LUCAS BLATTNER MARTINHO

CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO REGIME HARMÔNICO

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

São Paulo
2009

LUCAS BLATTNER MARTINHO

CONTRIBUIÇÕES À MODELAGEM DE SISTEMAS DE ATERRAMENTO PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS NO REGIME HARMÔNICO

Dissertação apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Mestre em Engenharia

Área de concentração:
Sistemas de Potência

Orientadora:
Profa. Dra. Viviane Cristine Silva

São Paulo
2009

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, de março de 2009.

Assinatura do autor _____

Assinatura do orientador _____

FICHA CATALOGRÁFICA

Martinho, Lucas Blattner
Contribuições à modelagem de sistemas de aterramento pelo
método dos elementos finitos no regime harmônico / L. B. Martinho. -- ed.rev. -- São Paulo, 2009.
93 p.

Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Energia e Automação Elétricas.

1. Eletromagnetismo 2. Método dos elementos finitos 3. Aterramento 4. Sistemas elétricos de potência I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Ener- gia e Automação Elétricas II. t.

AGRADECIMENTOS

À Profa. Dra. Viviane Cristine Silva, pela orientação desta pesquisa e pelas muitas sugestões na condução da mesma, sempre oferecidas de maneira objetiva e atenciosa. Agradeço-lhe também pela confiança e pela liberdade com que sempre pude conduzir minhas atividades no Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica, e através das quais me foi possível produzir o presente trabalho.

Ao Dr. Marcelo Facio Palin, pelo auxílio com aspectos computacionais inerentes à realização deste trabalho e pela permanente disposição em compartilhar seus amplos conhecimentos de programação com a biblioteca de elementos finitos do Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica. Agradeço-lhe ainda pela paciência e pelo desprendimento ao compartilhar esta sua experiência, pelos incentivos e, sobretudo, pela sua inestimável amizade.

Ao Prof. Dr. José Roberto Cardoso, pelo constante incentivo desde os primeiros anos de meu curso de graduação na Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e por haver, a esta mesma época, despertado em mim um interesse particular pelo Eletromagnetismo e pela área de cálculo numérico de campos. Agradeço-lhe também pelas oportunidades, todas elas desafiadoras, que me apresentou ao longo dos anos para que desenvolvêssemos atividades em parceria.

Ao Dr. Mario Leite Pereira Filho, pelo interesse, pelas sugestões e pelos incentivos a este trabalho; bem como pela compreensão e tolerância em nossas atividades conjuntas no Instituto de Pesquisas Tecnológicas do Estado de São Paulo ao longo do último ano ao longo do qual que este trabalho foi realizado.

Ao Dr. Cassiano Lobo Pires, colega no curso de língua russa e de alfabetização em cirílico e companheiro no cotidiano do Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado ao longo destes anos. Agradeço-lhe pelas múltiplas pequenas contribuições a este trabalho, decorrentes desta convivência diária, e também pelo exemplo de dedicação à pesquisa e ao estudo.

Aos amigos Otávio Luis de Oliveira e Silvia Titotto, que com a leitura minuciosa de versões preliminares deste documento ajudaram-me a detectar diversos pequenos erros de digitação e de formatação que ainda escapavam-me da atenção às vésperas do depósito desta dissertação.

Aos professores Carlos Antonio França Sartori, Ivan Eduardo Chabu, Luiz Lebensztajn, Luiz Natal Rossi e Silvio Ikuyo Nabeta, pelo convívio sempre amigável e cordial no Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica ao longo dos últimos anos. Do mesmo modo, agradeço também aos colegas pesquisadores Bruno Amado Rodrigues Filho, Cláudia Andrea da Silva, Djonny Weinzierl, Fabio Henrique Pereira, Mario Alves Dos Santos Junior, Maurício Caldora Costa, Maurício Salles e Mauro Massayoshi Sakamoto por esta mesma convivência e pela troca de experiências no cotidiano da vida acadêmica.

Finalmente, agradeço também a meus familiares, por haverem me proporcionado os meios, tanto os materiais quanto aqueles próprios do espírito humano, que se fizeram necessários para que o trabalho refletido nas próximas páginas deste documento pudesse ser levado a cabo.

“(...) E come quei che com lena affannata,
uscito fuor del pelago a la riva,
si volge a l’acqua perigliosa e guata,

cosí l’animo mio, ch’ancor fuggiva,
si volse a retro a rimirar lo passo (...)”

Dante Alighieri
Inferno, Canto I, versos 22-26

RESUMO

Este trabalho tem como objetivo fornecer contribuições ao estudo de sistemas de aterramento submetidos a correntes elétricas no regime permanente senoidal pelo Método dos Elementos Finitos.

Nele se discutem as motivações para a utilização deste procedimento numérico em problemas desta categoria, e mais especificamente para o uso da variante deste método com elementos finitos de aresta.

O tratamento completo necessário à construção das funções de forma para a aproximação local de grandezas vetoriais com elementos hexaédricos é nele desenvolvido e detalhado. Com estes resultados, uma aplicação computacional capaz de modelar o comportamento de uma haste de aterramento verticalmente enterrada no solo foi desenvolvida, utilizando-se para a discretização do domínio elementos finitos hexaédricos tri-lineares e quadráticos incompletos.

Esta aplicação computacional foi utilizada para o estudo da resposta em freqüência da impedância equivalente a aterramentos desta categoria em diferentes condições de solo e com as duas variedades de elemento hexaédrico anteriormente mencionados. Os resultados obtidos são então discutidos, bem como a validade da modelagem adotada para o problema físico aqui considerado.

Palavras-chave: Eletromagnetismo. Método dos Elementos Finitos. Aterramento. Sistemas Elétricos de Potência.

ABSTRACT

This work aims to provide contributions to the study of grounding systems subjected to electric currents at the sinusoidal steady state by the Finite Element Method.

Motivations for the use of this numerical procedure in problems of this category, and more specifically for the usage of the Edge Finite Element Method variant, are discussed in it.

The complete treatment required for building the shape functions for the local approximation of vector physical quantities with hexahedral finite elements is here developed and detailed. With these results a computer application capable of modeling the behavior of vertically buried grounding rods was developed, in which domain discretization is accomplished by the usage of both tri-linear and incomplete quadratic hexahedral finite elements.

This computer application was employed in the study of the frequency response of the impedance equivalent to grounding systems of this class at different soil conditions and with both hexahedral element varieties previously mentioned. The results obtained are then discussed, as well as the validity of the modeling adopted for this physical problem.

Keywords: Electromagnetism. Finite Element Method. Grounding Systems. Electric Power Systems.

LISTA DE ILUSTRAÇÕES

Figura 3.1 - O elemento hexaédrico tri-linear, com seus oito nós e doze arestas orientadas. Representação num sistema de coordenadas de referência com (a) suas dimensões, ordenação de nós e (b) numeração de arestas. 18

Figura 3.2 - O elemento hexaédrico quadrático incompleto, com seus vinte nós e trinta e seis arestas orientadas. Representação em um sistema de coordenadas de referência com (a) suas dimensões, ordenação de nós e (b) numeração de arestas. 18

Figura 3.3 – Duas arestas genéricas situadas ao longo de uma única direção em um elemento hexaédrico. 30

Figura 3.4 – A função de forma nodal N_6 (a) e a sua derivada parcial em relação à variável η (b) para o caso do elemento hexaédrico quadrático incompleto. 33

Figura 3.5 – Avaliação da função nodal N_6 e a da sua derivada parcial $\partial N_6/\partial\eta$ apenas ao longo da aresta 17 do elemento hexaédrico quadrático incompleto..... 34

Figura 4.1 – Representação esquemática do domínio Ω e de sua fronteira Γ, excitados por uma corrente fasorial I para a modelagem de sistemas de aterramento. 40

Figura 4.2 – Obtenção do bipolo equivalente a um sistema eletromagnético acessível através de dois terminais, através dos quais se processa a interação do mesmo com o universo circundante. 45

Figura 4.3 – Circuito RLC série. 51

Figura 4.4 – Fragmento do diagrama de classes e heranças da biblioteca LMAGLIB, exibindo as classes associadas ao elementos hexaédricos tri-linear (quadro *EdgeElementHexahedralFirstOrder*) e quadrático incompleto (quadro *EdgeElementHexahedralSecondOrder*). 56

Figura 4.5 - Haste de aterramento cilíndrica enterrada em solo homogêneo e isotrópico. 58

Figura 4.6 – Representação utilizada para a simulação do aterramento, com a malha de elementos finitos hexáedricos, com a haste destacada em vermelho e com a superfície do solo destacada em preto (a). As dimensões geométricas do domínio representado são dadas em termos dos parâmetros geométricos ℓ, D, B, PMLx, PMLy, e PMLz (b). 62

Figura 4.7 – Representação das duas regiões do domínio do problema. Em azul, o volume ocupado pelo solo. Em vermelho a região na periferia do domínio definida pelos parâmetros PMLx, PMLy e PMLz, que poderia ser utilizada com a técnica de *Perfectly Matched Layers.* 63

Figura 4.8 – Condições de contorno aplicadas à haste metálica e as fronteiras do domínio nas simulações realizadas. 65

Figura 4.9 – Resposta em freqüência da impedância equivalente de uma haste de aterramento de três metros de comprimento obtida com malha de elementos hexaédricos quadráticos incompletos. 67

Figura 4.10 – Resposta em freqüência da impedância equivalente de uma haste de aterramento de vinte e quatro metros de comprimento. obtida com malha de elementos hexaédricos quadráticos incompletos. 67

Figura 4.11 - Reposta em freqüência para o caso de simulação número 2 da Tabela 4.1 com os dois tipos de elementos finitos hexaédricos. A linha azul

vertical mostra o limite de freqüências até o qual o comprimento ℓ da haste metálica é menor que um décimo do comprimento de onda λ dos campos no solo. 70

Figura 4.12 - Reposta em freqüência para o caso de simulação número 3 da Tabela 4.1 com os dois tipos de elementos finitos hexaédricos. A linha azul vertical mostra o limite de freqüências até o qual o comprimento ℓ da haste metálica é menor do que um décimo do comprimento de onda λ dos campos no solo. 70

Figura 4.13 – Comparação dos valores de módulo da impedância numericamente determinados através do Método dos Elementos Finitos de Aresta com o modelo de linha de transmissão e com o Método dos Momentos de Grcev e Popov no caso de simulação 2. 74

Figura 4.14 – Tempo de processamento com o algoritmo SICCG para resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 2. 77

Figura 4.15 - Tempo de processamento com o algoritmo SICCG para resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 3. 77

Figura 4.16 – Número de iterações para convergência do algoritmo SICCG para resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 2. 79

Figura 4.17 – Número de iterações para convergência do algoritmo SICCG para a resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 3. 79

Figura 4.18 – Potencial escalar elétrico nas imediações da haste de aterramento. Valores em volts, decorrentes da injeção de uma corrente harmônica de 1000 ampères. 80

Figura 5.1 – O elemento hexaédrico tri-linear de referência. 92

Figura 5.2 – O elemento hexaédrico quadrático incompleto de referência. 92

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.1 - Correspondência entre funções de posição e derivadas parciais das funções de forma nodais para o elemento hexaédrico tri-linear de oito nós e doze arestas. 31

Tabela 3.2 - Correspondência entre funções de posição e derivadas parciais das funções de forma nodais para o elemento hexaédrico quadrático incompleto de vinte nós e trinta e seis arestas. 32

Tabela 4.1 – Combinações de comprimentos de haste e de resistividades de solo utilizados nas simulações realizadas 58

Tabela 4.2 – Parâmetros geométricos para o dimensionamento do domínio nas simulações de aterramento por meio de uma haste metálica. 61

Tabela 4.3 – Parâmetros de discretização dos comprimentos geométricos característicos do domínio para o caso de simulação número 2 68

Tabela 4.4 – Parâmetros de discretização dos comprimentos geométricos característicos do domínio para o caso de simulação número 3 69

Tabela A.1 – Funções de forma nodais do elemento hexaédrico tri-linear de referência 91

Tabela A.2 - Funções de forma nodais do elemento hexaédrico quadrático incompleto de referência 93

LISTA DE SÍMBOLOS

$\vec{A}$	vetor complexo associado ao potencial vetor magnético
$\vec{A}^e$	aproximação do potencial vetor magnético $\vec{A}$ no interior do elemento finito
a	raio de uma haste de aterramento cilíndrica
a_i	integração do potencial vetor magnético $\vec{A}$ ao longo da aresta i de um elemento finito
$\mathbb{B}$	base polinomial da aproximação no interior de um elemento finito
B	parâmetro de dimensionamento do domínio para o problema de modelagem de uma haste de aterramento
$\vec{B}$	vetor complexo associado ao campo densidade de fluxo magnético
C	capacitância do bipolo no modelo RLC-série equivalente
C'	capacitância distribuída de uma linha de transmissão
D	parâmetro de dimensionamento do domínio para o problema de modelagem de uma haste de aterramento.
$\vec{D}$	vetor complexo associado ao campo deslocamento elétrico
$\vec{E}$	vetor complexo associado ao campo elétrico
$\vec{E}^e$	aproximação do campo elétrico $\vec{E}$ no interior do elemento finito
$\vec{E}_t$	componente tangencial de $\vec{E}$ em relação a uma certa linha ou superfície
e_i	integração do campo elétrico $\vec{E}$ ao longo da aresta i de um elemento finito
F_i	ponto da extremidade final da aresta orientada i
$\vec{F}$	função vetorial genérica, incógnita de um problema de contorno
$\vec{F}^e$	aproximação de função vetorial $\vec{F}$ no interior do elemento finito

f_i	integração da função vetorial $\vec{F}$ ao longo da aresta i de um elemento finito
G'	condutância distribuída por unidade de comprimento
$\vec{H}$	vetor complexo associado ao campo intensidade magnética
$\vec{H}_t$	componente tangencial de $\vec{H}$ em relação a uma certa linha ou superfície
I	fasor de corrente elétrica
$\vec{J}$	vetor complexo associado ao campo densidade de corrente de condução elétrica
$\vec{J}_i$	componente da densidade de corrente $\vec{J}$ relativo a correntes induzidas
$\vec{J}_o$	componente da densidade de corrente $\vec{J}$ relativo a correntes impressas por fontes externas
j	unidade imaginária. $j = \sqrt{-1}$.
L	indutância do bipolo no modelo RLC-série equivalente
L'	indutância distribuída por unidade de comprimento de uma linha de transmissão
ℓ	comprimento de uma haste de aterramento cilíndrica
$\mathbb{N}$	conjunto dos números naturais
N_i	função de forma nodal associada ao i-ésimo nó de um elemento finito
$\vec{n}$	vetor unitário normal a uma dada superfície
na	número de arestas de um elemento finito
nn	número de nós de um elemento finito
O_i	ponto da extremidade de origem da aresta orientada i
P	potência ativa absorvida por bipolo operando no regime permanente senoidal

P_{perdas}	potência média fornecida ao dispositivo e consumida por perdas de energia
PMLx	parâmetro de dimensionamento do domínio para o problema de modelagem de uma haste de aterramento
PMLy	parâmetro de dimensionamento do domínio para o problema de modelagem de uma haste de aterramento
PMLz	parâmetro de dimensionamento do domínio para o problema de modelagem de uma haste de aterramento
Q	potência reativa absorvida por bipolo operando no regime permanente senoidal
R	resistência do bipolo no modelo RLC-série equivalente
$\vec{S}$	vetor de Poynting complexo
$\vec{t}$	vetor unitário tangente a uma linha
U	fasor da diferença de potencial elétrico entre os terminais de um dispositivo
V	potencial escalar elétrico
$\mathcal{v}$	potencial escalar elétrico modificado, ou integração no tempo no regime harmônico do potencial escalar elétrica. $\mathcal{v} = j\omega V$
$\mathcal{v}^e$	aproximação do potencial escalar elétrico modificado $\mathcal{v}$ no interior de um elemento finito
$\mathcal{v}_i$	valor do potencial escalar elétrico modificado $\mathcal{v}$ no i-ésimo nó de um elemento finito
$\vec{v}_i$	parcela vetorial da função de forma $\vec{w}_i$
W_E	energia elétrica média armazenada em um volume no regime permanente senoidal
W_M	energia magnética média armazenada em um volume no regime permanente senoidal

$\vec{w}_i$	função de forma vetorial associada à i-ésima aresta de um elemento finito
(x, y, z)	coordenadas cartesianas do sistema global do problema de contorno
(x_i, y_i, z_i)	coordenadas cartesianas do i-ésimo nó de um elemento finito no sistema global de coordenadas
Z	impedância complexa
Z_o	impedância característica de uma linha de transmissão
Γ	superfície fechada envolvendo o volume Ω do domínio
Γ_{E}	fragmento da superfície fronteiriça Γ do domínio sobre a qual o componente tangencial de $\vec{E}$ é conhecido como condição de contorno
Γ_{H}	fragmento da superfície fronteiriça Γ do domínio sobre a qual o componente tangencial de $\vec{H}$ é conhecido como condição de contorno
γ	constante de propagação de uma linha de transmissão com perdas no regime permanente senoidal. $\gamma = \sqrt{j\omega L'(G' + j\omega C')}$
δ	Profundidade de penetração dos campos eletromagnéticos no solo
δ_{ij}	delta de Kronecker. $\delta_{ij} = \begin{cases} 1, \text{se } i = j \\ 0, \text{se } i \neq j \end{cases}$
ε	permissividade elétrica de um meio isotrópico
ε_0	permissividade elétrica do vácuo
$[\varepsilon]$	tensor de permissividades elétricas de um meio material
λ	percurso de integração ou comprimento de onda
μ	permeabilidade magnética de um meio material isotrópico
μ_0	permeabilidade magnética do vácuo
$[\nu]$	tensor de relutividade magnética de um meio material

(ξ, η, ζ)	coordenadas cartesianas do sistema local associado a um elemento finito de referência
ρ	densidade volumétrica de cargas elétricas
ρ_s	resistividade elétrica do solo
$[\sigma]$	tensor de condutividades elétricas de um meio material
$[\dot{\sigma}]$	tensor de condutividades elétricas complexas de um meio material. $[\dot{\sigma}] = [\sigma] + j\omega[\varepsilon]$
Φ_i	função de posição escalar
ϕ	função escalar genérica, incógnita de um problema de contorno.
ϕ^e	aproximação da função escalar ϕ no interior de um elemento finito
ϕ_i	valor da função de forma escalar ϕ no i-ésimo nó de um elemento finito
ψ	coordenada cartesiana genérica do sistema local de um elemento de referência
Ω	domínio tridimensional no qual se considera o problema de contorno
Ω^e	fragmento do domínio correspondente ao volume de um elemento finito particular
ω	freqüência angular de pulsação

SUMÁRIO

Capítuo 1 - Introdução 1

1.1 Apresentação 1

1.2 Objetivos 3

1.3 Estrutura e organização do documento 4

Capítulo 2 - Estado da arte 6

2.1 Introdução 6

2.2 Modelagem de sistemas de aterramento 6

2.3 Modelagem de sistemas de aterramento com o Método dos Elementos Finitos 8

2.4 Representação de impulsos atmosféricos 9

Capítulo 3 - Elementos finitos de aresta 12

3.1 Introdução 12

3.2 Funções de forma vetoriais e o Método dos Elementos Finitos de aresta 17

3.3 Os elementos de aresta hexaédricos de oito nós tri-linear e de vinte nós quadrático incompleto 23

3.4 Construção das funções de posição e das funções de forma vetoriais em elementos hexaédricos 25

3.5 Resumo 34

Capítulo 4 - Modelagem de sistemas de aterramento no regime harmônico ... 36

4.1 Introdução 36

4.2 Formulação em dois potenciais: potencial vetor magnético $\vec{A}$ e potencial escalar elétrico V 37

4.3 Cálculo da impedância equivalente do aterramento 44

4.4 Aspectos gerais referentes à implementação da formulação em dois potenciais para a solução de sistemas de aterramento. 54

4.5 Detalhes referentes à aplicação em aterramentos elementares compostos por hastes verticalmente enterradas em solos isotrópicos e homogêneos. 57

4.6 Aplicação e discussão dos resultados obtidos 66

4.7 Resumo 81

Capítulo 5 - Conclusões 83

5.1 Observações gerais 83

5.2 Síntese das contribuições e trabalhos desenvolvidos 83

5.3 Sugestões para trabalhos posteriores e investigações futuras 85

REFERÊNCIAS 88

APÊNDICE A – Funções de forma nodais e suas respectivas derivadas parciais para elementos hexaédricos. 91

A.1 Elemento hexaédrico tri-linear (com oito nós) 91

A.2 Elemento hexaédrico quadrático incompleto (com vinte nós) 92

Capítulo 1

Introdução

1.1 Apresentação

A conexão de circuitos e de sistemas elétricos ao solo é uma prática necessária e freqüente no exercício da Engenharia Elétrica. Motivações para o aterramento de estruturas provêm de razões variadas, que são dependentes do contexto particular de cada aplicação considerada.

Um dos principais motivos para tanto é a necessidade de se manter dentro de níveis controlados de segurança a elevação de potencial de uma estrutura em relação ao solo, tanto durante a operação normal do sistema como durante a ocorrência de uma falha. Elevações de potencial excessivas em relação à terra tendem a representar tanto uma condição de perigo de choque elétrico para seres humanos quanto também um risco para a integridade e o bom funcionamento de outros equipamentos ou instrumentos elétricos existentes nos arredores.

Do ponto de vista de circuitos elétricos, conexões para a terra costumam ser representadas por uma impedância entre o local de aterramento da estrutura e um ponto remoto localizado num potencial de referência, que é arbitrariamente tomado como nulo. Com a finalidade de se preservar as elevações de potenciais em relação a esta referência dentro de níveis aceitáveis de segurança, torna-se então necessário projetar o aterramento de modo que esta impedância associada resulte com um módulo suficientemente pequeno.

Nesta condição, o escoamento de uma dada corrente elétrica através do aterramento fará com que a queda de potencial sobre a impedância representativa do aterramento (ou, equivalentemente, a elevação de potencial do ponto de aterramento em relação ao solo) se torne pequena e limitada de acordo com o desejado. Além disso, na eventualidade de uma contingência na

operação do sistema, uma pequena impedância de aterramento proporciona um caminho de fácil drenagem para correntes de falta, permitindo que estas alcancem níveis suficientemente intensos e capazes assim de fazer atuar os dispositivos de proteção existentes de forma eficaz para a imediata extinção do defeito.

Para que este trabalho do projeto de sistemas de aterramento possa ser realizado com precisão e para que requisitos como aquele apresentado nos parágrafos anteriores possam ser satisfatoriamente atendidos, exige-se desta forma que uma modelagem adequada do problema de escoamento de correntes elétricas pelo solo seja desenvolvida e utilizada. A sofisticação das técnicas empregadas com esta finalidade é, no entanto, função do grau de complexidade e de detalhamento que se pretende impor à análise e dos requisitos de projeto que se precisa satisfazer.

Por exemplo, costuma-se desejar que o aterramento das instalações elétricas represente um caminho apropriado também ao escoamento de correntes provenientes de descargas atmosféricas, constituindo um meio eficaz também para a limitação das elevações de tensão decorrentes deste fenômeno. Adicionalmente, além destes requisitos de segurança, por vezes há também o interesse em se determinar os níveis de campos eletromagnéticos resultantes de correntes elétricas drenadas pelo aterramento em estudos de interferência e de compatibilidade eletromagnética. Existem ainda aplicações em que a conexão para terra desempenha funções não convencionais, e que conduzem assim a peculiaridades na sua especificação. É caso, por exemplo, de sistemas monofilares de distribuição de energia, nos quais o solo é utilizado como caminho de retorno de corrente e nos quais o aterramento passa a constituir parte ativa e integrante da rede de distribuição de eletricidade.

Particularidades ou complicadores como os destes exemplos enumerados não são incomuns, e acabam por conduzir à necessidade de se levar uma maior quantidade de fenômenos em conta e de se refinar o modelo físico contemplado na análise para o projeto do aterramento. Ao se realizar o estudo de correntes provenientes de descargas atmosféricas escoando pela conexão à terra, constata-se que fenômenos ondulatórios de propagação podem se revelar significativos. Em outras ocasiões, pelo fato de correntes intensas terem

a capacidade de ionizar o solo ao atravessá-lo, modelos mais elaborados se fazem necessários para que haja a possibilidade de se computar este efeito.

Diante da realidade imposta por estes e outros exemplos, o uso de um modelo eletromagnético completo e o emprego de técnicas baseadas na resolução numérica das equações de Maxwell para a análise e para o projeto de sistemas de aterramento acabam se impondo como a única abordagem capaz de oferecer um tratamento rigoroso a esta categoria de problemas.

Entre as múltiplas vertentes de abordagens numéricas documentadas na literatura científica e dedicadas à resolução das equações de Maxwell aplicadas a problemas de aterramento elétrico, destaca-se aqui entre outras a classe de técnicas baseadas no Método dos Elementos Finitos. Estas se caracterizam pela sua generalidade, robustez e capacidade de proporcionar uma representação completa de uma ampla diversidade de fenômenos.

É neste contexto de aplicações numéricas baseadas no Método dos Elementos Finitos direcionadas à análise de sistemas de aterramento que este trabalho se insere, de acordo com os objetivos enumerados na próxima secção.

1.2 Objetivos

A proposta central deste trabalho consiste em se apresentar algumas contribuições ao estudo e à modelagem de sistemas de aterramento no regime permanente senoidal com o uso do Método dos Elementos Finitos.

Particularmente, nele é apresentado o detalhamento do uso de elementos finitos de aresta hexaédricos para a discretização do domínio tridimensional representativo do aterramento e das suas imediações. A motivação para o uso de tal abordagem será adiante devidamente tratada, e os resultados com ela obtidos também serão relatados e discutidos.

Além disto, neste texto também se encontra descrito o desenvolvimento de ferramentas computacionais complementares aos procedimentos numéricos próprios da modelagem pelo Método dos Elementos Finitos, e que se destinam

ao cálculo da impedância equivalente do aterramento e à análise e à exibição de resultados.

Deste modo, o desenvolvimento deste trabalho pretende fornecer alguns dos subsídios necessários ao desenvolvimento de uma aplicação confiável e genérica destinada à análise de sistemas de aterramento em uma ampla faixa de freqüências, contemplando, portanto, desde os casos associados a defeitos no sistema elétrico nas freqüências de 50 ou 60 hertz como também problemas de correntes de descargas atmosféricas dotadas de componentes espectrais até o limite superior de freqüência de algumas dezenas de megahertz.

1.3 Estrutura e organização do documento

Esta secção encarrega-se de oferecer um breve esclarecimento a respeito do teor de cada um dos capítulos deste documento.

No capítulo 2 deste texto discutem-se brevemente a cronologia de avanços e o estado da arte em áreas relacionadas àquelas deste trabalho. A saber, estas dizem respeito à modelagem de sistemas de aterramento, a formulações numéricas e ao uso do Método dos Elementos Finitos de aresta, e à representação de impulsos atmosféricos.

A exposição dos desenvolvimentos deste trabalho inicia-se no capítulo 3. Nele se discute o uso de elementos finitos de aresta na modelagem de problemas tridimensionais de Eletromagnetismo em geral e para o caso de sistemas de aterramento em particular. Também é nele proposto um procedimento geral para a construção das funções de forma vetoriais dos elementos hexaédricos de aresta, que são aqueles utilizados nas simulações deste trabalho.

Os resultados deste capítulo constituem o subsídio básico para a matéria tratada no capítulo 4. Neste capítulo, por sua vez, é apresentada a formulação numérica com o Método dos Elementos Finitos de aresta utilizada na modelagem de sistemas de aterramento e os resultados com ela obtidos. Especial destaque é dado aos resultados produzidos com o uso do elemento

finito de aresta hexaédrico de vinte nós e trinta e seis arestas, cuja utilização representa uma inovação em relação a trabalhos anteriormente desenvolvidos.

O capítulo 5 encerra este documento, fazendo uma breve síntese das contribuições decorrentes dos esforços realizados neste trabalho. Nele encontram-se expostas também propostas para desenvolvimento futuro e para o aprimoramento das técnicas aqui desenvolvidas em eventuais trabalhos posteriores.

Capítulo 2

Estado da arte

2.1 Introdução

A compreensão e a análise dos fenômenos envolvidos no escoamento de correntes elétricas pelo solo e o projeto de sistemas de aterramento constituem problemas clássicos de Engenharia Elétrica. Deste modo, diversas têm sido as abordagens utilizadas ao longo do tempo no tratamento desta categoria de problemas.

Neste capítulo, alguns dos trabalhos representativos dos esforços na modelagem de sistemas de aterramento serão apresentados, com destaque especial para aqueles que de alguma forma constituíram a base dos desenvolvimentos contidos nos próximos capítulos deste documento ou que tiveram alguma influência sobre ele.

Esta revisão bibliográfica encontra-se a seguir organizada em três temas principais, cada um deles correspondente a uma das próximas secções deste capítulo. O primeiro destes temas diz respeito à modelagem de sistemas de aterramento em geral. O segundo, por sua vez, aborda o uso em particular do Método dos Elementos Finitos nesta modelagem. A terceira destas secções encerra o capítulo, trazendo algumas informações a respeito da representação e da modelagem de descargas atmosféricas.

2.2 Modelagem de sistemas de aterramento

Preocupações com a segurança de seres humanos e com a proteção de equipamentos encontram-se entre os principais motivadores para o estudo dos sistemas de aterramento, de acordo com aquilo que já se argumentou no

capítulo anterior. Naturalmente, tais preocupações remontam a épocas anteriores ao período contemporâneo em que o uso de computadores aplicados ao cálculo numérico de problemas de engenharia tornou-se algo corriqueiro e amplamente difundido.

Deste modo, a alternativa de que se dispunha neste tempo para o tratamento do problema de escoamento de correntes pelo solo era o uso de técnicas puramente analíticas. São próprios desta época trabalhos pioneiros como aquele de Sunde [1] e o de Rudenberg [2], que persistem como referências importantes apesar das limitações resultantes das várias hipóteses simplificadoras que se fazem necessárias para tornar viável o tratamento analítico. Entre outros resultados, nestes textos os autores obtêm expressões para a resistência, a capacitância e a indutância distribuídas de algumas configurações de aterramento.

Conhecidos estes parâmetros distribuídos e adotando-se um modelo de linhas de transmissão, torna-se possível derivar expressões que regem o comportamento, frente a variações de freqüência, da impedância equivalente do arranjo considerado, ao menos para os casos de configurações elementares de sistemas de aterramento. É o que Bourg, Sacepe e Debu fazem para uma única haste metálica cravada no solo, com o objetivo de comparar o modelo assim obtido com resultados de medições realizadas em um arranjo experimental [3]. Grcev e Popov utilizam-se também desta mesma modelagem ao investigarem a validade de modelos simplificados de circuitos elétricos para a impedância de aterramentos [4].

Trabalhos de natureza experimental como aquele de Bourg referenciado no parágrafo anterior parecem constituir exceções no universo de publicações relacionadas à área de aterramento elétrico. Tão logo o uso amplo e intensivo de computadores se tornou praticável para a solução de problemas de engenharia, transferiu-se o foco de novos desenvolvimentos do tratamento analítico para a modelagem computacional, esta por sua vez realizada através das mais variadas abordagens.

Embora diversas e variadas, estas abordagens podem ser classificadas em três categorias básicas [5]. A primeira delas é aquela das baseadas na aplicação direta do modelo eletromagnético contido nas equações de Maxwell.

A segunda, por sua vez, diz respeito a técnicas derivadas da teoria de circuitos elétricos e do uso de parâmetros distribuídos. Por fim, a última destas três categorias é aquela dos trabalhos que de alguma maneira se valem de uma combinação dos dois métodos anteriores.

A primeira das categorias do parágrafo anterior, a de formulações numéricas que se apóiam em um modelo eletromagnético completo, é normalmente considerada como sendo aquela mais apta a oferecer uma representação adequada para os fenômenos físicos envolvidos em problemas de aterramento, embora seja também tida como aquela mais complexa.

A opção por esta abordagem do uso do modelo completo resulta invariavelmente na tarefa de se procurar a solução para as equações do Eletromagnetismo associadas ao problema através do uso de algum procedimento numérico. Trabalhos como o de Olsen [6] e o de Grcev [7] utilizam para isto o Método dos Momentos, enquanto que o uso do Método dos Elementos Finitos em sistemas de aterramento remonta às obras de Cardoso [8] e Trlep [9].

2.3 Modelagem de sistemas de aterramento com o Método dos Elementos Finitos

A motivação para o uso do Método dos Elementos Finitos na análise de sistemas de aterramento pode ser atribuída a algumas de suas propriedades. Através dele, geometrias complexas e múltiplos materiais podem ser tratados com alguma facilidade, características estas que se mostram úteis na representação de solos e de condutores.

Naqueles trabalhos pioneiros com o Método dos Elementos Finitos referenciados no último parágrafo da secção anterior, a análise realizada em geral se restringia ao regime estacionário de escoamento de correntes elétricas, e utilizavam-se elementos finitos e formulações nodais. Com a finalidade de permitir a consideração de condições transitórias de operação, decorrentes, por exemplo, de correntes elétricas provenientes de impulsos

atmosféricos, modelagens com o Método dos Elementos Finitos no regime harmônico também foram concebidas e representam o objeto de trabalhos como o de Nekhoul [10].

O uso de elementos finitos de aresta em substituição aos elementos e formulações nodais convencionais é vantajoso e se faz necessário por conta das razões que serão apresentadas no próximo capítulo deste texto. Aplicações em Eletromagnetismo que se utilizam desta variedade de elemento finito podem ser encontradas em trabalhos como os de Kameari [11] e Wang [12], embora a conceituação deste tipo de elemento finito seja atribuída ao trabalho anterior de Whitney [13].

No contexto da modelagem de sistemas de aterramento pelo Método dos Elementos Finitos com esta classe diferenciada de elementos, os primeiros trabalhos se devem à Silva [14]. Para o caso do regime permanente senoidal, esta autora utiliza uma formulação do Método dos Elementos Finitos de aresta designada na literatura científica pela denominação *AV-3D ungauged*, de acordo com o trabalho de Bíró [15]. A discretização do domínio é por ela realizada apenas com elementos finitos vetoriais hexaédricos de oito nós e doze arestas, de acordo com o equacionamento proposto por Ida e Bastos [16] para as suas funções de forma vetoriais.

Ainda no trabalho de Silva, a representação do domínio do aterramento é truncada através de camadas de materiais absorvedores anisotrópicos fictícios (PML – *perfectly matched layers*) [17]. Finalmente, a excitação do aterramento neste trabalho é realizada através de corrente, que é introduzida na simulação através de uma condição de contorno convenientemente aplicada ao nó da malha de elementos finitos associado ao ponto de conexão do aterramento com o sistema elétrico.

2.4 Representação de impulsos atmosféricos

Menção já foi feita em passagem anterior para o fato de que, com a finalidade de se representar a resposta transitória de um sistema de aterramento, uma

abordagem comum é aquela de se desenvolver uma modelagem no regime permanente senoidal para a sua operação.

A hipótese fundamental adotada e utilizada em conjunto com estas modelagens para a análise de respostas transitórias é o fato de que o aterramento constituiria um sistema linear. Deste modo, a resposta temporal a uma entrada genérica poderia ser reconstituída a partir da combinação linear das respostas deste sistema aos múltiplos componentes harmônicos desta mesma entrada.

Embora esta hipótese de linearidade seja a rigor inválida, ela representa uma grande simplificação na modelagem do sistema de aterramento quando se utiliza uma abordagem fundamentada na teoria eletromagnética. Por este motivo, ela é freqüentemente adotada e exemplos de sua aplicação encontram-se em trabalhos como aquele de Xiong e Dawalibi [18] e o de Grcev e Heimbach [19].

Diante de tudo isto, se a reposta transitória que se busca é aquela decorrente de um impulso atmosférico escoando pelo aterramento, conclui-se então que uma necessidade básica destas abordagens é aquela de se dispor de uma função temporal capaz de descrever a corrente elétrica injetada por uma descarga atmosférica na base do seu canal e na ocasião da sua incidência.

A tentativa de se caracterizar as formas de onda de corrente elétrica associadas a descargas atmosféricas representa um trabalho experimental e estatístico por excelência. A medida de parâmetros próprios dos impulsos atmosféricos para fins de engenharia foi realizada e compilada por autores como Berger [20] e Anderson [21], e a partir destes resultados expressões analíticas para a corrente elétrica na base do canal em função do tempo puderam ser propostas.

Entre algumas possibilidades de funções para esta finalidade, o trabalho de Heidler [22] sugere o uso de uma expressão simples e de um procedimento gráfico para a adequada representação da corrente elétrica injetada por uma descarga a partir dos parâmetros estatísticos que a caracterizam. Com o auxílio de uma função analítica de corrente dada em termos do tempo, como esta proposta por Heidler, torna-se então possível extrair os componentes

harmônicos relevantes para o uso na análise transitória considerada em parágrafos anteriores desta secção.

Capítulo 3

Elementos finitos de aresta

3.1 Introdução

O Método dos Elementos Finitos é um procedimento numérico utilizado na busca de soluções aproximadas para uma equação diferencial. A função procurada como solução para um problema numérico, além de satisfazer a equação diferencial considerada, está em geral também submetida a condições de contorno nas fronteiras de seus domínios de definição. Em formulações tidas como clássicas desta técnica, a primeira etapa na aplicação deste método é representada pela obtenção de uma discretização deste domínio através de uma malha de elementos finitos. Para o caso de domínios tridimensionais, os elementos finitos desta malha correspondem tipicamente a figuras poliédricas como tetraedros, hexaedros e prismas.

Dentro de cada uma destas figuras, define-se um conjunto de nn pontos particulares ou "nós", entre os quais se encontram os vértices do elemento finito e eventualmente outros pontos complementares. No interior do volume de cada uma destas pequenas porções do domínio, a função escalar incógnita do problema de contorno considerado é aproximada por uma combinação linear de nn funções localmente definidas. Estas funções, que recebem o nome de funções de forma ou de funções de interpolação, são simbolizadas genericamente por N_i e satisfazem a propriedade dada pela equação

$$N_i(x_j, y_j, z_j) = \delta_{ij}. \tag{3.1}$$

Na eq. (3.1), δ_{ij} é o delta de Kronecker e $i, j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq nn,\ 1 \leq j \leq nn$. Conseqüentemente, nesta expressão x_j, y_j e z_j representam as coordenadas dos nós do elemento no sistema de coordenadas globais do domínio considerado. Denotando-se por $\phi(x, y, z)$ a função escalar incógnita do

problema de contorno, a combinação linear aproximadora a que se fez menção anteriormente pode ser colocada na forma

$$\phi^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{nn} \phi(x_i, y_i, z_i)\, N_i(x,y,z). \tag{3.2}$$

O sobrescrito e contido na expressão anterior é utilizado para ressaltar o fato de que a aproximação representada pelo somatório do segundo membro é dada para cada elemento da malha considerado individualmente. Em uma notação mais sintética, esta mesma equação pode ser escrita de forma equivalente como

$$\phi^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{nn} \phi_i\, N_i. \tag{3.3}$$

Tomando-se então esta aproximação local para cada um dos elementos da malha, procede-se em seguida com a aplicação do método dos resíduos ponderados ou de técnicas de cálculo variacional. Em ambos os casos, obtém-se após esta etapa um sistema de equações em termos dos valores ϕ_i, que são aqueles assumidos pela função incógnita ϕ em cada um dos nós da malha de elementos finitos. Com a incorporação das condições de contorno apropriadas ao problema, a solução deste sistema conduz finalmente à resposta aproximada da equação diferencial.

Por conta do tipo de aproximação utilizado dentro de cada elemento finito, tanto as funções de forma N_i quanto o próprio Método dos Elementos Finitos aplicado com esta formatação são ditos “nodais”. Em conjunto, representam a escolha natural do tipo de elemento finito e a estratégia mais imediata a ser adotada nos casos em que aquilo que se almeja é a determinação de grandezas de natureza escalar, tais como o potencial elétrico associado a um problema de contorno de eletrostática, por exemplo.

Esta abordagem, classificada em passagem anterior como tradicional e clássica, é aquela cronologicamente mais antiga e a que é amplamente utilizada em domínios bidimensionais.

A extensão do uso de elementos finitos nodais para aplicações tridimensionais em Eletromagnetismo é intuitiva e automática, e por conta disto as funções nodais de forma N_i encontram-se fartamente tabeladas e registradas na literatura científica para os mais variados tipos de elementos finitos volumétricos de referência que se deseje ou necessite empregar [23]. Contudo, e de forma contraditória, o êxito desta empreitada em três dimensões é relativo. O motivo para isto são dificuldades adicionais que surgem na modelagem de problemas eletromagnéticos tridimensionais.

Dentro do universo de aplicações bidimensionais, as formulações numéricas dos problemas de eletricidade e magnetismo mais usuais ou são construídas diretamente em termos de grandezas escalares ou são realizadas em termos de grandezas vetoriais que, por conta de considerações de simetria, degeneram-se em campos unidirecionais (e que são passíveis de serem representados, desta forma, também por uma única função escalar). No entanto, quando em alguma formulação numérica se faz necessário representar diretamente e de forma discretizada uma grandeza vetorial genérica, a alternativa de que se dispõem quando se utilizam apenas funções de forma do tipo nodal é o tratamento em separado de cada componente do campo considerado, que individualmente também se reduzem simplesmente a funções escalares. Nestes casos, dentro de cada elemento da malha cada um dos componentes da grandeza vetorial é representado por uma expressão similar àquela da eq. (3.3).

Surge deste fato a primeira das dificuldades mencionadas, e que diz respeito à continuidade da grandeza vetorial discretizada entre elementos adjacentes da malha de elementos finitos. Quando possuem uma face comum, dois elementos vizinhos e adjacentes compartilham também os nós da malha de elementos finitos localizados sobre esta face. Pelo fato destes nós pertencerem simultaneamente aos dois elementos e pelo fato da aproximação de grandezas vetoriais com funções de forma nodais ser realizada componente por componente em conformidade com a discussão do parágrafo anterior, verifica-se que o uso desta abordagem implica a continuidade de todos os componentes da grandeza vetorial em questão na face compartilhada por estes elementos vizinhos. O resultado final desta realidade é o fato de que, se

porventura cada um dos elementos pertencer a um meio material de composição diferente, esta imposição de continuidade a todos os componentes produz, evidentemente, uma situação fisicamente incorreta e em desacordo com aquilo que se espera da física dos materiais [16] [17].

Uma segunda dificuldade que se impõem decorre ainda desta necessidade de se aplicar a interpolação nodal a cada um dos três componentes espaciais das grandezas vetoriais representadas. Se em duas dimensões esta era uma necessidade que ocasionalmente podia ser contornada por particularidades nas formulações mais freqüentemente consideradas, o mesmo não se pode dizer para as aplicações tridimensionais em Eletromagnetismo. Decorre então deste fato que a aplicação de elementos finitos nodais à discretização de grandezas físicas vetoriais introduz um aumento significativo de incógnitas no sistema de equações construído com o Método dos Elementos Finitos: se para um problema formulado em termos de uma única função escalar existe uma única incógnita associada a cada nó, para um problema posto em termos da discretização direta de uma função vetorial este número é multiplicado por três. A implicação disto é, evidentemente, um incremento no custo computacional e no espaço de armazenamento necessário envolvidos na solução numérica do problema.

Outra questão grave e ainda existente é o fato de que o uso de elementos finitos nodais pode em certas condições conduzir à obtenção de soluções numéricas não-físicas. Estas soluções, conhecidas como “soluções espúrias” na literatura especializada, surgem entre as respostas calculadas por não se garantir com o uso das funções de forma nodais usuais a continuidade das derivadas das funções de interpolação entre os elementos da malha de elementos finitos [16] [17].

Diante de tudo isto, pode-se concluir que a aplicação do Método dos Elementos Finitos a problemas tridimensionais de Eletromagnetismo é uma tarefa permeada de dificuldades decorrentes da própria natureza do elemento finito do tipo nodal. Felizmente, ao longo do tempo, alternativas para se tentar contornar estas dificuldades puderam ser concebidas. Entre elas, destacam-se o desenvolvimento e o aprimoramento de técnicas caracterizadas pelo uso de uma outra variedade de elemento finito como alternativa às abordagens nodais

originais. Este variedade de elemento finito é dita “de aresta” (ou “vetorial”), em oposição aos elementos nodais convencionais.

Na próxima secção, este conceito de elemento finito de aresta será apresentado com maior detalhe e desenvolvido. Já na terceira e quarta partes deste capítulo, o objeto central da discussão passará a ser, conforme se poderá verificar, o detalhamento de um procedimento para a geração das funções de forma vetoriais associadas a um tipo particular de elemento de aresta, o elemento hexaédrico. Evidentemente, o conhecimento de tais funções é essencial para o uso desta variedade de elementos na solução de problemas de contorno com o Método dos Elementos Finitos de aresta.

Mecanismos genéricos para a construção de tais funções encontram-se documentados na literatura especializada [12]. Mais do que isto, tais funções encontram-se inclusive explicitamente tabeladas em fontes disponíveis para consulta bibliográfica para o caso particular do elemento hexaédrico de referência de oito nós e doze arestas [16] e, conforme já foi explicitado no capítulo anterior, foram empregadas com sucesso na simulação de sistemas de aterramento.

Porém, e ao menos entre as referências bibliográficas a que se teve acesso, o relato deste mecanismo de construção ora é vago, ora é falho. O resultado desta constatação é o de que a construção de elementos genéricos de aresta para o livre uso na modelagem de problemas físicos de interesse fica então dificultada e prejudicada. Neste sentido, esta parte do presente trabalho vem preencher uma lacuna existente neste segmento da aplicação do Método dos Elementos Finitos.

Uma vez suprimida esta dificuldade com os desenvolvimentos que se seguirão, no próximo capítulo tais elementos serão aplicados à modelagem de sistemas de aterramento no regime harmônico, num esforço de se construir uma metodologia para o tratamento desta classe de problemas que seja livre daquelas questões anteriormente relatadas e associadas ao uso de elementos nodais.

3.2 Funções de forma vetoriais e o Método dos Elementos Finitos de aresta

A idéia central contida no uso de elementos finitos de aresta diz respeito à utilização de um procedimento alternativo para a aproximação local de uma grandeza vetorial no interior das pequenas porções do domínio associadas a cada elemento. Se, de acordo com o conteúdo da secção anterior, com o uso de elementos nodais convencionais este trabalho seria realizado pela aplicação da eq.(3.3) aos três componentes do campo vetorial em cada elemento da malha, para um elemento tridimensional de aresta a aproximação análoga é dada por

$$\vec{F}^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{na} f_i\, \vec{w}_i(x,y,z). \tag{3.4}$$

Nesta expressão, $\vec{F}^e$ é a grandeza vetorial a ser aproximada dentro do elemento. A quantidade na é o número de arestas definidas pelos nn nós do elemento considerado. Entre estas arestas, que nada mais são do que segmentos orientados definidos por pares de nós, existem aquelas situadas sobre as próprias arestas da figura geométrica correspondente ao elemento (e desta forma coincidentes com elas ou com parte delas). Dependendo-se da quantidade e do posicionamento dos nós do elemento, outras arestas eventualmente podem ser definidas sobre as faces do elemento. A interpretação do conjunto de escalares f_i associado ao somatório desta expressão será adiante explicitada. Em analogia com as funções de forma nodais N_i, as funções $\vec{w}_i$ recebem o nome de funções de forma vetoriais.

A Figura 3.1 e a Figura 3.2 representam dois exemplos de elementos finitos de aresta, em particular aqueles que serão adiante empregados nos casos de simulação de sistemas de aterramento deste trabalho. O primeiro deles dispõe de oito nós e doze arestas orientadas ($nn = 8$ e $na = 12$). O segundo, por sua vez, possui vinte nós e trinta e seis arestas ($nn = 20$ e $na = 36$).

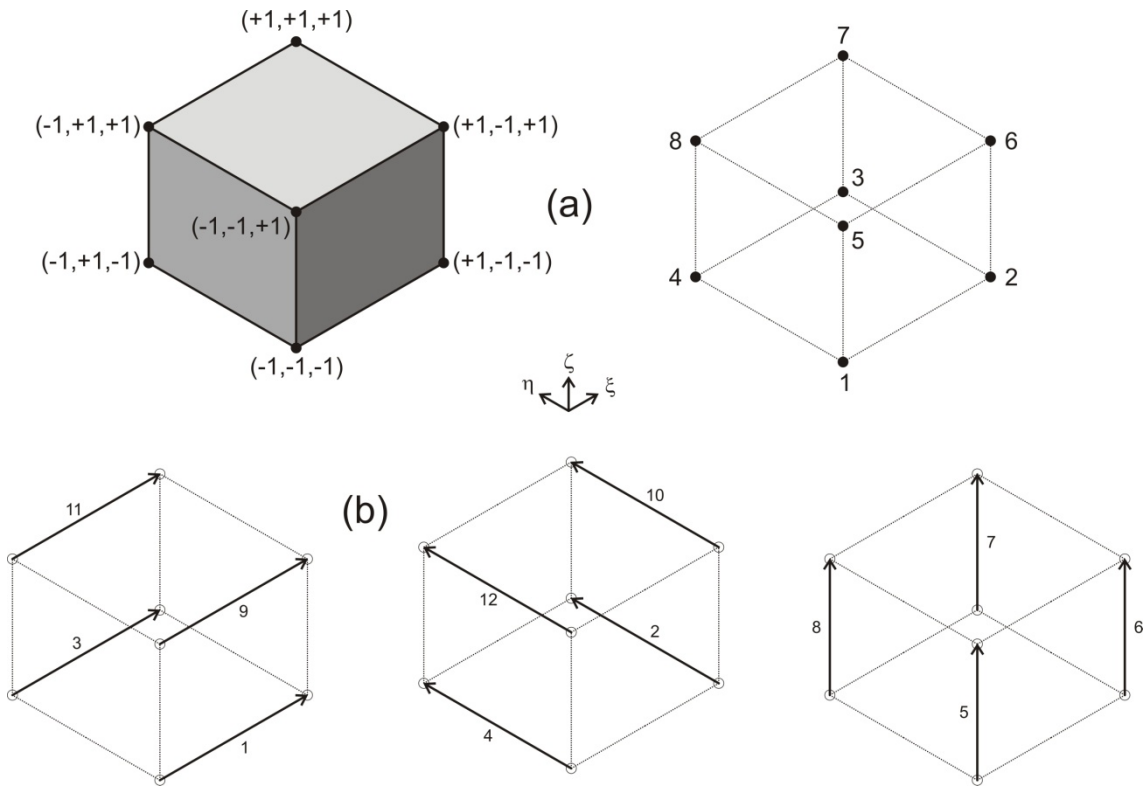

Figura 3.1 - O elemento hexaédrico tri-linear, com seus oito nós e doze arestas orientadas. Representação num sistema de coordenadas de referência com (a) suas dimensões, ordenação de nós e (b) numeração de arestas.

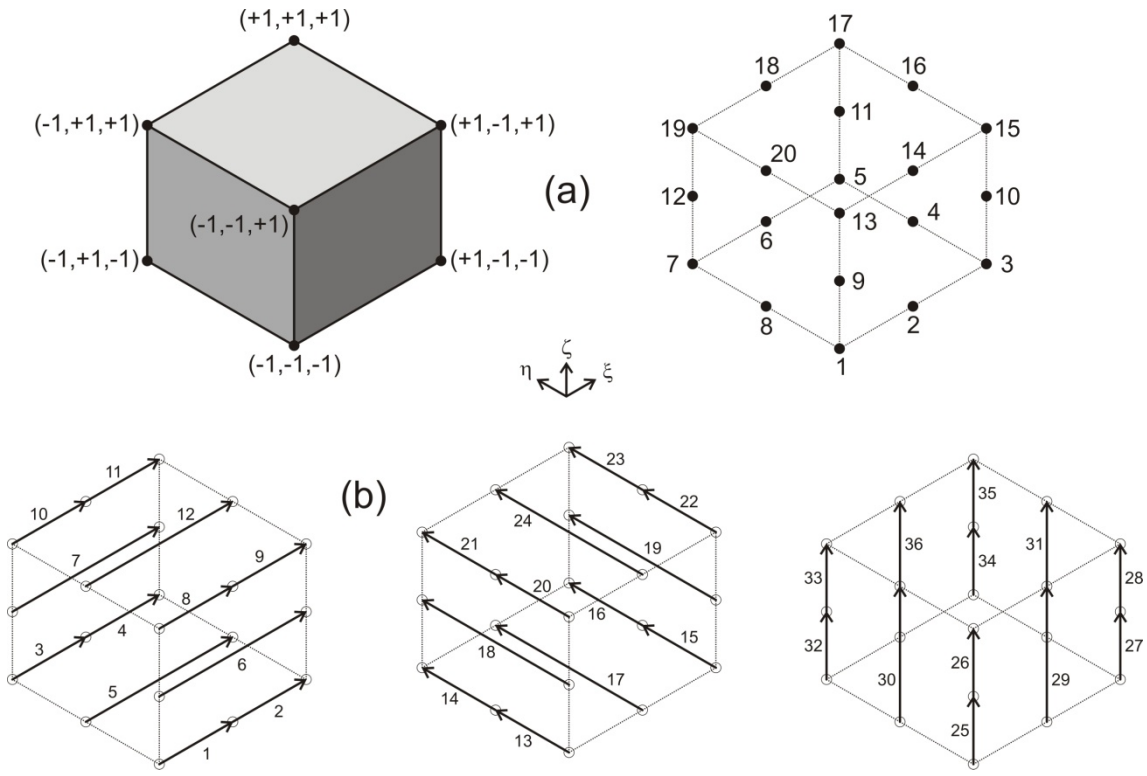

Figura 3.2 - O elemento hexaédrico quadrático incompleto, com seus vinte nós e trinta e seis arestas orientadas. Representação em um sistema de coordenadas de referência com (a) suas dimensões, ordenação de nós e (b) numeração de arestas.

Nestas figuras, ambos os elementos encontram-se representados num sistema local de coordenadas de referência (ξ, η, ζ). É neste sistema de coordenadas em que, por facilidade e conveniência, as funções de forma nodais costumam ser construídas e disponibilizadas para uso imediato. Nas próximas secções deste capítulo um procedimento para a obtenção das funções vetoriais $\vec{w}_i$ relativas a cada aresta destes elementos hexaédricos será relatado. Por esta razão, e também pelo motivo de a construção destas funções vetoriais exigir para os elementos hexaédricos aqui considerados o conhecimento das funções de forma nodais do mesmo elemento, no Apêndice A este conjunto de funções $N_i(\xi, \eta, \zeta)$ e as suas respectivas derivadas parciais encontra-se tabelado.

Através da Tabela 5.1 deste Apêndice, pode-se constatar que a primeira função de forma do elemento de oito nós representado na Figura 3.1 é dada no sistema de coordenadas local adotado por

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi)(1 - \eta)(1 - \zeta), \tag{3.5}$$

ou ainda, e após a realização das multiplicações entre os parênteses, pela expressão equivalente

$$N_1(\xi, \eta, \zeta) = \frac{1}{8}(1 - \xi - \eta - \zeta + \xi\eta + \xi\zeta + \eta\zeta - \xi\eta\zeta). \tag{3.6}$$

A eq. (3.6) permite verificar que a função de forma nodal $N_1(\xi, \eta, \zeta)$ do elemento de oito nós é uma combinação linear dos elementos do conjunto

$$\mathbb{B} = \{1,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi\eta\ ,\ \xi\zeta,\ \eta\zeta,\ \xi\eta\zeta\}. \tag{3.7}$$

Esta propriedade pode também ser facilmente verificada para as demais sete funções de forma nodais do elemento de oito nós, e assim o conjunto $\mathbb{B}$ da eq. (3.7) recebe o nome de base polinomial da aproximação no volume deste elemento. Verifica-se ainda que o conjunto $\mathbb{B}$ constitui um gerador para o espaço vetorial dos polinômios de três variáveis e grau menor ou igual a um em cada um dos seus argumentos. Por conta disto, a base polinomial $\mathbb{B}$ é dita completa até primeira ordem, e este elemento de oito nós recebe a denominação de tri-linear.

Em contrapartida, a Tabela 5.2 prevê para o caso do elemento de vinte nós da Figura 3.2 a seguinte expressão para a função de forma nodal associada ao seu primeiro nó:

$$N_1(\xi,\eta,\zeta) = -\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta+\zeta+2). \tag{3.8}$$

Expandindo-se novamente os produtos e analisando também o caso dos outros dezenove nós, pode-se verificar que a base polinomial para as aproximações no interior deste segundo elemento passa agora a ser

$$\mathbb{B} = \begin{Bmatrix} 1,\ \xi,\ \eta,\ \zeta,\ \xi^2,\ \eta^2,\ \zeta^2,\ \xi\eta,\ \xi\zeta,\ \eta\zeta,\ \xi^2\eta,\ \xi\eta^2, \\ \eta^2\zeta,\ \eta\zeta^2,\ \xi^2\zeta,\ \xi\zeta^2,\ \xi\eta\zeta,\ \xi^2\eta\zeta,\ \xi\eta^2\zeta,\ \xi\eta\zeta^2 \end{Bmatrix}. \tag{3.9}$$

A análise dos elementos integrantes deste novo conjunto de funções mostra que na lista expressa pela eq. (3.9) estão ausentes termos polinomiais nos quais os argumentos figuram elevados à segunda potência, como, por exemplo, $\xi^2\eta^2\zeta$ e $\xi^2\eta^2\zeta^2$. Conclui-se a partir daí que para o caso do elemento de vinte nós o conjunto $\mathbb{B}$ não é capaz de gerar o espaço completo de polinômios de três variáveis e de grau até dois em cada um dos seus argumentos. Nesta nova situação, a base polinomial é dita então incompleta até a segunda ordem, e o elemento de vinte nós passa a ser chamado de quadrático incompleto [23].

Para qualquer elemento de referência, inclusive aqueles do exemplo anterior, existe naturalmente uma correspondência entre as coordenadas de cada um dos seus pontos no sistema local (ξ,η,ζ) com aquelas do sistema de coordenadas globais do domínio do problema (x,y,z). Tal correspondência é dada por meio de uma transformação bijetora, expressa por uma matriz jacobiana e a pela sua inversa. Neste mapeamento entre sistemas de coordenadas, as próprias funções de forma nodais de interpolação $N_i(\xi,\eta,\zeta)$ do elemento são usadas:

$$x(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, x_i \tag{3.10a}$$

$$y(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, y_i \tag{3.10b}$$

$$z(\xi,\eta,\zeta) = \sum_{i=1}^{nn} N_i(\xi,\eta,\zeta)\, z_i. \tag{3.10c}$$

Com este tipo de transformação entre sistemas de coordenadas, muito freqüentemente utilizado em aplicações do Método dos Elementos Finitos e também adotado neste trabalho para a modelagem de sistemas de aterramento, os elementos finitos da discretização passam a ser ditos também do tipo “isoparamétrico”.

Para o caso da aproximação de uma grandeza escalar através de uma combinação linear de funções de forma nodais feita em acordo com a eq. (3.3), numeram-se os nós dos elementos finitos de referência de acordo com as convenções da Figura 3.1a e da Figura 3.2a. Desta numeração decorre a definição apropriada das funções de forma N_i, de modo a satisfazer a propriedade fundamental expressa pela eq. (3.1).

Já para o problema análogo de se aproximar localmente dentro de um elemento finito de aresta uma grandeza de caráter vetorial, a eq. (3.4) é aquela utilizada. Ainda de forma análoga, torna-se necessário também numerar cada uma das arestas do elemento. Os esquemas de numeração adotados para os dois elementos particulares aqui considerados são aqueles representados na Figura 3.1b e na Figura 3.2b. De posse desta ordenação, torna-se então possível enunciar a propriedade fundamental característica das funções de forma vetoriais $\vec{w}_i$ e correspondente àquela descrita pela eq. (3.1) no caso do problema análogo de aproximação nodal.

Esta propriedade, a seguir enunciada, é utilizada na realidade para a própria definição e construção do conjunto de funções de forma vetoriais $\vec{w}_i$ do elemento:

$$\int_{aresta\ j} \vec{w}_i(x,y,z) \cdot d\vec{\ell} = \delta_{ij}. \tag{3.11}$$

Nesta expressão, $i,j \in \mathbb{N} \mid 1 \leq i \leq na,\ 1 \leq j \leq na$ e δ_{ij} é novamente o delta de Kronecker. Traduzindo-se esta equação em palavras, exige-se que a integração de cada uma das funções de forma vetoriais ao longo de percursos descritos pelas arestas do elemento seja igual a um para a aresta vinculada à

função de forma considerada, e zero ao longo das demais. É conseqüência disto a interpretação de que cada escalar f_k da eq.(3.4) torna-se numericamente igual à integração da grandeza vetorial aproximada $\vec{F}_e$ ao longo da aresta k. Após a aplicação do Método dos Elementos Finitos, estes escalares resultam como incógnitas do sistema de equações associado.

Se, de acordo com passagem anterior, para o caso da aproximação nodal existem documentados na literatura conjuntos de funções N_i satisfazendo o requisito imposto pela eq. (3.1) para uma grande variedade de tipos de elemento e o próprio método utilizado para a construção destas funções não exige muito além do que procedimentos convencionais de cálculo diferencial e integral, o mesmo não se aplica ao caso das aproximações vetoriais com elementos finitos de aresta. Neste esforço para a construção de funções de forma vetoriais $\vec{w}_i(x,y,z)$ que satisfaçam a eq. (3.11), torna-se necessário fazer uso de alguma engenhosidade matemática.

Para tanto, escreve-se uma função vetorial $\vec{w}_i$ genérica do elemento de aresta através de duas partes separadas, de acordo com o proposto por Wang e Ida [12]:

$$\vec{w}_i(x,y,z) = \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)\vec{v}_i(x,y,z) \tag{3.12}$$

A primeira destas partes, o termo escalar $\Phi_i(\xi,\eta,\zeta)$, denomina-se função de posição e é completamente escrito em termos das coordenadas do sistema de referência (ξ,η,ζ). A parte vetorial $\vec{v}_i(x,y,z)$ é, por sua vez, a responsável por fornecer uma direção e um sentido convenientes às funções de forma vetoriais. No trabalho anteriormente mencionado, Wang e Ida relatam, de forma genérica, o procedimento necessário para a construção das funções $\vec{v}_i$ para os casos de elementos de aresta tetraédricos e hexaédricos. Quanto às funções de posição Φ_i, neste mesmo trabalho se descreve apenas em linhas gerais e de forma imprecisa o procedimento para a escolha ou construção das mesmas.

Na próxima secção, este procedimento será elucidado para o caso dos elementos hexaédricos, que posteriormente serão utilizados na modelagem de sistemas de aterramento elétrico no Capítulo 5. O conteúdo desta secção é imprescindível à utilização de elementos finitos hexaédricos de arestas,

independentemente da formulação numérica do problema particular considerado.

3.3 Os elementos de aresta hexaédricos de oito nós tri-linear e de vinte nós quadrático incompleto

O uso de elementos finitos de aresta do tipo hexaédrico tem sido o objeto de diversos trabalhos na literatura científica ao longo do tempo e, na secção anterior, referência já foi feita ao artigo de Wang e Ida. Nele, é proposto o uso da expressão (3.12) para a construção das funções de forma de aresta e as propriedades a serem satisfeitas pelas funções associadas à parte escalar Φ_i são descritas de forma geral.

Ida e Bastos fornecem em seu trabalho [16] todo o tratamento necessário para a construção das funções de forma vetoriais do elemento hexaédrico tri-linear de oito nós e doze arestas, e também os procedimentos envolvidos na obtenção das grandezas a elas associadas que se fazem necessárias nas formulações do Método dos Elementos Finitos. Porém, por simplesmente trazer tabeladas as funções de posição Φ_i deste elemento e por não apresentar maiores esclarecimentos a respeito das propriedades que as determinam, esta referência não permite que uma abordagem similar seja estendida ao uso de elementos hexaédricos de ordem superior (como, por exemplo, o elemento quadrático incompleto de vinte nós) sem algum trabalho adicional.

Kameari, por sua vez, propõem em seu artigo [11] expressões para as funções vetoriais de aresta tanto para o elemento hexaédrico tri-linear quanto para o elemento hexaédrico quadrático incompleto.

De acordo com esta referência, cada uma destas funções em ambos os casos pode ser obtida através de fórmulas gerais fornecidas no texto e escritas em termos das coordenadas de pontos particulares de cada aresta. Neste trabalho, para o caso do elemento de vinte nós e trinta e seis arestas, o autor propõe sem justificar que a expressão

$$\Phi_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4}(1+\zeta_i\zeta)(1-\eta^2) \tag{3.13}$$

seja utilizada para a determinação das funções de posição das arestas que se situam ao longo da direção ξ e sobre as faces $\zeta = \pm 1$ (ou seja, as arestas de números 5 e 12 em acordo com a Figura 3.2b). Do mesmo modo, para as arestas orientadas deste mesmo elemento localizadas agora sobre as próprias arestas do hexaedro (as de número 1, 2, 3, 4, 8, 9, 10 e 11 da Figura 3.2b), a expressão

$$\Phi_i(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1+\eta_i\eta)(1+\zeta_i\zeta)(\xi_i\xi+\eta_i\eta+\zeta_i\zeta-1) \tag{3.14}$$

é aquela sugerida. Nestas duas últimas equações, os parâmetros $\xi_i = \pm\frac{1}{2}$, $\eta_i = \pm 1$ e $\zeta_i = \pm 1$ representam as coordenadas do ponto central da i-ésima aresta da direção ξ. As funções de posição referentes às arestas localizadas em outras direções são construídas por meio de expressões análogas a estas duas últimas, e podem ser derivadas por meio de permutação cíclica das variáveis.

A título de exemplo e com o auxílio da Figura 3.2, verifica-se que o ponto central da aresta de número 5 é $(\xi_5,\eta_5,\zeta_5) = (0,0,-1)$. Deste modo, aplicação da eq. (3.13) a esta aresta orientada produz

$$\Phi_5(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{4}(1-\zeta)(1-\eta^2). \tag{3.15}$$

De maneira análoga, uma vez que as coordenadas do centro da aresta de número 1 são $(\xi_1,\eta_1,\zeta_1) = \left(-\frac{1}{2},-1,-1\right)$, obtemos para este segundo caso com o auxílio da eq. (3.14) que

$$\Phi_1(\xi,\eta,\zeta) = \frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)\left(-\frac{1}{2}\xi-\eta-\zeta-1\right). \tag{3.16}$$

Algumas dificuldades surgem ao se tentar utilizar estas expressões propostas por este autor. Conforme ficará demonstrado na próxima secção deste capítulo, a função de forma vetorial $\vec{w}_5 = \Phi_5\vec{v}_i(x,y,z)$ construída com a função $\Phi_5(\xi,\eta,\zeta)$ dada pela eq. (3.15) satisfaz adequadamente a propriedade

fundamental exigida pela expressão (3.11). No entanto, e como também ficará demonstrado na próxima secção, a função $\vec{w}_1 = \Phi_1 \vec{v}_i(x, y, z)$ construída a partir da função $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ da eq. (3.16) falha em satisfazer esta mesma propriedade básica das funções de forma vetoriais dos elementos finitos de aresta. Mais do que isso, observa-se ainda que o conjunto de expressões fornecidas por Kameari neste trabalho para as funções de posição é incompleto, uma vez que não contemplam o caso de arestas como aquelas de número 6 e 7, localizadas sobre faces do hexaedro e no plano $\zeta = 0$.

Por conta de toda esta exposição, conclui-se que o procedimento de geração das funções de forma vetoriais para elementos finitos hexaédricos de aresta de vinte nós propostas por Kameari é falho. Contraditoriamente, o trabalho deste autor é freqüentemente mencionado na literatura científica e possivelmente constituí a única referência que se propõe a apresentar as funções de forma e de posição de maneira explícita para elementos hexaédricos mais refinados.

Surge desta maneira, então, um impedimento à utilização de elementos hexaédricos de aresta de ordem superior na modelagem de problemas de Eletromagnetismo até que seja realizada uma investigação mais rigorosa a este respeito.

3.4 Construção das funções de posição e das funções de forma vetoriais em elementos hexaédricos

Diante de tudo aquilo que se apresentou no tópico anterior, para que elementos de ordem superior pudessem ser utilizados de acordo com o que se desejava nas simulações de sistemas de aterramento abordadas neste texto, o trabalho de investigação e de elucidação do processo de construção das funções de forma de aresta dos elementos hexaédricos anteriormente sugerido foi desenvolvido e se encontra detalhado nos próximos parágrafos desta secção. Reitera-se aqui mais uma vez o fato de que as informações a seguir preenchem as lacunas anteriormente apontadas na literatura científica naquilo que diz respeito do uso de elementos finitos de aresta hexaédricos.

Isto posto, o passo inicial para a construção das funções de forma vetoriais de um elemento hexaédrico de aresta é a escolha e o posicionamento apropriados do sistema de coordenadas local do elemento de referência. Este é fixado no centro geométrico do elemento de referência, com os seus eixos de coordenadas alinhados com as direções definidas pelas arestas do elemento de acordo com os esquemas da Figura 3.1 e da Figura 3.2. O elemento correspondente da malha de elementos finitos no sistema de coordenadas pode, evidentemente, encontrar-se numa posição arbitrária em relação à origem e aos eixos cartesianos do sistema real de coordenadas (x, y, z). Mais do que isso, o elemento de discretização na malha de elementos finitos no sistema de coordenadas real (x, y, z) pode inclusive ter lados curvilíneos, conforme admitem as transformações dadas nas equações (3.10).

Feito isto, a construção das funções $\vec{w}_i$ prossegue em acordo com a eq. (3.12) com a definição das suas partes vetoriais $\vec{v}_i$. Esta definição é realizada em função da direção da aresta i no sistema de coordenadas de referência. Para arestas que se encontram ao longo da direção ξ,

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \xi}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \xi}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \xi}{\partial z}\vec{u}_z = \nabla \xi. \tag{3.17a}$$

Para arestas na direção η,

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \eta}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \eta}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \eta}{\partial z}\vec{u}_z = \nabla \eta. \tag{3.17b}$$

Finalmente, para aquelas na direção ζ,

$$\vec{v}_i = \frac{\partial \zeta}{\partial x}\vec{u}_x + \frac{\partial \zeta}{\partial y}\vec{u}_y + \frac{\partial \zeta}{\partial z}\vec{u}_z = \nabla \zeta. \tag{3.17c}$$

Deste modo, substituindo-se as expressões (3.17) na eq. (3.12), verifica-se que para os elementos hexaédricos as funções de forma vetoriais relativas às arestas da direção ξ podem ser escritas como

$$\vec{w}_i(x, y, z) = \Phi_i(\xi, \eta, \zeta)\nabla \xi. \tag{3.18a}$$

Analogamente, para os casos das direções η e ζ,

$$\vec{w}_i(x, y, z) = \Phi_i(\xi, \eta, \zeta)\nabla \eta. \tag{3.18b}$$

$$\vec{w}_i(x,y,z) = \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)\nabla\zeta. \tag{3.18c}$$

Em paralelo a isso, resulta do cálculo das funções de múltiplas variáveis que o diferencial df de uma função $f(x,y,z)$ é

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \frac{\partial f}{\partial z}dz = \nabla f \cdot d\vec{\ell}, \tag{3.19}$$

As funções $\xi(x,y,z), \eta(x,y,z)$ e $\zeta(x,y,z)$ representam a transformação de coordenadas inversa àquela dada pelas expressões (3.10). Deste modo, com o uso da eq. (3.19), os incrementos infinitesimais $d\xi$, $d\eta$ e $d\zeta$ a elas associados podem ser então determinados no sistema de coordenadas (x,y,z).

Com este resultado em mente, a substituição das expressões (3.18) na eq. (3.11) produz o seguinte conjunto de relações:

$$\int_{aresta\ j} \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)\nabla\xi \cdot d\vec{\ell} = \int_{aresta\ j} \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)d\xi = \delta_{ij}, \tag{3.20a}$$

$$\int_{aresta\ j} \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)\nabla\eta \cdot d\vec{\ell} = \int_{aresta\ j} \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)d\eta = \delta_{ij}, \tag{3.20b}$$

$$\int_{aresta\ j} \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)\nabla\zeta \cdot d\vec{\ell} = \int_{aresta\ j} \Phi_i(\xi,\eta,\zeta)d\zeta = \delta_{ij}. \tag{3.20c}$$

Cada uma destas expressões diz respeito às arestas pertencentes a uma das direções do sistema de coordenadas (ξ,η,ζ). Por exemplo, na expressão (3.20a) as funções Φ_i e o próprio índice i referem-se apenas às arestas que se estendem ao longo da direção ξ.

Ainda para o caso desta expressão, verifica-se porém que o índice j ainda percorre todas as arestas do elemento. Além disso, quando j representa a numeração de uma daquelas arestas que não se encontram ao longo da direção ξ, a integração de (3.20a) resulta igual a zero independentemente da função de posição Φ_i. Isto decorre do fato de ξ ser invariável ao longo das arestas não situadas ao longo desta direção, fazendo com que o intervalo de integração se degenere em um único ponto. Em síntese, nestes casos a eq. (3.20a) é automaticamente satisfeita e não conduz a nenhuma conclusão a

respeito de características ou propriedades das funções Φ_i que contribuam com a determinação das mesmas.

Partindo-se da eq. (3.20b) e da eq. (3.20c), considerações análogas àquelas do parágrafo anterior podem ser feitas também para as direções η e ζ. Se a letra ψ for utilizada para se designar genericamente qualquer uma destas três direções, com o apoio da notação complementar contida na representação esquemática da Figura 3.3 uma representação mais sintética para o conjunto das equações (3.20) pode ser obtida:

$$\int_{\psi_{Oj}}^{\psi_{Fj}} \Phi_i d\psi = \delta_{ij}. \tag{3.21}$$

Na eq. (3.21), tanto o índice i quanto o índice j percorrem agora apenas a numeração das arestas situadas ao longo da direção ψ, por conta de tudo aquilo que se argumentou nos parágrafos anteriores. Os valores ψ_{O_j} e ψ_{F_j} representam, respectivamente, coordenadas do ponto O_j de origem e do ponto final F_j da aresta orientada j, conforme o ilustrado na Figura 3.3. De maneira análoga, os valores ψ_{O_i} e ψ_{F_i} nesta ilustração representam as coordenadas do ponto O_i de origem e do ponto final F_i da aresta orientada i. Com esta equação torna-se possível então finalmente determinarmos as funções de posição Φ_i e concluirmos a construção do conjunto de funções de forma vetoriais do elemento.

Antes disto, porém, verifiquemos aqui o comportamento perante a eq. (3.21) da expressão da função de posição Φ_1 proposta por Kameari na referência [11] para o elemento tri-linear de vinte nós e trinta e seis arestas. Trata-se justamente de uma daquelas funções construídas como exemplo na secção anterior, de modo com que esta expressão completa sugerida para $\Phi_1(\xi, \eta, \zeta)$ encontra-se registrada por meio da eq. (3.15). Uma vez que se trata de uma função de posição associada a uma aresta da direção ξ, sua integração ao longo da aresta de número 1 (na qual $\eta = -1$, $\zeta = -1$ e que é delimitada pelos nós de número 1 e 2 do elemento) produz as seguintes relações:

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi_1(\xi,-1,-1)d\xi = \int_{\xi_1}^{\xi_2} \frac{1}{8}(1+1)(1+1)\left(-\frac{1}{2}\xi+1+1-1\right)d\xi, \quad (3.22a)$$

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi_1 d\xi = \frac{1}{2}\int_{\xi_1}^{\xi_2}\left(-\frac{1}{2}\xi+1\right)d\xi = -\frac{1}{4}\left(\frac{\xi_2^2-\xi_1^2}{2}\right)+\frac{1}{2}(\xi_2-\xi_1). \quad (3.22b)$$

Como as coordenadas nodais ξ_1 e ξ_2 valem, respectivamente, -1 e 0, obtemos finalmente que

$$\int_{\xi_1}^{\xi_2} \Phi_1 d\xi = = -\frac{1}{4}\left[\frac{0^2-(-1^2)}{2}\right]+\frac{1}{2}[0-(-1)] = \frac{5}{8}. \quad (3.23)$$

A eq. (3.23) informa-nos, desta forma, que a integração da função de posição Φ_1 proposta por Kameari ao longo da primeira aresta do elemento não vale 1, contradizendo a propriedade básica das funções de posição ditada pela eq. (3.21). Com algum esforço adicional, pode-se ainda demonstrar que muitas outras funções de posição referentes a outras arestas do elemento quadrático incompleto determinadas pelas expressões genéricas sugeridas por este autor falham desta mesma maneira.

Deste modo, a afirmação realizada na secção anterior a respeito dos problemas com as expressões genéricas propostas por Kameari fica confirmada. Fica também justificada a necessidade de maiores investigações para a correta caracterização das funções de forma vetoriais de elementos hexaédricos de ordem superior, que é o principal objeto desta secção.

Assim, a idéia utilizada para que a construção das funções de forma vetoriais corretas possa ser concluída consiste em se observar com algum cuidado o comportamento das funções de forma nodais referentes aos nós do elemento coincidentes com os pontos extremos O_i e F_i da i-ésima aresta. Com a segunda parte do teorema fundamental do cálculo, as integrações das derivadas parciais destas funções de forma nodais em relação à variável ψ e ao longo de uma aresta j nesta direção podem ser calculadas conforme as expressões a seguir:

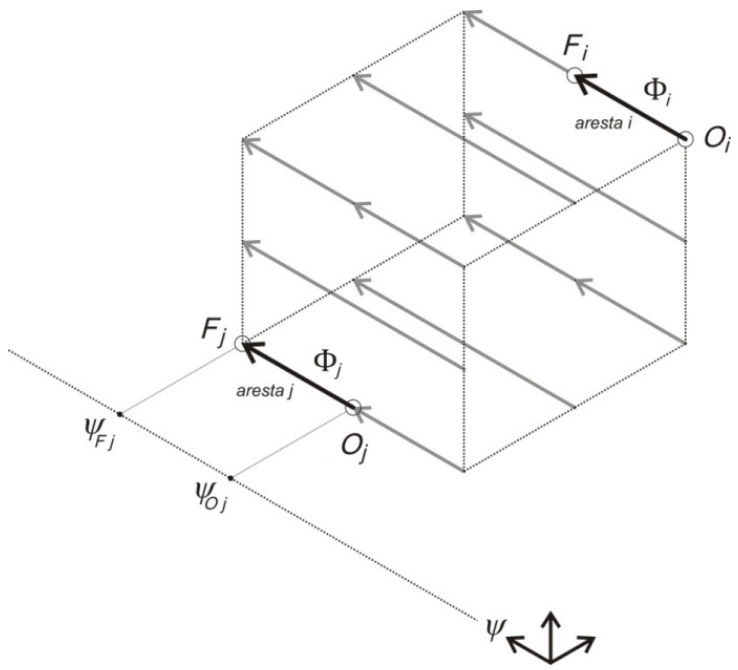

Figura 3.3 – Duas arestas genéricas situadas ao longo de uma única direção em um elemento hexaédrico.

$$\int_{\psi_{O_j}}^{\psi_{F_j}} \frac{\partial N_{F_i}}{\partial \psi} d\psi = N_{F_i}(F_j) - N_{F_i}(O_j) = \delta_{ij}, \tag{3.24a}$$

$$\int_{\psi_{O_j}}^{\psi_{F_j}} \frac{\partial N_{O_i}}{\partial \psi} d\psi = N_{O_i}(F_j) - N_{O_i}(O_j) = -\delta_{ij}. \tag{3.24b}$$

A última igualdade em cada uma das integrações anteriores decorre, obviamente, da propriedade fundamental das funções de forma nodais expressa pela eq. (3.1).

O confronto dos resultados expressos pelas equações (3.24) com a eq. (3.21) torna evidente que as derivadas parciais das funções de forma nodais do elemento hexaédrico constituem um conjunto do qual se torna possível extrair as funções de posição Φ_i desejadas. Para tanto, é suficiente igualar Φ_i a uma derivada parcial apropriada de uma função nodal associada a um nó conveniente do elemento.

Com o auxílio da Figura 3.1 e da Figura 3.2 e com as ordenações de nós e arestas nelas expressas, este trabalho foi realizado para os elementos

hexaédricos de oito e vinte nós. Esta associação entre funções de posição e derivadas parciais das funções de forma nodais encontra-se disponível na Tabela 3.1 e na Tabela 3.2 para ambos os elementos hexaédricos aqui considerados. As expressões completas de cada uma destas funções encontram-se disponíveis no Apêndice A.

A título de ilustração do mecanismo envolvido nesta identidade existente entre funções de posição e derivadas parciais de funções de forma nodais, as figuras finais desta secção demonstram graficamente este processo de construção para o caso de uma aresta em particular. De acordo com a Figura 3.2, a aresta de número 17 do elemento hexaédrico incompleto de segunda ordem é delimitada pelos nós 2 e 6 e situa-se ao longo da direção η. Deste modo, a Figura 3.4 traz as representações da função de forma N_6 vinculada a este nó e da sua derivada parcial em relação à coordenada η, ambas no plano $\zeta = -1$. De acordo com o esperado, N_6 assume valor 1 sobre o nó de número 6 ($\xi = 0, \eta = 1$ e $\zeta = -1$) e anula-se sobre os demais nós, propriedade esta que é facilmente observável nesta ilustração.

A Figura 3.5 traz, por sua vez, a mesma derivada parcial $\partial N_6/\partial\eta$ da ilustração anterior, só que representada agora apenas na intersecção dos planos $\xi = 0$ e $\zeta = -1$. É justamente sobre a intersecção destes dois planos e no intervalo $-1 \leq \eta \leq 1$ que a aresta de número 17 se localiza.

Tabela 3.1 - Correspondência entre funções de posição e derivadas parciais das funções de forma nodais para o elemento hexaédrico tri-linear de oito nós e doze arestas.

$\Phi_1 = \dfrac{\partial N_2}{\partial \xi}$	$\Phi_7 = \dfrac{\partial N_7}{\partial \zeta}$
$\Phi_2 = \dfrac{\partial N_3}{\partial \eta}$	$\Phi_8 = \dfrac{\partial N_8}{\partial \zeta}$
$\Phi_3 = \dfrac{\partial N_3}{\partial \xi}$	$\Phi_9 = \dfrac{\partial N_6}{\partial \xi}$
$\Phi_4 = \dfrac{\partial N_4}{\partial \eta}$	$\Phi_{10} = \dfrac{\partial N_7}{\partial \eta}$
$\Phi_5 = \dfrac{\partial N_5}{\partial \zeta}$	$\Phi_{11} = \dfrac{\partial N_7}{\partial \xi}$
$\Phi_6 = \dfrac{\partial N_6}{\partial \zeta}$	$\Phi_{12} = \dfrac{\partial N_8}{\partial \eta}$

Tabela 3.2 - Correspondência entre funções de posição e derivadas parciais das funções de forma nodais para o elemento hexaédrico quadrático incompleto de vinte nós e trinta e seis arestas.

$\Phi_1 = -\frac{\partial N_1}{\partial \xi}$	$\Phi_{13} = -\frac{\partial N_1}{\partial \eta}$	$\Phi_{25} = -\frac{\partial N_1}{\partial \zeta}$
$\Phi_2 = \frac{\partial N_3}{\partial \xi}$	$\Phi_{14} = \frac{\partial N_7}{\partial \eta}$	$\Phi_{26} = \frac{\partial N_{13}}{\partial \zeta}$
$\Phi_3 = -\frac{\partial N_7}{\partial \xi}$	$\Phi_{15} = -\frac{\partial N_3}{\partial \eta}$	$\Phi_{27} = -\frac{\partial N_3}{\partial \zeta}$
$\Phi_4 = \frac{\partial N_5}{\partial \xi}$	$\Phi_{16} = \frac{\partial N_5}{\partial \eta}$	$\Phi_{28} = \frac{\partial N_{15}}{\partial \zeta}$
$\Phi_5 = \frac{\partial N_4}{\partial \xi}$	$\Phi_{17} = \frac{\partial N_6}{\partial \eta}$	$\Phi_{29} = \frac{\partial N_{14}}{\partial \zeta}$
$\Phi_6 = \frac{\partial N_{10}}{\partial \xi}$	$\Phi_{18} = \frac{\partial N_{12}}{\partial \eta}$	$\Phi_{30} = \frac{\partial N_{20}}{\partial \zeta}$
$\Phi_7 = \frac{\partial N_{11}}{\partial \xi}$	$\Phi_{19} = \frac{\partial N_{11}}{\partial \eta}$	$\Phi_{31} = \frac{\partial N_{16}}{\partial \zeta}$
$\Phi_8 = -\frac{\partial N_{13}}{\partial \xi}$	$\Phi_{20} = -\frac{\partial N_{13}}{\partial \eta}$	$\Phi_{32} = -\frac{\partial N_7}{\partial \zeta}$
$\Phi_9 = \frac{\partial N_{15}}{\partial \xi}$	$\Phi_{21} = \frac{\partial N_{19}}{\partial \eta}$	$\Phi_{33} = \frac{\partial N_{19}}{\partial \zeta}$
$\Phi_{10} = -\frac{\partial N_{19}}{\partial \xi}$	$\Phi_{22} = -\frac{\partial N_{15}}{\partial \eta}$	$\Phi_{34} = -\frac{\partial N_5}{\partial \zeta}$
$\Phi_{11} = \frac{\partial N_{17}}{\partial \xi}$	$\Phi_{23} = \frac{\partial N_{17}}{\partial \eta}$	$\Phi_{35} = \frac{\partial N_{17}}{\partial \zeta}$
$\Phi_{12} = \frac{\partial N_{16}}{\partial \xi}$	$\Phi_{24} = \frac{\partial N_{18}}{\partial \eta}$	$\Phi_{36} = \frac{\partial N_{18}}{\partial \zeta}$

Neste intervalo mais restrito, $\partial N_6/\partial \eta$ se reduz a uma função de uma única variável cuja integração em relação ao seu único argumento η vale 1. Este fato novamente pode ser observado com o apoio desta figura. Como a integração desta função ao longo de outras arestas da direção η é nula, verifica-se então finalmente que Φ_{17} pode ser associada à função $\partial N_6/\partial \eta$, em acordo com a Tabela 3.2 e com todo o desenvolvimento anterior desta secção.

Por fim, chama-se a atenção para o fato de que para o caso de elementos de ordem ainda superior, as funções de posição e conseqüentemente as funções de forma vetoriais poderiam ser também rapidamente determinadas. Para tanto, basta que se faça o uso de procedimentos em tudo análogos àqueles

descritos para os dois elementos hexaédricos específicos aqui considerados.

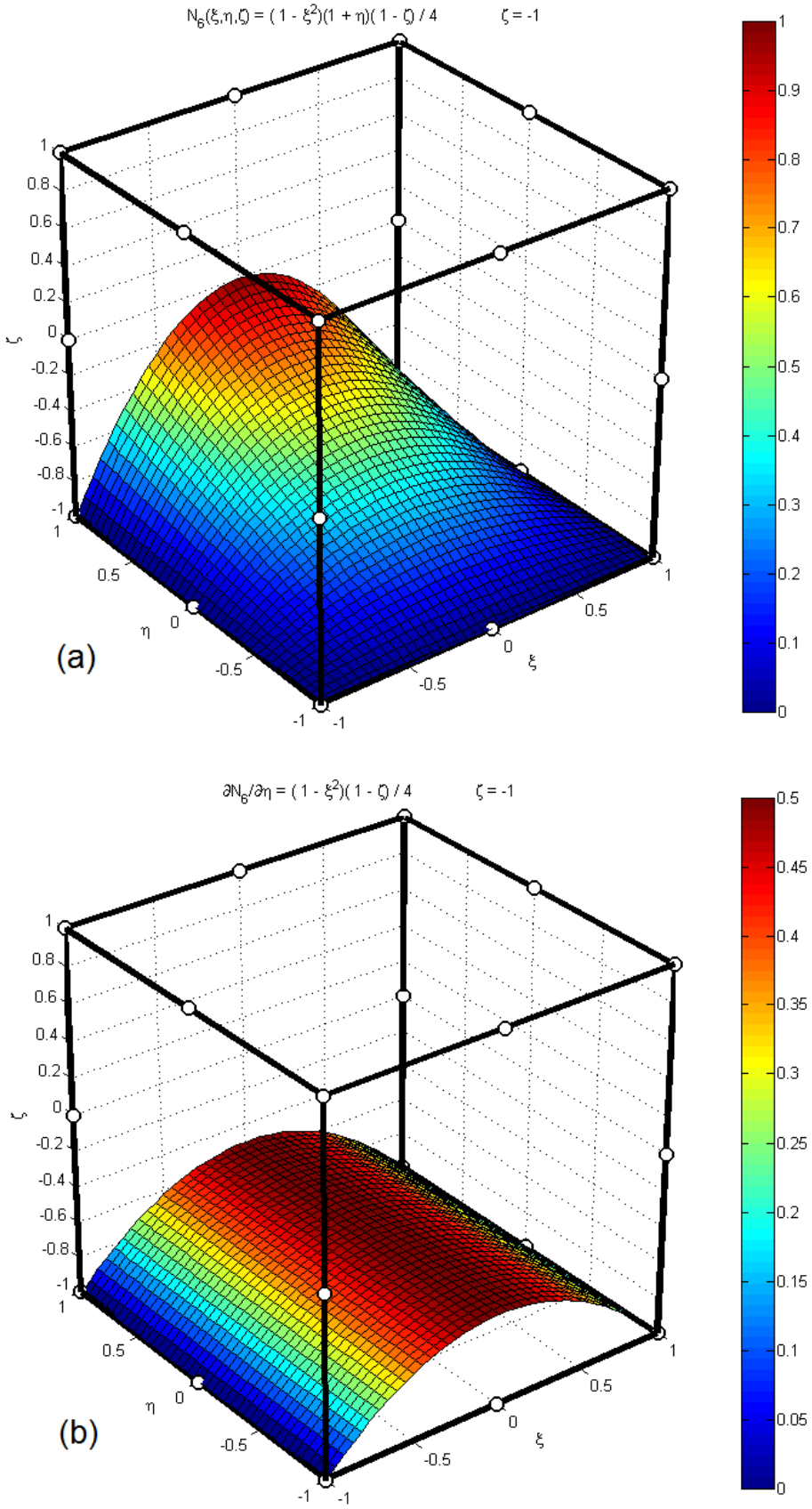

Figura 3.4 – A função de forma nodal N_6 (a) e a sua derivada parcial em relação à variável η (b) para o caso do elemento hexaédrico quadrático incompleto.

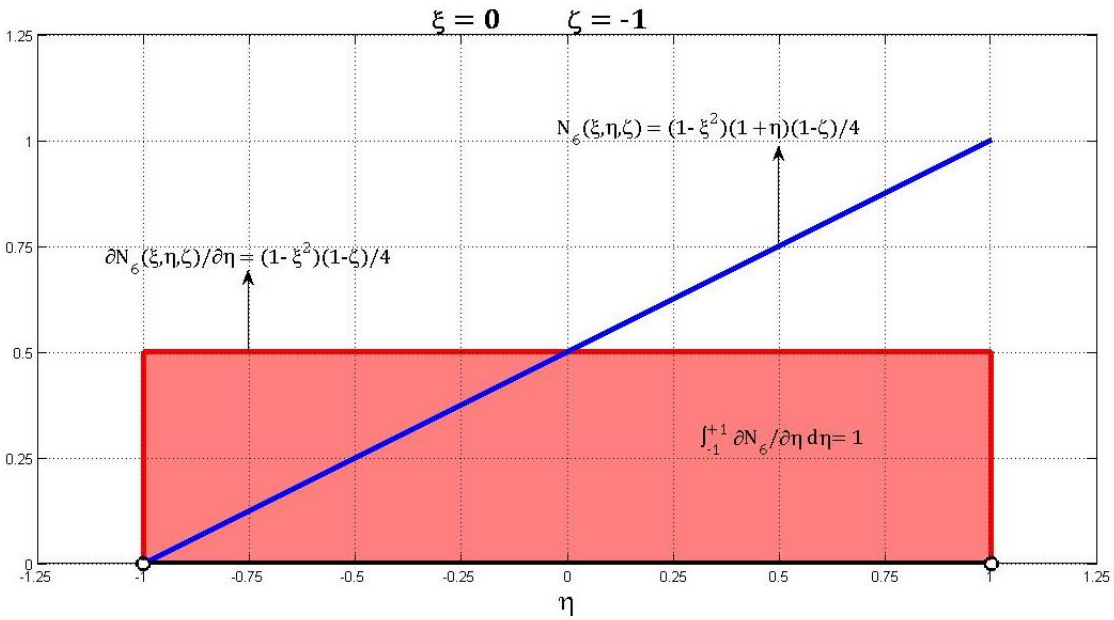

Figura 3.5 – Avaliação da função nodal N_6 e a da sua derivada parcial $\partial N_6/\partial\eta$ apenas ao longo da aresta 17 do elemento hexaédrico quadrático incompleto.

3.5 Resumo

Nas páginas anteriores deste documento o conceito de elemento finito de aresta foi apresentado, juntamente com alguns dos fatores que em geral tornam o seu uso necessário. Adicionalmente, para os casos dos elementos de aresta hexaédricos tri-linear e quadrático incompleto todo o procedimento envolvido na construção das funções vetoriais de aproximação local foi exposto e detalhado nas secções anteriores.

De acordo com aquilo que já foi justificado, todo este esforço para a caracterização destes tipos particulares de elementos teve como finalidade empregá-los em conjunto com uma formulação do Método dos Elementos Finitos de aresta para a modelagem de sistemas de aterramento elétrico. Esta modelagem e os resultados com ela obtidos constituem o objeto central do próximo capítulo deste documento.

Mais especificamente, após terem sido devidamente caracterizados neste capítulo, os elementos hexaédricos vetoriais serão adiante utilizados para a discretização de um domínio tridimensional que representa o solo nas imediações de um aterramento. A esta discretização será aplicada uma

formulação do Método dos Elementos Finitos dada em termos do potencial vetor magnético $\vec{A}$ e do potencial escalar elétrico V sem a imposição de condição sobre a divergência de $\vec{A}$, conhecida na literatura como formulação *AV-3D ungauged*. Trata-se daquela formulação a que já foi feita referência na revisão bibliográfica contida no capítulo anterior [15], e utilizada com sucesso por Silva [14] exclusivamente para o caso dos elementos hexaédricos tri-lineares de oito nós e doze arestas.

Capítulo 4

Modelagem de sistemas de aterramento no regime harmônico

4.1 Introdução

Neste capítulo será apresentada a formulação matemática do procedimento numérico com o Método dos Elementos Finitos de aresta para a modelagem de sistemas de aterramento no regime harmônico. Alguns detalhes a respeito desta formulação matemática já foram brevemente expostos na última secção do capítulo anterior, e no Capítulo 2 argumentou-se que modelagens como esta no regime permanente senoidal se prestam à obtenção de respostas transitórias. Assim, permitem o tratamento do escoamento de correntes de surto provenientes de descargas atmosféricas, de manobras no sistema elétrico ou de outras condições temporárias.

Além da formulação numérica propriamente dita para a solução do contorno correspondente, nele também serão detalhadas as hipóteses necessárias e o procedimento numérico utilizado para a determinação de uma impedância equivalente a um sistema de aterramento operando em regime permanente senoidal.

Nele ainda será detalhada a implementação particular aqui dada a esta formulação para a realização das simulações contidas neste trabalho com o uso dos resultados produzidos no capítulo anterior.

Os resultados obtidos com esta implementação para um sistema de aterramento composto por uma haste metálica verticalmente enterrada em um solo homogêneo e isotrópico serão também apresentados e discutidos. Tais resultados referem-se ao cálculo da impedância equivalente do aterramento em função da freqüência e à determinação do potencial elétrico e dos campos eletromagnéticos no solo nas imediações do aterramento. Destaque será dado

a uma comparação entre os resultados obtidos com a utilização dos elementos hexaédricos tri-lineares e aqueles produzidos com o uso de elementos quadráticos incompletos para a discretização da região associada ao domínio do problema.

Toda a realização computacional deste trabalho de modelagem e simulação que na seqüência será exposto foi feita com o auxílio de ferramentas pertencentes à biblioteca de classes para o cálculo numérico de campos eletromagnéticos pelo Método dos Elementos Finitos do Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo, denominada LMAGLIB [24]. Por conta do desenvolvimento deste trabalho, diversos complementos a esta biblioteca se fizeram necessários. Estas complementações foram desta forma devidamente incorporadas a esta biblioteca, e serão também apresentadas nas próximas secções deste capítulo.

4.2 Formulação em dois potenciais: potencial vetor magnético $\vec{A}$ e potencial escalar elétrico V

A formulação do Método dos Elementos Finitos aqui utilizada é aquela comumente conhecida na literatura cientifica pelo nome *AV-3D ungauged*, descrita em termos gerais por Biró em [15] e detalhada com as particularizações que se fazem necessárias à modelagem de sistemas de aterramento por Silva em [14]. Nesta secção, a essência desta formulação é recuperada e exposta com a profundidade que se faz necessária para a compreensão das secções subseqüentes deste capítulo. O leitor interessado em maiores detalhes é encorajado a buscá-los nestas referências.

O ponto de partida para o equacionamento desta formulação são as equações de Maxwell do Eletromagnetismo, aplicadas à magnetodinâmica no regime harmônico:

$$\nabla \times \vec{E} = -j\omega\vec{B}, \tag{4.1a}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + j\omega\vec{D}, \tag{4.1b}$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \tag{4.1c}$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0. \tag{4.1d}$$

A notação e os símbolos empregados são aqueles convencionalmente utilizados em Eletromagnetismo: $\vec{E}$ é o vetor intensidade de campo elétrico, $\vec{B}$ é o vetor densidade de fluxo magnético, $\vec{H}$ é o vetor intensidade magnética e $\vec{D}$ é o vetor deslocamento elétrico. A densidade de corrente é expressa por $\vec{J}$, ω é a freqüência angular de pulsação dos campos no regime harmônico, ρ é a densidade volumétrica de cargas elétricas e j é a unidade imaginária.

Dado o regime harmônico de variação no tempo das grandezas nas equações (4.1), convém ressaltar aqui o caráter complexo dos vetores de campo nas equações anteriores. Mais especificamente, e tomando-se como exemplo o caso do campo elétrico, pelo símbolo $\vec{E} = \vec{E}(x, y, z)$ entende-se um vetor de componentes complexos que é função unicamente da posição. A partir dele, pode-se extrair a expressão que descreve o comportamento temporal da grandeza campo elétrico através da operação

$$\vec{E}_{tempo}(x, y, z, t) = Re\{\vec{E}e^{j\omega t}\} \tag{4.2a}$$

$$\vec{E}_{tempo}(x, y, z, t) = Re\{\vec{E}\}cos(\omega t) - Im\{\vec{E}\}sen(\omega t). \tag{4.2b}$$

Nas equações (4.2), $Re\{\vec{E}\}$ e $Im\{\vec{E}\}$ correspondem respectivamente às partes real e imaginária do vetor complexo $\vec{E}$. Expressões análogas são também válidas para os demais vetores de campo.

O vetor densidade de corrente $\vec{J}$ pode ser desdobrado em dois componentes de naturezas distintas: a corrente de condução $\vec{J}_o$ introduzida por fontes externas ao domínio e a corrente de condução induzida em materiais condutores $\vec{J}_i$, que satisfaz a lei de Ohm. Estas grandezas relacionam-se através das expressões

$$\vec{J} = \vec{J}_o + \vec{J}_i, \tag{4.3a}$$

$$\vec{J}_i = [\sigma]\vec{E}, \tag{4.3b}$$

em que $[\sigma]$ é o tensor de condutividade elétrica do meio material.

As relações constitutivas obedecidas por estes campos em um meio material são

$$\vec{D} = [\varepsilon]\vec{E} \tag{4.4a}$$

$$\vec{H} = [\nu]\vec{B} \tag{4.4b}$$

onde $[\varepsilon]$ e $[\nu]$ representam, respectivamente, os tensores de permissividade elétrica e de relutividade magnética.

A manipulação das expressões (4.1), (4.3) e (4.4) permite a obtenção da equação de onda vetorial em termos do campo elétrico $\vec{E}$. A equação (4.1c) não é necessária neste procedimento, cujo resultado é fornecido a seguir:

$$\nabla \times [\nu]\nabla \times \vec{E} + j\omega[\dot{\sigma}]\vec{E} = -j\omega\vec{J}_o. \tag{4.5}$$

Nela, $[\dot{\sigma}]$ é o tensor de condutividades complexas do material, dado por

$$[\dot{\sigma}] = [\sigma] + j\omega[\varepsilon]\ . \tag{4.6}$$

No regime harmônico, o vetor intensidade de campo elétrico relaciona-se com o potencial vetor magnético $\vec{A}$ (dado por $\vec{B} = \nabla \times \vec{A}$) e com o potencial escalar elétrico V através de

$$\vec{E} = -j\omega\vec{A} - \nabla V. \tag{4.7}$$

Com a substituição da eq. (4.7), a equação de onda vetorial expressa na eq. (4.5) pode ser reescrita em termos destes dois potenciais de acordo com a equação

$$\nabla \times [\nu]\nabla \times \vec{A} + [\dot{\sigma}]\left(j\omega\vec{A} + \nabla V\right) = \vec{J}_o. \tag{4.8}$$

A equação diferencial anterior deve ser satisfeita no interior do volume do domínio considerado, que a partir deste momento passará a ser designado pela letra grega Ω. Adicionalmente, para que se possa garantir a unicidade da solução, condições de continuidade entre os diferentes meios materiais contidos em Ω e condições de fronteira nos limites do domínio devem ser observadas.

No contexto do Método dos Elementos Finitos, torna-se necessário truncar a representação de Ω, e para tanto é definida uma superfície fechada delimitante

da fronteira do domínio. Se a esta fronteira associarmos o símbolo Γ, esta pode ser ainda separada em duas regiões; a parte Γ_E em que o componente tangencial do campo elétrico $\vec{E}$ é tido como conhecido, e a parte Γ_H na qual o componente tangencial da intensidade magnética $\vec{H}$ é suposto como dado. A Figura 4.1 traz uma representação pictórica da definição destas superfícies em relação ao domínio.

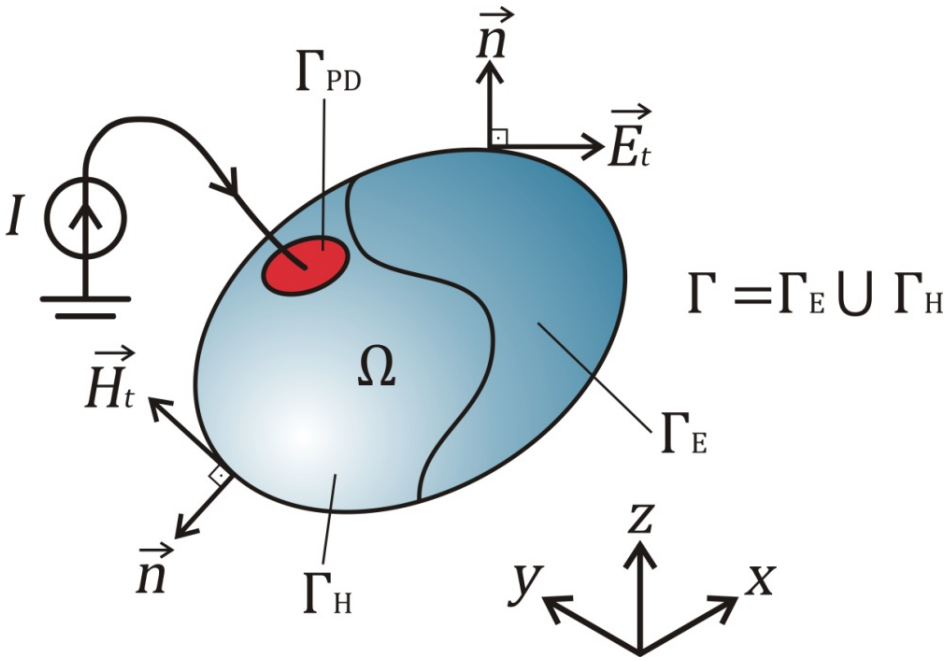

Figura 4.1 – Representação esquemática do domínio Ω e de sua fronteira Γ, excitados por uma corrente fasorial I para a modelagem de sistemas de aterramento.

O teor do parágrafo anterior pode ser representado matematicamente através das expressões a seguir:

$$\Gamma = \Gamma_E \cup \Gamma_H, \tag{4.9a}$$

$$\vec{E} \times \vec{n} = \vec{E}_t \text{ em } \Gamma_E, \tag{4.9b}$$

$$\vec{H} \times \vec{n} = \vec{H}_t \text{ em } \Gamma_H, \tag{4.9c}$$

onde $\vec{E}_t$ e $\vec{H}_t$ são os componentes tangenciais conhecidos a que se fez referência e $\vec{n}$ é um vetor unitário normal às superfícies que delimitam a borda do domínio Ω.

Já particularizando a formulação para o contexto dos sistemas de aterramento, a Figura 4.1 traz também o esquema através do qual se realiza a excitação do sistema. Admite-se que um fasor I de corrente elétrica de freqüência ω é

introduzido no domínio através de um ponto de defeito designado por PD, representado na ilustração através da superfície evanescente Γ_{PD} contida em Γ_{H}.

Reescritas em termos dos dois potenciais $\vec{A}$ e V, as condições de contorno contidas em (4.9) são dadas a seguir:

$$V = V_o \text{ em } \Gamma_{\mathrm{E}}, \tag{4.10a}$$

$$\vec{A} \times \vec{n} = -\vec{E}_t / j\omega \text{ em } \Gamma_{\mathrm{E}}, \tag{4.10b}$$

$$\left([\nu]\nabla \times \vec{A}\right) \times \vec{n} = \vec{H}_t \text{ em } \Gamma_{\mathrm{H}}. \tag{4.10c}$$

A equação de onda (4.8) e as condições de contorno (4.10) sintetizam o problema de contorno considerado na modelagem de sistemas de aterramento. Com o objetivo de se constituir a partir destas expressões um sistema de equações algébricas, duas equações residuais de Galerkin são construídas. Para tanto, utilizam-se como funções de ponderação para a primeira delas as funções de forma vetoriais $\vec{w}_i$ dos elementos finitos de aresta, definidas no capítulo anterior. Para a segunda, utilizam-se os gradientes ∇N_i das funções de forma nodais convencionais. Estas equações encontram-se reproduzidas a seguir:

$$\int_{\Omega} \nabla \times \vec{w}_i \cdot [\nu]\nabla \times \vec{A}\, d\Omega + \int_{\Omega} \vec{w}_i \cdot j\omega[\dot{\sigma}]\left(\vec{A} + \nabla v\right) d\Omega = \int_{\Gamma_{\mathrm{H}}} \vec{w}_i \cdot \left(\vec{H} \times \vec{n}\right) d\Gamma, \tag{4.11}$$

$$\int_{\Omega} \nabla N_i \cdot j\omega\,[\dot{\sigma}]\left(\vec{A} + \nabla v\right) d\Omega = \int_{\Gamma_{\mathrm{H}}} \nabla N_i \cdot \left(\vec{H} \times \vec{n}\right) d\Gamma = I + \int_{\Gamma_{\mathrm{H}} - \Gamma_{\mathrm{PD}}} \nabla N_i \cdot \left(\vec{H} \times \vec{n}\right) d\Gamma. \tag{4.12}$$

Para a obtenção das duas expressões anteriores, foi realizada a mudança de variável dada por

$$V = j\omega v, \tag{4.13}$$

além de se haver considerada nula a densidade de corrente impressa $\vec{J}_o$. A excitação por corrente é introduzida de maneira alternativa, pela manipulação da integral de superfície do segundo membro da eq. (4.12).

A aplicação propriamente dita da técnica do Método dos Elementos Finitos ao problema de contorno em questão ocorre ao se substituir nas equações (4.11) e (4.12) o potencial vetor magnético $\vec{A}$ e o potencial escalar elétrico modificado $\mathcal{v}$ pelas suas respectivas aproximações, decorrentes da discretização adotada para o domínio Ω.

Em cada elemento finito da discretização, o potencial vetor magnético é aproximado com o uso das funções de forma vetoriais próprias do elemento de aresta considerado:

$$\vec{A}^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{na} a_i\, \vec{w}_i. \tag{4.14}$$

A eq. (4.14) nada mais é do que a aplicação da eq. (3.4) ao caso particular do potencial vetor magnético. Para o potencial escalar elétrico modificado $\mathcal{v}$, a aproximação é feita com o uso das funções de forma nodais convencionais de acordo com a eq. (3.3)

$$\mathcal{v}^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{nn} \mathcal{v}_i\, N_i. \tag{4.15}$$

Ao substituirmos as expressões (4.14) e (4.15) nas equações residuais (4.11) e (4.12), se nestas últimas restringirmos as integrações ao volume de um único elemento o resultado assim produzido pode ser interpretado como estando associado à matriz de rigidez do elemento particular considerado nesta operação e aos seus vetores locais.

Para um elemento genérico e, a matriz de rigidez obtida com o procedimento descrito no parágrafo anterior é dada a seguir em termos de um particionamento que define quatro submatrizes:

$$\left[M^e_{rigidez}\right] = \begin{bmatrix} [M^e_A]_{na\times na} & [M^e_{A\mathcal{v}}]_{na\times nn} \\ [M^e_{A\mathcal{v}}]^t_{nn\times na} & [M^e_{\mathcal{v}}]_{nn\times nn} \end{bmatrix}_{(na+nn)\times(na+nn)} \tag{4.16}$$

Os termos da linha m e da coluna n de cada uma destas submatrizes podem ser obtidos através das expressões a seguir:

$$[M_A^e]_{mn} = \int_{\Omega^e} ([\nabla \times \vec{w}_m]^t \cdot [\nu][\nabla \times \vec{w}_n] + j\omega[\vec{w}_m]^t \cdot [\dot{\sigma}][\vec{w}_n]) \, d\Omega \quad (4.17)$$

$$[M_{A\upsilon}^e]_{mn} = j\omega \int_{\Omega^e} ([\vec{w}_m]^t \cdot [\dot{\sigma}][\nabla N_n]) \, d\Omega, \quad (4.18)$$

$$[M_{\upsilon}^e]_{mn} = j\omega \int_{\Omega^e} ([\nabla N_m]^t \cdot [\dot{\sigma}][\nabla N_n]) \, d\Omega. \quad (4.19)$$

Quanto aos vetores locais do elemento, designados aqui por $[r_A^e]$ e $[r_\upsilon^e]$, estes apenas precisam ser calculados para aqueles elementos finitos da malha adjacentes à fronteira Γ_{H} do domínio, pois provêm das integrais de superfície do segundo membro das equações (4.11) e (4.12). A expressão dos termos de cada um destes dois vetores locais também são dadas a seguir:

$$[r_A^e]_m = \int_{\Gamma_{\mathrm{H}}^e} \vec{w}_m \cdot \left(\vec{H} \times \vec{n}\right) d\Gamma, \quad (4.20)$$

$$[r_\upsilon^e]_m = \int_{\Gamma_{\mathrm{H}}^e} \nabla N_m \cdot \left(\vec{H} \times \vec{n}\right) d\Gamma. \quad (4.21)$$

O uso das equações (4.17) a (4.21) e de um procedimento de *assemblagem* para cada elemento finito da malha adotada conduz a um sistema global de equações em termos das variáveis a_i e υ_i. Estas variáveis dizem respeito respectivamente a cada uma das arestas e nós dos elementos finitos da malha de discretização empregada. Uma representação esquemática deste sistema, cuja matriz é simétrica e singular, é dada a seguir:

$$\begin{bmatrix} [M_A] & [M_{A\upsilon}] \\ [M_{A\upsilon}]^t & [M_\upsilon] \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [a] \\ [\upsilon] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [0] \\ [I] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} [r_A] \\ [r_\upsilon] \end{bmatrix}. \quad (4.22)$$

Na expressão anterior, o vetor $[I]$ tem todas as posições nulas, exceto aquela cuja numeração está associada ao nó da malha de elementos finitos que representa o ponto de injeção de corrente PD. Nesta posição, armazena-se o fasor I da corrente de excitação do sistema de aterramento.

Com a introdução das condições de contorno apropriadas, o sistema de equações anterior pode ser então resolvido para a determinação das incógnitas a_i e υ_i. A obtenção destas incógnitas permite finalmente então que os campos

eletromagnéticos sejam calculados em todo o domínio com o uso das expressões (4.7), (4.13), (4.14) e (4.15). Para o caso do campo elétrico $\vec{E}$, por exemplo, em cada elemento da malha obtém-se que

$$\vec{E}^e(x,y,z) = \sum_{i=1}^{na} e_i \cdot \vec{w}_i, \tag{4.23}$$

sendo

$$e_i = -j\omega(a_i + v_n - v_m) \tag{4.24}$$

e os índices m e n referem-se aos nós que delimitam a aresta i, que é por sua vez orientada de m para n.

Uma questão que até aqui não foi devidamente tratada diz respeito ao fato de que escoamento de correntes pelo solo constitui um problema de domínio aberto, no qual os campos eletromagnéticos e correntes elétricas em princípio se estenderiam até o infinito. Porém, torna-se necessário de alguma maneira truncar a representação computacional da região tomada para que o desenvolvimento proposto nesta secção possa ser aplicado. Isto é feito com o uso da técnica dos absorvedores anisotrópicos fictícios (ou PML) a que já se fez referência no capítulo do estado da arte [17]. Para tanto, definem-se na periferia do domínio truncado regiões volumétricas ocupadas por materiais dotados de propriedades convenientemente calculadas e capazes assim de emular o efeito de um domínio aberto.

4.3 Cálculo da impedância equivalente do aterramento

O cálculo da impedância representativa de um sistema aterramento pode ser reduzido a um caso particular do problema mais geral de se construir um circuito elétrico que seja equivalente a um certo sistema eletromagnético ao qual temos acesso unicamente através de dois terminais [26]. A Figura 4.2 ilustra a situação aqui considerada, na qual foi empregada uma notação análoga àquela da Figura 4.1.

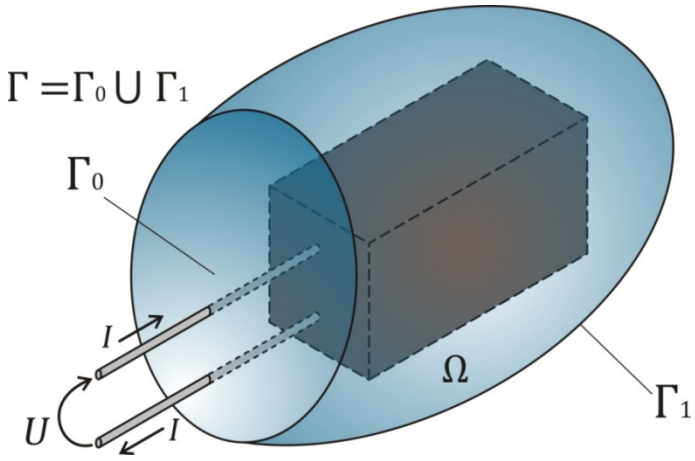

Figura 4.2 – Obtenção do bipolo equivalente a um sistema eletromagnético acessível através de dois terminais, através dos quais se processa a interação do mesmo com o universo circundante.

Admite-se que no espaço Ω ocupado pelo sistema cujo equivalente se deseja construir existe estabelecido um campo eletromagnético, e que a variação temporal deste se dá no regime harmônico. Sendo este volume delimitado por uma superfície fechada Γ, pressupõe-se também que toda a interação do sistema com o universo existente além desta fronteira pode ser expressa unicamente pelo conjunto constituído por um par de fasores; um referente à tensão elétrica U entre os dois terminais que afloram através de Γ e outro que diz respeito à corrente I que escoa por estes mesmos terminais.

A primeira questão que se apresenta nesta investigação é aquela que diz respeito às condições necessárias para a existência deste par de tensão e corrente unicamente definidos e associados aos terminais do dispositivo contido em Γ. Se, por um lado, para o caso do fasor I não há sentido em associá-lo a nenhuma outra grandeza que não seja a própria corrente elétrica de condução escoando pelos terminais de acesso do sistema eletromagnético, por outro para o caso do fasor de tensão U surge a necessidade de se fixar os pré-requisitos para que ele possa ser unicamente definido. A tensão U entre os dois terminais do dispositivo mostrados na Figura 4.2 é dada por

$$U = -\int_{\lambda} \vec{E} \cdot \vec{t} d\lambda, \tag{4.25}$$

expressão na qual o símbolo λ é utilizado para designar um percurso arbitrário apoiado sobre Γ e que parte do terminal inferior e chega ao terminal superior, e

ao longo do qual o vetor unitário $\vec{t}$ é tangente em cada um dos seus pontos. Substituindo-se nesta definição aquele resultado expresso pela eq. (4.7), obtemos

$$U = j\omega \int_{\lambda} \vec{A} \cdot \vec{t} d\lambda + \int_{\lambda} \nabla V \cdot \vec{t} d\lambda = j\omega \int_{\lambda} \vec{A} \cdot \vec{t} d\lambda + \Delta V, \tag{4.26}$$

em que ΔV representa a variação total do potencial escalar V do primeiro terminal para o segundo.

Se calcularmos uma tensão U' através de um percurso alternativo λ' entre os mesmos terminais, obteremos de forma análoga

$$U' = j\omega \int_{\lambda'} \vec{A} \cdot \vec{t} d\lambda + \Delta V. \tag{4.27}$$

Se $U = U'$, teremos então uma tensão elétrica unicamente definida entre os terminais do dispositivo em acordo com o desejado. Esta condição pode ser igualmente expressa pela diferença $U - U' = 0$, que com o auxílio das expressões anteriormente desenvolvidas pode ser reescrita de maneira explícita no formato dado pela equação a seguir:

$$U - U' = j\omega \left(\int_{\lambda} \vec{A} \cdot \vec{t} d\lambda - \int_{\lambda'} \vec{A} \cdot \vec{t} d\lambda \right) = 0. \tag{4.28}$$

Uma vez que os percursos λ e λ' apresentam as mesmas extremidades e a mesma orientação, os termos contidos entre parênteses na eq. (4.28) podem ser reunidos em apenas uma integração sobre um único percurso fechado. Se este percurso fechado dado por esta composição de λ e λ' for designado por $\lambda - \lambda'$ e o fragmento da superfície Γ por ele delimitado denominar-se $\Gamma_{\lambda-\lambda'}$, o uso então destas observações em conjunto com o teorema de Stokes produz as expressões

$$U - U' = j\omega \oint_{\lambda-\lambda'} \vec{A} \cdot \vec{t} d\lambda = j\omega \int_{\Gamma_{\lambda-\lambda'}} \left(\nabla \times \vec{A}\right) \cdot \vec{n} d\Gamma = 0, \tag{4.29a}$$

$$U - U' = j\omega \int_{\Gamma_{\lambda-\lambda'}} \vec{B} \cdot \vec{n} d\Gamma = 0, \tag{4.29b}$$

nas quais foi ainda empregada a definição do potencial vetor magnético $\vec{A}$.

A análise cuidadosa do produto dos termos igualados a zero nas equações (4.29) permite-nos então inferir duas condições, cada uma delas suficiente para determinar a unicidade do fasor de tensão U entre os terminais do sistema eletromagnético analisado.

A primeira delas decorre da constatação de que, no limite $\omega \to 0$, $U - U' \to 0$ e a tensão entre os terminais fica unicamente definida. Do ponto de vista prático, esta afirmação significa que em freqüências de operação suficientemente baixas a tensão entre os terminais do dispositivo pode ser sempre considerada como única, e deste modo independente do percurso utilizado na sua definição. Ressalta-se aqui, porém, que a única maneira de se assegurar a unicidade da tensão entre terminais a partir desta condição relativa à freqüência é satisfazer-se em limitar os casos de estudo a serem considerados a estas freqüências suficientemente baixas.

A segunda condição, por sua vez, é aquela de que a tensão entre os terminais fica unicamente definida se o fluxo do campo $\vec{B}$ concatenado com a superfície $\Gamma_{\lambda-\lambda'}$ delimitada pela composição dos percursos λ e λ' for nulo. Como λ e λ' podem em princípio ser traçados arbitrariamente sobre Γ, esta segunda condição pode ser expressa em termos do componente normal do campo $\vec{B}$ sobre esta superfície através de

$$\vec{B} \cdot \vec{n} = 0 \text{ em } \Gamma, \tag{4.30}$$

ou, de maneira equivalente e conforme o explicitado pela eq. (4.29a), em termos do componente tangencial de $\vec{A}$:

$$\vec{A} \cdot \vec{t} = 0 \text{ em } \Gamma. \tag{4.31}$$

Este último resultado sintetizado na eq. (4.31) pode ser comparado e identificado com a eq. (4.10b), que diz respeito à condição de contorno para o campo $\vec{A}$ que se faz necessária na utilização da formulação *AV-3D ungauged* do Método dos Elementos Finitos. Nesta comparação, evidentemente $\vec{A} \cdot \vec{t} = \vec{A} \times \vec{n}$. Verifica-se então que, ao menos neste contexto particular do cálculo

numérico de campos eletromagnéticos, esta segunda condição de unicidade expressa pela eq. (4.31) sempre pode ser verificada, uma vez que podemos livremente aplicar condições de contorno ao domínio sob análise desde que, é claro, elas não contrariem nenhum aspecto dos fenômenos físicos associados ao funcionamento do sistema eletromagnético a que nos propusemos a modelar.

Feitas estas considerações a respeito da unicidade dos fasores de tensão e corrente, passemos agora à tarefa de construção propriamente dita de um circuito ou bipolo cuja impedância entre os terminais seja equivalente ao sistema eletromagnético genérico da Figura 4.2.

Por questão de simplicidade, consideremos que os diversos materiais que em geral integram o conteúdo do volume Ω sejam isotrópicos, de modo com que os tensores de relutividade $[\nu]$ e de permissividade $[\varepsilon]$ se reduzam a escalares. Embora se tratem agora de escalares, convém ressaltar que estas grandezas apresentam ainda a natureza de números complexos, dado o regime permanente senoidal de operação. O efeito deste caráter complexo é o de fazer com que as relações constitutivas expressas pelas equações (4.4) em termos dos vetores complexos admitam eventuais defasagens entre $\vec{E}$ e $\vec{D}$ e $\vec{H}$ e $\vec{B}$. Tal atraso é interpretado como uma manifestação das perdas de energia decorrentes da sucessiva e periódica polarização elétrica e magnética dos materiais quando submetidos a campos alternados.

Deste modo, a permissividade elétrica ε e a permeabilidade magnética $\mu = \nu^{-1}$ escrevem-se respectivamente através de

$$\varepsilon = \varepsilon' - j\varepsilon'' \tag{4.32}$$

e

$$\mu = \mu' - j\mu'', \tag{4.33}$$

em que ε'' e μ''possuem valor real e não negativo.

A afirmação feita anteriormente de que toda a interação do sistema contido no interior de Γ com o exterior pode ser representada pela tensão U e pela corrente I dos seus terminais deve ser compreendida no sentido e no contexto das trocas de energia. Diante disto, e uma vez que o balanço de energia

eletromagnética em uma determinada região do espaço é governado pelo teorema de Poynting, a obtenção do circuito elétrico equivalente é feita através da aplicação conveniente deste teorema ao problema em questão, em acordo com procedimento que será explicitado a seguir.

No contexto do regime harmônico de variação no tempo e com o uso da representação complexa para os vetores de campo, o vetor de Poynting é dado por

$$\vec{S} = \frac{1}{2}\vec{E} \times \vec{H}^*, \tag{4.34}$$

sendo que a sua parte real está associada a potência média no tempo por unidade de área e a sua parte imaginária relaciona-se com as energias armazenadas nos campos elétrico e magnético. A energia média armazenada no campo elétrico no volume Ω no regime harmônico é dada por

$$W_{Elétrica} = \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^*}{4} \right) d\Omega, \tag{4.35}$$

ao passo em que a expressão análoga para a energia magnética nas mesmas condições é

$$W_{Magnética} = \int_{\Omega} \left(\frac{\mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^*}{4} \right) d\Omega. \tag{4.36}$$

A explicitação destas relações de potência e energia com o vetor de Poynting apontadas no parágrafo anterior é realizada através da integração deste vetor em uma superfície que encerra o sistema eletromagnético cujo modelo de circuitos elétricos se pretende construir. Uma vez que o divergente do campo $\vec{E} \times \vec{H}^*$ é dado por

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = \vec{H}^* \cdot \nabla \times \vec{E} - \vec{E} \cdot \nabla \times \vec{H}^* \tag{4.37a}$$

$$\nabla \cdot \left(\vec{E} \times \vec{H}^*\right) = -j\omega\mu\vec{H} \cdot \vec{H}^* + j\omega\varepsilon^*\vec{E} \cdot \vec{E}^* - \sigma\vec{E} \cdot \vec{E}^*, \tag{4.37b}$$

a aplicação do teorema de Gauss ao volume Ω contido no interior superfície Γ da Figura 4.2 permite obter uma expressão para o fluxo de potência eletromagnética que penetra no dispositivo sob investigação:

$$\oint_{\Gamma} \frac{1}{2}\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) \cdot \vec{n}\, d\Gamma = j\omega \int_{\Omega} \left(\frac{\mu \vec{H} \cdot \vec{H}^{*}}{2} - \frac{\varepsilon^{*} \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{2}\right) d\Omega + \int_{\Omega} \left(\frac{\sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{2}\right) d\Omega, \qquad (4.38)$$

na qual o vetor unitário $\vec{n}$, normal à superfície gaussiana Γ em toda a sua extensão, foi escolhido com orientação voltada para o interior do volume Ω.

A eq. (4.38) pode ser manipulada com o objetivo de nela separarmos suas partes real e imaginária. A primeira destas partes, a real, é dada por

$$Re\left\{\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) \cdot \vec{n} d\Gamma\right\} = \omega \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{2} + \frac{\mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^{*}}{2}\right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{2} d\Omega \qquad (4.39)$$

e representa a potência média adentrando o volume Ω que é consumida por perdas dielétricas, histeréticas e ôhmicas nos diversos materiais contidos no interior da superfície fechada Γ. Designando o conjunto desta potência de perdas pelo símbolo P_{perdas}, obtemos as expressões a seguir:

$$P_{perdas} = Re\left\{\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) \cdot \vec{n} d\Gamma\right\}, \qquad (4.40a)$$

$$P_{perdas} = \omega \int_{\Omega} \left(\frac{\varepsilon'' \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{2} + \frac{\mu'' \vec{H} \cdot \vec{H}^{*}}{2}\right) d\Omega + \int_{\Omega} \frac{\sigma \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{2} d\Omega. \qquad (4.40b)$$

A parte imaginária de (4.38) é dada, por sua vez, pela expressão

$$Im\left\{\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) \cdot \vec{n}\, d\Gamma\right\} = 2\omega \int_{\Omega} \left(\frac{\mu' \vec{H} \cdot \vec{H}^{*}}{4} - \frac{\varepsilon' \vec{E} \cdot \vec{E}^{*}}{4}\right) d\Omega, \qquad (4.41a)$$

que à luz das equações (4.35) e (4.36) pode ser reescrita na forma

$$Im\left\{\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\left(\vec{E} \times \vec{H}^{*}\right) \cdot \vec{n}\, d\Gamma\right\} = 2\omega\left(W_{Magnética} - W_{Elétrica}\right). \qquad (4.41b)$$

e se relaciona com a potência que se faz necessário suprir unicamente para a manutenção do processo de troca e conversão que se dá entre as energias elétrica e magnética armazenada nos campos estabelecidos no volume Ω.

Analisemos agora também sob esta mesma óptica do balanço de energia eletromagnético o comportamento do circuito RLC série da Figura 4.3, que é uma possibilidade de modelo para o bipolo equivalente ao sistema eletromagnético para o qual o equacionamento anterior foi desenvolvido. No

regime permanente senoidal de operação, a potência complexa absorvida pelos seus terminais e suprida pela fonte pode ser calculada em termos dos fasores de tensão e corrente do circuito:

$$UI^* = \left(R + j\omega L - \frac{j}{\omega C}\right) II^*. \tag{4.42}$$

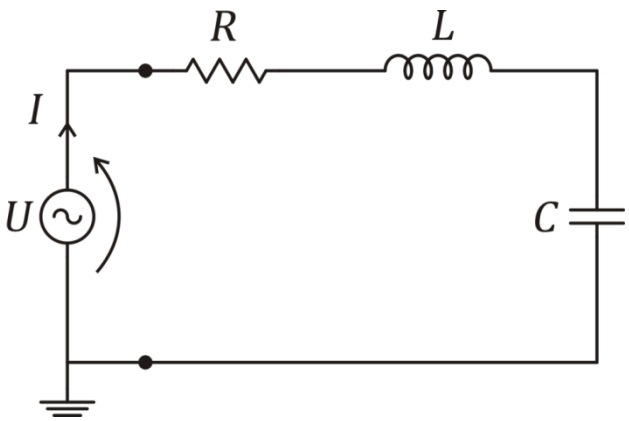

Figura 4.3 – Circuito RLC série.

A potência ativa P consumida pelo circuito é dada pela parte real da potência complexa:

$$P = Re\{UI^*\} = RII^*. \tag{4.43}$$

A potência reativa Q, por sua vez, é dada pela parte imaginária

$$Q = Im\{UI^*\} = 2\omega\left(\frac{LII^*}{2} - \frac{1}{2\omega^2 C} II^*\right). \tag{4.44}$$

Diante de tudo o que até aqui foi exposto, o bipolo equivalente ao dispositivo em questão pode ser então finalmente construído a partir da constatação da analogia de significados físicos existente entre do fluxo de entrada do vetor de Poynting complexo na superfície fechada Γ que contém o sistema eletromagnético em questão e a potência complexa absorvida pelo circuito RLC série da Figura 4.3. Através da identificação da expressão (4.43) com a (4.39), a resistência R do modelo RLC série equivalente fica determinada:

$$Re\{UI^*\} = Re\left\{\frac{1}{2}\oint_{\Gamma}\left(\vec{E}\times\vec{H}^*\right)\cdot\vec{n}\,d\Gamma\right\}$$

$$RII^* = P_{perdas}$$

$$R = \frac{P_{perdas}}{II^*} \tag{4.45}$$

A identificação do termo dependente da indutância L no segundo membro da eq. (4.44) com o primeiro termo do integrando da eq. (4.41a) determina uma expressão para este parâmetro do circuito RLC:

$$\frac{LII^*}{2} = \int_{\Omega}\left(\frac{\mu'\vec{H}\cdot\vec{H}^*}{4}\right)d\Omega = W_{Magnética}$$

$$L = \frac{2W_{Magnética}}{II^*} \tag{4.46}$$

De forma análoga, a correspondência entre o termo dependente da capacitância C da eq. (4.44) com o segundo termo do integrando da eq. (4.41a) determina o valor deste parâmetro para o bipolo equivalente:

$$\frac{1}{2\omega^2 C}II^* = \int_{\Omega}\left(\frac{\varepsilon'\vec{E}\cdot\vec{E}^*}{4}\right)d\Omega = W_{Elétrica}$$

$$C = \frac{II^*}{2\omega^2 W_{Elétrica}}. \tag{4.47}$$

As expressões (4.45), (4.46) e (4.47) fornecem definições em termos de potências e energias para a resistência, indutância e capacitância de um circuito RLC cujo comportamento em termos energéticos é equivalente ao sistema eletromagnético de dois terminais da Figura 4.2. A partir delas e com o uso da formulação numérica do Método dos Elementos Finitos apresentadas na secção anterior, o cálculo da impedância equivalente ao sistema de aterramento considerado pode ser facilmente realizado.

A idéia central do procedimento numérico utilizado para tanto é a de que, uma vez resolvido o problema de contorno correspondente à injeção de corrente em

uma certa freqüência no aterramento pelo Método dos Elementos Finitos, os campos eletromagnéticos tornam-se conhecidos em toda a extensão do domínio Ω e assim a potência de perdas P_{perdas} e as energias $W_{Elétrica}$ e $W_{Magnética}$ podem ser calculadas em cada elemento da discretização adotada. Para este fim, basta restringir-se o domínio de integração nas equações (4.35), (4.36) e (4.40b) ao volume de um único elemento. Percorrendo-se então deste modo cada um dos elementos finitos da malha discretizadora e totalizando-se cada uma das contribuições assim obtidas, o valor total destas grandezas no domínio fica determinado e os parâmetros R, L e C podem ser então calculados com as equações (4.45), (4.46) e (4.47).

As expressões a seguir propostas por Silva [14] materializam este procedimento de cálculo e são apropriadas à utilização em conjunto com a formulação *AV-3D ungauged* anteriormente apresentada. Nesta formulação, conforme já se discutiu, as incógnitas em termos das quais se constrói o sistema global de equações correspondem às grandezas de aresta a_i e às grandezas nodais $\mathcal{v}_i$, tal como definidas nas equações (4.14) e (4.15). Com tais expressões, torna-se então possível determinar o bipolo equivalente diretamente a partir das funções de forma vetoriais e da solução obtida para o sistema global de equações:

$$R = \frac{1}{II^*} Re\left\{-j\omega \sum_{e=1}^{NE} \{\mathcal{v}_n - \mathcal{v}_m\}^t \left(\int_{\Omega^e} [\vec{w}]^t \cdot [\dot{\sigma}^*][\vec{w}] d\Omega\right) \{e_i^*\}\right\}, \quad (4.48)$$

$$L = \frac{1}{II^*} Re\left\{\sum_{e=1}^{NE} \{a_i\}^t \left(\int_{\Omega^e} [\vec{w}]^t \cdot [\dot{\sigma}^*][\vec{w}] d\Omega\right) \{e_i^*\}\right\}, \quad (4.49)$$

$$C = -\frac{II^*}{\omega}\left(Im\left\{\sum_{e=1}^{NE} \{e_i\}^t \left(\int_{\Omega^e} [\vec{w}]^t \cdot [\dot{\sigma}^*][\vec{w}] d\Omega\right) \{e_i^*\}\right\}\right)^{-1}. \quad (4.50)$$

Nestas expressões, o índice e se refere a cada um dos elementos de aresta da malha de elementos finitos, e NE designa a quantidade total destes elementos existente no domínio.

4.4 Aspectos gerais referentes à implementação da formulação em dois potenciais para a solução de sistemas de aterramento

A secção 4.2 trouxe uma descrição do procedimento matemático utilizado neste trabalho para a modelagem de sistemas de aterramento com o Método dos Elementos Finitos de aresta, e a secção anterior expôs os aspectos teóricos envolvidos na definição e no cálculo numérico da impedância equivalente representativa de sistemas de aterramento. Neste tópico, informações que dizem respeito à realização prática desta formulação serão expostas.

A primeira etapa envolvida na solução de um problema de contorno pelo Método dos Elementos Finitos é a discretização do domínio considerado. Na secção 4.2, ao se fazer a exposição da formulação numérica ali tratada, esta malha de elementos finitos foi tida como dada a priori e composta por elementos de um tipo genérico. Faz-se necessário, portanto, escolher o tipo particular de elemento finito de aresta a ser adotado para o uso na formulação e de alguma maneira construir uma discretização do domínio em termos desta variedade selecionada.

No presente trabalho e no contexto de sistemas de aterramento, o domínio Ω da Figura 4.1 representa o solo nas imediações do aterramento e foi discretizado em elementos finitos hexaédricos de aresta daqueles tipos tratados no Capítulo 3 (de acordo com a Figura 3.1 e com a Figura 3.2). A representação computacional deste domínio e a sua discretização em elementos finitos foram realizadas através do uso do programa Gmsh [25], livremente distribuído através da Internet.

Naquilo que diz respeito à implementação da formulação propriamente dita, já se afirmou na primeira secção deste capítulo que ela foi realizada com o apoio da biblioteca de classes LMAGLIB, disponível no Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo e que representa o produto do trabalho de diversos pesquisadores ao longo do tempo. Através do uso desta biblioteca, tornou-se possível tomar a malha de elementos finitos representativa do domínio do problema de

aterramento discretizado gerada pelo programa Gmsh e a ela aplicar a formulação anteriormente detalhada.

Na realidade, à época em que se deu o início deste trabalho, a simulação com o Método dos Elementos Finitos de sistemas de aterramento através da metodologia exposta no parágrafo anterior com o uso conjunto da biblioteca LMAGLIB e do programa Gmsh já era possível [14]. Contudo, por conta das dificuldades expostas no Capítulo 3, apenas o elemento hexaédrico tri-linear de oito nós e doze arestas era suportado e ferramentas acessórias para a análise de resultados e pós-processamento inexistiam ou eram bastante limitadas. Estas lacunas puderam ser preenchidas com os trabalhos expostos a seguir neste documento, e que representam desta forma já uma contribuição ao estudo sistemático dos sistemas de aterramento em acordo com aquilo que se apresentará a partir deste ponto.

Para que o uso do elemento hexaédrico quadrático incompleto de vinte nós e trinta e seis arestas fosse possível, todas as ferramentas da LMAGLIB de interface e comunicação com o programa Gmsh para a tomada de dados de malha precisaram ser revistas, adaptadas e ampliadas. Além disto, o cálculo específico das funções de forma nodais e vetoriais para a obtenção e *assemblagem* das matrizes de rigidez dos elementos finitos desta variedade precisou ser desenvolvido e acrescentado à biblioteca.

A biblioteca LMAGLIB encontra-se desenvolvida na linguagem C++, e se utiliza intensamente de técnicas de programação orientadas a objetos. A Figura 4.4 exibe um excerto do diagrama de classes e heranças desta biblioteca, particularmente aquele fragmento que ilustra o relacionamento entre as classes que modelam os elementos finitos de aresta utilizados. Nos quadros representativos dos elementos hexaédricos, listam-se as funções membro responsáveis pelo cálculo da matriz de rigidez expressa na eq. (4.16). Estas funções traduzem, em última instância, a realização computacional das tabelas contidas no Capítulo 3 e no Apêndice A. Reitera-se aqui mais uma vez a afirmação de que estas funções apenas puderam ser elaboradas à luz daquela investigação desenvolvida e registrada naquele mesmo capítulo, e representam desta forma grande e importante parte do trabalho até aqui desenvolvido.

Após ter sido construído com o apoio das funções pertencentes às classes dos elementos apresentadas no parágrafo anterior, o sistema global de equações é resolvido por procedimentos numéricos iterativos disponíveis na própria LMAGLIB. Em particular, utiliza-se neste trabalho o algoritmo SICCG (*Shifted Incomplete Cholesky Conjugate Gradients*) desta biblioteca [27].

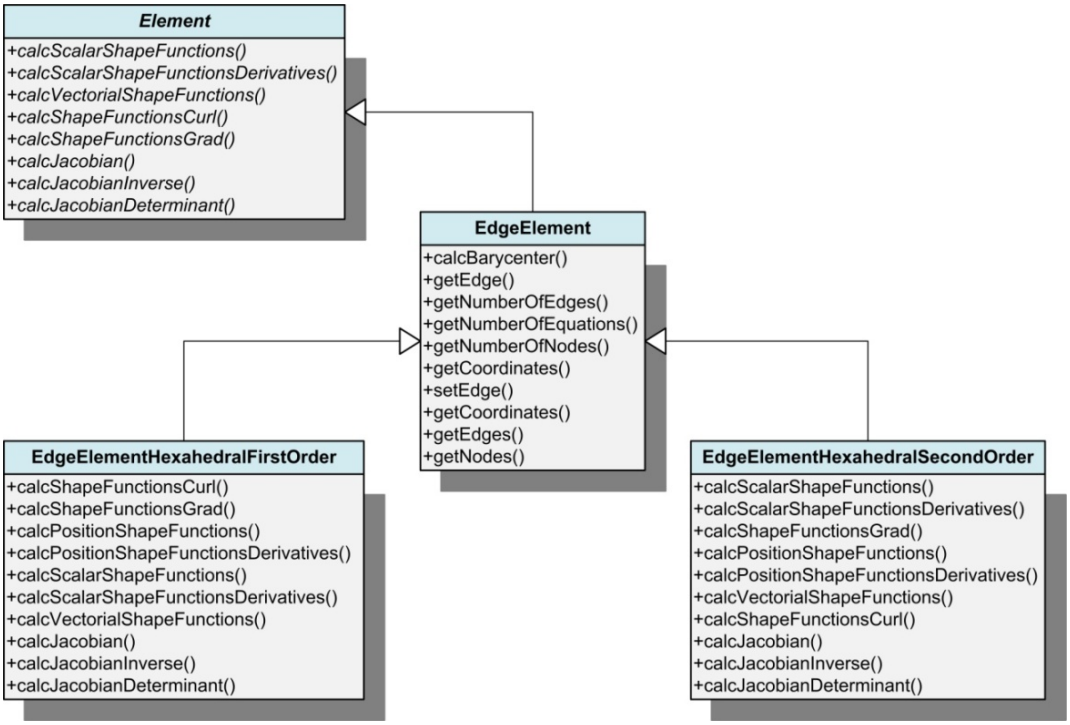

Figura 4.4 – Fragmento do diagrama de classes e heranças da biblioteca LMAGLIB, exibindo as classes associadas ao elementos hexaédricos tri-linear (quadro *EdgeElementHexahedralFirstOrder*) e quadrático incompleto (quadro *EdgeElementHexahedralSecondOrder*).

Uma vez terminada esta etapa de resolução do sistema de equações do problema, a análise dos resultados é feita mediante o cálculo da impedância equivalente do aterramento e da exibição dos campos e potenciais obtidos no domínio tridimensional do aterramento. Este cálculo da impedância do aterramento é realizado levando-se em conta as hipóteses propostas por Plonsey [26] e conforme o mecanismo adaptado ao problema discretizado sugerido por Silva [14], que foram apresentados em detalhe na secção anterior deste capítulo.

Para a análise visual dos campos e potenciais a que se fez referência, foram desenvolvidas ferramentas complementares que permitiram com que o programa Gmsh fosse novamente utilizado como um módulo de pós-processamento para a análise dos resultados produzidos. O trabalho desempenhado por tais ferramentas é aquele de converter em grandezas de significado físico mais imediato a solução do sistema de equações (4.22). Esta, num primeiro momento, não passa de uma massa de valores numéricos em formato bruto não muito útil para aplicações práticas de engenharia, uma vez que é dada simplesmente por uma coleção de valores a_i e v_i.

Por este motivo estas aplicações de pós-processamento se fazem importantes, e amostras delas encontram-se na próxima secção, tanto para o cálculo da impedância do aterramento quanto para a visualização dos resultados de potenciais escalar elétrico e de campos eletromagnéticos. Nela, será apresentado um conjunto de simulações de hastes de aterramento verticalmente enterradas em solos homogêneos, que foi utilizado tanto para a validação da formulação numérica adotada quanto para o teste destes complementos de *software* que se fizeram necessários.

4.5 Detalhes referentes à aplicação em aterramentos elementares compostos por hastes verticalmente enterradas em solos isotrópicos e homogêneos

Antes que os resultados obtidos com a aplicação da formulação anteriormente descrita a problemas simples de aterramento solicitados por correntes no regime harmônico possam ser expostos, alguns comentários referentes a detalhes da execução deste estudo se fazem aqui necessários.

Serão aqui consideradas configurações de aterramento dadas por uma única haste metálica e cilíndrica introduzida no solo, que é suposto homogêneo e isotrópico. Através desta haste se fazem escoar fasores de corrente elétrica de diversas freqüências, a fim de se determinar o comportamento do módulo e da fase da impedância equivalente do sistema em cada caso. Potenciais elétricos

e campos eletromagnéticos são também determinados no solo nas proximidades do aterramento.

Uma representação pictórica do problema genérico descrito no parágrafo anterior encontra-se na Figura 4.5, que contém também a notação adotada para os parâmetros físicos do solo e para as dimensões geométricas da haste.

Em todos os casos de simulação a serem analisados, mantiveram-se constantes a permissividade elétrica do solo (ε = $10\varepsilon_0$) e o raio da haste de aterramento (a = 1,25cm). Para todos os casos admitiu-se também que a permeabilidade magnética do solo é igual àquela do vácuo. Quanto aos demais parâmetros, ou seja, a resistividade do solo ρ_s e o comprimento ℓ da haste, as combinações deles utilizadas na série de casos analisados encontram-se expressos na tabela 4.1.

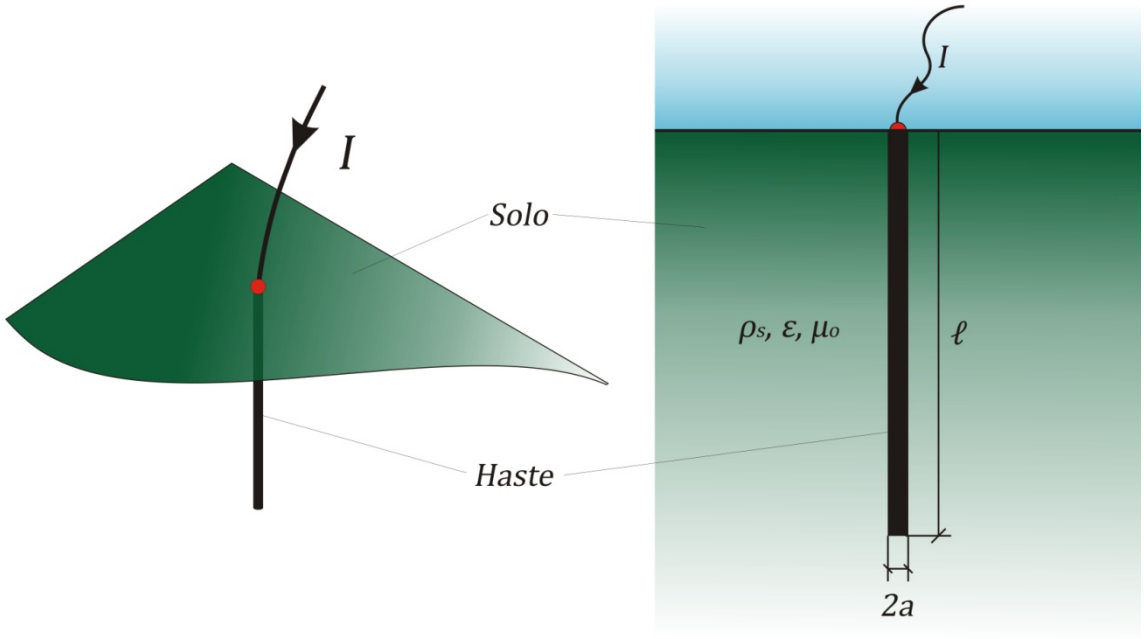

Figura 4.5 - Haste de aterramento cilíndrica enterrada em solo homogêneo e isotrópico.

Tabela 4.1 – Combinações de comprimentos de haste e de resistividades de solo utilizados nas simulações realizadas.

Simulação	Comprimento da haste $\ell\ (m)$	Resistividade do solo $\rho_s\ (\Omega \cdot m)$
1	3	10
2	3	100
3	3	1000
4	24	10
5	24	100
6	24	1000

A seleção desta série de parâmetros foi feita em decorrência da necessidade de se dispor de alguma referência para a validação dos resultados que se produziriam. Assim, a coleção de problemas definida pela Tabela 4.1 foi aquela escolhida para esta verificação pelo fato de Grcev e Popov haverem considerado justamente estes mesmos casos de hastes de aterramento no trabalho da referência [4].

Neste artigo, os autores representam a impedância Z do aterramento por um modelo de linha de transmissão. Através desta hipótese, Z pode ser calculada em módulo e fase para qualquer freqüência através da expressão

$$Z = Z_0 \coth(\gamma \ell), \tag{4.51}$$

onde

$$Z_0 = \sqrt{\frac{j\omega L'}{G' + j\omega C'}} \tag{4.52}$$

é a impedância característica da linha do modelo e

$$\gamma = \sqrt{j\omega L'(G' + j\omega C')} \tag{4.53}$$

é a sua constante de propagação.

Os parâmetros C', G' e L' nas expressões anteriores são, respectivamente, a capacitância, a condutância e a indutância por unidade de comprimento de uma haste cravada no solo. Podem ser calculados através das seguintes fórmulas, obtidas por Sunde [1]:

$$C' = \frac{2\pi\varepsilon}{\ln\left(\frac{4\ell}{\mathrm{a}}\right) - 1}, \tag{4.54}$$

$$G' = \frac{2\pi/\rho_s}{\ln\left(\frac{4\ell}{\mathrm{a}}\right) - 1}, \tag{4.55}$$

$$L' = \frac{\mu_0}{2\pi}\left[\ln\left(\frac{2\ell}{\mathrm{a}}\right) - 1\right]. \tag{4.56}$$

Deste modo, um estudo comparativo da resposta em freqüência da impedância complexa representativa de cada aterramento da Tabela 4.1 foi realizado, no qual se confrontaram os valores previstos pelo modelo de linha de transmissão expresso pelas equações de (4.51) a (4.56) com aqueles determinados numericamente pelo Método dos Elementos Finitos.

Os próximos parágrafos encarregam-se de fornecer uma descrição do procedimento utilizado para a obtenção da representação geométrica da classe de problemas ilustrada pela Figura 4.5 e da discretização por meio de elementos finitos associada. A Figura 4.6a apresenta um exemplo típico de malha de elementos finitos produzida com o programa Gmsh para um dos casos da coleção de problemas considerada. Pode-se observar que apenas um quarto do volume um torno da haste de aterramento é representado, por questões de simetria. A Figura 4.6b mostra uma representação esquemática deste volume, e traz também a definição dos parâmetros geométricos utilizados no dimensionamento do mesmo. A atribuição de valores específicos de comprimento a estes parâmetros é feita levando-se em consideração a necessidade intrínseca do Método dos Elementos Finitos de se truncar a representação do domínio, uma vez que o problema de escoamento de correntes da haste para o solo constitui um típico problema de domínio aberto em Eletromagnetismo.

A estratégia adotada neste trabalho foi aquela de se associar a cada um destes parâmetros geométricos um comprimento múltiplo da profundidade de penetração dos campos eletromagnéticos no solo, calculada em uma freqüência particular pertencente à região do espectro próxima ao limite superior do intervalo de freqüências consideradas neste estudo.

Deste modo, e utilizando-se a notação introduzida por meio da Figura 4.6b, os valores numéricos atribuídos a cada um destes parâmetros nas simulações realizadas encontram-se representados na Tabela 4.2. A profundidade de penetração no solo dos campos utilizada neste dimensionamento foi aquela correspondente à freqüência de 1MHz (representada nesta Tabela pelo símbolo δ_{1MHz}), e pode ser facilmente calculada em cada caso por meio da expressão

$$\delta = \frac{1}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{\rho_s\omega\varepsilon}\right)^2}-1\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}. \tag{4.57}$$

Três dos parâmetros definidos na Figura 4.6, nela designados por PMLx, PMLy e PMLz, possuem um significado especial. Eles estão ligados ao dimensionamento da região mais periférica do domínio, na qual se poderia fazer uso da técnica de materiais anisotrópicos fictícios (PML - *Perfeclty Matched Layers*) a que se fez referência no Capítulo 2 para a representação da fronteira. A Figura 4.7 contém uma ilustração que exibe esta parte do domíno de maneira explícita.

Tabela 4.2 – Parâmetros geométricos para o dimensionamento do domínio nas simulações de aterramento por meio de uma haste metálica.

Parâmetro geométrico (conforme a Figura 4.6b)	Comprimento	Interpretação
ℓ	$3m$ ou $24m$, conforme o caso de simulação (Tabela 4.1)	Comprimento da haste metálica de aterramento
D	δ_{1MHz}	Comprimento da região imediatamente adjacente a haste nas direções x e y.
B	$4\delta_{1MHz}$	Comprimento da região periférica do solo nas direções x e y
PMLx	δ_{1MHz}	Espessura da camada de material absorvedor anisotrópico fictício ao longo da direção x
PMLy	δ_{1MHz}	Espessura da camada de material absorvedor anisotrópico fictício ao longo da direção y
PMLz	δ_{1MHz}	Espessura da camada de material absorvedor anisotrópico fictício ao longo da direção z

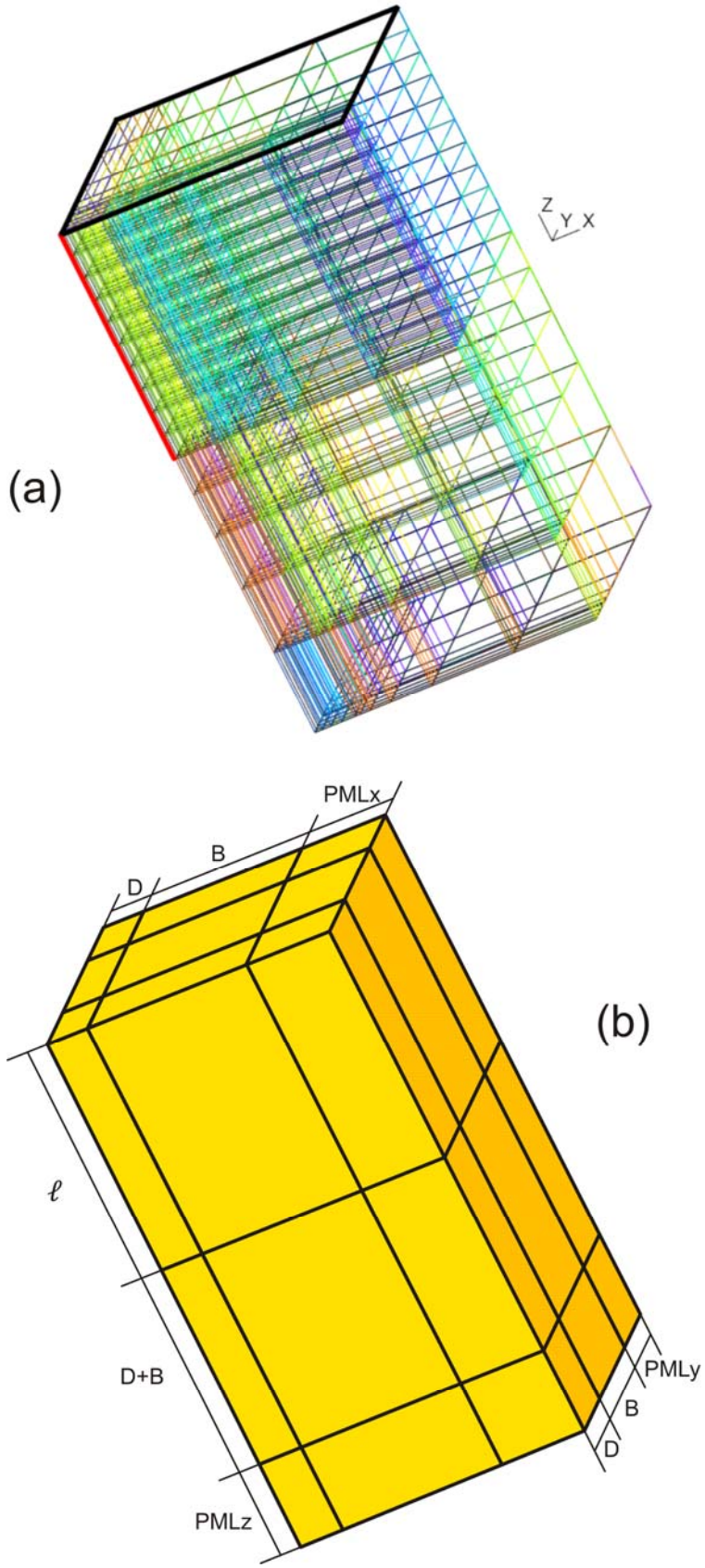

Figura 4.6 – Representação utilizada para a simulação do aterramento, com a malha de elementos finitos hexáedricos, com a haste destacada em vermelho e com a superfície do solo destacada em preto (a). As dimensões geométricas do domínio representado são dadas em termos dos parâmetros geométricos ℓ, D, B, PMLx, PMLy, e PMLz (b).

A utilização desta técnica consistiria na determinação de um comprimento apropriado para a espessura destas camadas e na determinação adequada das propriedades anisotrópicas deste meio material fictício com a finalidade de se eliminar quaisquer reflexões dos campos na interface da região azul com a região vermelha da representação contida na Figura 4.7. Pretender-se-ia com isto modelar um domínio aberto através de uma região volumétrica limitada, na fronteira da qual se processam apenas a transmissão e absorção dos campos eletromagnéticos.

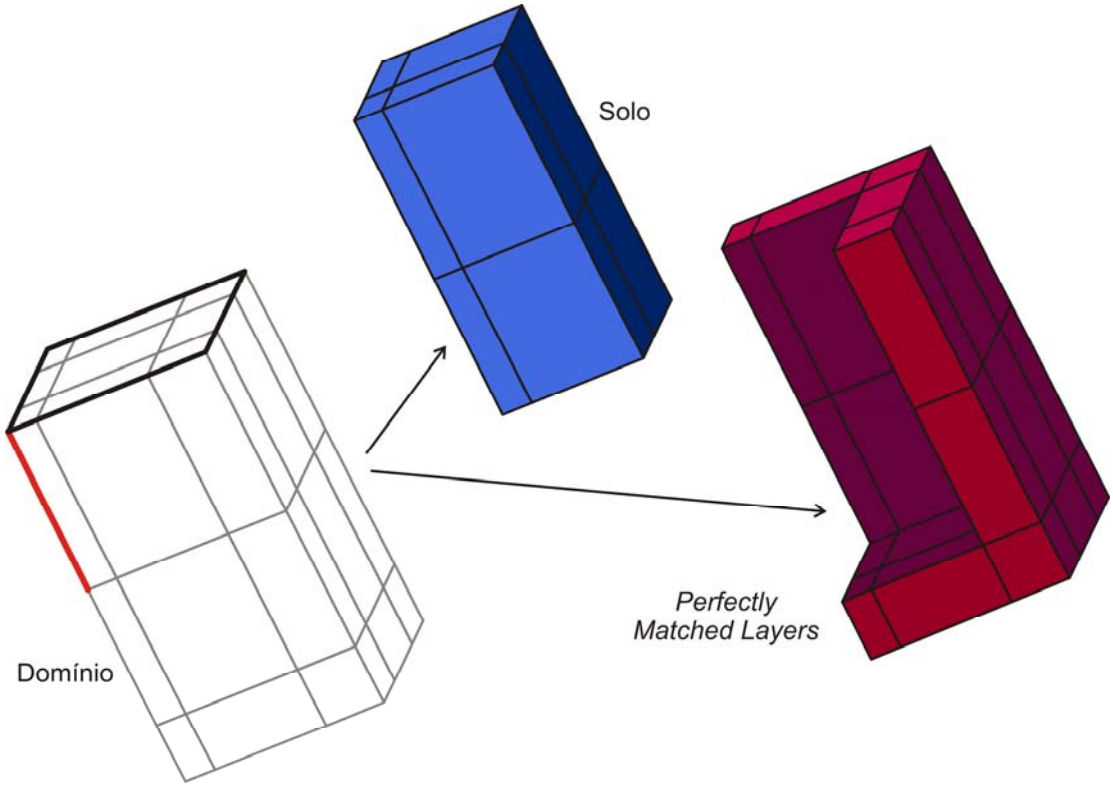

Figura 4.7 – Representação das duas regiões do domínio do problema. Em azul, o volume ocupado pelo solo. Em vermelho a região na periferia do domínio definida pelos parâmetros PMLx, PMLy e PMLz, que poderia ser utilizada com a técnica de *Perfectly Matched Layers.*

Esta caracterização desta camada fictícia de materiais absorvedores na periferia do domínio e a investigação das diversas possibilidades existentes na realização desta tarefa representariam por si só um trabalho de pesquisa interessante e útil à modelagem do sistema de aterramento aqui considerado, porém trabalhoso. Ao invés disso, e baseando-se na experiência heurística que pode ser acumulada com a manipulação da ferramenta computacional

desenvolvida, uma outra abordagem foi utilizada para o tratamento simplificado desta questão da transmissão e reflexão de ondas na fronteira do domínio truncado. Conforme revelam os valores adotados para os parâmetros B, D, PMLx, PMLy e PMLz contidos na Tabela 4.2, o comprimento total do domínio em cada uma das três direções é de seis vezes a profundidade de penetração dos campos eletromagnéticos no solo na freqüência de 1MHz. O resultado desta escolha é o de que, na região periférica do domínio, os campos decorrentes do escoamento de correntes elétricas no solo já se encontrarão suficientemente atenuados (para freqüências maiores ou iguais a 1MHz, e em grande parte também para outras freqüências menores), tornando eventuais componentes refletidos pouco significativos. Deste modo, contorna-se a necessidade de se caracterizar a região PML do domínio, e no estudo aqui realizado a região vermelha da Figura 4.7 também foi preenchida em cada caso de simulação com o material isotrópico característico do solo considerado.

Comentários a respeito de peculiaridades envolvidas na aplicação de condições de fronteira para a resolução dos problemas de contorno representados por cada uma das simulações realizadas nesta série também se fazem aqui necessários. A Figura 4.8 mostra as condições de contorno aplicadas às variáveis do problema associadas aos nós (v_i) e às arestas (a_i) pertencentes às fronteiras do domínio, bem como o recurso utilizado para a modelagem do material condutor da haste.

A análise cuidadosa da Figura 4.8 e da malha de elementos finitos da Figura 4.6a mostra que na abordagem aqui utilizada o raio e o volume da haste de aterramento não são representados, uma vez que esta é tomada como um condutor filiforme. Não há desta forma um volume associado à massa metálica da haste que possa ser malhado com hexaedros, diferentemente daquilo que ocorre com todo o restante do domínio. Ao invés disto, aplica-se aos nós das arestas coincidentes com o comprimento da haste filiforme uma condição de contorno flutuante para o potencial escalar elétrico V. Em outras palavras, ele é tomado como constante (mas desconhecido) ao longo de todos os nós da malha de elementos finitos pertencentes à haste no processo de montagem e resolução do sistema global de equações. Este procedimento representa evidentemente uma aproximação, uma vez que as superfícies condutoras

apenas se comportam rigorosamente como eqüipotenciais no contexto da eletrostática ou, de forma aproximadamente eqüipotencial, no regime quase-estático de variação temporal dos campos. O uso desta abordagem afetará, deste modo, o comportamento dos resultados obtidos nos casos de variação temporal mais rápida dos campos ou, em outras palavras, nos casos de escoamento de correntes elétricas de freqüências mais elevadas pelo aterramento.

Com relação às demais condições de contorno ilustradas na Figura 4.8, estas se encarregam de fixar a referência do potencial elétrico V em uma posição suficientemente distante do ponto de introdução de correntes elétricas pela haste, além de garantir a unicidade do cálculo da impedância equivalente do conjunto em acordo com a discussão realizada na secção 4.3.

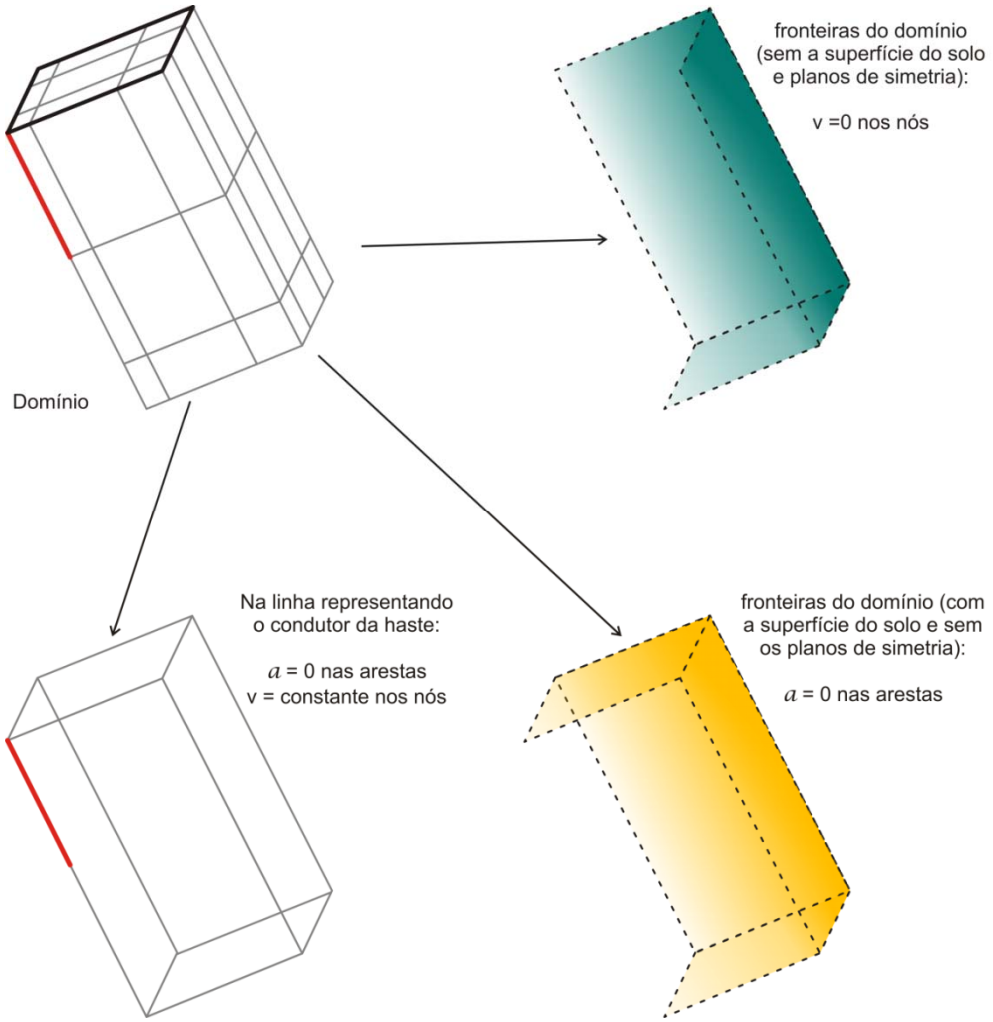

Figura 4.8 – Condições de contorno aplicadas à haste metálica e as fronteiras do domínio nas simulações realizadas.

A seguir, os resultados obtidos utilizando-se a formulação e os procedimentos até aqui descritos serão apresentados e discutidos.

4.6 Aplicação e discussão dos resultados obtidos

Por meio da realização de sucessivas simulações, cada uma delas com uma diferente freqüência para a corrente senoidal introduzida no solo por meio da haste, foram construídos gráficos de resposta em freqüência da impedância equivalente do aterramento. Os casos considerados são aqueles previstos pela série da Tabela 4.1. A Figura 4.9 traz os resultados para as três primeiras simulações da Tabela 4.1, que dizem respeito a uma haste de três metros de comprimento. A Figura 4.10 por sua vez exibe os resultados análogos para os casos de uma haste de 24m, expressos pelas três últimas simulações da mesma tabela. Em ambos os casos foi utilizada uma discretização do domínio por meio de elementos hexaédricos quadráticos incompletos, de vinte nós e trinta e seis arestas (Figura 3.2). As linhas cheias representam os valores previstos pelo modelo de linhas de transmissão exposto na secção anterior para a impedância equivalente, e foram calculados com o uso da eq. (4.51). As pequenas circunferências registram os valores numericamente determinados por meio de simulação, utilizando-se para tanto as equações (4.48), (4.49) e (4.50) da secção 4.3.

A série de simulações cujos resultados encontram-se representados nos gráficos da Figura 4.9 e da Figura 4.10 fornece uma visão geral da qualidade dos resultados obtidos com a ferramenta computacional desenvolvida em uma ampla faixa de freqüências. No entanto, ela foi conduzida sem a preocupação de que em cada caso os problemas numéricos resultantes fossem todos comparáveis. Em outras palavras e de maneira mais precisa, para cada série de simulação referente a uma resistividade de solo diferente foi utilizada uma malha de discretização especificamente construída para a série, que conduziu em cada caso a um sistema de equação de porte não necessariamente similar àqueles das demais situações.

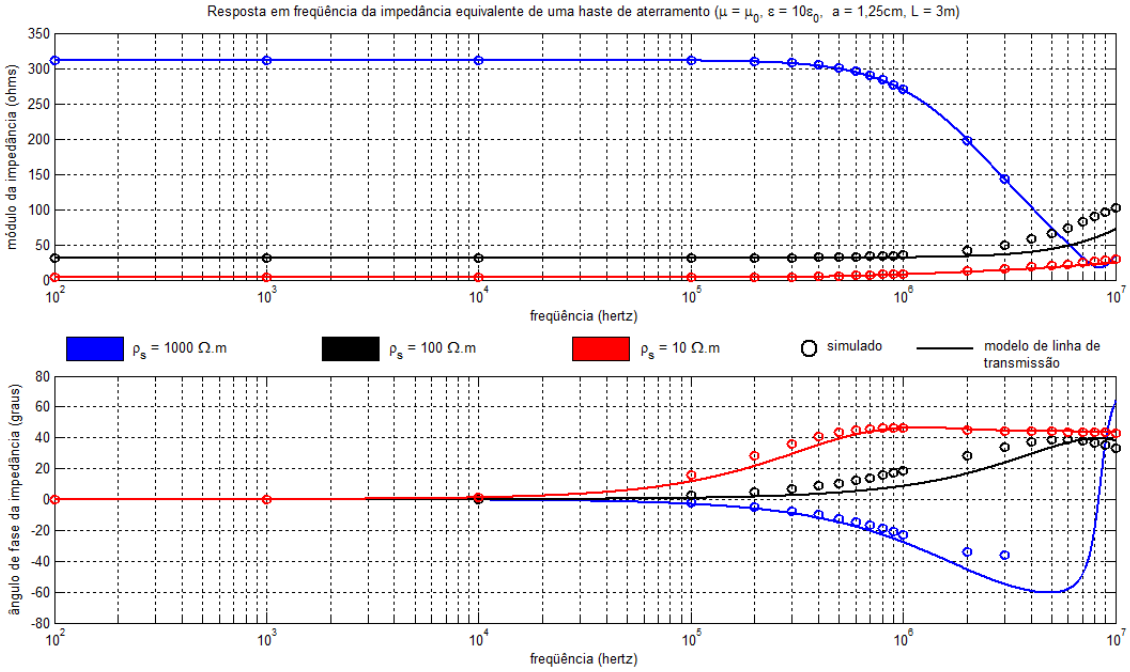

Figura 4.9 – Resposta em freqüência da impedância equivalente de uma haste de aterramento de três metros de comprimento obtida com malha de elementos hexaédricos quadráticos incompletos.

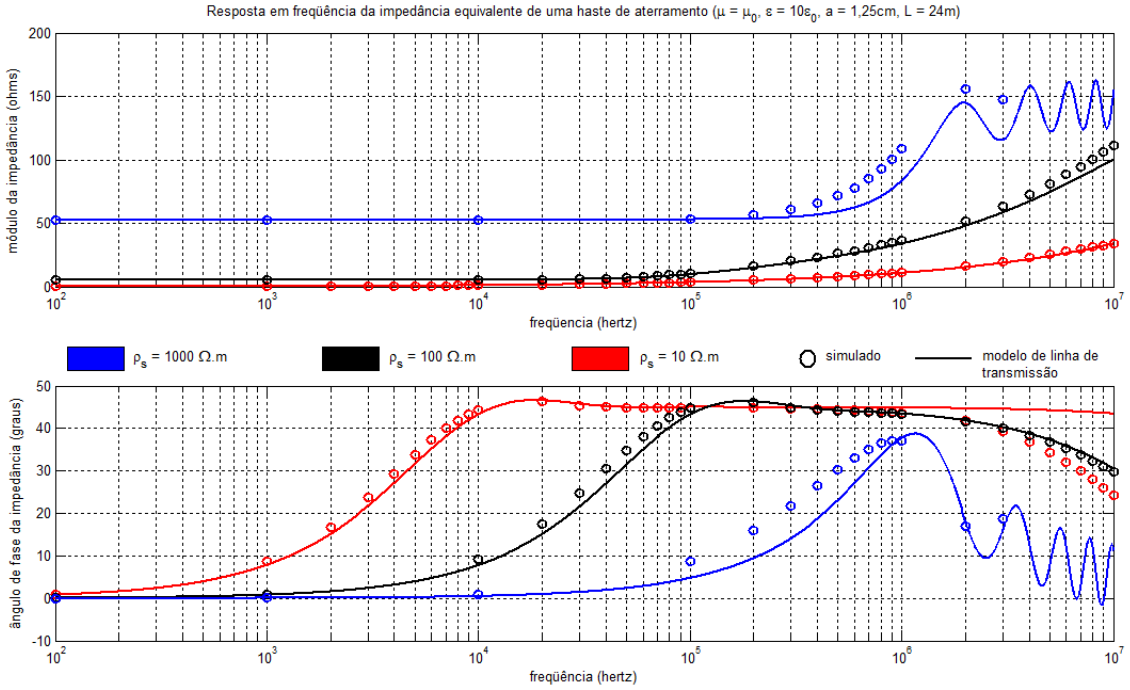

Figura 4.10 – Resposta em freqüência da impedância equivalente de uma haste de aterramento de vinte e quatro metros de comprimento obtida com malha de elementos hexaédricos quadráticos incompletos.

Com o objetivo de que uma análise mais minuciosa a respeito da qualidade destes resultados pudesse ser realizada, e com a finalidade também de se produzir uma comparação entre o desempenho do novo elemento hexaédrico quadrático incompleto de vinte nós e o do elemento hexaédrico tri-linear de oito

nós, dois dos casos de simulação da Tabela 4.1 foram selecionados. Em particular, foram escolhidos os casos de números 2 e 3 ali registrados, e ambos foram resolvidos tanto com o uso do elemento tri-linear quanto com o do quadrático incompleto como unidade básica da malha de elementos finitos. Os parâmetros de discretização dos comprimentos característicos do domínio mostrados esquematicamente na Figura 4.6b utilizados em cada um dos dois casos encontram-se disponíveis na Tabela 4.3 e na Tabela 4.4.

Conforme se pode verificar através destas tabelas, com a utilização de malhas de elementos finitos descritas pelos parâmetros nelas contidos tornou-se possível construir nos dois casos selecionados sistemas de equações com uma quantidade relativamente próxima de incógnitas para ambos os tipos de elemento hexaédrico empregados (cerca de 42000 para o caso número 2, e cerca de 46000 para o caso número 3).

Tabela 4.3 – Parâmetros de discretização dos comprimentos geométricos característicos do domínio para o caso de simulação número 2
(ℓ = 3m, a = 1,25 cm, ρ_s = 100 $\Omega \cdot m$, ε = 10ε_0, μ = μ_0).

Parâmetro geométrico (conforme a Figura 4.6b)	Número de elementos finitos ao longo do comprimento		Razão da progressão geométrica do comprimento dos elementos hexaédricos		Número de incógnitas do sistema de equações resultante	
	Elemento tri-linear	Elemento quadrático incompleto	Elemento tri-linear	Elemento quadrático incompleto	Elemento tri-linear	Elemento quadrático incompleto
ℓ	20	10	1,0	1.0		
D	10	6	1,375	1,675		
B	5	3	1,1	1,1		
D+B	15	12	1,5	1,5	41225	42013
PMLx	1	1	1,0	1,0		
PMLy	1	1	1,0	1,0		
PMLz	1	1	1,0	1,0		

Tabela 4.4 – Parâmetros de discretização dos comprimentos geométricos característicos do domínio para o caso de simulação número 3
(ℓ = 3 m, a = 1,25 cm, ρ_s = 1000 $\Omega \cdot m$, ε = 10ε_0, μ = μ_0).

Parâmetro geométrico (conforme a Figura 4.6b)	Número de divisões (ou de elementos) ao longo do comprimento		Razão da progressão geométrica do comprimento dos elementos hexaédricos		Número de incógnitas do sistema de equações resultante	
	Elemento tri-linear	Elemento quadrático incompleto	Elemento tri-linear	Elemento quadrático incompleto	Elemento tri-linear	Elemento quadrático incompleto
ℓ	20	10	1,0	1,0		
D	10	7	1,55	1,975		
B	5	3	1,1	1,1		
D+B	15	10	1,5	1,8	46296	46076
PMLx	1	1	1,0	1,0		
PMLy	1	1	1,0	1,0		
PMLz	1	1	1,0	1,0		

A Figura 4.11 e a Figura 4.12 apresentam os resultados obtidos para estes casos selecionados, utilizando-se as discretizações propostas na Tabela 4.3 e na Tabela 4.4. Além de terem sido escolhidos com o propósito anteriormente justificado de se construir problemas numéricos de tamanho semelhante em cada um dos casos, os parâmetros de discretização contidos nestas tabelas também foram escolhidos de modo com que fosse alcançado o melhor acordo possível no limite inferior do intervalo de freqüências considerado (100 Hz) entre os valores de impedância numericamente calculados e os valores previstos pelo modelo de linha de transmissão adotado.

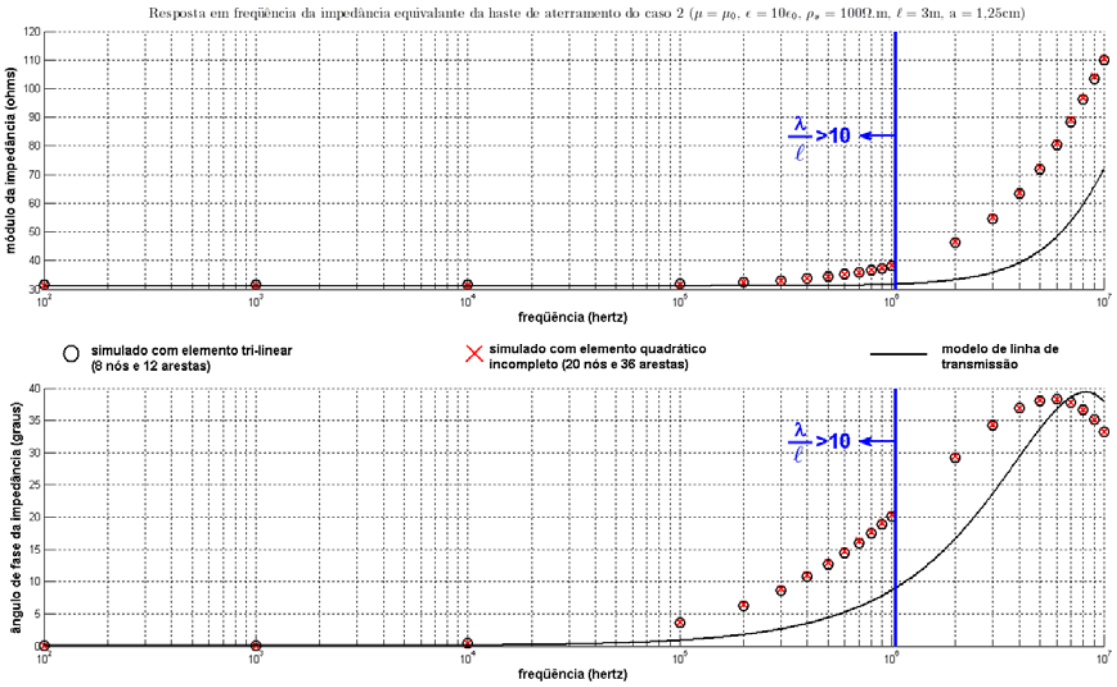

Figura 4.11 - Reposta em freqüência para o caso de simulação número 2 da Tabela 4.1 com os dois tipos de elementos finitos hexaédricos. A linha azul vertical mostra o limite de freqüências até o qual o comprimento ℓ da haste metálica é menor que um décimo do comprimento de onda λ dos campos no solo.

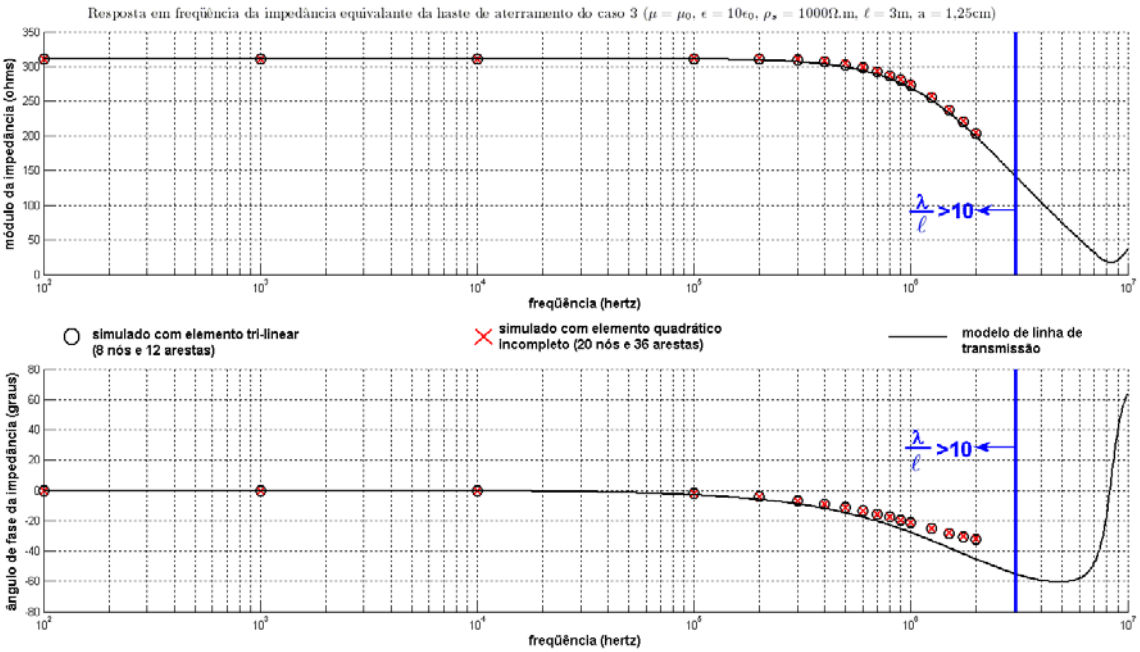

Figura 4.12 - Reposta em freqüência para o caso de simulação número 3 da Tabela 4.1 com os dois tipos de elementos finitos hexaédricos. A linha azul vertical mostra o limite de freqüências até o qual o comprimento ℓ da haste metálica é menor do que um décimo do comprimento de onda λ dos campos no solo.

A afirmação contida no parágrafo anterior se faz aqui necessária pelo fato de a experiência com a manipulação da ferramenta computacional aqui considerada haver mostrado que os resultados numéricos obtidos com ela para o valor da impedância equivalente são bastante sensíveis às características malha e elementos hexaédricos adotada e ao grau de discretização imposto por ela. Verifica-se que quanto mais se aumenta a concentração de elementos no domínio (principalmente nas regiões próximas da haste de aterramento), tanto maior resulta a impedância do aterramento calculada pelo procedimento aqui utilizado. Por exemplo, se na Tabela 4.3 o número de elementos hexaédricos tri-lineares com que se divide o parâmetro geométrico D for aumentado de 10 para uma quantidade maior ou, de maneira alternativa, se incrementarmos a razão da progressão geométrica com que o comprimento destes elementos crescem (tornando-os, portanto, menores e mais concentrados nas proximidades da haste de aterramento) de 1,375 para um valor superior, o efeito que se obtém é o de que os valores numéricos do módulo da impedância equivalente numericamente calculados tendem a crescer, afastando-se dos cerca de 30 ohms mostrados nas Figura 4.11 para as baixas freqüências. Em outras palavras, ao se incrementar a discretização do domínio torna-se possível ajustar os valores de módulo da impedância obtidos com a simulação a uma curva teórica localizada numa posição acima daquela prevista pelo modelo de linha de transmissão no plano cartesiano dos gráficos de resposta em freqüência.

Este comportamento foi verificado tanto para malhas de elementos hexaédricos tri-lineares (conforme o relatado no parágrafo anterior) quanto para o caso de malhas compostas pelo elemento hexaédrico quadrático incompleto. De maneira contrária a este comportamento variável dos valores de módulo, os de ângulos de fase da impedância numericamente determinada mostraram-se bastante insensíveis a modificações no grau de discretização imposto pela malha de elementos finitos utilizada.

Frente a estas observações, o procedimento adotado para a obtenção dos gráficos anteriores foi realizado da seguinte maneira: ajustou-se a discretização da malha de elementos finitos para que se obtivesse o melhor resultado possível em baixas freqüências. Tal ajuste foi realizado de forma iterativa,

refletindo novamente a prática e a experiência acumuladas com a manipulação da ferramenta desenvolvida, e conduziu às malhas de elementos finitos descritas pelos dados contidos na Tabela 4.2, na Tabela 4.3 e na Tabela 4.4. Feito isto, fixaram-se as dimensões do domínio e a discretização do mesmo, percorrendo-se então a partir daí o espectro de freqüências das correntes injetadas no aterramento.

Os resultados contidos nos gráficos de resposta em freqüência da Figura 4.9 e da Figura 4.10 devem ser analisados levando-se em consideração as hipóteses adotadas na realização deste estudo. O primeiro aspecto a ser levado em conta é o de que o modelo analítico de linhas de transmissão utilizado como parâmetro de comparação tem sua validade restrita a baixas freqüências, uma vez que para a sua obtenção diversas hipóteses próprias do regime quase-estático de variação temporal dos campos se fazem necessárias, conforme se pode verificar na referência [1]. Entre estas hipóteses, encontram-se a distribuição uniforme da corrente elétrica ao longo do comprimento da haste e o desacoplamento entre os campos elétrico e magnético. De maneira similar, os valores numéricos de impedância equivalente também foram obtidos valendo-se de uma aproximação que restringe a validade dos mesmos a um limite de freqüências não muito elevado, conforme a discussão da secção anterior naquilo que disse respeito à aplicação da condição de contorno flutuante sobre o potencial elétrico dos nós da malha de elementos finitos associados à haste metálica.

De acordo com Olsen [6], uma condição suficiente para que o problema de uma haste de aterramento possa ser adequadamente representado por meio de uma modelagem quase-estática é aquela de que as freqüências de operação do sistema sejam tais que o comprimento ℓ da haste não exceda a um décimo do comprimento de onda λ dos campos eletromagnéticos no solo. Deste modo, e uma vez que o comprimento de onda dos campos eletromagnéticos no solo pode ser calculado por meio da expressão

$$\lambda = \frac{2\pi}{\omega\sqrt{\mu\varepsilon}}\left\{\frac{1}{2}\left[\sqrt{1+\left(\frac{1}{\rho_s\omega\varepsilon}\right)^2}+1\right]\right\}^{-\frac{1}{2}}, \tag{4.58}$$

verifica-se que, nos casos de simulação 2 e 3, as freqüências nas quais a condição

$$\lambda < \frac{\ell}{10} \tag{4.59}$$

se verifica são aquelas menores que cerca de 1,0482 MHz e 3,0402 MHz, respectivamente. Este critério proposto por Olsen encontra-se representado por meio das linhas azuis verticais na Figura 4.11 e na Figura 4.12. À esquerda destas linhas encontram-se as regiões do espectro de freqüências nas quais tanto o modelo de linha de transmissão analítico quanto o procedimento numérico aqui utilizado devem sustentar o compromisso de representarem adequadamente o problema físico considerado.

Diversas considerações podem ser feitas a respeito dos valores de impedância obtidos. A primeira delas é a de que, conforme se pode facilmente verificar por meio dos gráficos de resposta em freqüência, o uso de elementos hexaédricos tri-lineares ou o uso de elementos quadráticos incompletos conduzem a essencialmente os mesmos resultados, tal como demonstra a sobreposição dos valores simulados na Figura 4.11 e na Figura 4.12. Para as duas qualidades de elemento, até o limite de freqüências de 100 kHz existe um bom acordo entre aqueles valores de módulo determinados numericamente e os previstos pelo modelo de linha de transmissão. Para o solo mais resistivo ($\rho_s = 1000\ \Omega.m$), no qual o limite quase-estático sugerido por Olsen situa-se na freqüência de 3,0402 MHz, esta semelhança entre os valores se preserva além do limite de 100 kHz. Para o solo menos resistivo ($\rho_s = 100\ \Omega.m$), os valores de módulo numericamente determinados começam a exceder aqueles previstos pelo modelo de linhas de transmissão ainda antes do limite quase-estático deste caso, que é de 1,0482 MHz.

Este maior intervalo de validade para a aproximação quase-estática no caso de solos mais resistivos é esperada, e pode ser facilmente entendido por meio da eq.(4.1b). Quanto menor é a condutividade do meio material considerado, menos significativo torna-se o componente de correntes induzidas, e menos intenso se torna o acoplamento entre os campos elétrico e magnético no domínio do problema.

Grcev e Popov mostram em [4] que o modelo de linhas de transmissão para a haste de aterramento aqui utilizado para comparação tende a superestimar o valor do módulo da impedância equivalente do aterramento nas freqüências mais elevadas quando comparadas com uma abordagem numéricas baseada em modelos eletromagnéticos completo. Uma vez que os resultados numéricos de impedância equivalente aqui obtidos com o Método dos Elementos Finitos de aresta com a condição de contorno flutuante aplicada à haste condutora mostraram-se nas altas-freqüências ainda superiores aos valores previstos pelo modelo de linha de transmissão, constata-se finalmente que os resultados numéricos aqui produzidos afastam-se ainda mais da modelagem eletromagnética completa utilizada por estes autores (baseada, no caso, no Método dos Momentos). A Figura 4.13 ilustra este fato, e mostra um detalhe da região de transição do limite quase-estático para as altas freqüências do caso de simulação 2. Trata-se do mesmo gráfico da Figura 4.11, complementado pelos resultados de simulação com o Método dos Momentos de Grcev e Popov e restritos a uma faixa de freqüências menor.

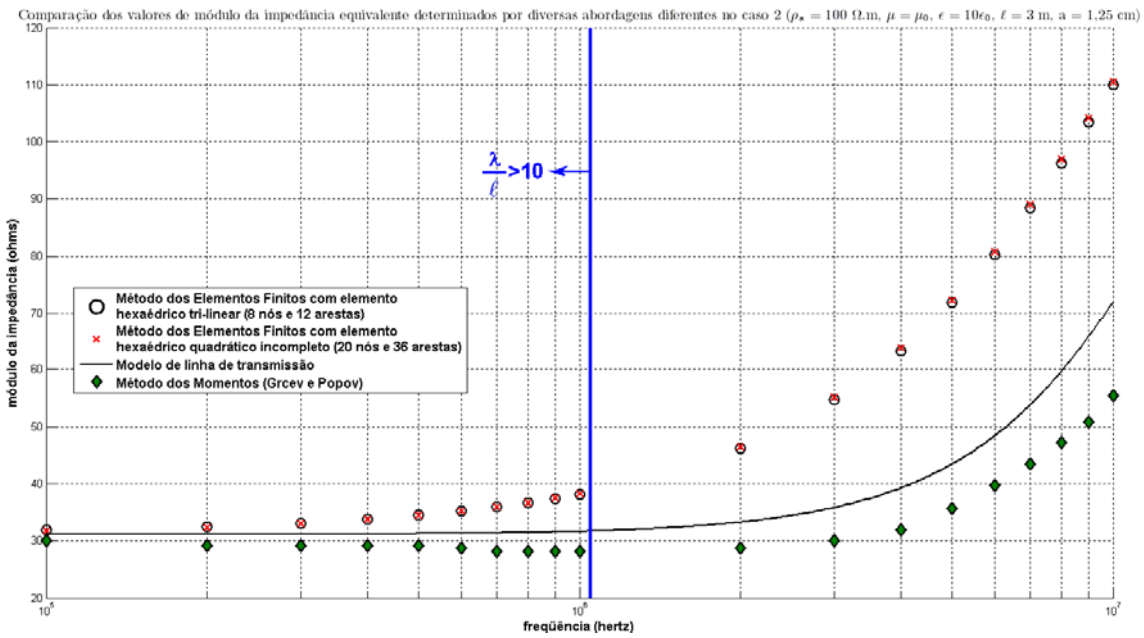

Figura 4.13 – Comparação dos valores de módulo da impedância numericamente determinados através do Método dos Elementos Finitos de Aresta com o modelo de linha de transmissão e com o Método dos Momentos de Grcev e Popov no caso de simulação 2.

A dificuldade em se representar de maneira adequada a interface entre o condutor da haste e o solo com a abordagem aqui utilizada pode ser verificada se as linhas referentes ao parâmetro D da Tabela 4.3 e da Tabela 4.4 forem confrontadas. Os valores de número de divisões e de razão da progressão geométrica utilizados tornam evidente que, para o caso do solo mais resistivo, houve a necessidade de se utilizar um perfil de discretização através do qual elementos hexaédricos mais finos e estreitos se concentraram na região adjacente à haste condutora. Este fato, que fornece uma medida da importância desta região de interface no contexto do fenômeno físico aqui considerado, é também um indicador da necessidade de se aprimorar a modelagem do material condutor da haste metálica. Uma primeira alternativa que se apresentaria para a substituição da condição de contorno flutuante aplicada para a representação do condutor seria uma abordagem baseada no uso de uma impedância superficial para a modelagem da interface entre solo e condutor [14].

Mesmo que houvesse sido possível argumentar de antemão que a modelagem com a formulação *AV-3D ungauged* adotada se utiliza ainda de hipóteses não condizentes com freqüências superiores às fronteiras quase-estáticas anteriormente determinadas, ainda assim haveria interesse em se prosseguir além destes limites com a realização de simulações nesta outra região do espectro de freqüências. O objetivo disto seria o de se realizar uma pesquisa numérica a respeito do comportamento dos procedimentos iterativos para a solução dos sistemas de equações resultantes da aplicação desta formulação aos problemas aqui considerados de aterramento por meio de hastes metálicas.

Tal pesquisa foi de fato realizada tal como sugerem os gráficos anteriores, nos quais os pontos de simulação avançam na região de altas freqüências. Como foi mencionado na secção 4.4, o procedimento numérico adotado na resolução dos sistemas de equações correspondentes às simulações em cada freqüência é o SICCG (*Shifted Incomplete Cholesky Conjugate Gradients*). Convém lembrar aqui que as discretizações utilizadas nesta pesquisa numérica são aquelas previstas pela Tabela 4.3 e pela Tabela 4.4, que conforme o argumentado anteriormente conduzem os casos de simulação 2 e 3 a

problemas numéricos de porte semelhante para os dois tipos de elemento hexaédrico utilizados. Admitiu-se que a convergência do processo numérico foi alcançada quando o resíduo calculado no contexto deste método resultou inferior a uma tolerância de 10^{-4}, e um fator de aceleração (*Shift*) de 1,1 foi adotado [27].

Os tempos de processamento medidos em minutos que se fizeram necessários para a convergência deste processo numérico de resolução do sistema de equações nas simulações em cada freqüência encontram-se representados na Figura 4.14 e na Figura 4.15. Em todos os casos foi utilizado um computador tipo Intel Core 2 Duo T8100, com freqüência de 2,1GHz e memória RAM de 2 Gbytes. A aplicação computacional foi gerada com o compilador GCC 4.3.0 para a linguagem de programação C++ e foi executada em ambiente Linux.

Os gráficos de tempo de processamento mostram que, de forma geral, as simulações com o elemento tri-linear são menos demoradas que aquelas com o elemento quadrático incompleto, e que há um aumento significativo de tempo de processamento em casos de solo mais resistivo e em altas freqüências.

Outros fatos interessantes podem ser observados se, ao invés de analisarmos apenas o tempo de processamento, atentarmos também para o número de iterações consumidas até que o procedimento iterativo de resolução do sistema de equações convergisse. Estes valores encontram-se representado nos gráficos da Figura 4.16 e da Figura 4.17 para cada um dos dois casos de simulação selecionados. O conteúdo destas ilustrações permite confrontar o comportamento do problema numérico em relação a freqüência quando se usa cada um dos tipos de elementos hexaédricos considerados neste trabalho para a discretização do domínio. A Figura 4.16 mostra que, no caso número 2, em que um solo menos resistivo é considerado, o uso da formulação proposta com o elemento quadrático incompleto é sempre a mais custosa em termos computacionais do que a simulação com o elemento tri-linear na faixa de freqüências considerada, enquanto que os valores de impedância calculados numericamente são essencialmente os mesmos para as duas variedades de elemento hexaédrico em acordo com aquilo que já foi verificado anteriormente.

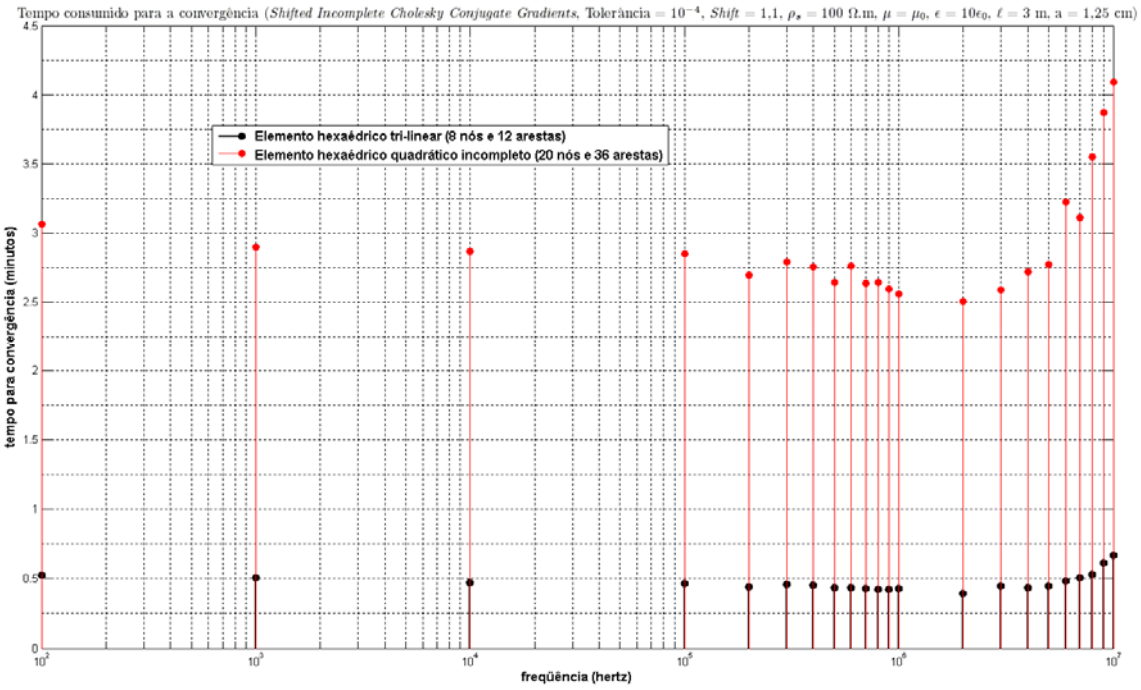

Figura 4.14 – Tempo de processamento com o algoritmo SICCG para resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 2.

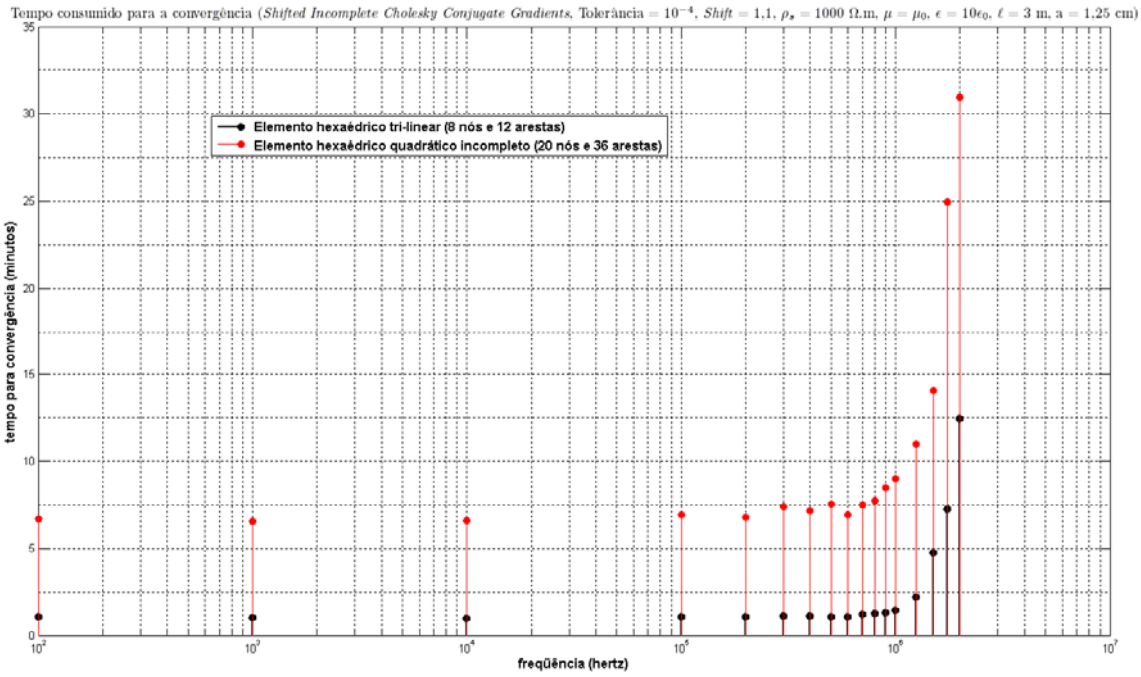

Figura 4.15 - Tempo de processamento com o algoritmo SICCG para resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 3.

O gráfico da Figura 4.17 mostra, porém, um comportamento diferente para o caso de simulação 3, no qual um solo de caráter mais resistivo é investigado. Embora novamente a qualidade dos valores de impedância numericamente determinados com ambos os tipos de elemento continue sendo a mesma, uma inversão no desempenho numérico do algoritmo SICCG com relação ao tipo de elemento utilizado na malha de discretização pode ser observada neste caso nas freqüências superiores a cerca de 1 MHz. Nesta região do espectro, pode-se verificar facilmente com o auxílio da Figura 4.17 que o número de iterações para a resolução dos sistemas de equações da série de simulações em que o elemento tri-linear é utilizado passa a crescer de forma mais rápida do que do quando se usa o elemento quadrático incompleto. Ao se atingir a freqüência de 2 MHz, o número de iterações com o elemento tri-linear se torna maior.

Em todos os gráficos desta secção referentes ao caso de simulação 3, o leitor atento poderá verificar que as simulações não avançaram estritamente até o limite de freqüência de 10 MHz como para os demais casos. Isto se deve ao fato de que em freqüências maiores do que aquelas dos últimos pontos de simulação registrados nos gráficos o procedimento numérico aparentava não caminhar em direção à convergência após um número muito grande de iterações. A despeito disto, as observações contidas nos parágrafos anteriores indicam que os problemas nos quais se utiliza na discretização do domínio o elemento hexaédrico quadrático incompleto de vinte nós e trinta e seis arestas parecem se comportar de maneira menos instável no que diz respeito ao desempenho de processos iterativos de solução numérica do sistema de equações em situações nas quais o comprimento de onda dos campos resulta muito pequeno (decorrente da combinação de resistividade do solo elevada e altas freqüências de pulsação).

Naquilo que diz respeito ao cálculo e à exibição de grandezas eletromagnéticas no solo, a Figura 4.18 traz uma amostra da ferramenta de pós-processamento elaborada para esta finalidade a que se fez menção na secção anterior. Com ela, torna-se possível tomar os resultados numéricos produzidos pela resolução do sistema de equações relativo ao problema e obter a visualização tridimensional de grandezas de interesse com o auxílio mais uma vez do programa Gmsh. Como exemplo, a Figura 4.18 mostra o potencial escalar

elétrico no solo próximo a haste de aterramento em um dos casos de simulação para uma freqüência particular.

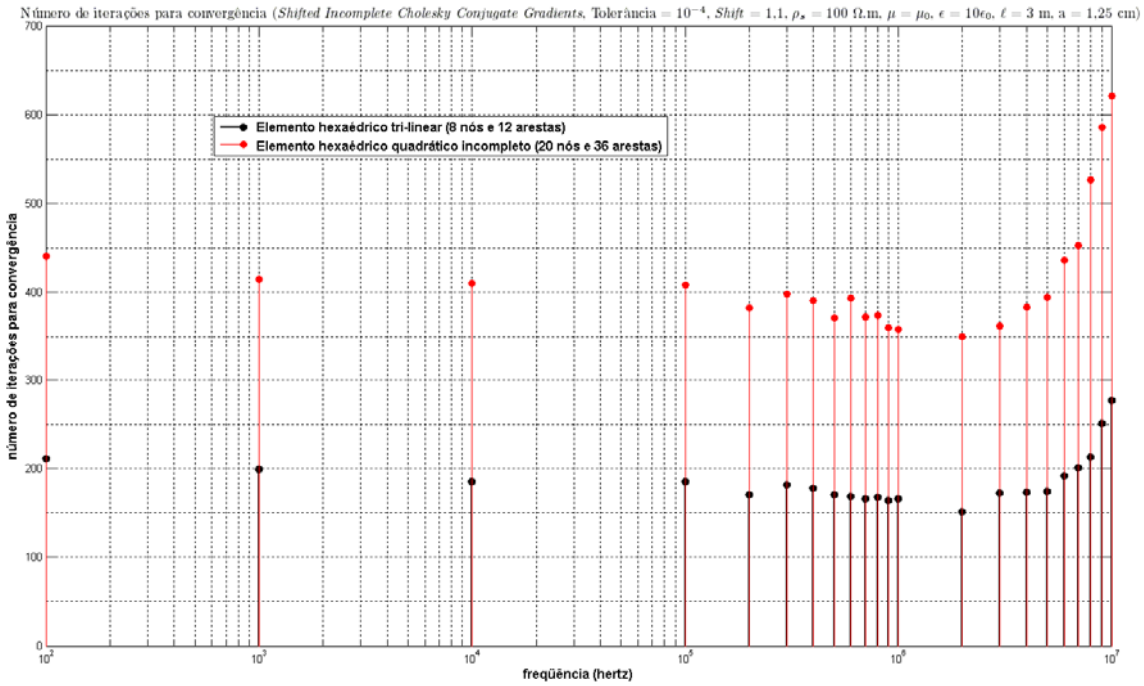

Figura 4.16 – Número de iterações para convergência do algoritmo SICCG para resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 2.

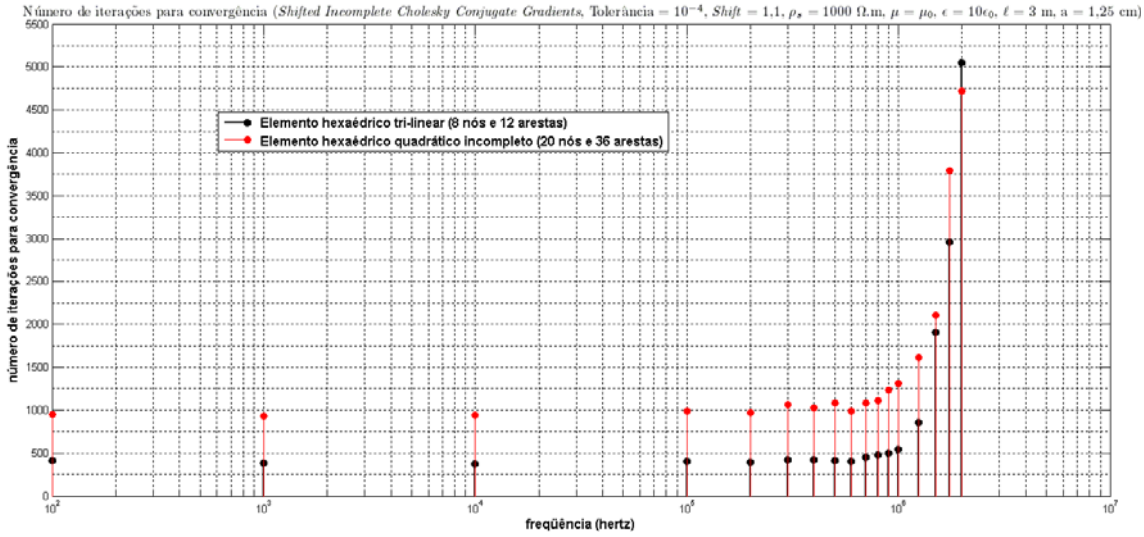

Figura 4.17 – Número de iterações para convergência do algoritmo SICCG para a resolução do sistema de equações em cada freqüência de simulação no caso 3.

Mais especificamente, nesta figura é exibida a distribuição do potencial no solo para um certo instante do período de oscilação da resposta, uma vez que a análise é realizada no regime harmônico. A ferramenta desenvolvida é tal que se torna possível inclusive obter uma animação de todo o período de oscilação da resposta, ao invés de um único instante estático como aquele que se encontra representado na Figura 4.18.

Recursos análogos de pós-processamento também foram desenvolvidos para a exibição do campo elétrico e do campo densidade de fluxo magnético no solo. Diferentemente do que se fez para o cálculo da impedância equivalente do aterramento, uma análise quantitativa de validação dos valores de campo e de potenciais elétricos escalares no solo calculados com a abordagem até aqui exposta por meio destas ferramentas de pós-processamento ainda precisa ser realizada.

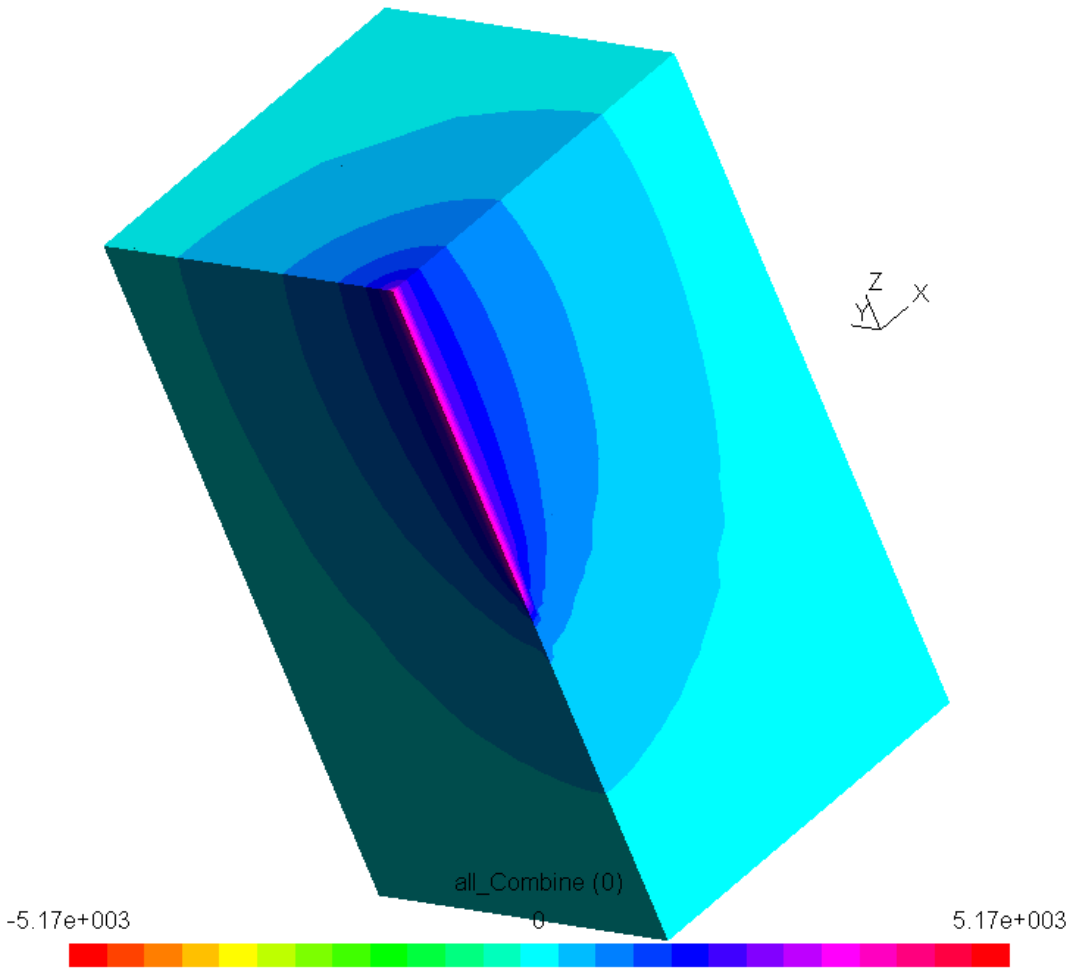

Figura 4.18 – Potencial escalar elétrico nas imediações da haste de aterramento. Valores em volts, decorrentes da injeção de uma corrente harmônica de 1000 ampères.

4.7 Resumo

Neste capítulo foi apresentada a formulação *AV-3D ungauged* para a solução numérica do problema de contorno associado ao estudo do comportamento de um aterramento por meio de uma haste metálica com o Método dos Elementos Finitos de aresta. Discutiu-se nele também o procedimento de cálculo da impedância equivalente ao arranjo considerado, juntamente com a metodologia utilizada para as representações da haste metálica e do truncamento do domínio.

Este problema serviu como caso de aplicação e validação das técnicas apresentadas em capítulo anterior para a construção de funções de forma vetoriais dos elementos hexaédricos. Por meio delas tornou-se possível fazer uso de um elemento hexaédrico de discretização capaz de levar a cabo aproximações locais de ordem superior àquela do elemento tri-linear anteriormente disponível, e comparar-se a natureza dos resultados produzidos através de cada uma destas alternativas por meio do confronto dos valores de impedância equivalente numericamente determinados.

Para tanto, por meio de uma implementação computacional da metodologia anteriormente descrita realizada com o auxílio da biblioteca LMAGLIB, resultados referentes ao cálculo da impedância equivalente foram produzidos e comparados com uma modelagem analítica (o modelo de linhas de transmissão) e com outra numérica (método dos momentos). Através deste estudo, foi possível verificar para a classe de problemas aqui considerada que a formulação numérica utilizada tem sua validade restringida, muito provavelmente em decorrência do tratamento adotado para o material condutor da haste, a uma faixa de freqüências cujo limite superior é governado pelas características do solo e pelo comprimento da haste condutora frente ao comprimento de onda dos campos eletromagnéticos. Pôde-se constatar também que este limite superior de validade não é influenciado de maneira sensível pelo tipo dos elementos hexaédricos de aresta empregados na discretização ou pela da precisão da aproximação local realizada no interior deles.

Uma análise referente ao desempenho do procedimento numérico iterativo utilizado na resolução do sistema de equações associado ao problema de contorno em questão foi também conduzida. Se para aquilo que diz respeito à qualidade dos valores de impedância equivalente os usos dos dois tipos de elemento hexaédrico considerados neste trabalho se mostraram indiferentes, o mesmo não foi verificado com relação à convergência do método de solução do sistema de equações adotado. Constatou-se que na condição de elevada resistividade do solo e alta freqüência de operação o algoritmo SICCG passa a convergir com menos iterações quando se utiliza o elemento quadrático incompleto para a discretização do domínio, indicando uma eventual vantagem na sua utilização em relação ao elemento tri-linear neste contexto particular. Cabem, porém, neste sentido, ainda maiores investigações, uma vez que esta vantagem do elemento quadrático incompleto não tarda em ser também comprometida pela não-convergência em freqüências altas.

Capítulo 5

Conclusões

5.1 Observações gerais

Nos capítulos anteriores deste documento encontram-se registrados os trabalhos realizados ao longo de um período de três anos, transcorridos do início de 2006 ao início de 2009. Através deles, procurou-se esclarecer, consolidar e onde possível ampliar o conjunto de ferramentas disponíveis ao estudo de sistemas de aterramento em regime permanente senoidal com o Método dos Elementos Finitos dentro dos termos previstos pelos objetivos inicialmente delimitados.

Deste modo, a finalidade deste último capítulo é aquela de oferecer uma síntese destes desenvolvimentos que foram apresentados nas páginas anteriores deste texto. Nele também serão enumeradas questões pendentes ou sugestões de investigações que se acredita que devam ser observados em eventuais trabalhos futuros nesta linha de pesquisa.

5.2 Síntese das contribuições e trabalhos desenvolvidos

No início deste texto, foi fixado como objetivo para este trabalho o desenvolvimento de contribuições à análise numérica de sistemas de aterramento através do Método dos Elementos Finitos. Com isto em vista, os principais resultados, conclusões ou contribuições produzidos pelo presente trabalho encontram-se enumerados nos parágrafos a seguir:

- O procedimento matemático de geração e construção das funções de forma vetoriais dos elementos hexaédricos foi elucidado, permitindo com que estes

sejam livremente utilizados em formulações do Método dos Elementos Finitos de aresta.

• Uma nova classe representando um elemento finito hexaédrico de ordem superior àquele anteriormente disponível foi implementado e incorporado à biblioteca LMAGLIB. Este elemento, o hexaedro quadrático incompleto, encontra-se agora disponível para ser utilizado em aplicações genéricas do Método dos Elementos Finitos de aresta com o uso desta biblioteca.

• Uma aplicação capaz de modelar aterramentos simples compostos por uma haste metálica foi desenvolvida com o auxílio desta biblioteca. Esta dispõe de uma versatilidade maior naquilo que diz respeito à modelagem do domínio e aos recursos de pós-processamento quando comparada com as aplicações similares que a antecederam no Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo.

• Por meio desta aplicação, tornou-se possível conduzir um estudo referente ao cálculo da impedância de aterramento equivalente para várias condições de solo e utilizando-se dois tipos de elemento hexaédrico para a discretização do domínio. Através desta investigação e por meio dos valores de impedância numericamente determinados, tornou-se evidente que, embora esteja baseada no modelo eletromagnético completo da equação de onda, a formulação numérica adotada para a solução do problema de contorno correspondente sofre ainda de restrições em relação ao limite de freqüências no qual ela é válida em decorrência do tratamento simplificado que se dá ao material condutor da haste metálica. Para o universo de casos aqui considerados, foi possível verificar que a ordem da aproximação local própria do elemento hexaédrico não possui influência sensível sobre a extensão deste limite de validade. O uso do elemento hexaédrico quadrático incompleto, porém, deu indicações de ser mais vantajoso do ponto de vista da solução numérica do sistema de equações em condições de solo muito resistivos.

• O fato de se ter tomado a biblioteca LMAGLIB como ferramenta para a execução deste trabalho exigiu que este código fosse extensivamente

manipulado. Desta forma, durante este processo ele pôde ser testado, revisado e eventualmente corrigido. Por exemplo, durante a montagem do conjunto de aplicações anteriormente descritas neste texto, pequenos problemas até então ocultos em pontos particulares desta biblioteca como a integração numérica das matrizes locais dos elementos finitos, a aplicação de condições de contorno e a solução do sistema de equações puderam ser detectados e corrigidos. Assim, e apesar de isto não haver sido devidamente enfatizado nos capítulos anteriores, considera-se que este trabalho também tenha se prestado ao aprimoramento global da biblioteca LMAGLIB. Por conta de tudo isto, acredita-se então desta forma que o desenvolvimento dos trabalhos até aqui expostos possuem também a qualidade de haverem conferido à LMAGLIB alguma sobrevida no contexto de engenharia de *software*, e ofereceram ao Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica uma contribuição de caráter não tanto técnico, mas mais institucional.

5.3 Sugestões para trabalhos posteriores e investigações futuras

Nesta secção, algumas sugestões para a orientação de trabalhos futuros são apontadas.

• Por conta daquilo que foi possível concluir por meio dos estudos realizados neste trabalho e apresentados no capítulo anterior deste texto, a representação do condutor por meio de uma condição de contorno flutuante sobre o potencial elétrico nos nós da discretização pertencentes à haste de aterramento é um procedimento inadequado à representação do problema físico considerado em freqüências elevadas. Uma possível linha de investigação diante desta problemática seria a substituição desta abordagem da condição de contorno flutuante por aquela da consideração de uma impedância superficial para o material condutor do aterramento [14].

• Neste trabalho, os esforços concentraram-se no problema de determinação da impedância equivalente do aterramento e na análise da qualidade dos valores desta grandeza em cada um dos múltiplos casos considerados.

Valores no solo de campo elétrico e de densidade de fluxo magnético determinados numericamente pela formulação para o regime harmônico aqui adotada ainda não foram submetidos a uma análise quantitativa exaustiva. Esta investigação apresenta-se desta forma como um trabalho futuro ainda necessário.

- Embora as questões da representação de descargas atmosféricas e da obtenção da resposta transitória de um sistema de aterramento por meio da decomposição harmônica da forma de onda nele introduzida tenham sido contempladas no capítulo de revisão bibliográfica e de análise do estado da arte, não foi possível no presente trabalho avançar-se até um ponto no qual uma análise temporal da resposta dos sistemas de aterramento pudesse ser levada a cabo. Tão logo a questão da representação do condutor da haste anteriormente mencionada tenha sido suficientemente bem resolvida e o limite superior de freqüência da validade da abordagem aqui utilizada tenha aumentado, investigações neste sentido de se obter o comportamento no domínio do tempo do sistema de aterramento poderão ser realizadas com mais consistência. Constituem, portanto, também uma proposta para trabalhos posteriores.

- Com o objetivo de se obter um problema numérico de porte mais compacto, maiores investigações se fazem necessárias naquilo que se refere ao dimensionamento do domínio, à utilização de camadas PML para o truncamento do domínio e aos critérios de discretização adotados para as diversas regiões da representação.

- Os sistemas de aterramento normalmente utilizados costumam apresentar configurações mais complexas do que aquela de uma simples haste enterrada no solo. Desta forma, torna-se natural desejar-se ainda que a aplicação de simulação desenvolvida neste trabalho seja estendida para permitir a análise destes arranjos mais complicados, compostos, por exemplo, por grades metálicas enterradas. As questões anteriormente apontadas referentes ao dimensionamento do domínio e à modelagem dos condutores metálicos

relacionam-se a esta investigação e apresentam-se possivelmente como tópicos de investigação preliminares a esta apontada neste parágrafo.

REFERÊNCIAS

[1] SUNDE, E. D. **Earth conduction effects in Transmission Systems**. 1st ed. New York: D. van Nostrand, 1949.

[2] RUDENBERG, R. **Electrical shock waves in power systems**. Cambridge, MA: Harvard University Press, 1968.

[3] BOURG, S; SACEPE, B; DEBU, T. Deep earth electrodes in highly resistive ground: frequency behavior. In: IEEE INTERNATIONAL SYMPOSIUM ON ELECTROMAGNETIC COMPATIBILITY, 1995, Atlanta. **Symposium Record**. Atlanta: 14-18 Aug. 1995. p. 584-589.

[4] GRCEV, L.; POPOV, M. On high-frequency circuit equivalents of a vertical ground rod. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 20, n. 2, p. 1598-1603, Apr. 2005.

[5] GRCEV, L; ARNAUTOVSKI-TOSEVA, V. Grounding systems modeling for high frequencies and transients: some fundamental considerations. In: IEEE BOLOGNA POWER TECH CONFERENCE, 2003, Bologna. **Power Tech Conference Proceedings**. Bologna: 23-26 June 2003. 7 p. v. 3.

[6] OLSEN, R. G; WILLIS, M. C A comparison of exact and quasi-static methods for evaluating grounding systems at high frequencies. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 11, n. 2, p. 1071-1081, Apr. 1996.

[7] GRCEV, L. D. Computer Analysis of Transient Voltages in Large Grounding Systems. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 11. n. 2, p 815-823, Apr. 1996.

[8] CARDOSO, J. R. **GROUND-3D: Uma contribuição à análise dos sistemas de aterramento pelo método dos elementos finitos**. 1993. X p. Tese (Livre-docência) – EscolaPolitécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 1993.

[9] TRLEP, M.; HAMLER, A.; HRIBERNIK, B. The analysis of complex grounding systems by FEM. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 34, n. 5, p. 2521-2524, Sep. 1998.

[10] NEKHOUL, B. et al. A finite element method for calculating the electromagnetic fields generated by substation grounding systems. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 31, n. 3, p. 2150-2153, May 1995.

[11] KAMEARI, A. Calculation of transient 3D eddy current using edge elements. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 29, n. 2, p. 1958-1961, Mar. 1990.

[12] WANG, J.S; IDA, N. Curvilinear and higher order 'edge' finite elements in electromagnetic field computation. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 29, n. 2, p. 1491-1494, Mar. 1993.

[13] WHITNEY, H. **Geometric integration theory**. Princeton, NJ: Princeton University Press, 1957.

[14] SILVA, V.C. **Método de elementos finitos aplicado à solução de problemas de aterramento elétrico**. 2006. 78 p. Tese (Livre-docência) – Escola Politécnica, Universidade de São Paulo, São Paulo, 2006.

[15] BÍRÓ, O. Edge element formulations of eddy current problems. **Computer methods in applied mechanics and engineering**, v. 169, n. 3-4, p. 391-405, Feb. 1999.

[16] IDA, N.; BASTOS, J. P. A. **Electromagnetics and calculation of fields.** 2nd ed. Springer Verlag, 1997.

[17] JIN, J. **The finite element method in electromagnetics**. 2nd ed., New York: John Wiley & Sons, 2002.

[18] XIONG, W.; DAWALIBI, F. P. Transient performance of substation grounding systems subjected to lightning and similar surge currents. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 9, n. 3, p. 1412-1420, July 1994.

[19] GRCEV, L. D.; HEIMBACH, M. Frequency dependant and transient characteristics of substation grounding systems. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 12, n. 1, p. 172-178, Jan. 1997.

[20] BERGER, K.; ANDERSON, R.B.; KRÖNINGER, H. Parameters of lightning flashes, **Electra**, n. 41, p. 23-37, 1975.

[21] ANDERSON, R.B; ERIKSSON, A.J. Lightning parameters for engineering application. **Electra**, n. 69, p 65-102.

[22] HEIDLER, F.; CVETIĆ; STANIĆ, B.V. Calculation of lightning current parameters. **IEEE Transactions on Power Delivery**, v. 14. n. 2, p. 399-404, Apr. 1999.

[23] DHATT, G.; TOUZOT, G. **Une présentation de la méthode des éléments finis**. Paris: Maloine S. A. Editeur, 1981.

[24] LMAGLIB - **Biblioteca de classes para aplicações com o método dos elementos finitos do Laboratório de Eletromagnetismo Aplicado da Escola Politécnica da Universidade de São Paulo** – http://www.lmag.pea.usp.br

[25] GEUZAINE, C.; REMACLE, J. F. **Gmsh – A three-dimensional finite element mesh generator with built-in pre- and post-processing facilities**, Version 2.2.3, 14 July 2008, http://www.geuz.org/gmsh.

[26] PLONSEY, R.; COLLIN, R. **Principles and applications of electromagnetic fields**. New Dheli: Tata McGraw Hill, 1976.

[27] FUJIWARA, K.; NAKATA, T; FUSAYASU, H. Acceleration of convergence characteristic of the ICCG method. **IEEE Transactions on Magnetics**, v. 29, n. 2, p. 1958-1961, Mar. 1993.

APÊNDICE A – Funções de forma nodais e suas respectivas derivadas parciais para elementos hexaédricos.

A.1 Elemento hexaédrico tri-linear (com oito nós)

As oito funções de forma nodais do elemento hexaédrico tri-linear encontram-se na Tabela 5.1, juntamente com suas derivadas parciais. O elemento hexaédrico de referência associado a este conjunto de funções é aquele da Figura 3.1a, e se encontra representado a seguir novamente por conveniência. As coordenadas de cada um dos oito nós deste elemento no sistema (ξ, η, ζ) estão representadas explicitamente nesta ilustração, ou podem ser facilmente determinadas a partir dela. A ordenação destes mesmos nós encontra-se nela também disponível.

Tabela 5.1 – Funções de forma nodais do elemento hexaédrico tri-linear de referência

i	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
1	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
2	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
3	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
4	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$
5	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)$
6	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)$
7	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)$
8	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)$

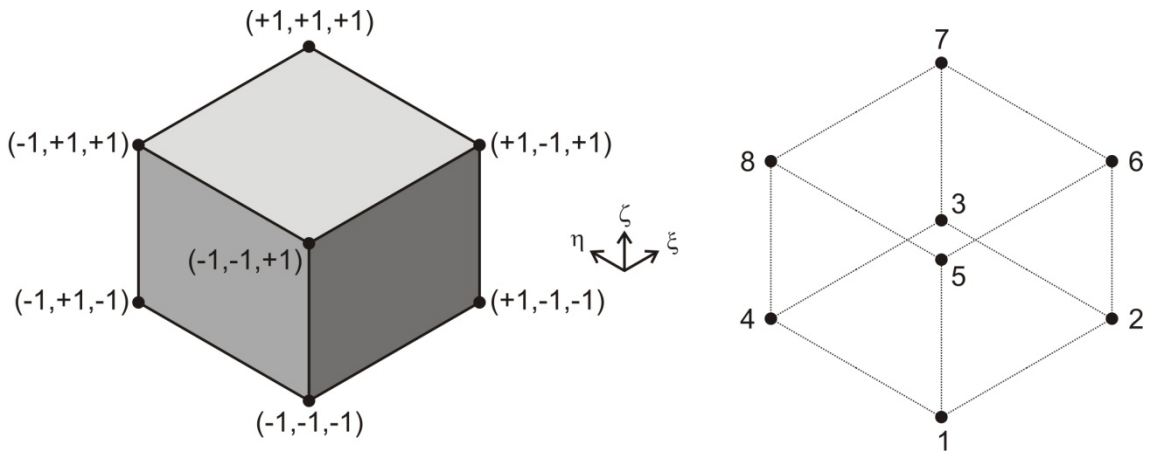

Figura 5.1 – O elemento hexaédrico tri-linear de referência.

A.2 Elemento hexaédrico quadrático incompleto (com vinte nós).

De modo análogo, a Tabela 5.2 traz as funções de forma nodais e as suas derivadas parciais no sistema de coordenadas de referência para o caso do elemento hexaédrico quadrático incompleto de vinte nós. O elemento de referência é aquele da Figura 3.2a, reproduzida também aqui mais vez por comodidade. As coordenadas dos nós e a ordenação destes podem mais uma vez ser obtidas com o auxílio desta ilustração.

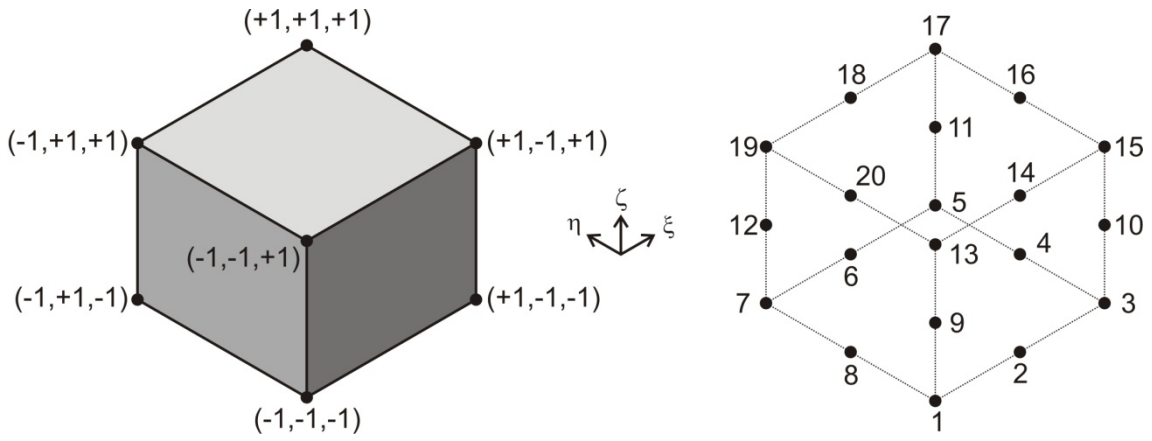

Figura 5.2 – O elemento hexaédrico quadrático incompleto de referência.

Tabela 5.2 - Funções de forma nodais do elemento hexaédrico quadrático incompleto de referência

i	N_i	$\frac{\partial N_i}{\partial \xi}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \eta}$	$\frac{\partial N_i}{\partial \zeta}$
1	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta+\zeta+2)$	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)(2\xi+\eta+\zeta+1)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)(\xi+2\eta+\zeta+1)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta+2\zeta+1)$
2	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{2}\xi(1-\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)$
3	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta-\zeta-2)$	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1-\zeta)(2\xi-\eta-\zeta-1)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)(\xi-2\eta-\zeta-1)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-2\zeta-1)$
4	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{2}(1+\xi)\eta(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)$
5	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi+\eta-\zeta-2)$	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)(2\xi+\eta-\zeta-1)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\zeta)(\xi+2\eta-\zeta-1)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-2\zeta-1)$
6	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{2}\xi(1+\eta)(1-\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)$
7	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta)(\xi-\eta+\zeta+2)$	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1-\zeta)(2\xi-\eta+\zeta+1)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\zeta)(\xi-2\eta+\zeta+1)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+2\zeta+1)$
8	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1-\zeta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi)\eta(1-\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)$
9	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta)\zeta$
10	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\zeta^2)$	$\frac{1}{4}(1-\eta)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta)\zeta$
11	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$	$\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta^2)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{2}(1+\xi)(1+\eta)\zeta$
12	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{4}(1+\eta)(1-\zeta^2)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\zeta^2)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi)(1+\eta)\zeta$
13	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta-\zeta+2)$	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)(2\xi+\eta-\zeta+1)$	$\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)(\xi+2\eta-\zeta+1)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(\xi+\eta-2\zeta+1)$
14	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{2}\xi(1-\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1-\eta)$
15	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta+\zeta-2)$	$\frac{1}{8}(1-\eta)(1+\zeta)(2\xi-\eta+\zeta-1)$	$-\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)(\xi-2\eta+\zeta-1)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta+2\zeta-1)$
16	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{2}(1+\xi)\eta(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta^2)$
17	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi+\eta+\zeta-2)$	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)(2\xi+\eta+\zeta-1)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\zeta)(\xi+2\eta+\zeta-1)$	$\frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta+2\zeta-1)$
18	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{2}\xi(1+\eta)(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi^2)(1+\eta)$
19	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\zeta)(\xi-\eta-\zeta+2)$	$\frac{1}{8}(1+\eta)(1+\zeta)(2\xi-\eta-\zeta+1)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\zeta)(\xi-2\eta-\zeta+1)$	$-\frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta-2\zeta+1)$
20	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{4}(1-\eta^2)(1+\zeta)$	$-\frac{1}{2}(1-\xi)\eta(1+\zeta)$	$\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta^2)$