THIAGO ANTONIO GRANDI DE TOLOSA

**Uma proposta para análise otimizada de correntes transitórias em
materiais condutores**

São Paulo
2010

THIAGO ANTONIO GRANDI DE TOLOSA

**Uma proposta para análise otimizada de correntes transitórias em
materiais condutores**

Tese apresentada à Escola
Politécnica da Universidade de São
Paulo para obtenção do título de
Doutor em Engenharia

Área de Concentração:
Sistemas Eletrônicos

Orientador: Prof. Livre Docente
Jorge Mieczyslaw Janiszewski

São Paulo
2010

Este exemplar foi revisado e alterado em relação à versão original, sob responsabilidade única do autor e com a anuência de seu orientador.

São Paulo, 12 de maio de 2010.

Assinatura do autor

Assinatura do orientador

Autorizo a reprodução e divulgação total ou parcial deste trabalho, por qualquer meio convencional ou eletrônico, para fins de estudo e pesquisa, desde que citada a fonte.

FICHA CATALOGRÁFICA

Tolosa, Thiago Antonio Grandi de

Uma proposta para análise otimizada de correntes transitórias em materiais condutores / **Thiago Antonio Grandi de Tolosa - São Paulo, 2010.**
102 p.

Tese (Doutorado) – Escola Politécnica da Universidade de São Paulo. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle.

1. Materiais elétricos 2. Análise de ondaletas 3. Compatibilidade eletromagnética I. Universidade de São Paulo. Escola Politécnica. Departamento de Engenharia de Telecomunicações e Controle II.t

Tolosa, T. A. G. de. **Uma proposta para análise otimizada de correntes transitórias em materiais condutores**. Tese apresentada à Escola Politécnica da Universidade de São Paulo para obtenção do título de Doutor em Engenharia.

Aprovado em 29 de abril de 2010.

Aos meus filhos Ana Luiza e Gustavo e à minha esposa Cintia que estão presentes em todos os momentos da minha vida.

AGRADECIMENTOS

Ao amigo e orientador Prof. Jorge Mieczyslaw Janiszewski pelo grande apoio em todos os momentos do trabalho e pelo exemplo de ser humano.

Aos meus pais Erasmo e Cleide que estão sempre ao meu lado e são os grandes responsáveis por minhas conquistas, pela minha educação e pelos valores passados.

Aos meus padrinhos tio Vicente e tia Cleo pelo carinho, pelos ensinamentos e por estarem sempre presentes na minha vida.

Ao meu irmão Caio, Janaína, Natália e Camila pelo grande apoio em todos os momentos.

À minha sogra Claudete pela ajuda na educação dos meus filhos e pelo apoio.

Aos amigos Cláudio Roberto da Silva Carmo e Sérgio Ribeiro Augusto pelo constante incentivo e pelo grande auxílio na elaboração do trabalho.

Aos professores Ana Flora Pereira de Castro Humes, Arnaldo Megrich, Demétrio Elie Baracat, Eduardo Victor dos Santos Pouzada e Paulo Ocimoto pelo constante apoio e incentivo.

Aos professores Paulo Sergio Colli Bógus, Marilda Eboli Assumpção, Patrícia Antonio de Menezes Freitas e Hector Alexandre Chaves Gil pelo incentivo e pelos conselhos.

À Sra. Maria Rita Santa Rosa Corrêa e Sra. Ezilda Jardim Versolato do Instituto Mauá de Tecnologia pelo constante apoio.

Aos meus colegas da Escola de Engenharia Mauá pelo incentivo.

Ao Sr. Júlio Costa Gonzalez e à Sra. Teresa Cristina dos Reis Gonzalez do Instituto Oceanográfico da Universidade de São Paulo pelo grande auxílio na editoração do trabalho.

RESUMO

Neste trabalho é desenvolvida uma metodologia baseada na aplicação do método dos momentos conjugado à aproximação por diferenças finitas, para análise no domínio do tempo da distribuição de correntes transitórias em meios condutores. O procedimento computacional permite que sejam considerados sistemas de condutores longos, com seção transversal genérica, discretizados em elementos filiformes. Assim, a equação integral que descreve o problema é substituída por uma representação matricial. No caso de meios não homogêneos, o método dos elementos finitos é usado para a obtenção da matriz que permite a solução do problema.

Como o método proposto baseia-se na solução passo a passo no tempo, é interessante, para maior eficiência computacional, que as matrizes tenham sua dimensão reduzida, o que pode ser realizado por meio da Transformada Discreta “Wavelet”, como investigado no trabalho.

Também é feita uma análise da estabilidade do procedimento computacional, para verificação das condições de aplicabilidade do mesmo.

A validação do procedimento desenvolvido é feita a partir da comparação dos resultados obtidos para problemas com solução já conhecida por meio de medições ou por outros métodos de resolução.

São apresentados resultados da aplicação do método proposto a alguns casos de interesse prático, na área de Compatibilidade Eletromagnética, destacando-se a análise do efeito de blindagem e o estudo de “crosstalk” em um sistema multicondutor.

O procedimento desenvolvido ainda pode ser aprimorado com a utilização de elementos com formas mais gerais do que a filiforme proposta, permitindo sua extensão a problemas tridimensionais. Também pode ser estudado o pré-condicionamento da matriz a ser reduzida pela aplicação da Transformada “Wavelet”, a fim de permitir um melhor desempenho do processo computacional.

Palavras-chave: Correntes transitórias. Análise computacional no domínio do tempo. Diferenças finitas. Método dos Momentos. Transformada Discreta “Wavelet”.

ABSTRACT

In this work, a methodology is developed, based on the application of the moment method associated to a finite difference approximation, for time domain analysis of transient current distribution in conducting media. The computational procedure allows that long conductors with any cross section can be considered, approximated by filamentary elements. Thus, the integral equation that describes the problem is substituted by a matrix representation. In the case of non homogeneous regions, the finite element method is used to obtain the matrix that allows the solution of the problem.

As the proposed method works in a time step by step scheme, it is interesting, for increased computational efficiency, to reduce the size of the involved matrices. This can be done by application of the Discrete Wavelet Transform, as investigated in this work.

An analysis of the numerical stability of the computational procedure is also done, aiming to establish its applicability conditions.

Validation of the numerical procedure developed is done by comparing the results obtained for problems whose solution is known by measurement or by another method.

Some problems of practical interest in Electromagnetic Compatibility were solved and the results are presented, concerning particularly shielding effects and multi conductor crosstalk.

The developed procedure can be improved employing elements with more general shapes, besides the filamentary ones, allowing the consideration of three dimensional systems. Also, pre conditioning of the matrices before application of the Wavelet Transform can be studied, for a better performance of the method.

Keywords: Transient currents. Computational analysis in time domain. Finite difference. Moment Method. Discrete Wavelet Transform.

LISTA DE FIGURAS

Figura 3.2.1 – Condutor filamentar.	32
Figura 3.2.2 – Condutor de seção arbitrária e elemento filiforme.	33
Figura 3.2.3 – Exemplo de discretização em elementos com seção quadrada. . . .	35
Figura 3.4.1 – Representação tempo-freqüência [31]. a) Série temporal; b) Transformada de Fourier; c) Transformada de Fourier com “Janelamento”; d) Transformada “wavelet”.	41
Figura 3.4.2 – Função impulso discreto $f(n) = \delta(n - 50)$ apresentada para 100 valores na seqüência $[0,100]$	42
Figura 3.4.3 – Função impulso analisada através da “wavelet” de Haar.	43
Figura 3.4.4 – Função impulso analisada através da “wavelet” de Daubechies-2. .	43
Figura 3.4.5 – Filtragem de $x[n]$ por dois filtros com mesma largura de faixa. . . .	45
Figura 3.4.6 – Princípio da filtragem em sub-bandas.	46
Figura 3.4.7 – Exemplo de compressão e expansão de sinal amostrado por fator 2 e simbologia adotada para uma dada seqüência.	46
Figura 3.4.8 – Decomposição do sinal $x[n]$ com 2m pontos, amostrados a uma taxa de 2A Hz em 3 níveis considerando uma sub-amostragem por fator 2	47
Figura 3.4.9 – Decomposição do sinal $x[n]$ em 3 níveis por meio da “wavelet” D4. .	48
Figura 3.4.10 – Decomposição de uma imagem pela DWT de Haar bidimensional até nível 1	49
Figura 3.4.11 – Decomposição de uma imagem pela DWT D4 bidimensional até nível 2.	50
Figura 3.4.12 – Resultado da compressão da imagem pela DWT D4 até nível 2. .	51
Figura 4.1.1 – Seção transversal considerada como aproximação de uma seção circular de diâmetro $L=1,0$ m. Subdivisão utilizando 204 elementos.	54
Figura 4.1.2 – Comparação de resultados para a densidade de corrente - $L = 1,0\text{ m}$. a) $f = 500\text{Hz}$; b) $f = 5\text{kHz}$; c) $f = 50\text{kHz}$	55
Figura 4.1.3 – Densidade de corrente em função da profundidade em condutor de seção quadrada, $L = 1,0\text{ m}$ e $f = 50\text{kHz}$	57

Figura 4.1.4 – Matriz $[I + C_{ki}]$ no caso de $L = 1,0m$. a) matriz original; b) matriz transformada; c) após aplicação de limiar $eps = 0,01$ e exclusão dos “zeros”.	58
Figura 4.1.5 – Densidade de corrente em função da profundidade em condutor de seção quadrada, $L = 0,1m$ e $f = 500Hz$.	59
Figura 4.1.6 – Características geométricas do problema.	60
Figura 4.1.7 – Indução de correntes em trilhas adjacentes. Comparação de resultados para $f = 10kHz$. a) simulação computacional no domínio do tempo; b) domínio da frequência e medições, obtidos de [12].	61
Figura 4.1.8 – Indução de correntes em trilhas adjacentes. Comparação de resultados para $f = 1MHz$. a) simulação computacional no domínio do tempo; b) domínio da frequência e medições, obtidos de [12].	62
Figura 4.1.9 – Chapa condutora utilizada na medição da distribuição de corrente.	63
Figura 4.1.10 – Corrente normalizada. Comparação dos resultados experimentais e de método numérico no domínio da frequência [12] e do método proposto. a) elemento a; b) elemento b; c) elemento c.	65
Figura 4.2.1 – Geometria do problema.	66
Figura 4.2.2 – Excitação com tempo de subida de $2ms$.	66
Figura 4.2.3 – Corrente nos elementos. $L = 0,1m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 3,61 \cdot 10^{-3}$ e $c_{ii} = 2,67 \cdot 10^{-5}$.	67
Figura 4.2.4 – Corrente nos elementos. $L = 3,0m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 1,38 \cdot 10^{-1}$ e $c_{ii} = 5,24 \cdot 10^{-3}$.	67
Figura 4.2.5 – Corrente nos elementos. $L = 3,231m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 9,99 \cdot 10^{-1}$ e $c_{ii} = 1,14 \cdot 10^{-2}$. a-) resultados após 100 iterações. b-) resultados após 10^4 iterações (tempo “muito” longo).	68
Figura 4.2.6 – Corrente nos elementos. $L = 3,24m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 1,02$ e $c_{ii} = 1,15 \cdot 10^{-2}$.	68
Figura 4.2.7 – Corrente nos elementos. $L = 0,1m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 0,78$ e $c_{ii} = 2,67 \cdot 10^{-2}$.	69

Figura 4.2.8 – Corrente nos elementos. $L = 4.0m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 1.00 e $c_{ii} = 15.93$	69
Figura 4.2.9 – Corrente nos elementos. $L = 0,1m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 0,9997 e $c_{ii} = 94,3$	70
Figura 4.2.10 – Corrente nos elementos. $L = 1,0m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 0,9999 e $c_{ii} = 5,24 \cdot 10^3$	70
Figura 4.2.11 – Corrente nos elementos. $L = 2,0m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 1,0001 e $c_{ii} = 1,59 \cdot 10^4$	70
Figura 4.3.1 - Geometria do problema (adaptada de [63]).	72
Figura 4.3.2 - Formas de onda da corrente induzida: (a) $f = 1\text{kHz}$; (b) $f = 10\text{kHz}$; (c) $f = 100\text{kHz}$; (d) $f = 1\text{MHz}$. Formas de onda da densidade de corrente no condutor “vítima” no centro (J200) e perto da superfície (J193): (e) $f = 100\text{kHz}$; (f) $f = 1\text{MHz}$. Formas de onda da densidade de corrente no condutor “fonte” no centro (J72) e perto da superfície (J65): (g) $f = 10\text{kHz}$; (h) $f = 1\text{MHz}$ (adaptado de [63])	73
Figura 4.3.3 – Características geométricas do problema.	75
Figura 4.3.4 – Elementos finitos. a) malha gerada para corrente no elemento 1; b) visualização das linhas de campo.	75
Figura 4.3.5 – Comparação entre resultados obtidos por matrizes $[C_{ki}]$ geradas pelo Método dos Elementos Finitos (FEM) e por elementos filamentosos (“Programa”) com e sem a aplicação da DWT. a) ponto 1; b) ponto 10; c) ponto 25.	77
Figura 4.3.6 – Figura 4.3.6 – Condutores com blindagem. a) geometria; b) corrente aplicada nos condutores c_1 e c_2 com atraso td (igual a um passo de tempo).	78
Figura 4.3.7 – Análise de blindagem. Utilização do FEM. a) malha de elementos finitos; b) linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento 17 (blindagem); c) linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento ab (condutor vítima).	79
Figura 4.3.8 – Resultados da densidade de corrente nos elementos sem a blindagem.	80

Figura 4.3.9 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem com $\mu = \mu_o$. a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz $[I + C_{ki}]$ transformada: 0,9% de zeros - $\epsilon_s=0,001$ e 10% de zeros - $\epsilon_s=0,01$	81
Figura 4.3.10 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem com $\mu = 60\mu_o$. a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz transformada: 1,5% de zeros - $\epsilon_s=0,001$ e 9,2% de zeros - $\epsilon_s=0,01$	82
Figura 4.3.11 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem com $\mu = 600\mu_o$. a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz transformada: 9,1% de zeros - $\epsilon_s=0,001$ e 10,4% de zeros - $\epsilon_s=0,002$	83
Figura 4.3.12 – Análise de blindagem mais espessa. Utilização do FEM. Linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento 1 (blindagem).	84
Figura 4.3.13 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem mais espessa, com $\mu = 600\mu_o$. a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz transformada: 4,8% de zeros - $\epsilon_s=0,001$ e 5,8% de zeros - $\epsilon_s=0,002$	85
Figura 4.3.14 – Densidade de corrente senoidal nos elementos. Blindagem com $\mu = \mu_o$ ("mio") e $\mu = 600\mu_o$ ("600mio"). a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Frequência de excitação 100Hz.	86
Figura 4.3.15 – Densidade de corrente senoidal nos elementos. Blindagem com $\mu = \mu_o$ ("mio") e $\mu = 600\mu_o$ ("600mio"). a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Frequência de excitação 1 kHz.	87
Figura 4.3.16 – Geometria do problema.	88
Figura 4.3.17 – Configurações de correntes analisadas. a) configuração 1; b) configuração 2.	89
Figura 4.3.18 – Densidade de corrente nos condutores para as duas configurações. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.	89
Figura 4.3.19 – Densidade de corrente nos condutores com $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 S/m$ para as duas configurações. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.	90

Figura 4.3.20 – Densidade de corrente nos condutores com $\mu_r = 100$ para as duas configurações. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.	.91
Figura 4.3.21 – Densidade de corrente nos condutores com $f = 60Hz$. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.	.92
Figura 4.3.22 – Densidade de corrente nos condutores com $f = 1kHz$. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.	.92

LISTA DE TABELAS

Tabela 3.4.1 – Função impulso analisada através da “wavelet” de Haar.	44
Tabela 4.1.1 – Densidade de corrente obtida com matriz completa e reduzida por aplicação de “wavelet”.	56
Tabela 4.1.2 – Densidade de corrente obtida com matriz completa e reduzida por aplicação de “wavelet”.	59

LISTA DE SÍMBOLOS

μ_o : permeabilidade magnética do vácuo em H/m

μ_r : permeabilidade magnética relativa

σ : condutividade em S/m

$\vec{J}$: vetor densidade de corrente em A/m^2

J_o : densidade de corrente resultante de tensão imposta em A/m^2

B_o : função de Bessel do primeiro tipo e primeira ordem

$\vec{E}$: vetor campo elétrico em V/m

$\vec{A}$: vetor potencial magnético em Wb/m

Φ : potencial escalar elétrico em V

$\vec{B}$: vetor densidade de fluxo magnético em T

$[C_{ki}]$: matriz dos coeficientes que determinam a contribuição do elemento i no elemento k da subdivisão espacial do condutor

ΔS : área da seção do elemento filiforme em m^2

$[A]$: matriz auxiliar para análise da estabilidade do método proposto

$[B]$: matriz auxiliar, considerando a excitação imposta, para análise da estabilidade do método proposto

$[W]$: matriz ortogonal obtida da “wavelet” de Daubechies utilizada no processo de otimização

Δt : passo de tempo do processo iterativo em s

f : frequência em Hz

ω : frequência angular em rad/s

ϵps : limiar de corte dos elementos da matriz transformada pela DWT

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO	16
2. REVISÃO DA LITERATURA	19
3. SOLUÇÃO PROPOSTA	30
3.1 Campos Eletromagnéticos em Meios Condutores.	30
3.2 Procedimento Numérico.	32
3.3 Análise da Estabilidade do Método.	37
3.4 Transformada Discreta “Wavelet” - DWT.	40
4. APLICAÇÕES DO MÉTODO PROPOSTO	53
4.1 Validação do Método.	53
4.1.1 Análise do efeito pelicular.	53
4.1.2 Comparação de resultados computacionais obtidos no domínio da frequência com medições em caso de trilhas condutoras.	60
4.1.3 Comparação de resultados computacionais com medições em caso de distribuição de corrente em chapa condutora.	63
4.2 Estudo de Casos para Análise da Estabilidade do Procedimento.	66
4.3 Alguns Casos de Interesse Prático.	72
4.3.1 Trilhas condutoras.	72
4.3.2 Análise de blindagem.	74
4.3.2.1 Utilização do Método dos Elementos Finitos para geração das matrizes envolvidas no procedimento computacional desenvolvido. . .	74
4.3.2.2 Análise de blindagem.	78
4.3.3 Análise de “crosstalk” em sistema multicondutor.	88
5. CONCLUSÕES	94
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	96

1. Introdução

Na Engenharia Elétrica muitas vezes tem-se de lidar com situações em que o fenômeno da indução pode ser responsável por efeitos indesejáveis.

Assim, por exemplo, tem-se o aparecimento de correntes induzidas em condutores “vítimas” próximos a outros em que são impostas correntes, o que representa uma das preocupações dos profissionais da área de Compatibilidade Eletromagnética. Nesse caso, as blindagens usadas para minimizar o efeito têm sua eficácia dependente das correntes nelas induzidas.

Em sistemas de potência, a proximidade dos condutores provoca efeitos mútuos, resultando distribuição de corrente não uniforme e reduzindo a eficiência do conjunto.

Esses são apenas dois exemplos que mostram o interesse de se estudar a distribuição de correntes em meios condutores, tanto no caso de transitórios, como no caso de regime senoidal.

A distribuição de correntes é caracterizada pelo vetor densidade de corrente, com comportamento descrito por uma equação integral, cuja solução analítica pode, em geral, ser obtida para problemas com geometrias simples. Em problemas com estruturas complexas, são utilizados métodos numéricos de resolução, aplicados tanto no domínio da frequência quanto no domínio do tempo.

O objetivo do presente trabalho é a análise de correntes transitórias em condutores, sendo desenvolvido um procedimento computacional para a solução do problema, baseado em diferenças finitas no domínio do tempo e no método dos momentos. Trata-se de um processo iterativo no tempo, que pode resultar em grande volume de cálculos. Assim, a utilização da transformada discreta “wavelet” é investigada no trabalho, visando a resolução otimizada do problema.

A aplicação do procedimento na determinação da distribuição de correntes em condutores permite resolver problemas relacionados ao efeito pelicular, ao efeito de proximidade e a correntes induzidas em conjuntos de condutores, além do cálculo da impedância.

A utilização de uma formulação integral da distribuição de corrente elétrica em meios condutores será considerada neste trabalho, pois para os problemas

bidimensionais que serão analisados, essa formulação apresenta algumas vantagens em relação ao equacionamento na forma diferencial, ou seja, somente as regiões “ativas” precisam ser discretizadas e as condições de contorno são facilmente estabelecidas no domínio considerado.

Quando é utilizada solução no domínio da frequência, as correntes transitórias podem ser analisadas através do cálculo da resposta permanente senoidal, aplicando-se a ela a técnica das transformadas de Fourier direta e inversa. Observa-se nesse caso, entretanto, o aparecimento do fenômeno de Gibbs que está condicionado à aproximação de funções periódicas descontínuas por sua série de Fourier.

A solução direta no domínio do tempo, aqui proposta, contorna o problema associado ao fenômeno de Gibbs, mas por outro lado, pode conduzir à manipulação repetitiva de matrizes densas e de grande porte com dimensões diretamente ligadas ao número de elementos envolvidos na discretização do problema, o que torna o cálculo inconveniente em termos de tempo de processamento e capacidade de armazenamento dos dados.

Uma forma de atenuar a desvantagem desse alto custo computacional que cresce rapidamente com a inserção de mais elementos na discretização do problema consiste em, de alguma maneira, reduzir o tamanho das matrizes envolvidas na análise do problema ou simplesmente transformá-las em esparsas, o que pode ser conseguido pela aplicação das “wavelets”.

A utilização da transformada discreta “wavelet” torna-se uma alternativa eficiente para resolver essa desvantagem computacional e sua investigação completa a metodologia a ser utilizada no presente trabalho.

Considerando que o procedimento assim desenvolvido, no domínio do tempo, é de processamento muito rápido, ele pode ser utilizado também para obter a solução em regime senoidal permanente, realizando-se um número suficiente de iterações.

No caso de meios não homogêneos, o procedimento pode ser estendido, evitando a limitação do método dos momentos, com a utilização do método dos elementos finitos unicamente para a obtenção das matrizes do problema.

Outro aspecto importante a ser considerado refere-se às condições de aplicabilidade dos métodos numéricos utilizados no procedimento proposto. Assim, uma análise prévia da estabilidade do método também é feita no trabalho.

Em resumo, o trabalho objetiva a análise no domínio do tempo de correntes transitórias em estruturas condutoras, magnéticas ou não, por meio de um procedimento computacional, com possibilidade de reduzir tempo de processamento e memória requerida.

O conteúdo deste trabalho pode ser resumido como a seguir.

Inicialmente, no Capítulo 2, a revisão bibliográfica apresenta um resumo de algumas das principais metodologias utilizadas para análise de correntes em condutores.

No capítulo 3, são analisados o equacionamento na forma integral do problema e o fundamento do método numérico utilizado e aplicado para essa formulação, além da análise de estabilidade do procedimento desenvolvido e da apresentação resumida da aplicação da transformada discreta “wavelet”.

Em seguida, no capítulo 4, é feita a investigação da aplicabilidade e validação do método desenvolvido através de comparações com resultados obtidos experimentalmente, relacionados ao problema de distribuição de corrente em condutores.

Após a validação do procedimento, ele é empregado para uma análise de correntes transitórias em problemas de compatibilidade eletromagnética e, em particular, no caso de blindagens e problemas de “crosstalk”. Os exemplos considerados permitem observar os efeitos da geometria do problema, da frequência do sinal aplicado e dos parâmetros dos materiais utilizados.

Todo o estudo é realizado através da implementação computacional desenvolvida no “software” MatLab.

Finalmente, no capítulo 5, são apresentadas conclusões sobre a aplicabilidade do método e perspectivas futuras de desenvolvimento.

2. Revisão da Literatura

A seguir são apresentados comentários sobre textos relacionados com o tema do presente trabalho, analisados separadamente de acordo com a metodologia de aplicação (métodos analíticos, métodos numéricos no domínio da frequência e no domínio do tempo e de forma mais geral, métodos envolvendo a aplicação das “wavelets”).

Os problemas envolvendo o cálculo da distribuição de corrente referem-se basicamente ao efeito pelicular, efeito de proximidade e às correntes induzidas em condutores.

Alguns trabalhos que envolvem métodos analíticos de resolução são analisados a seguir.

Wheeler apresenta em [1] um estudo com fórmulas e tabelas que permite o cálculo da impedância complexa de diversos formatos de condutores e a análise da influência da proximidade de outros condutores sobre essa impedância, através do conceito de impedância superficial.

No trabalho apresentado por Namjoshi, Lavers e Biringer [2] é utilizado um método analítico para investigar a potência dissipada por correntes induzidas em núcleos com formatos toroidais feitos de material com alta resistividade e de seção transversal retangular. As componentes radial e axial da densidade de corrente induzida são expressas em termos de produtos de funções de Bessel e funções trigonométricas.

O trabalho apresentado por Yanhua e Lie [3], utiliza um método totalmente analítico para o cálculo das perdas provocadas por correntes induzidas em um rotor de material laminado. São feitas algumas simplificações, considerando a densidade de fluxo magnético constante na fronteira entre o estator e o entreferro e a densidade de fluxo aplicada periódica.

O trabalho apresentado por Goddard, Roy e Sykulski em [4] trata da determinação da indutância e resistência de um par de condutores através de procedimento analítico, utilizando, quando necessário, integração numérica. Duas configurações básicas são analisadas: fitas condutoras com espessura desprezível e largura finita e condutores retangulares de espessura e largura finitas. Uma

transformação conforme é utilizada para determinação da indutância de um par de fitas infinitamente condutoras para as duas configurações.

Em [5,6] é apresentado o conceito de GMD (“Geometrical Mean Distance”) que é aplicado no cálculo da distribuição de corrente. Considerando-se uma discretização dos condutores em elementos, a GMD é aplicada para o cálculo da contribuição de um elemento do condutor sobre ele mesmo.

Algumas formulações tridimensionais relativas ao efeito pelicular e às correntes induzidas podem ser vistas em [7,8].

Em [9] é apresentado um método de cálculo analítico para singularidades das integrais que surgem na aplicação do método dos elementos finitos em problemas de efeito pelicular.

Em [10] são apresentados exemplos de cálculo de correntes induzidas, envolvendo métodos analíticos e numéricos de resolução em condutores não magnéticos.

Com o rápido crescimento das aplicações em alta frequência nos sistemas de telecomunicações e do desenvolvimento dos sistemas de informação, surgem dificuldades crescentes no estudo dos campos eletromagnéticos envolvidos e, portanto, métodos analíticos de solução foram sendo substituídos por métodos numéricos, desenvolvidos de forma a realizar simulações precisas com baixo custo computacional.

Quanto à aplicação de métodos numéricos, na literatura estão presentes estudos tanto no domínio da frequência como no domínio do tempo.

No domínio da frequência, equações integrais cujas incógnitas são as correntes superficial elétrica e magnética são muito utilizadas na análise de correntes induzidas nos casos de condutores com profundidade pelicular pequena. No caso de profundidade pelicular grande, o erro computacional gerado por métodos tradicionais no cálculo de campos eletromagnéticos nas proximidades da borda do condutor aumenta muito. A partir disso, em [11], Ishibashi apresenta uma técnica baseada no método dos elementos de contorno para obtenção de soluções mais precisas em problemas envolvendo correntes induzidas no caso de profundidade pelicular considerada grande.

O trabalho também apresenta uma discussão sobre a utilização de um procedimento iterativo que tem como objetivo minimizar a utilização dos recursos

computacionais necessários para resolução do sistema linear obtido pela discretização das equações envolvidas no problema.

A referência [12] apresenta um estudo da distribuição de correntes em condutores através da análise no domínio da frequência e será utilizada para comparação de resultados com o método desenvolvido no presente trabalho.

Os autores Canova, Gruosso e Repetto apresentam em [13] um trabalho em que dois métodos integrais são utilizados para análise da distribuição da corrente e modelagem de blindagens magnéticas de material não ferromagnético para campos de baixas frequências. Um dos métodos, denominado método multi-condutor (MCM), baseia-se na discretização 2-D da blindagem em um conjunto de subcondutores distribuídos em paralelo ao longo de seu comprimento.

O outro método utilizado em [13] baseia-se na formulação finita dos campos eletromagnéticos (FFEF) em que somente a superfície da blindagem é discretizada. A precisão e a convergência do método foram analisadas considerando-se uma blindagem na forma de fita quadrada colocada sobre uma linha de dois fios.

Após a validação apresentada, os dois métodos analisados são empregados para considerações de ordem prática na construção de blindagens: formato, comprimento, efeitos de descontinuidades e material.

Em [14] é apresentada uma formulação integral na forma reduzida para análise de campos eletromagnéticos quase estacionários em sistemas condutores formados por camadas paralelas ocas ou não, imersos em um dado campo magnético. São apresentados exemplos do cálculo da densidade de corrente em condutores cilíndricos ocas.

O trabalho apresentado por Gagnoud em [15] descreve um método integral baseado nas leis de Ohm e de Biot-Savart e a conservação da corrente para análise de correntes induzidas em sistemas com geometria 3-D. O método é aplicado em sistemas indutivos submetidos a excitações senoidais de média ou alta frequência. A formulação numérica desenvolvida leva a um sistema linear com matrizes densas, não simétricas e mal condicionadas.

Em [16] o autor apresenta um método explícito baseado no método das diferenças finitas no domínio do tempo fazendo uso da metodologia “Perfectly Matched Layers” (PML) para análise de transitórios de correntes induzidas em

baixas frequências. É feito um estudo sobre condições de estabilidade e consistência e também é analisada a aplicação do método em problemas 2-D e 3-D com auxílio do algoritmo DuFort-Frankel.

O método dos elementos finitos no domínio do tempo é utilizado para análise de transitórios de correntes induzidas em [17]. É apresentada a distribuição da densidade de fluxo magnético calculada em um transformador de 240000 kVA para alguns intervalos de tempo.

O cálculo das densidades de corrente induzidas em regime permanente e transitório é realizado em condutores com seções retangulares [6], circulares e tubulares submetidos a correntes elevadas [18,19]. A mesma análise é feita em materiais ferromagnéticos [7,20,21] e na determinação de impedâncias de transitório de condutores e de linhas de transmissão [22,23,24]. Em [25] é feito o desenvolvimento de formulação integral para distribuição de correntes que não necessita de condições de contorno no espaço e podendo ser, portanto, aplicado o método dos momentos.

Em [18] é apresentada uma técnica baseada no conceito da subdivisão de condutores em seções de coroas circulares concêntricas para determinação da impedância, em função da frequência, de cabos subterrâneos que transportam elevadas correntes. A densidade de corrente no interior dos subcondutores não é considerada constante como nos métodos tradicionais, mas com variação linear em cada sub-condutor, como utilizado em elementos finitos, o que reduz o número de sub-condutores necessários e o tempo de computação em até 95%.

Em [23] é feita uma análise da impedância transitória de linhas de transmissão através da aplicação do método das diferenças finitas à equação de linha devidamente modificada pelo efeito pelicular e pela introdução de fontes distribuídas que modelam o campo externo aplicado. A solução é determinada no domínio da frequência e, então, mediante sua antitransformada, é obtida a resposta no domínio do tempo.

Trabalhos envolvendo o projeto de máquinas elétricas, transformadores e outros elementos de sistemas de potência estão relacionados com a aplicação do método dos elementos finitos. Assim, em [26] é apresentada uma formulação integro-diferencial, em que a densidade de corrente num sistema de múltiplos condutores é descrita como função da corrente total que pode ser medida em cada

condutor. A solução é desenvolvida em relação ao vetor potencial magnético, que é determinado numericamente pelo método dos elementos finitos.

Um exemplo de aplicação do método dos elementos finitos no domínio do tempo é apresentado em [27]. As equações que relacionam tensão e corrente em linhas de transmissão são modificadas com o efeito pelicular e o efeito de proximidade.

Em [28] é utilizado o método dos elementos finitos para cálculo do efeito pelicular em regime transitório, em que as condições de contorno de tensão e corrente são substituídas por redes resistivas, capacitivas e indutivas, conectadas aos condutores. Em [24] é utilizado o método das diferenças finitas no domínio do tempo e podem ser analisadas linhas de transmissão conectadas a cargas do tipo não linear.

O trabalho desenvolvido por Balasubramanian, Lalgudi e Shanker em [29] apresenta a determinação da distribuição do campo magnético em meios não lineares. A equação integral do problema é descrita em termos da densidade de fluxo magnético e a aplicação do método dos momentos em conjunto com o método FMM ("Fast Multipole Method") torna a solução mais rápida.

A seguir, alguns trabalhos relacionados à aplicação das "wavelets" são resumidos.

Em [30], é feita uma análise das equações das linhas de transmissão nas formulações diferencial e integral com parâmetros dependentes da frequência, através de um método baseado na teoria das "wavelets" e utilização da FFT. As equações no domínio da frequência são expandidas em termos da "wavelet" considerada. Por meio dessa expansão são obtidos sistemas algébricos cuja solução fornece o comportamento da tensão e da corrente ao longo da linha para cada frequência. A resposta no domínio do tempo é obtida aplicando-se a transformada inversa FFT.

Em [31] são apresentadas aplicações das "wavelets" em problemas de eletromagnetismo. Inicialmente o autor relaciona, de forma detalhada, a teoria de "wavelets" com a teoria de filtros para posteriormente utilizá-la no processo de transformações matriciais através da utilização da DWT (Transformada Discreta "Wavelet").

Alguns artigos [32,33,34,35,36] apresentam uma metodologia baseada na utilização da DWT em conjunto com o Método dos Momentos, para análise de campos eletromagnéticos. Além da descrição de diferentes técnicas de aplicação, esses artigos apresentam uma análise de resultados através da comparação com métodos tradicionais de resolução e ainda se referem ao grande interesse de aplicações em outros setores, como por exemplo, em processamento de sinais.

Em [32] os autores apresentam uma alternativa ao método dos momentos tradicional, baseada na teoria das “wavelets”, para a solução numérica de problemas envolvendo acoplamento eletromagnético e que podem ser formulados por uma equação integral linear.

Em [33] como em [32], é feita a aplicação do método dos momentos utilizando a técnica de Galerkin, em que as funções de expansão com suporte triangular são baseadas em “wavelets” para simulação de descontinuidades em dois exemplos de micro linhas de transmissão: determinação do coeficiente de reflexão em antena do tipo “patch” em função da frequência (8 – 14GHz) e do limiar de corte utilizado nas matrizes “wavelet”; determinação dos parâmetros de reflexão e transmissão em micro linha de transmissão em função da frequência (8 – 14GHz) e do limiar de corte utilizado nas matrizes “wavelet” geradas.

Em [34] também é analisado um método numérico baseado na técnica de transformação matricial através da utilização das transformadas “wavelet” para solução de equações integrais em problemas de eletromagnetismo. Nesse caso, diferentemente do realizado em [32], é feita inicialmente uma discretização da equação integral através da aplicação da técnica de “point-matching” tradicional, considerando as funções degrau e pulso como funções de expansão e de peso. A partir disso, o sistema matricial denso gerado é transformado pela utilização da técnica de transformação matricial por “wavelet” em conjunto com a adoção de limiar para os valores dos elementos da matriz, de forma a aproximá-la por uma matriz esparsa.

Em [37] é utilizada a transformada rápida “wavelet” (FWT) e a transformada rápida de Fourier (FFT) em conjunto com o método do gradiente conjugado com pré-condicionamento (PCG) da diagonal, para solução dos dois sistemas lineares gerados pela discretização da equação integral descritiva do problema através de duas bases ortonormais “wavelets” diferentes.

Em [35] como em [34,37], é apresentada uma metodologia baseada nas transformadas “wavelet” de Haar e Daubechies em conjunto com o método dos momentos para resolução de problemas de radiação e espalhamento em eletromagnetismo. O método utilizado fornece uma solução mais rápida e que exige menor capacidade de armazenamento computacional dos coeficientes da matriz do que pelo método dos momentos convencional, quando considerado espalhamento atribuído a grandes objetos com forma complexa.

A referência [38] apresenta um método numérico para determinação de RCS (“Radar Cross Section”) de superfícies condutoras e resistivas baseado na aplicação da “wavelet” de Shannon em conjunto com o método dos momentos.

Em [36] é apresentado um método híbrido envolvendo o método dos elementos finitos (FEM) e o método dos elementos de contorno (BEM) combinado com uma compressão matricial pela transformada discreta “wavelet” de Daubechies para simular interações entre os elementos magnéticos de dispositivos constituídos por partes ferro magnéticas distintas.

O método apresentado reduz a necessidade de armazenamento e tempo de processamento da CPU, mantendo a precisão dos resultados em comparação com o método FEM/BEM convencional. Através do método descrito, a porcentagem de elementos nulos na matriz dos elementos de fronteira chega a 90% com um correspondente erro máximo relativo da ordem de 5%.

A referência [39] contém notas de um mini curso sobre a teoria de “wavelets” desenvolvido pelo “Institute for Computer Applications in Science and Engineering” (ICASE) e pela “NASA Langley Research Center” (LARC) em 1993. Além dos conceitos matemáticos básicos apresentados, desde a introdução da análise de multi-resolução, que representa a chave para o desenvolvimento e aplicações das “wavelets”, são apresentadas também: a relação com a teoria de filtros e algumas aplicações da transformada discreta “wavelet” (DWT) na solução de equações diferenciais parciais e integrais e em operações de compressão, multiplicação e convolução de operadores através de algoritmos numéricos rápidos.

A referência [40] desenvolve a teoria de matrizes “wavelets”, funções de escala e funções “wavelets” e análise de multi-resolução. Apresenta algoritmos para aplicações das “wavelets” de suporte compacto em compressão de dados e nos sistemas de telecomunicações.

A referência [41] apresenta a aplicação de um método baseado na transformada discreta “wavelet” e na aproximação com um somatório de produtos de Kronecker para resolução de sistemas lineares muito densos provenientes da discretização de equações diferenciais e integrais.

Trabalhos envolvendo o método dos momentos e a teoria de “wavelets” para resolução de problemas de espalhamento eletromagnético são apresentados em detalhes em [42,43,44,45].

Em [42] é considerado o problema de espalhamento de onda plana a partir de uma superfície com irregularidades periódicas.

Em [43] é feita uma análise de descontinuidade em microlinhas de transmissão através da utilização de “wavelets”.

Em [44] são utilizadas “wavelets” bi-ortogonais como funções de expansão no método dos momentos para análise de problemas de espalhamento.

A referência [45] apresenta a teoria básica das “wavelets” ortogonais e sua aplicação em problemas de espalhamento eletromagnético.

Em [46] o método numérico Wavelet-Galerkin é utilizado para cálculo de campos em regiões com condições de contorno arbitrárias e em regiões limitadas com vários meios diferentes.

Em [47] são apresentados resultados da aplicação de um método baseado em “wavelets” bi-ortogonais de suporte compacto no intervalo $(0,1)$ para solução de problemas de espalhamento eletromagnético bidimensional.

Em [48] é utilizada a análise de multi-resolução para se obter uma boa estimativa de perfis de resistividade de um condutor através de um número limitado de parâmetros desconhecidos. O método permite identificar regiões do corpo condutor onde perturbações podem estar localizadas.

Em [49] é analisado o problema de detecção e caracterização de um defeito de forma circular numa superfície condutora através do cálculo de correntes induzidas. Neste problema inverso é utilizado um modelo de rede neural artificial do tipo MLP (“Multi-Layer Perceptron”) treinada pelo algoritmo “Backpropagation” que inclui funções “wavelets” para aprimorar a capacidade de aproximações locais.

A partir de uma formulação integral que determina a relação entre o vetor potencial magnético e as correntes fonte, induzida e de magnetização num ponto genérico no espaço 3-D em meio condutor e magnético, é definido um conjunto de equações não lineares que relaciona tais correntes no tempo em [50]. O sistema iterativo de equações, na forma matricial, apresenta matriz dos coeficientes densa, o que torna proibitivo o uso de métodos diretos de resolução. A aplicação da análise de multi-resolução baseada em “wavelets” de Daubechie para transformação matricial em conjunto com um pré-condicionamento da matriz é realizada e depois utilizada na resolução dos sistemas lineares gerados em dois problemas propostos mostrando uma boa concordância com a solução direta e com redução de 45 % no tempo de processamento.

Em [51] é apresentado um método para determinação do limiar de corte dos elementos das matrizes provenientes da aplicação da transformada discreta “wavelet” utilizada em conjunto com o Método dos Momentos. O trabalho apresenta uma técnica alternativa aos métodos tradicionais em que a partir da precisão desejada na solução, chega-se a uma estimativa do ótimo limiar de corte, independente do número de condição da matriz.

Em [52] é utilizada a “wavelet” do tipo “coiflet” em conjunto com o método dos momentos em problemas em que o domínio da solução é confinado a um intervalo fechado. Como as “wavelets” tradicionais são originalmente definidas no domínio real, as “wavelets” periódicas foram desenvolvidas para utilização em tais problemas. No artigo são apresentadas a construção e a utilização desse tipo de “wavelet” em problemas de espalhamento.

Em [53] é descrito um sistema magneto-óptico, alternativo à técnica clássica de “eddy-current”, para identificação de corrosão e defeitos em estruturas metálicas. Nesse novo sistema, que utiliza redes neurais artificiais e a DWT no processamento da imagem obtida por uma câmera CCD, grandes estruturas são investigadas em pouco tempo de processamento.

Em [54] a expansão em “wavelets” é utilizada na solução de problemas inversos em processamento de imagens. Em [55] também é feita a utilização das “wavelets” para análise de imagens. Nesse caso, as “wavelets” de Coifman (“coiflets”) são utilizadas para reconstrução de alvos em radares no domínio do tempo.

Em [56], é analisada a utilização da transformada “wavelet” para eliminação dos sinais indesejáveis gerados no teste por correntes induzidas em tubos geradores de vapor em usinas nucleares.

A utilização do método dos elementos finitos em conjunto com a transformada discreta “wavelet” para modelagem e caracterização de falhas internas em transformadores trifásicos é feita em [57]. O método dos elementos finitos é utilizado para criação do modelo e consideração de falhas do tipo fase-terra e fase-fase.

Em [58] é feita uma análise de transitórios de campos eletromagnéticos através de um método combinando elementos finitos com “wavelets”. O método desenvolvido aproveita a eficiência e simplicidade do método dos elementos finitos na imposição das condições de contorno e os méritos da aplicação das “wavelets” com relação às propriedades de suporte compacto e continuidade.

Em [59] é apresentado um método alternativo ao método tradicional de transformação matricial através da aplicação da DWT para solução das equações matriciais provenientes de problemas envolvendo espalhamento eletromagnético em estruturas tridimensionais. O método proposto apresenta melhor desempenho computacional em relação ao método tradicional.

O trabalho apresentado em [60] utiliza a aplicação da DWT na solução do sistema de equações gerado pelo método dos momentos em um problema de espalhamento bi-dimensional de antena tipo “patch”. São feitas comparações com diferentes métodos iterativos de resolução quanto ao tempo de processamento, número de iterações e estimativa do erro.

A referência [61] apresenta uma técnica de pré-condicionamento das matrizes geradas pelo FMM (“Fast Multipole Method”) em problemas de espalhamento 2D e 3D. São discutidos aspectos de implementação, estabilidade numérica e desempenho de processamento paralelo em sistemas computacionais apropriados.

A metodologia proposta neste trabalho é utilizada em [62,63] na análise de problemas específicos.

Em [62] é utilizada a transformada discreta “wavelet” em conjunto com o método dos momentos para análise transitória de correntes em condutores.

A referência [63] apresenta uma análise de problema envolvendo transitórios de correntes em condutores através da aplicação de métodos numéricos no domínio do tempo.

A referência [64] é uma bibliografia fundamental sobre descrição e aplicação do método dos momentos em problemas envolvendo campos eletromagnéticos.

Em [65] são apresentados aspectos básicos de implementação computacional dos métodos numéricos em eletromagnetismo enquanto que [66,67] são referências teóricas sobre campos eletromagnéticos.

A referência [68] apresenta métodos computacionais envolvendo a manipulação de matrizes e determinantes e é uma referência importante de álgebra linear.

As referências [69,70,71] apresentam detalhes importantes sobre a teoria e aplicações das “wavelets”.

Alguns resultados existentes na literatura, obtidos por métodos analíticos, métodos desenvolvidos no domínio da frequência e métodos que envolvem a aplicação da DWT, foram utilizados na etapa de validação do método proposto destacando-se as referências [1], [12] e [34].

A partir da análise dos trabalhos pesquisados, também se justifica o empenho em desenvolver um procedimento numérico otimizado, no domínio do tempo, que apresente uma alternativa eficiente, com relação ao tempo de processamento e ocupação de memória do sistema computacional, para aplicação em casos de interesse na análise de transitórios de correntes.

A revisão da literatura serve, assim, para apresentar uma base importante para investigação dos métodos e resultados em problemas que envolvem, de forma geral, a determinação da distribuição de corrente em meios condutores e também mostrar a importância do trabalho proposto.

3. Solução Proposta

Neste capítulo são estabelecidas as bases do trabalho, incluindo uma conceituação introdutória sobre a teoria das “wavelets” que serão utilizadas como ferramenta de otimização. São apresentados, também, os procedimentos numéricos de solução do problema descrito por uma equação integral no domínio do tempo, além de uma análise prévia da estabilidade do método. É utilizado o método dos momentos associado à aproximação por diferenças finitas de derivada no tempo. Quando o meio não é homogêneo, pode-se utilizar o método dos elementos finitos para a construção das matrizes do problema.

3.1 Campos Eletromagnéticos em Meios Condutores

Problemas de valor de contorno em Eletromagnetismo podem ser resolvidos utilizando os potenciais eletromagnéticos, a partir dos quais são determinados os campos elétrico e magnético [67].

Este procedimento será utilizado no equacionamento desenvolvido no presente trabalho e, com relação aos parâmetros constitutivos, será considerado, em princípio, um meio linear, homogêneo e isotrópico.

Como $\vec{\nabla} \cdot \vec{B} = 0$, o vetor potencial magnético $\vec{A}$ é definido por:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = \vec{B}. \quad 3.1$$

$$\text{Como } \vec{\nabla} \times \vec{E} = -\frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t}, \quad 3.2$$

obtém-se:

$$\vec{\nabla} \times \vec{E} + \frac{\partial(\vec{\nabla} \times \vec{A})}{\partial t} = \vec{\nabla} \times \left[\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \right] = 0. \quad 3.3$$

Como o termo entre colchetes tem rotacional nulo, ele pode ser escrito como gradiente de um potencial escalar Φ , resultando, então:

$$\vec{E} + \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla} \Phi \quad 3.4$$

ou

$$\vec{E} = -\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi. \quad 3.5$$

Multiplicando a equação 3.5 pela condutividade σ do meio, tem-se:

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = -\sigma \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \sigma \vec{\nabla}\Phi. \quad 3.6$$

A partir da equação 3.6, a densidade de corrente total em função do tempo $J(t)$ em um condutor submetido a uma tensão em seus extremos pode ser entendida como resultante das contribuições da tensão aplicada e da variação do vetor potencial magnético no tempo.

Assim, a equação 3.6 pode ser reescrita, considerando $\vec{J}_o(t)$ como a contribuição relativa à tensão aplicada:

$$\vec{J}(t) = -\sigma \frac{\partial \vec{A}(t)}{\partial t} + \vec{J}_o(t). \quad 3.7$$

Como $\vec{A}(t)$ é definido por uma integral da própria distribuição de correntes, a expressão 3.7 toma a forma de uma equação integral em $\vec{J}(t)$. Essa equação integral será utilizada para a determinação da distribuição de corrente em condutores, sendo sua solução analítica possível somente nos problemas com geometria simples. Nos problemas com distribuição de corrente em estruturas mais complexas, torna-se necessária a utilização de métodos numéricos de resolução.

Supondo que não existam variações do gradiente de Φ na direção $\vec{a}_z$, o vetor densidade de corrente $\vec{J}$ depende apenas da posição (x, y) em coordenadas cartesianas e o problema torna-se bidimensional, com $\vec{A} = A_z \vec{a}_z$.

Tratando-se de meio condutor, em que a corrente de deslocamento pode ser desprezada, o vetor potencial $\vec{A}(t)$, com a imposição de $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$, relaciona-se com a densidade de corrente pela expressão:

$$\vec{\nabla}^2 \vec{A} = -\mu \vec{J}. \quad 3.8$$

No caso de meio homogêneo, a relação entre o vetor potencial e a densidade de corrente num condutor de seção transversal genérica será obtida subdividindo-o em condutores filamentosos visando a aplicação do método dos momentos.

3.2 Procedimento Numérico

Supondo um condutor filamental, conforme a figura 3.2.1, com seção transversal circular de raio r_a e corrente elétrica I na direção $\vec{a}_z$, devido à simetria,

$\frac{\partial A_z}{\partial \phi} = 0$ e $\frac{\partial A_z}{\partial z} = 0$, de forma que $A_z = A_z(\rho)$ e, fora do condutor:

$$\vec{\nabla}^2 A_z \vec{a}_z = 0. \quad 3.9$$

Figura 3.2.1 – Condutor filamental.

Portanto, em coordenadas cilíndricas:

$$\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial A_z}{\partial \rho} \right) = 0, \quad 3.10$$

cuja solução é:

$$A_z(\rho) = C \ln(\rho) + K. \quad 3.11$$

Da definição do vetor potencial:

$$\vec{\nabla} \times \vec{A} = -\frac{\partial A_z}{\partial \rho} \vec{a}_\phi = -C \frac{1}{\rho} \vec{a}_\phi = \mu \vec{H}, \quad 3.12$$

resulta:

$$\vec{H} = -C \frac{1}{\mu \rho} \vec{a}_\phi. \quad 3.13$$

Mas, considerando uma circunferência L de raio $\rho > r_a$:

$$\oint_L \vec{H} \cdot d\vec{l} = I = -\frac{2\pi C}{\mu}, \quad 3.14$$

de modo que

$$C = -\frac{\mu I}{2\pi}. \quad 3.15$$

Portanto,

$$A = A_z = -\frac{\mu I}{2\pi} \ln(\rho) + K. \quad 3.16$$

Dividindo o condutor em filamentos de corrente, cada um com a corrente $dI = J dS$, a contribuição de cada filamento para o potencial magnético é dada por:

$$dA = -\frac{\mu J}{2\pi} \ln(\rho) dS + K. \quad 3.17$$

A segunda parcela do segundo membro da expressão acima é constante em relação a ρ e, sem afetar o campo magnético, pode ser suposta nula:

$$dA = -\frac{\mu J}{2\pi} \ln(\rho) dS. \quad 3.18$$

Realizando a integração sobre toda a seção do condutor:

$$A = -\frac{\mu}{2\pi} \int_S J \ln(\rho) dS. \quad 3.19$$

Portanto, substituindo 3.19 em 3.7, resulta:

$$J(x, y, t) = \frac{\mu \sigma}{2\pi} \cdot \frac{\partial}{\partial t} \iint_S J(\varphi, \eta, t) \ln \sqrt{(x - \varphi)^2 + (y - \eta)^2} d\varphi d\eta + \vec{J}_o(x, y, t), \quad 3.20$$

para um condutor muito longo, com seção vista na figura 3.2.2, onde estão indicadas as coordenadas relevantes.

Figura 3.2.2 - Condutor de seção arbitrária e elemento filiforme.

Substituindo a derivada no tempo pela sua aproximação por diferenças finitas, resulta:

$$J(x, y)^{(n+1)} = \frac{\mu \sigma}{2\pi \cdot \Delta t} \cdot \left[\iint_S J^{(n+1)}(\varphi, \eta) \ln \sqrt{(x - \varphi)^2 + (y - \eta)^2} d\varphi d\eta - \iint_S J^{(n)}(\varphi, \eta) \ln \sqrt{(x - \varphi)^2 + (y - \eta)^2} d\varphi d\eta \right] + J_o^{(n+1)}$$

3.21

em que o índice superior n representa uma dada iteração, correspondente ao instante $t = n \cdot \Delta t$.

Discretizando, então, o meio condutor em sub-condutores filiformes, a aplicação do método dos momentos com a técnica de “point-matching” [64] permite escrever 3.21 em forma matricial:

$$[I + C_{ki}] \cdot [J]^{(n+1)} = [C_{ki}] \cdot [J]^{(n)} + [J_o]^{(n+1)} \quad 3.22$$

e portanto,

$$[J]^{(n+1)} = [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [C_{ki}] \cdot [J]^{(n)} + [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [J_o]^{(n+1)}. \quad 3.23$$

$[I]$ é a matriz identidade e $[C_{ki}]$ a matriz dos coeficientes que determinam a contribuição do elemento i no elemento k da subdivisão espacial do condutor.

A matriz $[C_{ki}]$ é determinada pelos coeficientes:

$$c_{ki} = -\frac{\mu \sigma}{2\pi \cdot \Delta t} \cdot \ln \sqrt{(x_k - x_i)^2 + (y_k - y_i)^2} \cdot \Delta S, \quad 3.24$$

em que ΔS é a área da seção do elemento filiforme considerado.

Para $k = i$, utiliza-se o conceito do logaritmo da “distância média geométrica” [5,6], de forma que resulta:

$$c_{ki} = -\frac{\mu \sigma}{2\pi \cdot \Delta t} \cdot \ln(0.44705 \cdot d) \cdot \Delta S, \quad 3.25$$

para reticulado com seção quadrada de lado d .

A figura 3.2.3 ilustra, como exemplo, a subdivisão de um condutor muito longo em elementos com seção quadrada.

Figura 3.2.3 – Exemplo de discretização em elementos com seção quadrada.

A matriz $[C_{ki}]$ para esse exemplo tem a forma:

$$[C_{ki}] = -\frac{\mu_0 \cdot \sigma \cdot \Delta S}{2\pi \cdot \Delta t} \cdot \begin{bmatrix} \ln(0.44705d) & \ln\left(\sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2}\right) & \cdots & \ln\left(\sqrt{(x_1 - x_{p^2})^2 + (y_1 - y_{p^2})^2}\right) \\ \ln\left(\sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}\right) & \ln(0.44705d) & \cdots & \ln\left(\sqrt{(x_2 - x_{p^2})^2 + (y_2 - y_{p^2})^2}\right) \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ \ln\left(\sqrt{(x_{p^2} - x_1)^2 + (y_{p^2} - y_1)^2}\right) & \ln\left(\sqrt{(x_{p^2} - x_2)^2 + (y_{p^2} - y_2)^2}\right) & \cdots & \ln(0.44705d) \end{bmatrix} \quad (3.26)$$

3.26

em que x_i e y_i representam as coordenadas do centro da seção de cada elemento.

A determinação da densidade de corrente em cada elemento do condutor é dada por:

$$\begin{bmatrix} J_1^{n+1} \\ J_2^{n+1} \\ \vdots \\ J_{p^2}^{n+1} \end{bmatrix} = [I + C_{ki}]^{-1} \cdot \left\{ [C_{ki}] \cdot \begin{bmatrix} J_1^n \\ J_2^n \\ \vdots \\ J_{p^2}^n \end{bmatrix} + [J_o]^{(n+1)} \right\}, \quad (3.27)$$

em que a condição de contorno é dada pela tensão imposta nos extremos do condutor, o que define a matriz $[J_o]$.

No caso de condição de contorno correspondente à corrente total imposta nos condutores, uma manipulação pode ser feita nas matrizes. Assim, por exemplo, supondo impostas as correntes totais I_{c_1} e I_{c_2} nos condutores 1 e 2, resulta:

$$\begin{bmatrix} J_1^{n+1} \\ J_2^{n+1} \\ \dots \\ J_{p^2}^{n+1} \\ J_{c1}^{n+1} \\ J_{c2}^{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I + C_{ki} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & I + C_{ki} & & \\ \Delta S & \Delta S & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \left\{ \begin{bmatrix} C_{ki} & & & & & \\ & & & & & \\ & & & & & \\ & & & C_{ki} & & \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} J_1^n \\ J_2^n \\ \dots \\ J_{p^2}^n \\ J_{c1}^n \\ J_{c2}^n \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dots \\ 0 \\ I_{c1} \\ I_{c2} \end{bmatrix} \right\}$$

3.28

Em se tratando de situações com meio não homogêneo (por exemplo, presença de materiais magnéticos, em que $\mu \neq \mu_0$), o método dos elementos finitos é utilizado, de forma a obter o potencial $\bar{A}$ em determinados pontos da seção dos condutores, considerando correntes filiformes dadas. Para isso, é utilizado o “toolbox” de equações diferenciais parciais do “software” MatLab. A relação (numérica) obtida entre o potencial e as correntes permite, nesse caso, a construção da matriz $[C_{ki}]$.

3.3 Análise da Estabilidade do Método

O estudo da estabilidade visa verificar as condições de aplicabilidade do método proposto.

Pode-se analisar, assim, o que ocorre quando a excitação aplicada é uma função J_o degrau, com condições iniciais nulas. A resposta estacionária esperada é J_o .

Assim, voltando à equação 3.23 e definindo $[A] = [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [C_{ki}]$ e $[B]^{(n+1)} = [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [J_o]^{(n+1)}$, tem-se a seqüência:

$$\begin{aligned}
 n=0: [J]^{(1)} &= [A] \cdot [J]^{(0)} + [B]^{(1)} \\
 n=1: [J]^{(2)} &= [A] \cdot [J]^{(1)} + [B]^{(2)} = [A]^2 \cdot [J]^{(0)} + [A] \cdot [B]^{(1)} + [B]^{(2)} \\
 n=2: [J]^{(3)} &= [A] \cdot [J]^{(2)} + [B]^{(3)} = [A]^3 \cdot [J]^{(0)} + [A]^2 \cdot [B]^{(1)} + [A] \cdot [B]^{(2)} + [B]^{(3)} \\
 &\dots \\
 (n-1): [J]^{(n)} &= [A]^n \cdot [J]^{(0)} + [A]^{n-1} \cdot [B]^{(1)} + [A]^{n-2} \cdot [B]^{(2)} + \dots + [B]^{(n)}.
 \end{aligned}$$

Considerando-se a condição inicial $[J]^{(0)} = [0]$ e que para qualquer iteração a excitação imposta é $[B]^{(0)} = [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [J_o]^{(0)} = [B]^{(1)} = [B]^{(2)} = \dots = [B]^{(n)}$, obtém-se:

$$[J]^{(n)} = \left\{ [A]^{n-1} + [A]^{n-2} + \dots + [A]^2 + [A] + [I] \right\} \cdot [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [J_o] \quad 3.29$$

A série acima converge para $[I - A]^{-1}$ quando $n \rightarrow \infty$ se os autovalores de $[A]$ tiverem módulo menor do que 1, como exposto em [61].

Portanto, satisfeita essa condição, tem-se:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ [J]^{(n)} \} = [I - A]^{-1} \cdot [I + C_{ki}]^{-1} \cdot [J_o]. \quad 3.30$$

Pode-se verificar, entretanto, que

$$[I - A]^{-1} = [I + C_{ki}]. \quad 3.31$$

Aplicando-se 3.31 na equação 3.30, chega-se à situação de regime:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \{ [J]^{(n)} \} = [I] \cdot [J_o] = [J_o]. \quad 3.32$$

Isto mostra que a resposta estacionária obtida é a esperada, havendo, portanto, convergência do método quando os autovalores de $[A]$ têm módulo menor do que 1.

Algumas considerações gerais podem ser feitas a respeito dessa condição, como apresentado a seguir.

Sabe-se que o traço de uma matriz (soma dos elementos da diagonal principal) é igual à soma dos seus autovalores.

Considerando, portanto, casos em que não haja composição de autovalores negativos e positivos, os elementos da diagonal podem ser indicativos da ordem de grandeza dos autovalores.

Por outro lado, verifica-se que para $c_{ki} \ll 1$ (c_{ki} é elemento de $[C_{ki}]$), os elementos da diagonal principal de $[A]$ aproximam-se dos valores de c_{ii} . Portanto, a condição de estabilidade (lembrando as restrições assinaladas) corresponde a impor $c_{ii} < \alpha$, sendo α da ordem de grandeza de $\frac{1}{n}$ (n é o número de linhas ou colunas da matriz $[C_{ki}]$), quando existe um autovalor “dominante”.

Como, por 3.25, $c_{ii} = -\frac{\mu\sigma}{2\pi \cdot \Delta t} \cdot \ln(0.44705 \cdot d) \cdot d^2$, resulta que se deve considerar uma limitação no fator $\frac{\ln(0.44705 \cdot d) \cdot d^2}{\Delta t}$, de forma que ao adotar, por exemplo, pequenos valores do passo de tempo, os elementos da discretização espacial devem necessariamente ter seu tamanho reduzido.

Considerando, agora, a outra situação extrema, em que $c_{ki} \gg 1$, pode-se verificar que quando os valores de c_{ki} aumentam, a matriz $[A]$ tende à matriz identidade, de forma que, no limite, seus autovalores são iguais a 1. Antes de ser atingido esse limite, entretanto, a solução converge.

Portanto, para $c_{ki} \gg 1$, a solução também converge, desde que haja uma limitação nesses valores. Isto significa que se pode adotar, por exemplo, para pequenos valores do passo de tempo, uma discretização menos refinada, desde que haja uma limitação no valor de c_{ki} .

Assim, de forma geral pode-se concluir que haverá convergência da solução para valores “pequenos” de c_{ki} (por exemplo, da ordem de 10^{-2}) e valores “grandes”

de c_{ki} (por exemplo, da ordem de 10^2), sempre respeitando a condição de que os autovalores de $[A]$ tenham módulo menor do que 1.

Isto confere ao procedimento uma flexibilidade de aplicação, principalmente considerando a larga gama de valores que pode assumir o produto $\mu\sigma$ presente na expressão dos c_{ki} .

No capítulo 4 a análise de algumas situações práticas permite verificar a condição de estabilidade aqui exposta de maneira aproximada.

3.4 Transformada Discreta “Wavelet” - DWT

O termo “wavelet” é uma tradução literal referente às “ondelettes”, que foram inicialmente introduzidas pelo geofísico Jean P. Morlet para análise de sinais provenientes de abalos sísmicos [31], e que permitem, através das transformadas contínua e discreta, que determinados sinais sejam representados por combinações lineares de funções base específicas, de forma mais eficiente do que pela transformada de Fourier.

Diferentemente da transformada de Fourier em que as funções base são obtidas a partir de mudanças na escala de sinais senoidais (cada sinal ocupando todo o intervalo de tempo), as transformadas “wavelet” utilizam translações e mudanças na escala de uma função denominada “wavelet” de análise ou “wavelet mãe”, em conjunto com uma função de escala (cada sinal ocupando um subintervalo de tempo reduzido). A partir disso, observa-se que uma diferença importante entre os dois conjuntos de funções base é a localização temporal. As funções base da transformada “wavelet” são finitas no tempo, enquanto que as funções senoidais da transformada de Fourier não. Essa característica permite à transformada “wavelet” uma obtenção da informação no domínio do tempo de um sinal em conjunto com a informação da frequência.

A figura 3.4.1, adaptada de [31], faz uma análise comparativa da representação tempo-frequência de um sinal através das transformadas de Fourier e “wavelet” e mostra que a transformada “wavelet” permite uma análise de multiresolução do sinal. Nas altas frequências existe uma alta resolução no tempo e a resolução na frequência é pobre, enquanto que nas baixas frequências, a resolução no tempo é pobre e na frequência é alta. Essa característica se torna vantajosa para análise de sinais que contenham componentes tanto de baixas quanto de altas frequências em sua composição.

Figura 3.4.1 – Representação tempo-freqüência [31]. a) Série temporal; b) Transformada de Fourier; c) Transformada de Fourier com “Janelamento”; d) Transformada “wavelet”.

A análise através de “wavelets” fornece uma alternativa eficiente em relação à técnica tradicional de Fourier para determinação das partes constituintes de um sinal.

Assim, uma função $f(x)$ pode ser representada por funções base “wavelet” e Fourier na forma:

$$\text{Fourier: } f(x) = \sum_m \langle f(x), e^{-jnw_0x} \rangle e^{-jnw_0x} = \sum_m a_m \cdot e^{-jnw_0x} \quad 3.33$$

$$\text{“Wavelet”}: f(x) = \sum_{j,k} \langle f(x), W(2^j x - k) \rangle W(2^j x - k) = c_0 \phi(x) + \sum_{j,k} d_{(2^j+k)} \cdot W(2^j x - k),$$

em que $W(2^j x - k)$ representa as funções “wavelet” obtidas de uma “wavelet mãe” por meio de dilatações e deslocamentos em x e $\phi(x)$ é a função de escala associada [40].

Diferentemente das funções base de Fourier, existem várias possibilidades para funções base “wavelet”. As mais comuns são Haar, Daubechies de ordem 4 e ordem 6, Coiflet de ordem 3 e Symmlet de ordem 8 [72].

O resultado do produto interno de $f(x)$ com a função base é a transformada do sinal (coeficientes a , c e d de 3.33).

A seguir é apresentado um exemplo de decomposição da função impulso discreto em atraso, mostrada na figura 3.4.2, através das “wavelets” de Haar e Daubechies-2 (D2). Os resultados são mostrados nas figuras 3.4.3 e 3.4.4, respectivamente, para a análise feita em 3 níveis de resolução. O termo “aproximação” refere-se à parcela do sinal composta pelas funções base de mais baixa frequência (utilização da função de escala), enquanto que “detalhe” indica a parcela do sinal composta pelas funções base de alta frequência (utilização da “wavelet mãe”). As figuras mostram como a utilização da “Discrete Wavelet Transform” - DWT permite a representação do sinal de entrada (função impulso) através de dilatações e deslocamentos das “wavelets” e funções de escala.

Figura 3.4.2 - Função impulso discreto $f(n) = \delta(n - 50)$ apresentada para 100 valores na sequência $[0, 100]$.

Figura 3.4.3 - Função impulso analisada através da “wavelet” de Haar.

Figura 3.4.4 - Função impulso analisada através da “wavelet” de Daubechies-2.

A tabela 3.4.1 apresenta os valores correspondentes aos obtidos nos gráficos da figura 3.4.3 entre as seqüências 49 e 56.

Tabela 3.4.1 – Função impulso analisada através da “wavelet” de Haar.

-0.5000	0.5000	0	0	0	0	0	0
0.2500	0.2500	-0.2500	-0.2500	0	0	0	0
0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	-0.1250	-0.1250	-0.1250	-0.1250
0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250	0.1250

Observa-se que os dois primeiros termos associados com a função de escala $\phi(x)$ e a “wavelet” mãe $W(x)$ ocupam todo o intervalo de tempo. As funções associadas com os próximos dois termos ocupam metade do intervalo e assim por diante para os termos subseqüentes, em subintervalos cada vez menores sem sobreposição das funções. Cada nível adicional à série contribui com detalhes na aproximação da função $f(x)$.

No caso discreto é possível desenvolver a metodologia da DWT através de uma analogia com a teoria de filtragem de sinais discretos no domínio do tempo. O produto interno apresentado em 3.33 é obtido através da aplicação de filtros do tipo FIR (resposta de duração finita ao impulso).

Assim, a DWT permite decompor, em diversas escalas, uma função discreta como combinação linear de funções ortogonais $\phi(x)$ e $W(x)$ de intervalo finito, como:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\frac{n}{2^j}-1} [c_{j,k} \cdot \phi_{j,k}(x-k)] + \sum_{t=1}^j \sum_{k=0}^{\frac{n}{2^j}-1} [d_{t,k} \cdot W_{t,k}(2^t x - k)], \quad j = -1, 0, \dots \text{ e } k = 0, \dots, \frac{n}{2^j} - 1$$

3.34

em que j representa o fator de escala (nível da decomposição) e os coeficientes $c_{j,k}$ e $d_{t,k}$ são obtidos pelos produtos internos $c = \langle f, \phi \rangle$ e $d = \langle f, W \rangle$, n indicando o n -ésimo componente do sinal $f(x)$.

Os coeficientes c e d associados à função de escala e “wavelet mãe”, respectivamente, podem ser obtidos por $\sum_k h(k) \cdot \phi(2x - k)$ e $\sum_k g(k) \cdot \phi(2x - k)$ em que $h(k)$ são os coeficientes de um filtro passa baixas de meia banda e $g(k)$ são os

coeficientes de um filtro passa altas de meia banda (k é o k -ésimo elemento dos filtros). A partir da determinação dos coeficientes $h(k)$, os coeficientes $g(k)$ são facilmente determinados, pois eles formam um par de filtros QMF (“Quadrature Mirror Filters”).

Em [70], são apresentadas as propriedades e as equações necessárias para determinação dos coeficientes dos filtros para as “wavelets” de Daubechies.

As amplitudes dos coeficientes d em 3.34 estão associadas às variações mais abruptas do sinal $f(x)$ (altas freqüências) e as amplitudes dos coeficientes c estão associadas às variações mais suaves (baixas freqüências) [69,70].

Os princípios básicos da teoria sobre filtros discretos são apresentados a seguir e fornecem subsídios para associação com a teoria da DWT.

Seja um sinal amostrado $x[n]$ a partir de $x[t]$, filtrado por dois filtros com larguras de faixa iguais, considerando: um filtro passa baixas com resposta ao impulso $h[n]$ gerando, por convolução, o sinal $u'[n]$ e um filtro passa altas com resposta ao impulso $g[n]$ gerando, por convolução, o sinal $v'[n]$ conforme a figura 3.4.5.

Figura 3.4.5 – Filtragem de $x[n]$ por dois filtros com mesma largura de faixa.

Os sinais obtidos $u'[n]$ e $v'[n]$ têm a metade da largura de faixa do sinal original $x[n]$ e, portanto seguindo o critério de amostragem de Nyquist, a taxa de amostragem destes sinais pode ser reduzida por um fator 2 sobre a qual $x[t]$ havia sido amostrada para produzir $x[n]$. A figura 3.4.6 mostra os dois estágios dessa sub-amostragem através dos blocos de transmissão e recuperação de $x[n]$.

Figura 3.4.6 – Princípio da filtragem em sub-bandas.

Os símbolos que representam a alteração na amostragem do sinal, indicados na figura 3.4.6 são definidos na figura 3.4.7 para uma dada seqüência.

Figura 3.4.7 – Exemplo de compressão e expansão de sinal amostrado por fator 2 e simbologia adotada para uma dada seqüência.

A figura 3.4.8 mostra, em diagrama de blocos, a aplicação do algoritmo de decomposição em “árvore” apresentado por S. Mallat em 1989 [40] que sintetiza o funcionamento da DWT para uma dimensão em 3 níveis. Os sinais a_j são as aproximações de S, enquanto que d_j são os detalhes com $j = 1, 2$ e 3 .

Figura 3.4.8 – Decomposição do sinal $x[n]$ com $2m$ pontos, amostrados a uma taxa de $2A$ Hz em 3 níveis considerando uma sub-amostragem por fator 2.

Pode-se visualizar o procedimento por meio de um exemplo. Através do comando “wavemenu”, utiliza-se o “toolbox” de “wavelets” do MatLab para decompor o sinal $x[n] = n \cdot \sin[n^2]$ para $0 \leq n \leq 10$ acrescido de uma descontinuidade em $n = 5$, amostrado em 1000 valores, através da utilização da “wavelet” de Daubechies 4 (D4) até nível 3 como mostra a figura 3.4.9.

Figura 3.4.9 – Decomposição do sinal $x[n]$ em 3 níveis por meio da “wavelet” D4.

A DWT de um sinal original $x[n]$ não é única, pois depende dos “filtros de análise” $h[n]$ e $g[n]$ na transmissão da figura 3.4.6. Da mesma forma, na recuperação do sinal através da IDWT, os “filtros de síntese” $h'[n]$ e $g'[n]$ da figura 3.4.6 não são únicos. Todos os filtros são interdependentes.

Uma das várias aplicações em que se utiliza a DWT como ferramenta está na compressão de dados como, por exemplo, a criação de imagens compactadas no formato “JPEG2000” (arquivos com extensão *jp2*) alternativo ao padrão tradicional “JPEG” criado pela aplicação da transformada discreta cosseno. Os arquivos do tipo *jp2* são obtidos a partir da aplicação da DWT bidimensional (DWT 2D), desenvolvida a partir do caso unidimensional, em conjunto com a utilização de limiares de corte no sinal transformado.

A DWT aplicada em um sinal bidimensional (que pode ser uma matriz $[f]$ de m linhas por n colunas, por exemplo) de forma a separar as partes mais relevantes (aproximações - frequências mais baixas) e menos relevantes (detalhes - frequências mais altas) pode ser representada por:

$$[f] \xrightarrow{DWT} \begin{bmatrix} [a] & [v] \\ [p] & [d] \end{bmatrix} \quad 3.35$$

em que $[a]$ é uma matriz com aproximações das linhas seguidas de aproximações das colunas; $[p]$ é uma matriz com aproximações das linhas seguidas de detalhes das colunas; $[v]$ é uma matriz com detalhes das linhas seguidas de aproximações das colunas e $[d]$ é uma matriz com detalhes das linhas seguidas de detalhes das colunas.

Na transformação realizada em 3.35, utilizou-se nível 1 de decomposição. Na figura 3.4.10 é utilizada a DWT de Haar bidimensional através do comando “wavemenu” do MatLab em uma imagem com resolução 480 x 640 para visualização do resultado obtido no processo.

Figura 3.4.10 – Decomposição de uma imagem pela DWT de Haar bidimensional até nível 1.

Para os níveis seguintes, as submatrizes $[p]$, $[v]$ e $[d]$ permanecem as mesmas, sendo aplicada a DWT novamente à submatriz $[a]$.

Na figura 3.4.11 é utilizada a DWT D4 bidimensional através do comando “wavemenu” do MatLab na mesma imagem da figura 3.4.10 para visualização do resultado obtido no processo de decomposição até nível 2.

Figura 3.4.11 – Decomposição de uma imagem pela DWT D4 bidimensional até nível 2.

Após a decomposição, a compressão da imagem pode ser feita através da aplicação de um limiar de corte nos elementos dessa imagem (minimização do número de coeficientes da DWT necessários para representar a imagem).

A figura 3.4.12 mostra o resultado obtido na compressão da imagem analisada pela DWT D4 bidimensional até nível 2. Neste caso, foi feita a aplicação de um limiar de corte de tal forma que todos os coeficientes com valor abaixo de

3,83 fossem anulados. Nenhuma deterioração na imagem comprimida é perceptível mesmo sendo composta por 63,56% de elementos nulos.

Figura 3.4.12 – Resultado da compressão da imagem pela DWT D4 até nível 2.

Observando a analogia entre uma imagem e uma matriz (elementos em linhas e colunas), a DWT 2D pode ser utilizada para a transformação e compressão de matrizes de sistemas de equações lineares do tipo $[M] \cdot [J] = [G]$.

A matriz $[M]$ pode ser transformada de maneira que os seus elementos se distribuam de forma gradual de relevância, de forma que, mediante a definição de um limiar, elementos da matriz possam ser desprezados.

As expressões obtidas pela discretização de equações integrais, como em 3.22, possuem matrizes densas com quantidade de coeficientes crescendo de forma quadrática com o número de incógnitas do sistema.

Assim, a utilização do processo iterativo desenvolvido neste trabalho pode remeter em tempo de processamento elevado e necessidade de extensa memória do sistema. Uma maneira de resolver o problema de forma otimizada é a de utilizar uma transformação matricial em $[M]$. As matrizes da equação podem ser transformadas em matrizes esparsas pela aplicação da transformada discreta “wavelet” bidimensional em conjunto com a utilização de limiares.

Assim, de 3.22 pode-se obter:

$$[W] \cdot [M] \cdot [W]^T \cdot [W] \cdot [J] = [W] \cdot [G], \quad 3.36$$

em que $[W] = [W_1] \cdot [W_2] \cdots [W_n]$ é uma matriz ortogonal e portanto, $[W] \cdot [W]^T = [I]$. Cada matriz $[W_i]$ refere-se a uma certa resolução (nível de escala).

O pré-processamento de $[M]$ por $[W]$ transforma 3.36 em um sistema equivalente

$$[B] \cdot [X] = [Y], \quad 3.37$$

com $[B] = [W] \cdot [M] \cdot [W]^T$,

$$[X] = [W] \cdot [J]$$

e $[Y] = [W] \cdot [G]$.

A matriz $[B]$ pode tornar-se esparsa após a aplicação de um limiar de corte nos seus elementos.

Neste trabalho, a transformação das matrizes é realizada como em [31] de forma a permitir uma otimização computacional da solução de problemas envolvendo cálculo da distribuição de corrente em condutores.

4. Aplicações do Método Proposto

Neste capítulo são inicialmente apresentados alguns resultados obtidos pelo método desenvolvido aplicado a situações cuja análise já tenha sido feita, seja por outro método seja por meio experimental. É feito também um estudo de alguns casos para confirmação das conclusões obtidas no capítulo 3 sobre a estabilidade do método. A comparação dos resultados e a análise de estabilidade tornam possível validar o procedimento e também avaliar a precisão obtida, as condições de aplicabilidade e o desempenho do método em termos computacionais.

A seguir, são apresentados alguns casos de interesse, podendo-se verificar a utilização do método dos elementos finitos na obtenção da matriz que permite a solução de problemas de análise transitória de corrente em meios condutores magnéticos.

Após a validação do método, algumas aplicações práticas são analisadas, destacando-se, sob o ponto de vista de compatibilidade eletromagnética, um caso especial de blindagem para baixas frequências e o problema de “crosstalk” na configuração de cabos compostos por vários condutores.

4.1 Validação do Método

4.1.1 Análise do efeito pelicular.

Para ilustrar a validade do método proposto, é analisada a distribuição da corrente em um condutor muito longo, com seção transversal circular de diâmetro $L = 1,0\text{ m}$. O contorno adotado na simulação, constituído por elementos de seção quadrada, permite uma aproximação da circunferência.

Foi aplicada uma fonte de campo $J_o(t)$ senoidal resultante de tensão imposta entre os extremos do condutor. As frequências consideradas para análise são 500 Hz , 5 kHz e 50 kHz .

As propriedades do condutor utilizado na simulação são condutividade $\sigma = 580 \text{ S/m}$ e permeabilidade $\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$ nos elementos internos ao contorno. O intervalo de tempo considerado no processo iterativo é $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6} \text{ s}$, adotando-se os resultados referentes à situação de regime permanente senoidal. Por esse motivo, o número de iterações é elevado.

Foram utilizadas duas discretizações espaciais, com 204 elementos e 804 elementos, estando indicada na figura 4.1.1 a primeira alternativa. A outra alternativa refere-se a elementos com metade da dimensão da primeira.

Figura 4.1.1 – Seção transversal considerada como aproximação de uma seção circular de diâmetro $L = 1,0 \text{ m}$. Subdivisão utilizando 204 elementos.

A solução analítica para a densidade de corrente em função de r (distância ao centro da seção condutora circular) é dada em [1] por:

$$J(r) = J_s \cdot B_o(jm \cdot \sqrt{j}r) \frac{\text{A}}{\text{m}^2}, \quad 4.1$$

em que J_s é a densidade de corrente na superfície do condutor, B_o a função de Bessel do primeiro tipo e primeira ordem, $m = \sqrt{2 \cdot \pi \cdot f \cdot \mu \cdot \sigma}$ e $j = \sqrt{-1}$.

As coordenadas $(0,46875; y) \text{ m}$ e $(0,484375; y) \text{ m}$ indicam as posições adotadas para o cálculo da densidade de corrente no condutor para 204 e 804 elementos, respectivamente. Os resultados obtidos pela solução analítica e pelo método

proposto estão apresentados na figura 4.1.2, em que JMoM refere-se ao método proposto.

(a)

(b)

(c)

Figura 4.1.2 – Comparação de resultados para a densidade de corrente - $L = 1,0 \text{ m}$.

a) $f = 500 \text{ Hz}$; b) $f = 5 \text{ kHz}$; c) $f = 50 \text{ kHz}$.

Levando-se em conta a aproximação da seção por elementos quadrados, a concordância obtida entre os resultados pode ser considerada boa, verificando-se a melhoria obtida com subdivisão mais refinada (804 elementos).

A utilização da DWT para otimização do procedimento computacional pode ser verificada considerando todos os 256 elementos do condutor de seção quadrada da figura 4.1.1.

Os resultados referentes à densidade de corrente obtidos para $f = 50 \text{ kHz}$, $L = 1,0 \text{ m}$ e $f = 500 \text{ Hz}$, $L = 0,1 \text{ m}$ estão apresentados nas tabelas 4.1.1 e 4.1.2 e nas figuras 4.1.3 e 4.1.5, respectivamente.

Nas tabelas, $JmoM$ refere-se à utilização da matriz completa $[I + C_{ki}]$ da equação 3.23, enquanto que $JmoMWav$, $JmoMWavm$ e $JmoMWavM$ utilizam a matriz reduzida pela aplicação da transformada discreta “wavelet”, com os limiares indicados como “eps”.

Tabela 4.1.1 – Densidade de corrente obtida com matriz completa e reduzida por aplicação de “wavelet”.

$(0,46875; y)m$	$JmoM \text{ } A/m^2$	$JmoMWav \text{ } A/m^2$	$JmoMWavm \text{ } A/m^2$	$JmoMWavM \text{ } A/m^2$
0,03125	0,09715	0,09720	0,09748	907.82220
0,09375	0,04802	0,04803	0,04645	-65.93390
0,15625	0,02342	0,02330	0,02041	-452.16774
0,21875	0,01136	0,01133	0,01083	-485.93694
0,28125	0,00583	0,00559	0,00614	59.05805
0,34375	0,00345	0,00292	0,00374	396.44588
0,40625	0,00256	0,00258	0,00277	385.32803
0,46875	0,00234	0,00242	0,00288	462.69724
Limiar		eps=0,001	eps=0,01	eps=0,1
% zeros	0	25,50	43,95	71,89
Número de condição da matriz transformada	9,06E+01	9,06E+01	9,16E+01	2,23E+02

Na tabela, % zeros refere-se ao número relativo de termos da matriz transformada que foram desprezados, em cada caso, com a aplicação do limiar “eps”.

Figura 4.1.3 – Densidade de corrente em função da profundidade em condutor de seção quadrada, $L = 1,0m$ e $f = 50 kHz$.

Nota-se que ainda que sejam desprezados elementos da matriz (limiares $\epsilon_{ps}=0,001$ e $\epsilon_{ps}=0,01$) os resultados obtidos são satisfatórios. Já no caso de limiar elevado ($\epsilon_{ps}=0,1$) não se observa convergência, sendo a matriz reduzida mal condicionada (observe-se o crescente número de condição da matriz).

A figura 4.1.4 mostra que a transformação na matriz $[I + C_{ki}]$ gera uma distribuição com gradação entre seus elementos maior do que ocorre na matriz original (figuras 4.1.4 a) e b)).

A eliminação dos elementos menores do que o valor limiar $\epsilon_{ps} = 0,01$, resulta na matriz vista na figura 4.1.4 c).

(a)

(b)

(c)

Figura 4.1.4 – Matriz $[I + C_{ki}]$ no caso de $L = 1,0 m$. a) matriz original; b) matriz transformada; c) após aplicação de limiar $eps = 0,01$ e exclusão dos “zeros”.

Para o caso de condutor com $L = 0,1m$ e frequência $f = 500 Hz$ os resultados são apresentados na tabela 4.1.2 e figura 4.1.5.

Tabela 4.1.2 – Densidade de corrente obtida com matriz completa e reduzida por aplicação de “wavelet”.

$(0,046875; y)m$	$J_{MoM} \frac{A}{m^2}$	$J_{MoMWav} \frac{A}{m^2}$	$J_{MoMWavm} \frac{A}{m^2}$	$J_{MoMWavM} \frac{A}{m^2}$
0,003125	0,999917	1,000276	0,727674	1686.200804
0,009375	0,999917	1,006983	1,067368	1779.316365
0,015625	0,999916	0,982420	0,789806	891.807351
0,021875	0,999916	0,959907	1,000544	973.142986
0,028125	0,999916	0,985254	1,345716	1769.608056
0,034375	0,999916	0,993445	1,037982	1996.342467
0,040625	0,999916	0,991809	1,034217	2194.566410
0,046875	0,999916	0,992995	1,033542	2210.830287
Limiar		eps=0,001	eps=0,01	eps=0,1
% zeros	0	64,53	83,28	99,56
Número de condição da matriz transformada	4,66E+00	4,67E+00	5,07E+00	9,09E+00

Figura 4.1.5 – Densidade de corrente em função da profundidade em condutor de seção quadrada, $L = 0,1m$ e $f = 500 Hz$.

Observa-se novamente que com valores elevados de “eps” o método com a utilização da transformada “wavelet” apresenta problema de convergência.

Para o procedimento JmoMWav obteve-se uma redução de tempo de processamento de cerca de 50% em comparação com o procedimento convencional. A redução desse tempo é dependente da quantidade de “zeros” desprezados na matriz e do modo de resolução do problema, que tem a forma $Ax = B$.

4.1.2 Comparação de resultados computacionais obtidos no domínio da frequência com medições em caso de trilhas condutoras.

As características geométricas do problema envolvendo correntes induzidas em trilhas condutoras e que serve para comparação de resultados podem ser vistas na figura 4.1.6. Os resultados de referência, obtidos de [12] (domínio da frequência e medições) e os resultados obtidos pelo método desenvolvido neste trabalho podem ser vistos nas figuras 4.1.7 e 4.1.8 de forma a poderem ser comparados.

Os condutores muito longos têm seção transversal retangular com altura $t = 100 \mu m$ e largura $w = 2 mm$. A distância entre os condutores é $h = 5 mm$ e cada condutor foi dividido em 128 elementos, considerando as propriedades $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 S/m$ e $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} H/m$.

O sinal de corrente I_0 imposto tem forma de onda quadrada de amplitude 2,0 A e frequências de 10 kHz (figura 4.1.7) e 1 MHz (figura 4.1.8). A trilha vítima é configurada em curto circuito.

Figura 4.1.6 – Características geométricas do problema.

a)

b)

Figura 4.1.7 – Indução de correntes em trilhas adjacentes. Comparação de resultados para $f = 10$ kHz. a) simulação computacional no domínio do tempo; b) método no domínio da frequência e medições, obtidos de [12].

a)

b)

Figura 4.1.8 – Indução de correntes em trilhas adjacentes. Comparação de resultados para $f = 1\text{MHz}$. a) simulação computacional no domínio do tempo; b) método no domínio da frequência e medições, obtidos de [12].

Verifica-se que com o procedimento desenvolvido neste trabalho (no domínio do tempo), os resultados mostram melhor concordância com as medições, evitando-se os problemas referentes ao processamento da transformada de Fourier, quando um problema referente a fenômeno transitório é resolvido por meio de análise no domínio da frequência.

4.1.3 Comparação de resultados computacionais com medições em caso de distribuição de corrente em chapa condutora.

A análise da distribuição de corrente numa chapa de cobre é feita em [12], que apresenta resultados de medições e de simulação computacional no domínio da frequência.

O condutor analisado tem seção transversal retangular com altura $h = 1\text{ mm}$, largura $w = 30\text{ cm}$ e comprimento $l = 60\text{ cm}$. Para efeito de medição da distribuição de corrente na parte central do condutor, o mesmo foi dividido ao meio e interligado por 6 fios, como mostra a figura 4.1.9. Os fios unem “faixas” da chapa condutora, delimitadas por fendas estreitas. Nas simulações, foram considerados $\sigma = 58\text{ MS/m}$ e $\mu = \mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7}\text{ H/m}$.

Figura 4.1.9 – Chapa condutora utilizada na medição da distribuição de corrente.

Impondo uma tensão entre as extremidades da chapa, na faixa de 100 Hz a 2 kHz, foram medidas as correntes nos 6 fios que são apresentados em [12], juntamente com os resultados computacionais no domínio da frequência.

Os resultados obtidos em [12] e no presente trabalho para a corrente normalizada (corrente no elemento em relação à corrente total na chapa) nos elementos a, b e c em função da frequência são mostrados na figura 4.1.10. Tratando-se de medições em regime permanente senoidal, nas simulações com o método proposto (no domínio do tempo) foram realizadas iterações até se obter a situação de regime.

(c)

Figura 4.1.10 – Corrente normalizada. Comparação dos resultados experimentais e de método numérico no domínio da frequência [12] e do método proposto. a) elemento a; b) elemento b; c) elemento c.

Verifica-se uma concordância muito boa entre os resultados experimentais e os obtidos com o procedimento proposto.

4.2 Estudo de Casos para Análise da Estabilidade do Procedimento

Nas simulações realizadas para verificação da condição de estabilidade, analisada em 3.3, considera-se o condutor da figura 4.2.1 com condutividade $\sigma = 580 \text{ S/m}$ e permeabilidade $\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$. São utilizados 16×16 elementos na discretização espacial para o caso de c_{ki} “pequeno”.

Figura 4.2.1 - Geometria do problema.

A excitação aplicada é a densidade de corrente J_o resultante de tensão imposta em todos os 256 elementos e tem a forma apresentada na figura 4.2.2.

Figura 4.2.2 – Excitação com tempo de subida de 2 ms .

A seguir são apresentados os resultados dos autovalores da matriz $[A]$, definida em 3.3, e dos valores de c_{ii} para diferentes dimensões do condutor da figura 4.2.1 e diferentes intervalos de tempo do processo iterativo, observando-se, ao mesmo tempo, o comportamento da solução obtida.

A análise da estabilidade é feita escolhendo, por exemplo, a determinação da densidade de corrente nos elementos 8, 56 e 98 do condutor, variando-se a dimensão L e o passo de tempo, de forma a obter diferentes valores para os elementos da matriz $[C_{ki}]$.

Considerando, inicialmente, $\Delta t = 10^{-3} s$, as figuras 4.2.3 a 4.2.6 mostram os resultados obtidos para diferentes valores de L . Estão indicados, nas figuras, os valores de c_{ii} e do maior autovalor em módulo da matriz $[A]$. Pode-se observar que, nesse caso, tem-se a situação em que c_{ii} é “pequeno”.

Figura 4.2.3 – Corrente nos elementos. $L = 0,1m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 3,61 \cdot 10^{-3}$ e $c_{ii} = 2,67 \cdot 10^{-5}$.

Figura 4.2.4 – Corrente nos elementos. $L = 3,0m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo $= 1,38 \cdot 10^{-1}$ e $c_{ii} = 5,24 \cdot 10^{-3}$.

Figura 4.2.5 – Corrente nos elementos. $L = 3,231 m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo = $9,99 \cdot 10^{-1}$ e $c_{ii} = 1,14 \cdot 10^{-2}$.
a-) resultados após 100 iterações. b-) resultados após 10^4 iterações (tempo “muito”
longo).

Figura 4.2.6 – Corrente nos elementos. $L = 3,24 m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 1,02 e $c_{ii} = 1,15 \cdot 10^{-2}$.

Verifica-se, pelos resultados apresentados nas figuras de 4.2.3 a 4.2.5, que para c_{ii} limitado, resulta convergência. Em particular, na figura 4.2.5 a estabilidade é comprovada pela simulação num tempo muito longo.

Ao contrário, observa-se na figura 4.2.6 que a solução não converge, pois o máximo autovalor de $[A]$ em módulo é maior do que 1.

Para o intervalo de tempo $\Delta t = 1 \cdot 10^{-6} s$, os resultados são mostrados nas figuras 4.2.7 e 4.2.8.

Figura 4.2.7 – Corrente nos elementos. $L = 0,1 m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 0,78 e $c_{ii} = 2,67 \cdot 10^{-2}$.

Figura 4.2.8 – Corrente nos elementos. $L = 4,0 m$, máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 1,00 e $c_{ii} = 15,93$.

Novamente, observa-se que a solução encontrada converge para o valor esperado quando os valores dos elementos da matriz $[C_{ki}]$ são limitados, de acordo com o discutido em 3.3.

Para a verificação da estabilidade no caso de valores “grandes” de c_{ii} , são apresentados os resultados obtidos para a corrente nos elementos 4, 20 e 36, com passo de tempo muito menor ($\Delta t = 10^{-9} s$) e diferentes valores de L (figuras 4.2.9 a 4.2.11). A discretização é realizada com 8×8 divisões e a excitação J_o considerada é a mesma da figura 4.2.2, adiantada de 9 ms.

Figura 4.2.9 – Corrente nos elementos. $L = 0,1m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 0,9997 e $c_{ii} = 94,3$.

Figura 4.2.10 – Corrente nos elementos. $L = 1,0m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 0,9999 e $c_{ii} = 5,24 \cdot 10^3$.

Figura 4.2.11 – Corrente nos elementos. $L = 2,0m$,
máximo autovalor de $[A]$ em módulo = 1,0001 e $c_{ii} = 1,59 \cdot 10^4$.

Verifica-se, a partir da apresentação dos resultados, que o método é estável para valores “grandes” de c_{ii} , desde que sejam limitados, de forma a garantir que os autovalores da matriz $[A]$ em módulo sejam menores do que 1.

4.3 Alguns Casos de Interesse Prático

É apresentada a aplicação do método proposto à análise de problemas de compatibilidade eletromagnética referentes a trilhas acopladas, blindagens e fenômeno de “crosstalk” entre condutores.

4.3.1 Trilhas condutoras.

Estuda-se neste item, a interferência eletromagnética entre duas trilhas condutoras separadas por dielétrico (figura 4.3.1), situação analisada em [63]. Os condutores muito longos têm seção transversal retangular com altura $t = 0,1 \text{ mm}$ e largura $w = 0,2 \text{ mm}$. A altura do material dielétrico é $h = 1,27 \text{ mm}$. Cada condutor foi dividido em 128 elementos, considerando $\sigma = 58 \text{ MS/m}$ e $\mu = \mu_o = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ H/m}$.

Figura 4.3.1 - Geometria do problema (adaptada de [63]).

O sinal de corrente i_0 imposto tem forma de onda quadrada de amplitude 2,0 A e frequências de 1kHz a 1MHz. A trilha denominada vítima é configurada em curto circuito. A figura 4.3.2 apresenta os resultados correspondentes à corrente induzida no condutor “vítima” e às densidades de corrente em dois elementos do condutor “vítima” e dois elementos do condutor fonte, para diferentes frequências.

Nesta análise, foram utilizados os passos de tempo $\Delta t = 10^{-5} \text{ s}$, $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$, $\Delta t = 10^{-7} \text{ s}$ e $\Delta t = 10^{-8} \text{ s}$ respectivamente para as frequências de 1kHz, 10kHz, 100kHz e 1MHz sem a aplicação da DWT.

Figura 4.3.2 - Formas de onda da corrente induzida: (a) $f = 1$ kHz; (b) $f = 10$ kHz; (c) $f = 100$ kHz; (d) $f = 1$ MHz. Formas de onda da densidade de corrente no condutor “vítima” no centro (J200) e perto da superfície (J193): (e) $f = 100$ kHz; (f) $f = 1$ MHz. Formas de onda da densidade de corrente no condutor “fonte” no centro (J72) e perto da superfície (J65): (g) $f = 10$ kHz; (h) $f = 1$ MHz (adaptado de [63]).

4.3.2 Análise de blindagem.

A eficácia de uma blindagem para proteger um condutor da interferência de outros pode ser estudada pelo método proposto. Para levar em consideração a permeabilidade da blindagem, diferente da do vácuo, inicialmente é apresentada a utilização do método dos elementos finitos para obtenção da matriz $[C_{ki}]$.

4.3.2.1 Utilização do Método dos Elementos Finitos para geração das matrizes envolvidas no procedimento computacional desenvolvido.

A utilização do Método dos Elementos Finitos Estático permite que, a partir do valor do potencial magnético devido a uma densidade de corrente imposta em cada elemento da discretização espacial considerada, seja determinada a matriz $[C_{ki}]$ do procedimento numérico desenvolvido.

A discretização em elementos triangulares feita pelo “toolbox” de equações diferenciais parciais do MatLab, utilizado no trabalho, aplica o algoritmo de Delaunay que permite uma otimização no nível de refinamento desses elementos. A partir disso, os resultados do potencial magnético são dados nos vértices dessa discretização, que não necessariamente coincidem com os pontos de interesse para aplicação do método numérico proposto.

Para a resolução do problema, foi desenvolvido um procedimento computacional baseado na busca dos três vértices mais próximos dos pontos de interesse e, a partir disso, calculado o potencial magnético como a média aritmética dos valores dos potenciais magnéticos nesses três vértices.

No Método dos Elementos Finitos, é feita a imposição de potencial magnético nulo em um contorno “distante” da região de interesse.

No exemplo abaixo é feita uma análise comparativa entre os resultados obtidos com a construção direta da matriz (elementos filamentosos) com e sem a aplicação da transformada discreta “wavelet” e por meio do método dos elementos finitos.

A divisão espacial do condutor com seção de $1 \times 1 \text{ m}$ da figura 4.3.3 é feita em 8×8 elementos de área $9.765625 \cdot 10^{-4} \text{ m}^2$. A condutividade do material é $\sigma = 580 \text{ S/m}$ e a permeabilidade é $\mu = \mu_0 \text{ H/m}$. O intervalo de tempo considerado é $\Delta t = 1 \mu\text{s}$.

Na figura estão indicados os elementos nas extremidades dos quais é imposta tensão que provoca as densidades de corrente $J_{17,18,25 \text{ e } 26} = -0.0625 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$ e

$J_{23,24,31 \text{ e } 32} = 0.0625 \frac{\text{A}}{\text{m}^2}$. Os outros elementos estão em curto circuito.

Figura 4.3.3 – Características geométricas do problema.

A figura 4.3.4a mostra, como exemplo, a malha gerada no Método dos Elementos Finitos (PDE *toolbox* do MatLab) para uma corrente elementar imposta no primeiro elemento da discretização espacial. Na figura 4.3.4b vêem-se algumas linhas de campo para essa corrente.

Figura 4.3.4 – Elementos finitos. a) malha gerada para corrente no elemento 1; b) visualização das linhas de campo.

A figura 4.3.5 mostra os resultados referentes aos elementos 1, 10 e 25 (figura 4.3.3) utilizando as matrizes obtidas pelos dois procedimentos (FEM: elementos finitos; programa: elementos filamentosos com e sem a aplicação da DWT). O limiar de corte $\epsilon=0,05$ permitiu a eliminação de 20,4% dos elementos da matriz transformada.

(a)

(b)

(c)

Figura 4.3.5 – Comparação entre resultados obtidos por matrizes $[C_{ki}]$ geradas pelo Método dos Elementos Finitos (FEM) e por elementos filamentosares (“Programa”) com e sem a aplicação da DWT. a) ponto 1; b) ponto 10; c) ponto 25.

A boa concordância obtida entre os resultados valida o procedimento de obtenção da matriz $[C_{ki}]$ pelo Método dos Elementos Finitos (FEM).

4.3.2.2 Análise de Blindagem.

A figura 4.3.6 mostra a seção do sistema muito longo estudado, com uma tensão imposta entre os extremos dos condutores c_1 e c_2 tal que provocaria densidades de corrente J_o com forma de degrau unitário com atraso td igual a um passo de tempo. O condutor c_3 corresponde ao condutor “vítima”, com seus extremos em curto circuito. A blindagem é suposta em curto circuito.

Os condutores, com diâmetro $0,25\text{ m}$, foram discretizados em quatro elementos cada, enquanto que a blindagem foi representada por 52 elementos. Assim a matriz $[C_{ki}]$ é de ordem 64×64 .

Figura 4.3.6 – Condutores com blindagem. a) geometria; b) corrente aplicada nos condutores c_1 e c_2 com atraso td (igual a um passo de tempo).

A figura 4.3.7 ilustra uma das etapas da obtenção da matriz $[C_{ki}]$ pelo FEM por meio da imposição de correntes em elementos e cálculo do respectivo vetor potencial. A figura refere-se a uma blindagem com $\mu_r = 60$ e $\sigma = 580 S/m$ e condutores com $\mu_r = 1$ e $\sigma = 580 S/m$.

Figura 4.3.7 – Análise de blindagem. Utilização do FEM. a) malha de elementos finitos; b) linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento 17 (blindagem); c) linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento ab (condutor vítima).

Para a análise comparativa dos resultados, inicialmente foi considerado o problema sem a blindagem e os condutores c_1 , c_2 e c_3 com condutividade $\sigma = 580 \text{ S/m}$. A figura 4.3.8 mostra os resultados obtidos para a densidade de corrente nos quatro elementos do condutor c_1 e nos quatro elementos do condutor vítima c_3 . O passo de tempo adotado foi $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$.

Figura 4.3.8 – Resultados da densidade de corrente nos elementos sem a blindagem.

Levando em conta, agora, a presença da blindagem, a figura 4.3.9 mostra os resultados obtidos para a densidade de corrente no elemento aa do condutor c_1 , no elemento 1 da blindagem e no elemento ab do condutor vítima. “J – eps=0” refere-se a resultados obtidos sem a aplicação da DWT, enquanto que “J – eps=0,001” e “J – eps=0,01”, representam as condições de aplicação da transformada, considerando-se os limiares de corte 0,001 e 0,01, respectivamente. Os condutores e a blindagem foram considerados com $\mu_r = 1$ e $\sigma = 580 \text{ S/m}$. O passo de tempo adotado na simulação foi $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$.

Pode-se observar o efeito da blindagem, reduzindo o pico da corrente induzida no condutor vítima.

Figura 4.3.9 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem com $\mu = \mu_o$.
a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz $[I + C_{ki}]$ transformada: 0,9% de zeros - $\epsilon = 0,001$ e 10% de zeros - $\epsilon = 0,01$.

Neste caso, $c_{ii} = 6,43$ e o máximo autovalor de $[A]$ em módulo é 0,994, satisfazendo a condição para estabilidade do método.

A figura 4.3.10 mostra os resultados para a densidade de corrente nos elementos, agora considerando a blindagem com $\mu_r = 60$.

Figura 4.3.10 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem com $\mu = 60\mu_o$.
a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz transformada: 1,5% de zeros - $\epsilon=0,001$ e 9,2% de zeros - $\epsilon=0,01$.

Neste caso, $c_{ii} = 92,86$ e o máximo autovalor de $[A]$ em módulo é 0,998.

Os resultados para a densidade de corrente nos elementos para blindagem com $\mu_r = 600$ estão apresentados na figura 4.3.11. O passo de tempo utilizado no processo iterativo foi $\Delta t = 10^{-4}$ s. Observa-se uma redução mais acentuada na corrente induzida no condutor c_3 .

(a)

(b)

(c)

Figura 4.3.11 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem com $\mu = 600\mu_o$.
a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz transformada: 9,1% de zeros - $\text{eps}=0,001$ e 10,4% de zeros - $\text{eps}=0,002$.

Neste caso, $c_{ii} = 5,82$ e o máximo autovalor de $[A]$ em módulo é 0,968.

Considerando, agora, o caso de blindagem com $\mu_r = 600$ e mais espessa, as linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento 1 (blindagem) são mostradas na figura 4.3.12, para ilustrar a utilização do FEM.

Figura 4.3.12 – Análise de blindagem mais espessa. Utilização do FEM. Linhas de campo geradas para corrente imposta no elemento 1 (blindagem).

Os resultados para a densidade de corrente nos elementos neste caso estão apresentados na figura 4.3.13. O passo de tempo utilizado no processo iterativo foi $\Delta t = 10^{-4} s$.

(c)

Figura 4.3.13 – Densidade de corrente nos elementos. Blindagem mais espessa, com $\mu = 600\mu_o$. a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Matriz transformada: 4,8% de zeros - $\text{eps}=0,001$ e 5,8% de zeros - $\text{eps}=0,002$.

Neste caso, $c_{ii} = 30,89$ e o máximo autovalor de $[A]$ em módulo é 0,982.

Os resultados apresentados nas figuras anteriores mostram o crescente efeito da blindagem com o aumento da permeabilidade e a espessura da mesma. Pode-se observar, também, que seja com valores de c_{ii} “pequenos”, seja com valores “grandes”, os autovalores da matriz $[A]$ foram sempre inferiores a 1, em módulo, como exigido para convergência da solução.

Como o método proposto, no domínio do tempo, é de processamento muito rápido, ele pode ser utilizado para a análise de situações em regime senoidal permanente, bastando, para isso, que sejam feitas iterações em número suficiente para que a situação de regime seja atingida.

Como exemplo deste tipo de análise, as figuras 4.3.14 e 4.3.15 mostram os resultados obtidos para o mesmo sistema, agora considerando tensão imposta aos condutores c_1 e c_2 senoidal nos casos de $\mu_r = 1$ e $\mu_r = 600$. Em 4.3.14 a frequência de excitação é 100 Hz e em 4.3.15, 1 kHz.

(a)

(b)

(c)

Figura 4.3.14 – Densidade de corrente senoidal nos elementos. Blindagem com $\mu = \mu_o$ ("mio") e $\mu = 600\mu_o$ ("600mio"). a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Frequência de excitação 100Hz.

(a)

(b)

(c)

Figura 4.3.15 – Densidade de corrente senoidal nos elementos. Blindagem com $\mu = \mu_o$ (“mio”) e $\mu = 600\mu_o$ (“600mio”). a) condutor c_1 ; b) blindagem; c) condutor vítima. Frequência de excitação 1 kHz.

Novamente observa-se a maior eficácia da blindagem com permeabilidade maior.

Deve-se ressaltar que na análise de blindagem realizada neste item, foi imposta aos condutores “fonte” uma tensão e não uma fonte de corrente, o que também seria possível, como explicado no capítulo 3.

Assim, tendo sido imposta tensão, pode-se observar que a corrente resultante nos condutores “fonte” varia de caso a caso, como resultado dos efeitos mútuos entre todos condutores e a blindagem.

4.3.3 Análise de “crosstalk” em sistema multicondutor.

A análise do fenômeno de “crosstalk” é investigada pela aplicação do método proposto considerando o caso de um sistema multicondutor muito longo, cuja seção é mostrada na figura 4.3.16. O sistema é constituído por 4 pares (a , b , c e d) compondo 4 circuitos e um condutor vítima.

Figura 4.3.16 – Geometria do problema.

As densidades de corrente nos condutores a_1 , a_2 , b_1 , b_2 , c_1 , c_2 , d_1 e d_2 são resultantes de tensão imposta. O condutor vítima é configurado em curto circuito.

São analisadas duas configurações, como mostrado na figura 4.3.17:

Configuração 1: correntes em $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = 1$, $b_2 = -1$, $c_1 = 1$, $c_2 = -1$, $d_1 = 1$,

$d_2 = -1 \left(\frac{A}{m^2} \right)$ (todos os circuitos (pares de condutores) com correntes no mesmo sentido);

Configuração 2 : correntes em $a_1 = 1$, $a_2 = -1$, $b_1 = -1$, $b_2 = 1$, $c_1 = -1$, $c_2 = 1$, $d_1 = 1$,

$d_2 = -1 \left(\frac{A}{m^2} \right)$ (correntes opostas em 2 dos 4 circuitos).

As correntes impostas são do tipo degrau, com atraso de $10 \mu s$.

Figura 4.3.17 – Configurações de correntes analisadas. a) configuração 1; b) configuração 2.

Inicialmente foram obtidos os resultados para o caso de análise transitória de correntes. A figura 4.3.18 apresenta os resultados obtidos para as densidades de corrente no condutor a_1 e no condutor vítima considerando as duas configurações.

Os condutores foram considerados com $\mu_r = 1$ e $\sigma = 580 \text{ S/m}$ e o passo de tempo no processo iterativo foi $\Delta t = 10^{-6} \text{ s}$.

Figura 4.3.18 – Densidade de corrente nos condutores para as duas configurações. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.

Observa-se menor interferência no condutor vítima com a inversão no sentido das correntes (cruzamento de correntes, na prática) em dois pares de condutores, implementada na configuração 2.

Neste caso, $c_{ii} = 1,5428 \cdot 10^{-3}$ e os autovalores da matriz $[A]$ são:

8.97E-03	1.18E-03	1.17E-03	5.77E-04	2.70E-04	3.46E-04	3.52E-04	4.79E-04	4.50E-04
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

estando satisfeita a condição de estabilidade.

Novos resultados são apresentados na figura 4.3.19, agora considerando os condutores com $\mu_r = 1$ e $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 S/m$ (cobre).

Figura 4.3.19 – Densidade de corrente nos condutores com $\sigma = 5,8 \cdot 10^7 S/m$ para as duas configurações. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.

Observa-se também neste caso, um melhor resultado para a situação implementada na configuração 2.

O aumento da condutividade dos condutores provocou o aparecimento de corrente maior no condutor vítima e maior interação entre condutores, de forma que a corrente dos condutores “fonte” também é influenciada, como se vê na figura 4.3.19 a).

Tem-se, neste caso, $c_{ii} = 154,28$ e os autovalores da matriz $[A]$ são:

9.99E-01	9.64E-01	9.92E-01	9.92E-01	9.83E-01	9.72E-01	9.72E-01	9.80E-01	9.78E-01
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

resultando estabilidade no procedimento.

Complementando a análise, para o caso em que os condutores foram considerados com $\mu_r = 100$ e $\sigma = 10^5 S/m$ os resultados são apresentados na figura 4.3.20. Para efeito de comparação também são apresentados nessa figura os resultados considerando $\mu_r = 100$ e $\sigma = 580 S/m$.

Figura 4.3.20 – Densidade de corrente nos condutores com $\mu_r = 100$ para as duas configurações. a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.

Os autovalores da matriz $[A]$ e os valores de c_{ii} são, neste caso, dados por:

para $\sigma = 10^5 S/m$:

8.40E-01	7.78E-01	7.78E-01	7.65E-01	7.64E-01	7.57E-01	7.62E-01	7.59E-01	7.59E-01
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

$c_{ii} = 3,44$,

para $\sigma = 580 S/m$:

2.96E-02	2.00E-02	1.99E-02	1.85E-02	1.84E-02	1.78E-02	1.82E-02	1.80E-02	1.79E-02
----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------	----------

$c_{ii} = 0,019952$.

Observa-se que no caso de $\sigma = 580 S/m$ os resultados aproximam-se do caso referente à figura 4.3.18, pois a permeabilidade maior só existe nos condutores.

Já para $\sigma = 10^5 S/m$ os resultados apresentam comportamento relacionado ao visto na figura 4.3.19, com maior interação dos condutores e tempos mais longos.

Lembrando que o procedimento pode ser utilizado para análise em regime senoidal, a seguir são apresentados os resultados obtidos para as densidades de corrente no condutor a_1 e no condutor vítima considerando 3 configurações para a excitação imposta com frequências de 60Hz (figura 4.3.21) e 1kHz (figura 4.3.22):

Configuração 1: correntes em $a_1 = \text{sen}(\omega \cdot t)$, $a_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t)$, $b_1 = \text{sen}(\omega \cdot t)$,

$b_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t)$, $c_1 = \text{sen}(\omega \cdot t)$, $c_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t)$, $d_1 = \text{sen}(\omega \cdot t)$ e $d_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t) \left(\frac{A}{m^2} \right)$.

Configuração 2: correntes em $a_1 = \text{sen}(\omega \cdot t)$, $a_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t)$, $b_1 = -\text{sen}(\omega \cdot t)$,

$$b_2 = \text{sen}(\omega \cdot t), \quad c_1 = -\text{sen}(\omega \cdot t), \quad c_2 = \text{sen}(\omega \cdot t), \quad d_1 = \text{sen}(\omega \cdot t) \text{ e } d_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t) \left(\frac{A}{m^2} \right).$$

Configuração 3: correntes em $a_1 = \text{sen}(\omega \cdot t)$, $a_2 = -\text{sen}(\omega \cdot t)$, $b_1 = \text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right)$,

$$b_2 = -\text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{4}\right), \quad c_1 = \text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right), \quad c_2 = -\text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{\pi}{2}\right), \quad d_1 = \text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right) \text{ e}$$

$$d_2 = -\text{sen}\left(\omega \cdot t - \frac{3\pi}{4}\right) \left(\frac{A}{m^2} \right).$$

Os condutores foram supostos com $\mu = \mu_o$ e $\sigma = 580 \text{ S/m}$.

Figura 4.3.21 – Densidade de corrente nos condutores com $f = 60 \text{ Hz}$.

a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.

Figura 4.3.22 – Densidade de corrente nos condutores com $f = 1 \text{ kHz}$.

a) condutor a_1 ; b) condutor vítima.

Como esperado, verifica-se que com correntes dos circuitos fontes defasadas, resulta uma menor corrente no condutor vítima, com maior redução no caso de inversão de sentido (configuração 2).

O procedimento computacional desenvolvido pode, assim, ser utilizado para encontrar uma melhor configuração geométrica de condutores, visando reduzir efeitos mútuos.

5. Conclusões

O trabalho apresentou uma proposta de procedimento computacional visando a análise no domínio do tempo de correntes em meios condutores. O procedimento baseia-se no método dos momentos associado a uma aproximação por diferenças finitas da derivada no tempo e permite considerar condutores longos com qualquer seção transversal.

O desenvolvimento do método proposto foi apresentado, tendo sido, também, discutido o problema da estabilidade numérica do mesmo.

A partir da aplicação do método em várias situações, visando sua validação, verificou-se que o procedimento desenvolvido apresenta resultados com boa concordância com valores teóricos e de medições. Em particular, observou-se como a solução direta do problema estudado no domínio do tempo contorna a dificuldade associada ao fenômeno de Gibbs. Como o procedimento é bastante rápido, pode também ser utilizado para obter a solução de regime senoidal permanente, bastando que sejam realizadas iterações em número suficiente para atingir a situação de regime.

A utilização da Transformada Discreta “Wavelet” – DWT no equacionamento matricial desenvolvido mostrou ser eficiente para redução do tamanho das matrizes, resultando em redução na memória computacional requerida e no tempo de utilização da CPU, mantendo-se a precisão desejada.

A análise de vários casos confirmou as condições de estabilidade do procedimento, estabelecidas no desenvolvimento do mesmo.

Como foi visto nos casos de interesse prático apresentados, o trabalho contribui com uma ferramenta computacional eficiente para a análise de correntes em configurações complexas de condutores, podendo ser consideradas situações de meios não homogêneos através da utilização do método dos elementos finitos em CC para a obtenção da matriz que descreve o problema. Assim, projetos ou otimização de sistemas de blindagem e análise da melhor configuração de condutores quanto à interferência podem ser auxiliados pelo procedimento proposto. Vale ressaltar, nesse caso, a contribuição do trabalho referente a análise de estabilidade que permite avaliar previamente as condições para aplicação correta do procedimento.

Considerando uma perspectiva de trabalhos futuros, em continuidade ao que foi apresentado, a utilização do procedimento numérico desenvolvido torna-se bastante promissora em aplicações envolvendo a determinação de correntes em configurações mais complexas. Para isto deve-se analisar a utilização de elementos com formas mais gerais do que a filiforme.

Outras formas de otimização podem ser estudadas além do uso da DWT, incluindo-se um pré-condicionamento das matrizes.

De forma geral, também podem ser desenvolvidos aperfeiçoamentos no aspecto computacional, melhorando a entrada e manipulação de dados, além do desenvolvimento fora do ambiente MatLab.

Referências Bibliográficas

[1] WHEELER, H. A. Formulas for the Skin Effect, **Proceedings of the I.R.E.**, pp. 412 - 424, Sep 1942.

[2] NAMJOSHI, K. V.; Lavers, J. D; Biringier P. P. Eddy-current Power Loss in Toroidal Cores with Rectangular Cross Section, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 34, N.3, pp. 636 - 641, May 1998.

[3] YANHUA, S. L. Y Analytical Method for Eddy Current Loss in Laminated Rotors with Magnetic Bearings, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 38, N.2, pp. 1341 - 1347, Mar 2002.

[4] GODDARD, K. F. et al. Inductance and Resistance Calculations for a Pair of Rectangular Conductors, **IEE Proceedings - Science, Measurement & Technology**, vol. 152, N. 2, pp. 73 - 78, Mar 2005.

[5] MAXWELL, J. C. On the Geometrical Mean Distance of Two Figures in a Plane, **IEEE Transactions of the Royal Society of Edinburg**, pp. 1871 - 1872.

[6] ROSA, E. B. On the Geometrical Mean Distances of Rectangular Areas and the Calculation of Self-Inductance, **Bulletin of the Bureau of Standards**, vol. 3, N.1, pp.1 - 42, Apr 1907.

[7] BIRO, O. et al. Computation of 3-d Current Driven Skin Effect Problems Using a Current Vector, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 29, N.2, pp. 1325 - 1328, Mar 1993.

[8] PREIS, K. et al. Nonlinear Periodic Eddy Currents in Single and Multiconductor Systems, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 32, N.3, pp. 780 - 783, May 1996.

[9] SILVESTER, P.; Chamlian, S. V. Symbolic Generation of Finite Elements for Skin-Effect Integral, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 30, N.5, pp. 3594 - 3597, Sep 1994.

[10] STOLL, R. L. Numerical Method of Calculating Eddy Currents in Nonmagnetic Conductors, **IEE Proceedings**, vol. 114, N.6, pp. 775 - 780, Jun 1967.

- [11] ISHIBASHI, K. Eddy Current Analysis by Integral Equation Method Utilizing Loop Electric and Surface Magnetic Currents as Unknowns, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 34, N.5, pp. 2585 - 2588, Sep 1998.
- [12] PAVÃO, A. C. Estudo de Efeitos Mútuos na Distribuição de Corrente em Condutores, **Dissertação de Mestrado Apresentada ao Departamento de Engenharia Elétrica da EPUSP**, São Paulo, Nov 1997.
- [13] CANOVA, A. et al. Integral Methods for Analysis and Design of Low-Frequency Conductive Shields, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 39, N. 4, pp. 2009 - 2017, July 2003.
- [14] CIRIC, I. R.; Curiac, R. Reduced Single Integral Equation for Quasi-Stationary Fields in Solid Conductor Systems, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 41, N. 5, pp. 1452 - 1455, May 2005.
- [15] GAGNOUD, A. Three-Dimensional Integral Method for Modeling Electromagnetic Inductive Processes, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 40, N. 1, pp. 29 - 36, Jan 2004.
- [16] YIOULTSIS, T. V. Explicit Finite-Difference Time-Domain Method with Perfectly Matched Layers for Transient Low-Frequency Eddy-Current Analysis, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 38, N.5, pp. 3439 - 3447, Sep 2002.
- [17] RENYUAN, T. et al. Analysis of Transient Non-Linear Eddy Current Fields by Space-Time Finite Element Method, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 34, N. 5, pp. 2577 - 2580, Sep 1998.
- [18] ZHOU, D.; Marti, J. R. Skin Effect Calculations in Pipe-Type Cables Using a Linear Current Subconductor Technique, **IEEE Transactions on Power Delivery**, vol. 9, N.1, pp. 598 - 604, Jan 1994.
- [19] GHANDAKLY, A. A.; Curran, R. L.; Collins, G. B. Ampacity Ratings of Bundled Cables for Heavy Current Applications, **IEEE Transactions on Industry Applications**, vol. 30, N.2, pp. 233 - 238, Mar/Apr 1994.
- [20] ALBANESE, R.; Hantila F. I.; Rubinacci, G. A Nonlinear Eddy Current Integral Formulation in Terms of a Two-Component Current Density Vector Potential, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 32, N.3, pp. 784 - 786, May 1996.

- [21] GAIER, C.; Haas, H. A Finite Edge Element Method for Transient Skin Effect in Loaded Multiconductor, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 32, N.3, pp. 820 - 823, May 1996.
- [22] DOPPEL, K; Hochmuth, R.; Elsner, J. Finite Element Method for Calculating Power Frequency 2-dimensional Electromagnetic Field Distributions in Ferromagnetic Materials, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 32, N.3, pp. 792 - 795, May 1996.
- [23] MOK, E. S. M.; Costache, G. I. Skin Effect Considerations on Transient Response of a Transmission Line Excited by an Electromagnetic Pulse, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, vol. 34, N.3, pp. 320 - 329, Aug 1992.
- [24] ORLANDI, A.; Paul, C. R. FDTD Analysis of Lossy Multiconductor Transmission Lines Terminated in Arbitrary Loads, **IEEE Transactions on Electromagnetic Compatibility**, vol. 38, N.3, pp. 388 - 399, Aug 1996.
- [25] SILVESTER, P. **Modern Electromagnetic Fields**, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1968.
- [26] KONRAD, A. Integrodifferential Finite Element Formulation of Two-Dimensional Steady-State Skin Effect Problems, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 18, N.1, pp. 284 - 292, Jan 1982.
- [27] CELOZZI, S. On the Finite Time Domain Solution of the Skin Effect Equations in Multiconductor Lines, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 30, N.5, pp. 3180 - 3183, Sep 1994.
- [28] HAAS, H.; Scmoellebeck A Finite-Element Method for Transient Skin Effect in 2-d Loaded Multiconductor Systems , **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 24, N.1, pp.174 - 177, Jan 1988.
- [29] BALASUBRAMANIAN, S.; Lalgudi, S. N.; Shanker, B. Fast-Integral-Equation Scheme for Computing Magnetostatic Fields in Nonlinear Media, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 38, N.5, pp. 3426 - 3432, Sep 2002.
- [30] BARMADA, S. et al. Analysis of Transmission Lines With Frequency-Dependent Parameters by Wavelet-FFT Method, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 39, N. 3, pp. 1602 - 1605, May 2003.

[31] SARKAR, T. K.; Palma, M. S.; Wicks, M. C. **Wavelet Applications in Engineering Electromagnetics**, Artech House, 2002.

[32] STEINBERG, B. Z.; Leviatan, Y. On the Use of Wavelet Expansions in the Method of Moments, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 41, pp. 610 - 619, May 1993.

[33] BANDLOW, W. C.; Schneider G.; Jacob A. F. Vector-Valued Wavelets with Triangular Support for Method of Moment Applications, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 53, N.10, pp. 3340 - 3346, Oct 2005.

[34] XIANG, Z.; Lu, Y. An Effective Wavelet Matrix Transform Approach for Efficient Solutions of Electromagnetic Integral Equations, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 45, pp. 1205 - 1213, Aug 1997.

[35] WEI, X.C.; Li, E. P.; Liang, C. H. Fast Solution for Large Scale Electromagnetic Scattering Problems Using Wavelet Transform and its Precondition, **Progress in Electromagnetics Research - PIER**, N.38, pp. 253 - 267, 2002.

[36] SCHREFL, T. et al. A Path Method for Finding Energy Barriers and Minimum Energy Paths in Complex Micromagnetic Systems, **Journal of Magnetism and Magnetic Materials**, vol.250, pp. 12 - 19, Sep 2002.

[37] JIN, X.-Qing; Yuan J.-Yun. A Wavelet Method for the First Kind Integral Equations with Kernel $k(x-y)$, **Taiwanese Journal of Mathematics**, vol.2, N.4, pp. 427 - 434, Dec 1998.

[38] DANESFAHANI, R. et al. Applying Shannon Wavelet Basis Functions to the Method of Moments for Evaluating the Radar Cross Section of the Conducting and Resistive Surfaces, **Progress In Electromagnetics Research - PIER B**, vol.8, pp. 257 – 292, 2008.

[39] ERLEBACHER, G.; Hussaini, M. Y.; Jameson, L. M. **Wavelets Theory and Applications**, Oxford University Press, 1996.

[40] RESNIKOFF, H. L.; Wells, R. O. Jr. **Wavelet Analysis - The Scalable Structure of Information**, Springer-Verlag, 1998.

- [41] FORD, J. M.; Tyrtysnikov, E. E. Solving Linear Systems Using Wavelet Compression Combined with Kronecker Product Approximation, **Journal of Numerical Algorithms**, Springer U.S., vol.40, N.2, pp. 125 - 135, Oct 2005.
- [42] DESANTO, J. et al. Application of Wavelet Transforms for Solving Integral Equations that Arise in Rough Surface Scattering, **IEEE Antennas and Propagation Magazine**, vol.43, N.6, pp. 55 - 62, Dec 2001.
- [43] PAN, G.; Wang, G. Full Wave Analysis of Microstrip Floating Line Structures by Wavelets Expansion Method, **IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques**, vol.43, N.1, pp. 131 - 142, Jan 1995.
- [44] TOUPIKOV, M.; Pan, G. W.; Gilbert, B. K. Weighted Wavelet Expansion in the Method of Moments, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 35, N.3, Part 1, pp.1550 - 1553, May 1999.
- [45] PAN, G. Orthogonal Wavelets with Applications in Electromagnetics, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 32, N. 3, pp. 975 - 983, May 1996.
- [46] RONGLIN, Y. Wavelet-Galerkin Method for Computations of Electromagnetic Fields, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 34, N.5, pp. 2493 - 2496, Sep 1998.
- [47] QINKE, N. Application of Bi-orthogonal Wavelets on the Interval [0,1] to 2D EM Scattering, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 34, N.5, pp. 2728 - 2731, Sep 1998.
- [48] PIERRI, R. et al. Non-linear Inverse Resistivity Profiling Using Wavelets, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 34, N.5, pp. 2920 - 2923, Sep 1998.
- [49] MORABITO, F. C.; Formisano, A.; Martone, R. Wavelet Tools for Improving the Accuracy of Neural Network Solution of Electromagnetic Inverse Problems, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 34, N.5, pp. 2968 - 2971, Sep 1998.
- [50] BARMADA, S.; Musolino A.; Rizzo, R. Efficiency Improvement of Integral Formulation via Multiresolution Analysis, **IEEE Transactions on Magnetism**, vol. 39, N. 3, pp. 1417 - 1420, May 2003.
- [51] ANDRIULLI, F. P. et al. Optimal a Priori Clipping Estimation for Wavelet-Based Method of Moment Matrices, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 53, N. 11, pp. 3726 - 3734, Nov 2005.

[52] PAN G. W.; Toupikov, M. V.; Gilbert B. K. On the Use of Coifman Intervallic Wavelets in the Method of Moments for Fast Construction of Wavelet Sparsified Matrices, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 47, N.7, pp. 1189 - 1200, Jul 1999.

[53] LEMISTRE, M.; Decitre J. M. Corrosion and Cracks Detection in Metallic Structures by Magneto Optic Image Processing, **Proceedings of International Conference on Quality Control by Artificial Vision**, editing by Cepadues, Le Creusot (France), pp. 65 – 70, 2001.

[54] WANG, G.; Zhang, J.; Pan, G. Solution of Inverse Problems in Image Processing by Wavelet Expansion, **IEEE Transactions on Image Processing**, vol. 4, N. 5, pp. 579 - 593, May 1995.

[55] PAN, G.; Lin J.; Cheng G. Wavelet Based Deconvolution Algorithm for Time-Domain Near-Field ISAR Imaging, **IEEE Transactions on Antennas and Propagation**, vol. 55, N. 7, pp. 2013 - 2021, July 2007.

[56] YAMAGUCHI, A.; Miya, K. A Novel Signal Processing Technique for Eddy-Current Testing of Steam Generator Tubes, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 34, N.3, pp. 642 - 648, May 1998.

[57] ABED, N. Y.; Mohammed O. A. Modeling and Characterization of Transformers Internal Faults Using Finite Element and Discrete Wavelet Transforms, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 43, N. 4, pp. 1425 - 1428, Apr 2007.

[58] YANG, S. Y. et al. A Combined Wavelet-FE Method for Transient Electromagnetic-Field Computations, **IEEE Transactions on Magnetics**, vol. 42, N. 4, pp. 571 - 574, Apr 2006.

[59] CHEN, M.; SHA W.; WU X. L. Solution of Arbitrarily Dimensional Matrix Equation in Computational Electromagnetics by Fast Lifting Wavelet-Like Transform, **International Journal for Numerical Methods in Engineering**, published online in Wiley InterScience, May 2009.

[60] RICKARD, Y. An Efficient Wavelet-Based Solution of Electromagnetic Field Problems, **Applied Numerical Mathematics**, N.58, pp. 472 – 485, 2007.

[61] CARPENTIERI B. Algebraic Pre-conditioners for the Fast Multipole Method in Electromagnetic Scattering Analysis from Large Structures: Trends and Problems, **Electronic Journal of Boundary Elements**, vol. 7, N.1, pp. 13 – 49, 2009.

[62] TOLOSA, T. A. G. de; JANISZEWSKI J. M. Application of the Wavelet Matrix Transform to the Analysis of Transient Electromagnetic Fields by Moment Method, **The 15th Conference on the Computation of Electromagnetic Fields**, Shenyang, China, June 26 – 30, 2005.

[63] TOLOSA, T. A. G. de; JANISZEWSKI J. M. Time Domain Analysis of Transient Electromagnetic Fields in Conductors, **IEEE AP-S/ URSI International Symposium**, July 3 - 8, Washington DC, USA, 2005.

[64] HARRINGTON, R. F. **Field Computation by Moment Methods**. New York, The Macmillan Company, 1968.

[65] SADIKU, M. N. O. **Numerical Techniques in Electromagnetics**, Boca Raton, Crc Press, 1992.

[66] ISKANDER, M. F. **Electromagnetic Fields and Waves**, Waveland Press, Inc. 2000.

[67] BALANIS, C. A. **Advanced Engineering Electromagnetics**, John Wiley & Sons, 1989.

[68] PIPES, L. A.; HOVANESEAN, S. A. **Matrix Computer Methods in Engineering**, New York, John Wiley, 1969.

[69] NEWLAND, D. E. **An Introduction to Random Vibrations, Spectral and Wavelet Analysis**, Third Edition, Longman, 1996.

[70] DAUBECHIES, I. **Ten Lectures on Wavelets**, SIAM Publ. Philadelphia, 1992.

[71] MEYER, Y. **Ondelettes et Algorithmes Concurrents**, Hermann Éditeurs des Sciences et des Arts, 1992.

[72] WEEKS, M. **Digital Signal Processing Using MATLAB and Wavelets**, Infinity Science Press, 2007.