PABLO EMILIO JOJOA GÓMEZ

UM ALGORITMO ACELERADOR DE PARÂMETROS

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
Título de Doutor em Engenharia.

São Paulo
2003

PABLO EMILIO JOJOA GÓMEZ

UM ALGORITMO ACELERADOR DE PARÂMETROS

Tese apresentada à Escola Politécnica da
Universidade de São Paulo para obtenção do
Título de Doutor em Engenharia.

Área de Concentração:
Sistemas Eletrônicos.

Orientador:
Prof. Dr.
Max Gerken (*In Memoriam*)
Prof. Dr.
Vítor H. Nascimento

São Paulo
2003

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 26 de outubro de 2003

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

Jojoa Gómez, Pablo Emilio

Um algoritmo acelerador de Parâmetros/P.E. Jojoa Gómez.
—ed.rev.— São Paulo, 2003.

199 p.

Tese (Doutorado) - Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos.

1. Filtros Adaptativos 2. Algoritmos Adaptativos
I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Sistemas Eletrônicos II.t.

*A minha esposa Gladys,
que cuida de mim todos os dias,
e a Max,
que desde o céu
me guia pelo caminho dos sinais*

AGRADECIMENTOS

Minha eterna gratidão ao meu caro Prof. Dr. Max Gerken que me ensinou sobre o processamento digital de sinais e principalmente sobre a vida com suas atitudes e atos. Graças Max pela sua alegria, paciência, coração aberto, sua orientação, dedicação, acompanhamento, compromisso, pelos seus conselhos e motivações. Sempre será para mim fonte de inspiração e exemplo de vida.

Agradeço infinitamente ao Prof. Dr. Vítor H. Nascimento, que tomou as rédeas de meu trabalho em um momento tão difícil para mim como foi a morte de Max. Muito obrigado de coração pela sua orientação, compreensão, apoio e paciência.

Quero expressar também meus mais sinceros agradecimentos aos membros do Departamento de Telecomunicações e Controle, muito obrigado pela colaboração que sempre me brindaram e em especial pelo apoio incondicional depois da morte do Prof. Max Gerken.

Um agradecimento muito especial a Magno T. Madeira da Silva, que com sua amizade, apoio, confiança e carinho me fez sentir em casa tanto nos bons como nos maus momentos que a vida nos deparou. Muito obrigado por tudo meu caro irmão.

Agradeço a todos os meus amigos do Laboratório de Comunicações e Sinais que me apoiaram e tornaram ainda mais agradável minha estadia neste belo país.

Muito obrigado de coração aos meus amigos brasileiros e estrangeiros por me compreender, ajudar e compartilhar comigo seu tempo e seu espírito.

Não existem palavras para expressar o que sinto por minha esposa Gladys, que graças a seu amor, carinho, paciência e ternura é o suporte de minha vida e meu trabalho.

Agradeço a meus pais, Pedro e Marina, a minhas irmãs Gaby, Silvia, Patricia e Cristina, meus sobrinhos Miguel, Maria, Joaquim e Melissa, meus cunhados Mauricio, Ronal, Jairo, Sergio, Eliza e Pedro, e meus sogros Gilberto e Nery e ao meu tio Edgar, que sempre me brindaram seu amor e apoio.

Agradeço à Fundação de Amparo à Pesquisa do Estado de São Paulo (FAPESP) pelo apoio a este trabalho e, à Universidade de São Paulo por toda a infraestrutura que pôs à minha disposição para realizar minha pesquisa.

Ao Departamento de Telecomunicaciones da Universidad del Cauca, pela sua colaboração e apoio.

RESUMO

No campo do processamento digital de sinais e em especial da filtragem adaptativa, procura-se continuamente algoritmos que sejam rápidos e simples. Neste contexto, este trabalho apresenta o estudo de novos algoritmos de tempo discreto denominados algoritmos aceleradores (completo, regressivo e progressivo), obtidos a partir da discretização de um algoritmo de tempo contínuo baseado no ajuste da segunda derivada (aceleração) da estimativa dos parâmetros. Destes algoritmos optou-se por estudar mais aprofundadamente os algoritmos aceleradores progressivo e regressivo, devido respectivamente a sua menor complexidade computacional e ao seu desempenho. Para este estudo e análise foram escolhidos como base de comparação os algoritmos LMS e NLMS. Isto porque estes algoritmos estão entre os mais usados e, assim como os algoritmos aceleradores, podem ser obtidos a partir da discretização de algoritmos de tempo contínuo através dos métodos de Euler progressivo e regressivo respectivamente. A análise do algoritmo progressivo mostrou que seu desempenho é inferior ao do algoritmo LMS. Visando diminuir a complexidade computacional do algoritmo acelerador regressivo, foi obtido um novo algoritmo: o versão γ . Assim a análise focou-se no algoritmo acelerador regressivo versão γ , o qual apresentou um desempenho bom quando comparado no desajuste e no *tracking* com o algoritmo NLMS, mostrando um melhor compromisso entre velocidade de convergência e variância das estimativas. Este bom desempenho foi comprovado por análises teóricas, por simulações e através da aplicação deste algoritmo na equalização de um canal variante no tempo.

ABSTRACT

In the digital signal processing field and specially in adaptive filtering, there is a constant search for algorithms both simple and with good performance. This work presents new discrete-time algorithms called accelerating algorithms (APCM and $AR\gamma$), obtained through the discretization of a continuous-time algorithm that uses the second derivate (acceleration) to adjust the parameter estimates. We provide theoretical analyses for both algorithms, finding expressions for the mean and mean-square errors in the parameter estimates. In addition, we compare the performance of the accelerating algorithms with LMS and NLMS. The analysis of the APCM algorithm showed that its performance is inferior to that of the LMS algorithm. On the other hand, the $AR\gamma$ algorithm presented good performance when compared in terms of misadjustment and tracking with the NLMS algorithm, showing a better compromise between convergence speed and variance of the estimates. This better performance was proven by theoretical analyses, by simulations and through the application of this algorithm to the equalization of a time-variant channel.

SUMÁRIO

LISTA DE TABELAS

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

LISTA DE SÍMBOLOS

1	INTRODUÇÃO	15
1.1	Justificativa e Motivações	15
1.2	Contribuições desta Tese	17
1.3	Organização da Tese	18
2	O ALGORITMO ACELERADOR	19
2.1	O Algoritmo Acelerador de Tempo Contínuo	19
2.2	Métodos de discretização	22
2.3	Discretização de Algoritmos de Tempo Contínuo	23
2.3.1	Aplicação do método de Euler regressivo ao algoritmo do gradiente	24
2.3.2	Aplicação do método de Euler progressivo ao algoritmo dos mínimos quadrados	25
2.3.3	Aplicação do método de Euler regressivo ao algoritmo dos mínimos quadrados	26
2.4	Discretização do Algoritmo Acelerador de Tempo Contínuo	28
2.4.1	Simplificação do algoritmo ARCM	31
2.5	Relação do algoritmo ARCM com o Método de Newton	33
2.5.1	O método de Newton	33
2.5.2	O Método de Newton e o Algoritmo ARCM	36
3	ANÁLISE DO ALGORITMO ACELERADOR PROGRESSIVO	41
3.1	O algoritmo LMS	41
3.2	Análise dos momentos do algoritmo APCM	43
4	O ALGORITMO AR_γ	54
4.1	Análise de desajuste do AR_γ	54
4.2	Análise de Tracking do algoritmo AR_γ	66

4.2.1	Equalização de Canal	85
5	CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS	92
5.1	Trabalhos futuros	93
A	ANÁLISE DO DESAJUSTE DO ALGORITMO APCM	95
A.1	Algoritmo APCM	95
A.2	Algoritmo APCM equivalente	96
A.3	Sistema equivalente para análise dos momentos de 1a. e 2a. ordens	99
A.4	Análise dos momentos de primeira ordem	103
A.5	Análise dos momentos de segunda ordem	104
A.6	Análise na convergência	115
B	ANÁLISE DE DESAJUSTE PARA O ALGORITMO AR_{γ}	123
B.1	Simplificação do algoritmo AR_{γ}	124
B.2	Análise dos momentos de primeira ordem	128
B.3	Análise dos momentos de segunda ordem	131
B.4	Análise na convergência	145
C	ANÁLISE DO AR_{γ} PARA AMBIENTES NÃO-ESTACIONÁRIOS	153
C.1	Simplificação do algoritmo AR_{γ}	154
C.2	Análise dos momentos de primeira ordem	159
C.3	Análise dos momentos de segunda ordem	162
C.4	Análise na convergência - Propriedades de <i>tracking</i>	173
C.5	Programa para calculo do mínimo	185
	LISTA DE REFERÊNCIAS	190
A	ANÁLISE DE LYAPUNOV PARA O ALGORITMO ARCM	192
B	ALGORITMO NLMS NA FORMA DE NEWTON	198

LISTA DE TABELAS

2.1	Complexidade computacional dos algoritmos aceleradores. M é a dimensão do vetor $\mathbf{p}[n]$	33
2.2	Condições para a análise da convergência no espaço de parâmetros e desvio padrão dos coeficientes dos algoritmos AR_γ , NLMS, Newton e LMS. . . .	38
4.1	Valores de h para diferentes condições dos parâmetros m_1 , α e γ	76

LISTA DE FIGURAS

2.1	Sistema adaptativo com sinal de entrada vetorial $\mathbf{x}[n]$, e sinais: desejado $d[n]$ e de erro $e[n]$	35
2.2	Sistema de filtro preditor implementado para análise de convergência no espaço de parâmetros.	38
2.3	Ilustração dos algoritmos LMS, NLMS, AR_γ , e Newton, para dois coeficientes.	40
2.4	Curvas dos coeficientes dos algoritmos LMS, AR_γ e NLMS.	40
3.1	Configuração do identificador de sistema com ruído colorido como sinal de entrada.	49
3.2	Região de convergência dos coeficientes quando os algoritmos Acelerador Progressivo e LMS apresentam igual erro em excesso quadrático.	51
3.3	Configuração do identificador de sistema com ruído branco como sinal de entrada.	52
3.4	Erro quadrático médio $E\{e^2[n]\}$ medido e teórico na região de convergência para o algoritmo APCM. (a) $M=2$. (b) $M=200$	53
4.1	Configuração do identificador de sistema com ruído colorido como sinal de entrada.	61
4.2	Região de convergência dos coeficientes quando os algoritmos AR_γ e NLMS apresentam igual erro em excesso quadrático.	63
4.3	Configuração do identificador de sistema com ruído branco como sinal de entrada.	64
4.4	Erro quadrático médio $E\{e_a^2[n]\}$ teórico e medido na região de convergência para o algoritmo AR_γ . (a) $M=2$. (b) $M=200$	65
4.5	Modelo do processo de Markov e do sistema de identificação	66
4.6	Desajuste do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$. (a) Desajuste medido. (b) Desajuste teórico	73
4.7	Desajuste do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$. (a) Superposição dos desajustes: medido (tonalidade azul) e teórico (tonalidade amarela). (b) Desajuste teórico e medido para $\gamma = 1, 5$	74
4.8	Valores de α e γ onde se obtém o mínimo do desajuste, para $m_1 = 7$	75
4.9	Valores de α , γ e m_1 que apresentam o valor mínimo de desajuste.	77
4.10	(a) Desajustes do algoritmo NLMS. (b) Desajustes do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$ e $\gamma = 0, 21$	79

4.11	(a) Desajustes do algoritmo NLMS. (b) Desajustes do algoritmo $AR\gamma$ para $m_1 = 7$ e $\alpha = 0,25$	80
4.12	(a) Região onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. (b) Curvas de nível da região para os valores de α e γ onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. Gráficos para $m_1 = 7$	81
4.13	(a) Região onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. (b) Curvas de nível da região para os valores de α e γ onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. Gráficos para $m_1 = 20$	82
4.14	Desajuste teórico e medido do algoritmo $AR\gamma$ para diferentes valores de α com $m_1 = 7$ e $\gamma = 1,5$. (a) $\sigma_v = 0.001$. (b) $\sigma_v = 0.01$	84
4.15	Configuração do sistema para equalização de um canal de comunicações.	86
4.16	BER para diferentes combinações de α e γ com $m_1 = 7$	87
4.17	(a) BER do algoritmo $AR\gamma$ para diferentes valores de α quando $m_1 = 7$ e $\gamma = 3$. (b) BER do algoritmo NLMS para diferentes valores de μ_n	88
4.18	Desempenho do BER para os equalizadores implementados com os algoritmos $AR\gamma$ e NLMS	90
4.19	(a) Erro na recuperação do sinal de entrada para o Algoritmo $AR\gamma$ e (b) para o algoritmo NLMS. (c) Módulo dos zeros do canal variante no tempo; a linha com amplitude 1 representa a circunferência unitária	91

LISTA DE ABREVIATURAS E SIGLAS

AAC	Algoritmo Acelerador Completo.
APCM	Acelerador Progressivo Convencional Matricial.
ARCM	Acelerador Regressivo Convencional Matricial.
$AR\gamma$	Acelerador Regressivo versão γ .
BER	Bit Error Ratio.
EQM	Erro Quadrático Médio.
GNE	Grau de Não-Estacionaridade.
LMS	Least Mean Squares.
NLMS	Normalized Least Mean Squares.
RLS	Recursive Least Squares.
SNR	Relação Sinal-Ruído.

LISTA DE SÍMBOLOS

α	Parâmetro de ajuste dos algoritmos aceleradores
γ	Parâmetro de ajuste do algoritmo $AR\gamma$
$\mathbf{x}$	Letra minúscula em negrito denota vetor
$\mathbf{X}$	Letra maiúscula em negrito denota matriz
$d[n]$	Sinal desejado
$\mathbf{p}[n]$	Vetor de coeficientes dos algoritmos adaptativos
$\mathbf{x}[n]$	Vetor de dados de entrada
$\mathbf{M}_i$	$i = 1, 2$ e 3 Parâmetros matriciais dos algoritmos aceleradores
m_i	$i = 1, 2$ e 3 Parâmetros escalares dos algoritmos aceleradores
n	Índice da amostra
$\cdot^T$	Transposta de uma matriz
$E\{x\}$	Valor esperado de uma variável aleatória x
$\mathbf{I}$	Matriz identidade
$\mathbf{0}$	Vetor ou matriz zero
$tr\{\mathbf{A}\}$	Traço da matriz $\mathbf{A}$
$e[n]$	Erro de estimação de saída no instante n
$e_a[n]$	Erro de estimação <i>a priori</i> no instante n
e_{ex}	Erro em excesso
σ_u^2	Variância do ruído

Capítulo 1

INTRODUÇÃO

1.1 Justificativa e Motivações

A filtragem adaptativa é um tema de grande interesse nos campos das comunicações e do controle devido à sua ampla gama de aplicações, entre as quais se incluem: canceladores de eco telefônico e acústico, equalizadores de canais de comunicações, canceladores de interferência e de ruído, identificação de sistemas, antenas inteligentes, entre outras. Os algoritmos usados na filtragem adaptativa podem ser de tempo contínuo ou de tempo discreto. Sem dúvida o algoritmo de tempo discreto mais popular é o chamado algoritmo LMS (*Least Mean Squares*) que apresenta como principais vantagens sua baixa complexidade computacional e sua robustez numérica. A correspondente versão em tempo contínuo deste algoritmo é também de grande simplicidade, em que a derivada (velocidade) dos parâmetros de interesse é feita proporcional ao erro de estimação em cada instante.

Em (Pait, 1998) foi proposto um algoritmo de tempo contínuo alternativo que ajusta a segunda derivada (aceleração) dos parâmetros, chamado algoritmo acelerador, e que possui uma propriedade de grande interesse: a de atingir um melhor compromisso entre velocidade de convergência e variância de erro de parâmetro do que os algoritmos que se baseiam no ajuste da velocidade dos parâmetros. A partir deste trabalho, na dissertação de Jojoa (1999), foi proposta a discretização do algoritmo acelerador, da qual resultaram três versões de tempo discreto. Além disso, foram pesquisadas propriedades como estabilidade, velocidade de convergência e desvio quadrático médio dos parâmetros e do erro de estimação. Resumidamente, os principais resultados alcançados na dissertação de mestrado foram os seguintes:

1. As três versões de tempo discreto obtidas a partir do algoritmo acelerador de

tempo contínuo foram: o algoritmo acelerador completo (AAC) e os algoritmos aceleradores progressivo (APCM) e regressivo (ARCM) obtidos segundo os métodos de regra do trapézio, Euler progressivo e Euler regressivo respectivamente. Estes algoritmos apresentam complexidade computacional diretamente proporcional à dimensão do vetor de regressão. O comportamento e desempenho destes algoritmos é controlado através de quatro parâmetros (um escalar e três matriciais) de ajuste ao invés de um como é o caso no algoritmo LMS.

2. A estabilidade destes algoritmos foi analisada utilizando o método direto de Lyapunov (Kuo, 1980);(Ogata, 1993), o que permitiu determinar que dois deles são estáveis: o algoritmo AAC e o algoritmo ARCM. Entretanto, este método não definiu nada sobre a estabilidade do algoritmo APCM, pois não foi possível encontrar um modelo que permitisse demonstrar esta propriedade.
3. As propriedades de estabilidade obtidas na análise teórica foram confirmadas mediante simulações realizadas em Matlab[®] utilizando diferentes implementações de filtragem adaptativa. Através deste software foi determinada também a influência dos parâmetros de ajuste no comportamento das versões estáveis. Destaca-se ainda o fato de que, para sinais de entrada mal-condicionados, o algoritmo ARCM permitiu atingir um melhor compromisso entre velocidade de convergência e suavidade da estimativa dos parâmetros do filtro que os algoritmos LMS e NLMS (*Normalized Least Mean Squares*).

A baixa complexidade computacional e o desempenho que os algoritmos aceleradores em tempo discreto apresentam, em aplicações em que os algoritmos LMS e NLMS não mostram resultados satisfatórios, reforçaram o interesse em um estudo mais aprofundado dos mesmos.

Neste contexto, esta pesquisa visa dar continuidade aos trabalhos de estudo e análise dos algoritmos aceleradores em tempo discreto, procurando conhecer analiticamente a influencia dos parâmetros de ajuste no comportamento destes. Assim, os estudos giram principalmente em torno dos algoritmos acelerador progressivo e regressivo, devido a sua menor complexidade computacional e a seu desempenho respectivamente. Aqui é importante destacar que não foi realizado um estudo aprofundado do algoritmo AAC por apresentar respostas similares às do algoritmo ARCM (Jojoa, 1999), com uma complexidade computacional significativamente maior.

O objetivo deste trabalho é a obtenção de expressões matemáticas, para quantificar a dependência do comportamento dos algoritmos aceleradores de tempo discreto (APCM e acelerador regressivo versão γ , AR γ) em função do valor dos parâmetros.

1.2 Contribuições desta Tese

A maioria dos estudos sobre filtros adaptativos em tempo discreto têm sido desenvolvidos considerando os algoritmos mais conhecidos como os algoritmos de tipo gradiente (LMS, NLMS) e de mínimos quadrados (RLS). Uma nova proposta surgiu a partir do trabalho de Jojoa (1999) do qual foram obtidos três algoritmos (completo, regressivo e progressivo) de tempo discreto a partir de um algoritmo de tempo contínuo baseado no ajuste da segunda derivada (aceleração) da estimativa dos parâmetros. A análise preliminar realizada neste trabalho permitiu identificar que os algoritmos aceleradores progressivo e regressivo são os mais promissores devido a sua menor complexidade computacional e ao seu desempenho, respectivamente.

Neste contexto, este trabalho apresenta um estudo aprofundado destes algoritmos (aceleradores progressivo e regressivo). Assim, as contribuições mais importantes do trabalho são as seguintes:

1. Obtenção de uma nova versão do algoritmo acelerador regressivo: o versão γ , com a finalidade de diminuir o número de parâmetros de ajuste. Uma das principais características deste algoritmo é que sempre cumpre com a condição de estabilidade obtida pelo método de Lyapunov.
2. Apresentação de um estudo dos algoritmos aceleradores progressivo e regressivo versão γ . Este estudo inclui a análise dos seus comportamentos considerando os momentos de primeira e segunda ordens. Dada a complexidade das equações originais dos algoritmos, determinou-se uma situação na qual os seus sistemas de equações conseguem ser representados pela conexão em série de dois sistemas.
3. Os principais resultados da análise dos algoritmos aceleradores progressivo e regressivo versão γ são:
 - Obtenção das condições para convergência;
 - Determinação das estimativas para o erro em regime.
4. Para o caso do algoritmo regressivo versão γ conseguiu-se identificar um bom desempenho quando comparado no desajuste e no *tracking* com o algoritmo NLMS, mostrando um melhor compromisso entre velocidade de convergência e variância das estimativas dos parâmetros. Este melhor desempenho comprovou-se através de análises teóricas, simulações e pela aplicação do algoritmo na equalização de um canal variante no tempo.

Os artigos gerados a partir do presente trabalho de doutorado foram:

- Sobre o Algoritmo Acelerador para Filtragem Adaptativa. Apresentado no 19o. Simpósio Brasileiro de Telecomunicações, SBrT 2001. , Fortaleza-CE, Brasil. Setembro 2001. Autores: Jojoa, P.E., Gerken, M., Pait, F.
- The accelerating adaptive filtering algorithm. Apresentado no Workshop on Adaption and Learning in Control and Signal Processing, ALCOSP 2001. , Cernobbio-Como, Italia, Agosto de 2001. Autores: Jojoa, P.E., Gerken, M., Pait, F.
- An Adaptive Filtering Algorithm with Parameter Acceleration. Apresentado no International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing 2000, ICASSP 2000. Istambul, Turquia. Junho de 2000. Autores: Gerken, M., Pait, F., Jojoa, P.E.

1.3 Organização da Tese

No Capítulo 2 é apresentado o algoritmo acelerador de tempo contínuo e as versões obtidas da sua discretização, assim como os métodos utilizados para obtê-las. Em seguida são introduzidas as simplificações que foram realizadas no algoritmo ARCM. Finalmente, é apresentada a relação existente entre o método de Newton e o algoritmo ARCM.

O Capítulo 3 apresenta um resumo dos resultados teóricos obtidos da análise do desajuste do algoritmo APCM, assim como as experiências que ratificam a análise. Os cálculos teóricos completos desta análise aparecem no Anexo A.

No Capítulo 4 são apresentados os resultados teóricos relacionados com a análise de desajuste e de tracking do algoritmo ARC. Incluem-se ademais, os resultados práticos que confirmam a análise teórica. Nos Anexos B e C são apresentados os desenvolvimentos teóricos completos destes estudos.

Finalmente o Capítulo 5 contém as conclusões da pesquisa e as propostas para trabalhos futuros.

Capítulo 2

O ALGORITMO ACELERADOR

Este capítulo apresenta uma sinopse da teoria referente ao algoritmo acelerador. Assim, inicialmente são apresentados alguns dos mais importantes algoritmos de tempo contínuo como o algoritmo do gradiente e o algoritmo dos mínimos quadrados, e é introduzido o algoritmo acelerador na sua versão original de tempo contínuo. A seguir, são apresentadas diferentes discretizações destes algoritmos considerando os métodos: Euler progressivo e Euler regressivo. Finalmente, é apresentada uma relação entre uma versão do algoritmo acelerador de tempo discreto e o método de Newton.

2.1 O Algoritmo Acelerador de Tempo Contínuo

A pesquisa sobre controle adaptativo se remonta ao início dos anos 50 com o projeto de controladores de sistema de vôo automáticos para aviões de alto desempenho, controladores estes que deveriam aprender e modificar a dinâmica do avião em pleno vôo (Ioannou; Sun, 1996). Posteriormente, os avanços realizados principalmente na análise da estabilidade e na teoria de controle, junto com o avanço tecnológico computacional, permitiram o crescimento do controle adaptativo. Neste tipo de controle, o controlador possui um mecanismo para ajustar seus parâmetros automaticamente, baseado em informações do ambiente ou de seu projeto, garantindo sua convergência e estabilidade.

Dentre os métodos utilizados em controle adaptativo encontram-se o do gradiente e o de mínimos quadrados. Estes métodos, nas suas versões de tempo discreto têm sido muito aplicados especialmente na área de telecomunicações.

Uma tarefa comum no controle adaptativo é a de ajustar, de forma recorrente no tempo, uma estimativa $\mathbf{p}(t)$ de um vetor de parâmetros $\mathbf{p}_o$ M -dimensional, utilizando

um sinal $d(t)$ que obedece o seguinte modelo:

$$d(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{p}_o + w(t),$$

em que $\mathbf{x}(t)$ corresponde ao sinal de entrada ou regressor e $w(t)$ ao ruído de medida.

A princípio o objetivo é que tanto o erro dos parâmetros

$$\xi(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_o,$$

como o erro de estimação

$$e(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{p}(t) - d(t) \quad (2.1)$$

seja o menor possível segundo alguma forma de medida. Para cumprir com este objetivo podem ser usados métodos (algoritmos) como o do gradiente e o de mínimos quadrados (Ioannou; Sun, 1996).

Um dos algoritmos do tipo gradiente que minimiza o erro de predição é da forma

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{x}(t)e(t), \quad (2.2)$$

em que $\mathbf{M}$ é uma matriz $M \times M$ positiva-definida.

Considerando o erro de parâmetros $\xi(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_o$ este algoritmo assume a forma

$$\dot{\xi}(t) = -\mathbf{M}\mathbf{x}(t)e(t).$$

Trata-se de um algoritmo em que a velocidade de adaptação dos parâmetros ($\dot{\mathbf{p}}(t)$ ou $\dot{\xi}(t)$) é feita proporcional ao sinal de entrada $\mathbf{x}(t)$ multiplicado pelo erro de estimação $e(t)$.

Para o caso do método dos mínimos quadrados um dos algoritmos que minimiza o erro de estimação é o denominado “algoritmo puro” com fator de esquecimento $\lambda = 1$ (Ioannou; Sun, 1996), o qual é definido pelas seguintes equações:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{p}}(t) &= -\mathcal{P}(t)e(t)\mathbf{x}(t) \\ \dot{\mathcal{P}}(t) &= -\mathcal{P}(t)\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathcal{P}(t), \quad \mathcal{P}(0) = \mathcal{P}_0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Em Pait (1998) é proposto um algoritmo adaptativo em que a “aceleração” (segunda derivada) do vetor de estimação $\mathbf{p}(t)$ é feita proporcional ao produto do regressor pelo erro de estimação mais um fator proporcional à “velocidade” (primeira derivada) que provê o necessário amortecimento. Este algoritmo é descrito na sua forma mais simples (em função do erro $\xi(t)$) por

$$\ddot{\xi}(t) = -\mathbf{x}(t)e(t) - 2(\mathbf{I} + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t))\dot{\xi}(t)$$

ou ainda, considerando-se a situação em que o erro de medida $w(t)$ é nulo,

$$\ddot{\xi}(t) = -\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\xi(t) - 2(\mathbf{I} + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t))\dot{\xi}(t).$$

As seguintes equações descrevem o algoritmo na sua forma mais geral:

$$\ddot{\xi}(t) = -\mathbf{M}_1 \left(\mathbf{x}(t)e(t) + 2(\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)\dot{\xi}(t) \right)$$

ou ainda

$$\ddot{\xi}(t) = -\mathbf{M}_1 \left(\mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\xi(t) + 2(\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{M}_2\mathbf{M}_3)\dot{\xi}(t) \right)$$

para o caso em que o erro de medida $w(t)$ é nulo. As matrizes $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ são M -dimensionais, simétricas e positivas-definidas.

Considerando que $\xi(t) = \mathbf{p}(t) - \mathbf{p}_o$, define-se agora uma nova variável

$$\mathbf{q}(t) = \dot{\xi}(t) = \dot{\mathbf{p}}(t).$$

Com isto obtém-se as seguintes expressões que descrevem o algoritmo acelerador

$$\dot{\mathbf{p}}(t) = \mathbf{q}(t), \tag{2.4a}$$

$$\dot{\mathbf{q}}(t) = -\mathbf{M}_1 \left(\mathbf{x}(t)e(t) + 2(\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}(t)\mathbf{x}^T(t)\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)\mathbf{q}(t) \right), \tag{2.4b}$$

$$e(t) = \mathbf{x}^T(t)\mathbf{p}(t) - d(t). \tag{2.4c}$$

Segundo o trabalho de Pait (1998), o critério de Lyapunov (com erro de medida nulo) permite determinar que este sistema é estável quando as matrizes $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$

satisfazem as condições

$$4\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 > I$$

e

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2 > \frac{\mathbf{M}_1^{-1}}{2}.$$

Este algoritmo possui uma propriedade de grande interesse que é a de conseguir atingir um melhor compromisso entre velocidade de convergência e variância de erro de parâmetro do que os algoritmos que se baseiam no ajuste da velocidade dos parâmetros (Pait, 1998);(Pait; Atkinson, 1998).

Foi esta propriedade que motivou a idéia de obter um algoritmo de tempo discreto a partir do algoritmo acelerador de tempo contínuo. Esta idéia também pode ser aplicada a outros algoritmos de tempo contínuo, a discretização destes algoritmos pode corresponder a algoritmos conhecidos, variações destes ou, porque não, a novos algoritmos de tempo discreto. A seguir são apresentados dois métodos utilizados na discretização de sistemas de tempo contínuo.

2.2 Métodos de discretização

Dentre os métodos para se obter um algoritmo de tempo discreto a partir de um algoritmo de tempo contínuo utilizam-se, pela sua simplicidade, os métodos de Euler progressivo e Euler regressivo. Considere-se inicialmente a equação diferencial de primeira ordem dada por

$$\dot{f}(t) = g(t) \tag{2.5}$$

que vai ser discretizada nos instantes de tempo

$$t_n = t_0 + n\top.$$

Para discretizar equações diferenciais da forma (2.5) segundo os métodos mencionados, tem-se:

1. Euler progressivo

$$\dot{f}(t_n) \approx \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{t_{n+1} - t_n} = \frac{f(t_{n+1}) - f(t_n)}{\top} \approx g(t_n).$$

2. Euler regressivo

$$\dot{f}(t_n) \approx \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{t_n - t_{n-1}} = \frac{f(t_n) - f(t_{n-1})}{T} \approx g(t_n).$$

Definindo agora

$$f[n] = f(t_n)$$

e

$$g[n] = g(t_n)$$

resulta

1. Euler progressivo

$$f[n+1] - f[n] = Tg[n]. \quad (2.6)$$

2. Euler regressivo

$$f[n] - f[n-1] = Tg[n]. \quad (2.7)$$

São apresentadas em seguida aplicações destes métodos de discretização.

2.3 Discretização de Algoritmos de Tempo Contínuo

Na dissertação de mestrado de Jojoa (1999), foi apresentada como exemplo, a discretização do algoritmo do gradiente de tempo contínuo utilizando o método de Euler progressivo. Esta discretização deu como resultado o algoritmo LMS. Continuando nesta ordem de idéias, apresenta-se a seguir os resultados de aplicar o método de discretização Euler regressivo no algoritmo do gradiente de tempo contínuo, assim como o resultado de aplicar os dois métodos de Euler no algoritmo de mínimos quadrados de tempo contínuo. A discretização do algoritmo acelerador é tratada na seção seguinte.

2.3.1 Aplicação do método de Euler regressivo ao algoritmo do gradiente

A discretização das equações do algoritmo do gradiente dado pelas equações (2.1) e (2.2) utilizando o método de Euler regressivo resulta em

$$\mathbf{p}[n] - \mathbf{p}[n-1] = -\top \mathbf{M} \mathbf{x}[n] e[n] \quad (2.8)$$

e

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n] - d[n]. \quad (2.9)$$

Estas equações não permitem a atualização do vetor $\mathbf{p}[n]$, pois este depende de $e[n]$. Para permitir a atualização deste vetor introduz-se o erro *a priori*

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n]. \quad (2.10)$$

Ao substituir a equação (2.8) em (2.9) obtém-se o erro $e[n]$ em função do erro *a priori*

$$\begin{aligned} e[n] &= \mathbf{x}^T[n] (\mathbf{p}[n-1] - \top \mathbf{M} \mathbf{x}[n] e[n]) - d[n] \\ (1 + \top \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M} \mathbf{x}[n]) e[n] &= \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n] \\ e[n] &= (1 + \top \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M} \mathbf{x}[n])^{-1} e_a[n]. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Este resultado pode ser substituído na equação (2.8) para obter-se a equação do parâmetro $\mathbf{p}[n]$ em função do erro *a priori*:

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \frac{\top \mathbf{M} \mathbf{x}[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M} \mathbf{x}[n]} e_a[n].$$

Com $\mathbf{M} = m_0 \mathbf{I}$ e $m = \top m_0$ resultam as expressões:

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n]$$

e

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \frac{\mathbf{x}[n]}{\frac{1}{m} + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{x}[n]} e_a[n],$$

que correspondem à versão do algoritmo NLMS denominado ϵ -NLMS (Sayed, 2003)

para o caso quando $\epsilon = 1/m$ e o passo de adaptação μ é igual a um. Neste trabalho, as simulações são realizadas utilizando este algoritmo para $\epsilon \ll \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]$ e diferentes valores de passo de adaptação.

2.3.2 Aplicação do método de Euler progressivo ao algoritmo dos mínimos quadrados

A discretização das equações (2.3) do algoritmo dos mínimos quadrados utilizando o método de Euler progressivo resulta em

$$\begin{aligned} e[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - d[n] \\ \mathbf{p}[n+1] &= \mathbf{p}[n] - \top \mathcal{P}[n]e[n]\mathbf{x}[n] \\ \mathcal{P}[n+1] &= \mathcal{P}[n] - \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n], \end{aligned} \tag{2.12}$$

sejam agora definidas as variáveis

$$\top = 1 \tag{2.13a}$$

e

$$\mathbf{g}[n] = \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]. \tag{2.13b}$$

Substituindo as equações (2.13) em (2.12) chega-se finalmente a

$$\begin{aligned} e[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - d[n] \\ \mathbf{p}[n+1] &= \mathbf{p}[n] - \mathbf{g}[n]e[n] \\ \mathcal{P}[n+1] &= \mathcal{P}[n] - \mathbf{g}[n]\mathbf{g}^T[n]. \end{aligned}$$

Estas equações são semelhantes às do RLS, com $\lambda = 1$, mas sem o termo de normalização $1 + \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]$.

2.3.3 Aplicação do método de Euler regressivo ao algoritmo dos mínimos quadrados

A aplicação do método de Euler regressivo, equação (2.7), nas equações (2.3) do algoritmo dos mínimos quadrados resulta em:

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - d[n] \quad (2.14a)$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]e[n] \quad (2.14b)$$

$$\mathcal{P}[n] = \mathcal{P}[n-1] - \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]. \quad (2.14c)$$

Como pode-se observar, estas equações não podem ser utilizadas da forma em que se encontram escritas, pois faz-se necessário algumas manipulações matemáticas para sua aplicação.

Substituindo a equação (2.14a) em (2.14b) e agrupando fatores tem-se

$$(\mathbf{I} + \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]) \mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]d[n]$$

$$\mathbf{p}[n] = (\mathbf{I} + \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n])^{-1} (\mathbf{p}[n-1] + \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]d[n])$$

aplicando-se o lema da inversão de matrizes¹ (Sayed, 2003) obtém-se

$$\mathbf{p}[n] = \left(\mathbf{I} - \frac{\top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]} \right) (\mathbf{p}[n-1] + \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]d[n])$$

$$\begin{aligned} \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] - \frac{\top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]} + \\ &\quad + \top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]d[n] \left(1 - \frac{\top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]} \right) \\ &= \mathbf{p}[n-1] - \frac{\top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]} (\mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n]) \end{aligned}$$

¹LEMA DA INVERSÃO DE MATRIZES: Dadas as matrizes arbitrárias de dimensões compatíveis $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$ e $\mathbf{D}$. Se $\mathbf{A}$ e $\mathbf{C}$ são invertíveis, tem-se

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{B}(\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1}\mathbf{B})^{-1}\mathbf{DA}^{-1}.$$

no qual definindo o erro *a priori* como

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n]$$

tem-se finalmente

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \frac{\top \mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]e_a[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]}. \quad (2.15)$$

Agora, a equação (2.14c) depois de agrupar fatores pode ser escrita como

$$\mathcal{P}[n] = \mathcal{P}[n-1] (\mathbf{I} + \top \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n])^{-1}$$

aplicando o lema da inversão matricial tem-se

$$\mathcal{P}[n] = \mathcal{P}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\top \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]} \right),$$

agrupando novamente os fatores comuns pode-se escrever

$$\mathcal{P}[n] = \left(\mathbf{I} + \frac{\top \mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]} \right)^{-1} \mathcal{P}[n-1].$$

Aplica-se novamente o lema de inversão de matrizes

$$\mathcal{P}[n] = \left(\mathbf{I} - \frac{\top \mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n] + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]} \right) \mathcal{P}[n-1]$$

ficando portanto

$$\mathcal{P}[n] = \mathcal{P}[n-1] - \frac{\top \mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n-1]}{1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n] + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]},$$

em que o problema para completar a recursão é determinar como calcular $1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]$. Para isto retorna-se à equação (2.14c), a qual agrupando fatores comuns e multiplicando à esquerda por $\mathbf{x}^T[n]$ e à direita por $\mathbf{x}[n]$ fica

$$\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n] + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n]$$

que pode ser escrita como

$$\mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n] \left(1 + \top \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n]\mathbf{x}[n] \right) = \mathbf{x}^T[n]\mathcal{P}[n-1]\mathbf{x}[n].$$

Esta equação é da forma

$$z(1 + \top z) = y,$$

cuja solução positiva é

$$z_1 = -\frac{1}{2\top} + \frac{1}{2\top} \sqrt{1 + 4\top y}$$

portanto,

$$1 + \top \mathbf{x}^T[n] \mathcal{P}[n] \mathbf{x}[n] = 1 - \frac{1}{2\top} + \frac{1}{2\top} \sqrt{1 + 4\top \mathbf{x}^T[n] \mathcal{P}[n-1] \mathbf{x}[n]}. \quad (2.16)$$

Resumindo, o algoritmo obtido pelo método de Euler regressivo a partir do algoritmo puro dos mínimos quadrados para $\lambda = 1$, e considerando $\top = 1$, é dado pelas seguintes equações:

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n]$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \frac{\mathcal{P}[n] \mathbf{x}[n] e_a[n]}{1 + \mathbf{x}^T[n] \mathcal{P}[n] \mathbf{x}[n]}$$

$$\mathcal{P}[n] = \mathcal{P}[n-1] - \frac{\lambda_r^{-1} \mathcal{P}[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathcal{P}[n-1]}{1 + \lambda_r^{-1} \mathbf{x}^T[n] \mathcal{P}[n-1] \mathbf{x}[n]}$$

em que

$$\lambda_r = 1 + \mathbf{x}^T[n] \mathcal{P}[n] \mathbf{x}[n],$$

o qual pode ser calculado de acordo com a equação (2.16). Este algoritmo assim obtido pode ser considerado como uma variação do algoritmo RLS (Sayed, 2003).

O ponto importante a ser destacado destas discretizações é o fato de que os algoritmos obtidos pelo método de Euler regressivo são normalizados, ao contrario dos obtidos pelo método de Euler progressivo. Esta é uma condição que vai ser utilizada para realizar comparações entre os diferentes algoritmos, portanto, o algoritmo acelerador de tempo discreto obtido pelo método de Euler progressivo será comparado com o algoritmo LMS, e o algoritmo obtido pelo método de Euler regressivo com o algoritmo ϵ -NLMS.

2.4 Discretização do Algoritmo Acelerador de Tempo Contínuo

Na dissertação de Jojoa (1999), foram apresentadas três versões de tempo discreto do algoritmo acelerador. Estas versões foram obtidas utilizando as duas formas de discretização apresentadas mais a discretização usando o método do trapézio. Destas versões, as de maior relevância foram as obtidas usando os métodos de Euler, pois resul-

tam em algoritmos de menor complexidade computacional.

As equações que definem o algoritmo obtido com o método de Euler progressivo são as seguintes:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{D} &= \mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}^T[n-1]\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \\
 \mathbf{q}[n] &= \mathbf{D}\mathbf{q}[n-1] - \alpha\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n-1]e[n-1] \\
 \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n-1] \\
 e[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - d[n],
 \end{aligned} \tag{2.17}$$

este algoritmo é denominado algoritmo *Acelerador Progressivo Convencional Matricial* (APCM).

As equações que descrevem o algoritmo obtido com o método de Euler regressivo são:

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n] \tag{2.18a}$$

$$\mathbf{G}[n] = \mathbf{I} + \alpha^2\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] + 2\alpha\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \tag{2.18b}$$

$$\mathbf{q}[n] = (\mathbf{G}[n])^{-1} (\mathbf{q}[n-1] - \alpha\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]e_a[n]) \tag{2.18c}$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n]. \tag{2.18d}$$

Pode-se observar que neste algoritmo é necessário calcular em cada instante de tempo a matriz $\mathbf{G}[n]$ e a sua inversa. Assim, é desejável obter uma versão em que seja possível evitar este cálculo.

Para isso considera-se a inversa da matriz $\mathbf{G}[n]$, a qual pode-se escrever como:

$$\mathbf{G}[n]^{-1} = \mathbf{A} \left(\mathbf{I} - \frac{1}{1 + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{B}\mathbf{x}[n]} \mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{B}\mathbf{M}_1^{-1} \right), \tag{2.19}$$

em que

$$\mathbf{A} = (\mathbf{I} + 2\alpha\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)^{-1} \tag{2.20}$$

e

$$\mathbf{B} = \alpha (\alpha \mathbf{I} + 2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \mathbf{A}\mathbf{M}_1. \quad (2.21)$$

Substituindo a equação (2.19) em $\mathbf{q}[n]$ da equação (2.18c), obtém-se:

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A} \left[\mathbf{q}[n-1] - \frac{1}{1 + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{B}\mathbf{x}[n]} (\alpha e_a[n] + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{B}\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{q}[n-1]) \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right].$$

Fazendo

$$\mathbf{C}[n] = \frac{\alpha e_a[n] + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{B}\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{q}[n-1]}{1 + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{B}\mathbf{x}[n]} \mathbf{M}_1 \quad (2.22)$$

resulta:

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{A} (\mathbf{q}[n-1] - \mathbf{C}[n] \mathbf{x}[n]). \quad (2.23)$$

Obtém-se assim a seguinte versão do algoritmo acelerador, denominada de algoritmo *Acelerador Regressivo Convencional Matricial* (ARCM):

$$\begin{aligned} e_a[n] &= \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n] \\ \mathbf{A} &= (\mathbf{I} + 2\alpha \mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)^{-1} \\ \mathbf{B} &= \alpha (\alpha \mathbf{I} + 2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \mathbf{A}\mathbf{M}_1 \\ \mathbf{C}[n] &= \frac{\alpha e_a[n] + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{B}\mathbf{M}_1^{-1} \mathbf{q}[n-1]}{1 + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{B}\mathbf{x}[n]} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{q}[n] &= \mathbf{A} (\mathbf{q}[n-1] - \mathbf{C}[n] \mathbf{x}[n]) \\ \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n]. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Pode-se observar das equações (2.24) que agora só é necessário calcular a inversa de uma matriz no início do algoritmo e não em cada instante de tempo, e que o número de adições e multiplicações necessárias em cada iteração é a princípio proporcional ao quadrado da dimensão do vetor de coeficientes $\mathbf{p}[n]$.

2.4.1 Simplificação do algoritmo ARCM

Procurando ainda fazer mais fácil a implementação do algoritmo ARCM, é apresentada a seguir uma nova versão simplificada deste algoritmo.

Assim, observando as equações (2.20) a (2.23) pode-se definir:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}_1 &= (\mathbf{I} + 2\alpha\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2)^{-1} \\
 \mathbf{Q}_2 &= (\alpha\mathbf{I} + 2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3)\mathbf{Q}_1 \\
 \mathbf{Q}_3 &= \alpha\mathbf{Q}_1\mathbf{M}_1 \\
 \mathbf{Q}_4 &= \alpha\mathbf{Q}_2\mathbf{M}_1.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

Isto permite escrever o algoritmo acelerador regressivo convencional matricial na forma:

$$\begin{aligned}
 e_a[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n] \\
 g[n] &= \frac{e_a[n] + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{Q}_2\mathbf{q}[n-1]}{1 + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{Q}_4\mathbf{x}[n]} \\
 \mathbf{q}[n] &= \mathbf{Q}_1\mathbf{q}[n-1] - g[n]\mathbf{Q}_3\mathbf{x}[n] \\
 \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n].
 \end{aligned} \tag{2.26}$$

Deve-se ter em mente que para que o algoritmo ARCM seja estável, é necessário cumprir com as condições (ver Apêndice A):

$$\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1 \geq \frac{\mathbf{M}_2^{-1}}{4} \tag{2.27a}$$

e

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2 \geq \frac{\mathbf{M}_1^{-1}}{2}. \tag{2.27b}$$

De acordo com os resultados experimentais apresentados por Jojoa (1999), a maior

rapidez de convergência é atingida quando dados $\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I}$, para $i = 1, 2$ e 3 , o produto $4m_1^2 m_2 m_3$ tem um valor próximo de um. Assim, pode-se considerar o caso no qual a condição (2.27a) seja mantida com o mínimo valor, ou seja $\mathbf{I}$. Isto permite obter a simplificação do algoritmo acelerador.

Fazendo

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 = \frac{1}{2\gamma} \mathbf{I} \quad (2.28)$$

$$\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 = \frac{\gamma}{2} \mathbf{I},$$

as equações (2.25) podem ser escritas como:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_1 &= \frac{\gamma}{\gamma + \alpha} \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_2 &= \gamma \mathbf{I} \\ \mathbf{Q}_3 &= \frac{\alpha\gamma}{\gamma + \alpha} \mathbf{M}_1 \\ \mathbf{Q}_4 &= \alpha\gamma \mathbf{M}_1. \end{aligned} \quad (2.29)$$

Substituindo estas equações nas equações (2.26) obtém-se o seguinte algoritmo acelerador simplificado:

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n] \quad (2.30a)$$

$$g[n] = \frac{e_a[n] + \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha\gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \quad (2.30b)$$

$$\mathbf{q}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} (\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]) \quad (2.30c)$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n]. \quad (2.30d)$$

Este algoritmo foi nomeado como algoritmo ***Acelerador Regressivo versão γ*** (**AR γ**), e tem como vantagem que os parâmetros de ajuste se reduzem a três: uma matriz ($\mathbf{M}_1$) e dois escalares (α e γ). Cabe observar que com as condições (2.28) as desigualdades (2.27) e (2.27b) são atendidas no seu limite inferior. No trabalho a seguir será adotado $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$, o que permite que as operações (2.30) sejam efetuadas em $O(M)$

operações. Este algoritmo (o AR_γ com $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$) é a versão do algoritmo acelerador que apresentou melhores resultados, a maior parte do trabalho a seguir será baseada nesta versão.

A seguir, na Tabela 2.1 apresenta-se a complexidade computacional das diferentes versões dos algoritmos aceleradores.

Algoritmo	Multiplicações	Adições	Divisões
APCM	$5M^2 + 3M$	$5M^2 + 4M$	0
APCM com $\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I}$, $i = 1, 2$ e 3	$5M + 2$	$4M$	0
ARCM	$4M^2 + 5M + 1$	$4M^2 + M$	1
ARCM com $\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I}$, $i = 1, 2$ e 3	$7M + 3$	$5M$	1
AR_γ	$2M^2 + 6M + 3$	$2M^2 + 3M$	1
AR_γ com $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$	$6M + 3$	$5M$	1

Tabela 2.1: Complexidade computacional dos algoritmos aceleradores. M é a dimensão do vetor $\mathbf{p}[n]$.

2.5 Relação do algoritmo ARCM com o Método de Newton

Pode-se observar das equações originais do ARCM, equações (2.18), que para a estimação dos parâmetros ele necessita do cálculo da inversa da matriz $\mathbf{G}[n]$. Esta é razão pela qual procura-se verificar se existe uma relação com o método de Newton, considerando que este método estima os parâmetros fazendo uso da inversa da matriz Hessiana da função custo a cada iteração. Nesta seção apresenta-se uma análise mostrando esta relação.

2.5.1 O método de Newton

O método de Newton (Luenberger, 1989) procura encontrar os zeros de uma função, e utiliza para isto um valor inicial, a primeira derivada (gradiente) e a segunda derivada (matriz Hessiana) da função.

No método de Newton, uma função $f(\mathbf{p})$ a ser minimizada é aproximada por uma função quadrática determinando-se depois o mínimo da aproximação e não da função

original (Luenberger, 1989). Em um ponto perto de $\mathbf{p}_{n-1} = \mathbf{p}[n-1]$ podemos aproximar a função $f(\mathbf{p})$ pela série truncada de Taylor

$$f(\mathbf{p}) \simeq f(\mathbf{p}_{n-1}) + \nabla f^T(n, \mathbf{p}_{n-1})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1})^T \mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1}), \quad (2.31)$$

em que $\nabla f(\cdot, \cdot)$ corresponde ao gradiente da função $f(\mathbf{p})$, e é definido por convenção como um vetor coluna M -dimensional,

$$\nabla f(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \left[\frac{\partial f(n, \mathbf{p}_{n-1})}{\partial x_1}, \frac{\partial f(n, \mathbf{p}_{n-1})}{\partial x_2}, \dots, \frac{\partial f(n, \mathbf{p}_{n-1})}{\partial x_n} \right]^T,$$

e $\mathbf{F}(\cdot, \cdot)$ é a matriz Hessiana M -dimensional de $f(\mathbf{p})$,

$$\mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \left[\frac{\partial^2 f(n, \mathbf{p}_{n-1})}{\partial x_i \partial x_j} \right].$$

Para minimizar 2.31 deriva-se o lado direito com respeito a $\mathbf{p}$ e iguala-se a zero, resultando

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{p}} \left[f(\mathbf{p}_{n-1}) + \nabla f^T(n, \mathbf{p}_{n-1})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1}) + \frac{1}{2}(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1})^T \mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1})(\mathbf{p} - \mathbf{p}_{n-1}) \right] = 0$$

ou ainda

$$\begin{aligned} \nabla f(\mathbf{p}_{n-1}) + \frac{1}{2} \left[\mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \mathbf{p} + \mathbf{F}^T(n, \mathbf{p}_{n-1}) \mathbf{p} + \right. \\ \left. - \mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{F}^T(n, \mathbf{p}_{n-1}) \mathbf{p}_{n-1} \right] = 0. \end{aligned}$$

Como a matriz Hessiana é simétrica resulta:

$$\nabla f(\mathbf{p}_{n-1}) + \mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \mathbf{p} - \mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \mathbf{p}_{n-1} = 0,$$

e portanto

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{F}^{-1}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \nabla f(n, \mathbf{p}_{n-1}).$$

Dada a aproximação em (2.31) utiliza-se esta última expressão para obter uma nova estimativa do vetor de parâmetros:

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} - \mathbf{F}^{-1}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \nabla f(n, \mathbf{p}_{n-1}). \quad (2.32)$$

Desafortunadamente, um dos principais problemas deste algoritmo é o cálculo dispendioso da inversa da matriz Hessiana, mas é um algoritmo que no caso de uma função custo quadrática pode convergir em um passo só.

Considerando-se o sistema adaptativo da Figura 2.1 observa-se que o sinal de erro é dado por:

$$e[n] = y[n] - d[n]$$

$$y[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n].$$

Figura 2.1: Sistema adaptativo com sinal de entrada vetorial $\mathbf{x}[n]$, e sinais: desejado $d[n]$ e de erro $e[n]$.

É ilustrativo considerar a minimização da função custo quadrática dada por $f(\mathbf{p}) = E\{\mathbf{e}^2[n]\}/2$, sendo $E\{\cdot\}$ o operador esperança e $\mathbf{e}[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p} - d[n]$. Tendo-se em conta uma aproximação como a dada em (2.31) podemos obter:

$$\mathbf{F}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\} \quad (2.33)$$

$$\nabla f(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \mathbf{R}_x \mathbf{p}[n-1] - E\{d[n]\mathbf{x}[n]\}, \quad (2.34)$$

substituindo estas equações em (2.32) resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] - \mathbf{R}_x^{-1}(\mathbf{R}_x \mathbf{p}[n-1] - E\{d[n]\mathbf{x}[n]\}) \\ &= \mathbf{R}_x^{-1} E\{d[n]\mathbf{x}[n]\}, \end{aligned}$$

observando-se deste modo que neste caso o algoritmo de Newton converge em uma única iteração, reconhecendo que essa é a solução de Wiener-Hopf (Haykin, 1996).

Embora as propriedades de convergência do método de Newton sejam muito atrativas, o cálculo da matriz Hessiana em cada ponto não é adequado para uma implementação

prática. Uma primeira modificação do método de Newton é usualmente a introdução de um passo de adaptação ρ_n :

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} - \rho_n \mathbf{F}^{-1}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \nabla f(n, \mathbf{p}_{n-1}), \quad (2.35)$$

mas a idéia básica dos métodos de Newton é usar aproximações da inversa da matriz Hessiana (Luenberger, 1989);(Farhang-Boroujeny, 1997).

2.5.2 O Método de Newton e o Algoritmo ARCM

Partindo das equações originais do algoritmo ARCM, equações (2.18), considere-se o erro quadrático *a priori* como função custo. Com isto verificamos que o algoritmo ARCM pode ser colocado na forma da equação (2.35), utilizando aproximações para a inversa da matriz Hessiana e para o vetor gradiente. Para se chegar a esta conclusão basta combinar as expressões (2.18c) e (2.18d). Assim obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha(\mathbf{G}[n])^{-1} \{ \mathbf{q}[n-1] - \alpha \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] e_a[n] \} \\ &= \mathbf{p}[n-1] - (\mathbf{G}[n])^{-1} \{ \alpha^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] e_a[n] - (\mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}[n-2]) \}. \end{aligned} \quad (2.36)$$

Comparando (2.36) com (2.35) pode-se concluir imediatamente que o algoritmo ARCM faz uso das seguintes estimativas:

$$\widehat{\nabla f}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \beta(\alpha^2 \mathbf{M}_1 e_a[n] \mathbf{x}[n] - \mathbf{p}[n-1] + \mathbf{p}[n-2]) \quad (2.37)$$

$$\widehat{\mathbf{F}}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \beta \mathbf{G}[n], \quad (2.38)$$

sendo β uma constante positiva adequada. Considerando a versão simplificada com

$\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$ e $\beta = \gamma/(\alpha + \gamma)$ resultam expressões mais familiares:

$$\rho_n = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \quad (2.39)$$

$$\widehat{\nabla} f(n, \mathbf{p}_{n-1}) = e_a[n] \mathbf{x}[n] - \frac{1}{\alpha^2 m_1} (\mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}[n-2]) \quad (2.40)$$

$$\widehat{\mathbf{F}}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \frac{1}{\alpha \gamma m_1} \mathbf{I} + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}[n]^T. \quad (2.41)$$

A expressão (2.40) é uma estimativa instantânea do vetor gradiente $E\{e_a[n] \mathbf{x}[n]\}$ “corrigida” por um termo proporcional ao incremento do coeficiente anterior, e (2.41) é uma estimativa instantânea regularizada da matriz Hessiana $\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]\}$. É ilustrativo observar que para o algoritmo LMS vale $\rho_n = \mu$ (o passo de adaptação), $\widehat{\nabla} f(n, \mathbf{p}_{n-1}) = e_a[n] \mathbf{x}[n]$ e $\widehat{\mathbf{F}}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \mathbf{I}$, e que para o algoritmo NLMS (ver Apêndice B) vale $\rho_n = \mu_n$, $\widehat{\nabla} f(n, \mathbf{p}_{n-1}) = e_a[n] \mathbf{x}[n]$ e $\widehat{\mathbf{F}}(n, \mathbf{p}_{n-1}) = \epsilon \mathbf{I} + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]$ (Sayed, 2003). Pode-se observar que a estimativa de $\widehat{\mathbf{F}}$ do algoritmo ϵ -NLMS é igual à do algoritmo acelerador se

$$\epsilon = \frac{1}{\alpha \gamma m_1}. \quad (2.42)$$

O fato de que a estimativa do gradiente do algoritmo acelerador é modificada pelos dois valores anteriores do parâmetro $\mathbf{p}$, pode determinar uma vantagem para o algoritmo acelerador no sentido de que isto pode influenciar na direção em que os coeficientes se movem dentro do espaço de parâmetros, como veremos em um exemplo a seguir.

Experimentalmente pode-se verificar através de um gráfico o comportamento dos coeficientes dos algoritmos LMS, NLMS, Acelerador versão γ e de Newton no espaço de parâmetros. Para conseguir isto implementou-se o sistema de um filtro preditor de dois coeficientes apresentado na Figura 2.2, e como base de comparação considerou-se que o desvio padrão dos coeficientes na região de convergência seja semelhante para todos os algoritmos. A Tabela 2.2 apresenta as condições empregadas na experiência tais como os sinais, os valores dos parâmetros usados por cada um dos algoritmos e os seus respectivos desvios-padrão.

Figura 2.2: Sistema de filtro preditor implementado para análise de convergência no espaço de parâmetros.

Sinal de entrada			$sen\left(\frac{5\pi}{128}n + 0,4\pi\right)$		
σ^2 ruído branco $v[n]$			10^{-4}		
Coeficientes iniciais			$[-1.5 \quad -1.7]$		
Coeficientes ótimos			$[2 \quad -1]$		
No. de amostras			1.8×10^5		
No. de amostras usadas para calculo do EQM			últimas 8×10^4		
No. de experiências			20		
Parâmetros:					
ARγ 1	ARγ 2	NLMS 1	NLMS 2	Newton	LMS
$\alpha = 0.125$	$\alpha = 1.25$	$\epsilon = 5.9259$	$\epsilon = 0.0127$	$\rho = 0.05$	$\mu = 0.08$
$m_1 = 0.09$	$m_1 = 0.009$	$\mu_n = 0.525$	$\mu_n = 0.0056$		
$\gamma = 15$	$\gamma = 7000$				
Desvio resultante:					
$\sigma = 0.002$	$\sigma = 0.0022$	$\sigma = 0.0019$	$\sigma = 0.002$		$\sigma = 0.002$

Tabela 2.2: Condições para a análise da convergência no espaço de parâmetros e desvio padrão dos coeficientes dos algoritmos AR γ , NLMS, Newton e LMS.

Para as condições em (AR1, NLMS1) e (AR2, NLMS2) a condição (2.42) é satisfeita, ou seja, as regularizações empregadas pelo AR e pelo NLMS são iguais. As diferenças dos algoritmos serão portanto devidas ao termo adicional $-\mathbf{p}[n-1] + \mathbf{p}[n-2]$ aplicado ao gradiente.

Como o algoritmo acelerador regressivo versão γ é um caso especial do algoritmo acelerador convencional matricial, os resultados aqui expressos podem ser considerados válidos também para este algoritmo.

A Figura 2.3 apresenta as trajetórias no plano dos coeficientes onde também estão representadas as curvas de contorno da função custo. Dois comportamentos diferentes do algoritmo acelerador são mostrados, um deles similar aos dos algoritmos LMS e NLMS (AR γ 1) e outro similar ao algoritmo de Newton (AR γ 2). Neste último caso, considerando o espaço dos coeficientes, a convergência ocorre aproximadamente sobre uma reta ligando os coeficientes iniciais aos coeficientes ótimos. Fica assim evidenciado que, dependendo do valor dos parâmetros α , m_1 e γ , o algoritmo acelerador pode apresentar comportamentos bastante diversos, algo que não acontece com o algoritmo NLMS. O fato de que os valores dos parâmetros de ajuste foram definidos para cumprir com a equação (2.42), permite determinar que o fator adicional na estimativa do gradiente do algoritmo acelerador é quem determina a direção em que se movimentam os coeficientes. Pode causar uma certa surpresa que quando o algoritmo acelerador apresenta um comportamento como o algoritmo de Newton, a velocidade de convergência seja menor do que quando o comportamento é semelhante ao algoritmo LMS, ver Figura 2.4. Neste trabalho não se chegou a realizar um estudo aprofundado desta observação.

Nos próximos capítulos, serão apresentadas as análises teóricas dos algoritmos APCM e AR γ com experiências que permitem comprovar a validade destas análises.

Figura 2.3: Ilustração dos algoritmos LMS, NLMS, AR_γ , e Newton, para dois coeficientes.

Figura 2.4: Curvas dos coeficientes dos algoritmos LMS, AR_γ e NLMS.

Capítulo 3

ANÁLISE DO ALGORITMO ACELERADOR PROGRESSIVO

O algoritmo acelerador progressivo convencional matricial (APCM) é um dos algoritmos mais simples obtidos na discretização do algoritmo acelerador de tempo contínuo. Apesar de ter sido mostrado no trabalho de Jojoa (1999) que ele não é sempre estável, é analisado neste capítulo dado que é um algoritmo que apresenta baixa complexidade computacional. Como base de comparação para determinar as vantagens ou desvantagens deste algoritmo foi utilizado o algoritmo LMS, tendo em conta a sua simplicidade e que pode ser obtido do algoritmo do gradiente de tempo contínuo pelo método de Euler progressivo. Neste capítulo é inicialmente apresentada uma análise do algoritmo LMS que vai servir de base de comparação, e posteriormente é apresentada a análise dos momentos de primeira e segunda ordens realizada sobre o algoritmo acelerador APCM, encontrando condições para estabilidade na média e na média quadrática, e aproximações para o erro em regime do algoritmo.

3.1 O algoritmo LMS

Um dos algoritmos mais importantes da família dos algoritmos de gradiente estocástico é o algoritmo LMS, o qual foi desenvolvido por Widrow e Hoff nos anos sessenta. A principal característica deste algoritmo, e que faz dele o algoritmo a ser considerado como base de comparação, é a sua simplicidade. As equações que definem este algoritmo

são as seguintes (Solo; Kong, 1995):

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n]$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \mu\mathbf{x}[n]e[n],$$

com o modelo

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_0 + \eta[n],$$

em que $\mathbf{x}[n]$ corresponde ao sinal de entrada (regressor) e $\eta[n]$ ao ruído de medida.

Sejam consideradas as seguintes hipóteses:

- $\mathbf{x}[n]$ é um vetor gaussiano, de média zero com matriz de covariância

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}.$$

- O sinal de ruído de medida, $\eta[n]$, é gaussiano de média zero e variância σ_η^2 .
- $\mathbf{x}[n]$ e $\eta[n]$ são estatisticamente independentes.

De acordo com (Solo; Kong, 1995), tendo-se em conta as anteriores considerações a análise dos momentos de primeira ordem determina que para o algoritmo LMS,

$$E\{\delta\mathbf{p}[n]\} = (\mathbf{I} - \mu\mathbf{R}_x)E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\}$$

em que $\delta\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o$, sendo $\mathbf{p}_o$ os parâmetros ótimos e, a análise dos momentos de segunda ordem que para $\mathcal{P}[n] = E\{\delta\mathbf{p}[n]\delta\mathbf{p}^T[n]\}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[n] &= \mathcal{P}[n-1] - \mu(\mathcal{P}[n-1]\mathbf{R}_x + \mathbf{R}_x\mathcal{P}[n-1]) + 2\mu^2\mathbf{R}_x\mathcal{P}[n-1]\mathbf{R}_x + \\ &\quad + \mu^2 tr\{\mathcal{P}[n-1]\mathbf{R}_x\}\mathbf{R}_x + \mu^2\sigma_\eta^2\mathbf{R}_x, \end{aligned}$$

em que $tr\{\cdot\}$ corresponde ao traço de uma matriz.

Determina-se que o erro quadrático médio (EQM) é dado por

$$E\{e^2[n]\} = \sigma_\eta^2 + tr\{\mathbf{R}_x\mathcal{P}[n-1]\}.$$

Analisando-se o limite para $n \rightarrow \infty$ nesta equação, determina-se que

$$E \{e_{\infty}^2\} = \sigma_{\eta}^2 + \frac{\rho}{1-\rho} \sigma_{\eta}^2,$$

em que

$$\rho = \sum_{i=1}^M \frac{\mu \lambda_i}{2(1 - \mu \lambda_i)} \quad (3.1)$$

sendo que os λ 's correspondem aos autovalores da matriz $\mathbf{R}_x$.

Observa-se neste resultado que existe um valor que aumenta o erro quadrático médio (EQM) sobre o valor ideal σ_{η}^2 , este valor é conhecido como desajuste ($\mathcal{M}$) e é calculado mediante (Solo; Kong, 1995; Haykin, 1996)

$$\mathcal{M} = \frac{\text{EQM}_{\infty} - \text{EQM}_{\min}}{\text{EQM}_{\min}}. \quad (3.2)$$

Portanto, fazendo uso deste resultado na equação (3.1), o desajuste do algoritmo LMS é dado por

$$\mathcal{M}_{LMS} = \frac{\rho}{1-\rho}. \quad (3.3)$$

3.2 Análise dos momentos do algoritmo APCM

O algoritmo APCM tem como característica importante a de apresentar equações menos complexas que as do algoritmo obtido com o método de Euler regressivo. Cabe destacar que os dois algoritmos apresentam equações que dificultam uma análise direta dos momentos de primeira e segunda ordens. Desta forma, para analisar o algoritmo APCM procurou-se determinar uma situação em que o sistema de equações pudesse ser representado pela conexão em série de dois sistemas. Uma vez obtidos estes sistemas e, para facilitar ainda mais o estudo, foram desenvolvidas outras simplificações que permitem trabalhar com matrizes diagonais. A partir daí prosseguiu-se com o estudo dos momentos de primeira e segunda ordens.

Partindo das equações do algoritmo APCM:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D} &= \mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}^T[n-1]\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \\
\mathbf{q}[n] &= \mathbf{D}\mathbf{q}[n-1] - \alpha\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n-1]e[n-1] \\
\mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n-1] \\
e[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - d[n],
\end{aligned} \tag{3.4}$$

e considerando a matriz de autocorrelação do sinal de entrada:

$$\mathbf{R}_x = \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U},$$

em que $\mathbf{\Delta}$ é a matriz diagonal dos autovalores de $\mathbf{R}_x$ ($\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_M)$) e,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_M)$$

sendo $\mathbf{v}_u$, $1 \leq u \leq M$ os autovetores de $\mathbf{R}_x$ (cumprindo ademais que $\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}$ para $\mathbf{I}$ a matriz identidade) e, as definições

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1[n] \tag{3.5}$$

ou

$$\mathbf{x}^T[n] = \mathbf{x}_1^T[n] \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U},$$

para $\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I}$, em que $i = 1, 2, 3$, obtém-se um “algoritmo APCM simplificado” que atua sobre um vetor regressor transformado:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 &= \mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} - 2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{\Delta} \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \\
\mathbf{q}_1[n] &= \mathbf{D}_1 \mathbf{q}_1[n-1] - \alpha m_1 \mathbf{\Delta} \mathbf{x}_1[n-1] e[n-1] \\
\mathbf{p}_1[n] &= \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{q}_1[n-1] \\
e[n] &= \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] + \eta[n],
\end{aligned} \tag{3.6}$$

em que $\delta \mathbf{p}_1[n] = \mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_0$.

Deve-se notar que o erro de estimação não se altera com a transformação introduzida. No Anexo A apresenta-se de forma detalhada a obtenção destas expressões.

Definindo a variável

$$\mathbf{r}[n] = 2m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n] + \mathbf{q}_1[n], \quad (3.7)$$

e substituindo esta no sistema de equações (3.6) obtém-se as seguintes equações

$$\mathbf{r}[n] = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \mathbf{r}[n-1] - \alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \eta[n-1],$$

$$\delta\mathbf{p}_1[n] = (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta\mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{r}[n-1].$$

A vantagem de escrever as equações como acima é que o termo $\mathbf{r}[n]$ fica independente de $\delta\mathbf{p}_1[n-1]$, ou seja, o sistema é triangular:

$$\begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_1[n] \\ \mathbf{r}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} & \alpha \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}_1[n-1] \\ \mathbf{r}[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ -\alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \end{bmatrix} \eta[n-1].$$

A partir destas equações verifica-se (ver Anexo A) que os momentos de primeira ordem satisfazem:

$$E\{\mathbf{r}[n]\} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta} \right) E\{\mathbf{r}[n-1]\},$$

$$E\{\delta\mathbf{p}_1[n]\} = (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E\{\delta\mathbf{p}_1[n-1]\} + \alpha E\{\mathbf{r}[n-1]\}.$$

ou

$$\begin{bmatrix} E\{\delta\mathbf{p}_1[n]\} \\ E\{\mathbf{r}[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} & \alpha \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E\{\delta\mathbf{p}_1[n-1]\} \\ E\{\mathbf{r}[n-1]\} \end{bmatrix}$$

em que observa-se que a convergência do algoritmo é governada pelos autovalores $1 - 2\alpha m_1 m_2$ e $1 - \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_i$, e o algoritmo converge se

$$0 < 2\alpha m_1 m_2 < 2$$

e

$$0 < \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{ii} < 2.$$

Introduzindo as matrizes de covariância

$$\mathcal{R}[n] = E\{\mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n]\},$$

$$\mathcal{P}[n] = E \left\{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \right\},$$

e de covariância cruzada

$$\mathcal{V}[n] = E \left\{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \right\},$$

mostrou-se que com as mesmas hipóteses que as usadas para o algoritmo LMS (ver Anexo A), os momentos de segunda ordem satisfazem:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[n] = & \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} \mathcal{R}[n-1] \Delta - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta \mathcal{R}[n-1] + \\ & + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \Delta \text{tr} \{ \mathcal{R}[n-1] \} \Delta + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \Delta \mathcal{R}[n-1] \Delta + \alpha^2 m_1^2 \Delta^2 \sigma_\eta^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{V}[n] = & (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}[n-1] \Delta + \\ & + \alpha \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha^2}{2m_2} \mathcal{R}[n-1] \Delta, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[n] = & (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I})^2 \mathcal{P}[n-1] + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}[n-1] + \\ & + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}^T[n-1] + \alpha^2 \mathcal{R}[n-1], \end{aligned}$$

$$E \{ e^2[n] \} = \text{tr} \{ \mathcal{P}[n] \} + \sigma_\eta^2.$$

Considere-se unicamente os elementos das diagonais das matrizes $\mathcal{R}$, $\mathcal{V}$ e $\mathcal{P}$ escritos em forma vetorial: $\underline{\mathcal{R}}$, $\underline{\mathcal{V}}$ e $\underline{\mathcal{P}}$ respectivamente (ver Anexo A). Estes vetores podem ser representados no seguinte sistema:

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}[n] \\ \underline{\mathcal{V}}[n] \\ \underline{\mathcal{R}}[n] \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}[n-1] \\ \underline{\mathcal{V}}[n-1] \\ \underline{\mathcal{R}}[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \alpha^2 m_1^2 \Delta \Delta \end{bmatrix} \sigma_\eta^2 \quad (3.8)$$

em que $\mathbf{K}$ é definida por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \vartheta^2 \mathbf{I} & 2\alpha \vartheta \mathbf{I} & \alpha^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \vartheta \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta \right) & \alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \Delta \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha}{m_2} \Delta + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \Delta^2 + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \Delta \Delta \varpi^T \end{bmatrix},$$

sendo

$$\vartheta = 1 - 2\alpha m_1 m_2$$

$$\underline{\mathcal{R}}[n] = \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}[n] & \cdots & \mathcal{R}_{MM}[n] \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\mathcal{V}}[n] = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11}[n] & \cdots & \mathcal{V}_{MM}[n] \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\mathcal{P}}[n] = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11}[n] & \cdots & \mathcal{P}_{MM}[n] \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\Delta} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{MM} \end{bmatrix}^T$$

e,

$$\varpi = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}}_M^T.$$

Portanto da equação (3.8), a taxa de convergência é dada pelos autovalores

$$(1 - 2\alpha m_1 m_2)^2,$$

$$(1 - 2\alpha m_1 m_2) \left(1 - \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{kk} \right)$$

e, os autovalores de

$$\mathbf{I} - \frac{\alpha}{m_2} \underline{\Delta} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \underline{\Delta}^2 + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \underline{\Delta} \underline{\Delta} \varpi^T.$$

Com estes resultados, considerando $n \rightarrow \infty$, pode-se determinar o desajuste do algoritmo APCM, que é dado pela seguinte expressão (ver Anexo A):

$$\mathcal{M}_a = \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \left\{ \frac{1}{\rho_a (1 - \alpha m_1 m_2)} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) \varsigma_{ii}} - \frac{\alpha m_1 m_2}{1 - \alpha m_1 m_2} \right\},$$

em que

$$\rho_a = \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})},$$

$$\varsigma_{ii} = \lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1,$$

e

$$\mu_a = \frac{\alpha}{2m_2}.$$

Nestas expressões λ_{ii} são os elementos da matriz diagonal $\underline{\Delta}$, que correspondem aos

autovalores da matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_x$. Se for imposta a condição

$$0 < 1 - 2\alpha m_1 m_2 < 1,$$

segue que $\varsigma_{ii} > 1$ e pode-se demonstrar que (ver Anexo A):

$$\mathcal{M}_a < \frac{\rho_a}{1 - \rho_a}.$$

Este valor tem uma expressão semelhante ao desajuste do algoritmo LMS visto anteriormente

$$\mathcal{M}_{LMS} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

em que

$$\rho = \sum_{i=1}^M \frac{\mu \lambda_{ii}}{2(1 - \mu \lambda_{ii})},$$

no entanto, quando $\mu_a = \mu$ não é possível afirmar que a velocidade de convergência do APCM seja maior ou igual à do algoritmo LMS.

O passo seguinte foi comparar mediante simulações o comportamento do algoritmo APCM na região de convergência com o algoritmo LMS. Como base de comparação é utilizado o erro em excesso quadrático médio, o qual é definido como (Sayed, 2003)

$$e_{ex} = \text{EQM} - \text{EQM}_{min}.$$

Para realizar as experiências, implementou-se o identificador de sistema da Figura 3.1, com sinal de entrada ruído colorido gerado pelo filtro

$$\mathbf{F}(z) = \frac{b_o}{\mathbf{D}(z)}$$

em que

$$\mathbf{D}(z) = (1 - re^{jw_o} z^{-1})(1 - re^{-jw_o} z^{-1})(1 - re^{jw_1} z^{-1})(1 - re^{-jw_1} z^{-1}),$$

com $r=0,99$, $w_o = \frac{70}{180}\pi$, $w_1 = \frac{74}{180}\pi$, e b_o calculado de maneira que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathbf{F}(e^{jw})|^2 dw = 1.$$

Foram consideradas também as seguintes condições:

Figura 3.1: Configuração do identificador de sistema com ruído colorido como sinal de entrada.

No. de amostras:	300000
No. de coeficientes:	2
No. de experiências:	200
No. de amostras usadas para o cálculo do e_{ex} :	últimas 6×10^4
desvio-padrão ruído branco $v_1[n]$:	1
desvio-padrão ruído branco $v_2[n]$:	0,1
Sistema a identificar:	$\mathbf{G}(z) = 1 + z^{-1}$
Condição Inicial:	$\mathbf{H}(z) = 0,$

Em uma primeira experiência procurou-se que o algoritmo APCM apresentasse a mesma rapidez de convergência que o algoritmo LMS. Inicialmente considerou-se empregar a condição $\mu_a = \mu$, mas não foi possível ajustar os parâmetros do algoritmo APCM de maneira que lhe permitissem atingir a mesma rapidez apresentada pelo algoritmo LMS. Isto devido ao fato de que o algoritmo APCM tende à ficar instável na medida em que os seus coeficientes se aproximam dos coeficientes do LMS. É por isto que foi utilizada a condição $\mu_a = \kappa\mu$, com o que se pretende ajustar o passo μ do algoritmo LMS para atingir a mesma rapidez de convergência do APCM. Foram portanto dadas as seguintes condições de ajuste ao algoritmo APCM:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 16 \\
m_2 &= 0,021 \\
m_3 &= 0,0465 \\
\alpha &= 2,8125 \times 10^{-4}.
\end{aligned}$$

Assim, experimentalmente o valor do passo de adaptação do algoritmo LMS que atinge a mesma rapidez que o algoritmo APCM foi

$$\mu_{LMS} = 1,4063 \times 10^{-4}.$$

Com este resultado o valor de κ utilizado é

$$\kappa = 47,619.$$

Os valores médios dos erros em excesso quadráticos medidos para velocidade de convergência semelhante foram os seguintes:

$$\begin{aligned}
e_{exLMS} &= 1,3910 \times 10^{-6} \\
e_{exAcp} &= 2,1391 \times 10^{-6}.
\end{aligned}$$

Destes resultados observa-se que o algoritmo APCM apresenta maior média de erro em excesso que o algoritmo LMS.

Uma segunda experiência a ser considerada é a de procurar que tanto o algoritmo APCM como o algoritmo LMS, apresentem a mesma média do erro em excesso quadrático, o que implica que os dois algoritmos apresentem o mesmo erro quadrático médio. As simulações realizadas permitiram determinar que nesta situação o algoritmo acelerador é mais lento que o algoritmo LMS. Um exemplo disto pode ser observado na Figura 3.2, obtida ao implementar $\mu_a = \mu$ com os seguintes parâmetros de ajuste:

$$\begin{aligned}
m_1 &= 0,1010 \\
m_2 &= 1,9298 \\
m_3 &= 12,6968 \\
\alpha &= 0,0193 \\
\mu &= 0,005
\end{aligned}$$

Os valores médios dos erros em excesso quadráticos medidos nesta experiência foram

os seguintes:

$$e_{exLMS} = 5,0566 \times 10^{-5}$$

$$e_{exAcp} = 5,8328 \times 10^{-5}.$$

Figura 3.2: Região de convergência dos coeficientes quando os algoritmos Acelerador Progressivo e LMS apresentam igual erro em excesso quadrático.

Em conclusão, os resultados obtidos com o algoritmo Acelerador Progressivo não foram alentadores, devido a que este algoritmo, além de ter uma complexidade computacional maior que a do algoritmo LMS, não o superar na rapidez de convergência.

Finalmente, é mostrado o erro quadrático médio teórico e prático do algoritmo APCM na região de convergência. Para isto foi implementado o identificador de sistema da Figura 3.3 com sinal de entrada ruído branco. Nesta experiência foram consideradas as seguintes condições

No. de amostras:	5000
No. de coeficientes:	2 e 200
No. de experiências:	200
desvio-padrão ruído branco $x[n]$:	1
desvio-padrão ruído branco $v[n]$:	0,1
Sistema a identificar:	$\mathbf{G}(z) = 1 + z^{-1}$
Condições Iniciais:	$\mathbf{H}(-1) = \mathbf{0}$.

Figura 3.3: Configuração do identificador de sistema com ruído branco como sinal de entrada.

As condições de ajuste do algoritmo APCM foram as seguintes:

$$\begin{aligned}
 m_1 &= 0,1010 \\
 m_2 &= 1,9298 \\
 m_3 &= 12,6968 \\
 \alpha &= 0,0193
 \end{aligned}$$

O resultado desta experiência é mostrado na Figura 3.4, na qual pode-se observar que os valores teóricos seguem os valores práticos tanto para M pequeno como para M grande. Conclui-se assim, que a análise teórica representa uma boa aproximação do comportamento do algoritmo APCM.

(a)

(b)

Figura 3.4: Erro quadrático médio $E\{e^2[n]\}$ medido e teórico na região de convergência para o algoritmo APCM. (a) $M=2$. (b) $M=200$.

Capítulo 4

O ALGORITMO AR_γ

O algoritmo acelerador regressivo versão γ (AR_γ), devido à sua estabilidade, foi objeto de maior estudo, apesar de sua maior complexidade computacional com relação ao algoritmo acelerador progressivo. Para poder entender o comportamento deste algoritmo foram estudados os momentos de primeira e segunda ordens tanto na análise de desajuste como de tracking. Assim, inicialmente é apresentada a análise de desajuste, onde o algoritmo AR_γ é comparado com o algoritmo NLMS devido aos dois serem obtidos pelo método de discretização Euler regressivo. Em seguida é apresentada a análise de tracking, a qual permite definir algumas das condições para selecionar os parâmetros de ajuste do algoritmo AR_γ

4.1 Análise de desajuste do AR_γ

Como apresentado na seção 2.4.1 (pág. 32), o algoritmo AR_γ foi obtido de uma primeira simplificação do algoritmo ARCM. Este algoritmo tem como principal característica o uso de somente três parâmetros de ajuste (os escalares α e γ , e a matriz $\mathbf{M}_1$), diferentemente dos quatro do algoritmo ARCM (o escalar α , e as matrizes $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$). As equações que definem o algoritmo AR_γ estão repetidas a seguir para conveniência

$$\begin{aligned} e_a[n] &= \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n] \\ g[n] &= \frac{e_a[n] + \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \\ \mathbf{q}[n] &= \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} (\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]) \\ \mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n]. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Para a análise do algoritmo foi considerado um sistema no qual o sinal desejado é dado por

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_o - \eta[n],$$

em que $\mathbf{x}[n]$ corresponde ao sinal de entrada (regressor), $\mathbf{p}_o$ ao valor ótimo dos parâmetros e $\eta[n]$ ao ruído de medida.

Como pode-se observar, o algoritmo AR_γ apresenta, da mesma forma que o algoritmo APCM, equações que dificultam uma análise direta dos momentos de primeira e segunda ordens. Devido a isto, para estudar o algoritmo AR_γ procurou-se determinar uma situação na qual o seu sistema de equações possa ser representado pela conexão em série de dois sistemas. Uma vez obtidos os novos sistemas, o estudo dos momentos seguiu um procedimento semelhante ao que foi empregado na análise do algoritmo APCM.

Introduzindo a variável

$$\mathbf{r}[n] = \delta\mathbf{p}[n] + \gamma\mathbf{q}[n] \quad (4.2)$$

em que $\delta\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o$, obtém-se as seguintes equações

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n]\eta[n], \quad (4.3a)$$

$$\delta\mathbf{p}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \left[\delta\mathbf{p}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n] \right], \quad (4.3b)$$

em que

$$\mathbf{\Gamma}[n] = \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}. \quad (4.3c)$$

Isto também pode-se escrever da forma

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}[n] \\ \mathbf{r}[n] \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}\mathbf{I} & \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\mathbf{\Gamma}[n] \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta\mathbf{p}[n-1] \\ \mathbf{r}[n-1] \end{bmatrix} + \\ &+ \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2\gamma}{\alpha + \gamma}\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n] \\ \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n] \end{bmatrix} \eta[n], \end{aligned}$$

note-se que a recursão para $\mathbf{r}[n]$ não depende de $\delta\mathbf{p}[n-1]$ o que simplifica bastante a análise.

Para realizar a análise dos momentos de primeira e segunda ordens de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta\mathbf{p}[n]$, considera-se as seguintes hipóteses simplificadoras:

- $\eta[n]$ é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância σ_η^2 e estatisticamente

independente de $\mathbf{x}[n]$.

- A ordem M do filtro adaptativo é grande o suficiente para fazer a variável $\sqrt{\frac{1}{M}}\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]$ se comportar de forma “lenta” em comparação com $\mathbf{x}[n]$, ou seja que existe uma baixa correlação entre $\mathbf{x}$ e $\|\mathbf{x}\|^2$.

Esta última suposição possibilita a aplicação da propriedade das médias (“averaging property”)¹ (Samson; Reddy, 1983).

A partir das equações (4.3), e fazendo uso das hipóteses anteriores, os momentos de primeira ordem satisfazem (ver Anexo B):

$$E\{\mathbf{r}[n]\} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\right) E\{\mathbf{r}[n-1]\}, \quad (4.4a)$$

$$E\{\delta\mathbf{p}[n]\} = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\} + \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}E\{\mathbf{r}[n]\}, \quad (4.4b)$$

onde

$$\theta = 1 + \alpha\gamma\text{tr}\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\}.$$

Substituindo $E\{\mathbf{r}[n]\}$ em $E\{\delta\mathbf{p}[n]\}$ permite escrever o sistema

$$\begin{bmatrix} E\{\delta\mathbf{p}[n]\} \\ E\{\mathbf{r}[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}\mathbf{I} & \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\} \\ E\{\mathbf{r}[n-1]\} \end{bmatrix}$$

onde observa-se que a convergência na média do algoritmo é governada pelos autovalores $\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$ e $1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\lambda_{ii}$, considerando-se $\mathbf{M}_1 = m_1\mathbf{I}$, e que

$$0 < \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} < 1$$

e

$$0 < 1 - \frac{\alpha\gamma m_1 \lambda_{ii}}{1 + \alpha\gamma m_1 \sum_{i=1}^M \lambda_{ii}} < 1,$$

ou seja, o algoritmo converge na média para quaisquer valores positivos de α , γ e m_1 .

¹PROPRIEDADE DAS MÉDIAS: Sejam dois processos conjuntamente estacionários $x(t)$ e $y(t)$. Se $y(t)$ varia lentamente com respeito a $x(t)$, então a variável aleatória $y(t)$ é “quase” independente de $x(t)$. Isto significa que

$$E\{g(x(\cdot))f(y(\cdot))\} \cong E\{g(x(\cdot))\} \cdot E\{f(y(\cdot))\}.$$

Introduzindo as matrizes de covariância

$$\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \},$$

e

$$\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \},$$

e a matriz de covariância cruzada

$$\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \},$$

os momentos de segundo ordem satisfazem (ver Anexo B):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] + \\ &+ \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \} \mathbf{M}_1 + 2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \\ &+ \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \sigma_\eta^2, \end{aligned} \quad (4.5)$$

$$\mathcal{P}[n] = a^2 \mathcal{P}[n-1] + b^2 \mathcal{R}[n] + ab \mathcal{V}[n] + ab \mathcal{V}^T[n],$$

$$\mathcal{V}[n] = a \mathcal{V}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right) + b \mathcal{R}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right),$$

$$E \{ e_a^2[n] \} = \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{P}[n-1] \} + \sigma_\eta^2,$$

com

$$\Psi = \text{tr}^2 \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} + 2 \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}$$

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma},$$

e

$$b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}.$$

Considere-se a diagonalização da matriz $\mathbf{R}_x$:

$$\mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_M),$$

em que λ_u , $1 \leq u \leq M$ são os valores próprios de $\mathbf{R}_x$, e

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_M),$$

sendo $\mathbf{v}_u$, $1 \leq u \leq M$ os autovetores de $\mathbf{R}_x$. Ademais, cumpre-se que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$ sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade. Considere-se também $\mathbf{M}_1 = m_1\mathbf{I}$, e sejam definidas as matrizes

$$\mathbf{C}[n] = \mathbf{Q}\mathbf{R}[n]\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{V}[n] = \mathbf{Q}\mathbf{V}[n]\mathbf{Q}^T$$

$$\mathbf{D}[n] = \mathbf{Q}\mathbf{P}[n]\mathbf{Q}^T.$$

Multiplicando as equações (4.5) à esquerda pela matriz $\mathbf{Q}$ e à direita pela matriz $\mathbf{Q}^T$, faz com que as matrizes $\mathbf{R}$, $\mathbf{V}$ e $\mathbf{P}$ fiquem em função da matriz diagonal $\mathbf{\Lambda}$. Isto permite escrever os elementos de suas diagonais em forma vetorial, satisfazendo

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{D}}[n] \\ \underline{\mathbf{V}}[n] \\ \underline{\mathbf{C}}[n] \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{D}}[n-1] \\ \underline{\mathbf{V}}[n-1] \\ \underline{\mathbf{C}}[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b^2\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\underline{\mathbf{\Lambda}} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\underline{\mathbf{\Lambda}} \end{bmatrix} \sigma_n^2$$

em que $\mathbf{K}$ é definida por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a^2\mathbf{I} & 2a^2b\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right) & b^2\mathbf{H} + 2ab^2\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right) \\ \mathbf{0} & a\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right) & b\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda}\right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (4.6)$$

sendo

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} + 2m_1^2\mathbf{\Lambda}^2 + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\underline{\mathbf{\Lambda}}\underline{\mathbf{\Lambda}}^T$$

$$\underline{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{MM} \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\mathbf{C}}[n] = \begin{bmatrix} C_{11}[n] & \cdots & C_{MM}[n] \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\mathbf{V}}[n] = \begin{bmatrix} V_{11}[n] & \cdots & V_{MM}[n] \end{bmatrix}^T$$

$$\underline{\mathbf{D}}[n] = \begin{bmatrix} D_{11}[n] & \cdots & D_{MM}[n] \end{bmatrix}^T$$

e que para $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$$

$$b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

$$\theta = 1 + \alpha \gamma m_1 \text{tr}\{\mathbf{R}_x\}$$

$$\Psi = m_1^2 \text{tr}^2\{\mathbf{R}_x\} + 2m_1^2 \text{tr}\{\mathbf{R}_x^2\}.$$

Portanto da matriz $\mathbf{K}$, equação (4.6), a taxa de convergência é dada pelos autovalores

$$a^2,$$

$$a \left(1 - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \lambda_{kk} \right)$$

e os autovalores de $\mathbf{H}$.

Com estes resultados, considerando $n \rightarrow \infty$, pode-se determinar o desajuste do algoritmo AR_γ , que é dado pela seguinte expressão:

$$\mathcal{M} = \frac{\rho}{1 - \rho} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} + \frac{2\gamma}{(\alpha + 2\gamma)\rho} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_{ii} \mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii} \lambda_{ii})} \left(\frac{1 - \frac{m}{\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}} \right) \right] \right\},$$

em que

$$\rho = \sum_{i=1}^M \frac{\mu_{ii} \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_{ii} \lambda_{ii})},$$

$$\mu_{ii} = \frac{\alpha \gamma \varphi_{ii}}{m},$$

$$\varphi_{ii} = \{\mathbf{Q} \mathbf{M}_1 \mathbf{Q}^T\}_{ii},$$

$$m = \frac{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi}{\theta},$$

$$\theta = 1 + \alpha \gamma \text{tr}\{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\}$$

e

$$\Psi = \text{tr}^2\{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\} + 2\text{tr}\{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\}.$$

Nestas expressões λ_{ii} são os autovalores da matriz de autocorrelação $\mathbf{R}_x$ do sinal de entrada $\mathbf{x}[n]$, e $\mathbf{Q}$ é uma matriz ortogonal que diagonaliza $\mathbf{R}_x$. Para obter-se esta expressão considerou-se o caso em que a matriz $\mathbf{M}_1$ é escolhida de tal forma que seja diagonalizada pela mesma matriz ortogonal, $\mathbf{Q}$. Caso esta hipótese não seja verdadeira a expressão para o desajuste se torna ainda mais complicada (note que usualmente se escolhe $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$, e a hipótese fica verdadeira).

O algoritmo assim obtido é a forma discreta normalizada do algoritmo acelerador de tempo contínuo, aqui ele é comparado com o algoritmo “Normalized Least Mean Square” (NLMS). Para isto realizaram-se simulações usando o identificador de sistema da Figura 4.1, com sinal de entrada ruído colorido gerado pelo filtro

$$\mathbf{F}(z) = \frac{b_o}{\mathbf{D}(z)}$$

onde

$$\mathbf{D}(z) = (1 - re^{jw_o} z^{-1})(1 - re^{-jw_o} z^{-1})(1 - re^{jw_1} z^{-1})(1 - re^{-jw_1} z^{-1}),$$

com $r=0,99$, $w_o = \frac{70}{180}\pi$, $w_1 = \frac{74}{180}\pi$, e b_o calculado de maneira que

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathbf{F}(e^{jw})|^2 dw = 1.$$

Figura 4.1: Configuração do identificador de sistema com ruído colorido como sinal de entrada.

Nestas simulações procurou-se primeiramente determinar o erro em excesso quadrático médio quando os dois algoritmos apresentam a mesma rapidez de convergência. Um exemplo disto pôde ser observado ao se implementar uma experiência com as seguintes condições:

No. de amostras:	300000
No. de coeficientes:	2
No. de experiências:	200
Desvio padrão ruído branco: $v_1[n]$:	1
Desvio padrão ruído branco: $v_2[n]$:	0,1
Sistema a identificar:	$\mathbf{G}(z) = 1 + z^{-1}$
Condição Inicial:	$\mathbf{H}(z) = 0$,

onde os parâmetros dos algoritmos acelerador regressivo e NLMS foram:

$$\begin{aligned} m_1 &= 13,2 \\ \gamma &= 0,6 \\ \alpha &= 0,0030 \\ \mu_{NLMS} &= 0,0069, \end{aligned}$$

Os valores médios dos erros em excesso quadráticos medidos para rapidez de convergência semelhante foram os seguintes:

$$\begin{aligned} e_{exNLMS} &= 2,4897 \times 10^{-4} \\ e_{exAcr} &= 4,8112 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

De acordo com estes resultados, pode-se observar que o algoritmo acelerador regressivo convencional apresenta uma melhor resposta que o algoritmo NLMS.

Outras simulações foram realizadas para observar a rapidez de convergência dos dois algoritmos quando eles apresentam o mesmo erro em excesso quadrático médio. Considerando novamente o sistema apresentado na Figura 4.1, e as mesmas condições da experiência anterior, à exceção dos seguintes valores nos parâmetros de ajuste dos algoritmos:

$$\begin{aligned} m_1 &= 13,2 \\ \gamma &= 0,3 \\ \alpha &= 0,0030 \\ \mu_{NLMS} &= 0,0013. \end{aligned}$$

O resultado desta experiência é apresentado na Figura 4.2, onde o erro em excesso quadrático médio medido é

$$\begin{aligned} e_{exNLMS} &= 5,4663 \times 10^{-5} \\ e_{exAcr} &= 5,4238 \times 10^{-5}. \end{aligned}$$

Este resultado permite afirmar que o algoritmo AR_γ é muito mais rápido que o algoritmo NLMS.

Figura 4.2: Região de convergência dos coeficientes quando os algoritmos AR_γ e NLMS apresentam igual erro em excesso quadrático.

Finalmente, é mostrado o erro quadrático médio teórico e prático do algoritmo AR_γ na região de convergência. Para isto foi implementado o identificador de sistema da Figura 4.3 com sinal de entrada ruído branco. Nesta experiência foram consideradas as seguintes condições

No. de amostras:	5000
No. de coeficientes:	2 e 200
No. de experiências:	200
desvio-padrão ruído branco $x[n]$:	1
desvio-padrão ruído branco $v[n]$:	0,1
Sistema a identificar:	$G(z) = 1 + z^{-1}$
Condições Iniciais:	$H(-1) = 0$.

Figura 4.3: Configuração do identificador de sistema com ruído branco como sinal de entrada.

As condições de ajuste do algoritmo AR_γ foram as seguintes:

$$\begin{aligned} m_1 &= 13,2 \\ \alpha &= 0,003 \\ \gamma &= 0,3 \end{aligned}$$

O resultado desta experiência é mostrado na Figura 4.4, na qual pode-se observar que os valores teóricos seguem os valores práticos tanto para M pequeno como para M grande. Conclui-se assim, que a análise teórica representa uma boa aproximação do comportamento do algoritmo AR_γ .

(a)

(b)

Figura 4.4: Erro quadrático médio $E\{e_a^2[n]\}$ teórico e medido na região de convergência para o algoritmo AR_γ . (a) $M=2$. (b) $M=200$.

4.2 Análise de Tracking do algoritmo AR_γ

Com a finalidade de se obter uma análise teórica mais completa, e tendo como base a análise dos momentos de primeira e segunda ordens apresentados no item 4.1, realiza-se um estudo teórico sobre o “tracking” do algoritmo acelerador AR_γ . Assim, seguindo o procedimento realizado em Haykin (1996), foi implementado um modelo variante no tempo para a identificação de um sistema como indicado na Figura 4.5. O sistema é modelado por um filtro transversal que segue um processo de Markov de primeira ordem e que pode ser escrito vetorialmente da seguinte forma:

$$\mathbf{p}_o[n+1] = \zeta \mathbf{p}_o[n] + \mathbf{v}[n],$$

onde ζ é um parâmetro fixo, $\mathbf{v}[n]$ um vetor de ruído de média zero com matriz de autocovariância $\mathbf{V}$ e $\mathbf{p}_o[n]$ são os coeficientes do sistema a ser identificado.

Figura 4.5: Modelo do processo de Markov e do sistema de identificação

Para analisar este algoritmo é utilizada a variável $\mathbf{r}[n]$ dada pela equação (4.2), com a finalidade de decompor o sistema em dois sistemas em cascata que representem o algoritmo AR_γ . Assim, assumindo um valor de ζ próximo de 1 (um) resultam as seguintes

equações:

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{v}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n]\eta[n] \quad (4.7a)$$

$$\delta\mathbf{p}[n] = a\delta\mathbf{p}[n-1] - a\mathbf{v}[n-1] + b\mathbf{r}[n], \quad (4.7b)$$

em que

$$\mathbf{\Gamma}[n] = \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \quad (4.7c)$$

e

$$a = \left(\frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \right) = 1 - b. \quad (4.7d)$$

Com estas equações pôde-se realizar uma análise dos momentos de primeira e segunda ordens de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta\mathbf{p}[n]$ semelhante à realizada para o caso do desajuste. Para isto faz-se uso das seguintes hipóteses simplificadoras:

- $\mathbf{x}[n]$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média nula com matriz de covariância

$$\mathbf{R}_x = E \{ \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \}.$$

- $\eta[n]$ é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância σ_η^2 .
- $\mathbf{v}[n]$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média nula com matriz de covariância

$$\mathbf{V} = E \{ \mathbf{v}[n]\mathbf{v}^T[n] \}.$$

- $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{v}[n]$ e $\eta[n]$ são estatisticamente independentes.
- A ordem M do filtro adaptativo é grande o suficiente para fazer a variável $\sqrt{\frac{1}{M}}\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]$ se comportar de forma “lenta” em comparação com $\mathbf{x}[n]$.

Esta última hipótese possibilita a aplicação da propriedade das médias (Samson; Reddy, 1983).

A partir das equações (4.7) e das condições anteriormente mencionadas, pode-se

determinar os momentos de primeira ordem (ver Anexo C)

$$E \{ \mathbf{r}[n] \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) E \{ \mathbf{r}[n-1] \} \quad (4.8)$$

$$E \{ \delta \mathbf{p}[n] \} = a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} + b E \{ \mathbf{r}[n] \} \quad (4.9)$$

em que

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, \quad b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

e

$$\theta = 1 + \alpha\gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}.$$

Como pode-se observar, estas equações são as mesmas que as obtidas no desajuste (equações 4.4).

Introduzindo as matrizes de covariância

$$\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \},$$

$$\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \},$$

e a matriz de covariância cruzada

$$\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \},$$

obtem-se os momentos de segundo ordem (ver Anexo C):

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] + \\ &+ \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \} \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \frac{2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\ &+ \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{V} \} \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\ &+ \frac{2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}[n] = a^2 \mathcal{P}[n-1] + ab \mathcal{V}[n] + a^2 \mathbf{V} + ab \mathcal{V}^T[n] + b^2 \mathcal{R}[n]$$

$$\mathcal{V}[n] = a \mathcal{V}[n-1] - \frac{a\alpha\gamma}{\theta} \mathcal{V}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + b \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma b}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1$$

$$E \{ e_a^2[n] \} = \sigma_\eta^2 + \text{tr} \{ \mathcal{P}[n-1] \mathbf{R}_x \} + \text{tr} \{ \mathbf{V} \mathbf{R}_x \}$$

Pode-se observar que estas equações são as mesmas do desajuste adicionadas termos

relacionados com a matriz de autocovariância $\mathbf{V}$ em que

$$\begin{aligned} a &= \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \\ b &= \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \\ \theta &= 1 + \alpha\gamma \operatorname{tr} \{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\} \\ \Psi &= \operatorname{tr}^2 \{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\} + 2\operatorname{tr} \{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\}. \end{aligned}$$

Com estes resultados, considerando $n \rightarrow \infty$ e a matriz $\mathbf{M}_1$ da forma $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$ pode-se determinar que o desajuste no tracking do algoritmo AR γ obedece

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a &< \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)\sigma_\eta^2} \beta + \\ &+ \frac{1}{(1 - \rho_a)\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii}, \end{aligned} \quad (4.10)$$

em que

$$\begin{aligned} \rho_a &= \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \\ \mu_a &= \frac{\alpha\gamma m_1 \theta}{\kappa} \\ \kappa &= 2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi \\ \theta &= 1 + \alpha\gamma \operatorname{tr} \{m_1 \mathbf{R}_x\} \\ \Psi &= \operatorname{tr}^2 \{m_1 \mathbf{R}_x\} + 2\operatorname{tr} \{m_1^2 \mathbf{R}_x^2\}, \end{aligned} \quad (4.11)$$

Pode-se observar que esta equação é a mesma obtida para a análise de desajuste adicionada de termos que estão relacionados com o sinal de ruído do processo de Markov.

Diante da dificuldade de ter uma equação simples que defina com precisão o valor teórico do desajuste no tracking do algoritmo AR γ , considera-se que uma boa aproxi-

mação para este é o valor limite da equação (4.10), ou seja

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a \simeq & \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)\sigma_\eta^2} \beta + \\ & + \frac{1}{(1 - \rho_a)\sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a\kappa(1 - \mu_a\lambda_{ii})} s_{ii}, \end{aligned} \quad (4.12)$$

cuja validade foi comprovada mediante simulações. Nestas simulações, foi observado que para diferentes valores de α , γ e m_1 o produto

$$h = \alpha\gamma m_1$$

permanece constante. Para comprovar a validade deste resultado prático substituem-se as expressões (4.11) em (4.12), o resultado é derivado com respeito a m_1 e igualado a zero. Considerando a dificuldade de realizar este processo manualmente, foi utilizado o software MAPLE[®] para realizar estas operações. O valor teórico de $h = \alpha\gamma m_1$ que

minimiza $\mathcal{M}_a$ corresponde ao zero real da seguinte equação:

$$\begin{aligned}
0 = & (4\sigma_\nu^2 + (8\sigma_x\sigma_\nu^2 + 32\sigma_x M\sigma_\nu^2)Z + \\
& + (80\sigma_\nu^2\sigma_x^2 M + 113\sigma_x^2\sigma_\nu^2 M^2 - 8\sigma_\nu^2\sigma_x^2 - 4\sigma_\eta^2)Z^2 + \\
& + (231\sigma_x^3 M^3\sigma_\nu^2 - 32\sigma_x^3\sigma_\nu^2 + 20\sigma_x^3 M\sigma_\nu^2 + 272\sigma_x^3\sigma_\nu^2 M^2 - 28\sigma_\eta^2 M\sigma_x)Z^3 + \\
& + (-96\sigma_\nu^2\sigma_x^4 M + 465\sigma_x^4 M^3\sigma_\nu^2 + 153\sigma_\nu^2\sigma_x^4 M^2 + 301\sigma_x^4 M^4\sigma_\nu^2 - 28\sigma_\nu^2\sigma_x^4 + \\
& - 85\sigma_x^2 M^2\sigma_\eta^2 - 20M\sigma_\eta^2\sigma_x^2 + 8\sigma_x^2\sigma_\eta^2)Z^4 + \\
& + (474\sigma_x^5 M^4\sigma_\nu^2 - 92\sigma_x^5 M\sigma_\nu^2 - 8\sigma_x^5\sigma_\nu^2 + 259\sigma_x^5 M^5\sigma_\nu^2 - 38\sigma_x^5\sigma_\nu^2 M^2 + \\
& + 251\sigma_x^5 M^3\sigma_\nu^2 - 146\sigma_x^3 M^3\sigma_\eta^2 - 78\sigma_x^3 M^2\sigma_\eta^2 + 28\sigma_x^3\sigma_\eta^2 M)Z^5 + \\
& + (-24\sigma_x^6\sigma_\nu^2 M + 147\sigma_x^6 M^6\sigma_\nu^2 + 242\sigma_x^6 M^4\sigma_\nu^2 + 122\sigma_x^6\sigma_\nu^2 M^3 + 338\sigma_x^6 M^5\sigma_\nu^2 + \\
& + 20\sigma_x^4\sigma_\eta^2 M - 130\sigma_x^4 M^3\sigma_\eta^2 + 3\sigma_x^4 M^2\sigma_\eta^2 - 4\sigma_x^4\sigma_\eta^2 - 155\sigma_x^4 M^4\sigma_\eta^2)Z^6 + \\
& + (200\sigma_x^7 M^6\sigma_\nu^2 + 316\sigma_x^7 M^4\sigma_\nu^2 + 232\sigma_x^7 M^3\sigma_\nu^2 + 294\sigma_x^7 M^5\sigma_\nu^2 + 53\sigma_x^7 M^7\sigma_\nu^2 \\
& + 48\sigma_x^7\sigma_\nu^2 M^2 - 28\sigma_x^5 M^3\sigma_\eta^2 + 8\sigma_x^5 M^2\sigma_\eta^2 - 128\sigma_x^5 M^4\sigma_\eta^2 - 104\sigma_x^5 M^5\sigma_\eta^2)Z^7 + \\
& + (307\sigma_x^8 M^6\sigma_\nu^2 + 400\sigma_x^8\sigma_\nu^2 M^4 + 16\sigma_x^8\sigma_\nu^2 M^2 + 97\sigma_x^8 M^7\sigma_\nu^2 + \\
& + 160\sigma_x^8\sigma_\nu^2 M^3 + 11\sigma_x^8 M^8\sigma_\nu^2 + 476\sigma_x^8 M^5\sigma_\nu^2 - 66\sigma_x^6 M^4\sigma_\eta^2 + \\
& - 84\sigma_x^6 M^5\sigma_\eta^2 - 8\sigma_x^6 M^3\sigma_\eta^2 + 8\sigma_x^6\sigma_\eta^2 M^2 - 43\sigma_x^6 M^6\sigma_\eta^2)Z^8 + \\
& + (\sigma_x^9 M^9\sigma_\nu^2 + 159\sigma_x^9 M^7\sigma_\nu^2 + 348\sigma_x^9 M^5\sigma_\nu^2 + 32\sigma_x^9 M^3\sigma_\nu^2 + \\
& + 30\sigma_x^9 M^8\sigma_\nu^2 + 342\sigma_x^9 M^6\sigma_\nu^2 + 168\sigma_x^9 M^4\sigma_\nu^2 - 32\sigma_x^7 M^5\sigma_\eta^2 + \\
& - 8\sigma_x^7 M^4\sigma_\eta^2 - 34\sigma_x^7 M^6\sigma_\eta^2 - 10\sigma_x^7 M^7\sigma_\eta^2)Z^9 + \\
& + (4\sigma_x^{10} M^9\sigma_\nu^2 + 72\sigma_x^{10}\sigma_\nu^2 M^5 + 30\sigma_x^{10} M^8\sigma_\nu^2 \\
& + 86\sigma_x^{10} M^7\sigma_\nu^2 + 116\sigma_x^{10} M^6\sigma_\nu^2 + 16\sigma_x^{10}\sigma_\nu^2 M^4 - 4\sigma_x^8 M^4\sigma_\eta^2 - 6\sigma_x^8 M^7\sigma_\eta^2 + \\
& - 12\sigma_x^8 M^5\sigma_\eta^2 - \sigma_x^8 M^8\sigma_\eta^2 - 13\sigma_x^8 M^6\sigma_\eta^2)Z^{10})/\sigma_x
\end{aligned} \tag{4.13}$$

O programa que permitiu obter este resultado é apresentado no Anexo C.

Para verificar a análise realizada foram efetuadas diferentes experiências para as quais foi implementado o sistema da Figura 4.5 com as seguintes condições:

No. de amostras:	100000
No. de coeficientes:	2
Desvio padrão ruído branco: $x[n]$:	0,1
Desvio padrão ruído branco: $\eta[n]$:	0,05
Desvio padrão ruído branco: $v[n]$:	0,01
Parâmetro de ajuste ζ :	0,9998.

Em uma primeira experiência foi medido o desajuste do AR γ e comparado como o

valor teórico dado pela equação (4.12) para uma seqüência de valores de α e γ para um m_1 dado. As condições para esta experiência são as seguintes:

$$\begin{aligned}m_1 &= 7 \\ \gamma &= \text{de } 0,01 \text{ até } 3 \\ \alpha &= \text{de } 0,01 \text{ até } 2.\end{aligned}$$

A Figura 4.6. a apresenta o desajuste medido, e a Figura 4.6.b o desajuste teórico. Pode-se observar que os dois gráficos apresentam uma região de mínimos que é coincidente. A superposição dos dois gráficos (Figura 4.7.a) permite comprovar que a equação (4.12) é uma boa aproximação do resultado prático. Isto pode ser observado com maior clareza na Figura 4.7.b, onde são apresentadas as curvas prática e teórica extraídas da Figura 4.7.a correspondentes a $\gamma = 1,5$ e, na Figura 4.8, onde tem-se os valores de γ , práticos e teóricos (em função de α e m_1 conhecidos) que permitem obter o desajuste mínimo. A Figura 4.8 mostra também que para que a seleção de parâmetros possa estar dentro da região dos mínimos considerando um α grande, o valor de γ deve ser pequeno e vice-versa, sendo este um bom auxílio para selecionar estes parâmetros de ajuste.

(a)

(b)

Figura 4.6: Desajuste do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$. (a) Desajuste medido. (b) Desajuste teórico

(a)

(b)

Figura 4.7: Desajuste do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$. (a) Superposição dos desajustes: medido (tonalidade azul) e teórico (tonalidade amarela). (b) Desajuste teórico e medido para $\gamma = 1,5$

Figura 4.8: Valores de α e γ onde se obtém o mínimo do desajuste, para $m_1 = 7$.

Levando em conta os resultados obtidos, foi observado o que acontece ao variar o parâmetro m_1 do algoritmo AR_γ . Assim, considerando as mesmas variações de α e γ da experiência anterior, foram realizadas simulações para diferentes m_1 . Os resultados obtidos são apresentados na Figura 4.9, onde pode-se observar que cada uma das curvas cumpre com a relação

$$h \approx \alpha \gamma m_1$$

onde h é uma constante real positiva. A tabela 4.1 mostra resultados de alguns valores tomados do gráfico que verificam esta afirmação.

m_1	α	γ	h
1	1,0	2,04	2,040
1	1,5	1,35	2,025
3	1,0	0,68	2,040
3	1,5	0,45	2,025
11	1,0	0,18	1,980
11	1,5	0,12	1,980

Tabela 4.1: Valores de h para diferentes condições dos parâmetros m_1 , α e γ

Aplicando o programa realizado em MAPLE[®] (Anexo C, pág. 185) que determina o valor de h que minimiza o desajuste, observa-se que para os desvios padrões dos sinais utilizados nestas experiências o valor obtido é de

$$h = 2,082292339$$

o qual é bem próximo dos valores de h apresentados na tabela (4.1).

Figura 4.9: Valores de α , γ e m_1 que apresentam o valor mínimo de desajuste.

Finalmente comparam-se os valores mínimos obtidos com os algoritmos AR_γ e NLMS. Para isto, foram medidos os desajustes do algoritmo NLMS para diferentes passos de adaptação:

$$\mu_n = 0,001 \text{ até } 0,08,$$

o valor mínimo obtido foi de

$$\mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$$

para

$$\mu_n = 0,013.$$

O valor de desajuste mínimo obtido com o AR_γ para as condições apresentadas é

$$\mathcal{M}_a = 0,0482$$

obtido para os parâmetros

$$\begin{aligned} m_1 &= 7 \\ \alpha &= 1,37 \\ \gamma &= 0,21. \end{aligned}$$

A Figura 4.10 apresenta o desajuste do algoritmo NLMS para diferentes valores de μ_n , e o desajuste do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$ e $\gamma = 0,21$ para diferentes valores de α . É observado nesta figura, que existe uma grande faixa de valores de α para os quais os valores de desajuste medidos são menores que os obtidos pelo algoritmo NLMS. O mesmo acontece com o parâmetro γ , ver Figura 4.11

É importante destacar a influência do parâmetro m_1 no tamanho da região onde o algoritmo AR_γ atinge um menor desajuste que o algoritmo NLMS. As Figuras 4.12 e 4.13 apresentam as regiões e os valores de α e γ , onde o algoritmo AR_γ obtém um desajuste inferior ao valor mínimo atingido pelo algoritmo NLMS, $\mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. Pode-se observar que para maiores valores de m_1 a região tende a diminuir, tendo-se portanto menos valores de α e γ para escolher.

Para caso de $m_1 = 20$, o valor de desajuste mínimo obtido é

$$\mathcal{M}_a = 0,0482$$

para os parâmetros

$$\begin{aligned} \alpha &= 0,77 \\ \gamma &= 0,13. \end{aligned}$$

Isto significa que com diferentes combinações de α , γ e m_1 é possível conseguir o mesmo

(a)

(b)

Figura 4.10: (a) Desajustes do algoritmo NLMS. (b) Desajustes do algoritmo AR_γ para $m_1 = 7$ e $\gamma = 0, 21$.

valor de desajuste.

(a)

(b)

Figura 4.11: (a) Desajustes do algoritmo NLMS. (b) Desajustes do algoritmo $AR\gamma$ para $m_1 = 7$ e $\alpha = 0,25$.

(a)

(b)

Figura 4.12: (a) Região onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. (b) Curvas de nível da região para os valores de α e γ onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. Gráficos para $m_1 = 7$.

(a)

(b)

Figura 4.13: (a) Região onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. (b) Curvas de nível da região para os valores de α e γ onde $\mathcal{M}_a < \mathcal{M}_{NLMS} = 0,1313$. Gráficos para $m_1 = 20$.

Finalmente é realizada uma experiência na qual o número de coeficientes do filtro adaptativo é grande. Para isto foi implementado o sistema da Figura 4.5 com as seguintes condições:

No. de amostras:	60000
No. de coeficientes do filtro adaptativo:	200
No. de coeficientes do sistema a identificar gerados pelo processo de Markov:	2
Desvio padrão ruído branco: $x[n]$:	0,1
Desvio padrão ruído branco: $\eta[n]$:	0,05
Desvio padrão ruído branco: $v[n]$:	0,01 e 0,001
Parâmetro de ajuste ζ :	0,9998.

Como nos casos anteriores, nesta experiência foi medido o desajuste do AR_γ e comparado como o valor teórico dado pela equação (4.12) para uma sequência de valores de α e γ para um m_1 dado. As condições para esta experiência são as seguintes:

$$\begin{aligned} m_1 &= 7 \\ \gamma &= \text{de } 0,01 \text{ até } 3 \\ \alpha &= \text{de } 0,01 \text{ até } 2. \end{aligned}$$

A Figura 4.14 apresenta as curvas prática e teórica dos valores do desajuste obtidos para os diferentes valores de α com $\gamma = 1, 5$. Pode-se observar que para o caso no qual os coeficientes variam lentamente, Figura 4.14.a ($\sigma_v = 0.001$), o valor teórico segue ao prático. No entanto quando os coeficientes variam mais rapidamente, Figura 4.14.b ($\sigma_v = 0.01$), o valor teórico se afasta um pouco do valor prático. Assim, conclui-se que para o caso onde M é grande a análise teórica é somente válida para algumas condições do sistema, portanto considera-se necessário um estudo mais aprofundado deste comportamento. Este estudo não faz parte do escopo desta tese.

Para os casos apresentados, o grau de não-estacionaridade (GNE) definido por (Sayed, 2003)

$$GNE = \frac{M\sigma_x\sigma_v}{\sigma_\eta},$$

corresponde a

- GNE=0,04 para $\sigma_v = 0,01$
- GNE=0,004 para $\sigma_v = 0,001$.

Diversas simulações com diferentes condições do sinal de entrada permitiram observar que é sempre possível obter um bom desempenho do algoritmo AR_γ em comparação com

(a)

(b)

Figura 4.14: Desajuste teórico e medido do algoritmo AR_γ para diferentes valores de α com $m_1 = 7$ e $\gamma = 1, 5$. (a) $\sigma_v = 0.001$. (b) $\sigma_v = 0.01$

o algoritmo NLMS. Isto faz do algoritmo AR_γ uma boa opção para aplicações onde é requerido um bom desempenho de *tracking*, um exemplo disto é apresentado a seguir.

4.2.1 Equalização de Canal

Uma das aplicações onde os filtros adaptativos têm sido amplamente utilizados é a equalização de canais de comunicações. Neste tipo de aplicação a idéia é recuperar adequadamente o sinal transmitido pelo canal mediante o uso de um sistema (filtro) que aproximadamente inverta as condições impostas pelo canal de comunicação sem amplificar em demasia o ruído presente no sinal recebido. Nos anos 60, quando iniciou-se a aplicação de sistemas adaptativos para a equalização de canais de transmissão, considerava-se que tais canais eram invariantes no tempo. Mas com o avanço tecnológico, especialmente nos campos de comunicações móveis, a largura de banda que estes sistemas empregam trazem consigo problemas (como por exemplo o desvanecimento de canal) nos quais já não é possível considerar a invariabilidade no tempo do canal.

Procura-se então, mostrar o desempenho do algoritmo AR_γ equalizando um canal com parâmetros variantes no tempo, permitindo desta forma ver o seu desempenho de tracking em um sistema quase real. O comportamento do algoritmo AR_γ vai ser comparado novamente com o algoritmo NLMS devido à relação existente entre os dois (ambos são algoritmos normalizados).

O sistema implementado para a equalização de canal é apresentado na Figura 4.15. Nesta figura, o canal variante no tempo é modelado por

$$H(z) = h_0(n) + h_1(n)z^{-1} + h_2(n)z^{-2}, \quad (4.14)$$

onde os coeficientes $h_0(n)$, $h_1(n)$ e $h_2(n)$ são gerados passando ruído branco gaussiano através de um filtro de Butterworth de segunda ordem, projetado para simular uma taxa de desvanecimento de 0,1 Hz, com operação a uma taxa de 2400 amostras/seg, adicionado de um ruído branco Gaussiano $\eta[n]$. Os dados a serem transmitidos, $\mathbf{x}[n]$, formam um seqüência aleatória de $\{-1, +1\}$, com igual probabilidade para os símbolos -1 e $+1$ (Shimamura; Cowan, 1997).

Para comparar os algoritmos é utilizada como referência a razão de erro de bit (BER = Bit Error Ratio) que se define como o número de bits errados transmitidos, dividido pelo número total de bits transmitidos em um dado intervalo de tempo.

Figura 4.15: Configuração do sistema para equalização de um canal de comunicações.

Nas experiências que se seguem, foram utilizadas as seguintes condições:

Comprimento do equalizador:	11 amostras
Atraso do sinal de treinamento, k :	5 amostras
Relação Sinal-Ruído (SNR):	25dB
Número amostras dos sinais:	40000,

em que

$$SNR = 10 * \log_{10} \left(\frac{\sigma_x^2}{\sigma_\eta^2} \right).$$

Inicialmente, mede-se a BER para diferentes combinações de α e γ dado um m_1 , os resultados obtidos para as seguintes condições

$$\begin{aligned} m_1 &= 7 \\ \alpha &= 0,01 \text{ até } 4 \\ \gamma &= 0,01 \text{ até } 3 \end{aligned}$$

são apresentados na Figura 4.16.

Pode-se observar nesta figura que o algoritmo AR_γ apresenta os mínimos valores de BER em uma região semelhante à obtida na Figura 4.6 para coeficientes que seguem um modelo de Markov. Os melhores resultados são obtidos para $\gamma > \alpha$. Na Figura 4.17.a é extraída a curva correspondente a $\gamma = 3$, a qual apresenta o menor valor de BER da

Figura 4.16: BER para diferentes combinações de α e γ com $m_1 = 7$.

experiência. Esta curva é comparada com as medidas de BER obtidas para o algoritmo NLMS (Figura 4.17.b) com

$$\mu_n = 0,001 \text{ até } 1.$$

Observa-se que para uma faixa de α , o algoritmo $AR\gamma$ apresenta melhores resultados, mínimos menores, que o algoritmo NLMS. Os menores valores desta experiência são obtidos em

$$\begin{aligned} m_1 &= 7 \\ \gamma &= 3 \\ \alpha &= 0,16 \end{aligned}$$

no caso do algoritmo $AR\gamma$ e,

$$\mu_n = 0,269$$

Figura 4.17: (a) BER do algoritmo AR_γ para diferentes valores de α quando $m_1 = 7$ e $\gamma = 3$. (b) BER do algoritmo NLMS para diferentes valores de μ_n .

para o algoritmo NLMS.

Em seguida implementou-se uma prática para diferentes valores de SNR. Assim, para cada valor de SNR efetuaram-se 200 experiências, e em cada uma delas calculou-se o valor de BER. A partir destes valores obteve-se a média para o valor de BER. Os parâmetros

utilizados baseiam-se na experiência anterior e foram, para o algoritmo AR_γ

$$m_1 = 7$$

$$\gamma = 3$$

$$\alpha = 0,16$$

e,

$$\mu_n = 0,269$$

para o algoritmo NLMS. A relação sinal-ruído varia entre 10dB e 40dB. Os resultados são apresentados na Figura 4.18, nela pode-se observar que o algoritmo AR_γ apresenta uma melhora com respeito ao algoritmo NLMS. Isto pode ser observado também nas Figuras 4.19.a e 4.19.b, onde são mostrados os erros obtidos ao se comparar a saída do decisor com o sinal transmitido, percebe-se aqui, que o algoritmo AR_γ apresenta menos erros que o algoritmo NLMS. A Figura 4.19.c apresenta os módulos dos zeros do canal utilizado ao longo das iterações, pode-se observar que o algoritmo AR_γ tem um melhor desempenho de tracking que o algoritmo NLMS, esta situação pode ser observada nas situações onde existe uma mudança brusca nas magnitudes dos zeros.

Estes resultados permitem concluir que o algoritmo AR_γ apresenta um bom desempenho de tracking em comparação com o algoritmo NLMS. Isto permite pensar que o AR_γ pode ser empregado em situações que requeiram rápida resposta como é o caso da equalização de canais.

Figura 4.18: Desempenho do BER para os equalizadores implementados com os algoritmos AR_{γ} e NLMS

Figura 4.19: (a) Erro na recuperação do sinal de entrada para o Algoritmo AR_γ e (b) para o algoritmo NLMS. (c) Módulo dos zeros do canal variante no tempo; a linha com amplitude 1 representa a circunferência unitária

Capítulo 5

CONCLUSÕES E TRABALHOS FUTUROS

Este trabalho apresenta um estudo aprofundado de alguns dos algoritmos aceleradores de tempo discreto propostos em Jojoa (1999). Os algoritmos aqui considerados foram o acelerador progressivo (APCM), pela sua baixa complexidade computacional, e o acelerador regressivo (ARCM) pelo seu desempenho.

No estudo do algoritmo ARCM e visando diminuir a sua complexidade computacional, foi obtido um novo algoritmo: o acelerador regressivo versão γ ($AR\gamma$). Este apresenta como principais características: a diminuição no número de parâmetros de ajuste, e a manutenção da estabilidade segundo o método de Lyapunov para parâmetros de ajuste positivos. Estas características fazem com que este algoritmo seja mais fácil de ajustar que o ARCM.

Dada a forma das equações do algoritmo ARCM, foi analisada também a sua relação com o método de Newton, apresentando as estimativas do gradiente e da matriz Hessiana que o ARCM utiliza. Desta análise foi mostrado que os coeficientes dos algoritmos ARCM e $AR\gamma$ apresentam, dependendo dos parâmetros de ajuste, comportamentos que variam entre os mostrados pelos coeficientes dos algoritmos do gradiente (LMS e NLMS) e os do método de Newton. No entanto, o algoritmo ARCM converge mais lentamente ao valor ótimo quando os parâmetros de ajuste o impelem a seguir o caminho traçado pelo método de Newton.

A análise do comportamento dos algoritmos APCM e $AR\gamma$ considerou a aplicação dos momentos de primeira e segunda ordens. Dada a natureza das equações que estes algoritmos apresentam, a análise dos momentos não é simples de realizar de forma direta. Entretanto, fazendo uso de uma transformação das variáveis e algumas condições simpli-

ficadoras foi possível reescrever o sistema de equações como um novo sistema dinâmico de duas equações em cascata, o que facilitou o estudo dos momentos. Esta análise permitiu quantificar o comportamento destes algoritmos em função dos valores dos parâmetros.

Baseado na análise de primeira e de segunda ordens, e seguindo a teoria da independência, foram obtidas condições para estabilidade na média e na média quadrática além de expressões para o erro quadrático médio e para o desajuste dos algoritmos APCM e $AR\gamma$.

Da análise teórica e das experiências realizadas com o algoritmo APCM, mostrou-se que este algoritmo não apresenta um bom desempenho se comparado com o algoritmo LMS.

Com a finalidade de se obter uma análise mais completa do algoritmo $AR\gamma$, realizou-se também um estudo teórico sobre o *tracking*. A análise realizada considerando o desajuste e o *tracking* deu ótimos resultados, pois a diferença entre os valores teóricos e práticos foi muito pequena, especialmente para os parâmetros de ajuste (α , γ e m_1) com os quais consegue-se atingir os valores mais baixos de desajuste. Este algoritmo apresentou também um bom desempenho quando comparado no desajuste e no *tracking* com o algoritmo NLMS, mostrando um melhor compromisso entre velocidade de convergência e variância das estimativas. Este bom desempenho foi comprovado através da aplicação deste algoritmo na equalização de um canal variante no tempo.

Em geral este trabalho apresentou um novo algoritmo denominado acelerador regressivo versão γ ($AR\gamma$), com a sua respectiva análise teórica de desajuste e de *tracking*. Suas principais propriedades são a estabilidade e rapidez de convergência.

5.1 Trabalhos futuros

A análise de estabilidade realizada abre a possibilidade do uso de parâmetros de ajuste variantes no tempo, para obter uma maior rapidez de convergência, sem sacrificar a qualidade da estimativa dos parâmetros do filtro ou o erro quadrático médio de estimação após a convergência.

Através do uso dos métodos de discretização de Euler progressivo e regressivo obtiveram-se algoritmos semelhantes aos mais freqüentemente usados (LMS, NLMS e RLS). Isto, permite considerar que podem existir diferentes formas de melhorar o desempenho dos

algoritmos aceleradores.

Estudos mais aprofundados são necessários para melhorar o desempenho do algoritmo APCM. Possivelmente seja conveniente adotar outras técnicas, como a da conservação da energia de Sayed (2003) para conhecer melhor o seu comportamento. Esta técnica poderia ser adotada também para complementar a análise do ARCM, já que ainda não foi encontrada uma “fórmula” simples que determine como selecionar os parâmetros de ajuste, pois as expressões encontradas são ainda muito complexas.

Uma análise mais aprofundada do algoritmo $(AR\gamma)$ é necessária para determinar as condições sob as quais este apresenta uma trajetória semelhante à do método de Newton. Isso possivelmente ajudaria a definir modificações nele, que lhe permitiram atingir uma velocidade de convergência maior à que atualmente apresenta.

Anexo A

ANÁLISE DO DESAJUSTE DO ALGORITMO APCM

A.1 Algoritmo APCM

As equações que definem o algoritmo APCM obtido pelo método de Euler direto são as seguintes (Jojoa, 1999):

$$\mathbf{D} = \mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}^T[n-1]\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \quad (\text{A.1a})$$

$$\mathbf{q}[n] = \mathbf{D}\mathbf{q}[n-1] - \alpha\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n-1]e[n-1] \quad (\text{A.1b})$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n-1] \quad (\text{A.1c})$$

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - d[n]. \quad (\text{A.1d})$$

para o sistema que cumpre com

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_0 + \eta[n],$$

onde $\mathbf{x}[n]$ corresponde ao sinal de entrada (regressor) e $\eta[n]$ ao ruído de medida.

A.2 Algoritmo APCM equivalente

Considere-se que a matriz de autocorrelação do sinal de entrada pode ser escrita como:

$$\mathbf{R}_x = E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta} \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}.$$

onde $\mathbf{\Delta}$ é a matriz diagonal dos autovalores de $\mathbf{R}_x$, $\mathbf{\Delta} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_M)$ e,

$$\mathbf{U} = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_M)$$

sendo $\mathbf{v}_u$, $1 \leq u \leq M$ os autovetores de $\mathbf{R}_x$, cumprindo ademais que $\mathbf{U} \mathbf{U}^T = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Com estas matrizes define-se

$$\mathbf{x}[n] = \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1[n] \quad (\text{A.2})$$

ou

$$\mathbf{x}^T[n] = \mathbf{x}_1^T[n] \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}. \quad (\text{A.3})$$

Aplicando a esperança ao produto $\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]$, e utilizando as equações (A.2) e (A.3) obtém-se a seguinte relação:

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} &= E \left\{ \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \right\} \\ &= \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} E \{ \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \} \mathbf{\Delta}^{\frac{1}{2}} \mathbf{U}. \end{aligned}$$

Assim:

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \} &= \mathbf{\Delta}^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \mathbf{U}^T \mathbf{\Delta}^{-\frac{1}{2}} \\ &= \mathbf{I}. \end{aligned} \quad (\text{A.4})$$

Partindo das equações do algoritmo acelerador dado por (A.1), utilizando as relações dadas em (A.2) e (A.3) e definindo $\delta \mathbf{p}_1[n] = \mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_{01}$, obtém-se, para o erro de

estimação:

$$\begin{aligned}
e[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_0 - \eta[n] \\
&= \mathbf{x}_1^T[n]\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{p}[n] - \mathbf{x}_1^T[n]\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{p}_0 - \eta[n] \\
&= \mathbf{x}_1^T[n]\mathbf{p}_1[n] - \mathbf{x}_1^T[n]\mathbf{p}_{01} - \eta[n] \\
&= \mathbf{x}_1^T[n](\mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_{01}) - \eta[n] \\
&= \mathbf{x}_1^T[n]\delta\mathbf{p}_1[n] - \eta[n],
\end{aligned}$$

onde foi definido

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}_1[n] &= \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{p}[n] \\
\mathbf{p}_{01} &= \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{p}_0.
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Igualmente para o caso do parâmetro $\mathbf{p}$, usando (A.5) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n-1] \\
\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{p}[n] &= \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{p}[n-1] + \alpha\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{q}[n-1] \\
\mathbf{p}_1[n] &= \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha\mathbf{q}_1[n-1],
\end{aligned}$$

onde foi definido

$$\mathbf{q}_1[n] = \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{q}[n]. \tag{A.6}$$

Agora, seja definida a matriz

$$\mathbf{D}_1 = \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{D}\mathbf{U}^T\Delta^{-\frac{1}{2}}, \tag{A.7}$$

substituindo em (A.7) as equações (A.1), (A.2) e (A.3) resulta:

$$\begin{aligned}
\mathbf{D}_1 &= \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U} \left(\mathbf{I} - 2\alpha\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n-1]\mathbf{x}^T[n-1]\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3) \right) \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} \\
&= \Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{I}\mathbf{U}^T\Delta^{-\frac{1}{2}} - 2\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2\mathbf{U}^T\Delta^{-\frac{1}{2}} + \\
&\quad - 2\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{U}^T\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{U}^T\Delta^{-\frac{1}{2}} \\
&= \mathbf{I} - 2\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{U}^T\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_2\mathbf{U}^T\Delta^{-\frac{1}{2}} + \\
&\quad - 2\alpha\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{U}^T\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_1\mathbf{U}^T\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{-\frac{1}{2}}\mathbf{U}\mathbf{M}_3\mathbf{U}^T\Delta^{-\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

definindo

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_1 &= \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_1 \mathbf{U}^T \Delta^{\frac{1}{2}} \\ \mathbf{M}'_2 &= \Delta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_2 \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} \\ \mathbf{M}'_3 &= \Delta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_3 \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}},\end{aligned}\tag{A.8}$$

tem-se finalmente

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{I} - 2\alpha \mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2 - 2\alpha \mathbf{M}'_1 \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_3.$$

Por último, para o caso do parâmetro $\mathbf{q}[n]$, e fazendo uso das equações (A.6) e (A.7) tem-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{q}[n] &= \mathbf{D} \mathbf{q}[n-1] - \alpha \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n-1] e[n-1] \\ \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{q}[n] &= \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{D} \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{q}[n-1] - \alpha \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_1 \mathbf{U}^T \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{x}_1[n-1] e[n-1] \\ \mathbf{q}_1[n] &= \mathbf{D}_1 \mathbf{q}_1[n-1] - \alpha \mathbf{M}'_1 \mathbf{x}_1[n-1] e[n-1].\end{aligned}$$

Obtém-se portanto uma forma equivalente de escrever o algoritmo APCM:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_1 &= \mathbf{I} - 2\alpha \mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_2 - 2\alpha \mathbf{M}'_1 \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{M}'_1 \mathbf{M}'_3 \\ \mathbf{q}_1[n] &= \mathbf{D}_1 \mathbf{q}_1[n-1] - \alpha \mathbf{M}'_1 \mathbf{x}_1[n-1] e[n-1] \\ \mathbf{p}_1[n] &= \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{q}_1[n-1] \\ e[n] &= \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] - \eta[n].\end{aligned}\tag{A.9}$$

Partindo das equações (A.8), e considerando $\mathbf{M}_i = m_i \mathbf{I}$, $i = 1, 2, 3$, obtém-se:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}'_1 &= \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_1 \mathbf{U}^T \Delta^{\frac{1}{2}} = m_1 \Delta^{\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \Delta^{\frac{1}{2}} = m_1 \Delta \\ \mathbf{M}'_2 &= \Delta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_2 \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} = m_2 \Delta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} = m_2 \Delta^{-1} \\ \mathbf{M}'_3 &= \Delta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{M}_3 \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} = m_3 \Delta^{-\frac{1}{2}} \mathbf{U} \mathbf{U}^T \Delta^{-\frac{1}{2}} = m_3 \Delta^{-1}.\end{aligned}$$

Utilizando estes resultados, o algoritmo APCM equivalente adquire a forma:

$$\mathbf{D}_1 = \mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} - 2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \quad (\text{A.10a})$$

$$\mathbf{q}_1[n] = \mathbf{D}_1 \mathbf{q}_1[n-1] - \alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] e[n-1] \quad (\text{A.10b})$$

$$\mathbf{p}_1[n] = \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{q}_1[n-1] \quad (\text{A.10c})$$

$$e[n] = \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] - \eta[n]. \quad (\text{A.10d})$$

A.3 Sistema equivalente para análise dos momentos de 1a. e 2a. ordens

Realizar uma análise direta sobre as equações do algoritmo acelerador é um processo difícil e dispendioso. É por isto que surge a idéia de definir uma variável que relacione as equações do algoritmo acelerador de forma a desacoplar este sistema em uma cascata de duas equações que facilitem a sua análise.

Para isso seja definida a variável $\mathbf{r}$ dada por:

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{A} \delta \mathbf{p}_1[n] + \mathbf{B} \mathbf{q}_1[n], \quad (\text{A.11})$$

sendo $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ duas matrizes a serem determinadas. Lembrando que $\delta \mathbf{p}_1[n] = \mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_{01}$,

e considerando as equações (A.10), $\mathbf{r}[n]$ pode ser escrita como:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}[n] &= \mathbf{A} (\mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_{01}) + \mathbf{B} (\mathbf{D}_1 \mathbf{q}_1[n-1] - \alpha m_1 \Delta \mathbf{x}_1[n-1] e[n-1]) \\
 &= \mathbf{A} \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{A} \mathbf{q}_1[n-1] - \mathbf{A} \mathbf{p}_{01} + \mathbf{B} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathbf{q}_1[n-1] + \\
 &\quad - 2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{q}_1[n-1] + \\
 &\quad - \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \delta \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \eta[n-1] \\
 &= (\mathbf{A} - \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1]) \delta \mathbf{p}_1[n-1] + \\
 &\quad (\alpha \mathbf{A} + \mathbf{B} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) - 2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1]) \mathbf{q}_1[n-1] + \\
 &\quad + \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \eta[n-1] \tag{A.12a}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= (\mathbf{I} - \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{A}^{-1}) \mathbf{A} \delta \mathbf{p}_1[n-1] + \\
 &\quad + (\alpha \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{B} \mathbf{q}_1[n-1] + \\
 &\quad - (2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{B}^{-1}) \mathbf{B} \mathbf{q}_1[n-1] + \\
 &\quad + \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \eta[n-1], \tag{A.12b}
 \end{aligned}$$

onde se assumiu que as matrizes $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$ possuem inversa. Para poder simplificar mais esta equação, iguala-se os fatores que multiplicam $\mathbf{A} \delta \mathbf{p}_1[n-1]$ e $\mathbf{B} \mathbf{q}_1[n-1]$, obtendo-se:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{I} - \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{A}^{-1} &= \alpha \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} + \mathbf{B} \mathbf{I} \mathbf{B}^{-1} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{B} \mathbf{I} \mathbf{B}^{-1} + \\
 &\quad - 2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{B}^{-1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 2\alpha m_1^2 m_3 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{B}^{-1} + \\
 - \alpha m_1 \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{A}^{-1} &= \alpha \mathbf{A} \mathbf{B}^{-1} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}
 \end{aligned}$$

$$\alpha \mathbf{B} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] (2m_1^2 m_3 \mathbf{B}^{-1} - m_1 \mathbf{A}^{-1}) = \alpha \mathbf{A} (\mathbf{B}^{-1} - 2m_1 m_2 \mathbf{A}^{-1})$$

multiplicando-se por $\frac{1}{2m_2}$ e considerando-se $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, o que concorda com o fato de que $\mathbf{B}$

possui inversa, tem-se:

$$\frac{1}{2m_2} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] (2m_1^2 m_3 \mathbf{I} - m_1 \mathbf{A}^{-1}) = \mathbf{A} \left(\frac{1}{2m_2} \mathbf{I} - m_1 \mathbf{A}^{-1} \right),$$

Para poderem ter fatores comuns, os valores entre parênteses devem cumprir com

$$2m_1^2m_3 = \frac{1}{2m_2},$$

fazendo isto obtém-se

$$\frac{1}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \left(\frac{1}{2m_2} \mathbf{I} - m_1 \mathbf{A}^{-1} \right) = \mathbf{A} \left(\frac{1}{2m_2} \mathbf{I} - m_1 \mathbf{A}^{-1} \right),$$

de onde para que esta igualdade tenha sentido, dado que o termo $\mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1]$ é singular, e que a igualdade deve ser satisfeita para todo $x_1[n-1]$, deve-se cumprir que

$$\frac{1}{2m_2} \mathbf{I} - m_1 \mathbf{A}^{-1} = 0$$

ou seja

$$\mathbf{A} = 2m_1m_2\mathbf{I}.$$

Portanto a variável $\mathbf{r}[n]$ definida na equação (A.11) é da forma:

$$\mathbf{r}[n] = 2m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n] + \mathbf{q}_1[n]. \quad (\text{A.13})$$

Estes resultados são aplicados na equação (A.12a):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] &= 2m_1m_2 \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha m_1}{2m_1m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \delta\mathbf{p}_1[n-1] + \\ &\quad + \left(\mathbf{I} - \frac{2\alpha m_1^2m_3}{4m_1^2m_3m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \mathbf{q}_1[n-1] + \\ &\quad + \alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \eta[n-1] \\ &= 2m_1m_2 \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \delta\mathbf{p}_1[n-1] + \\ &\quad + \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \mathbf{q}_1[n-1] + \alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \eta[n-1] \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) (\mathbf{A} \delta\mathbf{p}_1[n-1] + \mathbf{q}_1[n-1]) + \\ &\quad - \alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \eta[n-1] \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \mathbf{r}[n-1] + \alpha m_1 \mathbf{\Delta x}_1[n-1] \eta[n-1]. \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

onde se observa que $\mathbf{r}[n]$ é atualizada de forma recursiva e independentemente de $\delta\mathbf{p}_1[n-1]$.

Considerando que $\mathbf{r}[n]$ da equação (A.13) pode ser escrita para o instante $n-1$ como:

$$\mathbf{r}[n-1] = 2m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n-1] + \mathbf{q}_1[n-1],$$

obtem-se

$$\mathbf{q}_1[n-1] = \mathbf{r}[n-1] - 2m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n-1],$$

valor que é substituído na equação (A.10c):

$$\mathbf{p}_1[n] = \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha(\mathbf{r}[n-1] - 2m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n-1])$$

subtraindo $\mathbf{p}_{01}$ nos dois lados da igualdade e, lembrando que $\delta\mathbf{p}_1[n] = \mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_{01}$ tem-se,

$$\begin{aligned} \mathbf{p}_1[n] - \mathbf{p}_{01} &= \mathbf{p}_1[n-1] - \mathbf{p}_{01} + \\ &\quad + \alpha(\mathbf{r}[n-1] - 2m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n-1]) \\ \delta\mathbf{p}_1[n] &= \delta\mathbf{p}_1[n-1] + \alpha\mathbf{r}[n-1] - 2\alpha m_1m_2\delta\mathbf{p}_1[n-1] \\ \delta\mathbf{p}_1[n] &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1m_2\mathbf{I})\delta\mathbf{p}_1[n-1] + \alpha\mathbf{r}[n-1]. \end{aligned} \tag{A.15}$$

Observa-se então que a partir das equações do algoritmo acelerador obtido pelo método de Euler progressivo, e fazendo uso da variável $\mathbf{r}[n] = \mathbf{A}\delta\mathbf{p}_1[n] + \mathbf{q}_1[n]$, com $\mathbf{A} = 2m_1m_2\mathbf{I}$ e $\mathbf{B} = \mathbf{I}$, foi obtido um sistema dinâmico triangular onde a variação de parâmetro $\delta\mathbf{p}_1[n]$ é atualizada por $\mathbf{r}[n]$ e, esta por sua vez, é calculada recursivamente utilizando o sinal de entrada e o ruído de medida:

$$\mathbf{r}[n] = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1] \right) \mathbf{r}[n-1] + \alpha m_1 \Delta\mathbf{x}_1[n-1]\eta[n-1] \tag{A.16a}$$

$$\delta\mathbf{p}_1[n] = (\mathbf{I} - 2\alpha m_1m_2\mathbf{I})\delta\mathbf{p}_1[n-1] + \alpha\mathbf{r}[n-1]. \tag{A.16b}$$

Com estas equações pode-se realizar uma análise dos momentos de primeira e segunda ordens de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta\mathbf{p}_1[n]$, semelhante à análise empregada para o cálculo dos momentos do algoritmo LMS (Solo; Kong, 1995; Haykin, 1996). Para isso faz-se uso das seguintes suposições simplificadoras:

- $\mathbf{x}[n]$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média nula com matriz de covariância

$$\mathbf{R}_x = E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\},$$

de maneira que

$$E\{\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_1^T[n]\} = \mathbf{I}$$

para $\mathbf{x}^T[n] = \mathbf{x}_1^T[n]\Delta^{\frac{1}{2}}\mathbf{U}$.

- $\eta[n]$ é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância σ_η^2 e estatisticamente independente de $\mathbf{x}[n]$.

A.4 Análise dos momentos de primeira ordem

Calcula-se os momentos de primeira ordem para o sistema dinâmico dado pelas equações (A.16). Primeiro determina-se a esperança de $\mathbf{r}[n]$. Para seu cálculo faz-se uso da esperança condicional. Observa-se da equação (A.16.a), que ela depende das “histórias” $\mathbf{X}_{1_{n-1}}$ e $\boldsymbol{\eta}_{n-1}$, onde:

$$\mathbf{X}_{1_{n-1}} = \{\mathbf{x}_1[n-1], \mathbf{x}_1[n-2], \dots, \mathbf{x}_1[0]\} \quad (\text{A.17a})$$

e

$$\boldsymbol{\eta}_{n-1} = \{\eta[n-1], \eta[n-2], \dots, \eta[0]\}. \quad (\text{A.17b})$$

Lembrando que de acordo com (A.4) $E\{\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\} = \mathbf{I}$ e que $\mathbf{x}_1[n]$ e $\eta[n]$ são independentes:

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{r}[n]\} &= E\left\{E\left\{\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2}\Delta\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\right)\mathbf{r}[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\right\}\right\} + \\ &\quad + E\{\alpha m_1 \Delta\mathbf{x}_1[n-1]\eta[n-1]\} \\ &= E\left\{E\left\{\left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2}\Delta\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\right) \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\right\}\mathbf{r}[n-1]\right\} + \\ &\quad + E\{\alpha m_1 \Delta\mathbf{x}_1[n-1]\}E\{\eta[n-1]\} \\ &= \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2}\Delta\right)E\{\mathbf{r}[n-1]\}. \end{aligned}$$

Agora determina-se a esperança de $\delta \mathbf{p}_1[n]$, partindo da equação (A.16.b):

$$\begin{aligned} E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \} &= E \{ (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{r}[n-1] \} \\ &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \} - \alpha E \{ \mathbf{r}[n-1] \}. \end{aligned}$$

Portanto, os momentos de primeira ordem de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta \mathbf{p}_1[n]$ satisfazem as equações:

$$E \{ \mathbf{r}[n] \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta} \right) E \{ \mathbf{r}[n-1] \} \quad (\text{A.18})$$

$$E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \} = (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \} + \alpha E \{ \mathbf{r}[n-1] \}. \quad (\text{A.19})$$

Unindo os vetores em um só obtém-se

$$\begin{bmatrix} E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \} \\ E \{ \mathbf{r}[n] \} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) & \frac{\alpha \mathbf{I}}{2m_2} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \} \\ E \{ \mathbf{r}[n-1] \} \end{bmatrix}. \quad (\text{A.20})$$

A partir deste sistema, observa-se que a convergência do algoritmo é governada pelos M autovalores em $1 - 2\alpha m_1 m_2$ e os M autovalores $1 - \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{ii}$, pelo que o algoritmo converge na média se

$$0 < 2\alpha m_1 m_2 < 2$$

e

$$0 < \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{ii} < 2.$$

A.5 Análise dos momentos de segunda ordem

Determina-se agora os momentos de segunda ordem, para isto são definidas as matrizes de covariância

$$\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} \quad (\text{A.21})$$

e

$$\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \}, \quad (\text{A.22})$$

e de covariância cruzada

$$\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \}. \quad (\text{A.23})$$

Avaliação de $\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$

Para calcular $\mathcal{R}[n]$ inicialmente determina-se o produto $\mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n]$, da equação (A.16.a):

$$\begin{aligned}
 &= \left\{ \mathbf{r}[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] + \alpha m_1 \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \eta[n-1] \right\} \cdot \\
 &\quad \cdot \left\{ \mathbf{r}^T[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta + \alpha m_1 \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1] \right\} \\
 &= \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta + \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] + \\
 &\quad + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta + \\
 &\quad + \alpha^2 m_1^2 \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta^2[n-1] + \mathbf{S}[n] + \mathbf{S}^T[n] + \mathbf{T}[n] + \mathbf{T}^T[n],
 \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{S}[n] = \alpha m_1 \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1],$$

e

$$\mathbf{T}[n] = \frac{\alpha^2 m_1}{2m_2} \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1].$$

Para avaliar a esperança destas expressões faz-se uso da esperança condicional, observa-se que $\mathbf{r}[n]$ depende das “histórias” $\mathbf{X}_{1_{n-1}}$ e $\boldsymbol{\eta}_{n-1}$ dadas por (A.17), portanto:

$$\begin{aligned}
 &E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} \\
 &= E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2m_2} E \{ E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + \\
 &\quad - \frac{\alpha}{2m_2} E \{ E \{ \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + \\
 &\quad + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} E \{ E \{ \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + \\
 &\quad + \alpha^2 m_1^2 E \{ \Delta \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta^2[n-1] \} + \\
 &\quad + E \{ E \{ \mathbf{S}[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + E \{ E \{ \mathbf{S}^T[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + \\
 &\quad + E \{ E \{ \mathbf{T}[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + E \{ E \{ \mathbf{T}^T[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E\{\mathbf{r}[n]\mathbf{r}^T[n]\} \\
&= E\{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\} - \frac{\alpha}{2m_2} E\{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\} \Delta + \\
&\quad - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta E\{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\} + \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \Delta E\left\{E\left\{\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1] (\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{x}_1[n-1])^2 \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\right\}\right\} \Delta + \\
&\quad + \alpha^2 m_1^2 \Delta^2 E\{\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\} E\{\eta^2[n-1]\} + \\
&\quad + E\{E\{\mathbf{S}[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} + E\{E\{\mathbf{S}^T[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} + \\
&\quad + E\{E\{\mathbf{T}[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} + E\{E\{\mathbf{T}^T[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\}, \tag{A.24}
\end{aligned}$$

lembrando que $E\{\mathbf{x}_1[n]\mathbf{x}_1^T[n]\} = \mathbf{I}$.

De acordo com Solo; Kong (1995), para um sinal Gaussiano $\mathbf{v}$ de média nula com matriz de covariância $\mathbf{V}_x$ e um vetor fixo constante β , pode-se escrever

$$E\left\{\mathbf{v}\mathbf{v}^T (\beta^T \mathbf{v})^2\right\} = \mathbf{V}_x \beta^T \mathbf{V}_x \beta + 2\mathbf{V}_x \beta \beta^T \mathbf{V}_x, \tag{A.25}$$

aplicando este resultado na equação (A.24), pode-se escrever

$$\begin{aligned}
& E\left\{\mathbf{x}_1[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1] (\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{x}_1[n-1])^2 \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\right\} \\
&= \mathbf{I}\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{I}\mathbf{r}[n-1] + 2\mathbf{I}\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{I}. \tag{A.26}
\end{aligned}$$

Agora, de acordo com as suposições simplificadoras (Seção A.3, pagina 102)

$$\begin{aligned}
& E\{E\{\mathbf{S}[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} \\
&= \alpha m_1 E\{E\{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{x}_1^T[n-1]\eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} \Delta \\
&= \alpha m_1 E\{\mathbf{r}[n-1]E\{\mathbf{x}_1^T[n-1]\eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} \Delta \\
&= \alpha m_1 E\{\mathbf{r}[n-1]E\{\mathbf{x}_1^T[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\} E\{\eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}\boldsymbol{\eta}_{n-2}\}\} \Delta \\
&= \mathbf{0}. \tag{A.27}
\end{aligned}$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
& E \left\{ E \left\{ \mathbf{T}[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \right\} \right\} \\
&= \frac{\alpha^2 m_1}{2m_2} \boldsymbol{\Delta} E \left\{ E \left\{ \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \right\} \right\} \boldsymbol{\Delta} \\
&= \frac{\alpha^2 m_1}{2m_2} \boldsymbol{\Delta} E \left\{ E \left\{ \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \right\} \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot E \left\{ \eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}} \boldsymbol{\eta}_{n-2} \right\} \right\} \boldsymbol{\Delta} \\
&= \mathbf{0}.
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Substituindo-se os resultados obtidos em (A.26) a (A.28) na equação (A.24) e considerando as suposições iniciais, tem-se:

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} &= E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} - \frac{\alpha}{2m_2} E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \boldsymbol{\Delta} + \\
&\quad - \frac{\alpha}{2m_2} \boldsymbol{\Delta} E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \boldsymbol{\Delta} E \{ \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \} \boldsymbol{\Delta} + \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \boldsymbol{\Delta} E \{ 2\mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \boldsymbol{\Delta} + \alpha^2 m_1^2 \boldsymbol{\Delta}^2 \sigma_\eta^2,
\end{aligned}$$

agora

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{r}[n-1] \} &= E \{ \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{I} \mathbf{r}[n-1] \} \\
&= E \{ \text{tr} \{ \mathbf{I} \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \} \\
&= \text{tr} \{ E \{ \mathbf{I} \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \} \\
&= \text{tr} \{ E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \},
\end{aligned}$$

onde $\text{tr}\{\cdot\}$ corresponde ao traço de uma matriz. Portanto, fazendo uso deste resultado e das equações (A.21) a (A.23) obtém-se finalmente:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} \mathcal{R}[n-1] \boldsymbol{\Delta} - \frac{\alpha}{2m_2} \boldsymbol{\Delta} \mathcal{R}[n-1] + \\
&\quad + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \text{tr} \{ \mathcal{R}[n-1] \} \boldsymbol{\Delta}^2 + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \boldsymbol{\Delta} \mathcal{R}[n-1] \boldsymbol{\Delta} + \alpha^2 m_1^2 \boldsymbol{\Delta}^2 \sigma_\eta^2
\end{aligned}$$

Avaliação de $\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \}$

Fazendo uso das equações (A.16) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 & \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \\
 &= \{ (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{r}[n-1] \} \cdot \\
 & \quad \cdot \left\{ \mathbf{r}^T[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta + \alpha m_1 \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1] \right\} \\
 &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] + \\
 & \quad - \frac{\alpha}{2m_2} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta + \\
 & \quad + \alpha m_1 (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1] + \\
 & \quad + \alpha \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] + \\
 & \quad - \frac{\alpha^2}{2m_2} \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta + \\
 & \quad + \alpha^2 m_1 \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1],
 \end{aligned}$$

para avaliar esta expressão faz-se novamente uso da esperança condicional, portanto

$$\begin{aligned}
 & E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \} \\
 &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
 & \quad - \frac{\alpha}{2m_2} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \cdot \\
 & \quad \cdot E \{ E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} \Delta + \\
 & \quad + \alpha m_1 (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + \\
 & \quad + \alpha E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
 & \quad - \frac{\alpha^2}{2m_2} E \{ E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} \Delta + \\
 & \quad + \alpha^2 m_1 E \{ E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \} \\
&= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
&\quad - \frac{\alpha}{2m_2} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \Delta + \\
&\quad - \alpha m_1 (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \cdot \\
&\quad \cdot E \{ E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} E \{ \eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \} + \\
&\quad + \alpha E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
&\quad - \frac{\alpha^2}{2m_2} E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \Delta + \\
&\quad - \alpha^2 m_1 E \{ E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}_1^T[n-1] \Delta \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} E \{ \eta[n-1] \mid \mathbf{X}_{1_{n-2}}, \boldsymbol{\eta}_{n-2} \} \}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \} &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
&\quad - \frac{\alpha}{2m_2} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \Delta + \\
&\quad + \alpha E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} - \frac{\alpha^2}{2m_2} E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \Delta,
\end{aligned}$$

lembrando que $E \{ \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \} = \mathbf{I}$, e $E \{ \eta[n] \} = 0$. Fazendo uso das equações (A.21) e (A.23) obtém-se:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\mathcal{V}}[n] &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\mathcal{V}}[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2} (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \boldsymbol{\mathcal{V}}[n-1] \Delta + \\
&\quad + \alpha \boldsymbol{\mathcal{R}}[n-1] - \frac{\alpha^2}{2m_2} \boldsymbol{\mathcal{R}}[n-1] \Delta,
\end{aligned}$$

portanto pode-se escrever:

$$\boldsymbol{\mathcal{V}}[n] = \boldsymbol{\mathcal{V}}[n-1] \left(\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta + \alpha^2 m_1 \Delta \right) + \boldsymbol{\mathcal{R}}[n-1] \left(\alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \Delta \right).$$

Avaliação de $\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \}$

Fazendo uso das equações (A.16) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] &= ((\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] + \alpha \mathbf{r}[n-1]) \cdot \\
 &\quad \cdot ((\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1^T[n-1] + \alpha \mathbf{r}^T[n-1]) \\
 &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I})^2 \delta \mathbf{p}_1[n-1] \delta \mathbf{p}_1^T[n-1] + \\
 &\quad + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] + \\
 &\quad + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathbf{r}[n-1] \delta \mathbf{p}_1^T[n-1] \\
 &\quad + \alpha^2 \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1].
 \end{aligned}$$

Agora determina-se $E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \}$,

$$\begin{aligned}
 E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \} &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I})^2 E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \delta \mathbf{p}_1^T[n-1] \} + \\
 &\quad + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \delta \mathbf{p}_1[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
 &\quad + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) E \{ \mathbf{r}[n-1] \delta \mathbf{p}_1^T[n-1] \} + \\
 &\quad + \alpha^2 E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \},
 \end{aligned}$$

fazendo uso das equações (A.21) a (A.23) obtém-se:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{P}[n] &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I})^2 \mathcal{P}[n-1] + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}[n-1] + \\
 &\quad + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}^T[n-1] + \alpha^2 \mathcal{R}[n-1].
 \end{aligned}$$

Avaliação de $E \{ e^2[n] \}$

Para calcular $E \{ e^2[n] \}$ inicialmente determina-se o produto $e^2[n]$, da equação (A.9)

$$\begin{aligned}
 e^2[n] &= (\mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] + \eta[n]) (\mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] + \eta[n])^T \\
 &= \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \mathbf{x}_1[n] + \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] \eta[n] + \\
 &\quad + \delta \mathbf{p}_1^T[n] \mathbf{x}_1[n] \eta[n] + \eta^2[n].
 \end{aligned}$$

Para determinar $E \{ e^2[n] \}$ observe-se que $e[n]$ depende das “histórias” $\mathbf{X}_{1_n}$ e $\boldsymbol{\eta}_n$ pelo que faz-se uso da esperança condicional:

$$\begin{aligned}
E \{e^2[n]\} &= E \left\{ \left(\mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] + \eta[n] \right) \left(\mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] + \eta[n] \right)^T \right\} \\
&= E \left\{ E \left\{ \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \mathbf{x}_1[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} + \\
&\quad + E \left\{ E \left\{ \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] \eta[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} + \\
&\quad + E \left\{ E \left\{ \delta \mathbf{p}_1^T[n] \mathbf{x}_1[n] \eta[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} + E \{ \eta^2[n] \} \\
&= E \left\{ E \left\{ \text{tr} \left\{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} \right\} + \\
&\quad + E \left\{ E \left\{ \mathbf{x}_1^T[n] \delta \mathbf{p}_1[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} E \left\{ \eta[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} + \\
&\quad + E \left\{ E \left\{ \delta \mathbf{p}_1^T[n] \mathbf{x}_1[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} E \left\{ \eta[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} + \\
&\quad + \sigma_n^2 \\
&= E \left\{ \text{tr} \left\{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] E \left\{ \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \mid \mathbf{X}_{1_{n-1}}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \right\} \right\} + \sigma_n^2 \\
&= E \left\{ \text{tr} \left\{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \right\} \right\} + \sigma_n^2,
\end{aligned}$$

lembrando que $E \{ \mathbf{x}_1[n] \mathbf{x}_1^T[n] \} = \mathbf{I}$ e o erro de medida é ruído branco Gaussiano de media nula. Finalmente, de acordo com a equação (A.22) obtém-se:

$$\begin{aligned}
E \{e^2[n]\} &= \text{tr} \left\{ E \left\{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \right\} \right\} + \sigma_n^2 \\
&= \text{tr} \{ \mathcal{P}[n] \} + \sigma_n^2
\end{aligned}$$

Resumindo, as matrizes de covariância $\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$ e $\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \delta \mathbf{p}_1^T[n] \}$, de covariância cruzada $\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}_1[n] \mathbf{r}^T[n] \}$ e $E \{ e^2[n] \}$ satisfazem:

$$\begin{aligned}\mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha}{2m_2}\mathcal{R}[n-1]\Delta - \frac{\alpha}{2m_2}\Delta\mathcal{R}[n-1] + \\ &+ \frac{\alpha^2}{4m_2^2}tr\{\mathcal{R}[n-1]\}\Delta^2 + \frac{\alpha^2}{2m_2^2}\Delta\mathcal{R}[n-1]\Delta + \alpha^2m_1^2\Delta^2\sigma_\eta^2\end{aligned}\quad (\text{A.29a})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{V}[n] &= \mathcal{V}[n-1] \left(\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \Delta + \alpha^2 m_1 \Delta \right) + \\ &+ \mathcal{R}[n-1] \left(\alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \Delta \right)\end{aligned}\quad (\text{A.29b})$$

$$\begin{aligned}\mathcal{P}[n] &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I})^2 \mathcal{P}[n-1] + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}[n-1] + \\ &+ \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I}) \mathcal{V}^T[n-1] + \alpha^2 \mathcal{R}[n-1]\end{aligned}\quad (\text{A.29c})$$

$$E\{e^2[n]\} = tr\{\mathcal{P}[n]\} + \sigma_n^2. \quad (\text{A.29d})$$

Vão ser considerados agora os elementos das diagonais destas equações, já que apenas estes termos influem no cálculo de $E\{e^2[n]\}$. Lembre também que, como $\mathcal{R}[n]$, $\mathcal{P}[n]$ e

$$\begin{bmatrix} \mathcal{R}[n] & \mathcal{V}[n] \\ \mathcal{V}^T[n] & \mathcal{P}[n] \end{bmatrix}$$

são positivas-definidas, a estabilidade das recursões acima é garantida pela estabilidade das recursões para os termos das diagonais.

Da equação (A.29a) os termos da diagonal da matriz $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}_{kk}$ onde $1 \leq k \leq M$, cumprem com

$$\begin{aligned}\mathcal{R}_{kk}[n] &= \mathcal{R}_{kk}[n-1] - \frac{\alpha}{m_2}\mathcal{R}_{kk}[n-1]\lambda_{kk} + \\ &+ \frac{\alpha^2}{4m_2^2}\lambda_{kk}^2 [\mathcal{R}_{11}[n-1] + \dots + \mathcal{R}_{MM}[n-1]] + \\ &+ \frac{\alpha^2}{2m_2^2}\lambda_{kk}^2 \mathcal{R}_{kk}[n-1] + \alpha^2 m_1^2 \lambda_{kk}^2 \sigma_n^2\end{aligned}$$

escrevendo todos os elementos $\mathcal{R}_{kk}[n]$, para $1 \leq k \leq M$, em forma vetorial (por conveniência e para não confundir com a notação da matriz utiliza-se o sublinhado para denotar um vetor) tem-se

$$\underline{\mathcal{R}}[n] = \mathbf{H}\underline{\mathcal{R}}[n-1] + \frac{\alpha^2}{4m_2^2}\mathbf{B} + \alpha^2 m_1^2 \underline{\Delta}\underline{\Delta}\sigma_\eta^2 \quad (\text{A.30})$$

onde

$$\begin{aligned}\underline{\mathcal{R}}[n] &= \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}[n] & \cdots & \mathcal{R}_{MM}[n] \end{bmatrix}^T, \\ \underline{\Delta} &= \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \cdots & \lambda_{MM} \end{bmatrix}^T, \\ \mathbf{H} &= \begin{bmatrix} 1 - \frac{\alpha}{m_2}\lambda_{11} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2}\lambda_{11}^2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & \ddots & \\ \vdots & & & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 1 - \frac{\alpha}{m_2}\lambda_{MM} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2}\lambda_{MM}^2 \end{bmatrix}\end{aligned}$$

a qual pode-se escrever como

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - \frac{\alpha}{m_2}\underline{\Delta} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2}\underline{\Delta}^2, \quad (\text{A.31})$$

e,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 [\mathcal{R}_{11}[n-1] + \cdots + \mathcal{R}_{MM}[n-1]] \\ \vdots \\ \lambda_{MM}^2 [\mathcal{R}_{11}[n-1] + \cdots + \mathcal{R}_{MM}[n-1]] \end{bmatrix}$$

que pode-se simplificar da seguinte forma:

$$\begin{aligned}\mathbf{B} &= \begin{bmatrix} \lambda_{11}^2 \\ \vdots \\ \lambda_{MM}^2 \end{bmatrix} \varpi^T \begin{bmatrix} \mathcal{R}_{11}[n-1] \\ \vdots \\ \mathcal{R}_{MM}[n-1] \end{bmatrix} \\ &= \underline{\Delta}\underline{\Delta}\varpi^T \underline{\mathcal{R}}[n-1]\end{aligned} \quad (\text{A.32})$$

onde ϖ é um vetor columna de uns de tamanho M :

$$\varpi = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}^T}_M.$$

Substituindo as equações (A.31) e (A.32) em (A.30) tem-se finalmente

$$\underline{\mathcal{R}}[n] = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{m_2}\underline{\Delta} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2}\underline{\Delta}^2 + \frac{\alpha^2}{4m_2^2}\underline{\Delta}\underline{\Delta}\varpi^T \right) \underline{\mathcal{R}}[n-1] + \alpha^2 m_1^2 \underline{\Delta}\underline{\Delta}\sigma_\eta^2. \quad (\text{A.33})$$

Agora, da equação (A.29b) os termos da diagonal da matriz $\mathcal{V}$, $\mathcal{V}_{kk}$ onde $1 \leq k \leq M$,

cumprem com

$$\mathcal{V}_{kk}[n] = (1 - 2\alpha m_1 m_2) \left(1 - \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{kk}\right) \mathcal{V}_{kk}[n-1] + \left(\alpha - \frac{\alpha^2}{2m_2} \lambda_{kk}\right) \mathcal{R}_{kk}[n-1]$$

escrevendo todos os elementos $\mathcal{V}_{kk}[n]$, para $1 \leq k \leq M$ em forma vetorial tem-se

$$\underline{\mathcal{V}}[n] = (1 - 2\alpha m_1 m_2) \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \underline{\Delta}\right) \underline{\mathcal{V}}[n-1] + \left(\alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \underline{\Delta}\right) \underline{\mathcal{R}}[n-1] \quad (\text{A.34})$$

onde

$$\underline{\mathcal{V}}[n] = \begin{bmatrix} \mathcal{V}_{11}[n] & \cdots & \mathcal{V}_{MM}[n] \end{bmatrix}^T.$$

Finalmente, da equação (A.29c) os termos da diagonal da matriz $\mathcal{P}$, $\mathcal{P}_{kk}$ onde $1 \leq k \leq M$, cumprem com

$$\mathcal{P}_{kk}[n] = (1 - 2\alpha m_1 m_2)^2 \mathcal{P}_{kk}[n-1] + 2\alpha(1 - 2\alpha m_1 m_2) \mathcal{V}_{kk}[n-1] + \alpha^2 \mathcal{R}_{kk}[n-1]$$

de onde escrevendo os elementos $\mathcal{P}_{kk}[n]$, para $1 \leq k \leq M$, em forma vetorial tem-se

$$\underline{\mathcal{P}}[n] = (1 - 2\alpha m_1 m_2)^2 \underline{\mathcal{P}}[n-1] + 2\alpha(1 - 2\alpha m_1 m_2) \underline{\mathcal{V}}[n-1] + \alpha^2 \underline{\mathcal{R}}[n-1], \quad (\text{A.35})$$

em que

$$\underline{\mathcal{P}}[n] = \begin{bmatrix} \mathcal{P}_{11}[n] & \cdots & \mathcal{P}_{MM}[n] \end{bmatrix}^T.$$

As equações (A.33), (A.34) e (A.35) podem ser escritas no sistema

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}[n] \\ \underline{\mathcal{V}}[n] \\ \underline{\mathcal{R}}[n] \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \underline{\mathcal{P}}[n-1] \\ \underline{\mathcal{V}}[n-1] \\ \underline{\mathcal{R}}[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{0}} \\ \underline{\mathbf{0}} \\ \alpha^2 m_1^2 \underline{\Delta} \underline{\Delta} \end{bmatrix} \sigma_\eta^2$$

onde $\mathbf{K}$ é definida por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \vartheta^2 \mathbf{I} & 2\alpha \vartheta \mathbf{I} & \alpha^2 \mathbf{I} \\ \mathbf{0} & \vartheta \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \underline{\Delta}\right) & \alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \underline{\Delta} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha}{m_2} \underline{\Delta} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \underline{\Delta}^2 + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \underline{\Delta} \underline{\Delta} \varpi^T \end{bmatrix},$$

sendo

$$\vartheta = 1 - 2\alpha m_1 m_2.$$

Portanto a taxa de convergência é dada pelos autovalores

$$(1 - 2\alpha m_1 m_2)^2,$$

$$(1 - 2\alpha m_1 m_2) \left(1 - \frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{kk}\right)$$

e, os autovalores de

$$\mathbf{I} - \frac{\alpha}{m_2} \underline{\Delta} + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \underline{\Delta}^2 + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \underline{\Delta} \underline{\Delta} \varpi^T,$$

o que permite notar que o algoritmo será estável se $2\alpha m_1 m_2$ e $\frac{\alpha}{2m_2} \lambda_{kk}$ forem suficientemente pequenos.

A.6 Análise na convergência

Considerando $n \rightarrow \infty$ obtém-se importante informação relacionada com o sistema após a convergência. Analisando inicialmente o caso da matriz $\mathcal{R}[n]$ dada pela equação (A.29a), vê-se que quando $n \rightarrow \infty$, esta satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\infty] &= \mathcal{R}[\infty] - \frac{\alpha}{2m_2} R[\infty] \underline{\Delta} - \frac{\alpha}{2m_2} \underline{\Delta} \mathcal{R}[\infty] + \\ &+ \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \text{tr} \{ \mathcal{R}[\infty] \} \underline{\Delta}^2 + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \underline{\Delta} \mathcal{R}[\infty] \underline{\Delta} + \alpha^2 m_1^2 \underline{\Delta}^2 \sigma_\eta^2. \end{aligned}$$

Considerando-se os elementos da diagonal das matrizes, ou seja os elementos de índice ii (c_{ii} para $\mathcal{R}[\infty]$ e λ_{ii} para a matriz $\underline{\Delta}$), para $i = 1, \dots, M$, pode-se escrever:

$$0 = -\frac{\alpha}{m_2} c_{ii} \lambda_{ii} + \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \text{tr} \{ \mathcal{R}[\infty] \} \lambda_{ii}^2 + \frac{\alpha^2}{2m_2^2} c_{ii} \lambda_{ii}^2 + \alpha^2 m_1^2 \lambda_{ii}^2 \sigma_\eta^2,$$

e fazendo $\xi = \text{tr} \{ \mathcal{R}[\infty] \} = \sum_{i=1}^M c_{ii}$ tem-se

$$\left(\frac{\alpha}{m_2} \lambda_{ii} - \frac{\alpha^2}{2m_2^2} \lambda_{ii}^2 \right) c_{ii} = \frac{\alpha^2}{4m_2^2} \xi \lambda_{ii}^2 + \alpha^2 m_1^2 \lambda_{ii}^2 \sigma_\eta^2,$$

$$c_{ii} = \left(\frac{2\alpha m_2^2 \lambda_{ii}}{2m_2 - \alpha \lambda_{ii}} \right) \left(\frac{1}{4m_2^2} \xi + m_1^2 \sigma_\eta^2 \right). \quad (\text{A.36})$$

Somando todos os c_{ii} ($i = 1, \dots, M$) definidos pela equação anterior pode-se escrever

$$\sum_{i=1}^M c_{ii} = \xi \sum_{i=1}^M \frac{\alpha \lambda_{ii}}{2(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} + 2m_1^2 m_2^2 \sum_{i=1}^M \frac{\alpha \lambda_{ii}}{2m_2 - \alpha \lambda_{ii}} \sigma_\eta^2,$$

onde definindo

$$\mu_a = \frac{\alpha}{2m_2}, \quad (\text{A.37})$$

tem-se

$$\xi = \xi \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} + 4m_1^2 m_2^2 \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \sigma_\eta^2.$$

Definindo

$$\rho_a = \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})}, \quad (\text{A.38})$$

a equação anterior fica

$$\xi = \rho_a \xi + 4m_1^2 m_2^2 \rho_a \sigma_\eta^2,$$

de onde finalmente, pondo ξ em evidência:

$$\xi = \frac{4m_1^2 m_2^2 \rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2. \quad (\text{A.39})$$

Analisando o caso da matriz $\mathbf{V}[n]$ dada pela equação (A.29b), observa-se que para $n \rightarrow \infty$, esta satisfaz

$$\mathbf{V}[\infty] = \mathbf{V}[\infty] \left(\mathbf{I} - 2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} - \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta} + \alpha^2 m_1 \mathbf{\Delta} \right) + \mathbf{R}[\infty] \left(\alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \mathbf{\Delta} \right),$$

de onde

$$\mathbf{V}[\infty] \left(2\alpha m_1 m_2 \mathbf{I} + \frac{\alpha}{2m_2} \mathbf{\Delta} - \alpha^2 m_1 \mathbf{\Delta} \right) = \mathbf{R}[\infty] \left(\alpha \mathbf{I} - \frac{\alpha^2}{2m_2} \mathbf{\Delta} \right).$$

Considerando-se os elementos da diagonal, ou seja os elementos de índice ii (v_{ii} para $\mathbf{V}[\infty]$), para $i = 1, \dots, M$, tem-se:

$$v_{ii} \left(\frac{4\alpha m_1 m_2^2 + \alpha \lambda_{ii} - 2\alpha^2 m_1 m_2 \lambda_{ii}}{2m_2} \right) = \left(\frac{2m_2 \alpha - \alpha^2 \lambda_{ii}}{2m_2} \right) c_{ii},$$

de onde

$$v_{ii} = \left(\frac{2m_2 - \alpha \lambda_{ii}}{4m_1 m_2^2 + \lambda_{ii} - 2\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}} \right) c_{ii}. \quad (\text{A.40})$$

Substituindo-se nesta equação a equação (A.36) tem-se

$$\begin{aligned}
 v_{ii} &= \left(\frac{2m_2 - \alpha\lambda_{ii}}{4m_1m_2^2 + \lambda_{ii} - 2\alpha m_1m_2\lambda_{ii}} \right) \left(\frac{2\alpha m_2^2\lambda_{ii}}{2m_2 - \alpha\lambda_{ii}} \right) \left(\frac{1}{4m_2^2} \xi + m_1^2 \sigma_\eta^2 \right) \\
 &= \left(\frac{2\alpha m_2^2\lambda_{ii}}{4m_1m_2^2 + \lambda_{ii} - 2\alpha m_1m_2\lambda_{ii}} \right) \left(\frac{1}{4m_2^2} \xi + m_1^2 \sigma_\eta^2 \right) \\
 &= \frac{\alpha\lambda_{ii}}{2a_{ii}} \xi + \frac{2\alpha m_1^2 m_2^2 \lambda_{ii}}{a_{ii}} \sigma_\eta^2,
 \end{aligned} \tag{A.41}$$

onde

$$a_{ii} = 4m_1m_2^2 + \lambda_{ii} - 2\alpha m_1m_2\lambda_{ii}. \tag{A.42}$$

Determina-se agora o que acontece com a matriz $\mathbf{P}[\infty]$, dada pela equação (A.29c), quando $n \rightarrow \infty$,

$$\begin{aligned}
 \mathbf{P}[\infty] &= (\mathbf{I} - 2\alpha m_1m_2\mathbf{I})^2 \mathbf{P}[\infty] + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1m_2\mathbf{I}) \mathbf{V}[\infty] + \\
 &\quad + \alpha (\mathbf{I} - 2\alpha m_1m_2\mathbf{I}) \mathbf{V}^T[\infty] + \alpha^2 \mathbf{R}[\infty].
 \end{aligned}$$

Considerando os elementos da diagonal (p_{ii} para $\mathbf{P}[\infty]$, c_{ii} para $\mathbf{R}[\infty]$ e v_{ii} para $\mathbf{V}[\infty]$) tem-se

$$p_{ii} = (1 - 2\alpha m_1m_2)^2 p_{ii} + 2\alpha (1 - 2\alpha m_1m_2) v_{ii} + \alpha^2 c_{ii},$$

simplificando e fatorando elementos comuns obtém-se

$$(4\alpha m_1m_2 - 4\alpha^2 m_1^2 m_2^2) p_{ii} = 2\alpha (1 - 2\alpha m_1m_2) v_{ii} + \alpha^2 c_{ii},$$

$$p_{ii} = \frac{2(1 - 2\alpha m_1m_2) v_{ii} + \alpha c_{ii}}{4m_1m_2(1 - \alpha m_1m_2)},$$

substituindo c_{ii} e v_{ii} dados pelas equações (A.36) e (A.41) respectivamente tem-se:

$$\begin{aligned}
p_{ii} &= \frac{(1 - 2\alpha m_1 m_2)}{2m_1 m_2 (1 - \alpha m_1 m_2)} \left(\frac{\alpha \lambda_{ii}}{2a_{ii}} \xi + \frac{2\alpha m_1^2 m_2^2 \lambda_{ii}}{a_{ii}} \sigma_\eta^2 \right) \\
&\quad + \frac{2\alpha^2 m_2^2 \lambda_{ii}}{4m_1 m_2 (1 - \alpha m_1 m_2) (2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \left(\frac{1}{4m_2^2} \xi + m_1^2 \sigma_\eta^2 \right) \\
&= \left(\frac{(1 - 2\alpha m_1 m_2) \alpha \lambda_{ii}}{4m_1 m_2 (1 - \alpha m_1 m_2) a_{ii}} + \frac{\alpha^2 \lambda_{ii}}{8m_1 m_2 (1 - \alpha m_1 m_2) (2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \xi + \\
&\quad + \left(\frac{(1 - 2\alpha m_1 m_2) \alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}}{(1 - \alpha m_1 m_2) a_{ii}} + \frac{\alpha^2 m_1 m_2 \lambda_{ii}}{2(1 - \alpha m_1 m_2) (2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \sigma_\eta^2 \\
&= \left(\frac{(1 - 2\alpha m_1 m_2)}{a_{ii}} + \frac{\alpha}{2(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \frac{\alpha \lambda_{ii} \xi}{4m_1 m_2 (1 - \alpha m_1 m_2)} + \\
&\quad + \left(\frac{(1 - 2\alpha m_1 m_2)}{a_{ii}} + \frac{\alpha}{2(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \frac{\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}}{(1 - \alpha m_1 m_2)} \sigma_\eta^2,
\end{aligned}$$

analisando o fator comum desta equação e fazendo uso da equação (A.42),

$$\begin{aligned}
&\frac{(1 - 2\alpha m_1 m_2)}{a_{ii}} + \frac{\alpha}{2(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \\
&= \frac{2(1 - 2\alpha m_1 m_2)(2m_2 - \alpha \lambda_{ii}) + \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \\
&= \frac{2(2m_2 - 4\alpha m_1 m_2^2 - \alpha \lambda_{ii} + 2\alpha^2 m_1 m_2 \lambda_{ii}) + \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \\
&= \frac{2(2m_2 - \alpha(4m_1 m_2^2 + \lambda_{ii} - 2\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii})) + \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \\
&= \frac{4m_2 - 2\alpha a_{ii} + \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \\
&= \frac{4m_2 - \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})}
\end{aligned}$$

portanto substituindo este valor na expressão para p_{ii} obtém-se

$$\begin{aligned}
p_{ii} &= \left(\frac{4m_2 - \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \frac{\alpha \lambda_{ii}}{4m_1 m_2 (1 - \alpha m_1 m_2)} \xi + \\
&\quad + \left(\frac{4m_2 - \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \frac{\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}}{(1 - \alpha m_1 m_2)} \sigma_\eta^2,
\end{aligned}$$

fazendo uso do resultado obtido na equação (A.39),

$$\begin{aligned}
 p_{ii} &= \left(\frac{4m_2 - \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \left(\frac{\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}}{1 - \alpha m_1 m_2} \right) \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2 + \\
 &\quad + \left(\frac{4m_2 - \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \frac{\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}}{(1 - \alpha m_1 m_2)} \sigma_\eta^2, \\
 &= \left(\frac{4m_2 - \alpha a_{ii}}{2a_{ii}(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \right) \left(\frac{\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii}}{1 - \alpha m_1 m_2} \right) \left(\frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + 1 \right) \sigma_\eta^2 \\
 &= \frac{\alpha m_1 m_2 (4m_2 - \alpha a_{ii}) \lambda_{ii}}{2a_{ii}(1 - \alpha m_1 m_2)(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \left(\frac{1}{1 - \rho_a} \right) \sigma_\eta^2
 \end{aligned}$$

de onde finalmente

$$p_{ii} = \frac{\alpha m_1 m_2 (4m_2 - \alpha a_{ii}) \lambda_{ii}}{2(1 - \alpha m_1 m_2) a_{ii} (2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \left(\frac{1}{1 - \rho_a} \right) \sigma_\eta^2. \quad (\text{A.43})$$

Para finalizar, analisa-se o que acontece com $E\{e^2[n]\}$ quando $n \rightarrow \infty$. Então considerando a equação (A.29d),

$$E\{e^2[n]\} = \text{tr}\{\mathcal{P}[n]\} + \sigma_\eta^2$$

tem-se, de acordo com a definição do traço de uma matriz

$$E\{e^2[n]\} = \sum_{i=1}^M p_{ii} + \sigma_\eta^2,$$

portanto, substituindo nesta equação o resultado obtido na equação (A.43), tem-se:

$$\begin{aligned}
 E\{e^2[n]\} &= \sigma_\eta^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\alpha m_1 m_2 (4m_2 - \alpha a_{ii}) \lambda_{ii}}{2(1 - \alpha m_1 m_2) a_{ii} (2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \left(\frac{1}{1 - \rho_a} \right) \sigma_\eta^2 \\
 &= \sigma_\eta^2 - \frac{\alpha m_1 m_2}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sum_{i=1}^M \frac{\alpha \lambda_{ii}}{2(2m_2 - \alpha \lambda_{ii})} \sigma_\eta^2 + \\
 &\quad + \frac{4m_1 m_2^2}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sum_{i=1}^M \frac{\alpha \lambda_{ii}}{2(2m_2 - \alpha \lambda_{ii}) a_{ii}} \sigma_\eta^2
 \end{aligned} \quad (\text{A.44})$$

fazendo uso das definições dadas pelas equações (A.37) e (A.38):

$$\begin{aligned}
 E \{e^2 [n]\} &= \sigma_\eta^2 - \frac{\alpha m_1 m_2}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \sigma_\eta^2 + \\
 &\quad + \frac{4m_1 m_2^2}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) a_{ii}} \sigma_\eta^2 \\
 &= \sigma_\eta^2 - \frac{\alpha m_1 m_2 \rho_a}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sigma_\eta^2 + \\
 &\quad + \frac{4m_1 m_2^2}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) a_{ii}} \sigma_\eta^2.
 \end{aligned}$$

Agora, a_{ii} , definida na equação (A.42), pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 a_{ii} &= \lambda_{ii} - 2\alpha m_1 m_2 \lambda_{ii} + 4m_1 m_2^2 \\
 &= 4m_1 m_2^2 \left[\lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1 \right],
 \end{aligned}$$

pelo que a equação (A.44) pode ser escrita como

$$\begin{aligned}
 E \{e^2 [n]\} &= \sigma_\eta^2 - \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \left[\frac{\alpha m_1 m_2}{1 - \alpha m_1 m_2} \right] \sigma_\eta^2 + \\
 &\quad + \frac{1}{(1 - \alpha m_1 m_2)(1 - \rho_a)} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) \left[\lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1 \right]} \sigma_\eta^2.
 \end{aligned} \tag{A.45}$$

Analisando-se

$$\lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1$$

observa-se que de acordo com a equação (A.20), para que o sistema seja convergente

$$-1 < 1 - 2\alpha m_1 m_2 < 1, \tag{A.46}$$

tem-se além disso, que α , m_1 e m_2 são valores positivos, então se escolhermos $0 < 1 - 2\alpha m_1 m_2 < 1$, então

$$\begin{aligned}
 0 &< \lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) \\
 1 &< 1 + \lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right)
 \end{aligned}$$

dado que os autovalores da matriz são positivos. Portanto

$$\left[1 + \lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) \right]^{-1} < 1,$$

ou seja

$$\frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) \left[\lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1 \right]} < \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})}.$$

Aplicando o somatório nos dois lados e considerando a definição (A.38), tem-se:

$$\sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) \left[\lambda_{ii} \left(\frac{1 - 2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1 \right]} < \rho_a,$$

portanto na equação (A.45):

$$E \{e^2[n]\} < \sigma_\eta^2 - \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \left[\frac{\alpha m_1 m_2}{1 - \alpha m_1 m_2} \right] \sigma_\eta^2 + \frac{\rho_a}{(1 - \rho_a)(1 - \alpha m_1 m_2)} \sigma_\eta^2.$$

Fatorando termos semelhantes:

$$\begin{aligned} E \{e^2[n]\} &< \sigma_\eta^2 - \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \left[\frac{\alpha m_1 m_2}{1 - \alpha m_1 m_2} - \frac{1}{1 - \alpha m_1 m_2} \right] \sigma_\eta^2 \\ E \{e^2[n]\} &< \sigma_\eta^2 + \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2. \end{aligned} \tag{A.47}$$

Este resultado é bastante interessante, pois permite uma comparação simples com o desajuste obtido por Solo; Kong (1995) para o caso do algoritmo LMS. O resultado apresentado por Solo; Kong (1995) é

$$\mathcal{M} = \frac{\rho}{1 - \rho},$$

onde

$$\rho = \sum_{i=1}^M \frac{\mu \lambda_{ii}}{2(1 - \mu \lambda_{ii})},$$

sendo μ o passo de adaptação do algoritmo LMS. Assim, pode-se observar que ao considerar-se $\mu = \mu_a = \frac{\alpha}{2m_2}$, ρ_a vai ser igual a ρ , pelo que o lado direito da expressão (A.47) corresponde à esperança do erro quadrático médio do algoritmo LMS. Desta forma, o desajuste do algoritmo acelerador, obtido a partir da expressão (A.45):

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a = & -\frac{\rho_a}{1-\rho_a} \left[\frac{\alpha m_1 m_2}{1-\alpha m_1 m_2} \right] + \\ & + \frac{1}{(1-\rho_a)(1-\alpha m_1 m_2)} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1-\mu_a \lambda_{ii}) \left[\lambda_{ii} \left(\frac{1-2\alpha m_1 m_2}{4m_1 m_2^2} \right) + 1 \right]} \end{aligned}$$

é menor teoricamente que o do algoritmo LMS, caso $\rho_a = \rho$. Esta condição não permite, no entanto, uma comparação precisa entre as velocidades de convergência dos dois algoritmos.

Anexo B

ANÁLISE DE DESAJUSTE PARA O ALGORITMO AR_γ

Na dissertação de Jojoa (1999), foram apresentadas três versões de tempo discreto do algoritmo acelerador. Destas versões a de maior relevância foi aquela gerada pelo método de Euler regressivo. A partir desta versão foram obtidas duas simplificações sendo a mais importante a versão denominada γ . O algoritmo acelerador versão γ é dado pelas seguintes equações:

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n] \quad (\text{B.1a})$$

$$g[n] = \frac{e_a[n] + \gamma \mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \quad (\text{B.1b})$$

$$\mathbf{q}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \left(\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n] \right) \quad (\text{B.1c})$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n]. \quad (\text{B.1d})$$

Considere-se um sistema onde o sinal desejado é dado por

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_o - \eta[n], \quad (\text{B.2})$$

onde $\mathbf{x}[n]$ corresponde ao sinal de entrada (regressor), $\eta[n]$ é ruído de medida e $\mathbf{p}_o$ o valor ótimo dos parâmetros.

Seja $\delta\mathbf{p}[n]$ a variação dos parâmetros com respeito ao valor ótimo:

$$\delta\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o. \quad (\text{B.3})$$

Com estas novas condições a equação (B.1a) pode ser escrita como

$$\begin{aligned} e_a[n] &= \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n] \\ &= \mathbf{x}^T[n](\mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}_o) + \eta[n] \\ &= \mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1] + \eta[n]. \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

B.1 Simplificação do algoritmo $\text{AR}\gamma$

Realizar uma análise direta sobre as equações do algoritmo $\text{AR}\gamma$ é um processo difícil e dispendioso. É por isto que surge a idéia de definir uma variável que relacione as equações do algoritmo acelerador de forma a desacoplar este sistema de em uma cascata de duas equações de primeira ordem que mantenham as características originais do algoritmo acelerador. Seja então introduzida a variável

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{A}\delta\mathbf{p}[n] + \mathbf{B}\mathbf{q}[n], \quad (\text{B.5})$$

na qual fazendo uso de (B.3) e (B.1d) fica

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] &= A(\mathbf{p}[n-1] + \alpha\mathbf{q}[n] - \mathbf{p}_o) + B\mathbf{q}[n] \\ &= A\delta\mathbf{p}[n-1] + (\alpha A + B)\mathbf{q}[n], \end{aligned}$$

substitui-se agora a equação (B.1c):

$$\mathbf{r}[n] = A\delta\mathbf{p}[n-1] + \frac{\gamma(\alpha A + B)}{\alpha + \gamma}\mathbf{q}[n-1] - \frac{\alpha\gamma(\alpha A + B)}{\alpha + \gamma}\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]g[n]. \quad (\text{B.6})$$

Substituindo (B.4) na equação (B.1b) resulta em

$$g[n] = \frac{\mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1] + \eta[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} + \frac{\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}$$

o qual é substituído em (B.6) permitindo escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] = & \left(\mathbf{I} - \left(\frac{\alpha A + B}{A(\alpha + \gamma)} \right) \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) A \delta \mathbf{p}[n-1] + \\ & + \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) B \mathbf{q}[n-1] + \\ & - \left(\frac{\alpha \gamma(\alpha A + B)}{\alpha + \gamma} \right) \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \eta[n] \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

pode-se observar nesta equação que se os fatores que multiplicam $A \delta \mathbf{p}[n-1]$ e $B \mathbf{q}[n-1]$ forem iguais, é possível escrever $\mathbf{r}[n]$ em função de $\mathbf{r}[n-1]$. Então

$$\mathbf{I} - \left(\frac{\alpha A + B}{A(\alpha + \gamma)} \right) \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} = \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right)$$

se

$$1 = \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \quad (\text{B.8})$$

e

$$\frac{\alpha A + B}{A(\alpha + \gamma)} = \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)}. \quad (\text{B.9})$$

Da equação (B.8) tem-se

$$B\alpha + B\gamma = \gamma\alpha A + B\gamma$$

$$B = \gamma A,$$

igual resultado é obtido da equação (B.9), portanto pode-se definir qualquer valor para A ou B . De acordo com isto, e para simplificar os cálculos, define-se

$$A = 1 \quad (\text{B.10})$$

e

$$B = \gamma \quad (\text{B.11})$$

desta forma, a variável a ser utilizada para a simplificação do algoritmo acelerador é da forma

$$\mathbf{r}[n] = \delta \mathbf{p}[n] + \gamma \mathbf{q}[n]. \quad (\text{B.12})$$

Agora, substituindo os valores de A e B em (B.7) obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] &= \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \delta\mathbf{p}[n-1] + \\ &+ \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \gamma\mathbf{q}[n-1] + \\ &- \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n], \end{aligned} \quad (\text{B.13})$$

definindo

$$\mathbf{\Gamma}[n] = \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \quad (\text{B.14})$$

e fazendo uso de (B.14) a equação (B.13) fica da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] &= \mathbf{\Gamma}[n]\delta\mathbf{p}[n-1] + \mathbf{\Gamma}[n]\gamma\mathbf{q}[n-1] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n] \\ &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n] \end{aligned} \quad (\text{B.15})$$

Para deixar o segundo termo também em função de $\mathbf{\Gamma}[n]$ pode-se escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1(\mathbf{x}^T[n])^T}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n] \\ &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] + \\ &\quad - \alpha\gamma\eta[n]\mathbf{M}_1 \left[\frac{\mathbf{x}^T[n] + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] - \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right]^T \\ &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] + \\ &\quad - \alpha\gamma\eta[n]\mathbf{M}_1 \left[\frac{(1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n])\mathbf{x}^T[n] - \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right]^T \\ &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \alpha\gamma\eta[n]\mathbf{M}_1 \left[\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right]^T \mathbf{x}[n], \end{aligned}$$

o que de acordo com (B.14) permite escrever

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{x}[n]\eta[n].$$

Considere-se novamente a variável $\mathbf{r}[n] = \delta\mathbf{p}[n] + \gamma\mathbf{q}[n]$, de onde resulta

$$\mathbf{q}[n] = \frac{1}{\gamma}\mathbf{r}[n] - \frac{1}{\gamma}\delta\mathbf{p}[n].$$

Substituindo este resultado na equação (B.1d) resulta

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n] - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\mathbf{p}[n],$$

de onde adicionando e subtraindo $\mathbf{p}_o$ obtém-se uma equação em função da variação dos parâmetros $\delta\mathbf{p}$:

$$\mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o + \frac{\alpha}{\gamma}\delta\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}_o + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n].$$

Assim, obtém-se

$$\left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)\delta\mathbf{p}[n] = \delta\mathbf{p}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n]$$

e

$$\delta\mathbf{p}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}[\delta\mathbf{p}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n]].$$

Fazendo

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \quad \text{e} \quad b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

obtém-se para a variação de parâmetros finalmente a seguinte expressão:

$$\delta\mathbf{p}[n] = a\delta\mathbf{p}[n-1] + b\mathbf{r}[n].$$

Observa-se então, que a partir das equações do algoritmo acelerador versão γ , e fazendo uso da variável $\mathbf{r}[n] = \delta\mathbf{p}[n] + \gamma\mathbf{q}[n]$ foi obtido um sistema dinâmico “triangular” onde a variação de parâmetro $\delta\mathbf{p}[\cdot]$ é atualizada por $\mathbf{r}[n]$ e, esta por sua vez, é calculada recursivamente utilizando o sinal de entrada e o ruído de medida:

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n]\eta[n] \quad (\text{B.16a})$$

$$\delta\mathbf{p}[n] = a\delta\mathbf{p}[n-1] + b\mathbf{r}[n], \quad (\text{B.16b})$$

$$\mathbf{\Gamma}[n] = \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \quad (\text{B.16c})$$

$$a = 1 - b = \gamma/(\alpha + \gamma). \quad (\text{B.16d})$$

substituindo a equação (B.16a) na equação (B.16b) tem-se

$$\delta \mathbf{p}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \delta \mathbf{p}[n-1] + \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] + \frac{\alpha^2 \gamma}{\alpha + \gamma} \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n]$$

fazendo uso desta equação e da equação (B.16a) obtém-se o sistema

$$\begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}[n] \\ \mathbf{r}[n] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \mathbf{I} & \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \mathbf{\Gamma}[n] \\ \mathbf{0} & \mathbf{\Gamma}[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta \mathbf{p}[n-1] \\ \mathbf{r}[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{\alpha^2 \gamma}{\alpha + \gamma} \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \\ \alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \end{bmatrix} \eta[n].$$

Com as equações B.16 pode-se realizar uma análise dos momentos de primeira e segunda ordens de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta \mathbf{p}[n]$. Para isso faz-se uso das seguintes suposições simplificadoras:

- $\eta[n]$ é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância σ_η^2 e estatisticamente independente de $\mathbf{x}[n]$.
- A ordem M do filtro adaptativo é grande o suficiente para fazer a variável $\sqrt{\frac{1}{M}} \mathbf{x}^T[n] \mathbf{x}[n]$ se comportar de forma “lenta” em comparação com $\mathbf{x}[n]$, ou seja que existe uma baixa correlação entre $\mathbf{x}$ e $\|\mathbf{x}\|^2$.

Esta última suposição possibilita a aplicação da propriedade das médias (“averaging property”)¹ (Samson; Reddy, 1983).

B.2 Análise dos momentos de primeira ordem

Para calcular os momentos de primeira ordem para o sistema dinâmico dado pelas equações (B.16a) determina-se primeiro a esperança da equação (B.16c):

¹PROPRIEDADE DAS MÉDIAS: Sejam dois processos conjuntamente estacionários $x(t)$ e $y(t)$. Se $y(t)$ varia lentamente com respeito a $x(t)$, então a variável aleatória $y(t)$ é “quase” independente de $x(t)$. Isto significa que

$$E\{g(x(\cdot))f(y(\cdot))\} \cong E\{g(x(\cdot))\} \cdot E\{f(y(\cdot))\}.$$

$$\begin{aligned}
E \{ \Gamma[n] \} &= E \left\{ \mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\} \\
&= \mathbf{I} - E \left\{ \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\},
\end{aligned}$$

na qual aplicando a propriedade das médias (para M grande), a primeira suposição simplificadora, e considerando as propriedades do traço

$$\text{tr} \{ \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{y}^T \} = \text{tr} \{ \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (\text{B.17})$$

com $\text{tr}\{.\}$ representando o traço da matriz, obtém-se:

$$\begin{aligned}
E \{ \Gamma[n] \} &\approx \mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \}}{1 + \alpha \gamma E \{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}} \\
&= \mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x}{1 + \alpha \gamma E \{ \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} \\
&= \mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}},
\end{aligned}$$

portanto

$$E \{ \Gamma[n] \} = \mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x, \quad (\text{B.18})$$

onde

$$\theta = 1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}. \quad (\text{B.19})$$

Agora, determina-se a esperança de $\mathbf{r}[n]$ dada pela equação (B.16a). Para calcular $E \{ \mathbf{r}[n] \}$ faz-se uso da esperança condicional. Observa-se da equação (B.16a), que ela depende da “história” $\mathbf{X}_n$ e $\boldsymbol{\eta}_n$, onde

$$\mathbf{X}_n = \{ \mathbf{x}[n], \mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[0] \} \quad (\text{B.20a})$$

e

$$\boldsymbol{\eta}_n = \{ \eta[n], \eta[n-1], \dots, \eta[0] \}. \quad (\text{B.20b})$$

Aplica-se a esperança condicional na equação (B.16a), tendo-se em conta que de acordo com as hipóteses simplificadoras $\mathbf{x}[n]$ e $\eta[n]$ são estatisticamente independentes e

de média nula:

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] + \alpha \gamma \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\
&= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} + \\
&\quad + E \{ \alpha \gamma \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\
&= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \} \mathbf{r}[n-1] + \alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \} E \{ \eta[n] \} \\
&= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \} \mathbf{r}[n-1].
\end{aligned}$$

Substituindo a esperança $E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \}$ dada pela equação (B.18), obtém-se

$$E \{ \mathbf{r}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) \mathbf{r}[n-1],$$

aplicando a esperança a esta equação obtém-se finalmente a esperança de $\mathbf{r}[n]$:

$$E \{ \mathbf{r}[n] \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) E \{ \mathbf{r}[n-1] \}.$$

Agora calcula-se a esperança para $\delta \mathbf{p}[n]$ dada pela equação (B.16b):

$$\begin{aligned}
E \{ \delta \mathbf{p}[n] \} &= E \{ a \delta \mathbf{p}[n-1] + b \mathbf{r}[n] \} \\
&= a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} + b E \{ \mathbf{r}[n] \}.
\end{aligned}$$

Portanto, os momentos de primeira ordem de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta \mathbf{p}[n]$ satisfazem as equações:

$$E \{ \mathbf{r}[n] \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) E \{ \mathbf{r}[n-1] \} \quad (\text{B.21})$$

$$E \{ \delta \mathbf{p}[n] \} = a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} + b E \{ \mathbf{r}[n] \} \quad (\text{B.22})$$

onde

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, \quad b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

e

$$\theta = 1 + \alpha\gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}.$$

Substituindo (B.21) em (B.22) permite escrever o sistema

$$\begin{bmatrix} E\{\delta \mathbf{p}[n]\} \\ E\{\mathbf{r}[n]\} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \mathbf{I} & \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} E\{\delta \mathbf{p}[n-1]\} \\ E\{\mathbf{r}[n-1]\} \end{bmatrix},$$

onde observa-se que para $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$, a convergência na média do algoritmo é governada pelos autovalores $\frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$ e $1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii}$ e que

$$0 < \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} < 1$$

e

$$0 < 1 - \frac{\alpha\gamma m_1 \lambda_{ii}}{\sum_{i=1}^M \lambda_{ii}} < 1,$$

ou seja, o algoritmo converge na média para quaisquer valores positivos de α , γ e m_1 .

B.3 Análise dos momentos de segunda ordem

Determina-se agora os momentos de segunda ordem, para isto são definidas as matrizes

de covariância

$$\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}, \quad (\text{B.23a})$$

e

$$\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}, \quad (\text{B.23b})$$

e de covariância cruzada

$$\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}. \quad (\text{B.23c})$$

Avaliação de $\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$

Para calcular $\mathcal{R}[n]$ inicialmente determina-se o produto $\mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n]$, da equação (B.16a):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] &= \left(\mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] + \alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \right) \\ &= \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - \mathbf{S}^T[n] - \mathbf{S}[n] + \\ &\quad + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta^2[n] \end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{S}[n] = \alpha \gamma \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n].$$

Para determinar $E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$ observe-se que $\mathbf{r}[n]$ depende das “histórias” $\mathbf{X}_n$ e $\boldsymbol{\eta}_n$, definidas em (B.20), pelo que faz-se uso da esperança condicional. Inicialmente, determina-se a esperança de $\mathbf{S}[n]$ para o qual deve ter-se em conta que $\mathbf{x}[n]$ e $\eta[n]$ são estatisticamente independentes e de média nula:

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{S}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ \alpha \gamma \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\ &= E \{ \alpha \gamma \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} E \{ \eta[n] \} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{B.24}$$

portanto

$$E \{ \mathbf{S}[n] \} = 0.$$

Agora determina-se $E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$, fazendo uso da esperança condicional e do resultado expressado na equação (B.24). Assim obtém-se

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] - \mathbf{S}^T[n] - \mathbf{S}[n] + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta^2[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\
&= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 E \{ \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta^2[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\
&= E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 E \{ \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \} \mathbf{M}_1 \sigma_\eta^2, \tag{B.25}
\end{aligned}$$

onde $\sigma_\eta^2 = E \{ \eta^2[n] \}$. Por facilidade vai-se analisar estas esperanças separadamente, primeiro determina-se $\mathbf{V} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{r} \mathbf{c} = E \{ \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \}$, substituindo $\boldsymbol{\Gamma}[n]$ dado pela equação (B.16c):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{r} \mathbf{c} &= E \left\{ \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{r}[n-1] \cdot \right. \\
&\quad \left. \cdot \mathbf{r}^T[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) \right| \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \Big\} \\
\mathbf{V} \boldsymbol{\Gamma} \mathbf{r} \mathbf{c} &= E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] - \alpha \gamma \frac{\mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} + \right. \\
&\quad \left. - \alpha \gamma \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} + \right. \\
&\quad \left. + \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{(1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n])^2} \right| \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \Big\},
\end{aligned}$$

aplicando a propriedade das médias e do traço pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\Gamma\mathbf{r}c &= \mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] - \alpha\gamma \frac{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma\text{tr}\{\mathbf{M}_1E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}} + \\
&\quad - \alpha\gamma \frac{\mathbf{M}_1E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]}{1 + \alpha\gamma\text{tr}\{\mathbf{M}_1E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}} + \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1E\left\{\mathbf{x}[n]\left(\mathbf{x}^T[n]\mathbf{r}[n-1]\right)^2\mathbf{x}^T[n]|\mathbf{X}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_{n-1}\right\}\mathbf{M}_1}{E\left\{\left(1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\right)^2\right\}},
\end{aligned}$$

fazendo uso da primeira suposição simplificadora e da equação (B.19):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\Gamma\mathbf{r}c &= \mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] + \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\left(\mathbf{x}^T[n]\mathbf{r}[n-1]\right)^2|\mathbf{X}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_{n-1}\right\}\mathbf{M}_1}{E\left\{\left(1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\right)^2\right\}}.
\end{aligned} \tag{B.26}$$

De acordo com Solo; Kong (1995), para um sinal Gaussiano $\mathbf{v}$ de média nula com matriz de covariância $\mathbf{V}_x$ e um vetor fixo constante β , pode-se escrever

$$E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T(\beta^T\mathbf{v})^2] = \mathbf{V}_x\beta^T\mathbf{V}_x\beta + 2\mathbf{V}_x\beta\beta^T\mathbf{V}_x, \tag{B.27}$$

aplicando isto na equação (B.26) permite determinar que

$$E\left\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\left(\mathbf{x}^T[n]\mathbf{r}[n-1]\right)^2|\mathbf{X}_{n-1},\boldsymbol{\eta}_{n-1}\right\} = \mathbf{R}_x\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{r}[n-1] + 2\mathbf{R}_x\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x. \tag{B.28}$$

Agora analisa-se $E\left\{\left(1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\right)^2\right\}$, fazendo-se uso das propriedades do traço e da equação (B.19):

$$\begin{aligned}
E \left\{ \left(1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right)^2 \right\} &= E \left\{ 1 + 2\alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] + \alpha^2 \gamma^2 \left(\mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right)^2 \right\} \\
&= 1 + 2\alpha \gamma E \left\{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right\} + \alpha^2 \gamma^2 E \left\{ \left(\mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right)^2 \right\} \\
&= 1 + 2\alpha \gamma \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 E \left\{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \right\} \right\} + \alpha^2 \gamma^2 \Psi \\
&= 2 + 2\alpha \gamma \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right\} - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi \\
&= 2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi,
\end{aligned} \tag{B.29}$$

onde $\Psi = E \left\{ \left(\mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right)^2 \right\}$, o qual fazendo uso de (Bar-Shalom; Li, 1993)

$$E \left\{ \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \right\} = \text{tr} \left\{ \mathbf{A} \mathbf{R}_x \right\} \text{tr} \left\{ \mathbf{B} \mathbf{R}_x \right\} + 2 \text{tr} \left\{ \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{B} \mathbf{R}_x \right\},$$

pode-se escrever

$$\Psi = \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right\} \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right\} + 2 \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right\}.$$

Substituindo (B.29) e (B.28) na equação (B.26) resulta

$$\begin{aligned}
\mathbf{V} \Gamma \mathbf{r} c &= \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + \\
&\quad - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{r}[n-1] \mathbf{M}_1 + 2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi}.
\end{aligned} \tag{B.30}$$

Retornando-se à equação (B.25) calcula-se $\mathbf{V} \Gamma \mathbf{x} = E \left\{ \Gamma^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \Gamma[n] \right\}$. Para isso substitui-se o valor de $\Gamma[n]$ dado pela equação (B.16c):

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}\Gamma\mathbf{x} &= E \left\{ \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \right\} \\
&= E \left\{ \left(\mathbf{x}[n] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \left(\mathbf{x}^T[n] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \right\} \\
&= E \left\{ \left(\frac{\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \left(\frac{\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \right\} \\
&= E \left\{ \frac{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{(1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n])^2} \right\},
\end{aligned}$$

onde, aplicando a propriedade das médias

$$\mathbf{V}\Gamma\mathbf{x} = E \{ \Gamma^T[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\Gamma[n] \} = \frac{E \{ \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \}}{E \{ (1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n])^2 \}},$$

e fazendo uso nesta expressão das suposições simplificadoras e do resultado obtido em (B.29) chega-se a

$$E \{ \Gamma^T[n]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\Gamma[n] \} = \frac{\mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}.$$

Substituindo este resultado e o obtido em (B.30) na equação (B.25) resulta:

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}[n]\mathbf{r}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= \mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] + \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{r}[n-1]\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{2\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} \sigma_\eta^2.
\end{aligned}$$

Aplicando a esperança neste resultado e fazendo uso das propriedades do traço,

obtem-se $E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$:

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} &= E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + \\
&\quad - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \} \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \frac{2\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \sigma_\eta^2,
\end{aligned}$$

lembrando que $\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$, tem-se finalmente

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] + \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \} \mathbf{M}_1 + 2\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \\
&\quad + \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \sigma_\eta^2,
\end{aligned} \tag{B.31}$$

pode-se observar que esta equação é semelhante à obtida para o algoritmo LMS em Solo; Kong (1995).

Avaliação de $\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}$

Para avaliar $\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}$ faz-se uso da esperança condicional $\mathbf{Vdrc} = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \}$, dado que $\mathbf{r}[n]$ depende das “histórias” $\mathbf{X}_n$ e $\boldsymbol{\eta}_n$ dadas por (B.20). De acordo com as equações (B.16a) e (B.16b),

$$\begin{aligned} \mathbf{Vdrc} &= E \left\{ \left(a \delta \mathbf{p}[n-2] + b \mathbf{r}[n-1] \right) \cdot \left(\mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] - \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\eta}[n] \right) \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} \\ &= E \left\{ a \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] + b \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] + \right. \\ &\quad \left. - \alpha \gamma a \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\eta}[n] + \right. \\ &\quad \left. - \alpha \gamma b \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\eta}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\}. \end{aligned} \quad (\text{B.32})$$

A partir desta equação e com base nas suposições simplificadoras observa-se que:

a)

$$\begin{aligned} E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\eta}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \} E \{ \boldsymbol{\eta}[n] \} \\ &= 0, \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \boldsymbol{\eta}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \boldsymbol{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \} E \{ \boldsymbol{\eta}[n] \} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Assim, a equação (B.32) pode ser escrita como

$$\mathbf{Vdrc} = E \{ a \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] + b \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \boldsymbol{\Gamma}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \}.$$

Substituindo $\boldsymbol{\Gamma}^T[n]$ de acordo com a equação (B.16c) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{Vdrc} &= E \left\{ a\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\} + \\ &+ E \left\{ b\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \right\}, \end{aligned}$$

de onde distribuindo e aplicando a propriedade das médias e do traço obtém-se

$$\begin{aligned} \mathbf{Vdrc} &= a\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1] + b\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] \\ &- \frac{a\alpha\gamma\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1]E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma\text{tr}\{\mathbf{M}_1E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}} + \\ &- \frac{\alpha\gamma b\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma\text{tr}\{\mathbf{M}_1E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}}, \end{aligned}$$

Desta forma, fazendo uso da equação (B.19) e das suposições simplificadoras resulta

$$\begin{aligned} \mathbf{Vdrc} &= a\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1] + b\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1] \\ &- \frac{\alpha\gamma a}{\theta}\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \\ &- \frac{\alpha\gamma b}{\theta}\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1. \end{aligned}$$

Aplicando a esperança neste último resultado obtém-se

$$\begin{aligned} E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\mathbf{r}^T[n]\} &= aE\{\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1]\} + bE\{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\} \\ &- \frac{\alpha\gamma a}{\theta}E\{\delta\mathbf{p}[n-2]\mathbf{r}^T[n-1]\}\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \\ &- \frac{\alpha\gamma b}{\theta}E\{\mathbf{r}[n-1]\mathbf{r}^T[n-1]\}\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1. \end{aligned}$$

Lembrando que $\boldsymbol{\mathcal{V}}[n] = E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\mathbf{r}^T[n]\}$ e $\boldsymbol{\mathcal{R}}[n] = E\{\mathbf{r}[n]\mathbf{r}^T[n]\}$, obtém-se final-

mente

$$\begin{aligned}
 \mathbf{V}[n] &= a\mathbf{V}[n-1] - \frac{\alpha\gamma a}{\theta}\mathbf{V}[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + b\mathbf{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma b}{\theta}\mathbf{R}[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 \\
 &= a\mathbf{V}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 \right) + b\mathbf{R}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 \right).
 \end{aligned} \tag{B.33}$$

Avaliação de $\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}$

Para finalizar a análise das matrizes de covariância, faz-se o estudo de $\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}$. De acordo com a equação (B.16b):

$$\begin{aligned}
 E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \} &= E \{ (a\delta \mathbf{p}[n-1] + b\mathbf{r}[n]) (a\delta \mathbf{p}^T[n-1] + b\mathbf{r}^T[n]) \} \\
 &= E \{ a^2 \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] + b^2 \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] + \\
 &\quad + ab \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] + ab \mathbf{r}[n] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \} \\
 &= a^2 E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \} + b^2 E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} + \\
 &\quad + ab E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \} + ab E \{ \mathbf{r}[n] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \}.
 \end{aligned}$$

Fazendo uso das equações (B.23) obtém-se

$$\mathcal{P}[n] = a^2 \mathcal{P}[n-1] + b^2 \mathcal{R}[n] + ab \mathbf{V}[n] + ab \mathbf{V}^T[n]. \tag{B.34}$$

Avaliação de $E \{ e_a^2[n] \}$

Para completar a análise de segundo ordem analisa-se agora $E \{ e_a^2[n] \}$. Então a partir da equação (B.4) e fazendo uso da esperança condicional:

$$\begin{aligned}
E \{ e_a^2[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ (\mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] + \eta[n]) \cdot \\
&\quad \cdot (\delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] + \eta[n]) \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\
&= E \{ \mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] + \mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] \eta[n] \\
&\quad + \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \eta[n] + \eta^2[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} \\
&= E \{ \mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} + \\
&\quad + E \{ \mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} E \{ \eta[n] \} \\
&\quad + E \{ \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} E \{ \eta[n] \} + E \{ \eta^2[n] \}.
\end{aligned}$$

Fazendo uso das hipóteses simplificadoras, $E \{ \eta[n] \} = 0$, e considerando as propriedades do traço, obtém-se

$$\begin{aligned}
E \{ e_a^2[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} &= E \{ \mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} + \sigma_\eta^2 \\
&= E \{ \text{tr} \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \mid \mathbf{X}_{n-1}, \boldsymbol{\eta}_{n-1} \} + \sigma_\eta^2 \\
&= \text{tr} \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \} + \sigma_\eta^2 \\
&= \text{tr} \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{R}_x \} + \sigma_\eta^2,
\end{aligned}$$

de onde aplicando de novo a esperança resulta

$$E \{ e_a^2[n] \} = \text{tr} \{ E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \} \mathbf{R}_x \} + \sigma_\eta^2.$$

Portanto, de acordo com (B.23) e pela comutatividade do traço tem-se:

$$E \{ e_a^2[n] \} = \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \boldsymbol{\mathcal{P}}[n-1] \} + \sigma_\eta^2. \quad (\text{B.35})$$

Resumindo, as matrizes de covariância $\boldsymbol{\mathcal{R}}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$ e $\boldsymbol{\mathcal{P}}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}$, de covariância cruzada $\boldsymbol{\mathcal{V}}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}$ e $E \{ e_a^2[n] \}$ satisfazem:

$$\begin{aligned}
\mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathcal{R}[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathcal{R}[n-1] + \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x \text{tr}\{\mathbf{R}_x\mathcal{R}[n-1]\}\mathbf{M}_1 + 2\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathcal{R}[n-1]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} \\
&\quad + \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} \sigma_\eta^2
\end{aligned} \tag{B.36a}$$

$$\mathcal{P}[n] = a^2\mathcal{P}[n-1] + b^2\mathcal{R}[n] + ab\mathcal{V}[n] + ab\mathcal{V}^T[n] \tag{B.36b}$$

$$\mathcal{V}[n] = a\mathcal{V}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 \right) + b\mathcal{R}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 \right) \tag{B.36c}$$

$$E\{e_a^2[n]\} = \text{tr}\{\mathbf{R}_x\mathcal{P}[n-1]\} + \sigma_\eta^2. \tag{B.36d}$$

onde

$$\begin{aligned}
a &= \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \\
b &= \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \\
\theta &= 1 + \alpha\gamma \text{tr}\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\} \\
\Psi &= \text{tr}\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\} \text{tr}\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\} + 2\text{tr}\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\}.
\end{aligned} \tag{B.37}$$

Considere-se a diagonalização, da matriz $\mathbf{R}_x$:

$$\mathbf{Q}\mathbf{R}_x\mathbf{Q}^T = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_M), \tag{B.38}$$

onde

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{v}_1 \cdots \mathbf{v}_M), \tag{B.39}$$

sendo $\mathbf{v}_u$, $1 \leq u \leq M$ os autovetores de $\mathbf{R}_x$. Ademais cumpre-se que $\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{I}$, onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade. Considere-se $\mathbf{M}_1 = m_1\mathbf{I}$, e sejam definidas as matrizes

$$\begin{aligned}
\mathbf{C}[n] &= \mathbf{Q}\mathcal{R}[n]\mathbf{Q}^T \\
\mathbf{V}[n] &= \mathbf{Q}\mathcal{V}[n]\mathbf{Q}^T \\
\mathbf{D}[n] &= \mathbf{Q}\mathcal{P}[n]\mathbf{Q}^T.
\end{aligned} \tag{B.40}$$

Fazendo uso destas equações, e multiplicando à esquerda e à direita por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ respectivamente a equação (B.36a), tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{C}[n] &= \left(\mathbf{I} - 2\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} + 2m_1^2\mathbf{\Lambda}^2 \right) \mathbf{C}[n-1] + \\ &\quad + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\mathbf{\Lambda} \text{tr} \{ \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}[n-1] \} + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\mathbf{\Lambda} \sigma_n^2. \end{aligned}$$

Os elementos da diagonal desta matriz, C_{kk} onde $1 \leq k \leq M$, vem dados por

$$\begin{aligned} C_{kk}[n] &= \left(1 - 2\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\lambda_{kk} + 2m_1^2\lambda_{kk}^2 \right) C_{kk}[n-1] + \\ &\quad + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\lambda_{kk} \text{tr} \{ \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}[n-1] \} + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\lambda_{kk}\sigma_n^2. \end{aligned}$$

reunindo todos os $C_{kk}[n]$ onde $1 \leq k \leq M$, em um vetor coluna e, tendo em conta que

$$\text{tr} \{ \mathbf{\Lambda} \mathbf{C}[n-1] \} = [\lambda_{11}C_{11}[n-1] + \dots + \lambda_{MM}C_{MM}[n-1]] = \underline{\mathbf{\Lambda}}^T \underline{\mathbf{C}}[n-1]$$

onde $\underline{\mathbf{\Lambda}}$ e $\underline{\mathbf{C}}$ correspondem aos vetores

$$\underline{\mathbf{\Lambda}} = \begin{bmatrix} \lambda_{11} & \dots & \lambda_{MM} \end{bmatrix}^T$$

e

$$\underline{\mathbf{C}}[n] = \begin{bmatrix} C_{11}[n] & \dots & C_{MM}[n] \end{bmatrix}^T,$$

tem-se

$$\underline{\mathbf{C}}[n] = \mathbf{H}\underline{\mathbf{C}}[n-1] + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\mathbf{\Lambda}\sigma_n^2, \quad (\text{B.41})$$

onde

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} + 2m_1^2\mathbf{\Lambda}^2 + \frac{\alpha\gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}\mathbf{\Lambda}\mathbf{\Lambda}^T. \quad (\text{B.42})$$

Agora, na equação (B.36c), multiplicando à esquerda e à direita por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ e fazendo uso de (B.40) tem-se

$$\mathbf{V}[n] = a\mathbf{V}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} \right) + b\mathbf{C}[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} \right),$$

onde respectivamente os termos da diagonal da matriz $\mathbf{V}$, V_{kk} para $1 \leq k \leq M$, cumprem com

$$V_{kk}[n] = a \left(1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\lambda_{kk} \right) V_{kk}[n-1] + b \left(1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\lambda_{kk} \right) C_{kk}[n-1].$$

Escrevendo todos os elementos $V_{kk}[n]$, para $1 \leq k \leq M$, em forma vetorial tem-se

$$\underline{\mathbf{V}}[n] = a \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} \right) \underline{\mathbf{V}}[n-1] + b \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta}\mathbf{\Lambda} \right) \underline{\mathbf{C}}[n-1] \quad (\text{B.43})$$

onde

$$\underline{\mathbf{V}}[n] = \begin{bmatrix} V_{11}[n] & \cdots & V_{MM}[n] \end{bmatrix}^T.$$

Finalmente, multiplicando a equação (B.36b) multiplicando à esquerda e à direita por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ e utilizando (B.40) tem-se

$$\mathbf{D}[n] = a^2 \mathbf{D}[n-1] + b^2 \mathbf{C}[n] + 2ab \mathbf{V}[n]$$

de onde os elementos da diagonal escritos em forma vetorial são dados por:

$$\underline{\mathbf{D}}[n] = a^2 \underline{\mathbf{D}}[n-1] + b^2 \underline{\mathbf{C}}[n] + 2ab \underline{\mathbf{V}}[n]$$

sendo

$$\underline{\mathbf{D}}[n] = \begin{bmatrix} D_{11}[n] & \cdots & D_{MM}[n] \end{bmatrix}^T.$$

Agora, substitui-se os resultados obtidos em (B.41) e (B.43):

$$\begin{aligned} \underline{\mathbf{D}}[n] &= a^2 \underline{\mathbf{D}}[n-1] + 2a^2 b \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) \underline{\mathbf{V}}[n-1] + \\ &+ \left(b^2 \mathbf{H} + 2ab^2 \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) \right) \underline{\mathbf{C}}[n-1] + \frac{b^2 \alpha \gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{\Lambda} \sigma_n^2. \end{aligned} \quad (\text{B.44})$$

Portanto, as equações (B.41), (B.43) e (B.44) podem ser escritas no sistema

$$\begin{bmatrix} \underline{\mathbf{D}}[n] \\ \underline{\mathbf{V}}[n] \\ \underline{\mathbf{C}}[n] \end{bmatrix} = \mathbf{K} \begin{bmatrix} \underline{\mathbf{D}}[n-1] \\ \underline{\mathbf{V}}[n-1] \\ \underline{\mathbf{C}}[n-1] \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{b^2 \alpha \gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{\Lambda} \\ \mathbf{0} \\ \frac{\alpha \gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{\Lambda} \end{bmatrix} \sigma_n^2,$$

onde $\mathbf{K}$ é definida por

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} a^2 \mathbf{I} & 2a^2 b \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) & b^2 \mathbf{H} + 2ab^2 \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) \\ \mathbf{0} & a \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) & b \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{H} \end{bmatrix}, \quad (\text{B.45})$$

sendo $\mathbf{H}$ definido na equação (B.42)

$$\mathbf{H} = \mathbf{I} - 2 \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} + 2m_1^2 \mathbf{\Lambda}^2 + \frac{\alpha \gamma m_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Lambda}^T.$$

onde tem-se que para $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$.

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$$

$$b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

$$\theta = 1 + \alpha \gamma m_1 \text{tr}\{\mathbf{R}_x\}$$

$$\Psi = m_1^2 \text{tr}^2\{\mathbf{R}_x\} + 2m_1^2 \text{tr}\{\mathbf{R}_x^2\}.$$

Portanto, da matriz $\mathbf{K}$, equação (B.45), a taxa de convergência é dada pelos autovalores

$$a^2, \\ a \left(1 - \frac{\alpha \gamma m_1}{\theta} \lambda_{kk} \right)$$

e pelos autovalores de $\mathbf{H}$.

B.4 Análise na convergência

Ao considerar $n \rightarrow \infty$ pode-se obter informações importantes relacionadas com o sistema após a convergência. Inicialmente considera-se a diagonalização da matriz $\mathbf{R}_x$, equação (B.38), utilizando a matriz ortogonal $\mathbf{Q}$, equação B.39. Para simplificar os cálculos, considera-se também que

$$\Phi = \mathbf{Q} \mathbf{M}_1 \mathbf{Q}^T \quad (\text{B.46})$$

é uma matriz diagonal.

Analisando inicialmente o caso da matriz $\mathbf{R}[n]$ dada pela equação (B.36a), vê-se que para quando $n \rightarrow \infty$, esta satisfaz

$$\begin{aligned} \mathbf{R}[\infty] &= \mathbf{R}[\infty] - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{R}[\infty] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{R}[\infty] + \\ &+ \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr}\{\mathbf{R}_x \mathbf{R}[\infty]\} \mathbf{M}_1 + 2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{R}[\infty] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\ &+ \alpha^2 \gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \sigma_\eta^2, \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} \frac{\alpha\gamma}{\theta} (\mathcal{R}[\infty]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathcal{R}[\infty]) &= \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\xi\mathbf{M}_1 + 2\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathcal{R}[\infty]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\ &+ \alpha^2\gamma^2 \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} \sigma_\eta^2, \end{aligned}$$

com

$$\xi = \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] \}. \quad (\text{B.47})$$

Portanto

$$\begin{aligned} m (\mathcal{R}[\infty]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathcal{R}[\infty]) &= \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\xi\mathbf{M}_1 + 2\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathcal{R}[\infty]\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1 + \\ &+ \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\mathbf{M}_1\sigma_\eta^2 \end{aligned} \quad (\text{B.48})$$

com

$$m = \frac{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}{\theta}. \quad (\text{B.49})$$

Define-se então a seguinte matriz:

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T \quad (\text{B.50})$$

onde $\mathbf{Q}$ é definido de acordo com as equações (B.38) e (B.39). Assim, multiplicando a equação (B.48) a esquerda por $\mathbf{Q}$ e a direita por $\mathbf{Q}^T$, e usando a matriz definida em (B.46), obtém-se

$$m (\mathbf{C}\Lambda\Phi + \Phi\Lambda\mathbf{C}) = \alpha\gamma\Phi\Lambda\xi\Phi + 2\alpha\gamma\Phi\Lambda\mathbf{C}\Lambda\Phi + \alpha\gamma\Phi\Lambda\Phi\sigma_\eta^2.$$

Considerando os elementos da diagonal ou seja os elementos de índice ij onde $i = j$, para $i, j = 1, \dots, M$, pode-se escrever

$$m (C_{ii}\lambda_{ii}\varphi_{ii} + \varphi_{ii}\lambda_{ii}C_{ii}) = \alpha\gamma\varphi_{ii}\lambda_{ii}\xi\varphi_{ii} + 2\alpha\gamma\varphi_{ii}\lambda_{ii}C_{ii}\lambda_{ii}\varphi_{ii} + \alpha\gamma\varphi_{ii}\lambda_{ii}\varphi_{ii}\sigma_\eta^2,$$

$$2m\lambda_{ii}\varphi_{ii}C_{ii} = \alpha\gamma\varphi_{ii}^2\lambda_{ii}\xi + 2\alpha\gamma\varphi_{ii}^2\lambda_{ii}^2C_{ii} + \alpha\gamma\varphi_{ii}^2\lambda_{ii}\sigma_\eta^2,$$

e

$$(2m - 2\alpha\gamma\lambda_{ii}\varphi_{ii}) \lambda_{ii}\varphi_{ii}C_{ii} = \alpha\gamma\lambda_{ii}\varphi_{ii}^2 (\xi + \sigma_\eta^2).$$

Portanto conclui-se que

$$C_{ii} = \frac{\alpha\gamma\varphi_{ii}}{2(m - \alpha\gamma\lambda_{ii}\varphi_{ii})} (\xi + \sigma_\eta^2).$$

Fazendo

$$\mu_{ii} = \frac{\alpha\gamma\varphi_{ii}}{m} \quad (\text{B.51})$$

obtém-se

$$C_{ii} = \frac{\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_i)} (\xi + \sigma_\eta^2). \quad (\text{B.52})$$

Agora, multiplicando a equação (B.47) por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ chega-se a

$$\xi = \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{R}[\infty] \} = \text{tr} \{ \Lambda \mathbf{C} \} = \sum_{k=1}^M \lambda_{kk} C_{kk}.$$

Substituindo C_{kk} da equação (B.52) resulta

$$\xi = \sum_{k=1}^M \frac{\mu_{kk}\lambda_{kk}}{2(1 - \mu_{kk}\lambda_{kk})} (\xi + \sigma_\eta^2) = \rho (\xi + \sigma_\eta^2), \quad (\text{B.53})$$

onde

$$\rho = \sum_{k=1}^M \frac{\mu_{kk}\lambda_{kk}}{2(1 - \mu_{kk}\lambda_{kk})}. \quad (\text{B.54})$$

Da equação (B.53) obtém-se então

$$\xi = \rho\xi + \rho\sigma_\eta^2$$

e, finalmente,

$$\xi = \frac{\rho\sigma_\eta^2}{1 - \rho}. \quad (\text{B.55})$$

Analisando agora o caso da matriz $\mathbf{V}[n]$ dada pela equação (B.36c), observa-se que para $n \rightarrow \infty$, esta satisfaz

$$\mathbf{V}[\infty] = a\mathbf{V}[\infty] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right) + b\mathbf{R}[\infty] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right)$$

ou

$$\mathcal{V}[\infty] \left((1-a) \mathbf{I} + \frac{a\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right) = b \mathcal{R}[\infty] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right).$$

Como $a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$, $b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$ e $b = 1 - a$, pode-se escrever

$$\mathcal{V}[\infty] \left(b \mathbf{I} + \frac{b\gamma^2}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right) = b \mathcal{R}[\infty] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right)$$

e

$$\mathcal{V}[\infty] \left(\mathbf{I} + \frac{\gamma^2}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right) = \mathcal{R}[\infty] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right). \quad (\text{B.56})$$

Define-se agora a seguinte matriz:

$$\mathbf{V} = \mathbf{Q} \mathcal{V}[\infty] \mathbf{Q}^T, \quad (\text{B.57})$$

onde $\mathbf{Q}$ é definido de acordo com as equações (B.38) e (B.39). Então, multiplicando a equação (B.56) a esquerda por $\mathbf{Q}$ e a direita por $\mathbf{Q}^T$ e fazendo uso das matrizes definidas em (B.50) obtém-se

$$\mathbf{V} \left(\mathbf{I} + \frac{\gamma^2}{\theta} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi} \right) = \mathbf{C} \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{\Lambda} \mathbf{\Phi} \right).$$

Considerando os elementos na diagonal, ou seja os elementos de índice ij onde $i = j$, para $i, j = 1, \dots, M$, tem-se inicialmente

$$V_{ii} \left(1 + \frac{\gamma^2}{\theta} \lambda_{ii} \varphi_{ii} \right) = C_{ii} \left(1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \lambda_{ii} \varphi_{ii} \right),$$

e portanto

$$V_{ii} = C_{ii} \frac{1 - \frac{\alpha\gamma\varphi_{ii}}{\theta} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\gamma^2\varphi_{ii}}{\theta} \lambda_{ii}}.$$

Considerando $\mu_{ii} = \frac{\alpha\gamma\varphi_{ii}}{m}$, esta equação pode ser escrita como

$$V_{ii} = C_{ii} \frac{1 - \frac{m}{\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}. \quad (\text{B.58})$$

Determina-se agora o que acontece com a matriz $\mathcal{P}[n]$, dada pela equação (B.36b),

quando $n \rightarrow \infty$:

$$\mathcal{P}[\infty] = a^2 \mathcal{P}[\infty] + b^2 \mathcal{R}[\infty] + ab \mathcal{V}[\infty] + ab \mathcal{V}^T[\infty],$$

$$(1 - a^2) \mathcal{P}[\infty] = b^2 \mathcal{R}[\infty] + ab \mathcal{V}[\infty] + ab \mathcal{V}^T[\infty]. \quad (\text{B.59})$$

Define-se a matriz:

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q} \mathcal{P}[\infty] \mathbf{Q}^T, \quad (\text{B.60})$$

onde $\mathbf{Q}$ é definido de acordo com as equações (B.38) e (B.39). Então multiplicando a equação (B.59) à esquerda por $\mathbf{Q}$ e à direita por $\mathbf{Q}^T$ e fazendo uso das matrizes definidas em (B.50) e (B.57) obtém-se:

$$(1 - a^2) \mathbf{D} = b^2 \mathbf{C} + ab \mathbf{V} + ab \mathbf{V}^T,$$

considerando os elementos na diagonal, ou seja os elementos de índices ij onde $i = j$, para $i, j = 1, \dots, M$, tem-se

$$(1 - a^2) D_{ii} = b^2 C_{ii} + ab V_{ii} + ab V_{ii},$$

$$D_{ii} = \frac{b}{1 - a^2} (b C_{ii} + 2a V_{ii}),$$

Como $a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$ e $b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$, é facilmente demonstrável que

$$\frac{b}{1 - a^2} = \frac{\alpha + \gamma}{\alpha + 2\gamma}.$$

Portanto

$$\begin{aligned} D_{ii} &= \frac{\alpha + \gamma}{\alpha + 2\gamma} \left(\frac{\alpha}{\alpha + \gamma} C_{ii} + 2 \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} V_{ii} \right), \\ &= \frac{1}{\alpha + 2\gamma} (\alpha C_{ii} + 2\gamma V_{ii}). \end{aligned}$$

Substituindo V_{ii} dada por (B.58) chega-se a

$$D_{ii} = \frac{1}{\alpha + 2\gamma} \left(\alpha C_{ii} + 2\gamma C_{ii} \frac{1 - \frac{m}{\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta} \mu_{ii} \lambda_i} \right),$$

ou ainda

$$D_{ii} = \frac{C_{ii}}{\alpha + 2\gamma} \left(\alpha + 2\gamma \frac{1 - \frac{m}{\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}} \right).$$

Substituindo C_{ii} de acordo com a equação (B.52), tem-se:

$$D_{ii} = \frac{\xi + \sigma_\eta^2}{\alpha + 2\gamma} \left[\frac{\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii} \lambda_{ii})} \left(\alpha + 2\gamma \frac{1 - \frac{m}{\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}} \right) \right].$$

Como $\xi = \frac{\rho\sigma_\eta^2}{1 - \rho}$ segundo (B.55), então

$$D_{ii} = \frac{1}{\alpha + 2\gamma} \left[\frac{\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii} \lambda_{ii})} \left(\alpha + 2\gamma \frac{1 - \frac{m}{\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta} \mu_{ii} \lambda_{ii}} \right) \right] \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \rho}. \quad (\text{B.61})$$

Finalmente analisa-se o que acontece com $E\{e_a^2[n]\}$ quando $n \rightarrow \infty$. Então considerando a equação (B.36e),

$$\begin{aligned} E\{e_a^2\} &= \text{tr}\{\mathbf{R}_x \mathbf{P}[\infty]\} + \sigma_\eta^2 \\ &= \text{tr}\{\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \mathbf{P}[\infty]\} + \sigma_\eta^2 \\ &= \text{tr}\{\mathbf{\Lambda} \mathbf{D}\} + \sigma_\eta^2 \\ &= \sum_{i=1}^M \lambda_{ii} D_{ii} + \sigma_\eta^2. \end{aligned}$$

Substituindo então as equações (B.61) e (B.54) chega-se a

$$\begin{aligned}
E \{e_a^2\} &= \sigma_\eta^2 + \sum_{i=1}^M \frac{\lambda_{ii}}{\alpha + 2\gamma} \left[\frac{\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_{ii})} \left(\alpha + 2\gamma \frac{1 - \frac{m}{\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}} \right) \right] \frac{\sigma_\eta^2}{1 - \rho} \\
&= \sigma_\eta^2 + \frac{1}{1 - \rho} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} \sum_{i=1}^M \frac{\mu_{ii}\lambda_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_{ii})} \right) \sigma_\eta^2 + \\
&\quad + \frac{1}{1 - \rho} \left\{ \frac{2\gamma}{\alpha + 2\gamma} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_{ii}\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_{ii})} \left(\frac{1 - \frac{m}{\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}} \right) \right] \right\} \sigma_\eta^2, \\
&= \sigma_\eta^2 + \frac{\rho}{1 - \rho} \left(\frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} \right) \sigma_\eta^2 + \\
&\quad + \frac{\rho}{1 - \rho} \left\{ \frac{2\gamma}{(\alpha + 2\gamma)\rho} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_{ii}\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_{ii})} \left(\frac{1 - \frac{m}{\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}} \right) \right] \right\} \sigma_\eta^2.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$E \{e_a^2\} = \sigma_\eta^2 + \frac{\rho}{1 - \rho} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} + \frac{2\gamma}{(\alpha + 2\gamma)\rho} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_{ii}\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_{ii})} \left(\frac{1 - \frac{m}{\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}} \right) \right] \right\} \sigma_\eta^2. \quad (\text{B.62})$$

Desta equação conclui-se que o desajuste $\mathcal{M}_a$ apresentado pelo algoritmo acelerador na sua versão γ , é dado por:

$$\mathcal{M}_a = \frac{\rho}{1 - \rho} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} + \frac{2\gamma}{(\alpha + 2\gamma)\rho} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_{ii}\mu_{ii}}{2(1 - \mu_{ii}\lambda_{ii})} \left(\frac{1 - \frac{m}{\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}} \right) \right] \right\}. \quad (\text{B.63})$$

Desta equação se observa que

$$0 < \frac{1 - \frac{m}{\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}}{1 + \frac{m\gamma}{\alpha\theta}\mu_{ii}\lambda_{ii}} < 1,$$

de modo que

$$\mathcal{M}_a < \frac{\rho}{1-\rho} \left\{ \frac{\alpha}{\alpha+2\gamma} + \frac{2\gamma}{(\alpha+2\gamma)\rho} \sum_{i=1}^M \left[\frac{\lambda_{ii}\mu_{ii}}{2(1-\mu_{ii}\lambda_{ii})} \right] \right\}.$$

Fazendo uso da equação (B.54), chega-se a:

$$\mathcal{M}_a < \frac{\rho}{1-\rho}, \quad (\text{B.64})$$

onde

$$\rho = \sum_{k=1}^M \frac{\mu_{ii}\lambda_i}{2(1-\mu_{ii}\lambda_i)},$$

$$\mu_{ii} = \frac{\alpha\gamma\varphi_{ii}}{m},$$

$$m = \frac{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi}{\theta},$$

$$\theta = 1 + \alpha\gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \},$$

$$\Psi = E \left\{ \left(\mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right)^2 \right\},$$

e

$$\varphi_{ii} = \{ \mathbf{Q} \mathbf{M}_1 \mathbf{Q}^T \}_{ii}.$$

Anexo C

ANÁLISE DO AR γ PARA AMBIENTES NÃO-ESTACIONÁRIOS

As seguintes equações representam o algoritmo acelerador versão γ regressivo:

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}[n-1] - d[n] \quad (\text{C.1a})$$

$$g[n] = \frac{e_a[n] + \gamma \mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \quad (\text{C.1b})$$

$$\mathbf{q}[n] = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} [\mathbf{q}[n-1] - \alpha g[n]\mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]] \quad (\text{C.1c})$$

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n] \quad (\text{C.1d})$$

Considere-se um sistema onde o sinal desejado é dado por:

$$d[n] = \mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_o[n] - \eta[n], \quad (\text{C.2})$$

onde $\eta[n]$ é ruído de medida e $\mathbf{p}_o$ são os parâmetros ótimos gerados segundo um processo de Markov dado pela equação:

$$\mathbf{p}_o[n+1] = h\mathbf{p}_o[n] + \mathbf{v}[n], \quad (\text{C.3})$$

onde $\mathbf{v}[n]$ é um vetor de ruído.

Seja $\delta\mathbf{p}[n]$ a diferença entre os coeficientes ótimos $\mathbf{p}_o$ e o valor obtido dos coeficientes $\mathbf{p}$ no instante n :

$$\delta\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o[n]. \quad (\text{C.4})$$

Com estas condições retorna-se ao erro *a priori* (C.1a) que, substituindo as equações (C.2) e (C.3) e fazendo uso de (C.4), pode ser escrito como:

$$\begin{aligned}
 e_a[n] &= \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - d[n] \\
 &= \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n-1] - \mathbf{x}^T[n] (h \mathbf{p}_o[n-1] + \mathbf{v}[n-1]) + \eta[n] \\
 &= \mathbf{x}^T[n] (\mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}_o[n-1]) - (h-1) \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}_o[n-1] + \\
 &\quad - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] + \eta[n] \\
 &= \mathbf{x}^T[n] \delta \mathbf{p}[n-1] - (h-1) \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}_o[n-1] - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] + \eta[n].
 \end{aligned} \tag{C.5}$$

C.1 Simplificação do algoritmo AR_γ

Com a finalidade de facilitar a análise do algoritmo, procura-se uma variável $\mathbf{r}[n]$ da forma:

$$\mathbf{r}[n] = A \delta \mathbf{p}[n] + B \mathbf{q}[n], \tag{C.6}$$

que permita simplificar o algoritmo dado por (C.1), em um sistema de duas equações em cascata que mantenham as características originais do algoritmo acelerador. Ou seja, deseja-se fazer uma mudança de variáveis para se obter uma recursão desacoplada de modo que $\delta \mathbf{p}[n]$ dependa de $\delta \mathbf{p}[n-1]$ e de $\mathbf{r}[n-1]$, mas $\mathbf{r}[n]$ dependa apenas de $\mathbf{r}[n-1]$. Uma primeira equação é resultado de determinar os valores de A e B que permitam escrever $\mathbf{r}[n]$ de forma recursiva em função apenas de $\mathbf{r}[n-1]$.

Então substituindo (C.4) em (C.6):

$$\mathbf{r}[n] = A (\mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o[n]) + B \mathbf{q}[n],$$

fazendo uso de (C.1c), (C.1d) e de (C.3):

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}[n] &= A (\mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n]) - A \mathbf{p}_o[n] + B \mathbf{q}[n] \\
 &= A \mathbf{p}[n-1] - A \mathbf{p}_o[n] + (\alpha A + B) \mathbf{q}[n] \\
 &= A \mathbf{p}[n-1] - A \mathbf{p}_o[n-1] - A(h-1) \mathbf{p}_o[n-1] - A \mathbf{v}[n-1] + \\
 &\quad + \frac{\gamma (\alpha A + B)}{\alpha + \gamma} \mathbf{q}[n-1] - \frac{\alpha \gamma (\alpha A + B)}{\alpha + \gamma} \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] g[n],
 \end{aligned}$$

agora, usando (C.4):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] = & A\delta\mathbf{p}[n-1] + \frac{\gamma(\alpha A + B)}{\alpha + \gamma}\mathbf{q}[n-1] - A\mathbf{v}[n-1] + \\ & -A(h-1)\mathbf{p}_o[n-1] - \frac{\alpha\gamma(\alpha A + B)}{\alpha + \gamma}\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]g[n]. \end{aligned} \quad (\text{C.7})$$

Substituindo (C.5) na equação (C.1b) resulta em:

$$\begin{aligned} g[n] = & \frac{e_a[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} + \frac{\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \\ = & \frac{\mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1] - (h-1)\mathbf{x}^T[n]\mathbf{p}_o[n-1] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1] + \eta[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} + \\ & + \frac{\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{q}[n-1]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}, \end{aligned}$$

o qual é substituído em (C.7) permitindo escrever

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] = & \left(\mathbf{I} - \left(\frac{\alpha A + B}{A(\alpha + \gamma)} \right) \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) A\delta\mathbf{p}[n-1] + \\ & + \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) B\mathbf{q}[n-1] + \\ & - (h-1) \left(A\mathbf{I} - \left(\frac{\alpha A + B}{\alpha + \gamma} \right) \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{p}_o[n-1] + \\ & - \left(A\mathbf{I} - \left(\frac{\alpha A + B}{\alpha + \gamma} \right) \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{v}[n-1] + \\ & - \left(\frac{\alpha\gamma(\alpha A + B)}{\alpha + \gamma} \right) \frac{\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n], \end{aligned} \quad (\text{C.8})$$

pode-se observar nesta equação que se os fatores que multiplicam $A\delta\mathbf{p}[n-1]$ e $B\mathbf{q}[n-1]$ forem iguais, é possível escrever $\mathbf{r}[n]$ em função de $\mathbf{r}[n-1]$. Então

$$\begin{aligned} \mathbf{I} - \left(\frac{\alpha A + B}{A(\alpha + \gamma)} \right) \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} = \\ \left(\frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \right) \mathbf{I} - \left(\frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \right) \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \end{aligned}$$

se

$$1 = \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)} \quad (\text{C.9})$$

e

$$\frac{\alpha A + B}{A(\alpha + \gamma)} = \frac{\gamma(\alpha A + B)}{B(\alpha + \gamma)}. \quad (\text{C.10})$$

Da equação (C.9) tem-se

$$B\alpha + B\gamma = \alpha\gamma A + B\gamma$$

$$B = \gamma A$$

igual resultado é obtido da equação (C.10), portanto pode-se definir qualquer valor para A ou B . De acordo com isto, e para simplificar os cálculos, define-se

$$A = 1 \tag{C.11}$$

portanto

$$B = \gamma. \tag{C.12}$$

Desta forma, a variável a ser utilizada para a simplificação do algoritmo acelerador é da forma

$$\mathbf{r}[n] = \delta\mathbf{p}[n] + \gamma\mathbf{q}[n]. \tag{C.13}$$

Agora, substituindo os valores de A e B em (C.8) obtém-se:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] = & \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \delta\mathbf{p}[n-1] + \\ & + \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \gamma\mathbf{q}[n-1] + \\ & - (h-1) \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{p}_o[n-1] + \\ & - \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{v}[n-1] + \\ & - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n], \end{aligned} \tag{C.14}$$

definindo

$$\mathbf{\Gamma}[n] = \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}, \tag{C.15}$$

e fazendo uso de (C.13) a equação (C.14) fica da forma

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] = & \mathbf{\Gamma}[n] (\delta\mathbf{p}[n-1] + \gamma\mathbf{q}[n-1]) - (h-1)\mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{p}_o[n-1] + \\ & - \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{v}[n-1] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n] \\ = & \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - (h-1)\mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{p}_o[n-1] + \\ & - \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{v}[n-1] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \eta[n], \end{aligned} \tag{C.16}$$

agora, do termo que multiplica $\eta[n]$ tem-se:

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} &= \left(\frac{\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right)^T \\
 &= \left(\frac{\mathbf{x}^T[n] + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] - \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right)^T \\
 &= \left(\frac{(1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n])\mathbf{x}^T[n] - \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right)^T \\
 &= \left(\mathbf{x}^T[n] - \frac{\alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right)^T \\
 &= \left(\mathbf{x}^T[n] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} \right) \right)^T
 \end{aligned}$$

que de acordo com (C.15) pode-se escrever como

$$\begin{aligned}
 \frac{\mathbf{x}[n]}{1 + \alpha\gamma\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]} &= (\mathbf{x}^T[n]\mathbf{\Gamma}[n])^T \\
 &= \mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n],
 \end{aligned}$$

substituindo finalmente este resultado em (C.16) chega-se a

$$\begin{aligned}
 \mathbf{r}[n] &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - (h-1)\mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{p}_o[n-1] + \\
 &\quad -\mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{v}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n]\eta[n].
 \end{aligned} \tag{C.17}$$

A segunda equação que permite simplificar o algoritmo acelerador relaciona a diferença entre os coeficientes $\delta\mathbf{p}$. Resolvendo a equação (C.13) para $\mathbf{q}[n]$ tem-se

$$\mathbf{q}[n] = \frac{1}{\gamma}\mathbf{r}[n] - \frac{1}{\gamma}\delta\mathbf{p}[n],$$

este resultado é substituído na equação (C.1) da qual é subtraído $\mathbf{p}_o[n]$:

$$\mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o[n] = \mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}_o[n] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n] - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\mathbf{p}[n]$$

isto, de acordo com (C.3) e (C.4) pode-se escrever como

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] - h\mathbf{p}_o[n-1] - \mathbf{v}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n] - \frac{\alpha}{\gamma}\delta\mathbf{p}[n] \\ \left(1 + \frac{\alpha}{\gamma}\right)\delta\mathbf{p}[n] &= \mathbf{p}[n-1] - \mathbf{p}_o[n-1] - (h-1)\mathbf{p}_o[n-1] - \mathbf{v}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n] \\ \left(\frac{\alpha+\gamma}{\gamma}\right)\delta\mathbf{p}[n] &= \delta\mathbf{p}[n-1] - (h-1)\mathbf{p}_o[n-1] - \mathbf{v}[n-1] + \frac{\alpha}{\gamma}\mathbf{r}[n]\end{aligned}$$

de onde finalmente

$$\begin{aligned}\delta\mathbf{p}[n] &= \left(\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right)\delta\mathbf{p}[n-1] - \left(\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right)(h-1)\mathbf{p}_o[n-1] + \\ &\quad - \left(\frac{\gamma}{\alpha+\gamma}\right)\mathbf{v}[n-1] + \left(\frac{\alpha}{\alpha+\gamma}\right)\mathbf{r}[n].\end{aligned}$$

Portanto o novo sistema que simplifica e representa o algoritmo acelerador versão γ é dado por:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}[n] &= \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - (h-1)\mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{p}_o[n-1] + \\ &\quad - \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{v}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n]\eta[n] \\ \delta\mathbf{p}[n] &= a\delta\mathbf{p}[n-1] - a(h-1)\mathbf{p}_o[n-1] + \\ &\quad - a\mathbf{v}[n-1] + b\mathbf{r}[n]\end{aligned}$$

onde

$$a = \frac{\gamma}{\alpha+\gamma} = 1 - b. \quad (\text{C.18})$$

Assumindo que $h \rightarrow 1$, o sistema fica

$$\mathbf{r}[n] = \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{r}[n-1] - \mathbf{\Gamma}[n]\mathbf{v}[n-1] - \alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{\Gamma}^T[n]\mathbf{x}[n]\eta[n] \quad (\text{C.19a})$$

$$\delta\mathbf{p}[n] = a\delta\mathbf{p}[n-1] - a\mathbf{v}[n-1] + b\mathbf{r}[n], \quad (\text{C.19b})$$

onde $\mathbf{\Gamma}[n]$ é dado pela equação (C.15) e a e b são definidos na equação (C.18). Igualmente, para este caso, a equação do erro *a priori* (C.5) pode ser reescrita na forma

$$e_a[n] = \mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1] + \eta[n]. \quad (\text{C.20})$$

Com estas equações pode-se realizar uma análise dos momentos de primeira e segunda ordens de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta\mathbf{p}[n]$ semelhante à análise empregada para o cálculo dos momentos do algoritmo LMS (Solo; Kong, 1995). Para isso faz-se uso das seguintes suposições simplificadoras:

- $\mathbf{x}[n]$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média nula com matriz de covariância

$$\mathbf{R}_x = E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \}.$$

- $\eta[n]$ é um ruído branco Gaussiano de média nula e variância σ_η^2 .
- $\mathbf{v}[n]$ é um vetor de ruído branco Gaussiano de média nula com matriz de covariância

$$\mathbf{V} = E \{ \mathbf{v}[n] \mathbf{v}^T[n] \}.$$

- $\mathbf{x}[n]$, $\mathbf{v}[n]$ e $\eta[n]$ são estatisticamente independentes.
- A ordem M do filtro adaptativo é grande o suficiente para fazer a variável $\sqrt{\frac{1}{M}} \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]$ se comportar de forma “lenta” em comparação com $\mathbf{x}[n]$, ou seja que existe uma baixa correlação entre $\mathbf{x}$ e $\|\mathbf{x}\|^2$.

Esta última suposição possibilita a aplicação da propriedade das médias (“averaging property”)¹ (Samson; Reddy, 1983).

C.2 Análise dos momentos de primeira ordem

Para calcular os momentos de primeira ordem para o sistema dinâmico dado pelas equações (C.19) determina-se primeiro a esperança da equação (C.15):

$$\begin{aligned} E\{\mathbf{\Gamma}[n]\} &= E \left\{ \mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\} \\ &= \mathbf{I} - E \left\{ \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\} \end{aligned}$$

na qual é aplicada a propriedade das médias (para M grande), a primeira suposição simplificadora, e considerando as propriedades do traço

$$\text{tr} \{ \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{y}^T \} = \text{tr} \{ \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \} = \mathbf{y}^T \mathbf{A} \mathbf{x} = \mathbf{x}^T \mathbf{A}^T \mathbf{y}, \quad (\text{C.21})$$

¹PROPRIEDADE DAS MÉDIAS: Sejam dois processos conjuntamente estacionários $x(t)$ e $y(t)$. Se $y(t)$ varia lentamente com respeito a $x(t)$, então a variável aleatória $y(t)$ é “quase” independente de $x(t)$. Isto significa que

$$E\{g(x(\cdot))f(y(\cdot))\} \cong E\{g(x(\cdot))\} \cdot E\{f(y(\cdot))\}.$$

onde $tr\{\cdot\}$ corresponde ao traço da matriz, obtém-se:

$$\begin{aligned}
 E\{\Gamma[n]\} &\approx \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1 E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}}{1 + \alpha\gamma E\{\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\}} \\
 &= \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1 E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}}{1 + \alpha\gamma E\{tr\{\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}} \\
 &= \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x}{1 + \alpha\gamma tr\{\mathbf{M}_1 E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}} \\
 &= \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x}{1 + \alpha\gamma tr\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\}}
 \end{aligned}$$

portanto

$$E\{\Gamma[n]\} = \mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma}{\theta}\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x, \quad (\text{C.22})$$

onde

$$\theta = 1 + \alpha\gamma tr\{\mathbf{M}_1\mathbf{R}_x\}. \quad (\text{C.23})$$

Agora, determina-se a esperança de $\mathbf{r}[n]$ dada pela equação (C.19a). Para calcular $E\{\mathbf{r}[n]\}$ faz-se uso da esperança condicional. Observa-se da equação (C.19a), que ela depende da “histórias” $\mathbf{X}_n$, $\boldsymbol{\eta}_n$, e $\mathbf{v}_{n-1}$ onde

$$\mathbf{X}_n = \{\mathbf{x}[n], \mathbf{x}[n-1], \dots, \mathbf{x}[0]\}, \quad (\text{C.24a})$$

$$\boldsymbol{\eta}_n = \{\eta[n], \eta[n-1], \dots, \eta[0]\}, \quad (\text{C.24b})$$

e

$$\mathbf{v}_{n-1} = \{\mathbf{v}[n-1], \mathbf{v}[n-2], \dots, \mathbf{v}[0]\}. \quad (\text{C.24c})$$

Aplica-se a esperança condicional na equação (C.19a), tendo-se em conta a equação (C.22) e, que de acordo com as hipóteses simplificadoras $\mathbf{x}[n]$, $\eta[n]$ e $\mathbf{v}[n-1]$ são esta-

tisticamente independentes e de média nula:

$$\begin{aligned}
E \{ \mathbf{r}[n] \} &= E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \} - E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \} - \alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n] \} \\
&= E \{ E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \} - E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \} + \\
&\quad - \alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n] \} \\
&= E \{ E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \mathbf{r}[n-1] \} - E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \} E \{ \mathbf{v}[n-1] \} + \\
&\quad - \alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \} E \{ \eta[n] \} \\
&= E \left\{ \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) \mathbf{r}[n-1] \right\} - E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \} (\mathbf{0}) + \\
&\quad - \alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \} (0)
\end{aligned}$$

finalmente

$$E \{ \mathbf{r}[n] \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) E \{ \mathbf{r}[n-1] \}.$$

Agora determina-se a esperança para $\delta \mathbf{p}[n]$ dada pela equação (C.19b):

$$\begin{aligned}
E \{ \delta \mathbf{p}[n] \} &= a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} - a E \{ \mathbf{v}[n-1] \} + b E \{ \mathbf{r}[n] \} \\
&= a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} - a \mathbf{0} + b E \{ \mathbf{r}[n] \} \\
&= a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} + b E \{ \mathbf{r}[n] \}.
\end{aligned}$$

Portanto, os momentos de primeira ordem de $\mathbf{r}[n]$ e $\delta \mathbf{p}[n]$ satisfazem as equações:

$$E \{ \mathbf{r}[n] \} = \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right) E \{ \mathbf{r}[n-1] \} \quad (\text{C.25})$$

$$E \{ \delta \mathbf{p}[n] \} = a E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \} + b E \{ \mathbf{r}[n] \} \quad (\text{C.26})$$

onde

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}, \quad b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma},$$

e

$$\theta = 1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}.$$

C.3 Análise dos momentos de segunda ordem

Determina-se agora os momentos de segunda ordem, para isto são definidas as matrizes de covariância

$$\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}, \quad (\text{C.27a})$$

e

$$\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}, \quad (\text{C.27b})$$

e de covariância cruzada

$$\mathcal{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}. \quad (\text{C.27c})$$

Avaliação de $\mathcal{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$

Para calcular $\mathcal{R}[n]$ inicialmente determina-se o produto $\mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n]$, da equação (C.19a):

$$\begin{aligned} \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] &= \left(\mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] - \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] - \alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \eta[n] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \right) \\ &= \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - \mathbf{S}_1[n] - \alpha \gamma \mathbf{S}_2[n] + \\ &\quad - \mathbf{S}_1^T[n] + \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] + \\ &\quad + \alpha \gamma \mathbf{S}_3[n] - \alpha \gamma \mathbf{S}_2^T[n] + \alpha \gamma \mathbf{S}_3^T[n] + \\ &\quad + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta^2[n] \end{aligned} \quad (\text{C.28})$$

onde

$$\mathbf{S}_1[n] = \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n],$$

$$\mathbf{S}_2[n] = \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n],$$

e

$$\mathbf{S}_3[n] = \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n].$$

Para determinar $E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$ observe-se que $\mathbf{r}[n]$ depende das “historias” $\mathbf{X}_n$, $\boldsymbol{\eta}_n$, e $\mathbf{v}_{n-1}$ definidas em (C.24), pelo que faz-se uso da esperança condicional. Inicialmente determina-se as esperanças de $\mathbf{S}_1[n]$, $\mathbf{S}_2[n]$ e $\mathbf{S}_3[n]$. Como $\mathbf{v}[n-1]$ e $\eta[n]$ são independentes

de $\mathbf{x}[n]$ e entre si, e sendo que $\mathbf{v}[n-1]$ e $\eta[n]$ são processos brancos, tem-se

$$E \{ \mathbf{S}_1[n] \} = \mathbf{0}, \quad (\text{C.29a})$$

$$E \{ \mathbf{S}_2[n] \} = \mathbf{0} \quad (\text{C.29b})$$

e

$$E \{ \mathbf{S}_3[n] \} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.29c})$$

Retorna-se à equação (C.28), e lhe é aplicada a esperança:

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} &= E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} - E \{ \mathbf{S}_1[n] \} - \alpha \gamma E \{ \mathbf{S}_2[n] \} + \\ &\quad - E \{ \mathbf{S}_1^T[n] \} + E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\ &\quad + \alpha \gamma E \{ \mathbf{S}_3[n] \} - \alpha \gamma E \{ \mathbf{S}_2^T[n] \} + \alpha \gamma E \{ \mathbf{S}_3^T[n] \} + \\ &\quad + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \eta^2[n] \} \mathbf{M}_1 \end{aligned}$$

substituindo nesta equação os resultados (C.29) obtém-se

$$\begin{aligned} E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \} &= E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\ &\quad + E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\ &\quad + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{\Gamma}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \eta^2[n] \} \mathbf{M}_1, \end{aligned} \quad (\text{C.30})$$

observa-se que o primeiro e o terceiro termo foram calculados na análise sem tracking.

Para completar basta então calcular $E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \}$, para isso substitui-se $\mathbf{\Gamma}[n]$ dada pela equação (C.15):

$$\begin{aligned} &E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\ &= E \left\{ \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) \right\} \\ &= E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} - E \left\{ \frac{\alpha \gamma \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\} + \\ &\quad - E \left\{ \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\} + \\ &\quad + E \left\{ \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{(1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n])^2} \right\}, \end{aligned}$$

onde, aplicando a propriedade das médias:

$$\begin{aligned}
& E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\
&= E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} - \frac{\alpha \gamma E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \mathbf{M}_1}{E \{ 1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}} + \\
&\quad - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \}}{E \{ 1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}} + \\
&\quad + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \mathbf{M}_1}{E \{ 1 + 2\alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] + \alpha^2 \gamma^2 \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}}
\end{aligned}$$

e fazendo uso da esperança condicional, tem-se

$$\begin{aligned}
& E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\
&= E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} - \frac{\alpha \gamma E \{ E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \} \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma E \{ \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} + \\
&\quad - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \}}{1 + \alpha \gamma E \{ \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} + \\
&\quad + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 E \{ E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] (\mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{x}[n])^2 \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \} \mathbf{M}_1}{1 + 2\alpha \gamma E \{ \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \} + \alpha^2 \gamma^2 E \{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}}.
\end{aligned}$$

Lembrando que de acordo as considerações simplificadoras $\mathbf{V} = E \{ \mathbf{v}[n] \mathbf{v}^T[n] \}$, e que, segundo (Solo; Kong, 1995)

$$E \{ \mathbf{x} \mathbf{x}^T (\beta^T \mathbf{x})^2 \} = \mathbf{R} \beta^T \mathbf{R} \beta + 2 \mathbf{R} \beta \beta^T \mathbf{R},$$

$$\begin{aligned}
& E \{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\
&= \mathbf{V} - \frac{\alpha \gamma E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{R}_x \} \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{R}_x \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \}}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} + \\
&\quad + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{R}_x \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{v}[n-1] + 2 \mathbf{R}_x \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{R}_x \} \mathbf{M}_1}{1 + 2\alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \} + \alpha^2 \gamma^2 E \{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}} \\
&= \mathbf{V} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V}}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}} + \\
&\quad + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x E \{ \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{v}[n-1] \} \mathbf{M}_1 + 2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{1 + 2\alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} + \alpha^2 \gamma^2 E \{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}},
\end{aligned}$$

agora, de acordo com Bar-Shalom; Li (1993)

$$E \{ \mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} \mathbf{x}^T \mathbf{B} \mathbf{x} \} = \text{tr} \{ \mathbf{A} \mathbf{R}_x \} \text{tr} \{ \mathbf{B} \mathbf{R}_x \} + 2 \text{tr} \{ \mathbf{A} \mathbf{R}_x \mathbf{B} \mathbf{R}_x \},$$

então

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \right\} \\
&= \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{1 + \alpha\gamma \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}} - \frac{\alpha\gamma \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V}}{1 + \alpha\gamma \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}} + \\
&+ \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x E \left\{ \operatorname{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} \right\} \mathbf{M}_1 + 2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{1 + 2\alpha\gamma \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} + \alpha^2 \gamma^2 \left\{ \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} + 2\operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} \right\}}.
\end{aligned}$$

Fazendo uso da equação (C.23) e definindo

$$\Psi = \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} \operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \} + 2\operatorname{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}$$

tem-se

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \right\} \\
&= \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \\
&+ \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \operatorname{tr} \{ \mathbf{R}_x E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} \} \mathbf{M}_1 + 2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi},
\end{aligned}$$

portanto,

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \right\} \\
&= \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \\
&+ \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \operatorname{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{V} \} \mathbf{M}_1 + 2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi}. \tag{C.31}
\end{aligned}$$

Substituindo este resultado na equação (C.30), fazendo uso dos resultados obtidos na

análise sem tracking e, lembrando que $\mathbf{R}[n] = E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}$ tem-se finalmente:

$$\begin{aligned}
\mathbf{R}[n] &= \mathbf{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{R}[n-1] + \\
&+ \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{R}[n-1] \} \mathbf{M}_1 + \\
&+ \frac{2\alpha^2 \gamma^2}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + \\
&+ \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \\
&+ \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{V} \} \mathbf{M}_1 + \\
&+ \frac{2\alpha^2 \gamma^2}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + \\
&+ \frac{\alpha^2 \gamma^2}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \sigma_\eta^2.
\end{aligned} \tag{C.32}$$

Avaliação de $\mathbf{V}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}$

Para determinar $\mathbf{V}[n]$ inicialmente é calculado o produto $\delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n]$, das equações (C.19):

$$\begin{aligned}
\delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] &= \left(a \delta \mathbf{p}[n-2] - a \mathbf{v}[n-2] + b \mathbf{r}[n-1] \right) \cdot \\
&\cdot \left(\mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \right) \\
&= a \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - a \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] + \\
&- \alpha \gamma a \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] + \\
&- a \mathbf{v}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] + a \mathbf{v}[n-2] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] + \\
&+ \alpha \gamma a \mathbf{v}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \\
&+ b \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] - b \mathbf{r}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] + \\
&- b \mathbf{r}[n-1] \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n]
\end{aligned} \tag{C.33}$$

onde $\mathbf{\Gamma}[n]$ e a são dados pelas equações (C.15) e (C.18) respectivamente.

Para determinar $E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \}$ observe-se que $\mathbf{r}[n]$ depende das “histórias” $\mathbf{X}_n$, $\boldsymbol{\eta}_n$, e $\mathbf{v}_{n-1}$ definidas em (C.24), pelo que faz-se uso da esperança condicional.

Inicialmente,

$$\begin{aligned}
& E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \} \\
&= aE \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} - aE \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\
&\quad - \alpha \gamma aE \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \} + \\
&\quad - aE \{ \mathbf{v}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + aE \{ \mathbf{v}[n-2] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\
&\quad + \alpha \gamma aE \{ \mathbf{v}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \} + \\
&\quad + bE \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} - bE \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\
&\quad - \alpha \gamma bE \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \}, \tag{C.34}
\end{aligned}$$

como $\mathbf{v}[n]$, $\mathbf{x}[n]$ e $\eta[n]$ são independentes, e $\mathbf{v}[n]$ é um processo branco, tem-se

$$E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} = \mathbf{0},$$

$$E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \} = \mathbf{0},$$

$$E \{ \mathbf{v}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} = \mathbf{0},$$

$$E \{ \mathbf{v}[n-2] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} = \mathbf{0},$$

$$E \{ \mathbf{v}[n-2] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \} = \mathbf{0},$$

$$E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} = \mathbf{0},$$

e

$$E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{\Gamma}[n] \mathbf{M}_1 \eta[n] \} = \mathbf{0}.$$

Substitui-se estes resultados em (C.34) para se obter

$$\begin{aligned}
E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \} &= aE \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} + \\
&\quad + bE \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \}, \tag{C.35}
\end{aligned}$$

agora, analisa-se individualmente cada uma das esperanças

- Cálculo de $E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \}$

Substituindo-se a equação (C.15):

$$\begin{aligned}
 & E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\
 &= E \left\{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) \right\} \\
 &= E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \} - \alpha \gamma E \left\{ \frac{\delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\} \mathbf{M}_1
 \end{aligned}$$

aplicando a propriedade das médias

$$\begin{aligned}
 & E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\
 &= E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \} - \alpha \gamma \frac{E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \}}{E \{ 1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}} \mathbf{M}_1
 \end{aligned}$$

aplicando a esperança condicional e fazendo uso das equações (C.23) e (C.27c)

$$\begin{aligned}
 & E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \} \\
 &= \mathbf{V}[n-1] - \alpha \gamma \frac{E \{ E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \}}{1 + \alpha \gamma E \{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \}} \mathbf{M}_1 \\
 &= \mathbf{V}[n-1] - \alpha \gamma \frac{E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1} \} \}}{1 + \alpha \gamma E \{ \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} \mathbf{M}_1 \\
 &= \mathbf{V}[n-1] - \alpha \gamma \frac{E \{ \delta \mathbf{p}[n-2] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{R}_x \}}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 E \{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \} \}} \mathbf{M}_1 \tag{C.36} \\
 &= \mathbf{V}[n-1] - \alpha \gamma \frac{\mathbf{V}[n-1] \mathbf{R}_x}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \}} \mathbf{M}_1 \\
 &= \mathbf{V}[n-1] - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathbf{V}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1
 \end{aligned}$$

- Cálculo de $E \{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \}$

Substituindo-se a equação (C.15):

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \left(\mathbf{I} - \frac{\alpha \gamma \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right) \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \right\} - E \left\{ \frac{\alpha \gamma \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1}{1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]} \right\}
\end{aligned}$$

aplicando a propriedade das médias, a esperança condicional e a equação (C.27a):

$$\begin{aligned}
& E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{\Gamma}^T[n] \right\} \\
&= E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \right\} - \alpha \gamma \frac{E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \right\}}{E \left\{ 1 + \alpha \gamma \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right\}} \mathbf{M}_1 \\
&= \mathcal{R}[n-1] - \alpha \gamma \frac{E \left\{ E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1} \right\} \right\}}{1 + \alpha \gamma E \left\{ \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \right\}} \mathbf{M}_1 \\
&= \mathcal{R}[n-1] - \alpha \gamma \frac{E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] E \left\{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1} \right\} \right\}}{1 + \alpha \gamma E \left\{ \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \right\} \right\}} \mathbf{M}_1 \tag{C.37} \\
&= \mathcal{R}[n-1] - \alpha \gamma \frac{E \left\{ \mathbf{r}[n-1] \mathbf{r}^T[n-1] \right\} \mathbf{R}_x}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 E \left\{ \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \right\} \right\}} \mathbf{M}_1 \\
&= \mathcal{R}[n-1] - \alpha \gamma \frac{\mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x}{1 + \alpha \gamma \text{tr} \left\{ \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \right\}} \mathbf{M}_1 \\
&= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1
\end{aligned}$$

de acordo com as condições simplificadoras e a equação (C.23).

Finalmente, substitui-se as equações (C.36) e (C.37) na equação (C.35), o que permite obter:

$$\begin{aligned}
E \left\{ \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \right\} &= a \left\{ \mathcal{V}[n-1] - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathcal{V}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right\} + \\
&\quad + b \left\{ \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha \gamma}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \right\},
\end{aligned}$$

finalmente aplicando (C.27c)

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}[n] &= a \mathcal{V}[n-1] - \frac{a \alpha \gamma}{\theta} \mathcal{V}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + \\
&\quad + b \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha \gamma b}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1.
\end{aligned} \tag{C.38}$$

Avaliação de $\mathcal{P}[n] = E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}$

Para calcular $\mathcal{P}[n]$ inicialmente determina-se o produto $\delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n]$, da equação (C.19b):

$$\begin{aligned} \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] &= \left(a \delta \mathbf{p}[n-1] - a \mathbf{v}[n-1] + b \mathbf{r}[n] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(a \delta \mathbf{p}^T[n-1] - a \mathbf{v}^T[n-1] + b \mathbf{r}^T[n] \right) \\ &= a^2 \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] - a^2 \mathbf{S}_4[n] + \\ &\quad + ab \mathbf{S}_5[n] - a^2 \mathbf{S}_4^T[n] + \\ &\quad + a^2 \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] - ab \mathbf{S}_6[n] + \\ &\quad + ab \mathbf{S}_5^T[n] - ab \mathbf{S}_6^T[n] + b^2 \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \end{aligned} \quad (\text{C.39})$$

onde

$$\begin{aligned} \mathbf{S}_4[n] &= \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1], \\ \mathbf{S}_5[n] &= \delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n] \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{S}_6[n] = \mathbf{v}[n-1] \mathbf{r}^T[n].$$

Para determinar $E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \}$ observa-se que $\delta \mathbf{p}[n]$ e $\mathbf{r}^T[n]$ dependem da “história” $\mathbf{v}_n$ dada por (C.24c), pelo que faz-se uso da esperança condicional. Aplicando a esperança na equação (C.39)

$$\begin{aligned} E \{ \delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n] \} &= a^2 E \{ \delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \} - a^2 E \{ \mathbf{S}_4[n] \} + \\ &\quad + ab E \{ \mathbf{S}_5[n] \} - a^2 E \{ \mathbf{S}_4^T[n] \} + \\ &\quad + a^2 E \{ \mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \} - ab E \{ \mathbf{S}_6[n] \} + \\ &\quad + ab E \{ \mathbf{S}_5^T[n] \} - ab E \{ \mathbf{S}_6^T[n] \} + b^2 E \{ \mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n] \}, \end{aligned} \quad (\text{C.40})$$

Considerando que $\mathbf{v}[n]$ é um processo branco e independente das demais variáveis, tem-se

$$E \{ \mathbf{S}_4[n] \} = \mathbf{0} \quad (\text{C.41})$$

e

$$E \{ \mathbf{S}_6[n] \} = \mathbf{0}. \quad (\text{C.42})$$

Substituindo estes resultados em (C.40) e considerando as equações (C.27) chega-se a:

$$\mathcal{P}[n] = a^2 \mathcal{P}[n-1] + ab \mathcal{V}[n] + a^2 \mathbf{V} + ab \mathcal{V}^T[n] + b^2 \mathcal{R}[n]. \quad (\text{C.43})$$

Análise de $E\{e_a^2[n]\}$

Para completar a análise de segunda ordem analisa-se agora $E\{e_a^2[n]\}$. Então inicialmente realiza-se o produto do erro *a priori*, equação (C.20):

$$\begin{aligned} e_a^2[n] &= \left(\mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1] + \eta[n] \right) \cdot \\ &\quad \cdot \left(\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n] - \mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n] + \eta[n] \right) \\ &= \mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n] - \mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n] + \\ &\quad + \mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1]\eta[n] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n] + \\ &\quad + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1]\eta[n] + \\ &\quad + \delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\eta[n] - \mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\eta[n] + \eta^2[n], \end{aligned}$$

aplicando-se a esperança:

$$\begin{aligned} E\{e_a^2[n]\} &= E\{\mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\} - E\{\mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\} + \\ &\quad + E\{\mathbf{x}^T[n]\delta\mathbf{p}[n-1]\eta[n]\} - E\{\mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\} + \\ &\quad + E\{\mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\} - E\{\mathbf{x}^T[n]\mathbf{v}[n-1]\eta[n]\} + \\ &\quad + E\{\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\eta[n]\} - E\{\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\eta[n]\} + E\{\eta^2[n]\}, \end{aligned} \tag{C.44}$$

aplicando as propriedades do traço e considerando as condições simplificadoras, obtém-se

$$\begin{aligned} E\{e_a^2[n]\} &= E\{tr\{\delta\mathbf{p}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad - E\{tr\{\delta\mathbf{p}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad - E\{tr\{\mathbf{v}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad + E\{tr\{\mathbf{v}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \sigma_\eta^2, \\ &= \sigma_\eta^2 + tr\{E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad - tr\{E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad - tr\{E\{\mathbf{v}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad + tr\{E\{\mathbf{v}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\}, \end{aligned}$$

fazendo uso da esperança condicional:

$$\begin{aligned} E\{e_a^2[n]\} &= \sigma_\eta^2 + tr\{E\{\delta\mathbf{p}[n-1]\delta\mathbf{p}^T[n-1]E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}\}\}\} + \\ &\quad - tr\{E\{\delta\mathbf{p}[n-1]E\{\mathbf{v}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}, \mathbf{v}_{n-2}\}\}\} + \\ &\quad - tr\{E\{E\{\mathbf{v}[n-1] \mid \mathbf{v}_{n-2}\}\delta\mathbf{p}^T[n-1]\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\}\} + \\ &\quad + tr\{E\{\mathbf{v}[n-1]\mathbf{v}^T[n-1]E\{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n] \mid \mathbf{X}_{n-1}\}\}\}, \end{aligned}$$

então, fazendo uso das considerações iniciais:

$$E \{e_a^2[n]\} = \sigma_\eta^2 + tr \{E \{\delta \mathbf{p}[n-1] \delta \mathbf{p}^T[n-1] \mathbf{R}_x\}\} + tr \{E \{\mathbf{v}[n-1] \mathbf{v}^T[n-1] \mathbf{R}_x\}\},$$

de onde finalmente, fazendo uso das equações (C.27)

$$E \{e_a^2[n]\} = \sigma_\eta^2 + tr \{\mathcal{P}[n-1] \mathbf{R}_x\} + tr \{\mathbf{V} \mathbf{R}_x\}. \quad (\text{C.45})$$

Resumindo, as matrizes de covariância $\mathcal{R}[n] = E \{\mathbf{r}[n] \mathbf{r}^T[n]\}$ e $\mathcal{P}[n] = E \{\delta \mathbf{p}[n] \delta \mathbf{p}^T[n]\}$, de covariância cruzada $\mathcal{V}[n] = E \{\delta \mathbf{p}[n-1] \mathbf{r}^T[n]\}$ e $E \{e_a^2[n]\}$ satisfazem:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[n] &= \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] + \\ &+ \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x tr \{\mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1]\} \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \frac{2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\ &+ \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 - \frac{\alpha\gamma}{\theta} \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x tr \{\mathbf{R}_x \mathbf{V}\} \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \\ &+ \frac{2\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} + \frac{\alpha^2 \gamma^2 \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1}{2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi} \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

$$\mathcal{P}[n] = a^2 \mathcal{P}[n-1] + ab \mathcal{V}[n] + a^2 \mathbf{V} + ab \mathcal{V}^T[n] + b^2 \mathcal{R}[n]$$

$$\mathcal{V}[n] = a \mathcal{V}[n-1] - \frac{a\alpha\gamma}{\theta} \mathcal{V}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 + b \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma b}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1$$

$$E \{e_a^2[n]\} = \sigma_\eta^2 + tr \{\mathcal{P}[n-1] \mathbf{R}_x\} + tr \{\mathbf{V} \mathbf{R}_x\}$$

onde

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma}$$

$$b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma}$$

$$\theta = 1 + \alpha\gamma tr \{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\}$$

$$\Psi = tr^2 \{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\} + 2tr \{\mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x \mathbf{M}_1 \mathbf{R}_x\}.$$

Para simplificar mais ainda a análise, considera-se a matriz $\mathbf{M}_1$ da forma $\mathbf{M}_1 = m_1 \mathbf{I}$,

sendo $\mathbf{I}$ a matriz identidade, ficando portanto as equações anteriores da forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[n] = & \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] + \\ & + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \}}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\ & + \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{V} \}}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\ & + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} \sigma_\eta^2 \end{aligned} \quad (\text{C.46a})$$

$$\mathcal{P}[n] = a^2 \mathcal{P}[n-1] + ab \mathcal{V}[n] + a^2 \mathbf{V} + ab \mathcal{V}^T[n] + b^2 \mathcal{R}[n] \quad (\text{C.46b})$$

$$\mathcal{V}[n] = a \mathcal{V}[n-1] - \frac{a\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathcal{V}[n-1] \mathbf{R}_x + b \mathcal{R}[n-1] - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \mathcal{R}[n-1] \mathbf{R}_x \quad (\text{C.46c})$$

$$E \{ e_a^2[n] \} = \sigma_\eta^2 + \text{tr} \{ \mathcal{P}[n-1] \mathbf{R}_x \} + \text{tr} \{ \mathbf{V} \mathbf{R}_x \} \quad (\text{C.46d})$$

onde

$$a = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \quad (\text{C.47a})$$

$$b = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \quad (\text{C.47b})$$

$$\theta = 1 + \alpha\gamma m_1 \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \} \quad (\text{C.47c})$$

$$\Psi = m_1^2 \text{tr}^2 \{ \mathbf{R}_x \} + 2m_1^2 \text{tr} \{ \mathbf{R}_x^2 \}. \quad (\text{C.47d})$$

C.4 Análise na convergência - Propriedades de *tracking*

Ao considerar $n \rightarrow \infty$ pode-se obter informação importante relacionada com o sistema após a convergência. Inicialmente considera-se a diagonalização da matriz $\mathbf{R}_x$:

$$\mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T = \mathbf{\Lambda} = \text{diag}(\lambda_1 \cdots \lambda_M), \quad (\text{C.48})$$

onde

$$\mathbf{Q} = (\mathbf{q}_1 \cdots \mathbf{q}_M), \quad (\text{C.49})$$

sendo $\mathbf{q}_i$, $1 \leq u \leq M$, os autovetores de $\mathbf{R}_x$. Ademais cumpre-se que

$$\mathbf{Q}\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}, \quad (\text{C.50})$$

onde $\mathbf{I}$ é a matriz identidade.

Analisando inicialmente o caso da matriz $\mathcal{R}[n]$ dada pela equação (C.46a), vê-se que para quando $n \rightarrow \infty$, esta satisfaz

$$\begin{aligned} \mathcal{R}[\infty] &= \mathcal{R}[\infty] - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathcal{R}[\infty] \mathbf{R}_x - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] + \\ &+ \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] \}}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] \mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\ &+ \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{V} \}}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \\ &+ \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \mathbf{R}_x}{2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi} \sigma_\eta^2, \end{aligned}$$

de onde definindo

$$\kappa = 2\theta - 1 + \alpha^2\gamma^2\Psi \quad (\text{C.51})$$

tem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= -\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathcal{R}[\infty] \mathbf{R}_x - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] \} + \\ &+ \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{R}_x \mathcal{R}[\infty] \mathbf{R}_x + \mathbf{V} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{V} \mathbf{R}_x - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \mathbf{V} + \\ &+ \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{R}_x \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{V} \} + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{R}_x \mathbf{V} \mathbf{R}_x + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{R}_x \sigma_\eta^2. \end{aligned}$$

Multiplica-se agora este resultado à esquerda e à direita por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ respectivamente,

e fazendo uso de (C.50) tem-se:

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = & -\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T + \\
& + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \} + \\
& + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T + \\
& + \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T + \\
& + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \text{tr} \{ \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T \mathbf{Q} \} + \\
& + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{Q}\mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \sigma_\eta^2.
\end{aligned}$$

Definindo-se a matrizes

$$\mathbf{C} = \mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.52a})$$

$$\mathbf{S} = \mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.52b})$$

e fazendo uso das propriedades do traço e de (C.48), chega-se a

$$\begin{aligned}
\mathbf{0} = & -\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{C}\mathbf{\Lambda} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda}\mathbf{C} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{\Lambda} \text{tr} \{ \mathbf{\Lambda}\mathbf{C} \} + \\
& + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{\Lambda}\mathbf{C}\mathbf{\Lambda} + \mathbf{S} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{S}\mathbf{\Lambda} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda}\mathbf{S} + \\
& + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{\Lambda} \text{tr} \{ \mathbf{\Lambda}\mathbf{S} \} + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{\Lambda}\mathbf{S}\mathbf{\Lambda} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \mathbf{\Lambda}\sigma_\eta^2.
\end{aligned}$$

Considerando os elementos da diagonal, ou seja, os elementos de índice ij onde $i = j$, para $i, j = 1, \dots, M$, pode-se escrever:

$$\begin{aligned}
0 = & -\frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} c_{ii} \lambda_{ii} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii} c_{ii} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \lambda_{ii} \xi + \\
& + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \lambda_{ii}^2 c_{ii} + s_{ii} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} s_{ii} \lambda_{ii} - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii} s_{ii} + \\
& + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \lambda_{ii} \beta + \frac{2\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \lambda_{ii}^2 s_{ii} + \frac{\alpha^2\gamma^2 m_1^2}{\kappa} \lambda_{ii} \sigma_\eta^2,
\end{aligned}$$

onde se definiu

$$\xi = \text{tr} \{ \mathbf{\Lambda}\mathbf{C} \} = \sum_{i=1}^M \lambda_{ii} c_{ii} \quad (\text{C.53})$$

$$\beta = \text{tr} \{ \mathbf{\Lambda} \mathbf{S} \} = \sum_{i=1}^M \lambda_{ii} s_{ii}, \quad (\text{C.54})$$

agora, considerando fatores comuns e simplificando $\alpha\gamma m_1$,

$$\begin{aligned} \left(\frac{2}{\theta} - \frac{2\alpha\gamma m_1}{\kappa} \lambda_{ii} \right) c_{ii} &= \frac{\alpha\gamma m_1}{\kappa} \xi + \frac{1}{\alpha\gamma m_1 \lambda_{ii}} s_{ii} - \frac{2}{\theta} s_{ii} + \frac{\alpha\gamma m_1}{\kappa} \beta + \\ &+ \frac{2\alpha\gamma m_1}{\kappa} \lambda_{ii} s_{ii} + \frac{\alpha\gamma m_1}{\kappa} \sigma_\eta^2 \end{aligned}$$

de onde

$$\begin{aligned} c_{ii} &= \left(\frac{\kappa\theta}{2\kappa - 2\alpha\gamma m_1\theta\lambda_{ii}} \right) \left(\frac{\alpha\gamma m_1}{\kappa} \xi + \frac{1}{\alpha\gamma m_1 \lambda_{ii}} s_{ii} - \frac{2}{\theta} s_{ii} + \frac{\alpha\gamma m_1}{\kappa} \beta + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2\alpha\gamma m_1}{\kappa} \lambda_{ii} s_{ii} + \frac{\alpha\gamma m_1}{\kappa} \sigma_\eta^2 \right) \\ &= \left(\frac{\kappa\alpha\gamma m_1\theta}{2 \left(1 - \frac{\alpha\gamma m_1\theta}{\kappa} \lambda_{ii} \right) \kappa^2} \right) \left(\xi + \frac{\kappa}{\alpha^2\gamma^2 m_1^2 \lambda_{ii}} s_{ii} - \frac{2\kappa}{\alpha\gamma m_1\theta} s_{ii} + \beta + \right. \\ &\quad \left. + 2\lambda_{ii} s_{ii} + \sigma_\eta^2 \right). \end{aligned}$$

Seja definida a variável

$$\mu_a = \frac{\alpha\gamma m_1\theta}{\kappa}, \quad (\text{C.55})$$

portanto

$$c_{ii} = \frac{\mu_a}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \left(\xi + \frac{\theta^2}{\kappa \mu_a^2 \lambda_{ii}} s_{ii} - \frac{2}{\mu_a} s_{ii} + \beta + 2\lambda_{ii} s_{ii} + \sigma_\eta^2 \right). \quad (\text{C.56})$$

Agora, multiplica-se esta equação por λ_{ii} e aplica-se a somatória:

$$\sum_{i=1}^M \lambda_{ii} c_{ii} = \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \left(\xi + \frac{\theta^2}{\kappa \mu_a^2 \lambda_{ii}} s_{ii} - \frac{2}{\mu_a} s_{ii} + \beta + 2\lambda_{ii} s_{ii} + \sigma_\eta^2 \right),$$

e fazendo uso da definição (C.53) tem-se

$$\begin{aligned} \xi &= \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} (\xi + \beta + \sigma_\eta^2) + \\ &+ \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii} s_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \left(\frac{\theta^2}{\kappa \mu_a^2 \lambda_{ii}} - \frac{2}{\mu_a} + 2\lambda_{ii} \right). \end{aligned}$$

Seja definida a variável

$$\rho_a = \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})}, \quad (\text{C.57})$$

portanto pode-se escrever

$$\xi = \rho_a (\xi + \beta + \sigma_\eta^2) + \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii} s_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \left(\frac{\theta^2}{\kappa \mu_a^2 \lambda_{ii}} - \frac{2}{\mu_a} + 2\lambda_{ii} \right),$$

de onde agrupando fatores comuns:

$$\begin{aligned} (1 - \rho_a) \xi &= \rho_a (\beta + \sigma_\eta^2) + \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii} s_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \left(\frac{\theta^2 - 2\kappa \mu_a \lambda_{ii} + 2\kappa \mu_a^2 \lambda_{ii}^2}{\kappa \mu_a^2 \lambda_{ii}} \right) \\ &= \rho_a (\beta + \sigma_\eta^2) + \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2 - 2\kappa \mu_a \lambda_{ii} (1 - \mu_a \lambda_{ii})}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) \mu_a \kappa} s_{ii} \\ &= \rho_a (\beta + \sigma_\eta^2) + \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii}) \mu_a \kappa} s_{ii} - \sum_{i=1}^M \lambda_{ii} s_{ii}, \end{aligned}$$

resolvendo para ξ , e fazendo uso de (C.54)

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \beta + \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2 + \frac{1}{1 - \rho_a} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii} - \frac{1}{1 - \rho_a} \beta \\ &= \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2 + \frac{1}{1 - \rho_a} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii} - \beta. \end{aligned} \quad (\text{C.58})$$

Analisando agora o caso da matriz $\mathbf{V}[n]$ dada pela equação (C.46c), observa-se que para $n \rightarrow \infty$, esta satisfaz

$$\mathbf{V}[\infty] = a\mathbf{V}[\infty] - \frac{a\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{V}[\infty] \mathbf{R}_x + b\mathbf{R}[\infty] - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \mathbf{R}[\infty] \mathbf{R}_x$$

ou

$$\mathbf{V}[\infty] \left((1 - a) \mathbf{I} + \frac{a\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \right) = \mathbf{R}[\infty] \left(b\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \mathbf{R}_x \right),$$

multiplicando à esquerda e à direita por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ respectivamente, e fazendo uso de (C.50):

$$\mathbf{QV}[\infty] \mathbf{Q}^T \left((1 - a) \mathbf{I} + \frac{a\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \right) = \mathbf{QR}[\infty] \mathbf{Q}^T \left(b\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \mathbf{Q} \mathbf{R}_x \mathbf{Q}^T \right). \quad (\text{C.59})$$

Define-se a matriz

$$\mathbf{B} = \mathbf{Q}\mathcal{V}[\infty]\mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.60})$$

substituindo esta equação e as equações (C.48) e (C.52a) em (C.59) tem-se:

$$\mathbf{B} \left((1-a)\mathbf{I} + \frac{a\alpha\gamma m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right) = \mathbf{C} \left(b\mathbf{I} - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \mathbf{\Lambda} \right),$$

sendo esta uma equação matricial, serão considerados os elementos da diagonal, ou seja os elementos de índice ij onde $i = j$ para $i, j = 1, \dots, M$:

$$B_{ii} \left(1 - a + \frac{a\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii} \right) = c_{ii} \left(b - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \lambda_{ii} \right) \quad (\text{C.61})$$

agora tem-se de (C.47a) que

$$a \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} = \frac{\gamma}{\alpha + \gamma} \cdot \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} = \frac{\alpha}{\alpha + \gamma} \frac{\gamma^2 m_1}{\theta},$$

pelo que da equação (C.47b) chega-se a:

$$a \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} = b \frac{\gamma^2 m_1}{\theta},$$

substituindo este resultado e a equação (C.18) no lado esquerdo de (C.61) obtém-se:

$$B_{ii} \left(b + b \frac{\gamma^2 m_1}{\theta} \lambda_{ii} \right) = c_{ii} \left(b - \frac{\alpha\gamma b m_1}{\theta} \lambda_{ii} \right)$$

portanto,

$$B_{ii} = \frac{1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\gamma^2 m_1}{\theta} \lambda_{ii}} c_{ii}.$$

B_{ii} pode ser escrito como

$$B_{ii} = h_{ii} c_{ii}, \quad (\text{C.62})$$

com

$$h_{ii} = \frac{1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\gamma^2 m_1}{\theta} \lambda_{ii}} = \frac{1 - \frac{\kappa\mu_a}{\theta^2} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\kappa\gamma\mu_a}{\alpha\theta^2} \lambda_{ii}} \quad (\text{C.63})$$

onde foi usada a equação (C.55).

Determina-se agora o que acontece com a matriz $\mathcal{P}[n]$, dada pela equação (C.46b)

quando $n \rightarrow \infty$,

$$\mathcal{P}[\infty] = a^2\mathcal{P}[\infty] + ab\mathcal{V}[\infty] + a^2\mathbf{V} + ab\mathcal{V}^T[\infty] + b^2\mathcal{R}[\infty]$$

$$(1 - a^2)\mathcal{P}[\infty] = ab\mathcal{V}[\infty] + a^2\mathbf{V} + ab\mathcal{V}^T[\infty] + b^2\mathcal{R}[\infty]$$

multiplicando a esquerda e direita por $\mathbf{Q}$ e $\mathbf{Q}^T$ respectivamente, tem-se

$$(1 - a^2)\mathbf{Q}\mathcal{P}[\infty]\mathbf{Q}^T = ab\mathbf{Q}\mathcal{V}[\infty]\mathbf{Q}^T + a^2\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T + ab\mathbf{Q}\mathcal{V}^T[\infty]\mathbf{Q}^T + b^2\mathbf{Q}\mathcal{R}[\infty]\mathbf{Q}^T,$$

definindo a matriz

$$\mathbf{D} = \mathbf{Q}\mathcal{P}[\infty]\mathbf{Q}^T, \quad (\text{C.64})$$

e fazendo uso de (C.52a), (C.52b) e (C.60) chega-se a

$$(1 - a^2)\mathbf{D} = ab\mathbf{B} + a^2\mathbf{S} + ab\mathbf{B}^T + b^2\mathbf{C},$$

onde considerando os elementos na diagonal, tem-se

$$(1 - a^2)d_{ii} = 2abB_{ii} + a^2s_{ii} + b^2c_{ii},$$

portanto,

$$d_{ii} = \frac{1}{1 - a^2} (2abB_{ii} + a^2s_{ii} + b^2c_{ii}). \quad (\text{C.65})$$

Substituindo os valores de a e b dados pelas equações (C.47a) e (C.47b) respectivamente tem-se

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \frac{1}{1 - \frac{\gamma^2}{(\alpha + \gamma)^2}} \left(2 \frac{\alpha\gamma}{(\alpha + \gamma)^2} B_{ii} + \frac{\gamma^2}{(\alpha + \gamma)^2} s_{ii} + \frac{\alpha^2}{(\alpha + \gamma)^2} c_{ii} \right) \\ &= \frac{1}{(\alpha + \gamma)^2 - \gamma^2} (2\alpha\gamma B_{ii} + \gamma^2 s_{ii} + \alpha^2 c_{ii}) \\ &= \frac{1}{\alpha + 2\gamma} \left(2\gamma B_{ii} + \frac{\gamma^2}{\alpha} s_{ii} + \alpha c_{ii} \right). \end{aligned}$$

Substitui-se B_{ii} dado pela equação (C.62) para obter

$$\begin{aligned} d_{ii} &= \frac{1}{\alpha + 2\gamma} \left(2\gamma h_{ii} c_{ii} + \frac{\gamma^2}{\alpha} s_{ii} + \alpha c_{ii} \right) \\ &= \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)} s_{ii} + \frac{2\gamma h_{ii} + \alpha}{\alpha + 2\gamma} c_{ii}. \end{aligned} \quad (\text{C.66})$$

Finalmente, analisa-se o que acontece com $E\{e_a^2[n]\}$ quando $n \rightarrow \infty$. Então considerando a equação (C.46d),

$$E\{e_a^2[\infty]\} = \sigma_\eta^2 + tr\{\mathcal{P}[\infty]\mathbf{R}_x\} + tr\{\mathbf{V}\mathbf{R}_x\},$$

onde fazendo uso da condição dada em (C.50), $\mathbf{Q}^T\mathbf{Q} = \mathbf{I}$, e das propriedades do traço (C.21) tem-se

$$\begin{aligned} E\{e_a^2[\infty]\} &= \sigma_\eta^2 + tr\{\mathcal{P}[\infty]\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_x\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\} + tr\{\mathbf{V}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_x\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\} \\ &= \sigma_\eta^2 + tr\{\mathbf{Q}\mathcal{P}[\infty]\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_x\mathbf{Q}^T\} + tr\{\mathbf{Q}\mathbf{V}\mathbf{Q}^T\mathbf{Q}\mathbf{R}_x\mathbf{Q}^T\} \\ &= \sigma_\eta^2 + tr\{\mathbf{D}\mathbf{\Lambda}\} + tr\{\mathbf{S}\mathbf{\Lambda}\}, \end{aligned} \quad (\text{C.67})$$

de acordo com as equações (C.48), (C.52b) e (C.63).

Aplicando as definições de traço de uma matriz e a dada pela equação (C.54), a equação (C.67) pode ser escrita como

$$E\{e_a^2[\infty]\} = \sigma_\eta^2 + \sum_{i=1}^M d_{ii}\lambda_{ii} + \beta,$$

substituindo agora d_{ii} dado por (C.66):

$$\begin{aligned} E\{e_a^2[\infty]\} &= \sigma_\eta^2 + \sum_{i=1}^M \left(\frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha+2\gamma)} \lambda_{ii}s_{ii} + \frac{2\gamma h_{ii} + \alpha}{\alpha+2\gamma} \lambda_{ii}c_{ii} \right) + \beta \\ &= \sigma_\eta^2 + \beta + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha+2\gamma)} \sum_{i=1}^M \lambda_{ii}s_{ii} + \frac{2\gamma}{\alpha+2\gamma} \sum_{i=1}^M h_{ii}\lambda_{ii}c_{ii} + \frac{\alpha}{\alpha+2\gamma} \sum_{i=1}^M \lambda_{ii}c_{ii} \end{aligned}$$

utilizando as equações (C.53) e (C.54)

$$\begin{aligned} E\{e_a^2[\infty]\} &= \sigma_\eta^2 + \beta + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha+2\gamma)}\beta + \frac{2\gamma}{\alpha+2\gamma} \sum_{i=1}^M h_{ii}\lambda_{ii}c_{ii} + \frac{\alpha}{\alpha+2\gamma}\xi \\ &= \sigma_\eta^2 + \frac{(\alpha+\gamma)^2}{\alpha(\alpha+2\gamma)}\beta + \frac{2\gamma}{\alpha+2\gamma} \sum_{i=1}^M h_{ii}\lambda_{ii}c_{ii} + \frac{\alpha}{\alpha+2\gamma}\xi. \end{aligned} \quad (\text{C.68})$$

Para simplificar a análise, retorna-se à equação (C.63):

$$h_{ii} = \frac{1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\gamma^2 m_1}{\theta} \lambda_{ii}}$$

observa-se que o denominador é maior que o numerador, pelo que

$$h_{ii} = \frac{1 - \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\gamma^2 m_1}{\theta} \lambda_{ii}} < \frac{1 + \frac{\alpha\gamma m_1}{\theta} \lambda_{ii}}{1 + \frac{\gamma^2 m_1}{\theta} \lambda_{ii}} = 1$$

portanto, aplicando esta consideração, a equação (C.68) pode ser escrita como:

$$E \{e_a^2[\infty]\} < \sigma_\eta^2 + \frac{(\alpha + \gamma)^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)}\beta + \frac{2\gamma}{\alpha + 2\gamma} \sum_{i=1}^M \lambda_{ii} c_{ii} + \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} \xi,$$

onde substituindo as equações (C.53) e (C.54) pode-se escrever

$$E \{e_a^2[\infty]\} < \sigma_\eta^2 + \frac{(\alpha + \gamma)^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)}\beta + \frac{2\gamma}{\alpha + 2\gamma} \xi + \frac{\alpha}{\alpha + 2\gamma} \xi,$$

portanto

$$E \{e_a^2[\infty]\} < \sigma_\eta^2 + \frac{(\alpha + \gamma)^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)}\beta + \xi.$$

Substituindo finalmente o valor de ξ dado pela equação (C.58):

$$\begin{aligned} E \{e_a^2[\infty]\} < \sigma_\eta^2 + \frac{\alpha^2 + 2\alpha\gamma + \gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)}\beta - \beta + \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2 + \\ + \frac{1}{1 - \rho_a} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii} \end{aligned}$$

portanto

$$\begin{aligned} E \{e_a^2[\infty]\} < \sigma_\eta^2 + \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} \sigma_\eta^2 + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)}\beta + \\ + \frac{1}{1 - \rho_a} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii}. \end{aligned} \tag{C.69}$$

Desta forma o desajuste do algoritmo AR_γ no tracking cumpre com

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_a < \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma)}\beta + \\ + \frac{1}{(1 - \rho_a) \sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii}, \end{aligned} \tag{C.70}$$

onde

$$\begin{aligned}
 \rho_a &= \sum_{i=1}^M \frac{\mu_a \lambda_{ii}}{2(1 - \mu_a \lambda_{ii})} \\
 \mu_a &= \frac{\alpha \gamma m_1 \theta}{\kappa} \\
 \kappa &= 2\theta - 1 + \alpha^2 \gamma^2 \Psi \\
 \theta &= 1 + \alpha \gamma \operatorname{tr} \{m_1 \mathbf{R}_x\} \\
 \Psi &= \operatorname{tr}^2 \{m_1 \mathbf{R}_x\} + 2 \operatorname{tr} \{m_1^2 \mathbf{R}_x^2\}.
 \end{aligned} \tag{C.71}$$

Uma boa aproximação é considerar $\mathcal{M}_a$ no limite da equação (C.70), portanto

$$\begin{aligned}
 \mathcal{M}_a &\approx \frac{\rho_a}{1 - \rho_a} + \frac{\gamma^2}{\alpha(\alpha + 2\gamma) \sigma_\eta^2} \beta + \\
 &+ \frac{1}{(1 - \rho_a) \sigma_\eta^2} \sum_{i=1}^M \frac{\theta^2}{2\mu_a \kappa (1 - \mu_a \lambda_{ii})} s_{ii},
 \end{aligned} \tag{C.72}$$

Dado que o sinal de entrada $\mathbf{x}[n]$ e o sinal $\mathbf{v}[n]$ utilizado no processo de Markov são ruídos brancos Gaussianos, as matrizes de autocorrelação $\mathbf{R}_x$ e $\mathbf{V}$, as duas $M \times M$, podem ser escritas da forma

$$\begin{aligned}
 \mathbf{R}_x &= \sigma_x^2 \mathbf{I}, \\
 \mathbf{V} &= \sigma_\nu^2 \mathbf{I}.
 \end{aligned} \tag{C.73}$$

Agora, fazendo

$$h = \alpha \gamma m_1 \tag{C.74}$$

as equações (C.71) podem-se escrever da forma

$$\begin{aligned}
\Psi &= (M^2 + 2M)m_1^2\sigma_x^4 \\
\theta &= 1 + hM\sigma_x^2 \\
\kappa &= 1 + 2hM\sigma_x^2 + h^2(M^2 + 2M)\sigma_x^4 \\
\mu_a &= \frac{h + h^2M\sigma_x^2}{1 + 2hM\sigma_x^2 + h^2(M^2 + 2M)\sigma_x^4} \\
\rho_a &= \frac{hM\sigma_x^2 + h^2M^2\sigma_x^4}{2 + 2(1 + 2M)h\sigma_x^2 + 2(M^2 + M)h^2\sigma_x^4} \\
\beta &= M\sigma_\nu^2\sigma_x^2
\end{aligned}$$

substituindo estes valores e (C.73) na equação (C.72), obtém-se

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_a &= \frac{a_1h + a_2h^2}{2 + a_3h + a_4h^2} + \\
&+ \frac{b_1 + b_2h + b_3h^2 + b_4h^3 + b_5h^4 + b_6h^5}{c_1h + c_2h^2 + c_3h^3 + c_4h^4 + c_5h^5} + \\
&+ \frac{\gamma^2M}{\alpha^2\sigma_n^2 + 2\alpha\gamma\sigma_n^2}
\end{aligned} \tag{C.75}$$

onde

$$\begin{aligned}
a_1 &= M\sigma_x^2 & b_1 &= M\sigma_\nu^2 & c_1 &= 2\sigma_\eta^2 \\
a_2 &= M^2\sigma_x^4 & b_2 &= (M + 5M^2)\sigma_\nu^2\sigma_x^2 & c_2 &= 7M\sigma_\eta^2\sigma_x^2 \\
a_3 &= (2 + 3M)\sigma_x^2 & b_3 &= (6M^2 + 10M^3)\sigma_\nu^2\sigma_x^4 & c_3 &= (-2 + 5M + 9M^2)\sigma_\eta^2\sigma_x^4 \\
a_4 &= (2M + M^2)\sigma_x^4 & b_4 &= (2M^2 + 12M^3 + 10M^4)\sigma_\nu^2\sigma_x^6 & c_4 &= (2M^2 + 5M^3)\sigma_\eta^2\sigma_x^6 \\
& & b_5 &= (4M^3 + 10M^4 + 5M^5)\sigma_\nu^2\sigma_x^8 & c_5 &= (2M^2 + 3M^3 + M^4)\sigma_\eta^2\sigma_x^8 \\
& & b_6 &= (2M^4 + 3M^5 + M^6)\sigma_\nu^2\sigma_x^{10} & &
\end{aligned}$$

O seguinte passo é substituir h , (C.74), na equação (C.75), diferenciar-lhe e igualar-lhe a zero para cada um dos parâmetros e assim obter o seu ponto mínimo. Mas pode-se observar que o terceiro termo da equação (C.75) é uma constante ao se derivar com respeito a m_1 , pelo que igualando-se a derivada a zero obtém-se o mínimo para o produto $h = \alpha\gamma m_1$. Para calcular a derivada foi utilizado o pacote MAPLE[®] 6. A diferenciação deu como resultado que o mínimo obtém-se avaliando os zeros da seguinte equação

$$\begin{aligned}
0 = & (4\sigma_\nu^2 + (8\sigma_x\sigma_\nu^2 + 32\sigma_x M\sigma_\nu^2)Z + \\
& + (80\sigma_\nu^2\sigma_x^2 M + 113\sigma_x^2\sigma_\nu^2 M^2 - 8\sigma_\nu^2\sigma_x^2 - 4\sigma_\eta^2)Z^2 \\
& + (231\sigma_x^3 M^3\sigma_\nu^2 - 32\sigma_x^3\sigma_\nu^2 + 20\sigma_x^3 M\sigma_\nu^2 + 272\sigma_x^3\sigma_\nu^2 M^2 - 28\sigma_\eta^2 M\sigma_x)Z^3 + \\
& + (-96\sigma_\nu^2\sigma_x^4 M + 465\sigma_x^4 M^3\sigma_\nu^2 + 153\sigma_\nu^2\sigma_x^4 M^2 + 301\sigma_x^4 M^4\sigma_\nu^2 - 28\sigma_\nu^2\sigma_x^4 - 85\sigma_x^2 M^2\sigma_\eta^2 \\
& - 20M\sigma_\eta^2\sigma_x^2 + 8\sigma_x^2\sigma_\eta^2)Z^4 + (474\sigma_x^5 M^4\sigma_\nu^2 - 92\sigma_x^5 M\sigma_\nu^2 - 8\sigma_x^5\sigma_\nu^2 + 259\sigma_x^5 M^5\sigma_\nu^2 \\
& - 38\sigma_x^5\sigma_\nu^2 M^2 + 251\sigma_x^5 M^3\sigma_\nu^2 - 146\sigma_x^3 M^3\sigma_\eta^2 - 78\sigma_x^3 M^2\sigma_\eta^2 + 28\sigma_x^3\sigma_\eta^2 M)Z^5 + \\
& + (-24\sigma_x^6\sigma_\nu^2 M + 147\sigma_x^6 M^6\sigma_\nu^2 + 242\sigma_x^6 M^4\sigma_\nu^2 + 122\sigma_x^6\sigma_\nu^2 M^3 + 338\sigma_x^6 M^5\sigma_\nu^2 \\
& + 20\sigma_x^4\sigma_\eta^2 M - 130\sigma_x^4 M^3\sigma_\eta^2 + 3\sigma_x^4 M^2\sigma_\eta^2 - 4\sigma_x^4\sigma_\eta^2 - 155\sigma_x^4 M^4\sigma_\eta^2)Z^6 + \\
& + (200\sigma_x^7 M^6\sigma_\nu^2 + 316\sigma_x^7 M^4\sigma_\nu^2 + 232\sigma_x^7 M^3\sigma_\nu^2 + 294\sigma_x^7 M^5\sigma_\nu^2 + 53\sigma_x^7 M^7\sigma_\nu^2 \\
& + 48\sigma_x^7\sigma_\nu^2 M^2 - 28\sigma_x^5 M^3\sigma_\eta^2 + 8\sigma_x^5 M^2\sigma_\eta^2 - 128\sigma_x^5 M^4\sigma_\eta^2 - 104\sigma_x^5 M^5\sigma_\eta^2)Z^7 + \\
& + (307\sigma_x^8 M^6\sigma_\nu^2 + 400\sigma_x^8\sigma_\nu^2 M^4 + 16\sigma_x^8\sigma_\nu^2 M^2 + 97\sigma_x^8 M^7\sigma_\nu^2 + 160\sigma_x^8\sigma_\nu^2 M^3 \\
& + 11\sigma_x^8 M^8\sigma_\nu^2 + 476\sigma_x^8 M^5\sigma_\nu^2 - 66\sigma_x^6 M^4\sigma_\eta^2 - 84\sigma_x^6 M^5\sigma_\eta^2 - 8\sigma_x^6 M^3\sigma_\eta^2 + 8\sigma_x^6\sigma_\eta^2 M^2 \\
& - 43\sigma_x^6 M^6\sigma_\eta^2)Z^8 + (\sigma_x^9 M^9\sigma_\nu^2 + 159\sigma_x^9 M^7\sigma_\nu^2 + 348\sigma_x^9 M^5\sigma_\nu^2 + 32\sigma_x^9 M^3\sigma_\nu^2 \\
& + 30\sigma_x^9 M^8\sigma_\nu^2 + 342\sigma_x^9 M^6\sigma_\nu^2 + 168\sigma_x^9 M^4\sigma_\nu^2 - 32\sigma_x^7 M^5\sigma_\eta^2 - 8\sigma_x^7 M^4\sigma_\eta^2 \\
& - 34\sigma_x^7 M^6\sigma_\eta^2 - 10\sigma_x^7 M^7\sigma_\eta^2)Z^9 + (4\sigma_x^{10} M^9\sigma_\nu^2 + 72\sigma_x^{10}\sigma_\nu^2 M^5 + 30\sigma_x^{10} M^8\sigma_\nu^2 \\
& + 86\sigma_x^{10} M^7\sigma_\nu^2 + 116\sigma_x^{10} M^6\sigma_\nu^2 + 16\sigma_x^{10}\sigma_\nu^2 M^4 - 4\sigma_x^8 M^4\sigma_\eta^2 - 6\sigma_x^8 M^7\sigma_\eta^2 \\
& - 12\sigma_x^8 M^5\sigma_\eta^2 - \sigma_x^8 M^8\sigma_\eta^2 - 13\sigma_x^8 M^6\sigma_\eta^2)Z^{10})/\sigma_x
\end{aligned}$$

O programa executado em MAPLE® é apresentado a continuação, onde $x = \sigma_x$, $v = \sigma_\nu$ e $n = \sigma_\eta$.

C.5 Programa para calculo do mínimo

```

> w:=alpha*gamma*m1;
> a1:=M*x^2;
                                 $w := \alpha \gamma m1$ 
                                 $a1 := M x^2$ 
> a2:=M^2*x^4;
                                 $a2 := M^2 x^4$ 
> a3:=(2+3*M)*x^2;
                                 $a3 := (2 + 3 M) x^2$ 
> a4:=(M^2+2*M)*x^4;
                                 $a4 := (M^2 + 2 M) x^4$ 
> b1:=M*v^2;
                                 $b1 := M v^2$ 
> b2:=(M+5*M^2)*v^2*x^2;
                                 $b2 := (M + 5 M^2) v^2 x^2$ 
> b3:=(10*M^3+6*M^2)*v^2*x^4;
                                 $b3 := (10 M^3 + 6 M^2) v^2 x^4$ 
> b4:=(10*M^4+12*M^3+2*M^2)*v^2*x^6;
                                 $b4 := (10 M^4 + 12 M^3 + 2 M^2) v^2 x^6$ 
> b5:=(5*M^5+10*M^4+4*M^3)*v^2*x^8;
                                 $b5 := (5 M^5 + 10 M^4 + 4 M^3) v^2 x^8$ 
> b6:=(M^6+3*M^5+2*M^4)*v^2*x^10;
                                 $b6 := (M^6 + 3 M^5 + 2 M^4) v^2 x^{10}$ 
> c1:=2*n^2;
                                 $c1 := 2 n^2$ 
> c2:=7*M*n^2*x^2;
                                 $c2 := 7 M n^2 x^2$ 
> c3:=(9*M^2+5*M-2)*n^2*x^4;
                                 $c3 := (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4$ 
> c4:=(5*M^3+2*M^2)*n^2*x^6;
                                 $c4 := (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6$ 
> c5:=(M^4+3*M^3+2*M^2)*n^2*x^8;

```

$$c5 := (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8$$

> S1:=(a1*w+a2*w^2)/(2+a3*w+a4*w^2);

$$S1 := \frac{M x^2 \alpha \gamma m1 + M^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2}{2 + (2 + 3 M) x^2 \alpha \gamma m1 + (M^2 + 2 M) x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2}$$

> S2n:=(b1+b2*w+b3*w^2+b4*w^3+b5*w^4+b6*w^5);

$$\begin{aligned} S2n := & M v^2 + (M + 5 M^2) v^2 x^2 \alpha \gamma m1 \\ & + (10 M^3 + 6 M^2) v^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\ & + (10 M^4 + 12 M^3 + 2 M^2) v^2 x^6 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 \\ & + (5 M^5 + 10 M^4 + 4 M^3) v^2 x^8 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\ & + (M^6 + 3 M^5 + 2 M^4) v^2 x^{10} \alpha^5 \gamma^5 m1^5 \end{aligned}$$

> S2d:=c1*w+c2*w^2+c3*w^3+c4*w^4+c5*w^5;

$$\begin{aligned} S2d := & 2 n^2 \alpha \gamma m1 + 7 M n^2 x^2 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 + (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 \\ & + (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 + (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8 \alpha^5 \gamma^5 m1^5 \end{aligned}$$

> S2:=S2n/S2d;

$$\begin{aligned} S2 := & (M v^2 + (M + 5 M^2) v^2 x^2 \alpha \gamma m1 + (10 M^3 + 6 M^2) v^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\ & + (10 M^4 + 12 M^3 + 2 M^2) v^2 x^6 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 \\ & + (5 M^5 + 10 M^4 + 4 M^3) v^2 x^8 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\ & + (M^6 + 3 M^5 + 2 M^4) v^2 x^{10} \alpha^5 \gamma^5 m1^5) / (2 n^2 \alpha \gamma m1 + 7 M n^2 x^2 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\ & + (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 + (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\ & + (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8 \alpha^5 \gamma^5 m1^5) \end{aligned}$$

> S3:=M*(gamma*v*x)^2/((alpha*n)^2+2*alpha*gamma*n^2);

$$S3 := \frac{M \gamma^2 v^2 x^2}{\alpha^2 n^2 + 2 \alpha \gamma n^2}$$

> des:=S1+S2+S3;

$$\begin{aligned} des := & \frac{M x^2 \alpha \gamma m1 + M^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2}{2 + (2 + 3 M) x^2 \alpha \gamma m1 + (M^2 + 2 M) x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2} + (M v^2 \\ & + (M + 5 M^2) v^2 x^2 \alpha \gamma m1 + (10 M^3 + 6 M^2) v^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\ & + (10 M^4 + 12 M^3 + 2 M^2) v^2 x^6 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 \\ & + (5 M^5 + 10 M^4 + 4 M^3) v^2 x^8 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\ & + (M^6 + 3 M^5 + 2 M^4) v^2 x^{10} \alpha^5 \gamma^5 m1^5) / (2 n^2 \alpha \gamma m1 + 7 M n^2 x^2 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\ & + (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 + (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\ & + (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8 \alpha^5 \gamma^5 m1^5) + \frac{M \gamma^2 v^2 x^2}{\alpha^2 n^2 + 2 \alpha \gamma n^2} \end{aligned}$$

> der:=diff(des,m1);

$$\begin{aligned}
der := & \frac{M x^2 \alpha \gamma + 2 M^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1}{2 + (2 + 3 M) x^2 \alpha \gamma m1 + (M^2 + 2 M) x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2} \\
& - ((M x^2 \alpha \gamma m1 + M^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2) ((2 + 3 M) x^2 \alpha \gamma \\
& + 2 (M^2 + 2 M) x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1)) \\
& \Big/ (2 + (2 + 3 M) x^2 \alpha \gamma m1 + (M^2 + 2 M) x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2)^2 \\
& + ((M + 5 M^2) v^2 x^2 \alpha \gamma + 2 (10 M^3 + 6 M^2) v^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1 \\
& + 3 (10 M^4 + 12 M^3 + 2 M^2) v^2 x^6 \alpha^3 \gamma^3 m1^2 \\
& + 4 (5 M^5 + 10 M^4 + 4 M^3) v^2 x^8 \alpha^4 \gamma^4 m1^3 \\
& + 5 (M^6 + 3 M^5 + 2 M^4) v^2 x^{10} \alpha^5 \gamma^5 m1^4) \\
& \Big/ (2 n^2 \alpha \gamma m1 + 7 M n^2 x^2 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 + (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 \\
& + (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 + (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8 \alpha^5 \gamma^5 m1^5) \\
& - ((M v^2 + (M + 5 M^2) v^2 x^2 \alpha \gamma m1 + (10 M^3 + 6 M^2) v^2 x^4 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\
& + (10 M^4 + 12 M^3 + 2 M^2) v^2 x^6 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 \\
& + (5 M^5 + 10 M^4 + 4 M^3) v^2 x^8 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\
& + (M^6 + 3 M^5 + 2 M^4) v^2 x^{10} \alpha^5 \gamma^5 m1^5) (2 \alpha \gamma n^2 + 14 M n^2 x^2 \alpha^2 \gamma^2 m1 \\
& + 3 (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4 \alpha^3 \gamma^3 m1^2 + 4 (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6 \alpha^4 \gamma^4 m1^3 \\
& + 5 (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8 \alpha^5 \gamma^5 m1^4)) \\
& \Big/ (2 n^2 \alpha \gamma m1 + 7 M n^2 x^2 \alpha^2 \gamma^2 m1^2 \\
& + (9 M^2 + 5 M - 2) n^2 x^4 \alpha^3 \gamma^3 m1^3 + (5 M^3 + 2 M^2) n^2 x^6 \alpha^4 \gamma^4 m1^4 \\
& + (M^4 + 3 M^3 + 2 M^2) n^2 x^8 \alpha^5 \gamma^5 m1^5)^2
\end{aligned}$$

```

> der1:=simplify(der):
> simp1:=algsubs(alpha*gamma*m1=H,der1);

```

$$\begin{aligned}
simp1 := & -2M(-8v^2x^4H^2 - 4x^2n^2H^2 - 85x^6H^4n^2M^2 - 32x^6H^3v^2 \\
& + 465x^8H^4v^2M^3 + 53x^{14}M^7H^7v^2 - 28x^8H^4v^2 + 8x^6H^4n^2 + x^{18}M^9H^9v^2 \\
& - 8x^{10}H^5v^2 - 4x^{10}H^6n^2 - 92x^{10}H^5v^2M + 32v^2x^2MH + 113v^2x^4M^2H^2 \\
& + 80v^2x^4MH^2 + 8v^2x^2H + 272x^6H^3v^2M^2 - 28x^4H^3n^2M + 20x^6H^3v^2M \\
& + 231x^6H^3v^2M^3 + 251x^{10}H^5v^2M^3 + 259x^{10}H^5v^2M^5 + 28x^8H^5n^2M \\
& - 38x^{10}H^5v^2M^2 + 301x^8H^4v^2M^4 - 20x^6H^4n^2M + 153x^8H^4v^2M^2 \\
& - 96x^8H^4v^2M - 130x^{10}H^6n^2M^3 + 147x^{12}H^6v^2M^6 + 3x^{10}H^6n^2M^2 \\
& - 146x^8H^5n^2M^3 + 474x^{10}H^5v^2M^4 - 78x^8H^5n^2M^2 + 122x^{12}H^6v^2M^3 \\
& + 20x^{10}H^6n^2M - 24x^{12}H^6v^2M + 200x^{14}M^6H^7v^2 - 28x^{12}M^3H^7n^2 \\
& + 316x^{14}M^4H^7v^2 + 294x^{14}M^5H^7v^2 + 232x^{14}M^3H^7v^2 - 128x^{12}M^4H^7n^2 \\
& + 48x^{14}M^2H^7v^2 + 400x^{16}M^4H^8v^2 + 97x^{16}M^7H^8v^2 + 160x^{16}M^3H^8v^2 \\
& + 8x^{12}M^2H^7n^2 - 104x^{12}M^5H^7n^2 - 43x^{14}M^6H^8n^2 + 16x^{16}M^2H^8v^2 \\
& + 307x^{16}M^6H^8v^2 - 8x^{14}M^3H^8n^2 + 8x^{14}M^2H^8n^2 - 66x^{14}M^4H^8n^2 \\
& - 84x^{14}M^5H^8n^2 + 476x^{16}M^5H^8v^2 + 11x^{16}M^8H^8v^2 + 32x^{18}M^3H^9v^2 \\
& + 348x^{18}M^5H^9v^2 + 30x^{20}M^8H^{10}v^2 + 116x^{20}M^6H^{10}v^2 + 86x^{20}M^7H^{10}v^2 \\
& - 13x^{18}M^6H^{10}n^2 + 16x^{20}M^4H^{10}v^2 + 30x^{18}M^8H^9v^2 - 34x^{16}M^6H^9n^2 \\
& - 10x^{16}M^7H^9n^2 - 8x^{16}M^4H^9n^2 + 159x^{18}M^7H^9v^2 + 342x^{18}M^6H^9v^2 \\
& - 32x^{16}M^5H^9n^2 + 168x^{18}M^4H^9v^2 + 4v^2 - 4x^{18}M^4H^{10}n^2 + 338x^{12}H^6v^2M^5 \\
& + 242x^{12}H^6v^2M^4 - 155x^{10}H^6n^2M^4 + 72x^{20}M^5H^{10}v^2 - 6x^{18}M^7H^{10}n^2 \\
& + 4x^{20}M^9H^{10}v^2 - x^{18}M^8H^{10}n^2 - 12x^{18}M^5H^{10}n^2)/(n^2\alpha\gamma m1^2(5x^6M^3H^3 \\
& + 3x^8M^3H^4 + x^8M^4H^4 + 2x^8M^2H^4 + 2 + 2x^6M^2H^3 + 5x^4MH^2 \\
& + 9M^2x^4H^2 + 7Mx^2H - 2x^4H^2)^2(2x^2H + Mx^2H + 2)^2)
\end{aligned}$$

> **sol:=solve(simp1=0,H);**

$$\begin{aligned}
sol := & \text{RootOf}(4v^2 + (8xv^2 + 32xMv^2) _Z \\
& + (80v^2x^2M + 113x^2v^2M^2 - 8v^2x^2 - 4n^2) _Z^2 \\
& + (231x^3M^3v^2 - 32x^3v^2 + 20x^3Mv^2 + 272x^3v^2M^2 - 28n^2Mx) _Z^3 \\
& + (-96v^2x^4M + 465x^4M^3v^2 + 153v^2x^4M^2 + 301x^4M^4v^2 - 28v^2x^4 \\
& - 85x^2M^2n^2 - 20Mn^2x^2 + 8x^2n^2) _Z^4 + (474x^5M^4v^2 - 92x^5Mv^2 - 8x^5v^2 \\
& + 259x^5M^5v^2 - 38x^5v^2M^2 + 251x^5M^3v^2 - 146x^3M^3n^2 - 78x^3M^2n^2 \\
& + 28x^3n^2M) _Z^5 + (-24x^6v^2M + 147x^6M^6v^2 + 242x^6M^4v^2 + 122x^6v^2M^3 \\
& + 338x^6M^5v^2 + 20x^4n^2M - 130x^4M^3n^2 + 3x^4M^2n^2 - 4x^4n^2 \\
& - 155x^4M^4n^2) _Z^6 + (200x^7M^6v^2 + 316x^7M^4v^2 + 232x^7M^3v^2 + 294x^7M^5v^2 \\
& + 53x^7M^7v^2 + 48x^7v^2M^2 - 28x^5M^3n^2 + 8x^5M^2n^2 - 128x^5M^4n^2 \\
& - 104x^5M^5n^2) _Z^7 + (307x^8M^6v^2 + 400x^8v^2M^4 + 16x^8v^2M^2 + 97x^8M^7v^2 \\
& + 160x^8v^2M^3 + 11x^8M^8v^2 + 476x^8M^5v^2 - 66x^6M^4n^2 - 84x^6M^5n^2 - 8x^6M^3n^2 \\
& + 8x^6n^2M^2 - 43x^6M^6n^2) _Z^8 + (x^9M^9v^2 + 159x^9M^7v^2 + 348x^9M^5v^2 \\
& + 32x^9M^3v^2 + 30x^9M^8v^2 + 342x^9M^6v^2 + 168x^9M^4v^2 - 32x^7M^5n^2 \\
& - 8x^7M^4n^2 - 34x^7M^6n^2 - 10x^7M^7n^2) _Z^9 + (4x^{10}M^9v^2 + 72x^{10}v^2M^5 \\
& + 30x^{10}M^8v^2 + 86x^{10}M^7v^2 + 116x^{10}M^6v^2 + 16x^{10}v^2M^4 - 4x^8M^4n^2 \\
& - 6x^8M^7n^2 - 12x^8M^5n^2 - x^8M^8n^2 - 13x^8M^6n^2) _Z^{10}, label = _L1)/x
\end{aligned}$$

```
> rai:=eval(sol,{x=0.1,n=0.05,v=0.01,M=2});
```

```
rai := 10.RootOf(-.0004 - .00072 _Z + .009396 _Z^2 + .0137056 _Z^3 + .00921072 _Z^4  
+ .003542464 _Z^5 + .0008654976 _Z^6 + .00013883904 _Z^7 + .000016262144 _Z^8  
+ .11455488 10^-5 _Z^9 + .5729280 10^-7 _Z^10, label = _L1)
```

```
> evalf(%);
```

```
10.RootOf(-.0004 - .00072 _Z + .009396 _Z^2 + .0137056 _Z^3 + .00921072 _Z^4  
+ .003542464 _Z^5 + .0008654976 _Z^6 + .00013883904 _Z^7 + .000016262144 _Z^8  
+ .11455488 10^-5 _Z^9 + .5729280 10^-7 _Z^10, label = _L1)
```

```
> allvalues(rai);
```

```
-29.43026183 - 68.77696712 I, -29.43026183 + 68.77696712 I,  
-29.06212786 - 75.69494318 I, -29.06212786 + 75.69494318 I,  
-21.13879054 - 16.18908208 I, -21.13879054 + 16.18908208 I,  
-20.42191439 - 15.86123164 I, -20.42191439 + 15.86123164 I,  
-1.922483818,  
2.082292339
```

LISTA DE REFERÊNCIAS

- BAR-SHALOM, Y.; LI, XR. **Estimation and Tracking: Principles, Techniques, and Software**. London: Artech House, Inc., 1993.
- FARHANG-BOROUJENY, B. Application of Orthonormal Transforms to Implementation of Quasi-LMS/Newton Algorithm. **IEEE Transactions on Signal Processing**, v.41, n.3, p1400-1405, March 1993.
- GERKEN, M.; PAIT, F.M.; JOJOA, P.E. An Adaptive Algorithm with Parameter Acceleration. In: THE IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSINGS 2000., Istambul, 2000. **ICASSP'2000**. 1 CD-ROM.
- HAYKIN, S. **Adaptive Filter Theory**. New Jersey: Prentice Hall, Inc., 1996.
- IOANNOU, P. A.; SUN, J. **Robust Adaptive Control**. Upper Saddle River, NJ: PTR Prentice-Hall, 1996.
- JOJOA, P.E. **Análise de Algoritmo Adaptativo que Ajusta a Diferença de Segunda Ordem dos Parâmetros**. 1999. 94p. Dissertação (Mestrado) - Escola Politécnica, Universidade de São Paulo. São Paulo, 1999.
- JOJOA, P.E.; GERKEN, M.; PAIT, F.M. The Accelerating Adaptive Filtering Algorithm. In: WORKSHOP ON ADAPTION AND LEARNING IN CONTROL AND SIGNAL PROCESSING., Cernobbio-Como, 2001. **ALCOSP 2001**.
- JOJOA, P.E.; GERKEN, M.; PAIT, F.M. Sobre o Algoritmo Acelerador para Filtragem Adaptativa. In: 19º SIMPÓSIO BRASILEIRO DE TELECOMUNICAÇÕES., Fortaleza-CE, 2001. **SBrT 2001**.
- KUO, B.C. **Digital Control Systems**. New York : Holt, Rinehart and Winston, 1980.
- LUENBERGER, D.G. **Linear and Nonlinear Programming**. 2nd. Ed. Reading, Massachusetts: Addison-Wesley, 1989.
- OGATA, K. **Ingeniería de Control Moderna** 2a. Ed. Prentice Hall, Inc., 1993.
- PAIT, F.M. A Tuner that accelerates Parameters. *Systems & Control Letters*, v.35, n.1, p.65-68, 1998.

- PAIT, F.M. ATKINSON P.A. A Tuner that Accelerates Parameters. In: PROCEEDINGS OF THE 32nd CONFERENCE ON INFORMATION SYSTEMS AND SCIENCES, 1998., Princenton NJ, March 1998.
- SAMSOM, C.; REDDY, V.U. *Fixed Point Error Analysis of the Normalized Ladder Algorithms*, IEEE Trans. on ASSP, vol. 31, No. 5, October 1983, p. 1177-1191.
- SAYED, A.H. **Fundamentals of Adaptive Filtering**. New York: Wiley, 2003.
- SCHARF, L.L. **Statistical Signal Processing: Detection, Estimation, and Time Series Analysis**. Reading, Massachusets: Addison-Wesley Publishing Company, 1991.
- SHIMAMURA, T.; COWAN, C.F.N. Equalisation of Time Variant Multipath Channels Using Amplitude Banded Techniques. In: PROCEEDINGS OF IEEE INTERNATIONAL CONFERENCE ON ACOUSTICS, SPEECH, AND SIGNAL PROCESSINGS, 1997., Munich, 1997., **ICASSP'1997**, p. 2497-2500.
- SOLO, V.; KONG, X. **Adaptive Signal Processing Algorithms, Stability and Performance**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice Hall, Inc., 1995.
- WIDROW, B.; STEARNS, S.D. **Adaptive Signal Processing**. Englewood Cliffs, N.J.: Prentice-Hall, Inc., 1985.

Apêndice A

ANÁLISE DE LYAPUNOV PARA O ALGORITMO ARCM

O algoritmo ARC é definido pelas seguintes equações:

$$\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n], \quad (\text{A.1})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{q}[n] - \mathbf{q}[n-1] = & \alpha \left(-\mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] e[n] + \right. \\ & \left. -2\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3) \mathbf{q}[n] \right), \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

e

$$e[n] = \mathbf{x}^T \mathbf{p}[n] - d[n]. \quad (\text{A.3})$$

Para a análise de estabilidade, é de interesse analisar o algoritmo em torno do vetor de coeficientes ótimos $\mathbf{p}_o$. Define-se então a diferença entre a estimativa dos parâmetros com respeito ao ótimo como

$$\Delta \mathbf{p}[n] = \mathbf{p}[n] - \mathbf{p}_o. \quad (\text{A.4})$$

Subtraindo $\mathbf{p}_o$ nos dois lados da equação (A.1) e fazendo uso da equação anterior, chega-se a

$$\Delta \mathbf{p}[n] = \Delta \mathbf{p}[n-1] + \alpha \mathbf{q}[n]$$

ou

$$\Delta \mathbf{p}[n] - \alpha \mathbf{q}[n] = \Delta \mathbf{p}[n-1]. \quad (\text{A.5})$$

Sim considerar o erro de medida o sinal desejado é dado por $d[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}_o$, pelo que

o erro de estimação pode ser escrito como

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}[n] - \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}_o$$

ou ainda,

$$e[n] = \mathbf{x}^T[n] \Delta \mathbf{p}[n]. \quad (\text{A.6})$$

Substituindo este resultado na equação (A.2), permite escrever

$$\begin{aligned} & \alpha \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \Delta \mathbf{p}[n] + \\ & + \left(\mathbf{I} + 2\alpha \mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3) \right) \mathbf{q}[n] = \mathbf{q}[n-1]. \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Agora, considerando esta equação e a apresentada em (A.5) obtém-se a seguinte descrição para o algoritmo ARC:

$$(\mathbf{I} - \alpha \mathbf{A}[n]) \mathbf{s}[n] = \mathbf{s}[n-1], \quad (\text{A.8})$$

onde

$$\mathbf{A}[n] = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] & -2\mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3) \end{bmatrix} \quad (\text{A.9})$$

e

$$\mathbf{s}[n] = \begin{bmatrix} \Delta \mathbf{p}[n] \\ \mathbf{q}[n] \end{bmatrix}. \quad (\text{A.10})$$

Define-se agora a função

$$\mathbf{V}[n] = \mathbf{s}^T[n] \mathbf{P} \mathbf{s}[n], \quad (\text{A.11})$$

onde $\mathbf{P}$ é uma matriz definida por

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} \mathbf{M}_2 & \frac{\mathbf{M}_1^{-1}}{2} \\ \frac{\mathbf{M}_1^{-1}}{2} & \mathbf{M}_3 \end{bmatrix}, \quad (\text{A.12})$$

a qual é positiva definida quando

$$4\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 > \mathbf{I}. \quad (\text{A.13})$$

De acordo com o critério de estabilidade de Lyapunov, precisa-se agora demonstrar que a diferença $\Delta \mathbf{V}[n] = \mathbf{V}[n] - \mathbf{V}[n-1]$ é negativa semi-definida. Substituindo a equação (A.11) obtém-se:

$$\Delta \mathbf{V}[n] = \mathbf{s}^T[n] \mathbf{P} \mathbf{s}[n] - \mathbf{s}^T[n-1] \mathbf{P} \mathbf{s}[n-1]. \quad (\text{A.14})$$

Substituindo-se (A.8) em (A.14) resulta:

$$\begin{aligned}
 \Delta \mathbf{V}[n] &= \mathbf{s}^T[n] \mathbf{P} \mathbf{s}[n] - \mathbf{s}^T[n] (1 - \alpha \mathbf{A}[n])^T \mathbf{P} (1 - \alpha \mathbf{A}[n]) \mathbf{s}[n], \\
 &= \mathbf{s}^T[n] \left[\mathbf{P} - (1 - \alpha \mathbf{A}^T[n]) \mathbf{P} (1 - \alpha \mathbf{A}[n]) \right] \mathbf{s}[n], \\
 &= \mathbf{s}^T[n] \left[\mathbf{P} - (\mathbf{P} - \alpha \mathbf{A}^T[n] \mathbf{P} - \alpha \mathbf{P} \mathbf{A}[n] + \alpha^2 \mathbf{A}^T[n] \mathbf{P}) \mathbf{A}[n] \right] \mathbf{s}[n], \\
 &= \mathbf{s}^T[n] \left[\alpha \mathbf{A}^T[n] \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P} \mathbf{A}[n] - \alpha^2 \mathbf{A}^T[n] \mathbf{P} \mathbf{A}[n] \right] \mathbf{s}[n].
 \end{aligned} \tag{A.15}$$

Conforme o segundo critério de Lyapunov para que o sistema seja estável basta que a matriz

$$\mathbf{Q}[n] = \alpha \mathbf{A}^T[n] \mathbf{P} + \alpha \mathbf{P} \mathbf{A}[n] - \alpha^2 \mathbf{A}^T[n] \mathbf{P} \mathbf{A}[n], \tag{A.16}$$

seja negativa semi-definida.

O objetivo é determinar quando a matriz $\mathbf{Q}' = \mathbf{A}^T \mathbf{P} + \mathbf{P} \mathbf{A}$ é negativa semidefinida. Para isto basta realizar os seguintes cálculos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{A}^T \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] & -\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \\ -\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] & \frac{1}{2} \mathbf{M}_1^{-1} - 2 (\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] + \mathbf{M}_2) \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} \\
 \mathbf{P} \mathbf{A} &= \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} \mathbf{x} \mathbf{x}^T & -\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \\ -\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] & \frac{1}{2} \mathbf{M}_1^{-1} - 2 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 (\mathbf{M}_2 + \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3) \end{bmatrix}.
 \end{aligned}$$

Obtém-se assim

$$\begin{aligned}
 \mathbf{Q}' &= \begin{bmatrix} -\mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] & -2 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \\ -2 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] & -4 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \end{bmatrix} + \\
 &\quad + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^{-1} - 2 \mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 - 2 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 \end{bmatrix}
 \end{aligned}$$

ou ainda:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' = & - \begin{bmatrix} \mathbf{x}[n] \\ 2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{x}[n] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T[n] & 2\mathbf{x}^T[n]\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^{-1} - 2\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 - 2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Conclui-se portanto que $\mathbf{Q}'$ é negativa semi-definida quando

$$2\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 + 2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \geq \mathbf{M}_1^{-1}. \quad (\text{A.17})$$

Desta forma a equação (A.16) é negativa semi-definida e por tanto determina que o sistema é estável no sentido de Lyapunov.

Quando as matrizes $\mathbf{M}_1$, $\mathbf{M}_2$ e $\mathbf{M}_3$ são consideradas da forma $\mathbf{M}_i = m_i\mathbf{I}$, $i = 1, 2, 3$, as equações (A.13) e (A.17) confluem a uma só dada por

$$4m_1^2m_2m_3 \geq 1. \quad (\text{A.18})$$

Desta forma as condições (A.13) e (A.17), ou (A.18) se for o caso, garantem a estabilidade do algoritmo acelerador simplificado em torno dos parâmetros ótimos $\mathbf{p}_o$.

Ao ser considerada a matriz negativa semi-definida, o sistema pode permanecer em um ciclo limite, o que indica que é estável mas que não converge. Portanto uma análise sobre $\mathbf{Q}'$ pode-nos dar informação sobre se o sistema é convergente o não. Considerando (ver Apêndice B)

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}' = & - \begin{bmatrix} \mathbf{x} \\ 2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{x} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{x}^T & 2\mathbf{x}^T\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{M}_1^{-1} - 2\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 - 2\mathbf{M}_3\mathbf{M}_1\mathbf{M}_2 \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{s}[n] = \begin{bmatrix} \Delta\mathbf{p}[n] \\ \mathbf{q}[n] \end{bmatrix},$$

obtem-se

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T[n] \mathbf{Q}'[n] \mathbf{s}[n] = & -\left(\Delta \mathbf{p}^T[n] \mathbf{x}[n] + 2\mathbf{q}^T[n] \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{x}[n]\right) * \\ & * \left(\mathbf{x}^T[n] \Delta \mathbf{p}[n] + 2\mathbf{x}^T[n] \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \mathbf{q}[n]\right) + \\ & + \mathbf{q}^T[n] \left(\mathbf{M}_1^{-1} - 2\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 - 2\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\right) \mathbf{q}[n] \end{aligned} \quad (\text{A.19})$$

$$\mathbf{s}^T[n] \mathbf{Q}'[n] \mathbf{s}[n] = -v^2[n] + \mathbf{q}^T[n] \left(\mathbf{M}_1^{-1} - 2\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 - 2\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2\right) \mathbf{q}[n]$$

Restringindo a condição de estabilidade (A.17) para

$$\mathbf{M}_1^{-1} - 2\mathbf{M}_2 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 - 2\mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 < 0$$

conclui-se que com $\mathbf{q}[n] \neq 0$ necessariamente

$$\mathbf{s}^T[n] \mathbf{Q}'[n] \mathbf{s}[n] < 0.$$

Caso $\mathbf{q}[n] = 0$ resulta de (A.19)

$$\begin{aligned} \mathbf{s}^T[n] \mathbf{Q}'[n] \mathbf{s}[n] &= -\left(\Delta \mathbf{p}^T[n] \mathbf{x}[n]\right) \left(\mathbf{x}^T[n] \Delta \mathbf{p}[n]\right) \\ &= -\left(e[n] - e_o[n]\right)^2 \end{aligned}$$

onde $e_o[n] = \mathbf{x}^T[n] \mathbf{p}_o[n] - d[n]$ é o erro de estimação ótimo.

Desta forma, enquanto $e[n] \neq e_o[n]$ o sistema será contrativo tendendo a fazer com que $\|\Delta \mathbf{p}[n]\|$ diminua de valor. Entretanto, deve-se observar que, dependendo do sinal $\mathbf{x}[n]$, o erro $e[n]$ pode já ter atingido o valor ótimo $e_o[n]$ sem que $\mathbf{p}[n] = \mathbf{p}_o[n]$. Um exemplo é a identificação de um sistema linear de ordem superior a 2, utilizando-se um sinal consistindo de uma única senoide de frequência fixa. Este é um problema que depende das características do sinal $\mathbf{x}[n]$ que deve ser suficientemente rico para permitir a identificação do sistema, não sendo propriamente um defeito do algoritmo adaptativo. De qualquer forma, embora uma tal situação seja problemática par um problema de identificação de sistema, não o é para os problemas de equalização e cancelamento de eco ou interferências, já que nestes casos o erro de estimação é o sinal de interesse.

Portanto desde que

$$4\mathbf{M}_1 \mathbf{M}_3 \mathbf{M}_1 \mathbf{M}_2 > \mathbf{I} \quad (\text{A.20})$$

e

$$\mathbf{M}_2\mathbf{M}_1\mathbf{M}_3 + \mathbf{M}_1\mathbf{M}_3\mathbf{M}_2 > \frac{\mathbf{M}_1^{-1}}{2} \quad (\text{A.21})$$

ou caso $\mathbf{M}_i = m_i\mathbf{I}$, $i = 1, 2, 3$,

$$4m_1^2m_2m_3 > 1, \quad (\text{A.22})$$

pode-se afirmar que o algoritmo acelerador converge assintoticamente para uma situação de erro quadrático ótimo e se o sinal $\mathbf{x}[n]$ for suficientemente rico o mesmo ocorre com a convergência dos parâmetros $\mathbf{p}[n]$ para os parâmetros ótimos $\mathbf{p}_o[n]$.

Apêndice B

ALGORITMO NLMS NA FORMA DE NEWTON

As equações que definem o algoritmo NLMS são as seguintes:

$$\begin{aligned} e_a[n] &= d[n] - \mathbf{x}^T[n]\mathbf{w}[n-1] \\ \mathbf{w}[n] &= \mathbf{w}[n-1] + \frac{\mu \mathbf{x}[n]e_a[n]}{\epsilon + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]}. \end{aligned} \tag{B.1}$$

Reescreve-se o termo que multiplica a $\mu e_a[n]$:

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{x}[n]}{\epsilon + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]} &= \frac{\epsilon \mathbf{x}[n] + \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n] - \mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]}{\epsilon (\epsilon + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n])} \\ &= \frac{\mathbf{x}[n]}{\epsilon} \left[1 - \frac{\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]}{\epsilon + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]} \right] \\ &= \epsilon^{-1} \left[\mathbf{I} - \frac{\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{\epsilon + \mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]} \right] \mathbf{x}[n] \\ &= \left[\epsilon^{-1}\mathbf{I} - \frac{\epsilon^{-2}\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \epsilon^{-1}\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]} \right] \mathbf{x}[n]. \end{aligned} \tag{B.2}$$

O fator à direita da igualdade e que multiplica a $\mathbf{x}[n]$ pode ser escrito como:

$$\epsilon^{-1}\mathbf{I} - \frac{\epsilon^{-2}\mathbf{x}[n]\mathbf{x}^T[n]}{1 + \epsilon^{-1}\mathbf{x}^T[n]\mathbf{x}[n]} = \epsilon^{-1}\mathbf{I} - \epsilon^{-1}\mathbf{x}[n] \left(1 + \mathbf{x}^T[n]\epsilon^{-1}\mathbf{x}[n] \right)^{-1} \mathbf{x}^T[n]\epsilon^{-1} \tag{B.3}$$

de onde definindo:

$$\mathbf{A}^{-1} = \epsilon^{-1} \mathbf{I}$$

$$\mathbf{B} = \mathbf{x}[n]$$

$$\mathbf{C}^{-1} = 1$$

$$\mathbf{D} = \mathbf{x}^T[n],$$

e fazendo uso do lemma de inversão de matriz (Sayed, 2003)

$$(\mathbf{A} + \mathbf{BCD})^{-1} = \mathbf{A}^{-1} - \mathbf{A}^{-1} \mathbf{B} (\mathbf{C}^{-1} + \mathbf{DA}^{-1} \mathbf{B})^{-1} \mathbf{DA}^{-1},$$

pode-se escrever como

$$\epsilon^{-1} \mathbf{I} - \frac{\epsilon^{-2} \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n]}{1 + \epsilon^{-1} \mathbf{x}^T[n] \mathbf{x}[n]} = (\epsilon^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n])^{-1}.$$

Portanto, da equação (B.2)

$$\frac{\mathbf{x}[n]}{\epsilon + \mathbf{x}^T[n] \mathbf{x}[n]} = (\epsilon^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n])^{-1} \mathbf{x}[n].$$

Substituindo este resultado e a equação (B.1a) na equação (B.1b) obtém-se

$$\mathbf{w}[n] = \mathbf{w}[n-1] + \mu (\epsilon^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n])^{-1} \mathbf{x}[n] e_a[n],$$

comparando este resultado com o método de Newton dado por

$$\mathbf{p}_n = \mathbf{p}_{n-1} - \rho_n \mathbf{F}^{-1}(n, \mathbf{p}_{n-1}) \nabla f(n, \mathbf{p}_{n-1}),$$

tem-se as estimativas, para o gradiente:

$$\widehat{\nabla} f(n, \mathbf{w}_{n-1}) = \mathbf{x}[n] e_a[n],$$

e para a matriz Hessiana:

$$\hat{\mathbf{F}}(n, \mathbf{w}_{n-1}) = \epsilon^{-1} \mathbf{I} - \mathbf{x}[n] \mathbf{x}^T[n].$$