b)$$

onde

$$h_m = \exp(-\sqrt{d_m} \cdot l). \quad (7.48c)$$

A matriz de admitâncias nodais é calculada com a expressão:

$$\mathbf{Y}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B} & \mathbf{A} \end{bmatrix}, \quad (7.49a)$$

onde

$$\mathbf{A} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{zy} \cdot \text{diag}\{\mathbf{a}\} \cdot (\mathbf{T}_{zy})^{-1}, \quad (7.49b)$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{Z}^{-1} \cdot \mathbf{T}_{zy} \cdot \text{diag}\{\mathbf{b}\} \cdot (\mathbf{T}_{zy})^{-1}, \quad (7.49c)$$

sendo $\mathbf{a} = [a_1 \ a_2 \ \dots \ a_N]^T$ e $\mathbf{b} = [b_1 \ b_2 \ \dots \ b_N]^T$, N representa o número de autovalores de $\mathbf{ZY}$. O operador $\text{diag}(\cdot)$ cria uma matriz diagonal a partir dos elementos do vetor.

7.4. Cálculo de parâmetros em função da frequência

As formulações anteriores foram implementadas em Matlab, os resultados obtidos destas rotinas são comparados com os fornecidos pelos programas ATP e PSCAD. É simulada uma linha trifásica com comprimento de 100 km, três condutores por fase e dois cabos-guarda, de acordo com a Figura 7.3.

Na Tabela 7.1 mostram-se os dados da linha. São simulados condutores sólidos para os cabos-guarda e condutores tubulares para as fases, no caso de condutores sólidos somente o raio externo é considerado. No programa PSCAD/EMTDC é fornecida a resistência por quilômetro em corrente contínua do condutor ao invés da sua resistividade. Para um condutor sólido a resistência por unidade de comprimento em corrente contínua para um condutor é dada por:

$$\frac{R_{CC}}{l} = \frac{\rho}{\pi r^2}, \quad (7.50)$$

onde l é o comprimento, ρ a resistividade e r o raio. Para um condutor tubular (Figura 7.2):

$$\frac{R_{CC}}{l} = \frac{\rho}{\pi(r^2 - q^2)}, \quad (7.51)$$

Figura 7.3 – Linha de transmissão trifásica

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 7.1 – Dados e configuração da linha de transmissão da Figura 7.3

Condutor	Fases: A, B e C	Cabo-guarda
Posição horizontal [m]	0, 10, 20	5, 15
Posição vertical [m]	20	30
Raio externo [m]	0,0153	0,0055245
Raio interno (condutor tubular) [m]	0,00578275	0
Condutores no <i>bundle</i>	3	1
Distância entre condutores no <i>bundle</i> [m]	0,40	-
Resistividade [ohm-m]	2.826E-08	2.826E-08

Permeabilidade relativa	1	1
Flecha [m]	7,0	7,0

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.4.1. Matriz de admitâncias shunt

De (7.41) observa-se que os elementos da matriz de admitâncias shunt Y são proporcionais à frequência e dependem da geometria da linha por meio do cálculo da matriz dos coeficientes de potências P . O cálculo é igual tanto para condutores sólidos quanto para condutores tubulares, sendo que o raio interno dos condutores tubulares não é considerado no cálculo de P .

Na Figura 7.4 tem-se os elementos (1,1), (1,2), (1,3) e (2,2) de $Y_{reduzida}$ na faixa de 10^{-2} até 10^6 Hz, sendo que $Y_{reduzida}$ é a matriz de admitâncias shunt calculada depois substituir os subcondutores do *bundle* por um condutor equivalente em cada fase (item B.1.2) e aplicar a redução de Kron para obter um sistema equivalente sem cabos-guarda (item B.2.2). Foram comparados os resultados calculados em Matlab com os fornecidos pelo programa PSCAD. Igualmente na Figura 7.5 são comparados os resultados de Matlab com os fornecidos com programa ATP. A matriz $Y_{reduzida}$ além de ser simétrica, os dois pares de elementos: (1,1)-(3,3) e (1,2)-(2,3) são iguais, por causa da simetria da linha (Figura 7.3).

Figura 7.4 – Cálculo e simulação de $Y_{reduzida}$ usando Matlab e PSCAD

c) Elemento (1,3)

d) Elemento (2,2)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 7.5 – Cálculo e simulação de $Y_{reduzida}$ usando Matlab e ATP

a) Elemento (1,1)

b) Elemento (1,2)

c) Elemento (1,3)

d) Elemento (2,2)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.4.2. Matriz de impedâncias série

De (7.1)-(7.2) observa-se que os elementos da matriz de impedâncias série $\mathbf{Z}$ são compostos por três parcelas, a reatância externa, o termo de correção para incluir os efeitos de retorno pela terra e a impedância interna.

A impedância interna somente faz parte das impedâncias próprias e seu cálculo é diferente para os condutores sólidos e tubulares, de acordo com o item 7.1.2, mas o cálculo das reatâncias externas e os termos de correção para incluir a impedância de retorno pela terra são iguais tanto para condutores sólidos quanto tubulares, considerando somente no cálculo o raio externo do condutor.

O cálculo do termo de correção da impedância de retorno pela terra pode ser baseado na formulação de (CARSON, 1926) ou (DERI et al., 1981), de acordo com o item 7.1.1. No cálculo da impedância interna de condutores sólidos qualquer uma das expressões (7.37)-(7.39) pode ser usada, mas para condutores tubulares usa-se a expressão (7.40) para o cálculo da impedância interna.

Na Figura 7.6 têm-se os elementos (1,1), (1,2), (1,3) e (2,2) de $\text{Re}\{\mathbf{Z}_{\text{reduzida}}\}$ na faixa de 10^{-2} até 10^6 Hz, sendo que $\mathbf{Z}_{\text{reduzida}}$ é a matriz de impedâncias série calculada depois substituir os subcondutores do *bundle* por um condutor equivalente em cada fase (item B.1.2) e aplicar a redução de Kron para obter um sistema equivalente sem cabos-guarda (item B.2.1). Foram comparados os resultados calculados em Matlab com os simulados em PSCAD. São considerados condutores sólidos, o cálculo da impedância de retorno pela terra é baseado no conceito de um plano de retorno de corrente ideal localizado a uma distância complexa (item 7.1.1.4) e a impedância interna é calculada usando a expressão exata (7.37). Similarmente a $\mathbf{Y}_{\text{reduzida}}$, tem-se que $\mathbf{Z}_{\text{reduzida}}$ é simétrica e os pares de elementos (1,1)-(3,3); (1,2)-(2,3) são iguais, por causa da simetria da linha (Figura 7.3). Analogamente, na Figura 7.7 mostram-se os resultados calculados e simulados de $\text{Im}\{\mathbf{Z}_{\text{reduzida}}\}$. Resultados semelhantes são encontrados quando é realizada a comparação com os dados fornecidos pelo programa ATP.

7.4.3. Impedância interna do condutor

A impedância interna pode ser calculada com as formulações apresentadas no item 7.1.2. Para condutores sólidos é apresentada a expressão exata, (7.37) e duas expressões aproximadas (7.38)-(7.39). Para condutores tubulares tem-se (7.40), que é aplicável para condutores com alma de aço (ACSR).

Figura 7.6 – Cálculo e simulação de $\text{Re}\{\mathbf{Z}_{\text{reduzida}}\}$ usando Matlab e PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 7.7 – Cálculo e simulação de $\text{Im}\{\mathbf{Z}_{\text{reduzida}}\}$ usando Matlab e PSCAD

c) Elemento (1,3)

d) Elemento (2,2)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.4.3.1. Condutor sólido

A impedância interna para condutores sólidos pode ser calculada usando qualquer uma das equações (7.37)-(7.39), sendo que (7.37) representa a expressão exata baseada no uso das versões modificadas das funções de Bessel. Não obstante, as outras expressões permitem obter resultados precisos com um menor esforço computacional.

Observa-se em (7.1) que a impedância interna tem efeito somente nos termos próprios da matriz de impedâncias série e não tem efeito sobre a matriz de admitâncias shunt de acordo com (7.41).

Na Figura 7.8 mostra-se a resistência interna de um subcondutor sólido (Tabela 7.1), calculada avaliando a parte real das expressões (7.37)-(7.39), também é apresentado o desvio no cálculo de (7.38) e (7.39) em relação a (7.37). Igualmente na Figura 7.9 tem-se a reatância interna do mesmo condutor sólido. Observa-se que qualquer uma das expressões (7.37)-(7.39) fornece valores precisos no cálculo da matriz de impedâncias série.

A Tabela 7.2 mostra os tempos de processamento no cálculo da impedância interna para 500 amostras de frequência distribuídas de maneira logarítmica na faixa de 10^{-2} até 10^6 [Hz], fazendo uso de cada uma das equações (7.37)-(7.39). Os tempos de processamento foram medidos usando o comando *tic toc* de Matlab. Para todas as simulações neste capítulo é empregado um computador desktop com processador Intel Core Duo CPU 2.20 GHz executando Matlab R2015a em Windows XP

Figura 7.8 – Resistência interna de um condutor sólido

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 7.9 – Reatância interna de um condutor sólido

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 7.2 – Tempos de processamento no cálculo da impedância interna

Equação	Tempo [ms]
(7.37)	2,638
(7.38)	0,335
(7.39)	0,237

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.4.3.2. Condutor tubular

De (7.41) tem-se que a matriz de admitâncias shunt é igual para condutores sólidos e tubulares com o mesmo raio externo, igualmente de (7.1) observa-se que os termos mútuos da matriz de impedâncias série somente dependem do raio externo do condutor. Não obstante, a impedância interna, $r_{i-int} + jx_{i-int}$, que faz parte dos termos próprios da matriz de impedâncias série, calcula-se de maneira exata com (7.37) para condutores sólidos e com (7.40) para condutores tubulares.

Nas simulações apresentadas neste item, o cálculo da impedância própria para o efeito de retorno pela terra é realizado usando (7.35), para o cálculo da impedância interna usa-se (7.37) no caso de condutores sólidos e (7.40) para condutores tubulares.

A Figura 7.10 apresenta a impedância própria série para um subcondutor tubular da Tabela 7.1. Os cálculos foram comparados com os resultados do programa PSCAD.

Na Figura 7.11(a) mostra-se a resistência própria série para um subcondutor tubular e sólido da Tabela 7.1, calculada em Matlab e simulada em PSCAD. Um detalhe desta figura é apresentado na Figura 7.11(b). Na Figura 7.11(c) tem-se o desvio entre os valores calculados e simulados, tanto para condutores sólidos quanto tubulares. A diferença da resistência própria entre condutores sólidos e tubulares é mais evidente a baixas frequências, sendo que em altas frequências a resistência tende a ser a mesma em condutores sólidos e tubulares por causa do efeito pelicular, devido à tendência da corrente de fluir na superfície do condutor quando aumenta a frequência, causando a diminuição da área efetiva de condução e, portanto, o aumento da resistência do condutor com o aumento da frequência.

Figura 7.10 – Impedância própria série de um condutor tubular

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 7.11(d) mostra a diferença do valor calculado da resistência própria entre o condutor sólido e o condutor tubular. A baixas frequências tem-se a maior diferença, mas com o aumento da frequência, esta diferença diminui até ser igual a zero de acordo com os cálculos. Para frequências maiores do que 20 [kHz] aproximadamente, os valores de resistência própria são iguais para o condutor sólido e tubular.

Figura 7.11 – Resistência própria série de um condutor sólido e tubular

a) Resistência própria série

b) Detalhe da Figura 16(b)

c) Desvio entre valores calculados e simulados

d) Diferença na resistência própria série (calculada) entre o condutor sólido e tubular

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 7.12(a) mostra a reatância própria de um subcondutor sólido e tubular da Tabela 7.1. Os valores calculados foram comparados com os fornecidos pelo programa PSCAD. Observa-se que existe uma diferença pequena no valor da reatância própria entre o condutor sólido e tubular. A Figura 7.12 (c) mostra a diferença no valor calculado da reatância entre o condutor sólido e tubular, sendo este menor do que a diferença no valor da resistência

mostrado na Figura 7.11(d). Isto significa que o efeito pelicular tem um maior efeito sobre a resistência do que a reatância.

A Figura 7.12(b) apresenta a diferença entre o valor calculado e simulado em PSCAD da reatância própria, para um condutor sólido e tubular, obtendo-se desvios semelhantes.

Figura 7.12 – Reatância própria série de um condutor sólido e tubular

a) Reatância própria série

b) Desvio entre valores calculados e simulados

c) Diferença na reatância própria série (calculada) entre o condutor sólido e tubular

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.4.4. Impedância de retorno pela terra

O efeito de retorno pela terra pode ser calculado por meio da correção de Carson baseada em séries infinitas (itens 7.1.1.1 e 7.1.1.2) que considera a terra como um plano infinito paralelo aos condutores perfeitamente horizontais, ou com a suposição de um plano de retorno de corrente ideal localizado a uma distância complexa (item 7.1.1.4).

A correção de Carson possui duas formulações equivalentes, a expressão original (7.10)-(7.11), (7.13)-(7.15), foi apresentada por (CARSON, 1926). Posteriormente é apresentada a formulação (7.22)-(7.23), (7.30)-(7.31), melhor adaptada para seu uso no cálculo computacional (DOMMEL, 1986).

Em (DERI et al., 1981) é apresentada a formulação simplificada (7.35)-(7.36), que permite calcular de maneira precisa o efeito de retorno pela terra com um menor esforço computacional do que as formulações anteriores.

A Figura 7.13 mostra os valores resistivos e reativos da impedância de retorno pela terra, para o elemento próprio (1,1) e o elemento mútuo (1,3), sendo calculados usando a formulação original de (CARSON, 1926) e a formulação alternativa proposta por (DERI et al., 1981). Similarmente, na Figura 7.14 são comparados os cálculos usando a formulação de (CARSON, 1926) e a formulação equivalente de (DOMMEL, 1986).

Figura 7.13 – Impedância de retorno pela terra usando as formulações dos itens 7.1.1.1 e 7.1.1.4

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 7.14 – Impedância de retorno pela terra usando as formulações dos itens 7.1.1.1 e 7.1.1.2

c) Resistência – elemento (1,3)

d) Reatância – elemento (1,3)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Tabela 7.3 têm-se os tempos de processamento para o cálculo da impedância de retorno pela terra usando os três métodos mencionados anteriormente, para 500 pontos de frequência distribuídos de maneira logarítmica entre 10^{-2} [Hz] e 10^6 [Hz]. Observa-se que a formulação de (DERI et al., 1981) é a mais eficiente, fornece resultados precisos e evita o uso de formulações definidas em trechos como as propostas por (CARSON, 1926) e (DOMMEL, 1986).

Tabela 7.3 – Tempos de processamento para o cálculo da impedância de retorno pela terra

Formulação	Tempo [μ s]
DERI et al.	4,98
CARSON	2706,71
DOMMEL	95,89

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

7.4.5. Agrupamento de condutores

O agrupamento de condutores em cada fase pode ser substituído por um único condutor equivalente. Isto pode ser realizado calculando os parâmetros de cada subcondutor de maneira individual e fazendo a redução matricial da matriz de impedâncias série, $\mathbf{Z}$, e da matriz de coeficientes de potências, $\mathbf{P}$, considerando as suposições (B.3)-(B.5) do item B.1.1. Outro método usado para o cálculo de um condutor equivalente por fase é baseado no conceito da distância média geométrica (ou raio médio geométrico, RMG) do item B.1.2. Não obstante o

método do item B.1.2 somente pode ser usado quando os subcondutores de uma mesma fase estão dispostos de maneira simétrica.

A Figura 7.15 mostra dois elementos da matriz de admitâncias shunt equivalente, $Y_{reduzida}$, para a linha da Tabela 1 e Figura 7.3, sendo escolhido um elemento dentro da diagonal e o outro fora. Sendo que $Y_{reduzida}$ corresponde à linha equivalente que está constituída por um único condutor por fase e não possui cabos-guarda, resultado do agrupamento de subcondutores (item B.1) e a eliminação dos cabos-guarda (item B.2).

Na Figura 7.15 tem-se que para o agrupamento dos subcondutores, a matriz $Y_{reduzida}$ é calculada aplicando sobre Y a redução matricial do item B.1.1.2 (método 2) e o método da distância média geométrica do item B.1.2 (método 1). Para a eliminação dos cabos-guarda é empregado o método do item B.2.2. Também são apresentados os desvios para cada método em relação aos resultados do PSCAD. Observa-se que os resultados do método 2 são mais próximos aos fornecidos pelo PSCAD.

A Figura 7.16 mostra os componentes resistivos e reativos da matriz de impedâncias série, $Z_{reduzida}$, para os elementos (1,1) e (1,3). Sendo que $Z_{reduzida}$ corresponde à linha equivalente que está constituída por um único condutor por fase e não possui cabos-guarda. Para o agrupamento dos subcondutores a matriz $Z_{reduzida}$ é calculada aplicando a redução matricial do item B.1.1.1 (método 2) e o método da distância média geométrica do item B.1.2 (método 1). Para a eliminação dos cabos-guarda é usado o método do item B.2.1. Foram considerados condutores sólidos, o cálculo da impedância interna foi realizado com a expressão exata (7.37). A impedância de retorno pela terra foi calculada com a fórmula de (DERI et al., 1981). Também são apresentados os desvios de cada método em relação ao PSCAD. Observa-se que os dois métodos apresentam resultados muito próximos, com desvios muito próximos.

7.4.6. Matriz de admitâncias nodais

A matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, Y_{nod} , pode ser calculada com (7.45), (7.46) ou (7.49). Nas simulações a seguir é considerando um comprimento de 100 [km].

Figura 7.15 – Elementos da matriz de admitâncias nodais $Y_{reduzida}$

a) Elemento (1,1)

b) Elemento (1,3)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 7.16 – Elementos da matriz de impedâncias série $\mathbf{Z}_{reduzida}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 7.17 mostra os elementos (1,1) e (1,3) de $\mathbf{Y}_{nod}$ empregando (7.45), (7.46) e (7.49), estas três expressões são equivalentes, existindo um desvio muito pequeno entre os cálculos. As matrizes $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{Z}$ usadas ao aplicar (7.75), (7.76) e (7.79) foram obtidas do PSCAD.

A Tabela 7.4 mostra os tempos de processamento na aplicação de (7.45), (7.46) e (7.49) no cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$ para 100 pontos de frequência distribuídos de maneira logarítmica na faixa de 10^{-2} até 10^6 [Hz]. Observa-se que o cálculo de $\mathbf{Y}_{nod}$ aplicando (7.49) é 3,8 e 2,3 vezes mais rápido do que usando (7.45) e (7.46), respectivamente.

Figura 7.17 – Elementos da matriz de admitâncias nodais

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 7.4 – Tempos de processamento no cálculo de Y_{nod}

Equação	Tempo [segundos]
(7.45) - (MORCHED et al., 1993)	0,2437
(7.46) - (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2012)	0,1473
(7.49) - (GUSTAVSEN, 2005)	0,0643

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 7.18 mostra os elementos de Y_{nod} calculados usando (7.45), sendo que as matrizes Z e Y , empregadas no cálculo de Y_{nod} são obtidas de duas maneiras; com PSCAD e calculadas em Matlab.

Figura 7.18 – Elementos da matriz de admitâncias nodais

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Para o cálculo de $\mathbf{Z}$ na Figura 7.18 foram aplicados: o método da distância média geométrica do item B.1.2, a eliminação dos cabos-guarda do item B.2, a expressão (7.37) para o cálculo da impedância interna e a formulação (7.35)-(7.36) para o cálculo do efeito de retorno pela terra. Para o agrupamento dos subcondutores por fase no cálculo de $\mathbf{Y}$, também foi usado o método da distância média geométrica do item B.1.2 e para a eliminação dos cabos-guarda foi usado o método do item B.2.2.

Cabe lembrar que no Capítulo 5 as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ usadas para calcular $\mathbf{Y}_{nod}$ foram obtidas de ATP, mas no Capítulo 6, $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$, foram obtidas de PSCAD.

Capítulo 8

Validação de Transitórios em Redes Elétricas

O propósito deste capítulo é apresentar uma metodologia de cálculo para o comportamento transitório de uma rede elétrica com um enfoque complementar do apresentado nos capítulos anteriores e que possa servir de referência para análises de precisão dos modelos discutidos neste trabalho. As ferramentas de cálculo apresentadas neste capítulo são desenvolvidas em Matlab.

Os métodos apresentados a seguir são baseados na transformada inversa de Fourier (TIF), usando ferramentas diferentes para minimizar os erros por truncamento e discretização que melhoram a precisão do cálculo no domínio do tempo (DT). Também são empregados como parte do procedimento de modelagem e simulação a transformada numérica de Laplace ou NLT (do inglês *Numerical Laplace Transform*) e as propriedades da convolução.

São realizadas simulações da energização da linha em curto, em vazio, em carga e manobras com chaves. Os resultados são comparados com os fornecidos pelos programas ATP e PSCAD. Não obstante, os parâmetros da linha de transmissão são calculados usando as formulações e as rotinas desenvolvidas no Capítulo 7, obtendo-se resultados totalmente independentes dos obtidos dos simuladores, permitindo validar por meio do ATP e o PSCAD as rotinas de cálculo de parâmetros e os métodos de cálculo apresentados a seguir. As rotinas de cálculo de parâmetros apresentadas no Capítulo 7 permitem, além do uso de um passo de frequência constante entre amostras, a elevação do limite do número de amostras por década, resolvendo algumas limitações da aplicação da TIF no Capítulo 5, relativas ao número de amostras por década do programa ATP na variação dos parâmetros com a frequência.

8.1. Modelagem no DF

A diferença da abordagem apresentada no item 4.1.1.4 que faz uso direto da matriz de admitâncias nodais da linha da rede $\mathbf{Y}_r$, neste capítulo a modelagem da rede no domínio da frequência (DF) é realizada por meio da construção de $\mathbf{Y}_r$ e a sua posterior inversão, além de considerar o uso de equivalentes de Norton para as fontes de tensão com o propósito de conhecer todas as correntes injetadas nodais, permitindo uma maior flexibilidade no cálculo das tensões.

As variáveis no DF são transformadas para o DT usando qualquer um dos métodos apresentados no item 8.2: transformada modificada de Fourier (FMP), transformada inversa rápida de Fourier (TIRF) e a transformada inversa de Fourier com integração semianalítica (TIFIS).

8.1.1. Formulação nodal

Na formulação nodal quando os curtos-circuitos são representados por resistências e as fontes de tensão são substituídas por equivalentes de Norton, tem-se que as correntes injetadas são conhecidas e as tensões nodais são as incógnitas.

Na modelagem da rede as fontes de tensão são substituídas por equivalentes de Norton (ver item 8.1.2) e os curtos-circuitos por resistências de valores muito pequenos. Elementos não lineares como as chaves podem ser modelados no DF aplicando o princípio de superposição e substituindo a chave por um equivalente de Norton, como apresentado no item 8.1.3. Assim, as tensões nodais são calculadas para cada valor de frequência como:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Y}_r^{-1} \mathbf{I} = \mathbf{Z}_r \mathbf{I}, \quad (8.1)$$

onde $\mathbf{I}$ representa o vetor de correntes injetadas, $\mathbf{V}$ as tensões nodais e $\mathbf{Z}_r$ a matriz de impedâncias nodais da rede.

Assumindo uma rede com n nós, as tensões nodais podem ser expressas como:

$$V_i(\omega) = \sum_{j=1}^n Z_{r(i,j)}(\omega) I_j(\omega) ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.2)$$

onde $Z_{r(i,j)}$ é o elemento (i,j) de $\mathbf{Z}_{nod}$, V_i é a i -ésima tensão nodal e I_j a corrente injetada no i -ésimo nó.

A tensão V_i pode ser calculada no DT fazendo uso de qualquer um dos métodos do item 8.2. Não obstante, podem-se conhecer as correntes injetadas no DT mas não é conhecida uma expressão analítica no DF. Para se obter a corrente no domínio da frequência seria necessário o uso de um algoritmo numérico para se obter a transformada de Fourier, que complicaria demasiadamente a implementação do método. Como solução alternativa podem-se usar as correntes injetadas no DT utilizando a propriedade da convolução:

$$\mathfrak{F}^{-1}\{F(s)G(s)\} = f(t) * g(t), \quad (8.3)$$

onde $\mathfrak{F}^{-1}$ representa a transformada inversa de Fourier e $*$ simboliza a convolução no DT, além de supor $\mathfrak{F}^{-1}\{F(s)\} = f(t)$ e $\mathfrak{F}^{-1}\{G(s)\} = g(t)$. Aplicando esta propriedade a (8.2) tem-se:

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^n [z_{r(i,j)} * i_j(t)] ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.4)$$

Onde $z_{r(i,j)} = \mathfrak{F}^{-1}\{Z_{r(i,j)}\}$, $i_j(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{I_j\}$ e $v_i(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{V_i\}$.

8.1.2. Representação equivalente de fontes de tensão

As fontes de tensão são representadas por um equivalente de Norton, este equivalente é calculado considerando que existe uma pequena resistência conectada em série com a fonte de tensão. Esta aproximação fornece resultados de simulação precisos e pode ser aplicada tanto no DT como no DF, ver Figura 8.1.

Figura 8.1 – Representação equivalente das fontes de tensão

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Para melhorar a eficiência computacional e simplificar os cálculos nas simulações apresentadas neste capítulo, as fontes de tensão conectadas a indutâncias em série são substituídas por equivalentes de Norton. Na Figura 8.2 tem-se o circuito equivalente no DT e

da frequência. Nos casos de simulação é válido supor que as fontes de correntes dos equivalentes de Norton são iguais a zero em $t=0$, considerando que as fontes de tensão estão desconectadas em $t<0$. Como foi mencionado anteriormente, o uso do equivalente de Norton no DT permite usar a propriedade da convolução em conjunto com qualquer um dos métodos de inversão do item 8.2: TMF, TIRF e TIFIS, sendo especialmente útil quando uma expressão analítica no DF para a tensão da fonte não pode ser encontrada.

Figura 8.2 – Representação equivalente das fontes de tensão

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Fazendo a substituição das fontes de tensão por equivalentes de Norton e considerando que o aterramento dos terminais da linha nos casos em aberto e curto-circuito é realizado por meio de resistências de valores muito pequenos, na Figura 8.3 tem-se uma representação geral dos casos de simulação do item 8.3. Nota-se na Figura 8.3b que as chaves são representadas por equivalentes de Norton, sendo que o motivo desta representação é exposto no item seguinte. Na Figura 8.3a as impedâncias conectadas no terminal receptor da linha seriam umas resistências de valor muito grande no caso da simulação em circuito-aberto, ou pelo contrário seriam umas resistências de valor muito pequeno para o caso de simulação em curto-circuito.

8.1.3. Simulação de chaves

Mudanças na topologia da rede e a presença de elementos não lineares apresentam dificuldades na sua representação no DF, porque as fórmulas de inversão por definição estão associadas a funções lineares e invariantes no tempo. No entanto, o princípio de superposição é uma ferramenta que pode ser usada para superar este problema, como mostrado nos trabalhos de (GUSTAVSEN, 2005), (MORENO & RAMIREZ, 2008) e (GÓMEZ & URIBE, 2009).

Figura 8.3 – Representação geral equivalente dos casos de simulação

a) Representação dos testes dos itens 8.3.2-8.3.4

b) Representação dos testes do item 8.3.5

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2005, p.926).

As operações de chaveamento produzem mudanças na topologia da rede que fazem à rede um sistema invariante no tempo, impedindo o uso direto dos métodos de inversão do DF para o DT, mas por meio do princípio de superposição é possível usar a transformada inversa de Fourier.

Uma chave aberta durante o tempo todo pode ser representada por uma fonte de tensão $v_{sw}(t)$, sendo que $v_{sw}(t)$ é igual à diferença de potencial entre os terminais da chave, ver Figura

8.4a. O fechamento da chave em um instante t_c é representado pela conexão em série da fonte de tensão $v_{sw}(t)$ com a fonte de tensão $e_{sw}(t)$, sendo que $e_{sw}(t)$ é igual a $-v_{sw}(t)$ em $t \geq t_c$, e zero em $t < t_c$, ver Figura 8.4b. Assim, a fonte de tensão $e_{sw}(t)$ é dada por:

$$e_{sw}(t) = -v_{sw}(t)u(t - t_c). \quad (8.5)$$

Figura 8.4 – Simulação do fechamento de chaves

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2605).

Por outro lado, uma chave fechada durante o tempo todo pode ser representada por uma fonte de corrente $i_{sw}(t)$, sendo que $i_{sw}(t)$ é igual à corrente que circula na chave, ver Figura 8.5a. A abertura da chave em um instante t_{zc} é representada pela conexão em paralelo das fontes de corrente $i_{sw}(t)$ e $j_{sw}(t)$, sendo que $j_{sw}(t)$ é igual a $-i_{sw}(t)$ em $t \geq t_{zc}$, e zero em $t < t_{zc}$, ver Figura 8.6b. Assim, a fonte de corrente $j_{sw}(t)$ é dada por:

$$j_{sw}(t) = -i_{sw}(t)u(t - t_{zc}), \quad (8.6)$$

Em este capítulo todas as formulações são baseadas em uma formulação nodal com todas as correntes injetadas conhecidas. As fontes de tensão são representadas por equivalentes de Norton, como foi explicado no item anterior. Assim, a fonte de tensão $e_{sw}(t)$ é representada por uma fonte de corrente $j_{nor}(t)$ em paralelo com uma resistência r_{sw} de valor arbitrário e muito pequeno, sendo que

$$j_{nor}(t) = \frac{e_{sw}(t)}{r_{sw}}. \quad (8.7)$$

Figura 8.5 – Simulação da abertura de chaves

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2605).

Aplicando o princípio de superposição no DF, o fechamento de uma chave pode ser representado pela superposição de dois circuitos (ver Figura 8.6): o primeiro com a mesma topologia antes da manobra da chave e o segundo circuito com a topologia do primeiro circuito mas substituindo a chave pelo equivalente de Norton composto pela fonte de corrente $j_{nor}(t)$ em paralelo com a resistência r_{sw} , além de desativar as fontes de correntes (corrente injetada igual a zero).

Similarmente, a abertura de uma chave corresponde à superposição de dois circuitos (ver Figura 8.7): a rede antes da atuação da chave e o segundo circuito com a topologia do primeiro circuito, mas substituindo a chave por uma fonte de corrente $j_{sw}(t)$ e desativando as fontes de corrente independentes.

Em geral observa-se que nos circuitos de superposição das Figuras 8.6 e 8.7, no segundo circuito (circuito da direita) as chaves podem ser representadas por um equivalente de Norton (ver Figura 8.8), com uma corrente injetada J_s :

$$J_s(t) = \begin{cases} J_{nor}(t) & \text{abertura} \\ -J_{sw}(t) & \text{fechamento} \end{cases} \quad (8.8)$$

e uma condutância g_{sw} :

$$g_{sw} = \begin{cases} 1/r_{sw} & \text{abertura} \\ 0 & \text{fechamento} \end{cases} \quad (8.9)$$

Figura 8.6 – Simulação do fechamento de chaves

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Em geral, para uma formulação baseada em correntes injetadas conhecidas, a resposta de tensão é obtida da superposição de duas respostas: a primeira obtida para a configuração inicial da rede (estado da rede antes da atuação da chave), com a segunda resposta para uma rede com a topologia da rede prévia antes da atuação da chave, mas substituindo a chave pelo circuito da Figura 8.8 e desativando as outras fontes de corrente. Se a manobra ocorre na chave que conecta os nós j e k , as tensões nodais são dadas por:

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_{(0)} + (\mathbf{Y}_{r(1)})^{-1} \mathbf{I}_{(1)}, \quad (8.10)$$

onde $\mathbf{V}_{(0)}$ é o vetor de tensões nodais do estado prévio, sem atuação da chave, correspondente ao primeiro circuito (circuito da esquerda) de superposição da Figura 8.6 ou 8.7, de acordo com o tipo de evento, a Figura 8.6 representa o fechamento da chave e a Figura 8.7 a abertura da chave, como mencionado anteriormente. $\mathbf{Y}_{r(1)}$ e $\mathbf{I}_{(1)}$ são a matriz de admitâncias e o vetor de

correntes injetadas do segundo circuito (circuito da direita) de superposição da Figura 8.6 ou 8.7.

$$\mathbf{I}_{(1)} = \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ J_s \\ -J_s \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.11)$$

sendo J_s a fonte de corrente do equivalente de Norton associado à manobra da chave localizada entre os nós j e k .

Figura 8.7 – Simulação da abertura de chaves

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Assumindo que o elemento J_s em (8.11) está na j -ésima linha (ver Figura 8.6), para o caso de fechamento da chave no instante t_c , tem-se:

$$J_s(s) = J_{nor}(s) = \frac{\mathcal{L}\{-v_{jk}(t)u(t - t_c)\}}{r_{sw}}, \quad (8.12)$$

onde $\mathcal{L}$ indica a transformada de Laplace e $v_{jk}(t) = v_j(t) - v_k(t)$ é a tensão entre os nós j e k para a configuração da rede antes do fechamento da chave, este cálculo é realizado assumindo que a chave permanece aberta durante o tempo todo. O valor de r_{sw} é arbitrário e muito pequeno.

Da mesma forma em (8.11), assumindo que J_s está localizado na j -ésima linha (ver Figura 8.7), para o caso de abertura da chave no instante t_{zc} :

$$J_s(s) = -J_{sw}(s) = \mathcal{L}\{i_{sw}(t)u(t - t_{zc})\}, \quad (8.13)$$

onde $i_{sw}(t)$ corresponde à corrente que circula na chave conectada entre os terminais j e k para a configuração da rede antes da abertura da chave, este cálculo é realizado assumindo que a chave permanece fechada durante o tempo todo.

Figura 8.8 – Representação das chaves aplicando o princípio de superposição

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2606).

Observa-se que a expressão (8.10) está no DF. No entanto, como foi mostrado anteriormente, é conveniente calcular $(Y_{bus(1)})^{-1}I_{(1)}$ por meio da convolução porque ao invés do cálculo da transformada de Laplace de $i_{(1)}(t)$ para obter $I_{(1)}$, $\mathcal{L}\{i_{(1)}(t)\} = I_{(1)}$, usa-se diretamente $i_{(1)}$ no DT, como é mostrado no item 8.1.1.

8.1.4. Exemplo de modelagem da rede

Considera-se uma representação geral dos casos de simulação (item 8.3) na Figura 8.9, usando a matriz de admitâncias nodais para representar a linha de transmissão, e o equivalente de Norton para representar as fontes de tensão e as chaves, ver Figura 8.9b.

Figura 8.9 – Representação geral dos casos de simulação

a) Esquema do circuito

b) Modelo geral do sistema de transmissão

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2606).

A equação nodal da rede expressa-se como:

$$\begin{bmatrix} I_{ABC} + J_S \\ -J_S \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_S + G_{SW} & -G_{SW} & 0 \\ -G_{SW} & A + G_{SW} & -B \\ 0 & -B & A + Y_L \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{SS} \\ V_{SE} \\ V_L \end{bmatrix}. \quad (8.14)$$

As componentes A e B da matriz admitâncias nodais da linha de transmissão calculam-se de acordo com as formulações apresentadas no item 7.3.3. I_{ABC} é o vetor das correntes do equivalente de Norton das fontes, dado por:

$$I_{ABC} = \begin{bmatrix} V_A(s)/(j\omega L_s) \\ V_B(s)/(j\omega L_s) \\ V_C(s)/(j\omega L_s) \end{bmatrix}. \quad (8.15)$$

I_{ABC} é uma matriz diagonal cujos elementos são $1/(j\omega L_s)$:

$$Y_S = \begin{bmatrix} 1/(j\omega L_s) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(j\omega L_s) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(j\omega L_s) \end{bmatrix}. \quad (8.16)$$

Y_L é uma matriz de admitâncias da carga, para a linha em vazio Y_L é uma matriz nula de 3x3, para o caso da linha em curto-circuito, tem-se:

$$Y_L = \begin{bmatrix} 1/r & 0 & 0 \\ 0 & 1/r & 0 \\ 0 & 0 & 1/r \end{bmatrix}, \quad (8.17)$$

onde r é um valor de resistência muito pequeno. Para uma carga com componente resistivo r_L , e indutivo L_L , tem-se:

$$Y_L = \begin{bmatrix} 1/(r_L + j\omega L_L) & 0 & 0 \\ 0 & 1/(r_L + j\omega L_L) & 0 \\ 0 & 0 & 1/(r_L + j\omega L_L) \end{bmatrix}. \quad (8.18)$$

Os valores para G_{SW} e J_S dependem das manobras das chaves, como foi explicado no item anterior. Por exemplo, considera-se que as chaves das fases A , B e C são fechadas nos instantes 2 ms, 4 ms e 6 ms, respectivamente. As tensões nodais para cada intervalo de tempo calculam-se como:

- $t < 2$ ms: as tensões nos terminais 1, 2 e 3 são iguais às tensões das fontes v_a , v_b e v_c , respectivamente. As demais tensões nodais são iguais a zero, como pode ser observado na Figura 8.10a.
- $2 \text{ ms} < t < 4$ ms: as tensões nodais são calculadas pela soma das tensões dos circuitos das Figuras 8.10a e 8.10b, sendo que o fechamento da chave da fase a é representado pela fonte de tensão com valor $(v_4^{(I)} - v_1^{(I)}) \cdot u(t - 2 \text{ ms}) = -v_a \cdot u(t - 2 \text{ ms})$, onde $v_4^{(I)}$ e $v_1^{(I)}$ representam as tensões nos terminais 4 e 1 no circuito da Figura 8.10a, respectivamente. Em geral, para as tensões nodais usa-se a notação $v_\alpha^{(\beta)}$, onde α faz referência aos nós (1, 2, ..., 9), e β a um dos circuitos da Figura 8.10, sendo atribuída a numeração I , II , III e IV para as Figuras 8.10a, 8.10b, 8.10c e 8.10d, respectivamente. Com base no modelo da Figura 8.10b, tem-se:

$$J_S = \begin{bmatrix} \mathcal{L}\{-v_a(t) \cdot u(t - 2 \text{ ms})\}/r_{sw,a} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.19)$$

$$G_{SW} = \begin{bmatrix} 1/r_{sw,a} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.20)$$

onde $r_{sw,a}$ é a resistência do equivalente de Norton da fonte da Figura 8.10b, que representa o fechamento da chave da fase a .

- $4 \text{ ms} < t < 6 \text{ ms}$: neste intervalo de tempo as tensões nodais são resultado da superposição dos circuitos das Figuras 8.10a, 8.10b e 8.10c. O fechamento da chave da fase b é representado pela fonte de tensão $(v_5^{(I)} + v_5^{(II)} - v_2^{(I)} - v_2^{(II)}) \cdot u(t - 4 \text{ ms})$. Observa-se que $v_2^{(II)} = v_5^{(I)} = 0$ e $v_2^{(I)} = v_b$, portanto a fonte de tensão pode ser expressa como $(v_5^{(II)} - v_b) \cdot u(t - 4 \text{ ms})$. Assim:

$$J_S = \begin{bmatrix} 0 \\ \mathcal{L} \left\{ (v_5^{(II)}(t) - v_b(t)) \cdot u(t - 4 \text{ ms}) \right\} / r_{sw,b} \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (8.21)$$

$$G_{SW} = \begin{bmatrix} 1/r_{sw,a} & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_{sw,b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad (8.22)$$

onde $r_{sw,a}$ representa a resistência do equivalente de Norton entre os nós 1 e 4, e $r_{sw,b}$ a resistência do equivalente de Norton da fonte da Figura 8.10c, sendo estes valores muito pequenos.

- $t > 6 \text{ ms}$: as tensões nodais são resultado da superposição dos circuitos das Figuras 8.10a, 8.10b, 8.10c e 8.10d, o fechamento da chave da fase c é representado pela fonte de tensão $(v_6^{(I)} + v_6^{(II)} + v_6^{(III)} - v_3^{(I)} - v_3^{(II)} - v_3^{(III)}) \cdot u(t - 6 \text{ ms})$, como $v_6^{(I)} = v_3^{(II)} = v_3^{(III)} = 0$ e $v_3^{(I)} = v_c$, o valor da fonte de tensão equivale a $(v_6^{(II)} + v_6^{(III)} - v_c) \cdot u(t - 6 \text{ ms})$. As tensões neste intervalo de tempo são resultado da superposição das tensões de todos os circuitos da Figura 8.10.

$$J_S = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \mathcal{L} \left\{ (v_6^{(II)}(t) + v_6^{(III)}(t) - v_c(t)) \cdot u(t - 6 \text{ ms}) \right\} / r_{sw,c} \end{bmatrix}, \quad (8.23)$$

$$G_{SW} = \begin{bmatrix} 1/r_{sw,a} & 0 & 0 \\ 0 & 1/r_{sw,b} & 0 \\ 0 & 0 & 1/r_{sw,c} \end{bmatrix}, \quad (8.24)$$

onde $r_{sw,a}$, $r_{sw,b}$ representam as resistências dos equivalentes de Norton localizados entre os nós 1-4 e 2-5, respectivamente, $r_{sw,c}$ é a resistência do equivalente de Norton da fonte que representa a chave na fase C, como mostrado na Figura 8.10d.

Figura 8.10 – Exemplo de simulação de manobras de chaves

a) Estado do circuito em $t < 2$ ms b) Representação de fechamento da chave da fase a c) Representação de fechamento da chave da fase b d) Representação de fechamento da chave da fase c

Observa-se que J_S e I_{ABC} são apresentados no DF, mas na simulação de chaves, foi usada a convolução entre as correntes injetadas no DT e a transformada inversa dos elementos da matriz de impedâncias nodais (ver equação (8.4)), evitando a transformada de Laplace de J_S , conforme discussão do item 8.1.1.

8.2. Métodos de transformada inversa

São apresentados três métodos aplicados à transformação de tensões e correntes do DF para o DT: a transformada modificada de Fourier (TMF) proposta por (BICKFORD et al., 1976), a transformada inversa rápida de Fourier (TIRF) considerando a redução dos erros por truncamento e discretização (MORENO & RAMIREZ, 2008) e a transformada inversa de Fourier com integração semianalítica (TIFIS) entre pontos de amostragem (GUSTAVSEN, 2005).

Um sinal transitório $f(t)$ e sua correspondente transformada de Fourier, $F(\omega)$, estão relacionadas pela expressão:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (8.25)$$

e a transformada inversa de Fourier:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (8.26)$$

Por outro lado, a transformada de Laplace de $f(t)$, denominada como $F_l(s)$ está associada a uma região de convergência no plano complexo, dada por $\text{Re}\{s\} > \gamma$, sendo γ uma constante. Se $\gamma < 0$, obtem-se a transformada de Fourier $\mathcal{F}\{f(t)\} = F(\omega)$ a partir da transformada de Laplace $\mathcal{L}\{f(t)\} = F_l(s)$, substituindo s por $j\omega$ em $F_l(s)$:

$$F(\omega) = F_l(j\omega). \quad (8.27)$$

Nos transientes eletromagnéticos em sistemas de potência, as funções de rede apresentam uma região de convergência com $\gamma < 0$, porque os sistemas geralmente são amortecidos com polos no semi-plano esquerdo. Portanto, a transformada de Fourier é obtida a partir de transformada de Laplace usando (8.27).

8.2.1. Transformada modificada de Fourier – TMF (BICKFORD et al., 1976)

No item 4.1.1.4 é mostrada a transformada inversa de Fourier, onde é usada a matriz de admitâncias nodais da rede $\mathbf{Y}_r$ para calcular as correntes injetadas nodais, sendo que as tensões nodais são conhecidas. No entanto, esta fórmula de inversão pode apresentar erros numéricos para transitórios de longa duração pouco amortecidos.

Para solucionar este problema é usado um artifício matemático que consiste em amortecer o sinal no tempo. A função amortecida de $f(t)$ é obtida por meio do produto com uma função exponencial:

$$g(t) = f(t)e^{-at}H(t), \quad (8.28)$$

onde $H(t)$ é a função degrau unitário e a é a constante de amortecimento. Pelas propriedades da transformada de Laplace:

$$G(\omega) = F_l(a + j\omega), \quad (8.29)$$

onde $F_l(\omega)$ é a transformada de Laplace de $f(t)$. Em (4.19) são apresentadas duas fórmulas de inversão da transformada de Fourier, aplicando (4.19) em (8.29) tem-se que a transformada inversa de $G(\omega)$ pode ser calculada com qualquer uma das seguintes fórmulas:

$$g(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}\{F_l(a + j\omega)\} \cos(\omega t) d\omega \quad (8.30)$$

$$g(t) = -\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Im}\{F_l(a + j\omega)\} \sin(\omega t) d\omega \quad (8.31)$$

Nota-se que as equações (8.30) e (8.31) são análogas às equações (4.19a) e (4.19b). A aplicação da fórmula (4.19a) está associada a uma função par para $f(t)$, por outro lado se fosse aplicada a fórmula (4.19b), esta forneceria um $f(t)$ ímpar. Existe uma preferência na aplicação de (4.19a) em vez de (4.19b) para obter a resposta $f(t)$ porque uma resposta par apresenta menores oscilações de Gibbs (GUSTAVSEN, 2005), por este motivo é usada (8.30) em vez de (8.31). Substituindo (8.30) em (8.28), tem-se:

$$f(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}\{F_l(a + j\omega)\} \cos(\omega t) d\omega, \quad (8.32)$$

O cálculo numérico de (8.32) foi realizado com o comando *trapz* disponível no Matlab, usando como argumentos os valores de $\text{Re}\{F_l(a + j\omega)\} \cos(\omega t)$ e ω , podendo estarem estes valores distribuídos de maneira logarítmica ou linear.

Para o cálculo das tensões nodais aplica-se (8.32) em (8.2) obtendo:

$$v_i(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re} \left\{ \sum_{j=1}^n Z_{r(i,j)}(j\omega) I_j(a + j\omega) \right\} \cos(\omega t) d\omega ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.33)$$

observa-se que os valores de $\mathbf{Z}_r$ são definidos no DF sem considerar o termo de amortecimento a , porque não são resultado de expressões analíticas, são obtidos das rotinas de cálculo de parâmetros (Capítulo 7) onde não é considerado o termo a . Por outro lado, podem-se conhecer as expressões analíticas das correntes injetadas, sendo possível introduzir o termo a . Como será mostrado nos resultados de simulação, esta aproximação fornece bons resultados.

As tensões nodais também podem ser calculadas aplicando (8.32) em (8.4):

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^n \left\{ \left[\frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \text{Re}\{Z_{r(i,j)}(j\omega)\} \cos(\omega t) d\omega \right] * i_j(t) \right\} ; \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (8.34)$$

A expressão (8.34) é usada quando não é possível calcular uma expressão analítica no DF para os equivalentes de Norton das fontes de tensão e/ou as chaves. Observa-se que em (8.34) não é usado o termo de amortecimento a porque na transformada inversa de $Z_{r(i,j)}$ não é possível usar o termo a pelos motivos explicados no parágrafo anterior.

Não é empregada uma expressão analítica para o cálculo do termo de amortecimento a , o valor ótimo de a que fornece os resultados mais próximos aos simulados é obtido por meio de ensaio e erro.

8.2.2. Transformada inversa rápida de Fourier – TIRF (MORENO & RAMIREZ, 2008)

A avaliação numérica da transformada inversa de Laplace introduz dois tipos de erros: as oscilações de Gibbs devido à truncamento na faixa de integração e a presença de respostas periódicas no tempo causada pela discretização da variável contínua ω . Para tratar os erros incorridos pela conversão do domínio do tempo (DF) para o domínio da frequência (DT), em (MORENO & RAMIREZ, 2008) são usadas as bases da transformada de Fourier (ver Anexo A); os erros por truncamento são reduzidos introduzindo uma *função de janela*, enquanto aos

erros de discretização são reduzidos suavizando a resposta do sistema pela escolha apropriada do fator de convergência c , de maneira similar ao fator de amortecimento a em (8.28).

A formulação do cálculo numérico em (MORENO & RAMIREZ, 2008) é baseada em uma discretização ímpar no DF com espaçamento $2\Delta\omega$, e passos de tempo Δt (ver Figura A.4); portanto, as seguintes definições são usadas:

$$f_n \equiv f(n\Delta t), \quad \text{para } n = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.35)$$

$$F_{2k+1} \equiv F(c + j(2k+1)\Delta\omega), \quad \text{para } k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (8.36)$$

onde para o sinal no DT e no DF são usadas N amostras igualmente espaçadas. Também são definidos os limites de integração por meio da frequência máxima Ω (ver equação A.3) e o tempo T que corresponde ao intervalo de tempo de simulação de f_n .

Para os casos de simulação (item 8.3), F_{2k+1} e f_n representam o sinal de tensão (e corrente) no domínio da frequência e do tempo, respectivamente. Também podem representar os elementos da matriz de impedâncias nodais $Z_{r(i,j)}$ e $z_{r(i,j)}$, respectivamente, quando é aplicada a propriedade de convolução de acordo à expressão (8.4). No entanto, no cálculo de $Z_{r(i,j)}$ não é considerado o fator de convergência c porque nas expressões de cálculo de parâmetros do Capítulo 7 não é usado nenhum tipo de fator de amortecimento.

A frequência máxima, Ω , e o espaçamento entre amostras no DF ($\Delta\omega$) e DT (Δt), são calculados como:

$$\Omega = (2\pi N)/T, \quad (8.37)$$

$$\Delta\omega = \pi/T, \quad (8.38)$$

$$\Delta t = T/N. \quad (8.39)$$

No caso das simulações apresentadas neste capítulo, os valores de $\Delta\omega$ e Ω são conhecidos previamente, portanto é usada (8.37) para calcular T , posteriormente (8.39) para obter N e finalmente (8.38) para calcular Δt .

Em (MORENO & RAMIREZ, 2008) são apresentadas as seguintes fórmulas baseadas na *Numerical Laplace Transform* (NLT):

a) cálculo de f_n ;

$$f_n = \text{Re} \left\{ C_n \left[\frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} F_{2k+1} \sigma_{2k+1} e^{j2\pi kn/N} \right] \right\} = \text{Re} \{ C_n * \text{IFFT}(F_{2k+1} \sigma_{2k+1}) \}, \quad (8.40a)$$

$$C_n = 2N e^{c \cdot n \cdot \Delta t} e^{j\pi n/N} \Delta\omega / \pi. \quad (8.40b)$$

O termo dentro do colchete pode ser calculado com o algoritmo da transformada inversa rápida de Fourier (IFFT) do Matlab, que pode ser obtido de forma muito eficiente quando N é igual a um inteiro potência de dois.

b) cálculo de F_{2k+1} ;

A formulação numérica para o cálculo da transformada de Laplace não foi usada neste capítulo porque as expressões no DF foram obtidas de maneira analítica quando disponíveis ou foi usada a propriedade de convolução do item 8.1.1.

A função no DT é discretizada de acordo com a Figura A.4a, obtendo a sua transformada discreta por meio da fórmula:

$$F_{2k+1} = \Delta t \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-(cT+j\pi)n/N} e^{-j2\pi kn/N} = \Delta t * FFT(f_n e^{-(cT+j\pi)n/N}). \quad (8.41)$$

A expressão (8.41) é apresentada como complementação, mas não foi utilizada no cálculo das correntes injetadas no DF porque os resultados obtidos com esta fórmula não forneceram resultados precisos. Para o cálculo de F_{2k+1} pode ser utilizado o algoritmo da transformada rápida de Fourier (FFT) de Matlab.

As tensões nodais calculadas no DF por meio da formulação nodal em (8.2), são transformadas no DT aplicando (8.40), isto é possível quando as correntes de excitação dos equivalentes de Norton podem ser calculadas de maneira analítica.

Outro método para calcular as tensões nodais no DT é baseado na aplicação da propriedade de convolução em (8.4). É possível aplicar (8.4) quando as correntes injetadas dos equivalentes de Norton são conhecidas no DT, portanto é aplicado (8.40) aos elementos de $\mathbf{Z}_{nod}$.

8.2.3. Transformada inversa de Fourier com integração semianalítica – TIFIS (GUSTAVSEN, 2005)

A ideia é trabalhar com as correntes do equivalente de Norton, conhecidas no domínio do tempo, no entanto tratadas com a superposição de degraus. Desse modo é importante analisar a resposta da rede a um degrau de corrente.

Para uma função de transferência $F(\omega)$, a resposta ao degrau unitário $H(\omega)$ é dada por:

$$H(\omega) = \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] F(\omega) = \left[\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega) \right] [R(\omega) + jX(\omega)]. \quad (8.42)$$

Expressando a equação (8.42) como

$$H(\omega) = \frac{F(\omega)}{j\omega} + \pi\delta(\omega)F(\omega), \quad (8.43)$$

aplica-se a fórmula (4.19a) da transformada inversa de Fourier à expressão $F(\omega)/j\omega$ e a definição (8.26) a $\pi\delta(\omega)F(\omega)$, obtendo a resposta no DT ao degrau unitário:

$$h(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} (\pi\delta(\omega)F(\omega)e^{j\omega t}) d\omega + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\operatorname{Re} \left\{ \frac{F(\omega)}{j\omega} \right\} \cos(\omega t) \right] d\omega \quad (8.44a)$$

$$h(t) = \frac{F(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{+\infty} \left[\frac{X(\omega)}{\omega} \cos(\omega t) \right] d\omega \quad (8.44b)$$

É usada a equação (4.19a) em vez de (4.19b) porque de acordo com (GUSTAVSEN, 2005) a aplicação de (4.19a) fornece resultados com menores oscilações de Gibbs do que a fórmula (4.19b). A resposta ao degrau unitário em (8.44) não é igual à apresentada por (GUSTAVSEN, 2005), sendo que no trabalho mencionado é usado o termo $F(0)$ em vez de $F(0)/2$. Considera-se que existe um erro na expressão apresentada por (GUSTAVSEN, 2005) dado que são evidenciados diversos erros de formulação.

Para suavizar as oscilações de Gibbs no cálculo numérico de (8.44), causadas pelo truncamento das amostras de frequência de $X(\omega)$, é introduzida a função $\sigma(\omega)$ mencionada no Anexo A (ver Tabela A.1):

$$h(t) = \frac{F(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega} \left[\frac{X(\omega)}{\omega} \sigma(\omega) \cos(\omega t) \right] d\omega, \quad (8.45a)$$

$$\sigma(\omega) = \sin \frac{\pi\omega/\Omega}{\pi\omega/\Omega}. \quad (8.45b)$$

Sendo Ω a máxima frequência de amostragem de $X(\omega)$. A integração numérica em (8.45) pode precisar de uma quantidade excessiva de amostras porque os transitórios iniciais apresentam harmônicos de frequência muito alta, ao mesmo tempo, o efeito transitório precisa de um tempo elevado para se extinguir. Em outras palavras, a combinação de valores elevados nas variáveis t e ω faz com que a função $\cos(\omega t)$ em (8.45a) tenha um grande número de oscilações no DF. Por exemplo, para $t = 100$ ms e $\Omega = 2\pi \cdot 10^5$ rad/s, por causa do termo

$\cos(\omega t)$, o integrando em (8.45a) apresentaria 10 mil oscilações ao longo da faixa de frequências entre 0 e Ω rad/s. Assumindo necessárias 20 amostras para cada oscilação, precisam-se 200 mil amostras de $X(\omega)$ para resolver a integral (8.45a).

Em (NAGAOKA & AMETANI, 1988) o problema descrito anteriormente é superado assumindo uma aproximação linear da função $T_h(\omega)$ que multiplica à função $\cos(\omega t)$ em (8.45a) (ver Figura 8.11):

$$T_h(\omega) = \frac{X(\omega)}{\omega} \sigma(\omega). \quad (8.46)$$

Resolvendo (8.45a) como uma somatória de integrais delimitadas por cada segmento linear de $T_h(\omega)$ (ver Figura 8.11), tem-se:

$$h(t) = \frac{F(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega} [T_h(\omega) \cos(\omega t)] d\omega, \quad (8.47a)$$

$$h(t) = \frac{F(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \int_{\omega_k}^{\omega_{k+1}} [a_k + b_k(\omega - \omega_k)] \cos(\omega t) d\omega, \quad (8.47b)$$

onde

$$a_k = T_h(\omega_k), \quad (8.48a)$$

$$b_k = \frac{T_h(\omega_{k+1}) - T_h(\omega_k)}{\omega_{k+1} - \omega_k}. \quad (8.48b)$$

A formulação (8.47) permite calcular $h(t)$ para um determinado valor de tempo, sendo possível calcular $h(t)$ de maneira detalhada para o transitório inicial e podendo diminuir a densidade de respostas calculadas no tempo no segmento final do transitório. Resolvendo (8.47), tem-se:

$$h(t) = \frac{F(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=1}^N \left[\frac{a_k}{t} (\sin \omega_{k+1} t - \sin \omega_k t) + \frac{b_k}{t} (c_k + d_k) \right], \quad (8.49)$$

onde

$$c_k = \Delta\omega_k \cdot \sin(\omega_{k+1} t), \quad (8.50a)$$

$$d_k = -\frac{2}{t} \cdot \sin \left[\frac{(\omega_k + \omega_{k+1})t}{2} \right] \cdot \sin \left(\frac{\Delta\omega_k t}{2} \right), \quad (8.50b)$$

$$\Delta\omega_k = \omega_{k+1} - \omega_k. \quad (8.50c)$$

Figura 8.11 – Variação linear de $T(\omega)$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os dois itens seguintes mostram um método de amostragem para $T_h(\omega)$. Este método de amostragem também pode ser aplicado na formulação da TMF. No entanto, os dois itens apresentados a seguir não são essenciais para resolver (8.49), sendo possível usar uma amostragem distribuída de maneira logarítmica para $T_h(\omega)$ ao longo de toda a faixa de frequências, mas o método a apresentado a seguir permite obter o mesmo nível de detalhamento da amostragem logarítmica mas com uma menor quantidade de amostras, que permite diminuir o tempo de processamento no cálculo de transformada inversa de Fourier.

8.2.3.1. Seleção das amostras de frequência

Para obter uma resposta precisa de $h(t)$ é necessária uma amostragem detalhada de $T_h(\omega)$. Para melhorar o tempo de processamento, na amostragem de $T_h(\omega)$ é usado um passo de frequência logarítmico a baixas frequências, e a altas frequências é usado um passo dependente da frequência, que tende a diminuir ao redor dos picos de ressonância.

Portanto, a faixa de frequências amostrada é dividida em faixa superior e faixa inferior:

$$\omega_{inferior} = \left[0, \frac{\omega_0}{2}\right], \quad \omega_{superior} = \left[\frac{\omega_0}{2}, \Omega\right] \quad (8.51)$$

onde $\omega_0 = 2\pi f_0$, sendo f_0 a frequência de ressonância de um quarto de onda.

As amostras de $T_h(\omega)$ são distribuídas de maneira logarítmica na faixa inferior, enquanto que a distribuição das amostras na faixa superior é calculada por meio de um procedimento de integração adaptativo.

A faixa superior é dividida em intervalos, sendo que cada intervalo contém somente um pico de ressonância dominante. O cálculo de ω_0 e o procedimento de divisão da faixa superior é realizada de acordo com os passos seguintes:

a) cálculo da velocidade de propagação modal v_{l_i} , dada por:

$$vel_i = \frac{\omega}{\text{Im}\{\sqrt{D_i}\}}, \quad (8.52)$$

onde D_i é o i -ésimo elemento da diagonal de $\mathbf{\Gamma}_{zy}$, sendo que $\mathbf{\Gamma}_{zy}$ é a matriz de autovalores do produto $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}$:

$$\mathbf{\Gamma}_{zy} = (\mathbf{T}_{zy})^{-1} \cdot (\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}) \cdot \mathbf{T}_{zy}, \quad (8.53)$$

com $\mathbf{Z}$ igual à matriz de impedâncias série, $\mathbf{Y}$ a matriz de admitâncias shunt e $\mathbf{T}_{zy}$ igual à matriz de autovetores de $\mathbf{Z} \cdot \mathbf{Y}$. Nota-se que $\mathbf{\Gamma}_{zy}$ em (8.53) é calculada para cada valor de frequência.

b) o valor de frequência f que satisfaz (8.54) para a menor velocidade modal vel_i , é igual a um quarto de onda da frequência de ressonância f_0 :

$$f_0 = \frac{\min\{vel_i\}}{4l}, \quad (8.54)$$

onde l é o comprimento da linha. Nota-se em (8.51) que $\omega_0/2 = \pi f_0$ representa o valor limite que separa a faixa inferior e superior.

c) os limites dos intervalos de integração da faixa superior são calculados incrementalmente como

$$\omega_{k+1} = \omega_k + 2\omega_0, \quad (8.55)$$

Cada intervalo de $T_h(\omega)$ na faixa superior é submetido de maneira independente à integração adaptativa de Simpson (ver item 8.2.3.2), que de maneira progressiva calcula as amostras que minimizam o erro estimado da integração de $T_h(\omega)$. Este processo é executado de maneira iterativa até alcançar o número máximo de amostras, como mostrado a seguir. Com as amostras de $T_h(\omega)$, a transformada inversa de Fourier é finalmente calculada usando (8.49).

8.2.3.2. Integração adaptativa de Simpson

A integração adaptativa de Simpson é aplicado a cada intervalo da faixa superior, $[\omega_k, \omega_{k+1}]$, para calcular as amostras de $T_h(\omega)$ com o objetivo de diminuir progressivamente o erro da sua integral por meio da fórmula de integração de Simpson.

O algoritmo de integração adaptativa de Simpson é empregado de maneira iterativa por meio da divisão progressiva dos intervalos de frequência, sendo que em cada passo de iteração o intervalo com o maior erro de integração é dividido em dois novos intervalos, considerando que o cálculo do erro é realizado de acordo com o procedimento descrito nas expressões (8.56), (8.57) e (8.58) a seguir.

Considerando o intervalo $[\omega_a, \omega_b]$ e o ponto médio $\omega_c = (\omega_a + \omega_b)/2$ (ver Figura 8.12) de $T_h(\omega)$, a integral de $T_h(\omega)$ usando a fórmula de integração de Simpson é dada por:

$$\int_{\omega_a}^{\omega_b} T_h(\omega) d\omega \approx S_1 = \frac{\omega_b - \omega_a}{6} [T_h(\omega_a) + 4T_h(\omega_c) + T_h(\omega_b)]. \quad (8.56)$$

A integral calculada de maneira mais precisa usando os pontos médios $\omega_d = (\omega_a + \omega_c)/2$ e $\omega_e = (\omega_c + \omega_b)/2$, é dada por:

$$S_1 \approx S_2 = \frac{\omega_b - \omega_a}{12} [T_h(\omega_a) + 4T_h(\omega_d) + 2T_h(\omega_c) + 4T_h(\omega_e) + T_h(\omega_b)]. \quad (8.57)$$

O erro de S_1 em (8.56) pode ser estimado como:

$$err = |S_1 - S_2|, \quad (8.58)$$

Observa-se que o intervalo $[\omega_a, \omega_b]$ está associado a um erro dado por (8.58) e cinco amostras de frequências que são as extremidades $T_h(\omega_a)$ e $T_h(\omega_b)$ e as amostras intermediárias $T_h(\omega_c)$, $T_h(\omega_d)$ e $T_h(\omega_e)$. Em cada passo do processo iterativo são conhecidas as amostras $T_h(\omega_a)$, $T_h(\omega_b)$ e $T_h(\omega_d)$ da iteração anterior e devem ser calculadas $T_h(\omega_c)$ e $T_h(\omega_e)$.

A Figura 8.13a apresenta o procedimento usado para determinar as amostras de frequência dentro de um intervalo genérico $[\omega_1, \omega_2]$. No passo inicial, antes de iniciar o processo iterativo, o intervalo $[\omega_1, \omega_2]$ é dividido em dois novos intervalos: $[\omega_1, \omega_3]$ e $[\omega_3, \omega_2]$, com $\omega_3 = (\omega_1 + \omega_2)/2$. Para cada um dos dois novos intervalos $[\omega_1, \omega_3]$ e $[\omega_3, \omega_2]$, são calculadas três amostras de frequência intermediárias e o erro por meio da aplicação das expressões (8.56)-

(8.58). Vide Figura 8.13b com as frequências ω_4 , ω_5 e ω_6 calculadas para o intervalo $[\omega_1, \omega_2]$. O intervalo $[\omega_3, \omega_2]$ é subdividido de forma análoga.

Após este primeiro passo é iniciado o processo iterativo, que consiste em escolher o intervalo com o maior erro e dividi-lo em dois novos intervalos, sendo necessário para cada novo intervalo as três amostras de frequência intermediárias e o erro por meio de (8.56)-(8.58). Porém, cabe lembrar que a amostra intermediária central já foi calculada no passo anterior, sendo portanto necessário o cálculo de apenas duas amostras adicionais.

Por exemplo, na primeira iteração se o intervalo $[\omega_1, \omega_3]$ possui um erro maior do que em $[\omega_3, \omega_2]$, então o intervalo $[\omega_1, \omega_3]$ é dividido em duas partes gerando os intervalos $[\omega_1, \omega_4]$ e $[\omega_4, \omega_3]$ com $\omega_4 = (\omega_1 + \omega_3)/2$, continuando com o cálculo do erro e sendo necessárias três amostras de frequência para cada intervalo, $[\omega_1, \omega_4]$ e $[\omega_4, \omega_3]$, usando as equações (8.56)-(8.58) (vide Figura 8.13c), sendo necessário o cálculo de ω_{10} , ω_{11} , ω_{12} e ω_{13} . Para o passo seguinte é selecionado o intervalo com maior erro entre $[\omega_1, \omega_4]$, $[\omega_4, \omega_3]$ e $[\omega_3, \omega_2]$ e continua-se de maneira similar como foi realizado na interação anterior.

Figura 8.12 – Amostras para o cálculo da integral de Simpson no intervalo $[x_a, x_b]$

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2005, p.932).

O processo iterativo termina quando é alcançado o valor máximo de amostras de frequência N_{max} . Observa-se que em cada iteração, a divisão do intervalo com maior erro em dois novos intervalos precisa do cálculo de 4 novas amostras de frequência, $N = N + 4$, com N igual ao número total de amostras de frequência calculadas até a iteração passada.

8.2.3.3. Transitórios para excitações arbitrárias

Com (8.49) calcula-se a resposta à uma excitação degrau unitário que pode ser usada para calcular a resposta para uma excitação arbitrária $u(t)$, considerando que esta excitação $u(t)$

pode ser decomposta em uma superposição de degraus atrasados no tempo e com as amplitudes definidas pela equação 8.59 (ver Figura 8.14):

$$u(t) \approx u(t_1)d(t - t_1) + \sum_{k=2}^N [u(t_k) - u(t_{k-1})]d(t - t_k), \quad (8.59)$$

onde $d(t)$ é o degrau unitário.

Figura 8.13 – Cálculo adaptativo de amostras

a) Processo iterativo para o cálculo das amostras

b) Passo inicial

c) Primeira iteração

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A resposta da excitação arbitrária $u(t)$ é obtida pela superposição das respostas ao degrau unitário ponderadas e atrasadas no tempo:

$$y(t) \approx u(t_1)h(t - t_1) + \sum_{k=2}^N [u(t_k) - u(t_{k-1})]h(t - t_k), \quad (8.60)$$

onde $h(t)$ é a resposta ao degrau unitário e $y(t)$ a resposta à excitação arbitrária $u(t)$.

Em alguns casos é conveniente introduzir o fator de amortecimento a de maneira similar ao fator apresentado no item 8.2.1. Aplicando este fator na resposta ao degrau dada em (8.47), seria:

$$h(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\Omega} [T_a(\omega) \cos(\omega t)] d\omega, \quad (8.61)$$

onde

$$T_a(\omega) = \text{Re} \left\{ \frac{F(a + j\omega)}{a + j\omega} \right\} \sigma(\omega). \quad (8.62)$$

Nos casos estudados neste capítulo, o termo F representa algum dos elementos de $\mathbf{Z}_{nod}$. Como as rotinas de cálculo de parâmetros são definidas para valores de frequência que não consideram o termo de amortecimento a , na equação (8.62) não é usado o termo a em F . Apesar desta aproximação é possível obter ótimos resultados.

Figura 8.14 – Excitação arbitrária $u(t)$

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2005, p.928).

Em geral, as tensões nodais no DT são calculadas seguindo os seguintes passos:

- É aplicada (8.49) para cada um dos elementos de $\mathbf{Z}_r$, sendo que o elemento (i,j) de $\mathbf{Z}_r$, denotado como $Z_{r(i,j)}(\omega)$, representaria a função de transferência $F(\omega)$ em (8.49):

$$h_{ij}(t) = \frac{Z_{r(i,j)}(0)}{2} + \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega} [T_{ij}(\omega) \cos(\omega t)] d\omega, \quad (8.63a)$$

onde

$$T_{ij}(\omega) = \frac{\text{Im}\{Z_{r(i,j)}(\omega)\}}{\omega} \sigma(\omega). \quad (8.63b)$$

- Considera-se que as correntes injetadas são conhecidas, devido à formulação nodal da rede baseada no uso do equivalente de Norton. Assim, a entrada $i_j(t)$, que representa a corrente injetada no j -ésimo nó, é constituída pela superposição de degraus atrasados no tempo, da mesma forma como foi apresentado em (8.59):

$$i_j(t) \approx i_j(t_1)d(t - t_1) + \sum_{k=2}^N [i_j(t_k) - i_j(t_{k-1})]d(t - t_k), \quad (8.64)$$

- As tensões em cada nó da rede são calculadas com base na expressão (8.2). Relacionando as respostas ao degrau unitário associadas aos elementos de $\mathbf{Z}_r$, por meio de (8.63), com as correntes nodais em (8.64), tem-se:

$$v_i(t) = \sum_{j=1}^N y_{ij}(t), \quad (8.65)$$

onde

$$y_{ij}(t) = i_j(t_1)h_{ij}(t - t_1) + \sum_{k=2}^N [i_j(t_k) - i_j(t_{k-1})]h_{ij}(t - t_k), \quad (8.66)$$

onde $v_i(t)$ representa a tensão no i -ésimo nó, e N o número total de nós da rede.

8.3. Resultados de simulação

Cada um dos métodos apresentados nesse capítulo, TMF, TIRF e TIFIS é avaliado por meio de quatro situações de uma linha de transmissão:

- Linha em aberto: os terminais 2 e 3 estão em curto e é aplicado um degrau unitário de tensão no terminal 1, enquanto os terminais 4, 5 e 6 estão em vazio. Ver Figura 8.15a.
- Linha em curto-circuito: todos os terminais são curto-circuitados, exceto o terminal 1 onde é aplicado um degrau de tensão. Ver Figura 8.15b.
- Linha com carga: é conectada uma carga balanceada de impedância constante no fim da linha (terminais 4, 5 e 6) e é conectada uma fonte de tensão trifásica no início da linha (terminais 1, 2 e 3) por meio de uma indutância de 110 mH. Ver Figura 8.15c.
- Simulação de chaves: é simulado o acionamento de três chaves em tempos diferentes, para conectar a linha em vazio a uma fonte trifásica em série com uma indutância de 110 mH. Ver Figura 8.15d.

Os casos em circuito-aberto e curto-circuito, das Figuras 8.15a e 8.15b, garantem que as atenuações e distorções das respostas sejam causadas somente pela linha, aumentando a sensibilidade do teste com relação aos erros do modelo.

Na aplicação dos métodos de inversão TIRF e TIFIS não foi necessário usar a função janela, $\sigma(\omega)$, porque nos casos de simulação o uso de $\sigma(\omega)$ não representa uma melhoria evidente de precisão dos resultados em relação às respostas de simulação em ATP e PSCAD.

Foi simulada a linha da Figura 7.3, usando os dados da Tabela 7.1 e com comprimento de 100 km. Como foi mencionado anteriormente, os parâmetros da linha são calculados usando

rotinas implementadas em Matlab baseadas no Capítulo 7. Os resultados de cálculo de parâmetros do Capítulo 7 são usados para representar a linha nas simulações apresentadas a seguir.

A comparação dos resultados no tempo com os obtidos de ATP e PSCAD para cada caso de simulação da Figura 8.15 permitem avaliar o nível de precisão das rotinas de cálculo de parâmetros e dos métodos de transformação do DF para o DT do item 8.2.

Figura 8.15 – Casos de simulação

a) Linha em aberto

b) Linha em curto-circuito

c) Linha com carga

d) Linha em aberto – simulação de chaves

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nos programas ATP e PSCAD são usados os modelos JMarti e ULM, respectivamente com os ajustes predefinidos destes programas. Para o programa ATP é definida uma tolerância no ajuste racional de 0,3% para as impedâncias características modais e as funções de propagação modais, para o programa PSCAD é usada uma tolerância de 0,2% para a matriz de admitâncias características e a matriz da função de propagação. Para todas as simulações é usado um passo de tempo de 1 μ s.

8.3.1. Matriz de admitâncias nodais

De maneira similar como no foi mencionado no Capítulo 5, a dimensão da matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ é de 6×6 , considerando que no cálculo da matriz de impedâncias série, $\mathbf{Z}$, foram usados: o método da distância média geométrica do item B.1.2, a eliminação dos cabos-guarda do item B.2, a expressão (7.37) para o cálculo da impedância interna e a introdução do efeito de retorno pela terra foi calculada com (7.35)-(7.36). Para o agrupamento dos subcondutores por fase no cálculo da matriz de admitâncias shunt, $\mathbf{Y}$, também foi usado o método da distância média geométrica do item B.1.2, e para a eliminação dos cabos-guarda em $\mathbf{Y}$ foi usado o método do item B.2.2.

O cálculo da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, $\mathbf{Y}_{nod}$, é realizado usando o método baseado na diagonalização de $\mathbf{ZY}$ discutida no item 7.3.3 por ser mais eficiente em termos computacionais, considerando que todos os métodos do item 7.3 são equivalentes quanto aos resultados numéricos.

Os elementos da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, Y_{nod} , são calculados na faixa de frequências de 10^{-3} até 10^5 Hz. Para os métodos da transformada modificada de Fourier ou TMF (item 8.2.1) e a transformada inversa de Fourier com integração semianalítica ou TIFIS (item 8.2.3), são usadas 70 mil amostras de frequência distribuídas de maneira logarítmica. No entanto, para o método TIFIS também são usadas as amostras obtidas por meio da integração adaptativa de Simpson do item 8.2.3.2, sendo posteriormente comparadas as respostas no tempo em termos de precisão e eficiência de processamento usando estes dois tipos de amostras.

Para o método da transformada inversa rápida de Fourier ou TIRF são usadas 1 milhão de amostras de frequência distribuídas linearmente com um passo de frequência de 0,1 Hz, desde 0,05 até 10^5 Hz, considerando que a sua formulação numérica apresentada no item 8.2.2 é definida usando uma escala linear de frequências.

As Figuras 8.16a-8.16b mostram o módulo e o ângulo de fase do elemento (1,1) de Y_{nod} . As Figuras 8.16c-8.16d apresentam o detalhamento do módulo e do ângulo de fase a altas frequências. Os outros elementos presentes na diagonal de Y_{nod} apresentam um comportamento similar. Da mesma maneira a Figura 8.17 mostra o módulo e o ângulo de fase do elemento (1,3), sendo que o comportamento dos elementos fora da diagonal são similares ao mostrado na Figura 8.17. Nota-se que Y_{nod} é uma matriz de 6x6 considerando que os cabos-guarda foram eliminados assumindo que seu potencial é constante e igual a zero.

Figura 8.16 – Elemento (1,1) de Y_{nod}

c) Detalhe do módulo

d) Detalhe do ângulo de fase

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.17 – Elemento (1,3) de Y_{nod}

a) Módulo

b) Ângulo de fase

c) Detalhe do módulo

d) Detalhe do ângulo de fase

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

8.3.2. Amostragem aplicada à integração adaptativa de Simpson

Este item ilustra com alguns exemplos a aplicação da técnica de amostragem adaptativa baseada no método de Simpson (ver itens 8.2.3.1 e 8.2.3.2).

A Figura 8.18 mostra as faixas superior e inferior de amostragem da corrente no terminal 1 da Figura 8.15b, assim como os intervalos da faixa superior e a frequência de ressonância de quarto de onda f_0 . Como foi mencionado anteriormente, a faixa inferior está distribuída de maneira logarítmica e a faixa superior é dividida em intervalos, onde para cada intervalo é aplicada a integração adaptativa de Simpson.

O valor de f_0 determina os intervalos da faixa superior como é explicado no item 8.2.3.1. Da expressão (8.54) tem-se que f_0 pode ser determinada graficamente no DF por meio da interseção entre a menor velocidade modal e a expressão $4fl$, sendo f a frequência e l o comprimento da linha (100 km), obtendo como resultado $f_0 = 6,0554 * 10^2$ Hz (ver Figura 8.19). Nota-se que a altas frequências as velocidades modais tendem à velocidade da luz $c = 3 * 10^8$ m/s e considerando que as velocidades modais são independentes do comprimento, quanto menor o comprimento da linha maior será a frequência de ressonância f_0 .

Figura 8.18 – Amostragem adaptativa

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 8.20a mostra a tensão no DF do terminal 5 do teste em circuito-aberto da Figura 8.15a. Desta resposta é selecionado o primeiro intervalo da faixa superior para aplicação da integração adaptativa de Simpson, para detalhamento nas Figuras 8.20b e 8.20c. A Figura 8.20b está em uma escala logarítmica e a Figura 8.20c está em uma escala linear. A Figura 8.20b ilustra as densidades de distribuição das amostras na parte inferior do gráfico, enquanto a Figura

8.20c ilustra estas densidades na parte superior do gráfico. Na Figura 8.20c nota-se que os picos de ressonância mais elevados apresentam uma maior densidade de amostragem do que as regiões planas ou de picos de valor baixo, porque a integração adaptativa de Simpson está baseada na diminuição do valor do erro da integral ou área sob a curva, portanto as seções das curvas que apresentam uma maior densidade de amostragem e que influem mais no resultado da integral são aquelas com valores de picos de ressonância elevado.

Figura 8.19 – Obtenção da frequência de ressonância

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.20 – Amostragem adaptativa

a) Faixa de frequências a ser detalhada

b) Amostragem adaptativa (escala logarítmica)

c) Amostragem adaptativa (escala linear de frequências)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nos itens 8.3.3 e 8.3.4 a seguir é apresentada uma comparação em termos de precisão e tempo de processamento para os testes em curto-circuito e circuito-aberto (ver Figuras 8.15a e 8.15b). A finalidade é estabelecer uma comparação entre as técnicas de amostragem usando o método de inversão TIFIS. As amostragens consideradas são duas, uma totalmente logarítmica e a proposta no item 8.2.3.1. Nota-se que estes tipos de amostragem somente podem ser aplicáveis aos métodos TMF e TIFIS, que permitem usar um passo de frequência variável. O método TIRF também é examinado, porém com um passo de frequência constante.

8.3.3. Linha em curto-circuito

8.3.3.1. Cálculos com tensões nodais conhecidas

Neste item é avaliada a resposta a um degrau de tensão aplicado no circuito da Figura 8.15b. Nota-se que no teste em curto-circuito todas as tensões nos terminais da linha são conhecidas, portanto é possível calcular as correntes injetadas nos terminais da linha usando as formulações apresentadas no item 8.2 somente mudando $\mathbf{Z}_r$ por $\mathbf{Y}_r$ e usando as tensões nodais em vez das correntes injetadas (ver Figura 8.21a). Na Figura 8.22 têm-se as correntes que ingressam no lado emissor da linha de transmissão, calculadas com base nesta abordagem que usa as tensões nodais como variáveis conhecidas e as correntes injetadas como incógnitas, e

aplicando o método TMF com uma constante de amortecimento $a = 7$. Estas respostas calculadas com o método TMF, implementado em Matlab, são apresentadas junto com os resultados dos programas ATP e PSCAD.

Figura 8.21 – Métodos de solução do teste da linha em curto-circuito

a) Método baseado no uso de $\mathbf{Y}_r$, com tensões nodais conhecidas

b) Método baseado no uso de $\mathbf{Z}_r$, com correntes injetadas nodais conhecidas

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os métodos TMF e TIFIS fornecem repostas muito próximas, não sendo possível distinguir visualmente uma diferença nas respostas entre estes dois métodos de inversão, portanto os desvios das respostas calculadas usando o método TMF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD, são muito próximos aos desvios obtidos usando o método TIFIS.

A Figura 8.23 mostra o desvio das correntes que ingressam na linha calculadas com o método TMF/TIFIS em relação às respostas do ATP e PSCAD. Observa-se que existe uma correspondência entre os desvios das Figuras 8.23a-8.23f com as respostas das Figuras 8.22a-8.22f, sendo que o desvio da Figura 8.23a é obtido das respostas da Figura 8.22a e assim por diante.

Similarmente como é apresentado na Figura 8.23, na Figura 8.24 têm-se os desvios das correntes calculadas usando o método TIRF em relação às correntes fornecidas pelo ATP e PSCAD.

Figura 8.22 – Correntes que ingressam nos terminais da linha em curto-circuito usando o método TMF

a) Terminal 1 - ATP

b) Terminal 1 – PSCAD

c) Terminal 2 - ATP

d) Terminal 2 – PSCAD

e) Terminal 3 - ATP

f) Terminal 3 – PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.23 – Desvio das correntes que ingressam na linha em curto-circuito usando qualquer um dos métodos TMF ou TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.24 – Desvio das correntes que ingressam nos terminais da linha em curto-circuito usando o método TIRF em relação aos resultados de ATP e PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Observa-se que os desvios dos resultados calculados em Matlab com os resultados fornecidos pelos programas ATP e PSCAD são pequenos e não apresentam diferenças importantes entre estes dois programas, mas os cálculos tendem a estar um pouco mais próximos aos resultados do PSCAD.

Os métodos de inversão TMF E TIFIS fornecem resultados muito próximos, e são também próximos aos resultados obtidos usando o método TIRF, como observado nas Figuras 8.23-8.24, mas os desvios tendem a ser um pouco menores ao aplicar o método TIRF.

8.3.3.2. Cálculos com correntes nodais injetadas conhecidas

Conforme menção anterior, todos os casos de simulação podem ser representados pelos circuitos da Figura 8.3, onde a fonte de tensão é substituída pelo seu equivalente de Norton e o curto-circuito de cada terminal da linha é representado por uma resistência de valor muito pequeno (ver Figura 8.21b). Nota-se que a fonte de corrente no DF corresponde a $1/R(1/j\omega + \pi\delta(\omega))$, sendo R o valor da resistência do equivalente de Norton da fonte, caracterizado por ser pequeno e arbitrário. Usando um valor de resistência para o equivalente de Norton e para os curtos-circuitos de $0,001 \Omega$ obtêm-se respostas muito próximas às mostradas nas Figuras 8.22-8.24, não apresentadas.

8.3.3.3. Comparação de tempos de processamento

A Tabela 8.1 mostra os tempos de processamento dos métodos de inversão considerando as correntes injetadas as variáveis conhecidas e as tensões nodais as incógnitas (uso do equivalente de Norton) e vice-versa, como foi explicado anteriormente. Na Tabela 8.1 não é considerado o tempo de pré-processamento, composto pelos tempos de cálculo dos parâmetros de linha, a matriz de admitâncias nodais da rede $\mathbf{Y}_r$ ou a matriz de impedâncias nodais da rede $\mathbf{Z}_r$, nesta tabela somente são avaliados os tempos de processamento de aplicação dos métodos de inversão (TMF, TIRF e TIFIS).

Nota-se na Tabela 8.1 que o tempo de processamento usando o equivalente de Norton (Figura 8.21b) é maior do que o tempo de pré-processamento baseado no uso de $\mathbf{Y}_r$ (Figura 8.21a) porque para o cálculo das correntes que ingressam na linha precisa-se um maior número de passos quando é usado o equivalente de Norton do que no uso de $\mathbf{Y}_r$. A corrente no terminal

1 da linha em curto-circuito é calculada usando $\mathbf{Y}_r$ (Figura 8.21a), calcula-se por meio da transformada inversa:

$$i_1(t) = \mathfrak{F}^{-1}\{Y_{r(1,1)}V_1\} = \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{Y_{r(1,1)}}{j\omega + q}\right\}, \quad (8.67)$$

onde $Y_{r(1,1)}$ representa o elemento (1,1) de $\mathbf{Y}_r$, V_1 é a tensão no terminal 1 da linha no DF, i_1 é a corrente que ingressa no terminal 1 da linha no DT e o termo q representa o termo de amortecimento a ($a=q$), quando são aplicados os métodos TMF ou TIFIS, ou também pode representar o fator de convergência c ($c=q$) quando é aplicado o método TIRF.

A corrente i_1 , calculada por meio do uso do equivalente de Norton (Figura 8.21a) é dada por:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= \mathfrak{F}^{-1}\{I_{nor}\} - \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{V_1}{R}\right\} = \mathfrak{F}^{-1}\{I_{nor}\} - \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{Z_{r(1,1)}I_{nor}}{R}\right\} \\ &= \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{R(j\omega + q)}\right\} - \mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{Z_{r(1,1)}}{R^2(j\omega + q)}\right\} \\ &= \frac{1}{R}\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{1}{j\omega + q}\right\} - \frac{1}{R^2}\mathfrak{F}^{-1}\left\{\frac{Z_{r(1,1)}}{j\omega + q}\right\}, \end{aligned} \quad (8.68)$$

a corrente i_1 é calculada como a soma da corrente injetada pela fonte de corrente do equivalente de Norton, I_{nor} , com a corrente que circula na resistência, R , conectada no terminal 1 da linha. Para os métodos TMF, TIRF e TIFIS são usadas as equações (8.32), (8.40) e (8.61), respectivamente. Porém, o termo $T_a(\omega)$ em (8.61) quando o método TIFIS é aplicado a (8.67) seria:

$$T_a(\omega) = \text{Re}\left\{\frac{Y_{r(1,1)}}{j\omega + q}\right\}\sigma(\omega), \quad (8.69a)$$

Similarmente, os termos $T_a(\omega)$ para o método TIFIS aplicado nas transformadas inversas em (8.68) seriam:

$$T_a(\omega) = \text{Re}\left\{\frac{1}{j\omega + q}\right\}\sigma(\omega), \quad (8.69b)$$

$$T_a(\omega) = \text{Re}\left\{\frac{Z_{r(1,1)}}{j\omega + q}\right\}\sigma(\omega), \quad (8.69c)$$

Por outro lado, o tempo de pré-processamento é maior para o método TIRF porque o número de amostras de frequência é de 1 milhão, muito superior às 70 mil amostras usadas nos métodos TMF e TIFIS. Como referência, os testes foram executados em Matlab 2017a usando um notebook com processador Intel Core i7 6600U CPU 2.8 GHz e sistema operativo Windows 10. Todos os tempos são medidos usando o comando *tic toc* de Matlab.

Como foi mencionado anteriormente, os resultados da aplicação dos métodos de inversão TMF, TIFIS e TIRF são próximos. No entanto, da Tabela 8.1 tem-se que o tempo de processamento do TIRF é menor e, portanto, mais eficiente. Embora o TIRF emprega um maior número de amostras do que os métodos TMF e TIFIS, o tempo de processamento do TIRF é o menor porque faz uso do algoritmo da transformada inversa rápida de Fourier implementado em Matlab por meio da função IFFT.

Tabela 8.1 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste em curto-circuito

Representação	Método		
	TMF	TIRF	TIFIS
Uso direto de Y_{nod}	2,196944	0,525485	4,505928
Equivalente de Norton	4,063502	1,183912	8,318079

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

O uso da amostragem com a integração adaptativa de Simpson permite reduzir o número amostras de 70 mil para 33 mil aproximadamente mantendo quase a mesma precisão. Nota-se que esta amostragem é diferente para cada circuito simulado, considerando que os métodos de inversão (TMF, TIRF e TIFIS) são baseados no uso da matriz de impedâncias/admitâncias nodais que depende da configuração da rede. No entanto, o método de integração adaptativa de Simpson permite controlar o número de amostras a serem calculadas. Para os testes em curto-circuito e circuito-aberto, o número de amostras escolhido foi o mesmo com aproximadamente 33 mil amostras.

A Tabela 8.2 mostra os tempos de processamento para os casos em curto-circuito e circuito-aberto usando os dois tipos de amostragem e aplicando o método TIFIS, tendo em conta que no teste em curto-circuito é usada a matriz Y_{nod} . A Tabela 8.2 não inclui o tempo de processamento para o cálculo das amostras, estes tempos somente consideram o tempo de aplicação de cada método de inversão. Na Tabela 8.3 têm-se os tempos de processamento para o cálculo das amostras com uma distribuição totalmente logarítmica e usando o esquema de adaptativo (item 8.3.2), para os testes em curto-circuito e circuito-aberto.

Da Tabela 8.2 observa-se que a redução do número de amostras de 70 mil para 33 mil permite diminuir o tempo de processamento na aplicação do método TIFIS em 28% e 24% nos testes em curto-circuito e circuito-aberto, respectivamente. No entanto, da Tabela 8.2 tem-se que o esquema adaptativo de integração de Simpson para o cálculo das amostras é menos eficiente do que usar uma amostragem distribuída de maneira logarítmica. No entanto, as

mesmas amostras permitem simular a mesma rede com qualquer outro tipo de excitação aplicando a formulação do item 8.2.3.3.

Nota-se que as amostras obtidas por meio de uma distribuição logarítmica ou uma amostragem adaptativa podem ser usadas nos métodos TMF e TIFIS, mas não podem ser usadas no método TIRF porque este método é baseado em amostras distribuídas de maneira linear.

Embora o tempo de processamento do método de inversão TIFIS tenha sido reduzido usando amostragem adaptativa (Tabela 8.2), este tempo não consegue ser inferior ao tempo de processamento do método TIRF para o teste em curto-circuito (Tabela 8.1), com 3,236 segundos para o TIFIS e 0,5255 segundos para o TIRF.

Tabela 8.2 – Tempos de processamento em segundos para o cálculo da transformada inversa de Fourier com a TIFIS

Amostras	Caso	
	Curto-circuito	Circuito-aberto
Logarítmica	4,505928	4,109513
Adaptativa	3,236222	3,121021

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Tabela 8.3 – Tempos de pré-processamento em segundos para o cálculo das amostras

Amostragem	Caso	
	Curto-circuito	Circuito-aberto
Logarítmica	75,911192	77,318778
Adaptativa	88,142484	89,708570

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Similarmente como é apresentado na Figura 8.23, na Figura 8.25 tem-se o desvio da resposta calculada usando o método TIFIS com amostragem adaptativa. Nota-se que este o desvio é semelhante ao obtido usando a amostragem logarítmica, como mostrado na Figura 8.23, porém o tempo de processamento é menor ao usar a amostragem adaptativa.

Figura 8.25 – Desvio das correntes que ingressam nos terminais da linha em curto-circuito usando o método TIFIS e o procedimento de integração adaptativo

a) Terminal 1 - ATP

b) Terminal 1 - PSCAD

c) Terminal 2 - ATP

d) Terminal 2 - PSCAD

e) Terminal 3 - ATP

f) Terminal 3 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

8.3.4. Linha em circuito-aberto

Na Figura 8.26 têm-se as tensões na extremidade receptora da linha de transmissão (terminais 4, 5 e 6) para o circuito representado na Figura 8.15a. As tensões são calculadas com o método TMF e uma amostra logarítmica, como mencionado no item 8.3.1, estas tensões são comparadas com os resultados simulados em ATP e PSCAD.

Os desvios entre os valores calculados das tensões no fim da linha com o método TMF e os resultados de simulação em ATP e PSCAD são apresentados na Figura 8.27. Nota-se que existem uma correspondência entre as os resultados das Figura 8.26 e 8.27, com o desvio da Figura 8.27a obtida das respostas da Figura 8.26a e assim por diante. Observa-se que todos os resultados são próximos uns dos outros, mas o desvio tende a ser um pouco menor em relação ao PSCAD.

Figura 8.26 – Tensões na linha em circuito-aberto usando o método TMF

e) Terminal 6 - ATP

f) Terminal 6 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.27 – Desvio das tensões da linha em circuito-aberto usando qualquer um dos métodos TMF ou TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

a) Terminal 4 - ATP

b) Terminal 4 - PSCAD

c) Terminal 5 - ATP

d) Terminal 5 - PSCAD

e) Terminal 6 - ATP

f) Terminal 6 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Os métodos TMF e TIFIS fornecem resultados muito próximos, obtendo desvios em relação às respostas fornecidas pelo ATP e PSCAD quase idênticos tanto para o TMF quanto para o TIFIS, da mesma maneira como acontece no teste em curto-circuito.

Similarmente como é apresentado na Figura 8.27, na Figura 8.28 tem-se o desvio das tensões calculadas usando o método TIRF em relação às correntes simuladas pelo ATP e PSCAD.

Observa-se na Figura 8.28 que os desvios são similares aos apresentados na Figura 8.27, no entanto, a Tabela 8.4 mostra que o tempo de processamento para o método TIRF é menor do que os tempos de processamento para os outros métodos (TMF e TIFIS), pois como foi explicado anteriormente, embora o número de amostras empregadas no TIRF (1 milhão de amostras) é muito maior do que o utilizado nos métodos TMF e TIFIS (70 mil amostras), o método TIRF faz uso do algoritmo da transformada rápida de Fourier. Nos tempos da Tabela 8.4 não estão incluídos os tempos de pré-processamento que consiste no cálculo das amostras de frequência. Os tempos de pré-processamento para o teste em circuito-aberto são apresentados na Tabela 8.3 para o cálculo das amostras distribuídas de maneira logarítmicas e as amostras calculadas por meio do método do item 8.2.3.1.

Tabela 8.4 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste em circuito-aberto

TMF	TIRF	TIFIS
2,163453	0,501232	4,109513

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.28 – Desvio das tensões na linha em circuito-aberto usando o método TIRF em relação aos resultados de ATP e PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Similarmente como é apresentado na Figura 8.27, a Figura 8.29 mostra os desvios das tensões calculadas por meio do método TIFIS em relação às correntes simuladas pelo ATP e

PSCAD, usando as amostras obtidas com a integração adaptativa de Simpson (item 8.2.3.2). Os desvios da Figura 8.29 são similares aos obtidos nas Figuras 8.27 usando as amostras distribuídas somente de maneira logarítmica. Como foi mencionado anteriormente, são calculadas 70 amostras para a escala logarítmica e 30 amostras aproximadamente com a integração adaptativa de Simpson.

De acordo com a Tabela 8.2, o tempo de processamento usando o procedimento de integração adaptativo é quase 75% do tempo usando as amostras em escala logarítmica.

Da Tabela 8.3 observa-se que o tempo de processamento para o cálculo das amostras é 14% maior para o procedimento baseado na integração adaptativa de Simpson do que usando uma escala logarítmica. Em geral, as amostras de uma rede podem ser usadas para calcular a resposta da rede com a mesma configuração mas com outras excitações de acordo com o item 8.2.3.3.

Figura 8.29 – Desvio das correntes que ingressam nos terminais da linha em circuito-aberto usando o método TIFIS e o procedimento de integração adaptativo

e) Terminal 6 - ATP

f) Terminal 6 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

8.3.5. Linha conectada a uma carga

Para o teste da Figura 8.15c, as fontes de tensão são transformadas em um equivalente de Norton no DF, como mostrado na Figura 8.2a, sendo que expressões analíticas no DF para as fontes de tensão são obtidas por meio da transformada de Laplace.

Com o método TIFIS não é necessário o uso da formulação do item 8.2.3.3 para o cálculo de respostas a excitações arbitrárias, pois as tensões nodais na carga podem ser obtidas de uma maneira mais eficiente em termos computacionais aproveitando a possibilidade de obter as correntes injetadas pelos equivalentes de Norton no DF por meio de expressões analíticas. Para o cálculo das tensões nodais com o método TIFIS é usada a seguinte expressão:

$$v_n(t) = \frac{2}{\pi} \int_0^{\Omega} [T_n(\omega) \cos(\omega t)] d\omega, \quad n = 1, \dots, 6 \quad (8.70)$$

onde

$$T_n(\omega) = \text{Re}\{V_n(\omega)\}\sigma(\omega), \quad n = 1, \dots, 6 \quad (8.71a)$$

$$V_n(\omega) = \sum_{m=1}^6 Z_{r(n,m)}(\omega) I_m(\omega), \quad n = 1, \dots, 6 \quad (8.71b)$$

A variável $v_n(t)$ representa a tensão no nó n ; $Z_{r(n,m)}(\omega)$ é o elemento (n,m) da matriz de impedâncias nodais da rede, $\mathbf{Z}_r$, da Figura 8.15c mas substituindo as fontes de tensão pelos equivalentes de Norton e considerando somente como nós os terminais da linha; $I_m(\omega)$ é a

corrente injetada no nó m ; $\sigma(\omega)$ é a função janela dada em (8.45b). As amostras de T_n são calculadas usando a integração adaptativa de Simpson (item 8.2.3.2).

Em determinados casos é conveniente introduzir o coeficiente de amortecimento a nas formulações anteriores, obtendo:

$$v_n(t) = \frac{2e^{at}}{\pi} \int_0^{\Omega} [T_n(\omega) \cos(\omega t)] d\omega, \quad n = 1, \dots, 6 \quad (8.72)$$

onde

$$V_n(\omega) = \sum_{m=1}^6 Z_{r(n,m)}(\omega) I_m(a + j\omega), \quad n = 1, \dots, 6 \quad (8.73)$$

Em I_m é introduzido o termo a considerando que I_m é uma expressão analítica para o caso de simulação deste item, ao contrário de $Z_{r(n,m)}(\omega)$ onde não é possível introduzir o termo a porque é resultado do procedimento de cálculo de parâmetros. Na Figura 8.30 têm-se as tensões na carga e estes resultados são calculados usando o método TMF, no entanto, resultados quase idênticos são obtidos usando o TIFIS. Os desvios em relação aos resultados simulados em ATP e PSCAD são apresentados na Figura 8.31, não existindo uma diferença importante entre os desvios obtidos usando o TMF e o TIFIS. Observa-se que os cálculos são um pouco mais próximos aos fornecidos pelo PSCAD.

Figura 8.30 – Tensões no terminal receptor da linha com carga usando o método TMF

c) Terminal 5 - ATP

d) Terminal 5 - PSCAD

e) Terminal 6 - ATP

f) Terminal 6 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.31 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha com carga usando o método TMF ou TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

a) Terminal 4 - ATP

b) Terminal 4 - PSCAD

c) Terminal 5 - ATP

d) Terminal 5 - PSCAD

e) Terminal 6 - ATP

f) Terminal 6 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Tabela 8.5 apresenta os tempos de processamento da aplicação dos métodos de inversão para o teste da linha conectada a uma carga, mas sem considerar os tempos de pré-processamento no cálculo das amostras. Nota-se que o método TMF é executado na metade do tempo do TIFIS, mas como foi mencionado anteriormente, os resultados são muito próximos.

Tabela 8.5 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste da linha conectada a uma carga

TMF	TIRF	TIFIS
6,061306	1,665694	12,383447

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 8.32 têm-se os desvios dos cálculos das tensões na carga com o método TIRF em relação às simulações em ATP e PSCAD. Nota-se que estes desvios são próximos aos apresentados na Figura 8.31, mas o TIRF apresenta um tempo de processamento menor do que

os outros métodos: TMF e TIFIS, isto acontece porque o TIRF faz uso do algoritmo IFFT de Matlab como foi mencionado anteriormente.

Figura 8.32 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha com carga usando o método TIRF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Em conclusão, das Figuras 8.31-8.32 e da Tabela 8.5 tem-se que o desvio é similar para os três métodos de inversão, mas o TIRF é o método mais eficiente em termos de tempo de processamento das amostras de frequência.

8.3.6. Simulação de acionamento de chaves

Para o teste de simulação de acionamento de chaves é usada a convolução (ver fórmula (8.4)) quando são aplicados os métodos TMF e TIRF. Mas no método TIFIS é usada a superposição de respostas ao degrau unitário em vez da convolução, como mostrado no item 8.2.3.3.

Esta simulação corresponde ao teste da Figura 8.15d. Como foi mostrado no item 8.1.4, as tensões nodais podem ser calculadas por meio da superposição das respostas dos circuitos que representam os eventos de fechamento das chaves como mostrado na Figura 8.10. Nestas simulações é usada a propriedade de convolução nos métodos TMF e TIRF para evitar o cálculo dos equivalentes de Norton no DF por meio do uso da NLT, considerando que neste caso não é possível obter uma expressão analítica no DF para os equivalentes de Norton das chaves. Na expressão (8.4) tem-se a aplicação da propriedade de convolução para o cálculo das tensões nodais, sendo que os métodos TMF e TIRF são aplicados no cálculo da transformada inversa:

$$Z_{nod(i,j)} = \mathfrak{F}^{-1}\{Z_{nod(i,j)}\}.$$

O cálculo das tensões nodais por meio da TIFIS é baseado na formulação do item 8.2.3.3.

Nota-se que nos casos de simulação deste item, os métodos empregados não necessitam dos equivalentes de Norton no DF.

Na Figura 8.33 têm-se as tensões no terminal receptor da linha, calculadas usando o método TMF e obtidas por meio de simulação com ATP e PSCAD. Os desvios das tensões calculadas em relação aos resultados simulados são apresentados na Figura 8.34. Os demais métodos, TIRF e TIFIS, apresentam resultados similares aos obtidos por meio do TMF, cujos desvios são mostrados nas Figuras 8.35 e 8.36.

As amostras usadas nos métodos TMF e TIFIS, para as simulações deste item, estão distribuídas de maneira logarítmica, não sendo empregado o método de amostragem baseado na integração adaptativa de Simpson (item 8.2.3.2). Para o método TIRF sempre são usadas amostras distribuídas de maneira linear de acordo com o estabelecido na sua formulação (equação (8.40)).

Figura 8.33 – Tensões no terminal receptor da linha em vazio usando o método TMF

a) Terminal 7 - ATP

b) Terminal 7 – PSCAD

c) Terminal 8 - ATP

d) Terminal 8 – PSCAD

e) Terminal 9 - ATP

f) Terminal 9 – PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.34 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha em vazio usando o método TMF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

a) Terminal 7 - ATP

b) Terminal 7 - PSCAD

c) Terminal 8 - ATP

d) Terminal 8 - PSCAD

e) Terminal 9 - ATP

f) Terminal 9 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.35 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha em vazio usando o método TIRF, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

a) Terminal 7 - ATP

b) Terminal 7 - PSCAD

c) Terminal 8 - ATP

d) Terminal 8 - PSCAD

e) Terminal 9 - ATP

f) Terminal 9 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 8.36 – Desvio das tensões calculadas no terminal receptor da linha em vazio usando o método TIFIS, em relação aos resultados de ATP e PSCAD

a) Terminal 7 - ATP

b) Terminal 7 - PSCAD

c) Terminal 8 - ATP

d) Terminal 8 - PSCAD

e) Terminal 9 - ATP

f) Terminal 9 - PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Tabela 8.6 mostram-se os tempos de processamento de cada método de inversão. Como nos casos anteriores o método TIRF é o mais eficiente em termos de processamento, tendo em conta que os tempos de cálculo das amostras de frequência não é considerado. Quanto à precisão dos resultados, em relação ao ATP ou PSCAD, não é possível observar uma vantagem evidente de algum dos métodos.

Tabela 8.6 – Tempos de processamento em segundos dos métodos de inversão para o teste de simulação de acionamento de chaves

TMF	TIRF	TIFIS
12,052964	3,328301	50,216909

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nos testes em curto-circuito (item 8.3.3), circuito-aberto (item 8.3.4) e linha conectada a uma carga (8.3.5), tem-se que os métodos TMF e TIFIS apresentam resultados muito próximos porque as suas formulações são similares. Isso ocorre porque as funções a integrar são muito similares e os métodos de integração baseados na regra trapezoidal de integração e a integração semianalítica são equivalentes quando o passo de integração é o mesmo.

Por outro lado, no caso de simulação das chaves existe uma diferença entre os resultados fornecidos pelos métodos TMF e TIFIS, considerando que somente neste caso de simulação foi usada a formulação do item 8.2.3.3 para o método TIFIS devido à impossibilidade de obter uma expressão analítica no DF dos equivalentes de Norton.

Cabe considerar que foi possível utilizar o método TIFIS no teste da linha conectada a uma carga com a formulação (8.70)-(8.71), em vez do procedimento do item 8.2.3.3, já que é exequível a obtenção dos equivalentes de Norton no domínio da frequência. Da mesma forma, nos testes em curto-circuito e circuito-aberto o procedimento do item 8.2.3.3 foi evitado por serem consideradas respostas ao degrau unitário.

Capítulo 9

Modelagem de Linhas de Transmissão em Paralelo

As linhas com circuitos em paralelo não podem ser modeladas com precisão por meio de modelos que trabalham no domínio modal e empregam matrizes de transformação constante, como é o caso do modelo proposto por (MARTI, 1982). No entanto, em (GUSTAVSEN, 2012) é proposta uma nova abordagem para modelar linhas em paralelo, baseada em uma melhoria no modelo de (MARTI, 1982) por meio do uso do método *Vector Fitting* (VF) para modelar o efeito de acoplamento mútuo entre linhas. Neste capítulo são avaliados todos os passos de modelagem de linhas em paralelo desta nova abordagem, cujos resultados são comparados com os fornecidos pelo programa PSCAD.

9.1. Modelagem

O modelo de linha proposto por (MARTI, 1982), disponibilizado pelo programa ATP e chamado como JMarti, é baseado no método das características e no uso de uma matriz de transformação constante para transformar o modelo do domínio de fase para o domínio modal, isto permite tratar cada modo como se fosse uma linha independente (desacoplada). No entanto, este método é aproximado porque a matriz de transformação, dada pela matriz de autovetores de $\mathbf{YZ}$, é assumida constante. Sendo $\mathbf{Y}$ a matriz de admitâncias shunt por unidade de comprimento e $\mathbf{Z}$ a matriz de impedâncias série por unidade de comprimento.

No caso de linhas continuamente transpostas que fazem parte de um único circuito, as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ são balanceadas, ou seja, os elementos da diagonal são iguais e os elementos fora da diagonal também são iguais. O produto $\mathbf{YZ}$ pode ser diagonalizado por uma matriz de transformação real e constante com a frequência. Portanto, para este tipo de linha o modelo proposto por (MARTI, 1982) é perfeitamente válido.

No caso de linhas não transpostas, as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ tornam-se levemente não balanceadas, mas o modelo de (MARTI, 1982) ainda pode fornecer bons resultados.

Nas situações de linhas em paralelo, as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ podem-se tornar fortemente não balanceadas e a suposição de uma matriz de transformação real e constante pode apresentar erros substanciais nos resultados de simulação.

No trabalho proposto por (GUSTAVSEN, 2012) é proposta a modelagem de linhas em paralelo. Cada uma das linhas em paralelo é modelada de maneira independente por meio do modelo de (MARTI, 1982), em série com fontes de tensão que representam o acoplamento mútuo entre linhas (ver Figura 9.2). Os modelos das fontes de tensão são calculados por meio do uso do *Vector Fitting* (VF). Este modelo evita o problema das matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ serem fortemente não balanceadas, sendo que $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ estão associadas ao conjunto das linhas em paralelo. Por outro lado, quando uma das linhas em paralelo é modelada de maneira independente pelo modelo de (MARTI, 1982), as matrizes $\mathbf{Z}_i$ e $\mathbf{Y}_i$, associadas à i -ésima linha, são levemente não balanceadas.

9.1.1. Acoplamento mútuo

Considerando as duas linhas em paralelo da Figura 9.1, sendo n_1 e n_2 o número de condutores para as linhas 1 e 2, respectivamente. A matriz de admitâncias do conjunto de linhas, $\mathbf{Y}_{nod}$, relaciona as correntes injetadas nos terminais da linha, $\mathbf{i}$, e as tensões nodais nos terminais da linha, $\mathbf{v}$:

$$\mathbf{i}(s) = \mathbf{Y}_{nod}(s)\mathbf{v}(s), \quad (9.1a)$$

$$\begin{bmatrix} i_1^k \\ i_2^k \\ i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix} = \mathbf{Y}_{nod} \begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix}. \quad (9.1b)$$

Nos vetores de tensão e corrente, os índices 1 e 2 estão associados às linhas 1 e 2, respectivamente, enquanto os índices k e m indicam os terminais emissor e receptor das linhas, respectivamente.

A matriz $\mathbf{Y}_{nod}$ pode ser calculado por meio das formulações apresentadas no item 7.3. Invertendo $\mathbf{Y}_{nod}$, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = \mathbf{Z}_{nod} \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_2^k \\ i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Z}_{nod} = (\mathbf{Y}_{nod})^{-1} \quad (9.2)$$

Os elementos de $\mathbf{Z}_{nod}$ em (9.2) são reordenados para agrupar tensões e correntes associadas a cada linha, isto é, $\mathbf{v}_1 = [(v_1^k)^T \ (v_1^m)^T]^T$, $\mathbf{v}_2 = [(v_2^k)^T \ (v_2^m)^T]^T$, $\mathbf{i}_1 = [(i_1^k)^T \ (i_1^m)^T]^T$ e $\mathbf{i}_2 = [(i_2^k)^T \ (i_2^m)^T]^T$:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_1^m \\ v_2^k \\ v_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{n,11} & \mathbf{Z}_{n,12} \\ \mathbf{Z}_{n,21} & \mathbf{Z}_{n,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_1^m \\ i_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad (9.3a)$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{n,11} & \mathbf{Z}_{n,12} \\ \mathbf{Z}_{n,21} & \mathbf{Z}_{n,22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_1 \\ \mathbf{i}_2 \end{bmatrix}, \quad (9.3b)$$

A tensão $\mathbf{v}_{1,ind} = \mathbf{Z}_{n,12}\mathbf{i}_2$ representa a tensão induzida nos terminais da linha 1 devido às correntes injetadas nos terminais da linha 2. Similarmente, a tensão $\mathbf{v}_{2,ind} = \mathbf{Z}_{n,21}\mathbf{i}_1$ representa a tensão induzida nos terminais da linha 2 devido às correntes injetadas nos terminais da linha 1.

Figura 9.1 - Construção do modelo em espaço de estados

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2012, p.2160).

9.1.2. Separação dos efeitos dos acoplamentos capacitivos e indutivos

Os elementos de $\mathbf{Z}_{n,12}$ e $\mathbf{Z}_{n,21}$ a baixas frequências, inferiores a 1 kHz, são influenciados principalmente pelo acoplamento capacitivo entre linhas, sendo pequena a contribuição do acoplamento indutivo a baixas frequências. Para modelar com precisão tanto o acoplamento indutivo quanto o capacitivo, em (GUSTAVSEN, 2012) é proposto calcular as tensões induzidas $\mathbf{v}_{1,ind}$ e $\mathbf{v}_{2,ind}$ com base nas matrizes $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$, que relacionam as tensões induzidas pelo efeito de acoplamento com as tensões nodais no terminais do lado emissor e as correntes injetadas no lado receptor, como mostrado em (9.4).

$$\mathbf{v}_{1,ind} = \begin{bmatrix} v_{1,ind}^k \\ v_{1,ind}^m \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{12} \begin{bmatrix} v_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad (9.4a)$$

$$\mathbf{v}_{2,ind} = \begin{bmatrix} v_{2,ind}^k \\ v_{2,ind}^m \end{bmatrix} = \mathbf{K}_{21} \begin{bmatrix} v_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix}. \quad (9.4b)$$

O procedimento para o cálculo de $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$ é apresentado no Anexo C. Observa-se que $\mathbf{K}_{12} \neq \mathbf{K}_{21}$, a menos que as duas linhas em paralelo sejam idênticas.

9.1.3. Transformações modais

Os componentes modais operacionais de cada linha podem ser representados de maneira precisa por meio das matrizes $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$. Tendo em conta que os componentes modais operacionais para uma linha trifásica e uma linha em corrente contínua (ou mesmo uma linha telefônica) são o modo de sequência positiva e o modo diferencial, respectivamente. Para que as matrizes $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$ representem de maneira precisa os modos operacionais é introduzida uma transformação baseada no uso de uma matriz de transformação constante $\mathbf{T}$, para uma linha trifásica, tem-se:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & \sqrt{2} & 0 \\ 1 & -1/\sqrt{2} & \sqrt{3}/\sqrt{2} \\ 1 & -1/\sqrt{2} & -\sqrt{3}/\sqrt{2} \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad (9.5a)$$

e para uma linha bifásica:

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}}. \quad (9.5b)$$

Designando $\mathbf{T}_1$ e $\mathbf{T}_2$ (obtidas de (9.5)) como as matrizes de transformação das linhas 1 e 2, respectivamente. Por exemplo, se as linhas 1 e 2 fossem uma linha trifásica e em corrente

contínua, respectivamente, T_1 seria igual a (9.5a), enquanto T_2 seria igual a (9.5b). Para o caso de duas linhas trifásicas em paralelo T_1 e T_2 seriam iguais a (9.5a).

As seguintes relações são usadas entre as variáveis de fase e as variáveis transformadas denotadas pelo traço (“ $\bar{}$ ”):

$$v_j^k = T_j \bar{v}_j^k, \quad v_j^m = T_j \bar{v}_j^m, \quad j = 1, 2 \quad (9.6a)$$

$$v_{j,ind}^k = T_j \bar{v}_{j,ind}^k, \quad v_{j,ind}^m = T_j \bar{v}_{j,ind}^m, \quad j = 1, 2 \quad (9.6b)$$

$$i_j^k = T_j \bar{i}_j^k, \quad i_j^m = T_j \bar{i}_j^m, \quad j = 1, 2 \quad (9.6c)$$

Combinando (9.4) e (9.6), tem-se:

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{1,ind}^k \\ \bar{v}_{1,ind}^m \end{bmatrix} = \bar{K}_{12} \begin{bmatrix} \bar{v}_2^k \\ \bar{v}_2^m \end{bmatrix}, \quad (9.7a)$$

$$\begin{bmatrix} \bar{v}_{2,ind}^k \\ \bar{v}_{2,ind}^m \end{bmatrix} = \bar{K}_{21} \begin{bmatrix} \bar{v}_1^k \\ \bar{v}_1^m \end{bmatrix}, \quad (9.7b)$$

onde

$$\bar{K}_{12} = \tilde{T}_1^{-1} K_{12} \tilde{T}_2, \quad \bar{K}_{21} = \tilde{T}_2^{-1} K_{21} \tilde{T}_1, \quad (9.7c)$$

$$\tilde{T}_1 = \begin{bmatrix} T_1 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_1 \end{bmatrix}, \quad \tilde{T}_2 = \begin{bmatrix} T_2 & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & T_2 \end{bmatrix}. \quad (9.7d)$$

O cálculo de $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$ faz com que os componentes modais individuais sejam mais evidentes e possam ser melhor ajustados por meio do uso do VF.

9.1.4. Modelagem por meio de funções racionais

As matrizes $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$ são ajustadas por meio de um modelo em espaço de estados:

$$\bar{K}_{12} \cong \bar{C}_{12}(sI - \bar{A}_{12})^{-1} \bar{B}_{12} + \bar{D}_{12}, \quad (9.8a)$$

$$\bar{K}_{21} \cong \bar{C}_{21}(sI - \bar{A}_{21})^{-1} \bar{B}_{21} + \bar{D}_{21}, \quad (9.8b)$$

Para obter os modelos apresentados em (9.8), em vez de aplicar o VF (Capítulo 2) diretamente sobre todos os elementos das matrizes $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$, aplica-se o VF a cada uma das colunas das matrizes $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$, para obter uma maior precisão dos modelos obtidos do VF, obtendo para cada coluna um modelo polo-resíduo, sendo que cada modelo associado a cada

coluna de $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$, possui seu conjunto próprio de polos. Cada modelo polo-resíduo pode ser convertido em um modelo em espaço de estados (item 3.1.1):

$$\bar{K}_{12,n} \cong \bar{C}_{12,n}(sI - \bar{A}_{12,n})^{-1}\bar{B}_{12,n} + \bar{D}_{12,n} \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N_{12} \quad (9.9a)$$

$$\bar{K}_{21,n} \cong \bar{C}_{21,n}(sI - \bar{A}_{21,n})^{-1}\bar{B}_{21,n} + \bar{D}_{21,n} \quad , \quad n = 1, 2, \dots, N_{21} \quad (9.8b)$$

denotando $\bar{K}_{12,n}$ e $\bar{K}_{21,n}$ como a n-ésima coluna de $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$, respectivamente, com N_{12} e N_{21} representando o número total de colunas de $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$, respectivamente.

As matrizes do modelo em espaço de estados para $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$ estão constituídas pelas matrizes dos modelos em espaço de estados das colunas de $\bar{K}_{12,n}$ e $\bar{K}_{21,n}$, respectivamente:

$$\bar{A}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{12,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{12,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{A}_{12,N_{12}} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{12} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{12,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_{12,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{B}_{12,N_{12}} \end{bmatrix}, \quad (9.10a)$$

$$\bar{C}_{12} = [\bar{C}_{12,1} \quad \bar{C}_{12,2} \quad \dots \quad \bar{C}_{12,N_{12}}], \quad \bar{D}_{12} = [\bar{D}_{12,1} \quad \bar{D}_{12,2} \quad \dots \quad \bar{D}_{12,N_{12}}],$$

$$\bar{A}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{A}_{21,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{A}_{21,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{A}_{21,N_{21}} \end{bmatrix}, \quad \bar{B}_{21} = \begin{bmatrix} \bar{B}_{21,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \bar{B}_{21,2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \bar{B}_{21,N_{21}} \end{bmatrix}, \quad (9.10b)$$

$$\bar{C}_{21} = [\bar{C}_{21,1} \quad \bar{C}_{21,2} \quad \dots \quad \bar{C}_{21,N_{21}}], \quad \bar{D}_{21} = [\bar{D}_{21,1} \quad \bar{D}_{21,2} \quad \dots \quad \bar{D}_{21,N_{21}}].?$$

Os modelos em espaço de estados para K_{12} e K_{21} , em componentes de fase, são obtidos por meio das seguintes transformações sobre as matrizes dos modelos em espaço de estados de $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$:

$$K_{12} \cong C_{12}(sI - A_{12})^{-1}B_{12} + D_{12} \quad , \quad (9.11a)$$

$$K_{21} \cong C_{21}(sI - A_{21})^{-1}B_{21} + D_{21} \quad , \quad (9.11b)$$

onde

$$A_{12} = \bar{A}_{12} \quad , \quad B_{12} = \bar{B}_{12}\tilde{T}_2^{-1} \quad , \quad C_{12} = \tilde{T}_1\bar{C}_{12} \quad , \quad D_{12} = \tilde{T}_1\bar{D}_{12}\tilde{T}_2^{-1} \quad (9.11c)$$

$$A_{21} = \bar{A}_{21} \quad , \quad B_{21} = \bar{B}_{21}\tilde{T}_1^{-1} \quad , \quad C_{21} = \tilde{T}_2\bar{C}_{21} \quad , \quad D_{21} = \tilde{T}_2\bar{D}_{21}\tilde{T}_1^{-1} \quad (9.11d)$$

9.1.5. Representação do modelo de linha

As tensões induzidas pelo efeito de acoplamento mútuo $\mathbf{v}_{1,ind} = [(\mathbf{v}_{1,ind}^k)^T \ (\mathbf{v}_{1,ind}^m)^T]^T$ e $\mathbf{v}_{2,ind} = [(\mathbf{v}_{2,ind}^k)^T \ (\mathbf{v}_{2,ind}^m)^T]^T$ são representadas por fontes de tensão, conectadas em série com os terminais do modelo de linha proposto por (MARTI, 1982), como mostrado na Figura 9.2. As linhas são modeladas por meio de dois modelos de linhas independentes com o acoplamento mútuo levado em conta somente pelas fontes de tensão em série.

Observa-se em (9.4) que as fontes de tensão $\mathbf{v}_{1,ind}$ são calculadas com a convolução entre as variáveis calculadas $[(\mathbf{v}_2^k)^T \ (\mathbf{i}_2^m)^T]^T$ e o modelo ajustado de $\mathbf{K}_{12}$ dado em (9.11). Similarmente, as fontes de tensão $\mathbf{v}_{2,ind}$ são calculadas com a convolução entre $[(\mathbf{v}_1^k)^T \ (\mathbf{i}_1^m)^T]^T$ e o modelo ajustado de $\mathbf{K}_{21}$. Nota-se que para o cálculo de $\mathbf{v}_{1,ind}$ por meio da convolução, em um determinado instante, é necessário conhecer $[(\mathbf{v}_2^k)^T \ (\mathbf{i}_2^m)^T]^T$ nesse determinado instante. Da mesma forma, o cálculo de $\mathbf{v}_{2,ind}$ em um instante dado, depende de $[(\mathbf{v}_1^k)^T \ (\mathbf{i}_1^m)^T]^T$ nesse mesmo instante. No entanto, existe um dilema porque não é possível calcular $[(\mathbf{v}_2^k)^T \ (\mathbf{i}_2^m)^T]^T$ e $[(\mathbf{v}_1^k)^T \ (\mathbf{i}_1^m)^T]^T$ sem previamente conhecido $\mathbf{v}_{1,ind}$ e $\mathbf{v}_{2,ind}$. Para evitar este problema, para cada instante de tempo são empregadas as fontes de tensão induzida $\mathbf{v}_{1,ind}$ e $\mathbf{v}_{2,ind}$ correspondentes ao instante anterior, portanto, existe um atraso na transferência das tensões de acoplamento mútuo, sendo este atraso igual ao passo de tempo usado na simulação.

No item C.2 (Anexo C) é apresentado o procedimento de cálculo de um modelo semelhante ao proposto por (MARTI, 1982), este modelo é denominado por modelo análogo e será utilizado nas simulações apresentadas a seguir. O modelo de (MARTI, 1982) faz uso de modelos polo-resíduo para as impedâncias características modais e as funções de propagação modais, no entanto, no modelo apresentado no item C.2 usam-se as admitâncias características modais em vez das impedâncias características modais.

9.2. Simulações

Neste item é estudado um circuito em paralelo composto por duas linhas trifásicas não transpostas de 100 km de comprimento, com a finalidade de estudar o efeito do acoplamento mútuo entre fases. Na Tabela 9.1 têm-se os dados das linhas usando a notação do item 5.1.

Nota-se que são empregados condutores de alumínio puro (CA) para todos os condutores, pelo qual o raio interno (R_{in}) é zero.

Figura 9.2 – Representação do acoplamento mútuo por meio de fontes de tensão

Fonte: Adaptado de GUSTAVSEN (2012, p.2161).

Tabela 9.1 - Dados das linhas de transmissão

Fase	R_{in} [cm]	R_{out} [cm]	Resis [ohm/km]	Horiz [m]	Vtorre [m]	Vmid [m]	Separ [cm]	Alpha [graus]	NB
C1	0	1,53	0,03842	-10	20	15	-	-	1
C2	0	1,53	0,03842	0	20	15	-	-	1
C3	0	1,53	0,03842	10	20	15	-	-	1
C4	0	1,53	0,03842	63	15	10	-	-	1
C5	0	1,53	0,03842	70	15	10	-	-	1
C6	0	1,53	0,03842	77	15	10	-	-	1

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 9.3 mostra-se o corte transversal da linha de transmissão. Os condutores dos terminais C1, C2 e C3 são da linha 1 e os condutores dos terminais C4, C5 e C6 são da linha 2. Da Figura 9.3, nota-se que a distância entre os terminais C2 e C5 é de 70 metros.

A seguir são apresentados os resultados de cálculo baseados nas formulações apresentadas no item 9.1 e no Anexo C. Mostram-se as matrizes de transformação, as impedâncias características modais, as admitâncias características modais, as funções de propagação modais, os modelos que representam o acoplamento mútuo entre linhas e casos de simulação no domínio do tempo.

Figura 9.3 – Geometria do circuito duplo

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

9.2.1. Matrizes de transformação

Para transformar o modelo de linha do domínio de fase para o domínio modal (item C.2.2), usam-se as matrizes de transformação T_V ou T_I (relacionadas pela equação (C.16)), para a transformação de tensões e correntes, respectivamente, entre o domínio de fase e o domínio modal, de acordo com (C.15).

Nota-se que as matrizes de transformação T_I e T_V não são únicas porque as suas colunas correspondem aos autovetores de YZ e ZY , respectivamente. No entanto, no cálculo dos autovetores de YZ e ZY a soma dos quadrados da parte imaginária dos seus elementos é minimizada, porém, nas matrizes T_I e T_V somente é considerada a parte real dos autovetores de YZ e ZY , como mencionado em (BRANDWAJN, 1982) e (GUSTAVSEN & NORDSTROM, 2008).

Na Figura 9.4 mostram-se os elementos de $\mathbf{T}_I$ correspondentes somente à linha 1. Para linhas continuamente transpostas, sabe-se que os elementos de $\mathbf{T}_I$ são constantes, embora a linha 1 não seja transposta, observa-se que os elementos de $\mathbf{T}_I$ na Figura 9.4 são praticamente constantes com a frequência. Para configurações de linha simétricas ou quase simétricas é válido assumir $\mathbf{T}_I$ como constante, obtendo resultados precisos de simulação no domínio do tempo (MARTI, 1982).

De acordo com (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1998a) e (MORCHED, GUSTAVSEN, & TARTIBI, 1999), é recomendável que a matriz de transformação constante corresponda a uma frequência elevada, por exemplo 1 MHz, porque fornece resultados mais precisos no cálculo das funções de propagação modais.

Em modelos baseados no uso de matrizes de transformação variáveis com a frequência, $\mathbf{T}_V$ e $\mathbf{T}_I$ precisam ser funções suaves com a frequência. Em (WEDEPOHL, NGUYEN, & IRWIN, 1996) apresentam-se duas técnicas de diagonalização: uma baseada no método Newton-Raphson e outra que faz uso do algoritmo de diagonalização convencional, junto com uma rotina de rastreamento.

Os elementos de $\mathbf{T}_I$ para a linha 2 têm um comportamento similar aos obtidos na Figura 9.4, considerando que a disposição geométrica dos condutores das linhas 1 e 2 são similares.

Figura 9.4 – Elementos de $\mathbf{T}_I$ para a linha 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 9.5 – Elementos de T_I para as linhas 1 e 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Na Figura 9.5 têm-se os elementos de T_I para o conjunto de linhas 1 e 2, cada subfigura mostra os elementos correspondentes a cada coluna de T_I . Os elementos de T_I , do conjunto de linhas 1 e 2, são muito dependentes da frequência, em contraste com os elementos de T_I da

linha 1, que são quase constantes. Portanto, não é possível assumir $\mathbf{T}_I$ como constante para o conjunto de linhas 1 e 2, a Figura 9.5 mostra que o modelo proposto por (MARTI, 1982) não pode ser usado, considerando que este modelo assume matrizes de transformação constantes com a frequência.

Para o caso de uma única linha, os elementos de $\mathbf{T}_I$ permanecem quase constantes com a frequência por que as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ são levemente desequilibradas, não obstante, para o conjunto de linhas 1 e 2, as matrizes $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ tornam-se fortemente desequilibradas, implicando a dependência da frequência de $\mathbf{T}_I$.

9.2.2. Impedâncias características modais

Na Figura 9.6 têm-se as impedâncias características modais, $Z_{C,i}$, associada somente à linha 1. $Z_{C,i}$ é calculada usando a matriz de transformação dependente da frequência, $\mathbf{T}_I$, e a matriz de transformação constante, $\mathbf{T}_{IC}$. Também é mostrada a resposta do modelo ajustado de $Z_{C,i}$ fornecida pelo programa ATP, sendo que o ATP ajusta os valores de $Z_{C,i}$ que são calculados usando $\mathbf{T}_{IC}$. O desvio 1 representa o módulo da diferença entre os valores de $Z_{C,i}$ calculados com $\mathbf{T}_{IC}$ e os obtidos do modelo ajustado com o ATP. O desvio 2 representa o módulo da diferença entre os valores de $Z_{C,i}$ calculados com $\mathbf{T}_I$ e $\mathbf{T}_{IC}$.

A impedância característica pode ser calculada com a expressão (C.13c), com os valores de $Z_{C,i}$ obtidos do recíproco das admitâncias características modais, $Y_{C,i}$. De (C.19d), tem-se:

$$Z_{C,i} = (Y_{C,i})^{-1} = \sqrt{Z_i/Y_i}, \quad i = 0,1,2. \quad (9.12a)$$

Os valores de $Z_{C,i}$ também podem ser calculados como:

$$\bar{\mathbf{Z}}_C(s) = \begin{bmatrix} Z_{C,0}(s) & 0 & 0 \\ 0 & Z_{C,1}(s) & 0 \\ 0 & 0 & Z_{C,2}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_I^{-T} \mathbf{Z}_C \mathbf{T}_I^{-1}, \quad (9.12b)$$

onde $\mathbf{T}_I^{-T}$ é resultado da inversão e transposição de $\mathbf{T}_I$. A Figura 9.7 é análoga à Figura 9.6, mas os valores de $Z_{C,i}$ são calculados para o conjunto de linhas 1 e 2. Somente são apresentados três modos de $Z_{C,i}$, pois os outros três modos mostram comportamentos similares.

Nas figuras a seguir a matriz $\mathbf{T}_{IC}$ é obtida de $\mathbf{T}_I$ para a frequência de 1 MHz.

Figura 9.6 – Impedâncias características modais da linha 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Do desvio 2 da Figura 9.6 observa-se que os valores de $Z_{C,i}$ calculados com T_I são próximos aos calculados com T_{IC} , isto para todas as frequências avaliadas, isto ratifica em parte o uso de T_{IC} para o caso de uso de linhas não transpostas com simetria. Do desvio 1 da Figura

9.6 tem-se que o modelo ajustado com o programa ATP é preciso em relação aos valores calculados de $Z_{C,i}$, com T_{IC} , para a maioria das frequências, exceto a baixas frequências onde existe uma imprecisão no ângulo de fase.

Os valores calculados de $Z_{C,i}$ para a linha 2, assim como os seus modelos ajustados obtidos com o ATP, mostram um comportamento similar ao representado na Figura 9.6.

De maneira similar como é observado na Figura 9.6, na Figura 9.7 tem-se que o desvio 2 mostra pouca diferença entre os valores de $Z_{C,i}$ calculados por meio de T_I e T_{IC} . Enquanto o desvio 1 mostra que o modelo ajustado de $Z_{C,i}$ do ATP é preciso para a todas as frequências, exceto para as baixas frequências. Neste caso observa-se que a variação de T_I com a frequência, causada pelo desequilíbrio das matrizes Z e Y , não afeta significativamente os valores de $Z_{C,i}$. No entanto, as funções de propagação modais são mais sensíveis à dependência de T_I com a frequência, como será mostrado no item 9.2.4, sendo este um dos motivos da imprecisão do modelo de linha no domínio modal baseado no uso de T_{IC} .

Figura 9.7 – Impedâncias características modais do conjunto de linhas 1 e 2

e) Módulo - modo 5

f) Ângulo de fase – modo 5

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

9.2.3. Admitâncias características modais

Na Figuras 9.8 têm-se as admitâncias características modais, $Y_{C,i}$, correspondentes à linha 1. Analogamente à Figura 9.6, mostram-se os valores de $Y_{C,i}$ calculados com T_I e T_{IC} , além da magnitude do desvio entre os valores calculados com T_I e T_{IC} (desvio 2), também mostra-se o desvio do modelo ajustado em relação aos valores calculados de $Y_{C,i}$ com T_{IC} (desvio 1).

O ajuste de $Y_{C,i}$ é realizado por meio do método VF, tendo em conta que o modelo JMarti do programa ATP somente faz o ajuste das impedâncias características modais, $Z_{C,i}$, e as funções de propagação modais, H_i . O modelo de linha usado neste capítulo é baseado em uma formulação análoga ao modelo JMarti (MARTI, 1982) que usa o modelo ajustado de $Z_{C,i}$ em vez do modelo de $Y_{C,i}$. A formulação deste modelo análogo é apresentada no item C.2.

Os valores calculados de $Y_{C,i}$ para a linha 2, assim como os seus modelos ajustados por meio do VF, mostram um comportamento similar ao representado na Figura 9.6.

A Figura 9.9 é análoga à Figura 9.8, mas os valores de $Y_{C,i}$ são calculados para o conjunto de linhas 1 e 2. Na Figura 9.9 somente são apresentados três modos de $Y_{C,i}$, pois os outros três modos mostram comportamentos similares.

Na aplicação do VF para obter os modelos de $Y_{C,i}$ são usados 19 polos reais, enquanto os modelos ajustados de $Z_{C,i}$ fornecido pelo programa ATP, possuem entre 19 e 25 polos reais. Os valores de $Y_{C,i}$ podem ser calculados por meio de (C.19d) ou (C.19h).

Figura 9.8 – Admitâncias características modais da linha 1

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Do desvio 2 das Figura 9.8 e 9.9 observa-se que o uso de uma matriz de transformação constante ou dependente da frequência não influi significativamente nos valores calculados de $Y_{C,i}$, tanto para uma linha quanto para duas linhas em paralelo.

Do desvio 1 observa-se que o modelo ajustado de $Y_{C,i}$ é preciso em relação aos valores calculados de $Y_{C,i}$ com T_{IC} , para toda a faixa de frequências avaliada.

Figura 9.9 – Admitâncias características modais do conjunto de linhas 1 e 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

9.2.4. Funções de propagação modais

Analogamente à Figura 9.8, a Figura 9.10 mostra as funções de propagação modais, H_i , para a linha 1, obtidas do modelo ajustado fornecido pelo ATP e os valores calculados a partir de T_I e T_{IC} . O desvio 2 mostra a magnitude da diferença entre os valores calculados de H_i com T_I e T_{IC} . O desvio 1 representa a diferença dos valores calculados de H_i com T_{IC} em relação aos obtidos com o modelo do programa ATP. A Figura 9.11 detalha a Figura 9.10, para os ângulos de fase de H_i .

H_i pode ser calculada com a expressão (C.19c) ou (C.19g).

Com o desvio 2, da Figura 9.10 observa-se que existe uma diferença importante entre os valores calculados de H_i com T_I e T_{IC} , para o modo 0 apenas para frequências acima de 100 kHz. No entanto, para os outros modos não existe uma diferença significativa entre os valores calculados de H_i com T_I e T_{IC} . O desvio 1 mostra que o ajuste realizado pelo programa ATP consegue representar de maneira precisa os valores calculados de H_i com T_{IC} , exceto para o modo 0 em frequências acima de 50 kHz.

A Figura 9.12 mostra H_i para o conjunto de linhas em paralelo 1 e 2, de maneira similar ao apresentado na Figura 9.10. São mostrados apenas três dos seis modos de H_i , sendo que todos os modos apresentam um comportamento similar. A Figura 9.13 mostra um detalhamento dos ângulos de fase da Figura 9.12.

Figura 9.10 – Funções de propagação modais da linha 1

c) Módulo - modo 1

d) Ângulo de fase – modo 1

c) Módulo - modo 2

d) Ângulo de fase – modo 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 9.11 – Detalhe da Figura 9.10 para os ângulos de fase

a) Modo 0

b) Modo 1

a) Modo 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

O desvio 2 da Figura 9.12 mostra que existe uma diferença importante entre os valores calculados de H_i com T_I e T_{IC} , em altas frequências para todos os modos. No entanto, com o desvio 1 observa-se que o modelo ajustado pelo ATP é preciso em relação aos valores calculados de H_i com T_{IC} , exceto para o modo 0 em altas frequências. Porém o modelo ajustado pelo ATP não consegue representar com precisão os valores de H_i calculados com a matriz de transformação dependente da frequência, T_I , levando a erros significativos nas simulações no domínio do tempo, no caso de linhas em paralelo, como foi mostrado no item 5.4.2.

Figura 9.12 – Funções de propagação modais do conjunto de linhas 1 e 2

a) Módulo - modo 0

b) Ângulo de fase – modo 0

c) Módulo - modo 3

d) Ângulo de fase – modo 3

c) Módulo - modo 4

d) Ângulo de fase – modo 4

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 9.13 – Detalhe da Figura 9.12 para os ângulos de fase

a) Modo 0

b) Modo 3

c) Modo 4

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

9.2.5. Ajuste otimizado das funções de propagação modais

No item C.2.5 é apresentado um procedimento proposto por (GUSTAVSEN, 2004) e (GUSTAVSEN, 2017) para o cálculo ótimo de H_i , dado pelo mínimo valor do erro RMS (*Root Mean Square*) do modelo ajustado para a função de fase mínima da função de propagação, $H_{mps,i} = H_i e^{s\tau_i}$. O procedimento consiste em calcular o valor de τ_i , em seguida obter $H_{mps,i}$ e finalmente calcular um modelo ajustado aproximado de $H_{mps,i}$ usando o VF.

A Figura 9.14 mostra o valor do erro RMS do modelo ajustado de $H_{mps,i}$ em função de τ_i para o modo 0, ($i = 0$). Para encontrar de maneira eficiente o valor ótimo de τ_i , que permite obter o menor erro RMS do modelo ajustado de $H_{mps,i}$, usa-se a rotina *fminbnd* disponível em Matlab. Esta rotina precisa de uma função objetivo e de dois valores da variável independente τ_i que representam os limites de busca da rotina. Neste caso a função objetivo a minimizar é o erro RMS de $H_{mps,i}$, a rotina *fminbnd* fornece o valor de τ_i que apresenta o menor valor da função objetivo.

As Figuras 9.14b e 9.14c mostram os resultados da rotina *fminbnd* para cada iteração. O erro RMS do modelo ajustado de $H_{mps,i}$ tende a diminuir a cada iteração e o término do procedimento de busca está definido por um valor de tolerância de τ_i , ou seja, a rotina encerra o cálculo quando a diferença de τ_i entre iterações consecutivas é menor do que um valor de tolerância fornecido. Neste caso é usada uma tolerância de 10^{-9} , obtendo um valor ótimo para τ_i de $3,4361 \times 10^{-4}$ [s].

Figura 9.14 – Cálculo do τ_0 ótimo de H_0 a) Erro RMS de $H_{mps,0}$ b) Cálculo de τ_0 ótimo c) Erro RMS de $H_{mps,0}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 9.15 apresenta uma comparação entre o modelo de H_i fornecido pelo ATP e o modelo calculado pelo procedimento de otimização descrito anteriormente, para a linha 1 da Figura 9.3. Nota-se que os dois modelos são obtidos com a resposta em frequência de H_i calculada com T_{IC} , lembrando que o modelo JMarti é baseado no uso de matrizes de transformação constantes.

Dos desvios da Figura 9.15 observa-se que o procedimento otimizado, baseado no uso do VF e a rotina *fminbnd*, fornece um modelo mais preciso do que o gerado pelo ATP. No entanto, mesmo assim não é possível obter um modelo preciso de H_i , no modo 0, em toda a faixa de frequências.

Na Figura 9.15 são mostrados os ângulos de fase a partir de 100 Hz para uma melhor visualização das diferenças entre as curvas dos dados e do modelo ajustado. Em cada um dos

modelos de H_i , calculados por meio do VF, são empregados 19 polos reais, enquanto o modelo ajustado de H_i fornecido pelo programa ATP, possui entre 12 e 16 polos reais.

Figura 9.15 – Ajuste ótimo das funções de propagação modais da linha 1

g) Ângulo de fase – modo 1 - ATP

h) Ângulo de fase – modo 1 - VF

i) Módulo - modo 2 - ATP

j) Módulo - modo 2 - VF

k) Ângulo de fase – modo 2 - ATP

l) Ângulo de fase – modo 2 - VF

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

9.2.6. Modelagem do acoplamento mútuo

A Figura 9.16 mostra os elementos (1,1), (6,1) e (4,5) da matriz $\bar{\mathbf{K}}_{12}$, calculados com a expressão (9.7c) e ajustados pelo método VF. $\bar{\mathbf{K}}_{12}$ é uma matriz de 6×6 , para o caso das linhas

avaliadas, os outros elementos de $\bar{K}_{12}$, não representados na Figura 9.16, possuem um comportamento similar aos elementos mostrados.

Por meio do VF é possível obter modelos precisos de $\bar{K}_{12}$, com mostrado nas Figuras 9.16 e 9.17. Não obstante, existe uma limitação na faixa de frequências que pode ser ajustada. Neste caso foi possível ajustar as curvas de $\bar{K}_{12}$ até 20 kHz, usando 125 polos para cada curva. Para frequências maiores, o número de polos necessários para o ajuste aumenta significativamente, afetando o tempo de processamento e tornando inviável o modelo de linha proposto no item 9.1.

Na Figura 9.17 têm-se os elementos (1,1), (6,1) e (4,5) da matriz K_{12} , calculados com as expressões dos itens C.1.1 e C.1.2 e obtidos dos modelos ajustados por meio das expressões em (9.11). Os elementos (1,1) e (6,1) de K_{12} mostram uma magnitude constante a baixas frequências, que representa o acoplamento mútuo capacitivo entre as linhas 1 e 2, enquanto o elemento (4,5) de K_{12} mostra um aumento proporcional da magnitude com a frequência que representa o acoplamento indutivo entre as linhas 1 e 2, de acordo com o estabelecido por (GUSTAVSEN, 2012). Os outros elementos de K_{12} , não mostrados na Figura 9.17, possuem um comportamento similar. Nota-se das expressões em (9.11) que os modelos de K_{12} e K_{21} não são obtidos diretamente da aplicação do VF e sim dos modelos ajustados de $\bar{K}_{12}$ e $\bar{K}_{21}$.

Em geral, os elementos calculados e ajustados de $\bar{K}_{21}$ e K_{21} são similares aos representados nas Figuras 9.16 e 9.17, respectivamente.

A Figura 9.18 mostra os elementos das colunas 3 e 5 de $\bar{K}_{12}$ e K_{12} . Observa-se que os elementos correspondentes a cada coluna estão mais próximos entre si, em K_{12} do que em $\bar{K}_{12}$, a baixas frequências. Isto acontece porque os elementos de K_{12} estão associados a uma componente modal de sequência zero dominante, enquanto $\bar{K}_{12}$, obtida da transformação modal do item 9.1.3, separa a componente modal de sequência zero e a componente modal de sequência positiva dos elementos de K_{12} . Isto permite que o modelo de K_{12} , obtido do modelo ajustado de $\bar{K}_{12}$, represente melhor o acoplamento mútuo, ou seja, o modo de sequência positiva para uma linha trifásica. Em (GUSTAVSEN, 2012) mostra que os modelos de K_{12} e K_{21} obtidos pelo procedimento do item 9.1.4 conseguem representar com precisão o modo de sequência positiva, associado a uma linha trifásica, e o denominado modo diferencial, associado a uma linha em corrente contínua. Por outro lado, um modelo de K_{12} obtido diretamente da aplicação do VF, não conseguira representar com precisão o acoplamento mútuo porque o modo de sequência zero é dominante e tende a ocultar o modo de sequência positiva.

Figura 9.16 – Elementos de $\bar{K}_{12}$

a) Módulo – elemento (1,1)

b) Ângulo de fase – elemento (1,1)

c) Módulo – elemento (6,1)

d) Ângulo de fase – elemento (6,1)

e) Módulo – elemento (4,5)

f) Ângulo de fase – elemento (4,5)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 9.17 – Elementos de K_{12}

a) Módulo – elemento (1,1)

b) Ângulo de fase – elemento (1,1)

c) Módulo – elemento (6,1)

d) Ângulo de fase – elemento (6,1)

e) Módulo – elemento (4,5)

f) Ângulo de fase – elemento (4,5)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 9.18 – Elementos de K_{12} e $\bar{K}_{12}$

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

9.2.7. Simulações no domínio do tempo

Na Figura 9.19 mostram-se os circuitos avaliados no domínio do tempo, correspondentes às linhas apresentadas na Figura 9.3. São realizados dois testes, sendo que o primeiro envolve somente a linha 1 (Figura 9.19a) e o segundo avalia o efeito de acoplamento mútuo entre linhas (Figura 9.19b). A tensão aplicada no terminal C1, para os dois testes, corresponde a um degrau unitário. As extremidades dos condutores do circuito duplo são nomeados de C1 a C6 no lado emissor e de C7 a C12 no lado receptor.

Nota-se que a matriz de transformação constante, T_{IC} , pode conter elementos imaginários e, portanto, quando é usada T_{IC} no modelo de linha do item C.2.4, podem ser obtidos valores imaginários de tensão e corrente no domínio do tempo, também nota-se que as colunas de T_{IC} (autovetores de YZ) não são únicas. No entanto, é recomendável que os autovetores de YZ sejam calculados de tal forma que a soma dos quadrados da parte imaginária dos seus elementos seja minimizada, porém, nas matrizes de transformação do domínio de fase para o domínio modal, somente é considerada a parte real dos elementos de T_{IC} (BRANDWAIN, 1982).

Na Figura 9.20 têm-se os circuitos equivalentes para os testes da Figura 9.19. O circuito equivalente para o teste da Figura 9.19a é apresentado na Figura 9.20a. Para o teste da Figura 9.19b são apresentados dois circuitos equivalentes nas Figuras 9.20b e 9.20c.

Figura 9.19 – Testes no domínio do tempo

a) Energização em circuito aberto da linha 1

b) Energização de linhas em paralelo

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Figura 9.20 – Modelos circuitais dos testes

a) Energização em circuito aberto da linha 1

b) Energização de linhas em paralelo – método 1

c) Energização de linhas em paralelo – método 2

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Para os três circuitos, a fonte de tensão conectada no terminal C1 é representada por meio de um equivalente de Norton, composto pela fonte de corrente $i_s(t)$ conectada em paralelo à resistência R_s , com

$$i_s(t) = u(t)/R_s, \quad (9.13)$$

onde $u(t)$ é o degrau unitário, o valor de R_s é arbitrário, mas precisa ter um valor muito pequeno, sendo que nas simulações foi adotado o valor $R_s = 0,001 \Omega$.

Nas Figuras 9.20a, 9.20b e 9.20c, é usado o modelo chamado de análogo, vide item C.2.4 do anexo C, para representar a linha trifásica da Figura 9.19a e as duas linhas em paralelo da Figura 9.19b. Na Figura 9.20b o modelo análogo é usado para representar as duas linhas em paralelo, enquanto na Figura 9.20c o modelo análogo representa cada linha de maneira independente e, além disso, as tensões induzidas pelo acoplamento mútuo entre linhas,

representadas por $v_{1,ind}^k$, $v_{1,ind}^m$, $v_{2,ind}^k$ e $v_{2,ind}^m$ (ver Figura 9.2), são modeladas por meio de equivalentes de Norton. Os valores das fontes de corrente destes equivalentes de Norton são calculados como:

$$i_{1,ind}^k = v_{1,ind}^k / R_{ind} \quad ; \quad i_{1,ind}^m = v_{1,ind}^m / R_{ind}, \quad (9.14a)$$

$$i_{2,ind}^k = v_{2,ind}^k / R_{ind} \quad ; \quad i_{2,ind}^m = v_{2,ind}^m / R_{ind}, \quad (9.14b)$$

onde R_{ind} é o valor da resistência, que está conectada em paralelo a cada uma das fontes de corrente $i_{1,ind}^k$, $i_{1,ind}^m$, $i_{2,ind}^k$ e $i_{2,ind}^m$, o valor de R_{ind} é arbitrário e pequeno, sendo usado $R_{ind} = 0,001 \Omega$.

Os curtos-circuitos são representados pela resistência R_c , pode ser usado um valor arbitrário e pequeno para R_c , sendo usado um valor $R_c = 0,0001 \Omega$.

Na Figura 9.20, os valores de Y_{eq} , $Y_{eq,1}$, $Y_{eq,2}$, $Y_{eq,12}$, i_{mh} , $i_{mh,1}$, $i_{mh,2}$, $i_{mh,12}$, i_{kh} , $i_{kh,1}$, $i_{kh,2}$ e $i_{kh,12}$ são calculados conforme às formulações do modelo análogo do item C.2.4. Os valores de Y_f , i_f , Y_{ind} , Y_c , $Y_{f,12}$, $i_{f,12}$ e $Y_{c,12}$ são calculados como:

$$Y_f = \begin{bmatrix} 1/R_s & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_c & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_c \end{bmatrix}, \quad (9.15a)$$

$$i_f(t) = \begin{bmatrix} i_s(t) \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.15b)$$

$$Y_{ind} = \begin{bmatrix} 1/R_{ind} & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_{ind} & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_{ind} \end{bmatrix}, \quad (9.15c)$$

$$Y_c = \begin{bmatrix} 1/R_c & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_c & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_c \end{bmatrix}, \quad (9.15d)$$

$$Y_{f,12} = \begin{bmatrix} 1/R_s & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1/R_c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_c & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/R_c \end{bmatrix}, \quad (9.15e)$$

$$i_{f,12} = \begin{bmatrix} i_s(t) \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (9.15f)$$

$$Y_{c,12} = \begin{bmatrix} 1/R_c & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1/R_c & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1/R_c & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \quad (9.15g)$$

Para o circuito da Figura 9.20a, as tensões nodais nas extremidades da linha da Figura 9.19a são calculadas como:

$$v_k = (Y_{eq} + Y_f)^{-1} (i_f + i_{kh}), \quad (9.16a)$$

$$v_m = (Y_{eq})^{-1} i_{mh}, \quad (9.16b)$$

e as correntes que ingressam na extremidade emissora da linha 1 (terminais C1, C2 e C3) são calculadas com a equação (nota-se que $i_m = 0$):

$$i_k = i_f - Y_f v_k. \quad (9.16c)$$

Considerando o circuito da Figura 9.20b, as tensões nodais nas extremidades das linhas da Figura 9.19b são calculadas como:

$$v_{12}^k = \begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \end{bmatrix} = (Y_{eq,12} + Y_{f,12})^{-1} (i_{f,12} + i_{kh,12}), \quad (9.17a)$$

$$v_{12}^m = \begin{bmatrix} v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = (Y_{eq,12} + Y_{c,12})^{-1} i_{mh,12}, \quad (9.17b)$$

e as correntes que ingressam nas extremidades das linhas em paralelo são calculadas com as equações:

$$i_{12}^k = \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_2^k \end{bmatrix} = i_{f,12} - Y_{f,12} v_{12}^k. \quad (9.17c)$$

$$i_{12}^m = \begin{bmatrix} i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix} = -Y_{c,12} v_{12}^m. \quad (9.17d)$$

Para o circuito da Figura 9.20c, as tensões nodais nas extremidades das linhas da Figura 9.19b são calculadas como:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_1^{k2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_f + Y_{ind} & -Y_{ind} \\ -Y_{ind} & Y_{eq,1} + Y_{ind} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} i_f + i_{1,ind}^k \\ i_1^{kh} - i_{1,ind}^k \end{bmatrix}, \quad (9.18a)$$

$$\begin{bmatrix} v_1^m \\ v_1^{m2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_c + Y_{ind} & -Y_{ind} \\ -Y_{ind} & Y_{eq,1} + Y_{ind} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} i_{1,ind}^m \\ i_1^{mh} - i_{1,ind}^m \end{bmatrix}, \quad (9.18b)$$

$$\begin{bmatrix} v_2^k \\ v_2^{k2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_c + Y_{ind} & -Y_{ind} \\ -Y_{ind} & Y_{eq,2} + Y_{ind} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} i_{2,ind}^k \\ i_2^{kh} - i_{2,ind}^k \end{bmatrix}, \quad (9.18c)$$

$$\begin{bmatrix} v_2^m \\ v_2^{m2} \end{bmatrix} = \left(\begin{bmatrix} Y_{ind} & -Y_{ind} \\ -Y_{ind} & Y_{eq,2} + Y_{ind} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} i_{2,ind}^m \\ i_2^{mh} - i_{2,ind}^m \end{bmatrix}. \quad (9.18d)$$

Com as tensões anteriores, podem ser calculadas as correntes que ingressam nas extremidades das linhas:

$$i_1^k = i_f - Y_f v_1^k, \quad (9.18e)$$

$$i_2^k = -Y_c v_2^k, \quad (9.18f)$$

$$i_1^m = -Y_c v_1^m. \quad (9.18g)$$

As tensões nos terminais C7, C8 e C9, assim como as correntes que ingressam nos terminais C1, C2 e C3 para o teste da Figura 9.19a são apresentados na Figura 9.21. São comparados os resultados simulados, usando o modelo JMarti do programa ATP, como os valores calculados por meio do circuito da Figura 9.20a.

Na Figura 9.21 observa-se que o modelo análogo, empregado no circuito da Figura 9.20a, fornece resultados muito próximos aos obtidos pelo modelo JMarti, considerando que os modelos de linha são similares, no entanto o modelo JMarti faz uso do modelo ajustado das impedâncias características modais enquanto o modelo análogo usa o modelo ajustado das admitâncias características modais. O modelo do item C.2 é baseado na solução de (C.19), enquanto o modelo JMarti é baseado na solução das expressões:

$$Z_{C,i} I_{m,i} - V_{m,i} = -H_i [Z_{C,i} I_{k,i} + V_{k,i}], \quad i = 0,1,2 \quad (9.19a)$$

$$Z_{C,i} I_{k,i} - V_{k,i} = -H_i [Z_{C,i} I_{m,i} + V_{m,i}], \quad i = 0,1,2 \quad (9.19b)$$

Como a linha da Figura 9.19a é quase simétrica, é válida a suposição de uma matriz de transformação constante com a frequência, obtendo modelos ajustados precisos para as admitâncias e impedâncias características modais, assim como para as funções de propagação modais, como foi mostrado nos itens anteriores. Portanto, são obtidas simulações precisas no domínio do tempo com o modelo JMarti, para linhas com simetria ou continuamente transpostas, de acordo com (GUSTAVSEN, IRWIN, MANGELROD, BRANDT, & KENT, 1999), desta forma também pode-se afirmar que o modelo análogo é preciso para este tipo de linhas.

Figura 9.21 – Energização em vazio da linha 1

a) Tensão terminal C7

b) Corrente terminal C1

c) Tensão terminal C8

d) Corrente terminal C2

e) Tensão terminal C9

f) Corrente terminal C3

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 9.22 mostra as tensões induzidas nos terminais C10, C11 e C12 para o teste da Figura 9.19b. São comparados os resultados calculados, usando o circuito da Figura 9.20b, com os resultados simulados com os programas ATP e PSCAD.

Na Figura 9.22 observa-se que os resultados simulados em ATP e os calculados com o circuito da Figura 9.20b são muito próximos, considerando que as formulações dos modelos de linha, JMarti (ATP) e modelo análogo (Figura 9.20b), são similares. Por outro lado, observa-se que os resultados fornecidos pelo modelo ULM do programa PSCAD diferem substancialmente dos resultados calculados com o modelo análogo da Figura 9.20b, sendo que o ULM é um modelo com elevado grau de precisão para linhas aéreas e cabos subterrâneos (GUSTAVSEN, 2012), e desta forma os resultados do PSCAD são usados como referência.

Para o caso de linhas em paralelo não é válido assumir uma matriz de transformação constante com a frequência, de acordo com (GUSTAVSEN et al., 1999) e os resultados apresentados nos itens 9.2.1 e 9.2.4. Assim, os resultados no domínio do tempo usando o ATP e o modelo análogo para linhas em paralelo não podem ser considerados precisos.

Figura 9.22 – Tensões induzidas na energização de linhas em paralelo

e) Terminal C12 – ATP

f) Terminal C12 – PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 9.23 mostra as correntes que ingressam nos terminais C1, C2, C7 e C4 para o teste da Figura 9.19b. Assim como na Figura 9.22, são comparados as respostas calculadas do circuito da Figura 9.20b com os resultados de simulação com ATP e PSCAD. Observa-se que novamente as correntes calculadas com o modelo análogo da Figura 9.20 são muito próximas das correntes obtidas com o ATP, no entanto, estas respostas diferem dos resultados simulados com o PSCAD para as correntes nos terminais C2 e C4, sendo que as correntes nos terminais C2 e C4 são induzidas pela corrente que circula pelo condutor da fase *a* na linha 1 (terminais C2 até C7). Portanto, o modelo análogo e JMarti não conseguem representar com precisão o efeito de acoplamento mútuo entre condutores no caso de linhas paralelo.

Figura 9.23 – Correntes injetadas na energização de linhas em paralelo

a) Terminal C1 – ATP

b) Terminal C1 – PSCAD

c) Terminal C2 – ATP

d) Terminal C2 – PSCAD

e) Terminal C7 – ATP

f) Terminal C7 – PSCAD

g) Terminal C4 – ATP

h) Terminal C4 – PSCAD

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

A Figura 9.24 mostra a tensão induzida no terminal C10 e as correntes que ingressam nos terminais C1, C4 e C7, para o teste da Figura 9.19b. São comparadas as simulações realizadas em PSCAD com as respostas calculadas usando o circuito da Figura 9.20c. Observa-se que a corrente induzida que ingressa no terminal C4 e a tensão induzida no terminal C10, calculadas

com o circuito da Figura 9.20c, seguem um comportamento mais próximo ao do PSCAD do que o circuito da Figura 9.20b, porém com alguma divergência. Esta diferença é causada pela limitação no ajuste de $\tilde{K}_{12}$ e $\tilde{K}_{21}$ com o VF em uma faixa de frequências adequada, devido à presença de muitos picos de ressonância, como foi mostrado no item 9.2.6. Por outro lado, as correntes que ingressam nos terminais C1 e C7 são muito próximas dos resultados do PSCAD, considerando que a influência do efeito de acoplamento mútuo é insignificante no condutor da fase *a* para a linha 1.

Neste caso, os transitórios induzidos no condutor C2-C7 (fase *a* da linha 1), causados pelos demais condutores devido ao efeito de acoplamento mútuo, são menores do que os transitórios nos demais condutores causados pelo condutor C2-C7, pois as correntes e tensões neste condutor C2-C7 são muito maiores do que as correntes e tensões nos demais condutores.

Figura 9.24 Energização de linhas em paralelo com excitação degrau unitário, usando a nova abordagem para modelar o acoplamento mútuo

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Nas situações em que o efeito de acoplamento mútuo sobre uma das linhas é insignificante, por exemplo, se os transitórios induzidos na linha 1 (devido ao acoplamento mútuo com a linha 2) são desprezíveis, recomenda-se eliminar as fontes de tensão $v_{1,ind}^k$ e $v_{1,ind}^m$ no circuito da Figura 9.2, o que permite reduzir a carga computacional e o tempo de processamento (GUSTAVSEN, 2012).

A Figura 9.25 é similar à Figura 9.24, no entanto, em vez de aplicar uma tensão degrau unitário no terminal C1, é aplicada uma tensão senoidal de amplitude unitária e frequência de 60 Hz. Os resultados calculados pelo circuito da Figura 9.20c são mais próximos aos resultados simulados em PSCAD do que os resultados obtidos usando uma fonte degrau unitário, sendo que a componente de sequência positiva (componente dominante nas tensões e correntes) pode ser mais facilmente representada pelas matrizes K_{12} e K_{21} do que a componente chamada de diferencial em (GUSTAVSEN, 2012) (componente dominante quando é usada a fonte degrau unitário). Os transitórios da tensão induzida no terminal C10 e a corrente induzida que ingressa no terminal C4 são representados com precisão aceitável pelo circuito da Figura 9.20c, como mostrado nas Figuras 9.25e e 9.25f. Enquanto as correntes que ingressam nos terminais C1 e C7 são calculadas com precisão, sendo que o efeito de acoplamento no condutor C1-C7 devido aos outros condutores é insignificante.

Figura 9.25 Energização de linhas em paralelo com excitação senoidal, usando a nova abordagem para modelar o acoplamento mútuo

c) Corrente terminal C4

d) Corrente terminal C7

e) Tensão terminal C10 - detalhe de a)

f) Corrente terminal C4 - detalhe de c)

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Capítulo 10

Conclusões

Neste capítulo são discutidas as conclusões obtidas dos resultados dos capítulos anteriores, sobre os diferentes modelos de linhas de transmissão abordados e as formulações apresentadas para o cálculo de parâmetros.

Todos os modelos tratados em capítulos anteriores consideram a dependência dos parâmetros da linha com a frequência e fazem uso da matriz de admitâncias nodais. Em geral os modelos tratados podem ser classificados em quatro tipos (ver Figura 1.2):

- Modelos equivalentes obtidos a partir do modelo ajustado e passivo da matriz de admitâncias nodais, quais sejam: rede elétrica, equivalente de Norton, modelo em espaço de estados.
- Equivalente de Norton da linha dobrada equivalente (FLE), baseado nos modelos ajustados e passivos das matrizes de admitâncias nodais da FLE em circuito-aberto e curto-circuito.
- Uso de uma formulação nodal no domínio da frequência para o modelamento da rede. As linhas são representadas pela matriz de admitâncias nodais e as respostas calculadas no domínio da frequência são antitransformadas para o domínio do tempo por meio de diferentes formulações, baseadas na transformada inversa de Fourier, ou seja: fórmula de inversão da transformada de Fourier (TIF), transformada modificada de Fourier (TMF), transformada inversa rápida de Fourier (TIRF), transformada inversa de Fourier com integração semianalítica (TIFIS).
- Uso do modelo JMarti (MARTI, 1982) e do método *Vector Fitting* (VF) para modelar linhas de transmissão em paralelo, com o objetivo de modelar com maior precisão o efeito de acoplamento mútuo entre linhas.

10.1. Modelos equivalentes obtidos do ajuste da matriz de admitâncias nodais

Por meio do VF é possível obter um modelo preciso da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão, Y_{nod} , na forma polo-resíduo, tanto para linhas curtas quanto longas. Porém, quanto maior o comprimento, maior é o número de picos de ressonância e, portanto, precisa-se de uma maior quantidade de polos para obter um modelo bem ajustado de Y_{nod} . Considerando que as frequências de ressonância estão localizadas em valores múltiplos de f_0 , dado pela expressão (8.54), sendo que f_0 é inversamente proporcional ao comprimento da linha.

A imposição de passividade sobre o modelo obtido pelo VF de Y_{nod} , por meio do método FMP (*Fast Modal Perturbation*), conserva a precisão em relação a Y_{nod} e garante que o modelo com passividade tenha um comportamento estável no domínio do tempo.

Os modelos equivalentes obtidos do modelo passivo de Y_{nod} (rede elétrica, equivalente de Norton, modelo em espaço de estados), fornecem resultados numéricos semelhantes no domínio do tempo, embora o modelo equivalente de Norton tenha apresentado uma eficiência maior quanto ao tempo de processamento. Os resultados destes modelos são próximos aos fornecidos pelo programa ATP, para casos em circuito-aberto e curto-circuito, empregando uma linha trifásica levemente assimétrica com diferentes comprimentos. Também é avaliado o equivalente de Norton em conjunto com outros componentes da rede, modelados segundo a referência (DOMMEL, 1969), obtendo-se resultados próximos aos simulados em ATP, mas com um pequeno desfasamento no período transitório inicial.

Mostra-se por meio de simulação, com os programas ATP e PSCAD, que para linhas com assimetria, o modelo JMarti do ATP, desenvolvido no domínio modal com o uso de uma matriz de transformação constante, mostra certa imprecisão em relação ao modelo ULM (*Universal Line Model*) do PSCAD. O modelo ULM é tomado como referência pois é desenvolvido no domínio de fase, fornece resultados confiáveis e precisos para linhas aéreas e cabos (GUSTAVSEN, IRWIN, MANGELROD, BRANDT, & KENT, 1999).

10.2. Equivalente de Norton da linha dobrada equivalente (FLE)

Os tempos de processamento nas etapas de ajuste (método VF), avaliação da passividade (matriz de singularidade ou STM) e imposição de passividade (método FMP) são menores

para as matrizes Y_{sc} (curto-circuito) e Y_{oc} (circuito-aberto) da FLE do que os tempos de processamento para a matriz Y_{nod} .

O equivalente de Norton obtido do modelo ajustado de Y_{nod} fornece resultados precisos para todos os comprimentos de linha, exceto para linhas muito curtas, enquanto o equivalente de Norton da FLE fornece resultados muito precisos para todos os comprimentos de linha, mesmo para linhas muito curtas. Isto acontece porque nas linhas muito curtas, os modelos das matrizes Y_{sc} e Y_{oc} , da FLE, representam com precisão os autovalores de Y_{nod} , enquanto, o modelo obtido da aplicação do VF diretamente sobre Y_{nod} não representa com precisão os autovalores de Y_{nod} para todas as frequências. O método VF não consegue fornecer um modelo preciso para linhas muito curtas, quando este método é aplicado diretamente sobre Y_{nod} , porque o número de condicionamento, κ , dado pela equação (6.1), é muito elevado. No entanto, os valores de κ para Y_{sc} e Y_{oc} , são bem menores e permitem que o VF forneça modelos precisos para Y_{sc} e Y_{oc} . O valor de κ é um indicativo do nível de agrupamento dos autovalores da matriz de admitâncias nodais e quanto maior o valor de κ maior será a diferença entre os autovalores.

10.3. Uso da transformada inversa de Fourier

O cálculo de transitórios usando a transformada inversa de Fourier podem servir de referência para análises de precisão dos modelos de linha mencionados anteriormente, sustentados no ajuste de Y_{nod} e também no equivalente de Norton da FLE. Neste caso, a rede é modelada por completo no domínio da frequência, as tensões e correntes são calculadas no domínio da frequência e posteriormente são anti-transformadas para o domínio do tempo por meio dos métodos de inversão TMF, TIRF e TIFIS, sem a necessidade de ajustes intermediários com o método VF.

Em todos os casos simulados (curto-circuito, circuito-aberto, linha conectada a uma carga e simulação de acionamento de chaves), todos os métodos (TMF, TIRF e TIFIS) forneceram resultados muito próximos daqueles obtidos em PSCAD e ATP. No entanto, o TIRF é o método mais eficiente quanto ao tempo de processamento. Embora o TIRF empregue um maior número de amostras do que os métodos TMF e TIFIS, o seu tempo de processamento é menor porque faz uso do algoritmo da transformada inversa rápida de Fourier implementado em Matlab por meio da função IFFT. Deve-se contudo lembrar que

para esta conclusão foram desprezados os tempos de pré-processamento (modelagem da rede) de todos os modelos.

O uso da amostragem com a integração adaptativa de Simpson permite reduzir o número de amostras da matriz de admitâncias nodais da rede, em relação à amostragem distribuída de maneira logarítmica, conservando a precisão na amostragem e nas respostas obtidas no domínio do tempo. No entanto, a integração adaptativa de Simpson não pode ser usada para obter as amostras do método TIRF porque é fundamentada em uma amostragem distribuída linearmente.

A modelagem da rede é baseada em uma formulação nodal (correntes injetadas conhecidas), implicando que as fontes de tensão e chaves sejam representadas por equivalentes de Norton. Quando não são conhecidos os valores das fontes de corrente dos equivalentes de Norton no domínio da frequência, mas são conhecidos os valores no domínio do tempo, pode-se usar a transformada inversa de Fourier e a propriedade de convolução para o cálculo das tensões nodais da rede.

10.4. Modelagem de linhas em paralelo

Para linhas continuamente transpostas, os elementos da matriz de transformação, $\mathbf{T}_I$, que converte o modelo do domínio de fase para o domínio modal, são constantes com a frequência. Para linhas não transpostas com simetria, é válido assumir que os elementos de $\mathbf{T}_I$ são constantes, obtendo resultados precisos de simulação no domínio do tempo. No entanto, para linhas em paralelo, a matriz de admitâncias shunt e a matriz de impedâncias série são significativamente desequilibradas, levando a que $\mathbf{T}_I$ seja muito dependente da frequência, com a impossibilidade de assumir $\mathbf{T}_I$ como constante, pois se é empregada uma matriz $\mathbf{T}_I$ constante podem ocorrer erros nas simulações no domínio do tempo.

As impedâncias características modais, $Z_{C,i}$, calculadas por meio de uma matriz de transformação constante, $\mathbf{T}_{IC}$ ou por meio de uma matriz de transformação dependente da frequência $\mathbf{T}_I$, apresentam resultados muito próximos. Isto acontece tanto nas linhas trifásicas individuais quanto nas linhas em paralelo. A mesma conclusão se obtém para o cálculo das admitâncias características modais, $Y_{C,i}$.

Para obter resultados mais precisos no domínio do tempo, a soma dos quadrados da parte imaginária dos elementos das colunas de $\mathbf{T}_{IC}$ (autovetores de $\mathbf{YZ}$) deve ser minimizada, o que

corresponde a minimizar o ângulo de fase dos autovetores de $\mathbf{YZ}$, no entanto, no cálculo do modelo e das transformações modais, somente é considerada a parte real de $\mathbf{T}_{IC}$.

Os valores calculados das funções de propagação modais, H_i , por meio de $\mathbf{T}_I$, diferem substancialmente dos valores calculados com $\mathbf{T}_{IC}$, no caso de linhas em paralelo. No entanto, no caso de linhas trifásicas com simetria não existe diferença significativa entre o uso de $\mathbf{T}_I$ ou $\mathbf{T}_{IC}$.

Por meio da rotina *fminbnd* (disponível em Matlab) foi apresentado o cálculo do valor ótimo de τ_i , que minimiza o erro RMS da função de propagação modal de fase mínima $H_{mps,i}$. Posteriormente, usando o método VF é calculado o modelo polo-resíduo de $H_{mps,i}$, obtendo melhores resultados do que os fornecidos pelo programa ATP.

Os modelos de $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$ são mais adequados quando são obtidos dos modelos ajustados de $\bar{\mathbf{K}}_{12}$ e $\bar{\mathbf{K}}_{21}$, pelo método VF, do que quando são obtidos aplicando diretamente o método VF sobre $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$. Isso permite que os modelos de $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$ representem melhor os modos de operação de acoplamento mútuo, ou seja, os modos de sequência positiva para uma linha trifásica.

Os ajustes das matrizes $\bar{\mathbf{K}}_{12}$ e $\bar{\mathbf{K}}_{21}$, realizados por meio do VF, foram possíveis em uma faixa de frequências relativamente limitada, devido à presença de muitos picos de ressonância, o que afeta a precisão do modelo de linha, sendo este um problema que ainda merece maiores investigações.

Nas situações onde os transitórios induzidos sobre uma das linhas (devido ao acoplamento mútuo com outra linha em paralelo) são insignificantes, é possível eliminar, no modelo de linha proposto por (GUSTAVSEN, 2012), as fontes de tensão induzidas desta linha.

10.5. Cálculo de parâmetros da linha

As fórmulas aproximadas para o cálculo da impedância interna de um condutor sólido apresentadas por (WEDEPOHL & WILCOX, 1973) e (RAMOS, NAREDO, & GUTIERREZ, 2012) fornecem resultados muito precisos em relação à fórmula considerada exata baseada nas funções modificadas de Bessel. Porém, em termos do tempo de processamento a formulação de (RAMOS et al., 2012) é a mais eficiente.

O cálculo do termo de correção do efeito de retorno pela terra pode ser feito por meio da formulação de (CARSON, 1926) dada por séries infinitas, no entanto, a formulação

equivalente de (DOMMEL, 1986), implica uma diminuição no tempo de processamento. Porém, o uso do conceito de um plano de retorno de corrente ideal, localizado a uma distância complexa abaixo da superfície da terra, proposto por (DERI, TEVAN, SEMLYEN, & CASTANHEIRA, 1981), permite obter uma expressão analítica para o cálculo do termo de correção do efeito de retorno pela terra, esta expressão é muito mais eficiente do que as formulações de (CARSON, 1926) e (DOMMEL, 1986) em termos computacionais, com resultados muito próximos aos fornecidos pela formulação de (CARSON, 1926).

Foram apresentados três métodos para o cálculo da matriz de admitâncias nodais da linha de transmissão. Em (MORCHED, OTTEVANGERS & MARTI, 1993) é apresentada uma formulação que faz uso de funções hiperbólicas matriciais, a fórmula de (SEMLYEN & GUSTAVSEN, 2012) usa funções exponenciais matriciais e em (GUSTAVSEN, 2005) é proposto um método baseado no cálculo dos autovalores do produto ZY . Os três métodos fornecem resultados muito próximos, mas o método de (GUSTAVSEN, 2005) é o mais eficiente em termos de processamento.

O agrupamento de subcondutores usando o conceito de distância média geométrica e o método baseado na redução matricial da matriz de impedâncias série e a matriz de coeficientes de potências, forneceram resultados muito próximos. No entanto, o conceito da distância média geométrica está limitado a subcondutores dispostos de maneira simétrica.

REFERÊNCIAS

- AMETANI, A. (1973). The application of the fast Fourier transform to electrical transient phenomena. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 10, pp. 277–287.
- AMETANI, A. & IMANISHI, K. (1979). Development of exponential Fourier transform and its application to electrical transients. *Proc. Inst. Elect. Eng.*, vol. 126, no. 1, pp. 51–56.
- AMETANI, A. (1980). A General Formulation of Impedance and Admittance of Cables. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-99, no. 3, pp. 902-910.
- BICKFORD, J. B., MULLINEAUX, N., & REED, J. R. (1976). *Computation of Power System Transients*. London: IEEE Monograph Series, n. 18.
- BODE, H. W. (1945). *Network analysis and feedback amplifier design*. D. Van Nostrand, New York.
- BRANDWAJN, V. (1982). Modifications of user's instructions for "MARTI SETUP". *EMTP Newsletter*, vol. 3, no. 1, pp. 76–80.
- BUTTERWORTH, S. (1954). Electrical characteristics of overhead lines. *El. Research Assn.*, Tech. Rpt. Ref. O/T4.
- CARSON, J. R. (1926). Wave propagation in overhead wires with ground return. *The Bell System Technical Journal*, vol. 5, no. 4, pp. 539-554.

- CHEN, C., GAD, E., NAKHLA, M., & ACHAR, R. (2007). Passivity Verification in Delay-Based Macromodels of Multiconductor Electrical Interconnects. *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, vol. 30, no. 2, pp. 246-256.
- CLARK, E. (1943). *Circuit Analysis of A-C Power Systems*, John Wiley & Sons, New York.
- DAY, S. J., MULLINEUX, N., & REED, J. R. (1965). Developments in obtaining transient response using Fourier transforms. Part I: Gibbs phenomena and Fourier integrals. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 3, pp. 501–506.
- DAY, S. J., MULLINEUX, N., & REED, J. R. (1966). Developments in obtaining transient response using Fourier transforms. Part II: Use of the modified Fourier transform. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 4, pp. 31–40.
- DAY, S. J., BATTISSON, M. J., MULLINEUX, N., & REED, J. R. (1968). Developments in obtaining transient response using Fourier transforms. Part III: Global response. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 6, pp. 259–265.
- DERI, A., TEVAN, A., SEMLYEN, A., & CASTANHEIRA, A. (1981). The Complex Ground Return Plane a Simplified Model for Homogeneous and Multi-Layer Earth Return. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-100, no. 8, pp. 3686-3693.
- DESCHRIJVER, D., MROZOWSKI, M.; DHAENE, T., & ZUTTER, D. (2008). Macromodeling of Multiport Systems Using a Fast Implementation of the Vector Fitting Method. *IEEE Microwave and Wireless Components Letters*, vol. 18, no. 6, pp. 383-385.
- DOMMEL, H. (1969). Digital Computer Solution of Electromagnetic Transients in Single- and Multiphase Networks. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-88, no. 4, pp. 388-399.
- DOMMEL, H. (1986). *ElectroMagnetic Transients Program. Reference Manual (EMTP Theory Book)*. Portland, OR: Bonneville Power Administration.

- GÓMEZ, P., & URIBE, F. (2009). The numerical Laplace transform: an accurate technique for analyzing electromagnetic transients on power system devices. *Int. Journal of Electrical Power & Energy Systems*, vol. 31, issues 2-3, pp. 116-123.
- GRAINGER, J., & STEVENSON, W. (1994). *Power System Analysis*, McGraw Hill Inc.
- GUSTAVSEN, B., & SEMLYEN, A. (1998a). Combined phase and modal domain calculation of transmission line transients based on vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13, no. 2, pp. 596-604.
- GUSTAVSEN, B., & SEMLYEN, A. (1998b). Simulation of transmission line transients using vector fitting and modal decomposition. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 13, no. 2, pp. 605-614.
- GUSTAVSEN, B., G. IRWIN, G., MANGELROD, R., BRANDT, D., & KENT, K. (1999). Transmission line models for the simulation of interaction phenomena between parallel ac and dc overhead lines. *Int. Conf. on Power Sys. Transients*, Budapest, Hungary, 20-24.
- GUSTAVSEN, B., & SEMLYEN, A. (1999). Rational approximation of frequency domain responses by vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1052-1061.
- GUSTAVSEN, B., & SEMLYEN, A. (2001). Enforcing passivity for admittance matrices approximated by rational functions. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 16, no. 1, pp. 97-104.
- GUSTAVSEN, B. (2002). Computer code for rational approximation of frequency dependent admittance matrices. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 17, no. 4, pp. 1093-1098.
- GUSTAVSEN, B. (2004). Time delay identification for transmission line modeling. Proceedings. *8th IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects*, Heidelberg, Germany, pp. 103-106.

- GUSTAVSEN, B., & SEMLYEN, A. (2004). A robust approach for system identification in the frequency domain. in *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 19, no. 3, pp. 1167-1173.
- GUSTAVSEN, B. (2005). Validation of frequency-dependent transmission line models. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 20, no. 2, pp. 925-933.
- GUSTAVSEN, B. (2006). Improving the pole relocating properties of vector fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 21, no. 3, pp. 1587-1592.
- GUSTAVSEN, B. (2007). Fast passivity enforcement of rational macromodels by perturbation of residue matrix eigenvalues. *IEEE Workshop on Signal Propagation on Interconnects*, pp. 71-74, Genova.
- GUSTAVSEN, B. (2008a). Passivity Enforcement of Rational Models via Modal Perturbation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 23, no. 2, pp. 768-775.
- GUSTAVSEN, B. (2008b). Fast Passivity Enforcement for Pole-Residue Models by Perturbation of Residue Matrix Eigenvalues. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 23, no. 4, pp. 2278-2285.
- GUSTAVSEN, B., & HEITZ, C. (2008). Modal Vector Fitting: A Tool For Generating Rational Models of High Accuracy With Arbitrary Terminal Conditions. *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, vol. 31, no. 4, pp. 664-672.
- GUSTAVSEN, B., & NORDSTROM, J. (2008). Pole Identification for The Universal Line Model Based on Trace Fitting. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 23, no. 1, pp. 472-479.
- GUSTAVSEN, B. (2009). *Matrix Fitting Toolbox (User's Guide and Reference)*. Norway, Trondheim: SINTEF Energy Research.

- GUSTAVSEN, B., & SEMLYEN, A. (2009). Admittance-Based Modeling of Transmission Lines by a Folded Line Equivalent. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 24, no. 1, pp. 231-239.
- GUSTAVSEN, B. (2012). Modal Domain-Based Modeling of Parallel Transmission Lines With Emphasis on Accurate Representation of Mutual Coupling Effects. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 27, no. 4, pp. 2159-2167.
- GUSTAVSEN, B., & SILVA, H. (2013). Inclusion of Rational Models in an Electromagnetic Transients Program: Y-Parameters, Z-Parameters, S-Parameters, Transfer Functions. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 28, no. 2, pp. 1164-1174.
- GUSTAVSEN, B. (2017). Optimal Time Delay Extraction for Transmission Line Modeling. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 32, no. 1, pp. 45-54.
- KERSTING, W. H., & GREEN, R. K. (2011). The application of Carson's equation to the steady-state analysis of distribution feeders. *IEEE/PES Power Systems Conference and Exposition*, Phoenix, AZ, pp. 1-6.
- KOCAR, I., MAHSEREDJIAN, J., & OLIVIER, G. (2010). Improvement of Numerical Stability for the Computation of Transients in Lines and Cables. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 25, no. 2, pp. 1104-1111.
- KUROKAWA, S., YAMANAKA, F., PRADO, A., BOVOLATO, L., & PISSOLATO, J. (2007). Representação de linhas de transmissão por meio de variáveis de estado levando em consideração o efeito da frequência sobre os parâmetros longitudinais. *Sba: Controle & Automação Sociedade Brasileira de Automatica*, 18(3), 337-346.
- LI, E. P., LIU, E. X., LI, L. W., & LEONG, M. S. (2004). A coupled efficient and systematic full-wave time-domain macromodeling and circuit Simulation method for signal integrity analysis of high-speed interconnects. *IEEE Transactions on Advanced Packaging*, vol. 27, no. 1, pp. 213-223.

- MANITOBA HVDC RESEARCH CENTRE. (2018). EMTDC™ Transient analysis for PSCAD power system simulation. Recuperado de: <https://hvdc.ca/knowledge-base/read,article/163/emtdc-user-s-guide-v4-6/v>.
- MARTI, J. (1982). Accurate Modelling of Frequency-Dependent Transmission Lines in Electromagnetic Transient Simulations. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, vol. PAS-101, no. 1, pp. 147-157.
- MARTÍ, J., & TAVIGHI, A. (2018). Frequency-Dependent Multiconductor Transmission Line Model With Collocated Voltage and Current Propagation. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 33, no. 1, pp. 71-81.
- MARTI, L. (1988). Simulation of transients in underground cables with frequency-dependent modal transformation matrices. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, no. 3, pp. 1099-1110.
- MORCHED, A., GUSTAVSEN, B., & TARTIBI, M. (1999). A universal model for accurate calculation of electromagnetic transients on overhead lines and underground cables. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 14, no. 3, pp. 1032-1038.
- MORCHED, A., OTTEVANGERS, J., & MARTI, L. (1993). Multi-port frequency dependent network equivalents for the EMTP. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 8, no. 3, pp. 1402-1412.
- MORENO, P., & RAMIREZ, R. (2008). Implementation of the Numerical Laplace Transform: A Review Task Force on Frequency Domain Methods for EMT Studies. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 23, no. 4, pp. 2599-2609.
- MULLINEUX, N., & REED, J. R. (1973). Developments in obtaining transient response using Fourier transforms. Part III: Survey of the theory. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 10, pp. 259–265.

- NAGAOKA, N., & AMETANI, A. (1998). A development of a generalized frequency-domain transient program-FTP. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 3, no. 4, pp. 1996-2004.
- NODA, T., NAGAOKA, N., & AMETANI, A. (1996). Phase domain modeling of frequency-dependent transmission lines by means of an ARMA model. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 11, no. 1, pp. 401-411.
- NODA, T., NAGAOKA, N., & AMETANI, A. (1997). Further improvements to a phase-domain ARMA line model in terms of convolution, steady-state initialization, and stability. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 12, no. 3, pp. 1327-1334.
- PAPOULIS, A. (1962). *The Fourier Integral and its Applications*. New York: McGraw-Hill.
- RAMOS, O., NAREDO, J., & GUTIERREZ, J. (2012). *An Advanced Transmission Line and Cable Model in MATLAB for the Simulation of Power-System Transients*. Rijeka, Croatia: INTECH.
- SEMLYEN, A., & GUSTAVSEN, B. (2009). A Half-Size Singularity Test Matrix for Fast and Reliable Passivity Assessment of Rational Models. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 24, no. 1, pp. 345-351.
- SEMLYEN, A., & GUSTAVSEN, B. (2012). Phase-Domain Transmission-Line Modeling With Enforcement of Symmetry Via The Propagated Characteristic Admittance Matrix. *IEEE Transactions on Power Delivery*, vol. 27, no. 2, pp. 626-631.
- SILVA, H. M. J. DE, GOLE, A. M., & WEDEPOHL, L. M. (2007). Accurate Electromagnetic Transient Simulations of HVDC Cables and Overhead Transmission Lines. *International Conference on Power System Transients*, 2007.
- WEDEPOHL, L. M., & WILCOX, D. J. (1973). Transient analysis of underground power-transmission systems. System-model and wave-propagation characteristics. *Proceedings of the Institution of Electrical Engineers*, vol. 120, no. 2, pp. 253-260.

- WEDEPOHL, L. M. (1983). Power system transients: Errors incurred in the numerical inversion of the Laplace transform. *Proc. 26th Midwest Symp. Circuits Systems*, pp. 174–178.
- WEDEPOHL, L. M., NGUYEN, H. V., & IRWIN, G. D. (1996). Frequency-dependent transformation matrices for untransposed transmission lines using Newton-Raphson method. *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 11, no. 3, pp. 1538-1546.
- WILCOX, D. J. (1978). Numerical Laplace transformation and inversion. *Int. J. Elect. Eng. Educ.*, vol. 15, pp. 247-265.
- ZANETTA, L. (2003). *Transitórios Eletromagnéticos em Sistemas de Potência*. São Paulo, SP: Edusp.
- ZANETTA, L. (2006). *Fundamentos de Sistemas Elétricos de Potência*. São Paulo, SP: Editora Livraria da Física.
- ZUBIAGA, M. (2012). *Energy Transmission and Grid Integration of AC Offshore Wind Farms*. Rijeka, Croatia: INTECH.

Anexo A

Erros Incurridos na Transformada Inversa de Fourier

A transformada inversa de Fourier (TIF) apresenta duas limitações, a integração sobre um intervalo de frequências infinito e a transformação inversa de um sinal contínuo no domínio da frequência (DF). Neste anexo são tratados os erros incorridos por estas duas limitantes: o erro de truncamento no uso de uma faixa de frequências finita e o erro de discretização que acontece quando é amostrado um sinal que é contínuo no DF.

A.1. Erro de truncamento

O truncamento na faixa de integração da transformada inversa de Laplace em (8.26), dentro dos limites $[-\Omega, +\Omega]$, pode ser representado pela introdução da *função de janela* $H(j\omega)$, definida como:

$$H(j\omega) = \begin{cases} 0, & \omega < -\Omega \\ 0, & \Omega < \omega \\ 1, & -\Omega < \omega < \Omega \end{cases}, \quad (\text{A.1})$$

com a transformada no domínio do tempo (DT) de $H(j\omega)$ dada por:

$$h(t) = \frac{\Omega}{\pi} \cdot \frac{\sin \Omega t}{\Omega t}, \quad (\text{A.2})$$

como mostrado na Figura A.1a. Usando (A.1) para representar a truncamento na integral em (8.26):

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega) H(\omega) e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} F(\omega) e^{j\omega t} d\omega = f(t) * h(t). \quad (\text{A.3})$$

Assumindo que $f(t)$ é um pulso retangular, a degradação da resposta no DT por causa do truncamento na faixa de integração seria como mostrado na Figura A.1b. Esta distorção é conhecida como *fenômeno de Gibbs* e estas oscilações têm um período igual a $T_0 = (2\pi)/\Omega$.

Uma maneira de atenuar os erros de truncamento é introduzir o fator de ponderação $\sigma(t)$ que calcula a media de $\hat{f}(t)$ ao longo de um período das oscilações de Gibbs:

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{T_0} \int_{t-T_0/2}^{t+T_0/2} \hat{f}(t)\sigma(t) dt, \quad (\text{A.4})$$

onde $\sigma(t)$ é conhecida como *função de janela* no DT. Se $\sigma(t)$ corresponde a um pulso retangular como mostrado na Figura A.2a, então $\sigma(\omega)$ é conhecida como *janela Lanczos*, dada no DF como:

$$\sigma(\omega) = \sin \frac{\pi\omega/\Omega}{\pi\omega/\Omega}. \quad (\text{A.5})$$

O efeito desta janela no DT e no DF é dado por:

$$f_\sigma(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)H(\omega)\sigma(\omega)e^{j\omega t} d\omega = \frac{1}{2\pi} \int_{-\Omega}^{+\Omega} F(\omega)e^{j\omega t}\sigma(\omega) d\omega, \quad (\text{A.6a})$$

$$f_\sigma(t) = f(t) * h(t) * \sigma(t) = \hat{f}(t) * \sigma(t), \quad (\text{A.6b})$$

Na Figura A.2b mostra-se a atenuação das oscilações de Gibbs devido ao uso de $\sigma(\omega)$, em relação à resposta original sem aplicar $\sigma(\omega)$ da Figura A.1b. Na Tabela A.1 mostram-se outras expressões para a função janela obtidas de (GÓMEZ & URIBE, 2009).

Tabela A.1 – Equações da função janela

Janela	Equação
Blackman	$\sigma(\omega) = 0,42 + 0,5 * \cos\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right) + 0,08 * \cos\left(\frac{2\pi\omega}{\Omega}\right)$
Hanning	$\sigma(\omega) = \frac{1}{2} * \left[1 + \cos\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)\right]$
Lanczos	$\sigma(\omega) = \sin\left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right) / \left(\frac{\pi\omega}{\Omega}\right)$
Riesz	$\sigma(\omega) = 1,0 - \left \frac{\omega}{\Omega}\right ^2$

Fonte: Adaptado de GÓMEZ & URIBE (2009, p.118).

Figura A.1 – Efeito do truncamento de frequência

a) Função de janela

b) Efeito do truncamento sobre um pulso retangular

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2601).

A.2. Erro de discretização

No cálculo numérico de (8.26) são usadas amostras no DF de $F(\omega)$, podendo ser representada esta amostragem por meio da expressão:

$$\hat{f}(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} F(\omega)G(\omega)e^{j\omega t} d\omega, \quad (\text{A.7})$$

Figura A.2 – Efeito da função janela

a) Janela Lanczos

b) Aplicação da janela Lanczos a um pulso retangular

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2602).

onde $G(\omega)$ corresponde a um trem de impulsos de Dirac regularmente espaçados:

$$G(\omega) = \Delta\omega \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(\omega - n\Delta\omega), \quad (\text{A.8})$$

onde $\Delta\omega$ representa o intervalo de frequência entre amostras de $F(\omega)$, assumindo uma discretização ímpar (ver Figura A.4b). Aplicando (A.8) em (A.7), tem-se:

$$\hat{f}(t) = f(t) * g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} f(t - n\Delta t), \quad (\text{A.9})$$

onde $\Delta t = \pi/(N * \Delta\omega)$ representa o intervalo de tempo entre cada impulso de Dirac de $g(t)$, sendo N o número total de amostras de frequência de $F(\omega)$ e $g(t)$ a transformada inversa de $G(\omega)$ dada por:

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - n\Delta t). \quad (\text{A.10})$$

Na Figura A.3 apresenta-se o efeito da discretização, exemplificado para o caso de uma função triangular no domínio do tempo, $f(t)$, mostrada na Figura A.3a e a discretização de $F(\omega)$, denotada como $\hat{F}(\omega) = F(\omega)G(\omega)$, na Figura A.3b. Na Figura A.3c tem-se que $\hat{f}(t)$ corresponde à transformada inversa de $\hat{F}(\omega)$, que mostra uma repetição do sinal $f(t)$ com um período dado por $P_0 = 2\pi/\Delta\omega$.

Para diminuir o efeito da discretização é usado um fator de amortecimento c que é análogo ao fator a do item 8.2.1. Entre as fórmulas propostas para calcular o fator c , têm-se as apresentadas por (WILCOX, 1978) e (WEDEPOHL, 1983):

$$c = 2 * \Delta\omega, \quad (\text{A.11})$$

$$c = \ln(N^2)/T, \quad (\text{A.12})$$

sendo que $f(t)$ é calculada até um instante T , respeitando a condição $P_0 \geq 2T$, para evitar a superposição, por exemplo, evitando o cruzamento dos sinais triangulares da Figura A.3b. A aplicação deste fator é apresentada no item 8.2.2.

Figura A.3 – Efeito da discretização

a) Sinal $f(t)$

b) Amostragem de $F(\omega)$ c) Forma de onda do sinal amostrado de $F(\omega)$

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2602).

Figura A.4 – Amostragem no DT e DF

a) Sinal no DT

b) Sinal no DF

Fonte: Adaptado de MORENO & RAMIREZ (2008, p.2603).

Anexo B

Parâmetros para Condutores Equivalentes

As equações da linha que definem a variação de tensão v e corrente i ao longo de uma seção de linha dx são

$$-\frac{dv}{dx} = Zi, \quad (\text{B.1})$$

$$-\frac{di}{dx} = Yv. \quad (\text{B.2})$$

Para uma linha trifásica composta por dois cabos-guarda e três condutores por fase (Figura 7.3), teríamos 11 equações correspondentes a (B.1) e outras 11 equações para (B.2). Não obstante, o número de equações pode ser reduzido a 3 tanto para (B.1) quanto para (B.2). O procedimento para o cálculo dos parâmetros Z e Y dos condutores equivalentes da linha será apresentado a seguir.

B.1. Agrupamento de condutores

Nas linhas de alta tensão, cada fase frequentemente está composta por dois ou mais subcondutores mantidos juntos por espaçadores. O agrupamento de subcondutores é usualmente simétrico. A seguir apresentam-se dois métodos para o cálculo dos parâmetros equivalentes da linha para condutores agrupados. Com o primeiro método (item B.1.1) os parâmetros são inicialmente calculados representando todos os subcondutores de maneira individual. As matrizes Z e Y podem ser reduzidas supondo que as tensões ao longo da linha são iguais entre subcondutores de uma mesma fase. O segundo método (item B.1.2) usa o conceito da distância média geométrica para substituir um conjunto de subcondutores por um

único condutor equivalente. Não obstante o segundo método é aplicável somente no caso de subcondutores agrupados de maneira simétrica.

B.1.1. Método 1: redução matricial

Como exemplo usa-se a Figura 7.3, com os condutores da fase A chamados de 1, 2 e 3. Considerando que a tensão ao longo da linha é igual para todos os subcondutores que fazem parte de uma mesma fase, tem-se:

$$\frac{dv_A}{dx} = \frac{dv_1}{dx} = \frac{dv_2}{dx} = \frac{dv_3}{dx}, \quad (\text{B.3})$$

$$v_A = v_1 = v_2 = v_3. \quad (\text{B.4})$$

A corrente em cada fase é igual à soma das correntes nos seus subcondutores:

$$i_A = i_1 + i_2 + i_3. \quad (\text{B.5})$$

O procedimento de redução de $\mathbf{Z}$ e $\mathbf{Y}$ é baseado nas expressões (B.3) - (B.5), como será mostrado a seguir.

B.1.1.1. Matriz de impedâncias série

Para a redução de $\mathbf{Z}$ é introduzida a corrente da fase A, i_A , no vetor $\mathbf{i}$ em (A.1). A i -ésima equação em (A.1) corresponde à variação de tensão $\mathbf{v}$ ao longo de uma seção de linha dx para o condutor i :

$$-\frac{dv_i}{dx} = Z_{i1}i_1 + Z_{i2}i_2 + Z_{i3}i_3 + \cdots + Z_{i11}i_{11}. \quad (\text{B.6})$$

Obtendo i_1 de (B.5) e substituindo em (B.6):

$$-\frac{dv_i}{dx} = Z_{i1}i_A + (Z_{i2} - Z_{i1})i_2 + (Z_{i3} - Z_{i1})i_3 + \cdots + Z_{i11}i_{11}. \quad (\text{B.7})$$

A operação anterior é realizada de forma semelhante para todas as equações em (B.1). Isto é ilustrado na Figura B.1, onde a matriz que relaciona $-\mathbf{dv}/dx$ com o vetor de correntes $[i_A \ i_2 \ \cdots \ i_{11}]^T$ é obtida da modificação da matriz $\mathbf{Z}$, que é resultado de subtrair a segunda e terceira coluna de $\mathbf{Z}$ da primeira coluna.

Figura B.1 – Primeiro passo na redução matricial de $\mathbf{Z}$

Fonte: Adaptado de DOMMEL (1986, p. 4-17).

No passo seguinte, as equações $-dv_2/dx$ e $-dv_3/dx$ em (B.7) são subtraídas de $-dv_1/dx$ e considerando (B.3), tem-se: $-dv_2/dx - (-dv_1/dx) = 0$ e $-dv_3/dx - (-dv_1/dx) = 0$. Este procedimento é ilustrado na Figura B.2.

Figura B.2 – Segundo passo na redução matricial de $\mathbf{Z}$

Fonte: Adaptado de DOMMEL (1986, p. 4-17).

De maneira análoga, estes dois passos são aplicados para as outras fases B e C, resultado na Figura B.3a, considerando a seguinte numeração para os condutores (ver Figura 7.3):

- Fase A: 1, 2 e 3.
- Fase B: 4, 5 e 6.
- Fase C: 7, 8 e 9
- Cabos-guarda: 10 e 11.

Posteriormente: i) as equações iguais a zero são posicionadas às últimas linhas, ii) as colunas correspondentes às correntes de fase e cabos-guarda são posicionadas às primeiras colunas, obtendo como resultado a Figura B.3b.

Particionando as matrizes e vetores de acordo com a Figura B.3b, e denominando “u” às fases equivalentes e cabos-guarda, e “s” aos subcondutores, tem-se:

$$-\begin{bmatrix} dv_u/dx \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{uu} & \mathbf{Z}_{us} \\ \mathbf{Z}_{su} & \mathbf{Z}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_u \\ \mathbf{i}_s \end{bmatrix}. \quad (\text{B.8})$$

Os subcondutores são eliminados aplicando a redução de Kron:

$$-\frac{dv_u}{dx} = \mathbf{Z}_{reduzida} \mathbf{i}_u, \quad (\text{B.9a})$$

$$\mathbf{Z}_{reduzida} = \mathbf{Z}_{uu} - \mathbf{Z}_{us} \mathbf{Z}_{ss}^{-1} \mathbf{Z}_{su}. \quad (\text{B.9b})$$

Figura B.3 – Terceiro passo na redução matricial de $\mathbf{Z}$

$$\begin{array}{l} -dv_1/dx = -dv_A/dx \\ -dv_2/dx + dv_1/dx \\ -dv_3/dx + dv_1/dx \\ -dv_4/dx = -dv_B/dx \\ -dv_5/dx + dv_4/dx \\ -dv_6/dx + dv_4/dx \\ -dv_7/dx = -dv_C/dx \\ -dv_8/dx + dv_7/dx \\ -dv_9/dx + dv_7/dx \\ -dv_{10}/dx \\ -dv_{11}/dx \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ 0 \\ 0 \\ \text{ } \\ 0 \\ 0 \\ \text{ } \\ 0 \\ 0 \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} = \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} i_A \\ i_2 \\ i_3 \\ i_B \\ i_5 \\ i_6 \\ i_C \\ i_8 \\ i_9 \\ i_{10} \\ i_{11} \end{array}$$

a) Aplicação dos dois primeiros passos na redução matricial de $\mathbf{Z}$ para todas as fases

$$\begin{array}{l} -dv_1/dx = -dv_A/dx \\ -dv_4/dx = -dv_B/dx \\ -dv_7/dx = -dv_C/dx \\ -dv_{10}/dx \\ -dv_{11}/dx \\ -dv_2/dx + dv_1/dx \\ -dv_3/dx + dv_1/dx \\ -dv_5/dx + dv_4/dx \\ -dv_6/dx + dv_4/dx \\ -dv_8/dx + dv_7/dx \\ -dv_9/dx + dv_7/dx \end{array} \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{array} = \begin{array}{c} \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \\ \text{ } \end{array} \begin{array}{c} i_A \\ i_B \\ i_C \\ i_{10} \\ i_{11} \\ i_2 \\ i_3 \\ i_5 \\ i_6 \\ i_8 \\ i_9 \end{array}$$

b) Relocação de linhas e colunas no resultado da Figura B.3a

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

B.1.1.2. Matriz de admitâncias shunt

As tensões dos condutores $\mathbf{v}$ em relação ao solo são função das cargas da linha por unidade de comprimento $\mathbf{q}$ de acordo com:

$$\mathbf{v} = \mathbf{P}\mathbf{q}, \quad (\text{B.10})$$

onde $\mathbf{P}$ é a matriz dos coeficientes de potencias de Maxwell definida em (7.42)-(7.43). Na condição em regime permanente senoidal, o vetor de cargas (como valores fasoriais) está relacionado com a corrente de fuga $-(d\mathbf{i}/dx)$:

$$\mathbf{q} = -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{d\mathbf{i}}{dx} \right). \quad (\text{B.11a})$$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix} = -\frac{1}{j\omega} \left(\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_g \end{bmatrix} \right). \quad (\text{B.11b})$$

Em (B.11b) os vetores $\mathbf{q}$ e $\mathbf{i}$ são particionados, denominando “c” aos subcondutores de fase e “g” aos cabos-guarda. A carga em cada fase é igual à soma das cargas nos seus subcondutores, de acordo com (B.5) e (B.11):

$$q_A = q_1 + q_2 + q_3. \quad (\text{B.12})$$

Aplicando (B.12) à i -ésima equação em (B.10), tem-se:

$$v_i = P_{i1}q_A + (P_{i2} - P_{i1})q_2 + (P_{i3} - P_{i1})q_3 + \dots + P_{i11}q_{11}. \quad (\text{B.13})$$

A operação anterior é realizada de maneira semelhante para todas as equações em (B.13). Como mostrado na Figura B.4a, a matriz que relaciona $\mathbf{v}$ com o vetor de cargas $[q_A \ q_2 \ \dots \ q_{11}]^T$ é obtida da modificação da matriz $\mathbf{P}$, que é resultado de subtrair a segunda e terceira coluna de $\mathbf{P}$ da primeira coluna.

No seguinte passo, as equações v_2 e v_3 são subtraídas de v_1 e considerando (B.4) tem-se: $v_2 - v_1 = 0$ e $v_3 - v_1 = 0$. Este procedimento é ilustrado na Figura B.4b.

De maneira análoga, estes dois passos são aplicados para as outras duas fases (ver Figura B.4c). Posteriormente: i) as equações iguais a zero são posicionadas nas últimas linhas, ii) as colunas correspondentes às correntes de fase e cabos-guarda são posicionadas nas primeiras colunas, tendo como resultado a Figura B.4d.

Figura B.4 – Redução matricial de $\mathbf{P}$

As colunas 2 e 3 são subtraídas com a coluna 1. A coluna 1 não é alterada.

a) Primeiro passo na redução matricial de $\mathbf{P}$

As linhas 2 e 3 são subtraídas da linha 1. A linha 1 não é alterada.

b) Segundo passo na redução matricial de $\mathbf{P}$

c) Aplicação dos dois primeiros passos na redução matricial de $\mathbf{P}$ para todas as fases

d) Relocação de linhas e colunas no resultado da Figura B.4c

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Particionando as matrizes e vetores da expressão obtida ao aplicar os passos anteriores e denominando “u” às fases equivalentes e cabos-guarda, e “s” aos subcondutores, tem-se:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_u \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{uu} & \mathbf{P}_{us} \\ \mathbf{P}_{su} & \mathbf{P}_{ss} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_u \\ \mathbf{q}_s \end{bmatrix}. \quad (\text{B.14})$$

Os subcondutores são eliminados aplicando a redução de Kron:

$$\mathbf{v}_u = \mathbf{P}_{reduzida} \mathbf{q}_u, \quad (\text{B.15a})$$

$$\mathbf{P}_{reduzida} = \mathbf{P}_{uu} - \mathbf{P}_{us} \mathbf{P}_{ss}^{-1} \mathbf{P}_{su}. \quad (\text{B.15b})$$

Considerando (B.11) e (B.15a), tem-se

$$-\frac{d}{dx} \mathbf{i}_u = j\omega \mathbf{P}_{reduzida}^{-1} \mathbf{v}_u. \quad (\text{B.16})$$

Comparando (B.2) e (B.16), tem-se que a matriz de admitâncias para os condutores de fase equivalentes está dada por:

$$\mathbf{Y}_{reduzida} = j\omega \mathbf{P}_{reduzida}^{-1}. \quad (\text{B.17})$$

B.1.2. Método 2: distância média geométrica

Cada grupo de subcondutores por fase pode ser substituído por um único condutor equivalente com raio r_{eq} . As fórmulas apresentadas a seguir são limitadas para os casos de subcondutores sólidos agrupados de maneira simétrica e é suposta uma distribuição equitativa de corrente entre os subcondutores.

O agrupamento de condutores pode ser substituído por um único condutor equivalente com raio:

$$r_{eq} = \sqrt[N]{NrR^{N-1}}, \quad (B.18)$$

onde r é o raio do subcondutor, N o número de subcondutores agrupados, e R é o raio do conjunto de subcondutores (Figura B.5).

Figura B.5 – Agrupamento simétrico com três subcondutores

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

B.2. Eliminação dos cabos-guarda

Os cabos-guarda são aterrados em cada torre, sendo que a distância típica entre torres está entre os 250 a 350 m. É possível assumir que o potencial do cabo-guarda é continuamente zero até frequências de aproximadamente 250 Hz (DOMMEL, 1986). Esta aproximação é assumida em muitos estudos de transitórios e programas como o ATP e o PSCAD. Isto permite reduzir o número de equações em (B.1) e (B.2), obtendo um sistema equivalente trifásico sem cabos-guarda, mas que considera o efeito dos cabos-guarda de maneira aproximada.

B.2.1. Matriz de impedâncias série

Particionando as matrizes e vetores de (B.9) para os conjuntos de condutores de fase “c” e cabos-guarda “g”:

$$-\begin{bmatrix} d\mathbf{v}_c/dx \\ d\mathbf{v}_g/dx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Z}_{cc} & \mathbf{Z}_{cg} \\ \mathbf{Z}_{gc} & \mathbf{Z}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_g \end{bmatrix}. \quad (\text{B.19})$$

Assumindo um potencial continuamente zero, temos

$$\mathbf{v}_g = \frac{d}{dx} \mathbf{v}_g = 0. \quad (\text{B.20})$$

Com (B.20), obtém-se a formulação equivalente para (B.19):

$$-\frac{d}{dx} \mathbf{v}_c = \mathbf{Z}_{reduzida} \mathbf{i}_c, \quad (\text{B.21})$$

onde

$$\mathbf{Z}_{reduzida} = \mathbf{Z}_{cc} - \mathbf{Z}_{cg} \mathbf{Z}_{gg}^{-1} \mathbf{Z}_{gc}. \quad (\text{B.22})$$

B.2.2. Matriz de admitâncias shunt

Particionando as matrizes e vetores de (B.15) para os conjuntos de condutores de fase “c” e cabos-guarda “g”:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}_c \\ \mathbf{v}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{P}_{cc} & \mathbf{P}_{cg} \\ \mathbf{P}_{gc} & \mathbf{P}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{q}_c \\ \mathbf{q}_g \end{bmatrix}. \quad (\text{B.23})$$

Assumindo um potencial continuamente zero, ver expressão (B.20), obtém-se a formulação equivalente para (B.23):

$$\mathbf{v}_c = \mathbf{P}_{reduzida} \mathbf{q}_c, \quad (\text{B.24})$$

onde

$$\mathbf{P}_{reduzida} = \mathbf{P}_{cc} - \mathbf{P}_{cg} \mathbf{P}_{gg}^{-1} \mathbf{P}_{gc}. \quad (\text{B.25})$$

Substituindo (B.11) em (B.24), tem-se:

$$-\frac{d}{dx} \mathbf{i}_c = j\omega \mathbf{P}_{reduzida}^{-1} \mathbf{v}_c. \quad (\text{B.26})$$

Relacionando (B.2) e (B.26), tem-se que a matriz de admitâncias para os condutores de fase equivalentes está dada por:

$$\mathbf{Y}_{reduzida} = j\omega \mathbf{P}_{reduzida}^{-1}. \quad (\text{B.27})$$

Observa-se que particionando as matrizes e vetores de (B.2)

$$-\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} \mathbf{i}_c \\ \mathbf{i}_g \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_{cc} & \mathbf{Y}_{cg} \\ \mathbf{Y}_{gc} & \mathbf{Y}_{gg} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_c \\ \mathbf{v}_g \end{bmatrix}, \quad (\text{B.28})$$

e considerando (B.20):

$$-\frac{d}{dx} \mathbf{i}_c = \mathbf{Y}_{cc} \mathbf{v}_c. \quad (\text{B.29})$$

Comparando (B.29) e (B.24), tem-se que $\mathbf{Y}_{reduzida} = \mathbf{Y}_{cc}$. Não obstante, o cálculo de $\mathbf{Y}$ precisa da inversão de $\mathbf{P}$ de acordo com (7.41), e é mais eficiente computacionalmente calcular $\mathbf{Y}_{reduzida}$ por meio de (B.13).

B.3. Perfil do condutor

O perfil do condutor entre torres (Figura B.6) depende do espaçamento entre torres Δx e pode ser descrito como:

- Parábola: $\Delta x \leq 500$ m.
- Catenária: $500 \text{ m} < \Delta x \leq 2000$ m.
- Linha elástica: $2000 \text{ m} < \Delta x$

Considerando que a distância típica entre torres está entre os 250 a 350 m, usa-se a parábola como perfil do condutor. A altura média acima do solo para um condutor com forma de parábola é igual:

$$h = h_T - \frac{2}{3} h_F = h_M + \frac{1}{3} h_F = \frac{1}{3} h_T + \frac{2}{3} h_M. \quad (\text{B.30})$$

onde

h : altura média do condutor.

h_F : flecha.

h_M : altura do condutor no meio entre torres.

h_T : altura do condutor na torre

A fórmula (B.30) é usada pelas rotinas de programas de transitórios eletromagnéticos como o PSCAD e o ATP para calcular a altura média do condutor.

Figura B.6 – Perfil do condutor entre torres

Fonte: Elaborado pelo autor (2019).

Anexo C

Modelo de Linha e Matrizes de Acoplamento Mútuo

No Capítulo 9 é apresentada a modelagem de linhas em paralelo, proposta por (GUSTAVSEN, 2012), que faz uso do modelo proposto por (MARTI, 1982) e o *Vector Fitting* (VF). Cada linha é simulada de maneira independente por meio do modelo de (MARTI, 1982) em série com fontes de tensão que representam as tensões induzidas nas linhas devido ao efeito de acoplamento mútuo. As tensões induzidas são definidas em (9.4), sendo usadas as matrizes $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$ para representar com precisão tanto o acoplamento indutivo quanto o capacitivo.

Neste anexo é apresentado o procedimento de cálculo das matrizes $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$. Também é apresentada a formulação de um modelo análogo ao proposto por (MARTI, 1982), sendo este modelo usado nas simulações apresentadas no Capítulo 9.

C.1. Tensões induzidas pelo efeito de acoplamento mútuo

Neste item é apresentado o procedimento para o cálculo de $\mathbf{K}_{12}$ e $\mathbf{K}_{21}$, para obter o modelo das tensões induzidas $\mathbf{v}_{1,ind}$ e $\mathbf{v}_{2,ind}$ (ver equação (9.4)), de acordo com os passos descritos no item 9.1.

C.1.1. Cálculo de $\mathbf{K}_{21}$

A expressão (9.2), relaciona as tensões nodais e as correntes injetadas nos terminais das linhas em paralelo (ver Figura 9.1), fazendo a partição de $\mathbf{Z}_{nod}$ em (C.1), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = Z_{nod} \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_2^k \\ i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad Z_{nod} = (Y_{nod})^{-1} = \begin{bmatrix} A & C^T & G^T & \hat{I}^T \\ C & B & J^T & \hat{H}^T \\ G & J & D & F^T \\ \hat{I} & \hat{H} & F & E \end{bmatrix} \quad (C.1)$$

A matriz de impedâncias nodais associada ao conjunto de linhas em paralelo, Z_{nod} , é a inversa da matriz de admitâncias nodais, $(Y_{nod})^{-1}$, sendo que Y_{nod} pode ser calculada por meio das formulações apresentadas no item 7.3.

Para o cálculo de K_{21} considera-se a equação (9.4b) e $v_{2,ind} = Z_{n,21}i_1$. Com $i_2^k = i_2^m = \mathbf{0}$ e (C.1), depois de operações algébricas, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & G^T \\ C & J^T \\ G & D \\ \hat{I} & F \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} i_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (C.2a)$$

$$\begin{bmatrix} v_2^k \\ v_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{2,ind}^k \\ v_{2,ind}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^{-1} & J^T - CA^{-1}G^T \\ \hat{I}A^{-1} & F - \hat{I}A^{-1}G^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix}, \quad i_2 = \begin{bmatrix} i_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (C.2b)$$

Em (GUSTAVSEN, 2012) é mencionado que os elementos $J^T - CA^{-1}G^T$ e $F - \hat{I}A^{-1}G^T$ não são precisos a baixas frequências. Este problema é superado com a partição e inversão de Y_{nod} :

$$\begin{bmatrix} i_1^k \\ i_2^k \\ i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix} = Y_{nod} \begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix}, \quad (C.3)$$

Para obter uma expressão equivalente dos elementos $J^T - CA^{-1}G^T$ e $F - \hat{I}A^{-1}G^T$, assume-se que $v_1^k = \mathbf{0}$ em (C.3), eliminando a primeira coluna da esquerda de Y_{nod} , considerando que somente precisam-se os elementos da segunda coluna em (C.2b). Também como não existe interesse em i_1^k em (C.3), é eliminada a fila superior de Y_{nod} , invertendo a matriz de admitâncias resultante, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} L & O^T & Q^T \\ O & M & P^T \\ Q & P & N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2^k \\ i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad v_1^k = \mathbf{0} \quad (C.4)$$

Impondo $i_2^k = i_2^m = \mathbf{0}$ em (C.4), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{2,ind}^k \\ v_{2,ind}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q^T \\ P \end{bmatrix} i_1^m, \quad v_1^k = 0 \quad (C.5)$$

Dos resultados obtidos em (C.2) e (C.5), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{2,ind}^k \\ v_{2,ind}^m \end{bmatrix} = K_{21} \begin{bmatrix} v_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} CA^{-1} & Q^T \\ \hat{I}A^{-1} & P \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix} \quad (C.6)$$

C.1.2. Cálculo de K_{12}

Para o cálculo de K_{12} considera-se a equação (9.4a) e $v_{1,ind} = Z_{n,12}i_2$. Com $i_1^k = i_1^m = 0$ e (C.1), depois de operações algébricas, obtém-se:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_2^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T & \hat{I}^T \\ B & \hat{H}^T \\ J & F^T \\ \hat{H} & E \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad i_1 = \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix} = 0 \quad (C.7a)$$

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_1^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{1,ind}^k \\ v_{1,ind}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T B^{-1} & \hat{I}^T - C^T B^{-1} \hat{H}^T \\ J B^{-1} & F^T - J B^{-1} \hat{H}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad i_1 = \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_1^m \end{bmatrix} = 0 \quad (C.7b)$$

Os elementos $J^T - CA^{-1}G^T$ e $F - \hat{I}A^{-1}G^T$ não são precisos a baixas frequências (GUSTAVSEN, 2012), e podem ser encontradas expressões equivalentes de maneira semelhante como foi apresentado no item anterior.

Para obter expressões equivalentes para os elementos $\hat{I}^T - C^T B^{-1} \hat{H}^T$ e $F^T - J B^{-1} \hat{H}^T$, usa-se a expressão (C.3) e assume-se que $v_2^k = 0$, eliminando a segunda coluna da esquerda de Y_{nod} , considerando que somente precisam-se os elementos da segunda em (C.7b). Também como não existe interesse em i_2^k em (C.3), é eliminada a segunda fila de Y_{nod} . Invertendo a matriz de admitâncias resultante, tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_1^k \\ v_1^m \\ v_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R & U^T & W^T \\ U & S & V^T \\ W & V & T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1^k \\ i_1^m \\ i_2^m \end{bmatrix}, \quad v_2^k = 0 \quad (C.8)$$

Impondo $i_1^k = i_1^m = 0$ em (C.8), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{1,ind}^k \\ v_{1,ind}^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} W^T \\ V^T \end{bmatrix} i_2^m, \quad v_2^k = 0 \quad (C.9)$$

Dos resultados obtidos em (C.7) e (C.9), tem-se:

$$\begin{bmatrix} v_{1,ind}^k \\ v_{1,ind}^m \end{bmatrix} = K_{12} \begin{bmatrix} v_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C^T B^{-1} & W^T \\ J B^{-1} & V^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_2^k \\ i_2^m \end{bmatrix} \quad (C.10)$$

C.2. Modelo de linha dependente da frequência

Em (MARTI, 1982) é proposto um modelo baseado no uso de uma matriz de transformação constante, usada para transformar o modelo de fase em modos, cada modo podendo ser representado por uma linha independente. O modelo faz uso de modelos polo-resíduo para ajustar as impedâncias características modais e as funções de propagação modais. No entanto, nas simulações apresentadas no Capítulo 9 é usado um modelo análogo ao proposto por (MARTI, 1982), considerando que são ajustadas as admitâncias características modais em vez das impedâncias características modais. Neste item são apresentadas as formulações deste modelo análogo, baseado no artigo de (MARTI, 1982).

C.2.1. Equações do telégrafo

O comportamento eletromagnético de linhas de transmissão e cabos é descrito por meio das equações modificadas do telégrafo, que no domínio da frequência são dadas como:

$$-\frac{\partial}{\partial x} V(x, s) = Z(s) I(x, s) \quad (C.11a)$$

$$-\frac{\partial}{\partial x} I(x, s) = Y(s) V(x, s) \quad (C.11b)$$

onde V é o vetor de tensões, I é o vetor de correntes, Z e Y são matrizes por unidade de comprimento, de impedâncias série e admitâncias shunt, respectivamente. As matrizes Z e Y têm dimensão $N \times N$ para uma linha com N fases. As equações modificadas do telégrafo podem ser expressas por meio de equações diferenciais ordinárias de segunda ordem:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x, s) = Z(s) Y(s) V(x, s), \quad (C.12a)$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x, s) = Y(s) Z(s) I(x, s). \quad (C.12b)$$

A solução das tensões e correntes de (C.12) são dadas por:

$$I(x, s) = C_1 e^{-\sqrt{YZ}x} + C_2 e^{\sqrt{YZ}x}, \quad (C.13a)$$

$$V(x, s) = Z_c \left[C_1 e^{-\sqrt{YZ}x} - C_2 e^{\sqrt{YZ}x} \right], \quad (C.13b)$$

onde

$$Z_c = Y^{-1} \sqrt{YZ} \quad (C.13c)$$

$$Y_c = \sqrt{YZ} Z^{-1} \quad (C.13d)$$

onde Z_c é a matriz de impedâncias características e sua inversa é a matriz de admitâncias características Y_c . C_1 e C_2 são vetores de integração constantes, definidos pelas condições de contorno (terminais da linha). O termo C_1 representa o vetor de correntes que são propagadas na direção positiva de x , enquanto C_2 representa o vetor de correntes propagando-se na direção negativa de x .

Partindo de (C.13) obtêm-se as seguintes expressões que estabelecem a relação entre tensões e correntes nos terminais da linha (ver Figura C.1):

$$I_m - Y_c V_m = -H[I_k + Y_c V_k], \quad (C.14a)$$

$$I_k - Y_c V_k = -H[I_m + Y_c V_m], \quad (C.14b)$$

onde

$$H = e^{-\sqrt{YZ}l}, \quad (C.14c)$$

$$I_k = I(0, s), \quad I_m = -I(l, s), \quad (C.14d)$$

$$V_k = V(0, s), \quad V_m = V(l, s), \quad (C.14e)$$

H é conhecida como matriz de funções de propagação ou função de propagação e l é o comprimento total da linha.

Figura C.1 – Segmento de linha de comprimento l

C.2.2. Decomposição em componentes modais

As equações modificadas do telégrafo em (C.11) podem ser diagonalizadas por meio de uma transformação modal que oferece simplificação no equacionamento. São usadas as matrizes $\mathbf{T}_V$ e $\mathbf{T}_I$ para a transformação de tensões e correntes, respectivamente, que diagonalizam os sistemas de equações (C.11):

$$\mathbf{V}(x, s) = \mathbf{T}_V \bar{\mathbf{V}}(x, s), \quad (\text{C.15a})$$

$$\mathbf{I}(x, s) = \mathbf{T}_I \bar{\mathbf{I}}(x, s), \quad (\text{C.15b})$$

onde $\bar{\mathbf{V}}$ e $\bar{\mathbf{I}}$ são os vetores de tensão e corrente em componentes modais, respectivamente. $\mathbf{T}_I$ e $\mathbf{T}_V$ são as matrizes de autovetores de $\mathbf{YZ}$ e $\mathbf{ZY}$, respectivamente, existindo a relação:

$$\mathbf{T}_V = \mathbf{T}_I^{-T}, \quad (\text{C.16})$$

onde $\mathbf{T}_I^{-T}$ representa a matriz transposta e inversa de $\mathbf{T}_I$. Para calcular os elementos de $\mathbf{T}_I$, garantindo que sejam funções suaves com a frequência, pode ser usado o método de Newton-Raphson proposto por (WEDEPOHL, NGUYEN, & IRWIN, 1996).

Substituindo (C.15) em (C.11) e considerando (C.16), tem-se:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\mathbf{V}}(x, s) = \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{V}}(x, s), \quad (\text{C.17a})$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} \bar{\mathbf{I}}(x, s) = \bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{I}}(x, s). \quad (\text{C.17b})$$

onde

$$\bar{\mathbf{Z}} = \mathbf{T}_I^T \mathbf{Z} \mathbf{T}_I \quad (\text{C.17c})$$

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{Y} \mathbf{T}_I^{-T} \quad (\text{C.17d})$$

As matrizes $\bar{\mathbf{Z}}$ e $\bar{\mathbf{Y}}$ são diagonais, portanto os produtos matriciais $\bar{\mathbf{Z}} \bar{\mathbf{Y}}$ e $\bar{\mathbf{Y}} \bar{\mathbf{Z}}$ são diagonais e de (C.17a)-(C.17b) podem-se obter equações independentes para cada modo. No caso de uma linha trifásica, tem-se:

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} V_i(x, s) = Z_i Y_i V_i(x, s), \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.18a})$$

$$-\frac{\partial^2}{\partial x^2} I_i(x, s) = Y_i Z_i I_i(x, s), \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.18b})$$

onde

$$\bar{\mathbf{V}}(x, s) = \begin{bmatrix} V_0(x, s) \\ V_1(x, s) \\ V_2(x, s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.18c})$$

$$\bar{\mathbf{I}}(x, s) = \begin{bmatrix} I_0(x, s) \\ I_1(x, s) \\ I_2(x, s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.18d})$$

$$\bar{\mathbf{Z}}(s) = \begin{bmatrix} Z_0(s) & 0 & 0 \\ 0 & Z_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & Z_2(s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.18e})$$

$$\bar{\mathbf{Y}}(s) = \begin{bmatrix} Y_0(s) & 0 & 0 \\ 0 & Y_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & Y_2(s) \end{bmatrix} \quad (\text{C.18f})$$

Observa-se que cada equação modal em (C.18a)-(C.18b) pode ser representada por uma linha independente, considerando que existe um desacoplamento entre modos.

Cada uma das equações em (C.18) pode ser resolvida seguindo um procedimento análogo ao mencionado no item anterior, obtendo como resultado um conjunto de equações que relaciona tensões e correntes modais nos terminais das linhas ($x = 0, x = l$):

$$I_{m,i} - Y_{C,i} V_{m,i} = -H_i [I_{k,i} + Y_{C,i} V_{k,i}], \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.19a})$$

$$I_{k,i} - Y_{C,i} V_{k,i} = -H_i [I_{m,i} + Y_{C,i} V_{m,i}], \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.19b})$$

onde

$$H_i = e^{-\sqrt{Y_i Z_i} l}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.19c})$$

$$Y_{C,i} = \sqrt{Y_i / Z_i}, \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.19d})$$

$$I_{k,i} = I_i(0, s), \quad I_{m,i} = -I_i(l, s), \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.19e})$$

$$V_{k,i} = V_i(0, s), \quad V_{m,i} = V_i(l, s), \quad i = 0, 1, 2 \quad (\text{C.19f})$$

As funções de propagação modais, H_i , e as admitâncias características modais, $Y_{C,i}$, também podem ser calculadas por meio das expressões:

$$\bar{\mathbf{H}}(s) = \begin{bmatrix} H_0(s) & 0 & 0 \\ 0 & H_1(s) & 0 \\ 0 & 0 & H_2(s) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{H} \mathbf{T}_I \quad (\text{C.19g})$$

$$\bar{Y}_C(s) = \begin{bmatrix} Y_{C,0}(s) & 0 & 0 \\ 0 & Y_{C,1}(s) & 0 \\ 0 & 0 & Y_{C,2}(s) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_I^{-1} \mathbf{Y}_C \mathbf{T}_I^{-T} \quad (\text{C.19h})$$

$\mathbf{T}_I$ é real e constante somente nos casos de linhas continuamente transpostas. Para linhas levemente assimétricas e não transpostas é possível assumir que $\mathbf{T}_I$ é constante com a frequência, no entanto, para linhas em paralelo que fazem parte de diferentes circuitos não é possível assumir $\mathbf{T}_I$ como uma matriz constante. Em (MARTI, 1982) é proposto um modelo de linha baseado no uso de uma matriz de transformação constante e considerando as equações modais independentes. No item C.2.4 é apresentado o modelo proposto por (MARTI, 1982) fundamentado na solução numérica no domínio do tempo das equações modais (C.19), considerando que H_i e $Y_{C,i}$ são calculadas empregando uma matriz de transformação constante.

C.2.3. Cálculo da integral de convolução por método recursivo

No modelo proposto por (MARTI, 1982) as funções de propagação modais, H_i , e as admitâncias características modais, $Y_{C,i}$, são ajustadas por meio de funções racionais. Na solução de (C.19a)-(C.19b) no domínio do tempo precisa-se uma formulação numérica para a integral de convolução entre funções racionais ajustadas, associadas a H_i e $Y_{C,i}$, e funções conhecidas no domínio do tempo.

Inicialmente tem-se o produto entre uma função racional e uma função $U(s)$ no domínio da frequência:

$$X(s) = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i}{s + a_i} \right) + d \right] U(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s) + dU(s), \quad (\text{C.20a})$$

$$X_i(s) = \left(\frac{b_i}{s + a_i} \right) U(s). \quad (\text{C.20b})$$

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (C.20):

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t) + du(t), \quad (\text{C.21a})$$

$$x_i(t) = \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b_i}{s + a_i} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \{ U(s) \} = (b_i e^{-a_i t}) * u(t) = b_i \int_0^{\infty} u(t - \mu) e^{-a_i \mu} d\mu. \quad (\text{C.21b})$$

Em (ZANETTA, 2003) é obtida a solução numérica de (C.21b) fazendo uma aproximação linear da função de entrada $u(t)$, obtendo como resultado:

$$x_i(t) = \alpha_i x_i(t - \Delta t) + \beta_i u(t - \Delta t) + \gamma_i u(t), \quad (\text{C.22a})$$

onde

$$\alpha_i = e^{-a_i \Delta t}, \quad (\text{C.22b})$$

$$\beta_i = \frac{b_i}{a_i} \left(-\alpha_i + \frac{1 - \alpha_i}{a_i \Delta t} \right), \quad (\text{C.22c})$$

$$\gamma_i = \frac{b_i}{a_i} \left(1 - \frac{1 - \alpha_i}{a_i \Delta t} \right). \quad (\text{C.22d})$$

O termo Δt representa o intervalo de integração. Simplificando, a solução de $x(t)$ pode-se expressar como:

$$x(t) = \alpha_Y + \beta_Y u(t - \Delta t) + \gamma_Y u(t), \quad (\text{C.23a})$$

onde α_Y é calculado a partir dos valores passados $x_i(t - \Delta t)$:

$$\gamma_Y = \sum_{i=1}^n \gamma_i + d, \quad (\text{C.23b})$$

$$\beta_Y = \sum_{i=1}^n \beta_i, \quad (\text{C.23c})$$

$$\alpha_Y = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t - \Delta t). \quad (\text{C.23d})$$

Por outro lado, o ajuste de H_i é dado pelo produto de uma função racional de fase mínima com um termo exponencial, sendo necessário resolver expressões da forma:

$$X(s) = \left[\sum_{i=1}^n \left(\frac{b_i}{s + a_i} \right) e^{-s\tau} \right] U(s) = \sum_{i=1}^n X_i(s), \quad (\text{C.24a})$$

$$X_i(s) = \left(\frac{b_i}{s + a_i} e^{-s\tau} \right) U(s). \quad (\text{C.24b})$$

Nota-se que τ é constante. Aplicando a transformada inversa de Laplace a (C.24):

$$x(t) = \sum_{i=1}^n x_i(t), \quad (\text{C.25a})$$

$$\begin{aligned}
x_i(t) &= \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{b_i}{s + a_i} \right\} * \mathcal{L}^{-1} \{ U(s) e^{-s\tau} \} = (b_i e^{-a_i t}) * u(t - \tau) \\
&= b_i \int_0^\infty u(t - \tau - \mu) e^{-a_i \mu} d\mu.
\end{aligned} \tag{C.25b}$$

De maneira análoga a (C.22), a solução numérica de (C.25b) é dada por:

$$x_i(t) = \alpha_i x_i(t - \Delta t) + \beta_i u(t - \tau - \Delta t) + \gamma_i u(t - \tau), \tag{C.26}$$

com α_i , β_i e γ_i definidas pelas expressões (C.22b)-(C.22d). A solução de $x(t)$ expressa-se como:

$$x(t) = \alpha_H + \beta_H u(t - \tau - \Delta t) + \gamma_H u(t - \tau), \tag{C.27a}$$

onde α_H é calculado a partir dos valores passados $x_i(t - \Delta t)$:

$$\gamma_H = \sum_{i=1}^n \gamma_i, \tag{C.27b}$$

$$\beta_H = \sum_{i=1}^n \beta_i, \tag{C.27c}$$

$$\alpha_H = \sum_{i=1}^n \alpha_i x_i(t - \Delta t). \tag{C.27d}$$

Nota-se que $x(t)$ em (C.27a) é calculada usando somente valores passados de u e x_i .

C.2.4. Formulação do modelo de linha

Neste item é apresentado um modelo de linha independente para cada modo, representado pelas equações (C.19).

As admitâncias características modais, $Y_{C,i}$, são ajustadas por meio de funções racionais (modelo polo-resíduo) usando o método VF (Capítulo 2), obtendo:

$$Y_{C,i} = \sum_{j=1}^n \frac{k_{i,j}}{s + \lambda_{i,j}} + Y_0. \tag{C.28}$$

As funções de propagação modais, H_i , são ajustadas por meio de um modelo polo-resíduo multiplicado por um termo exponencial:

$$H_i = \left(\sum_{j=1}^n \frac{\sigma_{i,j}}{s + \rho_{i,j}} \right) e^{-s\tau_i}. \quad (\text{C.29})$$

O termo τ_i representa o tempo de atraso da linha para o i -ésimo modo. Inicialmente é calculado o termo τ_i e posteriormente aplica-se o VF sobre $H_i e^{s\tau_i}$. Este procedimento é aplicado de maneira iterativa procurando o menor erro RMS (*Root Mean Square*) para o modelo ajustado de $H_i e^{s\tau_i}$. O método de cálculo para o modelo de H_i será apresentado no item seguinte.

Aplicando a transformada inversa de Laplace a (C.19), tem-se:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{I_{m,i}\} - \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{m,i}\} \\ = -\mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{I_{k,i}\} - \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} \\ * (\mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{k,i}\}), \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{C.30a})$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}^{-1}\{I_{k,i}\} - \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{k,i}\} \\ = -\mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{I_{m,i}\} - \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} \\ * (\mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{m,i}\}), \quad i = 0, 1, 2 \end{aligned} \quad (\text{C.30b})$$

Nota-se que é aplicada a propriedade comutativa da convolução em (C.30). A solução das convoluções anteriores é realizada usando as formulações apresentadas no item anterior. Em (C.30), as convoluções $\mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{m,i}\}$ e $\mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{k,i}\}$ precisam de valores presentes de tensão, enquanto as outras convoluções precisam de valores passados de $i_{m,i}$ e $i_{k,i}$.

De acordo com (C.27a) e (C.23a), as convoluções em (C.30) podem ser expressas como:

$$x_{1,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{m,i}\} = \alpha_{Y,1,i} + \beta_{Y,i}v_{m,i}(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}v_{m,i}(t), \quad (\text{C.31a})$$

$$x_{2,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{k,i}\} = \alpha_{Y,2,i} + \beta_{Y,i}v_{k,i}(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}v_{k,i}(t), \quad (\text{C.31b})$$

$$x_{3,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{I_{k,i}\} = \alpha_{H,3,i} + \beta_{H,i}i_{k,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}i_{k,i}(t - \tau), \quad (\text{C.31c})$$

$$x_{4,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{I_{m,i}\} = \alpha_{H,4,i} + \beta_{H,i}i_{m,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}i_{m,i}(t - \tau), \quad (\text{C.31d})$$

$$x_{5,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{k,i}\} = \alpha_{H,5,i} + \beta_{H,i}v_{k,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}v_{k,i}(t - \tau), \quad (\text{C.31e})$$

$$x_{6,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{m,i}\} = \alpha_{H,6,i} + \beta_{H,i}v_{m,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}v_{m,i}(t - \tau), \quad (\text{C.31f})$$

$$x_{7,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * (\mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{k,i}\}) = \alpha_{Y,7,i} + \beta_{Y,i}x_5(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}x_5(t), \quad (\text{C.31g})$$

$$x_{8,i}(t) = \mathcal{L}^{-1}\{Y_{C,i}\} * (\mathcal{L}^{-1}\{H_i\} * \mathcal{L}^{-1}\{V_{m,i}\}) = \alpha_{Y,8,i} + \beta_{Y,i}x_6(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}x_6(t). \quad (\text{C.31h})$$

De acordo com (C.23b)-(C.23d), $\gamma_{Y,i}$ e $\beta_{Y,i}$ são calculados com os polos e zeros de $Y_{C,i}$, enquanto $\alpha_{Y,1,i}$, $\alpha_{Y,2,i}$, $\alpha_{Y,7,i}$ e $\alpha_{Y,8,i}$ dependem valores passados de $x_{1,i}$, $x_{2,i}$, $x_{7,i}$ e $x_{8,i}$, respectivamente, e também dos polos de $Y_{C,i}$. De acordo com (C.27b)-(C.27d), $\gamma_{H,i}$ e $\beta_{H,i}$ são calculados com os polos e zeros de H_i , enquanto $\alpha_{H,3,i}$, $\alpha_{H,4,i}$, $\alpha_{H,5,i}$ e $\alpha_{H,6,i}$ dependem dos valores passados de $x_{3,i}$, $x_{4,i}$, $x_{5,i}$ e $x_{6,i}$, respectivamente, e também dos polos de H_i .

Substituindo (C.31) em (C.30), tem-se:

$$\begin{aligned} i_{m,i}(t) - [\alpha_{Y,1,i} + \beta_{Y,i}v_{m,i}(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}v_{m,i}(t)] \\ = -[\alpha_{H,3,i} + \beta_{H,i}i_{k,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}i_{k,i}(t - \tau)] \\ - [\alpha_{Y,7,i} + \beta_{Y,i}x_5(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}x_5(t)], \quad i = 0,1,2 \end{aligned} \quad (C.32a)$$

$$\begin{aligned} i_{k,i}(t) - [\alpha_{Y,2,i} + \beta_{Y,i}v_{k,i}(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}v_{k,i}(t)] \\ = -[\alpha_{H,4,i} + \beta_{H,i}i_{m,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}i_{m,i}(t - \tau)] \\ - [\alpha_{Y,8,i} + \beta_{Y,i}x_6(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}x_6(t)], \quad i = 0,1,2 \end{aligned} \quad (C.32b)$$

As equações anteriores podem ser escritas como:

$$i_{m,i}(t) = Y_{eq,i}v_{m,i}(t) - i_{mh,i}(t), \quad i = 0,1,2 \quad (C.33a)$$

$$i_{k,i}(t) = Y_{eq,i}v_{k,i}(t) - i_{kh,i}(t), \quad i = 0,1,2 \quad (C.33b)$$

onde

$$Y_{eq,i} = \gamma_{Y,i}, \quad i = 0,1,2 \quad (C.33c)$$

$$\begin{aligned} i_{mh,i}(t) = -[\alpha_{Y,1,i} + \beta_{Y,i}v_{m,i}(t - \Delta t)] \\ + [\alpha_{H,3,i} + \beta_{H,i}i_{k,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}i_{k,i}(t - \tau)] \\ + [\alpha_{Y,7,i} + \beta_{Y,i}x_5(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}x_5(t)], \quad i = 0,1,2 \end{aligned} \quad (C.33d)$$

$$\begin{aligned} i_{kh,i}(t) = -[\alpha_{Y,2,i} + \beta_{Y,i}v_{k,i}(t - \Delta t)] \\ + [\alpha_{H,4,i} + \beta_{H,i}i_{m,i}(t - \tau - \Delta t) + \gamma_{H,i}i_{m,i}(t - \tau)] \\ + [\alpha_{Y,8,i} + \beta_{Y,i}x_6(t - \Delta t) + \gamma_{Y,i}x_6(t)], \quad i = 0,1,2 \end{aligned} \quad (C.33e)$$

Nota-se que os termos $i_{mh,i}$ e $i_{kh,i}$ somente dependem de valores em tempos passados, por isto, são conhecidas como fontes de corrente históricas. No entanto, em geral são necessários valores em instantes passados de $v_{m,i}$, $v_{k,i}$, $i_{m,i}$ e $i_{k,i}$ que não foram calculados previamente, mas pode-se encontrar um valor aproximado por meio da interpolação usando valores passados em instantes próximos aos já calculados.

Agrupando todos os modos dados em (C.33a)-(C.33b), tem-se:

$$\begin{bmatrix} i_{m,0}(t) \\ i_{m,1}(t) \\ i_{m,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{eq,0} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{eq,1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{eq,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{m,0}(t) \\ v_{m,1}(t) \\ v_{m,2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{mh,0}(t) \\ i_{mh,1}(t) \\ i_{mh,2}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.34a)$$

$$\begin{bmatrix} i_{k,0}(t) \\ i_{k,1}(t) \\ i_{k,2}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Y_{eq,0} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{eq,1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{eq,2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_{k,0}(t) \\ v_{k,1}(t) \\ v_{k,2}(t) \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} i_{kh,0}(t) \\ i_{kh,1}(t) \\ i_{kh,2}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.34b)$$

Como foi assumido o uso de matrizes de transformação constantes, de (C.15) e (C.16) tem-se a seguinte relação entre tensões e correntes modais com tensões e correntes de fase no domínio do tempo:

$$\mathbf{v}(x, t) = \mathbf{T}_{VC} \bar{\mathbf{v}}(x, t) = \mathbf{T}_{IC}^{-T} \bar{\mathbf{v}}(x, t), \quad (C.35a)$$

$$\mathbf{i}(x, t) = \mathbf{T}_{IC} \bar{\mathbf{i}}(x, t), \quad (C.35b)$$

onde $\mathbf{T}_{VC}$ e $\mathbf{T}_{IC}$ são matrizes de transformação constantes para tensões e correntes, obtidas de $\mathbf{T}_V$ e $\mathbf{T}_I$, respectivamente. De acordo com (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1998a) e (MORCHED, GUSTAVSEN, & TARTIBI, 1999), é recomendável que $\mathbf{T}_{VC}$ e $\mathbf{T}_{IC}$ sejam obtidas a uma frequência elevada (por exemplo, 1 MHz), pois isto permite obter resultados mais precisos no cálculo de H_i .

Aplicando (C.35) em (C.34) para transformar as equações do domínio modal para o domínio de fase, tem-se:

$$\begin{bmatrix} i_{m,a}(t) \\ i_{m,b}(t) \\ i_{m,c}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} Y_{eq,0} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{eq,1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{eq,2} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{IC}^T \begin{bmatrix} v_{m,a}(t) \\ v_{m,b}(t) \\ v_{m,c}(t) \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} i_{mh,0}(t) \\ i_{mh,1}(t) \\ i_{mh,2}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.36a)$$

$$\begin{bmatrix} i_{k,a}(t) \\ i_{k,b}(t) \\ i_{k,c}(t) \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} Y_{eq,0} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{eq,1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{eq,2} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{IC}^T \begin{bmatrix} v_{k,a}(t) \\ v_{k,b}(t) \\ v_{k,c}(t) \end{bmatrix} - \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} i_{kh,0}(t) \\ i_{kh,1}(t) \\ i_{kh,2}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.36b)$$

As equações em (C.36) expressam-se como:

$$\mathbf{i}_m(t) = \mathbf{Y}_{eq} \mathbf{v}_m(t) - \mathbf{i}_{mh}(t), \quad (C.37a)$$

$$\mathbf{i}_k(t) = \mathbf{Y}_{eq} \mathbf{v}_k(t) - \mathbf{i}_{kh}(t), \quad (C.37b)$$

onde

$$\mathbf{i}_m(t) = \begin{bmatrix} i_{m,a}(t) \\ i_{m,b}(t) \\ i_{m,c}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.37c)$$

$$\mathbf{i}_k(t) = \begin{bmatrix} i_{k,a}(t) \\ i_{k,b}(t) \\ i_{k,c}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.37d)$$

$$\mathbf{v}_m(t) = \begin{bmatrix} v_{m,a}(t) \\ v_{m,b}(t) \\ v_{m,c}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.37e)$$

$$\mathbf{v}_k(t) = \begin{bmatrix} v_{k,a}(t) \\ v_{k,b}(t) \\ v_{k,c}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.37f)$$

$$\mathbf{i}_{mh}(t) = \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} i_{mh,0}(t) \\ i_{mh,1}(t) \\ i_{mh,2}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.37g)$$

$$\mathbf{i}_{kh}(t) = \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} i_{kh,0}(t) \\ i_{kh,1}(t) \\ i_{kh,2}(t) \end{bmatrix}, \quad (C.37h)$$

$$\mathbf{Y}_{eq} = \mathbf{T}_{IC} \begin{bmatrix} Y_{eq,0} & 0 & 0 \\ 0 & Y_{eq,1} & 0 \\ 0 & 0 & Y_{eq,2} \end{bmatrix} \mathbf{T}_{IC}^T. \quad (C.37i)$$

Na Figura C.2 mostra-se a representação da linha a partir de (C.37).

Figura C.2 – Modelo de linha no domínio de fase

Fonte: Adaptado de MARTI (1982, p.150).

C.2.5. Ajuste das funções de propagação modais

O ajuste das admitâncias características modais, $Y_{C,i}$, dadas em (C.28), é realizado pelo método VF. No entanto, para ajustar as funções de propagação modais, H_i , dadas em (C.29), são executados dois passos, no primeiro passo é estimado o valor de τ_i e no segundo passo é usado o método VF para obter um modelo polo-resíduo de $H_{mps,i} = H_i e^{s\tau_i}$. Nota-se que τ_i é

independente da frequência. A função $H_{mps,i}$ é conhecida como função de propagação de fase mínima, tendo em conta que os polos e zeros da função ajustada de $H_{mps,i}$ são reais e estão localizados no semiplano esquerdo.

O cálculo de τ_i é executado por meio da formulação proposta por (GUSTAVSEN & SEMLYEN, 1998b):

$$\tau_i = \frac{l}{vel_i(\omega)} + \frac{\varphi_{mps,i}(\omega)}{\omega}, \quad i = 0,1,2 \quad (C.38)$$

onde φ_{mps} denota o ângulo de fase de $H_{mps,i}$, $vel_i(\omega)$ é a velocidade de propagação do i -ésimo modo (ver equação (C.42b)) e l é o comprimento da linha. Em princípio, qualquer frequência ω pode ser usada para determinar τ_i , mas em (GUSTAVSEN, IRWIN, MANGELROD, BRANDT, & KENT, 1999) e recomendado avaliar (C.38) no ponto de frequência ω_k , definido como o valor de frequência onde o módulo de H_i é igual ao erro RMS especificado para o modelo ajustado de $H_{mps,i}$ (por exemplo, 0,001).

Como $H_{mps,i}$ é uma função de fase mínima, o seu ângulo de fase φ_{mps} pode ser determinado somente com o módulo de H_i , segundo o teorema de Bode apresentado em (BODE, 1945):

$$\varphi_{mps,i}(\omega_k) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d[\log|H_i|]}{du} \log\left(\coth \frac{|u|}{2}\right) du, \quad i = 0,1,2 \quad (C.39a)$$

onde

$$u = \log\left(\frac{\omega}{\omega_k}\right) \quad (C.39b)$$

Nota-se que $|H_{mps,i}| = |H_i|$. Em (GUSTAVSEN, 2017) é apresentada uma avaliação numérica de (C.39), resultado da eliminação da singularidade em (C.39) quando $\omega \rightarrow \omega_k$ e da aplicação de um esquema de discretização, obtendo como resultado a seguinte expressão que emprega $N_{\omega-1}$ amostras de frequência.

$$\varphi_{mps,i}(\omega_k) \cong \frac{\pi}{4} A_k + \frac{1}{\pi} \sum_{j=1}^{N_{\omega-1}} (A_j - A_k) B_j \log(\omega_{j+1}/\omega_j), \quad i = 0,1,2 \quad (C.40a)$$

onde

$$A_j = \frac{\log(|H_i(\omega_{j+1})|/|H_i(\omega_j)|)}{\log(\omega_{j+1}/\omega_j)} \quad (C.40b)$$

$$A_k = \frac{\log(|H_i(\omega_{k+1})|/|H_i(\omega_k)|)}{\log(\omega_{k+1}/\omega_k)} \quad (C.40c)$$

$$B_j = \log \left(\coth \left(\frac{1}{2} \left| \log \left(\frac{\omega_{j+1} + \omega_j}{2\omega_k} \right) \right| \right) \right) \quad (\text{C.40d})$$

O valor de τ_i calculado por meio de (C.38) e (C.40) oferece bons resultados para o ajuste de $H_{mps,i}$. No entanto, de acordo com (GUSTAVSEN, 2004), o valor calculado de τ_i , usando a formulação anterior, é menor do que o valor τ_i ótimo que oferece o menor erro RMS para o modelo ajustado de $H_{mps,i}$.

Para encontrar o valor ótimo de τ_i que permite obter o menor erro RMS para o modelo de $H_{mps,i}$, em (GUSTAVSEN, 2004) é usada a rotina *fminbnd* do Matlab, que encontra o valor mínimo de uma função de uma variável $f(x)$, para um determinado intervalo fixo $x_1 < x < x_2$:

$$\min_x f(x) \quad \text{sujeito a} \quad x_1 < x < x_2, \quad (\text{C.41})$$

onde x , x_1 e x_2 são escalares e $f(x)$ é uma função que retorna um escalar.

Em (C.41) a variável x representaria o valor de τ_i . Para um determinado valor de τ_i é calculada a função de fase mínima $H_{mps,i} = H_i e^{s\tau_i}$ e posteriormente usa-se o VF para obter um modelo polo-resíduo de $H_{mps,i}$. A função $f(x)$ em (C.41) representaria o erro RMS do modelo ajustado polo-resíduo de $H_{mps,i}$. A rotina *fminbnd* é baseado no método da seção áurea e da interpolação parabólica.

O valor de x_1 em (C.41) é calculado com as expressões (C.38) e (C.40), sendo τ_i avaliado na frequência ω_k , onde o módulo de H_i é igual ao erro RMS especificado para o modelo ajustado de $H_{mps,i}$. O valor de x_2 em (C.40) é calculado como:

$$x_2 = \frac{l}{vel_i(\omega_k)}, \quad i = 0,1,2 \quad (\text{C.42a})$$

onde

$$vel_i(\omega_k) = \frac{\omega_k}{\text{Im}\{\sqrt{D_i(\omega_k)}\}}, \quad i = 0,1,2 \quad (\text{C.42b})$$

D_i é o i -ésimo autovalor de $\mathbf{YZ}$:

$$\begin{bmatrix} D_0 & 0 & 0 \\ 0 & D_1 & 0 \\ 0 & 0 & D_2 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_I(\omega_k) \mathbf{Y}(\omega_k) \mathbf{Z}(\omega_k) \mathbf{T}_I^{-1}(\omega_k) \quad (\text{C.42c})$$