

VIVIANE CRISTINE SILVA

Eng.^a Eletricista, Escola Politécnica da USP, 1985

UM PÓS-PROCESSADOR PARA O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS
APLICADO AO ELETROMAGNETISMO

Dissertação apresentada à Escola
Politécnica da USP para a
obtenção do título de Mestre em
Engenharia Elétrica.

Orientador : Prof. Dr. José Roberto Cardoso

São Paulo - 1991



UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA POLITÉCNICA

TERMO DE JULGAMENTO
DE
DEFESA DE DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Aos 26 dias do mês de setembro de 1991, às 09:00 horas,
no Departamento de Engenharia de Eletricidade

da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, presente a Comissão Julgadora, integrada pelos Senhores Professores Drs. José Roberto Cardoso Orientador da candidata, Fernando Selles Ribeiro e Ronaldo de Breyne Salvagni

iniciou-se a Defesa de Dissertação de Mestrado do Senhor Eng^o Eletricista

VIVIANE CRISTINE SILVA

Título da Dissertação: "Um Pós-Processador para o Método dos Elementos Finitos Aplicado ao Eletromagnetismo"

Concluída a arguição, procedeu-se ao julgamento na forma regulamentar, tendo a Comissão Julgadora atribuído ao candidato as seguintes notas:

Prof.Dr.José Roberto Cardoso	(9,5)	(nove e meio)
Prof.Dr.Fernando Selles Ribeiro	(9,5)	(nove e meio)
Prof.Dr.Ronaldo de Breyne Salvagni	(9,5)	(nove e meio)

Para constar, é lavrado o presente termo, que vai assinado pela Comissão Julgadora e pelo Secretário da Seção de Pós-Graduação

São Paulo, 26 de setembro de 1991.

Presidente

[Handwritten signature]

[Handwritten signature]

Secretário

Mara Fátima de Jesus Luz Sanches

[Handwritten signature]

Observações:

Homologada pela C.P.G. em reunião realizada a 14 / 10 / 1991

À memória de
Cesar Garofalo

AGRADECIMENTOS

- Ao Prof. José Roberto Cardoso pela dedicação, assistência e apoio no acompanhamento deste trabalho.

- Ao Prof. Luiz Lebensztajn, grande amigo, pelo apoio, estímulo e, sobretudo, pelas valiosas e sempre oportunas sugestões que em muito contribuíram para o enriquecimento deste trabalho.

- Ao colega Douglas Ricardo de Freitas Clabunde pela paciência e dedicação no auxílio dos problemas computacionais.

- Aos Professores Fernando Selles Ribeiro e Jorge M. Janizewsky pelas importantes críticas e sugestões à redação final, apresentadas durante o Exame de Qualificação.

- Ao Prof. Ivan Eduardo Chabu pelo auxílio nas dúvidas teóricas.

- A todos aqueles que de alguma maneira, direta ou indiretamente, contribuíram para a realização deste trabalho.

RESUMO

O objetivo deste trabalho é o desenvolvimento de um Pós-processador para um software baseado no Método dos Elementos Finitos destinado a problemas de Eletromagnetismo.

Três métodos de determinação de torque de origem eletromagnética são abordados e comparados do ponto de vista da precisão e implementação, quais sejam: Variação da Energia Magnética, Integração do Tensor de Maxwell e Princípio do Trabalho Virtual (Derivada do Jacobiano Local).

Dois métodos são propostos para a determinação de reatâncias de eixo direto e em quadratura de máquinas síncronas.

A metodologia é aplicada na análise de um motor síncrono de relutância de 15 HP, 380 V, 4 pólos, cujos resultados são apresentados no Capítulo IV.

ABSTRACT

The aim of this work is to develop a post-processor for use with an electromagnetism-oriented software based upon the Finite Elements Method.

Three methods for determining electromagnetic torque are presented and compared in terms of precision and implementation : (i) Variation of Magnetic Energy, (ii) Maxwell Stress Method and (iii) Virtual-work Principle (Local Jacobian Derivative).

Two methods for calculating direct-axis and quadrature-axis reactances of synchronous machines are proposed.

The methodology is applied in the analysis of a 15 HP, 380 V, 4-pole reluctance synchronous motor and the results are presented in Chapter IV.

SUMÁRIO

CAPÍTULO I: O PÓS-PROCESSADOR NA ANÁLISE E PROJETO DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	
1 - Introdução.....	9
2 - Objetivos.....	13
CAPÍTULO II: CAD E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO ELETROMAGNETISMO - ESTADO DA ARTE	
1 - A Concepção de Produtos e o Projeto Assistido por Computador.....	16
1.1 - A Escolha do Método.....	18
2 - Arquitetura Geral de Sistemas CAD Baseados no MEF para Cálculo de Campos Magnéticos.....	20
2.1 - Estrutura Geral.....	20
2.1.1 - O Pré-processador (Módulo de Entrada de Dados).....	22
2.1.2 - O Módulo de Cálculo ou Processador.....	27
2.1.3 - O Pós-processador (Módulo de Saída de Resultados).....	29
3 - CAD e Sistemas Especialistas em Eletromagnetismo.....	33
3.1 - A Base de Conhecimento.....	35
3.2 - As Estratégias de Resolução.....	36
CAPÍTULO III: O CÁLCULO E APRESENTAÇÃO DE GRANDEZAS LOCAIS E GLOBAIS NUM PÓS-PROCESSADOR - ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS	

1 - Mapeamento de campo - Traçado de Equipotenciais.....	38
1.1 - O Vetor Potencial Magnético \vec{A} e a Indução Magnética \vec{B}	38
1.2 - Traçado de Equipotenciais num Domínio "discretizado" em Elementos Finitos.....	39
2 - Cálculo da Indução Magnética - Coloração dos Elementos.....	40
3 - Fluxo Magnético Através de uma Superfície.....	42
4 - Traçado de Grandezas de Interesse.....	43
5 - Energia Magnética Armazenada.....	44
6 - Cálculo de Indutâncias	
6.1 - Cálculo pelo Fluxo Magnético Concatenado.....	44
6.1.1 - Cálculo das Reatâncias de Eixo Direto e em Quadratura de Máquinas Síncronas.....	45
6.2 - Cálculo pela Energia Magnética.....	47
6.2.1 - Cálculo das Reatâncias de Eixo Direto e Quadratura.....	47
7 - Cálculo de Forças e Torques Eletromagnéticos.....	48
7.1 - Variação da Energia Magnética.....	49
7.2 - Tensor de Maxwell	
7.2.1 - Aspectos Teóricos.....	51
7.2.2 - Implementação Computacional....	55
7.3 - Trabalho Virtual	
7.3.1 - Aspectos Teóricos.....	61
7.3.2 - Implementação Computacional....	67

CAPITULO IV: APLICAÇÃO

1- Exemplo de Aplicação - Motor Sincrono de Relutância.....71

2 - Aspectos do Projeto do Motor Sincrono de Relutância.....73

3 - Pré-procesamento.....75

4 - Os Módulos de Cálculo e Exploração de Resultados (NR2D1 e EXP2D1).....76

 4.1 - Módulo de Cálculo (NR2D1).....77

 4.2 - Pós-processador (EXP2D1).....78

 4.2.1 - Mapeamento de Campo.....78

 4.2.2 - Indução Magnética em uma Linha Especificada.....81

 4.2.3 - Energia Magnética.....83

 4.2.4 - Torque Eletromagnético.....84

 4.2.5 - Determinação das Reatâncias de ED e EQ.....86

 4.2.6 - Coloração dos Elementos.....88

CAPITULO V: COMENTARIOS E CONCLUSÕES

1 - Cálculo do Torque.....89

2 - Reatâncias x_d e x_q91

APENDICE I - EXPRESSÕES DA FORÇA E DO TORQUE

PARA O TRABALHO VIRTUAL.....92

APENDICE II - CONDIÇÕES DE PERIODICIDADE

EM MÁQUINAS ELÉTRICAS ROTATIVAS.....102

BIBLIOGRAFIA.....104

CAPÍTULO I

O PÓS-PROCESSADOR NA ANÁLISE E PROJETO DE DISPOSITIVOS ELETROMAGNÉTICOS ANALISADOS PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

1 - INTRODUÇÃO

A solução de campos magnéticos é uma importante etapa no projeto de dispositivos eletromagnéticos.

O Método dos Elementos Finitos (MEF) é atualmente uma ferramenta de cálculo que permite a introdução de técnicas CAD (projeto assistido por computador) na concepção de um dispositivo ou estrutura a partir de modelos teóricos matemáticos representativos de seu funcionamento.

Nesse contexto, o MEF é indissociável de técnicas de CAD que tornem possível descrever o objeto em estudo através de um esquema lógico que permita a aplicação do método ao fim desta descrição e, posteriormente, facilite a síntese dos resultados sob forma de esquemas, curvas ou funções significativas do objeto estudado.

Em linhas gerais, uma análise completa de um sistema pelo MEF compreende três etapas, independentes entre si, que exigem técnicas de cálculo e de manipulação computacionais diferentes. Entretanto, do ponto de vista prático, essas três fases devem estar estreitamente interligadas se desejarmos que o MEF não seja apenas uma ferramenta de resolução isolada, mas um elo de ligação dentro do processo de concepção que permita ao engenheiro concluir, após algumas horas de trabalho, a definição de um dispositivo a ser construído e que este satisfaça aos imperativos técnicos de bom funcionamento.

Assim, todo software que utilize o MEF deve ser integrado a técnicas gráficas, interativas e numéricas. Em

particular, os algoritmos de preparação de dados e de exploração de resultados são indispensáveis à aplicação eficiente do método. Convém então uma definição da estrutura geral de um sistema CAD baseado no MEF.

Na prática, o cálculo de desempenho de um produto em fase de concepção passa pelo tratamento de um problema de equações a derivadas parciais que compreende três etapas:

- a) Descrição do problema (geometria, características físicas, "discretização" do domínio etc.);
- b) Aplicação de um método numérico de simulação (p.ex. MEF);
- c) Verificação, visualização e interpretação de resultados da simulação.

Essas três etapas são bem distintas e correspondem, a nível de lógica, a uma estruturação natural para um software em três módulos:

- a) Módulo de entrada de dados (pré-processador);
- b) Módulo de cálculo (processador);
- c) Módulo de saída de resultados (pós-processador).

É conveniente, além dos três módulos citados acima, definir um módulo a parte, que corresponderia a um banco de dados para o sistema completo. Tal banco de dados possuiria armazenadas características físicas de vários materiais, curvas de magnetização, "discretização" do domínio analisado etc.

O Pré-processador, responsável pela preparação dos dados, desempenha as seguintes funções :

- Descrição da geometria do domínio;
- Descrição de características físicas;
- "Discretização" do domínio.

O objetivo da descrição da geometria de um objeto é a representação computacional das suas formas e dimensões.

Na descrição das características físicas o operador

fornece as seguintes informações, relativas ao comportamento físico do domínio:

- Descrição de propriedades físicas de materiais (condutividade, permeabilidade etc);
- Descrição de fontes (fontes de calor, de corrente etc).
- Condições de contorno e condições iniciais.

A "discretização" do domínio corresponde a passagem do meio contínuo à sua representação "discretizada". Para o MEF, a "discretização" resulta em dividir o domínio em um conjunto de subdomínios - os elementos finitos - respeitando as fronteiras e interfaces do domínio inicial.

O módulo de cálculo procede à aplicação do MEF propriamente dito, isto é, à resolução do sistema de equações linear ou não-linear que provém da formulação matemática do problema.

Ele recebe como entrada a "discretização" do domínio, as características físicas e as condições de contorno. Na saída fornece os valores das grandezas procuradas - as variáveis de estado - em cada nó da malha de elementos finitos.

Os métodos mais utilizados para resolver os sistemas de equações são os matriciais globais e compreendem várias etapas :

- Montagem da matriz global do sistema e do segundo membro, o vetor de fontes;
- Introdução das condições de contorno;
- Resolução do sistema linear.

Esta última pode ser realizada de várias maneiras:

- Métodos diretos (Gauss, Choleski);
- Métodos iterativos (ICCG).

Os valores da variável de estado, calculados nos nós da malha durante a fase de resolução, constituem o "Modelo Discretizado" do problema analisado. Entretanto, a solução obtida

não é diretamente explorável pelas seguintes razões :

- A variável de estado calculada nos nós descreve de maneira matemática o fenômeno, mas nem sempre tem um significado físico palpável;

- A massa de informações numéricas bruta, oriunda do cálculo (tabela com alguns milhares de valores nodais) é de difícil compreensão e análise.

A função do módulo de saída - Pós-processador - é então dupla :

- Extração de informações significativas para o engenheiro. Essas informações podem ser grandezas locais (indução magnética etc.) ou grandezas globais, resultantes de uma integração (fluxo, forças e torques eletromagnéticos etc.);

- Apresentação sintética das informações numéricas sob forma gráfica para facilitar sua interpretação (traçado de linhas equipotenciais, curva de evolução do campo magnético ao longo de uma linha etc.).

A lógica para um software de extração de resultados pode ser organizada segundo dois métodos :

- Valores pré-calculados: nessa aproximação todas as grandezas possíveis são calculadas e armazenadas pelo módulo de cálculo; o processador de saída tem unicamente a função de consulta e apresentação gráfica desses resultados;

- Valores calculados pelo processador de saída: com essa estrutura os dados armazenados são mínimos, mas os tempos de cálculo do pós-tratamento são maiores; o pós-processador deve ser capaz então de realizar operações aritméticas, integrações e derivações sobre grandezas escalares e vetoriais com alta velocidade de processamento.

O crescente desenvolvimento dos recursos de hardware como, por exemplo, o alto desempenho das Estações de Trabalho

Gráficas, torna cada vez mais eficaz e espontâneo o diálogo homem-máquina. Os softwares baseados no MEF só têm a ganhar com a sua utilização, ainda mais que os problemas de portabilidade gráfica estão praticamente resolvidos, graças à adoção de normas gráficas internacionais como a GKS.

Num outro contexto, esses softwares, que consomem grande volume de memória e tempo de computação, podem contar com outro grande progresso tecnológico da informática: o desenvolvimento de supercomputadores, de processamento paralelo e vetorial. Sem dúvida, a união Estação de Trabalho/Super computador constitui uma arquitetura-chave para as futuras técnicas de lógica baseadas no MEF.

Paralelamente ao desenvolvimento de hardware, existe ainda o desenvolvimento da engenharia de software, com surgimento de sistemas de gestão de base de dados para CAD e a utilização de linguagens oriundas de inteligência artificial (PROLOG, LISP etc.), elementos que farão progredir o desempenho de softwares e sobretudo de integrá-los mais intimamente na corrente de CAD/CAE.

2 - OBJETIVOS

O objetivo deste trabalho será o desenvolvimento de algoritmos em linguagem C para implantação em microcomputadores compatíveis com IBM/PC para a implementação de um pós-processador destinado à exploração dos resultados oriundos da análise por Elementos Finitos de dispositivos eletromagnéticos, segundo uma abordagem bidimensional utilizando elementos finitos triangulares de primeira ordem. As suas funções são: extração de informações significativas para o engenheiro e apresentação sintética de informações numéricas.

Dependendo do fenômeno estudado, as informações obtidas,

provenientes da fase de resolução - valores da variável de estado calculados nos nós -, podem ou não ter um significado diretamente explorável. Em certos modelamentos a variável de estado não possui nenhuma utilidade em si, como é o caso do vetor potencial magnético \vec{A} em problemas de Eletromagnetismo. O que interessa é o seu rotacional, a indução magnética \vec{B} .

Mesmo em casos em que a variável de estado é significativa, como a distribuição de temperaturas num estudo térmico, outras grandezas derivadas também são úteis. É o caso da densidade de fluxo de calor ($Q = -K \text{ grad } T$).

As informações obtidas do pós-processador podem ser :

- Locais : indução magnética (mapeamento de campo);
- Resultantes de uma integração (globais ou integrais):
fluxo através de uma superfície, energia, força, etc.

Este trabalho tratará com mais detalhe o cálculo de forças e torques de origem eletromagnética exercidos sobre um corpo rígido. Essas grandezas são de particular interesse no projeto e análise de desempenho de equipamentos eletromagnéticos, como é o caso da força de atração em eletroímãs siderúrgicos e do torque em máquinas elétricas rotativas.

Serão abordadas as diversas formulações encontradas atualmente na literatura pertinente a fim de estabelecer os métodos existentes e tecer comparações sob vários aspectos, como: precisão, aspectos práticos de implementação etc. Os métodos existentes são os seguintes :

1. Variação da Energia Magnética;
2. Tensor de Maxwell;
3. Trabalho Virtual.

Como exemplo de aplicação será analisado o caso de um motor síncrono de relutância, e, além das grandezas acima citadas, será proposta uma maneira de se obter as reatâncias segundo os

eixos direto e em quadratura - parâmetros importantes no projeto e análise desse tipo de máquina - através de considerações energéticas.

CAPÍTULO II

CAD E O MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO ELETROMAGNETISMO

- ESTADO DA ARTE -

1 - A CONCEPÇÃO DE PRODUTOS E O PROJETO ASSISTIDO POR COMPUTADOR

Um sistema CAD é realizado através de três componentes tecnológicos:

1 - A comunicação interativa direta entre o engenheiro e o computador num ambiente conversacional que permite a sinergia homem-máquina necessária ao projeto e à sua análise;

2 - Um conjunto de periféricos gráficos interativos que preenche o vácuo de linguagem entre o homem e a máquina por intermédio de uma comunicação geométrica e visual com o computador;

3 - Uma base de dados informática, que permite o armazenamento, a manipulação, a modificação e a transferência em tempo real de dados técnicos confiáveis e atualizados sobre todas as disciplinas (magnetostática, eletrostática, magnetodinâmica, eletrocinética etc.).

Além dos componentes citados acima, o modelo informático do produto que será concebido é uma peça fundamental a ser acrescentada a qualquer sistema CAD. Esse conjunto de programas permite simular o funcionamento do produto em fase de projeto. O modelo é a tradução informática dos modelos físico-matemáticos elaborados por engenheiros e físicos.

Da exatidão e generalidade do modelo depende a boa adequação entre os produtos concebidos pelo sistema CAD e o seu desempenho real, uma vez construídos.

Num programa implantado em um sistema CAD, o modelo constitui a peça de sustentação desse sistema, mas, se a qualidade do software depende daquela do modelo, sua utilidade como ferramenta de projeto depende da qualidade gráfica da interface homem-máquina que esse sistema deve oferecer.

De fato, pouca vantagem há em possuir um modelo sofisticado se sua utilização necessita de uma formação longa e impõe tarefas fatigantes e repetitivas. Entre o nascimento de uma idéia e a sua aplicação ao nível da concepção do produto há um número importante de tarefas manuais a realizar que são, às vezes, fontes de erros, de perda de tempo e de pouca criatividade. Essas tarefas, freqüentemente repetitivas, de criação de dados assimiláveis pelo computador, e a redução de resultados brutos conduzem a um alongamento de prazos e à perda, pelo projetista, de boa parte de sua energia criativa em trabalhos que não têm outro interesse além de permitir ao computador realizar a análise do modelo matemático correspondente à idéia do engenheiro.

Quando se utiliza um sistema conversacional com interface gráfica, as fases manuais de transformação de dados, que correspondem à idéia do projetista, são suprimidas graças à comunicação gráfica direta. Igualmente, a modificação de desenhos ou a execução do esquema definitivo são realizadas de maneira automática. Disso resulta um ganho de tempo considerável com uma redução de fontes de erros.

O engenheiro pode então desenvolver ao máximo suas possibilidades imaginativas e comunicar os resultados diretamente ao computador, cuja análise permitirá a sua avaliação. Conclui-se então que o projetista pode testar em pouco tempo um grande número de soluções técnicas correspondentes à sua experiência e imaginação.

Um problema crucial de prazos e de risco de erros

permanece, entretanto, se a transferência de dados entre as equipes que, em momentos diferentes, intervêm no desenvolvimento de um projeto, é realizada manualmente. É por isso que em um sistema CAD é sempre previsto um meio de armazenamento de dados técnicos sob uma forma acessível a vários usuários: o banco de dados.

Uma vez criado, esse banco é modificado e atualizado e fornece uma interface entre os cálculos técnicos de diferentes equipes, evitando perda de tempo e fontes de erros ligadas à conversão manual e à transferência desses dados de um programa a outro. A base de dados permite enfim realizar uma identificação rápida de diversas características do projeto (custos, prazos) dentro da meta de uma melhor tomada de decisão.

No coração de um sistema CAD a técnica de interação homem-máquina é, portanto, tão importante quanto a qualidade do modelo aplicado.

1.1 - A Escolha do Modelo

Os dispositivos magnéticos, tais como os motores elétricos ou os transformadores, fazem interagir simultaneamente vários fenômenos.

Certamente os problemas eletromagnéticos estão no centro de uma fase de modelamento, mas eles estão estreitamente ligados aos fenômenos térmicos que definem as principais limitações de construção (aquecimento, perdas etc.). Quanto à mecânica, é ela que permite determinar o desempenho final de protótipos concebidos, nos quais os materiais serão cada vez mais solicitados a trabalhar próximo dos limites de suas capacidades.

O engenheiro que pretende fazer uso de um sistema CAD deverá, antes de mais nada, determinar o modelo mais adaptado ao

estudo que quer realizar.

Depois, ele deverá selecionar o sistema CAD que emprega esse modelo. O leque de opções será rico conforme a quantidade de modelos e ferramentas existentes. Será necessário então tomar um grande cuidado na verificação de hipóteses do modelo selecionado. Essa escolha, entretanto, nem sempre é fácil.

Enfim, durante toda a utilização de um sistema clássico de CAD, o engenheiro toma decisões e a máquina executa, com sua grande eficiência, os cálculos e as exaustivas pesquisas exigidas. Mas a tomada de decisão, incumbência do projetista, permanece primordial.

Na concepção de produtos complexos, o engenheiro conduz seu trabalho em função de um conhecimento adquirido na empresa em que trabalha. Um programa implantado num sistema CAD clássico totalmente automático não pode, em hipótese alguma, substituir a capacidade de síntese e de intuição do projetista engajado. Traduzir por um algoritmo todos os casos e regras a serem aplicadas para proceder à criação de um produto implicaria um programa tentacular, cuja execução, extremamente combinatória, acarretaria tempos de processamento totalmente proibitivos, apesar da potência das máquinas atuais.

Entretanto, existem novas técnicas de programação, fundamentadas sobre resultados comprovados, obtidos no domínio de Inteligência Artificial, que se originam de sistemas ditos Sistemas Especialistas (*Expert Systems*), cujo princípio reproduz o passo intelectual do projetista.

Esses sistemas, longe de terem por finalidade substituir o projetista, tomam, por sua vez, uma série de decisões repetitivas e combinatórias e permitem que ele se dedique ao essencial da tomada de decisão.

2 - ARQUITETURA GERAL DE SISTEMAS CAD BASEADOS NO METODO DOS ELEMENTOS FINITOS PARA CALCULO DE CAMPOS MAGNÉTICOS

Atualmente já não existe o interesse em se desenvolver programas que simplesmente efetuem cálculo de campos utilizando o MEF, mas sistemas informáticos completos que possibilitem a utilização simples e racional do método por qualquer engenheiro projetista.

A seguir serão apresentadas as estruturas de organização gerais de um sistema CAD, existentes atualmente, baseadas no MEF.

2.1 - Estrutura Geral

A decomposição do tratamento numérico de um problema para que se possa trabalhar dentro da filosofia de CAD deve ser estruturada em três etapas:

- a) Pré-processador;
- b) Módulo de cálculo;
- c) Pós-processador.

Pré e pós-processador, em sua configuração mínima, utilizam programas de leitura para introduzir as informações e maneiras simples de saída gráfica para verificar os dados e visualizar os resultados. Dentro de uma lógica CAD, oferecem, além de tudo, uma interação alfanumérica e gráfica adequada. Isso facilita a comunicação homem-máquina e permite, portanto, reduzir os tempos de aquisição de dados e a análise de resultados da simulação.

O módulo de cálculo remete aos recursos clássicos do cálculo científico: operações aritméticas, memória central, memória de massa.

A heterogeneidade de recursos em jogo (interatividade e

qualidade gráfica de apresentação para os pré e pós-processadores; potência de cálculo para o módulo de cálculo) explica porque certos softwares são organizados em três programas separados, implantados, às vezes, em computadores distintos (minicomputador ou Estação de Trabalho para a interatividade e gráficos; super-computador ou computador vetorial para o cálculo). Os fluxos de dados transitam de um programa a outro (eventualmente de um computador a outro) por intermédio de arquivos.

O método numérico adotado para efetuar a simulação (diferenças finitas, elementos finitos) tem certamente uma grande influência sobre a organização de dados e a conexão de algoritmos. O MEF é largamente utilizado em sistemas CAD, pois permite uma "discretização" relativamente fácil da geometria e se presta bem à simulação de fenômenos governados a derivadas parciais.

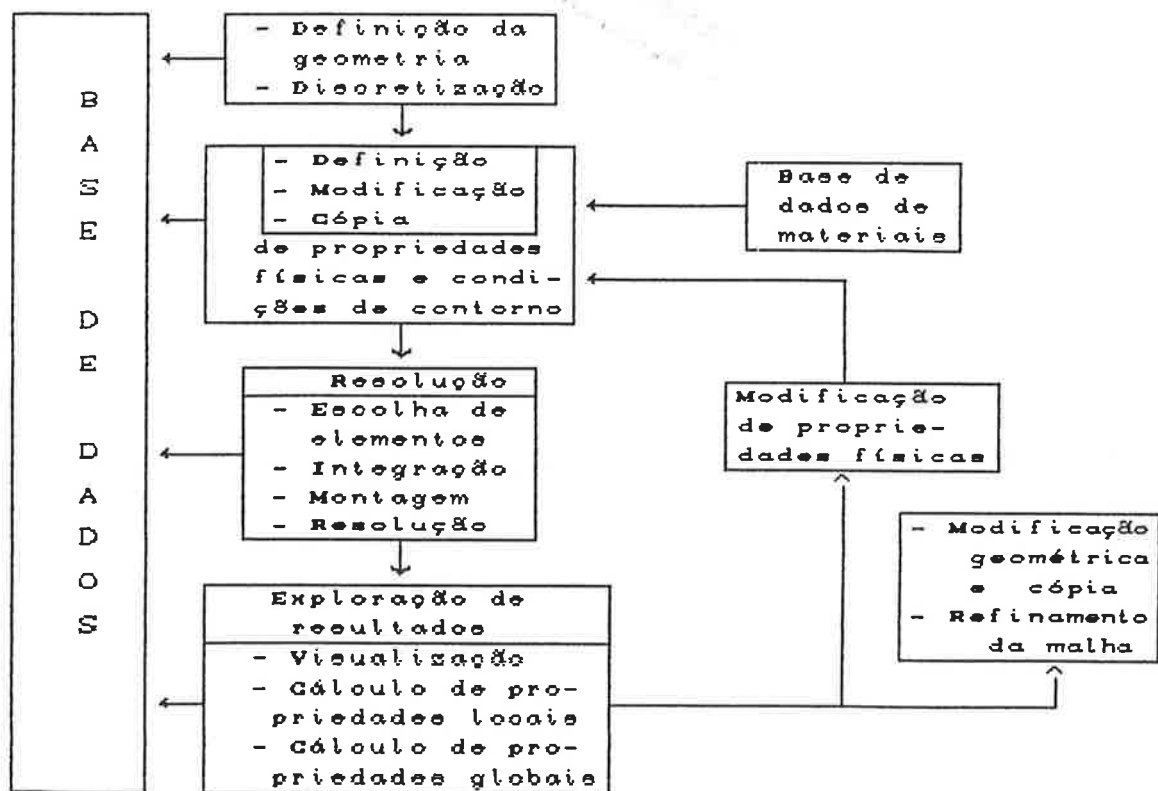


Fig. II.1 - Organização de um Software baseado no MEF (FLUX2D) [18]

2.1.1 - O Pré-processador (Módulo de entrada de dados)

Qualquer que seja o tipo de simulação abordada (eletromagnetismo, térmico etc.), as principais tarefas do módulo de entrada são as seguintes:

- Descrição da geometria do domínio a ser estudado;
- Descrição de características físicas;
- "Discretização" do domínio.

1 - Descrição da geometria

Os principais métodos que permitem descrever a geometria de um objeto são:

- 1 - Método de descrição de fronteiras;
- 2 - Método de geometria construtiva.

O primeiro é um dos métodos mais utilizados em sistemas CAD. Uma superfície é representado dividindo-se sua fronteira em um número finito de subconjuntos fechados chamados arestas, cada uma delas representada por seus vértices. Assim, uma superfície é representada pela lista de arestas e vértices que a constitui.

Esse método conduz então a uma representação sob a forma de *grafo* contendo, de maneira estritamente disjunta, das informações topológicas e das informações métricas de descrição do objeto (Fig II.2).

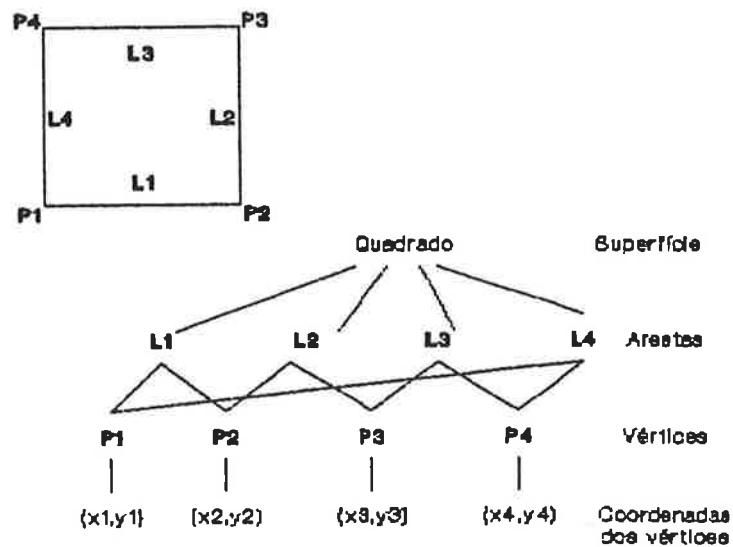


Fig. II.2 - Exemplo 2D de representação pelo método de descrição de fronteiras

O segundo método - Geometria Construtiva - é conhecido como "Constructive Solid Geometry" (CSG).

Nesse método de representação, os sólidos são definidos com a ajuda de operadores (operações booleanas: união, interseção, diferença; transformações geométricas) e de primitivos de base (polígono, círculo, elipse etc. em 2D).

A estrutura de dados resultante desse método de representação é frequentemente uma árvore binária, na qual as folhas são ou primitivos de base, ou argumentos de transformação geométrica, e onde os nós são os operadores previamente definidos (Fig. II.3).

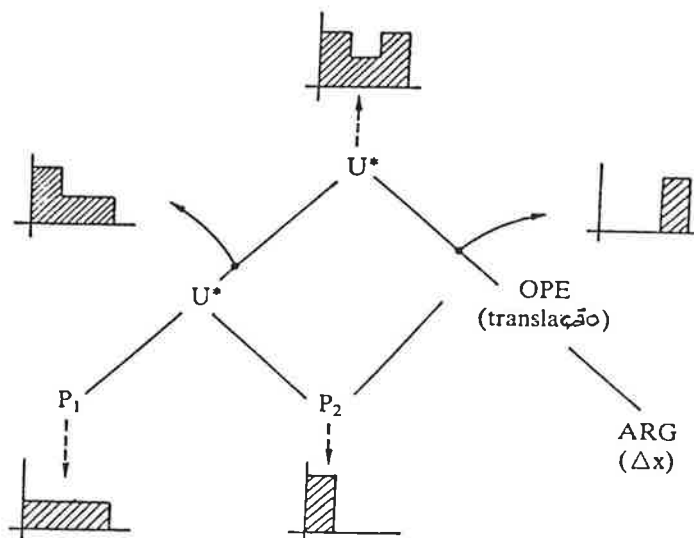


Fig. II.3 - Exemplo 2D de representação de um objeto pelo método de geometria construtiva

2 - Descrição de Características Físicas

Além da definição da geometria do domínio, o modelamento numérico necessita das seguintes informações :

- Quais são as equações a derivadas parciais a resolver?
- Quais são as condições de contorno?

Geralmente a escolha da variável de estado e das equações a derivadas parciais é simplesmente uma seleção feita pelo usuário antes da fase de resolução pelo programa de simulação.

Entretanto, qualquer que seja o tipo de problema a resolver, as equações apresentam coeficientes, constantes ou dependentes da variável de estado. Essas informações, assim como as condições de contorno, são tratadas em duas etapas bem distintas :

- A localização de características físicas: corresponde à identificação de diferentes regiões e de diferentes fatias de

fronteiras do domínio. Tais informações, de ordem topológica e que não estabelecem a definição exata de materiais e de condições de contorno, são geralmente introduzidas durante a descrição geométrica.

- A especificação de características físicas: consiste em descrever especificamente as características de materiais e de fontes de cada uma das regiões, assim como o tipo de condições de contorno de cada fronteira. Essas informações podem ser introduzidas fora do descritor geométrico, que torna-se então mais geral, pois independe da parte de simulação. As ligações entre a topologia e as características físicas se fazem então por meio de nomes associados às regiões e fronteiras durante a fase de descrição topológica.

3 - "Discretização" do Domínio

É a passagem do meio contínuo para a sua representação "discretizada". Essa etapa está diretamente ligada ao método utilizado de resolução aproximada das equações a derivadas parciais, já que as etapas precedentes são mais gerais.

Para o MEF, o domínio em estudo deve ser decomposto ou "discretizado" em pequenas regiões chamadas elementos finitos. Essa divisão faz aparecer um certo número de nós (por exemplo, os vértices de um triângulo de primeira ordem), onde serão definidos os graus de liberdade das equações (Fig. II.4).

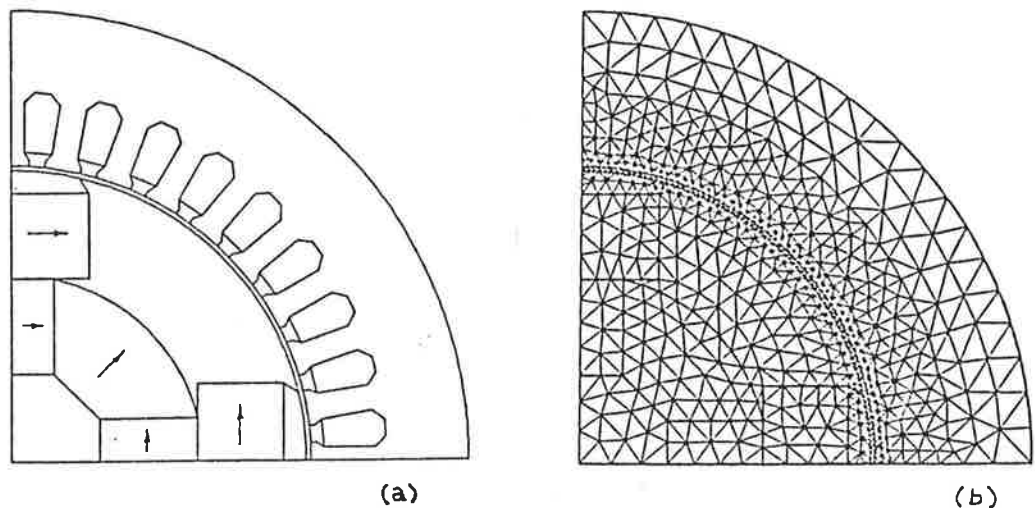


Fig. II.4 - (a) Problema de magnetostática em regime permanente; (b) Discretização em elementos finitos triangulares.

Os procedimentos de "discretização" em elementos finitos bi ou tridimensionais, que correspondem à construção de uma "malha de elementos", subdividem-se em quatro categorias :

- Malhagem manual,
- Malhagem assistida,
- Malhagem automática,
- Malhagem adaptativa,

segundo o grau de automatização.

A malhagem do domínio deve respeitar seus limites e as interfaces entre as diferentes regiões. Os elementos finitos não devem ter formas muito alongadas (por exemplo, triângulos: devem ser o mais próximo possível do equilátero).

Os nós devem ser referenciados por suas coordenadas, enquanto os elementos são caracterizados por seu tipo (triângulo de primeira ou segunda ordem, quadrilátero, tetraedro etc.) e pela lista de seus nós.

2.1.2 - O Módulo de Cálculo ou Processador

Uma vez efetuada a "discretização", o cálculo utilizando o MEF é aplicado.

O processador recebe como entrada a discretização do domínio, as características físicas e as condições de contorno, fornecendo na saída os valores da variável de estado em cada nó da malha.

Os algoritmos de resolução numérica de problemas com equações a derivadas parciais compreendem duas etapas:

- Construção de um sistema de equações algébricas lineares;
- Resolução desse sistema.

As operações são executadas uma só vez no caso de problema linear (Fig. II.5) e em várias iterações em problemas não-lineares (Fig. II.6), ou, ainda, podem ser evolutivas no tempo (Fig. II.7).

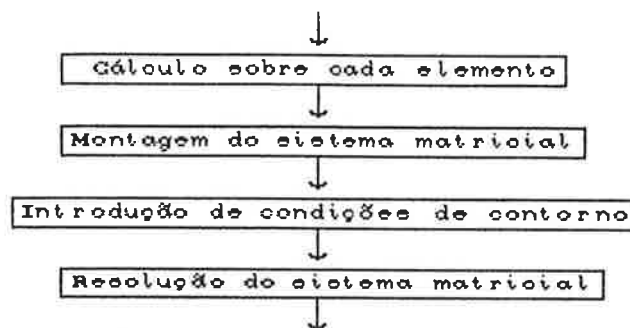


Fig. II.5 - Módulo de cálculo: operações para um problema linear estático.

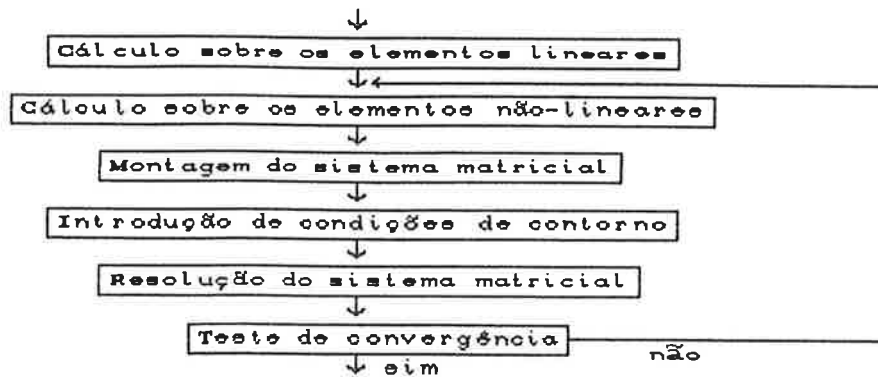


Fig. II.6 - Módulo de cálculo: operações para um problema não-linear estático.

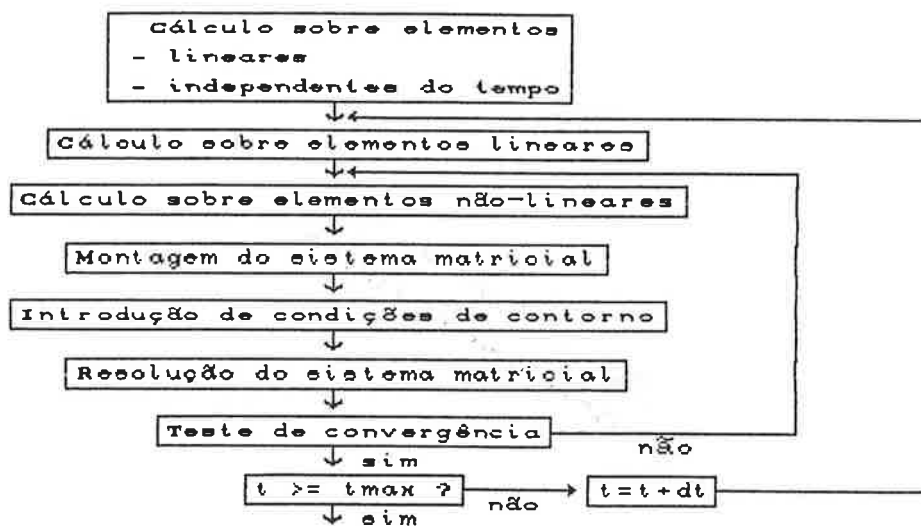


Fig. II.7 - Módulo de cálculo: operações para um problema não-linear dinâmico.

Dos sistemas lineares oriundos do MEF resultam matrizes esparsas (os coeficientes são na sua maior parte nulos). Essa propriedade é interessante pois permite reduzir consideravelmente o tamanho de memória necessário para o armazenamento.

Os principais métodos de resolução de sistemas de equações lineares do tipo $A \cdot x = b$, resultantes de um tratamento por elementos finitos, são os seguintes :

- Métodos diretos :

- 1 - Fatorização de Gauss: aplicável a todas as matrizes

não-singulares (reais ou complexas, simétricas ou não);

2 - Fatorização de Choleski: aplicável a todas as matrizes reais simétricas definidas positivas.

- Métodos iterativos:

1 - Bigradiantes conjugados com précondicionamento: aplicável a todas as matrizes não-singulares;

2 - Gradientes conjugados com précondicionamento: aplicável a todas as matrizes reais simétricas definidas positivas.

2.1.3 - O Pós-processador (Módulo de saída de resultados)

O pré-processador permite descrever o problema que é em seguida resolvido pelo módulo de cálculo. Entretanto, a solução obtida não é diretamente explorável. As funções do pós-processador serão então as seguintes :

- Extração de informações significativas para o engenheiro;
- Apresentação sintética de informações.

1 - Extração de resultados

A simulação numérica de um fenômeno governado por equações a derivadas parciais pode fornecer informações pontuais ou resultantes de uma integral. as fórmulas calculadas dependem às vezes do fenômeno estudado e do modelamento utilizado. No entanto, os procedimentos de cálculo em jogo são sempre os mesmos. Aparecerá um número limitado de operadores de base :

- Operações aritméticas usuais: soma, subtração, multiplicação, divisão;
- Operações vetoriais: produtos escalar e vetorial;
- Operadores de derivação de um campo: div, grad e rot;

- Operadores de integração no espaço: integrais simples, duplas, triplas, de linha, de superfície;
- Operadores de derivação no tempo;
- Operadores de integração no tempo.

O pós-processador poderá ser :

- Especializado: solução que permite explorar todas as particularidades de uma formulação. É geralmente o caso de um processador de cálculo integrado a um software especializado (ex. FLUX2D).

- Geral: corresponde a um pós-processador antes de se adaptar a uma formulação específica, mas capaz de realizar operações aritméticas, integrações e derivações sobre grandezas escalares e vetoriais.

2 - Visualização de Resultados

A informação calculada no pós-processador pode ser um escalar (por exemplo, uma indutância) ou um vetor (indução de um ponto determinado sobre o monitor).

A visualização de tais resultados não representa nenhum problema; eles são simplesmente apresentadas no monitor. Entretanto, quando o número de informações aumenta, torna-se preferível visualizá-las graficamente. Essa apresentação se configura nos seguintes tipos :

- Traçado da variação de uma grandeza escalar ou vetorial ao longo de uma linha (ex.: campo magnético no entreferro de uma máquina elétrica; Fig. II.9);

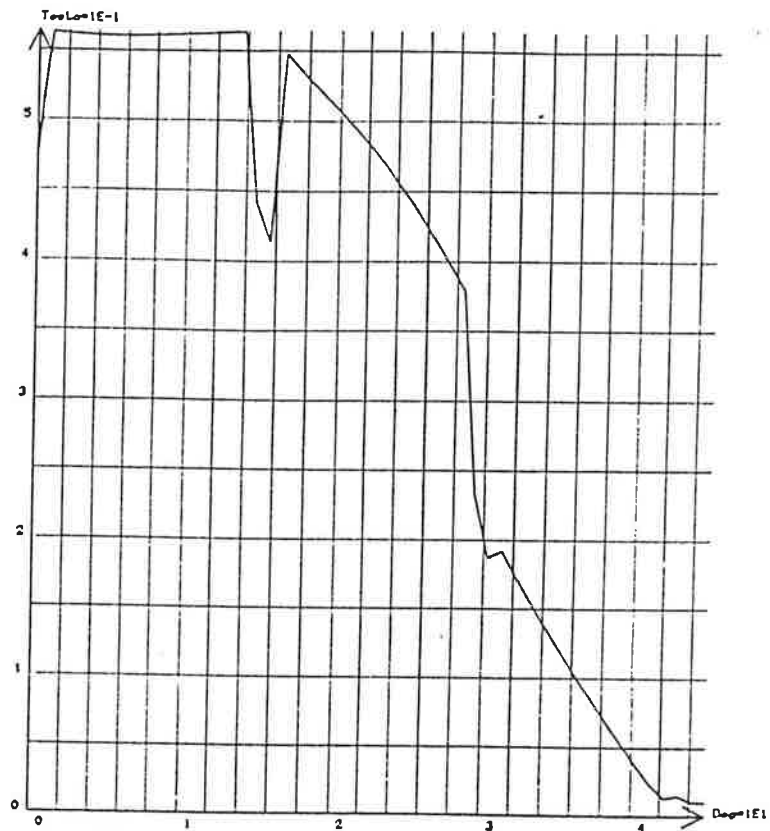


Fig. II.8 - Variação do campo magnético no entreferro de uma máquina elétrica (FLUX2D) [18].

- Em 2D : traçado sobre o domínio de linhas equipotenciais de uma grandeza (ex.: em magnetismo, as equipotenciais do vetor potencial magnético, com componente apenas na direção z, representam as linhas de campo do vetor indução magnética; Fig. II.9);

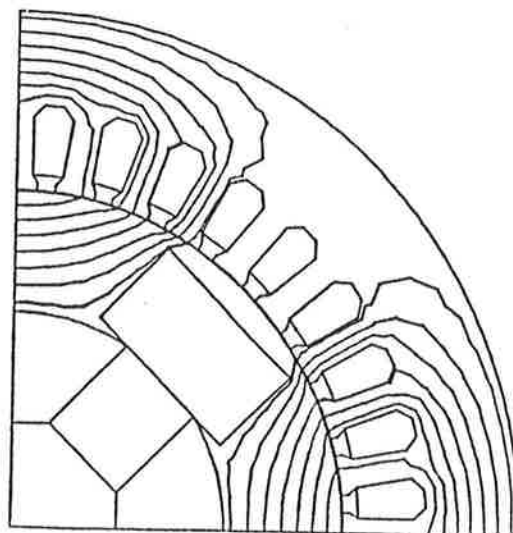


Fig. II.9 - Linhas de campo de uma máquina elétrica

- Em 2D: representação sobre o domínio de valores de uma grandeza numa graduação de cores (ex.: em magnetismo, a indução magnética em cada elemento);

- Em 2D: traçado sobre os nós da malha de uma grade, superposta ao domínio, da projeção de um vetor (ex.: vetor indução magnética).

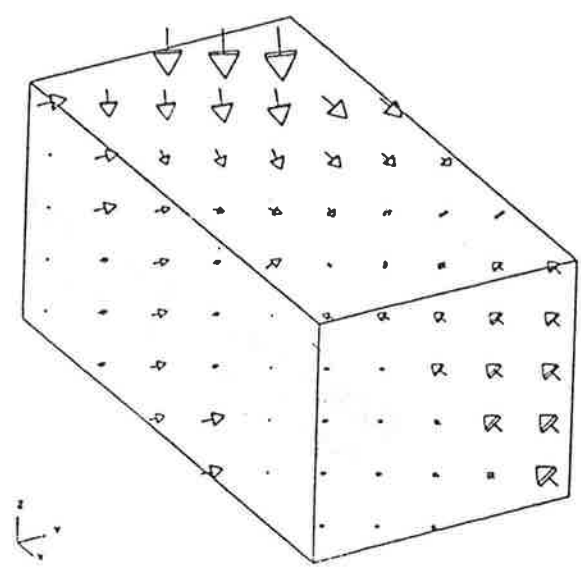


Fig. II.10 - Representação de uma grandeza vetorial.

Quando o fenômeno estudado evolui no tempo, as mesmas técnicas de traçado podem ser empregadas em diferentes instantes. Esses desenhos podem ser visualizados sucessivamente, como fotografias, ou rapidamente, para produzir uma animação.

A evolução dos sistemas CAD é limitada pela eficiência dos sistemas aplicados. As técnicas classicamente utilizadas já atingiram os limites impostos pelo desempenho de computadores.

As expectativas de um projetista que trabalha num ambiente moderno são bem mais sofisticadas atualmente. Algo como um software similar àquele mostrado na Fig. II.11.

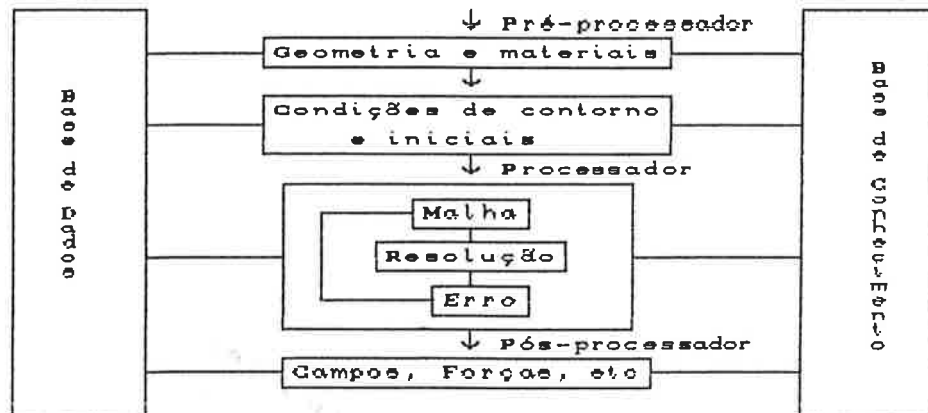


Fig. II.11 - Sistema CAD para Eletromagnetismo [9].

O sistema ilustrado é dividido nos habituais pré e pós-processadores que serão operados interativamente pelo usuário num avançado terminal de Estação de Trabalho.

O módulo de cálculo pode residir na própria Estação de Trabalho para problemas de tamanho modesto, mas para geometrias complicadas pode também estar residente num processador Paralelo ou Vetorial interligado ou num remoto Mainframe num ambiente de processamento distribuído.

A Fig. II.11 mostra um sistema de base de dados e um sistema de base de conhecimento. Estes são conceitos relativamente novos, particularmente o último, enquanto o anterior raramente foi implementado de maneira ótima.

A entrada da unidade de processamento de cálculo

consiste então nos dados do problema (modelo, geometria, propriedades dos materiais, etc) e no modelo matemático (equações de definição, condições de contorno e iniciais). Essas informações são armazenadas no sistema de base de dados e poderiam ter sido criadas pelo usuário no estágio de pré-processamento, ou então com a ajuda de uma base de conhecimento, em que regras pertinentes aos projetos, estabelecidas previamente, são armazenadas.

Como exemplo, pode-se citar as regras de projeto de uma máquina elétrica: é possível relacionar a forma do condutor, ranhuras e o tamanho de entreferros para obter uma faixa de torques. Na verdade poderiam haver vários modelos, previamente definidos, contendo dados geométricos, de materiais e da malha englobando essas regras para montagem de uma parte (rotor, estator etc.) ou da máquina completa, acessível a partir do sistema de base de dados, que pode ser usado como ponto de partida num processo iterativo de projeto heurístico.

Já se pode esperar que o progresso nesses domínios se concretize. Uma nova geração de sistemas está surgindo com os Sistemas Especialistas (*Expert Systems*), que constituem uma alternativa operacional à abordagem algorítmica sistemática desenvolvida nos sistemas CAD nos últimos anos.

No domínio material, a mesma renovação está em curso, uma vez que os computadores de quinta geração são fundados em arquiteturas que aplicam os princípios elaborados no domínio de Inteligência Artificial e sua linguagem é o PROLOG, uma das linguagens mais adaptadas à realização de Sistemas Especialistas.

A primeira característica dos Sistemas Especialistas é de separar explicitamente :

- os dados;
- o "conhecimento";
- as técnicas de resolução do problema.

Para ter acesso a um problema e modificar o método de resolução, é necessário consultar o programa que os contém (e que portanto os torna fixo e os dissimula).

Num Sistema Especialista encontram-se três níveis. Nessa nova estrutura o "programa de resolução" não é mais monolítico. Nele se distinguem claramente dois conjuntos :

- O conhecimento: que materializa o conjunto de regras que o objeto em fase de projeto deve respeitar;

- A estratégia geral de resolução: que materializa o passo, o método e a "heurística" que permite construir a solução, encadeando de maneira adequada as regras contidas na base de conhecimento (Fig. II.12).

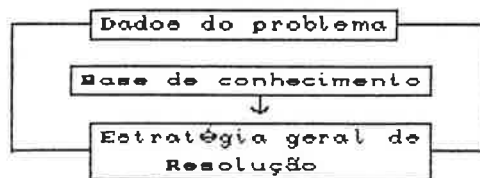


Fig. II.12 - Um programa Especialista

3.1 - A Base de Conhecimento

É constituída por uma base de dados que reagrupa o conjunto de regras que deve respeitar o objeto em fase de concepção. Essas regras podem ser de naturezas bem diferentes :

- Limitações devidas a normas (ex.: altura de eixo de um motor em função da potência);

- Limitações devidas a processos de fabricação (ex.: corte de chapas);

- Limitações devidas a condições de utilização de materiais (ex.: limites mecânicos, limites de isolamento);

- Limitações econômicas (ex.: condições de utilização);

- Limitações de comportamento (ex.: modelo de simulação);
- Regras heurísticas, traduzindo o "know-how" ou a experiência do projetista ou da empresa (ábacos estatísticos, extrapolação a partir de aparelhos de dimensões próximas etc.).

Essas regras estão explicitamente contidas numa base de dados e são portanto independentes de estratégias que as utilizam. Pode-se então consultá-las, modificá-las ou enriquecê-las sem dificuldade e, sobretudo, sem necessidade de modificar programas. Elas constituem o núcleo do sistema CAD que irá se enriquecer pouco a pouco com diversas experiências adquiridas.

3.2 - As Estratégias de Resolução

A segunda característica dos Sistemas Especialistas é de utilizar métodos de resolução não diretamente algorítmicos. O princípio de base consiste em observar que o raciocínio de um projetista procede, de um lado, pela aplicação de algumas regras de lógicas de base (independentes de elementos tratados) e, de outro, seguindo frequentemente uma "idéia diretriz", em torno da qual vão se articular as regras precedentes.

A meta é sempre partir de dados (base de conhecimento) e aplicar um "know-how": de um lado as regras particulares da classe do objeto em fase de concepção (que devem ter sido definidas pelo projetista previamente): "conhecimento declarativo". De outro, a heurística que deve ser seguida para se chegar à solução: "conhecimento procedural".

A estrutura informática de um programa Especialista é, portanto, bem mais elaborada que a de um software usual.

Finalizando, o que se observa atualmente é que o uso de Sistemas de Base de Conhecimento Inteligentes e técnicas de Inteligência Artificial desempenham um importante papel no

desenvolvimento de sistemas CAD direcionados para o projeto e fabricação de dispositivos eletromagnéticos e sobretudo na sua integração a sistemas CIM ("Computer Integrated Manufacturing").

CAPITULO III

O CÁLCULO E APRESENTAÇÃO DE GRANDEZAS LOCAIS E GLOBAIS NUM POS-PROCESSADOR - ASPECTOS TEÓRICOS E COMPUTACIONAIS

1 - MAPEAMENTO DE CAMPO - TRAÇADO DE EQUIPOTENCIAIS

O traçado de linhas equipotenciais é uma das maneiras mais comuns e eficazes em sistemas CAD de simulação de fenômenos eletromagnéticos como instrumento de análise de problemas tratados por métodos numéricos, como é o caso do MEF.

Uma rápida inspeção visual dos resultados obtidos com o traçado de equipotenciais serve, antes de tudo, para verificar se o problema foi corretamente formulado; por exemplo : condições de contorno mal-impostas e correntes introduzidas indevidamente são erros que podem ser rapidamente detectados mediante uma visualização do mapeamento das linhas. Serve, além disso, como análise qualitativa do fenômeno tratado[17].

1.1 - O Vetor Potencial Magnético \vec{A} e a Indução Magnética \vec{B}

Quando se deseja calcular o campo em um domínio onde existam correntes, como é o caso de um circuito magnético, utiliza-se o vetor potencial magnético \vec{A} , que é definido a partir da terceira equação de Maxwell ($\nabla \cdot \vec{B} = 0$), por :

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} \quad (\text{III.1})$$

Em problemas bidimensionais, o vetor \vec{A} tem apenas componente perpendicular ao plano de estudo Oxy. Sendo \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} os vetores unitários ortogonais nas direções Ox, Oy e Oz, tem-se que:

$$\vec{A} = A \vec{k}, \quad \text{e} \quad \vec{B} = B_x \vec{i} + B_y \vec{j}$$

Aplicando a equação (III.1), resulta :

$$\vec{B} = \frac{\partial A}{\partial y} \vec{i} - \frac{\partial A}{\partial x} \vec{j}$$

com $B_x = \frac{\partial A}{\partial y}$ e $B_y = -\frac{\partial A}{\partial x}$

Assim, uma linha de vetor potencial \vec{A} constante é uma linha de campo de \vec{B} . Isso fica claro admitindo-se como exemplo um valor de \vec{A} constante ao longo do eixo x, onde resultam $\frac{\partial A}{\partial x} = 0$ e conseqüentemente, $B_y = -\frac{\partial A}{\partial x} = 0$. No entanto, na direção y, \vec{A} pode variar e $B_x = \frac{\partial A}{\partial y}$ pode ser diferente de zero. Então, uma linha equipotencial do vetor \vec{A} é uma linha de campo.

1.2 - Traçado de Linhas Equipotenciais num Domínio

"Discretizado" em Elementos Finitos

Para se ter uma noção da distribuição de fluxo magnético torna-se necessário o traçado de várias linhas equipotenciais com diferenças de valores de potencial constantes entre as linhas.

Admitindo como exemplo o traçado de 11 linhas, sendo os valores extremos de vetor potencial A_{\min} e A_{\max} , deve-se inicialmente calcular um ΔA , tal que :

$$\Delta A = \frac{(A_{\max} - A_{\min})}{10}$$

traçando-se em seguida 11 linhas equipotenciais com os valores : A_{\min} , $A_{\min} + \Delta A$, $A_{\min} + 2 \cdot \Delta A$, ..., A_{\max} . Uma região de alta concentração de linhas corresponderá a uma zona de indução \vec{B} elevada; e vice-versa para uma região de baixa concentração de linhas.

Para efetuar o traçado de equipotenciais num domínio

bidimensional, "discretizado" em elementos triangulares de primeira ordem, utilizam-se interpolações lineares, nas arestas de cada triângulo, do potencial em cada vértice deste, potenciais aqueles previamente determinados, oriundos da solução do sistema de equações originado a partir da aplicação do MEF ao domínio. Este procedimento é possível graças à continuidade da função potencial.

A figura III.1 mostra, como exemplo do traçado de equipotenciais, o traçado da linha de $A = 4 \cdot 10^{-2}$ Wb/m.

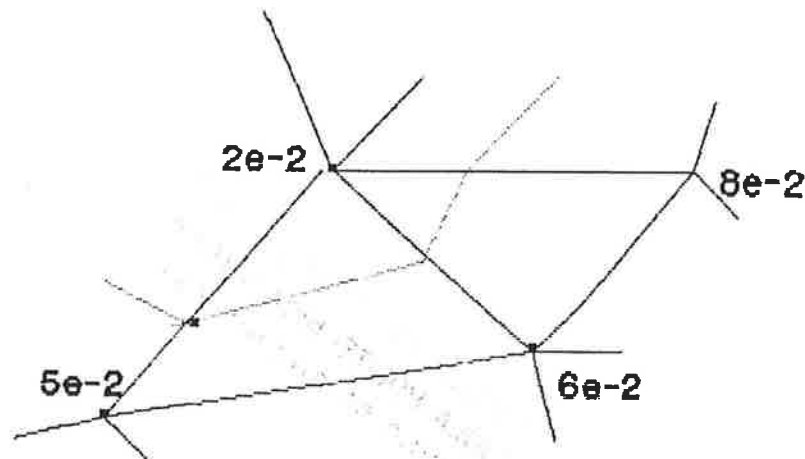


Fig. III.1 -Traçado da linha de $A = 4 \cdot 10^{-2}$ Wb/m.

2 - CALCULO DA INDUÇÃO MAGNÉTICA - COLORAÇÃO DOS ELEMENTOS

Reportando-se ao elemento triangular genérico de um domínio discretizado (Fig. III.2) e sendo A_i , A_j e A_k os valores de vetor potencial nos vértices i , j e k do referido elemento, o potencial num ponto P genérico no interior deste pode ser calculado por uma interpolação linear do tipo :

$$A(x,y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y ,$$

onde os coeficientes α_1 , α_2 e α_3 são funções de A_i , A_j e A_k .

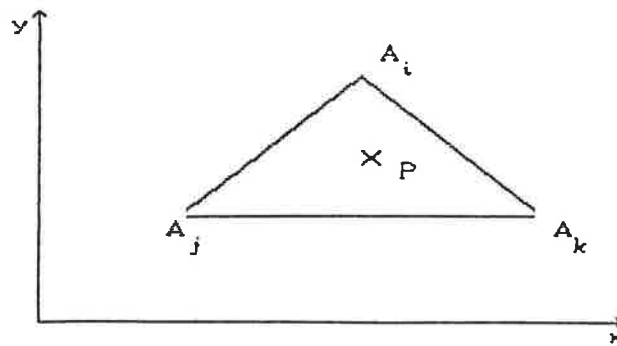


Fig. III.2 - Elemento triangular de 1^a ordem.

Então, expressando-se $A(x,y)$ em função de A_i , A_j e A_k , resulta :

$$A(x,y) = N_i A_i + N_j A_j + N_k A_k$$

onde N_i , N_j e N_k são denominadas funções de forma do elemento, definidas por :

$$\begin{aligned} N_i &= \frac{1}{2\Delta} (a_i + b_i x + c_i y) \\ N_j &= \frac{1}{2\Delta} (a_j + b_j x + c_j y) \\ N_k &= \frac{1}{2\Delta} (a_k + b_k x + c_k y) , \end{aligned}$$

onde Δ é a seção do elemento e os coeficientes a , b e c são funções das coordenadas (x,y) dos vértices i , j e k (para o cálculo desses coeficientes, vide [1]).

Verifica-se então que o vetor potencial magnético no interior do elemento varia linearmente, o que implica continuidade desta distribuição na fronteira entre elementos (propriedade da função potencial).

Lembrando que $\vec{B} = \text{rot } \vec{A}$, pode-se escrever cada componente de \vec{B} como :

$$B_x = \frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^2 c_i \cdot A_i \qquad B_y = -\frac{1}{2\Delta} \sum_{i=1}^2 b_i \cdot A_i$$

$$\text{com } \|\vec{B}\| = \sqrt{B_x^2 + B_y^2} ,$$

o que resulta em um valor de \vec{B} constante no interior do elemento.

Calculados os valores de \vec{B} para todos os triângulos do domínio, uma maneira eficaz de se analisar os resultados obtidos

(por exemplo, o nível de saturação de um núcleo ferromagnético) é através da coloração desses elementos em função da intensidade de \vec{B} em seu interior.

No caso de se dispor de um monitor policromático de 16 cores, por exemplo, tomam-se as induções B_{\max} e B_{\min} e determina-se:

$$\Delta B = \frac{(B_{\max} - B_{\min})}{15}$$

Então associa-se a cor 1 aos elementos cujo valor de \vec{B} se situa no intervalo $[B_{\min}, B_{\min} + \Delta B]$, cor 2 para $B \in]B_{\min} + \Delta B, B_{\min} + 2 \cdot \Delta B]$, ..., e assim sucessivamente até a cor 16 para elementos com $B \in]B_{\min} + 15 \cdot \Delta B, B_{\max}]$.

3 - FLUXO MAGNÉTICO ATRAVÉS DE UMA SUPERFÍCIE

Em problemas bidimensionais pode-se atribuir ao vetor potencial \vec{A} um sentido físico de grande importância [17].

O fluxo magnético ϕ , através de uma superfície S , é dado pela integração :

$$\phi = \oint \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (\text{III.2})$$

que num problema bidimensional é dado por unidade de comprimento (Wb/m), como segue :

$$\frac{\phi}{L} = \oint \vec{B} \cdot d\vec{l},$$

sendo L a profundidade da estrutura estudada.

Observando-se, como exemplo, a Figura III.3, vê-se que a superfície S no plano Oxy é aquela através da qual será calculado o fluxo. O vetor potencial magnético em todos os pontos da superfície tem a direção Oz . Considerando que a indução

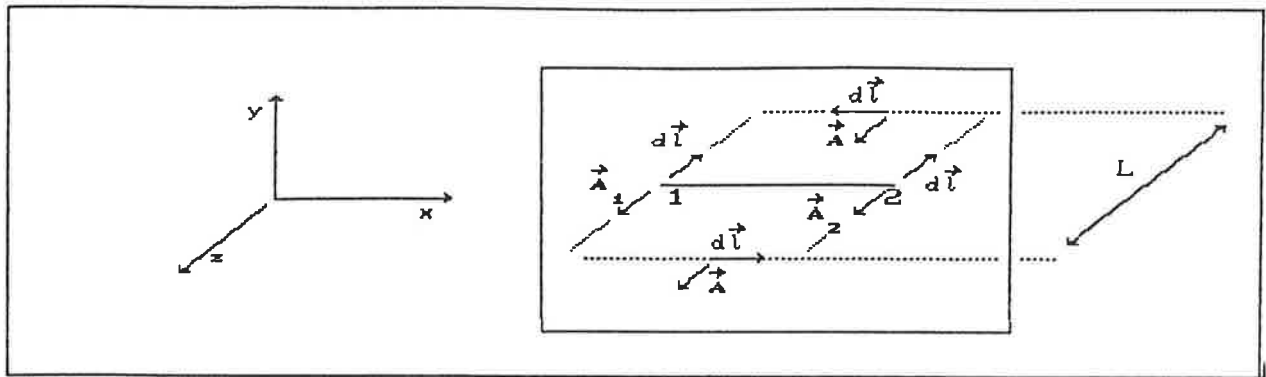


Fig. III.3 - Vetor potencial \vec{A} num domínio 2D.

é relacionada a \vec{A} por (III.1), tem-se que:

$$\oint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \oint_S \text{rot } \vec{A} \cdot d\vec{S}$$

Aplicando o teorema de Stokes à expressão acima, resulta:

$$\phi = \oint_{l(S)} \vec{A} \cdot d\vec{l}$$

Calculando-se então a circulação de \vec{A} ao longo de $l(S)$, nota-se que nos trechos onde \vec{A} é perpendicular a $d\vec{l}$ a circulação é nula. Nos trechos restantes, lembrando que em um domínio bidimensional \vec{A} é constante ao longo dos trechos, resulta :

$$\phi = A_1 \cdot L - A_2 \cdot L \quad (\text{III.3})$$

Pode-se concluir então que a diferença entre os potenciais A_1 e A_2 fornece o fluxo magnético por unidade de comprimento (Wb/m), pois :

$$A_1 - A_2 = \frac{\phi}{L}$$

4 - TRAÇADO DE GRAFICOS DE GRANDEZAS DE INTERESSE

Uma vez resolvido o problema de determinação do vetor potencial magnético em todo o domínio analisado pelo MEF,

interessa então obter variações de grandezas em certas regiões definidas através de linhas, tais como induções magnéticas. Nesta etapa será apresentado um gráfico em escala mostrando a variação da grandeza de interesse em função da posição na linha escolhida.

5 - ENERGIA MAGNÉTICA ARMAZENADA

A expressão da energia associada a uma indução magnética estática \vec{B} , admitindo-se linearidade do sistema considerado, é dada por :

$$W_{\text{mag}} = \frac{1}{2} \nu B^2 \cdot \text{volume (J)} ,$$

onde ν é a relutividade do meio. Para um domínio bidimensional "discretizado" em elementos finitos de primeira ordem, a indução \vec{B} resulta constante no interior de cada elemento, podendo-se então aplicar a expressão acima para todos os elementos do domínio, e a energia total será obtida através do somatório :

$$W_T = L \cdot \sum_{i=1}^{n^e} \frac{1}{2} \cdot \nu_i \cdot B_i^2 \cdot \Delta_i$$

onde L é a profundidade da estrutura considerada; n^e , o número total de elementos do domínio "discretizado"; ν_i , B_i , e Δ_i , respectivamente a relutividade, indução e seção de cada elemento da malha.

6 - CÁLCULO DE INDUTÂNCIAS

6.1 - Cálculo pelo Fluxo Magnético Concatenado

A indutância própria de uma bobina é definida como :

$$L = N \frac{\phi}{I} \quad (\text{III.4})$$

sendo N o número efetivo de espiras da bobina, ϕ , o fluxo magnético total concatenado com ela e I , a corrente circulando pela mesma, que produz o fluxo ϕ .

Quando há saturação dos materiais ferromagnéticos, a proporcionalidade entre ϕ e I deixará de existir, porém a definição de indutância continuará idêntica. Com essa perda de proporcionalidade, a indutância variará com I e portanto será função desta.

6.1.1 - Cálculo das Reatâncias segundo os Eixos Direto e em Quadratura em Máquinas Síncronas (x_d e x_q)

De acordo com a definição de indutância síncrona de máquinas síncronas segundo o eixo direto, L_d [20], esta é tal que, multiplicada pela corrente de uma das fases do enrolamento, fornece o fluxo total concatenado com essa fase, segundo as seguintes condições :

- a) Rotor girando sob rotação síncrona;
- b) Corrente de campo nula;
- c) Induzido alimentado com correntes trifásicas de seqüência positiva, com uma das fases com seu valor máximo (p. ex., $i_a = I_{\max}$ e $i_b = i_c = -I_{\max}/2$) e seu eixo alinhado com o ED.

De maneira análoga define-se a indutância segundo o eixo em quadratura, L_q .

O procedimento para o cálculo das reatâncias x_d e x_q é então o seguinte :

1 - Resolução dos circuitos magnéticos segundo ED e EQ pelo MEF; isso é conseguido impondo-se corrente nas fases do induzido de modo que o pico de f.m.m. resultante fique alinhado ora com o ED, ora com o EQ;

2 - Cálculo do fluxo concatenado com a fase cuja corrente esteja com seu valor máximo e com seu eixo alinhado com o ED ou EQ; esse fluxo é obtido pela expressão III.4, onde os potenciais

A_1 e A_2 são aqueles indicados nas Figuras III.4.a e b abaixo.

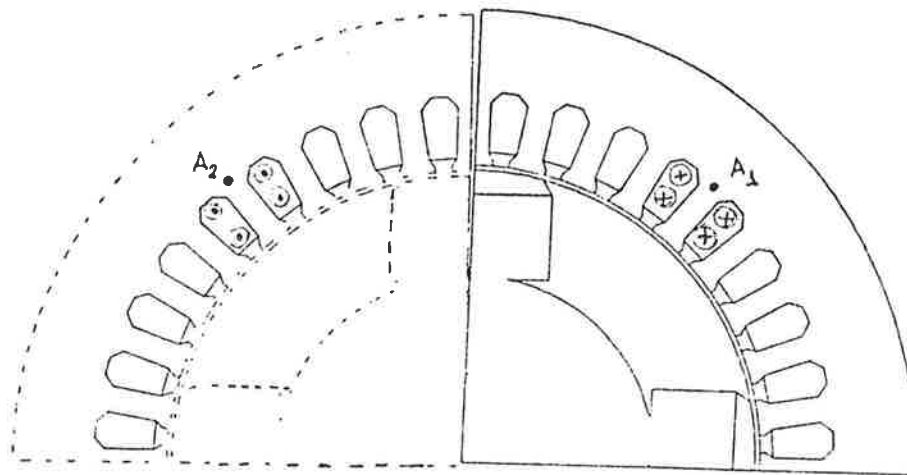


Fig. III.4.a - Potenciais A_1 e A_2 para o ED.

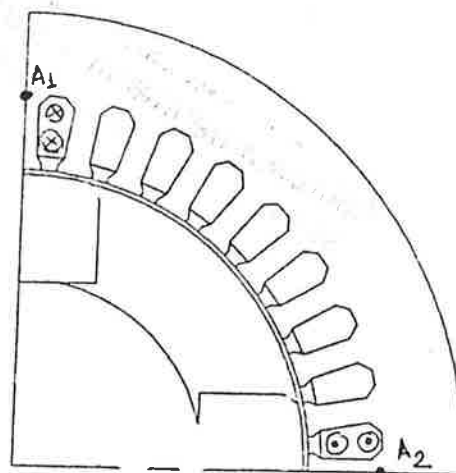


Fig. III.4.b - Potenciais A_1 e A_2 para o EQ.

De acordo com a antiperiodicidade do domínio [17,8], não é necessário determinar o valor de A_2 , pois sabe-se que ele deve ser tal que : $A_2 = -A_1$.

Assim sendo, resulta:

$$A_{2(ED)} = -A_{1(ED)} \quad \text{e} \quad A_{2(EQ)} = -A_{1(EQ)}$$

e os fluxos no ED e EQ ficam:

$$\phi_{(ED)} = 2 \cdot A_{1(ED)} \cdot L \quad \text{e} \quad \phi_{(EQ)} = 2 \cdot A_{1(EQ)} \cdot L$$

3 - Por fim calculam-se as reatâncias x_d e x_q por :

$$x_d = (2\pi f) N_f \frac{\phi_{(ED)}}{I_{\max}} \qquad x_q = (2\pi f) N_f \frac{\phi_{(EQ)}}{I_{\max}}$$

onde f é a frequência das correntes trifásicas, N_f , o número de espiras efetivas por fase, e I_{\max} , a corrente máxima em cada fase.

6.2 - Cálculo pela Energia Magnética

Através de considerações de energia é possível calcular a indutância, para problemas em que o dispositivo em estudo é do tipo simplesmente excitado, pela expressão [11]:

$$L = \frac{2 \cdot W_{\text{mag}}}{I^2} \qquad \text{(III.5)}$$

sendo I a corrente que cria o fluxo magnético.

Na expressão (III.5) está implícita uma hipótese de linearidade, uma vez que a indutância será função do ponto de operação do dispositivo.

6.2.1 - Cálculo das Reatâncias segundo os Eixos Direto e Quadratura em Máquinas Síncronas (x_d e x_q)

Outra maneira utilizada para o cálculo das reatâncias x_d e x_q a partir do MEF é através da energia magnética. O procedimento a ser adotado é o seguinte :

- 1 - Resolução dos circuitos magnéticos segundo os eixos D e Q pelo MEF;
- 2 - Cálculo das energias magnéticas nas duas condições acima;

3 - Cálculo das indutâncias síncronas, L_d e L_q , por :

$$L_d = \frac{\Sigma \cdot W_{\text{mag}(ED)}}{I_d} \qquad L_q = \frac{\Sigma \cdot W_{\text{mag}(EQ)}}{I_q}$$

onde I_d e I_q são as correntes segundo ED e EQ. Essas correntes são calculadas através das Transformações de Park [20] e resultam, respectivamente, para o circuito magnético segundo ED :

$$I_d = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} I_{\text{max}} \qquad \text{e} \qquad I_q = 0$$

e para o circuito magnético segundo EQ :

$$I_q = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} I_{\text{max}} \qquad \text{e} \qquad I_d = 0$$

4 - Por fim, calculam-se as reatâncias por :

$$x_d = (2\pi f) L_d \qquad \text{e} \qquad x_q = (2\pi f) L_q$$

7 - CÁLCULO DE FORÇAS E TORQUES ELETROMAGNÉTICOS

São três os métodos conhecidos :

- 1) Variação da Energia Magnética
- 2) Tensor de Maxwell
- 3) Trabalho Virtual (Derivada do Jacobiano local).

7.1 - Variação da Energia Magnética

Uma das maneiras de obter o valor da força ou torque agindo sobre a parte móvel de um dispositivo é calcular a variação de energia magnética.

Segundo um princípio básico de mecânica, a energia ΔW que deve ser fornecida a um corpo é igual à força aplicada ao mesmo multiplicada pelo deslocamento Δd durante o qual esta força foi aplicada, ou seja:

$$\Delta W = F \cdot \Delta d$$

No contexto do MEF a energia magnética do sistema por unidade de comprimento, considerando tratamento bidimensional, pode ser obtida através do somatório:

$$W = \sum_{i=1}^{n_e} \frac{\nu}{2} B^2 \Delta_e \quad (\text{J/m})$$

onde,

B : indução magnética em cada elemento do domínio;

Δ_e : seção de cada elemento;

ν : relutividade de cada elemento;

n_e : número total de elementos do domínio.

A indução B é diretamente obtida através das expressões

[3] :

$$B_x = \frac{1}{2\Delta_e} \sum_{i=1}^2 c_i \cdot A_i \quad B_y = -\frac{1}{2\Delta_e} \sum_{i=1}^2 b_i \cdot A_i$$

$$B^2 = B_x^2 + B_y^2$$

$$b_i = y_j - y_k \quad c_i = x_k - x_j$$

onde o vetor potencial magnético A nos nós é obtido diretamente da aplicação do MEF. Para calcular a força ou torque relativos a um

deslocamento d , linear, ou θ , angular, de uma peça móvel da estrutura, obtém-se W_1 e W_2 e calcula-se a força por :

$$F = \frac{W_2 - W_1}{d} \quad \text{CN/mD}$$

ou o torque por:

$$T = \frac{W_2 - W_1}{\theta} \quad \text{CN. m/mD}$$

segundo a variação de energia sofrida pela peça. Para tanto, serão necessárias então duas aplicações consecutivas do MEF para as duas posições distintas.

Este método, entretanto, sofre a grande desvantagem de oferecer imprecisão, pois para a obtenção de soluções confiáveis é necessário que o deslocamento d ou θ seja suficientemente pequeno. Assim, W_1 e W_2 serão muito próximos, o que incorrerá em erros numéricos que se acumulam no cálculo final da força ou torque.

Outro problema é a escolha adequada do deslocamento d ou θ . Não há uma regra geral a seguir, e, no caso de deslocamentos angulares para a determinação do torque em máquinas elétricas rotativas, deve-se ainda levar em conta a relação entre esse deslocamento e o número de pólos da máquina.

7.2 - Tensor de Maxwell

7.2.1 - Aspectos Teóricos

A força exercida sobre a parte móvel de um circuito magnético pode ser calculada através da integração do Tensor de Maxwell por:

$$\vec{F} = \int_S \mathbf{T} \cdot d\vec{S},$$

onde \mathbf{T} vale:

$$\mathbf{T} = \mu_0 \left[c \vec{n} \cdot \vec{H} - \frac{1}{2} \vec{n} \cdot \vec{H} \right] \quad [11]$$

O Tensor de Maxwell é um simples artifício matemático de cálculo, e enquanto tal nada traz sob o plano fundamental do Eletromagnetismo.

No entanto, sob o plano prático ele permite uma simplificação nos cálculos. De fato, a marcha de cálculos com o auxílio do Tensor de Maxwell resulta em transformar uma grandeza vetorial na divergência de outros vetores. No caso tridimensional, cada componente do vetor inicial é assim obtido a partir de três outros vetores, sendo no total $3 \times 3 = 9$ componentes. Esses componentes formam o tensor. Isso permite então aplicar a transformação de Green-Ostrogradsky e em seguida transformar cálculos de volume (integrais triplas) em simples integrais de superfície. Assim sendo, é evidente que não existe "um" tensor, mas vários tensores que correspondem ao tensor inicial. A cada expressão de força corresponderá um vetor associado.

Um exemplo ilustrativo é a força de Laplace:

$$\vec{F} = \iiint_V \vec{J} \wedge \vec{B} \, dV \quad (III.6)$$

Pode-se, sobre um condutor dado, calcular a força resultante de outra forma que não seja por uma integral de volume como a expressão (III.6). Essa equação pode ser transformada em:

$$d\vec{F} = \vec{j} \wedge \vec{B} = \mu c \nabla \wedge \vec{H} \wedge \vec{H} \quad (\text{III.7})$$

(utilizando as equações de Maxwell para baixas frequências).

Obtém-se então:

$$d\vec{F} = \mu \cdot (\vec{H} \wedge \nabla) \cdot \vec{H} - \mu \nabla \left(\frac{\vec{H} \cdot \vec{H}}{2} \right) \quad (\text{III.8})$$

por simples transformação matemática.

Explicitando em notações clássicas, obtém-se :

$$\mu \cdot (\vec{H} \cdot \nabla) \cdot \vec{H} = \mu \left(H_x \frac{\partial}{\partial x} + H_y \frac{\partial}{\partial y} + H_z \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot \vec{H} \quad (\text{III.9})$$

$$= \mu \begin{bmatrix} H_x \frac{\partial H_x}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_x}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_x}{\partial z} \\ H_x \frac{\partial H_y}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_y}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_y}{\partial z} \\ H_x \frac{\partial H_z}{\partial x} + H_y \frac{\partial H_z}{\partial y} + H_z \frac{\partial H_z}{\partial z} \end{bmatrix} \quad (\text{III.10})$$

Considerando que $\nabla \cdot \vec{B} = 0$:

$$= \mu \begin{bmatrix} \frac{\partial H_x}{\partial x} H_x + \frac{\partial H_x}{\partial y} H_y + \frac{\partial H_x}{\partial z} H_z \\ \frac{\partial H_y}{\partial x} H_x + \frac{\partial H_y}{\partial y} H_y + \frac{\partial H_y}{\partial z} H_z \\ \frac{\partial H_z}{\partial x} H_x + \frac{\partial H_z}{\partial y} H_y + \frac{\partial H_z}{\partial z} H_z \end{bmatrix} \quad (\text{III.11})$$

então cada um dos componentes dF_i de $d\vec{F}$ pode ser escrito:

$$dF_i = \mu \sum_{j=x,y,z} \frac{\partial}{\partial j} \left(H_i \cdot H_j - \delta_{ij} \frac{H^2}{2} \right) \quad (\text{III.12})$$

onde δ_{ij} é o símbolo de Kronecker e vale:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{para } i=j \\ 0, & \text{para } i \neq j \end{cases}$$

Nas transformações acima impôs-se $\vec{B} = \mu \vec{H}$, admitindo portanto que o meio é linear.

Para chegar à expressão que nos interessa conservaremos μ e não μ_0 , pois este último é muito restritivo. As fórmulas precedentes não podem mais, entretanto, ser escritas para um material qualquer, em particular não-linear ou não-homogêneo. Se escrevermos:

$$T_{ij} = \mu \left[H_i H_j - \delta_{ij} \frac{H^2}{2} \right] \quad (\text{III.13})$$

então dF_i pode ser escrito como a divergência do vetor \vec{T}_i , composto de T_{ix}, T_{iy}, T_{iz} como segue:

$$dF_i = \nabla \cdot \vec{T}_i, \quad \vec{T}_i = \begin{bmatrix} T_{ix} \\ T_{iy} \\ T_{iz} \end{bmatrix} \quad (\text{III.14})$$

Chama-se tensor à grandeza dada pela matriz de nove elementos T_{ij} :

$$T = \begin{bmatrix} \vec{T}_x \\ \vec{T}_y \\ \vec{T}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{xx} & T_{xy} & T_{xz} \\ T_{yx} & T_{yy} & T_{yz} \\ T_{zx} & T_{zy} & T_{zz} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \vec{i} \\ \vec{j} \\ \vec{k} \end{bmatrix} \quad (\text{III.15})$$

onde \vec{i} , \vec{j} e \vec{k} são os vetores unitários ortogonais associados aos eixos Ox , Oy e Oz , e se escreve:

$$d\vec{F} = \nabla \cdot T \quad (\text{III.16})$$

Portanto, o vetor força é igual à divergência do tensor T .

Sendo então \vec{F} a força global sobre um corpo rígido dada por:

$$\vec{F} = \iiint_V d\vec{F} \cdot dV$$

pode-se escrever cada uma de suas componentes como:

$$F_i = \iiint_V dF_i \cdot dV = \iiint_V \nabla \cdot \vec{T}_i \cdot dV$$

e pelo teorema da divergência resulta que:

$$\oint_S \vec{T}_i \cdot \vec{u}_n \cdot dS \quad (\text{III.17})$$

onde S é uma superfície fechada envolvendo o objeto sobre o qual se deseja determinar a força, dS uma parcela elementar da superfície S e \vec{u}_n um vetor unitário normal ao elemento dS .

A passagem de uma integral de volume a uma integral de superfície, obtida pela transformação de cada um dos componentes da grandeza em uma divergência, é essencial na prática. Para tanto a integração deve ser feita sobre uma superfície situada em um meio linear, geralmente o ar.

Em outros termos, pode-se deduzir a força sobre um objeto por observação da modificação do campo magnético sob um contorno englobante, contorno este que pode estar tão distante do objeto quanto se desejar.

Das expressões (III.6) e (III.7) se deduz que os componentes do Tensor de Maxwell, que permitem obter a força por uma integral de superfície, têm dimensão de pressões. Além disso, poder-se-ia considerá-los como tensões agindo nas direções x , y e z . Entretanto, este raciocínio funciona apenas como uma analogia. Esses termos não possuem nenhuma interpretação física. De fato, o conceito original de tensor [16] (como o próprio nome diz) é a condição de pressão ou tensão dentro de um corpo sólido. A

expressão (III.15) contém nove termos que representam uma distribuição de tensões, a priori fictícias. A única afirmação que se pode fazer é que a força global sobre um objeto cercado de ar pode ser calculada por integração de suas tensões.

Em resumo, as constantes que constituem o Tensor de Maxwell:

- são dimensionalmente homogêneas a pressões;
- são fictícias e não têm a priori nenhuma existência real (ex.: ar);
- não representam nada; apenas sua integral sobre uma superfície fechada possui um significado;
- a força global obtida por integração resulta então da variação do Tensor de Maxwell entre esses diversos pontos; em particular, pode-se acrescentar, por exemplo, uma constante a cada termo do tensor, modificando assim as "tensões fictícias representadas", sem modificar o resultado global da força.

7.2.2 - Implementação Computacional

O cálculo de forças através do Tensor de Maxwell tem sido modernamente utilizado em sistemas informáticos destinados à determinação de campos magnéticos por métodos numéricos. De fato, para aplicar esse conceito, é necessário que o campo magnético seja conhecido e tais sistemas permitem a sua obtenção. Esta é a razão provável pela qual o Tensor de Maxwell é atualmente tão utilizado e, por outro lado, pela qual raramente o tenha sido quando a obtenção de campos era difícil [17].

Para a aplicação prática do método, supondo um corpo que ocupe o volume V , é necessário o conhecimento do campo magnético \vec{H}

na superfície S que envolve o volume. É também necessário que essa superfície esteja situada no ar ou em um meio onde $\mu = \mu_0$.

Seja $d\vec{S}$ uma parcela elementar da superfície S , orientada para o exterior do corpo ($d\vec{S} = dS \cdot \vec{u}_n$), e aplicando a expressão (III.17), pode-se escrever:

$$dF_i = \vec{T}_i \cdot \vec{u}_n \cdot dS$$

onde, para um problema bidimensional,

$$\vec{T}_i = \begin{bmatrix} T_{ix} \\ T_{iy} \end{bmatrix},$$

então,

$$\vec{T}_x = \begin{bmatrix} T_{xx} \\ T_{xy} \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \vec{T}_y = \begin{bmatrix} T_{yx} \\ T_{yy} \end{bmatrix}$$

e as componentes de $d\vec{F}$ resultam:

$$dF_x = \vec{T}_x \cdot \vec{u}_n \cdot dS \quad \text{e} \quad dF_y = \vec{T}_y \cdot \vec{u}_n \cdot dS,$$

onde \vec{u}_n é o vetor unitário normal à superfície elementar dS .

Aplicando a expressão (III.13):

$$T_{xx} = \mu_0 \cdot \left(H_x \cdot H_x - \frac{H^2}{2} \right) = \frac{\mu_0}{2} \cdot (H_x^2 - H_y^2)$$

$$T_{yy} = \mu_0 \cdot \left(H_y \cdot H_y - \frac{H^2}{2} \right) = \frac{\mu_0}{2} \cdot (H_y^2 - H_x^2)$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \mu_0 \cdot H_x \cdot H_y$$

Escrevendo em função da indução magnética $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$,

$$T_{xx} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot (B_x^2 - B_y^2) \quad \text{(III.18)}$$

$$T_{yy} = \frac{1}{2\mu_0} \cdot (B_y^2 - B_x^2) \quad \text{(III.19)}$$

$$T_{xy} = T_{yx} = \frac{1}{\mu} \cdot B_x \cdot B_y \quad \text{(III.20)}$$

Expressando o vetor unitário \vec{u}_n em coordenadas globais, resulta:

$$\vec{u}_n = \cos \theta \cdot \vec{i} + \sin \theta \cdot \vec{j}$$

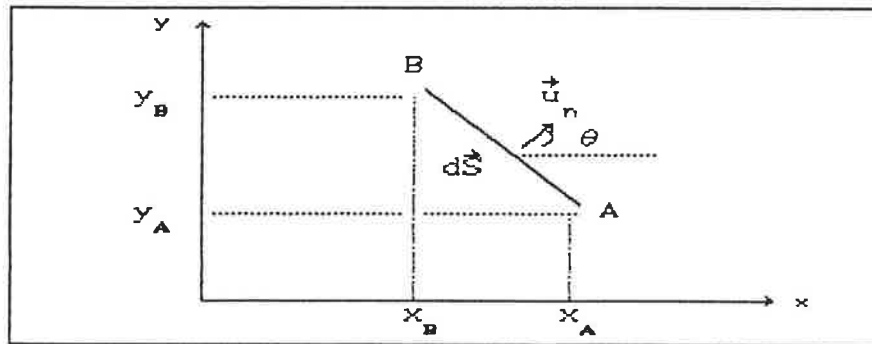


Fig. III.5 - Representação da superfície elementar $d\vec{S}$ no sistema de coordenadas globais Oxy.

Escrevendo dS como:

$$dS = dl \cdot L,$$

onde L é o comprimento total da superfície considerada na direção ortogonal ao plano Oxy e o segmento dl , uma parcela elementar de um contorno l de integração. Então,

$$\cos \theta = \frac{(y_B - y_A)}{dl} \quad \text{(III.22)}$$

$$\sin \theta = \frac{(x_A - x_B)}{dl} \quad \text{(III.23)}$$

Das equações (III.18) a (III.23) resultam as expressões para os componentes de $d\vec{F}$ por unidade de comprimento, como segue:

$$dF_x = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (B_x^2 - B_y^2) \cdot (y_B - y_A) + B_x \cdot B_y \cdot (x_A - x_B) \right] \quad \text{(III.24)}$$

$$dF_y = \frac{1}{\mu_0} \cdot \left[\frac{1}{2} \cdot (B_y^2 - B_x^2) \cdot (x_A - x_B) + B_x \cdot B_y \cdot (y_B - y_A) \right] \quad (\text{III.25})$$

O torque eletromagnético pode ser obtido por um simples produto vetorial:

$$\vec{T} = \oint_S | \vec{r} \wedge d\vec{F} | = L \cdot \oint_l | \vec{r} \wedge d\vec{F} |$$

para modelamento bidimensional, onde l é o contorno envolvendo o objeto, e

$$\vec{r} = x_r \cdot \vec{i} + y_r \cdot \vec{j}$$

é a distância do ponto de aplicação da força ao eixo em relação ao qual se deseja o torque. Então,

$$d\vec{T} = (dF_y \cdot x_r - dF_x \cdot y_r) \vec{k} \quad (\text{III.26})$$

A força e o torque globais de origem eletromagnética agindo em um corpo rígido em um problema analisado pelo MEF podem então ser obtidos via Tensor de Maxwell através dos seguintes passos [4]:

1. Escolha de uma superfície arbitrária S , situada no ar (ou outro meio equivalente em que $\mu = \mu_0$), envolvendo todo o corpo móvel e somente ele (Fig. III.6). Para uma formulação bidimensional, isso se reduz à escolha de um contorno fechado l ;
2. Integração da força por:

$$F_x = \int dF_x \quad \text{e} \quad F_y = \int dF_y$$

com dF_x e dF_y dadas por (III.24) e (III.25);

3. Integração do torque por:

$$\vec{T} = \int d\vec{T}$$

com $d\vec{T}$ dado por (III.26).

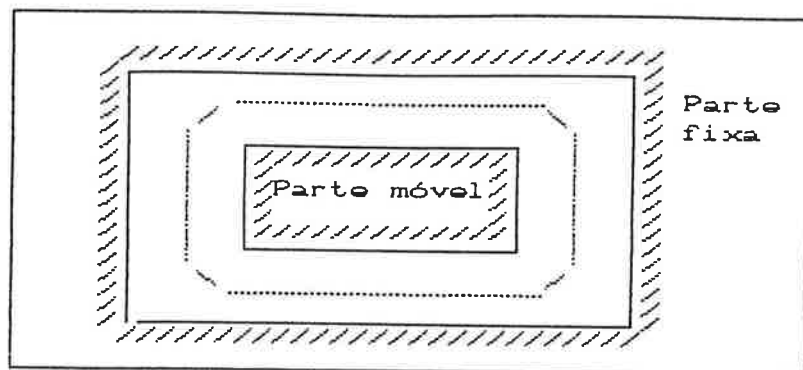


Fig. III.6 - Escolha de uma superfície arbitrária de integração para a aplicação do Tensor de Maxwell [4].

O método do Tensor de Maxwell apresenta as seguintes vantagens:

1. Apenas um cálculo de campo é necessário, para problemas lineares ou não-lineares;
2. Somente uma integral de superfície é necessária;
3. A escolha da superfície S é arbitrária, uma vez que intercepta apenas um meio, no caso o ar.

Esta última condição, entretanto, só é válida quando se trata de cálculos analíticos. Quando a determinação dos campos é proveniente de métodos numéricos, como é o caso do MEF, essa independência de resultado relativa à escolha de S desaparece. Por exemplo, no caso da Fig. III.7 [4], quando se utiliza o MEF para o cálculo de campos com elementos triangulares de primeira ordem, obtém-se uma indução \vec{B} constante no interior do elemento, quando na verdade ela varia.

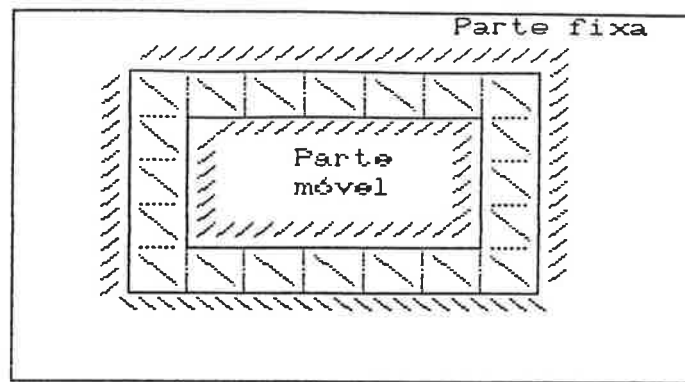


Fig. III.7 - Superfície de integração para uma malha de elementos triangulares de primeira ordem.

No contexto dos Elementos Finitos, a escolha ótima de S depende do tipo do elemento. Para elementos de primeira ordem, o melhor resultado é obtido quando S intercepta os triângulos no ponto médio das arestas [4].

Uma outra dificuldade pode surgir da multiplicidade de cruzamentos topológicos em alguns elementos, sobretudo em problemas tridimensionais, que implicam uma mesma multiplicidade de algoritmos de tratamento (Fig.III.8).

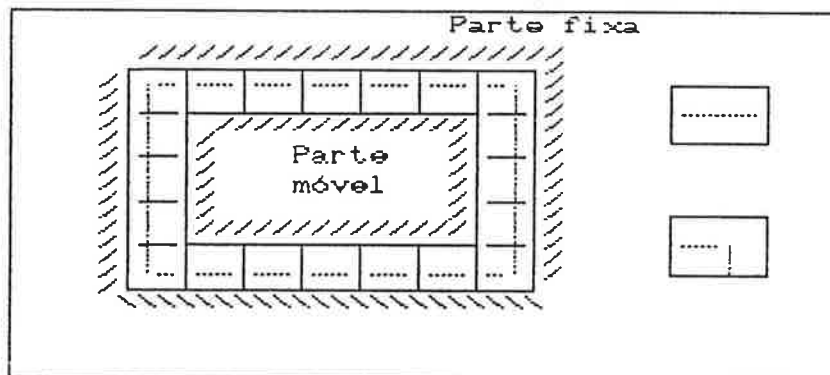


Fig. III.8 - Superfícies de integração para malhas de quadriláteros: dois algoritmos [4].

Na verdade, essas desvantagens são pouco representativas e o Tensor de Maxwell permanece muito freqüente na determinação de forças e torques.

7.3 - Trabalho Virtual

7.3.1 - Aspectos Teóricos

Para o cálculo de forças e torques de origem eletromagnética agindo sobre um corpo rígido móvel, o método do Trabalho Virtual é uma alternativa à formulação do Tensor de Maxwell. A força e/ou torque são obtidos como a derivada da energia do sistema com relação ao deslocamento da parte móvel.

A força e torque globais que agem na parte móvel, mas rígida, do domínio são dadas por:

$$\vec{F}_s = - \frac{\partial W}{\partial s} \quad (\text{III.27})$$

$$\vec{T}_s = - \frac{\partial W}{\partial \theta} \quad (\text{III.28})$$

onde s mede a translação virtual da parte móvel ao longo de uma direção, no caso da força, e θ , a rotação virtual ao redor de um eixo dado, para o caso do torque. Durante o deslocamento virtual observa-se que :

- a) O vetor potencial magnético é mantido constante;
- b) Não há deformação de fronteiras;
- c) As condições de contorno são mantidas.

Propõe-se utilizar o MEF para se determinar diretamente forças e torques a partir das expressões precedentes (III.27) e (III.28). A elegância do método reside na formulação de distorções virtuais do subdomínio (ar) compreendido entre a parte fixa e a parte móvel deslocada na translação ou rotação virtual. Esse método é chamado Derivada do Jacobiano local.

O domínio bidimensional deformado durante o movimento virtual Ω_d é decomposto em subdomínios Ω_e (os elementos finitos) sobre os quais a integração é expressa em função de coordenadas locais (u,v) , ao invés de globais (x,y) . Se a função $q(x,y)$ simboliza um integrando qualquer, toda integração se escreve :

$$\iint_{\Omega_d} q(x,y) dx dy = \sum_e \iint_{\Omega_e} q(x,y) dx dy = \sum_e \iint_{\Omega_e} q(x(u,v), y(u,v)) |G| du dv \quad (III.29)$$

onde $|G|$ é o determinante da matriz jacobiana de transformação de coordenadas e a somatória se estende a todos os elementos finitos do domínio (ne) .

$$\begin{aligned} x &= x(u,v) \\ y &= y(u,v) \end{aligned} \quad (III.30)$$

logo :

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix}, \quad |G| = \det G \quad (III.31)$$

Observa-se que os limites da integração (III.29) em du dv são fixos, já que não dependem do tipo de elemento [10].

Por exemplo, para um elemento do tipo triangular de 1^o ordem (Fig.III.10), temos :

$$x = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot x_i \quad y = \sum_{i=1}^3 N_i \cdot y_i \quad (III.32)$$

onde x_i e y_i são as coordenadas dos nós de cada elemento e os N_i são dados por :

$$N_1 = 1-u-v \quad N_2 = u \quad N_3 = v$$

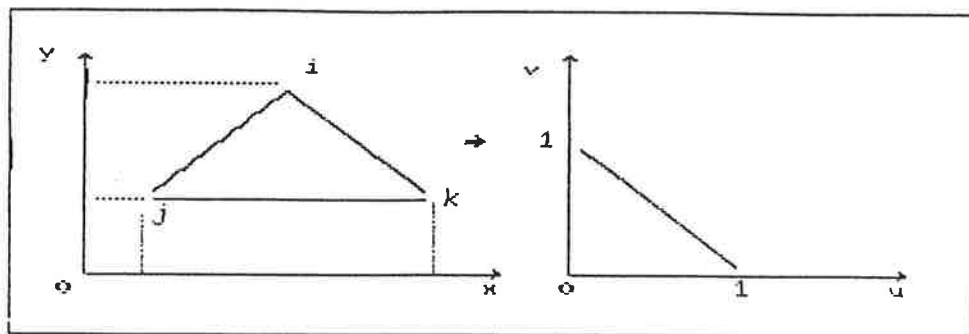


Fig. III.10 - Transformação isoparamétrica para elementos finitos triangulares de 1^o-ordem.

Os limites de integração de (III.29) valem então 0 e 1 para u e v. Isso significa que :

1 - Os limites de integração de (III.29) são independentes do movimento;

2 - Numa derivada com relação ao deslocamento apenas leva-se em conta a derivada do integrando.

Essa técnica pode ser aplicada toda vez que houver alguma distorção do domínio, em particular na aplicação do Trabalho Virtual.

2 - Aplicação do Trabalho Virtual

- Cálculo da Força e Torque -

Para a aplicação das expressões (III.27) e (III.28) é necessário determinar a derivada da energia W com relação ao deslocamento s.

A energia magnética do sistema é dada por [10]:

$$W = \int_{\Omega} \left[\int_0^{\mathbf{B}} \mathbf{H} \, d\mathbf{B} - \mathbf{j} \cdot \mathbf{A} \right] d\Omega + \int_{\Gamma} (\mathbf{A} \wedge \mathbf{H}) \cdot \mathbf{n} \, d\Gamma \quad \text{(III.33)}$$

Supõe-se a fronteira do domínio não deformada pelo deslocamento; a integral de superfície presente em (III.33) irá desaparecer na derivação. Utilizando a decomposição do domínio em elementos finitos Ω_e , resulta para a integral :

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \sum_{e=1}^{n_e} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega_e} \left[\int_0^B \dot{H} \cdot d\dot{B} - \dot{J} \cdot \dot{A} \right] d\Omega \quad (III.34)$$

Durante o deslocamento virtual, somente os elementos que são submetidos a uma deformação participam da variação da energia. Os outros elementos, fixos ou móveis, não enxergam qualquer variação de sua energia interna, já que o potencial em seus nós não varia. Além disso, a deformação não pode ocorrer em meios sólidos, o que permite supor ausência de correntes e de fenômenos de magnetostricção nos elementos deformados.

A somatória dada por (III.34) pode então ser restringida aos elementos distorcidos e se simplifica sob a seguinte forma:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \sum_{\substack{\text{gl.} \\ \text{defor.}}} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega_e} \left[\int_0^B \dot{H} \cdot d\dot{B} \right] d\Omega \quad (III.35)$$

Para determinar a deformação virtual do domínio em função do deslocamento, exprime-se as integrais elementares no sistema de coordenadas locais (u,v), próprio do tipo de elemento, como segue :

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial s} &= \sum_{\substack{\text{gl.} \\ \text{def.}}} \frac{\partial}{\partial s} \int_{\Omega_e} \int_0^B \dot{H} \cdot d\dot{B} |G| du dv = \\ &= \sum_{\substack{\text{gl.} \\ \text{def.}}} \frac{\partial}{\partial s} \int_0^1 \int_0^{1-u} \left[\left(\int_0^B \dot{H} \cdot d\dot{B} \right) |G| \right] du dv \quad (III.36) \end{aligned}$$

onde $|G|$ é o determinante da matriz jacobiana G que transforma as coordenadas locais (u,v) em reais (x,y) . Para cada elemento essa matriz se obtém a partir das relações (III.32), nas quais as funções $N_i(u,v)$ interpolam as coordenadas (x_i, y_i) dos nós do elemento.

Invertendo a ordem entre a derivação e a integração na expressão (III.36), já que os extremos de integração permanecem constantes, e após algum desenvolvimento, tem-se que:

$$\frac{\partial W}{\partial s} = \sum_{\substack{\text{gl.} \\ \text{def.}}} \int_0^1 \int_0^{1-u} \left[\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} \cdot |G| + \left(\int_0^1 \vec{H} \cdot d\vec{B} \right) \frac{\partial |G|}{\partial s} \right] du dv \quad (\text{III.37})$$

onde

$$\frac{\partial |G|}{\partial s} = \det \left[\frac{\partial C_x}{\partial s}, C_y \right] + \det \left[C_x, \frac{\partial C_y}{\partial s} \right] \quad (\text{III.38})$$

e C_x e C_y são os vetores coluna de G , a matriz jacobiana do sistema, e $\frac{\partial C_x}{\partial s}$ e $\frac{\partial C_y}{\partial s}$, os vetores coluna da matriz $\frac{\partial G}{\partial s}$, derivada de G com relação ao deslocamento virtual.

3 - Cálculo da matriz jacobiana e de sua derivada com relação ao deslocamento virtual

Qualquer que seja o tipo de elemento, a passagem de coordenadas locais (u,v) a coordenadas globais (x,y) é dada por (III.32). Para os elementos isoparamétricos [10] essas funções são as mesmas que interpolam a função A - vetor potencial magnético - em cada nó, como segue :

$$\vec{A} = \sum_{i=1}^9 N_i A_i \quad (\text{III.39})$$

onde os valores nodais A_i são conhecidos.

A matriz jacobiana G , dada por (III.31) e considerando (x,y) dados por (III.32), pode ser escrita como :

$$G = \sum_{i=1}^a \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{array} \right] [x_i \quad y_i] \quad (\text{III.40})$$

As funções N_i e suas derivadas com relação às coordenadas locais (u, v) , próprias do tipo de elemento, são independentes do deslocamento virtual. Somente as coordenadas dos nós (x_i, y_i) dependem dele, como pode-se observar pela expressão de $\frac{\partial G}{\partial s}$:

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \sum_{i=1}^a \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{array} \right] \left[\begin{array}{cc} \frac{\partial x_i}{\partial s} & \frac{\partial y_i}{\partial s} \end{array} \right] \quad (\text{III.41})$$

Para a determinação do termo $\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}$ da expressão (III.37), deve-se considerar que:

$$\vec{B} = \text{rot } \vec{A} = \left[\sum_{i=1}^a \text{grad } N_i \right] \wedge A_i \vec{k} = \sum_{i=1}^a \left[G^{-1} \left[\begin{array}{c} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{array} \right] \right] \wedge A_i \vec{k} \quad (\text{III.42})$$

Após algum desenvolvimento, o termo $\frac{\partial \vec{B}}{\partial s}$ resulta em:

$$\frac{\partial \vec{B}}{\partial s} = - \sum_{i=1}^a \left[G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_i \right] \wedge A_i \vec{k} \quad (\text{III.43})$$

De posse das quantidades G , $|G|$, $\frac{\partial G}{\partial s}$, $\frac{\partial |G|}{\partial s}$ e $\frac{\partial B}{\partial s}$, calculadas por (III.31), (III.38), (III.41) e (III.43) a partir das coordenadas dos nós e de suas derivadas com relação ao deslocamento virtual, é possível a determinação da força ou torque pela expressão (III.37).

7.3.2 - Implementação computacional do Método do Trabalho Virtual

1 - Expressão da Força e Torque

A força ou torque calculados pelo Método do Trabalho Virtual podem ser determinados pela derivada da energia do sistema através da expressão (III.37), como segue :

$$\vec{F}_o = - \frac{\partial W}{\partial s} = - \sum_{\text{dof}} \int_0^1 \int_0^{1-u} \left[\vec{H} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} |G| + \left(\int_0^B \vec{H} d\vec{B} \right) \frac{\partial |G|}{\partial s} \right] du dv$$

expressão essa que fornece a força ou torque por unidade de comprimento, já que o domínio é bidimensional.

Lembrando que os elementos distorcidos se encontram no ar, tem-se que:

$$\int_0^B \vec{H} d\vec{B} = \frac{1}{2} v_o B^2$$
$$\vec{H} = v_o \vec{B} \quad (\text{III.45})$$

e é possível fazer integração analítica de (III.37), pois os elementos são triangulares de 1ª ordem e a expressão se reduz a:

$$\vec{F}_o = - \frac{\partial W}{\partial s} = - \sum_{\text{dof}} v_o \left(\vec{B} \frac{\partial \vec{B}}{\partial s} + \frac{1}{2} B^2 |G|^{-1} \frac{\partial |G|}{\partial s} \right) \Delta_o \text{ (CN/md)} \quad (\text{III.46})$$

onde Δ_o é a seção de cada elemento distorcido.

2 - As Derivadas das Coordenadas

A chave do método de cálculo de força e torque pelo Trabalho Virtual é a derivada das coordenadas nodais com relação ao deslocamento virtual $\left[\frac{\partial x_i}{\partial s} \quad \frac{\partial y_i}{\partial s} \right]$, dado pela expressão (III.35).

Essas derivadas podem ser expressas através de uma função 'p' definida da seguinte forma [5] :

$$p \begin{cases} = 1 & , \text{ para os nós da parte móvel do domínio} \\ = 0 & , \text{ para os nós da parte fixa do domínio} \\ 0 < p < 1, & \text{ para os nós intermediários pertencentes à área} \\ & \text{ virtualmente distorcida (ar)}. \end{cases}$$

Uma escolha adequada para 'p' resulta em funções contínuas e monotônicas variando entre 0 e 1.

Uma maneira simples, empregada neste trabalho, é restringir a área distorcida a somente uma camada de elementos finitos (por exemplo, a camada mais próxima) envolvendo a parte móvel [5], conforme mostrado na Fig. III.11. Essa camada pode ser facilmente deduzida dos dados do problema, somente por considerações topológicas.

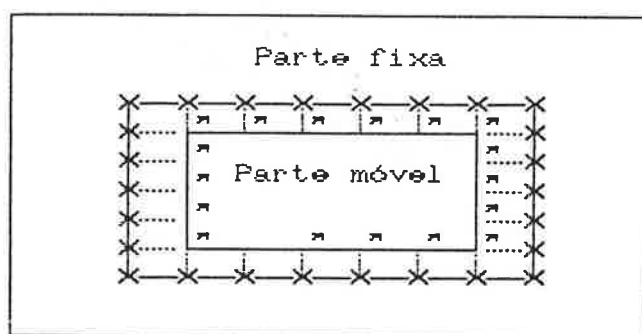


Fig. III.11 - Camada de elementos finitos distorcidos :

x Nós fixos

x Nós móveis

Assim, o algoritmo para cálculo de forças e torques pelo Trabalho Virtual na formulação bidimensional do MEF com elementos triangulares de 1ª ordem pode ser resumido pelos seguintes passos:

1) Cálculo dos valores nodais do vetor potencial magnético usando

o MEF;

2) Determinação das derivadas das coordenadas dos nós com relação ao deslocamento virtual da parte móvel por:

- nós fixos:

$$\frac{\partial x_i}{\partial \theta} = \frac{\partial y_i}{\partial \theta} = 0$$

- nós móveis, translação:

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = \frac{\partial y_i}{\partial s} = 1$$

- nós móveis, rotação:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial \theta} &= -r_i \sin \theta_i = -y_i \\ \frac{\partial y_i}{\partial \theta} &= r_i \cos \theta_i = x_i \end{aligned}$$

3) Cálculo da força ou do torque pela integração sobre os elementos finitos virtualmente distorcidos aplicando as expressões a seguir :

Para translação :

$$\begin{aligned} F_x &= -\frac{v_0}{2} \sum_{\substack{\text{al.} \\ \text{def.}}} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot b + B_x B_y \cdot a \right] \text{ (N/m)} \\ F_y &= -\frac{v_0}{2} \sum_{\substack{\text{al.} \\ \text{def.}}} \left[\frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) \cdot a + B_x B_y \cdot b \right] \text{ (N/m)} \end{aligned}$$

onde,

F_x : Componente da força na direção x (N/m);

F_y : " " " " " y " ;

B_x : Indução magnética na direção x (T);

B_y : " " " " " y " ;

$$a = (x_1 - x_2) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3)$$

$$b = (y_1 - y_2) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3)$$

x_i, y_i : coordenadas dos nós em metros;

p_i : funções que valem 0 ou 1 caso o nó pertença à parte fixa ou móvel;

Para rotação :

$$T = \frac{v_0}{2} \sum_{\substack{\text{al.} \\ \text{def.}}} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot (c+a+b) + B_x B_y \cdot (c-d) \right]$$

onde,

T : Torque eletromagnético em N.m/m;

$$a = (x_2 - x_1) \cdot (q_1 - q_2) + (x_1 - x_2) \cdot (q_2 - q_1)$$

$$b = (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1)$$

$$c = (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1)$$

$$d = (y_2 - y_1) \cdot (q_1 - q_2) + (y_1 - y_2) \cdot (q_2 - q_1)$$

$$p_i = \frac{\partial x_i}{\partial \theta}$$

$$q_i = \frac{\partial y_i}{\partial \theta}$$

Para a dedução das expressões acima vide Apêndice I.

7.3.3 - Sumário do Método

Para o cálculo de forças e torques pelo Trabalho Virtual no contexto de Elementos Finitos, pode-se observar o seguinte:

1) Somente um cálculo de campo é necessário, seja o problema linear ou não-linear; isso melhora a precisão na obtenção da força em relação à da Variação da Energia; além de eliminar o problema da escolha do deslocamento;

2) Somente uma integral, efetuada sobre a área distorcida, é necessária;

3) A área distorcida é arbitrária, desde que respeite os limites impostos pelo deslocamento virtual, quais sejam :

- envolver inteiramente o objeto estudado;
- ser composta de um meio deformável (ar); pode incluir toda a região deformável compreendida entre a parte fixa e o corpo móvel ou somente uma camada de elementos dessa região.

4) Do ponto de vista da organização de programa, esse método é bem interessante, pois conduz a algoritmos quase independentes do tipo de elemento deformado e da dimensão do espaço (2D, 3D).

CAPITULO IV

APLICAÇÃO

1 - EXEMPLO DE APLICAÇÃO - MOTOR SINCRONO DE RELUTÂNCIA

A metodologia apresentada foi aplicada na análise do projeto de um motor síncrono trifásico de relutância de fabricação *Equacional Elétrica e Mecânica LTDA.*, cujos dados de placa são:

Motor EMSR-3-200M / 15 CV - 380 V - 60 Hz - 37 A - $\cos \phi$ 0,54

As dimensões principais do motor para um corte no sentido transversal são mostradas na Fig. IV.1, onde é representado apenas um passo polar do motor em virtude de sua simetria (antiperiodicidade do domínio [17]). O comprimento no sentido longitudinal é de 236 mm.

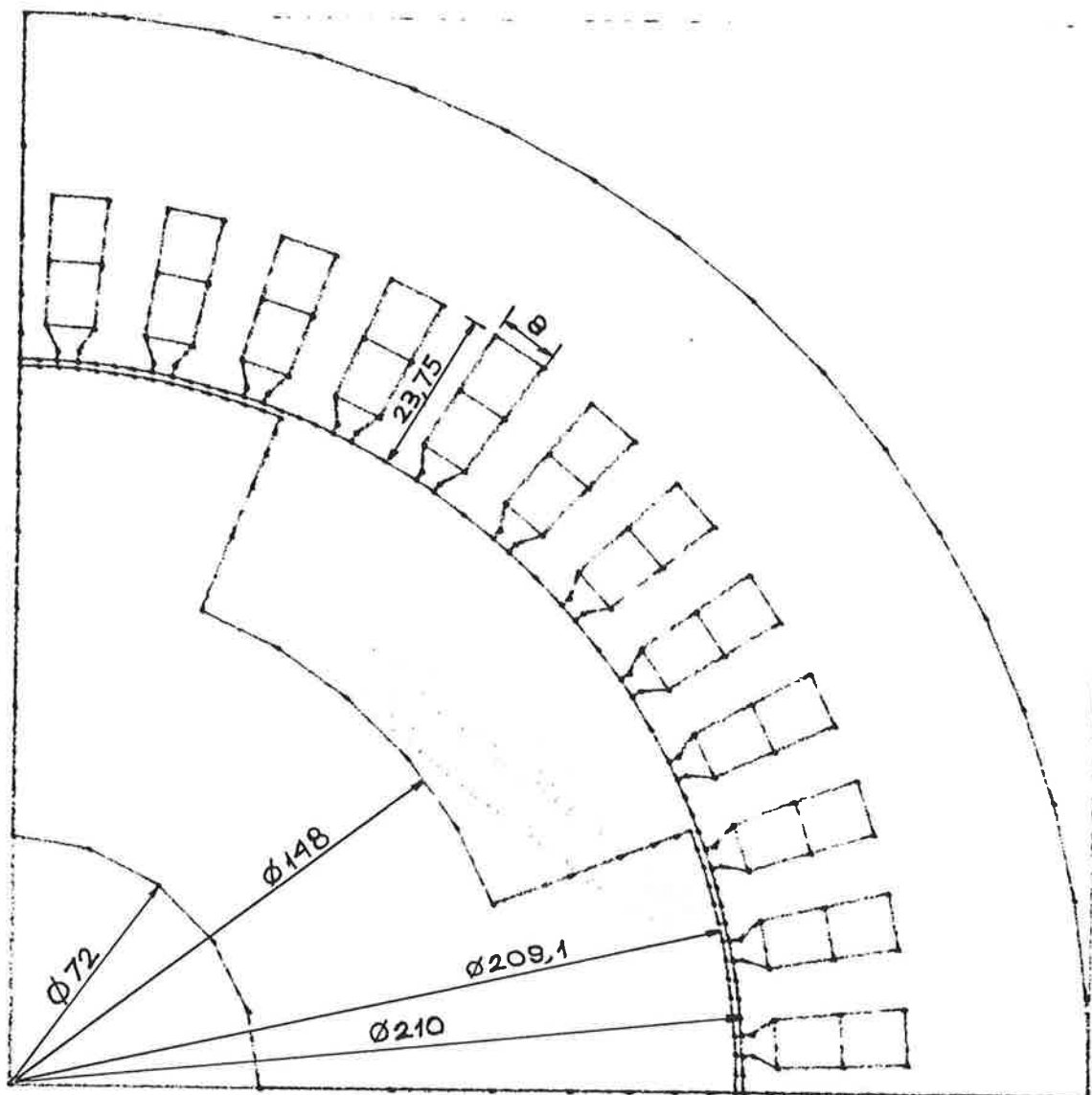


Fig. IV 1 - Motor síncrono de relutância - Dimensões em mm.

No enrolamento estátórico circulam correntes trifásicas. Foi focalizado o instante particular em que numa das fases a corrente assumia seu valor máximo ($\sqrt{2} \cdot 37 = 52.3 \text{ A}$), e nas outras duas fases, a metade deste valor com o sentido oposto (-26.2 A).

No desenho acima não estão representadas as ranhuras rotóricas onde está alojado o enrolamento de partida dessa máquina. Desta forma, o modelamento não levou em conta esse detalhe, o que aumentaria sobremaneira o número de elementos da malha e portanto a ordem do sistema de equações a ser resolvido.

2 - ASPECTOS DO PROJETO DO MOTOR SINCRONO DE RELUTÂNCIA

As relações de potência para o motor síncrono de relutância podem ser obtidas do diagrama fasorial da Figura IV.2 [3]:

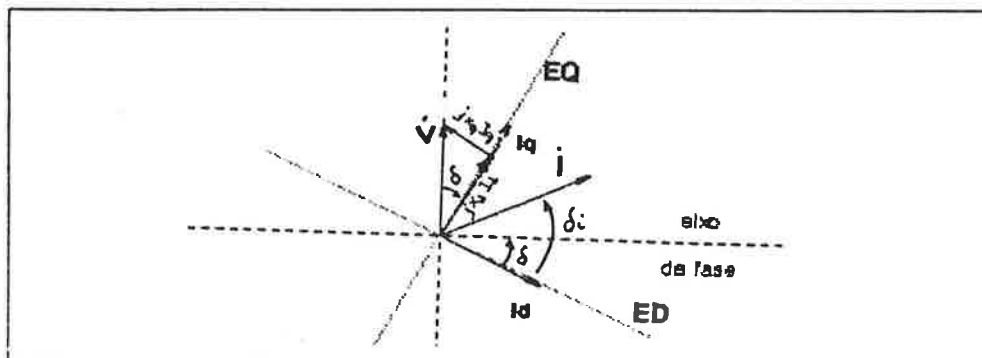


Fig. IV.2 - Diagrama de fasores do motor de relutância.

Há dois modos de operação possíveis para o motor de relutância: tensão imposta ou corrente imposta.

No modo de operação com tensão imposta a potência é dada por :

$$P = \frac{V^2}{2} \left[\frac{1}{x_q} - \frac{1}{x_d} \right] \sin 2\delta$$

E no modo de operação com corrente imposta, por :

$$P_i = \frac{I^2}{2} (x_d - x_q) \sin 2\delta_i$$

A Figura IV.3 mostra a distribuição espacial de indução magnética no entreferro do motor de relutância segundo os eixos direto e em quadratura (ED e EQ), impostos por distribuições espaciais senoidais de forças magnetomotrizes .

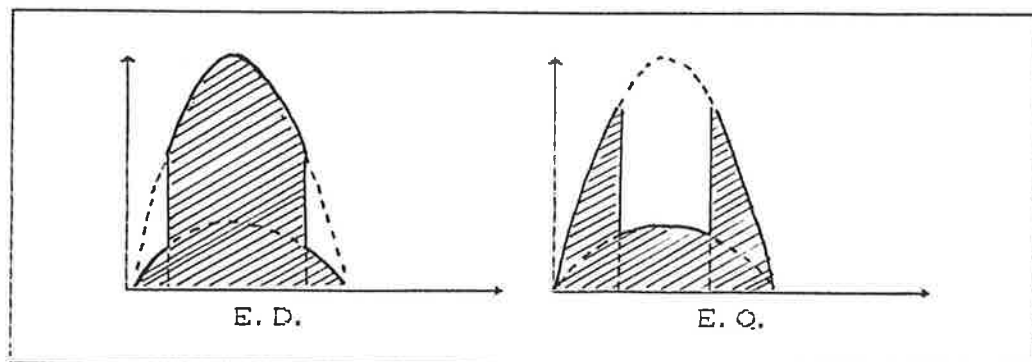


Fig. IV.3 - Distribuição espacial de induções no entreferro.

Um indicativo importante do comportamento do motor de relutância é fornecido pela relação entre as reatâncias segundo os eixos direto e em quadratura (x_d/x_q), parâmetros estes que são função da geometria do rotor.

A metodologia de cálculo sugerida em [3] para motores de relutância consiste em, depois de escolhida a melhor geometria, resolver dois circuitos magnéticos completos, um segundo ED e outro segundo EQ. Como resultado tem-se os valores de x_d e x_q . Para tanto, os circuitos magnéticos serão resolvidos pelo MEF, onde o mapeamento de campo fornecerá informações sobre qualquer parte da máquina.

Um destaque especial deve ser dado aos efeitos da saturação magnética sobre os parâmetros x_d e x_q [3]. Para a operação por tensão constante, numa dada frequência de alimentação observa-se um alto nível de saturação magnética do circuito segundo o E.Q. Isso aumenta sobremaneira a relação x_d/x_q , o que incrementa a disponibilidade de torque do motor.

Para a operação por corrente constante, a imposição de uma f.m.m. de amplitude fixa (que corresponde ao caso simulado pelo MEF neste trabalho) faz com que o fluxo por pólo diminua drasticamente na passagem do E.D. para o E.Q.. Conseqüentemente ocorrerá uma diminuição no nível de saturação no E.Q. e, portanto,

uma queda na relação x_d/x_q . Ao mesmo tempo, um projeto saturado fará com que induções maiores se manifestem segundo o E.D., diminuindo o valor de x_d e novamente a relação x_d/x_q , podendo ter efeito contrário ao observado na operação por tensão constante.

3 - PRÉ-PROCESSAMENTO

O módulo de pré-processamento EDIMAQ foi desenvolvido pela Equipe de Simulação de Fenômenos Eletromagnéticos do Laboratório de Sistema de Potência PEA-EPUSP e utilizado neste trabalho para as etapas de descrição de geometria, definição de regiões e "discretização" do domínio em estudo em elementos finitos triangulares de primeira ordem. O modelo "discretizado" do motor EMSR-3-200M que foi obtido é apresentado na Figura IV.4:

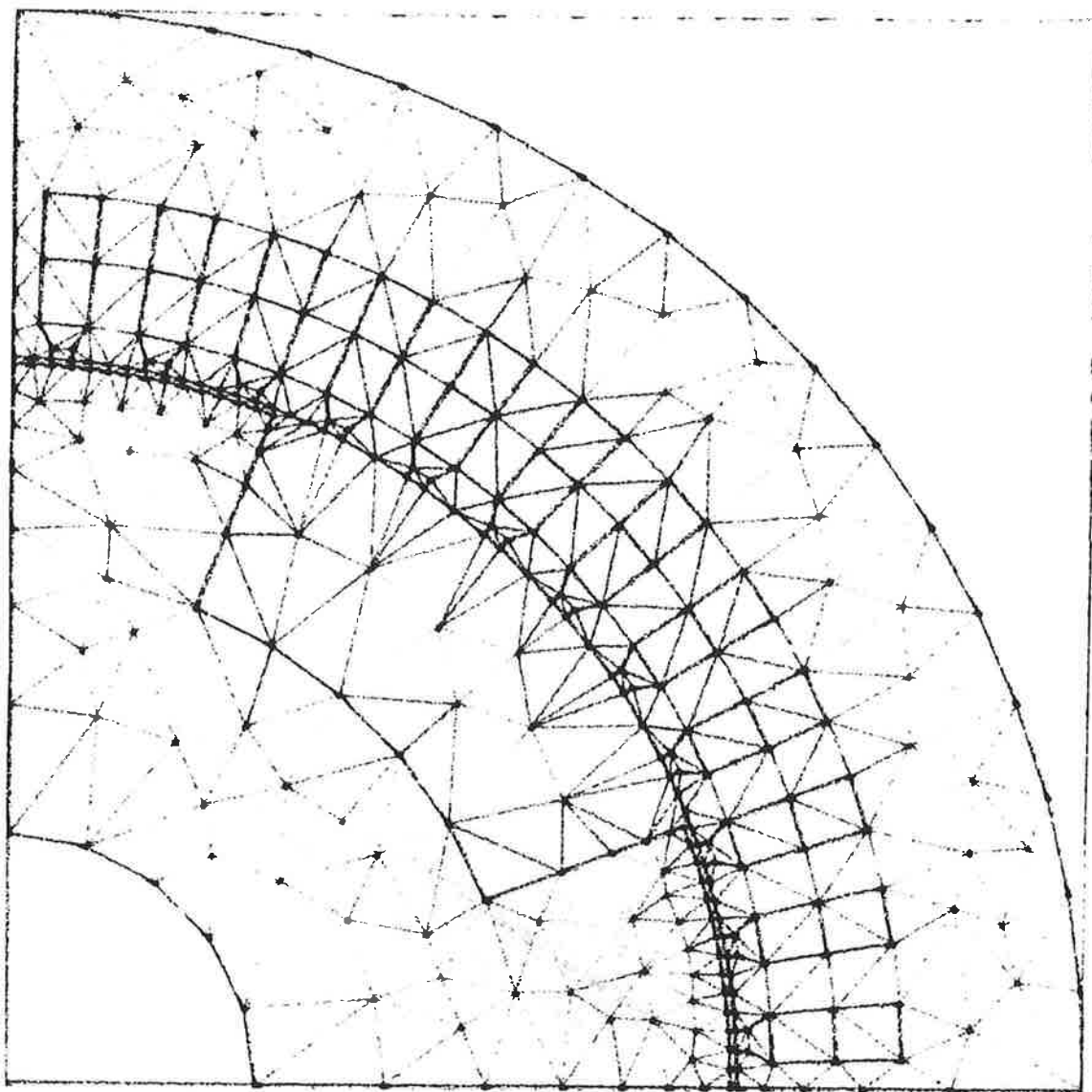


Fig. IV.4 - Motor EMSR-3-200M "discretizado" em elementos finitos triangulares

4 - OS MÓDULOS DE CÁLCULO E EXPLORAÇÃO DE RESULTADOS

(NR2D1 E EXP2D1)

Foram desenvolvidos para este trabalho dois módulos de programa em linguagem C. O primeiro, NR2D1, módulo de cálculo, procede à aplicação do MEF sobre o domínio "discretizado". Ele efetua a montagem do sistema de equações matricial não-linear e em seguida a solução deste sistema, fornecendo como saída os valores

do vetor potencial magnético para todos os nós da malha de elementos finitos, mostrada na Fig. IV.4. O segundo, EXP2D1, cuida da exploração dos resultados obtidos do primeiro, e corresponde ao Pós-processador.

Tanto um quanto outro são destinados a problemas bidimensionais e elementos triangulares de primeira ordem.

4.1 - O Módulo de Cálculo (NR2D1)

Esse módulo, responsável pela aplicação do MEF, monta o sistema de equações não-linear e introduz as condições de contorno - Dirichlet e anticíclicas (vide apêndice II) - e utiliza o processo iterativo de Newton-Raphson na resolução do sistema não-linear. Para o sistema de equações lineares, emprega o ICCG [13].

O algoritmo para a aplicação do processo de Newton-Raphson pode ser resumido pelo diagrama estruturado representado na Figura IV.5 [1]:

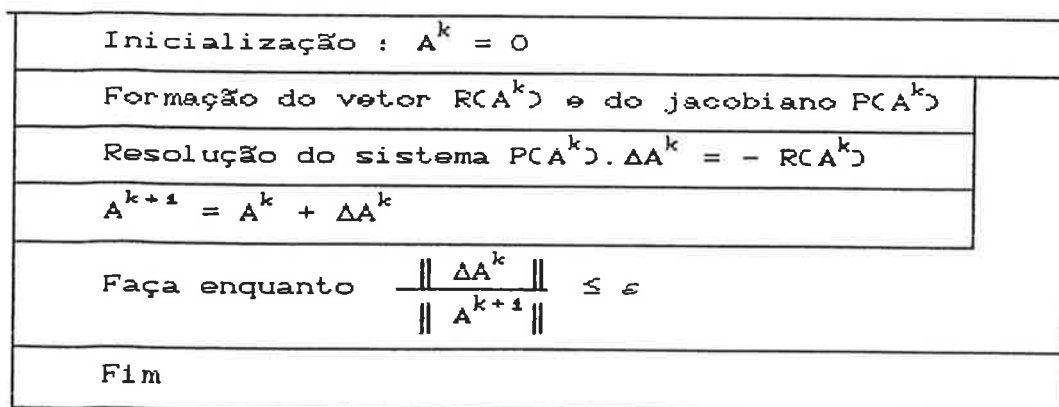


Fig. IV.5 - Diagrama estruturado do método de Newton-Raphson.

A metodologia utilizada para o modelamento da não-linearidade das propriedades físicas consiste em obter a característica $v = v(B^2)$ através da seguinte expressão:

$$v = K_1 \cdot e^{K_2 B^2} + K_3,$$

onde K_1 , K_2 e K_3 são constantes obtidas a partir dos valores experimentais extraídos da curva de magnetização do material ferromagnético; e é a base do logaritmo natural.

4.2 - O Pós-processador EXP2D1

Esse módulo é composto por várias funções destinadas à exploração dos resultados provenientes do programa anterior e cálculo de grandezas significativas do motor de relutância analisado. Essas funções correspondem àquelas apresentadas no capítulo III.

4.2.1 - Mapeamento de campo

O programa que realiza o traçado de equipotenciais a partir dos valores nodais de potencial foi desenvolvido pelo pesquisador Douglas R.F. Clabunde, da Equipe de Simulação de Fenômenos Eletromagnéticos do LSP-PEA-EPUSP e utilizado neste trabalho para o traçado das linhas de campo.

As Figuras IV.6.a, b e c apresentam as linhas equipotenciais para o motor EMSR-3-200M. Nas três condições o induzido é alimentado com correntes trifásicas de seqüência positiva, i_a , i_b e i_c , tais que:

$$\begin{aligned} i_a &= I_{\max} \cos \omega t \\ i_b &= I_{\max} \cos (\omega t - 120^\circ) \end{aligned}$$

$$i_c = I_{\max} \cos(\omega t + 120^\circ)$$

e no instante $t=0$, ou seja, $i_a = I_{\max}$, $i_b = i_c = -\frac{I_{\max}}{2}$

Na Figura IV.6.a, o eixo da fase A está alinhado com o eixo direto; na IV.6.b, com o eixo em quadratura e na IV.6.c, forma um ângulo qualquer com o EQ.

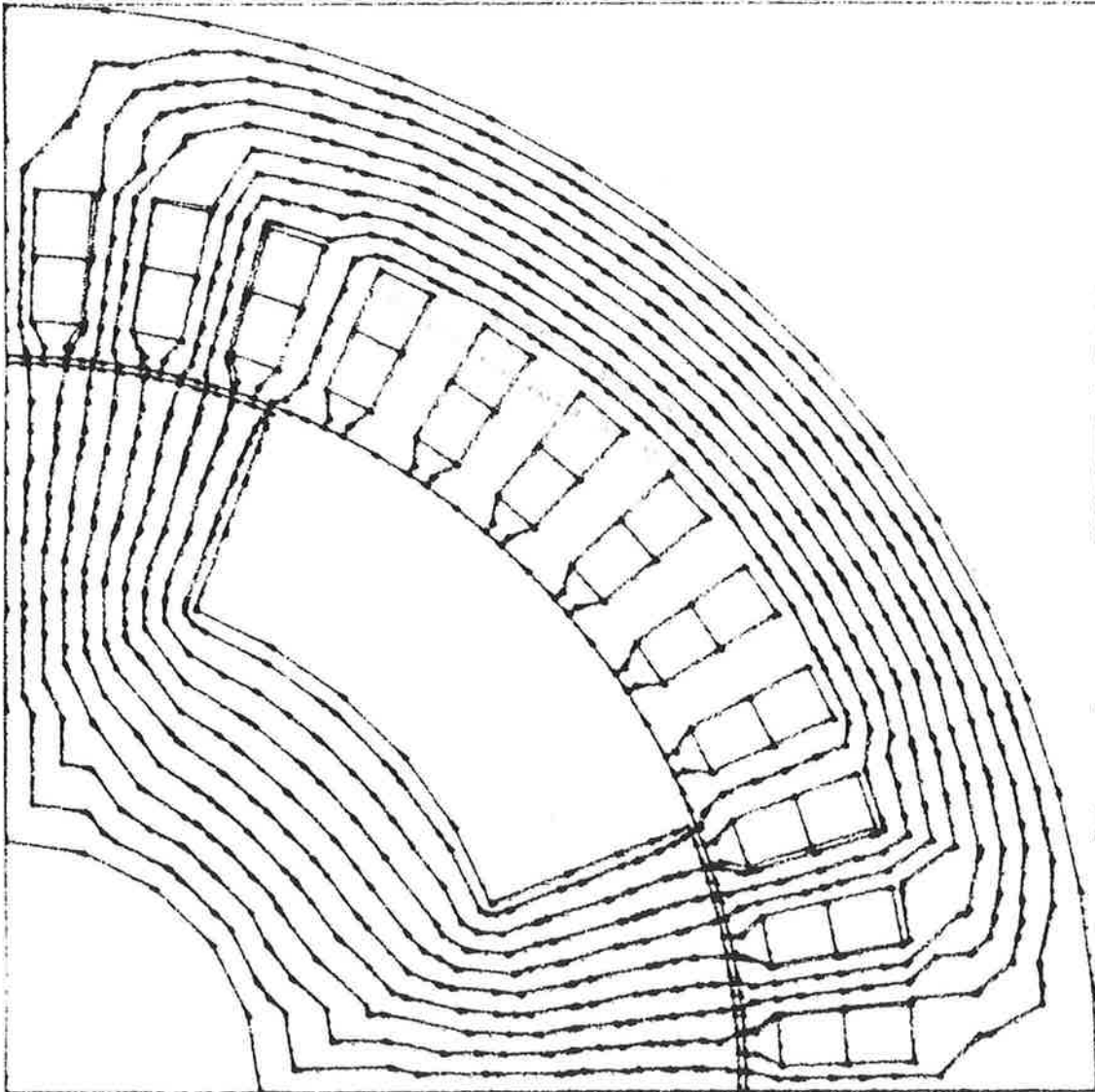


Fig. IV.6.a - Linhas de campo com o eixo de f.m.m. alinhado com ED 10 equipotenciais : $A_{\max} = 0,053635 \text{ Wb/m}$,
 $A_{\min} = 0,005082 \text{ Wb/m}$

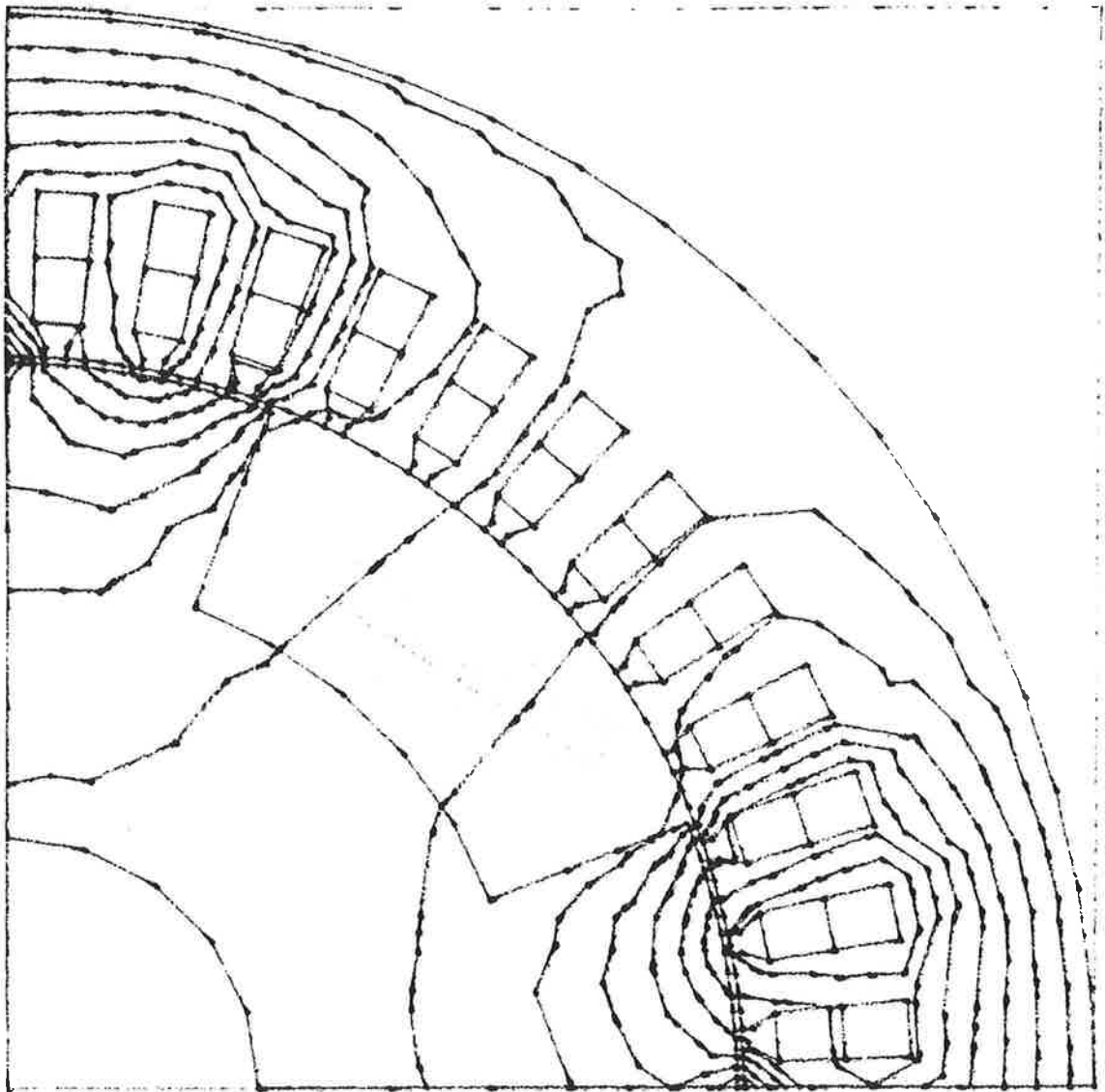


Fig. IV.6.b - Linhas de campo para o eixo de f.m.m. alinhado com o EQ; 15 equipotenciais : $A_{max} = 0.015831$ Wb/m, $A_{min} = -0.0151967$ Wb/m.

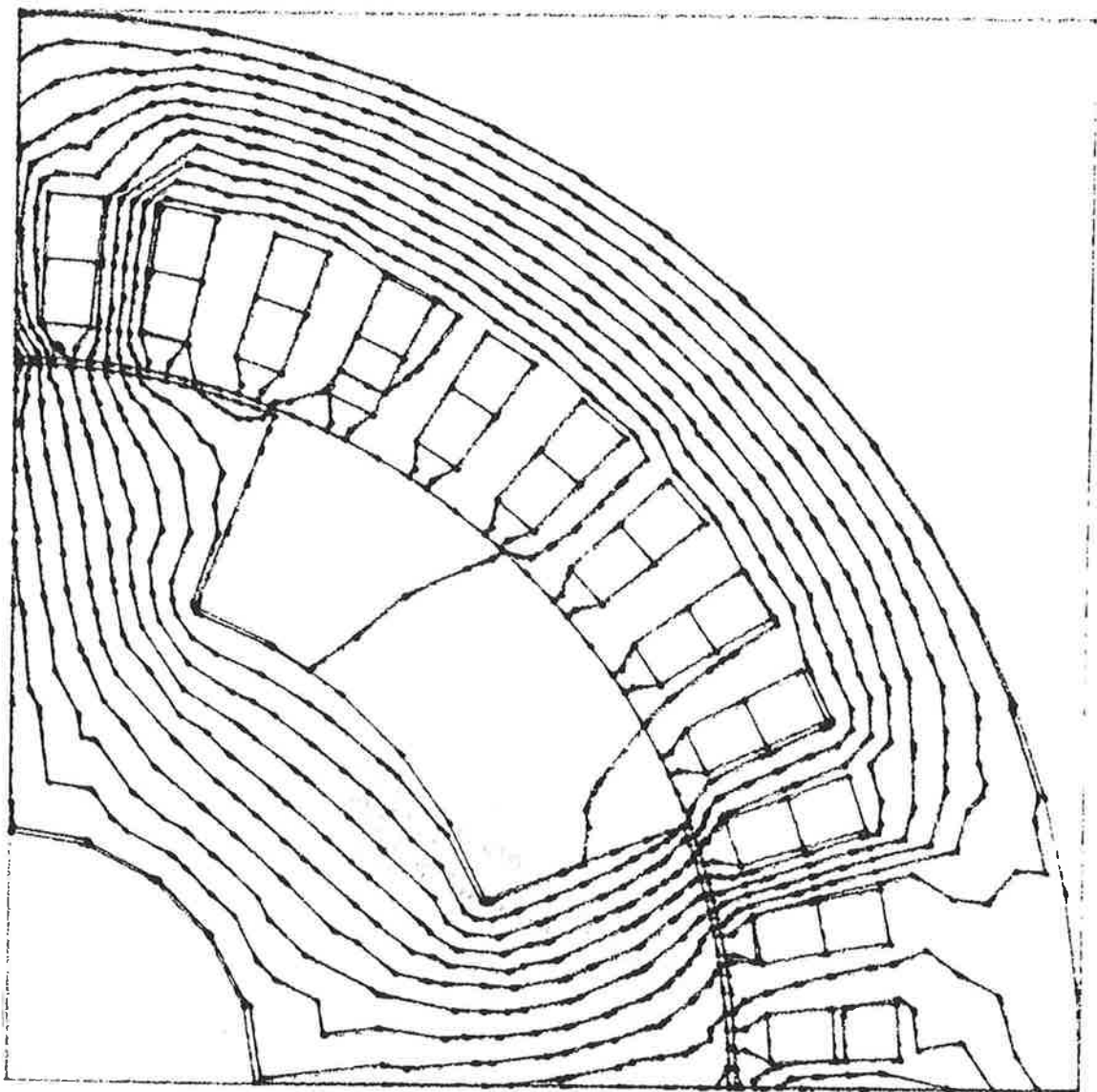


Fig. IV.8.c - Linhas de campo para a f.m.m. formando um ângulo qualquer com o ED ; 10 equipotenciais:
 $A_{\max} = 0.024428 \text{ Wb/m}$, $A_{\min} = - 0.005281 \text{ Wb/m}$.

4.2.2 - Indução Magnética em uma linha especificada

Escolhendo-se uma linha tal como uma circunferência, correspondendo a uma linha média, passando pelo entreferro do motor, obtém-se as distribuições espaciais de indução magnética nessa região como função da posição angular.

As Figuras IV.7.a e b mostram essa variação para as condições correspondentes às Figuras IV.6.a e b, respectivamente.

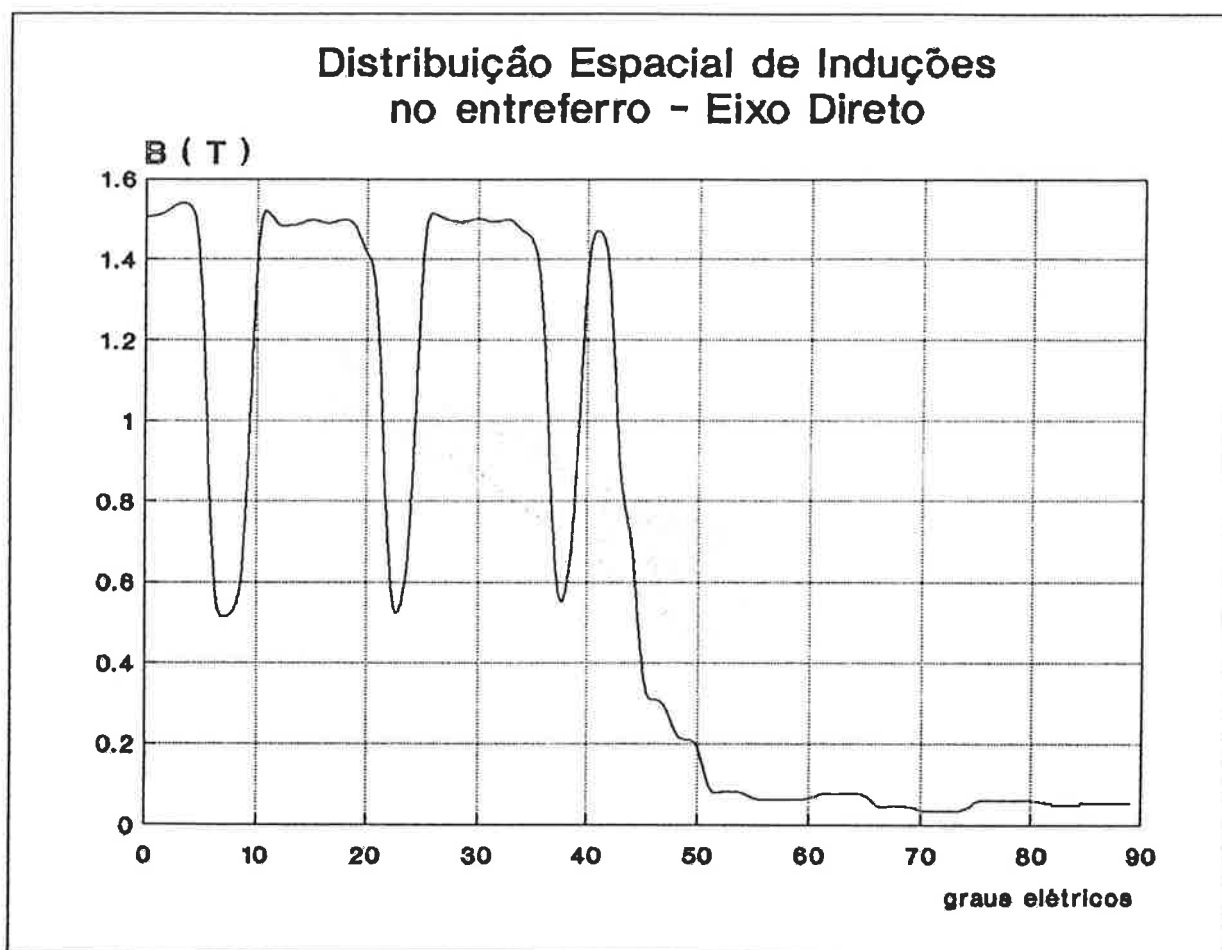


Fig. IV.7.a

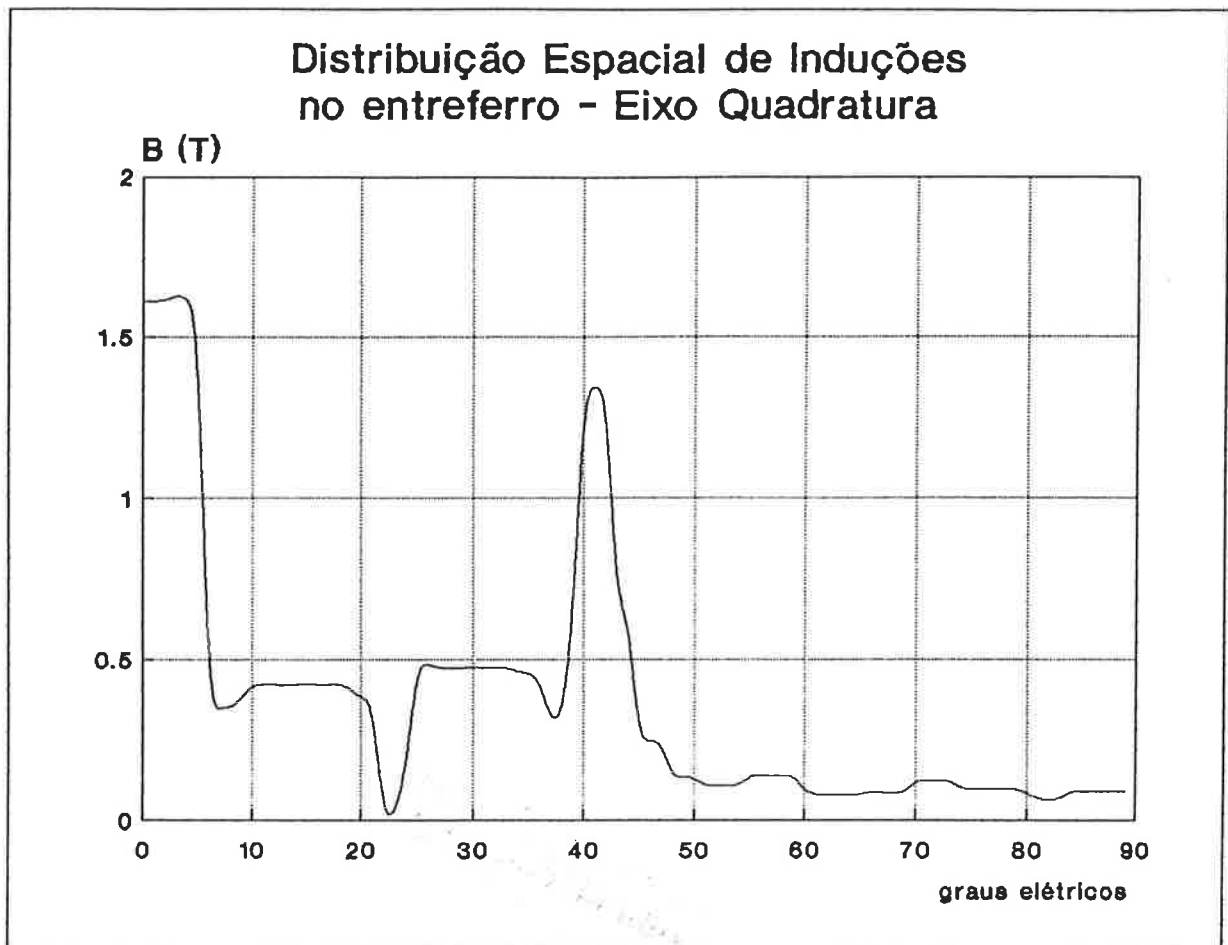


Fig. IV.7.b

4.2.3 - Energia Magnética

As energias magnéticas calculadas para várias posições estão apresentadas na Tabela IV.4.1; δ é o ângulo entre a força magnetomotriz do induzido e o eixo D.

Tabela IV.4.1

δ (°)	Energia (J)
0 (ED)	154,7057
90 (EQ)	30,6823
67,5	172,3589
60	127,9938

4.2.4 - Torque Eletromagnético

As Figuras IV.8 e IV.9 mostram, respectivamente, a variação do torque desenvolvido pelo motor de relutância em função do deslocamento angular e da corrente de armadura. Na Figura IV.8 o ângulo é aquele formado entre o eixo da f.m.m. do induzido e o eixo polar (ED). Nesse gráfico observa-se a dupla frequência do torque de relutância ($T = K \sin 2\delta$).

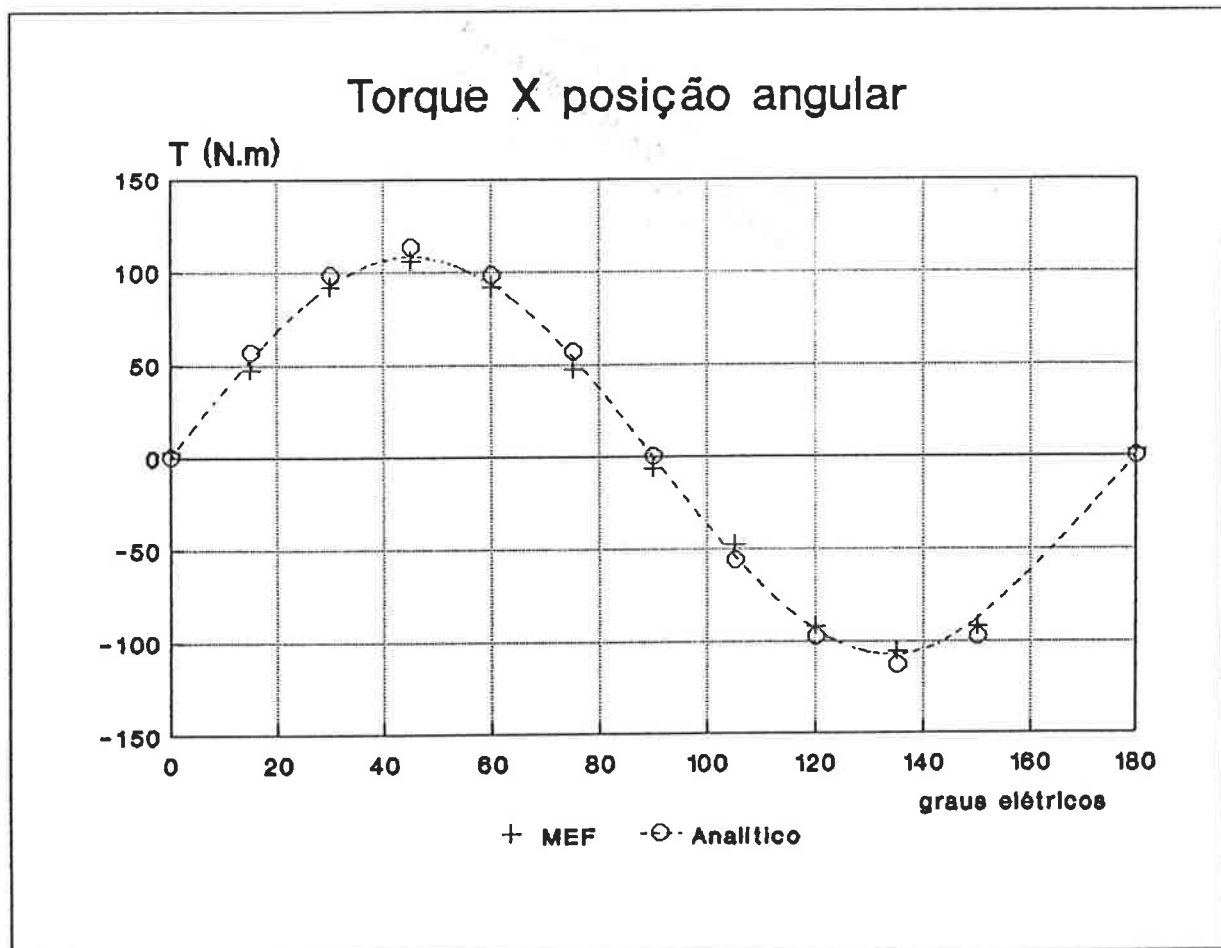


Fig. IV.8 - Variação angular do torque de relutância.

Na Figura IV.9 observa-se que a variação do torque com a corrente obedece a uma lei quadrática ($T = K I^2$) até onde não se pronunciam os efeitos da saturação.

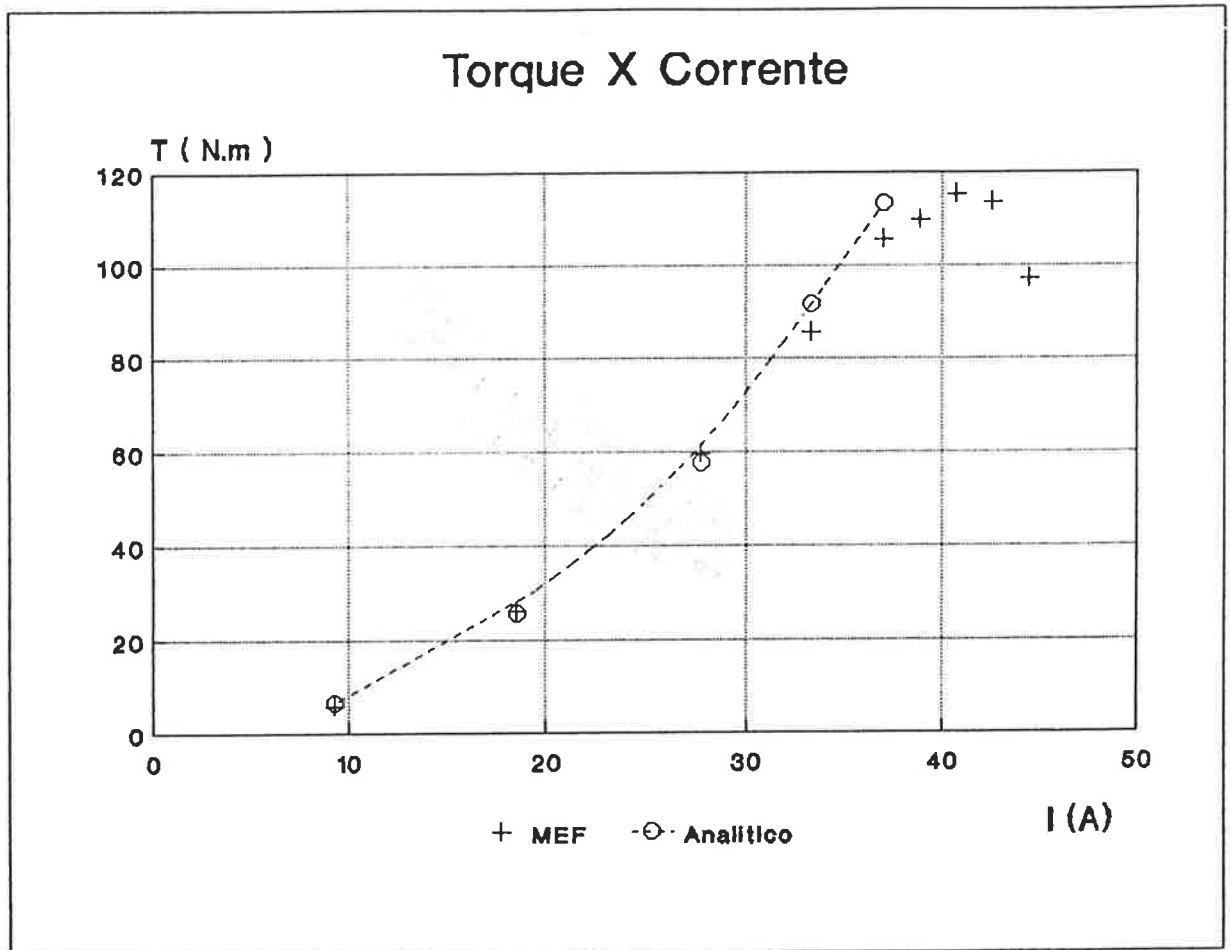


Fig. IV.9 - Variação do torque com a corrente de armadura.

Os valores de torque acima foram calculados pelo princípio do Trabalho Virtual. A Tabela IV.2 apresenta uma comparação entre os valores de torque obtidos pelos três métodos para uma posição do rotor ($22,5^\circ$ entre o eixo de f.m.m. e o ED)

e a corrente nominal. No método da Variação da Energia foi utilizado um deslocamento angular igual a um passo de ranhura do motor, que equivale a $7,5^\circ$, e as energias obtidas estão apresentadas na Tabela IV.1.

Tabela IV.2

Método de cálculo	Torque (N.m)
Variação da Energia Magnética	-338,9259
Tensor de Maxwell	-105,5068
Trabalho Virtual	-105,4782
Analítico	-113,0010

4.2.5 - Determinação das Reatâncias segundo ED e EQ

1 - Cálculo de x_d e x_q pelo fluxo

Os valores de $A_{1(ED)}$ e $A_{1(EQ)}$ determinados pelo MEF foram os seguintes :

$$A_{1(ED)} = 0,054893 \text{ Wb/m}$$

$$A_{1(EQ)} = 0,010893 \text{ Wb/m}$$

Considerando que :

$$I_{\max} = 37 \cdot \sqrt{2} = 52,5 \text{ A}$$

$$L = 236 \text{ mm}$$

$$f = 60 \text{ Hz}$$

$$N_f = 48 \text{ espiras/fase,}$$

resultam os fluxos :

$$\phi_{(ED)} = 2 \cdot 0,054893 \cdot 0,236 = 0,026909 \text{ Wb}$$

$$\phi_{(EQ)} = 2 \cdot 0,010893 \cdot 0,236 = 0,005141 \text{ Wb,}$$

e por fim as reatâncias :

$$x_d = (2 . \pi . 60) . 48 . \frac{0,025909}{52,5} = 9,9602 \ \Omega$$

$$x_q = (2 . \pi . 60) . 48 . \frac{0,005141}{52,5} = 1,7781 \ \Omega$$

2 - Cálculo de x_d e x_q pela Energia Magnética

Considerando que :

$$W_{(ED)} = 154,7057 \text{ J}$$

$$W_{(EQ)} = 30,6823 \text{ J}$$

$$I_{max} = 52,5 \text{ A}$$

$$f = 60 \text{ Hz,}$$

resultam as correntes segundo ED e EQ :

$$I_d = I_q = \frac{3}{2} \frac{4}{\pi} 52,5 = 99,9351 \text{ A}$$

e as reatâncias :

$$x_d = (2 . \pi . 60) . \frac{2 . 154,7057}{99,9352^2} = 12,6891 \ \Omega$$

$$x_q = (2 . \pi . 60) . \frac{2 . 30,6823}{99,9352^2} = 2,3164 \ \Omega$$

ATabela IV.3 compara os valores de x_d e x_q obtidos analítica, numérica e experimentalmente:

Tabela IV.3

Parâmetro	Analítico	MEF (fluxo)	MEF (energia)	Experim.
$x_d (\Omega)$	9,2	9,9602	11,6800	12,7415
$x_q (\Omega)$	2,15	1,7781	2,3164	1,7765

4.2.6 - Coloração dos Elementos

Esta etapa não será apresentada por não resultar numa figura de boa qualidade.

CAPÍTULO V

COMENTÁRIOS E CONCLUSÕES

1 - CALCULO DO TORQUE

Do ponto de vista teórico, os métodos do Tensor de Maxwell e do Trabalho Virtual são equivalentes. Demonstra-se [14] que, partindo de uma fina camada de área distorcida para o Trabalho Virtual, a expressão deste tende à expressão do Tensor de Maxwell quando a espessura da camada tende a zero. No entanto, isso nem sempre é verdade quando o campo magnético provém de uma solução numérica e não analítica.

Do ponto de vista do usuário, os métodos são similares e conduzem praticamente aos mesmos resultados, desde que se escolha adequadamente a superfície de integração para a aplicação do Tensor de Maxwell, escolha esta que nem sempre é fácil. Em problemas bidimensionais que utilizam elementos finitos triangulares de primeira ordem, a escolha adequada conduz exatamente ao mesmo valor pelos dois métodos (Apêndice I).

Do ponto de vista da implementação, no caso do Tensor de Maxwell, esta depende :

1 - Do tipo de elemento atravessado pela superfície de integração (triângulo, quadrilátero etc.);

2 - Do caminho dessa superfície dentro do elemento.

Ao contrário, o princípio do Trabalho Virtual proporciona um algoritmo mais geral e mais fácil de implementar. É necessário somente introduzir uma integração de volume numa camada de elementos, o que é mais fácil que manipular um caminho orientado para uma integração de superfície.

Quanto à determinação do torque pela Variação da Energia

Magnética, tem a grande desvantagem, com relação aos dois métodos anteriores, de necessitar de duas aplicações consecutivas do método, o que introduz erros numéricos importantes no resultado final, uma vez que os erros dos dois cálculos se acumulam; além da já imprecisa determinação da energia. Há também o problema da escolha de um valor de deslocamento angular adequado e sua relação com o número de pólos da máquina.

O que se observa, entretanto [15], é que em alguns casos particulares - como em máquinas de entreferro muito reduzido, onde a espessura da camada de elementos considerada para a aplicação do princípio do Trabalho Virtual (a região do entreferro) é da ordem de grandeza do passo de dente - os resultados obtidos tanto por esse método como pelo Tensor de Maxwell podem diferir razoavelmente do resultado real. De fato, para o Tensor de Maxwell a integração é efetuada sobre um contorno, e para o Trabalho Virtual, sobre uma camada de elementos, justamente aqueles onde o efeito de uma "discretização" pobre é mais pronunciado; refletem unicamente as informações de uma região do domínio: o entreferro.

Esses erros introduzidos pelo cálculo de integração no entreferro têm duas origens :

- 1) A relação entre o refinamento da malha no entreferro e o passo de dente;
- 2) A dissimetria de triângulos no entreferro (triângulos achatados).

Isso faz concluir que, antes do método a ser aplicado, a obtenção de resultados mais confiáveis está diretamente relacionada com uma boa qualidade da "discretização" do domínio, fato que leva à adoção, pela maioria dos softwares de simulação de fenômenos eletromagnéticos baseados no MEF (ex.: FLUX2D), de elementos de segunda ordem.

Não se dispendo de dados experimentais do torque, os resultados obtidos foram comparados aos analíticos. Observando os valores conseguidos pelos métodos do Trabalho Virtual e do Tensor de Maxwell, vê-se que estes apresentam resultados satisfatórios, como mostrado na Tabela IV.2, não se observando o mesmo com a aplicação da Variação da Energia, o que confirma as restrições quanto à precisão desse método.

Tanto o Trabalho Virtual como o Tensor de Maxwell apresentam, como esperado, valores praticamente iguais de torque, o que tornaria indiferente a escolha entre um ou outro método. No entanto, o princípio do Trabalho Virtual mostrou-se mais geral e de mais fácil implementação que o Tensor de Maxwell.

2 - REATÂNCIAS x_d E x_q

Foram apresentados dois métodos para a determinação das reatâncias segundo os eixos diretos e em quadratura para o motor de relutância. O primeiro traz a vantagem de se poder obter esses parâmetros diretamente a partir do vetor potencial magnético. Mas ambos apresentaram razoável consistência com os resultados medidos e analíticos, convalidando a metodologia apresentada.

APÊNDICE I

EXPRESSÃO DA FORÇA E DO TORQUE - TRABALHO VIRTUAL

Funções de forma para elementos de 1^a ordem

$$N_1 = u \qquad N_2 = v \qquad N_3 = 1-u-v$$

Matriz jacobiana do elemento G

$$G = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial u} \\ \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \sum_i \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} [x_i \ y_i]$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_1}{\partial u} &= 1 & , & \quad \frac{\partial N_2}{\partial u} = 0 & , & \quad \frac{\partial N_3}{\partial u} = -1 \\ \frac{\partial N_1}{\partial v} &= 0 & , & \quad \frac{\partial N_2}{\partial v} = 1 & , & \quad \frac{\partial N_3}{\partial v} = -1 \end{aligned}$$

$$G = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [x_1 \ y_1] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [x_2 \ y_2] + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} [x_3 \ y_3]$$

$$G = \begin{bmatrix} x_1 - x_3 & y_1 - y_3 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

$$|G| = \det G = (x_1 - x_3)(y_2 - y_3) - (x_2 - x_3)(y_1 - y_3)$$

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} = \sum_i \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial x_i}{\partial s} & \frac{\partial y_i}{\partial s} \end{bmatrix}$$

Força na direção y : F_y

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = 0 \qquad , \qquad \frac{\partial y_i}{\partial s} = P_i$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_y = \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_2 \\ 0 & p_2 - p_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial |G|}{\partial s} = \det \begin{bmatrix} 0 & y_1 - y_2 \\ 0 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & p_1 - p_2 \\ x_2 - x_3 & p_2 - p_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial |G|}{\partial s} = (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_3) - (x_2 - x_3) \cdot (p_1 - p_2)$$

$$B = \text{rot } A = \sum_i \text{grad } N_i \wedge A_i k$$

$$\text{grad } N_i = G^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial N_i}{\partial u} \\ \frac{\partial N_i}{\partial v} \end{bmatrix}$$

$$\text{grad } N_1 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{grad } N_1 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_2 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{grad } N_2 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 \\ x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\text{grad } N_2 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

$$B_x = \frac{1}{|G|} [(x_3 - x_2) \cdot A_1 + (x_1 - x_3) \cdot A_2 + (x_2 - x_1) \cdot A_3]$$

$$B_y = \frac{1}{|G|} [(y_3 - y_2) \cdot A_1 + (y_1 - y_2) \cdot A_2 + (y_2 - y_1) \cdot A_3]$$

$$B = \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = - \sum_i (G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_i) \wedge A_i k$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_y = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_3 \\ 0 & p_2 - p_3 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_y = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} 0 & (y_2 - y_3) \cdot (p_1 - p_3) + (y_3 - y_1) \cdot (p_2 - p_3) \\ 0 & (x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_1 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & p_1 - p_3 \\ 0 & p_2 - p_3 \end{bmatrix} \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_2 \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_1 = \frac{1}{|G|^2} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) \cdot [(y_2 - y_3) \cdot (p_1 - p_3) + (y_3 - y_1) \cdot (p_2 - p_3)] \\ (x_3 - x_2) \cdot [(x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3)] \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_1 \wedge A_1 k = \frac{A_1}{|G|^2} (x_3 - x_2) \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \\ (y_2 - y_2) \cdot (p_1 - p_3) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_2 \wedge A_2 k = \frac{A_2}{|G|^2} (x_1 - x_3) \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \\ (y_3 - y_2) \cdot (p_1 - p_3) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_3 \wedge A_3 k = \frac{A_3}{|G|^2} (x_2 - x_1) \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \\ (y_2 - y_2) \cdot (p_1 - p_3) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} = - \sum_i c_i G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_i \wedge A_i k =$$

$$= - \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \\ (y_3 - y_2) \cdot (p_1 - p_3) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix} \cdot \frac{1}{|G|} (A_1 (x_3 - x_2) + A_2 (x_1 - x_3) + A_3 (x_2 - x_1))$$

$$\therefore \frac{\partial B}{\partial s} \Big|_y = - \frac{B_x}{|G|} \begin{bmatrix} (x_3 - x_2) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \\ (y_3 - y_2) \cdot (p_1 - p_3) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix}$$

Força na direção y :

$$F_y = \sum_{\substack{\text{al.} \\ \text{dof}}} - \left(v_o B \tau \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{v_o}{2} B^2 \frac{1}{|G|} \frac{\partial |G|}{\partial s} \right) \cdot \Omega_o$$

onde, para caso bidimensional : $\Omega_o = \Delta_o \cdot L = \frac{1}{2} |G| \cdot L$, L o comprimento total do domínio em metros.

$$F_y \text{ (N/m)} = v_0 \sum_{\text{dof.}} \left\{ [B_x \ B_y] \cdot \frac{B_x}{|G|} \begin{bmatrix} (x_3-x_2) \cdot (p_1-p_3) + (x_1-x_3) \cdot (p_2-p_3) \\ (y_3-y_2) \cdot (p_1-p_3) + (y_1-y_3) \cdot (p_2-p_3) \end{bmatrix} - \right.$$

$$\left. \frac{B^2}{2} \cdot \frac{1}{|G|} \cdot \frac{\partial |G|}{\partial s} \right\} \cdot \frac{1}{2} |G|$$

$$F_y = \frac{v_0}{2} \sum_{\text{dof.}} \left\{ B_x^2 [(x_3-x_2) \cdot (p_1-p_3) + (x_1-x_3) \cdot (p_2-p_3)] + B_x B_y [(y_3-y_2) \cdot (p_1-p_3) + (y_1-y_3) \cdot (p_2-p_3)] - \frac{B^2}{2} [(x_3-x_2) \cdot (p_1-p_3) + (x_1-x_3) \cdot (p_2-p_3)] \right\}$$

$$F_y = \frac{v_0}{2} \sum_{\text{dof.}} \left\{ \frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) [(x_3-x_2) \cdot (p_1-p_3) + (x_1-x_3) \cdot (p_2-p_3)] + B_x B_y [(y_3-y_2) \cdot (p_1-p_3) + (y_1-y_3) \cdot (p_2-p_3)] \right\}$$

Força na direção x :

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = p_i, \quad \frac{\partial y_i}{\partial s} = 0$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_x = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} [p_1 \ 0] + \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} [p_2 \ 0] + \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix} [p_3 \ 0]$$

$$\frac{\partial G}{\partial s} \Big|_x = \begin{bmatrix} p_1 - p_3 & 0 \\ p_2 - p_3 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial |G|}{\partial s} = \det \begin{bmatrix} p_1 - p_3 & y_1 - y_3 \\ p_2 - p_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} = (y_2 - y_3) \cdot (p_1 - p_3) - (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3) =$$

$$= - [(y_3 - y_2) \cdot (p_1 - p_3) + (y_1 - y_3) \cdot (p_2 - p_3)]$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{ grad } N_1 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_1 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 - p_3 & 0 \\ p_2 - p_3 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_3 \\ x_3 - x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(y_3 - y_1)}{|G|^2} \begin{bmatrix} y_3 - y_1 & y_3 - y_1 \\ x_3 - x_1 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 - p_3 \\ p_2 - p_3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{(y_2 - y_3)}{|G|^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_3) \cdot (p_1 - p_3) + (y_3 - y_1) \cdot (p_2 - p_3) \\ (x_3 - x_1) \cdot (p_1 - p_3) + (x_1 - x_3) \cdot (p_2 - p_3) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_1 \wedge A_1 k = - \frac{A_1}{|G|^2} (y_2 - y_1) \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_2 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 - p_2 & 0 \\ p_2 - p_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-(y_1 - y_2)}{|G|^2} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 - p_2 \\ p_2 - p_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-(y_1 - y_2)}{|G|^2} \begin{bmatrix} (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_2 \wedge A_2 k = - \frac{A_2}{|G|^2} (y_1 - y_2) \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_3 = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_2 - y_1 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 & x_1 - x_2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} p_1 - p_2 & 0 \\ p_2 - p_1 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} y_1 - y_2 \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{-(y_2 - y_1)}{|G|^2} \begin{bmatrix} -(y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) - (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \end{bmatrix}$$

$$G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \text{grad } N_3 \wedge A_3 k = - \frac{A_3}{|G|^2} (y_2 - y_1) \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (y_2 - y_2) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_2) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial s} \Big|_x = - \sum_i \left(G^{-1} \frac{\partial G}{\partial s} \Big|_x \text{grad } N_i \right) \wedge A_i k =$$

$$= \frac{B_y}{|G|} \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (y_2 - y_2) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_2) \end{bmatrix}$$

$$F_x = - \sum_{\substack{\text{glf:} \\ \text{def:}}} \left(v_o \cdot B^T \frac{\partial B}{\partial s} + \frac{v_o}{2} B^2 \frac{1}{|G|} \frac{\partial |G|}{\partial s} \right) \cdot \Omega_o$$

$$F_x = \frac{v_0^2}{2} \sum_{\text{def.}} \left\{ - [B_x B_y] \cdot B_y \begin{bmatrix} (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \\ (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \end{bmatrix} - \right. \\ \left. \frac{1}{2} B^2 \left[- (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) - (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] \right\}$$

de

$$F_x = \frac{v_0^2}{2} \sum_{\text{def.}} \left\{ - B_x B_y \left[(x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] - \right. \\ \left. - B_y^2 \left[(y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] \right. \\ \left. + \frac{1}{2} B^2 \left[(y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] \right\}$$

$$F_x = \frac{v_0^2}{2} \sum_{\text{def.}} \left\{ - B_x B_y \left[(x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) \left[(y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] \right\}$$

$$F_x = - \frac{v_0^2}{2} \sum_{\text{def.}} \left\{ \frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \left[(y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] \right. \\ \left. + B_x B_y \left[(x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1) \right] \right\}$$

$$a = (x_2 - x_1) \cdot (p_1 - p_2) + (x_1 - x_2) \cdot (p_2 - p_1)$$

$$b = (y_2 - y_1) \cdot (p_1 - p_2) + (y_1 - y_2) \cdot (p_2 - p_1)$$

$$F_x = - \frac{v_0^2}{2} \sum_{\text{def.}} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot b + B_x B_y \cdot a \right]$$

$$\frac{\partial x_i}{\partial s} = p_i \begin{cases} 0 & \text{para os nós fixos} \\ 1 & \text{para os nós móveis} \end{cases}$$

$$F_y = - \frac{v_0^2}{2} \sum_{\text{def.}} \left[\frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) \cdot a + B_x B_y \cdot b \right]$$

$$\frac{\partial y_i}{\partial s} = p_i \begin{cases} 0 & \text{para os nós fixos} \\ 1 & \text{para os nós móveis} \end{cases}$$

EXPRESSÃO DO TORQUE

$$G = \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & y_1 - y_2 \\ x_2 - x_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial G}{\partial \theta} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial \theta} - \frac{\partial x_2}{\partial \theta} & \frac{\partial y_1}{\partial \theta} - \frac{\partial y_2}{\partial \theta} \\ \frac{\partial x_2}{\partial \theta} - \frac{\partial x_3}{\partial \theta} & \frac{\partial y_2}{\partial \theta} - \frac{\partial y_3}{\partial \theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} p_1 - p_2 & q_1 - q_2 \\ p_2 - p_3 & q_2 - q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial |G|}{\partial \theta} = \det \begin{bmatrix} p_1 - p_2 & y_1 - y_2 \\ p_2 - p_3 & y_2 - y_3 \end{bmatrix} + \det \begin{bmatrix} x_1 - x_2 & q_1 - q_2 \\ x_2 - x_3 & q_2 - q_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial |G|}{\partial \theta} = -(y_2 - y_3)(p_1 - p_2) - (y_1 - y_2)(p_2 - p_3) + (x_1 - x_2)(q_2 - q_3) + (x_2 - x_3)(q_1 - q_2)$$

$$\frac{\partial |G|}{\partial \theta} = (x_3 - x_2)(q_1 - q_2) + (x_1 - x_3)(q_2 - q_3) - [(y_3 - y_2)(p_1 - p_2) - (y_1 - y_3)(p_2 - p_3)]$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = - \sum_i \left[G^{-1} \frac{\partial G}{\partial \theta} \text{grad } N_i \right] \wedge A_i k$$

$$G^{-1} = \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} -(y_3 - y_2) & -(y_1 - y_3) \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = - G^{-1} \frac{\partial G}{\partial \theta} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = - \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} -(y_3 - y_2) & -(y_1 - y_3) \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} p_1 - p_2 & q_1 - q_2 \\ p_2 - p_3 & q_2 - q_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \\ B_y \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = - \frac{1}{|G|} \begin{bmatrix} -(y_3 - y_2) & -(y_1 - y_3) \\ x_3 - x_2 & x_1 - x_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} B_x \cdot (p_1 - p_2) + B_y \cdot (q_1 - q_2) \\ B_x \cdot (p_2 - p_3) + B_y \cdot (q_2 - q_3) \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = - \frac{1}{|G|} \cdot$$

$$\begin{bmatrix} -(y_2 - y_2) \cdot [B_x \cdot (p_1 - p_2) + B_y \cdot (q_1 - q_2)] - (y_1 - y_2) \cdot [B_x \cdot (p_2 - p_2) + B_y \cdot (q_2 - q_2)] \\ (x_2 - x_2) \cdot [B_x \cdot (p_1 - p_2) + B_y \cdot (q_1 - q_2)] + (x_1 - x_2) \cdot [B_x \cdot (p_2 - p_2) + B_y \cdot (q_2 - q_2)] \end{bmatrix}$$

$$\frac{\partial B}{\partial \theta} = - \frac{1}{|G|}$$

$$\begin{bmatrix} B_x [(y_2 - y_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(p_2 - p_2)] + B_y [(y_2 - y_2)(q_1 - q_2) + (y_1 - y_2)(q_2 - q_2)] \\ -B_x [(x_2 - x_2)(p_1 - p_2) + (x_1 - x_2)(p_2 - p_2)] - B_y [(x_2 - x_2)(q_1 - q_2) + (x_1 - x_2)(q_2 - q_2)] \end{bmatrix}$$

$$T = - \sum_{\text{dof}_i} \left[v_o B^T \frac{\partial B}{\partial \theta} + \frac{v_o}{2} B^2 \frac{1}{|G|} \frac{\partial |G|}{\partial \theta} \right] \cdot \Omega_o$$

$$T = - \frac{v_o}{2} \sum_{\text{dof}_i} \left[[B_x \ B_y] \frac{\partial B}{\partial \theta} |G| + \frac{B^2}{2} \cdot \frac{\partial |G|}{\partial \theta} \right] \quad (\text{N. m/m})$$

$$T = \frac{v_o}{2} \sum_{\text{dof}_i} \left\{ \frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \left[(x_2 - x_2)(q_1 - q_2) + (x_1 - x_2)(q_2 - q_2) + (y_2 - y_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(p_2 - p_2) \right] + B_x B_y [(x_2 - x_2)(p_1 - p_2) + (x_1 - x_2)(p_2 - p_2) + (y_2 - y_2)(q_1 - q_2) + (y_1 - y_2)(q_2 - q_2)] \right\}$$

$$a = (x_2 - x_2)(q_1 - q_2) + (x_1 - x_2)(q_2 - q_2)$$

$$b = (y_2 - y_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(p_2 - p_2)$$

$$c = (x_2 - x_2)(p_1 - p_2) + (x_1 - x_2)(p_2 - p_2)$$

$$d = (y_2 - y_2)(q_1 - q_2) + (y_1 - y_2)(q_2 - q_2)$$

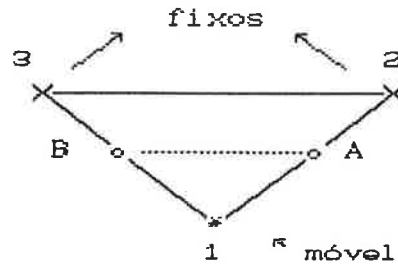
$$T = \frac{v_o}{2} \sum_{\text{dof}_i} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot (a + b) + B_x B_y \cdot (d - c) \right]$$

$$p_i = \frac{\partial x_i}{\partial \theta} = \begin{cases} 0 & , \text{para os nós fixos} \\ -r_i \cdot \sin \theta_i & , \text{para os nós móveis} \Rightarrow p_i = -y_i \end{cases}$$

$$q_i = \frac{\partial y_i}{\partial \theta} = \begin{cases} 0 & , \text{para os nós fixos} \\ r_i \cdot \cos \theta_i & , \text{para os nós móveis} \Rightarrow q_i = x_i \end{cases}$$

COMPARAÇÃO ENTRE AS EXPRESSÕES DO TRABALHO VIRTUAL E TENSOR DE MAXWELL PARA ELEMENTOS DE 1^a ORDEM TRIANGULARES

Ex. :



EXPRESSÃO DO TORQUE ; TENSOR DE MAXWELL

$$\Delta T = x_r \cdot \Delta F_y - y_r \cdot \Delta F_x \quad (T = \sum \Delta T)$$

$$\Delta F_x = v_0 \left[\frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) \cdot (y_B - y_A) + B_x \cdot B_y \cdot (x_A - x_B) \right]$$

$$\Delta F_y = v_0 \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot (x_A - x_B) + B_x \cdot B_y \cdot (y_B - y_A) \right]$$

$$\vec{r} = x_r \vec{i} + y_r \vec{j} \quad x_r = x_1 \quad y_r = y_1$$

$$x_A = (x_1 + x_2)/2 \quad x_B = (x_1 + x_3)/2$$

$$y_A = (y_1 + y_2)/2 \quad y_B = (y_1 + y_3)/2$$

$$\Delta F_x = \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) \cdot (y_2 - y_3) + B_x \cdot B_y \cdot (x_2 - x_3) \right]$$

$$\Delta F_y = \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot (x_2 - x_3) + B_x \cdot B_y \cdot (y_2 - y_3) \right]$$

$$\Delta T = \frac{v_0}{2} \left[B_x \cdot B_y \cdot x_1 \cdot (y_2 - y_3) + \frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) \cdot x_1 \cdot (x_2 - x_3) - \frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) \cdot y_1 \cdot (y_2 - y_3) - B_x \cdot B_y \cdot y_1 \cdot (x_2 - x_3) \right]$$

$$\Delta T = \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) [x_1(x_2 - x_3) - y_1(y_2 - y_3)] + B_x B_y [x_1(y_2 - y_3) + y_1(x_2 - x_3)] \right] \quad (1)$$

EXPRESSÃO DO TORQUE ; TRABALHO VIRTUAL

$$\Delta T = \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) (a+b) + B_x B_y (d-c) \right]$$

$$a = (x_1 - x_2)(q_1 - q_2) + (x_1 - x_2)(q_2 - q_1)$$

$$b = (y_1 - y_2)(p_1 - p_2) + (y_1 - y_2)(p_2 - p_1)$$

$$c = (x_1 - x_2)(p_1 - p_2) + (x_1 - x_2)(p_2 - p_1)$$

$$d = (y_1 - y_2)(q_1 - q_2) + (y_1 - y_2)(q_2 - q_1)$$

$$q_2 = q_1 = p_2 = p_1 = 0, \quad p_1 = -y_1, \quad q_1 = x_1$$

$$a = x_1(x_2 - x_1) \quad b = -y_1(y_2 - y_1)$$

$$c = -y_1(x_2 - x_1) \quad d = x_1(y_2 - y_1)$$

$$\Delta T = \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} (B_x^2 - B_y^2) [x_1(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1)] + B_x B_y [x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)] \right]$$

$$\Delta T = \frac{v_0}{2} \left[\frac{1}{2} (B_y^2 - B_x^2) [x_1(x_2 - x_1) - y_1(y_2 - y_1)] + B_x B_y [x_1(y_2 - y_1) + y_1(x_2 - x_1)] \right]$$

(2)

Pode-se observar, portanto, que a expressão (2) acima é exatamente aquela obtida pelo Tensor de Maxwell (1).

APÊNDICE II

CONDIÇÕES DE PERIODICIDADE PARA MÁQUINAS ELÉTRICAS ROTATIVAS

Tais condições exigem que os valores de potencial em determinados nós (sendo estes nós de fronteira) devem ser iguais aos de outros nós determinados (posicionados a um passo polar dos primeiros) em módulo, com sinal oposto.

O sistema de equações antes da imposição das condições de contorno é:

$$[S] [A] = [I] \quad (1)$$

$$[A] = [T].[X] \quad (2)$$

onde $[T]$ é uma matriz de transformação de dimensão $[n \times (n-m)]$, que introduz as condições de periodicidade e reduz a ordem do sistema original para $(n-m)$, sendo m o número de nós com condições de periodicidade. A matriz $[T]$ é construída da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} T_{ij} &= 1 && \text{se } A_i = X_j \\ T_{ij} &= -1 && \text{se } A_i = -X_j \\ T_{ij} &= 0 && \text{se } A_i \neq \pm X_j \end{aligned}$$

Aplicando a matriz de transformação $[T]$ em (1), resulta em:

$$[S] [T] [X] = [I] \quad (3)$$

Multiplicando os dois membros por $[T]^T$, fica:

$$[T]^T [S] [T] [X] = [T]^T [I] \quad (4)$$

E o novo sistema a ser resolvido será:

$$[G] [X] = [K] \quad (5)$$

com $[G] = [T]^T [S] [T] \quad (6)$

$$[K] = [T]^T [I] \quad (7)$$

e a solução do sistema, [A], será obtida por:

$$[A] = [T] [X] \quad (8)$$

BIBLIOGRAFIA

1 - ARTIGOS

- [1] CARDOSO, J.R. Formulação básica do Método dos Elementos Finitos para o Eletromagnetismo: Regime Estacionário. Apostila do curso - PEA - EPUSP - São Paulo.
- [2] CARPENTER, G.J. Surface-Integral Methods of Calculating Forces on Magnetized Iron Parts. Monograph, IEE 1959 - London
- [3] CHABU, I.E.; CARDOSO, J.R. Projeto de Motores Elétricos pelo Método dos Elementos Finitos: Comparação Analítica/Numérica/ Experimental. II.º Seminário Internacional de Motores Elétricos e Acionamentos Reguláveis - São Paulo - Maio 1991
- [4] COULOMB, J.L. A Methodology for the Determination of Global Electromechanical Quantities from a Finite Element Analysis and its Application to the Evaluation of Magnetic Forces, Torques and Stiffness. IEEE Transactions on Magnetics, Vol. MAG-19, N.º6, Nov-1983.
- [5] COULOMB, J.L.; MEUNIER, G. Finite Element Implementation of Virtual Work Principle for Magnetic or Electric Force and Torque Computation. IEEE Transac. on Magnetics, Vol. MAG-20, No. 5, Sep-1984.
- [6] HOOLE, S.R.H.; HOOLE, P.R.P On the Finite Element Force Computation from Two- or Three-dimensional

Magnetostatic Field. J. Appl. Phys., Vol. 57, No. 1,
15-April-1985.

[7] NAKATA, T.; TAKAHASHI, N.; FUJIWARA, K.; OKADA, Y.
Improvement of Convergence Characteristics of
Newton-Raphson Method for 3D Non-linear Magnetic Fields.
8th Conference on the Computation of Electromagnetic
Fields - Sorrento - Italy - pag. 1045-1048 - July
7-11 1991.

[8] SILVESTER, P.; CHARI, M.V.K. Finite Element Analysis of
Magnetically Saturated DC Machines - IEEE Transac. PAS -
Oct. 1970.

[9] TROWBRIDGE, C.W. Electromagnetic Computing : the Way
Ahead ? IEEE Transac. on Mag. - Vol. 24, No. 1, Jan.
1988.

2 - TESES

[10] COULOMB, J.L. Analyse Tridimensionnelle des Champs
Electriques et Magnétiques par la Méthode des Eléments
Finis . Grenoble 1981 - Thèse - Institut National
Polytechnique de Grenoble.

[11] LEBENSZTAJN, L. Desenvolvimento de Pré e Pós-processor
para o Método dos Elementos Finitos Aplicados à Conversão
Eletromecânica de Energia. Dissertação de Mestrado -
Escola Politécnica USP - 1989.

[12] MEUNIER, G. Application de la Méthode des Eléments

Finis à la Modélisation des Micromoteurs. - Thèse

- Institut National Polytechnique de Grenoble - Jun-1981.

[13] NABETA, S.Y. Solução de Problemas Magnetostáticos por Elementos Finitos utilizando o ICGG. Dissertação de mestrado - Escola Politécnica USP - 1990.

[14] RAFINEJAD, P. Adaptation de la Méthode des Eléments Finis à la Modélisation des Systems Electromecaniques de Conversion d'Energie. Thèse - INPG - Grenoble, Dec. 1987.

[15] REN, Z. Contribution à la Modélisation des Machines Electriques par Résolution Simultanée des Equations du Champ et des Equations du circuit d'Alimentation. Thèse - Institut National Polytechnique de Toulouse - Dec-1985.

[16] REYNE, G. Analyse Theorique et Experimentale des Phenomenes Vibratoires d'Origine Electromagnetique. Thèse - INPG - Grenoble - Dec. 1987.

3 - LIVROS

[17] ASSUMPÇÃO BASTOS, J.P. Eletromagnetismo e Cálculo de Campos. Editora da UFSC - Florianópolis - 1989.

[18] COULOMB, J.L.; SABONNADIÈRE, J.C. CAO en Electrotechnique. Hermes Publishing - 1985.

[19] COULOMB, J.L.; SABONNADIÈRE, J.C. Eléments Finis

et CAO. Hermes Publishing - 1986.

- [20] JORDÃO, R.G. Máquinas Síncronas. LTC/EDUSP - São Paulo 1980.
- [21] SILVESTER, P.P.; FERRARI, R.L. Finite Element for Electrical Engineers. Cambridge University Press - 2nd. Edition - 1990.
- [22] FLUX2D - Manual de Operação - LEG/CEDRAT.