BRUNO AMADO RODRIGUES FILHO

**ESTUDO DA CONVERGÊNCIA NO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISPOSITIVOS
ELETROMAGNÉTICOS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia Elétrica.

São Paulo

2007

BRUNO AMADO RODRIGUES FILHO

**ESTUDO DA CONVERGÊNCIA NO MÉTODO DE
ELEMENTOS FINITOS APLICADO A DISPOSITIVOS
ELETROMAGNÉTICOS NÃO LINEARES**

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São Paulo
para a obtenção do título de Mestre em
Engenharia Elétrica.

Área de Concentração:
Engenharia Elétrica

Orientador: Profa. Doutora Viviane Cristine
Silva

São Paulo

2007

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de setembro de 2007.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Rodrigues Filho, Bruno Amado

Estudo da convergência no método de elementos finitos aplicados a dispositivos eletromagnéticos não lineares / B.A.

Rodrigues Filho. -- ed.rev. -- São Paulo, 2007.

153 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1. Cálculo numérico 2. Eletromagnetismo 3. Método dos elementos finitos 4. Interpolação (Análise numérica) I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas II. t.

AGRADECIMENTOS

Agradeço inicialmente ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPQ) pelo apoio financeiro durante o projeto.

A minha orientadora prof. Viviane Cristine Silva pelo apoio durante todas as fases de desenvolvimento deste trabalho e ao prof José Roberto Cardoso por me apresentar o Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado (LMAG) e pelo apoio e incentivo.

Aos profs Luiz Lebensztajn e Silvio Ikuyo Nabeta pelas diversas idéias e opiniões que contribuíram grandemente para o trabalho.

Aos amigos Mauricio Caldora Costa, Marcelo Fácio Palin, Cassiano Lobo Pires e Mauro Massayoshi Sakamoto pelos ensinamentos relativos a programação em linguagem C++ e importantes contribuições para o andamento deste trabalho.

Ao amigo Fábio Henrique Pereira pela contribuição com o método *wavelet-based multigrid*, que foi utilizado neste trabalho e proporcionou resultados interessantes.

Aos amigos Maurício Salles e Lucas Blattner Martinho e todos os demais membros do LMAG pelo constante apoio e incentivo.

Por fim, agradeço imensamente minha família pela compreensão e apoio.

"A matemática é a mais alta das ciências, o dom mais alto que os deuses deram aos homens. Ela é mais poesia que a própria poesia."

(Arquimedes)

RESUMO

Neste trabalho é estudada a convergência no método dos elementos finitos (MEF) quando da sua aplicação a dispositivos eletromagnéticos com características não lineares, ou seja, constituídos de materiais ferromagnéticos com curva de magnetização $B \times H$ que apresenta o fenômeno da saturação magnética.

O método de Newton-Raphson é o método numérico utilizado para a resolução do sistema de equações não linear gerado. São abordadas versões desse método que utilizam fator de relaxação, bem como técnicas para a otimização desse fator, com o intuito de acelerar a sua convergência, mostrando sua efetividade.

Aborda-se também a influência da escolha do modelo para a característica $B(H)$ dos materiais ferromagnéticos, tanto em termos de desempenho computacional quanto de precisão. Duas classes de modelos para a curva $v \times B^2$, bem como para sua derivada dv/dB^2 , são analisados, quais sejam: modelos analíticos e modelos interpoladores.

Dentre os modelos analíticos destacam-se os modelos de O'Connor, Marrocco e de Brauer (exponencial). Os modelos interpoladores utilizados foram de Akima e *Spline* cúbica.

Além do tratamento de materiais com características não lineares, também se realizou um breve estudo da aplicação de materiais do tipo ímã permanente e sua formulação pelo MEF.

Outro aspecto avaliado foi a influência de diferentes métodos de resolução do sistema linear de equações algébricas na convergência do método de Newton-Raphson, como o ICCG, BiCGStab, decomposição LU e *Wavelet-based Multigrid*. Os resultados obtidos mostraram a potencialidade desta última técnica em termos de ganho de desempenho global da solução.

ABSTRACT

This work presents a study on the convergence of non-linear finite analysis applied to the modeling of electromagnetic devices with plane symmetry. Three aspects have been thoroughly investigated which have influence on the convergence performance, namely: the relaxation factor in the Newton-Raphson algorithm, the model of the magnetization curve and the choice of the linear solver.

It is shown that convergence acceleration of the Newton-Raphson algorithm can be achieved with the use of a relaxation factor, along with numerical techniques for optimizing this factor, such as Line Search or the Brent method.

Several models for the magnetization curve, both analytical (O'Connor, Marrocco, Brauer) and interpolation-based (Akima and Cubic Splines), have been analysed and comparisons in terms of their computational efficiency, as well as accuracy, are presented in order to give some guidance to the choice of the model.

The influence of several linear solvers in the convergence of the Newton-Raphson algorithm has finally been investigated. The following linear solvers have been compared: LU decomposition , ICCG, BiCGStab and Wavelet-based Multigrid. The results show the superiority of the latter to improve the overall computational performance of the solution.

SUMÁRIO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABELAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1.	INTRODUÇÃO	18
1.1	Objetivos	19
1.2	Descrição do Problema.....	20
1.3	Estrutura do Trabalho	21
2.	ESTADO DA ARTE.....	23
2.1	Estado da arte do MEF	23
2.2	Estado da arte dos modelos de curvas de magnetização.....	24
2.3	Estado da arte da modelagem de ímãs permanentes.....	25
2.4	Estado da arte dos métodos numéricos não lineares.....	25
3.	MODELAGEM DA MAGNETOSTÁTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS....	27
3.1	Introdução	27
3.2	Equação diferencial de Poisson	28
3.3	Equações de Maxwell para a magnetostática	29
3.4	Princípio do método dos elementos finitos.....	31
3.4.1	Funções base contínuas	32
3.4.2	Método dos Resíduos Ponderados.....	32
3.5	Formulação do método dos elementos finitos para a magnetostática.....	33
3.5.1	Equação de Poisson para a magnetostática.....	33
3.5.2	Aplicação do método de Galerkin na magnetostática.....	35
3.6	Montagem do sistema local de equações.....	37
3.7	Montagem do sistema global de equações e condições de contorno	38
4.	MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES	42
4.1	Introdução	42
4.2	Métodos numéricos para sistemas não lineares	42
4.2.1	Método das aproximações sucessivas.....	43
4.2.2	Método de Newton-Raphson (N-R)	44
4.2.3	Fator de relaxação	48
4.2.3.1	Método de Newton-Raphson com sub-relaxação	50
4.2.3.2	Método de Newton-Raphson com sobre-relaxação	51
4.2.3.3	Método de Newton-Raphson utilizando busca linear	52
4.2.3.4	Método de Newton-Raphson utilizando aproximações quadráticas sucessivas	54

4.3	Métodos numéricos para resolução de sistemas lineares.....	56
4.3.1	Decomposição LU	57
4.3.2	Método dos gradientes conjugados	59
4.3.3	Wavelet-based multigrid	61
5.	MODELAGEM DA CURVA DE MAGNETIZAÇÃO	63
5.1	Introdução	63
5.2	Materiais ferromagnéticos	63
5.3	Modelos analíticos.....	66
5.3.1	Modelo exponencial	66
5.3.2	Modelo de Marrocco	67
5.3.3	Modelo analítico simples ou de O'Connor.....	69
5.4	Métodos de interpolação	70
5.4.1	Spline cúbica	71
5.4.2	Método de Akima.....	74
6.	MODELAGEM DE ÍMAS PERMANENTES NO MEF	77
6.1	Introdução	77
6.2	Campo coercitivo (H_c) e indução remanente (B_r).....	77
6.3	Principais tipos de ímãs	78
6.3.1	Terras-raras.....	78
6.3.2	Ferrites.....	79
6.3.3	Alnicos	79
6.4	Modelagem pelo MEF.....	79
7.	DETALHES DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL.....	82
7.1	Modelagem da curva de magnetização.....	82
7.1.1	A classe Magnetization Curve.....	83
7.1.2	As classes Interpolation e Analytic	84
7.2	Métodos de resolução de sistemas não lineares.....	84
7.3	Tratamento de ímãs permanentes	86
8.	RESULTADOS.....	88
8.1	Introdução	88
8.2	Modelagem do material ferromagnético.....	89
8.2.1	Aço carbono S45C	89
8.2.1.1	Modelo de O'Connor.....	91
8.2.1.2	Modelo de Marrocco	93
8.2.1.3	Modelo Exponencial.....	96
8.2.1.4	Spline cúbica	98
8.2.1.5	Akima.....	101
8.2.2	Aço carbono S1008	104

8.2.2.1	Modelo de O'Connor.....	106
8.2.2.2	Modelo de Marrocco	108
8.2.2.3	Modelo exponencial	111
8.2.2.4	Spline cúbica	113
8.2.2.5	Akima.....	115
8.3	Eletroímã	117
8.3.1	Descrição.....	117
8.3.2	Testes da modelagem B(H) e resultados numéricos.....	119
8.4	Núcleo ferromagnético	124
8.4.1	Características dimensionais	124
8.4.2	Testes da modelagem B(H) e resultados numéricos.....	126
8.5	Motor de relutância chaveado	131
8.5.1	Características construtivas e dimensionais	131
8.5.2	Resultados numéricos.....	133
8.6	Estudo do efeito do método de resolução do sistema linear no método de Newton-Raphson.....	137
8.7	Circuito magnético utilizando ímã permanente.....	140
8.7.1	Descrição.....	140
8.7.2	Resultados	141
8.7.2.1	Simulação com núcleo linear.....	142
8.7.2.2	Simulação com núcleo real.....	144
9.	CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS	147
	LISTA DE REFERÊNCIAS.....	151

LISTA DE FIGURAS

FIG. 1 GEOMETRIAS DOS PROBLEMAS PROPOSTOS PARA OS TESTES DE CONVERGÊNCIA UTILIZANDO O MEF. RESPECTIVAMENTE SÃO: (A) ELETROÍMÃ CLÁSSICO, (B) NÚCLEO FERROMAGNÉTICO, (C) MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO, E (D) CIRCUITO MAGNÉTICO CONTENDO ÍMÃ PERMANENTE.	21
FIG. 2 EXEMPLO DA DISCRETIZAÇÃO DE UM DOMÍNIO COMPLICADO EM DOMÍNIOS MAIS SIMPLES, DE FORMA A POSSIBILITAR A APLICAÇÃO DO MEF.	28
FIG. 3 LINHAS DE CAMPO MAGNÉTICO EM UM CABO CONDUTOR DE CORRENTE (A), E DA RELAÇÃO ENTRE CORRENTE E CAMPO MAGNÉTICO (B).	31
FIG. 4 ELEMENTO TRIANGULAR DE UMA DISCRETIZAÇÃO ONDE OS NÓS DO ELEMENTO ESTÃO NUMERADOS.	35
FIG. 5 EXEMPLO DE UM DOMÍNIO DISCRETIZADO EM QUATRO ELEMENTOS, ONDE SÃO MOSTRADOS AS NUMERAÇÕES LOCAIS E GLOBAIS DOS ELEMENTOS.	39
FIG. 6 TABELA DE CONECTIVIDADE RELATIVA À FIG. 5, ONDE SE PODE RELACIONAR A NUMERAÇÃO LOCAL E GLOBAL DOS NÓS DO ELEMENTO.	40
FIG. 7 FLUXOGRAMA DO MÉTODO DAS APROXIMAÇÕES SUCESSIVAS.	44
FIG. 8 FLUXOGRAMA DO PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON, SENDO α O FATOR DE RELAXAÇÃO, E IGUAL A UM PARA O MÉTODO TRADICIONAL.	48
FIG. 9 COMPARAÇÃO ENTRE OS MÉTODOS DE N-R SEM FATOR DE RELAXAÇÃO, E COM FATOR DE RELAXAÇÃO.	49
FIG. 10 DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DA VARIAÇÃO DO PARÂMETRO α DURANTE O PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON COM SUB-RELAXAÇÃO.	50
FIG. 11 DIAGRAMA ESQUEMÁTICO DA VARIAÇÃO DO PARÂMETRO α DURANTE O PROCESSO ITERATIVO DE NEWTON-RAPHSON COM SOBRE-RELAXAÇÃO.	51
FIG. 12 ILUSTRAÇÃO DO MÉTODO DE APROXIMAÇÃO LINEAR PARA UMA FUNÇÃO OBJETIVO W	53
FIG. 13 FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE BUSCA LINEAR PARA O CÁLCULO DO FATOR DE RELAXAÇÃO ÓTIMO PARA CADA ITERAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	54
FIG. 14 FIGURA ILUSTRATIVA EXIBINDO O PROCESSO DE MINIMIZAÇÃO POR AJUSTES DE FUNÇÕES QUADRÁTICAS SUCESSIVAS.	55
FIG. 15 FLUXOGRAMA DO PROCESSO DE APROXIMAÇÃO QUADRÁTICA SUCESSIVA PARA O CÁLCULO DO FATOR DE RELAXAÇÃO ÓTIMO EM CADA ITERAÇÃO DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	56
FIG. 16 FIGURA ILUSTRATIVA DE TRANSFORMADA WAVELET DISCRETA EM 3 NÍVEIS EM UM VETOR, ONDE O SÍMBOLO $\downarrow 2$ REPRESENTA A DECIMALIZAÇÃO PELO FATOR 2 (PEREIRA; VERARDI; NABETA, 2006).	62
FIG. 17 CORRENTES DE MAGNETIZAÇÃO, PROPOSTAS POR AMPÈRE, EM UM DADO MATERIAL MAGNÉTICO.	64
FIG. 18 DOMÍNIOS DE WEISS PARA UM MICRO CRISTAL E RELAÇÃO ENTRE B E H , NOTA-SE A ORIENTAÇÃO ALEATÓRIA DAS MAGNETIZAÇÕES EM (A), ONDE O CAMPO H É PRÓXIMO DE ZERO. EM (B) EXISTE UM PEQUENO CAMPO H E OS DOMÍNIOS PREFERENCIAIS SE ALINHAM FACILMENTE. EM (C) É NECESSÁRIO UM MAIOR CAMPO H PARA O ALINHAMENTO DOS DOMÍNIOS MAGNÉTICOS NÃO PREFERENCIAIS E FINALMENTE EM (D) TEM SE A SATURAÇÃO DO MATERIAL.	65
FIG. 19 MODELO EXPONENCIAL PARA A CURVA $v(B^2)$	67

FIG. 20 MODELO DE MARROCCO PARA A CURVA $\nu(B^2)$	68
FIG. 21 CURVA DE MAGNETIZAÇÃO $\nu(B^2)$ OBTIDA PELO MODELO DE O'CONNOR.	70
FIG. 22 COMPORTAMENTO DE UMA SPLINE CÚBICA A PARTIR DE UM CONJUNTO DE PONTOS (X, Y).	73
FIG. 23 CURVA DE DESMAGNETIZAÇÃO PARA UM ÍMÃ PERMANENTE LINEAR.	78
FIG. 24 DIAGRAMA DE CLASSES CORRESPONDENTES AOS MODELOS DE CURVA DE MAGNETIZAÇÃO PRESENTES NA LMAGLIB.	82
FIG. 25 PARÂMETROS E MÉTODOS PRESENTES NA CLASSE MAGNETIZATION CURVE.	83
FIG. 26 DIAGRAMA DE CLASSES UML CORRESPONDENTE ÀS CLASSES ANALYTIC E INTERPOLATION.	84
FIG. 27 DIAGRAMA DE CLASSES CORRESPONDENTES AOS PRINCIPAIS MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES PRESENTES NA LMAGLIB.	85
FIG. 28 DIAGRAMA UML REFERENTE À CLASSE NON LINEAR SOLVER, ONDE PODEM SER VISUALIZADOS OS ATRIBUTOS E MÉTODOS PRESENTES NESTA CLASSE.	85
FIG. 29 DIAGRAMA UML REFERENTE ÀS CLASSES RESPONSÁVEIS PELA PROPRIEDADE FÍSICA DOS MATERIAIS.	86
FIG. 30 DIAGRAMA UML REFERENTE ÀS CLASSES MATERIAL E PERMANET MAGNET.	86
FIG. 31 AJUSTE DO MODELO DE O'CONNOR PARA A CURVA $\nu(B^2)$ AOS PONTOS EXPERIMENTAIS PARA O AÇO S45C.	91
FIG. 32 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 31.	92
FIG. 33 CURVA $d\nu/DB^2(B^2)$ OBTIDA PARA O AÇO CARBONO S45C, UTILIZANDO O MODELO DE O'CONNOR.	92
FIG. 34 ERRO RELATIVO AOS DADOS EXPERIMENTAIS DA CURVA $\nu(B^2)$ OBTIDO COM O MODELO DE O'CONNOR. ..	93
FIG. 35 AJUSTE DO MODELO DE MARROCCO PARA A CURVA $\nu(B^2)$ AOS PONTOS EXPERIMENTAIS PARA O AÇO S45C.	94
FIG. 36 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 35.	94
FIG. 37 CURVA $d\nu/DB^2(B^2)$ OBTIDA PARA O AÇO CARBONO S45C, UTILIZANDO O MODELO DE MARROCCO.	95
FIG. 38 ERRO RELATIVO NA CURVA $\nu(B^2)$ OBTIDO COM O MODELO DE MARROCCO, COM RELAÇÃO AOS VALORES EXPERIMENTAIS.	95
FIG. 39 AJUSTE DO MODELO DE MARROCCO PARA A CURVA $\nu(B^2)$ AOS PONTOS EXPERIMENTAIS PARA O AÇO S45C.	96
FIG. 40 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 39.	97
FIG. 41 CURVA $d\nu/DB^2(B^2)$ OBTIDA PARA O AÇO CARBONO S45C, UTILIZANDO O MODELO DE EXPONENCIAL.	97
FIG. 42 ERRO RELATIVO OBTIDO PARA O MODELO EXPONENCIAL.	98
FIG. 43 AJUSTE DE SPLINE CÚBICA PARA AS CURVAS (A) $\nu(B^2)$, E (B) $d\nu/DB^2(B^2)$, AOS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S45C.	99
FIG. 44 AJUSTE DE SPLINE CÚBICA PARA A CURVA $\nu(B^2)$, SUBSTITUINDO-SE OS 17 PRIMEIROS PONTOS EXPERIMENTAIS DE B POR VALORES CALCULADOS PELA FÓRMULA EXPONENCIAL.	100
FIG. 45 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 44.	100
FIG. 46 CURVA $d\nu/DB^2(B^2)$ DERIVADA DA CURVA DA FIG. 45.	101

FIG. 47 AJUSTE DO MODELO DE AKIMA PARA AS CURVAS (A) $v(B^2)$ E (B) $Dv/DB^2(B^2)$ AOS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S45C.....	102
FIG. 48 AJUSTE DO MÉTODO DE AKIMA PARA A CURVA $v(B^2)$ COM OS PRIMEIROS 17 PONTOS EXPERIMENTAIS SUBSTITUÍDOS POR VALORES CALCULADOS PELA FÓRMULA EXPONENCIAL.	103
FIG. 49 AJUSTE DO MÉTODO DE AKIMA PARA A CURVA $v(B^2)$ COM OS PRIMEIROS 17 PONTOS EXPERIMENTAIS SUBSTITUÍDOS POR VALORES CALCULADOS PELA FÓRMULA EXPONENCIAL.	103
FIG. 50 DERIVADA DA CURVA $v(B^2)$ DA FIG. 49.	104
FIG. 51 AJUSTE DO MODELO DE O'CONNOR PARA A CURVA $v(B^2)$, AOS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S1008.	106
FIG. 52 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 51.	107
FIG. 53 DERIVADA DA CURVA DA FIG. 52.....	107
FIG. 54 ERRO RELATIVO AOS PONTOS EXPERIMENTAIS OBTIDO COM O MODELO DE O'CONNOR, PARA O AÇO CARBONO S1008.....	108
FIG. 55 AJUSTE DO MODELO DE MARROCCO PARA A CURVA $v(B^2)$, PARA OS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S1008.	109
FIG. 56 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 55.	109
FIG. 57 DERIVADA DA CURVA DA FIG. 56.....	110
FIG. 58 ERRO RELATIVO AOS VALORES EXPERIMENTAIS COM O MODELO DE MARROCCO, PARA O AÇO CARBONO S1008.	110
FIG. 59 AJUSTE DO MODELO EXPONENCIAL PARA A CURVA $v(B^2)$, PARA OS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S1008.	111
FIG. 60 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 59.	112
FIG. 61 DERIVADA DA CURVA DA FIG. 60.....	112
FIG. 62 ERRO RELATIVO AOS PONTOS EXPERIMENTAIS PARA O MODELO EXPONENCIAL, PARA O AÇO CARBONO S1008.	113
FIG. 63 AJUSTE DE SPLINE CÚBICA DA CURVA $v(B^2)$, PARA OS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S1008.	114
FIG. 64 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 63.	114
FIG. 65 CURVA OBTIDA PARA $Dv/DB^2(B^2)$, UTILIZANDO-SE SPLINE CÚBICA.	115
FIG. 66 AJUSTE DO MÉTODO DE AKIMA DE CURVA $v(B^2)$, COM OS PONTOS EXPERIMENTAIS DO AÇO S1008.....	116
FIG. 67 REGIÃO DE EXTRAPOLAÇÃO DA CURVA DA FIG. 66.	116
FIG. 68 DERIVADA DA CURVA DA FIG. 67.....	117
FIG. 69 DADOS DIMENSIONAIS DO ELETROÍMÃ (A) E REGIÕES UTILIZADAS NA SIMULAÇÃO (B) (VERDE – NÚCLEO FERROMAGNÉTICO; VERMELHO – BOBINA; BRANCO – VÁCUO).	118
FIG. 70 MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO ELETROÍMÃ.	119
FIG. 71 INDUÇÃO MAGNÉTICA NO ELETROÍMÃ COM $NI = 20.000A.E$	121
FIG. 72 EVOLUÇÃO DAS ITERAÇÕES DOS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON EM FUNÇÃO DA TOLERÂNCIA (A) E FATOR DE RELAXAÇÃO (B) NA SIMULAÇÃO DO ELETROÍMÃ.	123
FIG. 73 LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE B OBTIDAS COM $NI = 1000A.E$, COM O MODELO DE O'CONNOR DE CURVA DE MAGNETIZAÇÃO.....	124

FIG. 74 NÚCLEO FERROMAGNÉTICO (FUJIWARA; OKAMOTO; KAMEARI, 2005). (A) DADOS DIMENSIONAIS E (B) REGIÕES DE SIMULAÇÃO.	125
FIG. 75 MALHA DE ELEMENTOS FINITOS PARA O NÚCLEO FERROMAGNÉTICO COM ENTREFERRO.	126
FIG. 76 INDUÇÃO MAGNÉTICA PARA $NI = 800A.E$ NO NÚCLEO DA FIG. 74. NOTA-SE A GRANDE VARIAÇÃO DE RELUTIVIDADE MAGNÉTICA NA TRANSIÇÃO ENTRE O NÚCLEO E O ENTREFERRO.	128
FIG. 77 EVOLUÇÃO DAS ITERAÇÕES DOS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON EM FUNÇÃO DO FATOR DE RELAXAÇÃO (A) E DA TOLERÂNCIA (B) NA SIMULAÇÃO DO NÚCLEO FERROMAGNÉTICO COM ENTREFERRO COM $NI = 100A.E$ E MODELO DE MARROCCO.	129
FIG. 78 LINHAS EQUIPOTENCIAIS DE INDUÇÃO NO NÚCLEO FERROMAGNÉTICO COM ENTREFERRO ($NI = 100A.E$, MODELO DE MARROCCO).	130
FIG. 79 DADOS GEOMÉTRICOS DO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO.	131
FIG. 80 MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO.	133
FIG. 81 INDUÇÃO MAGNÉTICA NO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO PARA $NI = 368,1A.E$ COM SPLINE CÚBICA PARA MODELAGEM DA CURVA $v(B^2)$	135
FIG. 82 EVOLUÇÃO DAS ITERAÇÕES DOS MÉTODOS DE NEWTON-RAPHSON EM FUNÇÃO DO FATOR DE RELAXAÇÃO (A) E DA TOLERÂNCIA (B) NA SIMULAÇÃO DO NÚCLEO FERROMAGNÉTICO COM ENTREFERRO COM $NI = 100A.E$, UTILIZANDO SPLINE CÚBICA.	136
FIG. 83 LINHAS DE CAMPO NO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO, COM $NI = 368,1A.E$ E SPLINE CÚBICA PARA AJUSTE DA CURVA $v \times B^2$	137
FIG. 84 RESULTADOS OBTIDOS PARA CONVERGÊNCIA DOS MÉTODOS CG UTILIZANDO O WAVELET-BASED MULTIGRID COMO PRÉ-CONDICIONADOR, ICCG, BiCGSTAB, BiCGSTAB UTILIZANDO O WAVELET-BASED MULTIGRID COMO PRÉ-CONDICIONADOR E BiCGSTAB UTILIZANDO CHOLESKY COMO PRÉ CONDICIONADOR, PARA O PASSO 1 DO N-R.	140
FIG. 85 CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE DE PROFUNDIDADE 2CM.	141
FIG. 86 INDUÇÃO MAGNÉTICA NO CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE E COM NÚCLEO LINEAR.	142
FIG. 87 LINHAS DE CAMPO NO CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE.	143
FIG. 88 EVOLUÇÃO DAS ITERAÇÕES DO MÉTODO DE N-R. NO CASO DO CIRCUITO MAGNÉTICO DA FIG. 85.	144
FIG. 89 INDUÇÃO MAGNÉTICA NO CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE E NÚCLEO NÃO LINEAR.	145
FIG. 90 LINHAS DE CAMPO NOS ENTREFERROS 1, 2, 3 E 4 DO CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE..	146

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 CARACTERÍSTICAS DO PROCESSADOR E DO SISTEMA UTILIZADO PARA TODAS AS SIMULAÇÕES.	89
TABELA 2 PONTOS EXPERIMENTAIS DA CURVA DE MAGNETIZAÇÃO DO AÇO CARBONO S45C.	90
TABELA 3 PONTOS EXPERIMENTAIS CORRESPONDENTES À CURVA DE MAGNETIZAÇÃO PARA O AÇO S1008.	105
TABELA 4 CARACTERÍSTICAS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS GERADA PELO ALGORITMO DE DELAUNAY PARA A GEOMETRIA DA FIG. 69.	118
TABELA 5 CARACTERÍSTICAS DE DESEMPENHO DOS VÁRIOS MÉTODOS DE MODELAGEM DE CURVA DE MAGNETIZAÇÃO NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON CLÁSSICO.	120
TABELA 6 COMPARAÇÃO ENTRE AS VARIANTES DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON (NI = 1000A.E, UTILIZANDO MODELO DE O'CONNOR).	122
TABELA 7 CARACTERÍSTICAS DA MALHA GERADA PELO ALGORITMO DE DELAUNAY PARA A GEOMETRIA DA FIG. 74.	125
TABELA 8 RESULTADOS OBTIDOS VARIANDO-SE A CORRENTE E O MODELO DA CURVA DE MAGNETIZAÇÃO PARA O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	127
TABELA 9 COMPARAÇÃO ENTRE AS VARIANTES DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM NI = 100A.E E MODELO DE MARROCCO.	128
TABELA 10 DADOS DIMENSIONAIS DO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO.	132
TABELA 11 DADOS DA MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO MOTOR DE RELUTÂNCIA CHAVEADO.	132
TABELA 12 RESULTADOS OBTIDOS VARIANDO-SE A CORRENTE E O MODELO DA CURVA DE MAGNETIZAÇÃO PARA O MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	134
TABELA 13 COMPARAÇÃO ENTRE AS VARIANTES DO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON COM NI = 200A.E E MODELO DE MARROCCO.	136
TABELA 14 IMPACTO DA VARIAÇÃO DO MÉTODO DE RESOLUÇÃO DO SISTEMA LINEAR NO MÉTODO DE NEWTON-RAPHSON.	139
TABELA 15 DADOS DAS MALHA DE ELEMENTOS FINITOS DO CIRCUITO MAGNÉTICO COM ÍMÃ PERMANENTE.	142
TABELA 16 TABELA COMPARATIVA ENTRE OS RESULTADOS ANALÍTICO E NUMÉRICO DA INDUÇÃO MAGNÉTICA NOS ENTRE FERROS 1, 2, 3 E 4 DO CIRCUITO MAGNÉTICO DAS FIG. 85, UTILIZANDO-SE $\mu=10.000\mu_o$	143

LISTA DE SÍMBOLOS

<i>abreviação</i>	<i>variável</i>	<i>unidade (SI)</i>
$\vec{A}$	Potencial vetor magnético	[Wb/m]
$\vec{B}$	Indução magnética	[T]
B_r	Indução magnética remanente	[T]
$\vec{E}$	Campo elétrico	[V/m]
$\vec{H}$	Campo magnético	[A/m]
H_c	Campo magnético coercitivo	[A/m]
i	Corrente elétrica	[A]
$\vec{J}$	Densidade de corrente elétrica por unidade de área	[A/m ²]
$\vec{M}$	Magnetização: momento de dipolo magnético por unidade de volume	[A/m]
NI	Força magneto motriz	A.e
t	tempo	[s]
ε	Permissividade elétrica	[C ² /N.m ²]
ε_0	Permissividade elétrica do vácuo	[C ² /N.m ²]
μ	Permeabilidade magnética	[H/m]
μ_0	Permeabilidade magnética do vácuo	[H/m]
ν	Relutividade magnética	[m/H]

ρ	Densidade de carga por unidade de volume	[C/m ³]
--------	--	---------------------

Capítulo 1

1. INTRODUÇÃO

Equações diferenciais parciais (EDP) são usualmente empregadas em grande parte dos estudos relativos ao comportamento da natureza. Isso se deve ao caráter variacional das grandezas físicas relacionadas à grande parte dos problemas, como por exemplo o espaço, cuja variação com relação ao tempo é representada pela velocidade e sua segunda variação é dada pela aceleração. Todavia, a aplicação das EDP não é tão simples, devido à grande complexidade apresentada pelos domínios de aplicação.

O foco deste trabalho está nas equações de Maxwell para a magnetostática, cuja aplicação esbarra na dificuldade da aplicação direta. Assim, utiliza-se o método dos elementos finitos (MEF) como sendo uma poderosa ferramenta para resolução de EDP aplicadas a domínios complexos.

O princípio básico do método dos elementos finitos consiste em subdividir o domínio de estudo em elementos menores, e na aplicação direta das equações de Maxwell para a magnetostática em cada elemento da discretização. Dessa forma obtém-se uma solução aproximada para cada elemento, que pode ser melhorada conforme se aumenta a subdivisão do domínio.

Uma vez definido o método de resolução do problema (MEF), outra questão que surge está relacionada aos diferentes tipos de materiais, visto que as grandezas em estudo são o campo magnético e o potencial vetor magnético, além de grandezas derivadas. Diferentes materiais se comportam de maneiras distintas segundo a presença de campos e podem possuir características lineares ou não lineares. Cada tipo específico de material possui técnicas diferentes de abordagem e formulações específicas. No caso de materiais cuja magnetização apresenta caráter não linear é necessário conhecer a curva de magnetização do material e para materiais cuja característica de magnetização é linear, apenas a permeabilidade magnética deve ser conhecida.

A curva de magnetização do material é obtida de forma experimental, ou seja, o que se tem na verdade é um conjunto de pontos. Surge daí, então, a necessidade de se buscar técnicas de interpolação e ajuste de curvas adequadas.

1.1 Objetivos

O método dos elementos finitos começou ser empregado por volta de 1965 na área da engenharia mecânica (Martin; Carey, 1973) e mostrou-se uma poderosa ferramenta numérica para a resolução de EDP, tanto em domínios simples como em domínios complicados e expandiu-se para diversas áreas do conhecimento, devido à flexibilidade e formulação abrangente, consolidando-se assim no meio científico.

Apesar de ser um método abrangente e robusto, em problemas específicos que apresentam não linearidade, o método se depara com problemas de convergência da solução, em que se pode inclusive obter uma solução errada, ou simplesmente não convergência para o problema. Para tanto, diversas técnicas e ferramentas matemáticas foram desenvolvidas de forma a contornar esses problemas específicos.

A motivação do trabalho encontra-se na resolução de casos com não linearidade magnética, ou seja, onde o domínio de estudo apresente materiais com características ferromagnéticas não lineares (curva de magnetização não linear), visto que para esse caso específico existem vários casos de não convergência e oscilações numéricas e conseqüentemente, maiores tempos de processamento. O estudo desse caso específico apresenta grande importância, já que a grande maioria dos equipamentos eletromecânicos (máquinas elétricas, transformadores, etc), apresenta materiais em sua composição cuja característica é não linear.

Outra motivação do trabalho se encontra no fato de um grande número de equipamentos eletromecânicos também apresentarem materiais com magnetização residual em sua constituição, seja para redução de custo ou por outro motivo, o que também torna necessário um estudo mais detalhado dos materiais tipo ímãs permanentes.

São estudados, então, modelos de curva de magnetização, métodos numéricos para a resolução do sistema de equações obtido através do MEF e materiais do tipo ímãs permanentes.

Os modelos de curva de magnetização podem ser divididos em duas categorias, analíticos e de interpolação. Dentre os modelos analíticos destacam-se os modelos de O'Connor, exponencial e Marrocco, e dentre os de interpolação pode-se citar *spline* cúbica e Akima. Nos modelos analíticos são ajustados coeficientes tendo em vista os pontos experimentais e de forma a se obter a melhor aproximação possível. Assim as curvas são bem comportadas e contínuas, sendo esse um pré-requisito para uma convergência adequada. Os modelos de interpolação utilizam curvas analíticas para cada ponto de forma a se ter uma curva contemplando todos os pontos, porém pode conter descontinuidades, dificultando assim a convergência ou criando oscilações na solução.

Com relação à solução do sistema de equações, existem métodos específicos para sistemas não lineares, sendo os principais o método de Newton-Raphson e o método das aproximações sucessivas (Silvester; Ferrari, 1990), também conhecido como método do ponto fixo. Com relação ao método de Newton-Raphson, um fator importante está relacionado ao fator de relaxação, visto que esse influencia diretamente o tempo de processamento e a convergência do método, merecendo também um estudo aprofundado. Esses dois métodos também podem ser combinados de forma a minimizar o tempo de processamento e o número de iterações.

O objetivo do trabalho está em comparar os diferentes modelos de curvas de magnetização e determinar em qual condição um dado modelo tem vantagem sobre outro; aplicar os métodos de Newton-Raphson e aproximações sucessivas para cada curva de magnetização, além de um estudo sobre o fator de relaxação, e combinação entre os métodos; analisar o comportamento de ímãs permanentes em dispositivos elétricos que apresentam materiais não lineares em sua constituição.

1.2 Descrição do Problema

De forma a se comparar os modelos de magnetização estudados e métodos de resolução de sistemas não lineares foram utilizados quatro exemplos que retratam aplicações usuais da área de engenharia elétrica. O primeiro problema trata de um eletroímã clássico, onde em um núcleo ferromagnético tem-se uma bobina enrolada. O segundo problema trata de um núcleo ferromagnético com um entreferro e uma bobina enrolada ao seu redor. O terceiro problema trata de um motor de relutância chaveado com 6 pólos no rotor e 4 no estator. E o quarto problema refere-se a um circuito magnético contendo um ímã permanente.

Um esboço dos dispositivos propostos como exemplo pode ser visto na Fig. 1 .

Com relação ao motor de relutância chaveado, esse é tratado segundo a formulação magnetostática do método dos elementos finitos, não se levando em conta a rotação do rotor, visto que o objetivo do trabalho é o de estudar a convergência do MEF em casos magnetostáticos.

Fig. 1 Geometrias dos problemas propostos para os testes de convergência utilizando o MEF. Respectivamente são: (a) eletroímã clássico, (b) núcleo ferromagnético, (c) motor de relutância chaveado, e (d) circuito magnético contendo ímã permanente.

Verifica-se que o grau de complexidade das geometrias, assim como o número de regiões com densidade de corrente vai aumentando gradativamente para cada problema.

1.3 Estrutura do Trabalho

A organização dos tópicos deste trabalho foi organizada da seguinte forma:

O Capítulo 2 dá o estado da arte da magnetostática não linear, assim como uma revisão literária do que já foi proposto até então, além de métodos e técnicas desenvolvidas até o presente momento.

No Capítulo 3 é inicialmente dada uma descrição das equações de Maxwell para a magnetostática, apresentando a formulação matemática do método dos elementos finitos para a magnetostática, utilizando a formulação de Galerkin (Silvester; Ferrari, 1990).

No Capítulo 4 são descritos os métodos numéricos utilizados para a resolução do sistema de equações. Serão abordados os métodos lineares de decomposição de Gauss e *ICCG* (*Incomplet Cholesk Conjugate Gradient*) e os métodos de Newton-Raphson e aproximações sucessivas, ou ponto fixo, para os casos não lineares. Neste capítulo também são abordados o fator de relaxação e alguns métodos para a otimização deste fator de relaxação.

O aprofundamento sobre não linearidade e modelos de curvas de magnetização é estudado no Capítulo 5, onde primeiramente serão focados os modelos analíticos e em seguida os modelos de interpolação.

Uma breve introdução aos materiais que apresentam uma magnetização residual B_r é dada no Capítulo 6, assim como uma formulação para o tratamento desse tipo de material pelo método dos elementos finitos.

O Capítulo 7 trata da arquitetura de software utilizada e bibliotecas adicionais para cálculos e análise dos resultados.

No Capítulo 8 são dados detalhes dos problemas propostos e resultados das simulações realizadas, assim como comparação entre modelos de curvas de magnetização, e também a comparação entre os diferentes métodos numéricos, fator de relaxação e discussões.

Finalmente no Capítulo 9 são dadas as conclusões e considerações finais do trabalho.

Capítulo 2

2. ESTADO DA ARTE

2.1 Estado da arte do MEF

Desde que o homem começou a estudar e a entender a natureza o conceito básico do método dos elementos finitos, por ser amplo e geral, tem sido empregado. Esse conceito pode ser descrito como: traduzir um problema complexo em um problema simples. No caso do MEF, transformar uma geometria complexa para a aplicação direta das equações de Maxwell e um grande número de domínios simples, onde é possível se aplicar de forma direta as mesmas equações.

Um exemplo da aplicação do conceito do MEF na antiguidade é dado pelo cálculo do valor de π pelo engenheiro chinês Tsu Chung Chik, como estando entre 3,1415926 e 3,1415927 no ano de 480 AC. O método utilizado foi através do cálculo do volume de uma esfera, onde a esfera foi subdividida em inúmeros elementos tetraédricos (Martin; Carey, 1973).

Portanto o refinamento matemático começou a surgir por volta de 1940, onde dentro da engenharia aeronáutica começou a surgir o problema de se minimizar o peso das estruturas dos aviões e melhorar a resistência dos materiais. Nessa época já se obtinham matrizes como resultado dessa análise, porém a formulação ainda não era genérica e era aplicada apenas a problemas específicos.

Em 1967 as idéias de uma aplicação mais abrangente do MEF foram divulgadas através do trabalho de O.C. Zienkiewicz e Y. K. Cheung (Zienkiewicz; Cheung, 1967). Nesse trabalho substituiu-se o conceito físico pela matemática equivalente, ou seja, o problema passava a ser descrito matematicamente, e em todo problema que possuísse uma formulação variacional poderia ser aplicado o MEF. Dessa forma o MEF extrapolou as fronteiras da engenharia de estruturas e se expandiu para diversas áreas, dentre elas a engenharia elétrica.

Atualmente uma formulação muito utilizada, e que será abordada neste trabalho, é a formulação desenvolvida pelo engenheiro mecânico Boris Grigoryevich Galerkin, nascido em

Polotsk, Rússia em 1871, região atualmente pertencente à Bielorrússia (Silvester; Ferrari, 1990), e é conhecida como formulação de Galerkin. Esse método desenvolvido por Galerkin permite partir da equação diferencial do problema e chegar a um sistema matricial. Para cada elemento da discretização a equação diferencial do problema é substituída por um pequeno sistema matricial, que pode ser resolvido utilizando técnicas de álgebra linear.

2.2 Estado da arte dos modelos de curvas de magnetização

Dentro da formulação do MEF existem inúmeros métodos do tratamento da não linearidade, haja vista a grande aplicação de materiais ferromagnéticos com magnetização não linear em diversos casos de estudo.

A teoria de interpolação de um dado conjunto de pontos é muito antiga, como por exemplo a interpolação por polinômios de Lagrange, que viveu em meados do século XVIII (Ueberhuber, 1997). Assim, dentro do MEF os primeiros estudos feitos foram utilizando polinômios interpoladores. P. P. Silvester e R. L. Ferrari discutem a utilização de *splines* cúbicas interpolantes como um dos métodos precursores para a modelagem da curva de magnetização dentro do MEF (Silvester; Ferrari, 1990).

Em 1970 Hiroshi Akima, publicou um trabalho propondo um novo método para interpolação polinomial utilizando procedimentos locais, não sendo assim mais necessário o cálculo de determinantes, condição necessária para a utilização de *spline*.

Em 1974 foi proposto por John R. Brauer (Brauer, 1974) um modelo analítico específico para a curva de magnetização, e não mais polinômios genéricos. O modelo utiliza uma função exponencial para relacionar a relutividade magnética do material ao campo magnético. A grande vantagem desse modelo é a simplicidade da curva, sendo necessário o cálculo de apenas três constantes, e a facilidade de se obter a derivada, visto que a derivada de uma exponencial é a própria exponencial multiplicada por uma constante.

Porém em 1976, R. Glovinski e A. Marrocco publicam um trabalho sobre não linearidade tendo utilizado uma formulação diferente para a curva de magnetização. Nesse trabalho a curva agora depende de quatro constantes que são determinadas pelo método dos mínimos quadrados, utilizando os pontos experimentais.

Já em 1985 foi proposto um novo modelo analítico (Connor, Shelledy, Heim, 1985), conhecido como de O'Connor, cuja principal vantagem é a convergência para altos valores de corrente, ou seja, com material saturado. Atualmente esse modelo é utilizado inclusive em *softwares* comerciais, como é o exemplo do *software* de elementos finitos Flux (Flux2D, 2005)

2.3 Estado da arte da modelagem de ímãs permanentes

Com a crescente aplicação e utilização de ímãs permanentes na confecção de dispositivos elétricos surgiu a necessidade de uma formulação matemática adequada para tais materiais. Dessa forma, Binns em 1975 propôs uma formulação baseada no princípio variacional, porém restrita apenas a ímãs retangulares.

Essa limitação foi contornada em (Fouad; Nehl; Demerdash, 1981) onde também são levados em conta a geometrias diferenciadas, porém uma limitação apresentada por esse modelo é o não tratamento da não linearidade da curva de desmagnetização, presente em alguns ímãs permanentes.

Em 1984, Weiss apresenta uma formulação que trata também a anisotropia do material, e em 1989 Qishan apresenta um estudo onde é levada em conta a não linearidade da curva de desmagnetização do ímã.

Atualmente, são estudados aplicações de ímãs permanentes em motores elétricos e estudos sobre perdas, como em (Zhao; Wang, 2005).

A formulação do MEF para ímãs permanentes apresentada neste trabalho é a utilizada em (Bastos; Sadowski, 2003), e possui a vantagem de ser aplicável a geometrias diferenciadas, porém possui a limitação de tratar apenas ímãs permanentes lineares, ou seja, onde a indução magnética resultante varia linearmente com o campo magnético.

2.4 Estado da arte dos métodos numéricos não lineares

Para a resolução numérica do sistema de equações não lineares são dois os principais métodos estudados: Newton-Raphson e aproximações sucessivas, também conhecido como método do ponto fixo.

Do ponto de vista de convergência, o método das aproximações sucessivas não é tão estável e atualmente está obsoleto (Silvester; Ferrari, 1990). Com relação ao método de Newton-Raphson, inúmeros artifícios têm sido empregados de forma a acelerar sua convergência e diminuir o tempo de computação. Na última década foram publicados diversos trabalhos pelo pesquisador japonês K. Fujiwara, da universidade de Okayama, Japão. Dentre estes trabalhos se destacam a relevância dada ao fator de relaxação na aceleração do método de N-R (Nakata; Takahashi; Fujiwara; Okamoto, 1992). Em 1998 Lutz Jänicke e Arnulf Kost fazem um estudo detalhado sobre problemas de convergência para problemas não lineares utilizando também o método de Newton-Raphson. Atualmente foram publicados dois trabalhos tratando novamente o fator de relaxação, o primeiro tratando a otimização do fator de relaxação utilizando uma busca linear (Fujiwara; Okamoto; Kameari, 2005), e o outro utilizando um método conhecido como método de Brent para a obtenção do fator de relaxação ótimo (Koh; Ryu; Fujiwara, 2006), os quais são abordados neste trabalho.

Capítulo 3

3. MODELAGEM DA MAGNETOSTÁTICA PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

3.1 Introdução

O eletromagnetismo clássico é regido por um conjunto de quatro equações que em sua formulação permitem explicar a relação entre carga e campo elétrico, carga e corrente, campo magnético e corrente e o caráter não divergente dos campos magnéticos. Esse conjunto de equações foi formalizado matematicamente pelo físico inglês James Clerk Maxwell e publicados em sua obra, datada de 1873, composta de dois volumes, (Maxwell, 1873) vol 1 e vol 2.

Esse conjunto de equações pode ser aplicado para todo o eletromagnetismo clássico e rege todos os fenômenos de campos magnéticos e elétricos em termos de tempo e espaço, porém possui uma limitação: a dificuldade de aplicação direta em domínios complexos. Dessa forma o método dos elementos finitos surge como uma útil ferramenta numérica, cujo princípio consiste em dividir o domínio complexo em pequenos domínios simples, que permitam a aplicação direta das equações de Maxwell.

Dentro da formulação do MEF em duas dimensões é usual utilizar tipos predefinidos de elementos para discretizar o domínio de estudo, sendo os tipos mais comuns os elementos triangulares e quadriláteros. A discretização é um fator fundamental, visto que os elementos precisam ser pequenos o suficiente para minimizar o erro associado ao método.

Após a discretização do domínio, têm-se as coordenadas geométricas de cada nó associado a um dado elemento e, de posse desses resultados, monta-se uma matriz local para cada elemento cujos valores dependem apenas da posição geométrica de cada nó. A característica física de cada elemento, ou seja se o elemento da discretização está em uma região ferromagnética ou em vácuo, aparece na forma de um coeficiente multiplicando a matriz do elemento.

Após a montagem da matriz do elemento para todo o domínio, monta-se a matriz global que contém as matrizes de todos os elementos, e resolve-se o sistema de equações. Com o resultado obtido é possível obter grandezas como campo magnético, potencial vetor magnético, entre outras, para cada ponto do domínio e grandezas globais como força e torque.

Na Fig. 2 é mostrada a discretização de um eletroímã, onde cada triângulo corresponde a um elemento, e cada elemento está em uma região física determinada, sendo que um elemento não compartilha duas regiões.

Fig. 2 Exemplo da discretização de um domínio complicado em domínios mais simples, de forma a possibilitar a aplicação do MEF.

3.2 Equação diferencial de Poisson

O início da teoria das equações diferenciais tem início com Isaac Newton (1642-1727), e Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716), no século XVII, nos primórdios do cálculo

diferencial e integral.¹ Ince (1956 apud Boyce; DiPrima, 1977, p. 4) afirma em seu tratado sobre equações diferenciais ordinárias:

“O nosso ainda obscuro conhecimento sobre o nascimento e a infância da ciência das equações diferenciais se resume a uma data memorável, o décimo primeiro dia de novembro de 1675, quando Leibniz escreveu pela primeira vez a equação:”

$$\int y dy = \frac{1}{2}y^2, \quad (1)$$

E completa dando importância significativa ao feito da seguinte forma:

“... deste modo, não apenas resolvendo uma equação diferencial simples, o que representava em si mesmo um fato trivial, mas criando uma poderosa ferramenta, o sinal de integral, o que representou um ato de grande significação”.

Dessa forma surgiu essa poderosa ferramenta relacionando diferenciação e integração, e também a solução de vários problemas, visto que em ciência e engenharia uma grande gama de formulações envolve esse conceito.

Dentro desse estudo sobre magnetostática em duas dimensões, a equação diferencial que rege o fenômeno é a equação diferencial parcial de Poisson, e sua forma geral para duas variáveis é dada a seguir:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = f(x, y). \quad (2)$$

3.3 Equações de Maxwell para a magnetostática

Todo o eletromagnetismo clássico pode ser sumariado em um conjunto de quatro equações que descrevem o comportamento dos campos magnéticos e elétricos em função do tempo e do espaço. São elas as leis de Gauss, Faraday e Ampère, e também a divergência nula dos campos magnéticos. Esse conjunto de equações em sua forma mais geral representa todo o

¹ Ince, E. L., Ordinary differential equations, Longmans, Green, London, 1927; Dover, New York, 1956.

eletromagnetismo até o início do século passado. As equações de Maxwell em sua forma diferencial são dadas a seguir:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho \text{ (Lei de Gauss),} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \text{ (convergência de } B), \quad (4)$$

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \text{ (Lei de Faraday),} \quad (5)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \text{ (Lei de Ampère).} \quad (6)$$

Onde $\vec{B}$, $\vec{E}$, $\vec{J}$ e $\vec{H}$ são entidades vetoriais que representam respectivamente a indução magnética (densidade de fluxo magnético), o campo elétrico, densidade de corrente e campo magnético. O termo variante no tempo somado à densidade de corrente $\vec{J}$ na equação correspondente à Lei de Ampère corresponde a corrente de deslocamento e foi introduzido por Maxwell em sua formulação. O campo induzido $\vec{B}$ se relaciona ao campo $\vec{H}$ através da seguinte relação constitutiva:

$$\vec{B} = \frac{1}{\nu} \vec{H} = \mu \vec{H} \quad (7)$$

Onde ν corresponde ao relatividade magnética e μ a permeabilidade magnética do meio.

Na magnetostática são utilizadas apenas as equações que descrevem o comportamento dos campos magnéticos em regime não variável no tempo, ou seja, apenas as equações (4) e (6), e nessa última o termo dependente da variação do campo elétrico em função do tempo se anula.

Portanto, as equações que descrevem o comportamento dos campos magnéticos estáticos, e que serão utilizadas dentro do estudo realizado neste trabalho são as seguintes:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0, \quad (8)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J}. \quad (9)$$

A equação (8) refere-se ao fato das linhas de campo magnético não divergirem, ou seja, elas são fechadas. E a equação (9) relaciona o campo magnético com a densidade de corrente elétrica em uma determinada região.

A figura a seguir mostra cada uma das equações de Maxwell para a magnetostática. Na Fig. 3 (a) tem-se uma visualização das linhas de campo magnético em um cabo condutor de corrente, onde percebe-se que todas as linhas são fechadas, e em (b) a Lei de Ampère, onde uma densidade de corrente elétrica está relacionada ao campo magnético.

Fig. 3 Linhas de campo magnético em um cabo condutor de corrente (a), e da relação entre corrente e campo magnético (b).

De posse dessas equações, o passo seguinte é a formulação do método dos elementos finitos para a magnetostática.

3.4 Princípio do método dos elementos finitos

O método dos elementos finitos consiste basicamente em se subdividir o domínio de estudo em diversos subdomínios, ou seja, em elementos pequenos o bastante para que o erro associado a essa subdivisão seja o menor possível. Em cada elemento do domínio é aplicada uma função interpoladora, também conhecida como função base, ou função de forma, de

maneira a se ter uma solução em todo o elemento. A escolha dessa função de interpolação está intimamente relacionada ao erro do método e, portanto deve ser escolhida adequadamente.

3.4.1 Funções base contínuas

Seja a solução da equação diferencial em estudo dada por $\phi(x)$ em um domínio Ω onde a fronteira é dada por Γ . Portanto, tem-se que encontrar funções de aproximação ψ que satisfaçam as condições de contorno na fronteira do domínio Ω , ou seja:

$$\psi_{\Gamma} = \phi_{\Gamma} \quad (10)$$

Dessa forma a função aproximação é exata na fronteira do domínio de estudo Ω .

Introduz-se assim um conjunto de funções de interpolação N_m , onde $m = 0, 1, 2, \dots, M$, linearmente independentes de tal forma que a solução aproximada $\hat{\phi}$ seja a soma dessas funções.

$$\hat{\phi} = \psi_{\Gamma} + \sum_{m=1}^M a_m N_m \quad (11)$$

Onde as constantes a_m são coeficientes a serem ajustados de forma a se obter uma boa aproximação da função $\hat{\phi}$ e com a propriedade de que $\hat{\phi}_{\Gamma} = \phi_{\Gamma}, \forall a_m$ em Γ . A aproximação deve ser melhorada conforme se aumenta o parâmetro m , ou seja, aumentando-se o número de funções base.

Uma maneira de se escolher os coeficientes a_m é escolher alguns pontos do domínio e aplicar a condição de que $\hat{\phi} = \phi$ para esses pontos escolhidos. Assim obtém-se um sistema linear cujas incógnitas são os valores dos coeficientes a_m .

3.4.2 Método dos Resíduos Ponderados

O método dos resíduos ponderados constitui uma formulação mais geral do método dos elementos finitos comparado à utilização de funções base contínuas, onde é necessário escolher as funções de interpolação N_m convenientemente.

Nessa formulação utiliza-se a minimização do resíduo, definido por:

$$R_{\Omega} = \phi - \hat{\phi}. \quad (12)$$

Sendo o resíduo R_{Ω} função da posição dentro do domínio Ω .

Também se introduz a função W_l , $l = 1, 2, 3$, conhecida por função peso, ou ponderação, de tal forma que a minimização do resíduo R_{Ω} é dada por:

$$\iint_{\Omega} W_l R_{\Omega} d\Omega = 0. \quad (13)$$

Aplicando-se a minimização do resíduo para cada elemento $e=1, 2, \dots, E$, tem-se:

$$\sum_{e=1}^E \iint_{\Omega} W_l R_{\Omega^{(e)}} d\Omega^{(e)} = 0. \quad (14)$$

Utilizando-se como funções de ponderação as próprias funções de aproximação ou função base, N_l , tem-se o método de Galerkin.

3.5 Formulação do método dos elementos finitos para a magnetostática

3.5.1 Equação de Poisson para a magnetostática

A formulação utilizada neste trabalho é a do potencial vetor magnético que surge através de um artifício matemático a partir de (8), onde de uma identidade vetorial tem-se que o divergente do rotacional de um vetor é igual a zero, ou seja,

$$\nabla \cdot (\nabla \times \vec{A}) = 0. \quad (15)$$

Logo,

$$\vec{B} = (\nabla \times \vec{A}). \quad (16)$$

Dessa forma é introduzido o potencial vetor magnético $\vec{A}$ que assim como o campo induzido $\vec{B}$ está relacionado à densidade de corrente $\vec{J}$.

Para o caso bidimensional, ou seja, em problemas com simetria plana, tem-se que:

$$\vec{A} = A_z \vec{k} , \quad (17)$$

e

$$\vec{J} = J_z \vec{k} . \quad (18)$$

Assim, a partir deste momento o símbolo A corresponderá ao componente A_z do potencial vetor magnético e J corresponderá a componente J_z da densidade de corrente, a não ser que se referencie o contrário.

Substituindo (16) em (9), e considerando os meios isotrópicos, obtém-se:

$$\nabla \times (\nu \nabla \times \vec{A}) = \vec{J} . \quad (19)$$

Seja a seguinte identidade vetorial (Griffiths; 1989):

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{X}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{X}) - \nabla^2 \vec{X} . \quad (20)$$

E aplicando-se (20) em (19) tem-se:

$$\nabla (\nabla \cdot \nu \vec{A}) - \nabla^2 \nu \vec{A} = \vec{J} . \quad (21)$$

Aplicando-se a condição de calibre de Coloumb (Griffiths; 1989), em (21):

$$\nabla \cdot \vec{A} = 0 . \quad (22)$$

Também se pode concluir diretamente que para casos bi-dimensionais a equação (22) é satisfeita.

Tem-se então a seguinte equação diferencial:

$$\nabla (\nu \nabla A) = -J , \quad (23)$$

ou

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial A}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial A}{\partial y} + J = 0 . \quad (24)$$

3.5.2 Aplicação do método de Galerkin na magnetostática

Inicialmente é feita a discretização do domínio em elementos, que no caso bidimensional o mais simples é o triangular. Na Fig. 4 é dado um elemento triangular de uma discretização.

Fig. 4 Elemento triangular de uma discretização onde os nós do elemento estão numerados.

Como a formulação apresentada neste trabalho consiste apenas em casos bidimensionais o potencial vetor magnético $\vec{A}$ é representado apenas pela componente na direção z , ou seja, A_z . Assim, a partir deste momento o símbolo A corresponderá ao componente A_z do potencial vetor magnético, a não ser que se referencie o contrário.

É feito em seguida uma aproximação de primeira ordem para o valor do potencial vetor magnético para o elemento:

$$\tilde{A}(x, y) = a + bx + cy. \quad (25)$$

Onde x e y são as coordenadas geométricas dos nós do elemento triangular.

Substituindo a solução aproximada na equação de Poisson para a magnetostática, tem-se:

$$\frac{\partial}{\partial x} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} + J = R \neq 0. \quad (26)$$

Sendo R o resíduo da solução aproximada.

Aplicando-se a equação (25) para cada nó do elemento tem-se:

$$\begin{cases} A_1 = a + bx_1 + cy_1 \\ A_2 = a + bx_2 + cy_2 \\ A_3 = a + bx_3 + cy_3 \end{cases} \quad (27)$$

Em que A_1, A_2 , e A_3 são as soluções exatas da equação (25) nos nós 1, 2 e 3, respectivamente.

Resolvendo o sistema (27) em função das constantes a, b e c e simplificando, chega-se a:

$$\tilde{A}(x, y) = N_1(x, y)A_1 + N_2(x, y)A_2 + N_3(x, y)A_3 \quad (28)$$

Sendo:

$$N_k(x, y) = \frac{1}{2\Delta} [a_k + b_k x + c_k y], \quad k = 1, 2, 3, \quad (29)$$

Que é demonstrada função de forma do elemento triangular de ordem um. As constantes a_k, b_k e $c_k, k = 1, 2, 3$, são dadas por:

$$\begin{cases} a_1 = x_2 y_3 - x_3 y_2; b_1 = y_2 - y_3; c_1 = x_3 - x_2, \\ a_2 = x_3 y_1 - x_1 y_3; b_2 = y_3 - y_1; c_2 = x_1 - x_3, \\ a_3 = x_1 y_2 - x_2 y_1; b_3 = y_1 - y_2; c_3 = x_2 - x_1. \end{cases} \quad (30)$$

A área do elemento triangular Δ é dada por:

$$\Delta = \frac{1}{2} (b_2 c_1 - b_1 c_2). \quad (31)$$

De posse das funções de forma $N_k(x, y)$, o passo seguinte é aplicar o método dos resíduos ponderados à equação (26).

Substituindo (26) em (13), para cada elemento e tem-se:

$$\iint_{\Omega^e} W_l \left[\nabla \cdot \nabla \tilde{A} + J \right] d\Omega^e = 0. \quad (32)$$

Nesse ponto é necessário escolher as funções peso W_l , de forma a se prosseguir com o desenvolvimento matemático. Assim usa-se o método de Galerkin (Silvester; Ferrari, 1990), o qual diz que a melhor escolha para as funções peso são as próprias funções de forma:

$$W_l = N_l. \quad (33)$$

Portanto, aplicando (33) em (32) tem-se:

$$\iint_{\Omega^e} N_l \nabla \cdot \nabla \tilde{A} d\Omega^e = - \iint_{\Omega^e} N_l J d\Omega^e. \quad (34)$$

Para facilitar o cálculo da integral do lado esquerdo em (34) utiliza-se o teorema de Green, de forma a diminuir a ordem de derivação.

$$\iiint_{\Omega} u \nabla^2 v d\Omega = \iint_{\Gamma} u (\nabla v) \cdot \vec{n} d\Gamma - \iiint_{\Omega} (\nabla u) \cdot (\nabla v) d\Omega \quad (35)$$

Portanto, aplicando (35) em (34):

$$\iint_{\Omega^e} (\nabla N_l)^T (\nabla \tilde{A}) d\Omega^e = \iint_{\Gamma} N_l (\nabla \tilde{A} \cdot \vec{n}) d\Gamma + \iint_{\Omega^e} N_l J d\Omega^e. \quad (36)$$

O símbolo T dado em (36) corresponde a operação matemática de transposição de uma matriz.

O gradiente na direção normal é dado por:

$$\nabla \tilde{A} \cdot \vec{n} = \left(\frac{\partial \tilde{A}}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \tilde{A}}{\partial y} \vec{j} \right) \cdot \vec{n} = \frac{\partial \tilde{A}}{\partial n}. \quad (37)$$

Finalmente substituindo (37) em (36):

$$\iint_{\Omega^e} (\nabla N_l)^T (\nabla \tilde{A}) d\Omega^e = \iint_{\Gamma} N_l \left(\nu \frac{\partial \tilde{A}}{\partial n} \right) d\Gamma + \iint_{\Omega^e} N_l J d\Omega^e. \quad (38)$$

A equação (38) é chamada de forma fraca do problema e é aplicada a cada elemento da discretização. O termo à esquerda é conhecido como matriz de rigidez do elemento, o primeiro termo a direita dá as condições de contorno do elemento, e o segundo termo a esquerda é responsável por fontes externas.

3.6 Montagem do sistema local de equações

Para resolver as integrais da equação (38) é preciso primeiramente calcular os termos $\nabla \tilde{A}$ e ∇N_l . Portanto, calculando-se o gradiente de (28) e (29), obtém-se:

$$\nu \nabla \tilde{A} = \frac{\nu}{2\Delta} \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} A_k, \quad (39)$$

e

$$\nabla N_l = \frac{1}{2\Delta} \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix}. \quad (40)$$

Substituindo (39) e (40) em (38), o termo à esquerda resulta:

$$\iint_{\Omega^e} \frac{\nu}{2\Delta} [b_k, c_k] \sum_{k=1}^3 \begin{bmatrix} b_k \\ c_k \end{bmatrix} A_k d\Omega^e = \frac{\nu}{4\Delta} [b_k, c_k] \left\{ \begin{bmatrix} b_1 \\ c_1 \end{bmatrix} A_1 + \begin{bmatrix} b_2 \\ c_2 \end{bmatrix} A_2 + \begin{bmatrix} b_3 \\ c_3 \end{bmatrix} A_3 \right\}. \quad (41)$$

Em notação matricial pode-se escrever:

$$\frac{\nu}{4\Delta} \begin{pmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix}. \quad (42)$$

O primeiro termo à direita de (38) se anula admitindo-se condição de *Neumann* homogênea. Supondo uma discretização fina o suficiente, a densidade de corrente J pode ser considerada constante dentro do elemento, e portanto o segundo termo da esquerda de (38) torna-se:

$$\frac{\Delta}{3} J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (43)$$

Assim, têm-se as seguintes matrizes e vetores elementares:

$$\frac{\nu}{4\Delta} \begin{pmatrix} b_1 b_1 + c_1 c_1 & b_1 b_2 + c_1 c_2 & b_1 b_3 + c_1 c_3 \\ b_2 b_1 + c_2 c_1 & b_2 b_2 + c_2 c_2 & b_2 b_3 + c_2 c_3 \\ b_3 b_1 + c_3 c_1 & b_3 b_2 + c_3 c_2 & b_3 b_3 + c_3 c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{pmatrix} = \frac{\Delta}{3} J \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (44)$$

3.7 Montagem do sistema global de equações e condições de contorno

De posse das matrizes locais de todos os elementos do domínio, o objetivo agora é montar a matriz global contendo todos os sistemas locais e resolver o sistema global. De forma a

organizar a montagem do sistema global, introduz-se uma tabela de conectividade para organizar em nível global todos os nós do sistema.

Cada elemento possui uma coordenada local para cada nó, que no caso do triângulo vale 1, 2 ou 3, tomando-se o sentido anti-horário como referência para a sequência dos vértices. Porém na montagem do sistema global, cada nó de um dado elemento possui uma numeração global que varia de 1 até M , onde M é o número total de nós dos elementos.

A Fig. 5 mostra um exemplo onde se pode distinguir a numeração local e global de cada elemento. Portanto, a partir dessa numeração organizada em uma tabela de conectividade monta-se o sistema de equações globais.

Fig. 5 Exemplo de um domínio discretizado em quatro elementos, onde são mostrados as numerações locais e globais dos elementos.

A tabela de conectividade correspondente à Fig. 5 é dada a seguir na Fig. 6.

Em que a característica ν , para elementos em regiões de material ferromagnético, tem comportamento não linear, ou seja, depender da própria solução, tornando o sistema (46) não linear, o que exige técnicas iterativas de solução.

Capítulo 4

4. MÉTODOS DE RESOLUÇÃO DE SISTEMAS LINEARES E NÃO LINEARES

4.1 Introdução

De forma a resolver o sistema de equações dado pelo sistema matricial (45), obtido através da formulação do método dos elementos finitos para um dado problema, é necessário utilizar métodos numéricos, visto que o sistema pode atingir centenas de milhares de equações, tornando impossível sua resolução de maneira manual. Além disso, a propriedade ν dos materiais ferromagnéticos, em (45) não é constante, o que conduz a um sistema de equações não linear, exigindo um método iterativo de solução.

Um sistema de equações pode ser linear ou não linear, sendo que existem métodos distintos para ambos os casos. Métodos de resolução de sistemas de equações lineares estão fora do escopo deste trabalho, e será dada apenas uma breve descrição de dois deles decomposição LU e método dos gradientes conjugados.

Com relação aos métodos para a resolução de sistemas não lineares será dado um maior aprofundamento. São dois os principais: método das aproximações sucessivas e método de Newton-Raphson. Também será dada ênfase ao fator de relaxação presente nos método de sobre-relaxação e sub-relaxação, dada sua importância para a convergência e aceleração do método.

4.2 Métodos numéricos para sistemas não lineares

Dentro da formulação do método dos elementos finitos cada elemento precisa de uma característica física, resumida pela permeabilidade magnética do meio. Esse fator relativo à característica do material é utilizado na montagem da matriz local para cada elemento, como visto na equação (42). Para grande parte dos materiais a permeabilidade permanece constante em função do campo $\vec{B}$, porém em determinados materiais ditos ferromagnéticos a

permeabilidade magnética deixa de ser constante, variando com relação a $\vec{B}$. Portanto seria necessário conhecer o valor de $\vec{B}$ e se determinar a permeabilidade $\mu(B)$ antes de se obter a solução do sistema. Faz-se necessário então um processo iterativo e sistemas desse tipo são tidos como não lineares, visto que A é função de μ e μ é função de B .

4.2.1 Método das aproximações sucessivas

Um dos processos iterativos para a resolução de sistemas tais que $A(\mu(B))$ é o método das aproximações sucessivas, também conhecido como método do ponto fixo. Contudo já é considerado obsoleto no contexto do método dos elementos finitos, porém é útil em outras áreas devido a sua simplicidade, e quando o método de Newton-Raphson encontra difícil formulação.

O processo iterativo proposto é muito simples e inicialmente se supõe um valor qualquer para o vetor solução x . Geralmente faz-se o vetor solução nula no passo inicial:

$$x_0 = 0. \quad (47)$$

Em seguida utiliza-se uma aproximação x_0 para x e se obtém uma solução aproximada x_k . O sistema global $[S]$ é obtido utilizando-se x_k , e tem-se assim um processo iterativo. O processo é repetido n vezes até se obter a convergência desejada.

O critério de convergência utilizado corresponde a norma euclidiana de x_{k+1} , e é dado em (48).

$$\varepsilon = \frac{\|x_k - x_{k+1}\|}{\|x_{k+1}\|}. \quad (48)$$

Um fluxograma do método das aproximações sucessivas é dado na Fig. 7.

Fig. 7 Fluxograma do método das aproximações sucessivas.

A grande desvantagem desse método é o fato de convergir lentamente e consumir muito de tempo de processamento.

4.2.2 Método de Newton-Raphson (N-R)

O método de Newton-Raphson apresenta grande vantagem quando comparado ao método das aproximações sucessivas, visto que é consideravelmente mais estável além, de convergir mais rapidamente. Outra grande vantagem apresentada por este método é o fato teórico de possuir convergência quadrática próximo à solução.

A formulação do método consiste em se obter o resíduo do sistema $[S].[A] = [b]$ dado por:

$$R = S.A - I . \quad (49)$$

Em seguida expande-se (49) em série de Taylor em torno da origem, e truncando para elementos de ordem maior do que um tem-se:

$$R(A_{k+1}) = R(A_k) + \frac{\partial R(A_k)}{\partial A} . \Delta A_k . \quad (50)$$

Sendo:

$$\Delta A_k = A_{k+1} - A_k , \quad (51)$$

e

$$P(A_k) = \frac{\partial R(A_k)}{\partial A} . \quad (52)$$

$P(A_k)$ é a matriz jacobiano do sistema a ser determinada em cada passo de iteração.

Supondo-se que no passo $k+1$ o resíduo se anule:

$$R(A_k) + P(A_k) . \Delta A_k = 0 . \quad (53)$$

Reordenando os termos em (53):

$$P(A_k) . \Delta A_k = -R(A_k) . \quad (54)$$

Onde:

$$R(A_k) = S(A_k) - I . \quad (55)$$

Modifica-se então o termo genérico da matriz S de forma que:

$$S_{ij} = \nu S'_{ij} . \quad (56)$$

Em que ν é o inverso da permeabilidade magnética do meio, ou relutividade magnética do material. Dessa forma o resíduo para um elemento qualquer é dada a por:

$$R_j = \sum_{k=1}^3 \nu S'_{jk} A_k - I_j . \quad (57)$$

Então, o termo genérico do jacobiano $P(A_k)$:

$$P_{ij} = \frac{\partial R_i}{\partial A_j} = S_{ij} + \sum_{k=1}^3 S_{ik} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial B^2} \frac{\partial B^2}{\partial A_j} A_k . \quad (58)$$

Desenvolvendo a equação (16), tem-se:

$$\vec{B} = \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \vec{j} . \quad (59)$$

Elevando-se a relação (59) ao quadrado, chega-se a:

$$|\vec{B}|^2 = \left| \frac{\partial \vec{A}}{\partial y} \right|^2 \vec{i} + \left| -\frac{\partial \vec{A}}{\partial x} \right|^2 \vec{j} . \quad (60)$$

Utilizando as relações (28) e (29), resulta:

$$B^2 = \frac{1}{2\Delta} \sum_{k=1}^3 c_k A_k + \frac{1}{2\Delta} \sum_{l=1}^3 b_l A_l , \quad (61)$$

ou

$$B^2 = \frac{1}{2\Delta} \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 \nu S_{kl} A_k . \quad (62)$$

Derivando-se a equação (62) com relação a A , tem-se:

$$\frac{\partial B^2}{\partial A_j} = \frac{2}{\Delta} \sum_{k=1}^3 S_{jk} A_k . \quad (63)$$

E substituindo (63) em (58), chega-se ao termo genérico do jacobiano $P(A)$:

$$P_{ij} = S_{ij} + \sum_{k=1}^3 \sum_{l=1}^3 S_{ik} S_{jk} \cdot \frac{\partial \nu}{\partial B^2} A_k A_l . \quad (64)$$

Dessa forma tem-se um processo iterativo tal que:

$$A_{k+1} = A_k + \alpha \Delta A_k . \quad (65)$$

Sendo α denominado fator de relaxação do método e tem a propriedade de facilitar e acelerar a convergência. Para o caso tradicional, utiliza-se $\alpha = 1$. Uma abordagem mais aprofundada sobre o fator de relaxação será dada nas seções seguintes.

O valor de ΔA_k é calculado a partir do sistema linear obtido da equação (54) utilizando-se o jacobiano calculado em (64). Então para cada iteração do método de Newton-Raphson é necessário o cálculo de um sistema linear de equações.

O critério de parada utilizado é o mesmo aplicado ao método das aproximações sucessivas, e é dado em (66).

$$\varepsilon = \frac{\|A_{k+1} - A_k\|}{\|A_{k+1}\|} . \quad (66)$$

Um fluxograma do método de Newton-Raphson é mostrado na Fig. 8.

Fig. 8 Fluxograma do processo iterativo de Newton-Raphson, sendo α o fator de relaxação, e igual a um para o método tradicional.

4.2.3 Fator de relaxação

O fator de relaxação dado pela equação (65) apresenta suma importância dentro do processo de convergência do método de Newton-Raphson. O fator α apresenta a característica de acelerar o processo de convergência e até permitir a convergência em casos de divergência. O

processo iterativo de Newton-Raphson pode ser simplificado como dado uma curva γ , busca-se no passo x_{k+1} alcançar de maneira mais eficiente possível o ponto x_{sol} , dado na Fig. 9.

Fig. 9 Comparação entre os métodos de N-R sem fator de relaxação, e com fator de relaxação.

A Fig. 9 mostra explicitamente a diferença entre o método de Newton-Raphson convencional e aquele utilizando o fator de relaxação α . Verifica-se que para alcançar uma mesma precisão com relação à solução exata x_{sol} da curva $f(x) = \gamma$, são necessárias duas iterações do método tradicional e apenas uma iteração utilizando o mesmo método com fator de relaxação. Neste exemplo α é maior do que a unidade, então se diz que o método é de sobre-relaxação. Se α for menor do que um diz-se que o método é sub-relaxação.

Entretanto, uma dificuldade comum encontrada é sumariada na seguinte pergunta: como encontrar o fator de relaxação ideal de forma que método convirja o mais rápido possível?

A resposta para esta pergunta é muito variada, tendo em vista que a melhor escolha para o fator de relaxação α ainda é objeto de estudos recentes em artigos acadêmicos, e permanece uma questão em aberto.

4.2.3.1 Método de Newton-Raphson com sub-relaxação

Tradicionalmente é usual atribuir um valor inicial ao fator de relaxação e à medida que o erro decresce, varia-se o parâmetro α através de operadores condicionais. O método de sub-relaxação, como dito anteriormente, utiliza valores de α menores do que um.

O modo mais usual de aplicação do método de sub-relaxação em um problema não linear é atribuir um valor inicial ao fator de relaxação e condicioná-lo ao erro do método. Um exemplo da variação do fator de relaxação é ilustrado na Fig. 10.

Fig. 10 Diagrama esquemático da variação do parâmetro α durante o processo iterativo de Newton-Raphson com sub-relaxação.

Verifica-se que o valor de α está condicionado ao erro da solução alcançada para cada iteração, em que o critério de parada adotado é $\varepsilon = 10^{-3}$. Essa forma de se utilizar o fator de

relaxação é a mais comum, porém não é eficiente para todos os problemas, sendo que em alguns casos, o número de iterações, e conseqüentemente o tempo associado aumenta.

4.2.3.2 Método de Newton-Raphson com sobre-relaxação

Da mesma maneira apresentada na seção anterior, o método com sobre relaxação também é usualmente aplicado de forma que o fator de relaxação está condicionado ao erro associado ao método. Um fluxograma equivalente ao utilizado para o método sub-relaxação é dado na Fig. 11.

Fig. 11 Diagrama esquemático da variação do parâmetro α durante o processo iterativo de Newton-Raphson com sobre-relaxação.

A utilização deste método nem sempre garante a convergência mais rápida. Isso se deve ao fato de que em uma dada iteração, o fator de relaxação ótimo seria um valor menor do que a unidade, exigindo assim mais iterações, caso nesse momento α seja maior do que um.

Alguns métodos recentes, no entanto, vêm mostrando bons resultados e um ganho significativo no número de iterações e no tempo de processamento. Isso se deve ao ajuste de α a cada iteração. Dentre eles estão os métodos de busca linear por minimização dos resíduos e a aproximação residual usando funções quadráticas sucessivas.

4.2.3.3 Método de Newton-Raphson utilizando busca linear

O método de busca linear (Fujiwara; Okamoto; Kameari, 2005) vem mostrando grandes resultados quando comparado aos métodos tradicionais e àqueles com sobre e sub-relaxação. A idéia básica para se obter o fator de relaxação consiste no cálculo de α ótimo a cada iteração do método de Newton-Raphson.

Verifica-se que existe uma relação entre o fator de relaxação α e a norma do resíduo R ao quadrado, dado pela equação (49), de forma que o melhor valor de α seria o que acarretaria na menor norma do resíduo. Dessa forma é necessário então ajustar uma função objetivo W a esta relação e determinar o mínimo de W .

A busca linear consiste em se ajustar uma reta à derivada da função objetivo. Dessa forma, em casos em que a relação entre norma do resíduo e fator de relaxação é quadrática a obtenção do mínimo é exata, e nos casos em que essa relação não ser exatamente quadrática este ajuste obtém uma boa precisão. Assim, dada a aproximação:

$$\frac{\partial W^{(k+1)}}{\partial \alpha^k} = f(\alpha) = a\alpha + b. \quad (67)$$

O mínimo da função $f(\alpha)$ é dado por:

$$\alpha_{\min} = -\frac{b}{a}. \quad (68)$$

O cálculo da norma do resíduo em função de α , cuja forma geral é dado pela equação(49), para cada iteração é dado por:

$$\|R\|_{(k+1)}^2 = (\|I\| - \alpha_k \|S.A_k\|)^2. \quad (69)$$

A Fig. 12 a seguir correspondente ao método de busca linear para otimização do fator de relaxação.

Fig. 12 Ilustração do método de aproximação linear para uma função objetivo W .

Nela verifica-se a aproximação linear para a derivada da função objetivo W , em que α_{aprox}^k é a aproximação obtida para o mínimo de W e α_{opt}^k é o valor ótimo para o mínimo.

Uma outra vantagem associada à aproximação linear se deve ao fato de para se obter a reta referente à derivada de W são necessários apenas dois pontos, o que torna o método eficiente do ponto de vista de tempo de processamento.

Um fluxograma correspondente ao processo do cálculo do fator de relaxação α utilizando a busca linear por minimização da norma do resíduo é mostrado na Fig. 13.

Fig. 13 Fluxograma do processo de busca linear para o cálculo do fator de relaxação ótimo para cada iteração do método de Newton-Raphson.

4.2.3.4 Método de Newton-Raphson utilizando aproximações quadráticas sucessivas

O método de aproximações quadráticas sucessivas (Koh; Ryu; Fujiwara, 2006) tem o mesmo objetivo que o método da busca linear, porém proporciona melhores resultados quando a dependência $\alpha \times \|R\|^2$ não é quadrática. Este método utiliza o algoritmo de Brent (1975) de forma a se obter o mínimo da função $\alpha \times \|R\|^2$. Dessa forma, evita-se o cálculo de derivadas e diminui-se assim o tempo de processamento.

A idéia básica consiste em calcular três pontos da curva Γ tal que $\Gamma = \alpha \times \|R\|^2$ tendo-se assim um conjunto $\left\{ \left(\alpha_1, \|R\|_1^2 \right), \left(\alpha_2, \|R\|_2^2 \right), \left(\alpha_3, \|R\|_3^2 \right) \right\}$ e ajustar uma parábola do tipo $f(\alpha) = a\alpha^2 + b\alpha + c$ a estes pontos. Determina-se então o mínimo dessa parábola $\left(\alpha_4, \|R\|_4^2 \right)$. O passo seguinte consiste em comparar, dentre todos os quatro conjuntos de pontos obtidos o maior resíduo e descartá-lo. Tem-se novamente um conjunto de três pontos e novamente é ajustada uma parábola. Esse processo iterativo estende-se até se obter a norma

do resíduo ao quadrado igual a zero ou menor do que um determinado valor previamente estipulado.

A Fig. 14 mostra o processo de aproximações por parábolas até o mínimo da função Γ ser obtido. O fluxograma correspondente ao método é apresentado na Fig. 15.

Fig. 14 Figura ilustrativa exibindo o processo de minimização por ajustes de funções quadráticas sucessivas.

Fig. 15 Fluxograma do processo de aproximação quadrática sucessiva para o cálculo do fator de relaxação ótimo em cada iteração do método de Newton-Raphson.

4.3 Métodos numéricos para resolução de sistemas lineares

Os métodos numéricos para resolução de sistemas lineares podem ser subdivididos em basicamente dois tipos: diretos e indiretos, ou iterativos.

Os métodos diretos são aqueles que, a partir de um número conhecido de passos, pode-se obter a solução exata sem erros de arredondamento (Sperandio; Mendes; Silva, 2003), porém o custo computacional pode ser determinado previamente, conhecendo-se o número de passos e o tamanho do sistema envolvido. Dentre os métodos diretos estão a eliminação de Gauss, decomposição LU , regra de Cramer, entre outros.

Para os métodos iterativos, não é possível de se determinar exatamente o número de iterações e possuem um erro associado, o qual determina a convergência do método ou não. Entretanto

possuem a vantagem de terem um custo computacional menos elevado e são em geral mais rápidos do que os métodos diretos, pois pode-se explorar a esparsidade das matrizes, característica essa presente nas matrizes geradas pelo sistema (45). Dentre os métodos iterativos estão gradientes conjugados (*CG*), o *ICCG* (*incomplete Cholesky conjugate gradient*), gradientes bi-conjugado (*Bi-CG*), e gradientes bi-conjugado estável (*Bi-CGStab*) (Saad, 2000).

4.3.1 Decomposição LU

O método de decomposição LU é um método direto e consiste em decompor a matriz A do sistema linear $A.x = b$ de forma que se possa obter um pivotamento direto. Dessa forma, dado um sistema linear de equações do seguinte tipo:

$$A.x = b . \quad (70)$$

Sendo A uma matriz $n \times n$, x o vetor de incógnitas de dimensão n e b um vetor de dimensão n .

O método de decomposição LU consiste em decompor a matriz A em duas matrizes, uma triangular inferior, $L_{n \times n}$, e outra superior $U_{n \times n}$, de forma que:

$$A = LU . \quad (71)$$

Assim:

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} \\ l_{1,0} & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n,0} & l_{n,1} & \cdots & u_{n,n} \end{pmatrix} . \quad (72)$$

Onde:

$$u_{k,j} = a_{k,j} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{k,p} u_{p,j}, j = k, k+1, \dots, n, \quad (73)$$

$$l_{i,j} = \frac{a_{i,k} - \sum_{p=1}^{k-1} l_{i,p} u_{p,k}}{u_{k,k}}, i = k+1, k+2, \dots, n. \quad (74)$$

Essa forma de se obter os coeficientes é denominada método de Doolittle (Sperandio; Mendes; Silva, 2003).

A matriz L é triangular inferior e a matriz U triangular superior. Portanto na forma explícita tem-se:

$$\begin{pmatrix} a_{0,0} & a_{0,1} & \cdots & a_{0,n} \\ a_{1,0} & a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,0} & a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{1,0} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n,0} & l_{n,1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} \\ & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{n,n} \end{pmatrix}. \quad (75)$$

Substituindo (71) em (70), tem-se:

$$(LU)x = b. \quad (76)$$

E fazendo:

$$U.x = y. \quad (77)$$

Tem-se:

$$L.y = b. \quad (78)$$

De forma explícita tem-se:

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ l_{1,0} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n,0} & l_{n,1} & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}, \quad (79)$$

e

$$\begin{pmatrix} u_{0,0} & u_{0,1} & \cdots & u_{0,n} \\ & u_{1,1} & \cdots & u_{1,n} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & u_{n,n} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_0 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}. \quad (80)$$

Fazendo o pivotamento direto em (79) e reverso em (80), obtém-se de maneira direta os valores y_i e x_i :

$$y_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k} y_k}{l_{i,j}}, i = 1, \dots, n, \quad (81)$$

e

$$x_i = \frac{y_i - \sum_{k=i+1}^n u_{i,k} x_k}{u_{i,j}}, i = n, n-1, \dots, 1. \quad (82)$$

4.3.2 Método dos gradientes conjugados

Diferentemente da decomposição LU , o método dos gradientes conjugados (CG) é um método iterativo que possui convergência em até n iterações (Saad, 2000), onde n é o número de equações do sistema. Dessa forma, no pior caso, o CG converge no mesmo número de iterações que os métodos diretos, sendo, portanto um método de convergência mais rápida. Porém, uma desvantagem está relacionada ao erro associado, visto que é um método iterativo.

O princípio básico do método dos gradientes está no fato de ser um método de otimização, onde o mínimo a ser determinado é a solução do sistema de equações lineares.

O sistema a ser resolvido é dado a seguir:

$$A.x = b. \quad (83)$$

O passo inicial do CG é dado por $k = 0$, sendo r_k um vetor residual dado em função de uma solução arbitrária x_k .

$$r_k = b - A.x_k \quad (84)$$

O passo seguinte consiste no cálculo do vetor solução x_{k+1} .

$$x_{k+1} = x_k + \alpha.r_k \quad (85)$$

Sendo α um escalar a ser determinado.

A partir desse ponto introduz-se a função erro $f(x_k)$, que deve ser minimizada a cada iteração. O vetor erro é dado por $(x_k - x)$, em que x é a solução exata do sistema de equações lineares. Sendo assim, $f(x_k)$ é dado por:

$$f(x_k) = (x_k - x)^T \cdot A \cdot (x_k - x). \quad (86)$$

De forma que a cada iteração x_k se aproxima da solução, e o módulo do vetor erro $(x_k - x)$ diminui a cada iteração.

Além disso x_k depende do parâmetro escalar α . A função dada por (86) tende a ter um mínimo, e α deve ser determinado minimizando-se $f(x_k + \alpha \cdot r_k)$ com relação a α . Dessa forma:

$$\alpha = \frac{r_k^T \cdot r_k}{r_k^T \cdot A \cdot r_k}. \quad (87)$$

Portanto chega-se à iteração seguinte e tem-se x_{k+1} .

Para as iterações seguintes, ou seja, $k > 0$, introduz-se o vetor passo p_k , de forma que r_k e p_k são ortogonais, p_k e p_{k+1} são mutuamente conjugados em relação à matriz A , ou seja:

$$p_{k+1}^T \cdot A \cdot p_k = A \cdot p_k \cdot p_{k+1}^T. \quad (88)$$

O vetor p_k que dá o passo de convergência é dado por:

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta \cdot p_k. \quad (89)$$

Onde β é um escalar determinado através da ortogonalidade ente r_k e p_k . Portanto β é dado por:

$$\beta = \frac{-r_{k+1}^T \cdot A \cdot p_k}{p_k^T \cdot A \cdot p_k} = \frac{-r_{k+1}^T \cdot A \cdot r_k}{p_k^T \cdot A \cdot p_k} = \frac{-r_{k+1}^T \cdot r_k}{r_k^T \cdot r_k}. \quad (90)$$

Assim a equação (85) toma a seguinte forma:

$$x_{k+1} = x_k + \alpha \cdot p_k. \quad (91)$$

Portanto a equação (87) para o cálculo de α deve ser modificada levando-se em conta p_k . Logo:

$$\alpha = \frac{p_k^T \cdot r_k}{p_k^T \cdot A \cdot r_k}. \quad (92)$$

A seguinte relação para o cálculo de α é válida:

$$\alpha = \frac{p_{k+1}^T \cdot r_k}{p_k^T \cdot A \cdot r_k} = \frac{r_k^T \cdot r_k}{p_k^T \cdot A \cdot p_k} = \frac{r_k^T \cdot r_k}{p_k^T \cdot A \cdot p_k} . \quad (93)$$

O cálculo do vetor residual r_k é feito modificando-se a equação (84), e dado por:

$$r_{k+1} = b - A \cdot x_k = b - A \cdot x_k - \alpha \cdot A \cdot p_k , \quad (94)$$

ou

$$r_{k+1} = r_k - \alpha \cdot A \cdot p_k . \quad (95)$$

Porém a convergência do método depende do fato da matriz ser bem condicionada ou não, fato este que está ligado a pequenas variações na matriz A , ou no vetor b causarem grandes erros no vetor solução. De forma a melhorar o condicionamento da matriz, utilizam-se pré-condicionadores, ou seja, métodos que transformam a matriz A em uma matriz equivalente A' , melhor condicionada, e que produza a mesma solução de A .

Existem diversos métodos de pré-condicionamento, dentre os quais se destacam a fatorização incompleta de Cholesky e o pré-condicionamento por decomposição LU . Uma referência mais aprofundada sobre métodos de pré-condicionamento é dada em Saad (2000).

4.3.3 Wavelet-based multigrid

Esta seção tem por objetivo apenas retratar os principais aspectos qualitativos do método numérico sem aprofundamento matemático, pois foge do escopo deste trabalho, e também por se tratar de um método recente, ainda em desenvolvimento. Maiores detalhes com relação ao método pode ser obtido em (Pereira; Verardi; Nabeta, 2006).

O método numérico *wavelet-based multigrid* consiste em uma poderosa ferramenta numérica para a resolução de sistemas de equações. O princípio básico do método é a aplicação de transformadas do tipo *wavelet* em uma dada matriz S , tal que $S \cdot x = b$ tornando-a em uma matriz S' tal que o sistema possua a mesma solução.

O princípio básico do método consiste em aplicar transformadas do tipo *wavelet* em uma dada matriz S , tal que:

$$S.x = b, \quad (96)$$

produzindo uma matriz S' da forma que.

$$S'.x = b, \quad (97)$$

seja resolvido em um menor tempo de processamento e com menos consumo de memória.

Um equivalente do método *wavelet-based multigrid*, pode-se dizer, consiste na aplicação de filtros na compactação de imagens.

A aplicação de filtros na matriz S se dá de duas formas: filtros passa baixa, que consiste em filtros que eliminam os componentes da matriz S que produzem oscilação de frequência baixa no erro do sistema (96) (erros estes que não prejudicam a convergência do método), e filtros passa alta, que eliminam as componentes de alta frequência, que produzem oscilações que prejudicam a convergência de (96)

A Fig. 16 ilustra a aplicação dos filtros passa alta (H) e passa baixa (G) para um dado vetor.

Fig. 16 Figura ilustrativa de transformada *wavelet* discreta em 3 níveis em um vetor, onde o símbolo $\downarrow 2$ representa a decimação pelo fator 2 (Pereira; Verardi; Nabeta, 2006).

Capítulo 5

5. MODELAGEM DA CURVA DE MAGNETIZAÇÃO

5.1 Introdução

Para modelagem da curva de magnetização existem diversos métodos que tratam da não linearidade, sendo a principal diferença entre os métodos o caráter analítico ou de interpolação. Neste capítulo serão estudados tanto métodos analíticos como de interpolação. Dentro da família dos métodos analíticos estudados está o método de O'Connor, o modelo exponencial e método de Marrocco. Entre os métodos de interpolação os principais estudados aqui são os métodos de Akima e *spline* cúbica interpoladora. Os modelos utilizados permitem que a curva $B \times H$ seja representada por uma função $f(B) = H$, e também $f(B^2) = H/B$ visto que essa função é necessária dentro da formulação do método de Newton-Raphson para o tratamento da não linearidade.

5.2 Materiais ferromagnéticos

A primeira tentativa de explicar porque determinados tipos de materiais apresentariam estranhamente um campo magnético constante foi dada por Ampère (Nussenzveig, 2001), sugerindo que esse fenômeno estivesse ligado a existência de correntes microscópicas, assim dessa forma, esse campo surgiria a partir de um somatório de micro correntes de magnetização, da mesma maneira que o campo magnético surge através de uma corrente elétrica em um fio condutor.

Portanto para um material que já possua uma magnetização inicial $\vec{M}$, o campo resultante será o somatório do campo produzido por correntes externas $\vec{j}$ mais o campo intrínseco do material.

$$\vec{B} = \mu_0 \vec{H} + \vec{M} \quad (98)$$

Onde μ_0 é a permeabilidade magnética do vácuo e $\vec{M}$ é o vetor magnetização do material.

A figura Fig. 17 mostra como o somatório de micro correntes produziria um campo global $\vec{B}$ constante.

Fig. 17 Correntes de magnetização, propostas por Ampère, em um dado material magnético.

Os materiais que apresentam uma característica linear, ou seja, a relação entre o campo $\vec{B}$ e o campo $\vec{H}$ seja uma reta são de dois tipos, diamagnéticos e paramagnéticos. Os materiais que não possuem essa característica linear são chamados de não lineares e são do tipo ferromagnéticos.

Com relação aos materiais ferromagnéticos, para se entender qualitativamente a não linearidade da relação entre campo $\vec{B}$ e o campo $\vec{H}$, é necessário um ponto de vista microscópico da composição do material.

Uma amostra macroscópica de um pedaço de ferro é composta de inúmeros micro cristais cuja estrutura é cúbica, e com uma orientação aleatória. A anisotropia natural do cristal sugere que existam regiões preferenciais de orientação de $\vec{M}$. Em 1907, Pierre Weiss (Nussenzveig, 2001) postulou a existência de domínios, onde os *spins* estão todos alinhados, gerando assim uma pequena região de fácil magnetização, saturando $\vec{M}$. O tamanho típico desses domínios

seria da ordem de aproximadamente 10^{-6} a 10^{-2}cm^3 . Um micro cristal seria formado de vários domínios alinhados em diversas direções aleatórias, como mostra a Fig. 18.

Fig. 18 Domínios de Weiss para um micro cristal e relação entre B e H, nota-se a orientação aleatória das magnetizações em (a), onde o campo H é próximo de zero. Em (b) existe um pequeno campo H e os domínios preferenciais se alinham facilmente. Em (c) é necessário um maior campo H para o alinhamento dos domínios magnéticos não preferenciais e finalmente em (d) tem-se a saturação do material.

Em uma amostra cristalina inicialmente desmagnetizada, os micro cristais estão alinhados aleatoriamente. Aplicando-se um campo magnético externo H as regiões de fácil magnetização com aproximadamente a mesma orientação de H são favorecidas, levando a um aumento de domínios nessa direção, assim a susceptibilidade inicial é grande.

Para valores mais elevados de H defeitos de vários tipos na estrutura cristalina, como tensões internas, impurezas, etc., funcionam como barreiras para o alinhamento dos domínios em

direções não preferenciais, assim a susceptibilidade cresce mais lentamente, levando a saturação do material. Portanto para um pequeno aumento de B é necessário um crescimento considerável de H . A partir desse ponto, o alinhamento passa ser irreversível e começa a haver dissipação de energia na forma de atritos internos ao material, originando um efeito histerético da curva, efeito este visível aplicando-se um campo variável H gerado por corrente alternada.

5.3 Modelos analíticos

Dentro dos métodos analíticos para a modelagem da curva de magnetização se encontram os métodos que possuem uma fórmula matemática específica, de forma a modelar a não linearidade da curva $B(H)$ mais adequadamente possível, ou seja, aproximar a curva o máximo possível dos dados experimentais. Portanto a curva não satisfaz os pontos experimentais, apenas aproxima uma expressão analítica aos dados. Dentro dessa fórmula já especificada o trabalho consiste em calcular as constantes de forma que o erro do ajuste seja o menor possível. Uma característica muito importante desse tipo de modelo se deve ao fato da continuidade da função ajustada e a continuidade de sua derivada, fato este imprescindível para a convergência do sistema.

5.3.1 Modelo exponencial

O modelo exponencial de interpolação foi proposto por Brauer em 1974, o qual buscava um modelo simples para o tratamento da curva de relutividade em função do campo magnético ao quadrado, $\nu(B^2)$, e propôs utilizar uma curva do tipo exponencial em que é necessário determinar-se três constantes, k_1 , k_2 e k_3 .

$$\nu(B^2) = k_1 e^{k_2 B^2} + k_3 \quad (99)$$

A derivada da equação (99) pode ser obtida facilmente:

$$\frac{d\nu(B^2)}{dB^2} = k_1 k_2 e^{k_2 B^2}. \quad (100)$$

A vantagem desse modelo se deve ao fato da formulação simplificada da curva exponencial, e também da derivada, além da continuidade de ambas. Na Fig. 19 pode se visualizar uma curva do tipo modelo exponencial.

Fig. 19 Modelo exponencial para a curva $\nu(B^2)$.

O ajuste das constantes pode ser feito de várias formas, sendo uma delas pelo método dos mínimos quadrados. Como se trata de uma equação não linear, é feita uma aproximação não linear para o método dos mínimos quadrados.

Brauer propõe em seu trabalho (Brauer, 1974) um ajuste das constantes utilizando três pontos da curva, e resolvendo o sistema linear, segundo seu trabalho um bom ajuste seria utilizar um ponto próximo da origem, um no “joelho” da curva e um terceiro na região de saturação.

5.3.2 Modelo de Marrocco

Em 1976 R. Glowinski e A. Marrocco apresentam um trabalho onde, no tratamento da não linearidade do problema, foi introduzida a seguinte equação para a curva de magnetização:

$$\nu(B^2) = \varepsilon + (c - \varepsilon) \frac{(B^2)^\alpha}{(B^2)^\alpha + T}. \quad (101)$$

Onde ε , c , α e T são constantes a serem determinadas. Nesse mesmo trabalho o autor propõe o método dos mínimos quadrados para o cálculo das constantes da equação.

Na Fig. 20 tem-se uma curva do tipo $\nu(B^2)$ utilizando-se (101), onde os valores para as constantes são os mesmos utilizados no trabalho original onde foi proposto o modelo.

Fig. 20 Modelo de Marrocco para a curva $\nu(B^2)$.

A derivada da curva também pode ser obtida diretamente através de (101):

$$\frac{d\nu(B^2)}{dB^2} = (c - \varepsilon) \left(\frac{\alpha B^{2(\alpha-1)} T}{(B^{2\alpha} + T)^2} \right). \quad (102)$$

O modelo de Marrocco apresenta a vantagem de a função ser contínua, derivável e monotônica, assegurando uma convergência quadrática para o método de Newton-Raphson, porém possui a desvantagem de não convergir para valores elevados de H (Labbe; 1996).

5.3.3 Modelo analítico simples ou de O'Connor

Esse modelo foi introduzido em 1985 por D. J. O'Connor, F. B. Shelledy e D. E. Heim em um trabalho sobre modelagem matemática de uma cabeça de leitura magnetoresistiva para um *driver* de fita. O modelo originalmente contempla a curva de magnetização $B \times H$, porém a função proposta possui a propriedade de ser inversível, ou seja, pode ser colocada na forma que permite o cálculo da curva $\nu(B^2)$, como segue:

$$B(H) = \mu_0 H + J_s \frac{H_g + 1 - \sqrt{(1 + H_g)^2 - 4H_g(1 - \alpha)}}{2(1 - \alpha)}. \quad (103)$$

Em que:

$$H_g = (\mu_{r0} - 1) \frac{\mu_0 H}{J_s}. \quad (104)$$

Sendo que a constante μ_{r0} determina a inclinação da curva quando próxima do zero, J_s é o campo de saturação do material e α determina a abertura do “joelho” da curva.

Dessa forma, invertendo-se a equação (103), pode-se obter $H(B)$, como dado a seguir:

$$H(B) = \frac{\sqrt{n^2 - 4 \left[4\mu_0 \frac{(1 - \alpha)(\mu_{r0} - \alpha)}{J_s^2} \right] \left\{ 4(1 - \alpha) \frac{B}{J_s} \left[\frac{(1 - \alpha)B}{J_s} - 1 \right] \right\}} - n}{8\mu_0^2 \frac{(1 - \alpha)(\mu_{r0} - \alpha)}{J_s^2}}, \quad (105)$$

$$n = \frac{4\mu_0(1 - \alpha)}{J_s} \left[\frac{2B(\alpha - 1)}{J_s} - \frac{2B(\mu_{r0} - 1)}{J_s} + \mu_{r0} \right]. \quad (106)$$

E finalmente a curva $d\nu/dB^2$ pode ser obtida a partir da definição de ν , da seguinte forma:

$$\frac{d\nu(B^2)}{dB^2} = \frac{\frac{dH}{dB^2} B - \frac{1}{2B} H}{B^2} \quad (107)$$

A Fig. 21 dá uma visão geral do formato de uma curva do modelo analítico para a curva de magnetização de um dado material.

Fig. 21 Curva de magnetização $\nu(B^2)$ obtida pelo modelo de O'Connor.

A curva do modelo de O'Connor é bem comportada e contínua, assim como sua derivada e sua inversa. Por ser uma modelagem que se ajusta bem mesmo para valores elevados de H , é muito utilizada, como, por exemplo, no *software* comercial *Flux* (Flux2D, 2005) que utiliza esse modelo no tratamento da não linearidade de materiais. Porém, uma desvantagem que apresenta esse modelo é o grande número de operações elementares realizadas para se obter o valor da curva em um determinado ponto.

5.4 Métodos de interpolação

Os modelos de interpolação para a aproximação tanto da curva de magnetização como da curva de relutividade não possuem uma fórmula única para toda a curva. Como são de interpolação o objetivo desse tipo de modelo é obter uma curva que passe por todos os pontos do domínio. Para tanto, utiliza-se uma função diferente para cada par de pontos (x, y) . O ajuste dessas funções, porém, requer um maior tempo computacional, dado o maior número de operações e em alguns casos apresentam problemas de continuidade, tanto na curva quando em sua derivada, sendo essa uma grande dificuldade para a convergência do método. Apesar dessa dificuldade, dois métodos bastante utilizados merecem ser citados, pois

contornam essas dificuldades: a interpolação por *spline* cúbica e o método de interpolação de Akima.

5.4.1 *Spline* cúbica

As *splines* cúbicas são amplamente utilizadas para a interpolação de conjuntos de dados por possuírem um comportamento sem oscilações, fato este presente na interpolação com polinômios de grau elevado, além de apresentar continuidade tanto na primeira como na segunda derivada.

Esse tipo de interpolação vem sendo usado há muitos anos, porém uma formulação matemática detalhada surgiu apenas no final da década de sessenta (Sperandio; Mendes; Silva, 2003).

Dada uma *spline* cúbica S definida em $[a, b]$, $0 \leq i \leq n$, onde S' e S'' são sua primeira e segunda derivadas, S deve-se satisfazer as seguintes condições:

$$(i) \quad S(x_i) = y_i, \quad 0 \leq i \leq n; \quad (108)$$

$$(ii) \quad S(x), S'(x) \text{ e } S''(x) \text{ são funções contínuas em } [a, b]; \quad (109)$$

$$(iii) \quad \text{Em cada subintervalo } [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, 2, \dots, n-1, \quad S(x) \text{ é um polinômio cúbico, isto é, } S_k(x) = a_k(x - x_k)^3 + b_k(x - x_k)^2 + c_k(x - x_k) + d_k; \quad (110)$$

$$(iv) \quad S^{(j)}(x_k^+) = S^{(j)}(x_k^-), \quad k = 1, 2, 3, \dots, n-1, \quad j = 0, 1, 2, \text{ tendo em vista a condição de continuidade.} \quad (111)$$

Da propriedade (iii) tem-se a existências de $4n$ constantes a serem determinadas, de forma a se obter S no intervalo $[a, b]$. De (i), tem-se $(n-1)$ condições, e de (iv) tem-se $(3n-1)$ condições, que somam $(4n-2)$ equações, o que dá dois graus de liberdade para a escolha das constantes: a_k, b_k, c_k e $d_k, k = 1, 2, 3, \dots, n-1$.

Para se obter o valor da função S e um intervalo arbitrário $[x_k, x_{k+1}]$, utiliza-se a condição de continuidade da função, condição (iv):

$$S_k(x_k) = S_{k+1}(x_k). \quad (112)$$

Onde $k = 1, 2, 3, \dots, n-1$. Logo, aplicando-se (113) em (110), e fazendo $h_k = x_{k+1} - x_k$:

$$f(x_k) = -a_{k+1}h_{k+1}^3 + b_{k+1}h_{k+1}^2 - c_{k+1}h_{k+1} + d_{k+1}. \quad (113)$$

A primeira e segunda derivadas de S se escreve como:

$$S'_k(x) = 3a_k(x - x_k)^2 + 2b_k(x - x_k) + c_k, \quad (114)$$

$$S''_k(x) = 6a_k(x - x_k) + 2b_k. \quad (115)$$

Fazendo $x = x_k$ e $x = x_{k-1}$ em (115):

$$b_k = \frac{S''_k(x_k)}{2}, \quad (116)$$

$$a_k = \frac{S''_k(x_k) - S''_k(x_{k-1})}{6h_k}. \quad (117)$$

Fazendo novamente $x = x_k$ em (110) e aplicando (108), tem-se:

$$d_k = f(x_k). \quad (118)$$

Substituindo (116), (117) e (118) em (113):

$$c_k = \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} + \frac{2h_k S''_k(x_k) + S''_{k-1}(x_{k-1})}{6} \quad (119)$$

Dessa forma, obtêm-se todas as constantes em função do conjunto de pontos $(x, f(x))$ e da segunda derivada de S . Agora é preciso se obter o valor de $S''_k(x_k)$, para $k = 1, 2, \dots, n-1$.

Impondo-se finalmente a condição de continuidade da primeira derivada, substituindo o valor das constantes a_k, b_k, c_k e d_k , e chamando $S''_k(x_k) = g_k, k = 1, 2, \dots, n-1$:

$$h_k g_{k-1} + 2(h_k + h_{k+1})g_k + h_{k+1}g_{k+1} = 6 \left(\frac{y_{k+1} - y_k}{h_{k+1}} - \frac{y_k - y_{k-1}}{h_k} \right). \quad (120)$$

A partir de (120) obtêm-se, então, um sistema linear (121), que deve ser resolvido, de forma a se obter os coeficientes $g_k, k = 1, 2, \dots, n-1$.

$$\begin{pmatrix} h_1 & (h_1+h_2) & h_2 & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & h_{n-1} & (h_{n-1}+h_n) & h_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} g_0 \\ \vdots \\ g_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_0 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad (121)$$

Em (121) o termo b_n se escreve como:

$$b_n = 6 \left[\left(\frac{y_n - y_{n-1}}{h_n} \right) - \left(\frac{y_{n-1} - y_{n-2}}{h_{n-1}} \right) \right]. \quad (122)$$

Nota-se, portanto, que o sistema (121) tem $n-2$ equações para n incógnitas, dessa forma, é comum se impor:

$$g_0 = g_n = 0 \quad (123)$$

Com essa imposição de duas constantes a *spline* S é chamada de *spline* natural.

Com relação à região de extrapolação do conjunto de dados, utilizam-se os três últimos pontos $(x, f(x))$, aos quais se ajusta um polinômio do segundo grau do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$.

Fig. 22 Comportamento de uma *spline* cúbica a partir de um conjunto de pontos (x, y) .

5.4.2 Método de Akima

Em 1970, o matemático japonês Hiroshi Akima introduziu um novo conceito de interpolação. O seu método, assim como o método de *spline* cúbica, utiliza polinômios de grau três entre os pontos, porém, ao invés de ser aplicado no conjunto de dados como um todo, é aplicado apenas localmente. Dessa forma evita-se o cálculo de um sistema linear de grau n , sendo n é o número de pontos (x, y) do conjunto de dados. Diminui-se assim consideravelmente a complexidade e o tempo computacional do método, sendo essa uma grande vantagem dessa técnica com relação a *spline* cúbica.

O princípio do método consiste em obter a inclinação da curva em cada ponto, garantindo-se assim a continuidade da primeira e segunda derivadas. Assume-se que a inclinação da curva para um dado ponto é dada por cinco pontos, sendo o ponto em questão o ponto central, mais dois pontos de cada lado. Utiliza-se um polinômio de grau três entre cada par de pontos (x, y) , que é obtido através da inclinação da curva nos pontos e de suas coordenadas.

Dado um conjunto de cinco pontos 1, 2, 3, 4 e 5 em um plano, a inclinação da curva no ponto central é dada por:

$$t = \frac{(|m_4 - m_3|m_2 + |m_2 - m_1|m_3)}{(|m_4 - m_3| + |m_2 - m_1|)}. \quad (124)$$

Sendo m_4, m_3, m_2, m_1 as inclinações das retas dadas pelos seguimentos $\overline{45}$, $\overline{34}$, $\overline{23}$ e $\overline{12}$, respectivamente. Uma prova mais aprofundada da determinação da inclinação t pode ser vista na referência corresponde ao trabalho de Akima (1970).

A inclinação da curva em 3 depende, então apenas das inclinações de quatro segmentos de reta, independentes da largura do intervalo.

Quando $m_4 = m_3$ e $m_2 = m_1$, a equação (124) não é suficiente para se determinar t . Nesse caso toma-se t como sendo um valor em m_2 e m_3 . O que geralmente é feito é atribuir a t o valor da média geométrica desses valores, de forma a se obter uma fórmula geral nesse caso específico, ou seja:

$$t = \frac{m_2 + m_3}{2}. \quad (125)$$

Obtendo-se a inclinação da curva para o conjunto de pontos, têm-se quatro condições para se determinar o polinômio de grau três, quais sejam:

$$y = y_1 \quad e \quad \frac{dy}{dx} = t_1 \quad \text{em } x = x_1, \quad (126)$$

$$y = y_2 \quad e \quad \frac{dy}{dx} = t_2 \quad \text{em } x = x_2. \quad (127)$$

Utiliza-se então um polinômio da seguinte forma:

$$y = p_0 + p_1(x - x_1) + p_2(x - x_1)^2 + p_3(x - x_1)^3. \quad (128)$$

Sendo as constantes p_0 , p_1 , p_2 e p_3 são determinadas pelas condições (126) e (127), e dadas por:

$$p_0 = y_1, \quad (129)$$

$$p_1 = t_1, \quad (130)$$

$$p_2 = \frac{\left[\frac{3(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} - 2t_1 - t_2 \right]}{(x_2 - x_1)}, \quad (131)$$

e

$$p_3 = \frac{\left[t_1 + t_2 - \frac{2(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)} \right]}{(x_2 - x_1)^2}. \quad (132)$$

Para se obter a extrapolação da curva, utiliza-se dois pontos extras, de forma que o ponto final se torne o central. Assume-se que os três últimos pontos e os outros dois a serem determinados estão sobre a curva dada por:

$$y = g_0 + g_1(x - x_3) + g_2(x - x_3)^2. \quad (133)$$

Sendo g_0 , g_1 e g_2 são constantes a serem determinadas.

Assumindo que:

$$x_5 - x_3 = x_4 - x_2 = x_3 - x_1. \quad (134)$$

Podem-se calcular assim as ordenadas correspondentes aos dois pontos finais a serem inseridos, como segue:

$$\frac{(y_5 - y_4)}{(x_5 - x_4)} - \frac{(y_4 - y_3)}{(x_4 - x_3)} = \frac{(y_4 - y_3)}{(x_4 - x_3)} - \frac{(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)} = \frac{(y_3 - y_2)}{(x_3 - x_2)} - \frac{(y_2 - y_1)}{(x_2 - x_1)}. \quad (135)$$

É possível, portanto, se obter o valor das constantes das ordenadas dos pontos inseridos 5 e 6, e obter-se assim o polinômio de segunda ordem correspondente à extrapolação da curva.

Capítulo 6

6. MODELAGEM DE ÍMAS PERMANENTES NO MEF

6.1 Introdução

Existem relatos de 3500 anos atrás que em uma determinada região da Ásia menor conhecida como Magnésia apresentava alguns materiais com características peculiares, eles se atraíam entre si e também atraíam ferro, níquel e cobalto. Na Grécia antiga, também, Thales de Mileto afirmava que a interação entre a magnetita e o ferro era conhecida desde 600 A.C., (Sinnecker, 2000).

Esse metal peculiar foi então nomeado de magnetita, e desde então é utilizado em uma infinidade de aplicações.

Especialmente na engenharia a utilização de materiais com campo magnético intrínseco apresenta grande utilidade e eficiência sendo que dessa forma é possível se eliminar uma fonte de corrente e, conseqüentemente, sua respectiva dissipação de energia em forma de calor. Dessa maneira os ímãs permanentes apresentam uma grande evolução na construção de motores e transformadores, além de outros dispositivos elétricos.

6.2 Campo coercitivo (H_c) e indução remanente (B_r)

Existe uma grande diversidade de ímãs permanentes para diversas aplicações e com características peculiares, porém a principal característica de um dado ímã é dada pelo seu campo coercitivo H_c e pela sua indução remanente B_r . A Fig. 23 representa a curva de desmagnetização (relação entre H_c e B_r) para um ímã permanente linear, (Bastos; Sadowski, 2003).

Fig. 23 Curva de desmagnetização para um ímã permanente linear.

O campo remanente B_r representa a magnetização residual apresentada pelo material, enquanto o campo coercitivo H_c representa a indução necessária (em sentido oposto ao de magnetização), para anular o campo residual presente no magneto. Então, a partir desses dois parâmetros é possível se determinar se um ímã é “forte” ou “fraco”.

Outra característica muito importante que também deve ser levada em conta é a temperatura, visto que as propriedades magnéticas microscópicas intrínsecas ao material variam com relação a esse fator. Assim, a temperatura também afeta a magnetização.

6.3 Principais tipos de ímãs

Dentre os principais tipos de ímãs permanentes existentes estão os de terras-raras, os cerâmicos e os metálicos.

6.3.1 Terras-raras

Os principais tipos de ímãs de terras raras são o Neodímio Ferro Boro (NdFeB) e o Samário Cobalto (SmCo) e são os mais modernos atualmente.

O NdFeB apresenta as melhores propriedades dentre todos os ímãs e surgiu na década de 80 através de um processo de produção conhecido como resfriamento rápido (*melt spinning*), porém apresenta uma menor resistência a aumento de temperatura quando comparado ao SmCo (Mieko; 1992).

Já o SmCo está presente no mercado desde a década de 60, e são produzidos processando-se ligas pulverizadas e em seguida sintetizado-as em altas temperaturas. O elevado preço é um empecilho para este tipo de material, (Mieko; 1992).

6.3.2 Ferrites

Também são conhecidos como ímãs cerâmicos e estão presentes no mercado desde a década de 40. Apresenta a vantagem de possuírem o menor custo atualmente.

São produzidos através da prensagem de ferrites submetidas a um forte campo magnético, e apresentam um forte campo coercivo e baixa indução remanescente, (Mieko; 1992).

6.3.3 Alnicos

São produzidos a partir de ligas de alumínio, níquel, cobalto e ferro (AlNiCo), apresentam a característica de alta indução remanente e baixo campo coercitivo e estão presentes no mercado desde a década de 30.

6.4 Modelagem pelo MEF

Para a formulação de ímãs permanentes pelo MEF supões agora que a relação constitutiva dada pela equação (7) é dada por:

$$B = \mu H + B_r . \quad (136)$$

Onde B_r representa a indução residual presente no ímã permanente, e deve agora ser considerada na formulação do MEF.

A indução remanente B_r está relacionada ao campo coercitivo H_c segundo a relação (137) a seguir:

$$B_r = -\mu H_c . \quad (137)$$

Em (79) μ representa a permeabilidade magnética do meio.

Essa aproximação é relativamente boa para ímãs do tipo SmCo e NdFeB (Bastos; Sadowski, 2003).

Escrevendo (136) em termos de H e aplicando (4):

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} (B - B_r) \quad (138)$$

Como para um ímã permanente a densidade de corrente J é igual a zero, tem-se então:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} A - \nabla \times \frac{1}{\mu} B_r = 0 . \quad (139)$$

O primeiro termo de (139) foi calculado na seção 3.5.2 e conduz ao sistema dado por (44).

Escrevendo o segundo termo de (139) em função de seus componentes vetoriais tem-se o componente na direção z dado por:

$$\nabla \times \frac{1}{\mu} B_r = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{B_r y}{\mu} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{B_r x}{\mu} \right) . \quad (140)$$

Que pode ser escrito como:

$$\nabla \cdot B_r^e . \quad (141)$$

Em que B_r^e se escreve como:

$$B_r^e = \left(\frac{B_r y}{\mu} \right) i - \left(\frac{B_r x}{\mu} \right) j . \quad (142)$$

Da mesma maneira que em (33), aplica-se o método de Galerkin em (141) e chega-se a:

$$\iint_{\Omega^e} W_l (\nabla \cdot B_r^e) d\Omega^e . \quad (143)$$

Utilizando o teorema da divergência na equação (143), chega-se a:

$$\oint_{\Gamma} N_l B_r^e d\Gamma - \iint_{\Omega^e} \nabla N_l \cdot B_r^e dS \quad (144)$$

Em que o primeiro termo corresponde à fronteira do domínio, e este termo deve ser computado apenas se a região de ímã permanente estiver sobre esta fronteira.

O segundo termo de (144) é o termo correspondente à excitação do problema, não dependendo de A , e é dado por:

$$\iint_{\Omega^e} \frac{1}{\mu \Delta} \begin{bmatrix} b_1 & c_1 \\ b_2 & c_2 \\ b_3 & c_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} B_r y \\ -B_r x \end{bmatrix} d\Omega^e = \frac{1}{\mu} \begin{bmatrix} b_1 B_r y - c_1 B_r x \\ b_2 B_r y - c_2 B_r x \\ b_3 B_r y - c_3 B_r x \end{bmatrix}. \quad (145)$$

Capítulo 7

7. DETALHES DE IMPLEMENTAÇÃO COMPUTACIONAL

7.1 Modelagem da curva de magnetização

Uma das grandes vantagens presentes na LMAGLIB com relação a outros softwares de elementos finitos está presente no módulo *materials*, onde estão implementadas diversas técnicas para a modelagem da não linearidade em materiais ferromagnéticos. Este módulo é utilizado pelo módulo *formulation* e *assembler* em conjunto de forma a levar em conta a não linearidade na formulação do problema e na construção da matriz global do sistema de equações.

A figura a seguir mostra a estrutura de classes presente dentro deste módulo e cada tipo de modelagem da não linearidade da curva de magnetização.

Fig. 24 Diagrama de classes correspondentes aos modelos de curva de magnetização presentes na LMAGLIB.

Pela Fig. 24 nota-se que os tipos de modelagem são divididos em dois grupos básicos: analíticos e interpoladores. Conforme mencionado no capítulo 5 os modelos analíticos possuem uma única função que deve ser ajustada por meio de constantes próprias de cada modelo para contemplar o melhor ajuste à curva dada. Os modelos interpoladores aplicam uma função para cada par ordenado (x, y) de pontos da curva de magnetização.

7.1.1 A classe *Magnetization Curve*

A classe *Magnetization Curve* é a classe mãe dos dois tipos possíveis de modelagem de magnetização: interpolação e analítica.

Por ser a classe superior a todas as classes correspondentes aos modelos de magnetização, possui a característica de ser abstrata, ou seja, não se pode instanciar um objeto diretamente da classe *Magnetization Curve*, e os métodos declarados virtuais devem ser sobrecarregados a todas as suas classes filhas.

Fig. 25 Parâmetros e métodos presentes na classe *Magnetization Curve*.

A Fig. 25 representa um diagrama UML correspondente apenas à classe *Magnetization Curve*, onde podem ser vistos seus atributos e funções membro.

Os argumentos X e Y correspondem a pontos referentes à curva de magnetização (B e H), np corresponde ao número de pontos dados para uma dada curva e $Axis$ o número de direções de anisotropia presentes na formulação. Por exemplo, para um dado problema onde existe a característica isotrópica do material, $Axis = 1$.

Os métodos declarados virtuais e que devem ser sobrecarregados nas classes dependentes da classe *Magnetization Curve* são: *getValue()* (retorna o valor de v em função de B^2),

getdValue() (retorna o valor de dv/dB^2 em função de B^2), *getModelType()* (retorna o modelo de curva utilizado) e *clone()* (retorna um objeto do tipo *Magnetization Curve*).

7.1.2 As classes *Interpolation* e *Analytic*

As classes *Interpolation* e *Analytic* são classes filhas diretamente ligadas à classe *Magnetization Curve*, que distinguem o tipo de modelo de magnetização a ser aplicado em um determinado problema. Dessa forma as classes relativas aos modelos de interpolação (*Cubic Spline* e *Akima*) são filhas da classe *Interpolation* e as classes relativas aos modelos analíticos (*SimpleAnalyticI*, *Marrocco* e *Exponential*) são filhas da classe *Analytic*.

O diagrama UML referente às classes *Interpolation* e *Analytic* pode ser visualizado na Fig. 26.

Fig. 26 Diagrama de classes UML correspondente às classes *Analytic* e *Interpolation*.

7.2 Métodos de resolução de sistemas não lineares

O módulo *solvers* presente na biblioteca LMAGLIB também é outra grande vantagem com relação a outros *softwares* de elementos finitos, devido à diversidade de métodos para a resolução de sistemas de equações que dispõe. Estão implementados métodos diretos, iterativos, pré-condicionadores e métodos de resolução de sistemas não lineares.

O diagrama UML correspondente aos métodos de resolução de sistemas lineares e não lineares utilizados neste trabalho podem ser visualizados na Fig. 27.

Fig. 27 Diagrama de classes correspondentes aos principais métodos de resolução de sistemas lineares e não lineares presentes na LMAGLIB.

O módulo *solver* presente na LMAGLIB é dividido em duas partes principais, que se referem ao tipo de sistema a ser resolvido: linear ou não linear.

A classe *Linear Solver* referencia os métodos a serem utilizados na resolução de sistemas lineares, tais como decomposição *LU* e *ICCG*, e a classe *Non Linear Solver* os métodos de resolução de sistemas não lineares. As classes filhas da classe *Non Linear Solver* são as classes *Newton Raphson*, *Successiv eAproximation*, *NR Line Search* e *NR Brent Method*, relativas aos métodos descritos na seção 4.2.

Os atributos necessários e métodos presentes em um objeto do tipo *Non Linear Solver* podem ser visualizados no diagrama UML dado na figura a seguir:

Fig. 28 Diagrama UML referente à classe *Non Linear Solver*, onde podem ser visualizados os atributos e métodos presentes nesta classe.

7.3 Tratamento de ímãs permanentes

O tratamento de ímãs permanentes presente na LMAGLIB está localizado no módulo *materials* e utiliza um atributo que faz referencia à classe *Permanent Magnet* para determinar se existe ou não magnetização. O diagrama UML correspondente é dado na Fig. 29.

Fig. 29 Diagrama UML referente às classes responsáveis pela propriedade física dos materiais.

Os métodos e atributos presentes nas classes *Material* e *Permanent Magnet* são dados com mais detalhes na Fig. 30.

Fig. 30 Diagrama UML referente às classes *Material* e *Permanet Magnet*.

O atributo *Vector<double> M*, presente na classe *Permanent Magnet* corresponde ao vetor magnetização $\vec{M}$, e é utilizado na classe *Material* a partir do atributo *magnetization*, que determina a magnetização do material. Os métodos *getHc()* e *getBr()* retornam respectivamente o campo magnético coercitivo e a indução magnética remanente, presentes no material com magnetização $\vec{M}$.

Capítulo 8

8. RESULTADOS

8.1 Introdução

Este capítulo tem como objetivo mostrar os resultados obtidos através da aplicação das curvas de magnetização estudadas no capítulo 5, e sua adequação aos diversos trechos, ou seja, no início da curva, “joelho” e saturação. Dessa forma pretende-se obter para cada caso a melhor modelagem de forma a se conseguir convergência e no menor número de iterações possível.

Também são analisados os resultados dos métodos não lineares apresentados no capítulo 4, com ênfase especial no método de Newton-Raphson e Newton-Raphson utilizando o fator de relaxação, visto ser a técnica mais utilizada para o tratamento da não linearidade e com convergência em menor número de iterações. Foram contempladas também diversas técnicas de resolução de sistemas lineares associadas ao método de Newton-Raphson.

Um exemplo de aplicação de ímãs permanentes também é apresentado e comparado ao resultado obtido analiticamente.

Os casos testes utilizados foram descritos de maneira breve no capítulo 1.3 e compreendem a um núcleo ferromagnético com um entreferro, um motor de relutância chaveado, e um circuito magnético utilizando ímãs permanentes, limitado ao âmbito da magnetostática.

Todos os exemplos abordados foram discretizados em elementos triangulares de 1ª ordem, a menos de menção em contrário.

As características do processador utilizado e memória do sistema para todas as simulações são dadas na Tabela 1.

Tabela 1 Características do processador e do sistema utilizado para todas as simulações.

Processador	Sistema
AMD Athlon (TM) MP 1800 +1,53GHz	1024Mb RAM – WinXP

8.2 Modelagem do material ferromagnético

8.2.1 Aço carbono S45C

O aço carbono S45C é um material muito utilizado na confecção de transformadores e núcleos ferromagnéticos devido a sua excelente propriedade magnética, fator esse relevante para estes tipos de dispositivos. Foi esse o material utilizado nas simulações do eletroímã e do núcleo ferromagnético.

Os pontos experimentais referentes ao aço carbono S45C (Fujiwara; Okamoto; Kameari, 2005), são dados na tabela a seguir:

Tabela 2 Pontos experimentais da curva de magnetização do aço carbono S45C.

<i>ponto</i>	<i>B(T)</i>	<i>H(A/m)</i>	<i>ponto</i>	<i>B(T)</i>	<i>H(A/m)</i>
0	0	0	17	1,417	4880
1	0,109	520	18	1,446	5203
2	0,235	731	19	1,474	5539
3	0,378	944	20	1,642	8661
4	0,520	1151	21	1,746	12000
5	0,653	1378	22	1,814	15301
6	0,773	1617	23	1,862	18706
7	0,880	1860	24	1,900	22094
8	0,972	2137	25	1,929	25461
9	1,000	2418	26	1,953	28818
10	1,118	2700	27	1,974	32212
11	1,177	3000	28	1,990	35673
12	1,230	3300	29	2,004	39001
13	1,274	3614	30	2,017	42400
14	1,316	3923	31	2,028	45793
15	1,354	4240	32	2,039	49171
16	1,388	4564	33	2,048	52489

Os modelos matemáticos de curva de magnetização aplicados aos pontos experimentais foram: o modelo de O'Connor, modelo de Marrocco, exponencial, *spline* cúbica e modelo de Akima.

8.2.1.1 Modelo de O'Connor

Os coeficientes para o modelo de O'Connor (analítico simples), foram obtidos através do método dos mínimos quadrados e resultaram: $\mu_{r0} = 500$, $J_s = 2,0$ e $\alpha = 0,5$. Com este ajuste, foram obtidas as curvas $\nu(B^2)$ e $d\nu/dB^2(B^2)$. As Fig. 31 e Fig. 32 ilustram o ajuste aos pontos experimentais da curva curva $\nu(B^2)$ e a região de extrapolação, e a Fig. 33 ilustra a curva $d\nu/dB^2(B^2)$.

Fig. 31 Ajuste do modelo de O'Connor para a curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais para o aço S45C.

Fig. 32 Região de extrapolação da curva da Fig. 31.

Fig. 33 Curva $d\nu/dB^2(B^2)$ obtida para o aço carbono S45C, utilizando o modelo de O'Connor.

O erro relativo, obtido para cada ponto com relação aos dados experimentais da Tabela 2 é dado na Fig. 34.

Fig. 34 Erro relativo aos dados experimentais da curva $\nu(B^2)$ obtido com o modelo de O'Connor.

A partir do gráfico da Fig. 34 verifica-se um maior erro para os pontos iniciais da curva, e apresenta um menor desvio para os pontos intermediários e finais da curva, com relação aos pontos experimentais.

Com relação ao modelo de O'Connor, verifica-se que para valores próximos de zero e para valores próximos à região de saturação para a curva $\nu(B^2)$, o erro relativo é maior do que para a região intermediária da curva.

8.2.1.2 Modelo de Marrocco

Através do ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo de Marrocco foram obtidos os seguintes coeficientes: $\varepsilon = 0,0029$; $C = 8,99$; $\alpha = 3,51$ e $\tau = 47000$.

As Fig. 35 e Fig. 36 ilustram o ajuste da curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais e região de extrapolação, respectivamente. A curva Fig. 37 ilustra a curva $d\nu/dB^2(B^2)$.

Fig. 35 Ajuste do modelo Marrocco para a curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais para o aço S45C.

Fig. 36 Região de extrapolação da curva da Fig. 35.

Fig. 37 Curva $dv/dB^2(B^2)$ obtida para o aço carbono S45C, utilizando o modelo de Marrocco.

O erro relativo obtido para o modelo de Marrocco, com relação aos pontos experimentais, é dado na Fig. 38.

Fig. 38 Erro relativo na curva $v(B^2)$ obtido com o modelo de Marrocco, com relação aos valores experimentais.

Pode-se verificar a partir da Fig. 38 que o erro relativo para os pontos iniciais da curva, assim como no modelo de O'Connor, é elevado. Para pontos intermediários, o modelo de O'Connor apresenta um melhor ajuste, porém para pontos próximos da região de saturação o modelo de Marrocco possui menores erros relativos.

8.2.1.3 Modelo Exponencial

Assim como para o modelo de O'Connor e modelo de Marrocco, as constantes para o modelo exponencial foram obtidas através de um ajuste utilizando o método dos mínimos quadrados. O ajuste resultou nos seguintes coeficientes: $k_1 = 9,84696$, $k_2 = 1,84566$ e $k_3 = 3080,78$. Os resultados para as curvas $\nu(B^2)$, sua derivada e erro relativo são dadas nas Fig. 40, Fig. 41 e Fig. 42.

As Fig. 39 e Fig. 40 ilustram o ajuste da curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais e a região de extrapolação, respectivamente. A Fig. 41 ilustra a curva $d\nu/dB^2(B^2)$.

Fig. 39 Ajuste do modelo de Marrocco para a curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais para o aço S45C.

Fig. 40 Região de extrapolação da curva da Fig. 39.

Fig. 41 Curva $d\nu/dB^2(B^2)$ obtida para o aço carbono S45C, utilizando o modelo de exponencial.

Fig. 42 Erro relativo obtido para o modelo exponencial.

Verifica-se que o modelo exponencial se ajusta muito bem à curva, como comprovam seus baixos erros relativos quando comparados ao modelo de O'Connor e a o modelo de Marrocco. Entretanto os valores obtidos pelo modelo exponencial começam a crescer de forma muito acentuada, acarretando em problemas de convergência para valores elevados de H .

8.2.1.4 *Spline* cúbica

Diferentemente dos modelos anteriores, a *spline* cúbica ajusta um polinômio de terceiro grau a cada par (x, y) dos pontos experimentais, como visto no capítulo 5.4.1. Dessa forma se obtém uma curva que contempla todos os pontos experimentais. Os resultados da aplicação desse modelo aos pontos experimentais da Tabela 2 são apresentados nas Fig. 43 (a) e (b).

(a)

(b)

Fig. 43 Ajuste de spline cúbica para as curvas (a) $v(B^2)$, e (b) $dv/dB^2(B^2)$, aos pontos experimentais do aço S45C.

Nota-se um ajuste exato a cada ponto experimental por parte da *spline* cúbica, fato este já esperado devido às propriedades desse método. No entanto, para a curva $dv/dB^2(B^2)$ verifica-se uma grande oscilação na região inicial da curva, uma vez que a derivada possui valores negativos devido aos erros experimentais na obtenção dos pontos $B \times H$. Este fato impede a aplicação deste método na modelagem da curva $v(B^2)$, quando se utiliza o método de Newton-Raphson, sendo necessário um ajuste aos pontos de forma que a curva $dv/dB^2(B^2)$ possua valor positivo para qualquer ponto.

A fim de contornar este problema substituíram-se os 17 pontos da indução magnética B iniciais da Tabela 2 por valores obtidos do modelo exponencial para os respectivos campos H , e em seguida aplicou-se a *spline* cúbica. As Fig. 44 e Fig. 45 ilustram o ajuste da curva $v(B^2)$ aos pontos experimentais e região de extrapolação, respectivamente. A Fig. 46 ilustra a curva $dv/dB^2(B^2)$.

Fig. 44 Ajuste de *spline* cúbica para a curva $\nu(B^2)$, substituindo-se os 17 primeiros pontos experimentais de B por valores calculados pela fórmula exponencial.

Fig. 45 Região de extrapolação da curva da Fig. 44.

Fig. 46 Curva $d\nu/dB^2(B^2)$ derivada da curva da Fig. 45.

8.2.1.5 Akima

Da mesma maneira que a interpolação por *spline* cúbica, o método de Akima ajusta polinômios cúbicos entre cada par (x, y) de pontos da curva experimental, como visto no capítulo 5.4.2. As curvas $\nu(B^2)$ e $d\nu/dB^2(B^2)$ obtidas através do método de Akima são dadas nas Fig. 47 (a) e (b).

(a)

(b)

Fig. 47 Ajuste do modelo de Akima para as curvas (a) $\nu(B^2)$ e (b) $d\nu/dB^2(B^2)$ aos pontos experimentais do aço S45C.

De maneira similar ao caso ocorrido para a *spline* cúbica, o método de Akima quando aplicado aos pontos experimentais do aço S45C apresenta valores negativos pra a derivada, impossibilitando a convergência quando se aplica o método de Newton-Raphson. Dessa forma utilizou-se o mesmo artifício utilizado para a interpolação por *spline* cúbica,: substituem-se os 17 pontos da indução magnética B iniciais da Tabela 2 por valores obtidos pelo modelo exponencial para os respectivos campos H . As Fig. 48 e Fig. 49 ilustram o ajuste da curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais, e região de extrapolação respectivamente. A Fig. 50 ilustra a curva $d\nu/dB^2(B^2)$.

Fig. 48 Ajuste do método de Akima para a curva $\nu(B^2)$ com os primeiros 17 pontos experimentais substituídos por valores calculados pela fórmula exponencial.

Fig. 49 Ajuste do método de Akima para a curva $\nu(B^2)$ com os primeiros 17 pontos experimentais substituídos por valores calculados pela fórmula exponencial.

Fig. 50 Derivada da curva $\nu(B^2)$ da Fig. 49.

8.2.2 Aço carbono S1008

O aço carbono S1008 apresenta uma porcentagem de 8% de carbono em sua constituição, o que o torna uma excelente material para uso em dispositivos elétricos, principalmente em motores elétricos, devido ao seu baixo custo, excelente resistência física e características magnéticas interessantes.

Os valores experimentais da curva de magnetização do aço S1008 (Maxwell2D, 2002), são dados na Tabela 3.

Tabela 3 Pontos experimentais correspondentes à curva de magnetização para o aço S1008.

<i>ponto</i>	$B(T)$	$H(A/m)$
0	0,8654	318,3
1	1,1106	477,5
2	1,2458	636,6
3	1,331	795,8
4	1,5	1591,5
5	1,6	3183,1
6	1,683	4774,6
7	1,741	6366,2
8	1,78	7957,7
9	1,905	15915
10	2,025	31831
11	2,085	47746,5
12	2,13	63662
13	2,165	79577,5
14	2,28	159155
15	2,485	318310
16	2,585	397887

Todos os métodos de modelagem da curva $B(H)$ apresentados foram aplicados ao conjunto de pontos da Tabela 3. Entretanto, diferentemente dos pontos da Tabela 2, não foi necessário artifício algum para a aplicação dos métodos de Akima e *spline* cúbica, pois as curvas de derivadas não produziram derivadas negativas.

Os resultados para todos os métodos são apresentados a seguir.

8.2.2.1 Modelo de O'Connor

Os coeficientes obtidos para o modelo de O'Connor (analítico simples), através do método dos mínimos quadrados foram: $\mu_{r0} = 2500$, $J_s = 2,063$ e $\alpha = 0,99$. As Fig. 51e Fig. 52 ilustram o ajuste da curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais e região de extrapolação respectivamente. As Fig. 53 e Fig. 54 ilustram a curva $d\nu/dB^2(B^2)$ e erro relativo, respectivamente.

Fig. 51 Ajuste do modelo de O'Connor para a curva $\nu(B^2)$, aos pontos experimentais do aço S1008.

Fig. 52 Região de extrapolação da curva da Fig. 51.

Fig. 53 Derivada da curva da Fig. 52.

Fig. 54 Erro relativo aos pontos experimentais obtido com o modelo de O'Connor, para o aço carbono S1008.

Analisando o gráfico da Fig. 54 nota-se uma oscilação do erro relativo para os pontos iniciais e intermediários e um melhor ajuste com os coeficientes obtidos para os pontos na região de saturação da curva.

8.2.2.2 Modelo de Marrocco

Através do ajuste pelo método dos mínimos quadrados para o modelo de Marrocco foram obtidos os seguintes coeficientes: $\varepsilon = 0$; $C = 0,8$; $\alpha = 4,011$ e $\tau = 10000$.

As Fig. 55 e Fig. 56 ilustram o ajuste da curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais e região de extrapolação, respectivamente. As Fig. 57 e Fig. 58 ilustram a curva $d\nu/dB^2(B^2)$ e erro relativo, respectivamente.

Fig. 55 Ajuste do modelo de Marrocco para a curva $\nu(B^2)$, para os pontos experimentais do aço S1008.

Fig. 56 Região de extrapolação da curva da Fig. 55.

Fig. 57 Derivada da curva da Fig. 56.

Fig. 58 Erro relativo aos valores experimentais com o modelo de Marrocco, para o aço carbono S1008.

Verifica-se que o erro relativo para o modelo de Marrocco dado na Fig. 58 é elevado para os pontos iniciais e decresce gradativamente a medida que se aproxima da saturação, semelhante ao modelo de O'Connor.

8.2.2.3 Modelo exponencial

Assim como para o modelo de O'Connor e modelo de Marrocco, as constantes para o modelo exponencial foram obtidas através de um ajuste utilizando o método dos mínimos quadrados. O ajuste resultou nos seguintes coeficientes: $k_1 = 8,015$, $k_2 = 1,7$ e $k_3 = 367,8$.

As Fig. 59 e Fig. 60 ilustram o ajuste da curva $\nu(B^2)$ aos pontos experimentais e região de extrapolação, respectivamente. As Fig. 61 e Fig. 62 ilustram a curva $d\nu/dB^2(B^2)$ e erro relativo, respectivamente.

Fig. 59 Ajuste do modelo exponencial para a curva $\nu(B^2)$, para os pontos experimentais do aço S1008.

Fig. 60 Região de extrapolação da curva da Fig. 59.

Fig. 61 Derivada da curva da Fig. 60.

Fig. 62 Erro relativo aos pontos experimentais para o modelo exponencial, para o aço carbono S1008.

Analisando o gráfico da Fig. 62 nota-se um bom ajuste para os pontos iniciais e intermediários da curva de magnetização, porém um grande desvio para os pontos correspondentes a saturação da curva. Isso se deve ao fato de no modelo exponencial, os valores de H crescerem muito rapidamente na região de saturação.

8.2.2.4 *Spline* cúbica

O ajuste por *spline* cúbica permite um erro relativo igual a zero para os pontos experimentais, tendo em vista a definição de *spline*. Dessa forma, a interpolação realizada para os pontos experimentais do aço S1008, para as curvas $\chi(B^2)$ e região de extrapolação resultam nas curvas apresentadas nas Fig. 63 e Fig. 64. A Fig. 65 ilustra a curva $d\chi(B^2)/dB^2$.

Fig. 63 Ajuste de *spline* cúbica da curva $\nu(B^2)$, para os pontos experimentais do aço S1008.

Fig. 64 Região de extrapolação da curva da Fig. 63.

Fig. 65 Curva obtida para $d\nu/dB^2(B^2)$, utilizando-se *spline* cúbica.

Observa-se pela Fig. 65 que os pontos experimentais $B \times H$ do aço S10008C não produziram derivadas negativas. Sendo assim, nenhum ajuste adicional foi necessário para $\nu(B^2)$ e sua derivada.

8.2.2.5 Akima

O ajuste feito pelo método de Akima para $\nu(B^2)$ e região de extrapolação pode ser visualizado nas Fig. 66 e Fig. 67. A Fig. 68 ilustra a curva $d\nu(B^2)/dB^2$.

Fig. 66 Ajuste do método de Akima de curva $\nu(B^2)$, com os pontos experimentais do aço S1008.

Fig. 67 Região de extrapolação da curva da Fig. 66.

Fig. 68 Derivada da curva da Fig. 67.

Como no caso da *spline*, nenhum ajuste adicional foi necessário, uma vez que não se produza nenhuma derivada negativa.

8.3 Eletroímã

8.3.1 Descrição

O primeiro caso teste proposto corresponde a um eletroímã composto de núcleo ferromagnético fixo, bobina de cobre e armadura móvel de material ferromagnético. O conjunto é ilustrado na Fig. 69 (a) com dados dimensionais Na Fig. 69 (b) são destacadas as diferentes regiões magnéticas, quais sejam: verde – núcleo ferromagnético (aço S45C); vermelho – bobina de cobre excitada com densidade de corrente, com $\mu = \mu_o$; branco – vácuo ($\mu = \mu_o$).

(a)

(b)

Fig. 69 Dados dimensionais do eletroímã (a) e regiões utilizadas na simulação (b) (verde – núcleo ferromagnético; vermelho – bobina; branco – vácuo).

A malha de elementos finitos utilizada foi gerada utilizando-se o algoritmo de Delaunay e pode ser vista na Fig. 70. As características da malha são dadas na Tabela 4, a seguir:

Tabela 4 Características da malha de elementos finitos gerada pelo algoritmo de Delaunay para a geometria da Fig. 69.

<i>Elementos</i>	<i>2446</i>
<i>nós</i>	<i>1244</i>

Fig. 70 Malha de elementos finitos do eletroímã.

8.3.2 Testes da modelagem $B(H)$ e resultados numéricos

Foram utilizados três valores de correntes de excitação distintas de modo a se obter valores de magnetização nas regiões inicial, intermediária e de saturação da curva de magnetização do material. Verificou-se o número de iterações necessárias para se alcançar a convergência para cada modelo proposto de curva $\nu(B^2)$, bem como tempo de processamento. Como métodos de resolução do sistema de equações algébricas lineares foram utilizados os métodos *ICCG*, que corresponde a um método iterativo, com critério de parada $tol = 10^{-6}$, e *SuperLU* que corresponde a um método direto.

Utilizou-se também como critério de parada para o método de Newton-Raphson a tolerância de 10^{-4} , e 10^{-2} para o método das aproximações sucessivas e número máximo de 100 iterações.

Os resultados utilizando o método de Newton-Raphson clássico são dados na Tabela 5.

Tabela 5 Características de desempenho dos vários métodos de modelagem de curva de magnetização no método de Newton-Raphson clássico.

$NI(Ae) \setminus J(Ae/mm^2)$	400 \setminus 2				1000 \setminus 5				20000 \setminus 100			
Modelo\Solver	ICCG		SuperLU		ICCG		SuperLU		ICCG		SuperLU	
	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)
<i>SimpleAnalyticI</i>	6	4,7	6	5,9	9	7,2	9	8,8	100	79,4	100	87,9
<i>Marrocco</i>	2	1,7	2	1,9	2	1,7	2	2,0	100	80,1	100	88,9
<i>Exponential</i>	2	1,6	2	1,9	2	1,6	2	2,1	-	-	-	-
<i>CubicSpline</i>	2	1,8	2	2,4	2	1,8	2	2,5	100	86,9	100	95,3
<i>Akima</i>	2	1,7	2	1,9	2	1,7	2	2,1	100	84,7	100	90,5

Analisando-se a Tabela 5, verifica-se um pequeno número de iterações para se alcançar a convergência, que cresce à medida que se aproxima da região de saturação da curva. com $f.m.m = 20000A.e$ de número máximo de iterações é alcançado antes da convergência, para todos os modelos.

Com o método de O'Connor, nota-se um maior número de iterações para convergência, fator esse que se deve ao fato de oscilações na região de saturação da curva $d\psi/dB^2$.

Com relação à utilização dos métodos *ICCG* e *SuperLU*, percebe-se um maior tempo de computação para o método direto, porém utilizando-se o *SuperLU* a solução obtida é a solução “real” do sistema.

A figura a seguir mostra a título de ilustração o mapa de cores da indução magnética no eletroímã para $NI = 20.000A.e$.

Fig. 71 Indução magnética no eletroímã com $NI = 20.000\text{A.e.}$

Uma comparação entre as diversas variantes do método de Newton-Raphson clássico, com fator de relaxação $\alpha = 1$, busca linear – *NR-LineSearch* e minimização da norma do resíduo utilizando o método de Brent – *NR-BrentMethod* é apresentada na Tabela 6. Foi feita uma comparação entre o número de iterações de cada método e tempo de processamento utilizando *SuperLU* como *solver* linear, com $NI = 1000\text{A.e.}$ O modelo de curva de magnetização adotado para esta comparação foi o modelo de O'Connor.

Tabela 6 Comparação entre as variantes do método de Newton-Raphson ($NI = 1000A.e$, utilizando modelo de O'Connor).

<i>Método</i>	Nº iterações – tempo(s)
<i>NRTradicional</i>	5 – 8,812
<i>NRLineSearch</i>	5 – 9,719
<i>NRBrentMethod</i>	5 – 10,282

Segundo a Tabela 6 nota-se que não há melhora com relação ao número de iterações quando se aplica a otimização do fator de relaxação devido ao fato do valor ótimo ser aproximadamente um ($\alpha = 1$), para todas as iterações, conforme mostrado na Fig. 72. Entretanto verifica-se uma melhora de desempenho utilizando-se elementos de segunda ordem, quando se obtém a convergência desejada em 2 iterações com $t = 8,9s$.

Com relação ao tempo de processamento é observado um pior pois foi necessário um maior número de passos efetuados pelos métodos *NR-LineSearch* e *NR-BrentMethod*, com relação ao método *NR-Tradiciona*l.

Pode-se verificar pela Fig. 72 que o método das aproximações sucessivas possui um desempenho bem inferior quando comparado ao método de Newton-Raphson para este problema, convergindo em 100 iterações no tempo de $t = 44,1s$.

A figura a seguir dá o logaritmo decimal ($\log$) da tolerância e o fator de relaxação ótimo obtido por cada método em cada iteração, utilizando-se o modelo de O'Connor.

(a)

(b)

Fig. 72 Evolução das iterações dos métodos de Newton-Raphson em função da tolerância (a) e fator de relaxação (b) na simulação do eletroímã.

A Fig. 73 exibe um traçado das linhas de campo magnético obtidas da simulação do eletroímã.

Fig. 73 Linhas equipotenciais de B obtidas com $NI = 1000\text{A.e}$, com o modelo de O'Connor de curva de magnetização.

8.4 Núcleo ferromagnético

8.4.1 Características dimensionais

O segundo caso teste corresponde a um núcleo ferromagnético (Fujiwara; Okamoto; Kameari, 2005), com um pequeno entreferro. O material do núcleo é o aço .

A Fig. 74 (a) e (b) mostra um desenho esquemático com as dimensões e regiões físicas de metade do núcleo ferromagnético simulado, em que se explora a simetria do mesmo.

Fig. 74 Núcleo ferromagnético (Fujiwara; Okamoto; Kameari, 2005). (a) Dados dimensionais e (b) regiões de simulação.

Nota-se a presença de um entreferro de 1 mm de dimensão, fato este que gera uma transição entre uma região de baixa relutividade e uma de alta relutividade.

A região em vermelho da Fig. 74 (b) corresponde à região com densidade de corrente ($\mu_{bob} = \mu_o$), a região verde ao aço S45C e a região branca refere-se ao ar.

As características da malha de elementos finitos gerada através do algoritmo de Delaunay são dadas na Tabela 7.

Tabela 7 Características da malha gerada pelo algoritmo de Delaunay para a geometria da Fig. 74.

<i>Elementos</i>	<i>6080</i>
<i>Nós</i>	<i>3104</i>

Fig. 75 Malha de elementos finitos para o núcleo ferromagnético com entreferro.

8.4.2 Testes da modelagem $B(H)$ e resultados numéricos

Assim como no caso do eletroímã, variou-se o modelo de curva de magnetização e verificou-se o número de iterações e o tempo de processamento necessário para alcançar a convergência. Os resultados são apresentados na Tabela 8.

Também foram realizadas comparações utilizando um método direto (*SuperLU*) e um método iterativo (*ICCG*), com critério de parada $tol = 10^{-6}$.

O critério de parada adotado para o método de Newton-Raphson é $tol = 10^{-3}$, e número máximo de iterações igual a 100.

Tabela 8 Resultados obtidos variando-se a corrente e o modelo da curva de magnetização para o método de Newton-Raphson.

$NI(Ae) \setminus J(Ae/mm^2)$	60 \ 3,75				100 \ 6,25				800 \ 50			
Modelo\Solver	ICCG		SuperLU		ICCG		SuperLU		ICCG		SuperLU	
	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)
<i>SimpleAnalyticI</i>	9	22,0	9	23,3	12	29,4	12	34,1	19	46,8	19	57,7
<i>Marrocco</i>	4	7,7	4	7,8	6	15,6	6	16,6	61	158,5	61	164,5
<i>Exponential</i>	2	4,9	2	5,25	4	7,5	4	8,1	-	-	-	-
<i>CubicSpline</i>	2	5,0	2	4,9	4	10,0	4	10,1	40	100,8	61	152,6
<i>Akima</i>	2	4,8	2	4,9	4	9,7	4	10,5	40	98,3	61	153,6

Nota-se que para o modelo de O'Connor existe a necessidade de um número maior de iterações e consequentemente mais tempo de processamento para alcançar a convergência com baixas correntes. No entanto para correntes elevadas o modelo se mostra mais eficiente do que os demais.

O modelo de Marrocco se mostra ineficiente para correntes elevadas, devido ao fato de crescer quadraticamente para correntes elevadas, necessitando de um grande número de iterações para atingir a convergência.

Assim como o modelo de Marrocco, o modelo exponencial também apresenta ineficiência para correntes elevadas, onde sequer apresenta convergência.

Da mesma forma que para o eletroímã, o método de resolução linear *SuperLU* apresenta um maior tempo de convergência, influenciando assim no tempo de computação total do método de Newton-Raphson.

O mapa de cores da indução magnética para com $NI = 800A.e$, utilizando-se o modelo de Marrocco é ilustrado na Fig. 76.

Fig. 76 Indução magnética para $NI = 800\text{A.e}$ no núcleo da Fig. 74. Nota-se a grande variação de relutividade magnética na transição entre o núcleo e o entreferro.

Os resultados de desempenho com os métodos de Newton-Raphson, Newton-Raphson com busca linear (*NR-LineSearch*) e Newton-Raphson utilizando aproximações quadráticas sucessivas (*NR-BrentMethod*) são dados na Tabela 9, para uma excitação de $NI = 100\text{A.e}$.

Tabela 9 Comparação entre as variantes do método de Newton-Raphson com $NI = 100\text{A.e}$ e modelo de Marrocco.

<i>Método</i>	<i>Nº de iterações – tempo(s)</i>
<i>NRTradicional</i>	<i>12 – 34,11</i>
<i>NRLineSearch</i>	<i>7 – 22,094</i>
<i>NRBrentMethod</i>	<i>8 – 25,969</i>

Diferentemente do que ocorreu no eletroímã, a norma quadrática do resíduo tem um mínimo diferente de um para cada iteração do método de Newton-Raphson, conforme a mostrado na Fig. 77 (a).

Pôde-se verificar um ganho significativo em número de iterações e em tempo de processamento para a resolução do problema utilizando os métodos *NR-LineSearch* e *NR-BrentMethod*, com relação ao *NR-Tradicional*, e ao *NR-Tradicional* utilizando elementos de segunda ordem. (interpolação quadrática no elemento).

(a)

(b)

Fig. 77 Evolução das iterações dos métodos de Newton-Raphson em função do fator de relaxação (a) e da tolerância (b) na simulação do núcleo ferromagnético com entreferro com $NI = 100A.e$ e modelo de Marrocco.

A Fig. 77 apresenta a evolução das iterações para todas as variantes do método de Newton-Raphson, bem como para o método das aproximações sucessivas. A Fig. 77 (a) mostra o fator de relaxação e a (b) o log da tolerância desejada. Verificou-se que para os métodos *NR-LineSearch* e *NR-BrentMethod* a convergência é atingida em 7 e 8 iterações, respectivamente, devido ao fator de relaxação otimizado a cada iteração, enquanto que para o método de

Newton-Raphson clássico foram necessárias 12 iterações. Ao se utilizar elementos de segunda ordem a convergência foi atingida em 6 iterações, porém com tempo mais elevado ($t = 87,9s$).

Assim como para o exemplo do eletroímã estudado na seção anterior, o método das aproximações sucessivas teve um desempenho inferior ao método de Newton-Raphson, convergindo em 100 iterações em 179,2s.

As linhas de campo obtidas podem ser visualizadas na Fig. 78. Os resultados conferem com os obtidos por Fujirawa (2005).

Fig. 78 Linhas equipotenciais de indução no núcleo ferromagnético com entreferro ($NI = 100A.e$, modelo de Marrocco).

8.5 Motor de relutância chaveado

8.5.1 Características construtivas e dimensionais

O terceiro caso teste utilizado consiste em um motor de relutância chaveado (Abe, 1997). Embora seja necessária uma simulação no regime variável no tempo para se estudar este dispositivo, será realizada apenas uma simulação magnetostática do mesmo, com intuito de se analisar apenas o desempenho numérico das técnicas apresentadas. Isso corresponde a simular o motor num determinado instante.

As características geométricas e dimensionais do motor, bem como o modelo geométrico para simulação são mostradas nas Fig. 79 (a) e (b). Os valores dos parâmetros da Fig. 79 (a) são dados na Tabela 10.

(a)

(b)

Fig. 79 Dados geométricos do motor de relutância chaveado.

Na Fig. 79 (b) a região verde é composta de material ferromagnético, o aço carbono S1008. A região em vermelho corresponde às bobinas. No instante em que o motor foi simulado, apenas a bobina 2 encontrava-se excitada. Maiores detalhes deste dispositivo encontram-se em (Abe, 1997).

Tabela 10 Dados dimensionais do motor de relutância chaveado.

$R1 = 5mm$	$r = 36o$
$R2 = 25mm$	$s = 32o$
$R3 = 25,25mm$	$espiras = 150$
$R4 = 50mm$	$entreferro = 0,25mm$
$R5 = 58mm$	$comprimento\ do\ pacote = 50mm$

A malha de elementos finitos deste motor é ilustrada na Fig. 80. Seus dados mais relevantes são apresentados na Tabela 11.

Tabela 11 Dados da malha de elementos finitos do motor de relutância chaveado.

<i>Elementos</i>	<i>9920</i>
<i>nós</i>	<i>5001</i>

Fig. 80 Malha de elementos finitos do motor de relutância chaveado.

8.5.2 Resultados numéricos

Assim como nos casos anteriores, analisou-se o comportamento dos modelos de curvas de magnetização com relação a o número de iterações e ao tempo de processamento, bem como o comportamento dos métodos *ICCG* (iterativo, com critério de parada $tol = 10^{-6}$), e *SuperLU* (direto).

O critério de parada para o método de Newton-Raphson é $tol = 10^{-3}$, e número máximo de 100 iterações.

Os resultados numéricos obtidos podem ser visualizados na Tabela 12.

Tabela 12 Resultados obtidos variando-se a corrente e o modelo da curva de magnetização para o método de Newton-Raphson.

$NI(Ae) \setminus J(Ae/mm^2)$	61,35 \ 1,00				368,1 \ 6,0				3067,5 \ 50,0			
Modelo\Solver	ICCG		SuperLU		ICCG		SuperLU		ICCG		SuperLU	
	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)	iter	t(s)
<i>SimpleAnalyticI</i>	4	25,0	4	21,3	9	54,8	9	54,4	46	255,3	46	307,4
<i>Marrocco</i>	2	12,3	2	12,1	10	59,2	10	53,7	100	700,3	100	726,6
<i>Exponential</i>	2	12,2	2	9,9	5	30,2	5	27,3	-	-	-	-
<i>CubicSpline</i>	4	23,6	4	20,4	12	69,4	12	66,7	61	38,5	61	433,0
<i>Akima</i>	4	23,0	4	20,9	12	67,5	12	69,7	61	377,3	61	420,3

Nota-se que para o modelo de O'Connor converge em um número maior de iterações para baixas correntes, porém apresenta convergência para correntes elevadas, diferentemente dos modelos de Marrocco e exponencial.

Para os modelos interpoladores (*spline* cúbica e Akima) nota-se uma lenta convergência, devido ao fato de grande oscilação na curva dv/dB^2 .

Nota-se também um maior tempo de processamento necessário para convergência quando se utilizou o método de resolução de sistemas lineares *ICCG* ao invés do *SuperLU*, contrariando os exemplos anteriores. Este fato está relacionado à esparsidade da matriz, que nesse caso não é acentuada. Nesse caso apresenta convergência mais lenta.

A Fig. 81 mostra o mapa de cores para a indução magnética obtida com $NI = 368,1\text{A.e}$, utilizando-se *spline* cúbica para modelagem da curva $\mu(B^2)$. Na Fig. 83 é mostrada um esboço das linhas de campo (equipotenciais).

Fig. 81 Indução magnética no motor de relutância chaveado para $NI = 368,1\text{A.e}$ com *spline* cúbica para modelagem da curva $\mu(B^2)$.

Os resultados de desempenho com os métodos de Newton-Raphson, Newton-Raphson com busca linear (NR-*LineSearch*) e Newton-Raphson utilizando aproximações quadráticas sucessivas (NR-*BrentMethod*) são dados na Tabela 13, para uma excitação de $NI = 200\text{A.e}$.

Tabela 13 Comparação entre as variantes do método de Newton-Raphson com $NI = 200A.e$ e modelo de Marrocco.

<i>Método</i>	<i>Nº de iterações – tempo(s)</i>
<i>NRTradicional</i>	4 – 20,4
<i>NRLineSearch</i>	4 – 32,4
<i>NRBrentMethod</i>	4 – 33,2

Da mesma forma que para o eletroímã, verifica-se que o número de iterações para os três métodos é igual, devido ao fato do fator de relaxação ótimo ser próximo de 1, como pode ser visto na Fig. 82.

Utilizando elementos de segunda ordem, o método de N-R não converge para o motor de relutância chaveado.

(a)

(b)

Fig. 82 Evolução das iterações dos métodos de Newton-Raphson em função do fator de relaxação (a) e da tolerância (b) na simulação do núcleo ferromagnético com entreferro com $NI = 100A.e$, utilizando *spline* cúbica.

Fig. 83 Linhas de campo no motor de relutância chaveado, com $NI= 368,1\text{A.e}$ e spline cúbica para ajuste da curva $\propto B^2$.

8.6 Estudo do efeito do método de resolução do sistema linear no método de Newton-Raphson

De forma a se obter um menor custo computacional para a resolução do problema proposto, pode ao invés de aplicar métodos que diminuam o número de iterações do método de Newton-Raphson, como o *NR-LineSearch* e o *NR-BrentMethod*, pode-se aplicar métodos mais eficientes de forma que o sistema $A.x = b$, conforme equação (146), seja resolvido de forma mais eficiente.

Uma alternativa proposta é a utilização do método *wavelet-based multigrid*, que tem mostrado excelentes performances com relação ao custo computacional, (Pereira; Verardi; Nabeta, 2006).

O método *wavelet-based multigrid* é um pré-condicionador que é aplicado a sistemas matriciais e usa métodos de compactação de imagem de forma a diminuir o tamanho de matrizes, de forma que a nova matriz obtida após a compactação seja equivalente matriz anterior. Dessa forma minimiza o tempo de resolução de sistemas lineares.

Aplicando-se o método *wavelet-based multigrid* para as matrizes geradas pelo MEF e em seguida aplicando-se um método iterativo para a resolução do sistema (147), para $NI = 368,1A$ obtém-se uma convergência em 9 iterações utilizando-se o método de Newton-Raphson com fator de relaxação igual a 1, e o modelo de O'Connor para o aço S1008, para modelagem da curva $\mathcal{N}(B^2)$.

O impacto final do método de resolução do sistema (148) no método de Newton-Raphson foi verificada da seguinte forma: inicialmente variou-se o método linear e verificou-se o número de iterações necessárias para sua convergência e tempo de processamento em um passo do método N-R.. Assim tem-se o número total de iterações realizadas pelo método linear para todas as iterações do N-R., e o tempo total de processamento.

A Tabela 14 mostra os resultados comparando-se os métodos *CG* utilizando o *wavelet-based multigrid* como pré-condicionador, *ICCG*, *BiCGSTAB*, *BiCGSTAB* utilizando o *wavelet-based multigrid* como pré-condicionador e *BiCGSTAB* utilizando Cholesky como pré-condicionador, para resolução do sistema (149), e o impacto da variação do *solver* linear no método de Newton-Raphson

Tabela 14 Impacto da variação do método de resolução do sistema linear no método de Newton-Raphson.

<i>Método Numérico</i>	<i>Pré-condicionador</i>	<i>Média de iterações lineares para cada passo do N.R.</i>	<i>Total de iterações lineares</i>	<i>Tempo(s), para convergência do N.R.</i>	<i>Tempo relativo ao linear solver mais rápido</i>
<i>CG</i>	<i>Wavelet-based multigrid(AMG)</i>	<i>104</i>	<i>936</i>	<i>108,718</i>	<i>0,578</i>
<i>CG</i>	<i>Incomplete Cholesky(IC)</i>	<i>180</i>	<i>1620</i>	<i>50,75</i>	<i>1,0</i>
<i>BiCGSTAB</i>	<i>Wavelet-based multigrid(AMG)</i>	<i>49</i>	<i>441</i>	<i>95,094</i>	<i>0,273</i>
<i>BiCGTAB</i>	<i>Incomplete Cholesky(IC)</i>	<i>172</i>	<i>1548</i>	<i>70,329</i>	<i>0,956</i>

A convergência obtida para os métodos *ICCG* e *wavelet-based multigrid* pode ser observada na Fig. 84.

Fig. 84 Resultados obtidos para convergência dos métodos *CG* utilizando o *wavelet-based multigrid* como pré-condicionador, *ICCG*, *BiCGSTAB*, *BiCGSTAB* utilizando o *wavelet-based multigrid* como pré-condicionador e *BiCGSTAB* utilizando Cholesky como pré condicionador, para o passo 1 do N-R.

Nota-se que segundo a Tabela 14 pode-se obter uma melhora significativa quando se aplica o pré-condicionador Cholesky com relação ao *wavelet-based multigrid*, como pode ser visto para o caso do método *BiCGSTAB*, onde a diferença chega a 1107 iterações porém nota-se uma perda de tempo quando comparado aos métodos utilizando o pré-condicionador *IC*. Esse fato se deve a implementação inicial que não está otimizada, ao contrário da implementação do *IC* se encontram na forma otimizada.

Porém, levando-se em conta o número de iterações nota-se que o método pré-condicionador *wavelet-based multigrid* tem um grande potencial, quando comparado ao *ICCG* para a resolução de sistemas lineares utilizados pelo método de Newton-Raphson, (Pereira; Rodrigues Filho; Silva; Nabeta, 2007).

8.7 Circuito magnético utilizando ímã permanente

8.7.1 Descrição

O quarto caso teste corresponde a um circuito magnético apresentado em (Bastos; Sadowski, 2003), que apresenta solução analítica. As dimensões correspondentes ao circuito magnético

são dadas na Fig. 85.

Fig. 85 Circuito magnético com ímã permanente de profundidade 2cm.

O ímã permanente da Fig. 85 é do tipo ferrite com indução magnética residual $B_r = 0,4\text{T}$. O circuito apresenta ainda cinco entre ferros com dimensões de 0,2cm e 0,4cm.

O material do ao núcleo do circuito magnético é o aço carbono S45C. Neste exemplo não há bobinas e a excitação é produzida pelo próprio ímã permanente.

Além de contemplar ímãs permanentes, este exemplo servirá para validar numericamente os resultados da simulação.

8.7.2 Resultados

Foram realizadas duas simulações do circuito magnético da Fig. 85. Na primeira simulação assumiu-se uma permeabilidade constante no aço, de valor $\mu = 10.000\mu_o$. Na segunda utilizou-se a característica do aço carbono S45C como material, levando-se em conta, assim, a não linearidade.

Os dados da discretização em elementos finitos são mostrados na tabela Tabela 15.

Tabela 15 Dados das malha de elementos finitos do circuito magnético com ímã permanente.

<i>Elementos</i>	<i>8116</i>
<i>Nós</i>	<i>4092</i>

8.7.2.1 Simulação com núcleo linear

A simulação considerando o núcleo linear foi realizada com $\mu = 10.000\mu_0$. O método de resolução do sistema linear foi o *ICCG* com $tol = 10^{-7}$.

O traçado da indução magnética resultante é ilustrado nas Fig. 86 e Fig. 87.

Fig. 86 Indução magnética no circuito magnético com ímã permanente e com núcleo linear.

A distribuição das linhas de campo obtida é dada na figura a seguir:

Fig. 87 Linhas de campo no circuito magnético com ímã permanente.

Uma comparação entre os resultados obtidos pelo cálculo analítico ($\mu=10.000\mu_0$) e a simulação pelo MEF para a indução magnética pode ser visualizada na Tabela 16 para os entreferos 1, 2, 3 e 4, da Fig. 85.

Tabela 16 Tabela comparativa entre os resultados analítico e numérico da indução magnética nos entreferos 1, 2, 3 e 4 do circuito magnético das Fig. 85, utilizando-se $\mu=10.000\mu_0$.

<i>Entreferro \ B(T)</i>	<i>Analítico</i>	<i>MEF</i>	<i>Erro (%)</i>
<i>1</i>	<i>0,343</i>	<i>0,337</i>	<i>0,6</i>
<i>2</i>	<i>0,514</i>	<i>0,530</i>	<i>1,6</i>
<i>3</i>	<i>0,274</i>	<i>0,241</i>	<i>3,3</i>
<i>4</i>	<i>0,137</i>	<i>0,144</i>	<i>0,7</i>

8.7.2.2 Simulação com núcleo real

A simulação considerando núcleo não linear foi realizada com os dados do aço carbono S45C. Foi utilizado o modelo de O'Connor como modelo de curva de magnetização.

O método de resolução do sistema não linear é o método de Newton-Raphson com fator de relaxação igual a 1 e com critério de parada $tol = 10^{-4}$.

A convergência foi obtida após 6 iterações em 24 segundos. A evolução das iterações é mostrada na Fig. 88.

Fig. 88 Evolução das iterações do método de N-R. no caso do circuito magnético da Fig. 85.

Por se tratar de um material que apresenta saturação, a indução magnética produzida pelo ímã permanente decresce, fato este que pode ser visualizado na figura correspondente à indução magnética do circuito, dada na Fig. 89.

O traçado da indução magnética para a indução de material não linear é mostrada na Fig. 89. Nota-se um nível menor de induções com relação ao caso linear, Fig. 86.

Fig. 89 Indução magnética no circuito magnético com ímã permanente e núcleo não linear.

As linhas de campo nos entre ferros 1, 2, 3 e 4 podem ser visualizadas detalhadamente na Fig. 90.

Fig. 90 Linhas de campo nos entreferros 1, 2, 3 e 4 do circuito magnético com ímã permanente..

Capítulo 9

9. CONCLUSÃO E DESENVOLVIMENTOS FUTUROS

O uso de equações diferenciais para o tratamento de fenômenos relativos ao comportamento da natureza como foi dito anteriormente no capítulo 1 é amplamente empregado em todas as áreas da ciência. Em especial este trabalho está situado dentro do amplo escopo do eletromagnetismo que tem sua formulação clássica dada pelas equações de Maxwell.

Dessa forma neste trabalho foi apresentada a formulação matemática do comportamento dos campos eletromagnéticos utilizando a formulação do método dos elementos finitos para casos magnetostáticos, ou seja, onde a corrente elétrica que está relacionada ao campo magnético não possui variação com relação ao tempo.

Também foi apresentado um estudo sobre modelagem de curvas de magnetização νB^2 para materiais com características não lineares, ou seja, materiais com características ferromagnéticas que possuem um ponto de saturação com relação a sua permeabilidade magnética, conforme foi detalhado no capítulo 5.2. Os modelos correspondentes à modelagem da curva de magnetização estudados foram classificados em duas categorias principais, analíticos e de interpolação. Dentro dos modelos analíticos analisados estão: de O'Connor, modelo de Marrocco e modelo exponencial. Para os modelos de interpolação foram analisados a *spline* cúbica e o método de Akima.

Os modelos para curva de magnetização foram analisados para os aços S45C e S1008 em cada modelo verifica-se a precisão dos mesmos, que varia ao longo da curva. Dessa forma reafirma-se a importância de se ter várias opções para o tratamento da não linearidade dos materiais.

Os modelos do tipo interpoladores apresentaram um resultado inferior quando comparado o número de interações necessárias para alcançar o critério de parada no método de N-R e tempo de computação, segundo Tabela 5, Tabela 8 e Tabela 12, e também problemas de não

convergência segundo Fig. 43 e Fig. 47. Porém, quando comparados os erros relativos para cada ponto, os métodos interpoladores apresentam vantagem por possuírem erro relativo nulo.

Os métodos analíticos apresentam-se superiores aos interpoladores por serem mais robustos, convergindo independentemente dos pontos da curva de magnetização do material, porém não se ajustam perfeitamente à curva, apresentando erros para os pontos, segundo Fig. 34, Fig. 38 e Fig. 42 para o aço S45C e Fig. 54, Fig. 58 e Fig. 62 para o aço S1008. Os modelos analíticos também apresentam a desvantagem do cálculo de constantes, que são normalmente complicados.

Além do estudo magnetostático e do tratamento da não linearidade de materiais, também foram abordados os materiais do tipo ímãs permanentes e uma formulação pelo MEF para estes materiais, tendo em vista o seu amplo uso na engenharia atual. Dessa forma, utilizou-se um caso teste que possui solução analítica de forma a comparar o resultado obtido pelo MEF com a solução real do problema.

Realizou-se um cálculo considerando um circuito magnético real (com curva de magnetização dada pela Fig. 32) e um cálculo utilizando um núcleo considerado ideal ($\mu = 10.000\text{H/m}$), e verificou-se a conformidade dos resultados obtidos analiticamente com os resultados obtidos através da formulação apresentada no capítulo 6.

Com relação ao tipo de método numérico a ser aplicado de forma a se resolver o sistema de equações gerado pelo método dos elementos finitos, verificou-se a necessidade de um processo iterativo, visto que a permeabilidade magnética do material ferromagnético varia com relação ao campo magnético. Dessa forma optou-se por utilizar o método de Newton-Raphson devido ao fato de sua convergência ser quadrática próxima a solução, ao contrário do método das aproximações sucessivas, que converge mais lentamente.

Ainda com relação ao método de Newton-Raphson para a resolução do sistema não linear de equações, foram testadas algumas variantes utilizando o fator de relaxação α . Dessa forma, verificou-se que o processo de convergência pode ser acelerado consideravelmente segundo Tabela 6 e Tabela 9, assim como o tempo de computação relativo ao método. As principais variantes do método de Newton-Raphson testadas foram os métodos com busca linear e o método utilizando aproximações quadráticas sucessivas. Ambos têm o objetivo de obter o

fator de relaxação α ótimo através da variação desse fator com a norma quadrática do resíduo gerado pelo método dos elementos finitos, equação (49).

Como conclusão aos testes realizados, pode-se afirmar que uma maior precisão na modelagem de dispositivos eletromagnéticos só é conseguida à custa de menor desempenho no N-R. Por essa razão, os métodos interpoladores, que oferecem maior precisão por modelar de maneira mais fiel as características dos materiais ferromagnéticos, necessitam do fator de relaxação no N-R para acelerar sua convergência.

Tem-se então um compromisso a ser assumido na escolha do método: desempenho *versus* precisão, que dependerá sempre da decisão do usuário.

De um modo geral a utilização do MEF se justifica pela sua precisão em modelar adequadamente os dispositivos eletromagnéticos.

Entretanto, essa precisão só é garantida se as características físicas dos materiais, que correspondem aos dados de entrada para o método, que representam corretamente o comportamento do material.

Sendo assim, os modelos interpoladores devem ser priorizados, juntamente com algum método de determinação do fator de relaxação ótimo a fim de se reduzir as iterações do N-R. Os demais modelos devem ser usados quando ocorrer divergência com os métodos interpoladores.

O último estudo realizado utilizou um método de resolução de sistemas lineares mais eficiente, de forma a se acelerar o método de Newton-Raphson. Dessa forma utilizou-se o método ainda em desenvolvimento, *wavelet-based multigrid*, e se obteve um desempenho melhor, comparado ao *ICCG*, com relação ao número de iterações. No entanto com relação a tempo de processamento o método *wavelet-based multigrid* apresenta resultados inferiores, devido ao fato de não estar ainda computacionalmente otimizado, por ser um método recente, ainda em fase de desenvolvimento, ao contrário do método *ICCG*.

Um passo importante a ser dado em seguida a esse trabalho é o desenvolvimento e aplicação da formulação magnetostática em três dimensões, o que possibilitaria uma abrangência maior e uma maior proximidade com casos testes reais.

Além da formulação magnetostática pelo MEF em três dimensões, o emprego das técnicas de resolução de sistemas não lineares, tais como a minimização do resíduo de forma a se obter o fator de relaxação ótimo, em uma formulação 3D seria necessária. Assim também como a formulação para o tratamento de ímãs permanentes.

Também é desejável um estudo mais aprofundado de novos métodos de resolução de sistemas de equações, tais como o método *wavelet-based multigrid*, que vem apresentando excelentes resultados para sistemas matriciais esparsos.

Dessa forma, o trabalho futuro a ser desenvolvido é grande e está longe de seu final, tendo em vista também recentes descobertas da ciência, o que torna a tarefa de simular a realidade através de um computador utilizando equações matemáticas um trabalho sem fim.

LISTA DE REFERÊNCIAS

- ABE, N. M. . **Acoplamento circuito elétrico – elementos finitos em regime transitório utilizando a metodologia de Dommel**. 1997. p. 76 Tese (doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo 1997.
- AKIMA, H. . **A new method of interpolation and smooth curve fitting based on local procedures**. Journal of the Association for Computing Machinery, vol 17, no 4, October 1970, p. 589-602.
- BASTOS, J. P. A. , SADOWSKI, N. , **Eletromagnetic modelling by finite element method**. New York: Marcel Dekker, Inc, 2003. p. 496.
- BINNS, K. J. , JABAR, M. A. , BARNARD, W. R. . **Computation of magnetic field of permanent magnets in iron cores**. Proceedings of the institution of electrical engineers, v. 122, no. 12, December 1975, p. 1377-1381.
- BRAUER, J. R. . **Simple equations for the magnetization and reluctivity curves of steel**. IEEE Transactions on magnetics, jan 1975, vol 11, issue 1, p. 81-81.
- BRAUER, J. R. ; LARKIN, L. A. ; OVERBYE, V. D. . **Finite element modeling of permanent magnet devices**. Journal of Applied Physics, vol. 55, no. 6, March 1984, p. 2183-2185.
- BRENT, R. P. . **Algorithms for minimization without derivatives**. Englewood Cliffs, NJ: Prentice-Hall, 1973, ch. 5.
- CONNOR, D. J. ; SHELLY, F. B. ; HEIN, D. E. , **Mathematical model of a magnetoresistive read head for magnetic tape drive**. IEEE Transactions on magnetics, vol MAG-21, no 5, September 1985, p. 1560-1562.
- DEITEL, H. M. , DEITEL, P. J. ; **C++ how to program**. São Paulo: Prentice Hall, 2001. p. 1098.
- FLUX2D 9.10 - CAD Package for Electromagnetic and Thermal Analysis using Finite Elements: User's Guide, vol 2.
- FOUAD F. A. , NEHL T. W. , DEMERSASH N. A. . **Permanent magnet modeling for use in vector potential finite element analysis in electrical machinery**. IEEE Transaction on magnetics, vol. 17, no. 6, November 1981, p. 3002-3004.
- FUJIWARA, K ; OKAMOTO, Y. ; KAMEARI, A. **The Newton-Raphson method accelerated by using a line search – Comparison between energy functional and residual minimization**. IEEE Transaction on magnetics, vol 41, no 5, may 2005, p. 1724-1727.
- GLOSVINSKI, R.; MARROCCO, A. **Finite elements approximation and iterative methods of solution for 2-D non-linear magnetostatic problems**. Anais do Compumag. Oxford 1976, p. 110-125.

- GRIFFITHS, D. J. , **Introduction to electrodynamics**. New Jersey: Prentice Hall, 1989. p. 532.
- JÄNICKE, L. ; KOST, A. **Convergence properties of the Newton-Raphson method for nonlinear problems**. IEEE Transactions on magnetics, vol 34, no 5, September 1998, p. 2505-2508.
- KOH, C. S. ; RYU, J. S. ; FUJIWARA, K. **Convergence acceleration of the Newton-Raphson method using successive quadratic function approximation of residual**. IEEE Transaction on magnetics, vol 42, no 4, april 2006, p. 611-614.
- LABBE, N. ; **Modélisation du couplage magneto-thermique appliqué aux ralentisseurs électromagnétiques**. 1996. 188 p. Tese (Doutorado)-Institut National Polytechnique de Grenoble. Grenoble, 1996.
- MARTIN, H. C.; CAREY, G. F. **Introduction to finite element analysis**. New York: McGraw-Hill, 1973. 386 p.
- MAXWELL, J. C. , **A treatise on electricity and magnetism vol 1**. Oxford: Clarendon, 1873. 489 p.
- MAXWELL, J. C. , **A treatise on electricity and magnetism vol 2**. Oxford: Clarendon, 1873. 518 p.
- Electrical Engineering Simulation Software, version 3.1.04: Ansoft Corporation 2002.
- MIEKO, N. A. , **Simulação de estruturas ferromagnéticas com ímãs permanentes pelo método dos elementos finitos bidimensional: uma nova abordagem**. 1992. 106 p. Dissertação (mestrado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo 1992.
- MIZRAHI, V. V. ; **Treinamento em linguagem C++**. São Paulo: Makron Books, 1994. 552 p.
- NAKATA, T ; TAKAHASHI, N. ; FUJIWARA, K. ; OKAMOTO, N. **Improvements of convergence characteristics of Newton-Raphson method for nonlinear magnetic field analysis**. IEEE Transactions on magnetics, vol. 28, no 2, march 1992, p. 1048-1051.
- NUSSENZVEIG, M. ; **Curso de física básica, vol 3**. São Paulo: Edgard Blücher LTDA, 2001, 323 p.
- PIRES, C. L. . **Simulação do sistema de tração elétrica metro-ferroviária**. 2006. 424 p. Tese (doutorado) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo 2006.
- Pereira, F. H. ; Verardi, S. L. L. ; Nabeta, S. I. ; **A wavelet-based algebraic multigrid preconditioner for sparse linear systems**. Submitted to appl math comput, Feb 2006, Elsevier.
- Pereira, F. H.; Rodrigues Filho, B. A.; Silva, V. C.; Nabeta, S. I.; Nonlinear magnetic field problems solution by a v-cycle wavelet-based algebraic multigrid preconditioned conjugate gradiente-like solvers. Anais do **COMPUMAG 2007 – 16th**

INTERNATIONAL CONFERENCE ON THE COMPUTATION OF ELECTROMAGNETIC FIELDS, Aachen, Germany, Jun 2007, Digest CD.

QISHAN, G. ; LIN, C. . **Field computation of permanent magnets with knee points**. IEE Proceedings, vol. 136, no. 6, November 1989, 275-279p.

RODEWALD V., KATTLER M. , WALL B. , BLANK R. , FERNEGEL W. , **Evaluation of alternative processing routes for Nd-Fe-B magnets**. http://magnet.ee.umist.ac.uk/reports/P6/p6_1.html .Acessado 30/01/2007;

SAAD, Y. ; **Iterative methods for sparse linear systems**. 2 ed. Philadelphia: Society for Industrial Applied Mathematics, 2000, 447 p.

SILVESTER, P. P.; FERRARI, R. L.; **Finite elements for electrical engineers**. Great Britain: Cambridge University Press, 1990. 344 p.

SINNECKER J. P. , **Materiais magnéticos doces e metais ferromagnéticos amorfos**. Revista brasileira de ensino de física, vol. 22, no 3, setembro 2000, 396-405p.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T. ; SILVA, L. H. M. ; **Cálculo numérico: características matemáticas e computacionais dos métodos numéricos**. São Paulo: Prentice Hall, 2003. 354 p.

UEBERHUBER, C. W.; **Numerical computation, methods, software and analysis, vol 1**. New York: Springer, 1997. 474 p.

WEISS, J. . **Finite element analysis of magnetic fields with permanet magnet**. IEEE Transaction on Magnetics, vol. 20, n. 5, September 1984,. 1933-1935 p.

ZHAO, C. ; WANG, Y. . **FEM analysis of auxiliary poles of IPM synchronous machine with “flux concentration function”**. International conference on power eletronics and drives system, vol. 2, November 2005, p. 1003-1008.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, Y. K.; **The finite element method in structural and continuum mechanics**. New York: McGraw-Hill, 1967. 272 p.