ALVARO BATISTA DIETRICH

**UM ESTUDO DE CORRENTES INDUZIDAS EM MEIOS
MACIÇOS FERROMAGNÉTICOS – APLICAÇÃO NO
PROJETO DE FREIOS DE CORRENTES PARASITAS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

São Paulo
2000

ALVARO BATISTA DIETRICH

**UM ESTUDO DE CORRENTES INDUZIDAS EM MEIOS
MACIÇOS FERROMAGNÉTICOS – APLICAÇÃO NO
PROJETO DE FREIOS DE CORRENTES PARASITAS**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para a obtenção do título de
Mestre em Engenharia.

Área de concentração:
Sistemas de Potência

Orientador:
Prof. Dr. Ivan Eduardo Chabu

São Paulo
2000

Dietrich, Alvaro Batista

Um estudo de correntes induzidas em meios maciços ferromagnéticos – aplicação no projeto de freios de correntes parasitas. São Paulo, 2000.

74p.

Dissertação (Mestrado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1. Máquinas Elétricas 2. Freios de correntes parasitas
3. Elementos Finitos – Aplicações I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas II. t

**Aos meus pais, Otto e Marlene
e à minha esposa Claudia.**

AGRADECIMENTOS

Ao Prof. Dr. Ivan Eduardo Chabu pelo estímulo e orientação.

Ao Prof. Dr. José Roberto Cardoso pelo apoio e constante incentivo.

À Equacional Elétrica e Mecânica Ltda. pelos dados de projeto e ensaio dos freios estudados.

Aos colegas do LMAG, pelo incentivo, colaboração e convívio amigável.

À CAPES – Fundação Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior pela bolsa de estudos concedida.

À minha esposa Claudia pela paciência e compreensão.

SUMÁRIO

1	INTRODUÇÃO	1
2	ESTUDO ANALÍTICO DOS FREIOS POR CORRENTES PARASITAS	5
2.1	Introdução	5
2.1.1	Histórico	6
2.2	Equação de difusão de correntes em meio linear	7
2.3	Hipóteses simplificadoras	8
2.4	Sistema de coordenadas adotado	9
2.5	Dedução da expressão que relaciona torque e velocidade com o fluxo por pólo	10
2.5.1	Introdução	10
2.5.2	Cálculo da distribuição de densidade de correntes induzidas na região ativa do freio	11
2.5.3	Cálculo do campo magnético presente na região ativa devido à distribuição das correntes induzidas	15
2.5.4	Cálculo da indução no entreferro	18
2.5.5	Cálculo do fluxo por pólo	18
2.5.6	Cálculo da potência dissipada pelas correntes induzidas por unidade de área da região ativa	19
2.5.7	Introdução da não linearidade do material ferromagnético da região ativa.....	20
2.5.8	Expressão geral para ϕ_{ac}	23
2.6	Estudo da reação de armadura	25
2.6.1	Introdução	25
2.6.2	Integração da distribuição de $\vec{J}_z$ de correntes	26
2.7	Descrição da metodologia de cálculo proposta	28
2.7.1	Cálculo da expressão da distribuição de induções B_{estat}	29
2.7.2	Cálculo das curvas características do freio	30

3	ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS E PROTÓTIPO UTILIZADO ...	34
3.1	Introdução	34
3.2	Protótipo utilizado	34
3.3	Equipamento e ferramental utilizado nas simulações por elementos finitos	35
3.3.1	Computador utilizado	35
3.3.2	Software de Elementos Finitos utilizado	36
4	RESULTADOS E DISCUSSÕES	48
4.1	Introdução	48
4.2	Simulação por elementos finitos	48
4.2.2	Obtenção das curvas de torque	49
4.2.3	Exploração de alguns resultados através de mapas de cores	52
4.3	Exploração da distribuição de induções ao longo do entreferro	58
4.4	Resultados obtidos com a aplicação da metodologia de cálculo proposta	61
4.4.1	Cálculo de k_{ϕ}	61
4.4.2	Cálculo de k_r	63
4.4.3	Cálculo das curvas de torque	66
4.5	Aplicação a um segundo protótipo	69
5	CONCLUSÕES	73

RESUMO

Este trabalho propõe uma metodologia simplificada de análise de freios de correntes parasitas usando uma abordagem mista que integra cálculo analítico e simulações usando o Método dos Elementos Finitos (MEF).

O cálculo analítico é desenvolvido a partir dos trabalhos de Davies [3, 4] e fornece as expressões gerais para o fluxo por pólo e para a reação de armadura, em função de parâmetros geométricos, velocidade de rotação e torque desenvolvido.

Também é implementada a análise do freio usando o MEF visando dois objetivos:

- estudo e entendimento da indução de correntes em meios maciços ferromagnéticos que ocorre no freio, o que é facilitado pela visualização de linhas de campo e mapas de cores das grandezas de interesse;
- obtenção de subsídios necessários para simplificar a aplicação das equações analíticas.

Com as equações e os resultados das simulações obteve-se um método que permite calcular as curvas de torque do freio com precisão comparável à do MEF e com vantagens no que tange à rapidez de solução e flexibilidade de utilização.

ABSTRACT

This work proposes a simplified methodology to design eddy currents brakes using a mixed approach that integrates analytic calculation and numerical simulations by Finite Element Method (FEM).

The analytical calculation is developed from the work of Davies [3, 4] and gives the general expressions for the flux per pole and armature-reaction, in function of geometric parameters, speed and developed torque.

The analysis of the brake is also carried out by using and it aims:

- the study and the understanding of eddy currents in solid ferromagnetic material, aided by the visualization of flux lines and color maps of the values of interest;
- the obtention of necessary data to simplify the application of analytical equations.

The equations and the results obtained by simulations were used to derive a method to calculate the torque curves of the brake. The accuracy of the method is close to the FEM's and have advantages concerning the computing time and ease of application.

LISTA DE SÍMBOLOS

a, b, c : Constantes auxiliares;

A_1, A_2, k : Constantes;

$\vec{B}$: Vetor densidade de fluxo magnético ou indução magnética [T];

B_{ac} : Indução presente no entreferro do freio em carga [T];

B_r : Indução equivalente provocada pela reação de armadura [T];

B_{estat} : Indução produzida pela excitação a velocidade nula [T];

D : Diâmetro da região ativa do freio no entreferro [m];

$\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$: Versores das direções tangente, radial e axial, respectivamente, em um dado ponto da região ativa;

$\vec{E}$: Vetor campo elétrico [V/m];

E_x, E_y, E_z : Componentes do vetor campo elétrico $\vec{E}$ [V/m];

f : Frequência das correntes presentes na região ativa [Hz];

F_r : Força magnetomotriz de reação de armadura por pólo [A.esp];

$\vec{H}$: Vetor campo magnético [A/m];

H_x, H_y, H_z : Componentes do vetor campo magnético $\vec{H}$ [A/m];

I_{exc} : Corrente de excitação aplicada ao freio [A];

$\vec{J}$: Vetor densidade de corrente induzida [A/m²];

$J(y)$: Função a ser calculada que descreve o decaimento das correntes induzidas conforme nos aprofundamos na região ativa;

J_x, J_y, J_z : Componentes do vetor densidade de corrente induzida [A/m²];

$J_{z_{\max}}$: Valor máximo do módulo de J_z na superfície da região ativa, para $y = 0$;

k_ϕ : Constante de ajuste da expressão de ϕ_{ac} ;

k_r : Constante de ajuste da expressão de F_r ;

L : Comprimento ativo dos pólos do freio [m];

M : Constante calculada a partir dos parâmetros geométricos e de materiais do freio e que permite descrevê-lo nas equações;

m : Constante;

n : Rotação do freio [rps];

p : Número de pares de pólos;

$\vec{P}$: Vetor auxiliar;

$\mathfrak{R}$: Relutância [A.esp/Wb];

R : Módulo de um número complexo representado na forma polar;

$S_{\text{pólo}}$: Área do pólo do freio [m²];

t : Tempo [s];

T : Torque total desenvolvido pelo freio a uma dada rotação [N·m];

$\vec{V}$: Velocidade [m/s];

W : Densidade de potência [W/m²];

α : Inverso do valor da profundidade de penetração das correntes induzidas δ [m⁻¹];

δ : Profundidade de penetração das correntes induzidas na parte ativa do freio [m];

λ : Comprimento de onda das induções na região ativa, de valor igual ao comprimento pólo a pólo do freio [m];

μ : Permeabilidade magnética relativa;

μ_0 : Permeabilidade magnética do vácuo [H/m];

ρ : Resistividade elétrica [Ohm.m];

ϕ, θ : Ângulo, em graus;

ϕ_{ac} : Fluxo resultante por pólo do freio em condição de carga [Wb];

ω : Frequência angular das correntes induzidas na região ativa do freio [rd/s];

Ω : Rotação do freio [rpm];

1 INTRODUÇÃO

O estudo do fenômeno de indução de correntes em meios maciços é de grande interesse em engenharia elétrica, sendo aplicado em:

- Cálculo de perdas em chapas de transformadores e de máquinas elétricas;
- Fornos de indução;
- Avaliação de efeito pelicular;
- Guias de ondas;
- Motores de indução com rotor maciço;
- Motores lineares de indução;
- Freios de correntes parasitas, entre outros.

O cálculo analítico exato das correntes induzidas só é possível para meios isotrópicos e lineares [1], criando-se complicações adicionais quando se efetua o cálculo em meios não lineares, como é o caso de materiais ferromagnéticos (ρ linear e constante a uma dada temperatura mas com μ dependente de $\vec{H}$). Neste caso é impossível uma solução analítica exata [2] sendo então necessário o uso de ferramentas computacionais para o cálculo numérico aproximado.

No presente trabalho pretende-se aplicar o uso de simulações por elementos finitos com a intenção de criar subsídios para uma análise simplificada para freios de correntes parasitas heteropolares.

Freios de Foucault ou de correntes parasitas são dispositivos eletromecânicos que convertem energia mecânica de movimento (linear ou rotativo) em calor. Seu princípio de funcionamento baseia-se no seguinte fenômeno: Ao se submeter um meio

condutor maciço a uma variação de campo magnético – um degrau por exemplo – ocorre indução de correntes nesse meio que se opõem à penetração do campo, em acordo com a Lei de Lenz. A interação entre a corrente induzida e o campo magnético que a gerou provoca o aparecimento de uma força de repulsão entre ambos. Se esse meio tiver resistividade nula, a força não decairá com o tempo (o campo não penetra no material) e o sistema será conservativo. Caso a resistividade seja não nula – como ocorre na prática – haverá dissipação de potência no meio condutor devido às perdas Joule ($\rho \cdot J^2$), e o sistema será dissipativo – a força desaparecerá com o tempo e o campo penetrará no material, atingindo nova posição de equilíbrio.

O fenômeno pode ocorrer das seguintes maneiras:

1. Se a variação do campo for provocada por uma bobina circulada por corrente como indicado na Figura 1.1, haverá aparecimento de força de repulsão entre o meio e a bobina que decairá com o tempo, caso o material possua resistividade não nula. Haverá dissipação de energia no meio, energia essa que é fornecida pela fonte de corrente que alimentou a bobina.

Fig. 1.1 Bobina induzindo correntes em um meio condutor.

2. Caso a variação de campo seja provocada pela movimentação do meio em direção a uma região com campo, como indicado na Figura 1.2, ocorrerá o mesmo fenômeno que para o caso da bobina, mas a energia dissipada por perda Joule no material será fornecida pela força que realizou o movimento.

Fig. 1.2 Meio condutor sendo movido em direção a uma região com campo magnético B .

O funcionamento dos freios por correntes parasitas faz uso do segundo tipo de fenômeno: o caso do meio condutor se movimentando em campo magnético. Basicamente monta-se o dispositivo de forma que a força (ou torque) que se deseja frear provoque o movimento relativo entre o meio condutor maciço (que daqui em diante será chamado de região ativa) e uma peça polar. Essa peça polar, quando excitada por corrente contínua, deverá gerar no espaço uma distribuição de campo tal que um ponto

da região ativa quando em movimento seja submetido a campo variável no tempo. Um esquema simples disso pode ser visto na Figura 1.3.

Fig. 1.3 Implementação esquemática de freios por correntes parasitas.

Deve ser observado que para o dispositivo ser de aplicação prática é necessário que se consiga o máximo possível de torque (ou força) desenvolvido com um mínimo de potência de excitação, além de robustez e dimensões reduzidas, ou seja, sua construção deve ser tal que permita a maior eficiência possível na conversão de energia mecânica em calor.

2 ESTUDO ANALÍTICO DOS FREIOS POR CORRENTES PARASITAS

2.1 Introdução

Ao se iniciar o projeto de um freio de correntes parasitas normalmente têm-se em mãos a potência e as faixas de torque e rotação em que o dispositivo irá operar, além de algumas limitações dimensionais e de custos que o mesmo deve respeitar.

Para se desenvolver um projeto seguro e econômico é necessário prever com precisão satisfatória o comportamento do dispositivo e se o mesmo irá atender aos requisitos exigidos, sendo dados as dimensões, materiais utilizados e alguns parâmetros.

O equacionamento que será desenvolvido neste capítulo baseia-se no trabalho de Davies [3, 4] e se propõe a calcular a excitação requerida em função dos dados do freio a uma determinada condição de operação (torque (T) a determinada velocidade (n)). Com os dados de diversos pontos (T, n) de operação consegue-se estimar suas curvas de operação.

As relações básicas necessárias para a descrição do comportamento do freio de correntes parasitas são as seguintes:

- Relação entre o torque desenvolvido a determinada rotação e o fluxo por pólo (fluxo efetivo, já considerando a composição entre a distribuição estática de induções gerada pela excitação e a reação de armadura). A esse fluxo por pólo será dado o nome de ϕ_{ac} e o mesmo será considerado senoidalmente distribuído no espaço (entreferro do dispositivo).
- Estimativa da reação de armadura desenvolvida a determinados torque e

velocidade. O valor da força magnetomotriz (f.m.m.) de reação de armadura receberá o nome de F_r e será considerada também senoidalmente distribuída no espaço, além de respeitar um ângulo de defasagem com relação a ϕ_{ac} . O fluxo por pólo ϕ_{ac} resulta da composição entre a distribuição estática de induções e a reação de armadura.

A determinação dessas duas relações será feita a partir da equação de difusão de corrente, cuja dedução se encontra na próxima secção.

2.1.1 Histórico

Um breve histórico do desenvolvimento da análise de freios de correntes parasitas é descrito em [3] e será resumido a seguir:

A primeira tentativa de análise de freios de correntes parasitas foi realizada em 1906 por Rudenberg. Essa análise era baseada na solução da equação da difusão mas pecava na descrição do comportamento do freio por considerar a permeabilidade do ferro como sendo constante. Grun também segue o mesmo caminho em 1959.

Rosenberg, em 1923, conseguiu bons resultados na descrição do funcionamento do freio mas, por considerar o fluxo por pólo constante, só descrevia a contento o comportamento do freio para rotações e excitações altas.

A primeira análise mais apurada do tema foi realizada por Gibbs, em 1946, que contemplava a variação da permeabilidade no ferro (não linearidade).

Os trabalhos de Davies [3,4] partem da análise proposta por Gibbs, tendo como

diferencial a aproximação usada para descrever o comportamento da não linearidade do ferro que consiste na substituição da expressão $(\mu\mu_0)^{1/4} \mathbf{H} = c \cdot \mathbf{H}^m$ nas equações deduzidas a partir da equação da difusão para meios lineares.

2.2 Equação de difusão de corrente em meio linear

A equação (2.1) e as relações (2.2) permitem que se descreva o fenômeno de correntes induzidas em meios condutores.

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (2.1)$$

$$\begin{cases} \vec{E} = \rho \vec{J} \\ \vec{B} = \mu\mu_0 \vec{H} \end{cases} \quad (2.2)$$

Substituindo (2.2) em (2.1), obtemos:

$$\nabla \times (\rho \vec{J}) = -\frac{\partial}{\partial t} (\mu\mu_0 \vec{H})$$

Considerando-se ρ constante, resulta:

$$\nabla \times \vec{J} = -\frac{\mu\mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \quad (2.3)$$

Aplicando o rotacional a ambos os membros da equação (2.3), tem-se:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{J}) = \nabla \times \left(\frac{-\mu\mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (2.4)$$

É sabido que $\nabla \times (\nabla \times \vec{P}) = \nabla(\nabla \cdot \vec{P}) - \nabla^2 \vec{P}$, sendo $\vec{P}$ um vetor qualquer.

Assim sendo:

$$\nabla(\nabla \cdot \vec{J}) - \nabla^2 \vec{J} = \nabla \times \left(\frac{-\mu\mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right) \quad (2.5)$$

Substituindo na equação (2.5) o resultado da equação da continuidade de correntes, $\nabla \cdot \vec{J} = 0$ e considerando-se μ independente de $\vec{H}$, obtemos:

$$\nabla^2 \vec{J} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H} \quad (2.6)$$

Como $\nabla \times \vec{H} = \vec{J}$ obtemos finalmente:

$$\nabla^2 \vec{J} = \frac{\mu \cdot \mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{J} \quad (2.7)$$

A equação (2.7) é a equação de difusão de correntes em meios lineares e a partir da solução adequada dessa equação serão obtidas as expressões para o fluxo por pólo ϕ_{ac} e para a f.m.m. de reação de armadura F_r .

2.3 Hipóteses simplificadoras

Para o desenvolvimento do equacionamento serão assumidas as seguintes simplificações:

- será considerado um freio rotativo com a região ativa (no caso o rotor) externa à peça polar, como indicado na Figura 2.1;
- a variação do vetor densidade de corrente $\vec{J}$ é senoidal em cada ponto da região ativa do freio;
- as correntes induzidas na região ativa circulam apenas na direção axial – as correntes de fechamento circulam por um caminho de resistência

considerada nula e não são computadas no cálculo do torque resultante;

- a região ativa será considerada como sendo um bloco semi-infinito de ferro. Na prática a espessura dessa deverá apenas ser maior que a profundidade de penetração das correntes nela induzidas;
- para a dedução das equações que descrevem o problema, será considerado inicialmente μ constante. Em seguida será introduzida na expressão derivada da equação linear de difusão de correntes uma função para aproximar o comportamento da saturação do material ferromagnético usado na região ativa. A aproximação utilizada será do tipo $B = a \cdot H^b$ a qual será discutida mais tarde.

Fig. 2.1 Esquema do freio considerado no equacionamento.

2.4 Sistema de coordenadas adotado:

Embora o dispositivo apresente simetria cilíndrica, será usado um sistema

cartesiano de coordenadas ao invés de sistema polar, sendo $\vec{e}_x, \vec{e}_y$ e $\vec{e}_z$ os respectivos versores das direções tangente, radial e axial à região ativa, como mostra a Figura 2.2.

Fig. 2.2 Sistema de coordenadas adotado no equacionamento do problema.

2.5 Dedução da expressão que relaciona torque e velocidade com o fluxo por pólo

2.5.1 Introdução

O objetivo desta dedução é encontrar uma expressão que relacione entre si fluxo por pólo (ϕ_{ac}), torque (T) e rotação (n) em um determinado ponto de operação, e uma expressão que estime a reação de armadura desenvolvida para esse mesmo ponto de operação.

Para tanto serão calculadas a partir da equação linear de difusão de corrente:

- a distribuição da densidade de corrente ($\vec{J}$) induzida na região ativa e o campo magnético $\vec{H}$ gerado por essa distribuição;
- fluxo por pólo no entreferro (ϕ_{ac}) que é necessário para produzir $\vec{J}$;

- torque de reação produzido, que é calculado indiretamente através das perdas elétricas na região ativa a uma dada rotação;
- finalmente utiliza-se uma função para aproximação do comportamento do material ferromagnético obtendo-se uma expressão que relaciona o fluxo por pólo ϕ_{ac} com o torque desenvolvido a determinada rotação.

2.5.2 Cálculo da distribuição da densidade de corrente induzida na região ativa

Por hipótese existe somente distribuição axial de correntes (na direção de $\vec{e}_z$), já que estamos desprezando as correntes de fechamento. Assim sendo, tem-se:

$$\mathbf{J}_x = \mathbf{J}_y = 0 \Rightarrow \vec{\mathbf{J}} = J_z \vec{e}_z \quad (2.8)$$

Desprezando-se os efeitos de borda, pode-se considerar que J_z permanece constante ao longo da direção $\vec{e}_z$, portanto:

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \vec{\mathbf{J}} = 0 \quad (2.9)$$

Substituindo-se as equações (2.8) e (2.9) na equação (2.7) resulta:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \mathbf{J}_z + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \mathbf{J}_z = \frac{\mu \cdot \mu_0}{\rho} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}_z \quad (2.10)$$

Resolvendo-se a equação (2.10), obtém-se uma solução do tipo:

$$\mathbf{J}_z = J(y) \cdot \cos\left(\omega \cdot t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right) = \text{Re}\left[J(y) \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}\right] \quad (2.11)$$

Na equação de onda (2.11) $\text{Re}[\]$ é o operador “parte real de”, $J(y)$ é uma função a ser encontrada a partir das condições de contorno e λ é o comprimento de onda

das induções na região ativa (arco entre um par de pólos).

Substituindo a (2.11) em (2.10) obtém-se:

$$-\frac{4\pi^2}{\lambda^2} J(y) \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)} + \frac{d^2}{dy^2} J(y) \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)} = \frac{\mu\mu_0 j\omega}{\rho} \cdot J(y) \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)}$$

ou:

$$\frac{d^2}{dy^2} J(y) - J(y) \cdot \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + \frac{\mu\mu_0}{\rho} \cdot j\omega \right) = 0 \quad (2.12)$$

Seja

$$\alpha^2 = \frac{\mu\mu_0 \omega}{2\rho} \quad (2.13)$$

onde α^{-1} é a profundidade de penetração das correntes induzidas. Substituindo-se a (2.13) em (2.12) resulta:

$$\frac{d^2}{dy^2} J(y) - \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j2\alpha^2 \right) J(y) = 0 \quad (2.14)$$

Fazendo-se

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j2\alpha^2 \quad (2.15)$$

obtém-se:

$$\frac{d^2}{dy^2} J(y) - k^2 \cdot J(y) = 0 \quad (2.16)$$

A forma da solução de (2.16) é:

$$J(y) = A_1 e^{ky} + A_2 e^{-ky} \quad (2.17)$$

Sabe-se que o módulo do valor de $\mathbf{J}_z$ decai exponencialmente conforme nos aprofundamos no material (a cada distância $\delta = \alpha^{-1}$ o módulo se reduz a $\frac{1}{e}$ do valor original). Desse modo, o módulo máximo de $\mathbf{J}_z$ ocorre na superfície da região ativa e

tende a zero quando a profundidade tende a infinito.

Portanto, para a solução adequada de (2.17), devem ser impostas as seguintes condições de contorno:

- Para $y \rightarrow \infty$ tem-se que $J_z \rightarrow 0 \Rightarrow J(y) \rightarrow 0 \therefore A_1 = 0$
- Para $y = 0$ tem-se que $J_z = J_{z_{\max}} \Rightarrow J(y) \rightarrow J_{z_{\max}} \therefore A_2 = J_{z_{\max}}$

A solução requerida da equação (2.17) fica então

$$J(y) = J_{z_{\max}} e^{-ky} \quad (2.18)$$

Substituindo a equação (2.18) em (2.11) obtém-se

$$J_z = \text{Re} \left[J_{z_{\max}} e^{-ky} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)} \right] \quad (2.19)$$

onde k é dado pela expressão (2.15).

Consideremos a representação polar do número complexo k^2 dada por

$$k^2 = \frac{4\pi^2}{\lambda^2} + j2\alpha^2 = R^2 e^{j2\phi}$$

Os valores de R e ϕ da expressão anterior são dados por:

$$\left\{ \begin{array}{l} R = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right)^2 + (2\alpha^2)^2} \\ 2\phi = \arctan\left(\frac{2\alpha^2}{4\pi^2/\lambda^2}\right) \end{array} \right. \quad (2.20)$$

Substituindo-se $k = R \cdot e^{j\phi} = R \cos \phi + jR \sin \phi$ na equação (2.19) tem-se:

$$\begin{aligned}
J_z &= \text{Re} \left[J_{z_{\max}} e^{-R \cdot e^{j\phi} \cdot y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)} \right] \\
J_z &= \text{Re} \left[J_{z_{\max}} e^{(-R \cos \phi - jR \sin \phi) \cdot y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)} \right] \\
J_z &= \text{Re} \left[J_{z_{\max}} e^{-R \cos \phi \cdot y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - R \sin \phi \cdot y \right)} \right]
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Sejam

$$\begin{aligned}
\beta &= R \cos \phi \\
\gamma &= R \sin \phi
\end{aligned} \tag{2.22}$$

Substituindo (2.22) em (2.21) obtém-se:

$$J_z = \text{Re} \left[J_{z_{\max}} e^{-\beta y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \gamma y \right)} \right] \tag{2.23}$$

Se considerarmos a condição

$$\sqrt{2}\alpha \gg \frac{2\pi}{\lambda} \tag{2.24}$$

que pode ser traduzida como a profundidade de penetração das correntes induzidas ser muito menor que o comprimento de onda das induções presentes na carcaça, sendo o comprimento de onda λ , no caso do freio heteropolar, o arco pólo a pólo, teremos:

$$R \rightarrow \sqrt{2}\alpha$$

$$\phi \rightarrow \frac{\pi}{4}$$

$$\beta \rightarrow \alpha$$

$$\gamma \rightarrow \alpha$$

Assim sendo, a expressão (2.23) fica:

$$\mathbf{J}_z = \text{Re} \left[\mathbf{J}_{z_{\max}} e^{-\alpha \cdot y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha \cdot y \right)} \right] \quad (2.25)$$

Ou pode-se escrever a (2.25) na forma

$$\mathbf{J}_z = \mathbf{J}_{z_{\max}} e^{-\alpha y} \cdot \cos \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha y \right) \quad (2.26)$$

A equação (2.26) mostra que as correntes induzidas em cada camada $y = cte$ têm distribuição senoidal tanto no tempo quanto ao longo da direção periférica $\vec{e}_x$. Pode-se perceber também que há variação de fase das correntes induzidas entre camadas, conforme nos aprofundamos na região ativa, além de decaimento exponencial em seu módulo.

2.5.3 Cálculo do campo magnético presente na região ativa devido à distribuição das correntes induzidas

Tendo-se a expressão de $\mathbf{J}_z$ em mãos pode-se calcular a distribuição de $\vec{H}$ presente, utilizando-se das equações (2.27) e (2.28).

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial}{\partial t} \vec{B} = -\mu\mu_0 \cdot \frac{\partial}{\partial t} \vec{H} \quad (2.27)$$

$$\vec{E} = \rho \cdot \vec{J} \quad (2.28)$$

Por hipótese tem-se que $\vec{J}$ tem componente na direção $\vec{e}_z$. Logo $\vec{E} = \rho \mathbf{J}_z \vec{e}_z$ e a expressão do rotacional de $\vec{E}$ fica sendo:

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial}{\partial y} E_z \vec{e}_x - \frac{\partial}{\partial x} E_z \vec{e}_y \quad (2.29)$$

Substituindo-se (2.29) em (2.27) resulta:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_z \vec{e}_x - \frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_z \vec{e}_y = -\mu\mu_0 \left(\frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_x \vec{e}_x - \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{H}_y \vec{e}_y \right) \quad (2.30)$$

Considerando-se regime permanente senoidal, pode-se substituir $\frac{\partial}{\partial t}$ por $j\omega$ em

(2.30) obtendo-se, nas direções $\vec{e}_x$ e $\vec{e}_y$ respectivamente:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_z = -\mu\mu_0 j\omega \mathbf{H}_x \quad (2.31)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_z = -\mu\mu_0 j\omega \mathbf{H}_y \quad (2.32)$$

De (2.28) tem-se:

$$\mathbf{E}_z = \rho \mathbf{J}_z = \rho \mathbf{J}_{z_{\max}} e^{-\alpha y} \cdot e^{j \cdot \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha y \right)} \quad (2.33)$$

Derivando a expressão (2.33) com relação à variável y , obtém-se:

$$\frac{\partial}{\partial y} \mathbf{E}_z = -\rho \mathbf{J}_{z_{\max}} \cdot (\alpha + j\alpha) \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{j \cdot \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha y \right)} = \rho \cdot (\alpha + j\alpha) \cdot \mathbf{J}_z \quad (2.34)$$

Substituindo-se a (2.34) em (2.31), obtém-se:

$$\begin{aligned} -\rho \cdot (\alpha + j\alpha) \cdot \mathbf{J}_z &= -\mu\mu_0 \omega \cdot \mathbf{H}_x \\ \mathbf{H}_x &= \frac{\rho \cdot (\alpha + j\alpha)}{\mu\mu_0 \omega} \cdot \mathbf{J}_z = \frac{\alpha(1+j)}{2\alpha^2} \cdot \mathbf{J}_z \end{aligned}$$

Logo

$$\mathbf{H}_x = \mathbf{J}_z \cdot \frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \angle 45^\circ \quad (2.35)$$

Derivando-se a (2.33) em relação a x , obtém-se

$$\frac{\partial}{\partial x} \mathbf{E}_z = -\rho \mathbf{J}_{z_{\max}} j \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot e^{-\alpha y} \cdot e^{j \cdot \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x - \alpha y \right)} = -j \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \rho \mathbf{J}_z \quad (2.36)$$

Substituindo-se (2.36) em (2.32), resulta

$$\begin{aligned}
 -j \cdot \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \rho J_z &= -\mu\mu_0 j\omega H_y \\
 H_y &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\rho}{\mu\mu_0\omega} \cdot J_z \\
 H_y &= \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{1}{2\alpha^2} \cdot J_z \\
 H_y &= \frac{\pi}{\lambda\alpha^2} \cdot J_z
 \end{aligned} \tag{2.37}$$

2.5.3.1 Comparação entre H_x e H_y

Seja a expressão (2.24):

$$\sqrt{2}\alpha \gg \frac{2\pi}{\lambda}$$

Multiplicando-se ambos os membros dessa expressão por $\frac{J_z}{2\alpha^2}$ obtém-se:

$$\frac{J_z}{2\alpha^2} \cdot \sqrt{2}\alpha \gg \frac{J_z}{2\alpha^2} \cdot \frac{2\pi}{\lambda}$$

Que resulta em:

$$\frac{1}{\sqrt{2}\alpha} \cdot J_z \gg \frac{\pi}{\lambda\alpha^2} \cdot J_z$$

que nada mais é que uma comparação entre a (2.35) e a (2.37). Portanto,

$$|H_x| \gg |H_y|$$

Assim sendo, pode-se considerar que a distribuição de $\vec{H}$ provocada por $\vec{J}_z$ é

dada por

$$\vec{H} = \frac{J_z \angle 45^\circ}{\sqrt{2}\alpha} \vec{e}_x \quad (2.38)$$

2.5.4 Cálculo da indução no entreferro

O padrão de J_z estabelecido na região ativa se deve à distribuição de induções presente no entreferro. Para se calcular o valor de indução necessária para se estabelecer tal padrão, calcula-se B_y a partir de H_y como indicado na equação (2.39).

$$B_y = \mu\mu_0 H_y \quad (2.39)$$

Substituindo-se a (2.37) em (2.39) resulta

$$B_y = -\mu\mu_0 \frac{\pi}{\lambda\alpha^2} J_z = \frac{-\pi}{\lambda} \cdot \frac{2\rho}{\omega} J_z \quad (2.40)$$

No entreferro ($y = 0$) tem-se:

$$J_{z(y=0)} = J_{z_{\max}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right)$$

$$B_{y(y=0)} = \frac{-2\pi\rho}{\lambda\omega} J_{z_{\max}} \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} x\right) \quad (2.41)$$

Calculando-se o valor médio de meio ciclo do fluxo no entreferro, resulta a (2.42):

$$B_y = \frac{2}{\pi} \left(\frac{2\rho\pi}{\lambda\omega} J_{z_{\max}} \right) = \frac{4\rho}{\lambda\omega} J_{z_{\max}} \quad (2.42)$$

2.5.5 Cálculo do fluxo por pólo

Obtém-se o fluxo por pólo multiplicando B_y pela área do pólo:

$$\begin{aligned}\phi_{ac} &= B_y \cdot S_{polo} = \frac{4\rho}{\lambda\omega} J_{z_{\max}} \frac{L\lambda}{2} \\ \phi_{ac} &= \frac{2\rho L}{\omega} J_{z_{\max}} \text{ [Wb]},\end{aligned}\tag{2.43}$$

onde a largura do pólo é $\frac{\lambda}{2}$ e seu comprimento ativo é L .

2.5.6 Cálculo da potência dissipada pelas correntes induzidas por unidade de área da região ativa

O torque desenvolvido a uma determinada rotação implica numa potência mecânica ($P \propto T \cdot n$) que, desprezando-se os atritos, é igual à potência elétrica dissipada na parte ativa do dispositivo devido às correntes nela induzidas. O fluxo por pólo necessário para determinado ponto de operação será então calculado em função da densidade de perdas elétricas, designada por W , que é a potência por perdas Joule dissipada por unidade de área dessa parte ativa, em W/m^2 .

Para se obter W efetua-se a integração de ρJ^2 no volume da região ativa como indicado na (2.44)

$$W = \iiint \rho J_z^2 dt dx dy = \iiint \rho J_{z_{\max}}^2 e^{-2\alpha y} \cos^2\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} - \alpha y\right) dy d[f(t, x)] \tag{2.44}$$

O valor médio de $\cos^2$ é $\frac{1}{2}$ já que αy muda apenas a fase e não o módulo.

Assim

$$W = \frac{\rho J_{z_{\max}}^2}{2} \int_0^{\infty} e^{-2\alpha y} dy$$

$$W = \frac{\rho J_{z_{\max}}^2}{4\alpha} \quad (2.45)$$

Tem-se que

$$H_{\max} = \frac{J_{z_{\max}}}{\alpha\sqrt{2}}$$

$$J_{z_{\max}} = \alpha\sqrt{2}H_{\max} \quad (2.46)$$

Substituindo a (2.46) em (2.45) obtém-se:

$$W = \frac{\rho\alpha^2 2H_{\max}^2}{4\alpha} \Rightarrow W = \frac{\rho\alpha}{2} H_{\max}^2$$

Com alguma manipulação algébrica, obtemos:

$$\left. \begin{aligned} 4W^2 &= \rho^2 \alpha^2 H_{\max}^4 \\ \alpha^2 &= \frac{\mu\mu_0\omega}{2\rho} \end{aligned} \right\} \Rightarrow 4W^2 = \frac{\rho^2 \mu\mu_0\omega}{2\rho} H_{\max}^4$$

$$\therefore (\mu\mu_0)^{\frac{1}{4}} H_{\max} = 4\sqrt{\frac{8W^2}{\rho\omega}} \quad (2.47)$$

$$\left. \begin{aligned} \phi_{ac} &= \frac{2\rho L}{\omega} J_{z_{\max}} = \frac{2\sqrt{2}\alpha\rho L}{\omega} H_{\max} \\ \alpha\rho &= \frac{2W}{H_{\max}^2} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \phi_{ac} = \frac{2\sqrt{2} \cdot 2WL}{\omega H_{\max}^2} H_{\max}$$

$$\therefore \phi_{ac} = 4\sqrt{2} \frac{WL}{\omega H_{\max}^2} \quad (2.48)$$

Como todas as grandezas relacionadas são conhecidas, o valor do fluxo por pólo necessário para produzir determinada potência de perdas pode então ser calculado.

2.5.7 Introdução da não linearidade do material ferromagnético da região ativa

Toda a dedução realizada até o momento foi feita a partir da equação (2.7), equação de difusão de correntes em meio linear, o que não condiz com a realidade já que o material ferromagnético utilizado na região ativa apresenta saturação. Esse problema será contornado utilizando-se na equação linear uma função que descreve o comportamento desse material.

Uma aproximação que pode ser utilizada para a aproximação da curva de saturação em materiais ferromagnéticos é a aproximação exponencial:

$$\mathbf{B} = a \cdot \mathbf{H}^b \quad (2.49)$$

Da equação (2.47) observa-se que seria conveniente a função relacionar $(\mu\mu_0)^{1/4} \mathbf{H}$ e $\mathbf{H}$ com a finalidade de eliminar a dependência da permeabilidade do material. Manipulando-se a expressão (2.49) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{B} &= a \cdot \mathbf{H}^b \\ \mu\mu_0 \cdot \mathbf{H} &= a \cdot \mathbf{H}^b \\ (\mu\mu_0)^{1/4} \cdot \mathbf{H}^{1/4} &= a^{1/4} \cdot \mathbf{H}^{b/4} \\ (\mu\mu_0)^{1/4} \cdot \mathbf{H} &= a^{1/4} \cdot \mathbf{H}^{(b+3)/4} \\ (\mu\mu_0)^{1/4} \mathbf{H} &= c \cdot \mathbf{H}^m \end{aligned} \quad (2.50)$$

A expressão (2.50) também é uma aproximação exponencial e os parâmetros c e m podem ser encontrados traçando-se o gráfico $(\mu\mu_0)^{1/4} \mathbf{H}$ versus $\mathbf{H}$ do material a ser empregado em papel di-log ou através da correlação de dados experimentais de ensaio.

Na Figura 2.3 encontra-se o gráfico $(\mu\mu_0)^{1/4} \mathbf{H}$ versus $\mathbf{H}$ com valores obtidos

de ensaio e a reta de aproximação para o aço 1020, material de uso comum na construção de freios. Como pode ser observado, a aproximação é boa para valores de campo magnético acima de 1000 A/m, que corresponde à região acima do joelho de saturação da curva, que é justamente a região da curva onde operam os freios de correntes parasitas.

Com a aproximação indicada obteve-se para os parâmetros c e m os seguintes valores:

$$\begin{cases} c = 0.97 \\ m = 0.77 \end{cases}$$

que resulta na equação procurada

$$(\mu\mu_0)^{1/4} H = 0.97 \cdot H^{0.77} \quad (2.51)$$

A curva de magnetização resultante dessa aproximação é

$$B = 0.885 \cdot H^{0.08} \quad (2.52)$$

Fig. 2.3 Curva obtida a partir de dados de ensaio e aproximação utilizada para o comportamento do aço 1020.

Na Figura 2.4 estão representadas as curvas de magnetização obtida por ensaio e aproximada por (2.52). Percebe-se que a curva aproximada possui permeabilidade inicial maior que a curva original, fato que não deve causar problemas já que a parte de interesse da curva é aquela acima do joelho.

Fig. 2.4 Comparação entre as curvas de magnetização do aço 1020 obtidas por ensaio e pela aproximação da expressão (2.52).

2.5.8 Expressão geral para ϕ_{ac}

Substituindo-se a (2.51) na (2.47), obtemos:

$$0,97 \cdot H_{\max}^{0,77} = \left(\frac{8W^2}{\rho\omega} \right)^{\frac{1}{4}}$$

$$H_{\max} = cte \cdot \left(\frac{8W^2}{\rho\omega} \right)^{0,325} \quad (2.53)$$

Substituindo-se a (2.53) na (2.48) resulta:

$$\phi_{ac} = 4\sqrt{2} \frac{LW}{\omega H_{\max}} = cte \cdot \frac{LW}{\omega} \left(\frac{\rho\omega}{8W^2} \right)^{0,325}$$

$$\phi_{ac} = cte \cdot \frac{LW^{0,35} \rho^{0,325}}{\omega^{0,675}} \quad (2.54)$$

A densidade de potência mecânica no freio, em W/m² é dada por

$$W_{mec} = \frac{P_{mec}}{S_{ativa}} = \frac{2\pi nT}{\pi DL} \quad (2.55)$$

e a frequência ω , em rd/s é dada por

$$\omega = 2\pi np \quad (2.56)$$

Substituindo a (2.55) e a (2.56) em (2.54), finalmente obtemos:

$$\phi_{ac} = cte \cdot L \frac{(2nT)^{0,35}}{(DL)^{0,35}} \frac{\rho^{0,325}}{(2\pi np)^{0,675}}$$

$$\phi_{ac} = cte \cdot \left(\frac{\rho^{0,325} L^{0,65}}{D^{0,35} p^{0,675}} \right) \frac{T^{0,35}}{n^{0,325}} \quad (2.57)$$

onde:

ϕ_{ac} é o valor do fluxo por pólo;

n é a rotação em rps;

T é o torque desenvolvido em N.m;

D é o diâmetro da região ativa no entreferro;

L é o comprimento axial da região ativa;

p é o número de pares de pólos do dispositivo;

ρ é a resistividade do material empregado na região ativa, que será considerada constante de valor $\rho = 1,7 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot m$ (aço 1020 a 150 °C).

O valor entre parênteses na expressão (2.57) é determinado e fixo para uma dada configuração do freio, sendo designado por M .

Assim, podemos escrever a expressão genérica do fluxo por pólo necessário para produzir determinado torque T a uma dada rotação n :

$$\phi_{ac} = cte \cdot M \cdot \frac{T^{0,35}}{n^{0,325}} \quad (2.58)$$

2.6 Estudo da reação de armadura

2.6.1 Introdução

Com o freio excitado e velocidade nula tem-se ao longo do entreferro distribuição de indução que se aproxima de uma distribuição retangular.

Impondo-se rotação a esse freio ocorre indução de correntes em sua região ativa, correntes essas que também produzem campo magnético (chamada de reação de armadura). O padrão estabelecido no entreferro, portanto, é uma composição entre a distribuição estática de indução provocada pela excitação e a reação de armadura.

A expressão da força magnetomotriz (f.m.m.) de reação de armadura será desenvolvida a seguir, a partir do cálculo da integral da distribuição de correntes e manipulações algébricas adequadas.

2.6.2 Integração da distribuição J_z de correntes

A expressão genérica de J_z , a equação (2.23), representa como a corrente se distribui na região ativa do rotor tanto ao longo da direção periférica $\vec{e}_x$ quanto na direção radial, independentemente da relação entre profundidade de penetração e comprimento de onda.

Para se calcular a distribuição da f.m.m. de reação de armadura é necessário realizar a integração da expressão de J_z com relação a y resultando no gradiente de corrente na direção $\vec{e}_x$:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} J_z dy &= \lim_{c \rightarrow \infty} \int_0^c \operatorname{Re} \left[J_{z_{\max}} e^{-\beta y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x - \gamma y \right)} \right] dy = \\
 &= \lim_{c \rightarrow \infty} \operatorname{Re} \left[\frac{J_{z_{\max}}}{\beta + j\gamma} e^{-\beta y} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)} \right] \Bigg|_0^c = \\
 &= \operatorname{Re} \left[\frac{J_{z_{\max}}}{\beta + j\gamma} \cdot e^{j \left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x \right)} \right]
 \end{aligned} \tag{2.59}$$

Em seguida calcula-se a integral desse gradiente com relação a x :

$$\begin{aligned}
F_r &= \int \operatorname{Re} \left[\frac{\mathbf{J}_{z_{\max}}}{\beta + j\gamma} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)} \right] dx = \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{-\lambda}{j2\pi} \cdot \frac{\mathbf{J}_{z_{\max}}}{\beta + j\gamma} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)} \right] = \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{J}_{z_{\max}}}{R \cdot e^{j\phi} \cdot e^{-j\pi/2}} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)} \right] \tag{2.60}
\end{aligned}$$

Impondo-se agora a condição $\sqrt{2}\alpha \gg \frac{2\pi}{\lambda}$ e substituindo-se em (2.20) tem-se:

$$\begin{cases} R \rightarrow \sqrt{2}\alpha \\ \phi \rightarrow \pi/4 \end{cases} \tag{2.61}$$

Substituindo-se o resultado (2.61) na expressão (2.60) resulta:

$$\begin{aligned}
F_r &\rightarrow \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda}{2\pi} \cdot \frac{\mathbf{J}_{z_{\max}}}{\sqrt{2}\alpha \cdot e^{-j\pi/4}} \cdot e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x\right)} \right] = \\
&= \operatorname{Re} \left[\frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \cdot \mathbf{J}_{z_{\max}} e^{j\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda} \cdot x + \frac{\pi}{4}\right)} \right] = \\
&= \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \cdot \mathbf{J}_{z_{\max}} \cdot \cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \frac{\pi}{4}\right) \tag{2.62}
\end{aligned}$$

Pode-se observar que F_r está $\frac{\pi}{4}$ defasada de $\mathbf{J}_z$, considerando a condição de

que a profundidade de penetração das correntes é muito menor que o comprimento de onda das mesmas.

Tomando o módulo da expressão (2.62), resulta:

$$F_r = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \cdot \mathbf{J}_{z_{\max}} \tag{2.63}$$

Substituindo-se J_z da expressão (2.46) em (2.63), obtém-se:

$$F_r = \frac{\lambda}{2\sqrt{2}\pi\alpha} \cdot \alpha\sqrt{2}H_{\max} \Rightarrow F_r = \frac{\lambda}{2\pi}H_{\max} \quad (2.64)$$

Da expressão (2.38) tem-se:

$$\phi_{ac} = 4\sqrt{2} \frac{WL}{\omega H_{\max}} \Rightarrow H_{\max} = 4\sqrt{2} \frac{WL}{\omega \phi_{ac}} \quad (2.65)$$

Substituindo-se (2.65) em (2.64) resulta:

$$F_r = \frac{\lambda}{2\pi} \cdot 4\sqrt{2} \frac{WL}{\omega \phi_{ac}} \Rightarrow F_r = \frac{2\sqrt{2}}{\pi \phi_{ac}} \cdot \frac{1}{\omega} \lambda WL \quad (2.66)$$

Como

$$\frac{1}{\omega} \lambda WL = \frac{1}{p \cdot n} \cdot \frac{P}{p} = \frac{T}{p^2} \quad (2.67)$$

Substituindo-se as expressões (2.67) e (2.46) na expressão (2.66) resulta

$$F_r = \frac{2\sqrt{2}n^{0.325}}{\pi \cdot cte \cdot MT^{0.35}} \cdot \frac{T}{p^2}$$

que pode finalmente ser escrita na forma:

$$F_r = cte \cdot n^{0.325} \cdot \frac{T^{0.65}}{Mp^2} \quad (2.68)$$

2.7 Descrição da metodologia de cálculo proposta

Com o equacionamento desenvolvido nos itens anteriores conseguimos uma expressão que nos dá o valor do fluxo por pólo e uma expressão que calcula o valor da f.m.m. de reação de armadura em cada ponto (n, T) de operação do freio.

A reação de armadura atua reduzindo o fluxo por pólo conforme se aumenta a

velocidade e o carregamento do freio. A distribuição de induções presente no entreferro com o freio em carga e que chamaremos de B_{ac} é, a grosso modo, a composição instantânea entre as distribuições com velocidade nula, chamada de B_{estat} e a provocada pela reação de armadura, chamada de B_r . Assim sendo, deve ser possível encontrar o valor de B_{estat} a partir das equações (2.58) e (2.68).

2.7.1 Cálculo da expressão da distribuição de induções B_{estat}

Por hipótese para o equacionamento assumiu-se tanto a distribuição espacial quanto a variação temporal das grandezas como sendo senoidais. Assim, tanto B_{ac} quanto B_r possuem distribuição espacial senoidal o que implica em variação temporal senoidal para um referencial fixo no rotor girante a velocidade constante.

Analisando-se as equações (2.41) e (2.62) percebe-se que a reação de armadura está atrasada de um ângulo que tende a 135° com relação ao fluxo que a produz. Considerando-se o referencial do rotor, equivale a dizer que B_{ac} e B_r são dois fasores com defasagem que consideraremos igual ao valor limite de 135° . Assumindo-se que B_{ac} é igual à composição entre B_{estat} e B_r , tem-se:

$$B_{ac} \angle 0 = B_{estat} \angle \theta + B_r \angle -135^\circ$$

$$\therefore B_{estat} \angle \theta = B_{ac} - B_r \angle -135^\circ$$

O ângulo θ não é de interesse prático e, como será visto mais tarde, possui valor próximo de zero (B_{ac} praticamente em fase com B_{estat}). Nos interessa apenas o módulo B_{estat} que é dado pela expressão (2.69).

$$\mathbf{B}_{est} = \mathbf{B}_{ac} + \mathbf{B}_r \angle 45^\circ \quad (2.69)$$

As expressões de $\mathbf{B}_{ac}$ e $\mathbf{B}_r$ são dadas respectivamente pelas equações (2.70) e (2.71), onde S_{polo} é a área do pólo em m^2 e $\mathfrak{R}$ a relutância em A.esp/Wb.

$$\mathbf{B}_{ac} = \frac{\phi_{ac}}{S_{polo}} \quad (2.70)$$

$$\mathbf{B}_r = \frac{F_r}{\mathfrak{R} \cdot S_{polo}} \quad (2.71)$$

Substituindo em (2.70) e (2.71) respectivamente as expressões (2.58) e (2.68), obtemos

$$\mathbf{B}_{ac} = cte \cdot \frac{M \cdot T^{0.35}}{S_{polo} \cdot n^{0.325}} = k_\phi \cdot \frac{M \cdot T^{0.35}}{S_{polo} \cdot n^{0.325}} \quad (2.72)$$

$$\mathbf{B}_r = cte \cdot \frac{n^{0.325} \cdot T^{0.65}}{\mathfrak{R} \cdot S_{polo} Mp^2} = k_r \cdot \frac{n^{0.325} \cdot T^{0.65}}{\mathfrak{R} \cdot S_{polo} Mp^2} \quad (2.73)$$

onde k_ϕ e k_r são constantes de ajuste.

Substituindo as expressões (2.72) e (2.73) na equação (2.69) resulta.

$$\mathbf{B}_{estat} = k_\phi \cdot \frac{M \cdot T^{0.35}}{S_{polo} \cdot n^{0.325}} + k_r \cdot \frac{n^{0.325} \cdot T^{0.65}}{\mathfrak{R} \cdot S_{polo} Mp^2} \angle 45^\circ \quad (2.74)$$

A equação (2.74) permite o cálculo de $\mathbf{B}_{estat}$ para qualquer ponto (T, n) de operação do freio e, a partir deste valor, podemos calcular a corrente de excitação requerida para o referido ponto.

2.7.2 Cálculo das curvas características do freio

O comportamento de um freio pode ser descrito através de suas curvas características que são as curvas de torque em função da rotação parametrizadas na corrente de excitação.

Um meio de se obter tais curvas a partir da equação (2.74) é descrito a seguir.

A aplicação da equação (2.74) no plano (T, n) fornece uma superfície tridimensional que relaciona cada ponto de operação com B_{estat} necessário. Se traçarmos curvas de nível dessa superfície, obteremos curvas de torque em função da rotação com B_{estat} constante, que é o mesmo que corrente de excitação constante.

A partir de um anteprojeto do circuito magnético do freio a ser desenvolvido, podemos calcular o valor de B_{estat} para os valores de corrente de excitação desejados. Extraíndo as curvas de nível da superfície para os valores de B_{estat} determinados, obteremos as curvas de torque em função da rotação para as referidas correntes de excitação.

A título de exemplo suponhamos um freio heteropolar com os seguintes dados:

- $p = 8$ pares de pólos;
- $M = 7.5 \cdot 10^{-4}$;
- $\mathfrak{R} = 2 \cdot 10^5$ A.esp/Wb por pólo (desprezando saturação no circuito magnético);
- $S_{polo} = 10^{-2}$ m²;

Arbitremos ainda, nesse exemplo, os valores das constantes k_ϕ e k_r , sendo $k_\phi = 1$ e $k_r = 0.5$.

A superfície tridimensional obtida da aplicação da expressão (2.74) em um domínio com a rotação variando de 10 a 1000 rpm e o torque variando de 10 a 1200 N.m está apresentada na Figura 2.5.

Fig. 2.5 Superfície tridimensional obtida da aplicação da equação (2.74).

Traçando algumas curvas de nível da superfície da Figura 2.5 obtemos as curvas características mostradas na Figura 2.6. As curvas mostradas nessa figura, como será visto mais tarde nos resultados de ensaio, representam o comportamento típico do freio de correntes parasitas.

Fig. 2.6 Curvas do freio hipotético traçadas a partir da superfície da Figura 2.5.

3 ANÁLISE POR ELEMENTOS FINITOS E PROTÓTIPO UTILIZADO

3.1 Introdução

Neste Capítulo será descrita a metodologia de estudo pelo Método dos Elementos Finitos (MEF) e sua aplicação no protótipo escolhido do freio de correntes parasitas.

3.2 Protótipo utilizado

Para o estudo realizado neste trabalho foi escolhido um freio comercial fabricado pela Equacional Elétrica e Mecânica Ltda. Trata-se do modelo EFC1-280 que é um freio heteropolar de correntes parasitas cuja secção transversal se encontra representada na Figura 3.1.

Fig. 3.1 Secção transversal do protótipo utilizado no estudo.

Os dados referentes a este protótipo se encontram na Tabela 3.1.

Tabela 3.1 Dados do protótipo.

Número de pólos	24
Comprimento dos pólos	0.22 m
Área dos pólos	$7.48 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Entreferro	$1.8 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Número de espiras por pólo	96
Diâmetro do rotor	0.36 m
Espessura da região ativa do rotor	18 mm
Resistividade do Ferro (150 ° C)	$1.7 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$

3.3 Equipamento e ferramental utilizado nas simulações por elementos finitos

3.3.1 Computador utilizado

As simulações realizadas neste trabalho foram efetuadas usando-se um computador PC com processador Pentium II a 400 MHz e memória RAM de 512 MB.

O tempo necessário, com esse computador, para executar o cálculo de cada ponto de operação foi de 5 horas, em média.

3.3.2 Software de Elementos Finitos utilizado

Toda a análise por elementos finitos foi implementada através do software de Elementos Finitos CEDRAT – Flux 2D versão 7.30 [5], de procedência francesa.

Esse software permite realizar de maneira prática e rápida a análise por elementos finitos que é dividida em [6]:

- Pré-processamento
 - Geometria
 - Malhagem
 - Propriedades físicas
 - Condições de contorno
- Resolução
- Exploração dos resultados

Cada etapa será descrita nos itens a seguir, já considerando a aplicação ao freio escolhido como protótipo.

3.3.2.1 Geometria – descrição do modelo geométrico que melhor representa o dispositivo a ser analisado .

A definição da geometria está ligada à capacidade do software em realizar estudos em duas ou três dimensões e à capacidade de processamento do hardware. O nível de detalhe que se deseja na solução e o tempo disponível para se implementar o

estudo também são fatores que influem nessa escolha.

É possível fazer simplificações na geometria onde são omitidos detalhes de desenho que não são essenciais ao estudo a ser realizado. Outra grande simplificação é verificar a possibilidade de se executar a simulação em duas dimensões, utilizando-se apenas uma secção transversal representativa do dispositivo, onde exista uma simetria de campo longitudinal ou axial. Uma terceira forma de simplificação do modelo consiste em se aproveitar as simetrias geométricas presentes e fazer a representação de apenas uma fração básica do dispositivo. Essa fração deve ser escolhida de modo a abranger meio ciclo (anti-simetria) ou um ciclo completo (simetria) da distribuição de campo que se repete ao longo do dispositivo. Essa condição é imposta ao estudo através da atribuição de condições de contorno (anti-cíclicas ou cíclicas) convenientes [7]. Com a representação de apenas um segmento de geometria consegue-se uma grande economia no número total de nós na discretização, o que pode permitir um refinamento maior da malha nas regiões mais críticas (entreferro e “pontas saturadas”) sem sobrecarregar em demasia o problema.

Na Figura 3.2 temos o modelo geométrico adotado para a análise do freio em questão, que é um modelo bidimensional representando $\frac{1}{12}$ da secção transversal do dispositivo. Por ser uma análise bidimensional, devemos observar que não serão considerados alguns efeitos de extremidade tais como as correntes de fechamento da região ativa. A circunferência que aparece no entreferro do desenho é a banda de rolamento, uma técnica que permite a rotação da parte interna a essa circunferência no modelo.

Fig. 3.2 Modelo geométrico do freio de correntes parasitas a ser analisado pelo MEF.

3.3.2.2 Discretização ou malhagem do modelo geométrico.

Após a entrada da geometria é necessário proceder-se à sua discretização ou malhagem, que consiste em se subdividir o domínio em elementos que podem ser triangulares ou tetragonais.

A malhagem se inicia com a pré discretização de todas as linhas de geometria, cada linha podendo ser dividida em partes iguais ou seguindo uma razão geométrica. Em seguida executa-se a malhagem automática (utilizando por exemplo o algoritmo de Delaunay [8]) que gerará todos os elementos do modelo, seguindo a pré-discretização imposta pelo usuário e respeitando os contornos das linhas da geometria.

A precisão obtida na resolução do problema está, a grosso modo, ligada à densidade da malha. Para se obter uma discretização eficiente no tocante à precisão e ao mesmo tempo não sobrecarregar o sistema de processamento (a ordem do sistema linear

de equações resultante é igual ao número de nós), devem ser seguidos os seguintes critérios:

- regiões de entreferro ou regiões onde ocorra variação acentuada do campo em estudo, devem receber uma concentração maior de elementos;
- regiões em que correntes são induzidas devem ter malha compatível com a profundidade de penetração (δ) dessas correntes - duas ou três camadas de elementos, no mínimo, para discretizar o comprimento δ - garantindo assim um mínimo de precisão para as grandezas calculadas nessa região;
- regiões onde o campo em estudo é quase constante ou seu valor é pequeno face às regiões de interesse (limites de truncamento de domínios abertos), a concentração de elementos pode ser menor;

A malha de elementos finitos do modelo do freio pode ser vista na Figura 3.2.

Fig. 3.2 Malha utilizada no modelo do freio.

A Figura 3.3 mostra em detalhe a malha no entreferro onde pode ser observada a malha de elementos tetragonais usada na parte mais próxima ao entreferro da região ativa do freio. Isso foi feito com o intuito de se obter maior densidade e uniformidade na malha onde há adensamento de correntes, principalmente em rotações mais altas, conseguindo com isso maior precisão e mapas de cores de melhor qualidade. Nessa mesma figura pode ser notada também a banda de rolamento que é uma região em forma de anel com apenas uma camada de elementos triangulares.

Fig. 3.3 Detalhe da malha no entreferro e banda de rolamento (em amarelo).

A rotação do rotor do modelo é implementada através dessa banda de rolamento da seguinte forma: em cada passo, a malha na banda é destruída, permanecendo as malhas das partes fixas e móvel inalteradas; enquanto todos os nós internos a essa região sofrem rotação de um ângulo θ em torno da origem. Em seguida a malha da banda é reconstruída e o modelo está pronto para o cálculo do próximo passo, considerando essa nova posição [9, 10]. A Figura 3.4 mostra o detalhe da malha do freio antes (a) e após (b) uma rotação de $\theta = 5.5^\circ$.

Fig. 3.4 Funcionamento da banda de rolamento.
a) antes da rotação;
b) após a rotação;

3.3.2.3 Atribuição das propriedades físicas e condições de contorno

Para finalizar a descrição do problema a ser resolvido é necessário que se atribua materiais com propriedades físicas adequadas às regiões do modelo. Isso é feito escolhendo-se os materiais convenientes de um banco de materiais previamente construído.

Na Figura 3.4 estão representadas as regiões do freio numeradas e na tabela 3.2

encontra-se a respectiva descrição dessas regiões e materiais associados.

Fig. 3.5 Regiões usadas no modelo do freio.

Tabela 3.2 Descrição das regiões do modelo e respectivos materiais.

Região	Nome	Material Associado	Acoplamento c/ Circuito Externo
1	Estator	ACO_1020	N
2	Rotor	ACO_1020	S
3	Bobina 4	Vácuo	S
4	Bobina 3	Vácuo	S
5	Bobina 2	Vácuo	S
6	Bobina 1	Vácuo	S
7	Banda	-	N
8	Ar	Vácuo	N

Os materiais associados da tabela 3.2 têm as seguintes propriedades:

Vácuo:

Sem condutividade associada ($\sigma = 0$).

Permeabilidade: $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}$ [H/m]

ACO_1020

Resistividade: Como a resistividade depende da temperatura foram

feitas simulações com dois valores de ρ : $\rho = 1.7 \cdot 10^{-7}$ e

$\rho = 3.4 \cdot 10^{-7}$ [Ohm·m], correspondendo a temperaturas

de operação de 150 °C e 350 °C respectivamente [11];

Permeabilidade: Usa a curva de magnetização mostrada na Figura 3.7.

Fig. 3.7 Curva de magnetização para o material associado ao rotor do modelo.

Em seguida atribui-se valores às fontes do problema, podendo isso ser feito diretamente, especificando os valores em cada região ou indiretamente, através da técnica conhecida por acoplamento de circuitos elétricos [12, 13]. Esta técnica consiste em associar as regiões com fonte a elementos de circuito elétrico externo, ficando o valor da fonte em cada instante definido pela resolução simultânea do circuito elétrico. No nosso estudo foi acoplado o circuito elétrico indicado na Figura 3.8.

Fig. 3.8 Circuito acoplado ao modelo de elementos finitos.

As regiões Bobina são elementos que consideram múltiplas espiras sem efeito pelicular (condutividade da região deve ser zero portanto). Como o cobre e alumínio normalmente utilizados são não magnéticos e a região deve ser não condutora, usa-se o vácuo como material associado. Já a região rotor é associada a um elemento “condutor maciço” que leva em conta o efeito pelicular e por isso possui condutividade associada.

Utilizou-se o acoplamento com circuito elétrico devido à necessidade de se associar o condutor maciço com um resistor em paralelo de valor alto para garantir que o somatório das correntes nesse condutor maciço seja nula, uma vez se tratar de um estudo em duas dimensões, além de facilitar a alteração da corrente de excitação entre os diversos estudos.

Para se eliminar a singularidade do sistema de equações que obtivemos após a definição das propriedades físicas, é necessário que se faça a atribuição de condições de contorno adequadas, dentre as seguintes:

- condição de Newmann: condição de campo normal. É atribuída automaticamente às linhas de contorno que não recebem outras condições;
- condição de Dirichlet: condição de contorno que impõe ao campo tangência às linhas onde é atribuída.
- condição cíclica: usada quando se está representando apenas uma parte do dispositivo aproveitando suas simetrias geométricas e de campo. O valor da variável de estado nos nós de uma aresta têm o mesmo valor dos nós respectivos da aresta de simetria oposta;
- condição anti-cíclica: de uso semelhante ao da condição cíclica, mas a parte representada do dispositivo é apenas metade de um segmento completo de simetria (como exemplo, equivale a se representar apenas um pólo de uma máquina elétrica, ao invés de um par de pólos). O valor da variável de estado

nos nós de uma aresta têm valor oposto aos dos nós respectivos da aresta oposta de simetria.

Na Figura 3.9 estão representadas as condições de contorno utilizadas no modelo.

As simulações realizadas usam a técnica de passo a passo no tempo, que consiste em discretizar o tempo escolhendo-se um intervalo adequado – o passo de tempo. Com isso consegue-se realizar estudos transitórios, além de levar em conta o movimento do dispositivo. Para tanto escolhe-se no software o estudo magneto-transitório (Transient Magnetics) e atribui-se à banda de rolamento a velocidade desejada.

Fig. 3.9 Condições de contorno usadas no modelo.

3.3.2.4 Resolução do problema

Trata-se da etapa de solução do sistema de equações montado a partir das

informações de malha, propriedades físicas, fontes e condições de contorno. Para se obter tal solução aplica-se métodos iterativos aproximados no sistema linear global de equações, tais como o ICCG e o BiCG [14, 15] que se aproveitam da esparsidade da matriz para obter rápida resolução.

Devido ao fato do modelo possuir materiais com propriedades não lineares (seu valor é dependente da variável de estado) são necessárias diversas iterações utilizando o algoritmo de Newton-Raphson, em cada uma delas corrigindo o valor da propriedade dependente (no caso a permeabilidade magnética) até que se atinja a precisão especificada.

3.3.2.5 Exploração dos resultados

Após a resolução do sistema, pode-se passar para a última etapa que é a exploração dos resultados obtidos.

A exploração básica permite:

- obtenção de mapas de cores com a distribuição de diversas grandezas no domínio, tais como campo elétrico, campo magnético, indução magnética, permeabilidade, densidade de corrente entre outros;
- obtenção de linhas de campo mostrando a distribuição de, por exemplo, equipotenciais, fluxo magnético, linhas de correntes, além de outros;
- obtenção de valores pontuais;
- traçado de gráficos de uma grandeza desejada a partir de caminhos arbitrários definidos pelo usuário;
- cálculo de grandezas e parâmetros obtidos a partir da solução do sistema, tais como indutância, resistência, torque, força, fluxo, entre outras;

- exploração do circuito elétrico aplicado ao MEF, se houver algum, mostrando valores de tensão, corrente, potência e formas de onda nos diversos elementos do circuito.

Os diversos resultados extraídos das simulações serão mostrados no Capítulo 4.

4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

4.1 Introdução

Neste Capítulo serão apresentados os resultados e detalhes de aplicação da análise por elementos finitos e da metodologia de cálculo apresentada no Capítulo 2.

À medida em que forem apresentados, os resultados obtidos serão comparados com os respectivos resultados de ensaio, discutindo-se os desvios.

4.2 Simulação por elementos finitos

As simulações por elementos finitos, para cada caso, foram conduzidas seguindo o procedimento descrito no Capítulo 3.

Foi realizado um conjunto de simulações com diversos pontos de operação

(T, n) com correntes de excitação de 4, 8, 12 e 16 A.

Por simplicidade adotou-se resistividade constante de valor $\rho = 1.7 \cdot 10^{-7} \Omega.m$ para o material da região ativa, embora seu valor varie. A variação da resistividade se deve à variação da temperatura do freio conforme se varia a potência mecânica dissipada provocando aumento da resistividade do material com o aumento da temperatura. A variação da temperatura pode chegar a algumas centenas de graus Celsius.

Apesar disso, será feita a comparação entre esse conjunto de dados com resistividade constantes e os valores obtidos de ensaio. Além disso, os dados também servirão para o cálculo de parâmetros utilizados na análise proposta no Capítulo 2.

Também foram simulados alguns pontos de operação usando resistividades $\rho = 2.5 \cdot 10^{-7} \Omega.m$ e $\rho = 3.4 \cdot 10^{-7} \Omega.m$ com o intuito de avaliar a influência no torque desenvolvido.

4.2.2 Obtenção das curvas de torque

Os valores de torque obtidos com esse conjunto de simulações se encontram na tabela

4.1. O gráfico da Figura 4.1 mostra as curvas de torque em função da velocidade obtidas a partir desses resultados, juntamente com as curvas de ensaio.

Tabela 4.1: Valores simulados de torque em [N.m] para $\rho = 1.7 \cdot 10^{-7} \Omega.m$.

Rotação [rpm]	Corrente de Excitação [A]				
	2 A	4 A	8 A	12 A	16 A
50	2.6	15.3	93.6	250.8	420
100	4.2	25.6	150	392	678
250	7.6	44.6	235	575	1018
450	10.7	57.3	275	634	1095
600	12.1	62.3	285	640	1095
800	13.7	66	289	637	1092
1000	14.5	68	288	615	1070

Fig. 4.1 Comparação entre simulação por elementos finitos e ensaio do freio para diversas correntes de excitação.

Da observação do gráfico percebe-se boa concordância entre simulação e ensaio apenas para a corrente de excitação de 4 A e para o início das outras curvas (baixa

rotação).

À medida que a rotação cresce, há aumento da discrepância entre as curvas

correspondentes, o que pode ser atribuído aos seguintes fatos:

- a) com o aumento da rotação e do torque desenvolvido, mantendo-se constante a corrente de excitação, há um grande aumento na potência dissipada o que provoca aumento na temperatura do rotor que, por sua vez, aumenta a resistividade da região ativa. O aumento de resistividade tenderia a deslocar as curvas no sentido de aumentar a rotação em que o torque máximo ocorre, como indicado na Figura 4.2, de forma análoga ao que acontece às curvas de um motor de indução de rotor bobinado quando se aumenta a resistência rotórica [16].

Fig. 4.2 Comparação entre simulações utilizando diferentes valores de resistividade, ambas simuladas com excitação de 16 A.

- b) o aumento de temperatura também provoca a dilatação térmica do rotor do

freio, resultando em diminuição do entreferro, que pode ser suficiente até mesmo a ponto de provocar contato entre rotor e estator, caso o entreferro não seja devidamente dimensionado. Essa diminuição no entreferro provoca a diminuição da relutância resultando em maior fluxo por pólo, para uma dada corrente de excitação. Esse aumento no fluxo por pólo provoca um aumento considerável no torque desenvolvido.

O exposto no item **a)** explica a diferença encontrada entre as curvas simulada e de ensaio na parte inicial, entre 0 e 150 rpm da curva de corrente de excitação 12 A. Após esse ponto percebe-se que o efeito de **b)** se sobrepõe ao de **a)**, causando aumento da diferença entre as curvas, o mesmo ocorrendo nas curvas de 8 A.

Por outro lado as curvas de 16 A apresentam comportamento diferente, com os valores simulados sempre acima da curva de ensaio na faixa apresentada. Se analisarmos mais atentamente as curvas simuladas e de ensaio para as correntes de excitação 8, 12 e 16 A percebe-se que gradualmente a curva simulada começa a ultrapassar a de ensaio com o aumento da corrente de excitação. Isso pode ser explicado pelo estado de saturação do circuito magnético do freio: para excitações mais baixas, a diminuição do entreferro provoca aumento considerável no fluxo por pólo enquanto que em excitações mais altas, devido a uma maior saturação, esse aumento vai se tornando menos efetivo. Sendo assim, em excitações mais altas o efeito do item **b)** vai diminuindo de intensidade permitindo preponderância do efeito descrito em **a)**, explicando a tendência do valor simulado ser mais alto que o de ensaio para excitações maiores.

4.2.3 Exploração de alguns resultados através de mapas de cores

A título de ilustração dos fenômenos que ocorrem na região ativa do freio, são mostradas nas Figuras 4.3, 4.4 e 4.5 mapas de cores e de campo para alguns pontos de operação do freio.

Cada figura mostra 4 grandezas, relacionadas a seguir:

- linhas de campo: representação de isovalores de potencial vetor magnético;
- indução: mapa de cores mostrando a distribuição de densidade de fluxo magnético $\vec{B}$, em Tesla;
- densidade de corrente induzida: mapa mostrando a distribuição de $\vec{J}$, em A/m²;
- permeabilidade: mapa de cores mostrando como se distribui a permeabilidade do material, refletindo os efeitos da saturação;

Fig. 4.3 Mapas de cores para rotação $\Omega = 100$ rpm e $I_{exc} = 2$ A.

Fig. 4.4 Mapas de cores para rotação $\Omega = 100$ rpm e $I_{exc} = 16$ A.

Fig. 4.5 Mapas de cores para rotação $\Omega = 1000$ rpm e $I_{exc} = 16$ A.

Observando-se as figuras percebe-se que há adensamento de correntes na superfície da parte ativa do freio, devido ao efeito pelicular. Como pode ser visto, a profundidade de penetração das correntes depende tanto da corrente de excitação quanto da velocidade de rotação do freio (frequência das correntes induzidas).

O próximo item apresenta algumas considerações a respeito do comportamento dessas correntes induzidas no tocante a efeito pelicular.

4.2.3.1 Efeito pelicular

As correntes induzidas na parte ativa se distribuem, conforme nos aprofundamos no material, seguindo um decaimento exponencial de acordo com o valor da profundidade de penetração dado por $\delta = \sqrt{\frac{2\rho}{\mu\mu_0\omega}}$, ou seja a cada δ o módulo de J_z se reduz a $\frac{1}{e}$ do valor original.

A Figura 4.6 mostra alguns mapas com linhas de campo para efeito de comparação de efeito pelicular entre algumas correntes de excitação e velocidades. O sentido de rotação do rotor do freio é o anti-horário.

Comparando os mapas para uma mesma corrente de excitação percebe-se que a profundidade de penetração do campo e, portanto, da correntes induzidas, diminui com o aumento da velocidade de rotação (aumento da frequência), como era de se esperar.

Fazendo a comparação para uma mesma rotação, percebe-se aumento na profundidade de penetração ao se aumentar a corrente de excitação. Esse aumento pode ser explicado da seguinte maneira: o material da região ativa do freio possui baixa resistividade e permeabilidade inicial bastante elevada, o que provoca grande adensamento das correntes induzidas. Como há presença de saturação, a profundidade de penetração se torna muito dependente da permeabilidade já que sua variação pode ser de até 2 ordens de grandeza entre o estado saturado e o não saturado. Portanto, quanto maior a corrente de excitação, maior a indução inicial e maior a tendência do material se saturar, aumentando assim a profundidade de penetração do campo em comparação a menores correntes.

Fig. 4.6 Representação de linhas equipotenciais magnéticas para comparação da penetração do campo para diversas rotações e correntes de excitação.

Pode ser observado ainda que, como a permeabilidade varia de maneira abrupta conforme nos aproximamos do valor da saturação é de se esperar que o material da região ativa que se encontra conduzindo corrente esteja próximo à saturação já que a penetração do campo é “contida” por material que ainda se encontra com alta permeabilidade.

4.3 Exploração da distribuição de induções ao longo do entreferro

O comportamento da distribuição de induções no entreferro para os diversos pontos de operação do freio é de interesse pois permite a análise da variação do fluxo por pólo e sua distribuição devido à atuação da reação de armadura.

Além de servir de ilustração para o melhor entendimento dos fenômenos que ocorrem no freio, os dados obtidos também serão utilizados no cálculo das constantes de ajuste da equação (2.74), k_ϕ e k_r .

As Figuras 4.7 e 4.8 mostram a distribuição de induções no entreferro para correntes de 8 A e 16 A, desde velocidade nula até 1000 rpm, computadas no caminho mostrado na Figura 4.9, a meia distância do entreferro.

Pela análise dos gráficos percebe-se a atuação crescente da reação de armadura que age diminuindo o fluxo eficaz no entreferro, contribuindo para a diminuição do torque conforme se aumenta a velocidade.

A composição entre a reação de armadura e a distribuição de campo gerada pela excitação a velocidade nula resulta nas formas de onda distorcidas mostradas nessas figuras. A estimativa correta dessa reação de armadura é ponto fundamental para se

conseguir prever com precisão o comportamento do freio, já que a distribuição de induções a velocidade nula é simples de se calcular.

Fig. 4.7 Distribuição de induções no entreferro em função da velocidade para $I_{exc} = 8$ A.

Fig. 4.8 Distribuição de induções no entreferro em função da velocidade para $I_{exc} = 16$ A.

Fig. 4.9 Caminho usado (em vermelho) para computar a distribuição de induções no entreferro.

Os dados numéricos que serão utilizados para se estimar os valores de k_ϕ e k_r foram obtidos com uma rotina em MATLAB [17] para calcular os valores médio e eficaz para cada vetor de valores de indução no entreferro, extraído da simulação de cada ponto de operação considerado do freio.

Tabela 4.2: Valores médio e eficaz da distribuição de induções no entreferro B_{ac} [T].

Rotação [rpm]	Corrente de Excitação [A]				
	2 A	4 A	8 A	12 A	16 A
0	0.101/0.110	0.202/0.220	0.396/0.433	0.566/0.618	0.658/0.719
50	0.097/0.106	0.191/0.208	0.364/0.397	0.514/0.561	0.613/0.670
100	0.098/0.107	0.183/0.199	0.339/0.372	0.473/0.519	0.572/0.629
250	0.088/0.096	0.163/0.179	0.287/0.319	0.389/0.435	0.471/0.528
450	0.081/0.089	0.145/0.161	0.245/0.276	0.325/0.371	0.390/0.448
600	0.078/0.085	0.135/0.151	0.223/0.255	0.293/0.339	0.350/0.408
800	0.074/0.082	0.124/0.140	0.202/0.233	0.262/0.308	0.317/0.375
1000	0.071/0.079	0.116/0.131	0.186/0.216	0.239/0.283	0.293/0.348

4.4 Resultados obtidos com a aplicação da metodologia de cálculo proposta

Como descrito no item 2.7 pretende-se usar a equação (2.74) para calcular o valor da indução necessário no entreferro, a rotação nula, para se desenvolver torque T a rotação n . Para tanto é necessário se calcular os valores de k_ϕ e k_r , o que será feito através dos dados colhidos das simulações por elementos finitos.

4.4.1 Cálculo de k_ϕ

O cálculo de k_ϕ será feito a partir da equação (2.72) e dos valores médios e eficazes da distribuição de induções no entreferro que se encontram na tabela 4.2.

O valor da constante geométrica M do freio é calculada pela expressão (4.1)

$$M = \frac{\rho^{0.325} \cdot L^{0.65}}{D^{0.35} \cdot p^{0.675}} \quad (4.1)$$

A partir dos dados do protótipo apresentados na tabela 3.1 tem-se:

$$\rho = 1.7 \cdot 10^{-7} \text{ } \Omega \cdot \text{m} \text{ (mesmo valor adotado para o conjunto de simulações)}$$

$$L = 0.220 \text{ m (comprimento dos pólos)}$$

$$D = 0.360 \text{ m (diâmetro do rotor)}$$

$$p = 12 \text{ pares de pólos}$$

$$S_p = \text{(área do pólo)}$$

Substituindo-se os valores em (4.1) obtém-se:

$$M = \frac{(1.7 \cdot 10^{-7})^{0.325} \cdot (0.220)^{0.65}}{(0.360)^{0.35} \cdot (12)^{0.675}} \Rightarrow M = 6.3 \cdot 10^{-4}$$

Os valores de torque correspondentes são aqueles também obtidos por simulação que se encontram na tabela 4.1.

Podemos agora substituir na equação (2.72) os valores apresentados nas tabelas 4.1 e 4.2 e calcular o valor de k_ϕ para cada ponto de operação considerado. A tabela 4.3 mostra esses resultados.

Tabela 4.3: Valores de k_ϕ calculados a partir dos valores médio e eficaz de B_{ac} .

Rotação [rpm]	Corrente de Excitação [A]				
	2 A	4 A	8 A	12 A	16 A
50	0.809/0.881	0.823/0.896	0.832/0.907	0.832/0.908	0.828/0.905
100	0.823/0.899	0.825/0.897	0.823/0.903	0.820/0.900	0.819/0.900
250	0.817/0.891	0.815/0.895	0.802/0.891	0.794/0.888	0.788/0.883
450	0.807/0.887	0.803/0.892	0.784/0.883	0.776/0.886	0.769/0.884
600	0.818/0.891	0.798/0.892	0.774/0.885	0.766/0.886	0.758/0.884
800	0.816/0.904	0.788/0.890	0.766/0.883	0.753/0.886	0.756/0.893
1000	0.825/0.918	0.785/0.886	0.759/0.882	0.748/0.886	0.756/0.897

Calculando a média e o desvio para os valores de k_ϕ obtidos através dos valores médio e eficaz de B_{ac} temos:

B_{ac} utilizado	Valor de k_f
Médio	0.797 ± 0.026
Eficaz	0.892 ± 0.009

O desvio na constante k_ϕ é menor quando se usa valores eficazes de B_{ac} , oferecendo portanto melhor ajuste.

4.4.2 Cálculo de k_r

O cálculo de k_r será feito analogamente, a partir da equação (2.73). Como está implícito na equação (2.74) o valor de indução resultante em determinado ponto de operação é igual à diferença entre a indução a velocidade nula e a indução gerada pela reação de armadura.

Sendo assim, procede-se ao cálculo da distribuição de induções provocada pela reação de armadura fazendo-se a operação $\mathbf{B}_{estat} - \mathbf{B}_{ac}$ para cada ponto de operação simulado pelo MEF, onde $\mathbf{B}_{estat}$ é o vetor de valores da distribuição de induções a velocidade nula e $\mathbf{B}_{ac}$ a distribuição resultante no entreferro para o ponto considerado, ambos sempre para a mesma corrente de excitação. Com isso obtém-se um vetor para cada ponto de operação com os valores da distribuição de induções $\mathbf{B}_r$ provocada pela reação de armadura.

Como ilustração, as formas de onda de $\mathbf{B}_r$ para corrente de excitação de 16 A são mostradas na Figura 4.10. Os valores médios e eficazes dessas distribuições são apresentados na tabela 4.4.

Fig. 4.10 Gráficos com a distribuição de induções provocada pela reação de armadura para corrente de excitação de 16 A. A referência é a distribuição de induções a velocidade nula, também a 16 A.

Tabela 4.4 Valores médio e eficaz da distribuição de induções B_r [T] gerados pela reação de armadura.

Rotação [rpm]	Corrente de Excitação [A]				
	2 A	4 A	8 A	12 A	16 A
50	0.005/0.006	0.015/0.017	0.044/0.051	0.076/0.087	0.088/0.098
100	0.007/0.008	0.025/0.029	0.075/0.086	0.128/0.145	0.148/0.166
250	0.016/0.019	0.048/0.055	0.134/0.153	0.221/0.251	0.258/0.290
450	0.024/0.027	0.068/0.078	0.178/0.203	0.286/0.323	0.336/0.378
600	0.028/0.032	0.078/0.090	0.200/0.227	0.316/0.357	0.373/0.419
800	0.033/0.038	0.089/0.102	0.221/0.250	0.345/0.388	0.406/0.454
1000	0.036/0.041	0.098/0.111	0.236/0.267	0.366/0.412	0.425/0.476

Substituindo na equação (2.73) os valores médio e eficaz de B_r apresentados na tabela 4.4 e os valores de torque da tabela 4.1, podemos calcular os valores de k_r , que

se encontram na tabela 4.5.

Tabela 4.5: Valores de k_r calculados a partir dos valores médio e eficaz de B_{ac} .

Rotação [rpm]	Corrente de Excitação [A]				
	2 A	4 A	8 A	12 A	16 A
50	0.809/0.881	0.823/0.896	0.832/0.907	0.832/0.908	0.828/0.905
100	0.823/0.899	0.825/0.897	0.823/0.903	0.820/0.900	0.819/0.900
250	0.817/0.891	0.815/0.895	0.802/0.891	0.794/0.888	0.788/0.883
450	0.807/0.887	0.803/0.892	0.784/0.883	0.776/0.886	0.769/0.884
600	0.818/0.891	0.798/0.892	0.774/0.885	0.766/0.886	0.758/0.884
800	0.816/0.904	0.788/0.890	0.766/0.883	0.753/0.886	0.756/0.893
1000	0.825/0.918	0.785/0.886	0.759/0.882	0.748/0.886	0.756/0.897

Calculando agora a média e o desvio para os valores de k_r obtidos através dos valores médio e eficaz de B_r obtemos:

B_r utilizado	Valor de k_r
Médio	0.303 ± 0.038
Eficaz	0.345 ± 0.048

Embora o desvio na constante k_r seja menor para valores médios de B_r , optaremos por utilizar valores eficazes para a medida das induções. Sendo assim, serão adotadas para as constantes os valores $k_\phi = 0.892$ e $k_r = 0.345$. Portanto o valor B_{estat} calculado pela equação (2.74) será dado em valor eficaz.

4.4.3 Cálculo das curvas de torque

Agora é possível aplicar a equação (2.74) para o cálculo das curvas de torque desejadas. Para obtermos as curvas para as correntes de 4, 8, 12 e 16 A serão calculados com o MATLAB os valores de B_{estat} em um domínio com rotação entre 10 e 1000 rpm e torque entre 10 e 1200 N.m. As curvas de nível da superfície obtida, correspondentes às correntes de excitação desejadas, serão extraídas por comparação com os valores eficazes a rotação nula de B_{ac} indicados na tabela 4.2.

A Figura 4.11 mostra a superfície obtida pela aplicação da equação (2.74) para o freio usado como protótipo.

Fig. 4.11 Superfície tridimensional que representa os valores de B_{estat} necessários para cada ponto de operação do protótipo.

As curvas torque versus rotação obtidas da comparação entre os valores eficazes

de B_{estat} calculados e entre os valores eficazes de B_{ac} , a rotação nula, podem ser vistas na Figura 4.12.

Fig. 4.12 Comparação entre os resultados obtidos com a aplicação da metodologia de cálculo apresentada e os resultados de ensaio.

Os resultados obtidos através de cálculo são bastante semelhantes àqueles obtidos com a simulação por elementos finitos, como pode ser observado nas Figuras 4.12 e 4.1. Assim sendo, a explicação para os desvios entre os resultados de cálculo e ensaio observados na Figura 4.12 é dada basicamente pelos mesmos motivos dos desvios entre simulação e ensaio: variação com a temperatura tanto do entreferro quanto do valor da resistividade do material do rotor.

Na análise por elementos finitos foram efetuadas algumas simulações com valor de resistividade diferente ($\rho = 3.4 \cdot 10^{-7} \Omega.m$) para avaliar o comportamento das curvas de torque com o aumento da temperatura. O mesmo pode ser feito agora utilizando-se o

método proposto, com a vantagem de se poder testar diversos valores de resistividade de maneira rápida e prática, ao contrário da simulação por elementos finitos que levaria alguns dias de computação com o equipamento utilizado.

Serão levantadas as curvas referentes às resistividades indicadas na tabela 4.6 e comparadas com a curva de ensaio de 16 A de corrente de excitação que, como descrito no item 4.2.2, tem menor influência da variação do entreferro com a temperatura relativamente à variação da resistividade. Também se encontra na tabela 4.6 os respectivos valores da constante M , dados pela equação (4.1), que descreve o freio a ser calculado.

Tabela 4.6 Resistividades usadas no cálculo e respectivas temperaturas.

r [W.m]	Temperatura Correspondente [°C]	Valor da constante M
$1.7 \cdot 10^{-7}$	150	$6.3 \cdot 10^{-4}$
$2.5 \cdot 10^{-7}$	250	$7.1 \cdot 10^{-4}$
$3.4 \cdot 10^{-7}$	350	$7.9 \cdot 10^{-4}$

De posse dos dados pode-se realizar o cálculo, cujos resultados são apresentados no gráfico da Figura 4.13.

Percebe-se na figura o deslocamento das curvas como descrito no item 4.2.2 conforme se aumenta a resistividade, indicando coerência com o comportamento obtido das simulações por elementos finitos. Também pode ser notado que para essa corrente de excitação bastaria o ajuste do valor da resistividade para $\rho = 2.5 \cdot 10^{-7} \Omega.m$ para se obter uma representação bastante precisa do segmento da curva (T, n) ensaiada.

Fig. 4.13 Gráfico com a comparação entre as curvas de torque obtidas através da metodologia de cálculo proposta variando-se a temperatura da região ativa.

4.5 Aplicação a um segundo protótipo

Para validação da metodologia aplicaremos agora o cálculo a um outro freio também produzido pela Equacional, substancialmente diferente do primeiro. As características do freio são dadas na tabela 4.7 e sua secção transversal se encontra representada na Figura 4.14.

Tabela 4.7 Dados do segundo protótipo.

Número de pólos	6
Comprimento dos pólos	0.10 m
Área dos pólos	$4.87 \cdot 10^{-3} \text{ m}^2$
Entreferro	$1 \cdot 10^{-3} \text{ m}$
Número de espiras por pólo	400
Diâmetro do rotor	0.11 m
Espessura da região ativa do rotor	20 mm
Resistividade do Ferro (150 °C)	$1.7 \cdot 10^{-7} \Omega \cdot \text{m}$

Fig. 4.14 Secção transversal do segundo protótipo.

Seguiu-se o roteiro descrito no item 4.4 realizando-se apenas umas poucas simulações, a saber:

- duas simulações magnetostáticas para obtenção da distribuição de induções a velocidade nula e cálculo de relutância, para duas correntes de excitação

diferentes;

- duas simulações magneto-evolutivas, para o cálculo da distribuição de induções em carga para duas correntes de excitação, com velocidades diferentes entre si.

Os resultados obtidos com as simulações e os valores calculados de k_ϕ e k_r se encontram nas tabelas 4.8 e 4.9:

Tabela 4.8 Resultados obtidos a partir das simulações magnetostáticas.

Corrente de Excitação	Indução Eficaz [T]	Relutância [A.esp/Wb]
1 A	0.422	$1.72 \cdot 10^5$
1.7 A	0.600	$2.06 \cdot 10^5$

Tabela 4.9 Resultados obtidos a partir das simulações magneto-evolutivas.

Ponto de Operação Considerado	Torque Ensaio [N.m]	Torque Simulado [N.m]	Indução Eficaz [T]	Indução de Reação de Armadura Eficaz [T]	k_f	k_r
600 rpm $I_{exc} = 1.7 \text{ A}$	12	17	0.389	0.328	1.013	0.322
600 rpm $I_{exc} = 1 \text{ A}$	4.7	6	0.236	0.246	1.014	0.350

Uma vez obtidos esses valores podemos agora aplicar a equação (2.74) e obter as curvas de torque do freio em função da velocidade que se encontram na Figura 4.15.

Como podemos observar, as curvas calculadas se aproximam daquelas ensaiadas, havendo maior erro em baixas rotações para ambas as curvas e para maiores rotações na curva de corrente de excitação de 1.7 A. Essas discrepâncias podem ser explicadas pelos seguintes fatos:

- ensaio realizado, da mesma maneira que no freio considerado no item 4.4, é

um ensaio de rotina e que não apresenta o controle das condições de realização e a precisão necessários;

- a rotação mínima de ensaio em ambas as curvas é de aproximadamente 400 rpm, o que limita a faixa de comparação entre os resultados;
- na curva de corrente de excitação 1.7 A, a potência dissipada é suficiente para que o efeito de dilatação do rotor se manifeste, visto que o entreferro neste freio é de apenas 1 mm, o que explicaria o fato de a partir de 800 rpm o valor simulado se estabilizar enquanto o de ensaio continua a subir.

Fig. 4.15 Comparação entre os resultados obtidos de ensaio e resultados da aplicação da metodologia de cálculo para um freio de 6 pólos.

Assim sendo podemos perceber que a metodologia apresentada se mostra viável para a análise de freios heteropolares, podendo servir como ferramenta de apoio no desenvolvimento de projetos desse tipo.

5 CONCLUSÕES

A metodologia apresentada neste trabalho permite a previsão do comportamento de freios de correntes parasitas através do cálculo analítico de suas curvas de torque em função da velocidade de rotação.

O desenvolvimento dessa metodologia se deu através da integração entre a abordagem analítica desenvolvida nos artigos de Davies [3,4] e as simulações por elementos finitos. Essas simulações forneceram os subsídios necessários à aplicação da abordagem analítica e permitiu a visualização dos fenômenos que ocorrem no freio através de mapas de cores e gráficos das grandezas de interesse, facilitando o entendimento da indução de correntes em meios maciços ferromagnéticos.

Essa abordagem mista tem a vantagem de necessitar de apenas algumas poucas simulações por elementos finitos, que são demoradas, para o cálculo dos parâmetros necessários. Com isso podemos obter rapidamente as curvas completas do freio e realizar o estudo de sensibilidade das curvas com alguns parâmetros de projeto, como materiais empregados e dimensões.

Como propostas para trabalhos futuros, podemos indicar:

- Comparando-se os resultados obtidos com para o freio de 24 pólos com aqueles obtidos com o freio de 6 pólos nota-se que houve apenas uma pequena mudança no valor do parâmetro k_ϕ , de aproximadamente 0.9 para 1, enquanto o valor de k_r permaneceu praticamente constante. Um estudo adicional, para avaliar a variação desses parâmetros em função da geometria

do freio, tornaria a metodologia apresentada independente das simulações por elementos finitos o que seria interessante já que essas ferramentas possuem custo elevado.

- A CEDRAT tornou disponível recentemente para o LMAG – Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado a versão mais nova do software FLUX 3D que permite a realização de simulações em três dimensões com a técnica de passo a passo no tempo contemplando o movimento. Com isso é possível refinar a análise de elementos finitos aplicada no presente trabalho no que tange a efeitos de borda. Um protótipo ensaiado em condições melhor controladas também é fundamental para a obtenção de comparações mais confiáveis.
- Também com o software FLUX 3D estender a análise a freios homopolares e freios heteropolares com pólos tipo garra (claw-pole) que, devido às suas configurações (corrente de excitação e correntes induzidas não coplanares e/ou ausência de simetria plana ou axial) só podem ser simulados em três dimensões.
- Estudar a aplicabilidade da metodologia de análise apresentada a motores lineares de indução e motores de indução com rotor maciço.

Referências Bibliográficas

- [1] STOLL, R. L. **The analysis of eddy currents**, Clarendon Press – Oxford, 1974.
- [2] AGARWAL, P. D. Eddy current losses in solid and laminated iron, **Trans. AIEE (Communications and Electronics)**, vol. 78, pp. 169-181, May 1959.
- [3] DAVIES, E. J. An experimental and theoretical study of eddy-currents couplings and brakes. **IEEE Trans. P. A. S.**, pp. 401-419, 1963.
- [4] DAVIES, E. J. General theory of eddy-current couplings and brakes. **Proceedings of IEE**, vol. 113, #5, pp. 825-837, May 1966.
- [5] Manual do software Flux 2D Versão 7.30 – CAD Package for electromagnetic and thermal analysis using finite elements, 1998.
- [6] CARDOSO, J. R. **Introdução ao Método dos Elementos Finitos para engenheiros eletricitas**, 1995.
- [7] IDA, N.; BASTOS, J. P. A. **Electromagnetics and Calculation of Fields**, Springer-Verlag, 1992.
- [8] Hermeline, F. Triangulation d'un polyedre en dimension N, **R.A.I.R.O. Analyse Numérique / Numerical Analysis**, Paris, 16, pp. 211-42, Jui./Sep. 1982.
- [9] VASSENT, E. **Contribution à la modélisation des moteurs asynchrones par la méthode des éléments finis**, Grenoble, 1990. 168p. Tese (Doutorado) – Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [10] NABETA, S. I. **Etude des regimes transitoires des machines synchrones par la méthode des éléments finis**, Grenoble, 1994. 127p. Tese (Doutorado) – Institut National Polytechnique de Grenoble.
- [11] BOZORTH, R. M. **Ferromagnetism**, IEEE Press, 1993.
- [12] ABE, N. M. **Acoplamento circuito elétrico – elementos finitos em regime transitório utilizando a metodologia de Dommel**, São Paulo, 1997. 76p. Tese (Doutorado) – Universidade de São Paulo.
- [13] COSTA, M. C. **Análise nodal aplicada no acoplamento circuito elétrico – elementos finitos na magnetodinâmica**, São Paulo, 1998. 84p. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
- [14] NABETA, S. I. **Solução de problemas magnetostáticos por elementos finitos utilizando o ICCG**, São Paulo, 1990. 67p. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.

- [15] ABE, N. M. **Simulação de estruturas ferromagnéticas com imãs permanentes pelo Método dos Elementos Finitos bidimensional: Uma nova abordagem**, São Paulo, 1992. 106p. Dissertação (Mestrado) – Universidade de São Paulo.
- [16] FALCONE, A. G. **Eletromecânica**, Ed. Edgard Blucher – São Paulo, 1979.
- [17] HANSELMAN, D.; LITTLEFIELD, B. **The student edition of MATLAB, Version 5 User's Guide**, Prentice Hall, 1997.
- [18] McCONNEL, H. M. Eddy current phenomena in ferromagnetic materials, **Trans. AIEE (Communications and Electronics)**, vol. 73, pp. 226-235, May 1954.