MARCOS A. R. FRANCO

Bacharel em Física, PUC-SP, 1983
Mestre em Física Nuclear, IFUSP, 1991

**Análise de Guias de Ondas Ópticos e de
Microondas pelo Método dos
Elementos Finitos**

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia de
Eletricidade.

São Paulo

1999

MARCOS A. R. FRANCO

Bacharel em Física, PUC-SP, 1983
Mestre em Física Nuclear, IFUSP, 1991

Análise de Guias de Ondas Ópticos e de Microondas pelo Método dos Elementos Finitos

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção
do título de Doutor em Engenharia de
Eletricidade.

Área de Concentração:
Sistemas de Potência

Orientador:
Prof.Dr. José Roberto Cardoso

**São Paulo
1999**

Franco, Marcos A. R.

Análise de Guias de Ondas Ópticos e de Microondas
pelo Método dos Elementos Finitos.

170p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1. Elementos finitos 2. Guias de Ondas
3. Microondas 4. Ótica Integrada 5. Moduladores
eletroópticos I. Universidade de São Paulo. Escola
Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e
Automação Elétricas II. t

Neste trabalho empreguei boa parte de meu tempo nestes últimos anos. Foram longos dias de procura, dúvidas e esperanças, trabalho em equipe e solitário. Diverti-me e alegrei-me conhecendo minhas limitações, descobrindo e montando novos jogos lógicos com a natureza. Dedico este trabalho à memória de Ariosto Franco meu amado pai.

AGRADECIMENTOS

Agradeço ao Prof. Dr. José Roberto Cardoso, pela orientação acadêmica e pela oportunidade de trabalhar em área tão interessante e produtiva;

Ao Dr. Carlos Rodolfo Silveira Stopa, pelo incentivo ao ingresso no programa de doutorado proporcionando a reorientação das atividades de pesquisa que tenho desenvolvido na Divisão de Física Aplicada do IEAv;

Ao Celso Fuhrmann pelo acompanhamento no desenvolvimento deste trabalho, leitura e sugestões apresentadas;

Ao Valdir Augusto Serrão pela leitura criteriosa do texto desta tese e pelas suas boas sugestões;

Ao Francisco Sircilli Neto pelo interesse e discussões em várias fases do andamento deste trabalho;

Ao Prof. Dr. José Márcio Machado pela participação ativa nas discussões e soluções dos problemas mais interessantes deste trabalho e pelo incentivo desde o início deste projeto pessoal;

À Nancy Mieko Abe pela participação nas discussões e na obtenção de vários resultados apresentados neste texto. E também, pela oportunidade de participar de um projeto tão empolgante como o da construção de uma ferramenta de software para a solução de problemas de óptica integrada utilizando o Método dos Elementos Finitos;

Ao Ângelo Passaro pela amizade e companheirismo demonstrado nos momentos mais difíceis. Pela participação na obtenção de vários resultados e criterioso auxílio na elaboração deste trabalho;

Aos amigos da Divisão de Física Aplicada pelo companheirismo e pelo bom ambiente para se estar e trabalhar;

À Alda Melania César, Helena de Fátima Miranda e Satyko Cristina Kikuchi Sakude que com interesse e trabalho contínuo, junto à nossa biblioteca, têm facilitado o acesso às mais recentes informações;

Aos demais colegas do IEAv pelo interesse e auxílio quando foi necessário;

Ao IEAv/CTA, por permitir e dar as condições para a realização deste trabalho;

À FAPESP pelo suporte parcial na fase final do desenvolvimento deste trabalho (processo 98/07789-7);

Em especial à minha esposa Rosana com quem divido minhas angústias e alegrias de uma jornada pessoal e profissional;

À minha filha Amanda que ainda tão jovem tem mostrado a seu pai novas e doces formas de viver e ser feliz;

Ao meu pai Ariosto Franco (em memória) e à minha mãe Maria Thereza Ruggieri Franco que sempre me incentivaram e se empenharam para que eu pudesse me dedicar integralmente aos meus estudos.

SUMÁRIO

RESUMO	
“ABSTRACT”	
1. INTRODUÇÃO	1
2. FORMULAÇÕES	5
2.1 Guias de Ondas Preenchidos Homogeneamente.....	5
2.1.1 Ondas TEM - Formulação do MEF.....	8
2.1.2 Modos TE e TM - Formulação do MEF.....	10
2.2 Guias Ópticos Anisotrópicos com Perfis Arbitrários de Índices de Refração	11
2.2.1 Modos E^x - Equação de Onda e Formulação do MEF.....	13
2.2.2 Modos E^y - Equação de Onda e Formulação do MEF.....	17
2.3 Extensão do MEF para Estudo de Problemas com Domínios Extensos	19
2.3.1 Transformação Espacial.....	20
2.3.2 Transformação Espacial Aplicada a Problemas Quase-Estáticos.....	23
2.3.3 Transformação Espacial Aplicada a Propagação de Ondas Ópticas	25
2.3.3.1 Modos E^x	25
2.3.3.2 Modos E^y	26
2.3.4 Variação das Propriedades Fictícias dos Materiais	27
3. IMPLEMENTAÇÕES	30
3.1 Transformação de Coordenadas para o Sistema Homogêneo no Triângulo	31
3.2 Uso da Técnica de Integração Analítica para Cálculo dos Elementos de Matriz	33
3.3 Matrizes para implementação	36
A. Modos TEM.....	36
B. Modos TE e TM.....	37
C. Modos E^x e E^y	38
D. Aplicação da Transformação Espacial - Problemas de Domínios Extensos.	44
D.1 Ondas TEM.....	50
D.2 Ondas E^x e E^y	52
4. VALIDAÇÃO E TESTE DAS FORMULAÇÕES	60
4.1 Modos TE e TM em guias homogêneos	60

4.1.1 Guia Retangular	60
4.1.2 Guia de Ondas Cilíndrico	63
4.1.3 Guia Cilíndrico Coaxial (Cabo Coaxial)	65
4.1.4 Guias de Ondas com Outras Seções Transversais.	66
4.2 Modos E^x e E^y em guias ópticos	69
4.2.1 Guia Óptico Tipo RIB	70
4.2.2 Guia Canal Homogêneo e Isotrópico.....	72
4.2.3 Guia Canal Homogêneo e Anisotrópico.....	73
4.2.4 Guia Planar Isotrópico e Não Homogêneo	74
4.2.4 Guia Canal Isotrópico e Não Homogêneo	74
4.2.5 Guia Canal Anisotrópico e Não Homogêneo	78
4.3 Análise modal em guias de ondas “abertos” - Aplicação das Transformações Espaciais	80
5. APLICAÇÃO TECNOLÓGICA EM ÓPTICA INTEGRADA: Moduladores	
Eletroópticos	86
5.1 Características de Propagação de Modos Ópticos em Guias do tipo $Ti:LiNbO_3$	88
A. Distribuição de Índices de Refração em Função dos Parâmetros de Fabricação...	89
B. Análise Modal do Guia $Ti:LiNbO_3$ em Função dos Parâmetros de Fabricação	91
5.2 Estudo do Acoplamento Fibra-Guia.....	95
5.2.1 Acoplamento Fibra – Guia ($Ti:LiNbO_3$) – Sobreposição de Modos Ópticos ...	97
5.2.2 Transformadores de Dimensão de Modo Óptico.....	102
5.3 Fundamentos do Efeito Eletroóptico em Cristais de $LiNbO_3$	109
5.4 Análise Numérica Aplicada ao Projeto de Moduladores Eletroópticos.....	114
5.4.1 Moduladores com Dois Eletrodos Simétricos	116
A. Cristal de $LiNbO_3$ com corte y_c e propagação em x_c	118
B. Cristal de $LiNbO_3$ com corte z_c e propagação em x_c	120
5.4.2 Moduladores Eletroópticos tipo Mach - Zehnder.....	122
5.4.1 Modulador Mach-Zehnder com Eletrodos “Ridge”	124
A. Variação da Espessura dos Eletrodos	126
B. Variação da Espessura da camada “Buffer”	128
C. Variação das Condições de Fabricação do Guia Óptico.....	130
5.4.2 Modulador Mach-Zehnder com Três Eletrodos Extras.	135

6. CONCLUSÃO	140
APÊNDICE – Dependência das Propriedades de Propagação de Modos Ópticos em Função do Modelo Empírico que Relaciona a Concentração de Prótons e a Variação do Índice de Refração em Guias Formados por Troca de Prótons e “Annealing”.....	146
A. Modelos que Relacionam Concentração de Prótons e Índice de Refração	147
B. Dependência das Propriedades de Propagação com Diferentes Modelos para $\Delta n_e(C)$ - Resultados Numéricos	153
REFERÊNCIAS	158

RESUMO

Neste trabalho, formulações escalares do Método dos Elementos Finitos (MEF) são utilizadas no cálculo das soluções de problemas de ondas TEM, TE, TM, E^x e E^y . A formulação para o cálculo dos modos E^x e E^y é uma extensão das formulações escalares apresentadas na literatura. Ela considera guias de ondas ópticos compostos de materiais dielétricos anisotrópicos com perfil arbitrário de índices de refração.

Modos TEM, E^x e E^y em guias de ondas quase-guiados são obtidos pela aplicação de uma formulação especial do MEF que incorpora a técnica das transformações espaciais. Essa formulação especial permite o cálculo acurado dos modos TEM em problemas de domínio aberto e frequências de corte de guias ópticos.

Os resultados obtidos para vários casos teste são comparados com aqueles apresentados na literatura.

As matrizes resultantes da aplicação do MEF a vários problemas de propagação de ondas foram calculadas por meio de uma técnica de integração analítica estendida, a qual é também apresentada. Esta abordagem estendida, que leva em conta materiais com anisotropias e não homogeneidades arbitrárias, permite o cálculo das “matrizes universais” para elementos finitos nodais em qualquer ordem de aproximação.

O MEF foi aplicado no estudo de moduladores eletroópticos tipo Mach-Zehnder. Uma aproximação quase estática foi utilizada para a determinação dos parâmetros elétricos do modulador, enquanto uma formulação escalar foi usada para o cálculo dos modos ópticos E^x e E^y na aproximação quase-TE e quase-TM, respectivamente.

O estudo do efeito de alguns parâmetros de fabricação de guias Ti:LiNbO_3 sobre o comportamento de propagação das ondas ópticas foi incluído neste trabalho. Estes parâmetros afetam fortemente o projeto de dispositivos eletroópticos.

É apresentada uma análise crítica dos modelos que relacionam a concentração de prótons às variações do índice de refração extraordinário, para guias manufaturados pela técnica de troca de prótons seguido de recozimento (“annealing”). Esta análise mostra a forte dependência das propriedades de propagação quando diferentes modelos concentração-índice de refração são adotados. Um estudo cuidadoso deve ser conduzido para permitir o projeto computacional de guias ópticos formados por troca de prótons seguido de “annealing”, a partir dos parâmetros de fabricação.

“ABSTRACT”

In this work, scalar formulations of the FEM are used to compute the solution of TEM, TE, TM, E^x and E^y wave problems. The formulation for the computation of E^x and E^y modes is an extension of scalar formulations presented in the literature. It takes into account optical waveguides composed of anisotropic and diffuse materials which present arbitrary refractive index profile.

TEM, E^x and E^y modes in quasi-guided waveguides are obtained by applying a special formulation of the FEM which incorporates the spatial transformation technique. This special formulation allows the computation of both TEM modes in open boundary domain and the cutoff frequency of optical waveguides.

The results obtained for several test cases are compared with those presented in the literature.

The matrices resulting from the application of the MEF to the several problems of wave propagation were obtained by an extended analytic integration technique which is also presented. This extended approach, that takes into account materials with anisotropies and arbitrary inhomogeneities, allows the calculation of the "universal matrices" for nodal elements of any approximation order.

The MEF was applied to the study of Mach-Zehnder type electrooptic modulators. A quasi-static approach is used for the determination of the electric parameters of the modulator, while the scalar wave formulation is used to compute the E^x and E^y optical modes in the quasi-TE and quasi-TM approximations, respectively.

A study of the effect of some Ti:LiNbO_3 optical waveguide manufacturing parameters on the wave propagation behavior were included in this work because these parameters strongly affect the design of electrooptic devices.

For in waveguides manufactured by the proton exchange technique followed by "annealing", a critical analysis of the models that relate the proton concentration to the variation of the extraordinary refraction index is also presented. This analysis shows that very different propagation properties are obtained depending on the adopted proton-concentration-to-refractive-index model. A judicious study must be conducted to allow the computational design of annealed proton exchanged waveguides from the manufacturing parameters.

1. INTRODUÇÃO

O Método dos Elementos Finitos (MEF) permite analisar estruturas de formato geométrico complexo, compostas por materiais não homogêneos, não lineares e com perdas ou ganhos. Associado às técnicas de eliminação de soluções sem significado físico (“modos espúrios”), o MEF tem se mostrado uma atraente e versátil ferramenta para a resolução de problemas práticos em eletromagnetismo e principalmente no estudo da propagação de ondas em regime de alta frequência.

O MEF foi pela primeira vez aplicado a problemas de guia de ondas eletromagnéticas ao final da década de 1960 [1] - [3]. Nestes trabalhos, uma formulação escalar foi utilizada para o cálculo de modos TE e TM em termos dos componentes longitudinais dos campos elétrico e magnético, respectivamente.

Embora uma formulação baseada em uma grandeza escalar seja inadequada para a descrição completa dos “modos híbridos”, presentes em meios com anisotropias arbitrárias ou com fortes não homogeneidades, tal formulação pode ser útil na análise de uma grande variedade de problemas práticos em engenharia de microondas e de óptica integrada. Além do menor consumo de tempo de processamento, as formulações escalares não apresentam os chamados “modos espúrios” que são freqüentemente encontrados em formulações vetoriais.

O aparecimento de “soluções espúrias” é a mais séria dificuldade no uso do método dos elementos finitos vetorial, baseado em elementos puramente nodais. Vários autores têm relatado que em formulações vetoriais, como por exemplo as baseadas no campo magnético, os modos espúrios não satisfazem a condição de divergência nula $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$.

Nestes casos, a divergência nula não é nem implícita e nem forçada. Isto faz com que o sistema seja sobre-determinado, ou excessivamente flexível. Acredita-se que esta seja uma das razões para o aparecimento das soluções espúrias.

Embora muitos trabalhos dedicados à eliminação dessas soluções não físicas tenham sido publicados, este é ainda um tema aberto a debate e o entendimento completo dos motivos de seu aparecimento devem ser melhor estabelecidos [4] - [6].

A aplicação do Método dos Elementos Finitos Escalar no projeto e análise de guias ópticos e dispositivos eletroópticos tem sido apresentada por vários autores e é, comprovadamente, uma abordagem confiável e versátil [7] - [11].

Apesar dos muitos trabalhos publicados sobre o estudo de guias ópticos isotrópicos e difusos [12] - [26], resultados abrangendo o estudo de guias anisotrópicos e difusos (índices de refração variando contínua e suavemente) não são freqüentemente encontrados [27] - [36].

Além disso, o projeto de dispositivos de óptica integrada envolve de forma decisiva a etapa de construção dos guias ópticos. Particularmente, no caso de guias fabricados por processo de difusão de Ti ou troca de prótons em cristais de LiNbO_3 , os perfis de índices de refração são fortemente dependentes das condições de fabricação. Deste modo, uma abordagem integrada entre a etapa de fabricação e a análise das características de propagação de ondas deve ser considerada.

No presente trabalho, serão apresentadas formulações escalares do MEF para a solução de ondas TEM, TE e TM em guias de microondas e para a solução de ondas E^x e E^y em guias ópticos de guiagem fraca. Tais formulações foram implementadas e validadas comparando-se os valores calculados com os obtidos por soluções analíticas ou apresentados na literatura. A formulação do MEF para ondas ópticas E^x e E^y é uma

abordagem estendida com relação às apresentadas na literatura e é capaz de modelar explicitamente meios anisotrópicos onde a propriedade dos materiais apresenta um perfil arbitrário [27] - [30].

Uma análise integrada das características de propagação em função do processo de fabricação de guias ópticos do tipo Ti:LiNbO_3 será apresentada. Resultados numéricos para constante de propagação e diâmetros efetivos de modos ópticos foram obtidos em função de parâmetros como: temperatura, tempo de difusão, largura e espessura do filme de Ti depositado, inicialmente, sobre a região onde se formará o guia óptico [30]. Será apresentada também uma análise crítica sobre os modelos empíricos que relacionam a concentração de prótons com a variação dos índices de refração em guias construídos por processo químico de troca de prótons, em cristais de LiNbO_3 , seguido de recozimento (“thermal annealing”) [37]. Tais modelos são fundamentais para a descrição das propriedades físicas do guia óptico formado por troca de prótons. Essas propriedades, por sua vez, são dados de entrada com os quais o programa de análise por elementos finitos procede o cálculo da constante de propagação e da distribuição de campos para cada possível modo óptico.

As implementações do MEF para modos TEM e para modos E^x e E^y foram utilizadas de forma complementar no estudo de dispositivos moduladores eletroópticos com várias configurações geométricas [38] - [41]. Moduladores tipo Mach-Zehnder foram analisados e configurações alternativas de eletrodos foram comparadas à estrutura de eletrodos coplanares convencional. Como resultado, foram encontrados moduladores que apresentam melhor ajuste dos parâmetros elétricos, menor consumo de potência, menor tensão de meia onda e maior largura de banda, mostrando a importância da abordagem integrada apresentada neste trabalho.

Guias ópticos são compostos por materiais dielétricos, onde a guiagem é devida à diferença entre os índices de refração dos materiais envolvidos. Uma característica marcante deste tipo de guia é a variação do grau de confinamento, ou guiagem, dos modos ópticos em função da frequência do sinal de excitação. Sempre que esta frequência decresce, uma porção não desprezível de campo óptico espalha-se a longas distâncias pela região do substrato. A descrição acurada da distribuição desse campo residual é importante para a determinação das frequências de corte. Uma implementação clássica do MEF apresenta dificuldades em estudar guias operando próximo ao comprimento de onda de corte. A grande diferença entre as dimensões físicas do substrato e da região do guia óptico, exige uma malha com muitos elementos finitos e, neste caso, a técnica de truncamento de malha pode ocasionar erros consideráveis na determinação das frequências de corte.

Uma técnica especial para o tratamento de guias de ondas abertos foi empregada. Tal abordagem faz uso de transformações espaciais (transformações de coordenadas) e permite o estudo de guias ópticos muito fracamente guiados, operando perto da frequência de corte [42].

A análise por elementos finitos envolve a construção de certas matrizes para cada elemento do domínio. Uma implementação convencional do MEF utiliza a técnica de integração numérica para o cálculo dos elementos dessas matrizes. Neste trabalho, a técnica de integração analítica foi empregada para todas as formulações apresentadas. Essa técnica permite o cálculo de “matrizes universais” que são independentes da geometria do elemento finito. O procedimento utilizado é uma extensão da técnica descrita por Silvester [78] e [79] e permite o cálculo das “matrizes universais” para problemas com meios anisotrópicos e não homogêneos, em qualquer ordem de aproximação [83] e [84].

2. FORMULAÇÕES

2.1 Guias de Ondas Preenchidos Homogeneamente

Guias de ondas fechados, preenchidos com materiais homogêneos e isotrópicos, são conceitualmente simples e representam importantes estruturas em engenharia de microondas. Os primeiros estudos numéricos de propagação de ondas, apresentados na literatura, foram realizados com esse tipo de dispositivo [1] - [3].

Uma grande variedade de guias de ondas de interesse tecnológico comportam a propagação de modos nos quais as condições de contorno podem ser satisfeitas por campos que não tenham todas os componentes presentes. Particularmente, a solução de interesse para linhas de transmissão é uma onda que apresenta somente componentes transversais (onda eletromagnética transversal - TEM), ou seja, $E_z = H_z = 0$, enquanto que para guias de ondas fechados soluções com $E_z \neq 0$ ou $H_z \neq 0$ são possíveis [43].

Ondas TEM possuem $E_z = H_z = 0$ (propagação da onda na direção z). Neste caso, o campo elétrico pode ser encontrado a partir do gradiente transversal de uma função escalar $\Phi(x,y)$, a qual depende somente das coordenadas transversais e é uma solução da equação de Laplace em duas dimensões:

$$\nabla(\epsilon \nabla \Phi) = 0 \quad (1)$$

Por outro lado, ondas transverso-elétricas (TE) apresentam $E_z = 0$, mas $H_z \neq 0$. Neste caso, todos os componentes podem ser obtidos a partir do componente axial H_z do campo magnético. As ondas transverso-magnéticas (TM) têm $H_z = 0$, mas $E_z \neq 0$ e os componentes de campo podem ser derivadas de E_z .

A equação de onda para os modos transversais TE e TM é obtida partindo-se das equações de Maxwell livres de fontes de correntes internas e assumindo propagação ao longo do eixo z [44]:

$$H_i = |H| e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (2)$$

$$E_i = |E| e^{j(\omega t - \beta z)}, \quad (3)$$

$$\nabla \times E = -j\omega\mu H, \quad (4)$$

$$\nabla \times H = +j\omega\varepsilon E, \quad (5)$$

$$\nabla \cdot H = 0, \quad (6)$$

$$\nabla \cdot (\varepsilon E) = 0, \quad (7)$$

onde: ω é a frequência angular, E e H são os campos elétrico e magnético, ε e μ são a permissividade e a permeabilidade, respectivamente, e β é a constante de propagação. Em situações em que existam perdas no dielétrico, a constante de propagação é complexa e escrita da forma $\gamma = \alpha + j\beta$, sendo α a constante de atenuação.

Utilizando as Eqs. (2)-(3) nas Eqs. (4) - (7) e suprimindo o fator $e^{j(\omega t - \beta z)}$, tem-se:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu H_x, \quad (8)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x = +j\omega\mu H_y, \quad (9)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu H_z, \quad (10)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = +j\omega\varepsilon E_x, \quad (11)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + j\beta H_x = -j\omega\varepsilon E_y, \quad (12)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = +j\omega\varepsilon E_z, \quad (13)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = +j\beta H_z, \quad (14)$$

$$\varepsilon \left(\frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} \right) = 0. \quad (15)$$

Combinando as Eqs. (8), (9), (11) e (12), pode-se escrever:

$$H_x = -\frac{j \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial y} - \beta \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (16)$$

$$H_y = -\frac{-j \left(\omega \epsilon \frac{\partial E_z}{\partial x} + \beta \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (17)$$

$$E_x = -\frac{-j \left(\beta \frac{\partial E_z}{\partial x} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial y} \right)}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (18)$$

$$E_y = -\frac{j \left(-\beta \frac{\partial E_z}{\partial y} + \omega \mu \frac{\partial H_z}{\partial x} \right)}{(k^2 - \beta^2)}, \quad (19)$$

onde $k^2 = \omega^2 \mu \epsilon$.

Pode-se observar, a partir das Eqs. (16) - (19), que se os componentes E_z e H_z são conhecidos, os demais componentes de E e H podem ser calculados.

Para ondas TE ($E_z = 0$), a equação de onda pode ser obtida a partir da substituição dos componentes de campo (18) e (19) em (10):

$$\nabla_t^2 H_z + (k^2 - \beta^2) H_z = 0, \quad (20)$$

onde, ∇_t^2 é o operador Laplaciano transversal dado por :

$$\nabla_t^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \quad (21)$$

Analogamente, para ondas TM ($H_z = 0$), a equação de onda pode ser derivada da substituição dos componentes de campo H_x e H_y , dadas em (16) e (17), na Eq. (13).

$$\nabla_t^2 E_z + (k^2 - \beta^2) E_z = 0. \quad (22)$$

As Eqs. (20) e (22) são equações escalares homogêneas de Helmholtz.

As diversas configurações de campos eletromagnéticos dos modos TE e TM, juntamente com o modo TEM (se esta puder existir), constituem um conjunto completo de

campos e podem descrever qualquer perturbação eletromagnética em um guia ou cavidade preenchidos homoganeamente com material dielétrico.

2.1.1 Ondas TEM - Formulação do MEF

Em meios anisotrópicos, a equação de Laplace pode ser escrita como:

$$\nabla(\epsilon_r \nabla \Phi) = 0. \quad (23)$$

A aplicação do MEF a uma certa classe de guias de ondas e guias ópticos define as características do meio dielétrico a ser considerado, tal que o tensor permissividade relativa tenha a seguinte forma:

$$\epsilon_r = \begin{bmatrix} \epsilon_{xx} & 0 \\ 0 & \epsilon_{yy} \end{bmatrix}. \quad (24)$$

Aplicando o método dos resíduos ponderados à Eq. (23), obtém-se a seguinte equação integral sobre o domínio, Ω .

$$\int_{\Omega} \left(\epsilon_{xx} \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial \Phi}{\partial x} + \epsilon_{yy} \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial \Phi}{\partial y} \right) dx dy = 0, \quad (25)$$

onde W é a função teste da técnica dos resíduos ponderados.

Na construção da solução aproximada da Eq. (25), pelo MEF, a região em estudo é dividida em subdomínios (elementos finitos). Os subdomínios, Ω^e , respeitam as seguintes regras:

$$\cup \Omega^e = \Omega, \quad (26)$$

$$\cap \Omega^e = \emptyset. \quad (27)$$

Os parâmetros Φ , na Eq. (25), podem ser determinados de modo a representar a melhor aproximação possível dos valores do potencial para os nós de cada elemento finito. Para os pontos nodais que pertencem à superfície com condições de contorno de Dirichlet,

Φ assume valores conhecidos Φ_0 ; e para pontos sobre a superfície com condição de contorno de Neumann, Φ permanece não especificado.

Escolher para as funções teste, W , o próprio conjunto de funções de base, N , procedimento denominado técnica de Galerkin [45], torna possível utilizar estas funções, tanto na interpolação da geometria de cada elemento finito, quanto na interpolação do potencial em seu interior.

A função potencial, Φ , e teste, W , são representadas separadamente, em cada elemento finito, por uma combinação linear de funções de aproximação ou de base, N .

$$\Phi = \sum_{j=1}^{n_0} N_j \phi_j = \{N\} \{\phi\}^T \quad (28)$$

$$W = \sum_{i=1}^{n_0} N_i w_i = \{N\} \{w\}^T \quad (29)$$

Substituindo as expansões dadas em (28) e (29) na Eq. (25), tem-se:

$$\sum_{i,j=1}^{n_0} \int_{\Omega^e} \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial N_i}{\partial x} \frac{\partial N_j}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial N_i}{\partial y} \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \phi_j dx dy = 0 \quad (30)$$

Pode-se representar a equação integral (30), na forma de um sistema linear de equações, como:

$$[S] \{\phi\}^T = \{b\}^T, \quad (31)$$

onde $\{b\}$ é o vetor das ações e

$$[S] = \int_{\Omega^e} \left(\varepsilon_{xx} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \varepsilon_{yy} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right) dx dy \quad (32)$$

onde n_0 é o número de pontos nodais no elemento finito, $\{N\}$ representa o conjunto completo de funções de base no elemento finito usado, $\{ \}$ representa uma matriz linha e $\{ \}^T$ é a matriz transposta.

A expressão apresentada na Eq. (32), para cada elemento finito, pode ser calculada por integração numérica, diretamente na implementação computacional do MEF ou pré-calculada por integração analítica, para um elemento finito de referência. O pré-cálculo das matrizes pode reduzir o tempo de processamento no cálculo e na montagem do sistema de equações. Nesse caso, o custo é o aumento da complexidade de implementação que é dependente do tipo de problema físico em estudo. Mais detalhes sobre o cálculo dos elementos de matriz serão apresentados no capítulo 3.

2.1.2 Modos TE e TM - Formulação do MEF

Como mostrado na seção 2.1, o fenômeno de propagação de ondas eletromagnéticas em guias de ondas fechados, sem fontes internas, pode ser descrito pela equação homogênea de Helmholtz dada por:

$$\nabla_t^2 \phi + k_c^2 \phi = 0, \quad (33)$$

onde a função potencial ϕ satisfaz a Eq. (33) na região Ω e $k_c^2 = k^2 - \beta^2$ é o número de onda de corte.

Aplicando-se à Eq. (33) o método dos resíduos ponderados associado à técnica de Galerkin, obtém-se a seguinte equação matricial:

$$[F]\{\phi\}^T - k_c^2 [M]\{\phi\}^T = \{0\}^T, \quad (34)$$

onde $\phi = H_z$, para ondas do tipo TE, e $\phi = E_z$ para ondas TM.

As matrizes $[F]$ e $[M]$ podem ser escritas como [45]:

$$[F] = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right) dx dy \quad (35)$$

$$[M] = \int_{\Omega} \{N\}^T \{N\} dx dy \quad (36)$$

Desde que $[F]$ e $[M]$ não envolvam quaisquer quantidades relacionadas a ω , fica evidente que k_c é uma constante. Uma vez encontrada k_c , a constante de propagação, β , pode ser calculada a partir da relação: $\beta^2 = \omega^2 \mu \epsilon - k_c^2$.

2.2 Guias Ópticos Anisotrópicos com Perfis Arbitrários de Índices de Refração

Guias ópticos têm sido utilizados em sistemas de telecomunicação, processamento de sinais, computação óptica e em sensores de alta precisão. Do ponto de vista da análise eletromagnética, os guias ópticos podem ser caracterizados por não possuírem bordas fechadas para a onda eletromagnética e, conseqüentemente, os campos eletromagnéticos podem se estender na direção transversal até o infinito. O efeito de guiagem, nesses guias preenchidos com material dielétrico, ocorre pela diferença de índice de refração dos materiais envolvidos. Embora metais possam estar presentes, suas propriedades físicas têm comportamento totalmente diferente do observado em frequências de microondas.

Em guias metálicos, preenchidos com dielétricos, modos TE e TM puros estão presentes. Para guias ópticos, entretanto, modos com outra configuração de campos são formados e uma classificação diferente deve ser utilizada. Para curtos comprimentos de onda e pequenas diferenças de índices de refração (guiagem fraca), o campo elétrico transversal é primariamente paralelo a um dos eixos transversais. Nesse limite, se o campo elétrico é paralelo ao eixo y , os modos são designados E_{mn}^y , e se o campo elétrico é paralelo ao eixo x , os modos são designados E_{mn}^x . Os subscritos m e n representam o número de máximos na amplitude de campo nas direções x e y , respectivamente [46].

Os modos E^x podem ser bem representados pela aproximação de modos quase-TE, para os quais o componente de campo $E_y = 0$ [7], [10]. Neste caso, soluções para a equação de onda podem ser obtidas para o componente E_x de campo elétrico. Por outro lado, os modos E^y podem ser bem representados pela aproximação de modos quase-TM, com o componente de campo $H_y = 0$. Neste caso, as soluções para a equação de onda podem ser encontradas para o componente H_x de campo magnético.

A formulação apresentada nesta seção estende a abordagem tradicional do MEF, aplicada a guias ópticos, para casos em que os índices de refração variam ao longo das direções transversais à direção de propagação. A seguir, serão determinadas as equações de onda para os modos E^x e E^y e a formulação do MEF para guias anisotrópicos com perfil arbitrário de índices de refração [27] - [30].

Considere uma onda propagando-se harmonicamente ao longo do eixo z , em um meio dielétrico anisotrópico, não homogêneo e sem perdas, com permeabilidade magnética relativa $\mu_r = \mu_0$ e tensor permissividade relativa definido por:

$$\epsilon_r = \begin{bmatrix} n_x^2(x, y) & 0 & 0 \\ 0 & n_y^2(x, y) & 0 \\ 0 & 0 & n_z^2(x, y) \end{bmatrix}, \quad (37)$$

sendo n_x , n_y e n_z os índices de refração nas direções cartesianas x , y , e z , respectivamente.

Observe que não há variação nos índices de refração ao longo da direção de propagação (z).

Partindo das equações de Maxwell, já apresentadas na seção 2, pode-se escrever:

$$\frac{\partial E_z}{\partial y} + j\beta E_y = -j\omega\mu_0 H_x, \quad (38)$$

$$\frac{\partial E_z}{\partial x} + j\beta E_x = +j\omega\mu_0 H_y, \quad (39)$$

$$\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} = -j\omega\mu_0 H_z, \quad (40)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial y} + j\beta H_y = +j\omega\epsilon_0 n_x^2 E_x, \quad (41)$$

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} + j\beta H_x = -j\omega\epsilon_0 n_y^2 E_y, \quad (42)$$

$$\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} = +j\omega\epsilon_0 n_z^2 E_z, \quad (43)$$

$$\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} = +j\beta H_z, \quad (44)$$

$$\frac{\partial(n_x^2 E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n_y^2 E_y)}{\partial y} + \frac{\partial(n_z^2 E_z)}{\partial z} = 0 \quad (45)$$

Impondo as aproximações quase-TE e quase-TM e os componentes transversais nulos em cada um desses modos, é possível construir, na aproximação de guiagem fraca, as equações de onda que descrevem o comportamento dos possíveis modos de propagação em guias ópticos.

2.2.1 Modos E^x - Equação de Onda e Formulação do MEF

Isolando H_y , E_z e H_z das Eqs.(39), (45) e (40), respectivamente, obtém-se:

$$H_y = \frac{\beta}{\omega\mu_0} E_x - \frac{j}{\omega\mu_0} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad (46)$$

$$E_z = -j \frac{1}{n_z^2 \beta} \left(\frac{\partial(n_x^2 E_x)}{\partial x} + \frac{\partial(n_y^2 E_y)}{\partial y} \right), \quad (47)$$

$$H_z = j \frac{1}{\omega\mu_0} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right). \quad (48)$$

Substituindo as Eqs. (46)-(48) na Eq. (41), resulta:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} \right) - \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n_z^2} \frac{\partial (n_x^2 E_x)}{\partial x} + \frac{1}{n_z^2} \frac{\partial (n_y^2 E_y)}{\partial y} \right) \\ = -\beta^2 E_x + \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0 n_x^2 E_x \end{aligned} \quad (49)$$

Utilizando a aproximação para modos quase-TE (com $E_y = 0$) e desenvolvendo a Eq. (49), resulta a equação escalar de onda para o modo E^x :

$$n_z^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n_z^2} \right) \frac{\partial (n_x^2 E_x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (n_x^2 E_x)}{\partial x^2} + n_z^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} = n_z^2 \beta^2 E_x - k_0^2 n_x^2 n_z^2 E_x \quad (50)$$

onde $k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \varepsilon_0$.

A seguir, aplica-se o método dos resíduos ponderados à Eq. (50) com as condições de contorno homogêneas de Dirichlet e Neumann no domínio S:

$$\hat{n} \times E = 0 \text{ (Dirichlet)}, \text{ na superfície } S_1 \quad (51)$$

$$\frac{\partial E}{\partial \hat{n}} = 0 \text{ (Neumann)}, \text{ na superfície } S_2 \quad (52)$$

com $S = S_1 + S_2$ e $\hat{n}$ correspondendo ao vetor unitário normal à superfície.

Para elementos nodais que pertencem à superfície de Dirichlet, S_1 , o campo E_x assume valores conhecidos, E_0 , e para a superfície de Neumann, S_2 , E_x permanece não especificado. A equação integral resultante da aplicação do método dos resíduos ponderados, pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} W \left[n_z^2 \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{1}{n_z^2} \right) \frac{\partial (n_x^2 E_x)}{\partial x} + \frac{\partial^2 (n_x^2 E_x)}{\partial x^2} + n_z^2 \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} \right. \\ \left. - \beta^2 n_z^2 E_x + k_0^2 n_x^2 n_z^2 E_x \right] dx dy + \int_{S_1} \overline{W} (E - E_0) dx dy + \int_{S_2} \overline{\overline{W}} \nabla (n_x^2 E_x) \cdot \tilde{n} dx dy = 0 \end{aligned} \quad (53)$$

onde: W , $\overline{W}$ e $\overline{\overline{W}}$ são funções peso, inicialmente arbitrárias.

As derivadas de segunda ordem mostram que a Eq (53) está escrita em sua forma “forte”. Pode-se obter a equação integral em sua forma “fraca” aplicando-se, aos termos com derivada segunda, o teorema de Green:

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\Omega = - \int_{\Omega} u \nabla^2 v \, d\Omega + \oint_S u \nabla v \cdot \tilde{n} \, dS, \quad (54)$$

Reescrevendo a Eq. (53), impondo $\overline{\overline{W}} = -W$ em S_2 e $W = 0$ em S_1 , enquanto E_x é escolhido, tal que, $E = E_0$ sobre S_1 , obtém-se:

$$\begin{aligned} & - \int_{\Omega} \left[E_x \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial n_x^2}{\partial x} + n_x^2 \frac{\partial W}{\partial x} \frac{\partial E_x}{\partial x} \right] dx dy - \int_{\Omega} \left[n_z^2 \frac{\partial W}{\partial y} \frac{\partial E_x}{\partial y} + W \frac{\partial n_z^2}{\partial y} \frac{\partial E_x}{\partial y} \right] dx dy \\ & + \int_{\Omega} W n_z^2 \frac{\partial (n_z^{-2})}{\partial x} \frac{\partial n_x^2}{\partial x} E_x \, dx dy + \int_{\Omega} W n_z^2 \frac{\partial (n_z^{-2})}{\partial x} n_x^2 \frac{\partial E_x}{\partial x} \, dx dy \\ & - \beta^2 \int_{\Omega} W n_z^2 E_x \, dx dy + k_0^2 \int_{\Omega} W n_x^2 n_z^2 E_x \, dx dy = 0 \end{aligned} \quad (55)$$

Procedendo a discretização do domínio em subdomínios (elementos finitos) pode-se aplicar a técnica de Galerkin, na qual, as mesmas funções polinomiais de base (N) são empregadas para as funções peso (W) originalmente arbitrárias. A aproximação de Galerkin usualmente fornece um resultado mais acurado quando comparado a outras escolhas para as funções peso e reproduz a mesma solução que a obtida pela abordagem variacional.

Para cada elemento finito pode-se, então, expandir a variável de estado E_x , as funções de ponderação (W) e as propriedades do material dielétrico (índice de refração; $n^2(x,y)$) em função dos polinômios de interpolação (N) e dos valores dessas grandezas nos pontos nodais do elemento finito:

$$E_x = \sum_{i=1}^{n_0} N_i E_{x_i} = \{N\} \{E_x\}^T \quad (56)$$

$$W = \sum_{j=1}^{n_0} N_j w_j = \{N\} \{w\}^T \quad (57)$$

$$n_x^2 = \sum_{r=1}^{n_0} N_r n_{x_r}^2 = \{N\} \{n_x^2\}^T \quad (58)$$

$$n_y^2 = \sum_{s=1}^{n_0} N_s n_{y_s}^2 = \{N\} \{n_y^2\}^T \quad (59)$$

$$n_z^2 = \sum_{t=1}^{n_0} N_t n_{z_t}^2 = \{N\} \{n_z^2\}^T \quad (60)$$

$$\frac{1}{n_z^2} = g_z^2 = \sum_{l=1}^{n_0} N_l g_{z_l}^2 = \{N\} \{g_z^2\}^T \quad (61)$$

Substituindo as Eqs. (56)-(61) na Eq. (55), obtém-se um sistema de equações lineares que pode ser representado matricialmente por [30]:

$$[F] \{E_x\}^T = n_{eff}^2 [M] \{E_x\}^T \quad (62)$$

onde n_{eff} é o índice efetivo dado por: $n_{eff} = \beta / k_0$.

As matrizes $[F]$ e $[M]$ são dadas da seguinte forma:

$$[M] = k_0^2 \int_{\Omega} n_z^2 \{N\}^T \{N\} dx dy \quad (63)$$

$$[F] = [F_1] - [F_2] - [F_3] - [F_4] - [F_5] + [F_6] \quad (64)$$

onde:

$$[F_1] = k_0^2 \int_{\Omega} n_x^2 n_z^2 \{N\}^T \{N\} dx dy \quad (65)$$

$$[F_2] = \delta_x \int_{\Omega} \frac{\partial n_x^2}{\partial x} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \{N\} dx dy \quad (66)$$

$$[F_3] = \int_{\Omega} n_x^2 \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} dx dy \quad (67)$$

$$[F_4] = \int_{\Omega} n_z^2 \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dx dy \quad (68)$$

$$[F_5] = \delta_z \int_{\Omega} \frac{\partial n_z^2}{\partial y} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dx dy, \quad (69)$$

$$[F_6] = \delta_z \int_{\Omega} \{N\}^T n_z^2 \frac{\partial g_z^2}{\partial x} \left(\delta_x \frac{\partial n_x^2}{\partial x} \{N\} + n_x^2 \frac{\partial \{N\}}{\partial x} \right) dx dy. \quad (70)$$

Os parâmetros δ_x e δ_z em $[F_2]$, $[F_5]$ e $[F_6]$ assumem o valor unitário para meios onde os índices de refração n_x e n_z são não homogêneos, ou zero para meios homogêneos. A menos dos termos contendo derivadas parciais dos índices de refração, esta é a mesma abordagem adotada por Koshiba para guias planares anisotrópicos [36] e para guias canais isotrópicos [24]. Em regiões homogêneas com anisotropia, as matrizes da Eq. (62) reduzem-se àquelas apresentadas em [47], e para regiões homogêneas e isotrópicas reduzem-se às apresentadas em [11]. As matrizes $[F_2]$, $[F_5]$ e $[F_6]$ são esparsas e não simétricas devido à presença dos termos com dn^2/dx ou dn^2/dy .

2.2.2 Modos E^y - Equação de Onda e Formulação do MEF

Isolando E_y , E_z e H_z das Eqs. (42), (43) e (44), respectivamente, obtém-se:

$$E_y = \frac{1}{\omega \epsilon_0 n_y^2} \left[-\beta H_x + j \frac{\partial H_z}{\partial x} \right], \quad (71)$$

$$E_z = -j \frac{1}{\omega \epsilon_0 n_z^2} \left[\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right], \quad (72)$$

$$H_z = -\frac{j}{\beta} \left[\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right]. \quad (73)$$

Substituindo a Eq (73) em (71), tem-se:

$$E_y = \frac{1}{\omega \epsilon_0 n_y^2} \left[-\beta H_x + \frac{1}{\beta} \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial H_x}{\partial x} + \frac{\partial H_y}{\partial y} \right) \right]. \quad (74)$$

Substituindo agora as Eqs. (72) e (74) em (38) e utilizando a aproximação para modos E^y , com o componente $H_y = 0$, obtém-se a equação de onda para o modo E^y :

$$\frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + n_y^2 \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{1}{n_z^2} \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) - \beta^2 H_x + n_y^2 k_0^2 H_x = 0. \quad (75)$$

De maneira análoga à apresentada na seção 2.2.1, pode-se aplicar à Eq. (75) o método dos resíduos ponderados associado à técnica de Galerkin. O sistema linear de equações resultante, escrito na forma matricial, é:

$$[\bar{F}]\{H_x\}^T = n_{eff}^2 [\bar{M}]\{H_x\}^T, \quad (76)$$

onde $n_{eff} = \beta/k_0$.

As matrizes $[\bar{M}]$ e $[\bar{F}]$ são dadas por:

$$[\bar{M}] = k_0^2 \int_{\Omega} \{N\}^T \{N\} dx dy, \quad (77)$$

$$[\bar{F}] = [\bar{F}_1] - [\bar{F}_2] - [\bar{F}_3] + [\bar{F}_4] + [\bar{F}_5] + [\bar{F}_6], \quad (78)$$

onde:

$$[\bar{F}_1] = k_0^2 \int_{\Omega} n_y^2 \{N\}^T \{N\} dx dy, \quad (79)$$

$$[\bar{F}_2] = \int_{\Omega} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} dx dy, \quad (80)$$

$$[\bar{F}_3] = \int_{\Omega} n_y^2 g_z^2 \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dx dy, \quad (81)$$

$$[\bar{F}_4] = \delta_y \int_{\Omega} g_z^2 \frac{\partial n_y^2}{\partial y} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dx dy, \quad (82)$$

$$[\bar{F}_5] = \delta_z \int_{\Omega} n_y^2 \frac{\partial g_z^2}{\partial y} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dx dy, \quad (83)$$

$$[\bar{F}_6] = \delta_z \int_{\Omega} n_y^2 g_z^4 \frac{\partial n_z^2}{\partial y} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial y} dx dy. \quad (84)$$

Nas Eqs.(76)-(84), foram assumidas as seguintes expansões em cada elemento finito:

$$H_x = \{N\}\{H_x\}^T, \quad (85)$$

$$n_y^2 = \{N\}\{n_y^2\}^T, \quad (86)$$

$$n_z^2 = \{N\}\{n_z^2\}^T, \quad (87)$$

$$\frac{1}{n_z^2} = g_z^2 = \{N\}\{g_z^2\}^T, \quad (88)$$

Do mesmo modo que o apresentado na seção 2.2.1, os parâmetros δ_y e δ_z , em $[\bar{F}_4]$, $[\bar{F}_5]$ e $[\bar{F}_6]$, assumem o valor unitário para meios com onde os índices de refração n_y e n_z são não homogêneos, ou zero para meios homogêneos.

2.3 Extensão do MEF para Estudo de Problemas com Domínios Extensos

O método dos elementos finitos pode ser aplicado a uma grande variedade de problemas físicos e sua característica marcante é necessitar de um domínio finito onde é efetuada a discretização em pequenos subdomínios. Porém, muitos problemas eletromagnéticos apresentam campos não confinados a uma região finita, mas sim, caracterizados por um domínio aberto. Portanto, técnicas especiais devem ser usadas para permitir uma solução adequada pelo método dos elementos finitos.

O truncamento da fronteira externa é a abordagem mais simples e baseia-se na suposição de que, à distâncias suficientemente afastadas, o potencial ou sua derivada normal é próxima de zero. Este procedimento é muito utilizado e conceitualmente de realização simples, porém, é acurado apenas para contornos externos muito afastados, o que aumenta demasiadamente o consumo de memória em uma implementação computacional.

Várias outras técnicas têm sido elaboradas e apresentadas na literatura para a solução de problemas quase-estáticos, propagação e espalhamento de ondas . Excelentes

revisões sobre a aplicação destas técnicas a problemas quase-estáticos são apresentadas em [48] e [49].

As técnicas mais comumente utilizadas são: as transformações conformes [50] - [53], os elementos infinitos [54] - [56], as transformações espaciais (mapeamento geométrico) [57] - [61], as condições de contorno absorvedoras (ABC) aplicadas à fronteira externa [62] - [65] e a recentemente desenvolvida “Perfectly Matching Layer” (PML) [66] - [71].

A técnica de transformação espacial tem sido aplicada a problemas quase-estáticos, por meio da bem conhecida transformação de Kelvin [61], para domínios externos circulares [57]. A técnica de transformação espacial requer poucas modificações nos códigos convencionais do MEF, preserva a esparsidade e a linearidade das matrizes globais e pode ser aplicada a meios materiais com anisotropias e não homogeneidades arbitrárias. Apenas recentemente, a técnica de transformação espacial foi empregada na solução de guias de microondas abertos (“microstripe line problem”) [60]. No melhor de nosso conhecimento, não há documentação sobre a aplicação dessa técnica para a simulação de guias de ondas ópticos.

Neste trabalho, será empregada uma variação da técnica de transformação espacial para domínios externos de formato retangular. A seguir, será apresentada a formulação do MEF associada à técnica de transformação espacial para problemas quase-estáticos e de propagação de onda óptica em meio anisotrópico, linear e homogêneo [42].

2.3.1 Transformação Espacial

Considere uma região fechada (R_i) que não sofre transformação espacial. Esta região será limitada pela superfície Γ_i e envolvida pela região externa R_e . A região externa

pode ser uma região aberta ou limitada pela superfície Γ_e , a qual é colocada muito longe de Γ_i (Fig. 1).

Fig. 1 Esquema mostrando o domínio a ser transformado (R_e) e a região interna não transformada (R_i).

A transformação espacial (T) escolhida é reversível, unitária e transforma as coordenadas cartesianas (x,y) , em R_e , em um par de novas coordenadas (r,s) . Como uma condição adicional, será imposto que a matriz Jacobiana para T seja diagonal:

$$[J_T] = \begin{bmatrix} J_{11} & 0 \\ 0 & J_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial r}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial s}{\partial y} \end{bmatrix}. \quad (89)$$

O Jacobiano é definido de forma usual:

$$|J_T| = \det \left(\begin{bmatrix} J_T \end{bmatrix} \right), \quad (90)$$

e os elementos de superfície para integração nas regiões transformada e não transformada são relacionados por:

$$dx \, dy = |J_T^{-1}| \, dr \, ds \quad (91)$$

Essa classe de transformação leva a um novo sistema de referência ortogonal o qual coincide com o sistema cartesiano original.

Se derivadas parciais estiverem presentes nas formulações do MEF, elas podem ser transformadas para o novo sistema de coordenadas, aplicando-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \{N\}}{\partial x} = \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x} + \frac{\partial \{N\}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial x}, \quad (92)$$

$$\frac{\partial \{N\}}{\partial y} = \frac{\partial \{N\}}{\partial r} \frac{\partial r}{\partial y} + \frac{\partial \{N\}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y} = \frac{\partial \{N\}}{\partial s} \frac{\partial s}{\partial y}, \quad (93)$$

O domínio retangular, apresentado na Fig. 2, representa a aplicação da transformação espacial. O domínio transformado está dividido em regiões, II, III e IV, e envolve a região central I que não sofre transformação. Sobre a região II, é aplicada transformação apenas na direção x ; na região III, apenas na direção y ; enquanto que na região IV, a transformação afeta as direções x e y .

Fig. 2 Esquema do domínio transformado separado em regiões.

Na Fig. 2, as coordenadas x_e e y_e definem a fronteira do domínio completo não transformado, r_i e s_i são as coordenadas, que limitam a região I e r_e e s_e limitam o contorno externo da região transformada. A Tabela 1 apresenta as transformações espaciais utilizadas neste trabalho, aplicadas em cada região.

TABELA 1 - Transformações espaciais em cada região

Região	Transformação	
I	$r = x$	$s = y$
II	$r = C_{11} + \frac{C_{12}}{x}$	$s = y$
III	$r = x$	$s = C_{21} + \frac{C_{22}}{y}$
IV	$r = C_{11} + \frac{C_{12}}{x}$	$s = C_{21} + \frac{C_{22}}{y}$

As transformações satisfazem:

$$\frac{\partial r}{\partial y} = \frac{\partial s}{\partial x} = 0 \quad (94)$$

Os parâmetros C na Tabela 1 são obtidos impondo-se que a transformação leve $x_e \rightarrow r_e$ e $y_e \rightarrow s_e$ em cada região. Adicionalmente, x_i e y_i devem coincidir com r_i e s_i , respectivamente. A forma geral destes coeficientes é:

$$C_{11} = r_e - \frac{(r_e - r_i)}{(x_i - x_e)} x_i, \quad (95)$$

$$C_{12} = \frac{(r_e - r_i)}{(x_i - x_e)} x_e x_i, \quad (96)$$

$$C_{21} = s_e - \frac{(s_e - s_i)}{(y_i - y_e)} y_i, \quad (97)$$

$$C_{22} = \frac{(s_e - s_i)}{(y_i - y_e)} y_e y_i. \quad (98)$$

2.3.2 Transformação Espacial Aplicada a Problemas Quase-Estáticos

Problemas quase-estáticos e ondas TEM podem ser analisados a partir da equação de Laplace:

$$\nabla(\epsilon \nabla \Phi) = 0, \quad (99)$$

Como apresentado na seção 2.1.1, o sistema de equações, obtido após a aplicação do MEF, tem a seguinte forma:

$$[S]\{\phi\}^T = \{b\}^T, \quad (100)$$

onde:

$$[S]_{\Omega} = \int_{\Omega} [\nabla_{\Omega}\{N\}]^T [\bar{\epsilon}_r] [\nabla_{\Omega}\{N\}] dx dy \quad (101)$$

Aplicando-se a transformação espacial na Eq. (101), tem-se:

$$[S]_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} [\nabla_{\Omega_T}\{N\}]^T [J_T]^T [\bar{\epsilon}_r] [J_T] [\nabla_{\Omega_T}\{N\}] |J_T^{-1}| dr ds \quad (102)$$

ou ainda:

$$[S]_{\Omega_T} = [S_{x \rightarrow r}] + [S_{y \rightarrow s}] \quad (103)$$

Considerando o tensor permissividade diagonal, pode-se escrever:

$$[S_{x \rightarrow r}] = \int_{\Omega_T} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial r} J_{11}^T J_{11} \epsilon_{xx} \frac{\partial \{N\}}{\partial r} |J_T^{-1}| dr ds, \quad (104)$$

$$[S_{y \rightarrow s}] = \int_{\Omega_T} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial s} J_{22}^T J_{22} \epsilon_{yy} \frac{\partial \{N\}}{\partial s} |J_T^{-1}| dr ds. \quad (105)$$

A partir das Eqs. (104) e (105), pode-se observar que praticamente não são necessárias modificações no código computacional de uma implementação tradicional do MEF, é necessário, apenas, utilizar as “propriedades físicas fictícias” do domínio transformado no lugar das propriedades do material dielétrico (ϵ_{xx} e ϵ_{yy}).

$$\epsilon_{Txx} = \epsilon_{xx} J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|, \quad (106)$$

$$\epsilon_{Tyy} = \epsilon_{yy} J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|. \quad (107)$$

2.3.3 Transformação Espacial Aplicada a Propagação de Ondas Ópticas

Nos últimos anos, a análise física de guias de ondas ópticos tem sido realizada com a utilização de vários métodos. Uma característica bem conhecida desses dispositivos é seu comportamento quando a frequência do sinal aplicado ao guia de onda decresce. Nesta situação, uma quantidade não desprezível dos campos ópticos pode ser encontrada na região que o envolve. Essas amplitudes de campo são muito importantes na avaliação das frequências de corte.

Guias ópticos do tipo canal são imersos em substrato dielétrico cujas dimensões físicas são muito maiores que aquelas da região do guia, porém finitas. Neste caso, toda a região do substrato deveria ser considerada na simulação. Esse tipo de problema assemelha-se a um caso de domínio aberto, devido às grandes dimensões do substrato em comparação à região do canal.

A seguir, serão retomadas as equações do MEF para guias ópticos anisotrópicos e homogêneos e aplicadas as transformações espaciais [42]. Embora materiais não homogêneos possam ser considerados, isto apenas complicaria as implementações, pois em casos práticos, a região dos guias ópticos é pequena e, portanto, deve fazer parte da região não transformada (Região I); já o substrato homogêneo ocupa grandes dimensões.

2.3.3.1 Modos E^x

A equação de onda escalar para os modos E^x , em meios anisotrópicos e homogêneos, pode ser escrita como (ver seção 2.2.1):

$$\frac{n_x^2}{n_z^2} \frac{\partial^2 E_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial y^2} - \beta^2 E_x + k_0^2 n_x^2 E_x = 0 \quad (108)$$

A aplicação da técnica dos resíduos ponderados, resulta na seguinte equação

matricial:

$$[F]\{E_x\}^T = n_{eff}^2 [M]\{E_x\}^T, \quad (109)$$

onde:

$$[F]_{\Omega} = \int_{\Omega} \left[k_0^2 n_x^2 \{N\}^T \{N\} - \frac{n_x^2}{n_z^2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} - \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right] dx dy, \quad (110)$$

$$[M]_{\Omega} = k_0^2 \int_{\Omega} \{N\}^T \{N\} dx dy. \quad (111)$$

Aplicando-se as transformações espaciais, descritas na seção 2.3, obtém-se:

$$[F]_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \left[k_0^2 n_x^2 \{N\}^T \{N\} - \frac{n_x^2}{n_z^2} J_{11}^T J_{11} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} - J_{22}^T J_{22} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right] |J_T^{-1}| dr ds, \quad (112)$$

$$[M]_{\Omega_T} = k_0^2 \int_{\Omega_T} \{N\}^T \{N\} |J_T^{-1}| dr ds. \quad (113)$$

Essas são as matrizes do MEF, para os modos E^x , nas regiões onde há uma transformação de domínio imposta.

2.3.3.2 Modos E^y

A equação de onda escalar, para os modos E^y em meios anisotrópicos e homogêneos, pode ser escrita como (ver seção 2.2.2):

$$\frac{1}{n_y^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial x^2} + \frac{1}{n_z^2} \frac{\partial^2 H_x}{\partial y^2} - \frac{\beta^2}{n_y^2} H_x + k_0^2 H_x = 0 \quad (114)$$

A utilização da técnica dos resíduos ponderados, resulta na seguinte equação matricial:

$$[F]\{H_x\}^T = n_{eff}^2 [M]\{H_x\}^T, \quad (115)$$

onde:

$$[F]_{\Omega} = \int_{\Omega} \left[k_0^2 \{N\}^T \{N\} - \frac{1}{n_y^2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} - \frac{1}{n_z^2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right] dx dy, \quad (116)$$

$$[M]_{\Omega} = \int_{\Omega} \frac{k_0^2}{n_y^2} \{N\}^T \{N\} dx dy. \quad (117)$$

Aplicando-se as transformações espaciais, obtém-se:

$$[F]_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \left[k_0^2 \{N\}^T \{N\} - \frac{1}{n_y^2} J_{11}^T J_{11} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial x} \frac{\partial \{N\}}{\partial x} - \frac{1}{n_z^2} J_{22}^T J_{22} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial y} \frac{\partial \{N\}}{\partial y} \right] |J_T^{-1}| dr ds, \quad (118)$$

$$[M]_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} \frac{k_0^2}{n_y^2} \{N\}^T \{N\} |J_T^{-1}| dr ds \quad (119)$$

Essas são as matrizes do MEF, para os modos E^y , nas regiões onde há uma transformação de domínio.

2.3.4 Variação das Propriedades Fictícias dos Materiais

Como foi mostrado nas Eqs. (106) e (107), a aplicação das transformações espaciais pode ser representada pela inclusão de materiais fictícios com propriedades dependentes das coordenadas. A seguir, será apresentado o comportamento típico destas propriedades fictícias, na região do domínio transformado, para o caso de ondas TEM. Para ondas E^x e E^y , pode-se utilizar o mesmo artifício empregando diretamente o produto dos índices de refração (n_i , com $i = x, y, z$) pelo fator $|J_T^{-1}|$ e produtos $J_{11}^2 |J_T^{-1}|$ e $J_{22}^2 |J_T^{-1}|$, na forma em que aparecem nas matrizes $[M]$ e $[F]$ nas Eqs. (112) - (113) e (118) - (119).

Considere que as novas propriedades dos materiais, em todo o domínio, são proporcionais a:

$$propr = J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|, \quad (120)$$

$$props = J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|. \quad (121)$$

As dimensões do domínio, considerado como exemplo, são apresentadas na Tabela 2. As Figs. 3 e 4 apresentam os valores assumidos por *propr* e *props* em todo o domínio e em detalhe próximo à região I, que não sofre transformação. Essas figuras mostram a forte variação que resulta da transformação espacial. Deste modo, fica clara a necessidade de uma malha refinada próxima ao contorno externo da região transformada, para melhor representar a rápida variação dos fatores *propr* e *props*, nessa região.

TABELA 2 - Dimensões do domínio (μm)

x_e	y_e	x_i e r_i	y_i e s_i	r_e	s_e
2500	10000	50	100	100	200

Fig. 3 Variação do fator *propr*: (a) no domínio, (b) próximo à região I.

Fig. 4 Variação do fator *props*: (a) no domínio, (b) próximo à região I.

Para problemas de domínio aberto, x_e e y_e aproximam-se do infinito. Nessa situação, a aplicação das transformações espaciais no MEF resulta em elementos de matriz de valor elevado, afetando o condicionamento da matriz global. Se as matrizes $[F]$ e $[M]$ são calculadas pela técnica da integração analítica, singularidades matemáticas aparecem nos elementos finitos que têm ao menos um ponto nodal na fronteira externa da região transformada. Para evitar estas singularidades, pode-se utilizar um cálculo aproximado para a integração nestes elementos, tal como, a quadratura de Gauss onde pontos internos são utilizados ao invés dos pontos nodais.

3. IMPLEMENTAÇÕES

A aplicação de diferentes formulações do MEF a problemas de microondas e óptica integrada e sua utilização na análise e projeto de dispositivos de interesse tecnológico são os objetivos básicos do presente trabalho. Neste contexto, as implementações computacionais foram realizadas com o intuito de permitir, com o menor custo de programação, o teste de várias formulações do MEF.

Rotinas para a fase de processamento do MEF foram desenvolvidas e escritas para o pacote de processamento numérico MATLAB. A facilidade de interação com sua linguagem, a possibilidade de manipular matrizes densas e esparsas de maneira direta, a existência de funções especializadas para a solução de problemas de autovalores e autovetores em sistemas matriciais esparsos apontam o MATLAB como um excelente ambiente para a prototipação e teste de novos desenvolvimentos em formulações do MEF. Em particular, utilizou-se uma função pré-programada (*sptarn*) que é parte de um módulo externo ao Matlab (“Toolbox”) denominado “Partial Differential Equation”. Esta função é capaz de solucionar o problema de autovalores e autovetores de sistemas matriciais complexos, não simétricos e esparsos. O algoritmo baseia-se no método de Arnoldi com transformação espectral [72] - [74].

Nas fases de pré-processamento (modelo geométrico, malha, atribuição de propriedade dos materiais e imposição das condições de contorno) e pós-processamento (visualização gráfica de isolinhas de campo), utilizou-se o programa LMAG2D (versão DOS), originalmente desenvolvido na Escola Politécnica da USP, que pode ser aplicado a problemas eletrostáticos, magnetostáticos e eletrocinéticos [75] e [76].

3.1 Transformação de Coordenadas para o Sistema Homogêneo no Triângulo

Neste trabalho, os domínios em estudo serão subdivididos em elementos finitos de formato triangular.

As funções de base escalares N_i (funções de interpolação), no sistema de coordenadas homogêneas no triângulo, serão escritas pelo produto de polinômios auxiliares de grau m , para cada eixo ζ do sistema de coordenadas homogêneas e para aproximações polinomiais de ordem ord . Os polinômios auxiliares, para elementos do tipo Lagrange, são definidos por:

$$R_m(ord, \zeta) = \frac{1}{m!} \prod_{k=0}^{m-1} (ord \zeta - k) \text{ para } 1 \leq m \leq N, \quad (122)$$

$$R_0(ord, \zeta) = 1 \text{ para } m = 0. \quad (123)$$

As funções de base, associadas a cada nó do triângulo, são dadas por:

$$N_i = \alpha_{rst} = R_r(ord, \zeta_1) R_s(ord, \zeta_2) R_t(ord, \zeta_3), \quad (124)$$

com $r + s + t = ord$.

O novo sistema de coordenadas homogêneas é composto por três coordenadas: ζ_1 , ζ_2 e ζ_3 , tal que $\zeta_3 = 1 - \zeta_1 - \zeta_2$. A matriz Jacobiana da transformação de coordenadas tem a forma:

$$J_\zeta = \begin{bmatrix} \frac{\partial \zeta_1}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_1}{\partial y} \\ \frac{\partial \zeta_2}{\partial x} & \frac{\partial \zeta_2}{\partial y} \end{bmatrix}, \quad (125)$$

sendo o Jacobiano definido como:

$$|J_\zeta| = \det([J_\zeta]) \quad (126)$$

Os elementos de superfície de integração, nos domínios transformado e não transformado, são relacionados por:

$$dxdy = |J_\zeta^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2 = 2\Delta d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (127)$$

onde Δ corresponde à área do triângulo.

A relação entre as coordenadas homogêneas, locais no triângulo de referência, e as coordenadas cartesianas no domínio, é dada por:

$$\begin{bmatrix} \zeta_1 \\ \zeta_2 \\ \zeta_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ x \\ y \end{bmatrix}, \quad (128)$$

onde: $a_i = x_{i+1} y_{i+2} - x_{i+2} y_{i+1}$,

$$b_i = y_{i+1} - y_{i-1},$$

$$c_i = x_{i-1} - x_{i+1},$$

x e y são as coordenadas cartesianas nos pontos nodais,

a , b , e c são obtidos por permutações cíclicas de seus índices e

$i = 1, 2, 3$.

Nas formulações do MEF normalmente aparecem derivadas parciais das funções de base com relação às coordenadas do domínio. A transformação destas derivadas para as coordenadas homogêneas no triângulo pode ser obtida aplicando-se a regra da cadeia:

$$\frac{\partial \{N\}}{\partial x} = \sum_{m=1}^3 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_m} \frac{\partial \zeta_m}{\partial x} = \sum_{m=1}^3 \frac{b_m}{2\Delta} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_m}, \quad (129)$$

$$\frac{\partial \{N\}}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_n} \frac{\partial \zeta_n}{\partial y} = \sum_{n=1}^3 \frac{c_n}{2\Delta} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_n}. \quad (130)$$

A vantagem da utilização dos elementos de referência em coordenadas homogêneas é que as integrais resultantes do MEF ficam independentes dos parâmetros geométricos dos elementos, e desta forma, podem ser calculadas uma única vez para todos os triângulos do domínio.

3.2 Uso da Técnica de Integração Analítica para Cálculo dos Elementos de Matriz

A análise de problemas físicos pelo MEF envolve a construção de certas matrizes para cada elemento finito do domínio. Três diferentes abordagens têm sido utilizadas para calcular essas matrizes. A forma clássica usa fórmulas de quadratura para calcular os elementos de matriz. Esse procedimento, denominado método de integração direta, é usado por inúmeros autores [77]. Um segundo procedimento, o método de integração analítica, calcula os elementos de matriz usando fatores paramétricos, os quais dependem do tipo de elemento finito, mas não de sua geometria [45], [78] - [81]. Uma terceira possibilidade, consiste em definir uma representação exata do operador diferencial [82]. Nesse caso, as matrizes de elementos finitos são calculadas como combinações ponderadas de certas “matrizes universais”.

A integração direta é o método mais simples de implementar, mas é também computacionalmente mais custoso, quando comparado aos outros dois métodos. Implementações baseadas em integrações analíticas são aproximadamente três vezes mais rápidas que o método baseado em fórmulas de quadratura, no caso de elementos de segunda ordem de aproximação polinomial, e seis vezes mais rápido para elementos de terceira ordem [78].

Além disso, o cálculo prévio e a armazenagem das matrizes, utilizando a técnica de integração analítica, possibilitam uma eficiente implementação de módulos processadores com adaptação automática da ordem de aproximação dos elementos finitos (“malha tipo-p”). Contudo, a complexidade das expressões analíticas obtidas para os elementos de matriz aumenta rapidamente com a ordem de aproximação, fazendo com que a implementação computacional e a busca de erros seja custosa, sobretudo no caso de problemas com anisotropias arbitrárias e com propriedades físicas que dependam das coordenadas do domínio.

O trabalho pioneiro na sistematização da utilização da técnica de integração analítica foi apresentado por Silvester para elementos finitos triangulares e tetraédricos isotrópicos e homogêneos [78] e [79]. A aplicação da técnica de integração analítica foi estendida recentemente para situações com anisotropia e não homogeneidades arbitrárias [83] e [84]. Nesses trabalhos, foram apresentados “notebooks” para o programa MATHEMATICA, que são capazes de calcular todas as matrizes, de elementos tetraédricos, necessárias para a solução da equação de Helmholtz escalar, em qualquer ordem de aproximação desejada. Esta abordagem estendida foi realizada durante o desenvolvimento do presente trabalho e será utilizada para o cálculo dos elementos de matriz dos elementos triangulares.

A aplicação da técnica de integração analítica é feita com as integrais escritas nas coordenadas homogêneas do elemento finito. Desta forma, as matrizes são calculadas uma única vez, sendo independentes das dimensões do elemento e dependentes apenas do tipo e da ordem da aproximação utilizada.

Como exemplo da aplicação desta técnica, será apresentado como determinar os elementos de matriz correspondentes a uma típica integral encontrada na formulação do MEF em problemas com materiais anisotrópicos e não homogêneos.

Assumindo elementos finitos de formato triangular, será calculada a matriz correspondente à seguinte integral:

$$[S] = \sum_{m,n=1}^3 c_m c_n \int_{\zeta_1=0}^1 \int_{\zeta_2=0}^{1-\zeta_1} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_m} \{n^2\}^T \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_n} \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (131)$$

onde $\{N\}$ representa o conjunto completo de funções de base escritas em coordenadas homogêneas, $\{n^2\}$ são os valores da propriedade física em cada ponto nodal, $\{ \}$ representa uma matriz linha e $\{ \}^T$ a matriz transposta.

Pode-se escrever a Eq. (131) na forma de somatórias, tal que o elemento de matriz S_{ij} pode ser escrito como:

$$S_{ij} = \sum_{k=1}^{no} \sum_{m,n=1}^3 c_m c_n n_k^2 Q_{ij}^{kmn}, \quad (132)$$

onde no é o número de pontos nodais em cada triângulo; $i, j = 1, \dots, no$ e n_k é o valor da propriedade física no $k^{\text{ésimo}}$ ponto nodal. Nessa abordagem, usa-se, também, uma expansão nodal para representar a variação das propriedades físicas no interior do elemento finito:

$$n^2 = \sum_{k=1}^{no} n_k^2 N_k, \quad (133)$$

$$Q_{ij}^{kmn} = \iint_{\zeta_1 \zeta_2} \frac{\partial N_k}{\partial \zeta_m} N_i \frac{\partial N_j}{\partial \zeta_n} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (134)$$

Desta forma, a matriz S será obtida pela soma de outras matrizes multiplicadas pelas correspondentes propriedades de material nos pontos nodais. As matrizes $[Q]$ são

denominadas “matrizes universais” e têm apenas termos numéricos em seus elementos. Além disso, são únicas para todos os elementos do domínio e podem ser pré-calculadas e armazenadas para implementação.

A matriz $[S]$ para elementos de primeira ordem terá a seguinte forma:

$$[S] = \frac{(c_1 n_1^2 + c_2 n_2^2 + c_3 n_3^2)}{6} \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix} \quad (135)$$

3.3 Matrizes para implementação

Nesta seção, serão apresentadas as matrizes locais para as formulações já descritas, considerando o emprego de elementos finitos de formato triangular.

A. Modos TEM

O sistema matricial resultante da aplicação do MEF à equação de Laplace é:

$$[S]\{\phi\}^T = \{b\}^T, \quad (136)$$

como apresentado na seção 2.1.1. A matriz $[S]$ para um dado elemento finito em coordenadas homogêneas será:

$$[S] = \sum_{m,n=1}^3 \frac{b_m b_n \epsilon_{xx} + c_m c_n \epsilon_{yy}}{2 \Delta} \iint_{\zeta_1 \zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_m} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_n} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (137)$$

onde Δ é a área do elemento finito.

Para elementos triangulares de primeira ordem de aproximação resulta:

$$[S] = \frac{\epsilon_{xx}}{4 \Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ b_2 b_1 & b_2^2 & b_2 b_3 \\ b_3 b_1 & b_3 b_2 & b_3^2 \end{bmatrix} + \frac{\epsilon_{yy}}{4 \Delta} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ c_2 c_1 & c_2^2 & c_2 c_3 \\ c_3 c_1 & c_3 c_2 & c_3^2 \end{bmatrix} \quad (138)$$

B. Modos TE e TM

Para ondas transversais elétricas e magnéticas, os seguintes sistemas matriciais são obtidos:

$$\frac{1}{\varepsilon_r} [S] \{H_z\}^T - k_c^2 \mu_r [T] \{H_z\}^T = 0, \text{ para modo TE} \quad (139)$$

$$\frac{1}{\mu_r} [S] \{E_z\}^T - k_c^2 \varepsilon_r [T] \{E_z\}^T = 0, \text{ para modo TM} \quad (140)$$

onde

$$[S] = \frac{1}{2\Delta} \sum_{m,n=1}^3 (b_m b_n + c_m c_n) \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_m} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_n} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (141)$$

$$[T] = 2\Delta \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \{N\}^T \{N\} d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (142)$$

A dupla soma na Eq. (141) pode ser reduzida a uma soma simples utilizando as seguintes definições [45]:

$$b_i b_j + c_i c_j = -2\Delta \cot \theta_k, \quad (i \neq j) \quad (143)$$

$$b_i^2 + c_i^2 = 2\Delta (\cot \theta_j + \cot \theta_k), \quad (144)$$

onde θ_i é o ângulo interno ao triângulo no ponto vértice i e i, j, k são os vértices do triângulo.

Escrevendo explicitamente todos os termos da Eq. (141) e substituindo as Eqs. (143) e (144) é possível agrupar termos:

$$[S] = \sum_{k=1}^3 [Q]_k \cot \theta_k \quad (145)$$

$$[Q]_k = \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(\frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_{k+1}} - \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_{k-1}} \right) \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_{k+1}} - \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_{k-1}} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (146)$$

Note-se que as matrizes $[Q]$ e a matriz $[T]$, normalizada com respeito à área do elemento finito, são adimensionais e independem da geometria dos elementos finitos, qualquer que seja a ordem de aproximação.

Para elementos triangulares de primeira ordem resulta:

$$[S] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 + c_1^2 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2^2 + c_2^2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3^2 + c_3^2 \end{bmatrix} \quad (147)$$

$$[T] = \frac{\Delta}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (148)$$

C. Modos E^x e E^y

Os sistemas matriciais de equações para os modos E^x e E^y , em meios materiais anisotrópicos e não homogêneos, têm a seguinte forma:

$$[F]\{E_x\}^T = n_{eff}^2 [M]\{E_x\}^T, \text{ para modos } E^x \quad (149)$$

$$[\bar{F}]\{H_x\}^T = n_{eff}^2 [\bar{M}]\{H_x\}^T, \text{ para modos } E^y \quad (150)$$

onde n_{eff} é o índice efetivo dado por: $n_{eff} = \beta / k_0$.

• **Modos E^x**

Para os modos E^x , as matrizes $[M]$ e $[F]$ em coordenadas homogêneas no triângulo podem ser escritas como (ver seção 2.21):

$$[M] = 2 k_0^2 \Delta \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} n_z^2 \{N\}^T \{N\} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (151)$$

$$[F] = [F_1] - [F_2] - [F_3] - [F_4] - [F_5] + [F_6] + [F_7], \quad (152)$$

onde:

$$[F_1] = 2k_0^2 \Delta \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} n_x^2 n_z^2 \{N\}^T \{N\} d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (153)$$

$$[F_2] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2\Delta} \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(n_x^2 \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (154)$$

$$[F_3] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2\Delta} \delta_x \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{n_x^2\}^T \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_j} \{N\} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (155)$$

$$[F_4] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(n_z^2 \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (156)$$

$$[F_5] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \delta_z \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{n_z^2\}^T \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (157)$$

$$[F_6] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2\Delta} \delta_x \delta_z \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(n_z^2 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{g_z^2\}^T \right) \left(\frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \{n_x^2\}^T \{N\}^T \{N\} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (158)$$

$$[F_7] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2\Delta} \delta_z \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \left(n_z^2 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{g_z^2\}^T \right) \left(n_x^2 \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (159)$$

É importante citar que as matrizes $[F_4]$, $[F_5]$, $[F_6]$ e $[F_7]$ possuem termos com derivada primeira dos índices de refração no interior do elemento finito. A contribuição dessas matrizes tende a ser muito pequena, e até desprezível, quando se analisa guias ópticos com variação muito suave dos índices de refração, associado ao uso de uma malha de elementos finitos bem refinada na região do guia difuso. Guias com essas características podem ser obtidos por longos processos de “annealing” ou em problemas não lineares com baixa potência de sinal óptico.

Entretanto, em situações onde ocorre uma rápida variação no índice de refração (poucas situações práticas) ou quando fortes processos não lineares estão presentes, a contribuição destes termos pode ser crucial. A referência [85] cita a possível importância de considerar-se explicitamente a variação dos índices de refração na formulação do MEF, no

caso não linear por ele apresentado. Esse tipo de problema pode ser causado por pequenos erros no cálculo local dos perfis de campo óptico, proveniente da má representação da variação dos índices de refração, associado ao processo iterativo utilizado na determinação da solução estável. Esta situação pode levar a soluções finais errôneas e, também, aumentar o tempo de processamento.

Procedendo à integração analítica das Eqs. (151)-(159), considerando elementos triangulares de primeira ordem de aproximação e meios anisotrópicos e não homogêneos, resultam as seguintes matrizes:

A matriz $[M]$ é simétrica e dada por:

$$[M] = \frac{\Delta k_0^2}{60} \begin{bmatrix} P(6,2,2) & P(2,2,1) & P(2,1,2) \\ & P(2,6,2) & P(1,2,2) \\ & & P(2,2,6) \end{bmatrix}, \quad (160)$$

sendo:

$$P(i, j, k) = i n_{z1}^2 + j n_{z2}^2 + k n_{z3}^2, \quad (161)$$

onde n_{zi} é o valor do índice de refração n_z , no $i^{\text{ésimo}}$ ponto nodal de cada elemento.

A matriz $[F_1]$ é simétrica e tem a forma:

$$[F_1] = \frac{\Delta k_0^2}{180} \begin{bmatrix} F_{11}^1 & F_{12}^1 & F_{13}^1 \\ & F_{22}^1 & F_{23}^1 \\ & & F_{33}^1 \end{bmatrix}, \quad (162)$$

$$F_{11}^1 = n_{z1}^2 R(12,3,3) + n_{z2}^2 R(3,2,1) + n_{z3}^2 R(3,1,2), \quad (163)$$

$$F_{12}^1 = n_{z1}^2 R(3,2,1) + n_{z2}^2 R(2,3,1) + n_{z3}^2 R(1,1,1), \quad (164)$$

$$F_{13}^1 = n_{z1}^2 R(3,1,2) + n_{z2}^2 R(1,1,1) + n_{z3}^2 R(2,1,3), \quad (165)$$

$$F_{22}^1 = n_{z1}^2 R(2,3,1) + n_{z2}^2 R(3,12,3) + n_{z3}^2 R(1,3,2), \quad (166)$$

$$F_{23}^1 = n_{z1}^2 R(1,1,1) + n_{z2}^2 R(1,3,2) + n_{z3}^2 R(1,2,3), \quad (167)$$

$$F_{33}^1 = n_{z1}^2 R(2,1,3) + n_{z2}^2 R(1,2,3) + n_{z3}^2 R(3,3,12), \quad (168)$$

onde

$$R(i, j, k) = i n_{x1}^2 + j n_{x2}^2 + k n_{x3}^2. \quad (169)$$

As matrizes $[F_2]$, $[F_3]$, $[F_4]$, $[F_5]$, $[F_6]$ e $[F_7]$ assumem a seguinte forma:

$$[F_2] = \frac{(n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + n_{x3}^2)}{12 \Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (170)$$

$$[F_3] = \frac{(b_1 n_{x1}^2 + b_2 n_{x2}^2 + b_3 n_{x3}^2)}{12 \Delta} \delta_x \begin{bmatrix} b_1 & b_1 & b_1 \\ b_2 & b_2 & b_2 \\ b_3 & b_3 & b_3 \end{bmatrix}, \quad (171)$$

$$[F_4] = \frac{(n_{z1}^2 + n_{z2}^2 + n_{z3}^2)}{12 \Delta} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (172)$$

$$[F_5] = \frac{(c_1 n_{z1}^2 + c_2 n_{z2}^2 + c_3 n_{z3}^2)}{12 \Delta} \delta_z \begin{bmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{bmatrix}, \quad (173)$$

$$[F_6] = \frac{\delta_x \delta_z (b_1 n_{x1}^2 + b_2 n_{x2}^2 + b_3 n_{x3}^2) (b_1 g_{z1}^2 + b_2 g_{z2}^2 + b_3 g_{z3}^2)}{120} \begin{bmatrix} P(6,2,2) & P(2,2,1) & P(2,1,2) \\ & P(2,6,2) & P(1,2,2) \\ & & P(2,2,6) \end{bmatrix}, \quad (174)$$

$$[F_7] = \frac{(b_1 g_{z1}^2 + b_2 g_{z2}^2 + b_3 g_{z3}^2)}{120} \delta_z \begin{bmatrix} X_1 b_1 & X_2 b_1 & X_3 b_1 \\ X_1 b_2 & X_2 b_2 & X_3 b_2 \\ X_1 b_3 & X_2 b_3 & X_3 b_3 \end{bmatrix}, \quad (175)$$

onde:

$$X_1 = \left[(6n_{x1}^2 + 2n_{x2}^2 + 2n_{x3}^2) n_{z1}^2 + (2n_{x1}^2 + 2n_{x2}^2 + n_{x3}^2) n_{z2}^2 + (2n_{x1}^2 + n_{x2}^2 + 2n_{x3}^2) n_{z3}^2 \right], \quad (176)$$

$$X_2 = \left[(2n_{x1}^2 + 2n_{x2}^2 + 1n_{x3}^2) n_{z1}^2 + (2n_{x1}^2 + 6n_{x2}^2 + 2n_{x3}^2) n_{z2}^2 + (1n_{x1}^2 + 2n_{x2}^2 + 2n_{x3}^2) n_{z3}^2 \right], \quad (177)$$

$$X_3 = \left[(2n_{x1}^2 + 1n_{x2}^2 + 2n_{x3}^2) n_{z1}^2 + (1n_{x1}^2 + 2n_{x2}^2 + 2n_{x3}^2) n_{z2}^2 + (2n_{x1}^2 + 2n_{x2}^2 + 6n_{x3}^2) n_{z3}^2 \right]. \quad (178)$$

• **Modos E^y**

Para os modos E^y , as matrizes $[\overline{M}]$ e $[\overline{F}]$, em coordenadas homogêneas no triângulo, têm a seguinte forma:

$$[\overline{M}] = 2 k_0^2 \Delta \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \{N\}^T \{N\} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (179)$$

$$[\overline{F}] = [\overline{F}_1] - [\overline{F}_2] - [\overline{F}_3] - [\overline{F}_4] + [\overline{F}_5] + [\overline{F}_6], \quad (180)$$

onde:

$$[\overline{F}_1] = 2 k_0^2 \Delta \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} n_y^2 \{N\}^T \{N\} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (181)$$

$$[\overline{F}_2] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2\Delta} \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \left(\frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (182)$$

$$[\overline{F}_3] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \left(n_y^2 g_z^2 \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (183)$$

$$[\overline{F}_4] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \delta_y \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \left(g_z^2 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{n_y^2\} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (184)$$

$$[\overline{F}_5] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \delta_z \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \left(n_y^2 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{g_z^2\} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} \right) d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (185)$$

$$[\overline{F}_6] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \delta_z \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} n_y^2 g_z^4 \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_i} \{n_z^2\} \{N\}^T \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (186)$$

As mesmas observações apresentadas no caso dos modos E^x , sobre as matrizes que possuem derivada primeira de índice refração, também se aplicam ao caso dos modos E^y .

Procedendo a integração analítica das Eqs. (179)-(186), considerando elementos triangulares de primeira ordem de aproximação e meios anisotrópicos e não homogêneos, resultam as seguintes matrizes:

As matrizes $[\overline{M}]$ e $[\overline{F}]$ têm a seguinte forma:

$$[\overline{M}] = \frac{\Delta k_0^2}{12} \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ & 2 & 1 \\ & & 2 \end{bmatrix}, \quad (187)$$

$$[\overline{F}_1] = \frac{\Delta k_0^2}{60} \begin{bmatrix} S(6,2,2) & S(2,2,1) & S(2,1,2) \\ & S(2,6,2) & S(1,2,2) \\ & & S(2,2,6) \end{bmatrix}, \quad (188)$$

$$[\overline{F}_2] = \frac{1}{4\Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (189)$$

$$[\overline{F}_3] = \frac{1}{48\Delta} Q \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (190)$$

$$[\overline{F}_4] = \frac{\delta_y}{48\Delta} Z \begin{bmatrix} c_1 G(2,1,1) & c_1 G(1,2,1) & c_1 G(1,1,2) \\ c_2 G(2,1,1) & c_2 G(1,2,1) & c_2 G(1,1,2) \\ c_3 G(2,1,1) & c_3 G(1,2,1) & c_3 G(1,1,2) \end{bmatrix}, \quad (191)$$

$$[\overline{F}_5] = \frac{\delta_z}{48\Delta} R \begin{bmatrix} c_1 S(2,1,1) & c_1 S(1,2,1) & c_1 S(1,1,2) \\ c_2 S(2,1,1) & c_2 S(1,2,1) & c_2 S(1,1,2) \\ c_3 S(2,1,1) & c_3 S(1,2,1) & c_3 S(1,1,2) \end{bmatrix}, \quad (192)$$

$$[\overline{F}_6] = \frac{\delta_z}{720\Delta} T \begin{bmatrix} c_1 A_1 & c_2 A_1 & c_3 A_1 \\ c_1 A_2 & c_2 A_2 & c_3 A_2 \\ c_1 A_3 & c_2 A_3 & c_3 A_3 \end{bmatrix}, \quad (193)$$

onde:

$$S(i, j, k) = i n_{y1}^2 + j n_{y2}^2 + k n_{y3}^2, \quad (194)$$

$$Q = S(2,1,1) g_{z1}^2 + S(1,2,1) g_{z2}^2 + S(1,1,2) g_{z3}^2, \quad (195)$$

$$Z = c_1 n_{y1}^2 + c_2 n_{y2}^2 + c_3 n_{y3}^2, \quad (196)$$

$$G(i, j, k) = i g_{z1}^2 + j g_{z2}^2 + k g_{z3}^2, \quad (197)$$

$$R = c_1 g_{z1}^2 + c_2 g_{z2}^2 + c_3 g_{z3}^2, \quad (198)$$

$$T = c_1 n_{z1}^2 + c_2 n_{z2}^2 + c_3 n_{z3}^2, \quad (199)$$

$$A_1 = \left[S(12,3,3) g_{z1}^4 + S(6,4,2) g_{z1}^2 g_{z2}^2 + S(2,3,1) g_{z2}^2 + \right. \\ \left. S(6,2,4) g_{z1}^2 g_{z3}^2 + S(2,2,2) g_{z2}^2 g_{z3}^2 + S(2,1,3) g_{z3}^4 \right] \quad (200)$$

$$A_2 = \left[S(3,2,1) g_{z1}^4 + S(4,6,2) g_{z1}^2 g_{z2}^2 + S(3,12,3) g_{z2}^2 + \right. \\ \left. S(2,2,2) g_{z1}^2 g_{z3}^2 + S(2,6,2) g_{z2}^2 g_{z3}^2 + S(1,2,3) g_{z3}^4 \right] \quad (201)$$

$$A_3 = \left[S(3,1,2) g_{z1}^4 + S(2,2,2) g_{z1}^2 g_{z2}^2 + S(1,3,1) g_{z2}^2 + \right. \\ \left. S(4,2,6) g_{z1}^2 g_{z3}^2 + S(2,4,6) g_{z2}^2 g_{z3}^2 + S(3,3,12) g_{z3}^4 \right] \quad (202)$$

D. Aplicação da Transformação Espacial - Problemas de Domínios Extensos.

Ao aplicar-se a técnica de transformação espacial à formulação tradicional do MEF, obtém-se matrizes de elementos finitos com maior complexidade, pois os elementos da matriz Jacobiana são dependentes da posição (x,y) . Embora as matrizes tenham sido determinadas também para casos não homogêneos, optou-se por implementar apenas os casos com materiais anisotrópicos e homogêneos, nas regiões onde se aplicam as transformações. Isto não impede que a região central, não transformada, contenha materiais não lineares, anisotrópicos e não homogêneos.

Na realidade, não há casos práticos em óptica integrada ou microondas em que o meio, que circunda a região dos guias, seja composto de materiais com variação contínua das propriedades físicas em grandes extensões. Uma exceção, é o caso de guias ópticos planares difusos, situação em que uma das dimensões (largura) é muito maior que as outras dimensões do guia, porém, neste caso, uma abordagem unidimensional apresenta excelentes resultados e não se justifica o custo de uma implementação 2D com

transformação espacial. Portanto, os resultados apresentados, a seguir, serão escritos para o caso de meios anisotrópicos, porém homogêneos.

Basicamente, o domínio transformado pode ser dividido, tal que, três tipos de transformações sejam empregadas. Detalhes dessas transformações foram apresentados na seção 2.3.1. A seguir, serão identificados os termos que devem ser incluídos nas equações integrais, provenientes do MEF, para cada região de transformação e explicitada a aproximação nodal (forma de interpolação) para o elemento triangular de referência em coordenadas homogêneas.

- *Região II de Transformação*

Na região II, apenas a coordenada x é mapeada para a nova coordenada r :

Transformação	Transformação Inversa
$\begin{cases} r = C_{11}'' + C_{12}''/x \\ s = y \end{cases}$	$x = C_{12}'' / (r - C_{11}'')$

O termo $|J_T^{-1}|$ e os produtos $J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|$ e $J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|$, dependentes das coordenadas, são dados por:

$$|J_T^{-1}| = -\frac{x^2}{C_{12}''}, \quad (203)$$

$$J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}| = -\frac{C_{12}''}{x^2}, \quad (204)$$

$$J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}| = -\frac{x^2}{C_{12}''}. \quad (205)$$

Para simplificar as integrações necessárias à determinação das matrizes do MEF, optou-se por introduzir algumas substituições de variáveis. Tal procedimento visa a expansão dos termos das Eqs. (203)-(205) com as mesmas funções de base utilizadas na expansão das variáveis de estado. A substituição de variável é escolhida em cada caso, de

forma a evitar o aparecimento de expansões polinomiais no denominador dos termos da integração.

Para o Jacobiano, $|J_T^{-1}|$, e o produto $J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|$ será utilizado :

$$x = C_{12}'' t_y,$$

$$\text{onde: } t_y = \sum_{i=1}^{no} t_{y_i} N_i,$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{(r_i - C_{11}'')}.$$

sendo no o número de pontos nodais no triângulo.

Para o produto $J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|$ tem-se:

$$x = C_{12}'' / t_x,$$

$$\text{onde: } t_x = \sum_{i=1}^{no} t_{x_i} N_i,$$

$$t_{x_i} = r_i - C_{11}''.$$

Com esse procedimento, os termos dependentes da transformação espacial podem ser integrados de forma direta, seguindo a mesma abordagem já empregada para as variáveis de estado e propriedades físicas dos materiais não homogêneos. Essa aproximação é válida se a variação dos termos dependentes de coordenadas puder ser bem representada pela expansão nodal utilizada. Elementos finitos com elevadas ordens de aproximação podem ser empregados para esta finalidade. Alternativamente, pode-se utilizar uma malha de elementos finitos de primeira ordem com um refinamento adequado nas regiões em que ocorram grandes variações nos termos das Eqs. (203)-(205).

- *Região III de Transformação*

Para a região III, apenas a coordenada y é mapeada para a nova coordenada s . Desta forma, tem-se:

Transformação $\begin{cases} r = x \quad , \\ s = C_{21}^{III} + C_{22}^{III} / y \end{cases}$	Transformação Inversa $y = C_{22}^{III} / (s - C_{21}^{III})$
---	--

O termo $|J_T^{-1}|$ e os produtos $J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|$ e $J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|$, dependentes das coordenadas, são dados por:

$$|J_T^{-1}| = -\frac{y^2}{C_{22}^{III}}, \quad (206)$$

$$J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}| = -\frac{y^2}{C_{22}^{III}}, \quad (207)$$

$$J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}| = -\frac{C_{22}^{III}}{y^2}. \quad (208)$$

Para o Jacobiano, $|J_T^{-1}|$, e o produto $J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|$ será utilizado:

$$\begin{aligned} y &= C_{22}^{III} t_x, \\ \text{onde: } t_x &= \sum_{i=1}^{no} t_{x_i} N_i, \\ t_{x_i} &= \frac{1}{(s_i - C_{21}^{III})}. \end{aligned}$$

Para o produto $J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|$ escolheu-se:

$$\begin{aligned} y &= C_{22}^{III} / t_y, \\ \text{onde: } t_y &= \sum_{i=1}^{no} t_{y_i} N_i, \\ t_{y_i} &= s_i - C_{21}^{III}. \end{aligned}$$

- *Região IV de Transformação*

Para a região IV, ambas as coordenadas, x e y , são transformadas para o novo sistema e correspondem aos eixos r e s , respectivamente:

Transformação	Transformação Inversa
$\begin{cases} r = C_{11}^{IV} + C_{21}^{IV} / x, \\ s = C_{21}^{IV} + C_{22}^{IV} / y. \end{cases}$	$\begin{cases} x = C_{12}^{IV} / (r - C_{11}^{IV}) \\ y = C_{22}^{IV} / (s - C_{21}^{IV}) \end{cases}$

O termo $|J_T^{-1}|$ e os produtos $J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|$ e $J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|$, dependentes das coordenadas, são dados por:

$$|J_T^{-1}| = \frac{x^2 y^2}{C_{12}^{IV} C_{22}^{IV}}, \quad (209)$$

$$J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}| = -\frac{C_{12}^{IV} y^2}{C_{22}^{IV} x^2}, \quad (210)$$

$$J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}| = -\frac{C_{22}^{IV} x^2}{C_{12}^{IV} y^2}. \quad (211)$$

Para o Jacobiano, $|J_T^{-1}|$ será utilizado:

$$\begin{aligned} x &= C_{12}^{IV} \sqrt{t_x}, \\ y &= C_{22}^{IV} \sqrt{t_y}, \\ \text{onde : } t_x &= \sum_{i=1}^{no} t_{x_i} N_i, \\ t_{x_i} &= \frac{1}{(r_i - C_{12}^{IV})^2}, \\ t_y &= \sum_{i=1}^{no} t_{y_i} N_i, \\ t_{y_i} &= \frac{1}{(s_i - C_{21}^{IV})^2}. \end{aligned}$$

Para o produto $J_{11}^T J_{11} |J_T^{-1}|$ será empregado:

$$\begin{aligned}
x &= C_{12}^{IV} / \sqrt{t_x} \\
y &= C_{22}^{IV} \sqrt{t_y}, \\
\text{onde : } t_x &= \sum_{i=1}^{no} t_{x_i} N_i, \\
t_{x_i} &= (r - C_{11}^{IV})^2, \\
t_y &= \sum_{i=1}^{no} t_{y_i} N_i, \\
t_{y_i} &= \frac{1}{(s_i - C_{21}^{IV})^2}.
\end{aligned}$$

Para o produto $J_{22}^T J_{22} |J_T^{-1}|$ escolheu-se:

$$\begin{aligned}
x &= C_{12}^{IV} \sqrt{t_x}, \\
y &= C_{22}^{IV} / \sqrt{t_y}, \\
\text{onde : } t_x &= \sum_{i=1}^{no} t_{x_i} N_i, \\
t_{x_i} &= \frac{1}{(r_i - C_{11}^{IV})^2}, \\
t_y &= \sum_{i=1}^{no} t_{y_i} N_i, \\
t_{y_i} &= (s - C_{21}^{IV})^2.
\end{aligned}$$

A seguir, serão apresentadas as equações integrais onde as transformações de coordenadas para o sistema mapeado por contração do espaço e para o sistema de coordenadas homogêneas já foram realizadas. Os resultados das integrações analíticas, para o triângulo em primeira ordem de aproximação polinomial, serão apresentados na forma de matrizes prontas para a implementação computacional.

D.1 Ondas TEM

O sistema matricial, resultante da aplicação do MEF à equação de Laplace para a solução das ondas TEM em domínios extensos e preenchidos com materiais dielétricos anisotrópicos, tem a seguinte forma (ver seção 2.3.2):

$$[S]\{\phi\}^T = \{b\}^T \quad (212)$$

$$[S]_{\Omega_T} = \int_{\Omega_T} [\nabla_{\Omega_T} \{N\}]^T [J_T]^T [\bar{\epsilon}_r][J_T][\nabla_{\Omega_T} \{N\}] |J_T^{-1}| dr ds, \quad (213)$$

onde r e s são as novas coordenadas do sistema ortogonal transformado.

Aplicando a transformação espacial para o sistema homogêneo no triângulo, tem-se:

$$[S]_{\Omega_\zeta} = \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} [\nabla_\zeta \{N\}]^T [J_\zeta]^T [J_T]^T [\bar{\epsilon}_r][J_T][J_\zeta][\nabla_\zeta \{N\}] |J_\zeta^{-1}| |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (214)$$

onde:

$$dr ds = |J_\zeta^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2 = 2\Delta d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (215)$$

Pode-se separar a matriz $[S]$ da Eq. (214) em duas partes, correspondentes aos componentes em x e y , e escrever explicitamente os elementos da matriz Jacobiana em cada caso, tal que:

$$[S_{\Omega_\zeta}] = [S_{x \rightarrow r \rightarrow \zeta_1}] + [S_{y \rightarrow s \rightarrow \zeta_2}], \quad (216)$$

$$[S_{x \rightarrow r \rightarrow \zeta_1}] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2\Delta} \epsilon_{xx} \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} [J_T]_{11}^T [J_T]_{11} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (217)$$

$$[S_{y \rightarrow s \rightarrow \zeta_2}] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2\Delta} \epsilon_{yy} \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} [J_T]_{22}^T [J_T]_{22} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (218)$$

Procedendo a integração analítica das Eqs. (217)-(218), considerando elementos triangulares de primeira ordem e meios materiais anisotrópicos e homogêneos, pode-se escrever as matrizes $[S_{x \rightarrow r \rightarrow \zeta}]$ e $[S_{y \rightarrow s \rightarrow \zeta}]$ para cada região de transformação:

• **Região II**

$$[S_{x \rightarrow r \rightarrow \zeta_1}] = \frac{\varepsilon_{xx}}{24 \Delta C_{12}^{II}} R \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (219)$$

$$[S_{y \rightarrow s \rightarrow \zeta_2}] = \frac{\varepsilon_{yy} C_{12}^{II}}{24 \Delta} P \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (220)$$

onde:

$$R = (t_{x_1}^2 + t_{x_1} t_{x_2} + t_{x_2}^2 + t_{x_1} t_{x_3} + t_{x_2} t_{x_3} + t_{x_3}^2), \quad (221)$$

$$P = (t_{y_1}^2 + t_{y_1} t_{y_2} + t_{y_2}^2 + t_{y_1} t_{y_3} + t_{y_2} t_{y_3} + t_{y_3}^2), \quad (222)$$

$$t_{x_i} = (r_i - C_{11}^{II}), \quad (223)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{(r_i - C_{11}^{II})}. \quad (224)$$

• **Região III**

$$[S_{x \rightarrow r \rightarrow \zeta_1}] = \frac{\varepsilon_{xx} C_{22}^{III}}{24 \Delta} R \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (225)$$

$$[S_{y \rightarrow s \rightarrow \zeta_2}] = \frac{\varepsilon_{yy}}{24 \Delta C_{22}^{III}} P \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (226)$$

onde:

$$t_{x_i} = \frac{1}{(s_i - C_{21}^{III})}, \quad (227)$$

$$t_{y_i} = \left(s_i - C_{21}^{III} \right). \quad (228)$$

• **Região IV**

$$\left[S_{x \rightarrow r \rightarrow \zeta_1} \right] = \frac{\varepsilon_{xx} C_{22}^{IV}}{48 \Delta C_{12}^{IV}} Q \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (229)$$

onde:

$$Q = 2 t_{x_1} t_{y_1} + t_{x_2} t_{y_1} + t_{x_3} t_{y_1} + t_{x_1} t_{y_2} + 2 t_{x_2} t_{y_2} + t_{x_3} t_{y_2} + t_{x_1} t_{y_3} + t_{x_2} t_{y_3} + 2 t_{x_3} t_{y_3}, \quad (230)$$

$$t_{x_i} = \left(r_i - C_{11}^{IV} \right)^2, \quad (231)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{\left(s_i - C_{21}^{IV} \right)^2}, \quad (232)$$

e

$$\left[S_{y \rightarrow s \rightarrow \zeta_2} \right] = \frac{\varepsilon_{yy} C_{12}^{IV}}{48 \Delta C_{22}^{IV}} Q \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (233)$$

onde:

$$t_{x_i} = \frac{1}{\left(r_i - C_{11}^{IV} \right)^2}, \quad (234)$$

$$t_{y_i} = \left(s_i - C_{21}^{IV} \right)^2. \quad (235)$$

D.2 Ondas E^x e E^y

A aplicação do MEF com mapeamento espacial, para a solução de modos ópticos E^x e E^y em domínios extensos, resulta em um sistema matricial de forma canônica. Supondo que os domínios, a serem transformados, são preenchidos com materiais dielétricos anisotrópicos e homogêneos, resulta o seguinte sistema de equações:

$$[F][\Phi]^T = n_{eff}^2 [M][\Phi]^T, \quad (236)$$

onde $\Phi = E_x$, para modos E^x e $\Phi = H_x$, para modos E^y .

As matrizes $[M]$ e $[F]$ serão apresentadas, prontas para implementação, para cada região de transformação, considerando elementos finitos triangulares de primeira ordem de aproximação.

■ Modos E^x

Para os modos E^x as seguintes integrais, já transformadas para as coordenadas homogêneas, devem ser calculadas para cada elemento finito:

$$[M] = 2 \Delta k_0^2 n_z^2 \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \{N\}^T \{N\} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (237)$$

$$[F] = [F_1] - [F_2] - [F_3], \quad (238)$$

com:

$$[F_1] = 2 \Delta k_0^2 n_x^2 n_z^2 \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \{N\}^T \{N\} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (239)$$

$$[F_2] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2 \Delta} n_x^2 \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} [J_T]_{11}^T [J_T]_{11} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (240)$$

$$[F_3] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2 \Delta} n_z^2 \int_{\zeta_1} \int_{\zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} [J_T]_{22}^T [J_T]_{22} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (241)$$

Procedendo à integração analítica das Eqs.(237)-(241), tem-se as seguintes matrizes:

• **Região II**

$$[M] = - \frac{\Delta k_0^2 n_z^2 C_{12}''}{180} \begin{bmatrix} 2 Y(6,3,1,1,3,1,1) & Y(3,4,3,2,2,1) & Y(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 Y(1,3,6,1,3,1) & Y(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 Y(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (242)$$

$$[F_1] = - \frac{\Delta k_0^2 n_x^2 n_z^2 C_{12}''}{180} \begin{bmatrix} 2 Y(6,3,1,1,3,1,1) & Y(3,4,3,2,2,1) & Y(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 Y(1,3,6,1,3,1) & Y(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 Y(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (243)$$

$$[F_2] = - \frac{X(1,1,1,1,1,1) n_x^2}{24 \Delta C_{12}''} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (244)$$

$$[F_3] = - \frac{Y(1,1,1,1,1,1) n_z^2 C_{12}''}{24 \Delta} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (245)$$

onde:

$$X(i, j, k, l, m, n) = i t_{x_1}^2 + j t_{x_1} t_{x_2} + k t_{x_2}^2 + l t_{x_1} t_{x_3} + m t_{x_2} t_{x_3} + n t_{x_3}^2, \quad (246)$$

$$Y(i, j, k, l, m, n) = i t_{y_1}^2 + j t_{y_1} t_{y_2} + k t_{y_2}^2 + l t_{y_1} t_{y_3} + m t_{y_2} t_{y_3} + n t_{y_3}^2 \quad (247)$$

$$t_{x_i} = (r_i - C_{11}''), \quad (248)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{(r_i - C_{11}'')}. \quad (249)$$

• **Região III**

$$[M] = - \frac{\Delta k_0^2 n_z^2 C_{22}'''}{180} \begin{bmatrix} 2 X(6,3,1,1,3,1,1) & X(3,4,3,2,2,1) & X(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 X(1,3,6,1,3,1) & X(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 X(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (250)$$

$$[F_1] = - \frac{\Delta k_0^2 n_x^2 n_z^2 C_{22}^{III}}{180} \begin{bmatrix} 2 X(6,3,1,1,3,1,1) & X(3,4,3,2,2,1) & X(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 X(1,3,6,1,3,1) & X(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 X(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (251)$$

$$[F_2] = - \frac{X(1,1,1,1,1,1) n_x^2 C_{22}^{III}}{24 \Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (252)$$

$$[F_3] = - \frac{Y(1,1,1,1,1,1) n_z^2}{24 \Delta C_{22}^{III}} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (253)$$

onde:

$$t_{x_i} = \frac{1}{(s_i - C_{21}^{III})}, \quad (254)$$

$$t_{y_i} = (s_i - C_{21}^{III}). \quad (255)$$

• Região IV

$$[M] = \frac{\Delta k_0^2 n_z^2 C_{12}^{IV} C_{22}^{IV}}{180} \begin{bmatrix} Q(12,3,3,3,2,1,3,1,2) & Q(3,2,1,2,3,1,1,1,1) & Q(3,1,2,1,1,1,2,1,3) \\ & Q(2,3,1,3,12,3,1,3,2) & Q(1,1,1,1,3,2,1,2,3) \\ & & Q(2,1,3,1,2,3,3,3,12) \end{bmatrix}, \quad (256)$$

$$[F_1] = \frac{\Delta k_0^2 n_z^2 n_z^2 C_{12}^{IV} C_{22}^{IV}}{180} \begin{bmatrix} Q(12,3,3,3,2,1,3,1,2) & Q(3,2,1,2,3,1,1,1,1) & Q(3,1,2,1,1,1,2,1,3) \\ & Q(2,3,1,3,12,3,1,3,2) & Q(1,1,1,1,3,2,1,2,3) \\ & & Q(2,1,3,1,2,3,3,3,12) \end{bmatrix}, \quad (257)$$

onde:

$$Q(i, j, k, l, m, n, o, p, q) = i t_{x_1} t_{y_1} + j t_{x_2} t_{y_1} + k t_{x_3} t_{y_1} + l t_{x_1} t_{y_2} + m t_{x_2} t_{y_2} \\ + n t_{x_3} t_{y_2} + o t_{x_1} t_{y_3} + p t_{x_2} t_{y_3} + q t_{x_3} t_{y_3}, \quad (258)$$

$$t_{x_i} = \frac{1}{(r_i - C_{11}^{IV})^2}, \quad (259)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{\left(s_i - C_{21}^{IV}\right)^2} \quad (260)$$

A matriz $[F_2]$ será dada por:

$$[F_2] = \frac{n_x^2 C_{22}^{IV}}{48 \Delta C_{12}^{IV}} Q(2,1,1,1,2,1,1,2) \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (261)$$

onde:

$$t_{x_i} = \left(r_i - C_{11}^{IV}\right)^2, \quad (262)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{\left(s_i - C_{21}^{IV}\right)^2} \quad (263)$$

Enquanto a matriz $[F_3]$ terá a forma:

$$[F_3] = \frac{n_z^2 C_{12}^{IV}}{48 \Delta C_{22}^{IV}} Q(2,1,1,1,2,1,1,2) \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_2 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (264)$$

onde:

$$t_{x_i} = \frac{1}{\left(r_i - C_{11}^{IV}\right)^2}, \quad (265)$$

$$t_{y_i} = \left(s_i - C_{21}^{IV}\right)^2. \quad (266)$$

■ Modos E^y

Para os modos E^y as seguintes integrais, já transformadas para as coordenadas homogêneas, devem ser calculadas para cada elemento finito:

$$[\overline{M}] = 2 k_0^2 \Delta \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \{N\}^T \{N\} \left| J_T^{-1} \right| d\zeta_1 d\zeta_2 \quad (267)$$

$$[\bar{F}] = [\bar{F}_1] - [\bar{F}_2] - [\bar{F}_3], \quad (268)$$

onde:

$$[\bar{F}_1] = 2 k_0^2 \Delta n_y^2 \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \{N\}^T \{N\} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (269)$$

$$[\bar{F}_2] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{b_i b_j}{2 \Delta} \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} [J_T]_{11}^T [J_T]_{11} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2, \quad (270)$$

$$[\bar{F}_3] = \sum_{i,j=1}^3 \frac{c_i c_j}{2 \Delta} \frac{n_y^2}{n_z^2} \int \int_{\zeta_1 \zeta_2} \frac{\partial \{N\}^T}{\partial \zeta_i} \frac{\partial \{N\}}{\partial \zeta_j} [J_T]_{22}^T [J_T]_{22} |J_T^{-1}| d\zeta_1 d\zeta_2. \quad (271)$$

Procedendo à integração analítica das Eqs. (267)-(271), tem-se as seguintes matrizes:

• **Região II**

$$[\bar{M}] = - \frac{\Delta k_0^2 C_{12}''}{180} \begin{bmatrix} 2 Y(6,3,1,1,3,1,1) & Y(3,4,3,2,2,1) & Y(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 Y(1,3,6,1,3,1) & Y(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 Y(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (272)$$

$$[\bar{F}_1] = - \frac{\Delta k_0^2 n_y^2 C_{12}''}{180} \begin{bmatrix} 2 Y(6,3,1,1,3,1,1) & Y(3,4,3,2,2,1) & Y(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 Y(1,3,6,1,3,1) & Y(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 Y(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (273)$$

$$[\bar{F}_2] = - \frac{X(1,1,1,1,1,1)}{24 \Delta C_{12}''} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (274)$$

$$[\bar{F}_3] = - \frac{Y(1,1,1,1,1,1) C_{12}''}{24 \Delta} \frac{n_y^2}{n_z^2} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (275)$$

onde:

$$X(i, j, k, l, m, n) = i t_{x_1}^2 + j t_{x_1} t_{x_2} + k t_{x_2}^2 + l t_{x_1} t_{x_3} + m t_{x_2} t_{x_3} + n t_{x_3}^2, \quad (276)$$

$$Y(i, j, k, l, m, n) = i t_{y_1}^2 + j t_{y_1} t_{y_2} + k t_{y_2}^2 + l t_{y_1} t_{y_3} + m t_{y_2} t_{y_3} + n t_{y_3}^2 \quad (277)$$

$$t_{x_i} = \left(r_i - C_{11}^{II} \right), \quad (278)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{\left(r_i - C_{11}^{II} \right)}. \quad (279)$$

• **Região III**

$$[\overline{M}] = - \frac{\Delta k_0^2 C_{22}^{III}}{180} \begin{bmatrix} 2 X(6,3,1,1,3,1,1) & X(3,4,3,2,2,1) & X(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 X(1,3,6,1,3,1) & X(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 X(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (280)$$

$$[\overline{F}_1] = - \frac{\Delta k_0^2 n_y^2 C_{22}^{III}}{180} \begin{bmatrix} 2 X(6,3,1,1,3,1,1) & X(3,4,3,2,2,1) & X(3,2,1,4,2,3) \\ & 2 X(1,3,6,1,3,1) & X(1,2,3,2,4,3) \\ & & 2 X(1,1,1,3,3,6) \end{bmatrix}, \quad (281)$$

$$[\overline{F}_2] = - \frac{X(1,1,1,1,1,1) C_{22}^{III}}{24 \Delta} \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (282)$$

$$[\overline{F}_3] = - \frac{Y(1,1,1,1,1,1)}{24 \Delta C_{22}^{III}} \frac{n_y^2}{n_z^2} \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (283)$$

onde:

$$t_{x_i} = \frac{1}{\left(s_i - C_{21}^{III} \right)}, \quad (284)$$

$$t_{y_i} = \left(s_i - C_{21}^{III} \right). \quad (285)$$

• **Região IV**

$$[\overline{M}] = \frac{\Delta k_0^2 C_{12}^{IV} C_{22}^{IV}}{180} \begin{bmatrix} Q(12,3,3,3,2,1,3,1,2) & Q(3,2,1,2,3,1,1,1,1) & Q(3,1,2,1,1,2,1,3) \\ & Q(2,3,1,3,12,3,1,3,2) & Q(1,1,1,1,3,2,1,2,3) \\ & & Q(2,1,3,1,2,3,3,3,12) \end{bmatrix}, \quad (286)$$

$$[\overline{F}_1] = \frac{\Delta k_0^2 n_y^2 C_{12}^{IV} C_{22}^{IV}}{180} \begin{bmatrix} Q(12,3,3,3,2,1,3,1,2) & Q(3,2,1,2,3,1,1,1,1) & Q(3,1,2,1,1,2,1,3) \\ & Q(2,3,1,3,12,3,1,3,2) & Q(1,1,1,1,3,2,1,2,3) \\ & & Q(2,1,3,1,2,3,3,3,12) \end{bmatrix}, \quad (287)$$

onde:

$$Q(i, j, k, l, m, n, o, p, q) = i t_{x_1} t_{y_1} + j t_{x_2} t_{y_1} + k t_{x_3} t_{y_1} + l t_{x_1} t_{y_2} + m t_{x_2} t_{y_2} \\ + n t_{x_3} t_{y_2} + o t_{x_1} t_{y_3} + p t_{x_2} t_{y_3} + q t_{x_3} t_{y_3}, \quad (288)$$

$$t_{x_i} = \frac{1}{\left(r_i - C_{11}^{IV}\right)^2}, \quad (289)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{\left(s_i - C_{21}^{IV}\right)^2}. \quad (290)$$

A matriz $\left[\bar{F}_2\right]$ será dada por:

$$\left[\bar{F}_2\right] = \frac{C_{22}^{IV}}{48 \Delta C_{12}^{IV}} Q(2,1,1,1,2,1,1,2) \begin{bmatrix} b_1^2 & b_1 b_2 & b_1 b_3 \\ & b_2^2 & b_2 b_3 \\ & & b_3^2 \end{bmatrix}, \quad (291)$$

onde:

$$t_{x_i} = \left(r_i - C_{11}^{IV}\right)^2, \quad (292)$$

$$t_{y_i} = \frac{1}{\left(s_i - C_{21}^{IV}\right)^2}. \quad (293)$$

Enquanto a matriz $\left[\bar{F}_3\right]$ terá a forma:

$$\left[\bar{F}_3\right] = \frac{C_{12}^{IV}}{48 \Delta C_{22}^{IV}} \frac{n_y^2}{n_z^2} Q(2,1,1,1,2,1,1,2) \begin{bmatrix} c_1^2 & c_1 c_2 & c_1 c_3 \\ & c_2^2 & c_2 c_3 \\ & & c_3^2 \end{bmatrix}, \quad (294)$$

onde

$$t_{x_i} = \frac{1}{\left(r_i - C_{11}^{IV}\right)^2}, \quad (295)$$

$$t_{y_i} = \left(s_i - C_{21}^{IV}\right)^2. \quad (296)$$

4. VALIDAÇÃO E TESTE DAS FORMULAÇÕES

Uma das fases mais importantes no desenvolvimento de softwares para análise numérica é a da validação das formulações e implementações computacionais. A seguir, serão apresentados alguns dos experimentos numéricos selecionados com o propósito de assegurar a confiança no software de elementos finitos em desenvolvimento. Como linha geral, o procedimento de validação adotado foi o estudo de casos que apresentem uma solução analítica exata ou uma solução numérica documentada na literatura especializada.

4.1 Modos *TE* e *TM* em guias homogêneos

Guias de ondas metálicos, preenchidos homogeneamente com material dielétrico, são muito empregados em engenharia de microondas, principalmente em redes para transmissão de sinais de alta potência. Quando os guias apresentam formatos geométricos simples, é possível o cálculo analítico e exato das características de propagação da onda eletromagnética. A seguir, serão apresentados alguns resultados para guias convencionais de formato retangular, cilíndrico e coaxial, bem como, de algumas configurações derivadas, onde o cálculo analítico é difícil ou até impossível [86].

4.1.1 Guia Retangular

Considere um guia retangular com paredes metálicas perfeitas e preenchido homogeneamente com dielétrico ($\epsilon_r = 1$). As dimensões do guia são: largura $a = 1,0$ cm e altura $b = 2,0$ cm, (Fig. 5).

Fig. 5 Seção transversal de um guia de onda retangular oco.

A frequência de corte(f_c), para os modos TE_{mn} e TM_{mn} , é dada por [87]:

$$f_c = \frac{1}{2\sqrt{\mu\epsilon}} \sqrt{\left(\frac{m}{a}\right)^2 + \left(\frac{n}{b}\right)^2}, \quad (297)$$

onde m é o número de meios ciclos na direção x e n é o número de meios ciclos na direção y . Para ondas TE, os subscritos m e n podem assumir valores inteiros maiores ou iguais a zero (não simultaneamente), enquanto para modos TM, m e n devem ser inteiros maiores ou iguais a um. Deste modo, a onda TM de frequência mais baixa, a ser transmitida por um guia de ondas retangular, é o modo TM_{11}

Cada modo de transmissão tem um comprimento de onda de corte. Quando mais de um modo de transmissão é possível o campo resultante é a soma dos campos dos modos individuais no guia.

A seguir, serão apresentados os valores de frequência de corte calculados pelo MEF e os obtidos pelo cálculo analítico exato (Tabela 3), para vários modos em um guia de ondas retangular. Nesses cálculos, utilizou-se a mesma malha de elementos finitos triangulares de primeira ordem de aproximação (658 pontos nodais).

Nas Figs. 6 e 7, pode-se observar os perfis de campo para alguns modos TM e TE, respectivamente. Os valores de frequência de corte, apresentados na Tabela 3, mostram um pequeno erro em relação ao valor analítico exato, mesmo para modos com complexas

configurações de campo [86]. Para esses modos mais elevados, uma malha mais refinada pode diminuir significativamente os erros numéricos.

TABELA 3 - Frequências de corte para o guia retangular.

Modo	Freq. GHz MEF	Freq. GHz Analítico Exato	Erro %	Modo	Freq. GHz MEF	Freq. GHz Analítico Exato	Erro %
TM11	16,79	16,76	0,2	TE01	7,50	7,50	0,0
TM12	21,26	21,20	0,5	TE11	16,79	16,76	0,2
TM13	27,15	27,02	0,5	TE12	21,26	21,20	0,3
TM21	31,11	30,90	0,7	TE03	22,55	22,48	0,3
TM22	33,76	33,52	0,7	TE13	27,15	27,02	0,5
TM14	33,75	33,52	0,7	TE21	31,08	30,90	0,6
TM23	37,82	37,47	0,9	TE22	33,75	33,52	0,7
TM15	40,76	40,36	1,0	TE14	33,76	33,52	0,7
TM24	42,89	42,40	1,2	TE23	37,81	37,47	0,9
TM31	46,25	45,59	1,4	TE05	37,80	37,47	0,9
TM25	48,70	47,99	1,5	TE15	40,78	40,36	1,0
TM16	48,06	47,40	1,4	TE24	42,89	42,40	1,2
TM32	48,10	47,40	1,5	TE06	45,51	44,97	1,2
TM33	51,10	50,28	1,6	TE30	45,55	44,97	1,3
TM17	55,53	54,56	1,8	TE31	46,18	45,59	1,3
TM26	55,05	54,05	1,9	TE16	48,07	47,40	1,4
TM34	55,70	54,05	1,9	TE32	48,08	47,40	1,4
TM35	59,82	58,54	2,2	TE25	48,70	47,99	1,5

Fig. 6 Seção transversal de um guia de ondas retangular e isolinhas de E_z .

(a) modo TM_{11} , (b) TM_{13} , (c) TM_{33}

Fig. 7 Seção transversal de um guia de ondas retangular e isolinhas de H_z .
(a) modo TE_{01} , (b) TE_{21} , (c) TE_{23} .

4.1.2 Guia de Ondas Cilíndrico

Considere um guia de seção transversal circular de raio $r_0 = 1,0$ cm com paredes metálicas perfeitas e preenchido uniformemente com dielétrico ($\epsilon_r = 1$).

A nomenclatura dos modos TE e TM, em guias circulares, é dada pelos subscritos nr , no qual o subscrito n indica a ordem da função de Bessel e r indica o posto da raiz. A frequência de corte em um guia cilíndrico oco pode ser calculada utilizando-se [87]:

$$f_c = \frac{1}{2\pi\sqrt{\mu\epsilon}} \frac{K_{nr}}{r_0}, \quad (298)$$

onde as raízes K_{nr} , para modos TM, correspondem aos zeros da função de Bessel, $(J_n(kr))$; ao passo que as raízes K_{nr} , para os modos TE, correspondem aos zeros das derivadas (em relação a r) da função de Bessel.

A seguir, serão apresentados os valores calculados para as frequências de corte e os obtidos da solução analítica exata (Tabela 4) para alguns modos em guia circular. Em todos os casos, utilizou-se a mesma malha de elementos finitos triangulares de primeira ordem

(693 pontos nodais). As Figs. 8 e 9 apresentam as distribuições de campo para alguns modos TM e TE, respectivamente [86].

TABELA 4 - Frequências de corte para o guia cilíndrico.

Modo	Freq.GHz MEF	Freq.GHz Analítico	Erro %
TM01	11,49	11,48	0,1
TM11	18,35	18,29	0,3
TM21	24,66	24,51	0,6
TM02	26,53	26,34	0,7
TM31	30,74	30,44	1,0
TM12	33,88	33,48	1,1
TM41	36,70	36,21	1,3
TM22	40,83	40,16	1,7
TM03	42,01	41,29	1,7
TM51	42,61	41,85	1,8

Modo	Freq.GHz MEF	Freq.GHz Analítico	Erro %
TE11	8,80	8,79	0,1
TE01	18,36	18,28	0,4
TE31	20,13	20,05	0,4
TE12	25,62	25,44	0,7
TE41	25,54	25,37	0,7
TE51	30,92	30,61	1,0
TE22	32,35	32,0	1,1
TE02	33,87	33,47	1,2
TE32	38,81	38,24	1,5
TE13	41,14	40,73	1,0

Fig. 8 Seção transversal de um guia de ondas circular e isolinhas de E_z .

(a) modo TM_{01} , (b) TM_{22} .

Fig. 9 Seção transversal de um guia de ondas circular e isolinhas de H_z .

(a) modo TE_{11} , (b) TE_{22} .

4.1.3 Guia Cilíndrico Coaxial (Cabo Coaxial)

Considere um guia cilíndrico com um condutor metálico interno, também de formato cilíndrico. A fim de se comparar os valores calculados com o MEF e os obtidos analiticamente, optou-se por centralizar o condutor interno com relação ao guia cilíndrico externo. O raio do condutor central e do condutor externo são $r_1 = 0,25$ cm e $r_2 = 1,00$ cm, respectivamente, e entre os dois condutores não existe material de preenchimento (vácuo).

A seção transversal do guia de onda foi discretizada com triângulos de primeira ordem e todos os cálculos foram executados com a mesma malha de elementos (567 pontos nodais).

A Tabela 5 apresenta os valores obtidos pela simulação numérica e os calculados analiticamente [86].

TABELA 5 - Frequências de corte para o guia cilíndrico coaxial.

Modo	Freq. GHz MEF	Freq. GHz Analítico	Erro %
TM01	19,63	19,55	0,4
TM11	21,32	21,22	0,5
TM21	25,56	25,38	0,7
TM31	30,98	30,66	1,0
TM41	36,80	36,25	1,5
TM02	40,35	39,72	1,6
TM12	41,41	40,73	1,7
TM51	42,70	41,86	2,0
TM22	44,50	43,63	2,0
TM32	49,13	48,00	2,3

Modo	Freq. GHz MEF	Freq. GHz Analítico	Erro %
TE11	7,87	7,85	0,3
TE21	14,40	14,36	0,3
TE01	20,97	21,22	1,2
TE31	20,10	20,01	0,5
TE12	23,70	23,88	0,8
TE41	25,54	25,37	0,7
TE22	30,42	30,33	0,3
TE51	30,93	30,61	1,0
TE32	38,04	37,53	1,4
TE02	40,55	40,73	0,4

As Figs. 10 e 11 ilustram os perfis de campo para alguns modos TM e TE, respectivamente.

Fig. 10 Seção transversal de um guia de ondas coaxial e isolinhas de E_z :

(a) modo TM_{01} e (b) TM_{11} .

Fig. 11 Seção transversal de um guia de ondas coaxial e isolinhas de H_z :

(a) modo TE_{11} e (b) TE_{22} .

4.1.4 Guias de Ondas com Outras Seções Transversais.

Um guia circular modificado que pode ser utilizado como filtro foi sugerido em [88]. Esse dispositivo evita o uso dos tradicionais “bastões” de sintonia. A Fig. 12 mostra a configuração geométrica do filtro. O raio do condutor externo é $r = 1,00$ cm e as reentrâncias têm profundidade de $0,2 r$ e ângulo de 15 graus.

Fig. 12 Seção do filtro com configuração circular modificada.

Para essa configuração circular modificada, não existe uma solução analítica fechada e uma abordagem numérica deve ser utilizada. Para efetuar os cálculos das frequências de corte desse dispositivo empregou-se uma malha de triângulos com 723 pontos nodais.

A Tabela 6 apresenta o produto $k_c r$ para os modos TM e TE do guia circular modificado (filtro) [86]. Os resultados obtidos são comparados com os apresentados em [88].

TABELA 6 – Valores de $k_c r$ para o guia filtro cilíndrico modificado

Modo TM	Este Trabalho ($k_c r$)	Ref. [88] ($k_c r$)	Desvio %	Modo TE	Este Trabalho ($k_c r$)	Ref. [88] ($k_c r$)	Desvio %
1	2,661	2,6435	0,7	1	1,820	1,8279	0,4
2	4,195	4,1631	0,8	2	1,819	1,8279	0,5
3	4,196	4,1631	0,8	3	2,681	2,6679	0,5
4	5,253	5,2129	0,8	4	3,329	3,3577	2,0
5	5,926	5,8722	0,9	5	3,878	3,8720	0,2
6	6,017	5,9444	1,2	6	3,970	4,0032	0,8
7	6,796	6,7116	1,3	7	3,973	4,0032	0,8
8	6,802	6,7116	1,3	8	4,484	4,5129	0,6

As Figs. 13 e 14 apresentam as configurações de campo para alguns modos TM e TE, respectivamente.

Fig. 13 Seção transversal de um guia circular modificado (filtro) e isolinhas de E_z .
(a) modo $n = 1$ e (b) modo $n = 6$.

Fig. 14 Seção transversal de um guia circular modificado (filtro) e isolinhas de H_z .
(a) modo $n = 3$ e (b) modo $n = 8$.

Dispositivos de formato não convencional podem ser estudados sem nenhuma imposição simplificadora. Um exemplo é o caso apresentado em [89], em que um ressoador planar de formato hexaédrico é utilizado no projeto de junções simétricas de três portas. Essas junções podem ser empregadas em circuladores, divisores e isoladores em uma rede de microondas.

O ressoador hexaédrico oco é delimitado por paredes metálicas condutoras perfeitas. A configuração geométrica pode ser vista na Fig. 15, onde o raio $r = 1,00$ cm, o

ângulo $\phi = 30^\circ$ e $\theta = 90^\circ$. Para o cálculo das constantes de propagação, na frequência de corte, foi utilizada uma malha de elementos triangulares num total de 597 pontos nodais [86].

Fig. 15 Seção do ressonador hexaédrico

As Figs. 16(a) e 16(b) apresentam os perfis de campo de alguns dos modos calculados.

Fig. 16 Ressonador hexaédrico com isolinhas de campo.

(a) isolinhas de E_z , modo TM ($k_c r = 2,996$) e (b) isolinhas de H_z , modo TE ($k_c r = 3,920$).

4.2 Modos E^x e E^y em guias ópticos

Nesta seção, o Método dos elementos finitos escalar, como apresentado na seção 2.2, será aplicado a vários tipos de guias ópticos. Os resultados das simulações serão

comparados aos obtidos por outros autores que utilizam o próprio MEF ou outra técnica numérica.

4.2.1 Guia Óptico Tipo RIB

Guias com estrutura tipo “RIB” (guia em forma de “costela”) são corriqueiramente utilizados em óptica integrada. Como exemplo, serão estudadas as características de propagação de onda em um guia “RIB” de GaAs/GaAlAs, cuja configuração geométrica é apresentada na Fig. 17.

Fig. 17 Guia óptico tipo “RIB”.

Os índices de refração do GaAs e GaAlAs são 3,44 e 3,40, respectivamente e o comprimento de onda de operação será $\lambda_0 = 1,15 \mu\text{m}$.

A Fig. 18 apresenta os valores calculados para o índice efetivo (n_{eff}) em função da espessura (t) do filme de GaAs. Os resultados podem ser comparados com os apresentados por outros autores [7], [10], [90] - [94]. Na Fig. 18, SFEM representa o MEF escalar apresentado em [7] e [91], VFEM (a) indica o MEF vetorial associado à técnica de penalidade do funcional [92], VFEM (b) representa o MEF vetorial com elementos híbridos aresta / nodal [93] e finalmente, VFEM_BPM aplica-se ao MEF vetorial associado à uma técnica de propagação (“Beam Propagation Method”) [94]. Como apontado em [91], os

resultados obtidos com a formulação escalar aproximam-se bem dos valores mais acurados, encontrados a partir da formulação vetorial de onda completa, VFEM (b).

Fig. 18 Índice efetivo dos modos E_{11}^x e E_{11}^y em função da espessura, t , do filme de GaAs.

As Figs. 19(a) e 19(b) mostram as distribuições dos componentes de campo E_x , para o modo dominante E_{11}^x (quase-TE), e H_x para um modo superior E_{21}^y , respectivamente.

Fig. 19 Modos ópticos no guia "RIB".

(a) isolínhas de campo E_x do modo E_{11}^x , (b) isolínhas de campo H_x do modo E_{21}^y .

4.2.2 Guia Canal Homogêneo e Isotrópico

Guias ópticos tipo canal, de seção transversal retangular e preenchidos homogeneamente com material dielétrico, foram analisados por vários autores empregando diferentes técnicas numéricas. A seguir, será apresentado um exemplo desse tipo de guia óptico e os resultados comparados com dados existentes na literatura [30]. A configuração geométrica do guia é mostrada na Fig. 20. Os índices de refração são: $n_1 = 1,0$; $n_2 = 1,43$ e $n_3 = 1,50$ e a relação entre as dimensões $a/b = 2$.

Fig. 20 Guia óptico tipo canal.

Parâmetros normalizados para a constante de propagação (B) e para a frequência de operação (v) serão utilizados. Esses parâmetros são mais sensíveis às mudanças geométricas da estrutura que os próprios valores de n_{eff} .

$$v = \frac{k_0 b}{\pi} \sqrt{(n_3^2 - n_2^2)} \quad (299)$$

$$B = \frac{n_{\text{eff}}^2 - n_2^2}{n_3^2 - n_2^2} \quad (300)$$

A Fig. 21 apresenta a curva de dispersão do modo E_{11}^x calculada neste trabalho. Os resultados são compatíveis com os valores obtidos pelo método de equação integral vetorial (VIE) e pelo método do índice efetivo (EIM) [25]. Com o método de Marcatili obtém-se frequências de corte mais elevadas [95].

Fig. 21 Curvas de dispersão para guia canal isotrópico e homogêneo.

4.2.3 Guia Canal Homogêneo e Anisotrópico

Guias tipo canal com materiais anisotrópicos são também muito comuns. Neste exemplo, será considerado um guia retangular inserido em substrato de LiNbO_3 , como o mostrado na Fig. 22.

Fig. 22 Guia canal anisotrópico

A Fig. 23 apresenta a curva de dispersão para o modo E_{11}^y em função do parâmetro $k_0 t$, onde k_0 é a constante de propagação da onda em meio aberto e t é a profundidade do guia canal. Os índices de refração são: $n_x = 2,200$, $n_y = n_z = 2,290$ e $n'_x = 2,222$, $n'_y = n'_z = 2,3129$.

Os resultados estão em excelente acordo com os valores obtidos por formulações do tipo escalar (SFEM) e vetorial (VFEM) do MEF [10], [47] e [90].

Fig. 23 Curva de dispersão para o modo E_{11}^y em guia canal anisotrópico.

4.2.4 Guia Planar Isotrópico e Não Homogêneo

Um guia de onda planar com perfil exponencial de índices de refração foi utilizado para testar a formulação em guias difusos. O perfil de índices de refração é descrito por:

$$n(y) = 2,20 + 0,01 e^{\frac{-|y|}{b}}, \quad (301)$$

onde y é a coordenada em que ocorre a difusão e b é a profundidade efetiva de difusão.

A Fig. 24 apresenta os resultados para os três modos E^x (quase-TE) com constante de propagação mais elevadas [30]. As curvas são compatíveis com os valores apresentados em [24], provenientes da aplicação do SFEM e do cálculo analítico exato.

4.2.4 Guia Canal Isotrópico e Não Homogêneo

Dois guias ópticos de seção transversal retangular foram considerados para os testes com guias tipo canal e com índices difusos.

Primeiramente, um guia no qual é realizada uma difusão circular na região do núcleo. A configuração geométrica pode ser vista na Fig. 25.

Fig. 24 Curvas de dispersão (modos E^x) para o guia planar isotrópico e difuso.

Fig. 25 Geometria do guia canal

O índice de refração para a difusão circular é dado por [26]:

$$n_3(x, y) = n_2 + \frac{n_2 - n_{3m}}{L^2} (x^2 + y^2 - L^2), \quad (302)$$

onde n_2 é o valor do índice de refração no substrato, n_3 e n_{3m} são o índice de refração ponto a ponto e o máximo valor desse índice na região do guia canal, respectivamente. L é o comprimento da reta que une a origem a um ponto sobre a fronteira do guia canal e que intercepta um ponto $P(x,y)$. Se as coordenadas do ponto P , no interior do retângulo, satisfazem a condição $|y| \geq |x|$, então:

$$L = \sqrt{b^2 + x^2}, \quad (303)$$

caso contrário,

$$L = \sqrt{(a/2)^2 + y^2}, \quad (304)$$

onde a e b são a largura e altura da seção retangular, respectivamente.

O domínio inteiro, incluindo a região de ar, foi discretizado com uma malha de 5680 triângulos de primeira ordem, correspondendo a aproximadamente 2800 pontos nodais. Com o intuito de melhor representar os modos próximos à situação de corte, a malha foi refinada no interior do núcleo retangular e em todas as regiões do substrato, onde a intensidade de campo não é desprezível.

Os valores utilizados na simulação foram $n_1 = 1,00$; $n_2 = 1,44$ e $n_{3m} = 1,50$ e razão geométrica $a/b = 2$. A curva na Fig. 26 mostra os resultados dos cálculos efetuados neste trabalho e os obtidos pelos métodos da equação integral vetorial (VIE) [25], MEF vetorial (VFEM) [26] e um MEF escalar (SFEM) [24]. Longe da frequência de corte, os resultados deste trabalho estão em bom acordo com os valores apresentados na literatura. Próximo à região de corte, os valores calculados para o parâmetro B diferirem significativamente. Contudo, isto representa apenas uma diferença menor que 1 % nos valores de índice efetivo (n_{eff}), quando comparados aos resultados obtidos por outros métodos [30].

Fig. 26 Curva de dispersão para o modo E_{11}^x em um guia com perfil circular de índices de refração e valores obtidos na literatura. A frequência e a constante de propagação normalizadas foram definidas como $v = (k_0 b / \pi) (n_{3av}^2 - n_2^2)^{1/2}$ e $B = (n_{\text{eff}}^2 - n_2^2) / (n_{3av}^2 - n_2^2)$, respectivamente, onde $n_{3av} = 1,47$ é o índice de refração médio na região do guia difuso.

A Fig. 27 apresenta a curva de dispersão calculada para o modo E_{11}^x em um guia canal de seção retangular e com razão geométrica $a/b = 1$ [30]. Neste caso, o perfil dos índices de refração é descrito por uma função Gaussiana-Gaussiana no interior do canal:

$$n_3(x, y) = n_2 \left[1 + 0,05 \left(e^{-\frac{4(x-x_0)^2}{a^2}} e^{-\frac{(y-y_0)^2}{b^2}} \right) \right] \quad (305)$$

Os resultados, apresentados na Fig. 27, foram obtidos por vários autores aplicando diferentes métodos, nominalmente: o método variacional (VM) [21], o MEF vetorial (VFEM) [31], o método das diferenças finitas vetorial (VFD) [22], uma extensão do método das diferenças finitas (EFD) [33] e o método variacional associado às diferenças finitas (VarFD) [23]. Na região próxima à frequência de corte, os valores são consideravelmente diferentes. Entretanto, os resultados obtidos neste trabalho, para a região de corte, estão em bom acordo com os apresentados em [21] (VM), que utiliza também uma malha refinada na região de interesse.

Fig. 27 Curva de dispersão do modo E_{11}^x em canal isotrópico difuso com perfil de índice de refração descrito por uma função Gaussiana-Gaussiana e valores apresentados na literatura. A frequência e constante de propagação normalizadas são definidas, respectivamente por: $v = (k_0 b / \pi) (n_{3m}^2 - n_2^2)^{1/2}$ e $B = (n_{\text{eff}}^2 - n_2^2) / (n_{3m}^2 - n_2^2)$, com $n_1=1,0$; $n_2=(2,1)^{1/2}$ e $n_{3m}=1,05 n_2$.

4.2.5 Guia Canal Anisotrópico e Não Homogêneo

A formulação do MEF, apresentada na seção 2.2, permite a análise modal de guias anisotrópicos com perfis arbitrários de índices de refração. Guias ópticos, fabricados por meio de processos difusivos, apresentam índices de refração variando espacialmente de modo contínuo na região do guia. A seguir, como exemplo, serão apresentados os resultados da simulação das propriedades de propagação em guias fabricados por difusão de Ti em substrato de LiNbO_3 ($\text{Ti}:\text{LiNbO}_3$ “waveguides”). Um estudo mais aprofundado deste tipo de guia será apresentado na seção 5.1.

Para guias construídos por difusão de Ti em LiNbO_3 , os índices de refração, na região de difusão, seguem a seguinte expressão [96]:

$$n_{e,o}^2(x, y, \lambda) = n_{b_{e,o}}^2 + \left[\left(n_{b_{e,o}} + \Delta n_{s_{e,o}}(\lambda) \right)^2 - n_{b_{e,o}}^2 \right] \exp\left(-\frac{y^2}{d_y^2}\right) f\left(\frac{2x}{W}\right) \quad (306)$$

onde:

$$f\left(\frac{2x}{W}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \text{erf}\left[\frac{W}{2d_x}\left(1 + \frac{2x}{W}\right)\right] + \text{erf}\left[\frac{W}{2d_x}\left(1 - \frac{2x}{W}\right)\right] \right\} \quad (307)$$

e e o denotam os eixos extraordinário e ordinário, respectivamente; x e y são as coordenadas para um ponto no substrato; W é a largura inicial da fita de Ti; d_x e d_y são a largura e profundidade de difusão, respectivamente; n_b é o índice de refração do substrato e Δn_s representa a variação do índice de refração superficial com o comprimento de onda. O parâmetro Δn_s é dado em termos da espessura inicial do filme de Ti depositado sobre o substrato e de alguns parâmetros de ajuste [97].

As simulações foram realizadas para um guia construído em um cristal de LiNbO_3 com corte x_c e propagação em y_c [30] e [96], filme de Ti com espessura $H = 100$ nm,

comprimento de onda $\lambda = 1,523 \mu\text{m}$, temperatura de difusão $T = 1050^\circ\text{C}$ e tempo de difusão $t = 8 \text{ h}$. Usando os parâmetros de difusão obtidos de [96] e [97], os seguintes dados de entrada foram calculados: $d_x=4,60 \mu\text{m}$, $d_y=4,00 \mu\text{m}$, $d_{y0}=6,23 \mu\text{m}$, $d_{ye}=4,98 \mu\text{m}$, $n_{b0}=2,2125$, $n_{be}=2,1383$, $\Delta n_{so}=0,00446$ e $\Delta n_{se}=0,01217$.

A Fig. 28 apresenta, para o modo E_{11}^x , os valores dos índices efetivos e os diâmetros dos modos (W_x e W_y) nos eixos x e y , respectivamente, em função da largura inicial do filme de Ti. Os diâmetros dos modos são definidos como a largura completa na metade da máxima amplitude do campo óptico. Essas curvas seguem o mesmo comportamento das apresentadas em [96]. Esses últimos resultados não estão incluídos na figura, pois, tais dados foram obtidos para um cristal com outra orientação dos eixos cristalinos principais (corte z_c e propagação em y_c).

Fig. 28 Índice efetivo (n_{eff}) e diâmetro nas direções x e y , para o modo E_{11}^x , em função da largura inicial do filme de Ti.

Nessa seção, foram apresentados resultados, obtidos por várias formulações propostas na literatura, para a análise modal de guias de ondas em engenharia de microondas e guias ópticos de importância tecnológica.

A caracterização dos guias de ondas, próximo à frequência de corte, é importante para o projeto de dispositivos monomodos. Mas, nessa região de frequência, discrepâncias

aparecem entre todas as simulações. Infelizmente, na literatura especializada, existem poucas comparações entre resultados experimentais e simulados.

As comparações mostraram que, para guias ópticos, a formulação escalar pode fornecer resultados tão confiáveis quanto outros métodos costumeiramente usados no estudo de modos de propagação. Essa é uma informação importante para o desenvolvimento de uma confiável ferramenta de “software” destinada à análise de dispositivos complexos de óptica integrada. É conhecido que a formulação escalar não apresenta os “modos espúrios” e consome menos memória e tempo de processamento do que as formulações vetoriais, permitindo a análise destes dispositivos complexos mesmo em computadores de baixo custo.

4.3 Análise modal em guias de ondas “abertos” - Aplicação das Transformações Espaciais

Com o intuito de demonstrar a aplicação da técnica de transformação espacial ao estudo de guias ópticos fracamente guiados, serão apresentados os resultados numéricos obtidos para um caso teste presente na literatura [42], [55] e [62], operando próximo à frequência de corte.

Considere um guia de onda dielétrico com um núcleo retangular de seção transversal com $6\ \mu\text{m} \times 3\ \mu\text{m}$ de área, índice de refração $n_1 = 1,0488$ e circundado por ar ($n_2 = 1,0$), Fig. 29. Nessa situação, os campos eletromagnéticos decaem muito suavemente na região de ar, devido à pequena diferença entre os índices de refração (0,0488). Tal comportamento faz desta configuração um excelente caso para testar o funcionamento e validar qualquer esquema para cálculo de guias de ondas em domínios abertos.

Fig. 29 Guia de onda dielétrico.

Tirando proveito da simetria apresentada pelo caso teste, os cálculos foram realizados considerando-se somente um quarto da seção transversal. As dimensões, relevantes ao domínio utilizado na experimentação numérica, são apresentadas na Tabela 7.

TABELA 7 - Dimensões dos domínios utilizados nos cálculos (μm).

Domínio	x_e	y_e	x_i e r_i	y_i e s_i	r_e	s_e
D1	$2 \cdot 10^9$	$2 \cdot 10^9$	40	40	80	80
D2	$2 \cdot 10^{10}$	$2 \cdot 10^{10}$	40	40	100	100

Os parâmetros normalizados (v) para a frequência, e (B) para a constante de propagação, definidos por:

$$v = \frac{k_0 b}{\pi} \sqrt{n_1^2 - n_2^2} \quad (308)$$

$$B = \frac{n_{eff}^2 - n_2^2}{n_1^2 - n_2^2}, \quad (309)$$

serão novamente utilizados nas comparações com dados da literatura.

A Fig. 30 mostra as curvas de dispersão para o modo E_{11}^x (fundamental), quando se utiliza o domínio D2 (Tabela 7). De maneira geral, os resultados deste trabalho estão muito próximos aos apresentados na literatura, obtidos com a utilização da técnica dos elementos

infinitos [55] ou com a técnica de condição de contorno de impedância [62]. Contudo, existem algumas diferenças entre os valores calculados na região da frequência de corte, conforme pode ser verificado na Fig. 31.

Os cálculos realizados com elementos infinitos apresentam uma frequência de corte mais elevada e um comportamento mais abrupto para a curva de dispersão. Por outro lado, os cálculos com a condição de contorno especial mostram um comportamento mais suave e frequência de corte mais baixa. Os resultados obtidos com a técnica das transformações espaciais têm valores mais elevados para B em frequências mais altas, cruzam os dados obtidos com condição de contorno especial e fornece um valor de frequência de corte intermediário aos dois outros métodos.

Fig. 30 Constante de propagação normalizada (B) em função da frequência normalizada (v) para os modos E_{11}^x , obtidos por diferentes técnicas associadas ao MEF.

Como a precisão da técnica de transformação espacial é dependente da discretização e do domínio não transformado, para o domínio D1, foram realizados testes com três malhas (de aproximadamente 5000 pontos nodais) que possuem diferentes características nas proximidades do contorno externo (Γ_e) da região transformada. Para o domínio D2, foi utilizada uma malha mais refinada, com aproximadamente 14000 pontos nodais. A Fig. 32

apresenta as curvas de dispersão, na região da frequência de corte, para os testes descritos. Os cálculos mostram que a densidade da malha afeta os valores dos índices efetivos e que os melhores resultados são obtidos quando há um refinamento próximo ao contorno externo. Isto ocorre, pois, a transformação espacial ocorre mais acentuadamente nas posições mais afastadas. Além disso, os melhores resultados para o domínio D1 com malha 3 (maior refinamento próximo ao contorno externo) estão em boa concordância com aqueles obtidos para o domínio D2. Nesse caso, a frequência de corte é ligeiramente menor para o domínio maior.

Fig. 31 Curvas de dispersão, muito próximas à frequência de corte, obtidas por diferentes técnicas associadas ao MEF.

Fig. 32 Curvas de dispersão, obtidas pela técnica de transformação espacial, para diferentes malhas e dimensões de domínio transformado.

A Fig. 33 apresenta um exemplo de malha de elementos finitos com refinamento próximo ao contorno externo da região transformada. Essa é a situação que apresenta os melhores resultados numéricos para o domínio D1 (malha 3). A Fig. 34(a) apresenta as isolinhas de campo óptico do modo fundamental E_{11}^x na região I, que não sofre transformação espacial, e nas regiões II – IV. Pode-se notar a mudança na curvatura das isolinhas no interior das regiões transformadas. Se houver interesse no perfil original do campo em posições interiores às regiões transformadas pode-se aplicar a transformação espacial inversa. A Fig. 34(b) mostra a variação da amplitude relativa de campo óptico no domínio estudado. A máxima intensidade ocorre na região do guia dielétrico. O campo óptico decai muito suavemente ao longo da região I, não transformada, e vai a zero antes do limite do contorno externo transformado.

A técnica de transformação espacial, associada ao MEF, foi aplicada ao cálculo de modos E^x (TE-like) para guias quase-guiados. Essa técnica pode ser aplicada a problemas com materiais não homogêneos, não depende da escolha de um fator de decaimento, escolhido “ad hoc”, e não necessita da definição prévia de propriedades físicas fictícias. Além disso, as transformações espaciais preservam a esparsidade e linearidade do sistema de equações original. Contudo, esse procedimento requer uma área de discretização maior que a utilizada por outras técnicas em problemas de domínio aberto. Foi mostrada, também, a necessidade de uma malha mais densa, próxima ao contorno externo da região transformada, a fim de se obter resultados mais precisos para a frequência de corte.

Os resultados comprovam a aplicabilidade da técnica de transformação espacial e encorajam sua aplicação na análise de dispositivos ópticos integrados, os quais exigem que se considere a existência de grandes regiões “finitas”.

Fig. 33 Malha e geometria utilizada na análise por elementos finitos. (a) Malha de elementos finitos com refinamento no contorno externo da região transformada, (b) esquema mostrando um quarto do guia de onda dielétrico, planos de simetria e regiões com transformação espacial.

Fig. 34 Campo Óptico para o modo fundamental E_{11}^x . (a) Isolinhas de campo óptico na região I, não transformada, e regiões II – IV que sofrem transformação espacial, (b) Amplitude relativa do campo óptico nas regiões I – IV. A região que apresenta a máxima amplitude de campo corresponde à região do guia dielétrico. Nas regiões transformadas o campo óptico cai a zero próximo ao contorno externo.

5. APLICAÇÃO TECNOLÓGICA EM ÓPTICA INTEGRADA: Moduladores Eletroópticos

Moduladores eletroópticos estão entre os mais importantes componentes dos sistemas ópticos de comunicação de banda larga e são utilizados em sensores de alta precisão, processamento de sinal óptico e computação óptica. O desenvolvimento de técnicas de projeto e de construção de moduladores, com grandes larguras de banda e pequeno consumo de potência, tem exigido grandes esforços nos últimos anos.

A estrutura básica de um modulador eletroóptico consiste de uma pastilha dielétrica (substrato) sobre a qual são depositados eletrodos metálicos e um filme fino intermediário de material dielétrico, denominado camada “buffer”. Guias ópticos são fabricados na região próxima à superfície do substrato. O campo elétrico, gerado pelos eletrodos, penetra na região do guia de onda óptico e modifica a permissividade elétrica do material nessa região. Esta interação, denominada efeito eletroóptico, afeta as características de propagação da onda óptica e permite sua modulação [98]-[100]. Uma fonte externa gera o sinal de radiofrequência (RF), necessário para modulação. Essa onda elétrica é transmitida aos eletrodos, de modo que o sinal elétrico e óptico interajam ao longo de uma distância pré-determinada. A eficiência do modulador depende da sobreposição (“overlap”) dos campos óptico e elétrico e, também, do desvio de fase entre a onda óptica e a onda elétrica guiada pelos eletrodos.

No projeto destes dispositivos, deve-se procurar o melhor casamento entre as impedâncias do sistema composto pelo conjunto de eletrodos, fonte de modulação externa - linha de transmissão (normalmente $50\ \Omega$) e carga (se o modulador for do tipo onda caminhante). O melhor casamento permite minimizar as reflexões do sinal de entrada,

diminuindo, assim, a potência requerida para a operação. A Fig. 35 mostra um esquema das impedâncias envolvidas em um dispositivo modulador, onde Z_s é a impedância da fonte de modulação-linha de transmissão, Z_c é a impedância característica do modulador e Z_L é a impedância da carga. Nos casos estudados neste trabalho considera-se $Z_L = Z_c$.

Fig. 35 Modulador com impedância característica (Z_c) representado por um quadripolo alimentado por um gerador e linha de transmissão com impedância Z_s e terminado por uma carga de impedância Z_L .

O projeto de um dispositivo modulador envolve, entre outros, a análise dos seguintes fatores ou características:

1. Determinação dos parâmetros de fabricação dos guias ópticos difusos em função de suas características de propagação de ondas e configuração de campos;
2. minimização das perdas no acoplamento entre a fibra óptica e a pastilha do modulador, no que diz respeito à distribuição dos campos ópticos na fibra e no guia;
3. determinação das características geométricas da configuração de eletrodos e camada “buffer”, considerando-se a avaliação dos parâmetros elétricos e seus valores nominais de projeto e
4. análise crítica do desempenho do modulador quanto à potência necessária para modulação e largura de banda para determinada aplicação. O desempenho pode ser estudado em função das características geométricas e elétricas da estrutura de eletrodos e, também, em função das características de fabricação do guia óptico difuso.

Nas duas primeiras seções deste capítulo, serão estudadas as características de propagação de onda e a eficiência no acoplamento de uma fibra óptica a um guia em função dos parâmetros de fabricação de guias ópticos difusos do tipo Ti:LiNbO_3 . Serão apresentadas, também, as características modais de um dispositivo que transforma a dimensão do modo óptico e melhora a eficiência do acoplamento fibra-guia, quando os

modos ópticos nestes componentes possuem dimensões muito diferentes. Em seguida, serão apresentados os fundamentos do efeito eletroóptico linear em cristal de LiNbO_3 e a análise das características elétricas de moduladores eletroópticos com configurações simplificadas de dois eletrodos simétricos. Finalmente, serão analisadas duas configurações de moduladores tipo Mach-Zehnder: uma utilizando eletrodos com estrutura “ridge” e outra empregando eletrodos extras entre o substrato e a camada “buffer”. Para o modulador com estrutura “ridge” será apresentada uma análise de desempenho em função dos parâmetros de fabricação dos guias ópticos.

5.1 Características de Propagação de Modos Ópticos em Guias do tipo Ti:LiNbO₃

Guias ópticos são usados em muitos circuitos ópticos integrados e, desta forma, as ferramentas de projeto para estes guias de ondas apresentam um grande interesse tecnológico. A simulação computacional de guias difusos tem sido extensivamente aplicada nas últimas duas décadas no estudo de diversos dispositivos.

Guias formados por difusão de Ti em LiNbO_3 são largamente utilizados em dispositivos de óptica integrada. Esse tipo de guia apresenta pequena perda óptica e uma técnica de fabricação bem conhecida. Embora o aumento nos índices de refração seja menor que o obtido pelo processo de troca de prótons seguido de recozimento (“annealing”), os guias Ti:LiNbO₃ apresentam boas características gerais para utilização em dispositivos eletroópticos e acustoópticos. Esses guias permitem, ainda, a integração monolítica de lasers a onda contínua quando íons de terras-raras são também difundidos no guia Ti:LiNbO₃ [96].

Guias ópticos formados por processo de troca de prótons são, também, muito utilizados. No apêndice A, será apresentado o procedimento que se está adotando para a simulação das características desses guias com o uso do MEF e uma análise crítica sobre os modelos empíricos, apresentados na literatura, utilizados para relacionar a concentração de prótons no substrato e a variação dos índices de refração.

A formulação do MEF, apresentada na seção 2.2, será empregada para a simulação das propriedades de propagação de modos E^x , em guias Ti:LiNbO_3 [40].

A. Distribuição de Índices de Refração em Função dos Parâmetros de Fabricação.

Para guias tipo canal, formados por difusão de Ti em LiNbO_3 , os índices de refração na região de difusão são dados por [96] e [101]:

$$n_{e,o}^2(x, y, \lambda) = n_{b_{e,o}}^2 + \left[\left(n_{b_{e,o}} + \Delta n_{s_{e,o}}(\lambda) \right)^2 - n_{b_{e,o}}^2 \right] \exp\left(-\frac{y^2}{d_y^2}\right) f\left(\frac{2x}{W}\right) \quad (310)$$

onde:

$$f\left(\frac{2x}{W}\right) = \frac{1}{2} \left\{ \text{erf}\left[\frac{W}{2d_x}\left(1 + \frac{2x}{W}\right)\right] + \text{erf}\left[\frac{W}{2d_x}\left(1 - \frac{2x}{W}\right)\right] \right\} \quad (311)$$

e e o denotam os eixos extraordinário e ordinário, respectivamente; x e y são as coordenadas de um ponto no substrato; W é a largura inicial do filme de Ti; d_x e d_y são largura e profundidade de difusão, respectivamente; n_b é o índice de refração do substrato e Δn_s representa a variação do índice superficial para um dado comprimento de onda.

Em adição, $\Delta n_{s_{e,o}}$ é função do comprimento de onda do sinal óptico (λ), da espessura inicial do filme de Ti (H) e de alguns parâmetros de ajuste [97]:

$$\Delta n_{s_{e,o}}(\lambda) = \left[B_0(\lambda) + B_1(\lambda) \frac{H}{d_{y_{e,o}}} \right] \left(\frac{H}{d_{y_{e,o}}} \right)^{\alpha_{e,o}} \quad (312)$$

$$\alpha_e = 0,83, \quad \alpha_o = 0,53,$$

$$B_{0e}(\lambda) = 0,385 - 0,430 \lambda + 0,171 \lambda^2,$$

$$B_{1e}(\lambda) = 9,130 + 3,850 \lambda - 2,490 \lambda^2,$$

$$B_{0o}(\lambda) = 0,0653 - 0,0315 \lambda + 0,0071 \lambda^2,$$

$$B_{1o}(\lambda) = 0,4780 + 0,4640 \lambda - 0,3480 \lambda^2.$$

$$0,6 \leq \lambda(\mu m) \leq 1,6$$

Os coeficientes de difusão D_x e D_y , a largura d_x e a profundidade d_y de difusão, e a profundidade de mudança dos índices de refração d_{ye} e d_{yo} podem ser calculados por:

$$D_i = D_{i0} e^{\left(-\frac{E_{i0}}{KT} \right)}, \quad i = x, y \quad (313)$$

$$d_i = 2 \sqrt{D_i t}, \quad (314)$$

$$d_{y_{e,o}} = \frac{d_y}{\sqrt{\alpha_{e,o}}}, \quad (315)$$

onde D_{i0} é a constante de difusão, E_{i0} é a energia de ativação e K é a constante de Boltzmann. As constantes para Ti:LiNbO₃ são apresentadas na Tabela 8 [97].

TABELA 8 - Coeficientes da lei de Arrhenius para guias Ti:LiNbO₃.

D_{x0} ($\mu m^2/h$)	5,0 e+9
D_{y0} ($\mu m^2/h$)	1,35 e+8
E_{x0} (eV)	2,60
E_{y0} (eV)	2,22

A dispersão dos índices de refração do LiNbO₃ segue a forma [102]:

$$n_o^2 = 4,9048 - \frac{0,11768}{0,04750 - \lambda^2} - 0,027169 \lambda^2, \quad (316)$$

$$n_e^2 = 4,5820 - \frac{0,099169}{0,044432 - \lambda^2} - 0,021950 \lambda^2,$$

onde λ é dado em μm .

Em dispositivos moduladores ópticos, construídos com guias Ti:LiNbO₃, é comum utilizar-se uma camada de material dielétrico sobre o substrato de LiNbO₃. No caso de uma camada de SiO₂, a dispersão do índice de refração isotrópico pode ser obtida pela equação de Sellmeier de três termos [10], [103]:

$$n(\lambda) = \left(1 + \sum_{i=1}^3 \frac{a_i \lambda^2}{\lambda^2 - \lambda_i^2} \right)^{1/2}, \quad (317)$$

onde $a_1 = 0,6961663$; $a_2 = 0,4079426$; $a_3 = 0,8974794$; $\lambda_1 = 0,0684043$; $\lambda_2 = 0,1162414$ $\lambda_3 = 9,896161$ e λ é dado em μm .

B. Análise Modal do Guia Ti:LiNbO₃ em Função dos Parâmetros de Fabricação

As simulações foram realizadas para um guia construído em substrato de LiNbO₃ com corte x_c, propagação ao longo do eixo cristalino y_c e com sinal óptico de comprimento de onda $\lambda = 1,523 \mu\text{m}$.

Para definir o guia óptico difuso tipo canal foram consideradas nas simulações as influências da largura inicial do filme de Ti (W), da espessura inicial deste filme (H), da temperatura de difusão (T) e do tempo de difusão (t).

Além disso, os parâmetros de fabricação foram escolhidos de forma a garantir a difusão completa do Ti no substrato de LiNbO₃, evitando-se assim, a presença de óxido residual de Ti que causa perdas por espalhamento óptico e aumenta a perda por inserção (acoplamento com dispositivo externo).

A Fig. 36 mostra o índice efetivo para os dois primeiros modos E^x (E_{11}^x , modo fundamental), como uma função de W . O diâmetro (“spot size”) do modo E_{11}^x , definido como a largura completa à meia altura da amplitude máxima do campo óptico, é também mostrado. As simulações foram realizadas assumindo os seguintes parâmetros fixos: $H=80$ nm, $T=1050^\circ\text{C}$, e $t=3$ horas. Para esta condição em particular, o menor “spot-size” é obtido para $W=5$ μm , aproximadamente. A simulação também mostra que o guia opera na condição monomodo para larguras do filme de Ti menores que $W=7$ μm .

A Fig. 37 mostra a variação do índice efetivo como uma função da espessura inicial do filme de Ti. Foi assumido o seguinte conjunto de parâmetros fixos: $W=5$ μm , $T=1050^\circ\text{C}$ e $t=3$ h. O guia é monomodo para $H \leq 95$ nm e a frequência de corte para o modo E_{11}^x é alcançada para $H=55$ nm, aproximadamente.

A Fig. 38 mostra a variação do índice efetivo, para os três primeiros modos E^x , em função da temperatura de difusão (T) para $W=5$ μm , $H=80$ nm e $t=3$ h. Pode-se notar que a operação monomodo é possível para temperaturas entre 1000°C e 1150°C . Os “spot-sizes” W_x e W_y nas direções x e y , respectivamente, para temperaturas maiores que 1000°C , são mostrados na Tabela 9. O “spot-size” aumenta rapidamente com a temperatura.

A Fig. 39 apresenta a variação do índice efetivo como uma função do tempo de difusão (t) para $W=5$ μm , $H=80$ nm e $T=1050^\circ\text{C}$. Nestas condições foi observada operação monomodo ao longo de todo o intervalo de tempo considerado.

As Figs. 40 e 41 apresentam a variação do índice efetivo dos quatro primeiros modos E^x e o diâmetro do modo fundamental E_{11}^x em função do comprimento de onda, respectivamente. Os parâmetros fixos foram: $W=5$ μm , $H=80$ nm e $T=1050^\circ\text{C}$ e $t=3$ h.

Fig. 36 Índice efetivo e “spot-size”, nas direções transversais, em função da largura inicial do filme de Ti.

Fig. 37 Índice efetivo em função da espessura inicial do filme de Ti.

Fig. 38 Índice efetivo para os três primeiros modos ópticos (E^x) em função da temperatura de difusão.

Fig. 39 Índice efetivo em função do tempo de difusão.

Fig. 40 Índice efetivo para os quatro primeiros modos ópticos (E^x) em função do comprimento de onda.

Fig. 41 Diâmetro (“spot-size”) do modo fundamental E_{11}^x , nas direções transversais x e y , em função do comprimento de onda.

TABELA 9 - “Spot size” do modo E_{11}^x para diferentes temperaturas de difusão.

T(°C)	W_x (μm)	W_y (μm)
1015	4,04	2,41
1050	5,00	3,33
1100	7,45	5,26
1150	11,43	8,45

Os exemplos apresentados mostram que, utilizando o MEF, é possível avaliar as características desejadas para os guias ópticos. Esse procedimento pode economizar um considerável tempo em testes de laboratório, diminuir os custos de desenvolvimento, além de favorecer um melhor entendimento dos procedimentos experimentais de construção e dos aspectos de propagação eletromagnética no guia óptico.

5.2 Estudo do Acoplamento Fibra-Guia

Um dos pontos vitais no desenvolvimento de circuitos ópticos integrados é o acoplamento eficiente de lasers semicondutores, amplificadores ópticos e moduladores a fibras ópticas monomodo com diâmetros de núcleo entre 5 e 10 μm [104], [105].

No projeto de sistemas ópticos existem basicamente duas opções para transmitir a energia da onda que se propaga na fibra para o guia óptico: através de uma conexão direta da fibra na entrada e saída do guia [106] - [111] ou por meio do acoplamento de ondas evanescentes que se dá quando a fibra, com núcleo exposto, é posicionada próxima ao guia óptico. Alguns arranjos experimentais, empregando a técnica de acoplamento de ondas evanescentes, fixam a fibra óptica em canais próximos do guia de ondas. Este procedimento reduz o grau de liberdade do problema de acoplamento fibra-guia facilitando a produção em série [112], [113].

A técnica de conexão direta fibra-guia pode ser aplicada a guias ópticos construídos com diferentes materiais (GaAs, LiNbO₃, etc). Normalmente, esta técnica exige um alinhamento de precisão entre fibra e guia, elevando os custos operacionais. Quando fibras e guias ópticos suportam modos com dimensões muito diferentes (“mode spot size”), é necessária a utilização de um componente óptico capaz de transformar a dimensão dos modos para melhorar a transmissão do sinal óptico. Resultados promissores têm sido apresentados para dispositivos baseados em guias “Rib” de formato geométrico variável (“tapered-Rib”) [105], [114] - [120].

Existem várias causas para as perdas no acoplamento entre fibra e guia: a inadequada sobreposição de campos ópticos na região de interface, deslocamentos no plano transversal, separação longitudinal, inclinação e reflexões. No presente trabalho, a análise de perdas será restrita ao estudo de sobreposição de modos ópticos e desalinhamentos transversais. A sobreposição inadequada dos modos ópticos contribui significativamente para as perdas entre as conexões ópticas e depende do posicionamento relativo entre fibra e guia e das características do modo óptico em cada componente. O desalinhamento transversal é, na prática, um problema sempre presente. Deste modo, é importante conhecer a tolerância aceitável para o ajuste de posição entre fibra e guia. Uma modelagem computacional adequada permite estudar o efeito de diversos fatores na sobreposição dos modos e determinar as tolerâncias no ajuste de posição relativa, contribuindo para o projeto de sistemas com melhor desempenho.

Nesta seção, será analisada a eficiência de acoplamento de uma fibra óptica circular monomodo com um guia óptico do tipo Ti:LiNbO₃ por meio da técnica de conexão direta. Será também apresentado o estudo das características modais de um dispositivo transformador de dimensão do modo óptico (TDM).

5.2.1 Acoplamento Fibra – Guia (Ti:LiNbO₃) – Sobreposição de Modos Ópticos

A eficiência no acoplamento entre fibra e guia óptico pode ser calculada pelo fator integral de overlap, o qual leva em consideração a distribuição espacial e sobreposição dos campos ópticos da fibra e do guia na região de interface. O fator integral de overlap, para o estudo de acoplamento, pode ser definido por [108] - [110]:

$$\Psi = \frac{\left| \iint E_f E_g dx dy \right|^2}{\iint |E_f|^2 dx dy \iint |E_g|^2 dx dy}, \quad (318)$$

onde E_f e E_g são os campos ópticos na fibra e no guia, respectivamente.

O cálculo dos campos na fibra óptica pode ser realizado analiticamente, em casos simples, ou por meio de técnicas numéricas. Para simplificar a presente análise, o perfil de campo óptico em uma fibra circular monomodo será aproximado por uma função Gaussiana [108]:

$$E_f(r) \propto \exp\left(-\frac{r^2}{2a^2}\right), \quad (319)$$

onde a é a meia largura a meia altura da amplitude do campo óptico.

A distribuição de campos ópticos para o guia Ti:LiNbO₃, propagando o modo fundamental E_{11}^x , foi calculada utilizando a formulação do MEF apresentada neste trabalho. Nas simulações, considerou-se uma fibra óptica de seção transversal circular propagando um único modo óptico de diâmetro (“spot-size”) $2a = 5,0 \mu\text{m}$ (largura completa a meia altura da amplitude do campo óptico). Um esquema do acoplamento direto de uma fibra óptica com um guia é apresentado na Fig. 42.

Fig. 42 Representação do posicionamento da fibra óptica para acoplamento com guia óptico tipo Ti:LiNbO₃.

A maior eficiência no acoplamento fibra-guia ocorre quando os perfis de campo óptico são semelhantes, ou seja, quando o modo na fibra e no guia têm aproximadamente a mesma dimensão transversal (“spot-size”, definido como a largura completa a meia altura da amplitude máxima do campo óptico). Entretanto, a dimensão do modo no guia tipo Ti:LiNbO₃ depende dos parâmetros utilizados na etapa de fabricação desse guia (processo de difusão). Para melhor entender o efeito desses parâmetros sobre a eficiência de acoplamento, serão apresentados a seguir os valores calculados para as dimensões transversais do modo óptico no guia e a máxima eficiência no acoplamento fibra-guia em função de: largura (W) e altura (H) iniciais do filme de Ti depositado para difusão, temperatura (T) e tempo (t) de difusão. Para se determinar a máxima eficiência de acoplamento, varia-se a posição do centro da fibra ao longo da linha vertical que passa pelo centro do guia óptico (linha de simetria de distribuição de campo).

As curvas apresentadas na Fig. 43 foram obtidas assumindo as seguintes condições de difusão: $H = 80 \text{ nm}$, $T = 1050^\circ\text{C}$ e $t = 3 \text{ h}$. O aumento da largura inicial do filme de Ti (W) diminui a eficiência no acoplamento fibra-guia. Para $6 \mu\text{m} \leq W \leq 10 \mu\text{m}$ a eficiência de acoplamento permanece em aproximadamente 88%. Nesse intervalo, as dimensões do

modo óptico no guia são aproximadamente $W_x = 5,5 \mu\text{m}$ e $W_y = 3,0 \mu\text{m}$. Para larguras acima de $10 \mu\text{m}$, devido ao aumento de W_x , a eficiência decresce rapidamente.

Fig. 43 Eficiência no acoplamento fibra-guia e dimensões transversais do modo óptico E_{11}^x no guia ("spot-size", W_x e W_y) em função da largura do filme de Ti utilizado no processo de difusão.

Na Fig. 44, a eficiência no acoplamento e os "spot-size" são apresentados em função da espessura inicial do filme de Ti (H) para $W = 5 \mu\text{m}$, $T = 1050^\circ\text{C}$ e $t = 3 \text{ h}$. Para uma espessura de aproximadamente 60 nm , a eficiência no acoplamento passa por um máximo ($\approx 92\%$). Nessa situação, as dimensões do modo óptico no guia são $W_x = 6,23 \mu\text{m}$ e $W_y = 4,53 \mu\text{m}$, bem próximos à dimensão do modo óptico na fibra ($2a = 5,0 \mu\text{m}$).

Fig. 44 Eficiência no acoplamento fibra-guia e dimensões transversais do modo óptico E_{11}^x no guia (W_x e W_y) em função da espessura inicial do filme de Ti utilizado no processo de difusão.

A eficiência no acoplamento fibra-guia e os “spot-size” em função da temperatura de difusão, para $W = 5 \mu\text{m}$, $H = 80 \text{ nm}$ e $t = 3 \text{ h}$, são apresentados na Fig. 45. O “spot-size” do modo óptico aumenta continuamente com a temperatura de difusão, enquanto a eficiência no acoplamento passa por um máximo em $T = 1100^\circ\text{C}$ ($\approx 92\%$).

Fig. 45 Eficiência no acoplamento fibra-guia e diâmetros transversais do modo óptico E_{11}^x no guia (W_x e W_y) em função da temperatura de difusão utilizada no processo de fabricação do guia.

O efeito da variação do tempo de difusão sobre a eficiência no acoplamento fibra-guia e os “spot-size” do modo óptico E_{11}^x são apresentados na Fig. 46, para $W = 5 \mu\text{m}$, $H = 80 \text{ nm}$ e $T = 1050^\circ\text{C}$. A dimensão do modo óptico no guia aumenta quase linearmente com o tempo de difusão, porém, a eficiência no acoplamento atinge seu valor máximo no intervalo $5 \text{ h} \leq t \leq 6 \text{ h}$.

As Figs. 47 e 48 apresentam a variação da eficiência no acoplamento fibra-guia em função dos deslocamentos transversais nas direções x e y , respectivamente. Neste exemplo, as condições de fabricação do guia são: $W=5 \mu\text{m}$, $H=80 \text{ nm}$, $T=1050^\circ\text{C}$ e $t=3 \text{ h}$. Com esses parâmetros as dimensões do modo óptico E_{11}^x são: $W_x=5,00 \mu\text{m}$ e $W_y=3,33 \mu\text{m}$.

Fig. 46 Eficiência no acoplamento fibra-guia e dimensões transversais do modo óptico E_{11}^x no guia (W_x e W_y) em função do tempo de difusão utilizado no processo de fabricação do guia.

Fig. 47 Eficiência no acoplamento fibra-guia em função do deslocamento da fibra no eixo x em $y = -2,2 \mu\text{m}$.

Fig. 48 Eficiência no acoplamento fibra-guia em função do deslocamento da fibra no eixo y em $x = 0,0 \mu\text{m}$.

Tomando como parâmetro de projeto uma perda máxima por acoplamento de 1dB ($\approx 20,6 \%$), devido somente à inadequada sobreposição dos campos ópticos, pode-se

determinar, a partir das Figs. 47 e 48, a tolerância no ajuste mecânico entre fibra e guia. Na direção x o deslocamento permitido no ajuste da posição fibra-guia deve estar entre $-1,45 \mu\text{m} \leq x \leq +1,45 \mu\text{m}$, enquanto que na direção vertical y será $-0,6 \mu\text{m} \leq y \leq -3,5 \mu\text{m}$.

As Figs. 43 a 48 fornecem informações importantes para a determinação dos parâmetros de construção do guia óptico (processo de difusão) e tolerâncias de ajuste mecânico, visando o melhor desempenho no acoplamento fibra-guia. Entretanto, no projeto de um modulador eletroóptico deve-se associar a este requisito a condição de operação monomodo e as características nominais de desempenho do modulador, ou seja, potência de operação, tensão de meia onda e largura de banda do modulador.

5.2.2 Transformadores de Dimensão de Modo Óptico

Sistemas ópticos integrados de alto desempenho, baseados em componentes ópticos semicondutores passivos ou ativos, requerem baixas perdas por acoplamento entre fibras monomodo e guias ópticos. Contudo, modos ópticos de perfil elíptico e diâmetros de 1 a 3 μm , comuns em guias semicondutores, não são adequadamente acoplados às fibras ópticas convencionais que propagam modos óptico de perfil circular e diâmetro entre 8 e 9 μm . Esses descasamentos resultam em uma perda por inserção entre 7 e 10 dB, quando se utiliza a técnica de acoplamento direto fibra monomodo-guia semicondutor [120].

Vários dispositivos têm sido propostos para melhorar o acoplamento fibra-guia quando a dimensão dos modos nesses dois componentes é muito diferente. Soluções não integradas normalmente exigem alinhamentos de precisão, os quais não são compatíveis com um produto de baixo custo. Transições em guias de formato variável (“tapered

waveguide”) possibilitam a integração monolítica com maiores tolerâncias para ajuste mecânico entre as partes. Entretanto, essa abordagem pode resultar em processos com maior número de etapas de fabricação e seqüências de litografia [105], [114]-[120].

Nesta seção, serão analisadas as propriedades de propagação de ondas e a distribuição de campos ópticos de uma configuração de transformador de dimensão de modos (TDM), como proposto em [105].

A Fig. 49 apresenta a configuração geométrica do dispositivo TDM. A estrutura é composta basicamente pela sobreposição de dois guias tipo “Rib”. O guia “Rib-1”, de dimensões variáveis $2W_1$ (largura) e h_1 (altura), é o responsável pela transformação da dimensão do modo ao longo da direção longitudinal. O guia “Rib-2”, de dimensões $2W_2$ e h_2 , não sofre variações. Na prática, as dimensões do guia “Rib-1” são definidas pela geometria do modo óptico no guia semicondutor em que se deseja injetar o sinal de luz. Similarmente, as dimensões do guia “Rib-2” são escolhidas de forma que o perfil do modo óptico fundamental aproxime-se da distribuição de campo na fibra.

A Fig. 50 é uma representação do dispositivo TDM em três dimensões. Na figura, a largura (W_1) do guia “Rib-1” é modificada (“tapered Rib”) para proporcionar a mudança na dimensão do modo. Diminuindo-se a largura do “Rib-1” o modo óptico fundamental, antes confinado na região do “Rib-1”, penetra cada vez mais no “Rib-2” até estar totalmente concentrado neste guia.

A Fig. 51 mostra a geometria utilizada na simulação computacional com o MEF. O domínio foi truncado em $x = 30 \mu\text{m}$ e, abaixo do guia “Rib-2”, em $y = -30 \mu\text{m}$. Apenas metade do dispositivo TDM foi utilizado na simulação, levando-se em consideração a simetria do problema. A malha de elementos finitos, com 6532 pontos nodais e 12914

elementos triangulares, foi refinada na região onde se formam os modos ópticos dos dois guias “Rib”.

Fig. 49 Seção transversal do dispositivo transformador de dimensão do modo óptico. A estrutura é composta de um guia “Rib-1”, de dimensões $2W_1 \times h_1$, sobre outro guia “Rib-2” de dimensões $2W_2 \times h_2$.

Fig. 50 Representação do dispositivo transformador de dimensão de modos ópticos. Quando a largura (W_1) do guia “Rib-1” é menor que um certo valor crítico o modo óptico está concentrado na região do guia “Rib-2”.

Quando a largura é maior que o valor crítico o modo está localizado preferencialmente na região do guia “Rib-1”. A figura foi extraída de [120].

Como proposto em [105], as características geométricas da estrutura em estudo, os índices de refração dos materiais dielétricos e o comprimento de onda do sinal óptico são:

$2 W_2 = 10 \mu\text{m}$, $h_2 = 5 \mu\text{m}$, $d = 5 \mu\text{m}$, $n_0 = 1,0$, $n_1 = 3,4092$, $n_2 = 3,3592$, $n_3 = 3,3088$ e $\lambda = 1,319 \mu\text{m}$.

Fig. 51 Geometria utilizada na simulação computacional com o MEF. As demais unidades são apresentadas no texto.

As Figs. 52 e 53 apresentam a curva de dispersão do modo fundamental E_{11}^x em função da largura (W_1) e da altura (h_1) do guia “Rib-1”, respectivamente. O parâmetro B , nessas figuras, representa a constante de propagação normalizada definida por:

$$B = \frac{n_{eff}^2 - n_3^2}{n_1^2 - n_3^2} \quad (320)$$

Para a análise detalhada do comportamento modal do dispositivo TDM, deve-se estudar a distribuição espacial dos campos ópticos em função da variação dos parâmetros geométricos do guia “Rib”. As Figs. 54 e 55 apresentam os perfis de campo do modo óptico fundamental E_{11}^x quando W_1 e h_1 sofrem variações, respectivamente.

Fig. 52 Constante de propagação normalizada (B) para o modo fundamental (E_{11}^x) em função da largura (W_1) do guia Rib-1.

Fig. 53 Constante de propagação normalizada (B) para o modo fundamental (E_{11}^x) em função da altura (h_1) do guia Rib-1.

Dos resultados apresentados nas Figs. 52 e 54 observa-se que praticamente não há alteração na constante de propagação do modo fundamental para larguras (W_1) menores que $0,7 \mu\text{m}$. Nessa situação, os campos estão distribuídos preferencialmente no guia “Rib-2”, o modo apresenta um grande “spot-size” e é pouco sensível às alterações de dimensão no guia “Rib-1”. Esta condição é ideal para o acoplamento com a fibra óptica que propaga modos de maiores dimensões.

Fig. 54 Isolinhas de campo óptico do modo fundamental (E_{11}^x) em passos de 10% de amplitude e $h_1 = 1 \mu\text{m}$.
(a) $W_1 = 0,9 \mu\text{m}$, (b) $W_1 = 0,8 \mu\text{m}$, (c) $W_1 = 0,7 \mu\text{m}$ e (d) $W_1 = 0,4 \mu\text{m}$.

Quando a largura (W_1) é superior a $0,8 \mu\text{m}$ os campos ópticos do modo fundamental estão concentrados na região do guia “Rib-1”, o “spot-size” é bem reduzido e o modo é fortemente influenciado pelas variações geométricas no guia “Rib-1”. Essa situação favorece o acoplamento ao guia integrado semiconductor que apresenta pequenas dimensões de modo óptico.

Fig. 55 Isolinhas de campo óptico do modo fundamental (E_{11}^x) em passos de 10% de amplitude e $W_1 = 1,5 \mu\text{m}$. (a) $h_1 = 0,8 \mu\text{m}$, (b) $h_1 = 0,7 \mu\text{m}$, (c) $h_1 = 0,6 \mu\text{m}$ e (d) $h_1 = 0,5 \mu\text{m}$.

Embora os resultados numéricos mostrem a efetiva transformação da dimensão do modo óptico, um intervalo muito estreito para variação de W_1 foi obtido. Apenas uma variação de $0,1 \mu\text{m}$ em W_1 é suficiente para alterar completamente as características modais. Esses resultados são compatíveis com os obtidos em [105] para a mesma estrutura TDM.

Uma alternativa à redução da largura (W_1), para propiciar o acoplamento fibra-guia, é a redução da altura (h_1) do guia “Rib-1”. Similarmente aos resultados apresentados quando W_1 é variado, as Figs. 53 e 55 apresentam as características de propagação do modo fundamental E_{11}^x quando varia-se h_1 . Neste caso, a altura crítica é $0,65 \mu\text{m}$, pois, abaixo desse valor os campos ópticos estão preferencialmente na região do guia “Rib-2” e possuem grande “spot-size”, enquanto acima de $0,65 \mu\text{m}$ o modo está concentrado na região do guia “Rib-1”, com pequeno “spot-size”.

5.3 Fundamentos do Efeito Eletroóptico em Cristais de LiNbO_3

Muitos dispositivos construídos em óptica integrada fazem uso do efeito eletroóptico. O efeito eletroóptico de primeira ordem (ou efeito Pockels) é o mais simples e o mais importante efeito em óptica não linear. Sua exploração torna possível a construção de chaves, acopladores e moduladores de fase e amplitude com alta frequência de operação.

Cristais de LiNbO_3 são muito suscetíveis ao efeito eletroóptico, além de apresentarem outras características desejáveis, tais como: alta transparência, fácil processamento, grande estabilidade química, física e mecânica e compatibilidade com outros materiais utilizados em óptica integrada e tecnologia de fibras ópticas. Por esses motivos, substratos de LiNbO_3 são comumente empregados em dispositivos moduladores. Guias ópticos em substratos de LiNbO_3 são geralmente obtidos por meio dos processos de difusão de Titânio ou troca de prótons.

A aplicação de um campo elétrico externo altera a distribuição dos índices de refração do material eletroóptico e, conseqüentemente, altera as características de

propagação dos modos guiados. O campo elétrico é imposto por meio de eletrodos depositados na superfície do dielétrico.

Soluções numéricas e analíticas para o cálculo do campo elétrico gerado por eletrodos infinitamente finos são encontradas na literatura. Em particular, a técnica de transformação conforme, que permite a obtenção de soluções acuradas para o campo eletrostático. Porém, os eletrodos depositados na construção de tais dispositivos possuem espessuras da ordem de 2 a 12 μm , largura acima de 5 μm e espaçamento (“gap”) típico de aproximadamente 10 μm [121]. Além disso, quando uma camada de material de menor constante dielétrica que o substrato (camada de “buffer”) é utilizada entre os eletrodos e o substrato, a solução do problema só pode ser obtida numericamente. A camada “buffer” é utilizada com o objetivo de minimizar perdas ópticas nos eletrodos e diminuir a constante de propagação da onda elétrica, propiciando, assim, melhor sintonia entre as ondas óptica e elétrica [122].

Em geral, dois modos linearmente polarizados são possíveis para uma dada direção de polarização em um cristal. As direções de polarização são mutuamente ortogonais e os índices de refração dos dois modos de polarização são obtidos usando o elipsóide de índices de refração [123]:

$$\frac{x_c^2}{n_x^2} + \frac{y_c^2}{n_y^2} + \frac{z_c^2}{n_z^2} = 1, \quad (321)$$

onde as direções x_c , y_c e z_c são os eixos cristalinos principais do dielétrico e correspondem às direções nas quais os vetores $\mathbf{D}$ e $\mathbf{E}$ são paralelos. n_x , n_y e n_z são os índices de refração associados aos eixos cristalinos principais. A existência de um modo de polarização

“ordinário” e de um “extraordinário”, com diferentes índices de refração, é chamado birrefringência.

O tensor de impermeabilidade dielétrica, definido como $\eta_{ij} = \epsilon_0 \epsilon_{ij}^{-1}$, depende da distribuição de cargas no cristal. A aplicação de um campo elétrico provoca uma redistribuição das cargas ligadas e, possivelmente, uma fraca deformação na estrutura iônica, resultando numa mudança no tensor impermeabilidade. Esse fenômeno é denominado efeito eletroóptico e ocorre em cristais que não possuem centro de inversão.

A mudança na impermeabilidade dielétrica, ocasionada pela aplicação de um campo elétrico $\mathbf{E}$, é expressa por [123]:

$$\Delta\eta_{ij} = \Delta\left(\frac{1}{n^2}\right)_{ij} = r_{ijk} E_k + s_{ijkl} E_k E_l \quad (322)$$

O primeiro termo da Eq. (322) é linearmente proporcional ao campo elétrico. Esse termo representa o efeito Pockels. O segundo termo apresenta dependência quadrática com o campo elétrico aplicado e se refere ao efeito Kerr eletroóptico. Enquanto o efeito Pockels depende da polaridade do campo elétrico aplicado, o efeito Kerr é independente dessa polaridade. O termo quadrático da Eq. (322) somente adquire valores da ordem do termo linear em cristais centro-simétricos. Os dispositivos moduladores estudados no presente trabalho empregam o LiNbO_3 que possui boas características eletroópticas. Esse tipo de cristal não é centro-simétrico e, portanto, o termo quadrático pode ser desprezado.

A mudança nos índices de refração resulta numa deformação e reorientação do elipsóide de índices. A expressão geral para esse elipsóide é:

$$a_{11} x_c^2 + a_{22} y_c^2 + a_{33} z_c^2 + 2a_{23} y_c z_c + 2a_{13} z_c x_c + 2a_{12} x_c y_c = 1. \quad (323)$$

Os valores dos coeficientes a_{11} , a_{12} ,... mudam de acordo com o campo elétrico aplicado.

Como exemplo, será considerado o caso do cristal uniaxial de LiNbO_3 , com índice de refração ordinário $n_o = 2,286$ e índice de refração extraordinário $n_e = 2,200$ no comprimento de onda do laser de He-Ne ($\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$). No caso de uma onda óptica propagando-se ao longo do eixo cristalino principal x_c e com campo elétrico modulador aplicado no mesmo plano que o dos eixos cristalinos principais y_c - z_c os coeficientes a_{ij} podem ser representados por:

$$\begin{bmatrix} a_{11} - 1/n_x^2 \\ a_{22} - 1/n_y^2 \\ a_{33} - 1/n_z^2 \\ a_{23} \\ a_{13} \\ a_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -r_{22} & r_{13} \\ 0 & r_{22} & r_{13} \\ 0 & 0 & r_{33} \\ 0 & r_{51} & 0 \\ r_{51} & 0 & 0 \\ -r_{22} & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ E_{y_c} \\ E_{z_c} \end{bmatrix} \quad (324)$$

onde r_{ij} são os coeficientes eletroópticos lineares para o LiNbO_3 , escritos na notação reduzida. A Tabela 10 apresenta os valores de r_{ij} para campos elétricos moduladores de baixa e alta frequência e sinal óptico de comprimento de onda $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$. Neste trabalho, são considerados apenas campos elétricos de alta frequência ($> 10 \text{ GHz}$).

A equação para o elipsóide deformado pode ser reescrita como:

$$\begin{aligned} & \left(n_x^{-2} - r_{22} E_{y_c} + r_{13} E_{z_c} \right) x_c^2 + \left(n_y^{-2} + r_{22} E_{y_c} + r_{13} E_{z_c} \right) y_c^2 + \\ & \left(n_z^{-2} + r_{33} E_{z_c} \right) z_c^2 + 2 \left(r_{51} E_{y_c} \right) y_c z_c = 1. \end{aligned} \quad (325)$$

Aplicando uma rotação ao sistema de coordenadas e fazendo a expansão binomial dos termos em cada direção de propagação, pode-se utilizar um novo sistema de

coordenadas (x'_c, y'_c e z'_c) no qual a equação do elipsóide não apresenta termos mistos. E, assim, obter a variação dos índices Δn_o e Δn_e em função do campo elétrico [124]:

$$\Delta n_e = \frac{1}{2} n_e^3 [r_{33} E_{z'_c} - r_{51} E_{y'_c} \operatorname{tg} \theta], \quad (326)$$

$$\Delta n_o = \frac{1}{2} n_o^3 [r_{13} E_{z'_c} - r_{22} E_{y'_c}], \quad (327)$$

$$\operatorname{tg} 2\theta = \frac{2 r_{51} E_{y'_c}}{\frac{1}{n_o^2} - \frac{1}{n_e^2} + r_{22} E_{y'_c} + (r_{13} - r_{33}) E_{z'_c}}. \quad (328)$$

TABELA 10 - Coeficientes eletroópticos do cristal de LiNbO_3 para $\lambda = 0,633 \mu\text{m}$ [123]. As colunas assinaladas por (T) e (S) apresentam os valores de r_{ij} para campos moduladores de baixa e alta frequência, respectivamente.

r_{ij} (10^{-12} m/V)	(T)	(S)
r_{13}	9,6	8,6
r_{22}	6,8	3,4
r_{33}	30,9	30,8
r_{51}	32,6	28

Portanto, de posse dos componentes E_{y_c} e E_{z_c} do campo elétrico aplicado e do ângulo de rotação dos eixos de coordenadas (θ), é possível obter os índices de refração nos novos eixos de polarização. A determinação da amplitude dos campos elétricos é, então, o ponto principal para o cálculo do efeito eletroóptico. Para as amplitudes de campo que são normalmente utilizadas em eletroóptica ($\approx 10^5 \text{ V/m}$), o ângulo de rotação é muito pequeno e pode ser desprezado [99].

Nas frequências utilizadas para modulação, as dimensões do dispositivo eletroóptico são muito menores que o comprimento de onda do sinal elétrico aplicado aos eletrodos. Conseqüentemente, a aproximação quase-estática, para o cálculo da distribuição dos potenciais elétricos $\phi(x,y)$, pode ser utilizada. Neste trabalho, assumiu-se, ainda, que as superfícies dos eletrodos são equipotenciais. Nestas condições, o fenômeno físico é descrito pela equação de Laplace (aproximação quase-TEM), considerando meios anisotrópicos e não homogêneos.

A não homogeneidade na permissividade (ϵ), ocorre quando se utiliza na fabricação dos guias ópticos, o processo de difusão de Ti em substrato de LiNbO_3 e/ou o processo de troca de prótons seguido de recozimento. A variação em ϵ resultante desse processo, é fundamental para o cálculo dos modos ópticos. No entanto, essa variação é desprezível para a propagação da onda de modulação elétrica e, portanto, não é considerada nos cálculos.

5.4 Análise Numérica Aplicada ao Projeto de Moduladores Eletroópticos

Para o estudo das características de projeto e desempenho de moduladores eletroópticos serão empregadas, de forma complementar, as formulações do MEF para ondas TEM (na aproximação quase-estática) e para ondas ópticas E^x e E^y .

A caracterização de moduladores ópticos a onda caminhante, sem perdas e construídos com eletrodos coplanares, será efetuada pelos seguintes parâmetros elétricos: impedância característica Z_c , índice efetivo N_{eff} , largura de banda Δf , fator integral de “overlap” Γ para cada guia de onda óptico, tensão de meia onda V_π e potência média de

microonda para operação (“driving power”) P_{in} , considerando-se uma onda elétrica de variação senoidal. Esses parâmetros são definidos como segue [51], [125] - [127]:

$$Z_c = \frac{1}{c} \frac{1}{\sqrt{C C_1}}, \quad (329)$$

$$N_{eff} = \sqrt{\epsilon_{eff}} = \sqrt{\frac{C}{C_1}}, \quad (330)$$

$$\Delta f L = \frac{1.4 c}{\pi \left| \sqrt{\epsilon_{eff}} - n_{eff} \right|}, \quad (331)$$

$$\Gamma = \frac{G}{V} \frac{\iint E_{op}^2(x, y) E_{el}(x, y) dx dy}{\iint E_{op}^2(x, y) dx dy}, \quad (332)$$

$$V_\pi L = \frac{\lambda_0 G}{n_{be}^3 r_{33} (|\Gamma_1| + |\Gamma_2|)}, \quad (333)$$

$$P_{in} = \frac{V_\pi^2}{8 Z_s \left[1 - ((Z_s - Z_c) / (Z_s + Z_c))^2 \right]}. \quad (334)$$

Nas Eqs. (329) - (334), C é a capacitância por unidade de comprimento do guia da onda elétrica, considerando os materiais dielétricos do substrato e do “buffer”; C_1 é a capacitância por unidade de comprimento desse guia em vácuo; c é a velocidade da luz no vácuo; n_{eff} é o índice efetivo da onda óptica; V é a tensão entre os eletrodos; E_{op} é o campo elétrico da onda óptica; E_{el} é o campo elétrico da onda TEM (componente E_x para o caso de cristal de LiNbO_3 com corte x_c e propagação em y_c ou componente E_y para o caso de corte z_c e propagação em y_c); L é o comprimento dos eletrodos, λ_0 é o comprimento de onda óptico; n_{be} é o índice de refração do substrato em λ_0 ; r_{33} é um dos coeficientes eletroópticos do LiNbO_3 e Z_s é a impedância da fonte do sinal de microondas ou RF.

O ajuste da impedância característica do conjunto de eletrodos coplanares permite a inserção do sinal de microondas, minimizando as perdas por reflexão. O índice efetivo da

onda elétrica, N_{eff} , deve ser ajustado para um melhor sincronismo entre as ondas elétrica e óptica. Isto é possível, reduzindo o índice efetivo da onda elétrica até próximo ao índice efetivo da onda óptica. Para guias do tipo Ti:LiNbO_3 esse valor é aproximadamente 2,14. À medida que esses índices efetivos aproximam-se, maiores larguras de banda de modulação podem ser atingidas. O fator de “overlap” representa a sobreposição do campo elétrico modulador ao campo da onda óptica. O aumento do fator de “overlap” possibilita a operação do modulador com menor potência de sinal da onda elétrica. A tensão de meia onda (V_π) é a diferença de potencial que aplicada aos eletrodos resulta em uma defasagem de 180° graus entre os dois caminhos ópticos existentes em um modulador.

Normalmente, a largura de banda e a tensão de meia onda são multiplicadas pelo comprimento dos eletrodos do modulador. Deste modo, pode-se comparar de forma mais direta o desempenho de várias configurações de eletrodos.

5.4.1 Moduladores com Dois Eletrodos Simétricos

Nesta seção, serão apresentados alguns resultados numéricos para um modulador eletroóptico com dois eletrodos simétricos, considerando-se dois diferentes cortes cristalinos para o substrato de LiNbO_3 . A forma de variação dos parâmetros elétricos será mostrada em função das dimensões dos eletrodos, do espaçamento entre eletrodos e da espessura da camada “buffer” [38], [39].

As Figs. 56 e 57 apresentam o esquema do dispositivo modulador com dois eletrodos e a definição da geometria do problema a ser estudado, respectivamente. O modulador é composto de um guia óptico tipo “Y” que divide o sinal de entrada igualmente (3dB) nos braços do modulador. Os eletrodos, posicionados em um dos braços, são

responsáveis pela modulação do sinal óptico. Esse tipo de dispositivo tem sido utilizado no Instituto de Estudos Avançados (IEAv-CTA) e faz parte do projeto de construção de um giroscópio a fibra óptica (FOG) [128], [129].

Fig. 56 Esquema de um dispositivo modulador com dois eletrodos simétricos.

Fig. 57 Definição da geometria do problema: X e e são a largura e espessura dos eletrodos, respectivamente, G é o espaçamento entre eletrodos e b é a espessura da camada “buffer”. São representadas duas orientações dos eixos cristalinos principais na seção transversal; caso com corte y_c e caso com corte z_c , ambos com propagação no eixo cristalino principal x_c .

A formulação para ondas TEM (aproximação quase-estática) foi utilizada no cálculo dos parâmetros elétricos do modulador de dois eletrodos. A malha de elementos finitos é composta de elementos triangulares de primeira ordem de aproximação e os meios dielétricos considerados são anisotrópicos e homogêneos.

A. Cristal de LiNbO_3 com corte y_c e propagação em x_c

Nesta seção, são apresentadas algumas características do modulador composto de substrato de LiNbO_3 com corte- y_c , propagação no eixo cristallino x_c e camada “buffer” de SiO_2 . A geometria utilizada é apresentada na Fig. 57. As permissividades relativas para o cristal uniaxial de LiNbO_3 são dadas por $\epsilon_{re} = 28$ (para o eixo principal extraordinário) e $\epsilon_{ro} = 43$ (para os eixos principais ordinários) [123] . Para a camada isotrópica de SiO_2 , utilizada como “buffer”, a permissividade relativa é $\epsilon_r = 3,8$.

Na Fig. 58, é apresentada a variação da impedância característica (Z_c) e da constante dielétrica efetiva (ϵ_{eff}) em função da espessura do “buffer” (b), considerando eletrodos de $1\text{ }\mu\text{m}$ de espessura (e), largura (X) de $10\text{ }\mu\text{m}$ e espaçamentos (G) de 6 a $10\text{ }\mu\text{m}$. A Fig. 59 mostra a variação de Z_c e ϵ_{eff} em função da espessura do “buffer”, considerando eletrodos de espessura muito fina (aproximação $e = 0\text{ }\mu\text{m}$), espaçamento de $10\text{ }\mu\text{m}$ e larguras de 8 a $12\text{ }\mu\text{m}$. Destas curvas, observa-se uma grande variação nos parâmetros elétricos em função da variação do espaçamento e largura dos eletrodos. A Fig. 60 apresenta a variação de ϵ_{eff} e Z_c em função de b, para eletrodos de espessuras entre 0 e $2\text{ }\mu\text{m}$, largura de $10\text{ }\mu\text{m}$ e espaçamento de $6\text{ }\mu\text{m}$.

Nas simulações apresentadas a diferença de tensão entre eletrodos é $\Delta V = 20\text{ V}$. A Fig. 61 mostra a variação do potencial elétrico na região dos eletrodos e camada “buffer”.

As características desejadas para modulação devem orientar a escolha da melhor configuração do dispositivo, ou seja, a definição do material e espessura do “buffer”, e a largura, espessura e espaçamento dos eletrodos.

Fig. 58 Constante dielétrica efetiva e impedância característica em função da espessura da camada 'buffer', considerando eletrodos de $1\ \mu\text{m}$ de espessura e espaçamento entre eletrodos (G) de 6 a $10\ \mu\text{m}$.

Fig. 59 Constante dielétrica efetiva e impedância característica em função da espessura da camada "buffer", considerando eletrodos finos com larguras de 8 a $12\ \mu\text{m}$ e espaçamento de $10\ \mu\text{m}$.

Fig. 60 Constante dielétrica efetiva e impedância característica em função da espessura da camada 'buffer', considerando eletrodos com largura de $10\ \mu\text{m}$, espaçamento de $6\ \mu\text{m}$ e espessuras entre 0 e $2\ \mu\text{m}$.

Fig. 61 Potencial elétrico na região do “gap” entre eletrodos e camada “buffer”. Linhas equipotenciais projetadas no plano x - y .

B. Cristal de LiNbO_3 com corte z_c e propagação em x_c

A geometria utilizada nesta seção foi apresentada na Fig. 57. Serão analisadas algumas características do modulador composto de substrato de LiNbO_3 com corte z_c , propagação no eixo cristallino x_c e camada “buffer” de SiO_2 . A espessura dos eletrodos foi assumida igual a zero e $\Delta V = 5 \text{ V}$.

Na Fig. 62, são apresentadas as variações da constante dielétrica efetiva e da impedância característica, para um eletrodo de largura $X = 10 \mu\text{m}$, em função da variação do espaçamento entre os eletrodos (G). Na Fig. 63, a constante dielétrica e a impedância são apresentadas em função da largura do eletrodo, para um “gap” constante ($G = 2 \mu\text{m}$).

O efeito do campo elétrico nos índices de refração ordinário e extraordinário é apresentado nas Figs. 64 e 65, onde se observa a dependência dos novos índices com a posição. Os cálculos foram efetuados assumindo uma camada de “buffer” de $0,5 \mu\text{m}$,

eletrodos simétricos de largura 10 μm , espessura zero e separação entre eletrodos (“gap”) de 6 μm .

Fig. 62 Constante dielétrica efetiva e impedância característica em função do espaçamento entre eletrodos.

Fig. 63 Constante dielétrica efetiva e impedância característica em função da largura dos eletrodos.

Fig. 64 Variação do índice de refração extraordinário no substrato de LiNbO_3 devido ao efeito eletroóptico (Eq. (326)).

Fig. 65 Variação do índice de refração ordinário no substrato de LiNbO_3 devido ao efeito eletroóptico (Eq. (327)).

5.4.2 Moduladores Eletroópticos tipo Mach - Zehnder

Uma maneira muito eficiente de modular o sinal óptico é com o uso do interferômetro tipo Mach-Zehnder. Nesse tipo de dispositivo, o feixe óptico é dividido igualmente em um guia em forma de “Y” e então recombinado. Se o guia “Y” possui abertura com pequenos ângulos ($\approx 1^\circ$), a divisão do sinal pode ser realizada com pequenas perdas (menos de 1 dB). Se o desvio em ambos os braços do modulador é idêntica, os modos ópticos interferem construtivamente e toda a potência óptica reaparece na saída (menos, obviamente, as perdas ocorridas no percurso). Quando a diferença de fase entre os dois braços do modulador é 180 graus, os modos estarão completamente fora de fase e excitarão um modo anti-simétrico na saída do guia óptico. Nesta condição, se o guia óptico na saída é do tipo monomodo, nenhuma potência emerge desse guia; a potência é irradiada através do substrato e perdida. A potência óptica de saída pode ser controlada pela diferença de potencial aplicada aos eletrodos. Por causa do pequeno espaçamento entre eletrodos, uma tensão relativamente pequena pode ser utilizada para a modulação. A Fig. 66 apresenta uma configuração típica do modulador tipo Mach-Zehnder

Fig. 66 Vista esquemática de um modulador tipo Mach-Zehnder.

A definição de parâmetros otimizados para a configuração dos eletrodos e para a construção dos guias ópticos é o ponto chave para o sucesso do projeto de um dispositivo modulador. De fato, a definição de guias ópticos com dimensões otimizadas pode reduzir a perda por radiação para fora da região do guia e a perda por acoplamento entre o dispositivo modulador e o núcleo da fibra óptica, que transmite o sinal óptico como mostrado nas seções 5.1 e 5.2. Além disso, pequenos “spot size” maximizam a superposição do campo elétrico da onda óptica e da onda elétrica do modulador. Simulações numéricas têm um importante papel na escolha dos melhores parâmetros de projeto.

Em anos recentes, várias novas estruturas para moduladores têm sido propostas com o intuito de obter-se uma maior largura de banda com menor tensão de alimentação. A utilização de eletrodos coplanares, a inclusão de camadas “buffer” e blindagem com paredes condutoras são algumas das características que podem ser introduzidas e otimizadas para melhorar o desempenho geral dos moduladores.

A seguir, propostas de configuração de eletrodos serão analisadas e comparadas à estrutura convencional de eletrodos coplanares simétricos. Em todas as simulações utilizou-

se uma aproximação quase-estática (ondas quase-TEM), para o cálculo dos parâmetros elétricos do modulador. Nas configurações dos moduladores estudados, a análise dos modos híbridos só é importante para o projeto acurado das partes de alimentação do sinal de onda elétrica (“feedthrough”) dos eletrodos. A análise quase-estática é suficiente para o projeto da região de interação entre onda elétrica e óptica. Em [130] e [131] são apresentadas análises numéricas de moduladores com dimensões similares às utilizadas neste trabalho e os resultados comprovam que, até aproximadamente 20 GHz, não foi encontrada nenhuma dispersão. Entretanto, é conveniente ressaltar que a análise dos modos híbridos permite determinar o intervalo de frequências onde apenas o modo fundamental (quase-TEM) é excitado.

Todos os testes foram realizados considerando-se moduladores a onda caminhante construídos com substratos de LiNbO_3 com corte- x_c e propagação no eixo cristalino principal y_c , camadas “buffer” compostas por SiO_2 e guias ópticos do tipo Ti:LiNbO_3 . Neste caso, o modo óptico fundamental é o E_{11}^x . Quando estes modos ópticos são posicionados no centro do espaçamento entre eletrodos, o fator integral de “overlap” para cada modo assume o mesmo valor, de modo que: $|\Gamma_1| = |\Gamma_2| = |\Gamma|$. Será assumido também, que do lado oposto à entrada do sinal elétrico de modulação os eletrodos são conectados a uma carga casada (impedância $Z_L = Z_c$).

5.4.1 Modulador Mach-Zehnder com Eletrodos “Ridge”

Nesta seção, apresenta-se a análise de um modulador eletroóptico a onda caminhante (TW) com estrutura de eletrodos tipo “ridge” [41], [132] - [134] . Perdas

elétricas ou ópticas não foram consideradas. Duas configurações de eletrodos “ridge” são comparadas a uma do tipo convencional [41].

O MEF foi aplicado na análise das características elétricas da onda quase-TEM, suportada pela linha de transmissão CPW, e também no cálculo das propriedades de propagação da onda óptica (modos E^x).

A seção transversal da estrutura analisada é mostrada na Fig. 67. A região ampliada mostra detalhes geométricos do “ridge”. A espessura da camada “buffer” (d), sobre o plano horizontal, é maior que a espessura (b) ao longo da parede lateral. Essa diferença resulta do processo de fabricação (deposição de filme metálico por evaporação). A técnica de projeto e fabricação de um modulador com este tipo de estrutura foi descrita em [132] e [133], para um substrato de LiNbO_3 com corte- z_c e modos ópticos E^y .

Fig. 67 Seção transversal de um modulador Ti:LiNbO_3 a onda caminhante empregando um estrutura de eletrodos “ridge” e detalhes do eletrodo e da camada “buffer”.

A inclinação α da parede lateral do “ridge”, a altura h e o espaçamento entre eletrodos (g) foram assumidos 70° , $3,5 \mu\text{m}$ e $15 \mu\text{m}$, respectivamente e correspondem a parâmetros de fabricação comumente utilizados.

A. Variação da Espessura dos Eletrodos

Três configurações foram consideradas nesta análise. Duas delas empregam a estrutura “ridge” e a outra tem características convencionais (formato retangular dos eletrodos e a interface entre a camada “buffer” e o substrato é um plano). A largura do eletrodo central e a espessura da camada “buffer” para estas configurações são mostradas na Tabela 11.

TABELA 11 - Dimensões dos eletrodos e camadas “buffer” estudadas.

Configuração	Largura do Eletrodo Central, S (μm)	Espessura da camada “Buffer”, d (μm)
A Ridge	5	2,5
B Ridge	8	1,5
C Convencional	8	1,5

As condições de fabricação dos guias ópticos para os resultados apresentados nesta seção são: 3 horas de tempo de difusão a 1050°C e espessura e largura do filme inicial de Ti de $5\text{ }\mu\text{m}$ e 80 nm , respectivamente.

O índice efetivo e a impedância característica como função da espessura dos eletrodos são apresentados na Fig. 68 para todas as configurações estudadas.

O comportamento do produto $\Delta f L$ é mostrado na Fig. 69. A Fig. 70 mostra a variação do produto $V_\pi L$ e $P_{\text{in}} L^2$. Nessa análise, foi assumida que a impedância da fonte do sinal de microondas é $Z_s = 50\text{ }\Omega$.

Fig. 68 Índice efetivo (N_{eff}) da onda elétrica e impedância característica (Z_c) como função da espessura dos eletrodos para as configurações A, B e C.

Fig. 69 Produto $\Delta f \cdot L$ como função da espessura dos eletrodos para as configurações A, B e C.

Fig. 70 Produto $V_{\pi} \cdot L$ e $P_{\text{in}} L^2$ como função da espessura dos eletrodos para as configurações A, B e C.

As configurações A e C apresentaram melhores características para impedância e ajuste de velocidade (“velocity matching”) entre as ondas óptica e elétrica, enquanto as configurações A e B (estruturas “ridge”) apresentaram valores menores para $V_\pi L$.

A configuração B apresentou a menor largura de banda, mas menores valores de potência de operação foram encontrados, para um dado comprimento de eletrodos. Adicionalmente, como a influência da espessura dos eletrodos sobre os parâmetros Δf , V_π e P_{in} é pequeno, o controle sobre o processo de deposição dos eletrodos não necessita ser tão rigoroso para esta configuração.

B. Variação da Espessura da camada “Buffer”

O estudo da influência da camada “buffer” foi realizado para as configurações A e B, assumindo uma espessura de eletrodos de 8 μm e 4 μm , respectivamente. Foram usados na presente análise, os mesmos parâmetros de fabricação dos guias ópticos descritos no item anterior que estuda a variação da espessura dos eletrodos.

Os índices efetivos e a impedância característica em função da espessura da camada “buffer” são mostradas na Fig. 71. O produto $\Delta f L$, a integral de “overlap” (Γ) e os produtos $V_\pi L$ e $P_{in} L^2$ são apresentados nas Figs. 72 - 74, respectivamente. À medida que a camada “buffer” aumenta, menores índices efetivos e maiores impedâncias são obtidas para ambas as configurações, aproximando-se dos valores ótimos de projeto. Entretanto, o efeito de

atenuação do campo elétrico modulador pode ser visto pela diminuição do fator integral de “overlap” e conseqüentes aumentos na potência de alimentação e na tensão de meia onda.

Fig. 71 Índice Efetivo e impedância característica como função da espessura da camada “buffer” para as configurações A e B.

Fig. 72 Produto $\Delta f L$ como uma função da espessura da camada “buffer” para as configurações A e B.

Quando a espessura da camada “buffer” (d) é igual a altura do “ridge” ($h = 3,5 \mu\text{m}$), a forma dos eletrodos assemelha-se àquela da estrutura convencional. Neste caso, a potência de alimentação (P_{in}) para a configuração B experimental, aproximadamente, o mesmo valor que a obtida na configuração convencional, com camada “buffer” de $1,5 \mu\text{m}$ (Fig. 70).

Fig. 73 Fator integral de “overlap” como uma função da espessura da camada “buffer” para as configurações A e B.

Fig. 74 Produto $V_{\pi} L$ e $P_{in} L^2$ como uma função da espessura do eletrodo para as configurações A e B.

C. Variação das Condições de Fabricação do Guia Óptico

A seguir, o comportamento do modulador é estudado como uma função de alguns dos parâmetros de fabricação dos guias ópticos Ti:LiNbO₃, nominalmente, a temperatura de difusão, o tempo de difusão e a largura inicial do filme de Ti. Para este propósito, foi adotada a configuração A com espessura de eletrodos de 8 μm.

Os perfis dos modos ópticos na região de difusão foram calculados utilizando o MEF (seção 2.2). Essa técnica é capaz de calcular as propriedades de propagação da onda

óptica levando-se em consideração a variação contínua dos índices de refração e a complexidade geométrica do problema.

Funções Gaussiana e Hermite-Gaussiana são freqüentemente usadas para representar de forma aproximada o perfil dos campos ópticos do modo fundamental em guias fracamente guiados [51]. Contudo, para usar essas funções os diâmetros do modo óptico (“spot-sizes”), nas direções ortogonais x e y , devem ser conhecidos. Como essas dimensões dependem dos parâmetros de fabricação, elas necessitam ser determinadas, *a priori*, por meio empírico ou por alguma outra técnica. Além disso, essas aproximações não poderiam suprir soluções acuradas para modos ópticos construídos em estruturas geométricas complexas. A aplicação de métodos de análise numérica, como o MEF, permite uma cuidadosa descrição dos perfis de campo dos modos ópticos. Esses perfis são determinantes na análise completa de moduladores, acopladores e no casamento de modos entre diferentes dispositivos.

A Fig. 75 mostra a evolução do perfil dos modos ópticos como função da temperatura de difusão, assumindo 5 μm e 80 nm para a largura e espessura do filme de Ti, respectivamente, e 3 h de tempo de difusão. Sob essas condições, os resultados obtidos mostram que a operação monomodo é experimentada para temperaturas maiores que 1000°C.

Os produtos $V_{\pi} L$ e $P_{\text{in}} L^2$ são mostrados na Fig. 76 como uma função da temperatura de difusão. Com o aumento da temperatura de difusão, os campos do modo fundamental espalham-se pelo substrato. Esse efeito acarreta o decréscimo do fator integral de “overlap” e ambos, $V_{\pi} L$ e $P_{\text{in}} L^2$, aumentam.

Fig. 75 Evolução do perfil dos modos ópticos (componente de campo E_x) em função da temperatura de difusão. (a) 1000°C, modos E_{11}^x e E_{21}^x , (b) 1050°C, (c) 1100°C e (d) 1150°C.

Note que perfis de modos semelhantes àqueles apresentados na Fig. 75(d) podem ocorrer para temperaturas inferiores que 1150°C. Outras condições de fabricação ou diferentes parâmetros geométricos, tais como menor espaçamento entre eletrodos (gap), podem conduzir a um comportamento similar.

Fig. 76 Produtos $V_{\pi} L$ e $P_{in} L^2$ em função da temperatura de difusão.

A Fig. 77 mostra o produto $V_{\pi} L$ e $P_{in} L^2$ em função da largura inicial do filme de Ti, para um processo de difusão de 3 horas a 1050°C e espessura inicial do filme de Ti de 80 nm. A tensão de meia onda e a potência de operação para modulação decresce ligeiramente quando a largura inicial do filme de Ti aumenta. Contudo, a operação monomodo só é experimentada para larguras menores que 7 μm .

Fig. 77 Produtos $V_{\pi} L$ e $P_{in} L^2$ em função da largura inicial do filme de Ti.

Os produtos $V_{\pi} L$ e $P_{in} L^2$ são apresentados na Fig. 78 como uma função do tempo de difusão para uma largura e espessura inicial do filme de Ti de $5 \mu\text{m}$ e 80 nm , respectivamente. Se a difusão é mantida por um longo tempo, as características de operação do modulador degradam-se, embora o guia óptico permaneça sob a condição de operação monomodo.

Fig. 78 Produtos $V_{\pi} L$ e $P_{in} L^2$ como uma função do tempo de difusão.

Duas configurações de eletrodos que empregam uma estrutura “ridge” foram comparadas a uma estrutura convencional. O estudo incluiu a análise do comportamento do modulador eletroóptico em função dos parâmetros de fabricação do guia óptico.

As estruturas com eletrodos “ridge” requerem menor consumo de energia que a estrutura convencional de eletrodos coplanares. Contudo, a sintonia entre as velocidades da onda óptica e elétrica limita sua utilização em aplicações de banda larga. Mesmo assim, vantajosa condição de operação foi estabelecida para esse tipo de modulador. Uma das configurações estudadas reduz substancialmente a potência de microondas para operação (“driving power”), com um produto $V_{\pi} L$ menor que 10 V cm na condição de $\Delta f L \approx 20 \text{ GHz cm}$. A outra configuração pode ser usada em aplicações que requerem

maior largura de banda para modulação ($\Delta f L \approx 60 \text{ GHz cm}$ para espessura de eletrodo de $8 \mu\text{m}$) mas com um produto $V_\pi L = 13 \text{ V cm}$.

5.4.2 Modulador Mach-Zehnder com Três Eletrodos Extras.

Nesta seção, será apresentada a análise de um modulador tipo Mach-Zehnder a onda caminhante com uma estrutura extra de eletrodos [40]. Duas diferentes configurações de eletrodos são consideradas. Na primeira, três eletrodos simétricos são depositados sobre uma estrutura plana composta de uma camada “buffer” de SiO_2 sobre um substrato de LiNbO_3 (estrutura convencional). A segunda configuração é similar à convencional, mas inclui três eletrodos “floating” (que não estão conectados a nenhum potencial externo) entre o substrato e a camada buffer, como proposto em [135]. Doravante, a primeira e segunda configurações, apresentadas na Fig. 79, serão denominadas convencional e floating, respectivamente.

Fig. 79 Seção transversal da região de interação de um modulador óptico tipo Mach-Zehnder incluindo um conjunto extra de eletrodos “floating”. Somente os eletrodos superiores estão presentes na configuração convencional.

A largura dos eletrodos laterais (X) e a largura do eletrodo central (S) foram fixadas em $50 \mu\text{m}$ e $8 \mu\text{m}$, respectivamente. Eletrodos “floating” muito finos (espessura zero) foram assumidos para todas as simulações.

A razão R da amplitude de campo elétrico E_x entre a configuração floating e a convencional:

$$R(x, y) = \frac{E_x^{float}(x, y)}{E_x^{conv}(x, y)} \quad , \quad (335)$$

e as isolinhas de contorno do modo óptico fundamental, projetadas no plano x - y em passos de 10% da amplitude máxima do campo elétrico óptico E_{op} , são apresentadas na Fig. 80.

Fig. 80 Razão R entre as amplitudes de campo elétrico modulador E_x para as configurações floating e convencional. As linhas de contorno sobre o plano x - y mostram a distribuição de campo óptico para a região de um dos guia ópticos

A razão R e a intensidade de campo óptico normalizado E_x , ao longo de uma linha vertical que passa através do centro do guia óptico, são apresentadas na Fig. 81. As Figs. 80 e 81 mostram claramente que a inclusão dos eletrodos “floating” resulta em um ganho geral de aproximadamente 100% na amplitude do campo elétrico modulador na região do campo óptico máximo. Conseqüentemente, eles aumentam a interação eletroóptica e reduzem a potência necessária para operação do dispositivo modulador, como apontado em [135].

As Figs. 82 e 83 apresentam o índice efetivo e a impedância característica para as configurações convencional e floating, respectivamente, em função da distância entre

eletrodos (G) e da espessura da camada “buffer” (b). Os parâmetros geométricos usados para as simulações foram: $S = 8 \mu\text{m}$, espessura dos eletrodos $e = 4 \mu\text{m}$ e $g' = 5 \mu\text{m}$ (para a configuração floating).

Fig. 81 Razão R entre as amplitudes de campo elétrico modulador E_x para as configurações floating e convencional e amplitude de campo óptico normalizado (E_x) para o modo fundamental, ambas ao longo de uma linha vertical que passa através do centro do gap entre eletrodos e do guia óptico.

Fig. 82 Estudo da configuração convencional de eletrodos. Variação da impedância característica e do índice efetivo em função da distância entre eletrodos (gap) para várias espessuras da camada “buffer”.

A Fig. 84 mostra a variação da largura de banda em função de G , para ambas as configurações, convencional e floating, considerando $S = 8 \mu\text{m}$, $e = 4 \mu\text{m}$ e $b = 1,5 \mu\text{m}$.

Para todas as dimensões de gap, a configuração floating apresenta uma maior largura de banda quando comparada com a configuração convencional.

Fig. 83 Estudo da configuração com eletrodos “floating”. Variação da impedância característica e do índice efetivo em função da distância entre eletrodos (gap) para várias espessuras da camada “buffer”.

Fig. 84 Largura de banda ($V_{\pi} L$) como uma função da distância entre eletrodos (G) para ambas configurações; convencional e floating.

Os parâmetros elétricos das configurações convencional e floating, na condição otimizada, são apresentados na Tabela 12. Os parâmetros geométricos são: $S = 8 \mu\text{m}$, $G = 15 \mu\text{m}$, $e = 4 \mu\text{m}$, $b = 1,5 \mu\text{m}$ e $g' = 5 \mu\text{m}$. Em ambos os casos, as mesmas condições

para difusão do filme de Ti no substrato de LiNbO_3 , foram usadas na formação do guia óptico difuso ($W=5\text{ }\mu\text{m}$, $H=80\text{ nm}$, $T=1050^\circ\text{C}$ e $t=3\text{ h}$, ver seção 5.1).

TABELA 12 - Parâmetros elétricos dos moduladores, na condição ótima.

CPW	Z (Ω)	ϵ_{eff}	$\Delta f L$ (GHz cm)	$ \Gamma $	$V_\pi L$ (V cm)	$P_{in} L^2$ (W cm^2)
Convencional	55,33	5,866	47,76	0,230	16,446	0,678
Floating	46,20	5,590	60,16	0,463	8,193	0,168

A Fig. 85 apresenta o fator de “overlap” (Γ) e a tensão de meia onda (V_π) como uma função do espaçamento entre os eletrodos “floating”(g'). O aumento de g' conduz a uma situação equivalente àquela de um layout convencional, ou seja, Γ torna-se menor e V_π aumenta.

Fig. 85 Fator de “overlap” e tensão de meia onda como função das dimensões do gap (g') entre eletrodos “floating”.

Os resultados numéricos mostram que a configuração com eletrodos “floating” apresenta um maior fator de “overlap”, o que se traduz num menor consumo de potência de microondas. Essa configuração apresenta, também, uma maior largura de banda devido a melhor sintonia entre as ondas elétrica e óptica.

6. CONCLUSÃO

Neste trabalho, foram apresentadas formulações escalares do Método dos Elementos Finitos (MEF) para o problema de propagação de ondas TEM, TE e TM em guias de microondas e linhas de transmissão e para ondas E^x e E^y em guias ópticos de guiagem fraca. A formulação do MEF para ondas ópticas E^x e E^y é uma abordagem estendida com relação às apresentadas na literatura e é capaz de modelar explicitamente meios anisotrópicos, onde a propriedade dos materiais apresenta um perfil arbitrário ao longo das direções transversais à direção de propagação.

As formulações foram implementadas e validadas comparando-se os valores calculados com os obtidos por soluções analíticas ou com os cálculos já existentes na literatura.

A formulação para o cálculo das propriedades de propagação de ondas ópticas foi testada utilizando vários casos relatados na literatura. Foram calculadas as curvas de dispersão de guias isotrópicos e anisotrópicos, homogêneos e não homogêneos. Os valores calculados para a constante de propagação (índice efetivo, n_{eff}) ou constante de propagação normalizada (B) foram comparados. Para guias isotrópicos e anisotrópicos homogêneos obteve-se valores de n_{eff} muito próximos aos apresentados por outros autores. Nestes casos os desvios no índice efetivo são menores que 0,2 %. Para guias isotrópicos não homogêneos foram utilizados como teste dois guias do tipo canal com perfis de índice de refração resultantes de processos difusivos e descritos por uma distribuição circular e gaussiana, respectivamente. De modo geral, nestes casos, os valores calculados para (B) são compatíveis com os obtidos por outros autores para modos ópticos bem confinados no guia

canal, ou seja, longe da frequência de corte. Próximo à região de corte, os resultados obtidos para (B) são bem diferentes. Entretanto, se a comparação for realizada diretamente com o valor dos índices efetivos calculados, diferenças menores que 1 % são observadas.

As comparações mostraram que, para guias ópticos de guiagem fraca, a formulação escalar pode fornecer resultados tão confiáveis quanto outros métodos costumeiramente usados na análise modal. Desta forma, a formulação escalar pode ser empregada no desenvolvimento de uma confiável ferramenta de “software”, destinada à análise de componentes e dispositivos complexos de óptica integrada. É conhecido que a formulação escalar não apresenta os “modos espúrios” e consome menos memória e tempo de processamento que as formulações vetoriais, permitindo a análise destes dispositivos complexos, mesmo em computadores de baixo custo.

A utilização do MEF para a análise de propagação de ondas em guias com domínio aberto requer cuidados especiais. Dentre as várias técnicas propostas e testadas, as mais utilizadas são: as transformações conformes, os elementos infinitos, as transformações espaciais, as condições de contorno absorvedoras e a introdução de uma camada de material fictício para atenuação das ondas (PML). Neste trabalho, formulações do MEF, associadas à técnica da transformação espacial, foram apresentadas para a análise de ondas TEM e ondas ópticas E^x e E^y em meios anisotrópicos e homogêneos. No melhor de nosso conhecimento, não há documentação na literatura aberta sobre a aplicação dessa técnica para simulação de guias de ondas ópticos.

A formulação para modos ópticos, empregando a técnica de transformação espacial, foi testada utilizando-se um guia dielétrico de seção transversal retangular imerso em ar. Esse estudo mostrou que, devido à pequena diferença entre os índices de refração do guia e do ar ($\Delta n = 0,0488$), os campos eletromagnéticos decaem muito suavemente na região de

domínio aberto. Embora as dimensões do guia sejam pequenas ($6\text{ }\mu\text{m} \times 3\text{ }\mu\text{m}$) domínios acima de $2\text{ km} \times 2\text{ km}$ são necessários para obtenção de soluções estáveis para o modo fundamental E_{11}^x . Os resultados numéricos para a constante de propagação normalizada estão em excelente acordo com os obtidos por outras duas formulações do MEF que empregam os elementos infinitos e uma condição de contorno de impedância. Na região muito próxima à frequência de corte, algumas diferenças são observadas. Neste caso, a frequência de corte calculada assume valor intermediário aos obtidos pelas outras duas técnicas. Essas diferenças são importantes apenas na determinação precisa da frequência de corte, já que os valores de índices efetivos são extremamente próximos (diferenças menores que 0,005 %).

Os resultados obtidos com a técnica de transformação espacial associada ao MEF comprovam sua aplicabilidade e encorajam o seu emprego na análise de dispositivos ópticos integrados, os quais exigem que se considere a existência de grandes regiões “finitas”. Essa técnica pode ser aplicada a problemas com materiais não homogêneos, não depende da escolha de um fator de decaimento de campo, escolhido “ad hoc”, e não necessita da definição prévia de propriedades físicas fictícias. Além disso, as transformações espaciais preservam a esparsidade e linearidade do sistema de equações original. Contudo, esse procedimento requer uma área de discretização maior que a utilizada por outras técnicas aplicadas a problemas de domínio aberto. Foi verificada, também, a necessidade de uma malha mais densa, próxima ao contorno externo da região transformada, a fim de se obter resultados mais precisos para a frequência de corte. A forma pela qual se deve refinar a malha depende do tipo de função escolhida para a transformação espacial.

A técnica de integração analítica foi empregada para o cálculo dos elementos de matriz em todas as implementações do MEF. Esta técnica permite o cálculo de “matrizes universais”, que são independentes da geometria do elemento finito. O procedimento utilizado é uma extensão da técnica anteriormente descrita na literatura e permite o cálculo das “matrizes universais” para problemas com meios anisotrópicos e não homogêneos, em qualquer ordem de aproximação. Para simplificar a forma de apresentação, optou-se por mostrar as matrizes “prontas para implementação”, ou seja, as matrizes escritas na forma compacta carregam a dependência com os fatores geométricos e as propriedades dos materiais de cada elemento finito de formato triangular.

Uma análise das características de propagação em função do processo de fabricação de guias ópticos do tipo Ti:LiNbO_3 foi apresentada. Resultados numéricos para constante de propagação, diâmetros de modos ópticos e para a eficiência de acoplamento entre uma fibra óptica e o guia integrado foram obtidos em função de parâmetros como: temperatura e tempo de difusão, largura e espessura do filme de Ti depositado inicialmente sobre a região onde se formará o guia óptico. Dessas análises, foi possível determinar: as condições de fabricação do guia integrado Ti:LiNbO_3 (processo de difusão) que resultam em operação monomodo, as tolerâncias para ajuste de posição relativa entre fibra óptica e guia integrado para a máxima transmissão do sinal e a variação dos parâmetros de desempenho de um modulador eletroóptico em função das características de fabricação do modo óptico integrado.

Foram analisadas as características modais de um componente integrado para transformação de dimensão de modo óptico (TDM). O componente TDM estudado é composto de dois guias ópticos tipo “Rib” e é capaz de melhorar o acoplamento entre fibra

óptica-guia integrado quando as dimensões do modo óptico são muito diferentes nestes dois componentes.

As formulações do MEF para modos TEM e modos ópticos E^x , foram utilizadas de forma complementar no estudo de dispositivos moduladores eletroópticos com várias configurações geométricas. Moduladores tipo Mach-Zehnder foram analisados e configurações alternativas de eletrodos foram comparadas à estrutura de eletrodos coplanares convencional.

A análise das características elétricas e de desempenho de moduladores a onda caminhante do tipo Mach-Zehnder que empregam uma estrutura de eletrodos tipo “ridge”, mostrou que essa estrutura necessita de um consumo de energia menor do que a estrutura convencional de eletrodos. Contudo, a dessintonia entre as velocidades da onda óptica e elétrica limita sua utilização no caso de aplicações de banda larga. Mesmo assim, vantajosa condição de operação foi estabelecida para esse tipo de modulador. Em uma das configurações estudadas a potência média de microondas para operação foi reduzida substancialmente, com um produto $V_\pi L$ menor que 10 V cm na condição de $\Delta f L \approx 20$ GHz cm. Uma outra configuração estudada, que pode ser usada em aplicações que requerem maior largura de banda para modulação ($\Delta f L \approx 60$ GHz cm), apresenta um produto $V_\pi L = 13$ V cm.

Um modulador a onda caminhante, do tipo Mach-Zehnder, empregando um conjunto extra de eletrodos (eletrodos “floating”) entre o substrato e a camada “buffer”, foi analisado e comparado à configuração convencional de eletrodos coplanares. Moduladores empregando esse tipo de estrutura de eletrodos foram recentemente relatados na literatura, porém poucos estudos sobre as características de projeto foram apresentadas. Neste

contexto, o estudo comparativo apresentado contribui para aprofundar a análise e a compreensão do efeito dos eletrodos “floating” sobre as características elétricas e de desempenho do modulador. Os resultados numéricos mostram que com eletrodos “floating” o fator de “overlap” é maior, o que se traduz num menor consumo de potência de microondas. Essa configuração, devido à melhor sintonia entre as ondas elétrica e óptica, apresenta, também, uma maior largura de banda.

De forma geral, as abordagens numéricas apresentadas neste trabalho têm se mostrado úteis e versáteis para o estudo de guias de ondas ópticos, componentes e dispositivos de interesse tecnológico.

Os desenvolvimentos realizados até o momento têm motivado um grupo de pesquisadores do Instituto de Estudos Avançados (IEAv-CTA) a dar prosseguimento à aplicação do MEF a problemas de propagação de ondas, sobretudo no caso de guias ópticos integrados. Este interesse concretizou-se na proposta de um projeto jovem pesquisador, aprovada pela FAPESP e atualmente em execução, com o objetivo de desenvolver uma ferramenta de “software” para a análise computacional de guias de ondas ópticos. O projeto que envolve atualmente quatro pesquisadores, compreende o estudo de problemas de propagação de ondas em guias ópticos dielétricos, incluindo não linearidades ópticas e utilizando formulações escalares e vetoriais do MEF em duas dimensões. O projeto prevê ainda a possibilidade de estudos eletrostáticos, magnetostáticos, análise de tensões mecânicas e difusão térmica em casos estáticos. Vários efeitos acoplados poderão ser levados em consideração, tais como: efeito eletroóptico, magnetoóptico e termoóptico.

APÊNDICE – Dependência das Propriedades de Propagação de Modos Ópticos em Função do Modelo Empírico que Relaciona a Concentração de Prótons e a Variação do Índice de Refração em Guias Formados por Troca de Prótons e “Annealing”.

Em anos recentes, dispositivos de óptica integrada vêm ganhando uma crescente importância em aplicações, tais como: giroscópios a fibra óptica (FOG), moduladores eletroópticos, dispositivos magnetoópticos, acustoópticos, sensores em geral, chaves, acopladores, conversores de modos, geradores de segunda harmônica, cabos de transmissão de sinal de TV (CATV), distribuição de sinais e comunicação a longas distâncias. A simulação numérica do comportamento desses dispositivos, no que diz respeito às características de propagação da onda óptica, pode contribuir para reduzir sensivelmente os custos de projeto, simplificar os processos de confecção e aumentar sua performance geral.

Entretanto, ao se estudar um fenômeno por meio de uma simulação computacional algumas questões devem ser analisadas:

- A abordagem utilizada representa bem o fenômeno em estudo?
- Os dados de entrada, baseados em modelos ou dados experimentais, refletem a realidade dos fatos ?
- Quão precisos são os resultados obtidos ?

Nesse contexto, este apêndice dará destaque ao procedimento adotado para a simulação dos guias formados por troca de prótons, seguido de recozimento, em substrato de LiNbO_3 [27] e [28]. Essa é uma análise crítica dos modelos empíricos que relacionam a concentração de prótons e a variação dos índices de refração nesse tipo de guia [37]. Tais modelos são fundamentais para a descrição das propriedades físicas do guia. Essas propriedades, por sua vez, são dados de entrada para o programa de análise por elementos

finitos que procede o cálculo da constante de propagação e da distribuição de campos ópticos para cada possível modo de propagação.

Serão apresentados vários modelos que relacionam a concentração de prótons e a mudança dos índices de refração. Esses modelos resultam em diferentes características de propagação dos modos ópticos. Para efeito de comparação, será proposta uma relação empírica que permite um bom ajuste dos dados experimentais na região de fase α [37].

O MEF será aplicado para calcular o processo de difusão no substrato de LiNbO_3 e os modos ópticos no guia difuso.

A. Modelos que Relacionam Concentração de Prótons e Índice de Refração

No processo de troca de prótons (PE – “Proton Exchange”) em LiNbO_3 coloca-se um cristal uniaxial de LiNbO_3 em um banho rico em prótons (solução ácida, tal como ácido benzóico), a uma temperatura fixa por um certo intervalo de tempo. Tipicamente são utilizadas temperaturas entre 150°C e 249°C e períodos de troca entre 5 min e 5 horas. Os íons de hidrogênio do banho e os íons de Li do cristal migram, aumentando a concentração de prótons no cristal e reduzindo a concentração de Li.

O processo PE, em ácido benzóico puro, resulta em um aumento de aproximadamente 0,12 no valor do índice de refração extraordinário do LiNbO_3 , para $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$, enquanto o índice ordinário permanece praticamente inalterado [136] - [138]. Além disso, há uma redução nos coeficientes eletroópticos e as perdas por propagação aumentam [139]. A troca de prótons é um processo de difusão não linear que depende das concentrações de prótons e íons de Li. Dependendo da concentração de prótons, o cristal de LiNbO_3 apresenta diferentes fases cristalinas [139]. Usando complexos

modelos de difusão, nos quais a concentração de um íon afeta o coeficiente de difusão do outro na troca, uma descrição acurada da distribuição de prótons dentro da estrutura cristalina pode ser obtida. Ao final do processo de troca, devido a alta concentração de prótons, o canal PE apresenta estrutura cristalina em fase β .

Com base em vários resultados experimentais apresentados na literatura, neste trabalho a concentração de prótons, após o processo de troca, será aproximada por uma função degrau [136] - [141]. A profundidade efetiva da camada de troca será:

$$d = 2 \sqrt{D_{PE} t}, \quad (\text{A } 1)$$

onde D_{PE} é o coeficiente de difusão e t é o tempo de difusão para o processo PE. A largura do canal é suposta ser igual à abertura da mascara usada no processo PE.

Após o processo PE, os prótons podem ser redistribuídos pelo substrato por um processo de recozimento (“annealing”), com temperaturas superiores a 300°C, que restaura o valor do coeficiente eletroóptico e reduz a instabilidade nos índices de refração e as perdas por propagação óptica.

O processo de “annealing” promove uma redistribuição dos prótons e íons de Li no substrato. Por isso, há um decréscimo na concentração de prótons na região do canal PE e um aumento da concentração em sua vizinhança. A estrutura cristalina muda conforme a concentração de prótons varia [137], [139] e [140]. No presente trabalho, será dada maior atenção aos guias ópticos denominados “well annealed”, que são aqueles que apresentam a fase cristalina α , ou seja, menos de 20% dos íons de Li trocados por prótons. Normalmente, essa condição é atingida quando tempos mais longos e/ou temperaturas mais elevadas são empregadas no processo de “annealing”.

Nas simulações, é suposto que o processo de “annealing”, para guias em fase α pode ser bem descrito por uma equação de difusão linear e anisotrópica em duas dimensões com fonte finita (camada PE), dada por:

$$\frac{\partial C}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(D_{ax} \frac{\partial C}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(D_{ay} \frac{\partial C}{\partial y} \right), \quad (\text{A } 2)$$

onde C é a concentração normalizada de prótons com relação à concentração inicial de Li.

Será assumido, como condição inicial, que $C = 0,8$ no canal retangular formado ao final do processo PE.

A dependência dos coeficientes de difusão com as concentrações de próton e lítio tem sido estudada por vários autores [140], [142] e [143]. Contudo, não há na literatura dados suficientes sobre a forma da dependência desses coeficientes com as concentrações. Além disso, perfis experimentais de concentração, para os guias em fase α , são bem ajustados pela solução da Eq. (A 2) [139], [137], [144] e [145]. Por isso, embora os coeficientes de difusão, D_{ax} e D_{ay} , dependam das concentrações de próton e íons de Li, eles foram assumidos constantes nos cálculos a seguir. Valores empíricos para D_{ax} e D_{ay} são apresentados na literatura e obtidos a partir da profundidade efetiva de difusão após o processo de “annealing”.

A variação do índice de refração extraordinário, em guias APE (“Annealed Proton Exchanged”), é relacionada à concentração de prótons no substrato de LiNbO_3 . Contudo, o mecanismo para a mudança do índice de refração em ambos os processos PE e APE não é ainda completamente estabelecido. Conseqüentemente, o índice de refração não é derivado diretamente das soluções da equação de difusão. Esta questão deve ser verificada por medidas experimentais.

Em geral, o perfil de índices de refração é derivado pelo método IWKB (“Inverse Wentzel-Kramers-Brillouin Method”) a partir de medidas de índices efetivos de modos ópticos. Esse procedimento é usado para guias PE e APE. A precisão do método IWKB aumenta com o número de modos ópticos presentes nos guias. Contudo, guias na fase α propagam somente um reduzido número de modos ópticos.

Uma vez determinada a distribuição de prótons e os índices de refração, uma relação matemática entre estas duas quantidades pode ser obtida. Vários autores têm apresentado, nos últimos anos, modelos que relacionam a concentração de prótons com a mudança dos índices de refração em substratos de LiNbO_3 . Uma breve descrição de algumas dessas abordagens será dada a seguir.

Um possível mecanismo para a mudança do índice de refração em guias PE- LiNbO_3 foi sugerido em [146]. Neste caso, o índice extraordinário é calculado a partir da redução do momento dipolar e do efeito eletroóptico linear. A redução do momento dipolar é causada pela substituição dos íons de Li por prótons. A relação é suposta válida para qualquer concentração de prótons e comprimento de onda (λ). Para $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$, a seguinte relação linear pode ser derivada:

$$\Delta n = 0,15625 C \quad (\text{A } 3)$$

Uma relação Gaussiana generalizada é proposta pelo modelo apresentado em [142]:

$$\Delta n = \beta \left(1 - e^{(-\gamma C^\delta)} \right) \quad (\text{A } 4)$$

onde $\beta = 0,1317$; $\gamma = 3,4576$ e $\delta = 1,75$, são parâmetros de ajuste obtidos por uma regressão não linear dos dados experimentais disponíveis na literatura. A relação é válida para qualquer concentração de prótons e reproduz o comportamento médio dos dados

experimentais. Contudo, a curva não ajusta adequadamente os dados próximo à fase α (ver Fig. 86).

Em [143], a concentração de prótons em guias planares é descrita pela solução de uma equação de difusão unidimensional (1D) e não linear, na qual os coeficientes de difusão dependem da concentração de prótons. A dependência proposta dos coeficientes de difusão com a concentração é puramente empírica. Um perfil degrau para o processo PE é assumido como condição inicial. A relação índice de refração-concentração obtida é:

$$\Delta n = 0,1272 C \quad (A 5)$$

Essa última relação é suposta válida para qualquer concentração normalizada de prótons. De acordo com os autores, a relação linear reproduz quantitativamente o perfil de índices de refração obtidos indiretamente pelo método do IWKB. A profundidade de canal, obtida pela solução da equação não linear, é comparada àquela obtida pela difusão linear, mas os canais são definidos pela mudança do índice de refração. Nenhuma comparação direta entre as concentrações calculadas e medidas é apresentada. O modelo empírico para os coeficientes de difusão é usado para comprimentos de onda entre 0,4 μm e 1,1 μm .

Em outra abordagem, a concentração de prótons é obtida de uma equação de difusão 2D, linear e anisotrópica [137]. A mudança do índice de refração é assumida como sendo uma função linear com a concentração de prótons na fase α e uma função quadrática na fase $\alpha + \beta$. A dependência com o comprimento de onda é apresentada pelos autores. As relações são diferentes para cada fase, mas a curva é contínua para todo limite de variação da concentração de prótons. As relações para a variação do índice de refração com a concentração de próton para as fases α e $\alpha + \beta$ e comprimento de onda $\lambda = 0,6328 \mu\text{m}$, são dadas por:

$$\Delta n_{\alpha} = 0,05 C, \text{ para } C \leq 0,12 \quad (\text{A } 6)$$

$$\Delta n_{\alpha+\beta} = -0,0203 + 0,2207 C - 0,0103 C^2, \text{ para } 0,12 < C \leq 0,56$$

Em [147], a concentração de prótons é obtida pela solução da equação de difusão 2D, considerando coeficientes de auto-difusão para os prótons e íons de Li. As mudanças no índice de refração são estimadas pelo método do IWKB a partir dos índices efetivos dos modos medidos. A relação entre concentração de prótons e índice de refração é assumida como sendo linear para a fase α e quadrática para a fase $\alpha + \beta$, seguindo o esquema do modelo proposto em [137]. As seguintes relações foram obtidas:

$$\Delta n_{\alpha} = 0,1623 C, \text{ para } C \leq 0,12 \quad (\text{A } 7)$$

$$\Delta n_{\alpha+\beta} = -0,0203 + 0,3636 C - 0,2656 C^2, \text{ para } 0,12 < C \leq 0,56$$

Dados experimentais da mudança do índice de refração superficial em função da concentração de prótons são apresentados em [139]. Os dados são bem definidos para $C \leq 0,16$ (fase α) e para $0,59 \leq C \leq 0,80$ (fase β), contudo, são mal definidos na fase intermediária ($\alpha + \beta$). Segundo os autores, os dados experimentais são especificados para a superfície e não necessariamente se aplicam ao interior do canal. Os dados experimentais para a fase α parecem ser melhor representados por um modelo no qual são considerados os efeitos combinados da diminuição do íons de Li e a adição de prótons. Esses efeitos são assumidos como aditivos. Os efeitos combinados resultam em uma curva que provê uma explicação para a forma da variação dos índices na fase α .

Os dados experimentais [139] e as curvas definidas pelos modelos já discutidos são mostrados na Fig. 86. Várias relações representam a mudança do índice de refração na fase α como uma relação linear com a concentração de prótons. Contudo, eles não representam os dados experimentais adequadamente.

As curvas definidas pelas Eqs. (A 4) e (A 6) possuem valores sistematicamente abaixo dos dados experimentais. A Eq. (A 6) parece ser compatível com o modelo no qual somente a adição de prótons é considerada responsável pela variação dos índices de refração [139]. A curva expressa pela Eq. (A 7) reproduz, de forma aproximada, a variação dos dados experimentais, no entanto, para valores de concentração normalizada maiores que 0,1, os resultados calculados são sistematicamente maiores que os resultados experimentais.

Com o propósito de efetuar comparações, a seguinte relação empírica, válida somente na região de fase α , será também utilizada:

$$\Delta n = (0,3226C + 0,183C^2)e^{-7,14C}, \quad \text{para } C \leq 0,16 \quad (\text{A } 8)$$

Essa relação empírica, obtida por um ajuste de mínimos quadrados a uma função não linear, representa mais acuradamente o comportamento dos dados experimentais (linha sólida na Fig. 86). Adicionalmente, a Eq. (A 8) representa qualitativamente o mesmo comportamento obtido pelo modelo que considera os efeitos combinados da diminuição dos íons de Li e a adição de prótons na região do canal.

B. Dependência das Propriedades de Propagação com Diferentes Modelos para $\Delta n_e(C)$ - Resultados Numéricos

O experimento numérico proposto nesta seção é a análise das características de propagação do modo fundamental (índices efetivos) em guias formados por troca de

prótons seguido por “annealing”. Os índices efetivos foram calculados utilizando-se a formulação do MEF apresentada na seção 2.2.

Fig. 86 Diferentes modelos para cristais de LiNbO_3 em fase α .

Assumiu-se que o ataque químico foi realizado com ácido benzóico puro. Nesse caso, os coeficientes de difusão para os eixos cristalinos x_c e z_c são, respectivamente:

$$D_{PE_x}(190^\circ C) = 0,09188 \mu\text{m}^2 / h \quad [138], \quad (\text{A } 9)$$

$$D_{PE_z}(180^\circ C) = 0,027 \mu\text{m}^2 / h \quad [148]. \quad (\text{A } 10)$$

Os resultados, a serem apresentados nesta seção, foram obtidos para um cristal de LiNbO_3 com corte- x_c , propagação ao longo do eixo cristalino y_c e modo E_{11}^x . O canal retangular (condição inicial - fonte finita de prótons) formado pelo processo PE apresenta largura de $6 \mu\text{m}$ (abertura da máscara) e profundidade efetiva de $0,3 \mu\text{m}$ (15 minutos para processo PE).

Os coeficientes de difusão adotados para o processo de “annealing” à temperatura de 360°C foram [139]:

$$D_a(\text{corte} - x_c) = 0,92 \mu\text{m}^2 / h, \quad (\text{A } 11)$$

$$D_a(\text{corte} - z_c) = 0,77 \mu\text{m}^2 / h. \quad (\text{A } 12)$$

A Fig. 87 mostra a concentração normalizada de prótons, obtida da solução da equação de difusão, e a profundidade efetiva do canal como uma função do tempo de “annealing”. Neste trabalho, a profundidade efetiva é definida como a largura completa a $1/e$ da máxima amplitude de campo óptico ao longo da profundidade do canal.

Fig. 87 Concentração superficial normalizada de prótons e profundidade efetiva do canal como uma função do tempo de “annealing” para LiNbO_3 com corte- x_c .

A Fig. 88 mostra a variação do índice de refração superficial em função do tempo de “annealing”, calculada pelas relações (A 6) - (A 8).

A Fig. 89 mostra a variação do índice efetivo (constante de propagação normalizada) em função do tempo de “annealing”. Fica claro, a partir dessas figuras, que o índice efetivo é muito sensível à relação entre concentração de prótons e índice de refração.

Os diâmetros dos modos (“spot sizes”) nas direções x e y , definidos como a largura completa a $1/e$ da máxima amplitude de campo óptico, são mostrados nas Figs. 90(a) e 90(b), respectivamente. As curvas mostram uma moderada diferença entre o modelo linear (Eq. (A 7)) e o modelo não linear (Eq. (A 8)). Contudo, essa diferença aumenta com o tempo de “annealing”. O modelo representado pela Eq. (A 6) leva a diâmetros muito diferentes.

Como pode-se observar dos resultados numéricos apresentados, o comportamento das características de propagação são muito dependentes da relação concentração de prótons - índice de refração utilizada. Cada um dos autores apresentados utiliza uma abordagem diferente e define sua própria relação. Em geral, complexos processos de difusão são assumidos. Contudo, não são mostradas comparações diretas entre as concentrações de prótons calculadas e medidas. Adicionalmente, todos os autores argumentam que seu procedimento é auto consistente.

Fig. 88 Comportamento da variação do índice de refração superficial como uma função do tempo de "annealing" para LiNbO_3 com corte- x_c .

Fig. 89 Comportamento do índice efetivo para o modo fundamental E_{11}^x como uma função do tempo de "annealing" em LiNbO_3 com corte- x_c .

Fig. 90 Diâmetro do modo E_{11}^x nas direções transversais (x,y) como uma função do tempo de “annealing” em cristal de LiNbO_3 com corte- x_c . (a) diâmetro no eixo x, (b) diâmetro no eixo y.

Nesse contexto, somente a comparação detalhada, entre resultados de simulação e valores obtidos experimentalmente, poderá trazer um melhor entendimento dos processos envolvidos e qual a melhor maneira de simulá-los.

REFERÊNCIAS

- [1] P.L. Arlett, A.K. Bahrani e O.C. Zienkiewicz, “Applications of Finite Elements to the Solution of Helmholtz’s Equation,” *Proc. IEE*, vol. 115, Nº 12, pp. 1762-1766, 1968.
- [2] P. Silvester, “Finite-Element Solution of Homogeneous Waveguide Problems,” *Alta Frequenza*, vol. 38, pp. 313-317, 1969.
- [3] P. Silvester, “A General High-Order Finite-Element Waveguide Analysis program,” *IEEE Transactions on Microwave Theory Techniques*, vol. MTT-17, Nº 4, pp. 204-210, 1969.
- [4] Bo-Nan Jiamg, J. Wu e L.A. Povinelli, “The Origin of Spurious Solutions in Computational Electromagnetics,” *Journal of Computational Physics*, vol. 125, pp. 104-123, 1996.
- [5] C.-C. Su, “Origin of Spurious Modes in the Analysis of Optical Fibre Using the Finite-Element or Finite-Difference Technique,” *Electronic Letter*, vol. 21, Nº 19, pp. 858-860, 1985.
- [6] M. Koshiba, K. Hayata e M. Suzuki, “Finite-Element Method Analysis of Microwave and Optical Waveguides - Trends in Countermeasures to Spurious Solutions,” *Electronics and Communication in Japan*, Part 2, vol. 70, Nº9, pp.96-108, 1987.
- [7] M. Koshiba, H. Saitoh, M. Eguchi e K. Hirayama, “Simple Scalar Finite Element Approach to Optical RIB Waveguides,” *IEE Proceedings-J*, vol. 139, Nº 2, pp. 166-171, 1992.
- [8] M. Koshiba, K. Hayata e M. Suzuki “Approximate Scalar Finite-Element Analysis of Anisotropic Optical Waveguides with Off-Diagonal Elements in a Permittivity Tensor,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-32, Nº 6, pp. 587-593, 1984.
- [9] M. Koshiba e X.P. Zhuang “An Efficient Finite-Element Analysis of Magneto optic Channel Waveguides,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 11, Nº 9, pp. 1453-1458, 1993.
- [10] M. Koshiba, *Optical Waveguide Theory by the Finite Element Method*, 1st ed., KTK Scientific Publishers, Tokyo, 1992.
- [11] N. Mabaya, P.E. Lagasse e P. Vandenbulcke, “Finite Element Analysis of Optical Waveguides,” *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-29, pp. 600-605, 1981.

- [12] D. Rafizadeh, S.T. Ho, "Numerical Analysis of Vectorial Wave Propagation in Waveguides with Arbitrary Refractive Index profiles," *Optics Communications*, vol. 141, pp. 17-20, 1997.
- [13] J.P. Donnelly e S.D. Lau, "Generalized Effective Index Series Solution Analysis of Waveguide Structures with Positionally Varying Refractive Index Profiles," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 32, N^o.6, pp. 1070-1079, 1996.
- [14] Z. Ninghua, W. Renming e W. Ziqian, "Variational Analysis of Eigenmodes of Integrated Optical Waveguides and Applications," *Science in China (Series A)*, vol. 38, N^o. 5, pp.608-617, 1995.
- [15] J. Rodríguez, S. Fernández, S.L. Palacios, R.D. Crespo, J.M. Fernández, A. Guinea, J.M. Virgós e J. Olivares, "Equivalent-Optical-Waveguide Model for the Analysis of Optical Waveguides by Means of an Asymptotic Effective-Index Method," *Applied Optics*, vol. 34, N^o. 27, pp.6172-6179, 1995.
- [16] A. Sharma e P. Bindal, "Analysis of Diffused Planar and Channel Waveguides," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 29, N^o. 1, pp. 150-153, 1993.
- [17] N. Zhu e R.M. Wang, "A Simple Variational Analysis of Diffused Channel Waveguides," *Optical and Quantum Electronics*, 25, pp. 57-62, 1993.
- [18] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt e U. Köster, "Rigorous Finite-Difference Analysis of Coupled Channel Waveguides with Arbitrarily Varying Index Profile," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 9, N^o. 10, pp.1244-1253, 1991.
- [19] M.S. Stern, "Semivectorial Polarised Finite Difference Method for Optical Waveguides with Arbitrary Index profiles," *IEE Proceedings*, vol. 135, Pt. J, N^o. 1, pp. 56-63, 1988.
- [20] H. Renner, "Cutoff Frequencies in Diffusion-Type Power-Law Profile Waveguides," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 33, N^o 5, pp. 724-730, 1997.
- [21] A. Sharma, P. Bindal, "An Accurate variational Analysis of Single mode Diffused Channel Waveguides," *Optic. Quantum Electronics*, vol. 24, pp. 1359-1373, 1992.
- [22] N. Schulz, K. Bierwirth, F. Arndt e U. Köster, "Finite Difference Method Without Spurious Solution for the Hybrid-Mode Analysis of Diffused Channel Waveguides," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Technique*, vol. 38, N^o 6, pp.722-729, 1990.
- [23] R.K. Lagu e R.V. Ramaswamy, "A Variational Finite-Difference Method for Analyzing Channel Waveguides with Arbitrary Index Profiles," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. QE-22, N^o 6, pp. 968-976, 1986.

- [24] K. Hayata, M. Koshiba e M. Suzuki, "Analysis of Partially Metal-Clad and Dielectric Overlay-Loaded Diffused Optical Waveguide," *Electronics and Communications in Japan*, vol. 67-C, N° 5, pp. 108-116, 1984.
- [25] Ch. Pichot, "Exact Numerical Solutions for the Diffused Channel Waveguide," *Optics Communications*, vol. 41, N° 3, pp. 169-173, 1982.
- [26] C. Yeh, K. Ha, S.B. Dang e W.P. Brown, "Single-Mode Optical Waveguides," *Applied Optics*, vol. 18, N°10, pp. 1490-1504, 1979.
- [27] M.A.R. Franco, A. Passaro, F. Sircilli Neto, J.R. Cardoso, "Modal Analysis of Diffused Anisotropic Channel Waveguide by a Scalar Finite Element Method," *Proceedings of the 11th Conference on the Computation of Electromagnetics Fields - COMPUMAG*, 2 a 6 de Novembro de 1997, Rio de Janeiro, Brasil, pp.671-672.
- [28] M.A.R. Franco, A. Passaro, F. Sircilli Neto, J.R. Cardoso e J.M. Machado, "Modal Analysis of Diffused Anisotropic Channel Waveguides by a Scalar Finite Element Method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, N° 5, pp. 2783-2786, 1998.
- [29] M.A.R. Franco, A. Passaro, J.R. Cardoso, J.M. Machado, "Finite Element Analysis of Anisotropic Channel Waveguide with Arbitrary Index Profile," *Proceedings of The Eighth Biennial IEEE Conference on Electromagnetic Field Computation - CEFC'98*, 1 a 3 de junho, 1998, Tucson, Arizona, USA, pp. 362, 1998.
- [30] M.A.R. Franco, A. Passaro, J.R. Cardoso e J.M. Machado, "Finite Element Analysis of Anisotropic Optical Waveguide with Arbitrary Index Profile," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 35, N° 3, pp.1546-1549, 1999.
- [31] F.A. Katsriku, B.M.A. Rahman e K.T.V. Grattan, "Finite Element Analysis of Diffused Anisotropic Optical Waveguides," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 14, N° 5, pp. 780-786, 1996.
- [32] U. Hempelmann, H. Herrmann, G. Mrozynski, V. Reimann e W. Sohler, "Integrated Optical Proton Exchanged TM-Pass Polarizers in LiNbO₃: Modelling and Experimental Performance," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 13, N° 8, pp. 1750-1759, 1995.
- [33] C.L.S. Sobrinho, A.J. Giarola, "Analysis of a Dielectric Channel Waveguide Diffused in an Anisotropic Substrate with a Gaussian-Gaussian Index of Refraction Profile Using the Finite-Difference Method," *SBMO International Microwave Conference*, Brasil, Agosto, 1993, pp. 557-562.
- [34] L. Torner, F. Canal e J. Hernandez-Marco, "Leaky Modes in Multilayer Optical Waveguides," *Applied Optics*, vol. 29, N° 18, pp. 2805-2814, 1990.
- [35] K. Matsumae, M. Koshiba, "Modeling of Anisotropic Graded-Index Channel Waveguides," *Electronics and Communications in Japan*, Part 2., vol. 77, N° 9, pp. 168-174, 1994.

- [36] M. Koshiba, H. Kumagami e M. Suzuki, "Finite-Element Solution of Planar Arbitrarily Anisotropic Diffused Optical Waveguides," *Journal of Lightwave Technology*, vol. LT-3, N^o 4, pp.773-778, 1985.
- [37] A. Passaro, M.A.R. Franco, "Dependence of the Waveguide Properties on Different Models to Relate the Hydrogen Concentration to the Refractive Index in APE LiNbO₃," Proceedings of the *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC99*, 9-12 de agosto de 1999, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 121-125.
- [38] M.A.R. Franco, A. Passaro, N.M. Abe e J.R. Cardoso, "Análise de Configuração de Eletrodos e Efeito Eletroóptico em Dispositivos de Óptica Integrada pelo Método dos Elementos Finitos," *Anais do III Congresso Brasileiro de Eletromagnetismo - CBMag'98*, São Paulo, 25 a 28 de Outubro de 1998, pp.226-229.
- [39] L.C. de Vasconcellos Neto, M.A.R. Franco, A. Passaro, R.T. de Carvalho, O. Lisboa, J.R. Cardoso e J.K.C. Pinto, "Dispositivos Eletro-Ópticos À Óptica Integrada para Giroscópios," *Anais do II Simpósio Brasileiro de Engenharia Inercial - II SBEIN*, Rio de Janeiro, 21 a 23 de Outubro de 1998, pp.77-82.
- [40] M.A.R. Franco, A. Passaro, N.M. Abe, J.M. Machado e J.R. Cardoso, "A Design Study of a Ti:LiNbO₃ Traveling-Wave Electrooptic Modulator by the Finite Element Method," Proceedings of the *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC99*, 9-12 de agosto de 1999, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 68-72.
- [41] N.M. Abe, M.A.R. Franco, A. Passaro, "Analysis of a x-cut Ti:LiNbO₃ Electrooptic Modulator with a Ridge Structure," Proceedings of the *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC99*, 9-12 de agosto de 1999, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 126-130.
- [42] A. Passaro, M.A.R. Franco, J.M. Machado e J.R. Cardoso, "Modal Analysis of Quasi-Guided Waveguides by the Finite Element Method with Spatial Transformations," Proceedings of the *International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC99*, 9-12 de agosto de 1999, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 136-140.
- [43] R.E. Collin, *Engenharia de Microondas*, Ed. Guanabara Dois S.A., Rio de Janeiro, Brasil, 1979, Capítulo 3.
- [44] S. Ratnajeevan, H. Hole, *Computer-Aided Analysis and Design of Electromagnetic Devices*, Elsevier Science Publishing Co., New York, USA, 1989, pp.175-191.
- [45] P.P. Silvester e R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, second edition, Cambridge University Press, 1990.
- [46] J.E. Goell, "A Circular-Harmonic Computer Analysis of Rectangular Dielectric Waveguides," *The Bell System Technical Journal*, pp.2133-2160, 1969.

- [47] M. Koshiba, K. Hayata e M. Suzuki, "Approximate Scalar Finite Element Analysis of Anisotropic Optical Waveguides," *Electronics Letters*, vol. 18, N^o. 10, pp.411-413, 1982.
- [48] Q. Chen e A. Konrad, "A Review of Finite Element Open Boundary Techniques for Static and Quasi-Static Electromagnetic Field Problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 13, N^o. 1, pp. 663-676, 1997.
- [49] C.R.I. Emson, "Method for the Solution of Open-Boundary Electromagnetic-Field Problems," *IEE Proceedings-A*, vol. 135, pp. 151-158, 1988.
- [50] S. Kapoor e J. B. Schneider, "Characterizatioin of Microstrip Discontinuities Using Conformal Mapping and the Finite-Difference Time-Domain Method," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-43, N^o.11, pp.2636-2339, 1995.
- [51] X. Zhang e T. Miyoshi, "Optimum Design of Coplanar Waveguide for LiNbO₃ Optical Modulator," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-43, N^o. 3, pp.523-528, 1995.
- [52] C.T. Lee e M.L. Wu, "Combination of Conformal Mapping and Finite-Difference Methods for Analysis of Supported Coplanar Waveguides," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 15, N^o. 5, pp. 273-277, 1997.
- [53] D. Xingqi e A. Tongyi, "A New FEM Approach for Open Boundary Laplace's Problem," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-44, N^o. 1, pp.157-160, 1996.
- [54] Z. P. Tanner e R. Mittra, "Higher-Order Infinite Elements for Quasi-TEM Analysis of Microwave Transmission Lines Using The Finite Element Method," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 9, N^o. 5, pp. 244-249, 1995.
- [55] B.M.A. Rahman e J.B. Davies, "Finite-Element Analysis of Optical and Microwave Waveguide Problems," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-32, N^o. 1, pp. 20-28, 1984.
- [56] M.J. McDougall e J.P. Webb, "Infinite Elements for the Analysis of Open Dielectric Waveguides," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Thechniques*, vol. 37, N^o. 11, pp. 1724-1731, 1989.
- [57] A. Stochniol, "A General Transformation for Open Boundary Finite Element Method for Electromagnetic Problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 28, N^o. 2, pp. 1679-1681, 1992.
- [58] J.F. Imhoff, G. Meunier, X. Brunotte e J.C. Sabonnadière, "An Original Solution for Unbounded Electromagnetic 2D and 3D Problems Throughout the Finite Element Method," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 26, N^o. 5, pp. 1659-1661, 1990.

- [59] W. Pinello, M. Gribbons e A. Cangellaris, "A New Numerical Grid Truncation Scheme for the Finite Difference / Finite Element Solution of Laplace's Equation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 32, N^o. 3, pp.1397-1400, 1996.
- [60] Z. Raida, "Finite-Element Analysis of Open Microwave Waveguides Using A PML-Like Spatial Mapping," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 18, N^o. 3, pp.180-184, 1998.
- [61] P.P. Silvester e R.L. Ferrari, *Finite Elements for Electrical Engineers*, 3rd edition, Cambridge University Press, Cambridge, UK, 1996.
- [62] H.E.H. Figueroa, F.A. Fernández e J.B. Davies, "Finite Element Approach for the Modal Analysis of Open-Boundary Waveguides," *Electronics Letters*, vol. 30, N^o. 24, pp. 2031-2032, 1994.
- [63] A.R. Djordjevic, T.K. Sarkar, T. Roy, S.M. Rao e M. Salazar, "An Exact Method for Simulating Boundary Conditions for Mesh Termination in Finite-Difference Techniques," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 8, N^o. 6, pp. 319-321, 1995.
- [64] Z.P. Tanner, G. Mavronikolas e R. Mittra, "A Numerical Absorbing Boundary Condition for Quasi-TEM Analysis of Microwave Transmission Lines Using the Finite-Element Method," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 9, N^o. 3, pp.134-136, 1995.
- [65] C. Vassalo e J.M. van der Keur, "Comparison of Few Transparent Boundary Conditions for Finite-Difference Optical Mode-Solvers," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, N^o. 2, pp.397-402, 1997.
- [66] J.P. Bérenger, "A Perfectly Matched Layer for the Absorption of Electromagnetic Waves," *Journal of Computational Physics*, 114, pp. 185-200, 1994.
- [67] J.P. Bérenger, "An Effective PML for the Absorption of Evanescent Waves in Waveguides," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 8, N^o. 5, pp. 188-190, 1998.
- [68] I. Bárdi, O. Bíró e K. Preis, "Perfectly Matched Layers in Static Fields," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, N^o. 5, pp. 2433-2436, 1998.
- [69] I. Munteanu e D. Ioan, "Some Properties of the Non-Homogeneous Anisotropic Perfectly Matched Layer," *IEEE Transaction on Magnetics*, vol. 34, N^o. 5, pp.2692-2695, 1998.
- [70] F.L. Teixeira e W.C. Chew, "General Closed-Form PML Constitutive Tensors to Match Arbitrary Bianisotropic and Dispersive Linear Media," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol. 8, N^o. 6, pp. 223-225, 1998.

- [71] J.M. Jin e W.C. Chew, "Combining PML and ABC for the Finite-Element Analysis of Scattering Problems," *Microwave and Optical Technology Letters*, vol. 12, N^o. 4, pp.192-197, 1996.
- [72] *Partial Differential Equation Toolbox – for use with Matlab*, User's Guide. The Math Works Inc. 1995.
- [73] Y. Saad, "Variations on Arnoldi's Method for Computing Eigenelements of Large Unsymmetric Matrices," *Linear Algebra and its Applications*, vol.34, pp. 269-295, 1980.
- [74] J.H. Wilkinson, *The Algebraic Eigenvalue Problem*, Oxford University Press, London, 1965.
- [75] N.M. Abe, J.R. Cardoso, D.R.F. Clabunde e A. Passaro, "LMAG-2D: A Software Package to Teach FEA Concepts," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, N^o. 2, pp.1986-1989, 1997.
- [76] J.R. Cardoso, *Introdução ao Método dos Elementos Finitos*, 1^a edição, 1995.
- [77] O.C. Zienkiewicz, R.L. Taylor, *The Finite Element Method*, McGraw-Hill International Editions, 1989, 4th edition.
- [78] P.P. Silvester, "Tetrahedral Polynomial Finite Elements for The Helmholtz Equation," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 4, pp. 405-413, 1972.
- [79] P.P. Silvester, "Construction of Triangular Finite Element Universal Matrices," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 12, pp. 237-244, 1978.
- [80] D. Villeneuve, J.P. Webb, "Hierarchical Universal Matrices for Triangular Finite Elements with Varying Material Properties and Curved Boundaries," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 44, N^o.2, pp. 215-228, 1999.
- [81] D. Villeneuve e J.P. Webb, "Universal Matrices for High Order Finite Elements in Nonlinear magnetic Field Problems," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 33, N^o. 5, pp. 4131-4133, 1997.
- [82] Z.J. Csendes, "A Finite Element Method for the General Solution of Ordinary Differential Equations," *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vo. 9, pp. 551-561, 1975.
- [83] M.A.R. Franco, A. Passaro e J.M. Machado, "MATHEMATICA Notebook for Computing Tetrahedral Finite Element Shape Functions and Matrices for the Helmholtz Equation," *Proceedings of the 11th Conference on the Computation of Electromagnetics Fields - COMPUMAG*, 2 a 6 de Novembro de 1997, Rio de Janeiro, Brasil, pp.695-696.

- [84] M.A.R. Franco, A. Passaro e J.M. Machado, "MATHEMATICA Notebook for Computing Tetrahedral Finite Element Shape Functions and Matrices for the Helmholtz Equation," *IEEE Transactions on Magnetics*, vol. 34, N^o 5, pp. 3387-3390, 1998.
- [85] S. Selleri e M. Zoboli, "An Improved Finite Element Method Formulation for the Analysis of Nonlinear Anisotropic Dielectric Waveguides," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-43, N^o. 4, pp.887-892, 1995.
- [86] M.A.R. Franco, A. Passaro, J.M. Machado e J.R. Cardoso, "Cálculo das Frequências de Corte de Guias de Ondas por Elementos Finitos Triangulares de Primeira e Segunda ordens de Aproximação," *Nota Técnica NT-012/96* (Dez 1996), Instituto de Estudos Avançados (IEAv), Centro Técnico Aeroespacial (CTA), São José dos Campos, SP.
- [87] J.D. Kraus e K.R. Carver, *Eletromagnetismo*, 2^a edição, Ed. Guanabara Dois, 1978.
- [88] A.A. Melcon, R. Molina e M. Guglielmi, "Modal Spectrum of the Ridged Circular Waveguide Using FE Method," *COMPEL*, vol. 13, Supplement A, pp. 353-358, 1994.
- [89] J. Helszajn, "Standing Wave Solutions of Planar Irregular Hexagonal and Wye Resonators," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. MTT-29, N^o. 6, pp. 562-567, 1981.
- [90] F.A. Fernandez e Y. Lu, *Microwave and Optical Waveguide Analysis by the Finite Element Method*, 1 st ed, John Wiley & Sons Inc., New York, 1996.
- [91] M. Koshiba, "Computer-Aided Design of Integrated Optical Waveguide Devices", em *Finite Element Software for Microwave Engineering*, Eds. T. Itoh, G. Pelosi e P.P. Silvester, John Wiley & Sons, Inc, New York, 1996, pp. 79-99.
- [92] B.M. Rahman e J.B. Davies, "Vector-H Finite Element Solution of GaAs/GaAlAs rib Waveguides," *IEE Proc., Part J: Optoelectron.*, 132, pp.349-353, 1985.
- [93] M. Koshiba, S. Maruyama e K. Hirayama, "A Vector Finite Element Method with the High-Order Mixed-Interpolation-Type Triangular Elements for Optical Waveguiding Problems," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 12, N^o.3, pp. 495-502, 1994.
- [94] W.P. Huang e C.L. Xu, "Simulation of Three-Dimensional Optical Waveguides by a Full-Vector Beam Propagation Method," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, QE-29, pp.2639-2649, 1993.
- [95] E.A.J. Marcatili, "Dielectric Rectangular Waveguide and Directional Coupler for Integrated Optics," *Bell Syst. Tech. J.*, vol.48, pp. 2071-2102, 1969.

- [96] D. Zhang, C. Chen, J. Li, G. Ding, X. Chen e Y. Cui, "A Teoretical Study of a Ti-Diffused Er:LiNbO₃ Waveguide Laser," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 32, N^o. 10, pp. 1833-1838, 1996.
- [97] S. Fouchet, A. Carencio, C. Daguet, R. Guglielmi e L. Riviere, "Wavelength Dispersion of Ti Induced Refractive Index Change in LiNbO₃ as a Function of Diffusion Parameters," *Journal of Lightwave Technology*, vol. LT-5, N^o. 5, pp. 700-708, 1987.
- [98] C. Kitano, "Análise do Interferômetro Mach-Zehnder com Controle Acústico-Óptico," Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica-ITA, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1993.
- [99] V.M. Schneider, "Modulador de Fase Eletroóptica em Guia Canal," Dissertação de Mestrado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica-ITA, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1993.
- [100] J.A.J. Ribeiro, "Moduladores Eletroópticos Integrados Empregando Cristais de Niobato de Lítio," Tese de Doutorado, Instituto Tecnológico da Aeronáutica-ITA, São José dos Campos, São Paulo, Brasil, 1998.
- [101] D. Zhang, C. Chen, G. Ding, J. Zhang e Y. Cui, "Dependence of Ti-Diffused Er:LiNbO₃ Laser Efficiency on Waveguide Fabrication Parameters and Pump Wavelength," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 33, N^o. 7, pp. 1231-1235, 1997.
- [102] D.S. Smith, H.D. Riccius e R.P. Edwin, "Refractive Indices of Lithium Niobate," *Optic Communications*, vol. 17, N^o. 3, pp. 332-335, 1976.
- [103] I.H. Mallitson, "Interspecimen Comparison of the Refractive Index of Fused Silica," *Journal of Optic Society America.*, vol. 55, N^o. 10, pp. 1205-1209, 1965.
- [104] H. Kogelnik, "Coupling of Optical Devices and Waveguides," Photonics; Proceeding of the International Meeting, Cadarache, france, junho 27-29, pp. 247-265, 1974.
- [105] P. Sewell, T.M. Benson e P.C. Kendall, "Rib Waveguide Spot-Size Transformers: Modal Properties," *Journal of Lightwave Technologies*, vol. 17, N^o. 5, pp. 848-856, 1999.
- [106] M. Fukuma, J. Noda e H. Iwasaki, "Optical Properties in Titanium-Diffused LiNbO₃ Strip Waveguides," *Journal of Applied Physics*, 49(7), pp. 3693-3698, 1978.
- [107] M. Fukuma e J. Noda, "Optical Properties of Titanium-Diffused LiNbO₃ Strip Waveguides and their Coupling-to-a-fiber Characteristics," *Applied Optics*, vol. 19, N^o.4, pp. 591-597, 1980.
- [108] S.Y. Wang e S.H. Lin, "High Speed III-V Electrooptic Waveguide Modulators at $\lambda = 1.3 \mu\text{m}$," *Journal of Lightwave Technology*, vol.6, N^o.6, pp. 758-771, 1988.

- [109] M.L. Tuma e G. Beheim, "Calculated Coupling Efficiency Between an Elliptical-Core Optical Fiber and a Silicon Oxynitride Rib Waveguide," *NASA Technical Memorandum* 106850, pp.1-13, 1995.
- [110] M.L. Tuma, A. Weisshaar, J. Li e G. Beheim, "Calculated Coupling Efficiency Between an Elliptical-Core Optical Fiber and an Optical waveguide Over Temperature," *NASA Technical Memorandum* 107005, pp.1 - 12, 1995.
- [111] Z. Qinghua, G. Junjie, F. Junging e X. Chengjie, "A Study of End-Fire Coupling of Single-Mode Planar Waveguide," National Air Intelligence Center – NAIC-ID(RS)T-0420-94, pp.1-10, 1995.
- [112] T. Conese, G. Barbarossa e M.N. Armenise, "Vectorial Finite Element Analysis of Vertical Coupling Between D-fiber and Buried Optical Channel Waveguide," *Optical Engineering*, vol.34, N^o. 6, pp. 1689-1696, 1995.
- [113] K.P. Panajotov, "Evanescent Field Coupling Between a Single-Mode Fiber and a Planar Waveguide with Absorption or Gain," *Journal of Optic Society of America B*, vol. 13, N^o. 11, pp.2468-2476, 1996.
- [114] F. Ghirardi, B. Mersali, J. Brandon, G.H. Gruyer e A. Carencu, "Quasi Planar Spot-Size Transformer for Efficient Coupling Between a Cleaved Fibre and an InP/InGaAsP Rib Waveguide," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol.6, N^o. 4, pp. 522-524, 1994.
- [115] O. Mitomi, K. Kasaya e H. Miyazawa, "Design of a Single-Mode Tapered Waveguide for Low-Loss Chip-to Fiber Coupling", *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol.30, N^o.8, pp. 1787-1793, 1994.
- [116] O. Mitomi, K. Kasaya, Y. Tohmori, Y. Suzuki, H. Fukano, Y. Sakai, M. Okamoto e S.I. Matsumoto, "Optical Spot-Size Converters for Low-Loss Coupling Between Fibers and Optoelectronic Semiconductor Devices," *Journal of Lightwave Technology*, vol.14, N^o. 7, pp. 1714-1720, 1996.
- [117] C.M. Weinert, "Design of Fiber-Matched Uncladded Rib Waveguides on InP with Polarization-Independent Mode Matching Loss of 1 dB," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol.8, N^o. 8, pp. 1049-1051, 1996.
- [118] R.E. Smith, C.T. Sullivan, G.A. Vawter, G.R. Hadley, J.R. Wendt, M.B. Snipes e J.F. Klem, "Reduced Coupling Loss Using a Tapered-Rib Adiabatic-Following Fiber Coupler," *IEEE Photonics Technology Letters*, vol.8, N^o. 8, pp. 1052-1054, 1996.
- [119] L.C. de Vasconcellos Neto, R.T. de Carvalho, O. Lisboa, J.K.C. Pinto, "New Techniques for Splicing Optical Fibers to Integrated Optics Waveguide Devices," *Annals of the Brazilian Commission for Optics*, vol.1, pp. 174-177, 1999.

- [120] G.A. Vawter, C.T. Sullivan, J.R. Wendt, R.E. Smith, H.Q. Hou e J.F. Klem, "Tapered Rib Adiabatic Following Fiber Couplers in Etched GaAs Materials for Monolithic Spot-Size Transformation," *IEEE Journal of Selected Topics in Quantum Electronics*, vol.3, N^o.6, pp.1361-1371, 1997.
- [121] H. Jin, M. Bèlanger, Z. Jakubczyk, "General Analysis of Electrodes in Integrated-Optics Electrooptic Devices," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, N^o. 2, pp. 243-251, 1991.
- [122] H. Jin, R. Vahldieck, M. Bèlanger e Z. Jakubczyk, "A Mode Projecting Method for the Quasi-Static Analysis of Electrooptic Device Electrodes Considering Finite Metalization Thickness and Anisotropic Substrate," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, N^o. 10, pp.2306-2314, 1991.
- [123] A. Yariv e P. Yeh, *Optical Waves in Crystals – Propagation and Control of Laser Radiation*, John Wiley & Sons, 1984, pp. 71-79 e 220-221.
- [124] R.V. Mustacich, "Scalar Finite Element Analysis of Electrooptic Modulation in Diffused Channel Waveguides and Poled Waveguides in Polymer Thin Films," *Applied Optics*, vol. 27, N^o. 17, pp. 3732-3737, 1988.
- [125] H. Nishihara, M. Haruna e T. Suhara, *Optical Integrated Circuits*, 1^a edição, McGraw-Hill, 1989, pp. 109-111.
- [126] H. Chung, W.S.C. Chang e E.L. Adler, "Modeling and Optimization of Traveling-Wave LiNbO₃ Interferometric Modulators," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, N^o. 3, pp. 608-617, 1991.
- [127] K.W. Hui, K.S. Chiang, B. Wu e Z.H. Zhang, "Electrode Optimization for High-Speed Traveling-Wave Integrated Optic Modulators," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, N^o. 2, pp. 232-238, 1998.
- [128] V.R. Almeida, A.C Silva e J.E.B. Oliveira, "High Dynamic Range Fiber Optic Gyroscope Demodulation Technique Based on Triangular Waveform Phase Modulation," *Proceedings of the International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC99*, 9-12 de agosto de 1999, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 264-268.
- [129] J.E.B. Oliveira, F.D.P. Alves e A.L.P. Mattei, "Trends in Photonics Applied to Electronic Warfare at Brazilian Airforce," *Proceedings of the International Microwave and Optoelectronics Conference - IMOC99*, 9-12 de agosto de 1999, Rio de Janeiro, Brasil, pp. 151-154.
- [130] K. Kawano, T. Kitoh, H. Jumonji, T. Nozawa, M. Yanagibashi e T. Suzuki, "Spectral-Domain Analysis of Coplanar Waveguide Travelling-wave electrodes and their applications to Ti:LiNbO₃ Mach-Zehnder Optical Modulators," *IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques*, vol. 39, N^o. 9, pp. 1595-1601, 1991.

- [131] T. Kitazawa, D. Polifko e H. Ogawa, "Analysis of CPW for LiNbO₃ Optical Modulator by Extended Spectral-Domain Approach," *IEEE Microwave and Guided Wave Letters*, vol.2, N^o. 8, pp. 313-315, 1992.
- [132] K. Noguchi, O. Mitomi, H.Miyazawa e S. Seki, "A Broadband Ti:LiNbO₃ Optical Modulator with a Ridge Structure," *Journal of Lightwave Technology*, vol.13, N^o. 6, pp. 1164-1168, 1995.
- [133] K. Noguchi, O. Mitomi e H. Miyazawa, "Millimeter-Wave Ti:LiNbO₃ Optical Modulators," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, N^o. 4, pp. 615-619, 1998.
- [134] S.J. Chang, C.L. Tsai, Y.B. Lin, J.F. Liu e W.S. Wang, "Improved Electrooptic Modulator with Ridge Structure in X-Cut LiNbO₃," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 17, N^o. 5, pp. 843-847, 1999.
- [135] S. Hopfer, Y. Shani e D. Nir, "A Novel, Wideband, Lithium Niobate Electrooptic Modulator," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, N^o. 1, pp. 73-83, 1998.
- [136] J.L. Jackel, C.E. Rice e J.J. Veselka, "Proton Exchange for High-Index Waveguides in LiNbO₃," *Appl. Phys. Lett.*, vol. 41, N^o. 7, pp. 607-608, 1982.
- [137] X.F. Cao, R.V. Ramaswamy e R. Srivastava, "Characterization of Annealed Proton Exchanged LiNbO₃ Waveguides for Nonlinear Frequency Conversion," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 10, pp. 1302-1313, 1992.
- [138] K.M. Kissa, P.G. Suchoski e D.K. Lewis, "Accelerated Aging of Annealed Proton-Exchanged Waveguides," *Journal of Lightwave Technology*, vol, 13, pp. 1521-1529, 1995.
- [139] M.M. Howerton, W.K. Burns, P.R. Skeath e A.S. Greenblatt, "Dependence of Refraction Index on Hydrogen Concentration in Proton Exchanged LiNbO₃," *IEEE Journal of Quantum Electronics*, vol. 27, N^o. 3, pp. 593-601, 1991.
- [140] S.T. Vohra, A.R. Michelson e S.E. Asher, "Diffusion Characteristics and Waveguiding Properties of Proton-Exchanged and Annealed LiNbO₃ Channel Waveguides," *Journal of Applied Physics*, vol. 66, N^o. 11, pp. 5161-5173, 1989.
- [141] J.M. Cabrera, J. Olivares, M. Carrascosa, J. Rams, R. Müller e E. Dieguez, "Hydrogen in Lithium Niobate," *Advances in Physics*, vol. 45, N^o. 5, pp. 349-392, 1996.
- [142] J. Nikolopoulos e G.L. Yip, "Accurate Modeling of the Index Profile in Annealed Proton-Exchanged LiNbO₃ Waveguides," *SPIE*, vol, 1583, Integrated Optical Circuits, pp. 71-82, 1991.
- [143] M.L. Bortz e M.M. Fejer, "Annealed Proton-Exchanged LiNbO₃ Waveguides," *Opt. Lett.*, vol. 16, N^o. 23, pp. 1844-1846, 1991.

- [144] G.R. Paz-Pujalt, D.D. Tuschel, G. Braunstein, T. Blanton, S.T. Lee e L.M. Salter, "Characterization of Proton Exchange Lithium Niobate Waveguides," *Journal of Applied Physics*, vol. 76, N^o. 7, pp. 3981-3987, 1994.
- [145] H. Ahlfeldt, "Nonlinear Optical Properties of Proton-Exchanged Waveguides in Z-Cut LiTaO₃," *Journal of Applied Physics*, vol. 76, N^o. 6, pp. 3255-3260, 1994.
- [146] W. Hou, W. Hua, Y. Zhang e H. Tan, "Possible Mechanism for Increase of Extraordinary Refractive Index in Proton-Exchanged LiNbO₃ Waveguides," *Electronics Letters*, vol. 27, N^o. 9, pp. 755, 1991.
- [147] T. Veng e T. Skettrup, "Ion Exchange Model for α -Phase Proton Exchange Waveguides in LiNbO₃," *Journal of Lightwave Technology*, vol. 16, pp. 646-649, 1998.
- [148] D.F. Clark, A.C.G. Nutt, K.K. Wong, P.J.R. Laybourn e R.M. De La Rue, "Characterization of Proton-Exchange Slab Optical Waveguides in Z-Cut LiNbO₃," *Journal of Applied Physics*, vol. 54, N^o. 11, pp. 6218-6220, 1983.

ERRATA

- 1) Na página 72, onde se lê: “Parâmetros normalizados para a constante de propagação (B) e para a frequência de operação (ν) serão utilizados.”, substituir por: “Serão utilizados os parâmetros normalizados (B) e (ν) para a constante de propagação e frequência de operação, respectivamente.”
- 2) Na página 77, onde se lê: “Na região próxima à frequência de corte, os valores são consideravelmente diferentes. Entretanto, os resultados obtidos neste trabalho, para a região de corte, estão em bom acordo com os apresentados em [21] (VM), que utiliza também uma malha refinada na região de interesse.”, substituir por: “Na região próxima à frequência de corte, os valores são diferentes. Entretanto, os resultados obtidos neste trabalho, para a região de corte, estão próximos aos apresentados em [21] (VM), que utiliza também uma malha refinada na região de interesse. Os desvios entre os índices de efetivos calculados neste trabalho e os obtidos pelas formulações vetoriais são menores que 0,5 %.”
- 3) Na página 90, na legenda da Tabela 8, onde se lê: “Coeficientes da lei de Arrhenius para guias Ti:LiNbO_3 .” substituir por: “Coeficientes da lei de Arrhenius para guias Ti:LiNbO_3 com corte x_c (plano transversal definido pelos eixos cristalinos principais x_c - z_c) e propagação no eixo cristalino principal y_c .”
- 4) Na página 110, onde se lê: “Em geral, dois modos linearmente polarizados são possíveis para uma dada direção de polarização em um cristal.” substituir por: “Em geral, dois modos linearmente polarizados são possíveis para uma dada direção de propagação em um cristal.”
- 5) Nas páginas 110-111, onde se lê: “A existência de um modo de polarização “ordinário” e de um “extraordinário”, com diferentes índices de refração, é chamado birrefringência” substituir por : “Quando $n_x = n_y = n_z$, o material é isotrópico e a Eq. (321) representa uma esfera. Um caso especial ocorre quando dois eixos cristalinos principais possuem o mesmo valor de índice de refração n_o (índice de refração ordinário) e um eixo principal com índice de refração diferente n_e (índice de refração extraordinário). Se $n_o < n_e$ o cristal é chamado “positivo”, e se $n_o > n_e$, ele é “negativo”. Materiais, como o LiNbO_3 , que possuem esta propriedade e são denominados cristais uniaxiais.”
- 6) Na página 113, na legenda da Tabela 10, onde lê se: “As colunas assinaladas por (T) e (S) apresentam os valores de r_{ij} para campos moduladores de baixa e alta frequência, respectivamente.” substituir por: “As colunas assinaladas por (T) e (S) apresentam os valores de r_{ij} para campos moduladores de baixa e alta frequência, respectivamente. Baixa frequência corresponde ao intervalo que compreende desde ondas contínuas (frequência zero) até frequências de áudio. Frequência alta corresponde a valores bem acima da frequência fundamental da ressonância acústica do LiNbO_3 .”

- 7) Na página 117, na legenda da Fig. 57 acrescentar : “O domínio em estudo foi truncado em $200\text{ }\mu\text{m}$ x $200\text{ }\mu\text{m}$, o que equivale a considerar um substrato espesso (ilimitado), já que domínios maiores não apresentaram alterações significativas nos parâmetros elétricos (capacitância, impedância característica e índice efetivo) associados ao modo fundamental TEM.”