UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO–USP
ESCOLA POLITÉCNICA

Felipe Proença de Albuquerque

**Estimação dos Parâmetros de Linhas de
Transmissão por meio de Técnicas de
Identificação de Sistemas**

São Paulo
2021

Felipe Proença de Albuquerque

**Estimação dos Parâmetros de Linhas de
Transmissão por meio de Técnicas de
Identificação de Sistemas**

Versão Corrigida

Dissertação de mestrado apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para a obtenção do título de Mestre
em Ciências

Área de concentração: Sistemas Elétricos de Potência

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Coelho Marques da Costa

Coorientador: Prof^a. Dr^a. Luisa Helena Bartocci Liboni Negri

São Paulo

2021

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

Este exemplar foi revisado e corrigido em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 02 de Setembro de 2021

Assinatura do autor: Felipe Proença de Albuquerque

Assinatura do orientador: [Assinatura]

Catálogo-na-publicação

de Albuquerque, Felipe Proença

Estimação dos Parâmetros de Linhas de Transmissão por meio de
Técnicas de Identificação de Sistemas / F. P. de Albuquerque -- versão corr. --
São Paulo, 2021.
118 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São
Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1.Linhas de transmissão de energia elétrica 2.Identificação de sistemas
3.Estimação de parâmetros 4.Otimização convexa I.Universidade de São Paulo.
Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Energia e Automação
Elétricas II.t.

Agradecimentos

A Deus

Ao processo n° 2019/05381-9, Fundação de Amparo a Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP), pelo apoio financeiro que me permitiu a conclusão desta pesquisa.

À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) pelo auxílio no desenvolvimento do trabalho.

Ao orientador, Prof. Dr. Eduardo Coelho Marques Costa, por me ajudar em todas as esferas e tornar possível esse trabalho.

À coorientadora, Prof^a. Dr^a. Luisa Helena Bartocci Liboni, por toda competência e auxílio que fizeram da pesquisa um aprendizado constante.

À minha família, pelo suporte dado durante todo o período.

À minha companheira, Camille Rudoi, por toda ajuda e parceria em todos momentos.

Ao meu amigo, Rafael Nascimento, pelas conversas e estudos que ajudaram a enriquecer o conteúdo deste trabalho.

Aos membros da banca pelas sugestões e correções.

Resumo

Albuquerque, Felipe P. de **Estimação dos Parâmetros de Linhas de Transmissão por meio de Técnicas de Identificação de Sistemas**. 118 p. Dissertação de mestrado – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, 2021.

A precisão com que os parâmetros de uma linha de transmissão trifásica são conhecidos está diretamente relacionada com a confiabilidade na operação de um sistema elétrico. Tais parâmetros são utilizados com entrada em relés digitais que garantem a proteção dos componentes do sistema frente à fenômenos transitórios, como curtos-circuitos, e, além disso, os parâmetros da linha são usados por softwares de fluxo de potência que monitoram em tempo real o carregamento dos componentes do sistema.

Neste trabalho, são estudadas técnicas de estimação dos parâmetros de uma linha de transmissão baseadas nas medições realizadas nos terminais emissor e receptor da linha. Para tanto, foi desenvolvida uma metodologia de modelagem do ruído nas medições que considera as particularidades de cada equacionamento proposto. Dessa forma, para cada modelagem, foi proposta uma solução, empregando diferentes técnicas de identificação de sistemas baseadas na minimização do erro quadrático médio.

Por fim, foi possível traçar um comparativo entre cada uma das soluções propostas neste trabalho e aquelas similares já desenvolvidas em outras referências.

Palavras-chave: Estimação dos parâmetros de uma linha de transmissão; Identificação de Sistemas; Modelagem do ruído em medições elétricas; Método dos mínimos quadrados.

Abstract

Albuquerque, Felipe P. de **Transmission Line Parameters Estimation through System Identification Techniques**. 118 p. Master Thesis – Polytechnic School, University of São Paulo, 2021.

The accuracy with which the parameters of a three-phase transmission line are known is directly related to the reliability in the operation of an electrical system. Such parameters are used in the parameterization of relays that guarantee the protection of system components against transient phenomena, such as short circuits, and, besides, the line parameters are used by power flow software that monitoring in real-time the loading of system components.

In this work, techniques for estimating the parameters of a transmission line are studied based on measurements made at the sender and receiver terminals of the line. For this purpose, a methodology of noise modeling in the measurements was developed that considers the particularities of each proposed equation. Thus, for each modeling, a solution was proposed, employing different system identification techniques based on the minimization of the mean square error.

Finally, it was possible to trace a comparison between each of the solutions proposed in this work and those similar ones already developed in other references.

Keywords: Transmissions line parameters estimation; System Identification; Noise modeling in electric measures; Least square methods.

Lista de ilustrações

Figura 1 – Configuração típica para aquisição de fasores em um sistema elétrico (MELIOPOULOS et al., 2006).	29
Figura 2 – Medições de ângulo por meio de PMUs (DECKER et al., 2006).	29
Figura 3 – Medições da amplitude da tensão por meio de PMUs (DECKER et al., 2006).	30
Figura 4 – Circuito π para linhas curtas	52
Figura 5 – Circuito π para linha média	53
Figura 6 – Circuito π para linha de comprimento médio com condutância de perdas	53
Figura 7 – Circuito π com corrente em ramo central	54
Figura 8 – QQ -plot para as amostras de I_{ei} caso $\alpha = 0,1\%$ e $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	68
Figura 9 – Estrutura Utilizada para Simulação no <i>Simulink</i>	78
Figura 10 – Histograma Obtido para a Susceptência b	79
Figura 11 – Histograma Obtido para a reatância X	81
Figura 12 – Histograma Obtido para a resistência R	81
Figura 13 – Valores obtidos para os parâmetros em função do número de realizações	82
Figura 14 – Histograma Obtido para a reatância X usando TLS.	84
Figura 15 – Histograma Obtido para a resistência R usando TLS	85
Figura 16 – Análise da Convergência do Método de Levenberg-Marquardt	88
Figura 17 – Critério de Parada utilizado na função <i>lsqnonlin</i>	88
Figura 18 – Histograma Obtido para a Susceptência b	89
Figura 19 – Histograma Obtido para a Resistência R	90
Figura 20 – Histograma Obtido para a Reatância X	90
Figura 21 – Desvio relativo em função da potência da carga	95
Figura 22 – Desvio relativo em função da potência da carga	96
Figura 23 – Análise da influência de α na estimação para $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$	97
Figura 24 – Análise da influência de β na estimação para $\alpha = 1 \%$	97

Lista de tabelas

Tabela 1 – Análise da variação de α sobre os p-valores no SWT, com $\beta = 8 \cdot 10^{-3}$	67
Tabela 2 – Análise da variação de β sobre os p-valores no SWT, com $\alpha = 1\%$	67
Tabela 3 – Cálculo dos coeficientes de Pearson para $\alpha = 1\%$ e $\beta = 8 \cdot 10^{-3}rad$	68
Tabela 4 – Coeficiente de Pearson entre V_{sr} e V_{si} em função de α	69
Tabela 5 – Parâmetros da linha de transmissão com comprimento médio	77
Tabela 6 – Indicadores dos parâmetros estimados na solução MVU para 100000 amostras.	82
Tabela 7 – Comparação entre o estimador OLS e o MVU para 100000 amostras.	83
Tabela 8 – Medidas estatísticas para 100000 realizações e $\sigma = 0,12$ usando TLS.	85
Tabela 9 – Comparação entre os desvios relativos para nível de ruído 1%.	86
Tabela 10 – Comparação entre os desvios relativos para nível de ruído 0,2%.	86
Tabela 11 – Medidas estatísticas e desvio percentual para 1000 realizações.	91
Tabela 12 – Desvio relativo obtido para nível de ruído de 12%	91
Tabela 13 – Desvio relativo obtido para nível de ruído de 1%	91
Tabela 14 – Análise da influência do parâmetro inicial no desvio de cada parâmetro	92
Tabela 15 – Comparação com a solução apresentada em (WEHENKEL et al., 2020).	93
Tabela 16 – Medidas estatísticas e desvio percentual para 1000 realizações.	94
Tabela 17 – Estudo do viés de b em função do carregamento da linha	95

Lista de siglas

EQM Erro quadrático médio ou *Mean Square Error*

CRLB Limite Inferior de Cramer-Rao ou Cramer-Rao Lower Limit

FFT Transformada rápida de Fourier ou *Fast Fourier Transform*

GPS Sistema de posicionamento global ou *Global Positioning System*

MVU Estimador não viesado de mínima variância ou *Minimum Variance Unbiased Estimator*

OLS Método dos Mínimos Quadrados Ordinários ou *Ordinary Least Squares method*

PMU *Phasor Measurements Units*

PDF Função Densidade de Probabilidade ou Probability Density Function

SVD Decomposição em valores singulares ou *Singular Value Decomposition*

SCADA Sistema de supervisão e aquisição de dados ou *Supervisory Control and Data Acquisition*

Simulink *Simulation and model-based design*

TLS Método dos mínimos quadrados totais ou *Total Least Squares*

Sumário

1	INTRODUÇÃO	19
1.1	Motivação	19
1.2	Objetivos	20
1.3	Metodologia de Pesquisa	20
1.4	Estrutura do trabalho	21
2	ESTADO DA ARTE	23
2.1	Estimação de Parâmetros de Linhas de Transmissão	23
2.1.1	Utilização de PMUs em Sistemas Elétricos de Potência	27
2.1.2	Modelagem Computacional de medidas fasoriais obtidas por PMUs . . .	28
3	ASPECTOS TEÓRICOS SOBRE ESTIMAÇÃO	33
3.1	Teoria de Estimação	33
3.1.1	Limite Inferior de Cramer-Rao escalar	34
3.1.2	Limite de Cramer-Rao para vetor de parâmetros	35
3.1.3	Estimador não enviesado de mínima variância para o caso linear	36
3.2	Definição de norma e aplicação para vetores	37
3.3	Método dos mínimos quadrados ordinários	38
3.4	Método dos mínimos quadrados não lineares	40
3.4.1	Algoritmo de Levenberg-Marquardt	41
3.5	Decomposição em valores singulares	44
3.6	Teoremas da aproximação por menor posto	44
3.7	Método dos mínimos quadrados totais	47
3.7.1	Solução do TLS via decomposição em valores singulares	48
4	MODELAGEM DE LINHAS DE TRANSMISSÃO	51
4.1	Modelagem da linha de transmissão por meio de circuito π concentrado	51

4.2	Equacionamento fasorial do modelo π concentrado para linhas médias	54
5	MODELAGEM DO PROBLEMA DE ESTIMAÇÃO	59
5.1	Equacionamento do modelo exato para cada amostra	59
5.2	Modelos para o ruído nas amostras	61
5.2.1	Modelagem do ruído no vetor de saída com entradas não correlacionadas	62
5.2.2	Modelagem do ruído no vetor de saída considerando a natureza das amostras	62
5.2.3	Modelagem do ruído no vetor de saída e na matriz de observações . . .	63
5.3	Modelagem sobre o módulo e a fase da grandeza fasorial	64
5.4	Análise da projeção dos ruídos nos eixos real e imaginário . . .	65
5.5	Solução MVU	69
5.6	Solução via TLS	71
5.7	Solução usando método dos mínimos quadrados não lineares . .	72
5.7.1	Modelagem do ruído concentrada no vetor de saída	72
5.7.2	Modelagem do ruído no módulo e na fase da grandeza fasorial	74
6	RESULTADOS DE SIMULAÇÃO	77
6.1	Estrutura de simulação utilizada	77
6.2	Histogramas e valores obtidos para o estimador MVU	78
6.2.1	Histogramas e valores obtidos para o TLS	84
6.3	Solução utilizando mínimos quadrados não lineares aplicada a modelagem simplificada do ruído	86
6.3.1	Algoritmo desenvolvido para estimação dos parâmetros usando a função <i>lsqnonlin</i> do MATLAB	87
6.3.2	Construção dos histogramas para a Solução via método dos mínimos quadrados não lineares	89
6.3.3	Estudo da influência do valor inicial do parâmetro	91
6.4	Solução utilizando mínimos quadrados não lineares aplicada a modelagem polar do ruído	93
7	CONCLUSÕES	99
	REFERÊNCIAS	101

APÊNDICES 107

APÊNDICE A	–	TEOREMAS E IGUALDADES	109
A.1		Demonstração para o Teorema 4	109

A.2	Demonstração Teorema de Eckart-Young para Normal espectral	110
A.3	Demonstração do Teorema de Eckart-Young para a norma de Frobenius	112
A.4	Demonstração da solução do problema via TLS	113
A.5	Valores esperados das projeções dos erros para a modelagem completo do ruído	115
APÊNDICE B – MÍNIMOS QUADRADOS NÃO LINEARES . .		117
B.1	Parâmetros inseridos no método dos mínimos quadrados não lineares	117
B.2	Pseudocódigo do algoritmo implementado	118

Introdução

Neste capítulo, serão destacados os seguintes aspectos em relação ao trabalho desenvolvido: motivação para o estudo do cálculo dos parâmetros de uma linha de transmissão, objetivos a serem alcançados com os resultados e análises realizadas na pesquisa, metodologia empregada para se realizar os estudos e por fim será descrita a estrutura da dissertação.

1.1 Motivação

O conhecimento prévio das características de sistemas de potência é crucial para análise da confiabilidade e operação da rede como um todo, seja na geração, transmissão ou distribuição de energia elétrica. A precisão na qual tais parâmetros são identificados está diretamente relacionada ao desempenho do sistema em diversos aspectos, tais como: parametrização da proteção do sistema contra sobretensões; detecção e localização de faltas em redes aéreas e subterrâneas; coordenação de isolamento; características de propagação de surtos em linhas de transmissão; predição de possíveis transitórios eletromagnéticos e sobretensões; análise da estabilidade do sistema em função da potência demandada.

Quando os parâmetros de uma linha de transmissão não correspondem ao real estado do sistema para aquele momento, a parametrização dos relés pode ser comprometida, acarretando na diminuição ou no aumento das zonas de proteção primárias dos dispositivos. Além disso, muitos softwares de fluxo de potência utilizam os parâmetros de sequência positiva para determinar o estado do sistema por meio de alguns indicadores, tais como: carregamento das linhas de transmissão e dos transformadores, fluxo de potência reativa, potência fornecida por geradores e potência reativa gerada/consumida por bancos de capacitores e compensadores de linhas. Isso significa que, caso os parâmetros não representem de fato as características elétricas da linha, podem ocorrer fenômenos em regime permanente (sobretensão ou subtensão) que comprometam os componentes do sistema elétrico.

Portanto, para que os componentes de um sistema elétrico de potência operem dentro

de sua capacidade e para que as zonas de proteção dos relés sejam garantidas, faz-se necessário determinar os parâmetros de uma linha de transmissão com precisão maior que aquela apresentada pelos métodos eletromagnéticos clássicos.

1.2 Objetivos

- ❑ Pesquisar diferentes formas de se obter as medidas usadas para estimação dos parâmetros da linha (fasoriais ou no domínio do tempo).
- ❑ Apresentar diferentes formas de modelar as incertezas ou ruídos presentes nas medições de campo realizadas em sistemas elétricos de potência.
- ❑ Escolher, dentre as técnicas de identificação de sistemas bem estabelecidas e fundamentadas, aquelas que mais se adequam ao problema proposto.
- ❑ Desenvolver uma forma sistemática de obtenção dos parâmetros da linha de transmissão utilizando cada uma das técnicas de identificação de sistemas.
- ❑ Avaliar a capacidade de estimação dos parâmetros em cada método por meio de indicadores estatísticos e do desvio relativo em relação ao parâmetro real.
- ❑ Comparar os resultados obtidos com soluções já apresentadas em outras referências.

1.3 Metodologia de Pesquisa

Devido à grande complexidade de se obter dados experimentais de linhas de transmissão de alta tensão, optou-se por representar o equivalente do sistema elétrico em um software de simulação computacional. Especificamente, foi escolhido o *toolbox Simspace* do *Simulink*. Por meio dessa abordagem, é possível obter os valores de tensão e corrente em cada um dos terminais da linha de transmissão interligada ao sistema elétrico e ainda gerar artificialmente o ruído nas amostras obtidas, conforme se espera para um sistema real composto de instrumentos de precisão limitada.

Ao longo do trabalho, serão abordados diversos algoritmos de estimação de parâmetros, tais como: estimador não viesado de mínima variância, mínimos quadrados totais e mínimos quadrados não-lineares por meio do algoritmo de Levenberg-Marquardt.

Por fim, os resultados dos métodos de estimação foram apresentados, quando possível, utilizando histogramas que representam a saída a cada realização e analisados por meio de indicadores estatísticos (média e desvio-padrão) e pelo desvio relativo em relação ao parâmetro real.

1.4 Estrutura do trabalho

No Capítulo 2, são apresentados os conceitos e definições que dão suporte teórico aos métodos desenvolvidos ao longo do trabalho. Cabe ressaltar que, nessa parte, são apresentados os conceitos de estimação, que têm um viés estocástico, e os conceitos de álgebra linear que serão empregados posteriormente.

O Capítulo 3 é dedicado ao estudo das linhas de transmissão e seus diferentes modelos. Além de apresentar os modelos, também são desenvolvidos os diferentes equacionamentos fasoriais utilizados ao longo do trabalho.

Ao longo do Capítulo 4 é apresentada uma extensa revisão bibliográfica a respeito do tema da estimação dos parâmetros de linhas de transmissão, considerando diversos modelos e para diversas técnicas distintas. Cabe ressaltar que esse é um tema corrente de pesquisa. Portanto, pode haver uma diferença entre o que foi apresentado aqui e o real estado da arte na data de publicação deste trabalho.

No Capítulo 5, são apresentados dois aspectos fundamentais do trabalho: a transformação do problema contínuo em um problema discreto e a modelagem do ruído nas medidas elétricas. Vale ressaltar que a modelagem do ruído é apresentada de diversas formas distintas. Isso se deve ao fato de que cada uma delas permite a obtenção da solução por um método diferente. Além das modelagens para o ruído, são apresentadas as soluções teóricas a serem implementadas para cada uma delas.

O Capítulo 6 é dedicado a descrever a estrutura de simulação utilizada e apresentar os resultados numéricos de cada uma das soluções propostas no Capítulo 5. Neste capítulo, são fornecidos os histogramas obtidos para cada um dos parâmetros em cada solução. Além disso, são apresentados gráficos que ilustram a convergência dos métodos em relação a diversos aspectos.

Por fim, no Capítulo 7 são apresentadas as conclusões a respeito do trabalho desenvolvido e os aspectos que permitem a continuidade do mesmo.

Estado da arte

Nesta parte do trabalho serão apresentados alguns aspectos importantes de trabalhos já realizados no assunto de estimação de parâmetros de linhas de transmissão. Pretende-se apresentar o estado da arte do assunto, bem como as técnicas que se mostraram mais eficientes na estimação dos parâmetros de uma linha de transmissão e em que circunstâncias elas se mostraram mais eficazes.

2.1 Estimação de Parâmetros de Linhas de Transmissão

Os parâmetros de linhas de transmissão aéreas são convencionalmente calculados em função da estrutura física e geométrica das torres e condutores. Fatores como a altura dos condutores, geometria das torres, características do solo e dos condutores influenciam o cálculo. Vale ressaltar ainda que deve-se levar em conta o efeito da corrente de retorno pelo solo e o efeito pelicular nos condutores (HOFMANN, 2002), (MONTEIRO et al., 2013).

Os métodos convencionais utilizados no cálculo dos parâmetros de linhas de transmissão aéreas são baseados em diversas aproximações do meio em que a linha se encontra imersa. Por exemplo, a permissividade elétrica pode variar de acordo com a umidade e com variações na isolamento elétrica ao longo da transmissão, devido ao efeito corona (AHMUDA, 2019) ou mesmo defeitos nas cadeias de isoladores. Em geral, os métodos convencionais de cálculo dos parâmetros consideram a resistividade do solo homogênea. No entanto, existem grandes variações em função da umidade e formação geológica do solo ao longo da linha de transmissão (MOLIN; FAULIN, 2013). Ademais, a estrutura física e geométrica da linha são também aproximadas. Por exemplo, a flecha e resistividade dos condutores variam em função da temperatura, relevo, diferentes estruturas das torres ao longo da transmissão, entre outros aspectos. Portanto, tais aproximações podem resultar em diversas imprecisões no cálculo da matriz de impedância e admitância

de linhas de transmissão, que por sua vez, influenciam no desempenho não somente da linha de transmissão, mas no desempenho de todo sistema elétrico.

Outro procedimento para identificação dos parâmetros elétricos de linhas de transmissão é por meio de estimação fazendo uso de medições de corrente e tensão nos terminais. Essas medições podem ser obtidas de forma síncrona por meio de *Phasor Measurements Units* (PMU), ou então por meio de registros de faltas obtidos por relés digitais no domínio do tempo, com base nas formas de onda de corrente e tensão durante a falta, microssegundos antes da atuação da proteção do sistema. (ZIVANOVIC, 2006),(INDULKAR; RAMALINGAM, 2008).

Teoricamente, a estimação de parâmetros de linhas de transmissão a partir de medições síncronas em ambos os terminais aparenta ser um processo simples e preciso. No entanto, do ponto de vista prático e com base em vários métodos disponíveis na literatura técnica, a estimação de parâmetros está longe de ser um processo trivial. Cada método de estimação apresenta desempenho variável, dependendo das características do sistema de transmissão, perfil instantâneo de carga, estado do sistema (em regime permanente ou durante transitórios de corrente e tensão).

No grupo dos trabalhos que utilizam as medições fasoriais obtidas por PMUs, destaca-se o trabalho realizado em (WILSON et al., 1999). Nele, os autores propuseram a obtenção dos parâmetros ABCD do quadripolo associado a linha de transmissão por meio de medidas experimentais realizadas em uma linha de transmissão de 525 kV. Ao final, os resultados obtidos foram verificados por meio da comparação entre o fluxo de potência calculado e o fluxo de potência real.

Vale ressaltar a contribuição introduzida por (RITZMANN et al., 2016), onde é apresentado um método de resolução baseado no circuito π equivalente de uma linha de transmissão e nas medições fasoriais obtidas nos terminais dessa linha. Tal método possui como base a elaboração de um sistema de equações para a condição fasorial e a introdução de erros provenientes das medições de campo. Assim, os autores apresentam um algoritmo baseado em aproximações de primeira ordem da série de Taylor e de minimização das representações das funções custo para os erros e para os parâmetros do sistema. Este método possui eficácia comprovada para situações de estimação de parâmetros de linhas de transmissão de comprimento médio, mas desconsidera o caráter estatístico do ruído presente em unidades PMU.

Outra contribuição na área de estimação de parâmetros de linhas de transmissão foi desenvolvida por (LI et al., 2017), onde os autores apresentam um método baseado em múltiplas medições, selecionadas de forma adaptativa, para posterior utilização em sistemas de equações não lineares. Nesse trabalho, é utilizada uma técnica de resolução de sistemas derivada do método de Newton para sistemas não-lineares. Tal método é adequado para utilização em sistemas de transmissão que possuam diferentes incertezas no processo de medição, como, por exemplo, sistemas para longas distâncias como alguns

presentes na China.

O trabalho realizado por (Liao; Kezunovic, 2009) utiliza o modelo de parâmetros distribuídos para a sequência positiva da linha de transmissão trifásica e considera a possibilidade de erros de sincronismo nas medições realizadas pelas unidades PMU. Tais erros são detectados por meio de um algoritmo e, assim, há uma maior precisão nos parâmetros calculados. Quanto à forma de estimação, utiliza-se o equacionamento não-linear e a solução do sistema por meio de método de Newton-Raphson.

Em (DING; BI; ZHANG, 2011), é apresentado um método de estimação de parâmetros de linhas de transmissão baseado no método dos mínimos quadrados totais (TLS). Nesse estudo, os autores propõem um equacionamento baseado na potência aparente complexa e nas tensões fasoriais obtidas por meio de unidades PMU. Além disso, o método empregado na obtenção dos parâmetros utiliza um sistema de aquisição de amostras baseado em uma janela móvel e, ao final, a distribuição dos dados é obtida por meio da estimação de Kernel (BOTEV et al., 2010).

Outro trabalho que utiliza uma variação do método dos mínimos quadrados totais para estimação dos parâmetros de sequência positiva de uma linha trifásica é apresentado por (DASGUPTA; SOMAN, 2013). Nesse trabalho, o autor utiliza um equacionamento matricial único, usando apenas as correntes e tensões de sequência positiva nos terminais de entrada e saída do modelo π da linha de transmissão. Na obtenção da solução, o autor propõe que a matriz expandida das correções deve considerar a diferença entre as medidas realizadas por transformadores de corrente e medidas realizadas por transformadores de potencial capacitivo. Para isso, foi proposta uma abordagem utilizando pesos para as entradas da matriz. Além disso, a simulação realizada considera diversos tipos de carregamento da linha e situações de contingência como, por exemplo, o defeito em um dos transformadores de potencial capacitivo.

Ainda utilizando um modelo que desconsidera as perdas no dielétrico, mas considerando um modelo de linha de transmissão com parâmetros distribuídos, pode-se destacar o trabalho (DU; LIAO, 2012), onde os autores apresentam um estimador linearizado baseado no polinômio de Taylor de várias variáveis e no método dos mínimos quadrados. Nesse trabalho, o cálculo dos parâmetros é utilizado para obter a temperatura da linha e descrever comportamento geométrico do condutor com relação à curvatura de sua catenária.

Para linhas curtas, o trabalho realizado em (SHI et al., 2008) apresenta uma comparação entre quatro métodos diferentes de estimação. Em duas delas, a modelagem do ruído é desconsiderada e então, os valores encontrados são comparados com aqueles desenvolvidos com a presença de incerteza nas medições. Para o modelo linear, é aplicado o método dos mínimos quadrados ordinários e na modelagem não linear, utiliza-se a linearização e o Método de Newton.

Uma abordagem matricial que não considera apenas o circuito de sequência positiva

da linha é apresentada em (SHI et al., 2011). Nesse trabalho, propõe-se uma análise da estimação dos parâmetros de sequência positiva e zero de uma linha de transmissão por meio do método dos mínimos quadrados ordinários, desconsiderando a presença de ruído nas amostras fasoriais. Por fim, há uma breve análise do comportamento do método frente à presença de ruído nas amostras. Em tal análise, o indicador avaliado é o desvio-padrão do erro relativo apresentado em cada parâmetro.

Dentre os trabalhos que propõem a estimação dos parâmetros de uma linha trifásica não idealmente transposta, pode-se desatacar as contribuições apresentada por (MILOJEVIĆ et al., 2018) e (REN; LEV-ARI; ABUR, 2017). Em (MILOJEVIĆ et al., 2018), os autores estimam as matrizes de admitância e transmissão da linha por meio de uma variação do método dos mínimos quadrados ordinários, o qual é capaz de rejeitar dados incoerentes durante o processo de estimação, tornando o estimador mais robusto. Além disso, utiliza-se uma abordagem iterativa para determinar os pesos dos resíduos. Para tanto, é utilizada função ψ de Huber. Já o trabalho formulado em (REN; LEV-ARI; ABUR, 2017) desenvolve a estimação de estado e o monitoramento dos valores dos parâmetros por meio da utilização do filtro de Kalman. Dessa forma, primeiro são estimados os valores de tensão e corrente por meio do método dos mínimos quadrados com pesos e, posteriormente, aplica-se o valor ao filtro de Kalman para refinar os valores obtidos para os parâmetros. Em ambos os trabalhos, a modelagem do ruído é aditiva por equação, ou seja, não contempla o modelo completo.

O trabalho apresentado por (Dutta et al., 2021) desenvolve um método de estimação para os parâmetros de linhas de transmissão que operam em níveis de distribuição utilizando a matriz de admitância da rede ($\mathbf{Y}$) e as equações de fluxo de potência. As medidas de tensão, potência ativa e potência reativa são obtidas por meio de sistemas SCADA, portanto, há a necessidade de um esquema de seleção de dados pela baixa capacidade de aquisição de amostras. A solução do problema é obtida por meio do filtro de Kalman. No entanto, a modelagem do ruído é feita de forma simplificada, sem considerar a diferença entre a modelagem para tensões e correntes (módulo e fase) e a potência aparente complexa.

Alguns métodos mais recentes presentes na literatura técnica (Wehenkel et al., 2020; Dobakhshari et al., 2020; Asprou; Kyriakides, 2017) apresentam uma abordagem mais completa e realista do ruído presente nas medidas fasoriais. Nesses trabalhos, há uma distinção entre o ruído associado ao método de estimação fasorial presente nas unidades PMU e os erros sistemáticos relacionados ao processo de obtenção das grandezas elétricas, realizadas por meio de transformadores de corrente (TC), transformadores de potencial capacitivo (TPC) e dos condutores utilizados para transportar o sinal desses dispositivos para as unidades inteligentes de cálculo fasorial. Em (Asprou; Kyriakides, 2017), a solução foi obtida por meio do método de Newton para sistemas não lineares, utilizando como medidas a tensão, corrente e potência aparente complexa. Já as soluções propostas em

(Wehenkel et al., 2020; Dobakhshari et al., 2020) são obtidas por meio de variações do método dos mínimos quadrados ordinários, ou seja, tratam-se de soluções lineares e não iterativas.

Vale ressaltar que alguns estudos de caso mostram que a discrepância entre os valores dos parâmetros das linhas de transmissão armazenados em bancos de dados e os valores reais, medidos em campo, podem chegar a mais de 30% (KUSIC; GARRISON, 2004). Isto degrada consideravelmente a precisão do estimador de estado e, em particular, o efeito da incerteza dos parâmetros da rede sobre a estimação do estado é mais grave do que o efeito das imprecisões oriundas das medições de campo, especialmente no caso das PMUs (ASPROU; KYRIAKIDES; ALBU, 2012). Quanto à precisão dos parâmetros, em (MILOJEVIĆ et al., 2018), os autores afirmam ser possível e necessário que os parâmetros sejam estimados com precisão melhor que 10% em aplicações de fluxo de potência.

Cada método de estimação apresentado possui uma condição específica que garante que todos os parâmetros são obtidos dentro de uma faixa de valores aceitável. Além disso, muitos deles negligenciam a presença de ruído nas grandezas elétricas, ou modelam esse ruído de forma incorreta. Isso ocorre porque, em sua totalidade, os métodos desenvolvidos na literatura têm como foco o método de estimação, não abordando a modelagem dos dados de forma completa. Neste trabalho, propõe-se uma abordagem mais cuidadosa e detalhada das incertezas nas medidas fasoriais, bem como uma análise de cada solução de forma mais ampla, apresentando as vantagens e limitações de cada estimador proposto.

2.1.1 Utilização de PMUs em Sistemas Elétricos de Potência

As PMUs são unidades capazes de estimar a magnitude e a fase de alguma grandeza elétrica fasorial, tais como tensão e corrente, em uma certa rede elétrica.

Esses dispositivos usam uma fonte de tempo comum, sincronizada via Sistema de posicionamento global ou *Global Positioning System* (GPS). Assim, é possível obter medidas síncronas em tempo real de diversos pontos da rede e, com isso, analisar o estado do sistema em um instante de tempo específico (OLIVEIRA, 2012).

Em comparação com dispositivos baseados em um Sistema de supervisão e aquisição de dados ou *Supervisory Control and Data Acquisition* (SCADA), as PMUs apresentam uma maior taxa de amostragem. Dessa forma, a reconstrução da quantidade fasorial é feita de forma mais precisa (MELIOPOULOS et al., 2006). Além disso, a maior taxa de amostragem permite às PMUs capturar as variações do sistema de forma mais rápida. Dessa forma, o operador do sistema consegue monitorar e controlar seus índices críticos, essenciais na operação segura de um grande sistema de potência (DECKER et al., 2006).

As PMUs podem aparecer como unidades separadas dentro de um sistema de potência, ou até mesmo incorporados a outros dispositivos já presentes no sistema, como, por exemplo, um relé de proteção. De forma geral, pode-se destacar as funcionalidades de uma unidade PMU:

- ❑ Obtenção de medidas síncronas por meio da utilização de GPS;
- ❑ Amplitude das tensões e correntes de sequência positiva;
- ❑ Fases das tensões e correntes;
- ❑ Frequência local das grandezas na rede;
- ❑ Taxa local de variação da frequência;
- ❑ Status dos disjuntores e chaves da rede.

2.1.2 Modelagem Computacional de medidas fasoriais obtidas por PMUs

Analisando as PMUs de forma isolada, pode-se afirmar que os dados obtidos por ela tem uma precisão de tempo melhor que $1\mu s$ e uma exatidão no módulo do fasor melhor que 0,1% (MELIOPOULOS et al., 2007). A precisão temporal se reflete no ângulo do fasor por meio da relação

$$\Delta\theta \text{ (rad)} = \omega\Delta t.$$

Em uma rede de $f = 60Hz$, isso significa:

$$\begin{aligned}\Delta\theta &= (2 \cdot \pi \cdot 60) \cdot 10^{-6} = 3,7699 \cdot 10^{-4} \text{ rad} \\ &= 0,0216^\circ.\end{aligned}$$

No entanto, ocorre que esse potencial desempenho das unidades PMUs, em relação à qualidade dos dados estimados, não é vista na prática. Isso se deve a dois fatores principais: as tecnologias e estratégias de obtenção dos fasores utilizadas pelos fabricantes variam e isso gera uma alteração na precisão do aparelho, em especial, na precisão temporal. Além disso, as unidades PMU são conectadas a outros dispositivos de medição (transformadores de instrumentação, cabos, atenuadores) que introduzem erros na magnitude e na fase do fasor medido, cujos valores são maiores que a precisão das PMUs (MELIOPOULOS et al., 2006). Na Figura 1, é possível observar uma topologia típica de aquisição de fasores em um sistema elétrico.

Os autores de (VIEIRA et al.,) apresentam um estudo da influência dos canais de instrumentação (CIs), transformadores de corrente, transformadores de potencial capacitivo e cabos de controle na qualidade das medições fasoriais obtidas por meio de PMUs. Em princípio, pode-se esperar que o erro máximo apresentado por cada dispositivo de medição possa ser modelado por meio dos seus valores máximos de acordo com a classe de precisão especificada em norma (MELIOPOULOS et al., 2007). No entanto, principalmente em relação aos TPCs, a inserção dos cabos de controle gera um aumento significativo no erro de relação para o módulo (VIEIRA et al.,). Portanto, faz-se necessário considerar um

Figura 1 – Configuração típica para aquisição de fasores em um sistema elétrico (MELI-OPOULOS et al., 2006).

nível de ruído mais elevado para as medidas de tensão do que aquelas apresentadas nas normas.

Em geral, a precisão exata de uma medida fasorial realizada em um sistema elétrico de potência é desconhecida. No entanto, apesar de a precisão dos dispositivos de medição ser menor que aquela apresentada pelas PMUs, eles ainda possuem uma precisão elevada dentro da faixa de operação da frequência de regime permanente em que foram projetados. Ocorre que muitos deles sofrem fenômenos eventuais que alteram drasticamente as medidas, os transformadores de corrente, por exemplo, podem ter saturação do material ferromagnético devido a uma corrente elevada no secundário, já os transformadores de potencial capacitivo estão sujeitos ao fenômeno ressonância (BLACKBURN; DOMIN, 2015). Um exemplo típico de medições fasoriais obtidas por meio de PMUs é apresentado nas Figuras 2 e 3.

Figura 2 – Medições de ângulo por meio de PMUs (DECKER et al., 2006).

Figura 3 – Medições da amplitude da tensão por meio de PMUs (DECKER et al., 2006).

Devido à todas essas considerações, costuma-se modelar as medidas fasoriais obtidas por meio de uma unidade PMU como um valor médio acrescido de uma distribuição normal, com média nula e desvio-padrão regulado pela amplitude da amostra. Em geral, o valor do desvio-padrão empregado está entre 1% (SHI et al., 2011), (DASGUPTA; SOMAN, 2013), (SHI et al., 2008), (MOUSAVI-SEYEDI; AMINIFAR; AFSHARNIA, 2014) e 15% (HUANG; SHAO; LI, 2015). Este último, usado em estudos mais críticos do sistema, como no caso de desligamentos de linhas de transmissão.

Em (BROWN et al., 2016), é apresentada uma abordagem sistemática para avaliar a função densidade de probabilidade para as medidas fasoriais obtidas por meio de PMUs. Neste trabalho, os autores utilizam dados de PMUs diferentes localizadas em países distintos e aplicam métodos estatísticos, mais precisamente o teste-Z, para mostrar que os dados seguem uma distribuição normal de média zero. Além disso, os autores concluem que o valor de 0,56% (SNR igual a 45 dB) para o desvio padrão do ruído é adequado para criar simulações realistas usando dados de uma PMU. Os valores apresentados nesse estudo estão associados à modelagem do ruído aditivo no módulo e na fase do fasor, ou seja, antes de serem calculadas as projeções no eixo real e no eixo imaginário.

No entanto, na grande maioria dos trabalhos (SHI et al., 2011), (DASGUPTA; SOMAN, 2013), (SHI et al., 2008), (MOUSAVI-SEYEDI; AMINIFAR; AFSHARNIA, 2014), (KHANDEPARKAR; SOMAN; GAJJAR, 2016), (DING; BI; ZHANG, 2011), o ruído é adicionado de forma aditiva diretamente nas equações a serem utilizadas no método de estimação. Essa abordagem possui algumas vantagens em relação à abordagem mais rigorosa, dentre elas, vale ressaltar a maior simplicidade na modelagem que permite obter soluções cujo comportamento seja estatisticamente mais previsível. Além disso, por meio

dessa modelagem, é possível adequar o problema ao formato clássico das soluções de estimação presentes na literatura, o que não é possível no caso geral.

A fim de compensar essa aproximação, considera-se que o desvio-padrão do ruído possui um valor maior que o apresentado em (BROWN et al., 2016). O primeiro conjunto de soluções apresentado nesse trabalho incorpora a modelagem do ruído de forma aditiva para cada equação de estimação. Posteriormente, serão desenvolvidas soluções para o caso mais geral, onde o ruído é modelado de forma separada no módulo e na fase de cada medida fasorial.

Além do modelo simplificado, será desenvolvida a modelagem mais rigorosa e realistas das medidas fasoriais, por meio da adição do ruído sobre o módulo e a fase de tais grandezas e o posterior cálculo das suas projeções no eixo real e imaginário. Além disso, os níveis de ruído serão diferenciados de acordo com o instrumento de medição (TCs ou TPCs) para incorporar a diferença de desempenho apresentada por eles (VIEIRA et al.,) quando associados a cabos de medição. Cabe ressaltar que essa metodologia vem sendo empregada nos trabalhos mais recentes presentes na literatura técnica sobre estimação de parâmetros de linhas de transmissão (Wehenkel et al., 2020; Dobakhshari et al., 2020; Asprou; Kyriakides, 2017). No entanto, tais trabalhos não contemplam a distinção entre as medidas realizadas por TCs e TPCs, o que configura um avanço introduzido pelo presente trabalho.

Aspectos Teóricos sobre Estimação

Este capítulo tem por objetivo apresentar uma ampla revisão bibliográfica a respeito dos métodos de estimação de parâmetros, com enfoque na aplicação de linhas de transmissão. Além disso, serão abordadas diferentes formas de se estimar tais parâmetros, traçando uma comparação entre cada uma delas.

3.1 Teoria de Estimação

Os problemas de estimação têm por objetivo determinar os parâmetros referentes a um sistema a partir de medidas previamente realizadas. Em muitos casos, os valores encontrados são parâmetros desconhecidos que fazem parte de um modelo físico que descreve a dinâmica de um determinado fenômeno real.

Com o advento de sistemas digitais, os objetos de trabalho passaram a ser sequências em tempo discreto, obtidas por meio da discretização ou da amostragem dos sinais em tempo contínuo (RAMOS; SANTOS, 2010).

Ao longo do trabalho, cada amostra de uma determinada grandeza é representada por $y[n]$. Além disso, um parâmetro genérico do sistema será designado por θ , enquanto o valor estimado para o parâmetro é representado por $\hat{\theta}$.

Assim, dado um conjunto de N amostras dependentes de um certo parâmetro θ , encontrar um estimador ($\hat{\theta}$) é encontrar uma função $g(\cdot)$ tal que (KAY, 1993)

$$\hat{\theta} = g(y[0], y[1], \dots, y[N - 1]). \quad (1)$$

Dado o problema da estimação, é preciso determinar uma forma de dizer se um estimador é bom ou não, mediante um critério bem estabelecido e consistente. Antes disso, é necessário definir alguns conceitos frequentes na teoria de estimação.

Definição 1. Um estimador ($\hat{\theta}$) é dito não viesado quando o valor esperado do estimador é igual ao parâmetro a ser estimado para todos os possíveis valores que θ pode assumir,

ou seja:

$$E[\hat{\theta}] = \theta, \forall \theta.$$

Onde $E[\cdot]$ é operador valor esperado (ANDERSON; MOORE, 2012).

Definição 2. O viés de um estimador $b(\theta)$ é a diferença entre o valor esperado do estimador e o valor do parâmetro:

$$b(\theta) = E[\hat{\theta}] - \theta.$$

Nota-se que, um estimador não viesado possui viés nulo. Ou seja, $b(\theta) = 0$.

O critério usual para comparar a eficácia de estimadores é por meio do Erro quadrático médio ou *Mean Square Error* (EQM). Para um certo estimador $\hat{\theta}$, o EQM é definido por:

$$EQM = E[(\hat{\theta} - \theta)^2]. \quad (2)$$

É possível desenvolver a Equação (2) de maneira a escrever o erro quadrático médio em função da variância do estimador e do viés. Tal desenvolvimento é apresentado a seguir:

$$\begin{aligned} EQM &= E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}] + E[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\ &= E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])^2] + 2E[(\hat{\theta} - E[\hat{\theta}])(E[\hat{\theta}] - \theta)] + E[(E[\hat{\theta}] - \theta)^2] \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + 2E[\hat{\theta}E[\hat{\theta}] - \hat{\theta}\theta - E^2[\hat{\theta}] + \theta E[\hat{\theta}]] + b^2(\theta) \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2(\theta) + 2 \underbrace{(E^2[\hat{\theta}] - E[\hat{\theta}]\theta - E^2[\hat{\theta}] + E[\hat{\theta}]\theta)}_{=0} \\ &= \text{Var}(\hat{\theta}) + b^2(\theta). \end{aligned}$$

Em geral, estimadores viesados são não realizáveis, pois as expressões de $\hat{\theta}$ acabam dependendo de θ . Assim, costuma-se buscar estimadores não viesados. Nesses estimadores o viés é nulo por definição, assim:

$$b(\theta) = 0 \Rightarrow EQM = \text{Var}(\hat{\theta}).$$

Na relação acima, $\text{Var}(X)$ representa a variância da variável aleatória X (ANDERSON; MOORE, 2012).

Para o caso de estimadores não viesados, procura-se obter aquele que possui variância mínima. Dessa forma, define-se o Estimador não viesado de mínima variância ou *Minimum Variance Unbiased Estimator* (MVU).

3.1.1 Limite Inferior de Cramer-Rao escalar

O Limite Inferior de Cramer-Rao ou Cramer-Rao Lower Limit (CRLB) estabelece uma forma de comparar a eficácia de estimadores não viesados, considerando o critério da mínima variância. Como resultado, vale ressaltar que o CRLB fornece a variância mínima para um estimador não enviesado segundo esse critério (KAY, 1993).

Teorema 1. *Seja $p(x, \theta)$ a função densidade de probabilidade do problema, onde x é uma variável aleatória e θ um parâmetro desconhecido. Suponha que a Função Densidade de Probabilidade ou Probability Density Function (PDF) obedeça à seguinte condição de regularidade*

$$E \left[\frac{\partial \ln(p(x, \theta))}{\partial \theta} \right] = 0, \forall \theta.$$

Onde a esperança é tomada em relação a x .

A variância de qualquer estimador não viesado $\hat{\theta}$ satisfaz a seguinte desigualdade

$$\text{Var}(\hat{\theta}) \geq \frac{1}{-E \left[\frac{\partial^2 \ln(p(x, \theta))}{\partial \theta^2} \right]}. \quad (3)$$

Além disso, se é possível escrever uma expressão da forma

$$\frac{\partial \ln(p(x, \theta))}{\partial \theta} = I(\theta)(g(x) - \theta), \quad (4)$$

então, o estimador MVU $\hat{\theta}$ é representado pela relação $g(x)$

$$\hat{\theta} = g(x).$$

E a variância desse estimador será dada por

$$\text{Var}(\hat{\theta}) = \frac{1}{I(\theta)}.$$

Na Equação (4), $I(\theta)$ é chamada de matriz de informação de Fisher. Quando um estimador atinge o limite de Cramer-Rao, ele é dito eficiente.

A demonstração do Teorema 1 pode ser encontrada em (KAY, 1993).

3.1.2 Limite de Cramer-Rao para vetor de parâmetros

Teorema 2. *Seja $\mathbf{Y}$ um vetor de leituras ou medidas e $\boldsymbol{\theta}$ o vetor de parâmetros. Assume-se que a função densidade de probabilidade conjunta $p(\mathbf{Y}, \boldsymbol{\theta})$ satisfaz a condição de regularidade*

$$E \left[\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right] = 0, \quad \forall \boldsymbol{\theta}.$$

A matriz de covariância de qualquer estimador não enviesado, denotada por $\mathbf{C}_{\hat{\theta}}$, obedece à relação:

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} - I^{-1}(\theta) \geq 0.$$

A notação ≥ 0 representa que a matriz é positiva semidefinida.

Para esse caso, a matriz de informação de Fisher $I(\theta)$ é calculada por

$$[I(\theta)]_{ij} = -E \left[\frac{\partial^2 \ln p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j} \right].$$

Além disso, o estimador não enviesado que atinge o limite $\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = I^{-1}(\boldsymbol{\theta})$ pode ser encontrado se e somente se, pode-se encontrar uma expressão no formato da Equação (5).

$$\frac{\partial \ln p(\mathbf{X}, \boldsymbol{\theta})}{\partial \boldsymbol{\theta}} = I(\boldsymbol{\theta}) (g(\mathbf{X}) - \boldsymbol{\theta}). \quad (5)$$

3.1.3 Estimador não enviesado de mínima variância para o caso linear

Considere o seguinte modelo para a saída de um sistema y_i , em função da matriz de observações $\mathbf{H}$, do vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ e do ruído presente no sistema w_i

$$\begin{aligned} y_i &= \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + w_i, \\ i &= 1, 2, \dots m. \end{aligned} \quad (6)$$

Cada elemento w_i é uma variável aleatória com distribuição normal de média zero e variância σ^2 , isto é

$$w_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Sendo w_i não correlacionado com w_j , para todo $i \neq j$, a matriz de covariância $\mathbf{C}$ para o vetor de ruídos

$$\mathbf{W} \triangleq [w_1 \ w_2 \ w_3 \ \dots w_m]^T,$$

pode ser escrita na forma

$$\mathbf{C} = \sigma^2 \mathbf{I}.$$

Onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade de ordem n .

Além disso, pode-se supor que os elementos de $\mathbf{W}$ são independentes entre si.

Admitindo que $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ possua inversa, o estimador não viesado de mínima variância $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ e a respectiva matriz de covariância dos parâmetros $\mathbf{C}_{\hat{\theta}}$ ficam:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}, \quad (7)$$

$$\mathbf{C}_{\hat{\theta}} = \sigma^2 (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1}. \quad (8)$$

Uma abordagem para esse desenvolvimento pode ser encontrada em (TREES; BELL, 2013).

Em um caso mais geral, pode-se tomar a matriz de covariância do vetor de ruídos diferente do escalonamento da matriz identidade. Assim, pode-se considerar uma matriz de covariância $\mathbf{C}$ genérica. De tal forma que $\mathbf{W}$ pode ser escrito como

$$\mathbf{W} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{C}).$$

Quando essa matriz é positiva definida, é possível fatorá-la da forma:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{D}^T \mathbf{D}.$$

A matriz $\mathbf{D}$ é invertível e corresponde a transformação que torna a matriz de covariância em uma matriz da forma $\sigma^2 \mathbf{I}$ (KAY, 1993).

Voltando ao problema linear da forma

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W}.$$

Para esse caso, o vetor $\mathbf{Y}$ tem distribuição normal com média $\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$ e matriz de covariância $\mathbf{C}$, ou seja, $\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{C})$.

Fazendo a mudança de variáveis $\mathbf{Y}' = \mathbf{D}\mathbf{Y}$, tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}' &= \mathbf{D}\mathbf{Y}, \\ \mathbf{Y}' &= \mathbf{D}\mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \mathbf{D}\mathbf{W}, \\ \mathbf{Y}' &= \mathbf{H}'\boldsymbol{\theta} + \mathbf{W}'.\end{aligned}$$

Agora, é possível afirmar que:

$$\mathbf{W}' = \mathbf{D}\mathbf{W} \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 \mathbf{I}) \Rightarrow \mathbf{Y}' \sim \mathcal{N}(\mathbf{H}'\boldsymbol{\theta}, \sigma^2 \mathbf{I}).$$

Trocando nas Equações (7) e (8):

$$\begin{aligned}\hat{\boldsymbol{\theta}} &= (\mathbf{H}'^T \mathbf{H}')^{-1} \mathbf{H}'^T \mathbf{Y}', \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{Y}, \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}.\end{aligned}\tag{9}$$

$$\begin{aligned}\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} &= (\mathbf{H}'^T \mathbf{H}')^{-1}, \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{D}^T \mathbf{D} \mathbf{H})^{-1}, \\ &= (\mathbf{H}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{H})^{-1}.\end{aligned}\tag{10}$$

3.2 Definição de norma e aplicação para vetores

Definição 3. A norma $\| \cdot \|$ é uma função, de um espaço vetorial V no conjunto dos reais $\mathbb{R}$, que satisfaz às seguintes propriedades. Dados $u, v \in V$ e $\alpha \in \mathbb{R}$:

$$\square \|v\| \geq 0 \text{ e } \|v\| = 0 \text{ se e somente se } v = 0;$$

$$\square \|\alpha v\| = |\alpha| \|v\|;$$

$$\square \|u + v\| \leq \|u\| + \|v\|.$$

Considere na definição de norma o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$. A norma-p do vetor $\mathbf{v}$ ($\|\mathbf{v}\|_p$) é definida por

$$\|\mathbf{v}\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |v_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \leq p < +\infty.$$

Dentre as normas-p para vetores no $\mathbb{R}^n$, destacam-se

$$\begin{aligned} \|\mathbf{v}\|_1 &= \sum_{i=1}^n |v_i| = |v_1| + |v_2| + \dots + |v_n|, \\ \|\mathbf{v}\|_2 &= \sqrt{\sum_{i=1}^n v_i^2} = \sqrt{\mathbf{v}^T \mathbf{v}} = \sqrt{v_1^2 + v_2^2 + \dots + v_n^2}, \\ \|\mathbf{v}\|_\infty &= \max_{i=1, \dots, n} |v_i| = \max\{|v_1|, |v_2|, \dots, |v_n|\}. \end{aligned}$$

Todas as vezes em que no $\mathbb{R}^n$ o índice p for omitido, considera-se que é empregada a norma-2, ou norma euclidiana.

3.3 Método dos mínimos quadrados ordinários

Para desenvolver o Método dos Mínimos Quadrados Ordinários ou *Ordinary Least Squares method* (OLS), suponha que um certo modelo físico obedece à seguinte equação matricial

$$\bar{\mathbf{Y}} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}.$$

Onde:

- $\bar{\mathbf{Y}}$ é o vetor $n \times 1$ de observações da variável dependente;
- $\mathbf{H}$ é matriz $n \times k$ de observações da variável dependente;
- $\boldsymbol{\theta}$ é o vetor $n \times 1$ de parâmetros.

Agora, devido a presença de incertezas na matriz de observações $\bar{\mathbf{Y}}$, ela é modificada por um termo de ruído $\tilde{\mathbf{Y}}$, assim o vetor de observações modificado ($\mathbf{Y}$) fica

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}.$$

Naturalmente, a igualdade não é mais preservada, dado que $\mathbf{H}$ e $\boldsymbol{\theta}$ permanecem inalteradas, mas é razoável supor que o ruído tenha uma influência pequena em $\bar{\mathbf{Y}}$ (BOYD; VANDENBERGHE, 2018). De tal forma que é possível escrever

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}.$$

Agora, suponha que seja possível obter um vetor de correções $\Delta\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^n$, tal que

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\boldsymbol{\theta} + \Delta\mathbf{Y}.$$

A diferença entre o modelo encontrado ($\mathbf{H}\boldsymbol{\theta}$) e as medidas reais ($\mathbf{Y}$) é justamente $\Delta\mathbf{Y}$.

No método dos mínimos quadrados ordinários, o objetivo é encontrar o vetor de parâmetros $\boldsymbol{\theta}$ que minimiza a norma 2, ou norma euclidiana, do vetor de correções $\Delta \mathbf{Y}$. É possível escrever essa frase por meio do problema de otimização P_1 .

$$\begin{aligned} P_1 : \hat{\boldsymbol{\theta}} &:= \arg \min_{\Delta \mathbf{Y}} \|\Delta \mathbf{Y}\|_2 \\ \text{sujeito a:} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Nessa formulação matricial, a norma-2 do vetor de correções fica

$$\|\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta}\|_2 = \sqrt{(\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta})^T \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta})}.$$

A função $f(t) = \sqrt{t}$ é uma função crescente $\forall t > 0$. Sendo assim, encontrar o mínimo da norma é minimizar o que está dentro da raiz. Então, o problema P_1 pode ser reescrito como mostrado em P_2

$$\begin{aligned} P_2 : \hat{\boldsymbol{\theta}} &:= \arg \min \left\| (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta})^T \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta}) \right\|_2 \\ \text{sujeito a:} \\ \mathbf{Y} &= \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta} + \Delta \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Para facilitar, define-se a função $f(\boldsymbol{\theta})$ como

$$f(\boldsymbol{\theta}) \triangleq (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta})^T \cdot (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\theta}).$$

Desenvolvendo a expressão

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - \mathbf{Y}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Y} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}.$$

Note que:

$$(\mathbf{Y}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}) = (\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Y})^T.$$

Como cada um dos termos é um número real, o transposto de um número é igual a ele próprio, portanto

$$\mathbf{Y}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Y}.$$

Trocando na expressão de $f(\boldsymbol{\theta})$,

$$f(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{Y}^T \mathbf{Y} - 2\boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{Y} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta}.$$

Para calcular $\boldsymbol{\theta}$ que minimiza a expressão, pode-se calcular o gradiente e igualar a zero, seguindo os seguintes passos

$$\begin{aligned} \nabla f(\boldsymbol{\theta}) &= 0, \\ \nabla f(\boldsymbol{\theta}) &= -2\mathbf{X}^T \mathbf{Y} + \mathbf{H}^T \mathbf{H} \boldsymbol{\theta} + \boldsymbol{\theta}^T \mathbf{H}^T \mathbf{H}, \\ \nabla f(\boldsymbol{\theta}) &= -2\mathbf{H}^T \mathbf{Y} + 2\mathbf{H}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\theta}, \\ \nabla f(\boldsymbol{\theta}) &= 0 \Rightarrow \mathbf{H}^T \mathbf{X} \boldsymbol{\theta} = \mathbf{H}^T \mathbf{Y}. \end{aligned}$$

Quando $\mathbf{H}^T \mathbf{H}$ admite inversa, o estimador $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ pode ser escrito como

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}. \quad (11)$$

3.4 Método dos mínimos quadrados não lineares

Considere um sistema consistente com m equações e n incógnitas representado por:

$$\bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}) = \bar{y}_i$$

Com $i = 1, 2, \dots, m$ e $\boldsymbol{\theta}$, vetor de parâmetros, igual a

$$\boldsymbol{\theta} = [\theta_1 \ \theta_2 \ \dots \ \theta_n]^T.$$

Seja w_i um termo de ruído, ou perturbação, em cada medição $\bar{y}_i$, de tal forma que cada medida seja representada pela expressão

$$y_i = \bar{y}_i + w_i.$$

Agora, o sistema de equações não é mais consistente, porém supondo que a perturbação é suficientemente pequena, pode-se escrever

$$y_i \approx \bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}).$$

Defina $f_i(\boldsymbol{\theta})$ como a diferença entre y_i e $\bar{f}_i(\boldsymbol{\theta})$

$$f_i(\boldsymbol{\theta}) = y_i - \bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}).$$

Com $i = 1, 2, \dots, m$. E seja o vetor $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ dado por

$$\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \triangleq \begin{bmatrix} f_1(\boldsymbol{\theta}) \\ f_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \vdots \\ f_m(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix}.$$

No método dos mínimos quadrados não lineares, a solução é obtida por meio da minimização da norma ao quadrado de $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, ou seja

$$P_3 : \hat{\boldsymbol{\theta}} := \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})\|_2$$

sujeito a:

$$f_i(\boldsymbol{\theta}) = y_i - \bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}), i = 1, 2, \dots, m.$$

De forma geral, a solução ótima para o problema é encontrada por meio da equação (BOYD, 2016)

$$\nabla \|\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})\|^2 = 0.$$

A expressão acima pode ser escrita em função da matriz jacobiana de $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, denotada por $D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$, resultando em

$$2D\mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}})^T \mathbf{f}(\hat{\boldsymbol{\theta}}) = 0.$$

Lembrando que cada elemento da matriz jacobiana $[Df(\hat{\theta})]_{ij}$ é dado por:

$$[Df(\hat{\theta})]_{ij} = \frac{\partial f_i}{\partial \theta_j}(\hat{\theta}), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Usando a igualdade apresentada o problema de otimização P3 é equivalente ao seguinte sistema de equações não lineares

$$Df(\hat{\theta})^T f(\hat{\theta}) = 0. \quad (12)$$

Encontrar a solução do problema de otimização por meio da resolução analítica da Equação (12) é computacionalmente custoso e, em muitos casos, pode não ser possível, pois não há solução analítica (BOYD; VANDENBERGHE, 2018). Como uma alternativa para a resolução do problema, a função objetivo pode ser substituída por uma aproximação, cuja solução pode ser obtida de forma mais simples. Neste trabalho, a aproximação analisada é a linearização via Polinômio de Taylor multivariável.

3.4.1 Algoritmo de Levenberg-Marquardt

O algoritmo de Levenberg-Marquardt é um aperfeiçoamento do método de Gauss-Newton para a solução de sistemas de equações não lineares. A ideia é construir uma sequência $\theta^{(1)}, \theta^{(2)}, \dots, \theta^{(n)}, \dots$ de aproximações para o vetor de parâmetros θ , tal que:

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \theta^{(n)} = \theta$$

O primeiro passo do método é aproximar o vetor de funções $f(\theta)$ pelo seu polinômio de Taylor multivariável de primeira ordem (LIMA, 2002)

$$\hat{f}(\theta; \theta^{(k)}) = f(\theta^{(k)}) + Df(\theta^{(k)})(\theta - \theta^{(k)}).$$

Note que agora a formulação é similar ao apresentado do Método dos Mínimos Quadrados Ordinários. Para facilitar a obtenção da solução, pode-se escrever a expressão acima com a mesma notação que foi apresentada na Seção 3.3.

$$\begin{aligned} Y &= f(\theta^{(k)}), \\ H &= -Df(\theta^{(k)}), \\ \bar{\theta} &= \theta - \theta^{(k)}, \\ \Delta Y &= \hat{f}(\theta; \theta^{(k)}). \end{aligned} \quad (13)$$

A solução via método dos mínimos quadrados lineares visa minimizar a norma de $\hat{f}(\theta; \theta^{(k)})$, isto é, o problema de otimização é determinado por

$$P4 : \hat{\theta}^{(k)} = \arg \min_{\theta} \|\hat{f}(\theta; \theta^{(k)})\|$$

sujeito a:

$$\hat{f}(\theta; \theta^{(k)}) = f(\theta^{(k)}) + Df(\theta^{(k)})(\theta - \theta^{(k)}).$$

A relação acima está correta e é válida, porém pode-se achar uma solução tal que a norma de $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ seja suficientemente próxima a zero, porém a distância entre $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ e $\boldsymbol{\theta}$ não seja. Para corrigir esse fato, adiciona-se um termo à relação, cujo comportamento representa a distância da iteração k à solução real.

$$P5 : \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} ||\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})|| + \lambda^{(k)} ||\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}||$$

sujeito a:

$$\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \text{ e}$$

$$\lambda^{(k)} > 0.$$

Usando a notação apresentada na Equação (13):

$$P6 : \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} ||\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}|| + \lambda^{(k)} ||\bar{\boldsymbol{\theta}}||$$

sujeito a:

$$\mathbf{Y} = \mathbf{H}\bar{\boldsymbol{\theta}} + \Delta\mathbf{Y}, \lambda^{(k)} > 0.$$

Conforme já mostrado, para encontrar $\bar{\boldsymbol{\theta}}$ que minimiza a expressão, pode-se encontrar o valor que minimiza

$$||\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}||^2 + \lambda^{(k)} ||\bar{\boldsymbol{\theta}}||^2.$$

Desenvolvendo cada uma das normas

$$\begin{aligned} & (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}})^T (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}}) + \lambda^{(k)} \bar{\boldsymbol{\theta}}^T \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ &= \begin{bmatrix} (\mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}})^T & \sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \bar{\boldsymbol{\theta}}^T \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ \sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \\ &= \left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Y} - \mathbf{H} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}} \\ \sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \bar{\boldsymbol{\theta}} \end{bmatrix} \right\|^2. \end{aligned}$$

Para encontrar a solução do problema de otimização de forma mais simples, é possível decompor o vetor da norma em duas parcelas

$$\left\| \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \end{bmatrix} \cdot \bar{\boldsymbol{\theta}} \right\|^2.$$

Definindo

$$\mathbf{Y}' = \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{H}' = \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \end{bmatrix}.$$

A norma ao quadrado a ser minimizada fica

$$||\mathbf{Y}' - \mathbf{H}'\bar{\boldsymbol{\theta}}||^2.$$

O valor $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimiza a expressão acima é dado por meio do método dos mínimos quadrados ordinários, representados pela Equação (11). Usando tal relação, o vetor de parâmetros será

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}'^T \mathbf{H}')^{-1} \mathbf{H}'^T \mathbf{Y}',$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = \left(\begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & -\sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{H} \\ -\sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \end{bmatrix} \right)^{-1} \begin{bmatrix} \mathbf{H}^T & -\sqrt{\lambda^{(k)}} \mathbf{I} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{Y} \\ \mathbf{0} \end{bmatrix},$$

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\mathbf{H}^T \mathbf{H} + \lambda \mathbf{I})^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{Y}.$$

Voltando para as variáveis iniciais do problema, definidas na Equação (13)

$$\boldsymbol{\theta} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - (D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \lambda \mathbf{I})^{-1} D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}).$$

O vetor $\boldsymbol{\theta}$ calculado é o próximo elemento da sequência, ou seja $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$. Além disso, λ é ajustado a cada iteração. Sendo assim, a equação recursiva que define a sequência de aproximações para o vetor fica

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - (D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \lambda^{(k)} \mathbf{I})^{-1} D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}). \quad (14)$$

Nota-se o seguinte comportamento do método em relação a $\lambda^{(k)}$ (BOYD, 2016).

- Se $\lambda^{(k)}$ é "grande", $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ é próximo a $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ e o progresso do método é lento.
- Se $\lambda^{(k)}$ é "pequeno", $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)}$ é distante de $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$, com isso a linearização é ruim.

Uma das formas de ajustar $\lambda^{(k)}$ a cada iteração é a seguinte (BOYD, 2016).

- Se $\|f(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})\|^2 < \|f(\boldsymbol{\theta}^{(k)})\|^2$, o vetor $\boldsymbol{\theta}$ da iterada $k + 1$ calculado por meio da Equação (14) é aceito e $\lambda^{(k+1)} = \lambda^{(k)}$.
- $\|f(\boldsymbol{\theta}^{(k+1)})\|^2 \geq \|f(\boldsymbol{\theta}^{(k)})\|^2$, o vetor $\boldsymbol{\theta}$ não é aceito, assim $\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)}$ e λ é ajustado por: $\lambda^{(k+1)} = 2\lambda^{(k)}$.

A solução de um sistema de equações não lineares via método dos mínimos quadrados não lineares foi apresentada aqui de forma simplificada, pois seu aprofundamento foge ao escopo do projeto. Cabe ressaltar que o algoritmo de Levenberg-Marquardt tem muitas formas de implementação publicadas em diversos trabalhos, tais como (LOURAKIS et al., 2005), (NIELSEN et al., 1999) e (TRANSTRUM; SETHNA, 2012).

Agora, serão apresentados os conceitos necessários para o desenvolvimento do *Total Least Squares* baseado no Teorema de aproximação por menor posto.

3.5 Decomposição em valores singulares

Seja $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $m \geq n$, uma matriz retangular. A Decomposição em valores singulares ou *Singular Value Decomposition* (SVD) dessa matriz é dada por

$$\mathbf{X} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T. \quad (15)$$

Explicitando as colunas de $\mathbf{U}(\mathbf{u}_i)$, as linhas de $\mathbf{V}(\mathbf{v}_i^T)$ e os elementos de $\Sigma(\sigma_i)$

$$\mathbf{X} = \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 & \mathbf{u}_2 & \dots & \mathbf{u}_m \end{bmatrix}_{m \times m} \begin{bmatrix} \sigma_1 & & & \\ & \sigma_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & \sigma_n \end{bmatrix}_{m \times n} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1^T \\ \mathbf{v}_2^T \\ \vdots \\ \mathbf{v}_n^T \end{bmatrix}_{n \times n},$$

a decomposição em valores singulares pode ser calculada por meio do somatório

$$\mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \quad (16)$$

Onde, $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ortonormais, isto é

$$\begin{aligned} \mathbf{U}^T \mathbf{U} &= \mathbf{I}_m, \\ \mathbf{V}^T \mathbf{V} &= \mathbf{I}_n. \end{aligned}$$

E, as n primeiras linhas de $\mathbf{\Sigma}$ são diagonais, com cada σ_i denominado valor singular i , obedecendo à relação

$$\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0.$$

A demonstração da decomposição em valores singulares pode ser encontrada em (CHRISTIAN, 1998).

3.6 Teoremas da aproximação por menor posto

Antes de apresentar os teoremas, é necessário definir alguns elementos essenciais para compreensão dos mesmos.

Definição 4. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz retangular, o posto de $\mathbf{A}$, denotado por $\text{rank}(\mathbf{A})$, é a quantidade de colunas ou linhas linearmente independentes (BARONE, 1988).

Definição 5. Seja V um espaço vetorial sobre o corpo de escalares $\mathbb{R}$ e $V_n = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ um subconjunto finito de V . O subconjunto U de todos os elementos $u \in V$ que podem ser escritos como combinação linear dos elementos de V_n é um subespaço vetorial denominado Subespaço Gerado por V_n , cuja notação empregada é

$$U \triangleq \mathcal{R}(V_n) = [v_1, v_2, v_3, \dots, v_n].$$

Definição 6. Uma base ($\mathcal{B}$) de um espaço vetorial V qualquer é um conjunto que obedece às seguintes propriedades:

- $\mathcal{B}$ gera V , isto é $\mathcal{R}(\mathcal{B}) = V$;
- $\mathcal{B}$ é formado por vetores linearmente independentes.

A dimensão tem um espaço vetorial é a quantidade de elementos (vetores) em sua base. A dimensão do espaço vetorial V é denotada por:

$$\dim V.$$

Definição 7. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais U e V . A imagem de T , definido por $\text{Im}(T)$, é o conjunto definido por

$$\text{Im}(T) = \{v \in V \mid \exists u \in U \text{ com } T(u) = v\}.$$

Definição 8. Seja $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear entre os espaços vetoriais U e V . O núcleo de T , definido por $\text{Ker}(T)$, é o conjunto definido por

$$\text{Ker}(T) = \{u \in U \mid T(u) = 0\}.$$

Definição 9. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz retangular. O subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{A}$, $\mathcal{R}(\mathbf{A})$, é a imagem da transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $T(x) = \mathbf{A}x$.

Definição 10. Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz retangular. O núcleo de $\mathbf{A}$ é o núcleo de uma transformação linear $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, definida por $T(x) = \mathbf{A}x$. Para esse caso, a notação será

$$\text{Ker}(T) \triangleq \text{Ker}(\mathbf{A}).$$

Definição 11. Uma norma matricial é uma função $\|\cdot\| : \mathbb{R}^{m \times n} \rightarrow \mathbb{R}$ que obedece às propriedades descritas na Seção 3.2.

A norma matricial-p, induzida pela norma vetorial de mesmo índice é dada por

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{v \in \mathbb{R}^n} \frac{\|\mathbf{A}v\|_p}{\|v\|_p}.$$

De forma totalmente equivalente, é possível escrever

$$\|\mathbf{A}\|_p = \max_{\|v\|_p=1} \|\mathbf{A}v\|_p.$$

Nesse trabalho, destaca-se a norma-2, ou norma espectral

$$\|\mathbf{A}\|_2 = \max_{\|v\|_2=1} \|\mathbf{A}v\|_2 = \sigma_{\max}(\mathbf{A}).$$

Onde $\sigma_{\max}(\mathbf{A})$ é o maior valor singular da matriz $\mathbf{A}$.

Outra norma relevante é denominada de norma de Frobenius, denotada por $\|\cdot\|_F$. Dada uma matriz $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$, com $m \geq n$. A norma de Frobenius da matriz $\mathbf{A}$ é calculada por

$$\|\mathbf{A}\|_F \triangleq \sqrt{\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n |a_{ij}|^2} = \sqrt{\text{Tr}(\mathbf{A}^T \mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sigma_i^2}.$$

Onde

□ $\text{Tr}(D)$ é o traço da matriz retangular D , isto é, a soma dos elementos da diagonal principal;

□ σ_i são os valores singulares da matriz D .

Teorema 3. *Sejam U e V espaços vetoriais, com U de dimensão finita e $T : U \rightarrow V$ uma transformação linear, então*

$$\dim(\text{Ker } T) + \dim(\text{Im } T) = \dim U.$$

A demonstração para o teorema pode ser encontrada em (BARONE, 1988).

Teorema 4. *Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz retangular. O posto de A é igual ao posto de A^T , ou seja, a quantidade de colunas linearmente independentes é igual a quantidade de linhas linearmente independentes.*

Uma demonstração alternativa para esse teorema é apresentado em A.1.

Teorema 5. *(Teorema de Eckart–Young–Mirsky, norma espectral). Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz retangular ($m \geq n$). Suponha que*

$$\mathbf{A} = \mathbf{U} \mathbf{\Sigma} \mathbf{V}^T,$$

seja a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$. Onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ortonormais, e $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz retangular diagonal, com entradas $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, tais que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$. Então, a matriz $\mathbf{B}$ de posto menor ou igual a k que melhor aproxima a matriz $\mathbf{A}$ segunda a norma-2, ou seja

$$\min_{\text{rank}(\mathbf{B}) \leq k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2,$$

é dada por:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Onde $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$ denotam as colunas das matrizes $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente.

Além disso, vale que

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Uma demonstração para o problema é apresentada no Apêndice A.2.

Teorema 6. (*Desigualdade de Weyl para valores singulares*) Sejam $\mathbf{A}', \mathbf{A}'' \in \mathbb{R}^{m \times n}$, e sejam $i, j \in \mathbb{N}$, tais que $i + j - 1 \in \mathbb{N}$. Então

$$\sigma_{i+j-1}(\mathbf{A}' + \mathbf{A}'') \leq \sigma_i(\mathbf{A}') + \sigma_j(\mathbf{A}'').$$

A demonstração do Teorema 6 pode ser encontrado em (HORN; JOHNSON, 2012).

Teorema 7. (*Teorema de Eckart–Young–Mirsky, norma de Frobenius*)

Seja $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ uma matriz retangular ($m \geq n$). Suponha que

$$\mathbf{A} = \mathbf{U}\mathbf{\Sigma}\mathbf{V}^T,$$

seja a decomposição em valores singulares da matriz $\mathbf{A}$. Onde $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$ são matrizes ortonormais, e $\mathbf{\Sigma}$ é uma matriz retangular diagonal, com entradas $(\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n)$, tais que $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \dots \geq \sigma_n \geq 0$. Então, a matriz $\mathbf{B}$ de posto menor ou igual a k que melhor aproxima a matriz $\mathbf{A}$ segunda a norma de Frobenius, ou seja

$$\min_{\text{rank}(\mathbf{B}) \leq k} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F,$$

é dada por:

$$\mathbf{A}_k = \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T.$$

Onde $\mathbf{u}_i$ e $\mathbf{v}_i$ denotam as colunas das matrizes $\mathbf{U}$ e $\mathbf{V}$, respectivamente.

Além disso, vale que

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F^2 = \sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2.$$

A demonstração do teorema é apresentada no Apêndice A.3.

3.7 Método dos mínimos quadrados totais

Suponha que um certo fenômeno físico obedeça à seguinte equação matricial

$$\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}.$$

Onde:

□ $\bar{\mathbf{Y}} \in \mathbb{R}^{m \times 1}$ são as medidas da saída do sistema;

□ $\bar{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{m \times n}$ é a matriz de observações;

□ $\boldsymbol{\theta} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$ é o vetor de parâmetros.

Em muitos casos, as incertezas estão presentes não só no vetor de saída, como no método dos mínimos quadrados ordinários, mas também na matriz de observações $\mathbf{H}$. De tal forma que essas grandezas passam a ser

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}.$$

Onde $\tilde{\mathbf{Y}}$ e $\tilde{\mathbf{H}}$ representam os ruídos adicionados ao sistema.

Agora, o sistema, composto por $\mathbf{Y}$ e $\mathbf{H}$ passa a não ser mais compatível, porém supondo que a relação sinal ruído seja suficientemente baixa (MARKOVSKY; HUFFEL, 2007), é possível escrever

$$\mathbf{Y} \approx \mathbf{H}\boldsymbol{\theta}.$$

Para tornar o sistema compatível, é necessário encontrar um vetor de correções $\Delta\mathbf{Y}$ e uma matriz de correções $\Delta\mathbf{H}$, de tal forma que

$$\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} = (\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H})\boldsymbol{\theta}. \quad (17)$$

No Método dos mínimos quadrados totais ou *Total Least Squares* (TLS), o objetivo é encontrar a menor matriz expandida de correções, segundo a norma de Frobenius, onde o sistema passa a ser compatível. Esse processo é resumido no problema de otimização P7.

$$P7 : \hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \| [\Delta\mathbf{H} \quad \Delta\mathbf{Y}] \|_F$$

sujeito a:

$$\mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} = (\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H})\boldsymbol{\theta}.$$

3.7.1 Solução do TLS via decomposição em valores singulares

Primeiro, considere a representação da Equação (17) na forma

$$[\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta} \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{m \times 1}. \quad (18)$$

Como $\mathbf{Y}$ não pertence ao subespaço gerado pela matriz $\mathbf{H}$, a matriz expandida $[\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}]$ tem posto $n + 1$. Para que solução $\boldsymbol{\theta}$ seja única, a matriz $[\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}]$ deve ter exatamente n colunas linearmente independentes. E, como a matriz tem $n + 1$ colunas, ela deve ter seu posto reduzido de 1.

Dessa forma, o problema de minimização P7 pode ser entendido como o problema de achar a menor matriz $[\Delta\mathbf{H} \quad \Delta\mathbf{Y}]$ que transforma a matriz $[\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}]$ de posto $n + 1$ na matriz $[\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}]$ de posto n . Ou seja, $[\mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y}]$ é a melhor aproximação de posto n da matriz $[\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}]$. Essa solução é garantida pelo Teorema de Eckart-Young-Mirsky.

Considere a seguinte partição da decomposição em valores singulares da matriz expandida $[\mathbf{H} \ \mathbf{Y}]$

$$[\mathbf{H} \ \mathbf{Y}] = [\mathbf{U}_p \ \mathbf{u}_q] \begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & \sigma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T.$$

A solução $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para o vetor de parâmetros no método dos mínimos quadrados totais é única e dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{v}_{pq}v_{qq}^{-1}. \quad (19)$$

Onde:

- $\mathbf{v}_{pq}$ é o vetor formado pelos primeiros n elementos da coluna $n + 1$ da matriz de vetores singulares a direita $\mathbf{V}$ da matriz expandida $[\mathbf{H} \ \mathbf{Y}]$;
- v_{qq} é o elemento $n + 1$ da coluna $n + 1$ da matriz $\mathbf{V}$.

A demonstração dessa igualdade é apresentada no Apêndice A.4.

Modelagem de Linhas de Transmissão

Este capítulo tem por objetivo apresentar a modelagem utilizada para equacionamento das linhas de transmissão em que serão empregados os métodos de estimação de parâmetros. Além de apresentar o modelo, este capítulo também trás o equacionamento fasorial exato das correntes e tensões, que servirá de base para um grande número de análises.

4.1 Modelagem da linha de transmissão por meio de circuito π concentrado

As tensões e correntes ao longo de uma linha de transmissão com perdas estão relacionadas ao valor de sua indutância por comprimento L' , a sua capacitância por unidade de comprimento C' a sua resistência série R' e a sua condutância em derivação G' .

Cada um desses parâmetros distribuídos está relacionado a um fenômeno eletromagnético presente na linha de transmissão. A indutância L' aparece devido à variação do fluxo magnético gerado em uma seção transversal do condutor, decorrente da corrente que varia no tempo. A capacitância distribuída C' está presente no modelo para representar a variação do fluxo elétrico no tempo, devido à variação temporal da tensão. A resistência por unidade de comprimento R' representa as perdas por efeito Joule no condutor. Enquanto a condutância em derivação G' incorpora as perdas no dielétrico (JR; BUCK; AKHTAR, 2020).

As equações gerais que relacionam as tensões e correntes em linhas de transmissão são baseadas inteiramente nos 4 parâmetros distribuídos apresentados anteriormente. Nesta parte do trabalho, a análise ficará restrita as linhas curtas e médias, seguindo a classificação apresentada em (STEVENSON, 1974) que, em geral, continua a ser empregada até hoje, uma vez que a tecnologia empregada na construção de linhas áreas não foi modificada de forma drástica.

Segundo essa classificação, apresentada em (STEVENSON, 1974), as linhas aéreas até 80 km são consideradas linhas curtas. Enquanto linhas de 80 a 240 km são consideradas

linhas médias. Assim, as linhas acima de 240 km são consideradas linhas longas.

A determinação do tipo de linha é basicamente uma comparação entre o comprimento de onda λ e o comprimento da linha l . Nesse caso, é necessário saber a velocidade de propagação da onda no condutor v e a frequência da tensão f . Com esses valores, é possível calcular o comprimento de onda por meio da relação (RAMO; WHINNERY; DUZER, 1994).

$$\lambda = \frac{v}{f}.$$

Para o caso de baixas perdas, a velocidade de propagação da onda eletromagnética no condutor vale aproximadamente $3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$ (ADLER; CHU; FANO, 1960). No caso da frequência da rede ser 60 Hz , o comprimento de onda fica:

$$\lambda = \frac{3 \cdot 10^8}{60} = 5000 .$$

Se o comprimento da linha a ser analisada vale $l = 100 \text{ Km}$, a razão entre o comprimento da linha e o comprimento de onda fica:

$$\frac{l}{\lambda} = \frac{100}{5000} = 0,02.$$

Referências que tratam da análise da propagação de ondas eletromagnéticas em meios guiados, tal como (ULABY, 2005), afirmam que os efeitos de propagação podem ser desconsiderados de forma satisfatória quando a relação é menor ou igual a 0,1. Seguindo esse raciocínio, pode-se desconsiderar os efeitos de propagação para linhas aéreas até 500 km . A razão pela qual os valores apresentados em (STEVENSON, 1974) são diferentes deve-se ao fato de que a análise feita nessa referência leva em conta o nível de tensão da linha.

Se uma linha aérea é considerada curta, a capacitância em derivação é tão pequena que pode ser desconsiderada sem perda significativa da precisão do modelo. Assim, é suficiente considerar a resistência série R e a indutância série L para todo o comprimento da linha. O circuito equivalente para linhas curtas pode ser observado na Figura 4.

Figura 4 – Circuito π para linhas curtas

No circuito π equivalente, os parâmetros concentrados são calculados sempre por meio do produto do valor do parâmetro distribuído pelo comprimento da linha. Assim, no

circuito da Figura 4, por exemplo, os parâmetros L e R são calculados por meio da relação:

$$L = L' \cdot l, \quad R = R' \cdot l.$$

Sendo L' a indutância distribuída por unidade de comprimento, R' a resistência por unidade de comprimento e l o comprimento da linha de transmissão.

Uma linha média pode ser representada com precisão suficiente por meio de sua resistência série R em série com sua indutância L e com metade da capacitância fase-neutro em cada uma das extremidades do circuito equivalente, conforme é mostrado na Figura 5.

Figura 5 – Circuito π para linha média

Apesar de o efeito não ser tão significativo em cálculos de sistemas de potência (STEVENSON, 1974), pode-se incorporar ao modelo metade da condutância G em cada ramo em que estão conectados os capacitores. Assim, é possível obter um modelo que inclua o efeito das perdas no dielétrico. Tal modelo, é representado na Figura 6.

Figura 6 – Circuito π para linha de comprimento médio com condutância de perdas

4.2 Equacionamento fasorial do modelo π concentrado para linhas médias

Utilizando o modelo da Figura 5, é possível escrever equações que relacionem as correntes e tensões na entrada e na saída do circuito, com os parâmetros que compõe o modelo. Para isso, basta aplicar as duas Leis de Kirchhoff as malhas e aos nós do problema descrito pelo circuito equivalente.

Inicialmente, adota-se que a corrente no ramo central ou ramo série vale $\dot{I}$, com sentido positivo da esquerda para a direita da figura, ou em direção ao terminal de saída, conforme apresentado na Figura 7.

Figura 7 – Circuito π com corrente em ramo central

Aplicando a primeira Lei de Kirchhoff aos nó 1 e 2 da Figura 7, obtêm-se:

$$\dot{I} + \dot{V}_e \cdot \frac{j\omega C}{2} = \dot{I}_e. \quad (20)$$

$$\dot{I} + \dot{I}_s = \dot{V}_s \cdot \frac{j\omega C}{2}. \quad (21)$$

As correntes e tensões a serem medidas são apenas as correntes dos terminais de entrada ($\dot{I}_e, \dot{V}_e$) e de saída do circuito ($\dot{I}_s, \dot{V}_s$). Sendo assim, é necessário eliminar a corrente $\dot{I}$ do equacionamento. Para isso, basta subtrair as Equações (20) e (21):

$$\begin{aligned} \dot{V}_e \cdot \frac{j\omega C}{2} - \dot{I}_s &= \dot{I}_e - \dot{V}_s \cdot \frac{j\omega C}{2}, \\ \dot{I}_e + \dot{I}_s &= \frac{j\omega C}{2} (\dot{V}_e + \dot{V}_s). \end{aligned} \quad (22)$$

Para trabalhar com uma equação real, eliminando a notação fasorial, é possível separar a igualdade representada pela Equação (22) em parte real e parte imaginária. Dessa forma, como o termo da direita é igual ao termo da esquerda, vale a igualdade entre sua parte real e sua parte imaginária.

$$Re\{\dot{I}_e + \dot{I}_s\} = Re\left\{\frac{j\omega C}{2}(\dot{V}_e + \dot{V}_s)\right\}, \quad Im\{\dot{I}_e + \dot{I}_s\} = Im\left\{\frac{j\omega C}{2}(\dot{V}_e + \dot{V}_s)\right\}.$$

Cada um dos fasores pode ser separado em parte real e imaginária, seguindo a seguinte notação

$$\dot{I}_e = I_{er} + jI_{ei}, \quad \dot{V}_e = V_{er} + jV_{ei}.$$

$$\dot{I}_s = I_{sr} + jI_{si}, \quad \dot{V}_s = V_{sr} + jV_{si}.$$

Substituindo na Equação (22) a igualdade entre os fasores e sua expansão em parte real e imaginária, a igualdade fica:

$$\begin{aligned} I_{er} + jI_{ei} + I_{sr} + jI_{si} &= \frac{j\omega C}{2}(V_{er} + jV_{ei} + V_{sr} + jV_{si}), \\ I_{er} + I_{sr} + j(I_{ei} + I_{si}) &= -\frac{\omega C}{2}(V_{ei} + V_{si}) + \frac{j\omega C}{2}(V_{er} + V_{sr}). \end{aligned}$$

Por meio dessa formulação, é possível encontrar 2 equações igualando a parte real e a parte imaginária

$$I_{er} + I_{sr} = -\frac{\omega C}{2}(V_{ei} + V_{si}), \quad I_{ei} + I_{si} = \frac{\omega C}{2}(V_{er} + V_{sr}).$$

Note que, apenas com as medições de tensão e corrente nos terminais de entrada e saída da linha, é possível determinar o valor da capacitância em derivação do modelo.

Para determinar as outras equações que irão compor o método, é necessário aplicar a segunda Lei de Kirchhoff a malha do circuito equivalente.

$$\dot{V}_e = (R + j\omega L)\dot{I} + \dot{V}_s. \quad (23)$$

Usando as Equações (20) e (21), é possível escrever a corrente $\dot{I}$ de duas formas, descritas por:

$$\dot{I} = \dot{I}_e - \frac{j\omega C}{2}\dot{V}_e, \quad \dot{I} = \frac{j\omega C}{2}\dot{V}_s - \dot{I}_s.$$

Dessa forma, a Equação (23) pode ser reescrita de duas maneiras distintas, ambas em função das medições na entrada e na saída da linha.

$$\dot{V}_e = (R + j\omega L)\left(\dot{I}_e - \frac{j\omega C}{2}\dot{V}_e\right) + \dot{V}_s,$$

$$\dot{V}_e = (R + j\omega L)\left(\frac{j\omega C}{2}\dot{V}_s - \dot{I}_s\right) + \dot{V}_s.$$

Novamente, para que a equação resultante possa ser desenvolvida no contexto dos números reais, faz-se necessários expandir cada um dos fasores em sua parte real e imaginária, conforme é descrito no desenvolvimento a seguir:

$$\begin{aligned}
 V_{er} + jV_{ei} &= (R + j\omega L) \left(I_{er} + jI_{ei} - \frac{j\omega C}{2}(V_{er} + jV_{ei}) \right) + V_{sr} + jV_{si} \\
 &= RI_{er} + jRI_{ei} - j\frac{\omega RC}{2}V_{er} + \frac{\omega RC}{2}V_{ei} + j\omega LI_{er} - \omega LI_{ei} + \frac{\omega^2 LC}{2}V_{er} \\
 &\quad + j\frac{\omega^2 LC}{2}V_{ei} + V_{sr} + jV_{si} \\
 &= \left(RI_{er} + \frac{\omega RC}{2}V_{ei} - \omega LI_{ei} + \frac{\omega^2 LC}{2}V_{er} + V_{sr} \right) \\
 &\quad + j \left(RI_{ei} - \frac{\omega RC}{2}V_{er} + \omega LI_{er} + \frac{\omega^2 LC}{2}V_{ei} + V_{si} \right)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 V_{er} + jV_{ei} &= (R + j\omega L) \left(\frac{j\omega C}{2}(V_{sr} + jV_{si}) - (I_{sr} + jI_{si}) \right) + V_{sr} + jV_{si} \\
 &= j\frac{\omega RC}{2}V_{sr} - \frac{\omega RC}{2}V_{si} - RI_{sr} - jRI_{si} - \frac{\omega^2 LC}{2}V_{sr} - j\frac{\omega^2 LC}{2}V_{si} \\
 &\quad - j\omega LI_{sr} + \omega LI_{si} + V_{sr} + jV_{si} \\
 &= \left(-\frac{\omega RC}{2}V_{si} - RI_{sr} - \frac{\omega^2 LC}{2}V_{sr} + \omega LI_{si} + V_{sr} \right) \\
 &\quad + j \left(\frac{\omega RC}{2}V_{sr} - RI_{si} - \frac{\omega^2 LC}{2}V_{si} - \omega LI_{sr} + jV_{si} \right)
 \end{aligned}$$

Igualando a parte real e a parte imaginária de cada uma das relações, obtêm-se 4 equações em função dos parâmetros do circuito π da linha de transmissão.

$$V_{er} - V_{sr} = \left(I_{er} + \frac{\omega C}{2}V_{ei} \right) R + \left(-I_{ei} + \frac{\omega C}{2}V_{er} \right) \omega L,$$

$$V_{ei} - V_{si} = \left(I_{ei} - \frac{\omega C}{2}V_{er} \right) R + \left(I_{er} + \frac{\omega C}{2}V_{ei} \right) \omega L,$$

$$V_{er} - V_{sr} = \left(-\frac{\omega C}{2}V_{si} - I_{sr} \right) R + \left(-\frac{\omega C}{2}V_{sr} + I_{si} \right) \omega L,$$

$$V_{ei} - V_{si} = \left(\frac{\omega C}{2}V_{sr} - I_{si} \right) R + \left(-\frac{\omega C}{2}V_{si} - I_{sr} \right) \omega L.$$

A susceptância do capacitor em regime permanente senoidal vale $b = \omega C$ e a reatância do indutor vale $X = \omega L$. Usando essas igualdades é possível simplificar a notação das equações desenvolvidas. Ressaltando que no caso analisado a frequência é considerada constante.

Por fim, o conjunto de 6 equações em função dos parâmetros R , X e b fica:

$$V_{ei} + V_{si} = -\frac{2}{b}I_{er} - \frac{2}{b}I_{sr}, \quad (24)$$

$$V_{er} + V_{sr} = \frac{2}{b}I_{ei} + \frac{2}{b}I_{si}, \quad (25)$$

$$V_{er} - V_{sr} = \left(I_{er} + \frac{b}{2}V_{ei}\right)R + \left(-I_{ei} + \frac{b}{2}V_{er}\right)X, \quad (26)$$

$$V_{ei} - V_{si} = \left(I_{ei} - \frac{b}{2}V_{er}\right)R + \left(I_{er} + \frac{b}{2}V_{ei}\right)X, \quad (27)$$

$$V_{er} - V_{sr} = \left(-\frac{b}{2}V_{si} - I_{sr}\right)R + \left(-\frac{b}{2}V_{sr} + I_{si}\right)X, \quad (28)$$

$$V_{ei} - V_{si} = \left(\frac{b}{2}V_{sr} - I_{si}\right)R + \left(-\frac{b}{2}V_{si} - I_{sr}\right)X. \quad (29)$$

Modelagem do Problema de Estimação

Neste capítulo, será desenvolvido todo o equacionamento das linhas de transmissão de comprimento médio, iniciadas no Capítulo 4, considerando a presença de incertezas nas medidas realizadas pelo conjunto composto pelos instrumentos de medição elétrica e as unidades PMU. Dessa forma, a partir das equações exatas encontradas na seção anterior serão introduzidos os termos que modelam as incertezas nas medidas. Por fim, serão descritas as soluções para cada uma das modelagens, seguindo o que foi apresentado no desenvolvimento teórico. Sintetizando, as soluções estudadas nesse trabalho foram: Estimador MVU para o caso linear, Mínimos Quadrados Ordinários, Mínimos Quadrados Totais e Mínimos Quadrados Não-lineares usando método de Levenberg-Marquardt.

5.1 Equacionamento do modelo exato para cada amostra

Os fasores utilizados no equacionamento do modelo π concentrado serão obtidos por meio de amostragem. Sendo assim, a cada intervalo Δt , necessário para a utilização de um algoritmo de cálculo fasorial (OPPENHEIM; VERGHESE, 2015), tal como a Transformada rápida de Fourier ou *Fast Fourier Transform* (FFT), um novo valor para o conjunto de fasores é calculado.

Assim, para o primeiro intervalo de tempo Δt transcorrido a partir do instante inicial ($t = 0$), o vetor de fasores obtido corresponde ao primeiro vetor obtido por meio de amostragem. Matematicamente, ele será definido por:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_e(\Delta t - 0) \\ \dot{V}_s(\Delta t - 0) \\ \dot{I}_e(\Delta t - 0) \\ \dot{I}_s(\Delta t - 0) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{V}_e[1] \\ \dot{V}_s[1] \\ \dot{I}_e[1] \\ \dot{I}_s[1] \end{bmatrix}$$

Analogamente, após transcorridos $n \cdot \Delta t$, o vetor de fasores no domínio discreto será

dado por:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_e(n\Delta t - 0) \\ \dot{V}_s(n\Delta t - 0) \\ \dot{I}_e(n\Delta t - 0) \\ \dot{I}_s(n\Delta t - 0) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{V}_e[n] \\ \dot{V}_s[n] \\ \dot{I}_e[n] \\ \dot{I}_s[n] \end{bmatrix}$$

Expandindo cada um dos fasores em parte real e imaginária, pode-se escrever:

$$\begin{bmatrix} \dot{V}_e(n\Delta t - 0) \\ \dot{V}_s(n\Delta t - 0) \\ \dot{I}_e(n\Delta t - 0) \\ \dot{I}_s(n\Delta t - 0) \end{bmatrix} \triangleq \begin{bmatrix} \dot{V}_{er}[n] + j\dot{V}_{ei}[n] \\ \dot{V}_{sr}[n] + j\dot{V}_{si}[n] \\ \dot{I}_{er}[n] + j\dot{I}_{ei}[n] \\ \dot{I}_{sr}[n] + j\dot{I}_{si}[n] \end{bmatrix}$$

Os parâmetros a serem estimados são X , R e b . Com isso, as Equações (26), (27), (28) e (29) não são equações lineares, pois elas apresentam produtos entre os parâmetros. Em geral, equações desse tipo são mais complexas e impedem a aplicação de métodos convencionais, tal como o método da pseudo-inversa (COURRIEU, 2008). No entanto, é possível transformar o problema em um problema linear nos parâmetros observando que o cálculo do parâmetro b independe dos outros. Assim, é possível separar o cálculo desse parâmetro do restante das equações, fazendo que b possa ser tomado como uma constante a cada amostra.

Por meio da Equação (24), a suceptância em derivação para cada amostra n pode ser calculada pela relação

$$b[n] = -\frac{2(I_{er}[n] + I_{sr}[n])}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]}. \quad (30)$$

Dessa forma, é possível substituir a relação acima nas Equações (26), (27), (28) e (29), tornando-as lineares nos parâmetros.

$$\begin{aligned} V_{er}[n] - V_{sr}[n] &= \left(I_{er}[n] - \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{ei}[n] \right) R + \left(-I_{ei}[n] - \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{er}[n] \right) X, \\ V_{ei}[n] - V_{si}[n] &= \left(I_{ei}[n] + \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{er}[n] \right) R + \left(I_{er}[n] - \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{ei}[n] \right) X, \\ V_{er}[n] - V_{sr}[n] &= \left(\frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{si}[n] - I_{sr}[n] \right) R + \left(\frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{sr}[n] + I_{si}[n] \right) X, \\ V_{ei}[n] - V_{si}[n] &= \left(-\frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{sr}[n] - I_{si}[n] \right) R + \left(\frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{si}[n] - I_{sr}[n] \right) X. \end{aligned}$$

Usando a notação matricial, é possível resumir as 4 equações em uma única igualdade

entre matrizes.

$$\begin{bmatrix} V_{er}[n] - V_{sr}[n] \\ V_{ei}[n] - V_{si}[n] \\ V_{er}[n] - V_{sr}[n] \\ V_{ei}[n] - V_{si}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{er}[n] - \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{ei}[n] & -I_{ei}[n] - \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{er}[n] \\ I_{ei}[n] + \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{er}[n] & I_{er} - \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{ei}[n] \\ \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{si}[n] - I_{sr}[n] & \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{sr}[n] + I_{si}[n] \\ -\frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{sr}[n] - I_{si}[n] & \frac{I_{er}[n] + I_{sr}[n]}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} V_{si}[n] - I_{sr}[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R \\ X \end{bmatrix} \quad (31)$$

A relação matricial que envolve as medidas e os parâmetros é genericamente descrita pela notação apresentada a seguir, comum aos livros de estimação (SENGIJPTA, 1995)

$$\bar{Y} = \bar{H}\theta. \quad (32)$$

Com isso, obteve-se as duas equações básicas para o cálculo dos parâmetros. A primeira uma Equação (30) escalar, a segunda uma Equação (32) matricial.

5.2 Modelos para o ruído nas amostras

As medidas obtidas por meio das unidades PMU podem conter imprecisões de diversas naturezas. Tais imprecisões podem ser originadas diretamente das unidades PMU, tanto em relação ao tempo medido quanto em relação ao módulo do fasor, ou, o que é mais comum, decorrentes dos dispositivos de medição elétrica associados ao aparelho de obtenção de dados geo-processados, conforme descrito na Seção 2.1.1.

Em virtude da ocorrência dessas imprecisões, faz-se necessário introduzir um termo de ruído nas equações desenvolvidas para o problema.

Existem várias formas de considerar o ruído nas equações que descrevem o sistema, cada uma das modelagens permite obter a solução do problema de uma forma diferente. Nos casos mais simples, onde a modelagem é concentrada em apenas alguns elementos da equação, a solução obtida possui um comportamento mais previsível e é possível extrair informações sobre as limitações do estimador de forma mais simples. Dessa forma, os modelos mais simplificados servem de *benchmark* para avaliar a eficácia dos métodos mais sofisticados onde não é possível efetuar uma análise de sensibilidade mais apurada.

Os trabalhos mais recentes relacionados à estimação dos parâmetros de linhas de transmissão por meio de medidas fasoriais (WEHENKEL et al., 2020; DOBAKHSHARI et al., 2020) consideram uma modelagem mais realista das amostras, que incorpora o ruído no módulo e na fase da grandeza fasorial. Nesses casos, a solução torna-se mais complicada em virtude da instabilidade gerada pela projeção das grandezas nos eixos cartesianos. Essa abordagem também será amplamente discutida neste trabalho.

5.2.1 Modelagem do ruído no vetor de saída com entradas não correlacionadas

Uma forma de introduzir o ruído na Equação (32) é considerar que o mesmo aparece no sistema de forma aditiva apenas no vetor de saída. Assim, o vetor de medidas obtido ($\mathbf{Y}$) será a soma do vetor de saída sem ruído ($\bar{\mathbf{Y}}$) com o vetor de ruído ($\tilde{\mathbf{Y}}$), ou seja:

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}.$$

Dessa forma, para cada amostra n , vale a igualdade

$$\mathbf{Y}[n] = \bar{\mathbf{Y}}[n] + \tilde{\mathbf{Y}}[n].$$

Sendo $\tilde{\mathbf{Y}}[n]$ dado por:

$$\tilde{\mathbf{Y}}[n] \triangleq \begin{bmatrix} \tilde{y}_1[n] & \tilde{y}_2[n] & \tilde{y}_3[n] & \tilde{y}_4[n] \end{bmatrix}^T,$$

cada um dos conjuntos de N amostras, descritos por $\tilde{y}_i = \{\tilde{y}_i[1], \tilde{y}_i[2], \tilde{y}_i[3], \dots, \tilde{y}_i[N]\}$, têm distribuição normal com média zero e variância σ_i^2 .

O valor esperado de $\tilde{\mathbf{Y}}$ é zero ($E[\tilde{\mathbf{Y}}] = \mathbf{0}$). Além disso, tomando cada $\tilde{y}_i$ como não correlacionado com os demais, a matriz de covariância $\mathbf{C}$ de $\tilde{\mathbf{Y}}$ é expressa por

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_4^2 \end{bmatrix}. \quad (33)$$

A notação empregada justifica-se pelo paralelo que será realizado com o método dos mínimos quadrados totais, conforme apresentado em (MARKOVSKY; USEVICH, 2012).

5.2.2 Modelagem do ruído no vetor de saída considerando a natureza das amostras

Observado as entradas do vetor $\bar{\mathbf{Y}}$, descritas na Equação (31), nota-se que há apenas duas entradas diferentes, pois

$$\bar{y}_{11} = \bar{y}_{31}, \quad \bar{y}_{21} = \bar{y}_{41}.$$

Dessa forma, ao construir a matriz $\mathbf{Y}$ com as medidas, essas posições também devem ser iguais. Portanto, a modelagem do ruído deve considerar apenas duas distribuições normais com média zero e variância σ_i^2 diferentes e não correlacionadas. Nas posições em que as entradas se repetem, basta replicar a distribuição criada. Com isso, a matriz deve covariância para o vetor de ruídos nesse caso tem o seguinte formato

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \sigma_2^2 \\ \sigma_1^2 & 0 & \sigma_1^2 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 & \sigma_2^2 \end{bmatrix}. \quad (34)$$

5.2.3 Modelagem do ruído no vetor de saída e na matriz de observações

Analisando a natureza dos elementos que compõe a matriz $\bar{\mathbf{H}}$ e o vetor de saída $\bar{\mathbf{Y}}$, pode-se considerar que a modelagem do ruído concentrada apenas no vetor de saída não representa com fidelidade o modelo real a ser estudado, pois ambos contêm expressões originadas de medidas sujeitas a incertezas.

Nesse contexto, propõe-se uma modelagem que considera a presença ruído no vetor $\bar{\mathbf{Y}}$ e na matriz de observações $\bar{\mathbf{H}}$. Assim, as amostras fasoriais obtidas por meio de simulação possuem as seguintes parcelas

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}, \quad \mathbf{H} = \bar{\mathbf{H}} + \tilde{\mathbf{H}}.$$

O vetor $\tilde{\mathbf{Y}}$ tem distribuição normal, com média zero e matriz de covariância descrita pela Equação (34), ou seja, considera que há redundância nos termos do vetor.

Os elementos da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$ são denotados por

$$\tilde{\mathbf{H}} = [\tilde{h}_{ij}],$$

onde $1 \leq i \leq 4$ e $1 \leq j \leq 2$.

Observando os elementos da matriz $\bar{\mathbf{H}}$, pode-se escrever as seguintes igualdades:

$$|\bar{h}_{11}| = |\bar{h}_{22}|, \quad |\bar{h}_{12}| = |\bar{h}_{21}|, \quad |\bar{h}_{31}| = |\bar{h}_{42}|, \quad |\bar{h}_{32}| = |\bar{h}_{41}|.$$

Portanto, como a modelagem do ruído reflete as incertezas nas posições da matriz $\bar{\mathbf{H}}$, as posições iguais, ou iguais a menos do sinal, devem ser modeladas pela mesma variável aleatória, isto é

$$\tilde{h}_{11}[n] = \tilde{h}_{22}[n], \quad \tilde{h}_{12}[n] = \tilde{h}_{21}[n], \quad \tilde{h}_{31}[n] = \tilde{h}_{42}[n], \quad \tilde{h}_{32}[n] = \tilde{h}_{41}[n], \quad \forall n = 1, 2, \dots, N.$$

Cada família de N amostras $\tilde{h}_{ij} = \{\tilde{h}_{ij}[1], \tilde{h}_{ij}[2], \dots, \tilde{h}_{ij}[N]\}$ tem distribuição normal com média zero, variância σ_{ij}^2 e é não correlacionada com outra família diferente.

Como $\tilde{\mathbf{H}}$ não é uma matriz coluna, ou seja, não é um vetor. Para a completa descrição formal da distribuição dessa matriz, faz-se necessário realizar o processo de vetorização da mesma (DHRYMES et al., 1978). Definindo $\text{vec}(\tilde{\mathbf{H}}) \in \mathbb{R}^{8 \times 1}$ como a vetorização da matriz $\tilde{\mathbf{H}}$, é possível descrever os elementos da matriz de covariância de $\text{vec}(\tilde{\mathbf{H}})$ como

$$\mathbf{C}_{\text{vec}(\tilde{\mathbf{H}})} = \begin{bmatrix} \sigma_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{21}^2 & 0 & 0 & \sigma_{21}^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{31}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{31}^2 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{41}^2 & 0 & 0 & \sigma_{41}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{21}^2 & 0 & 0 & \sigma_{21}^2 & 0 & 0 & 0 \\ \sigma_{11}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{11}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \sigma_{41}^2 & 0 & 0 & \sigma_{41}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{31}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{31}^2 \end{bmatrix}.$$

5.3 Modelagem sobre o módulo e a fase da grandeza fasorial

Seja $\dot{X}$ uma medida fasorial exata, ou seja, livre de ruído, representada por meio de sua forma polar, definida por:

$$\dot{X} = \rho_X \exp(j\phi_X).$$

Há diversas formas de considerar o ruído em grandezas fasórias provenientes de sistemas elétricos de potência. No entanto, nos trabalhos mais recentes que tratam da estimação utilizando fasores (DOBAKHSHARI et al., 2020; KHANDEPARKAR; SOMAN; GAJJAR, 2016; WEHENKEL et al., 2020), a modelagem do ruído é feita por meio de duas variáveis aleatórias gaussianas independentes, uma no módulo (Δ_ρ) e outra na fase (Δ_ϕ). Sendo assim, a medida fasorial X , corrompida por ruído, passa a ser representada por

$$\dot{X} = (\rho_X + \Delta_\rho) \exp(j(\phi_X + \Delta_\phi)), \quad (35)$$

onde $\Delta_\rho \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^2)$, $\Delta_\phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2)$ e $\mathbb{E}[\Delta_\rho \Delta_\phi] = 0$

Dessa forma, para as quatro medições fasoriais realizadas na linha, tem-se:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= (\rho_{V_e} + \Delta_{\rho, V_e}) \exp(j(\phi_{V_e} + \Delta_{\phi, V_e})), & \dot{V}_s &= (\rho_{V_s} + \Delta_{\rho, V_s}) \exp(j(\phi_{V_s} + \Delta_{\phi, V_s})), \\ \dot{I}_e &= (\rho_{I_e} + \Delta_{\rho, I_e}) \exp(j(\phi_{I_e} + \Delta_{\phi, I_e})), & \dot{I}_s &= (\rho_{I_s} + \Delta_{\rho, I_s}) \exp(j(\phi_{I_s} + \Delta_{\phi, I_s})). \end{aligned}$$

Cada um dos ruídos introduzidos no modelo é causado pela falta de acurácia do circuito responsável pela aquisição e medição de fasores. E, além disso, as tensões e correntes possuem níveis diferentes para essa modelagem em virtude do fato de os TCs e TPCs serem afetados de formas distintas durante o processo de estimação fasorial. Portanto, cada um dos elementos pode ser descrito da forma:

$$\begin{aligned} \Delta_{\rho, V_e} &= \xi_{TPC} + \xi_{Cabo} + \xi_{PMU}, & \Delta_{\rho, V_s} &= \xi_{TPC} + \xi_{Cabo} + \xi_{PMU}, \\ \Delta_{\rho, I_e} &= \xi_{TC} + \xi_{Cabo} + \xi_{PMU}, & \Delta_{\rho, I_s} &= \xi_{TC} + \xi_{Cabo} + \xi_{PMU}, \end{aligned}$$

onde ξ_{TPC} representa a distribuição que modela o ruído de medição do transformador de potencial capacitivo, ξ_{TC} representa o ruído para o transformador de corrente, ξ_{Cabo} modela as distorções introduzidas pelos cabos de medição e, por fim, ξ_{PMU} representa o erro associado ao processo de estimação utilizado pelas PMUs.

Na literatura técnica, não existem estudos que mostram a modelagem estatística completa para esses ruídos associados ao processo de estimação de fasores. No entanto, existem estudos que propõem a quantificação do erro máximo observado em um estudo de caso (VIEIRA et al., ; WEHENKEL et al., 2020). Assumindo a hipótese de que os ruídos são Gaussianos de média zero, não correlacionados entre si, é possível utilizar os valores máximos presentes na literatura para calcular o desvio-padrão que modela cada

distribuição. Para isso, basta supor que o valor máximo permitido para o desvio de medida (M_d) corresponde a três vezes o desvio-padrão (σ) da distribuição associada ao ruído dessa medida. Dessa forma, o erro observado tem probabilidade de 99,73% de pertencer ao intervalo $[-M_d, M_d]$.

5.4 Análise da projeção dos ruídos nos eixos real e imaginário

As equações utilizadas para a obtenção dos parâmetros da linha de transmissão baseiam-se nas partes real e imaginária dos fasores de tensão e corrente de cada um dos terminais do quadripolo que representa a linha. Dessa forma, deve-se utilizar o que foi apresentado na Seção 5.3 e desenvolver a modelagem estatística para as grandezas quando projetadas sobre o eixo real e imaginário.

Para isso, considere uma medida fasorial genérica representada por

$$\dot{X} = (\rho_X + \Delta_\rho) \exp(j(\phi_X + \Delta_\phi)),$$

onde $\Delta_\rho \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^2)$, $\Delta_\phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2)$ e $\mathbb{E}[\Delta_\rho \Delta_\phi] = 0$.

Em representação cartesiana, é possível escrever:

$$\dot{X} = X_{re} + jX_{im}.$$

A parte real (X_{re}) e a parte imaginária (X_{im}) são calculadas por meio das expressões

$$X_{re} = (\rho_X + \Delta_\rho) \cos(\phi_X + \Delta_\phi), \quad X_{im} = (\rho_X + \Delta_\rho) \sin(\phi_X + \Delta_\phi).$$

Para a completa descrição estatística das projeções dos ruídos, objetiva-se determinar:

1. A distribuição de X_{re} e X_{im} ;
2. $\mathbb{E}[X_{re}] - \rho_X \cos(\phi_X)$ e $\mathbb{E}[X_{im}] - \rho_X \sin(\phi_X)$;
3. A correlação entre as partes real e imaginária de cada medida.

Por meio das propriedades 1,2 e 3, é possível verificar qual é o comportamento das variáveis aleatórias resultantes em comparação com a modelagem inicial.

O nível máximo de ruído para o módulo é uma porcentagem (α) do módulo exato (ρ), enquanto o nível máximo de ruído para a fase é um valor absoluto (β) dado em radianos (WEHENKEL et al., 2020). Sendo assim, a distribuição Gaussiana para tais grandezas pode ser descrita por

$$\Delta_\rho \sim \mathcal{N}(0, \alpha\rho/3), \quad \Delta_\phi \sim \mathcal{N}(0, \beta/3).$$

Para verificar o item 1, pode-se utilizar diversas formas. É possível, por exemplo, verificar se X_{re} e X_{im} possuem distribuições Gaussianas por meio de artifícios gráficos como histogramas e gráficos quantil-quantil, chamados *QQ-plot*. Uma verificação algébrica mais rigorosa pode ser obtida por meio dos testes de normalidade, que nada mais são do que testes de hipótese que verificam se um conjunto de dados possui uma distribuição normal. Dentre eles, destacam-se os testes de Kolmogorov-Smirnov, Anderson-Darling, Cramer-von Mises, D'Agostino-Pearson e Shapiro-Wilk. Contudo, considerando uma distribuição genérica para o conjunto de amostras a ser analisado e uma quantidade significativa das mesmas, pode-se afirmar que o teste de Shapiro-Wilk é o teste mais poderoso, ou seja, consegue detectar com mais precisão conjuntos de amostras que possuem distribuição normal (RAZALI; WAH et al., 2011). Vale ressaltar que o poder do teste está relacionado a probabilidade de se detectar uma amostra proveniente de uma distribuição não normal.

A descrição do teste de Shapiro-Wilk (SWT) pode ser encontrada em (RAZALI; WAH et al., 2011). Basicamente, o resultado da análise é sintetizado pelo p-valor calculado por meio do teste. Sendo assim, dado um nível de significância γ para o teste, se o p-valor obtido para o conjunto de amostras for menor que γ , a hipótese nula do teste (o conjunto de amostras tem distribuição normal) é rejeitada, assim, conclui-se que o mesmo não tem distribuição normal. Por outro lado, se $p - \text{valor} > \gamma$, a hipótese nula não pode ser rejeitada e pode-se concluir que o conjunto tem distribuição normal.

Vale ressaltar que devem ser analisados 8 conjuntos de amostras quanto a normalidade de suas distribuições, uma vez são 4 medidas ($\dot{I}_e, \dot{I}_s, \dot{V}_e, \dot{V}_s$) decompostas em parte real e imaginária. Deve-se ainda levar em conta que a normalidade dos dados pode ser afetada pelo nível de ruído inicial, associado ao módulo e a fase da grandeza fasorial. Por isso, a análise foi realizada considerando diversos níveis de ruído. Primeiro, o nível de ruído para a fase foi fixado em $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, que corresponde ao valor médio apresentado em (WEHENKEL et al., 2020), enquanto α variou entre 0,1% e 4% que foi superior ao maior erro observado em (VIEIRA et al.,), esse resultado é apresentado na Tabela 1. Posteriormente, o valor do erro de módulo foi considerado constante e igual a 1%, já a fase variou entre $1,5 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ e $1,2 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$, que corresponde ao maior desvio de fase verificado em (VIEIRA et al.,), tal análise é mostrada na Tabela 2.

Adotando um nível de significância $\gamma = 5\%$, pode-se concluir por meio da análise da Tabela 1 que, com exceção do conjunto de amostras obtido para I_{ei} no intervalo $0,1\% < \alpha < 2\%$, todos os outros conjuntos de amostras seguem uma distribuição normal segundo o SWT. Para $\alpha = 0,1\%$, o gráfico quantil-quantil das amostras de I_{ei} é apresentado na Figura 8. Observando tal gráfico, nota-se que há uma distorção em relação a normal padrão para valores extremos, tanto a esquerda como a direita, o que compromete a normalidade dos dados. Por outro lado, quando é analisada a influência de β e $\alpha = 1\%$, nota-se que há novamente uma distorção na projeção do fasor $\dot{I}_e$ no eixo imaginário para $\beta > 3 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Essa análise corrobora o fato de que é necessário analisar as

características das medidas fasoriais antes de considerar que suas projeções seguem uma distribuição normal. Além disso, vale ressaltar que não há um comportamento previsível para a relação entre o erro polar e o erro das projeções. Uma vez que, na Tabela 1 a distorção é observada para pequenos valores de α , enquanto na Tabela 2 a distorção passa a ocorrer para elevados valores de β .

Tabela 1 – Análise da variação de α sobre os p-valores no SWT, com $\beta = 8 \cdot 10^{-3}$

α	I_{er}	I_{sr}	V_{er}	V_{sr}	I_{ei}	I_{si}	V_{ei}	V_{si}
0.1	0.08117	0.4139	0.4799	0.05904	0.01480	0.9629	0.4836	0.2181
0.5	0.1775	0.1323	0.5779	0.2741	0.01238	0.9307	0.4951	0.4009
0.8	0.2755	0.1268	0.5825	0.1662	0.01582	0.7339	0.5039	0.6498
1.0	0.4404	0.1862	0.5732	0.2081	0.01646	0.6487	0.4953	0.6970
1.5	0.6622	0.2709	0.5802	0.2614	0.02543	0.7882	0.5036	0.7512
2.0	0.6886	0.2899	0.5819	0.2701	0.04261	0.8347	0.4953	0.6482
2.5	0.6967	0.2927	0.5831	0.2722	0.1039	0.8646	0.4926	0.5278
3.0	0.6978	0.3026	0.5866	0.2721	0.2049	0.9449	0.4806	0.3429
3.5	0.7246	0.3190	0.5883	0.2683	0.2452	0.9660	0.4742	0.2080
4.0	0.7370	0.3190	0.5895	0.2675	0.2142	0.9460	0.4911	0.1723

Tabela 2 – Análise da variação de β sobre os p-valores no SWT, com $\alpha = 1\%$

β (10^{-3} rad)	I_{er}	I_{sr}	V_{er}	V_{sr}	I_{ei}	I_{si}	V_{ei}	V_{si}
1.5	0.7622	0.3142	0.5843	0.2528	0.3388	0.8862	0.4929	0.2923
3.0	0.6948	0.2990	0.5744	0.2792	0.1992	0.8459	0.4894	0.6125
4.5	0.7045	0.2941	0.5872	0.2653	0.03325	0.7689	0.4976	0.6828
6.0	0.6121	0.2595	0.5692	0.2519	0.02259	0.7073	0.4917	0.7906
7.5	0.4781	0.2058	0.5749	0.2079	0.01641	0.6388	0.4937	0.7007
9.0	0.3544	0.1428	0.5796	0.1893	0.01679	0.7024	0.4958	0.6717
10.5	0.2560	0.1150	0.5737	0.1601	0.01487	0.7478	0.4854	0.6206
12	0.2258	0.1091	0.5801	0.1531	0.01336	0.8205	0.5065	0.5835

As expressões apresentadas no item 2 representam o valor esperado para os erros introduzidos pela modelagem proposta em relação ao valor ideal. Por meio da definição de uma medida genérica com ruído, Equação (35), é possível obter a expressão analítica para o valor esperado do erro da parte real e da parte imaginária, tais expressões são apresentadas por meio das Equações (36) e (37). A demonstração das expressões é apresentada em A.5.

$$\mathbb{E}[X_{re}] - \rho_X \cos(\phi_X) = \left(e^{-\frac{1}{2}\sigma_\phi^2} - 1\right) \cos(\phi_X) \rho_X \quad (36)$$

$$\mathbb{E}[X_{im}] - \rho_X \sin(\phi_X) = \left(e^{-\frac{1}{2}\sigma_\phi^2} - 1\right) \sin(\phi_X) \rho_X \quad (37)$$

Figura 8 – *QQ-plot* para as amostras de I_{ei} caso $\alpha = 0,1\%$ e $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

Idealmente, o valor esperado do erro deveria ser nulo. Porém, nota-se que tal valor depende do desvio-padrão que modela a grandeza polar na fase e das propriedades fasoriais exatas (módulo e fase).

Por fim, para verificar o item 3, ou seja, se há correlação entre as partes reais e as imaginárias de medidas fasoriais, pode-se utilizar o coeficiente de correlação de Pearson de duas famílias de amostras X e Y de tamanho n , definidas por

$$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \quad Y = \{y_1, y_2, \dots, y_n\}.$$

Para essas famílias de amostras, o coeficiente de correlação de Pearson é calculado por meio da expressão

$$r_{xy} = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \bar{y})^2}}. \quad (38)$$

Para obtenção dos fasores, o valor de α foi fixado em 1% e o valor de β em $8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Foram avaliados os coeficientes de Pearson entre as partes real e imaginária de todas as grandezas fasoriais. O resultado dessa análise é apresentado na Tabela 3.

Tabela 3 – Cálculo dos coeficientes de Pearson para $\alpha = 1\%$ e $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

	I_{er}	I_{sr}	V_{er}	V_{sr}	I_{ei}	I_{si}	V_{ei}	V_{si}
I_{er}	1	-0,007316	0,003650	-0,02458	-0,1366	0,02489	-0,01448	-0,03234
I_{sr}	-0,007316	1	-0,02487	-0,009573	-0,000218	-0,1297	-0,01121	-0,01899
V_{er}	0,003650	-0,02487	1	0,01275	-0,03060	0,02021	-0,01962	0,01170
V_{sr}	-0,02458	-0,009573	0,01275	1	-0,02153	0,002185	-0,004080	-0,1289
I_{ei}	-0,1366	-0,0002180	-0,03060	-0,02153	1	0,004432	-0,02627	-0,009796
I_{si}	0,02489	-0,1297	0,02021	0,002185	0,004432	1	-0,004978	0,01130
V_{ei}	-0,01448	-0,01121	-0,01962	-0,004080	-0,02627	-0,004978	1	0,01357
V_{si}	-0,03234	-0,01899	0,01170	-0,1289	-0,009796	0,01130	0,01356	1

Por meio da análise dos resultados da Tabela 3, nota-se que há um aumento significativo da correlação entre as partes reais e imaginárias das grandezas fasoriais com a

modelagem do ruído proposta. Para medidas fasoriais distintas, por exemplo, $\dot{V}_s$ e $\dot{V}_e$, a presença de um valor não nulo para a correlação trata-se de uma distorção numérica, ou seja, ela ocorre devido à aproximação finita das distribuições normais geradas de forma artificial. Contudo, para as partes real e imaginária da mesma grandeza fasorial, o valor do coeficiente de Pearson é significativamente maior que zero, ou seja, as projeções possuem correlação diferente de zero.

Além disso, o valor encontrado para o coeficiente de correlação depende do nível de ruído presente na medida fasorial. A fim de verificar esse fato, pode-se analisar uma das grandezas de forma separada e variar o nível de ruído por meio do parâmetro α . Tal análise aplicada ao fasor $\dot{V}_s$ é apresentada na Tabela 4.

Tabela 4 – Coeficiente de Pearson entre V_{sr} e V_{si} em função de α

α	1.0	1.5	2.0	2.5	3.0	3.5	4.0
r_{xy}	-0.1289	-0.3775	-0.5414	-0.6535	-0.7320	-0.7882	-0.82935

A análise da variação do coeficiente de Pearson em função de α mostra que o aumento do nível de ruído gera um aumento da correlação entre as grandezas, gerando o processo de multicolinearidade entre as variáveis de entrada, o que torna o processo de estimação mais complexo, uma vez que as grandezas passam a ser intrinsecamente dependentes e a interpretação do processo de estimação pode ser feito de forma incorreta (DAOUD, 2017).

Por meio dos estudos realizados, observou-se que as hipóteses iniciais adotadas para as projeções das medidas fasoriais nos eixos real e imaginário (distribuição normal, média zero e correlação nula) não foram verificadas na prática, uma vez que o conjunto de medidas apresentou fortes distorções para alguns níveis de ruído, principalmente, quanto ao valor médio e a correlação entre as projeções de uma mesma grandeza. Dessa forma, fica clara a necessidade de se realizar um estudo prévio do comportamento das medidas antes da utilização em algum método de estimação. Ademais, vale ressaltar que a utilização da modelagem estatística sobre as componentes polares deve ser, sempre que possível, priorizada, pois há evidências estatísticas mais robustas que as hipóteses sejam respeitadas em comparação com as projeções.

5.5 Solução MVU

Ao introduzir o ruído no vetor de saída, conforme descrito na Seção 5.2.1, o sistema de equações representado pela Equação (32) passa a não ser mais consistente, isto é, a igualdade não é mais válida. Porém, dada a magnitude do ruído, pode-se dizer que a os vetores de entradas aproximadamente iguais (MARKOVSKY; HUFFEL, 2007)

$$Y \approx \bar{H}\theta.$$

A modelagem desenvolvida prevê a adição de um termo de ruído $\tilde{\mathbf{Y}}$ na forma

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}.$$

Sendo $\bar{\mathbf{Y}} = \bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}$ a igualdade vinda do modelo exato, pode-se escrever

$$\mathbf{Y} = \bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta} + \tilde{\mathbf{Y}}.$$

A distribuição de $\tilde{\mathbf{Y}}$ é conhecida e foi descrita na Seção 5.2.1, onde

$$\tilde{\mathbf{Y}} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{C}).$$

Portanto,

$$\mathbf{Y} \sim \mathcal{N}(\bar{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}, \mathbf{C}).$$

Ou seja, adotando a modelagem do ruído descrita na Seção 5.2.1, o problema tem o formato do estimador MVU para o caso linear, o qual foi apresentado na Seção 3.1.3. Cujo estimador é calculado por:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}. \quad (39)$$

Por meio dessa formulação, ainda é possível encontrar a matriz de covariância dos parâmetros antes mesmo da aplicação do método. Conforme desenvolvido na Seção 3.1.3, ela será dada pela expressão

$$\mathbf{C}_{\hat{\boldsymbol{\theta}}} = (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1}. \quad (40)$$

É importante ressaltar que essa solução foi possível porque o problema tem formato linear, com ruído modelado por uma distribuição gaussiana de matriz de covariância conhecida e que possui inversa. Caso $\mathbf{C}$ não admitisse inversa, como, por exemplo, o que foi desenvolvido na Seção 5.2.2, não seria possível aplicar o estimador.

Ainda utilizando essa modelagem, é possível obter a solução por meio do estimador OLS (*Ordinary Least Squares*), sem utilizar a matriz de covariância $\mathbf{C}$. Isso porque, a princípio, ela pode não ser conhecida para o problema em questão. Neste caso, o vetor de parâmetros $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ é calculado por meio da relação:

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = (\bar{\mathbf{H}}^T \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{Y}. \quad (41)$$

Para esse estimador subótimo, não é possível obter a matriz de covariância esperada para os parâmetros. É importante ressaltar também que, no caso em que a matriz de covariância $\mathbf{C}$ é um múltiplo da identidade, isto é, $\mathbf{C} = \alpha \mathbf{I}$, o estimador não viesado de mínima variância para o problema linear coincide com o estimador OLS.

Quanto ao parâmetro b , supondo que o ruído é modelado na Equação (30) por um termo Δb , com distribuição normal e desvio-padrão σ_b , pode-se escrever:

$$b[n] = -\frac{2(I_{er}[n] + I_{sr}[n])}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} + \Delta b[n]. \quad (42)$$

Com $n = 1, 2, \dots, N$ e onde a família $\Delta b = \{\Delta b[1], \Delta b[2], \dots, \Delta b[N]\}$ tem distribuição normal com média zero e desvio-padrão σ_b .

Usando essa definição, $b = \{b[1], b[2], b[3], \dots, b[N]\}$ tem distribuição normal com os seguintes parâmetros

$$E[\{b\}] = -\frac{2(I_{er}[n] + I_{sr}[n])}{V_{ei}[n] + V_{si}[n]} = b, \quad \text{Var}(b) = \sigma_b^2. \quad (43)$$

5.6 Solução via TLS

Para a modelagem do ruído proposta na Seção 5.2.3, não é possível encontrar o estimador MVU. Por isso, faz-se necessário utilizar um estimador sub-ótimo, tal como o método dos mínimos quadrados totais.

Considere o vetor $\mathbf{Y}[n]$ e a matriz $\mathbf{H}[n]$ conforme descritos na Seção 5.2.3 e sejam $\Delta \mathbf{Y}[n]$ e $\Delta \mathbf{H}[n]$ os termos de correção para cada conjunto de amostras, indexadas por n , tais que:

$$\mathbf{Y}[n] + \Delta \mathbf{Y}[n] = (\mathbf{H}[n] + \Delta \mathbf{H}[n])\boldsymbol{\theta}. \quad (44)$$

A cada nova amostra, indexada por n , das grandezas fasoriais, o estimador buscado ($\hat{\boldsymbol{\theta}}[n]$) objetiva minimizar a norma da matriz expandida das correções $[\Delta \mathbf{H}[n] \ \Delta \mathbf{Y}[n]]$ sujeito à restrição representada por meio da Equação (44), ou seja

$$P8 : \hat{\boldsymbol{\theta}}[n] = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} || [\Delta \mathbf{H}[n] \ \Delta \mathbf{Y}[n]] ||_F$$

sujeito a:

$$\mathbf{Y}[n] + \Delta \mathbf{Y}[n] = (\mathbf{H}[n] + \Delta \mathbf{H}[n])\boldsymbol{\theta}.$$

A Equação (44) pode escrita de forma matricial como

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}[n] + \Delta \mathbf{H}[n] & \mathbf{Y}[n] + \Delta \mathbf{Y}[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}[n] \\ -1 \end{bmatrix} = \mathbf{0}_{4 \times 1}. \quad (45)$$

Desde que $\mathbf{Y}[n]$ não pertença ao subespaço vetorial gerado por $\mathbf{H}[n]$, ou seja, desde que $\nexists \boldsymbol{\theta}[n] : \mathbf{Y}[n] = \mathbf{H}[n]\boldsymbol{\theta}[n]$, o posto da matriz expandida $[\mathbf{H}[n] \ \mathbf{Y}[n]]$ deve ser 3, enquanto o posto da matriz expandida $[\mathbf{H}[n] + \Delta \mathbf{H}[n] \ \mathbf{Y}[n] + \Delta \mathbf{Y}[n]]$ é 2. Além disso,

$$[\Delta \mathbf{H}[n] \ \Delta \mathbf{Y}[n]] = [\mathbf{H}[n] + \Delta \mathbf{H}[n] \ \mathbf{Y}[n] + \Delta \mathbf{Y}[n]] - [\mathbf{H}[n] \ \mathbf{Y}[n]].$$

Dessa forma, $[\Delta \mathbf{H}[n] \ \Delta \mathbf{Y}[n]]$ é a menor matriz que transforma $[\mathbf{H}[n] \ \mathbf{Y}[n]]$ de posto 3 na matriz $[\mathbf{H}[n] + \Delta \mathbf{H}[n] \ \mathbf{Y}[n] + \Delta \mathbf{Y}[n]]$ de posto 2. Essa solução é garantida pelo Teorema 7.

Considere a seguinte partição da decomposição em valores singulares da matriz expandida $[\mathbf{H}[\mathbf{n}] \quad \mathbf{Y}[\mathbf{n}]]$

$$[\mathbf{H}[\mathbf{n}] \quad \mathbf{Y}[\mathbf{n}]] = [\mathbf{U}_p[\mathbf{n}] \quad \mathbf{u}_q[\mathbf{n}]] \begin{bmatrix} \Sigma_p[\mathbf{n}] & \\ & \sigma_q[\mathbf{n}] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp}[\mathbf{n}] & \mathbf{v}_{pq}[\mathbf{n}] \\ \mathbf{v}_{qp}[\mathbf{n}] & v_{qq}[\mathbf{n}] \end{bmatrix}^T.$$

O vetor de parâmetros para o n -ésimo conjunto de amostras obtido, será calculado por meio da relação

$$\hat{\boldsymbol{\theta}}[\mathbf{n}] = -\mathbf{v}_{pq}[\mathbf{n}]v_{qq}[\mathbf{n}]^{-1}. \quad (46)$$

Onde

- $\mathbf{v}_{pq}[\mathbf{n}]$ composto pelos 2 primeiros elementos da terceira coluna da matriz de vetores singulares à direita da matriz expandida com ruídos no conjunto de amostras n ;
- $v_{qq}[\mathbf{n}]$ é o terceiro elemento da terceira coluna da matriz de vetores singulares à direita da matriz expandida com ruídos no conjunto de amostras n .

Como o parâmetro b (suceptância em derivação) está desacoplado da equação matricial, a modelagem adotada foi a mesma daquela apresentada na Seção 5.5.

5.7 Solução usando método dos mínimos quadrados não lineares

5.7.1 Modelagem do ruído concentrada no vetor de saída

Para obter a solução do problema usando o método dos mínimos quadrados não lineares, é necessário retornar às Equações (24), (25), (26), (27), (28) e (29). Seguindo a notação introduzida na Seção 3.4, o sistema de equações exato que representa o sistema é dado por

$$\bar{y}_i = \bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}). \quad (47)$$

Com $i = 1, 2, \dots, 6$. Para o caso particular do modelo estudado, os parâmetros da Equação (47) são

$$\boldsymbol{\theta} = [b \quad R \quad X]^T,$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{V}_{ei} + \bar{V}_{si}, & \bar{y}_2 &= \bar{V}_{er} + \bar{V}_{sr}, & \bar{y}_3 &= \bar{V}_{er} - \bar{V}_{sr}, \\ \bar{y}_4 &= \bar{V}_{ei} - \bar{V}_{si}, & \bar{y}_5 &= \bar{V}_{er} - \bar{V}_{sr}, & \bar{y}_6 &= \bar{V}_{ei} - \bar{V}_{si}, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_3(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_4(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_5(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_6(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2/b)\bar{I}_{er} - (2/b)\bar{I}_{sr} \\ (2/b)\bar{I}_{ei} + (2/b)\bar{I}_{si} \\ (\bar{I}_{er} + (b/2)\bar{V}_{ei})R + (-\bar{I}_{ei} + (b/2)\bar{V}_{er})X \\ (\bar{I}_{ei} - (b/2)\bar{V}_{er})R + (\bar{I}_{er} + (b/2)\bar{V}_{ei})X \\ (-(b/2)\bar{V}_{si} - \bar{I}_{sr})R + (-(b/2)\bar{V}_{sr} + \bar{I}_{si})X \\ ((b/2)\bar{V}_{sr} - \bar{I}_{si})R + (-(b/2)\bar{V}_{si} - \bar{I}_{sr})X \end{bmatrix}.$$

O ruído é incorporado ao modelo de forma aditiva em cada termo $\bar{y}_i$, ou seja, as medidas y_i com ruído serão dadas pela igualdade

$$y_i = \bar{y}_i + w_i,$$

com $i = 1, 2, \dots, 6$.

Cada w_i tem distribuição normal com média zero e variância σ_i^2 . Além disso,

$$\text{Cov}(w_i, w_j) = 0, \quad \forall i \neq j.$$

Sendo assim, os elementos da matriz de covariância do ruído $\mathbf{C}_w$ são descritos por

$$\mathbf{C}_w = [c_{ij}] = \begin{cases} \sigma_i^2, & \text{se } i = j, \\ 0, & \text{se } i \neq j. \end{cases}$$

As componentes da função $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ são calculadas pela diferença entre a função $\bar{f}_i(\boldsymbol{\theta})$ e cada y_i , isto é

$$f_i(\boldsymbol{\theta}) = \bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}) - y_i,$$

com $i = 1, 2, \dots, 6$.

No método dos mínimos quadrados não lineares, o objetivo é encontrar $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ que minimiza a norma-2 do vetor $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$. Usando a aproximação de primeira ordem (Método de Gauss-Newton) e o algoritmo de Levenberg-Marquardt, conforme apresentado na Seção 3.4.1, o problema de otimização pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \text{P9 : } \hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)} &= \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)})\| + \lambda^{(k)} \|\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}\| \\ \text{sujeito a:} \\ \hat{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}; \boldsymbol{\theta}^{(k)}) &= \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + D\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)})(\boldsymbol{\theta} - \boldsymbol{\theta}^{(k)}) \text{ e} \\ \lambda^{(k)} &> 0. \end{aligned}$$

A solução do problema de otimização gera a sequência de vetores de parâmetros descrita pela Equação (48).

$$\boldsymbol{\theta}^{(k+1)} = \boldsymbol{\theta}^{(k)} - (Df(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T Df(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) + \lambda^{(k)} \mathbf{I})^{-1} Df(\boldsymbol{\theta}^{(k)})^T \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) \quad (48)$$

A expressão de $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ é conhecida, então a matriz jacobiana é obtida simplesmente aplicando a definição

$$[Df(\boldsymbol{\theta}^{(k)})]_{ij} = \frac{\partial f_i(\boldsymbol{\theta}^{(k)})}{\partial \theta_j}.$$

Fazendo isso, obtém-se a seguinte matriz

$$Df(\boldsymbol{\theta}^{(k)}) = \begin{bmatrix} 0 & \frac{2\bar{I}_{er}}{(b^{(k)})^2} + \frac{2\bar{I}_{sr}}{(b^{(k)})^2} & 0 \\ 0 & -\frac{2\bar{I}_{ei}}{(b^{(k)})^2} - \frac{2\bar{I}_{si}}{(b^{(k)})^2} & 0 \\ \bar{I}_{er} + \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{ei} & \frac{R^{(k)}}{2}\bar{V}_{ei} + \frac{X^{(k)}}{2}\bar{V}_{er} & -\bar{I}_{ei} + \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{er} \\ \bar{I}_{ei} - \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{er} & -\frac{R^{(k)}}{2}\bar{V}_{er} + \frac{X^{(k)}}{2}\bar{V}_{ei} & \bar{I}_{er} + \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{ei} \\ -\bar{I}_{sr} - \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{si} & -\frac{R^{(k)}}{2}\bar{V}_{si} - \frac{X^{(k)}}{2}\bar{V}_{sr} & \bar{I}_{si} - \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{sr} \\ -\bar{I}_{si} + \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{sr} & \frac{R^{(k)}}{2}\bar{V}_{sr} - \frac{X^{(k)}}{2}\bar{V}_{si} & -\bar{I}_{sr} - \frac{b^{(k)}}{2}\bar{V}_{si} \end{bmatrix}.$$

Para completar a descrição do método, é necessário escolher a forma com que o parâmetro λ será ajustado a cada iteração, fornecer os valores iniciais do vetor de parâmetros e de λ e determinar o critério de parada do método, ou seja, em que situações a aproximação $\boldsymbol{\theta}^{(k)}$ será aceita como solução.

Como forma de solução, optou-se por utilizar a função *lsqnonlin* do MATLAB, que apresenta uma forma de solução do método dos mínimos quadrados não lineares. Nela, é possível escolher a opção *levenberg-marquardt* para que o método procure a solução por meio do algoritmo de Levenberg-Marquardt e ainda inserir a matriz jacobiana como parâmetro da função. Para essa abordagem, a iteração de λ , bem como seu valor inicial, e o critério de parada são especificados pelo software, seguindo o que foi desenvolvido em (MARQUARDT, 1963b), (MARQUARDT, 1963a), (MORÉ, 1978) e (JR, 1977).

5.7.2 Modelagem do ruído no módulo e na fase da grandeza fasorial

Nessa solução, o equacionamento do modelo exato é o mesmo daquele apresentado na seção anterior, ou seja, trata-se de uma abordagem por meio de funções não lineares nos parâmetros, cuja descrição é dada por

$$\bar{y}_i = \bar{f}_i(\boldsymbol{\theta}).$$

Com $i = 1, 2, \dots, 6$. Na qual, cada elemento da equação é composto pelas seguintes partes

$$\boldsymbol{\theta} = [b \quad R \quad X]^T,$$

$$\begin{aligned} \bar{y}_1 &= \bar{V}_{ei} + \bar{V}_{si}, & \bar{y}_2 &= \bar{V}_{er} + \bar{V}_{sr}, & \bar{y}_3 &= \bar{V}_{er} - \bar{V}_{sr}, \\ \bar{y}_4 &= \bar{V}_{ei} - \bar{V}_{si}, & \bar{y}_5 &= \bar{V}_{er} - \bar{V}_{sr}, & \bar{y}_6 &= \bar{V}_{ei} - \bar{V}_{si}, \end{aligned}$$

$$\bar{\mathbf{f}}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{bmatrix} \bar{f}_1(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_2(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_3(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_4(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_5(\boldsymbol{\theta}) \\ \bar{f}_6(\boldsymbol{\theta}) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -(2/b)\bar{I}_{er} - (2/b)\bar{I}_{sr} \\ (2/b)\bar{I}_{ei} + (2/b)\bar{I}_{si} \\ (\bar{I}_{er} + (b/2)\bar{V}_{ei})R + (-\bar{I}_{ei} + (b/2)\bar{V}_{er})X \\ (\bar{I}_{ei} - (b/2)\bar{V}_{er})R + (\bar{I}_{er} + (b/2)\bar{V}_{ei})X \\ (-(b/2)\bar{V}_{si} - \bar{I}_{sr})R + (-(b/2)\bar{V}_{sr} + \bar{I}_{si})X \\ ((b/2)\bar{V}_{sr} - \bar{I}_{si})R + (-(b/2)\bar{V}_{si} - \bar{I}_{sr})X \end{bmatrix}.$$

No entanto, a modelagem do ruído é feita conforme apresentado na Seção 5.3. Isso gera uma distorção no modelo clássico de mínimos quadrados não lineares (COOK; TSAI, 1985), pois o ruído está incorporado tanto no vetor de saída $\mathbf{Y}$ como também no vetor de funções não lineares $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$.

Cada medida fasorial utilizada pelo modelo é descrita por:

$$\begin{aligned} \dot{V}_e &= (|\dot{V}_e| + \Delta_{|V_e|}) \exp(j(\phi_{V_e} + \Delta_{\phi, V_e})), & \dot{V}_s &= (|\dot{V}_s| + \Delta_{|V_s|}) \exp(j(\phi_{V_s} + \Delta_{\phi, V_s})) \\ \dot{I}_e &= (|\dot{I}_e| + \Delta_{|I_e|}) \exp(j(\phi_{I_e} + \Delta_{\phi, I_e})), & \dot{I}_s &= (|\dot{I}_s| + \Delta_{|I_s|}) \exp(j(\phi_{I_s} + \Delta_{\phi, I_s})) \end{aligned}$$

Os elementos que modelam o ruído nas medidas fasoriais são dados pelas expressões

$$\begin{aligned} \Delta_{|V_e|} &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{|\dot{V}_e|\alpha}{3}\right), \Delta_{|V_s|} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{|\dot{V}_s|\alpha}{3}\right), \Delta_{|I_e|} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{|\dot{I}_e|\alpha}{3}\right) \\ \Delta_{|I_s|} &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{|\dot{I}_s|\alpha}{3}\right), \Delta_{\phi, V_e} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta}{3}\right), \Delta_{\phi, V_s} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta}{3}\right), \\ \Delta_{\phi, I_e} &\sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta}{3}\right), \Delta_{\phi, I_s} \sim \mathcal{N}\left(0, \frac{\beta}{3}\right). \end{aligned}$$

Onde α representa uma porcentagem do valor do módulo da amplitude e β é um valor em radianos. Lembrando que as projeções são obtidas por meio do cosseno, para o eixo real, e do seno, no caso do eixo imaginário, do argumento de cada medida fasorial, conforme descrito na Seção 5.3.

Dessa forma, o problema de otimização pode ser escrito usando a seguinte formulação:

$$P10 : \hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})\|.$$

Como algoritmo de solução, foi escolhido o método de Levenberg-Marquardt seguindo a mesma representação descrita na Seção 5.7.1. Agora, contudo, tanto o vetor $\mathbf{Y}$ como a função não linear $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ são modificados pela presença do ruído.

Resultados de simulação

Neste capítulo, serão apresentados os resultados obtidos para os métodos de identificação de sistemas empregados para a estimação dos parâmetros de sequência positiva de uma linha de transmissão de comprimento médio. Primeiro, será apresentada a estrutura de simulação montada no *Simulation and model-based design* (Simulink) para aquisição dos fasores. Posteriormente, cada um dos métodos empregados será abordado de forma separada, por meio dos seguintes aspectos: descrição dos valores adotados na modelagem do ruído, algoritmo empregado para cálculo dos parâmetros, descrição dos resultados por meio de indicadores estatísticos e histogramas.

6.1 Estrutura de simulação utilizada

Nesta seção, será abordado o estudo de uma linha de transmissão trifásica simétrica e equilibrada, classificada como linha média, conforme descrito por (STEVENSON, 1974). Os parâmetros por unidade de comprimento da linha de transmissão são apresentados na Tabela 5 e são retirados de (KUNDUR; BALU; LAUBY, 2017).

Tabela 5 – Parâmetros da linha de transmissão com comprimento médio

Parâmetro	Valor
Tensão Nominal (V_e)	230 kV
Resistência distribuída de sequência positiva (R')	0,05 Ω/Km
Indutância distribuída de sequência positiva (L')	1,294 mH/Km
Capacitância distribuída de sequência positiva (C')	8,942 nF/Km
Frequência Nominal	60 Hz
Comprimento da linha	100 Km
Impedância Característica (Z_C)	380 Ω
SIL	140 MW

As definições de impedância característica e Surge Impedance Loading (SIL) podem ser encontradas em (KUNDUR; BALU; LAUBY, 2017).

Para obter os fasores utilizados nos métodos de estimação, utilizou-se um arranjo dos componentes que integram o circuito no *toolbox Simscape* do *Simulink*. Tal estrutura de simulação é apresentada na Figura 9. Nesse arranjo, foram utilizados sensores de tensão e corrente para medir as grandezas no domínio do tempo. Em posse desses valores, foi utilizado o bloco de *FFT* para determinar os das grandezas fasoriais necessárias ao processo de estimação ($\dot{V}_e, \dot{V}_s, \dot{I}_e, \dot{I}_s$). A resistência R_{shunt} tem valor pequeno ($0,5 \Omega$), sua função no circuito é garantir a estabilidade da simulação no *simulink*.

Figura 9 – Estrutura Utilizada para Simulação no *Simulink*

O primeiro conjunto de estudos será realizado com um valor fixo para a carga. Tal valor corresponde a 90% do SIL da linha utilizada. Cabe ressaltar que a potência consumida pela carga foi modelada por meio de uma carga de potência constante no software MATLAB.

6.2 Histogramas e valores obtidos para o estimador MVU

Antes de determinar os parâmetros estimados para o modelo, é necessário fixar os valores numéricos de cada um dos termos de ruído inseridos nas equações.

Na Equação (42), é necessário adotar o valor numérico do desvio-padrão da variável aleatória gaussiana de média nula Δb . Para esse parâmetro, considerou-se

$$\sigma_b = 4,0452 \cdot 10^{-5}.$$

Tal valor, corresponde a 12% do parâmetro real a ser estimado (b^*).

Por meio da Equação (42), é possível construir um histograma com os valores da susceptância obtidos a cada realização do método de estimação. Os resultados, considerando 100000 realizações, foram sintetizados na Figura 10. Nesse gráfico, o eixo y representa a quantidade de vezes em que o parâmetro estimado pertence a classe de valores representada no eixo x . Note que essa primeira abordagem é uma abordagem de janela deslizante,

na qual à medida que novas medidas são realizadas, o método fornece um valor para os parâmetros estimados.

Figura 10 – Histograma Obtido para a Susceptância b

Para completar descrição do modelo, é necessário descrever cada um dos σ_i que compõe a matriz a matriz de covariância do vetor $\tilde{\mathbf{Y}}$ na Equação (33). Seguindo o mesmo princípio adotado para a modelagem do ruído em b , cada desvio-padrão foi fixado em 12% da entrada do vetor $\tilde{\mathbf{Y}}$ ao qual está associado, logo

$$\sigma_i = 0,12 \cdot |\bar{y}_i|.$$

Vale ressaltar que a escolha dos valores de desvio-padrão para a modelagem do ruído escolhido é bastante conservadora em comparação a outros trabalhos (SHI et al., 2011), (DASGUPTA; SOMAN, 2013), (SHI et al., 2008), (PEREIRA, 2019) (LI et al., 2017) e (DING; BI; ZHANG, 2011). Dessa forma, não é necessário assumir que o conjunto de equipamentos de medição tenha uma precisão extremamente alta para aplicar o método.

Além disso, utilizando um valor de frequência de reportagem de fasores pelas unidades PMUs de 60 Hz (DECKER et al., 2011), o valor de 100000 amostras é obtido em aproximadamente 28 minutos de observação do sistema em regime permanente. Portanto, considera-se que durante esse período não ocorreram oscilações bruscas nas condições do sistema, tais como: energizações e curtos-circuitos. Oscilações de menor magnitude na carga do sistema são incorporadas ao modelo por meio da distribuição Gaussiana adicionada a cada conjunto de medidas. Vale ressaltar que essa suposição é adequada. Pode-se comparar, por exemplo, com o trabalho desenvolvido em (BROWN et al., 2016), onde são utilizadas 350000 amostras sob as mesmas condições descritas neste trabalho para construir a função densidade de probabilidade das medições fasoriais de uma PMU.

Por meio dos valores apresentados na Seção 6.1 e aplicando a relação descrita para cada σ_i , obtém-se a seguinte matriz de covariância do ruído

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 0,856 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4,41 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,856 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,41 \end{bmatrix} \cdot 10^7.$$

Na modelagem proposta, o valor médio das grandezas fasoriais permanece o mesmo ao longo do conjunto de N amostras, conforme apresentado em (BROWN et al., 2016). Sendo assim, a matriz $\bar{\mathbf{H}}$, definida na Equação (32), é constante e pode ser totalmente descrita pelos dados fornecidos na Seção 6.1. Numericamente, essa matriz vale

$$\bar{\mathbf{H}} = \begin{bmatrix} 1,173 & 0,3795 \\ -0,3795 & 1,173 \\ 1,173 & 0,3795 \\ -0,3795 & 1,173 \end{bmatrix} \cdot 10^3.$$

Antes mesmo de realizar o cálculo do estimador, pode-se determinar a matriz de covariância dos parâmetros $\mathbf{C}_\theta$, apenas utilizando a matriz $\bar{\mathbf{H}}$ e a matriz de covariância $\mathbf{C}$, por meio da relação

$$\mathbf{C}_\theta = (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1}.$$

Substituindo os valores numéricos das matrizes, chega-se em:

$$\mathbf{C}_\theta = \begin{bmatrix} 3,9239 & -3,4247 \\ -3,4247 & 13,4027 \end{bmatrix}$$

Em relação aos parâmetros a serem estimados com essa equação (R e X), a matriz de covariância ($\mathbf{C}_\theta$) fornece

$$\text{Var}(R) = 3,9239 \Rightarrow \sigma_R = 1,9809 \, \Omega, \quad \text{Var}(X) = 13,4027 \Rightarrow \sigma_X = 3,6610 \, \Omega.$$

É importante ressaltar que, apesar da matriz $\bar{\mathbf{H}}$ ser constante, o vetor $\bar{\mathbf{Y}}$ é modificado pelo vetor de ruído $\tilde{\mathbf{Y}}$ a cada nova amostra. Dessa forma, é necessário aplicar a Equação (39) a cada realização n . Portanto, a cada novo conjunto de amostras, há um valor estimado para o vetor $\theta[n]$, que é representado no histograma. Usando $N = 100000$ amostras, foram obtidos os histogramas para a reatância e a resistência, apresentados nas Figuras 11 e 12 respectivamente.

Com os valores dos parâmetros estimados em cada um dos N conjuntos de amostras, deve-se calcular o valor final dos parâmetros por meio do valor esperado Equação (49). Além disso, pode-se avaliar a dispersão dos dados usando o desvio-padrão Equação (50) e determinar a qualidade da estimação pelo desvio percentual relativo em comparação ao valor real do parâmetro Equação (51).

$$\mathbb{E}[p] = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N p[n]. \quad (49)$$

Figura 11 – Histograma Obtido para a reatância X Figura 12 – Histograma Obtido para a resistência R

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (p[n] - \mathbb{E}[p])^2}. \quad (50)$$

$$\Delta p = \left(\frac{|\mathbb{E}[p] - p^*|}{p^*} \right) \cdot 100\%. \quad (51)$$

Onde p é um dos parâmetros (b , R ou X) e p^* é o valor exato do parâmetro.

Os valores encontrados para o caso do estimador MVU usando 100000 amostras são sintetizados na Tabela 6.

Tabela 6 – Indicadores dos parâmetros estimados na solução MVU para 100000 amostras.

Parâmetro	$\mathbb{E}[p]$	p^*	σ_p	$\Delta p(\%)$
b	$3,3371 \cdot 10^{-4} S$	$3,33711 \cdot 10^{-4} S$	$4,0428 \cdot 10^{-5} S$	0,0039
R	$4,9960 \Omega$	5Ω	$1,9842 \Omega$	0,03271
X	$48,8160 \Omega$	$48,8 \Omega$	$3,6614 \Omega$	0,026999

A fim de enfatizar o fato do estimador ser não-viesado, pode-se analisar o comportamento do método quanto ao número de realizações (amostras). Assim, variou-se o número de realizações entre 2 e 100000 com a matriz $\mathbf{C}$ fixa e para cada caso foi determinado o desvio percentual relativo. Dessa forma, pode-se visualizar o comportamento do método por meio de um gráfico que relaciona o desvio percentual de cada um dos parâmetros a serem estimados com o número de iterações realizadas. Tal gráfico é mostrado na Figura 13.

Figura 13 – Valores obtidos para os parâmetros em função do número de realizações

Para explicar o comportamento do gráfico, deve-se retornar à expressão do estimador

$$\hat{\theta} = (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}.$$

Tomando o valor esperado da expressão e lembrando que apenas $\mathbf{Y}$ tem caráter aleatório

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{\theta}] &= \mathbb{E}[(\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{Y}] \\ &= (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbb{E}[\mathbf{Y}] \\ &= (\bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \bar{\mathbf{H}})^{-1} \bar{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbb{E}[\bar{\mathbf{Y}} + \tilde{\mathbf{Y}}]. \end{aligned}$$

Sendo $\tilde{\mathbf{Y}}$ o vetor sem ruídos, $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Y}}] = \tilde{\mathbf{H}}\boldsymbol{\theta}$, logo

$$\begin{aligned}\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] &= \underbrace{(\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{H}})^{-1} (\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{H}})}_{\mathbf{I}_{2 \times 2}} \boldsymbol{\theta} + (\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{H}})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Y}}] \\ &= \boldsymbol{\theta} + (\tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \tilde{\mathbf{H}})^{-1} \tilde{\mathbf{H}}^T \mathbf{C}^{-1} \mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Y}}] \\ &= \boldsymbol{\theta} + f(\tilde{\mathbf{Y}}).\end{aligned}$$

Se $\mathbb{E}[\tilde{\mathbf{Y}}] = 0$, então

$$\mathbb{E}[\hat{\boldsymbol{\theta}}] = \boldsymbol{\theta}.$$

Quanto menor a quantidade de amostras utilizadas, mais impreciso é o método, pois menos o valor esperado do vetor de ruídos $\tilde{\mathbf{Y}}$ se aproxima de zero e mais o termo $f(\tilde{\mathbf{Y}})$ altera o valor esperado dos parâmetros, tornando o desvio relativo maior, isso justifica o fato de o gráfico apresentar desvios maiores para poucas amostras. À medida que o número de amostras aumenta, o valor esperado do vetor $\tilde{\mathbf{Y}}$ tende a zero e com isso, o desvio diminui.

O mesmo raciocínio vale para a comparação entre o desvio-padrão previsto por (40) e aquele apresentado na Tabela 6. Embora os valores sejam próximos, eles são diferentes pelo fato de o número de amostras ser finito, o que leva a uma diferença entre o modelo e o caso simulado no MATLAB.

Em nenhuma das soluções apresentadas ao longo da revisão bibliográfica, foi proposto um estimador MVU para essa modelagem. O estimador que mais se aproxima do método foi proposto é aquela desenvolvida por (SHI et al., 2008). No entanto, para esse caso, todas as amostras são armazenadas na mesma matriz $\tilde{\mathbf{H}}$, o que torna a dimensão da matriz extremamente elevada e impede a aplicação do estimador MVU no caso linear.

Cabe ressaltar que o estimador MVU é o estimador ótimo (KAY, 1993), pois ele é não-viesado e resulta na menor variância dos parâmetros estimados.

Alternativamente, pode-se utilizar um estimador subótimo para essa modelagem, visto que a matriz de covariância para os ruídos ($\mathbf{C}$) é desconhecida em um problema real. Para esse caso, o estimador proposto é o OLS, ou seja, obtido por meio da Equação (11). Na Tabela 7, são apresentados os valores obtidos por meio do estimador OLS em comparação com o MVU.

Tabela 7 – Comparação entre o estimador OLS e o MVU para 100000 amostras.

Parâmetro	σ_p	$\Delta p(\%)$
R_{MVU}	1,9841732217 Ω	0,08060380
X_{MVU}	3,6613556039 Ω	0,03271142
R_{OLS}	1,9841732233 Ω	0,08060402
X_{OLS}	3,6613557577 Ω	0,03271146

A Tabela 7 mostra que os valores obtidos por meio do estimador OLS são muito parecidos com aqueles obtidos por meio da solução MVU. Isso acontece porque a matriz

$\mathbf{C}$ tem um comportamento muito parecido com um múltiplo da matriz identidade, uma vez que ela é uma matriz diagonal com apenas dois elementos distintos em sua composição. No entanto, vale ressaltar que os indicadores estatísticos obtidos com o estimador MVU permanecem menores que qualquer solução subótima. Na tabela, isso possa ser observado apenas a partir da sexta casa decimal para a reatância e da oitava casa decimal para a resistência.

6.2.1 Histogramas e valores obtidos para o TLS

Para obter os histogramas no método dos mínimos quadrados totais, é necessário descrever os vetores $\tilde{\mathbf{Y}}$ e $\text{vec}(\tilde{\mathbf{H}})$ que foram introduzidas na Seção 5.2.3. Ambos têm distribuição gaussiana, com média zero e devem considerar a natureza das amostras, ou seja, a presença de redundância nas entradas do vetor. Dessa forma, a descrição dos mesmos fica completa quando são informadas as matrizes de covariância $\mathbf{C}_{\tilde{\mathbf{Y}}}$ e $\mathbf{C}_{\text{vec}(\tilde{\mathbf{H}})}$.

Cada desvio-padrão σ_i que compõe a matriz de covariância de $\tilde{\mathbf{Y}}$ deve ser escolhido como uma porcentagem do vetor $\tilde{\mathbf{Y}}$. Assim como cada σ_{ij} que descreve $\tilde{\mathbf{H}}$ é dado como uma porcentagem de $\tilde{\mathbf{H}}$. O valor fixado para a porcentagem foi de 12%, um valor bem mais conservador que aquele apresentado em (DING; BI; ZHANG, 2011) e (DASGUPTA; SOMAN, 2013) para o mesmo tipo de análise.

A cada novo conjunto de amostras ($[n]$), realiza-se a decomposição em valores singulares da matriz expandida $[\mathbf{Y}[n] \ \mathbf{H}[n]]$ e obtém-se o valor do vetor de parâmetros nessa iteração ($\boldsymbol{\theta}[n]$) por meio da Equação (46).

Usando 100000 realizações, obteve-se os histogramas para os parâmetros R e X , representados pelas Figuras 14 e 15 respectivamente.

Figura 14 – Histograma Obtido para a reatância X usando TLS.

Figura 15 – Histograma Obtido para a resistência R usando TLS

O parâmetro b foi desacoplado da Equação matricial (32), pois depende diretamente das medições e pode ser determinado sem a necessidade do valor dos outros parâmetros. Sendo assim, o cálculo de b é o mesmo apresentado na Seção 6.2. Portanto, o histograma gerado deve ser igual, bem como seus indicadores estatísticos.

Com relação aos outros parâmetros, pode-se determinar os valores dos indicadores estatísticos e de desvio dos mesmos por meio das Equações (49), (50) e (51). Os resultados desses cálculos são apresentados na Tabela 8.

Tabela 8 – Medidas estatísticas para 100000 realizações e $\sigma = 0,12$ usando TLS.

Parâmetro	$\mathbb{E}[p]$	p^*	σ_p	$\Delta p(\%)$
R	4,8659 Ω	5 Ω	3,2329 Ω	2,6815
X	49,1060 Ω	48,8 Ω	6,58795 Ω	0,62702

Em (DASGUPTA; SOMAN, 2013), é apresentada uma solução usando mínimos quadrados totais por meio outro conjunto de equações fasoriais obtidas a partir do modelo π de sequência positiva da linha. No entanto, o nível de ruído utilizado é de 1%. A fim de estabelecer uma comparação direta entre a eficácia do método desenvolvido neste trabalho e o apresentado em (DASGUPTA; SOMAN, 2013), foram estimados os parâmetros R e X por meio do TLS para esse nível de ruído. Os resultados da comparação entre os métodos é apresentado na Tabela 9.

Analisando as informações contidas na Tabela 9, nota-se que o método proposto possui uma acurácia melhor que aquela apresentada em (DASGUPTA; SOMAN, 2013), para o mesmo nível de ruído. Em particular para a resistência, o valor do desvio relativo encontrado foi mais de 10 vezes menor que aquele apresentado na literatura.

Tabela 9 – Comparação entre os desvios relativos para nível de ruído 1%.

Parâmetro	Δ_p (%) método proposto	Δ_p (%) em (DASGUPTA; SOMAN, 2013)
R	0,01501	0,8254
X	0,003781	0,007196

No trabalho desenvolvido por (DING; BI; ZHANG, 2011), o nível de ruído utilizado foi de 0,2%. Dessa forma, os parâmetros R e X foram, novamente, estimados agora para esse valor de ruído e estabeleceu-se uma comparação direta entre os métodos por meio do desvio relativo. Na Tabela 10, são apresentados os valores obtidos nessa comparação.

Tabela 10 – Comparação entre os desvios relativos para nível de ruído 0,2%.

Parâmetro	Δ_p (%) método proposto	Δ_p (%) em (DING; BI; ZHANG, 2011)
R	0,005053	1,458
X	0,0008538	0,1353

Por meio dos dados obtidos, apresentados na Tabela 10, é possível concluir que o método proposto possui uma eficácia consideravelmente melhor que a solução apresentada em (DING; BI; ZHANG, 2011). Como o método de estimação avaliado neste trabalho é idêntico ao apresentado em (DASGUPTA; SOMAN, 2013) e (DING; BI; ZHANG, 2011), pode-se inferir que a diferença de acurácia está relacionada ao conjunto de equações fasoriais utilizadas. Visto que cada solução utiliza um equacionamento diferente.

6.3 Solução utilizando mínimos quadrados não lineares aplicada a modelagem simplificada do ruído

Cada uma das equações desenvolvidas na Seção 5.7 possui um termo de erro aditivo, gaussiano com média nula (w_i). Para completar a descrição do problema modelado, é necessário fornecer os valores numéricos da matriz de covariância do ruído $\mathbf{C}$.

Na modelagem do método dos mínimos quadrados não lineares, a incerteza nas medidas é concentrada no termo $\bar{y}_i$ da equação exata. Dessa forma, o desvio-padrão deve ser escolhido como uma porcentagem desse termo. Nos trabalhos que utilizam alguma solução por método dos mínimos quadrados não lineares (DU; LIAO, 2012) (SHI et al., 2008) (SHI et al., 2011), (LI et al., 2017) os valores utilizados para a condição-padrão, ou seja, sem contingência, são menores que 8%. Neste trabalho, adotou-se o valor de 12%, ou seja, cada σ_i é dada por

$$\sigma_i = 0,12 \cdot |\bar{y}_i|.$$

Com os valores apresentados na Seção 6.1, é possível definir os valores numéricos da matriz de covariância

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 4,9570 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 177,48 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0,87282 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4,3655 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0,85391 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4,4615 \end{bmatrix} \cdot 10^7.$$

Para o caso analisado, onde a configuração da estrutura de simulação é fixa, o valor de cada um dos parâmetros não muda. Por isso, a matriz de covariância pode ser tomada como fixa, independente da realização.

Como o método dos mínimos quadrados não lineares é um método iterativo, deve-se fornecer um valor inicial para o vetor de parâmetros, o qual será denominado $\theta^{(0)}$ e do valor inicial do ajuste λ , denotado por $\lambda^{(0)}$. Em termos práticos, esse vetor pode ser escolhido como os parâmetros obtidos por meio dos métodos clássicos de obtenção dos parâmetros de linha de transmissão, como apresentados em (JR, 2006). Nesse trabalho, optou-se por adotar 70 % do valor real de cada parâmetro, Tabela 5, como estimativa inicial. Dessa forma, o vetor inicial escolhido vale

$$\begin{aligned} \theta^{(0)} &= 0,7 \cdot [R \quad b \quad X]^T, \\ \theta^{(0)} &= 0,7 \cdot [5 \quad 3,371 \cdot 10^{-4} \quad 48,8]^T, \\ \theta^{(0)} &= [3,5 \quad 2,3597 \cdot 10^{-4} \quad 34,16]^T. \end{aligned}$$

O valor inicial de λ ($\lambda^{(0)}$) é ajustado automaticamente no método de Levenberg-Marquardt implementado no Matlab para 0,01.

6.3.1 Algoritmo desenvolvido para estimação dos parâmetros usando a função *lsqnonlin* do MATLAB

A cada realização do método, ou seja, a cada novo conjunto de amostras fasoriais medidas, é aplicado o método dos mínimos quadrados não lineares usando o algoritmo de Levenberg-Marquardt por meio da função *lsqnonlin* do MATLAB. Por exemplo, o vetor de parâmetros estimado na iteração k para o conjunto de amostras obtido na realização n será denotado por:

$$\theta^{(k)}[n].$$

Quanto à função *lsqnonlin*, ela utiliza um ajuste do parâmetro $\lambda^{(k)}$ do algoritmo similar ao que foi apresentado na Seção 3.4.1, porém com um fator de ajuste $\beta = 0,1$. A convergência do método é representada pelos indicadores: *Residual* e *Norm of step*. Um

Iteration	Func-count	Residual	First-Order optimality	Lambda	Norm of step
0	4	1.05253e+11	9.57e+14	0.01	
1	8	1.33055e+10	1.41e+14	0.001	22.3163
2	12	8.24929e+08	1.93e+13	0.0001	0.323223
3	16	1.24211e+08	1.35e+12	1e-05	0.253701
4	20	1.19363e+08	1.05e+10	1e-06	0.0814416
5	24	1.19362e+08	7.68e+05	1e-07	0.00736761
6	28	1.19362e+08	1.98e+04	1e-08	5.92588e-05

Local minimum found.

Figura 16 – Análise da Convergência do Método de Levenberg-Marquardt

exemplo da aplicação do algoritmo para uma determinada realização é representada na Figura 16.

No Matlab, o critério de parada é baseado em dois tipos de comparação, uma para a norma-infinito do resíduo relativo ($\|r\|_\infty$) e uma para norma-infinito do gradiente relativo ($\|\nabla f\|_\infty$). Matematicamente, essas grandezas são dadas por

$$\|r\|_\infty^{(k)} = \frac{\|r^{(k+1)} - r^{(k)}\|_\infty}{\|r^{(k)}\|_\infty} < \varepsilon_1, \quad \|\nabla f\|_\infty^{(k)} = \frac{\|\nabla f^{(k+1)} - \nabla f^{(k)}\|_\infty}{\|\nabla f^{(k)}\|_\infty} < \varepsilon_2. \quad (52)$$

Onde ε_1 e ε_2 são precisões pré-fixadas e a norma do infinito de $v \in \mathbb{R}^n$ é calculada pela relação

$$\|v\|_\infty = \max\{v_1, v_2, \dots, v_n\},$$

sendo $(v_1, v_2, \dots, v_n)$ as coordenadas de v em relação à base canônica do $\mathbb{R}^n$. Cabe ressaltar que o resíduo na etapa k é simplesmente a função $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ calculada no vetor de parâmetros estimado $\hat{\boldsymbol{\theta}}^{(k)}$.

Considera-se que o método atingiu um possível local de mínimo quando uma das condições descritas na Equação (52) é satisfeita. Quando as duas condições são satisfeitas, certamente, o ponto de mínimo foi atingido. A Figura 17 mostra o resultado do critério de parada para a simulação mostrada na Figura 16.

```
Optimization stopped because the relative sum of squares (r) is changing
by less than options.TolFun = 1.000000e-06.
```

```
Optimization Metric                                Options
relative change r =    6.60e-08                    TolFun =    1e-06 (default)
```

```
Optimization completed: The first-order optimality measure, 9.369252e-12,
is less than 1e-4*options.TolFun = 1.000000e-10.
```

```
Optimization Metric                                Options
relative norm(gradient) =    9.37e-12                1e-4*TolFun =    1e-10 (default)
```

Figura 17 – Critério de Parada utilizado na função *lsqnonlin*

O pseudocódigo apresentado no Apêndice B.2 mostra um panorama geral do código implementado no MATLAB. É importante ressaltar que algumas das partes descritas no

algoritmo são internas à função *lsqnonlin*. Tais partes foram adicionadas para enfatizar a diferença entre o trecho iterativo e o trecho estatístico do algoritmo.

6.3.2 Construção dos histogramas para a Solução via método dos mínimos quadrados não lineares

Para construção dos histogramas e avaliação do método sob o ponto de vista do desvio percentual e dos indicadores estatísticos, foram utilizadas 1000 realizações, ou seja, $N = 1000$ amostras.

O consolidado com todos os dados utilizados para a simulação é apresentado na tabela presente no Apêndice B.1. Nessa tabela, constam tanto os dados inseridos manualmente, quanto aqueles que são automaticamente ajustados pelo MATLAB, porém que são relevantes para a compreensão do comportamento do método.

Os histogramas representam a saída do método iterativo para cada realização n , isto é, o vetor $\boldsymbol{\theta}^{(k)}[n]$ que satisfaz ao menos um dos critérios de parada descritos nas expressões presentes na Equação (52).

Os histogramas obtidos para os parâmetros R , b e X , utilizando 1000 realizações, são apresentados nas Figuras 18, 19 e 20. O desvio relativo e os indicadores estatísticos de cada parâmetro são apresentados na Tabela 11.

Figura 18 – Histograma Obtido para a Susceptância b

Em (LI et al., 2017), é proposta uma variação da solução via método dos mínimos quadrados não lineares para estimar os parâmetros b e X . Nesse trabalho, são apresentados os desvios relativos para tais parâmetros considerando um nível de ruído de 12%. Como este é o valor padrão utilizado para determinar a solução no método proposto, pode-se

Figura 19 – Histograma Obtido para a Resistência R

Figura 20 – Histograma Obtido para a Reatância X

traçar uma comparação direta da acurácia apresentada pelas soluções. Tal comparação é apresentada na Tabela 12.

No trabalho (WANG; XU; SHEN, 2015), os autores apresentam uma solução baseada no método dos mínimos quadrados não lineares e, como solução, a utilização do algoritmo de Levenberg-Marquardt. Embora não seja o foco do trabalho, são apresentados os resultados para a estimação dos parâmetros na presença de ruído nas amostras fasoriais. Nesse trabalho, o nível de ruído utilizado foi de 1%. A fim de comparar as soluções, os parâmetros foram estimados utilizando esse nível de incerteza nas medidas. Os resultados são apresentados na Tabela 13.

Tabela 11 – Medidas estatísticas e desvio percentual para 1000 realizações.

Parâmetro	$\mathbb{E}[p]$	p^*	σ_p	$\Delta p(\%)$
b	$3,4143 \cdot 10^{-4} S$	$3,371 \cdot 10^{-4} S$	$4,0771 \cdot 10^{-5} S$	1,5765
R	5,0582 Ω	5 Ω	2,001 Ω	0,1243
X	48,5932 Ω	48,8 Ω	3,6232 Ω	0,1884

Tabela 12 – Desvio relativo obtido para nível de ruído de 12%

Parâmetro	Δ_p (%) método proposto	Δ_p (%) em (LI et al., 2017)
b	1,5765	4,221
X	0,1884	4,732

Tabela 13 – Desvio relativo obtido para nível de ruído de 1%

Parâmetro	Δ_p (%) método proposto	Δ_p (%) em (WANG; XU; SHEN, 2015)
b	0,02645	0,67
R	0,1557	2,35
X	0,05053	0,50

A comparação com outras duas soluções mostra que, para os casos analisados, o método proposto apresentou uma melhor acurácia quanto ao valor do parâmetro estimado. Vale ainda ressaltar que em (LI et al., 2017) e (WANG; XU; SHEN, 2015), são utilizados dados provenientes de sistemas SCADA o que exige um maior tempo de coleta de dados do sistema, devido à menor frequência de reportagem de fasores, e um esquema de seleção de dados para estimação, o que acaba por tornar mais complexa a implementação do método.

6.3.3 Estudo da influência do valor inicial do parâmetro

Como o Método dos Mínimos Quadrados Não-Lineares é um método iterativo, a convergência do algoritmo pode ser diretamente afetada pela escolha dos valores dos parâmetros iniciais.

Segundo (DOBAKHSHARI et al., 2020), os desvios entre os parâmetros reais e os parâmetros armazenados em *datasets* podem chegar a 30%. Sendo assim, os valores escolhidos para os chutes iniciais devem variar na região descrita por:

$$\begin{aligned}\theta \cdot R^* &\leq R^{(0)} \leq \gamma \cdot R^*, \\ \theta \cdot X^* &\leq X^{(0)} \leq \gamma \cdot X^*, \\ \theta \cdot b^* &\leq b^{(0)} \leq \gamma \cdot b^*.\end{aligned}$$

Onde R^* , X^* e b^* são os parâmetros reais da linha de transmissão, $\theta \in [0, 7; 1]$ e $\gamma \in [1, 0; 1, 3]$. Como forma de facilitar a análise, define-se o desvio inicial de um parâmetro genérico p como:

□ Se $p^{(0)} < p^*$, então o parâmetro tem desvio inicial negativo;

□ Se $p^{(0)} > p^*$, então o parâmetro tem desvio inicial positivo.

Aplicando diversos valores para os parâmetros iniciais, é possível avaliar a influência desse fator na acurácia do método de estimação. Vale ressaltar que é necessário verificar, principalmente, as regiões de fronteira, onde os parâmetros assumem maiores desvios. Tal análise é sintetizada na Tabela 14.

Tabela 14 – Análise da influência do parâmetro inicial no desvio de cada parâmetro

$R^{(0)}$	$X^{(0)}$	$b^{(0)}$	$\Delta R(\%)$	$\Delta X(\%)$	$\Delta b(\%)$
0,7 R^*	0,7 X^*	0,7 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
0,7 R^*	0,7 X^*	1,3 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
0,7 R^*	1,3 X^*	0,7 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
1,3 R^*	0,7 X^*	0,7 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
0,8 R^*	X^*	1,3 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
0,9 R^*	0,7 X^*	1,2 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
R^*	0,8 X^*	0,7 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
1,1 R^*	0,9 X^*	1,3 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
1,3 R^*	0,7 X^*	1,3 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
1,2 R^*	0,7 X^*	0,9 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
1,3 R^*	0,9 X^*	0,9 b^*	0.1243	0.1884	1.5765
1,3 R^*	1,2 X^*	0,7 b^*	0.3398	0.1935	1.5739
1,3 R^*	1,3 X^*	0,7 b^*	2.2241	2.4152	1.4912
0,7 R^*	1,3 X^*	1,3 b^*	3.0553	2.8961	1.3523
1,3 R^*	1,3 X^*	1,3 b^*	2.2247	2.8961	1.3523

Por meio da análise da Tabela 14 é possível notar que, para a maior parte das regiões, a acurácia do método é estável para todos os parâmetros. No entanto, quando os valores da resistência e da reatância assumem desvios iniciais positivamente elevados, há uma perda de acurácia para esses parâmetros, em especial quando, concomitantemente, a susceptância assume desvios iniciais negativamente elevados. O mesmo comportamento é observado na situação em que a reatância e a susceptância assumem desvios iniciais positivamente elevados. Contudo, tal comportamento não se repete quando são analisados desvios iniciais positivamente elevados para a resistência e para a susceptância. Vale ainda ressaltar que, mesmo com a perda de acurácia, todos os valores de desvio relativo estão dentro do desejado para aplicações em regime permanente (DOBAKHSHARI et al., 2020) e são inferiores ao apresentado pela solução (LI et al., 2017), o que evidencia a robustez do método proposto.

6.4 Solução utilizando mínimos quadrados não lineares aplicada a modelagem polar do ruído

Nesta seção, serão apresentados os resultados para o problema de otimização P10, descrito por

$$P10 : \hat{\boldsymbol{\theta}} = \arg \min_{\boldsymbol{\theta}} \|\mathbf{Y} - \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})\|.$$

Conforme será mostrado posteriormente por meio dos resultados, a modelagem do ruído no módulo e na fase da grandeza fasorial e a posterior projeção nos eixos real e imaginário torna o processo de estimação instável, que pode levar a desvios relativos superiores a valores aceitáveis, em geral, tais valores devem ser menores que 10 % conforme apresentado em (MILOJEVIĆ et al., 2018).

Para conferir maior robustez ao método, optou-se por utilizar as amostras concatenadas no vetor de saída $\mathbf{Y}$ e no vetor de funções não lineares $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$. Dessa forma, para N amostras, pode-se escrever que

$$\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^{6N \times 1}, \quad \mathbf{f}(\boldsymbol{\theta}) \in \mathbb{R}^{6N \times 1}.$$

A fim de estabelecer uma comparação direta com os resultados apresentados em (WEHENKEL et al., 2020), a primeira análise para essa solução foi desenvolvida considerando o carregamento do sistema como 90% da potência característica, $N = 3000$ amostras, $\alpha = 1,1\%$ e $\beta = 1,9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Em (WEHENKEL et al., 2020), a análise é feita por meio do valor médio do erro relativo considerando todos os parâmetros. Sendo assim, será utilizado o mesmo critério para a comparação entre as soluções. A Tabela 15 apresenta os resultados dessa comparação.

Tabela 15 – Comparação com a solução apresentada em (WEHENKEL et al., 2020).

$\bar{\Delta}_p$ da solução implementada	0,5059%
$\bar{\Delta}_p$ WTLS em (WEHENKEL et al., 2020)	5,8%
$\bar{\Delta}_p$ WLS em (WEHENKEL et al., 2020)	4%
$\bar{\Delta}_p$ OLS em (WEHENKEL et al., 2020)	5,6%

Onde

$$\bar{\Delta}_p = \frac{\Delta_b + \Delta_X + \Delta_R}{3}.$$

Ainda é possível estabelecer uma comparação direta com a solução proposta em (DOBAKSHARI et al., 2020), fixando $\alpha = 0,5\%$, $\beta = 9 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ e $N=1000$ amostras. Tal comparação é apresentada na Tabela 16.

Em comparação com as soluções apresentadas em (WEHENKEL et al., 2020), o método proposto possui uma eficácia superior quando é analisado o valor médio do desvio

Tabela 16 – Medidas estatísticas e desvio percentual para 1000 realizações.

Parâmetro	Δ_p (%) método proposto	Δ_p (%) em (DOBAKHSHARI et al., 2020)
b	1,2579	0,08
R	0,1160	3,88
X	0,0356	0,75
$\bar{\Delta}_p$	0,4698	1,57

relativo para os parâmetros. Vale ressaltar que o desvio relativo observado no método proposto foi duas ordens de grandeza inferior ao que obtido pelos autores do trabalho (WEHENKEL et al., 2020).

Quando é feita a comparação entre o método proposto e a solução apresentada em (DOBAKHSHARI et al., 2020), pode-se observar que o valor médio do desvio relativo é menor que aquele apresentado pela referência usada como comparação (cerca de 4 vezes menor). No entanto, para a susceptância, o desvio relativo obtido no método proposto foi maior. Esse parâmetro, em particular, sofre instabilidades numéricas em sua estimação à medida que os valores de tensão e corrente aumentam em amplitude, ou seja, quando o carregamento da linha se torna maior. Isso ocorre porque o viés aplicado as duas primeiras equações fasoriais em $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ aumenta com o aumento da carga. Esse importante aspecto do equacionamento desenvolvido será explicado com mais detalhes nas análises apresentadas posteriormente.

As duas primeiras equações de $\mathbf{f}(\boldsymbol{\theta})$ sintetizam o cálculo do parâmetro b por meio das expressões

$$b = -2 \left(\frac{I_{sr} + I_{rr}}{V_{si} + V_{ri}} \right), \quad b = 2 \left(\frac{I_{si} + I_{ri}}{V_{sr} + V_{rr}} \right),$$

O viés (v) introduzido na modelagem de b é o valor parâmetro real b^* menos o valor esperado da expressão, logo

$$v = b^* - \mathbb{E} \left[-2 \left(\frac{I_{sr} + I_{rr}}{V_{si} + V_{ri}} \right) \right].$$

Variando o valor da carga, como uma porcentagem da potência característica, é possível verificar o comportamento do viés em função do carregamento da linha. A Tabela 17 mostra os valores obtidos para o viés de b para cada carregamento empregado.

Os dados da Tabela 17 evidenciam o comportamento relatado anteriormente. O aumento da carga do sistema, mais precisamente o aumento dos valores de corrente, gera um aumento no viés do parâmetro b . Esse aumento do viés tem impacto direto na estimação da susceptância em função da potência transportada pela linha.

Dessa forma, para avaliar a influência da carga do sistema no processo de estimação proposto, foi realizado o estudo do desvio relativo de cada um dos parâmetros em função do carregamento da linha (como uma porcentagem da potência característica). Para esse estudo, o valor de α foi considerado constante em 1% e $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Além disso, o

Tabela 17 – Estudo do viés de b em função do carregamento da linha

Carga (% P_C)	$ v (\mu S)$
10	1,4658
20	2,1814
30	2,9729
40	3,7916
50	4,7808
60	5,8062
70	6,8218
80	7,7712
90	8,7552
100	9,8676

Figura 21 – Desvio relativo em função da potência da carga

número de amostras utilizado foi 1000 em todas as simulações. O resultado desse estudo é sintetizado na Figura 21.

Por meio da análise da Figura 21, fica evidente que há uma perda de acurácia do parâmetro b à medida que a carga do sistema aumenta, o que pode ser explicado pelo aumento do viés nas equações que determinam esse parâmetro, conforme demonstrado anteriormente. Mesmo assim, para uma ampla faixa de frequência de regime permanente analisada (0,1 SIL a 2 SIL) a acurácia dos parâmetros é suficiente para aplicações de controle, proteção e fluxo de potência do sistema (MILOJEVIĆ et al., 2018). Nota-se ainda que, para potências inferiores a 0,8 SIL todos os parâmetros apresentam desvios menores que 1%.

Outro fator importante para o método de estimação é a quantidade de amostras utilizadas, representadas por N . A fim de verificar a eficácia do método quanto a esse

Figura 22 – Desvio relativo em função da potência da carga

parâmetro, fixou-se a carga em 90% da potência característica, o valor de $\alpha = 1\%$ e $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ e a quantidade de amostras variou entre 5 e 100000. O resultado desse estudo é apresentado na Figura 22.

Analisando a Figura 22, nota-se que o desvio relativo é maior para uma baixa quantidade de amostras. Além disso, para poucas amostras o comportamento do desvio relativo é oscilante, uma vez que a aproximação de uma distribuição normal para esses casos é fraca, tanto em relação à modelagem do desvio-padrão quanto em relação à média do vetor que simula a distribuição normal. Vale ainda ressaltar que, a partir de 1000 amostras, os valores dos desvios relativos se estabilizam em torno de uma faixa de variação pequena, o que mostra a estabilização do método a partir dessa quantidade de amostras.

Outra análise importante para a sensibilidade do método de estimação, é quanto ao nível de ruído. Contudo, para fazer essa análise, é necessário dividi-la em módulo e fase. Primeiro, fixa-se o nível de ruído para a fase em $\beta = 8 \cdot 10^{-3}$ e varia-se o valor de α no intervalo de 0,1% a 4%. Relembrando que 4% é, aproximadamente, o maior erro do módulo observado em (VIEIRA et al.,). Nas análises do nível de ruído, o valor da potência da carga foi fixado em 0,9 SIL e o número de amostras em 1000. O resultado dessa análise é apresentado na Figura 23.

A Figura 23 mostra que na situação onde $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$, o maior nível de ruído para o qual o método é capaz de estimar os parâmetros com precisão melhor que 10% (MILOJEVIĆ et al., 2018) está em torno de $\alpha = 3,1\%$. Vale ressaltar que esse nível de ruído é bastante elevado quando comparado aos trabalhos presentes na literatura (WEHENKEL et al., 2020), (DOBAKHSHARI et al., 2020).

Figura 23 – Análise da influência de α na estimação para $\beta = 8 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$

Figura 24 – Análise da influência de β na estimação para $\alpha = 1 \%$

Para completar a análise da sensibilidade do método de estimação proposto, fixou-se o valor do nível de ruído do módulo em $\alpha = 1\%$ e variou-se β no intervalo de $0, 1 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$ até $30 \cdot 10^{-3} \text{ rad}$. Note que, o extremo superior do intervalo de análise corresponde a um desvio maior que a pior classe de precisão dos instrumentos de medição (WEHENKEL et al., 2020). Logo, os valores adotados neste trabalho são bastante conservadores e desvinculam do método a necessidade de medidas extremamente precisas.

Novamente, observado a Figura 24, nota-se que o parâmetro cuja estimação é mais

sensível à variação de β é a susceptância. Os desvios relativos dos outros parâmetros variam muito pouco com a mudança desse parâmetro. No entanto, ao contrário da análise do nível de ruído no módulo, que leva a um valor de desvio superior a 10% para valores elevados de α , os valores de desvios observados com a variação de β estão dentro do intervalo aceitável para uma ampla faixa de valores.

Conclusões

No problema de estimar os parâmetros de uma linha de transmissão, a primeira escolha que deve ser realizada é a do modelo de linha de transmissão que será adotado. Neste trabalho, optou-se pelo modelo a parâmetros concentrados para uma linha de comprimento médio, trifásica, simétrica e equilibrada. Essa escolha tem como objetivo a futura utilização dos métodos de estimação para obtenção da curva de potencial natural da linha, que depende apenas dos parâmetros de sequência positiva.

Conforme evidenciado no Capítulo 4, a escolha do modelo condiciona todo o desenvolvimento das equações que serão utilizadas para obtenção dos parâmetros. Isso ocorre porque todo o equacionamento fasorial desenvolvido se baseia no modelo que representa o comportamento físico da linha. Em particular, cada modelo possui um conjunto diferente de parâmetros a serem estimados, o que mostra a forte dependência entre o método de estimação estudado e o modelo considerado.

A análise realizada no Capítulo 5 demonstrou que a modelagem do ruído nas grandezas elétricas é extremamente complexa e diversificada. Ao adotar modelos mais simplificados, como mostrado na Seção 5.2.1, é possível obter soluções mais simples com comportamentos mais previsíveis. Para essa modelagem em particular, foi possível obter a solução MVU para o problema, ou seja, obteve-se um estimador cujo valor esperado converge para o vetor de parâmetros e que possui a menor variância possível. No entanto, à medida que a modelagem do ruído se torna mais sofisticada, os estimadores utilizados também precisam ser modificados, tornando-os mais susceptíveis a variações bruscas nas respostas quando se varia a entrada e perdendo a optimalidade da solução.

Para aplicar os métodos de estimação estudados, existem basicamente duas formas de considerar o conjunto de N amostras: na primeira, utiliza-se uma matriz concatenada com $m \cdot N$ linhas, onde m é o número de equações obtidas por meio do equacionamento fasorial, aplicando uma única vez o método; na segunda, a cada conjunto de amostras o método é aplicado para uma matriz com m linhas, totalizando N realizações. Observou-se que, para os estimadores MVU no caso linear, OLS e TLS, a segunda forma de se considerar as amostras é mais vantajosa, pois permite visualizar o comportamento do método a cada

iteração por meio de um ponto no histograma e, além disso, essa abordagem mostrou maior estabilidade dos resultados fornecidos, isto é, houve menor variação quando foram testadas diferentes distribuições gaussianas geradas artificialmente nos softwares utilizados no trabalho. Por outro lado, para a modelagem completa do ruído, apresentada na Seção 5.3, a primeira abordagem para considerar as N amostras é a mais eficiente, uma vez que a segunda leva a desvios relativos muito elevados a cada iteração e isso acaba afetando o valor final do parâmetro, que é obtido por meio da média sobre o conjunto formado pelas saídas do método.

O conjunto de equações fasoriais apresentado nesse trabalho não havia sido empregado em trabalhos anteriores. Sua principal importância reside no fato de ser possível separar o cálculo da susceptância em duas equações que dependem apenas das medidas. Com isso, foi obtida uma expressão matricial linear nos parâmetros para a resistência e reatância, cuja solução pode ser obtida utilizando métodos clássicos, bem estabelecidos na literatura técnica.

Vale ressaltar que as análises desenvolvidas na Seção 5.3 evidenciaram o fato de ser necessário verificar se as projeções das medidas fasoriais nos eixos cartesianos seguem, de fato, as hipóteses comumente adotadas: distribuição normal, média zero e não correlacionadas entre si. Uma vez que foi numericamente provado que isso pode não ocorrer para uma faixa de valores da modelagem do ruído no módulo e na fase da grandeza fasorial.

Em relação aos resultados obtidos por meio dos diferentes métodos, pode-se concluir que todos os métodos estudados apresentam acurácia suficiente para possam ser considerados melhores que os métodos convencionais de cálculo dos parâmetros. Além disso, quando os métodos de estimação propostos são comparados com soluções que apresentam algum grau de similaridade, há um ganho na acurácia dos parâmetros estimados. Cabe ainda ressaltar a novidade apresentada pela última solução, a qual considera a modelagem completa do ruído, sem nenhuma simplificação, e emprega um método de solução de sistemas de equações não lineares para estimar os parâmetros. Isso representa um avanço introduzido pelo trabalho, uma vez que todos os outros consideram algum tipo de simplificação no modelo do ruído, como, por exemplo, afirmar que as projeções sempre possuem uma distribuição normal com média zero.

Referências

- ADLER, R. B.; CHU, L. J.; FANO, R. M. Electromagnetic energy transmission and radiation. **Students' Quarterly Journal**, IET, v. 31, n. 122, p. 123–124, 1960.
- AHMUDA, A. The corona effect on high voltage transmission lines. v. 08, p. 29–31, 12 2019.
- ANDERSON, B. D.; MOORE, J. B. **Optimal filtering**. [S.l.]: Courier Corporation, 2012.
- Asprou, M.; Kyriakides, E. Identification and estimation of erroneous transmission line parameters using pmu measurements. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 32, n. 6, p. 2510–2519, 2017.
- ASPROU, M.; KYRIAKIDES, E.; ALBU, M. The effect of parameter and measurement uncertainties on hybrid state estimation. In: IEEE. **2012 IEEE Power and Energy Society General Meeting**. [S.l.], 2012. p. 1–8.
- ATHREYA, K. B.; LAHIRI, S. N. **Measure theory and probability theory**. [S.l.]: Springer Science & Business Media, 2006.
- BARONE, M. Algebra linear. **IME-USP**, 1988.
- BLACKBURN, J. L.; DOMIN, T. J. **Protective relaying: principles and applications**. [S.l.]: CRC press, 2015.
- BOTEV, Z. I. et al. Kernel density estimation via diffusion. **The annals of Statistics**, Institute of Mathematical Statistics, v. 38, n. 5, p. 2916–2957, 2010.
- BOYD, S.; VANDENBERGHE, L. **Introduction to applied linear algebra: vectors, matrices, and least squares**. [S.l.]: Cambridge university press, 2018.
- BOYD, S. P. **Non linear least squares, lecture notes EE103**. Stanford University, 2016. Disponível em: <https://stanford.edu/class/ee103/lectures/nlls_slides.pdf>.
- BROWN, M. et al. Characterizing and quantifying noise in pmu data. In: IEEE. **2016 IEEE Power and Energy Society General Meeting (PESGM)**. [S.l.], 2016. p. 1–5.
- CHRISTIAN, H. P. Rank-deficient and discrete ill-posed problems. **SIAM**, v. 51, n. 3, p. 455–500, 1998.

- COOK, R. D.; TSAI, C.-L. Residuals in nonlinear regression. **Biometrika**, Oxford University Press, v. 72, n. 1, p. 23–29, 1985.
- COURRIEU, P. Fast computation of moore-penrose inverse matrices. **arXiv preprint arXiv:0804.4809**, 2008.
- DAOUD, J. I. Multicollinearity and regression analysis. In: IOP PUBLISHING. **Journal of Physics: Conference Series**. [S.l.], 2017. v. 949, n. 1, p. 012009.
- DASGUPTA, K.; SOMAN, S. Line parameter estimation using phasor measurements by the total least squares approach. In: IEEE. **2013 IEEE Power & Energy Society General Meeting**. [S.l.], 2013. p. 1–5.
- DECKER, I. et al. Performance of a synchronized phasor measurements system in the brazilian power system. In: IEEE. **2006 IEEE Power Engineering Society General Meeting**. [S.l.], 2006. p. 8–pp.
- DECKER, I. C. et al. Experience and applications of phasor measurements to the brazilian interconnected power system. **European Transactions on Electrical Power**, Wiley Online Library, v. 21, n. 4, p. 1557–1573, 2011.
- DHRYMES, P. J. et al. **Mathematics for econometrics**. [S.l.], 1978.
- DING, L.; BI, T.; ZHANG, D. Transmission line parameters identification based on moving-window tls and pmu data. In: IEEE. **2011 International Conference on Advanced Power System Automation and Protection**. [S.l.], 2011. v. 3, p. 2187–2191.
- Dobakhshari, A. S. et al. Online non-iterative estimation of transmission line and transformer parameters using scada data. **IEEE Transactions on Power Systems**, p. 1–1, 2020.
- DOBAKHSHARI, A. S. et al. Online non-iterative estimation of transmission line and transformer parameters using scada data. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, 2020.
- DU, Y.; LIAO, Y. On-line estimation of transmission line parameters, temperature and sag using pmu measurements. **Electric Power Systems Research**, Elsevier, v. 93, p. 39–45, 2012.
- DURRETT, R. **Probability: theory and examples**. [S.l.]: Cambridge university press, 2019. v. 49.
- Dutta, R. et al. Parameter estimation of distribution lines using scada measurements. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 70, p. 1–11, 2021.
- HOFMANN, L. Series expansions for line series impedances considering different specific resistances, magnetic permeabilities, and dielectric permittivities of conductors, air and ground. **Power Engineering Review, IEEE**, v. 22, p. 80–80, 05 2002.
- HORN, R. A.; JOHNSON, C. R. **Matrix analysis**. [S.l.]: Cambridge university press, 2012.

- HUANG, Q.; SHAO, L.; LI, N. Dynamic detection of transmission line outages using hidden markov models. **IEEE Transactions on power systems**, IEEE, v. 31, n. 3, p. 2026–2033, 2015.
- INDULKAR, C.; RAMALINGAM, K. Estimation of transmission line parameters from measurements. **International Journal of Electrical Power & Energy Systems**, Elsevier, v. 30, n. 5, p. 337–342, 2008.
- JR, J. E. D. Nonlinear least squares. **State of the art in numerical analysis**, Academic Press, p. 269–312, 1977.
- JR, L. C. Z. **Fundamentos de sistemas elétricos de potência**. [S.l.]: Editora Livraria da Física, 2006.
- JR, W. H. H.; BUCK, J. A.; AKHTAR, M. J. **Engineering Electromagnetics| (SIE)**. [S.l.]: McGraw-Hill Education, 2020.
- KAY, S. M. **Fundamentals of statistical signal processing**. [S.l.]: Prentice Hall PTR, 1993.
- KHANDEPARKAR, K. V.; SOMAN, S. A.; GAJJAR, G. Detection and correction of systematic errors in instrument transformers along with line parameter estimation using pmu data. **IEEE transactions on power systems**, IEEE, v. 32, n. 4, p. 3089–3098, 2016.
- KUNDUR, P. S.; BALU, N. J.; LAUBY, M. G. Power system dynamics and stability. **Power System Stability and Control**, CRC Press, v. 3, 2017.
- KUSIC, G.; GARRISON, D. Measurement of transmission line parameters from scada data. In: IEEE. **IEEE PES Power Systems Conference and Exposition, 2004**. [S.l.], 2004. p. 440–445.
- LI, C. et al. Measurement-based transmission line parameter estimation with adaptive data selection scheme. **IEEE Transactions on Smart Grid**, IEEE, v. 9, n. 6, p. 5764–5773, 2017.
- Liao, Y.; Kezunovic, M. Online optimal transmission line parameter estimation for relaying applications. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 24, n. 1, p. 96–102, 2009.
- LIMA, E. L. Análise no rn. **Coleção Matemática Universitária-IMPA, Rio de Janeiro**, 2002.
- LOURAKIS, M. I. et al. A brief description of the levenberg-marquardt algorithm implemented by levmar. **Foundation of Research and Technology**, v. 4, n. 1, p. 1–6, 2005.
- MARKOVSKY, I.; HUFFEL, S. V. Overview of total least-squares methods. **Signal processing**, Elsevier, v. 87, n. 10, p. 2283–2302, 2007.
- MARKOVSKY, I.; USEVICH, K. **Low rank approximation**. [S.l.]: Springer, 2012. v. 139.

- MARQUARDT, D. A method for the solution of certain problems in least squares. **SIAM J. Appl. Math**, v. 11, n. 431-441, 1963.
- MARQUARDT, D. W. An algorithm for least-squares estimation of nonlinear parameters. **Journal of the society for Industrial and Applied Mathematics**, SIAM, v. 11, n. 2, p. 431-441, 1963.
- MELIOPOULOS, A. et al. Synchrophasor measurement accuracy characterization. **North American SynchroPhasor Initiative Performance & Standards Task Team (Consortium for Electric Reliability Technology Solutions)**, v. 10, 2007.
- MELIOPOULOS, A. S. et al. Gps-synchronized data acquisition: technology assessment and research issues. In: IEEE. **Proceedings of the 39th Annual Hawaii International Conference on System Sciences (HICSS'06)**. [S.l.], 2006. v. 10, p. 244c-244c.
- MILOJEVIĆ, V. et al. Utilization of pmu measurements for three-phase line parameter estimation in power systems. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, IEEE, v. 67, n. 10, p. 2453-2462, 2018.
- MOLIN, J. P.; FAULIN, G. D. C. Spatial and temporal variability of soil electrical conductivity related to soil moisture. **Scientia Agricola**, SciELO Brasil, v. 70, n. 1, p. 01-05, 2013.
- MONTEIRO, J. H. A. et al. Simplified skin-effect formulation for power transmission lines. **IET Science, Measurement & Technology**, IET, v. 8, n. 2, p. 47-53, 2013.
- MORÉ, J. J. The levenberg-marquardt algorithm: implementation and theory. In: **Numerical analysis**. [S.l.]: Springer, 1978. p. 105-116.
- MOUSAVI-SEYEDI, S. S.; AMINIFAR, F.; AFSHARNIA, S. Parameter estimation of multiterminal transmission lines using joint pmu and scada data. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 30, n. 3, p. 1077-1085, 2014.
- NIELSEN, H. B. et al. **Damping parameter in Marquardt's method**. [S.l.]: IMM, 1999.
- OLIVEIRA, S. C. G. de. **ANÁLISE DO ALGORITMO INTERNO DE UNIDADES DE MEDIÇÃO FASORIAL**. Tese (Doutorado) — Universidade Federal do Rio de Janeiro, 2012.
- OPPENHEIM, A. V.; VERGHESE, G. C. **Signals, systems and inference**. [S.l.]: Pearson, 2015.
- PEREIRA, R. F. R. **Estimação de parâmetros de linhas de transmissão por meio de técnicas de identificação de sistemas**. Dissertação (Mestrado) — Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, 2019.
- RAMO, S.; WHINNERY, J. R.; DUZER, T. V. **Fields and waves in communication electronics**. [S.l.]: John Wiley & Sons, 1994.
- RAMOS, J. A.; SANTOS, P. L. dos. Parameter estimation of discrete and continuous-time physical models: A similarity transformation approach. p. 4435-4440, 2010.

- RAZALI, N. M.; WAH, Y. B. et al. Power comparisons of shapiro-wilk, kolmogorov-smirnov, lilliefors and anderson-darling tests. **Journal of statistical modeling and analytics**, v. 2, n. 1, p. 21–33, 2011.
- REN, P.; LEV-ARI, H.; ABUR, A. Tracking three-phase untransposed transmission line parameters using synchronized measurements. **IEEE Transactions on Power Systems**, IEEE, v. 33, n. 4, p. 4155–4163, 2017.
- RITZMANN, D. et al. A method for accurate transmission line impedance parameter estimation. **IEEE Transactions on instrumentation and measurement**, IEEE, v. 65, n. 10, p. 2204–2213, 2016.
- SENGIJPTA, S. K. **Fundamentals of statistical signal processing: Estimation theory**. [S.l.]: Taylor & Francis, 1995.
- SHI, D. et al. Transmission line parameter identification using pmu measurements. **European Transactions on Electrical Power**, Wiley Online Library, v. 21, n. 4, p. 1574–1588, 2011.
- _____. Identification of short transmission-line parameters from synchrophasor measurements. In: IEEE. **2008 40th North American Power Symposium**. [S.l.], 2008. p. 1–8.
- STEVENSON, W. D. **Elementos de análise de sistemas de potência**. [S.l.]: McGraw-Hill do Brasil, 1974.
- TRANSTRUM, M. K.; SETHNA, J. P. Improvements to the levenberg-marquardt algorithm for nonlinear least-squares minimization. **arXiv preprint arXiv:1201.5885**, 2012.
- TREES, H. L. V.; BELL, K. L. **Detection estimation and modulation theory**. [S.l.]: Wiley, 2013.
- ULABY, F. T. **Electromagnetics for engineers**. [S.l.]: Prentice Hall, 2005. v. 1.
- VIEIRA, P. C. C. et al. Análise de erros associados aos circuitos de instrumentação na medição fasorial sincronizada.
- WANG, Y.; XU, W.; SHEN, J. Online tracking of transmission-line parameters using scada data. **IEEE Transactions on Power Delivery**, IEEE, v. 31, n. 2, p. 674–682, 2015.
- WEHENKEL, A. et al. Parameter estimation of three-phase untransposed short transmission lines from synchrophasor measurements. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, IEEE, v. 69, n. 9, p. 6143–6154, 2020.
- Wehenkel, A. et al. Parameter estimation of three-phase untransposed short transmission lines from synchrophasor measurements. **IEEE Transactions on Instrumentation and Measurement**, v. 69, n. 9, p. 6143–6154, 2020.
- WILSON, E. et al. Calculation of transmission line parameters from synchronized measurements. **Electric Machines & Power Systems**, Taylor & Francis, v. 27, n. 12, p. 1269–1278, 1999.

ZIVANOVIC, R. Estimation of transmission line parameters using fault records. **School of electrical and electronic engineering The University of Adelaide SA**, Citeseer, v. 5005, 2006.

Apêndices

Teoremas e Igualdades

A.1 Demonstração para o Teorema 4

Demonstração. Seja $\text{col rank}(\mathbf{A})$ o posto coluna de $\mathbf{A}$ definido por:

$$\text{col rank}(\mathbf{A}) = \{Ax : x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Considere a seguinte igualdade que representa o núcleo de $\mathbf{A}$:

$$\mathbf{A}x = 0.$$

Pré-multiplicado por $\mathbf{A}^T$ e desenvolvendo:

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A}x = 0$$

$$x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A}x = 0$$

$$(\mathbf{A}x)^T \mathbf{A}x = 0 \Rightarrow \mathbf{A}x = 0.$$

A implicação acima mostra que todo elemento $x \in \mathbb{R}^n$ pertencente ao núcleo de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ pertence ao núcleo de $\mathbf{A}$. Sendo assim, pelo Teorema do núcleo e da imagem:

$$\text{col rank}(\mathbf{A}) = \text{col rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}).$$

As colunas de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ são combinações lineares das colunas de $\mathbf{A}^T$. Logo, o subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{A}^T \mathbf{A}$ está contido no subespaço gerado pelas colunas de $\mathbf{A}^T$. Dessa forma, é possível escrever que:

$$\text{col rank}(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) \leq \text{col rank}(\mathbf{A}^T) \Rightarrow \text{col rank}(\mathbf{A}) \leq \text{col rank}(\mathbf{A}^T).$$

Realizando o mesmo procedimento, mas partindo de $\mathbf{A}^T x = 0$, é possível mostrar que:

$$\text{col rank}(\mathbf{A}^T) \leq \text{col rank}(\mathbf{A}).$$

Com essas duas desigualdades, conclui-se que:

$$\text{col rank}(\mathbf{A}^T) = \text{col rank}(\mathbf{A}).$$

□

A.2 Demonstração Teorema de Eckart-Young para Normal espectral

Demonstração. Primeiro note que:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} - \mathbf{A}_k &= \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T - \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \\ &= \sum_{i=k+1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T. \end{aligned}$$

Logo,

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 = \left\| \sum_{i=k+1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right\|_2 = \sigma_{k+1}.$$

Para mostrar que $\mathbf{A}_k$ minimiza a norma, é necessário mostrar que para qualquer outra matriz $\mathbf{B}$ de posto menor ou igual a k , deve-se ter:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2 \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2.$$

Se o posto da matriz $\mathbf{B}$ é menor ou igual a k , então a dimensão do núcleo da transformação linear T , definida por $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m, T(x) = \mathbf{B}x$ satisfaz a relação

$$\dim(\text{Ker } T) \triangleq \dim(\text{Ker}(\mathbf{B})) \geq n - k.$$

Note que, como o núcleo é sempre um subespaço do espaço vetorial de saída, para esse caso, $\text{Ker}(\mathbf{B})$ é subespaço do $\mathbb{R}^n$.

Considere agora o subespaço vetorial gerado pelos $k+1$ vetores singulares de $\mathbf{A}$, dados por

$$\mathcal{R}(V_{k+1}) = [v_1, v_2, \dots, v_{k+1}].$$

As colunas da matriz $\mathbf{V}$ são elementos do $\mathbb{R}^n$. Portanto, $\mathcal{R}(V_{k+1})$ é um subespaço do $\mathbb{R}^n$.

Somando as dimensões dos subespaços

$$\dim(\text{Ker}(\mathbf{B})) + \dim(\mathcal{R}(V_{k+1})) \geq (n - k) + (k + 1) \geq n + 1.$$

A soma da dimensão de dois subespaços vetoriais é maior que a dimensão do espaço vetorial em que os mesmos estão contidos ($\mathbb{R}^n \Rightarrow \dim(\mathbb{R}^n) = n$). Assim, pode-se afirmar que

$$\exists x \in \text{Ker}(\mathbf{B}) \cap \mathcal{R}(V_{k+1}).$$

Sem perda de generalidade, considere

$$\|x\|_2 = 1.$$

Daí, usando a definição

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2^2 = \|(\mathbf{A} - \mathbf{B})x\|_2^2 = \|\mathbf{A}x - \mathbf{B}x\|_2^2.$$

O vetor x está no núcleo da matriz $\mathbf{B}$, logo $\mathbf{B}x = 0$. Sendo assim:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2^2 &= \|\mathbf{A}x\|_2^2 \\ &= (\mathbf{A}x)^T(\mathbf{A}x) = x^T \mathbf{A}^T \mathbf{A} x \\ &= x^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T)^T (\mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T) x \\ &= x^T \mathbf{V} \Sigma^T \mathbf{U}^T \mathbf{U} \Sigma \mathbf{V}^T x \\ &= x^T \mathbf{V} \Sigma^T \Sigma \mathbf{V}^T x \\ &= \Sigma^2 (x^T \mathbf{V}) (\mathbf{V}^T x) = \Sigma^2 (\mathbf{V}^T x)^T (\mathbf{V}^T x) \\ &= \Sigma^2 \|\mathbf{V}^T x\|^2 \\ &= \sum_{i=1}^n \sigma_i^2 (\mathbf{v}_i^T x)^2. \end{aligned}$$

O vetor $x \in \mathcal{R}(V_{k+1}) = [v_1, v_2, \dots, v_{k+1}]$. Portanto, suas componentes entre $k+1$ e n são nulas, logo

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_2^2 = \sum_{i=1}^{k+1} \sigma_i^2 (\mathbf{v}_i^T x)^2 \geq \sigma_{k+1}^2 \sum_{i=1}^{k+1} (\mathbf{v}_i^T x)^2 \geq \sigma_{k+1}^2 = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_2^2$$

□

A.3 Demonstração do Teorema de Eckart-Young para a norma de Frobenius

Demonstração. Primeiro, note que:

$$\begin{aligned} \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F^2 &= \left\| \sum_{i=1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T - \sum_{i=1}^k \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right\|_F^2 \\ &= \left\| \sum_{i=k+1}^n \sigma_i \mathbf{u}_i \mathbf{v}_i^T \right\|_F^2 \\ &= \sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2. \end{aligned}$$

Para mostrar que $\mathbf{A}_k$ minimiza a norma $\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F$, é preciso mostrar que para qualquer matriz $\mathbf{B}$ de posto menor ou igual a k , vale que:

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F \leq \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F$$

Na desigualdade de Weyl, considere

$$\mathbf{A}' = \mathbf{A} - \mathbf{B}, \quad \mathbf{A}'' = \mathbf{B}.$$

Fazendo isso, é possível escrever

$$\sigma_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \sigma_j(\mathbf{B}) \geq \sigma_{i+j-1}(\mathbf{A}).$$

Tomando $j = k + 1$

$$\sigma_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}) + \sigma_{k+1}(\mathbf{B}) \geq \sigma_{k+i}(\mathbf{A}).$$

A matriz $\mathbf{B}$ tem posto menor ou igual a k , logo $\sigma_{k+1}(\mathbf{B}) = 0$. Portanto, a desigualdade anterior fica

$$\sigma_i(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq \sigma_{k+i}(\mathbf{A}). \quad (53)$$

Desenvolvendo a norma de Frobenius ao quadrado de $\mathbf{A} - \mathbf{B}$

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathbf{A} - \mathbf{B}).$$

Usando a Equação (53)

$$\|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|_F^2 = \sum_{i=1}^n \sigma_i^2(\mathbf{A} - \mathbf{B}) \geq \sum_{i=k+1}^n \sigma_i^2(\mathbf{A}) = \|\mathbf{A} - \mathbf{A}_k\|_F^2$$

□

A.4 Demonstração da solução do problema via TLS

Considere a seguinte partição da decomposição em valores singulares da matriz expandida $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & \mathbf{u}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & \sigma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T. \quad (54)$$

Onde $\mathbf{U}_p \in \mathbb{R}^{m \times n}$, $\mathbf{u}_q \in \mathbb{R}^{m \times 1}$, $\Sigma_p \in \mathbb{R}^{n \times n}$, σ_q é o menor valor singular, $\mathbf{V}_{pp} \in \mathbb{R}^{n \times n}$ e v_{qq} é escalar.

Pós-multiplicando os dois lados da Equação (54) por $\mathbf{V}$ e lembrando que tal matriz é ortonormal

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & \mathbf{u}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & \sigma_q \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}}_{\mathbf{I}_{n+1}}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & \mathbf{u}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & \sigma_q \end{bmatrix}, \\ \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} &= \mathbf{u}_q \sigma_q. \end{aligned} \quad (55)$$

Como $\begin{bmatrix} \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} & \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} \end{bmatrix}$ é a melhor aproximação de posto n da matriz $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$ segundo a norma de Frobenius, então $\begin{bmatrix} \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} & \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} \end{bmatrix}$ tem os mesmos vetores singulares que $\begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix}$, mas apenas os n valores singulares contidos em Σ_p , logo

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H} + \Delta\mathbf{H} & \mathbf{Y} + \Delta\mathbf{Y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & \mathbf{u}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T. \quad (56)$$

É possível encontrar a matriz $\begin{bmatrix} \Delta\mathbf{H} & \Delta\mathbf{Y} \end{bmatrix}$, subtraindo a Equação (56) da Equação (54). Fazendo isso:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{H} & \Delta\mathbf{Y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & \mathbf{u}_q \end{bmatrix} \left(\begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \Sigma_p & \\ & \sigma_q \end{bmatrix} \right) \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{U}_p & \mathbf{u}_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{n \times n} & \\ & \sigma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{u}_q \sigma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{pq} \\ \mathbf{v}_{qp} & v_{qq} \end{bmatrix}^T \\ &= - \begin{bmatrix} \mathbf{0}_{m \times n} & \mathbf{u}_q \sigma_q \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{V}_{pp} & \mathbf{v}_{qp} \\ \mathbf{v}_{pq} & v_{qq} \end{bmatrix} \\ &= - \begin{bmatrix} \sigma_q \mathbf{u}_q \mathbf{v}_{pq} & \sigma_q \mathbf{u}_q v_{qq} \end{bmatrix} \\ &= - \mathbf{u}_q \sigma_q \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Usando a Equação (55) para eliminar $\mathbf{u}_q \sigma_q$ da expressão

$$\begin{bmatrix} \Delta \mathbf{H} & \Delta \mathbf{Y} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \mathbf{H} & \mathbf{Y} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix}^T. \quad (57)$$

Com as relações desenvolvidas, é possível manipular a expressão da matriz expandida $[\mathbf{H} + \Delta \mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}]$ de tal forma a ser possível encontrar uma igualdade matricial compatível com a Equação (18).

$$\begin{aligned} [\mathbf{H} + \Delta \mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}] &= [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] + [\Delta \mathbf{H} \quad \Delta \mathbf{Y}] \\ [\mathbf{H} + \Delta \mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}] &= [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] - [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix}^T. \end{aligned}$$

Multiplicado dos dois lados da igualdade pela segunda coluna destacada da matriz $\mathbf{V}$ e lembrando que se trata de uma matriz ortonormal

$$\begin{aligned} [\mathbf{H} + \Delta \mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} &= [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} - [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix}}_1 \\ [\mathbf{H} + \Delta \mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} &= [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} - [\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} \\ [\mathbf{H} + \Delta \mathbf{H} \quad \mathbf{Y} + \Delta \mathbf{Y}] \begin{bmatrix} \mathbf{v}_{pq} \\ v_{qq} \end{bmatrix} &= \mathbf{0}_{m \times 1}. \end{aligned} \quad (58)$$

Comparando a Equação (18) com a Equação (58), a solução $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ para o vetor de parâmetros no método dos mínimos quadrados totais é única e dada por

$$\hat{\boldsymbol{\theta}} = -\mathbf{v}_{pq} v_{qq}^{-1}.$$

Onde:

- $\mathbf{v}_{pq}$ é o vetor formado pelos primeiros n elementos da coluna $n + 1$ da matriz de vetores singulares a direita $\mathbf{V}$ da matriz expandida $[\mathbf{H} \quad \mathbf{Y}]$;
- v_{qq} é o elemento $n + 1$ da coluna $n + 1$ da matriz $\mathbf{V}$.

A.5 Valores esperados das projeções dos erros para a modelagem completo do ruído

Considere uma medida fasorial com ruído, descrita por

$$X = (\rho_X + \Delta_\rho) \exp(j(\phi_X + \Delta_\phi)),$$

onde $\Delta_\rho \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^2)$, $\Delta_\phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2)$ e $\mathbb{E}[\Delta_\rho \Delta_\phi] = 0$.

Nessa seção, serão determinados os valores esperados das expressões

$$\mathbb{E}[X_{re}] - \rho_X \cos(\phi_X), \quad \mathbb{E}[X_{im}] - \rho_X \sin(\phi_X).$$

Será desenvolvida a expressão para a parte real. Para a parte imaginária, a demonstração é totalmente análoga.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{re}] &= \mathbb{E}[(\rho_X + \Delta_\rho) \cos(\phi_X + \Delta_\phi)] \\ &= \mathbb{E}[\rho_X \cos(\phi_X + \Delta_\phi)] + \mathbb{E}[\Delta_\rho \cos(\phi_X + \Delta_\phi)] \end{aligned}$$

Utilizando a identidade trigonométrica

$$\cos(\phi_X + \Delta_\phi) = \cos(\phi_X) \cos(\Delta_\phi) - \sin(\phi_X) \sin(\Delta_\phi).$$

Dessa forma

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{re}] &= \mathbb{E}[\rho_X \cos(\phi_X) \cos(\Delta_\phi) - \rho_X \sin(\phi_X) \sin(\Delta_\phi) + \Delta_\rho \cos(\phi_X) \cos(\Delta_\phi) \\ &\quad - \Delta_\rho \sin(\phi_X) \sin(\Delta_\phi)] \\ &= \rho_X \cos(\phi_X) \mathbb{E}[\cos(\Delta_\phi)] - \rho_X \sin(\phi_X) \mathbb{E}[\sin(\Delta_\phi)] \\ &\quad + \cos(\phi_X) \mathbb{E}[\Delta_\rho \cos(\Delta_\phi)] - \sin(\phi_X) \mathbb{E}[\Delta_\rho \sin(\Delta_\phi)] \end{aligned}$$

As variáveis aleatórias $\Delta_\rho \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\rho^2)$ e $\Delta_\phi \sim \mathcal{N}(0, \sigma_\phi^2)$ são independentes, logo

$$\mathbb{E}[\Delta_\rho \cos(\Delta_\phi)] = \mathbb{E}[\Delta_\rho] \cdot \mathbb{E}[\cos(\Delta_\phi)],$$

$$\mathbb{E}[\Delta_\rho \sin(\Delta_\phi)] = \mathbb{E}[\Delta_\rho] \cdot \mathbb{E}[\sin(\Delta_\phi)].$$

Lembrando que, se X e Y são variáveis aleatórias independentes, $g(X)$ e $h(Y)$ também são para todo par de funções f, g Lebesgue mensuráveis (ATHREYA; LAHIRI, 2006).

Além disso, como $\mathbb{E}[\Delta_\rho] = 0$

$$\mathbb{E}[\Delta_\rho \cos(\Delta_\phi)] = \mathbb{E}[\Delta_\rho] \cdot \mathbb{E}[\cos(\Delta_\phi)] = 0,$$

$$\mathbb{E}[\Delta_\rho \sin(\Delta_\phi)] = \mathbb{E}[\Delta_\rho] \cdot \mathbb{E}[\sin(\Delta_\phi)] = 0.$$

Voltando ao cálculo do valor esperado da parte real:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X_{re}] &= \rho_X \cos(\phi_X) \mathbb{E}[\cos(\Delta_\phi)] - \rho_X \sin(\phi_X) \mathbb{E}[\sin(\Delta_\phi)] \\ &\quad + \cos(\phi_X) \underbrace{\mathbb{E}[\Delta_\rho \cos(\Delta_\phi)]}_{=0} - \sin(\phi_X) \underbrace{\mathbb{E}[\Delta_\rho \sin(\Delta_\phi)]}_{=0} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}[X_{re}] = \rho_X \cos(\phi_X) \mathbb{E}[\cos(\Delta_\phi)] - \rho_X \sin(\phi_X) \mathbb{E}[\sin(\Delta_\phi)]$$

Para completar a demonstração, deve-se provar o seguinte lema: seja Y uma variável aleatória Gaussiana com média 0 e variância σ^2 , então:

$$\mathbb{E}[\cos(X)] = e^{-\frac{1}{2}\sigma^2}, \quad \mathbb{E}[\sin(X)] = 0.$$

Utilizando a fórmula de Euler:

$$\cos(X) = \frac{e^{jX} + e^{-jX}}{2}, \quad \sin(X) = \frac{e^{jX} - e^{-jX}}{2j}.$$

Tomando o valor esperado dos dois lados da igualdade:

$$\mathbb{E}[\cos(X)] = \frac{\mathbb{E}[e^{jX}] + \mathbb{E}[e^{-jX}]}{2}, \quad \mathbb{E}[\sin(X)] = \frac{\mathbb{E}[e^{jX}] - \mathbb{E}[e^{-jX}]}{2j}.$$

Para calcular o valor esperado de $\cos(X)$ e $\sin(X)$, pode-se utilizar a função característica para a distribuição gaussiana de média μ e variância σ^2 , definida por (DURRETT, 2019)

$$\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{jtX}] = \exp\left(\mu jt - \frac{1}{2}\sigma^2 t^2\right).$$

Trocando $t = 1$ e $t = -1$ na expressão acima e utilizando uma distribuição normal com média, $\mu = 0$, e variância σ^2

$$\begin{aligned} \varphi(1) &= \mathbb{E}[e^{jX}] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right), \\ \varphi(-1) &= \mathbb{E}[e^{-jX}] = \exp\left(-\frac{1}{2}\sigma^2\right). \end{aligned}$$

Dessa forma, os valores esperados de $\cos(X)$ e $\sin(X)$ ficam:

$$\mathbb{E}[\cos(X)] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}}, \quad \mathbb{E}[\sin(X)] = 0.$$

Portanto, o valor esperado da parte real vale:

$$\mathbb{E}[X_{re}] = e^{-\frac{\sigma^2}{2}} \rho_X \cos(\phi_X).$$

Com isso, o valor esperado do erro na projeção sobre o eixo real vale

$$\mathbb{E}[X_{re}] - \rho_X \cos(\phi_X) = \left(e^{-\frac{\sigma^2}{2}} - 1\right) \rho_X \cos(\phi_X).$$

Mínimos Quadrados não Lineares

B.1 Parâmetros inseridos no método dos mínimos quadrados não lineares

Dados	Valor Numérico
Número de Realizações (N)	1000
ε_1	10^{-6}
ε_2	10^{-10}
itmax	100
$\lambda^{(0)}$	0,01
β	0,1
$R^{(0)}$	3,5 Ω
$b^{(0)}$	$2,3597 \cdot 10^{-4} S$
$X^{(0)}$	34,16 Ω
$\text{Var}(w_1)$	$4,957 \cdot 10^7$
$\text{Var}(w_2)$	$1,689 \cdot 10^9$
$\text{Var}(w_3)$	$8,754 \cdot 10^6$
$\text{Var}(w_4)$	$4,665 \cdot 10^7$
$\text{Var}(w_5)$	$8,731 \cdot 10^6$
$\text{Var}(w_6)$	$4,246 \cdot 10^7$

B.2 Pseudocódigo do algoritmo implementado

```

1: n (Número de realizações);
2: itmax (quantidade máxima de iterações);
3:  $\varepsilon_1$  e  $\varepsilon_2$  (tolerância)
4:  $R_{n \times 1}$ ,  $B_{n \times 1}$ ,  $X_{n \times 1}$  (vetor de parâmetros)
5: for  $i = 1, \dots, n$  do
6:   Ler fasores  $V_e[n]$ ,  $V_s[n]$ ,  $I_e[n]$ ,  $I_s[n]$ 
7:   Definir o ruído  $W = \sqrt{C} \cdot randn(6, 1)$ 
8:   Construir  $f = [f_1, f_2, f_3, f_4, f_5, f_6]^T$ 
9:    $R(1, 1) = R^{(0)}$ ,  $B(1, 1) = B^{(0)}$ ,  $X(1, 1) = X^{(0)}$ 
10:   $\theta^{(0)} = [R(1, 1), B(1, 1), X(1, 1)]^T$ 
11:  While ( $k = 1, \dots, \text{itmax}$ ) or  $\|r\|_\infty \geq \varepsilon_1$  or  $\|\nabla f\|_\infty \geq \varepsilon_2$ 
12:     $\theta^{(k+1)} = \theta^{(k)} - (Df(\theta^{(k)})^T Df(\theta^{(k)}) + \lambda^{(k)} I)^{-1} Df(\theta^{(k)})^T f(\theta^{(k)})$ 
13:    iterar  $\lambda^{(k)}$ 
14:     $\|r\|_\infty$ ,  $\|\nabla f\|_\infty$ 
15:    If  $\|r\|_\infty < \varepsilon_1$  and  $\|\nabla f\|_\infty < \varepsilon_2$  then
16:      Estados=2
17:    end If
18:    If  $\|r\|_\infty < \varepsilon_1$  and  $\|\nabla f\|_\infty \geq \varepsilon_2$  then
19:      Estados=1
20:    end If
21:    k=k+1
22:  If Estados==2 then
23:    print 'Ponto de Mínimo local encontrado'
24:     $y(1, 1) = R(n, 1)$ ,  $y(2, 1) = B(n, 1)$ ,  $y(3, 1) = X(n, 1)$ 
25:  end If
26:  If Estados==1 then
27:    print 'Possível ponto de Mínimo local encontrado'
28:     $y(1, 1) = R(n, 1)$ ,  $y(2, 1) = B(n, 1)$ ,  $y(3, 1) = X(n, 1)$ 
29:  end If
30:  Else
31:    print 'Ponto de Mínimo não encontrado'
32:  end Else
33: end for

```